
Numquam retrorsus!
EX·LIBRIS
FRANZ WEIDERT.
H. Schimke fec. 04.

# GRUNDRISS

der

# Differential- und Integral-Rechnung.

## II. Theil: Integral-Rechnung.

Von

Dr. Ludwig Kiepert,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Sechste vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. Dr. Max Stegemann.

Mit 139 Figuren im Texte.

Hannover 1896.

Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.

## Vorrede zur ersten Auflage.

In ähnlicher Weise wie bei der Differential-Rechnung habe ich bei der Bearbeitung des vorliegenden, die Integral-Rechnung behandelnden Bandes die didaktische Seite besonders berücksichtigt. Ich bin deshalb bei der Anordnung des Stoffes zuweilen von dem gewöhnlichen Lehrgange abgewichen; so z. B. habe ich zu Anfang das Integral als eine reine Umkehrung des Differentials definirt und erst später den Begriff desselben erweitert.

Nach dieser höchst einfachen und leicht fasslichen Definition habe ich unmittelbar die Methoden vorgetragen, die zur Bestimmung des allgemeinen Integrals führen. Die zahlreichen Uebungs-Beispiele, welche hierbei eingeschaltet sind, dürften um so mehr am Platze sein, weil es erfahrungsmässig feststeht, dass zum weiteren Eindringen in diesen subtilen Theil der Mathematik grosse Gewandtheit in den arithmetischen Operationen und klare Uebersicht über dieselben durchaus nothwendig ist, und dass dem Anfänger an einem Beispiele oft Manches klar wird, was ihm in der allgemeinen Theorie nur halb verständlich geworden oder ganz unverständlich geblieben ist.

Es liegt in der Natur des Menschen, dass er nur selten eine allgemeine Theorie auf einmal erfasst; in der Regel steigt er von speciellen Fällen zur allgemeinen Theorie hinauf. Die Geschichte der Wissenschaft giebt hierfür viele Belege; so z. B. waren die Gesetze des freien Falles, des Pendels und der Planeten-Bewegungen schon lange bekannt, als sie in *ein* allgemeines Gesetz, das *Gravitations-Gesetz*, zusammengefasst wurden.

An die Behandlung des allgemeinen Integrals (Seite 1—134) hätte ich die Behandlung des bestimmten Integrals und der dahin gehörigen Untersuchungen (Seite 162—242) unmittelbar anreihen können. Ich habe jedoch das Capitel über die Quadratur der Curven (Seite 135—161) dazwischen eingeschaltet, theils um hieran die Bedeutung der Integrations-Constanten und die Ermittelung des Werthes derselben zu erläutern; besonders aber, um mir hierdurch ein ausgezeichnetes Mittel zur Behandlung der bestimmten Integrale, der Doppel-Integrale u. s. w. zu verschaffen. Diese Anordnung dürfte schon durch die Paragraphen 45—50 allein gerechtfertigt werden. Die Differential-Gleichungen sind nur soweit behandelt, als sie dem wissenschaftlichen Techniker unentbehrlich sind. Ich konnte mich zu dieser Einschränkung um so eher entschliessen, weil ich hoffe, dass den beiden erschienenen Bänden (welche übrigens für sich ein Ganzes bilden sollen), später noch zwei andere Bände über Differential- und Integral-Rechnung folgen werden.

Hannover, d. 16. August 1863.

**M. Stegemann.**

## Vorrede zur vierten Auflage.

Der ungewöhnlich starke Absatz, welchen die Integral-Rechnung von *Stegemann* gefunden hat, ist ein Zeichen dafür, dass die darin angewendete Methode für den Lernenden durchaus angemessen ist.

Daneben kann indessen nicht geläugnet werden, dass die drei bisherigen Auflagen eine grosse Zahl von Ungenauigkeiten und Druckfehlern enthielten, und dass ausserdem manche Untersuchungen und Sätze fehlten, welche auch für den Techniker unentbehrlich sind.

Deshalb erschien eine vollständige Umarbeitung und eine durchgreifende Ergänzung des Buches erforderlich. Dies ist nun in der vorliegenden Auflage geschehen; die zahlreich bemerkten Fehler sind verbessert, viele Beweise strenger gefasst und die wesentlichsten Lücken ausgefüllt worden. Trotzdem hat der Umfang des Buches nur eine Erweiterung von wenigen Bogen erfahren, da es möglich war, viele Entwickelungen kürzer zu fassen.

Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber die Anforderungen massgebend, welche von einem billig denkenden Examinator bei der ersten Staats-Prüfung (Bauführer-Prüfung) in Integral-Rechnung gestellt werden dürften.

Es soll jedoch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass das Buch auch für solche Leser geeignet ist, welche an der *Universität* Mathematik studiren.

Im Ganzen ist die von *Stegemann* gewählte Anordnung und Behandlung des Stoffes so viel wie möglich beibehalten. Besondere Sorgfalt ist darauf verwendet, das Buch durchweg leicht verständlich zu fassen, so dass es bei voller Berücksichtigung der wissenschaftlichen Strenge doch für den *Lernenden*, nicht für den *Gelehrten* berechnet ist.

Hinzugefügt ist auch eine *Tabelle* der hergeleiteten *Formeln*, welche einerseits die Anwendungen sehr erleichtert, andererseits aber ein erprobtes Hülfsmittel bei Repetitionen bietet.

Hannover, d. 11. August 1885.

**L. Kiepert.**

# Vorrede zur fünften Auflage.

Als es im Kreise meiner Fachgenossen bekannt wurde, dass ich eine neue Auflage der Differential- und Integral-Rechnung von *Stegemann* herausgegeben hätte, erhielt ich von hochgeschätzter Seite den dringenden Rath, doch lieber ein eigenes Lehrbuch zu schreiben. Dieser Aufforderung bin ich dadurch nachgekommen, dass ich die kürzlich erschienene 6te Auflage der Differential-Rechnung und ebenso die hier vorliegende 5te Auflage der Integral-Rechnung fast im vollen Umfange *neu abgefasst* habe. Von dem Texte des *Stegemann*'schen Leitfadens habe ich nur wenige Stellen und von den Aufgaben nur eine kleine Zahl beibehalten; dagegen habe ich mich in einem Punkte eng an das ursprüngliche Werk angeschlossen, nämlich in dem Bestreben, die Darstellung und Anordnung so zu wählen, dass der Anfänger dem Lehrgange ohne Schwierigkeit folgen kann. Ich habe deshalb eine möglichst elementare Fassung gewählt und zur Erläuterung zahlreiche Uebungs-Beispiele hinzugefügt. Die Reihenfolge ist so getroffen, dass das Neue an Bekanntes angeknüpft wird, damit der Lernende von leichten Aufgaben allmählich zu schwierigeren aufsteigt.

Aus diesem Grunde ist auch die Eintheilung des Stoffes in der Weise erfolgt, dass in dem ersten Theile von der Integration der gebrochenen rationalen, der irrationalen und der transcendenten Functionen nur die einfacheren Fälle behandelt sind, und dass dann sogleich die Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Quadratur und Rectification der Curven, auf die Kubatur der Rotationskörper und auf die Complanation der Rotationsflächen folgen. Wenn der Lernende möglichst früh erkennt, welche Vortheile die Integral-Rechnung bei den Anwendungen auf die Geometrie bietet, wird er mit grösserem Interesse und reiferem Verständnisse an die ausführliche Behandlung der Partialbruch-Zerlegung und an die mühsameren Methoden, welche bei der Integration irrationaler und transcendenter Functionen zu erfassen sind, herantreten. Dagegen würde er leicht ermüden, wenn er die ganze Theorie *vor* den Anwendungen, welche ausserdem zur Einübung und Befestigung der bis dahin erklärten Formeln und Sätze dienen, durcharbeiten müsste.

Den theoretischen Erörterungen des zweiten Theiles sind gleichfalls zahlreiche Aufgaben aus der Geometrie beigefügt. Leider mussten die interessanten und äusserst lehrreichen Anwendungen auf die Mechanik ausgeschlossen werden, weil sonst der Umfang des Lehrbuches über Gebühr gewachsen wäre.

Obgleich die früheren Auflagen in erster Linie für die Studirenden an den technischen Hochschulen bestimmt waren, hat das Buch doch auch bei den Lehrern und Studirenden der Mathematik an den Universitäten freundliche Aufnahme und Verbreitung gefunden. Diesem höchst erfreulichen Umstande habe ich Rechnung getragen, indem ich die meisten Erklärungen und Beweise noch strenger gefasst und den Inhalt wesentlich bereichert habe. Freilich darf man in dieser Beziehung bei einem Buche, mit dessen Hülfe sich der Anfänger vor allen Dingen tüchtige Fertigkeit im Differentiiren und Integriren aneignen soll, nicht gar zu hohe Anforderungen stellen.

Die Citate aus der Differential-Rechnung beziehen sich auf die 6te Auflage, welche im November 1892 erschienen, zur Zeit aber bereits vergriffen ist. In der alsbald folgenden 7ten Auflage der Differential-Rechnung soll daher dieselbe Anordnung der Abschnitte und Paragraphen beibehalten werden, damit die Citate auch dafür noch zutreffende sind.

Den Herren *Lampe*, *von Mangoldt*, *Franz Meyer*, *Runge* und *Voss*, die mir auch bei der Umarbeitung der Integral-Rechnung werthvolle Rathschläge ertheilt haben, bin ich zu aufrichtigem Danke verpflichtet; ganz besonders Herrn *Voss* für die ausführlichen Mittheilungen über kritische Stellen des Buches. Ausserdem muss ich mit dem besten Danke die freundliche Mitwirkung des Herrn *Petzold* beim Lesen der Correctur hervorheben.

Die Verlagsbuchhandlung ist allen meinen Wünschen auf das Bereitwilligte entgegengekommen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Hannover, den 23. April 1894

**L. Kiepert.**

# Vorrede zur sechsten Auflage.

Die vorliegende sechste Auflage unterscheidet sich weder dem Umfange noch dem Inhalte nach wesentlich von der fünften Auflage, seit deren Erscheinen ein so kurzer Zeitraum verstrichen ist, dass sich inzwischen nur an wenigen Stellen das Bedürfniss, Veränderungen vorzunehmen, ergeben hatte. Doch habe ich auch bei der Integral-Rechnung die Verbesserungsvorschläge, welche mir von befreundeter Seite zugegangen sind, und für die ich hierdurch meinen aufrichtigen Dank ausspreche, nach Möglichkeit berücksichtigt. Der mir mehrfach ertheilte Rath, die Differential-Rechnung und die Integral-Rechnung nicht getrennt zu behandeln, sondern mit der Integral-Rechnung zu beginnen, sobald die ersten Abschnitte der Differential-Rechnung erledigt sind, konnte aus rein äusserlichen Gründen nicht befolgt werden. Es bleibt aber jedem Leser überlassen, die Anordnung des Unterrichtsstoffes in dem angedeuteten Sinne zu ändern. Davon mache ich auch in meinen eigenen Vorträgen an der hiesigen technischen Hochschule, welche im October eines jeden Jahres ihren Anfang nehmen, Gebrauch, um bis zu Weihnachten diejenigen Abschnitte durchzunehmen, welche in den zu Neujahr einsetzenden Vorträgen über Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Ich lasse deshalb den Abschnitten I bis IV, VIII bis XI der Differential-Rechnung unmittelbar den ganzen ersten Theil der Integral-Rechnung folgen und kehre erst dann wieder zur Differential-Rechnung zurück.

Wie schon in der Vorrede zur fünften Auflage hervorgehoben wurde, enthält der Leitfaden in seiner jetzigen Form nur wenig von dem *Stegemann*'schen Werke, so dass ich nunmehr selbst als Verfasser in der neuen Auflage aufgeführt bin.

Beim Lesen der Correctur hat mich Herr *Petzold* wieder in freundlicher Weise unterstützt und dadurch zu herzlichem Danke verpflichtet. Ebenso danke ich der Verlagsbuchhandlung bestens für die liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit der sie bei der Drucklegung allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Hannover, d. 12. September 1896.

**L. Kiepert.**

Wie schon in der Vorrede zur fünften Auflage hervorgehoben wurde, enthält der Leitfaden in seiner jetzigen Form nur wenig von dem *Stegemann*'schen Werke, so dass ich nunmehr selbst als Verfasser in der neuen Auflage aufgeführt bin.

Beim Lesen der Correctur hat mich Herr *[illegible]* wieder in freundlicher Weise unterstützt und dadurch zu herzlichem Danke verpflichtet. Ebenso danke ich der Verlagsbuchhandlung bestens für die liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit der sie bei der Drucklegung allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Hannover, d. 13. September 189[illegible].

L. Kiepert.

# Inhalts-Verzeichniss.

## Erster Theil.

### I. Abschnitt.

### Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.



## Anwendungen der Integral-Rechnung.

### II. Abschnitt.

### Quadratur der Curven.

III. Abschnitt.

**Kubatur der Rotationskörper.**



IV. Abschnitt.

**Rectification der ebenen Curven.**



V. Abschnitt.

**Complanation der Rotationsflächen.**



VI. Abschnitt.

**Rectification der Raumcurven.**



## Zweiter Theil.

VII. Abschnitt.

**Integration der gebrochenen rationalen Functionen.**

VIII. Abschnitt.

## Integration der irrationalen Functionen.



IX. Abschnitt.

## Integration transcendenter Functionen.

Seite

## X. Abschnitt.

## Theorie der bestimmten Integrale.



## XI. Abschnitt.

## Kubatur der Körper und Complanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale.



## XII. Abschnitt.

## Integration der Differentiale der Functionen von mehreren Veränderlichen.

XIII. Abschnitt.

**Theorie der gewöhnlichen Differential-Gleichungen erster Ordnung.**



XIV. Abschnitt.

**Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.**

## XV. Abschnitt.

## Lineare Differential-Gleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung.

# Erster Theil.

## I. Abschnitt.

## Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

### § 1.

### Begriff und geometrische Deutung des Integrals.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 1 und 2)*)

Die Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, *dass eine Function $f(x)$ gesucht wird, deren Ableitung*

$$f'(x) = \varphi(x) \tag{1.}$$

*gegeben ist.*

Da das Differential einer Function $f(x)$ gleich ist ihrer Ableitung $f'(x)$, multiplicirt mit dem Differential von $x$, da also

$$df(x) = f'(x)dx = \varphi(x)dx, \tag{2.}$$

so kann man die gestellte Aufgabe auch so fassen: „*Von einer Function ist das Differential gegeben, man soll die Function selbst aufsuchen.*“

Die Operation, durch welche dies geschieht, nennt man die „*Integration des vorliegenden Differentials*“ und die Wissenschaft, welche von den Integrationen handelt, nennt man „*Integral-Rechnung*“. Das Operationszeichen für das Integral von $f'(x)dx$ ist $\int$ (ein langgezogenes S),**) also

*) Die wichtigsten Formeln sind im Anhange zu einer Tabelle zusammengestellt.

**) Es wird später gezeigt werden, dass man ein (bestimmtes) Integral auch als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen auffassen kann. Dieser Auffassung entspricht das Operationszeichen $\int$ (erster Buchstabe des Wortes Summa), das von *Leibniz* eingeführt ist.

(3.) $$\int f'(x)dx = f(x).$$

**Beispiele.**

1) Ist
$$f(x) = x^3,$$
so wird
$$f'(x) = 3x^2, \quad \text{also} \quad \int 3x^2 dx = x^3.$$

2) Ist
$$f(x) = \sin x,$$
so wird
$$f'(x) = \cos x, \quad \text{also} \quad \int \cos x dx = \sin x.$$

3) Ist
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x,$$
so wird
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{also} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Aus der vorstehenden Erklärung folgt, dass *Integration und Differentiation entgegengesetzte Operationen sind, die sich gegenseitig aufheben.* Setzt man nämlich aus Gleichung (2.) den Werth von $f'(x)dx$ in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

(4.) $$\int df(x) = f(x);$$

und wenn man die Gleichung (3.) differentiirt,

(5.) $$d\int f'(x)dx = df(x) = f'(x)dx.$$

Darin liegt ein Mittel, um das durch die Integration sich ergebende Resultat zu prüfen. Differentiirt man nämlich dieses Resultat, so muss man den Ausdruck erhalten, der unter dem Integralzeichen steht.

Weil $f'(x)dx$ nicht nur das Differential von $f(x)$, sondern auch das Differential von $f(x) + C$ ist, wo $C$ eine beliebige Constante bedeutet, so wird ganz allgemein

(6.) $$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Das Integral von $f'(x)dx$ hat daher unendlich viele Werthe. Dabei nennt man die Grösse $C$ die „*Integrations-Constante*“.

Dies ist aber die *einzige* Willkür, welche bei der Bestimmung des Integrals auftritt, denn es gelten die folgenden Sätze:

**Satz 1.** *Ist die Ableitung einer Function $F(x)$ für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $b$ gleich $0$, so ist der Werth von $F(x)$ in diesem Intervalle constant.*

**Beweis.** Nach dem *Taylor*'schen Lehrsate (D.-R.*), Formel Nr. 49a der Tabelle) ist

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a+\Theta h), \tag{7.}$$

wo $\Theta$ zwischen 0 und 1 liegt. Nach Voraussetzung ist $F'(x)$ für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $b$ gleich 0, folglich wird

$$F'(a+\Theta h) = 0,$$

so lange $a+h=x$ in dem angegebenen Intervalle bleibt. Da nun $h$ eine endliche Grösse ist, so wird

$$F(a+h) = F(a), \quad \text{oder} \quad F(x) = F(a), \tag{8.}$$

d. h. $F(x)$ behält den constanten Werth $F(a)$.

Hieraus folgt

**Satz 2.** *Haben die beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem betrachteten Intervalle dieselbe Ableitung, so unterscheiden sie sich von einander nur durch eine Constante.*

**Beweis.** Setzt man

$$F(x) = g(x) - f(x), \tag{9.}$$

so ist die Ableitung von $F(x)$ in dem Intervalle beständig gleich Null, also ist $F(x)$ nach Satz 1 eine Constante $C$. Dies giebt

$$g(x) = f(x) + C. \tag{10.}$$

**Satz 3.** *Sind die beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ Integrale derselben Function $\varphi(x)$, so können sie sich nur durch eine Constante von einander unterscheiden.*

**Beweis.** Nach der Erklärung des Integrals muss

$$f'(x) = \varphi(x) \quad \text{und auch} \quad g'(x) = \varphi(x) \tag{11.}$$

sein, d. h. es muss

---

*) Die Citate, welche sich auf die siebente Auflage der Differentialrechnung beziehen, sollen durch die vorgesetzten Buchstaben: „D.-R.“ hervorgehoben werden.

$$f'(x) = g'(x) \tag{12.}$$

sein, folglich ist nach dem vorigen Satze

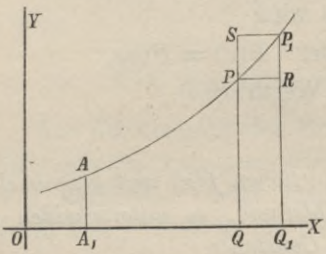
$$g(x) = f(x) + C. \tag{13.}$$

**Satz 4.** *Zu jeder stetigen Function $y = \varphi(x)$, die sich durch eine Curve geometrisch darstellen lässt, giebt es ein Integral, während es nicht zu jeder stetigen Function eine Ableitung giebt.*

**Beweis.** Es möge zunächst die Voraussetzung gemacht werden, dass die Curven, so weit ihr Bogen hier in Betracht kommt, *oberhalb* der $X$-Axe liegen. Ist $AP$ ein solcher Curvenbogen (Fig. 1) mit der Gleichung

$$y = \varphi(x), \tag{14.}$$

Fig. 1.




so ist der Flächeninhalt $F$ der Figur $A_1APQ$ eine Function $f(x)$ von $x$, denn er ändert sich zugleich mit $x$. Es ist also

$$F = A_1APQ = f(x), \tag{15.}$$

und wenn man $QQ_1$ mit $\varDelta x$, $Q_1P_1 = \varphi(x + \varDelta x)$ mit $y_1$ bezeichnet,

$$A_1AP_1Q_1 = f(x + \varDelta x) = F + \varDelta F, \tag{16.}$$

folglich wird

$$QPP_1Q_1 = \varDelta F = \varDelta f(x) = f(x + \varDelta x) - f(x). \tag{17.}$$

Legt man durch $P$ die Gerade $PR$ parallel zur $X$-Axe, so wird unter der Voraussetzung, dass die Curve von $P$ bis $P_1$ *steigt*,

$$QPRQ_1 = y \,.\, \varDelta x < \varDelta f(x) = QPP_1Q_1; \tag{18.}$$

und legt man durch $P_1$ die Gerade $P_1S$ parallel zur $X$-Axe, so wird

$$QPP_1Q_1 = \varDelta f(x) < QSP_1Q_1 = y_1 \,.\, \varDelta x. \tag{19.}$$

Dies giebt

$$y \leqq \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \leqq y_1, \tag{20.}$$

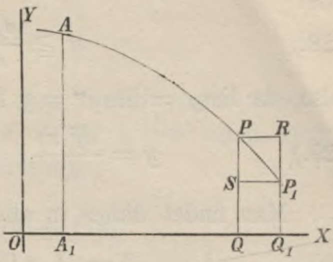
oder, weil $\lim y_1 = y$ für $\lim \varDelta x = 0$ wird,

$$y = \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = f'(x). \tag{21.}$$

Deshalb erhält man

$$F = \int f'(x)dx = \int \varphi(x)dx. \tag{22.}$$

Fig. 2.




Dieselben Schlüsse gelten auch noch, wenn die Curve vom Punkte $P$ bis zum Punkte $P_1$ *fällt* (vergl. Fig. 2), nur erhalten dann die Ungleichheitszeichen die entgegengesetzte Richtung. Es wird nämlich in diesem Falle

$$\begin{aligned} F = A_1APQ &= f(x), \\ A_1AP_1Q_1 &= f(x + \Delta x) = F + \Delta F, \\ QPP_1Q_1 = \Delta F &= \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \\ QPRQ_1 &\geqq \Delta f(x) \geqq QSP_1Q_1, \end{aligned}$$

oder

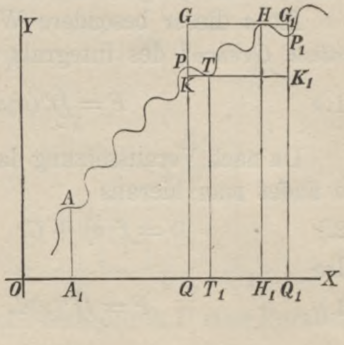
$$y \cdot \Delta x \geqq \Delta f(x) \geqq y_1 \cdot \Delta x, \tag{23.}$$

$$y \geqq \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geqq y_1, \tag{24.}$$

also, da auch hier $\lim y_1 = y$ wird für $\lim \Delta x = 0$,

$$y = \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = f'(x). \tag{25.}$$

Fig 3.




Das Resultat bleibt sogar auch dann noch richtig, wenn die Curve zwischen $P$ und $P_1$ *abwechselnd steigt und fällt* (Fig. 3). Man legt dann durch den höchsten Punkt $H$ mit der Ordinate $y'$ und durch den tiefsten Punkt $T$ mit der Ordinate $y''$ Parallele $GG_1$ und $KK_1$ zu der $X$-Axe. Dadurch erhält man die beiden Rechtecke

(26.) $$QGG_1Q_1 = y' \,.\, \varDelta x \quad \text{und} \quad QKK_1Q_1 = y'' \,.\, \varDelta x,$$

und zwar wird

(27.) $$y' . \varDelta x \geqq QPP_1Q_1 = \varDelta f(x) \geqq y'' . \varDelta x,$$

oder

(28.) $$y' \geqq \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \geqq y'',$$

also, da $\lim y' = \lim y'' = y$ für $\lim \varDelta x = 0$,

(29.) $$y = \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = f'(x).$$

Man findet daher in allen Fällen

(30.) $$F = A_1APQ = \int \varphi(x)dx + C.$$

Bei dieser geometrischen Deutung des Integrals erkennt man auch, weshalb zu dem Integral noch eine willkürliche Integrations-Constante hinzutreten muss. Die Anfangs-Ordinate $A_1A$, durch welche die ebene Figur $F$ auf der einen Seite begrenzt wird, ist noch beliebig. Einer Verschiebung dieser Anfangs-Ordinate entspricht eine Veränderung der Integrations-Constanten $C$.

## § 2.
## Einführung der Integrationsgrenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 3 bis 6.)

Die unbestimmte Integrations-Constante wird gewöhnlich dadurch ermittelt, dass man den Werth von $x$ aufsucht, für welchen das Integral in der vorgelegten Aufgabe verschwindet.

Ist $a$ dieser besondere Werth von $x$, so nennt man $a$ „*die untere Grenze*“ des Integrals und schreibt

(1.) $$F = \int_a f'(x)dx = f(x) + C.$$

Da nach Voraussetzung das Integral für $x = a$ verschwindet, so findet man hieraus

(2.) $$0 = f(a) + C, \quad \text{oder} \quad C = -f(a),$$

also

(3.) $$F = \int_a f'(x)dx = f(x) - f(a).$$

Dieses Verfahren kommt auch bei der geometrischen Deutung des Integrals in Betracht. In den Figuren 1, 2 und 3 z. B. verschwindet der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1APQ$, wenn die Ordinate $QP$ mit der Anfangs-Ordinate $A_1A$ zusammenfällt, wenn also

$$x = a = OA_1.$$

In vielen Fällen braucht man den Werth von $F$ nur für einen bestimmten Werth von $x$, z. B. für $x = b$; man nennt dann $b$ „*die obere Grenze*" und schreibt

$$F = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{4.}$$

$F$ heisst in diesem Falle ein „*bestimmtes Integral*", während man $f(x)$ das „*unbestimmte Integral*" von $f'(x)dx$ nennt.

Um anzudeuten, in welcher Weise das bestimmte Integral aus dem unbestimmten hergeleitet wird, schreibt man

$$F = \int_a^b f'(x)dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a). \tag{5.}$$

**Satz 1.** *Das bestimmte Integral kann betrachtet werden als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen.*

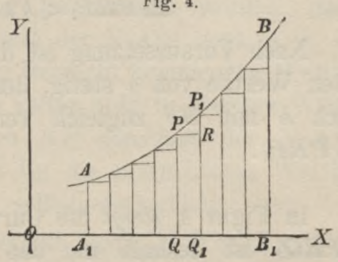
**Beweis.** Der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1ABB_1$ (Fig. 4) war

$$F = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a), \tag{6.}$$

wenn diese Figur oben durch die Curve

$$y = f'(x)$$

Fig. 4.




begrenzt wird. Andererseits kann man aber auch den Flächeninhalt dieser Figur dadurch berechnen, dass man sie durch Parallele zur $Y$-Axe in $n$ Streifen zerlegt, die alle verschwindend klein werden, wenn $n$ in's Unbegrenzte wächst. Ist nun $QPP_1Q_1$ einer der Streifen, und zieht man durch $P$ eine Parallele

$PR$ zur $X$-Axe, so wird dieser Streifen zerlegt in ein Rechteck $QPRQ_1$ mit dem Flächeninhalte $y \,.\, \varDelta x$ und in das Dreieck $PRP_1$, wobei mit $\varDelta x$ die Breite des Streifens bezeichnet ist. Die Summe der Rechtecke $QPRQ_1$ ist daher

$$(7.)\quad F' = \sum_{x=a}^{x=b-\varDelta x} y \,.\, \varDelta x = \sum_{x=a}^{x=b-\varDelta x} \varphi(x) \,.\, \varDelta x = \sum_{x=a}^{x=b-\varDelta x} f'(x) \,.\, \varDelta x.$$

Wächst $n$ in's Unbegrenzte, so wird $\varDelta x$ verschwindend klein, und man erhält

$$(8.)\qquad \lim F' = \lim \sum f'(x) \,.\, \varDelta x = F,$$

weil die Dreiecke $PRP_1$ verschwindend kleine Grössen *höherer* Ordnung werden, die neben den verschwindend kleinen Grössen *erster* Ordnung vernachlässigt werden dürfen.

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $PRP_1$ (Fig. 4) ist kleiner als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie $PR = \varDelta x$ und der Höhe $RP_1 = h_x$, also

$$\triangle\, PRP_1 < h_x \,.\, \varDelta x\,.$$

Dieselbe Ungleichung gilt für die sämmtlichen Dreiecke, welche in Figur 4 von den Streifen abgeschnitten sind. Bezeichnet man also die Summe dieser Dreiecke mit $\sum PRP_1$ und die grösste unter den Höhen $h_x$ mit $h$, so wird

$$\sum PRP_1 < \sum h_x \,.\, \varDelta x < h \sum \varDelta x\,,$$

oder, da $\sum \varDelta x$, d. h. die Summe aller Grundlinien gleich $A_1B_1$ ist,

$$\sum PRP_1 < h \,.\, A_1B_1 = h(b - a).$$

Nach Voraussetzung ist die Function $f'(x)$ für die betrachteten Werthe von $x$ stetig, deshalb werden die Grössen $h_x$, also auch $h$ mit $\varDelta x$ zugleich verschwindend klein, folglich auch $\sum PRP_1$.

In Figur 4 *steigt* die Curve von $A$ bis $B$. Das Rechteck $QPRQ_1$ ist deshalb um das Dreieck $PRP_1$ *kleiner* als der Streifen $QPP_1Q_1$. Dasselbe gilt für alle anderen Streifen, in welche die Figur zerlegt ist. *Fällt* dagegen die Curve von $A$ bis $B$ (vergl. Fig. 5), so sind die Rechtecke um die kleinen

Fig. 5.

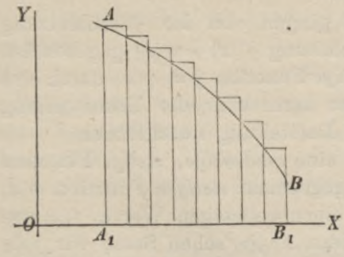
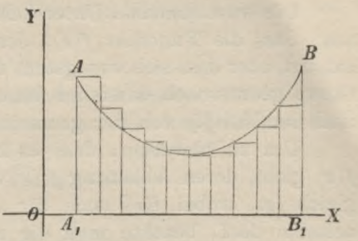



Fig. 6.




Dreiecke *grösser* als die Streifen der Figur. Es können auch (wie in Figur 6) die Rechtecke theilweise *grösser* und theilweise *kleiner* als die Streifen sein. Die in Gleichung (8.) ausgesprochene Schlussfolgerung bleibt aber auch dann noch richtig, weil die Summe der vernachlässigten oder hinzugefügten Dreiecke zugleich mit $\varDelta x$ verschwindend klein wird.

Statt $\lim \sum$ schreibt man $S$ und fügt die Grenzen der Summation, nämlich $a$ und $\lim(b - \varDelta x) = b$ unten und oben dem Summenzeichen $S$, aus welchem das Zeichen $\int$ entstanden ist, hinzu. Dadurch erhält die Gleichung (8.) die Form

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \tag{8 a.}$$

welche mit Gleichung (6.) übereinstimmt.

Bisher war die Voraussetzung festgehalten worden, dass der betrachtete Curvenbogen *oberhalb* der $X$-Axe liegt, d. h. es sollte $y = \varphi(x) \geqq 0$ sein für alle in Betracht kommenden Werthe von $x$. Die vorstehenden Schlüsse gelten aber in gleicher Weise auch dann noch, wenn der Bogen $AB$ *unterhalb* der $X$-Axe liegt, wenn also $y = \varphi(x) \leqq 0$ ist für die betrachteten Werthe von $x$. In diesem Falle hat aber selbstverständlich

$$\varphi(x) . \varDelta x = f'(x) . \varDelta x \text{ und deshalb auch } \sum f'(x) . \varDelta x$$

einen *negativen* Werth.

Es ist auch nicht nothwendig, dass $b > a$ ist; setzt man nämlich für $\Delta x$ *negative* Werthe ein, so muss $b < a$ werden.

**Bemerkung.***)

Die vorstehenden Untersuchungen gingen von der Voraussetzung aus, dass die Function $f(x)$, deren Ableitung $f'(x) = \varphi(x)$ gegeben ist, existirt, oder dass sich wenigstens die *stetige* Function $y = \varphi(x)$ durch eine Curve geometrisch darstellen lässt. Man kann aber die Untersuchung auch *unabhängig* von der geometrischen Darstellung durchführen.

Um zu beweisen, dass es immer eine *eindeutige*, *stetige* Function $f(x)$ giebt, deren Ableitung $f'(x)$ einer gegebenen *stetigen* Function $\varphi(x)$ gleich ist, wobei $f(x)$ noch für $x = a$ einen beliebigen Werth $f(a)$ annehmen darf, beachte man die nach dem *Taylor*'schen Satze für jede stetige Function geltende Gleichung (D.-R., Formel Nr. 49a der Tabelle)

$$f(x+h) - f(x) = h \,.\, f'(x + \Theta h). \tag{9.}$$

Da nun in dem vorliegenden Falle $f'(x) = \varphi(x)$ sein soll, so würde die Gleichung (9.), nachdem man die Existenz der Function $f(x)$ nachgewiesen hat, übergehen in

$$f(x+h) - f(x) = h \,.\, \varphi(x + \Theta h). \tag{9a.}$$

Theilt man das Intervall von $a$ bis $b$ in $n$ gleiche oder ungleiche Theile und nennt die Theilwerthe

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n-1},\ b,$$

so würde man aus Gleichung (9a.) das folgende System von Gleichungen erhalten

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1) - f(a) = (x_1 - a)\varphi[a + \Theta_1(x_1 - a)], \\ f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\varphi[x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)], \\ f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)\varphi[x_2 + \Theta_3(x_3 - x_2)], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(b) - f(x_{n-1}) = (b - x_{n-1})\varphi[x_{n-1} + \Theta_n(b - x_{n-1})]. \end{array}\right. \tag{10.}$$

Dem entsprechend möge jetzt die Grösse $f(b)$ durch die Gleichung

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = {} & (x_1 - a)\varphi[a + \Theta_1(x_1 - a)] + (x_2 - x_1)\varphi[x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)] \\ & + (x_3 - x_2)\varphi[x_2 + \Theta_3(x_3 - x_2)] + \cdots \\ & + (b - x_{n-1})\varphi[x_{n-1} + \Theta_n(b - x_{n-1})], \end{aligned} \tag{11.}$$

oder

$$f(b) - f(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})] \tag{11a.}$$

erklärt werden, wobei $x_0 = a$, $x_n = b$ sein möge, und wobei die Grössen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ sämmtlich zwischen 0 und $+1$ liegen, im Uebrigen aber noch unbestimmt sind.

---

*) Diese Bemerkung darf, wenn ihr Inhalt für den Anfänger schwer verständlich sein sollte, übergangen werden.

Bezeichnet man jetzt mit $G_\alpha$ den *grössten* und mit $K_\alpha$ den *kleinsten* Werth, welchen $\varphi(x)$ erhält, wenn $x$ das Intervall von $x_{\alpha-1}$ bis $x_\alpha$ durchläuft, so ist

$$K_\alpha \leqq \varphi[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})] \leqq G_\alpha. \tag{12.}$$

Da nun aber $\varphi(x)$ nach Voraussetzung eine stetige Function ist, so wird

$$G_\alpha - K_\alpha = \delta_\alpha \tag{13.}$$

beliebig klein, wenn man nur $n$ hinreichend gross macht. Wählt man unter den Differenzen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ die grösste aus und bezeichnet sie mit $\delta$, so wird

$$(x_\alpha - x_{\alpha-1})(G_\alpha - K_\alpha) \leqq (x_\alpha - x_{\alpha-1})\delta,$$

oder

$$(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha \leqq (x_\alpha - x_{\alpha-1})(K_\alpha + \delta) \tag{14.}$$

und

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha + (b-a)\delta. \tag{15.}$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf Gleichung (11a.) und Ungleichung (12.)

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha \leqq f(b) - f(a) \leqq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha, \tag{16.}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha$ mit $S$ bezeichnet und die Ungleichung (15.) beachtet,

$$S \leqq f(b) - f(a) \leqq S + (b-a)\delta. \tag{17.}$$

Da aber $b - a$ eine endliche Grösse ist, und $\delta$ *beliebig klein* wird für *hinreichend grosse* Werthe von $n$, so nähert sich $f(b) - f(a)$ dem Grenzwerthe

$$\lim S = \lim \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha.$$

Diese Summe hat auch, weil $\varphi(x)$ in dem Intervall von $a$ bis $b$ stetig ist, einen *endlichen* Werth. Bezeichnet man nämlich mit $G$ die *grösste* unter den Grössen $G_1, G_2, \ldots G_n$ und mit $K$ die *kleinste* unter den Grössen $K_1, K_2, \ldots K_n$, so wird

$$\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha > \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K = (b-a)K,$$
$$\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha < \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G = (b-a)G.$$

Die Ungleichung (16.) wird also noch verstärkt, indem man schreibt

$$(b-a)K < f(b) - f(a) < (b-a)G. \tag{18.}$$

Da $(b-a)K$ und $(b-a)G$ endliche Grössen sind, so ist auch $f(b) - f(a)$ eine endliche Grösse.

In gleicher Weise wie die Ungleichungen (16.) und (17.) kann man auch die Ungleichungen

$$\sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})K_\alpha \leqq \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi(x_{\alpha-1}) \leqq \sum(x_\alpha - x_{\alpha-1})G_\alpha \tag{19.}$$

und

(20.) $$S \leqq \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi(x_{\alpha-1}) \leqq S + (b-a)\delta$$

ableiten und daraus schliessen, dass

(21.) $$f(b) - f(a) = \lim \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi(x_{\alpha-1})$$

ist. Vertauscht man noch der Kürze wegen $x_\alpha$ mit $x$ und die verschwindend kleine Differenz $x_\alpha - x_{\alpha-1}$ mit $dx$, bezeichnet man ferner die Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen nicht mehr mit $\lim \Sigma$ sondern mit $\int$, so geht die Gleichung (21.) über in

(22.) $$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

wobei die beiden Grenzen $a$ und $b$ bei dem Summenzeichen $\int$ angeben, dass $x$ alle Werthe von $a$ bis $b$ durchlaufen soll.

Bisher war $b$ unveränderlich gedacht, man darf aber für $b$ auch die Veränderliche $x$ setzen und erhält dadurch

(23.) $$f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(x)dx.$$

Um nun noch zu zeigen, dass die Ableitung von $f x)$ mit $\varphi(x)$ übereinstimmt, beachte man Gleichung (11a.), nach welcher man

(24.) $$f(x_n) - f(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})]$$

erhält. Ebenso ist

(25.) $$f(x_{n-1}) - f(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} (x_\alpha - x_{\alpha-1})\varphi[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})],$$

folglich wird

(26.) $$f(x_n) - f(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})\varphi[x_{n-1} + \Theta_n'(x_n - x_{n-1})],$$

oder

(27.) $$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \varphi[x_{n-1} + \Theta_n(x_n - x_{n-1})]$$

und für $\lim x_n = \lim x_{n-1} = x$

(28.) $$f'(x) = \varphi(x).$$

Aus den Gleichungen

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \quad \text{und} \quad \int_b^a f'(x)dx = f(a) - f(b)$$

folgt

(29.) $$\int_a^b f'(x)dx = -\int_b^a f'(x)dx,$$

oder in Worten:

**Satz 2.** *Man darf die obere und die untere Grenze eines bestimmten Integrals mit einander vertauschen, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen des Integrals umkehrt.*

Hierbei ist in dem einen Integral die *untere* Grenze grösser als die *obere* und in Folge dessen $dx$ negativ.

Aus den Gleichungen

$$\int_a^c f'(x)dx = f(c) - f(a) \quad \text{und} \quad \int_c^b f'(x)dx = f(b) - f(c)$$

folgt

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^b f'(x)dx, \tag{30.}$$

oder in Worten:

**Satz 3.** *Man kann ein bestimmtes Integral in zwei andere zerlegen, indem man zwischen den Grenzen a und b eine beliebige Grösse c einschaltet und das erste Integral zwischen den Grenzen a und c, das zweite Integral zwischen den Grenzen c und b berechnet.*

Am anschaulichsten wird der Sinn des Satzes durch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals. Ist nämlich

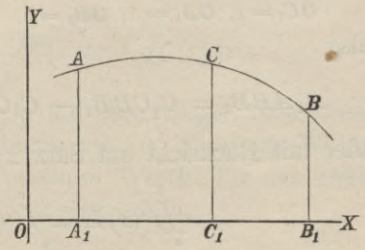
$$y = \varphi(x) = f'(x)$$

die Gleichung einer Curve, so wird

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b f'(x)dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1ABB_1$. Liegt nun $c$ zwischen $a$ und $b$, so wird die Figur durch die Gerade $C_1C$, welche im Abstande $c$ parallel zur $Y$-Axe gezogen ist (vergl. Fig. 7), in zwei Theile zerlegt, nämlich in

Fig. 7.

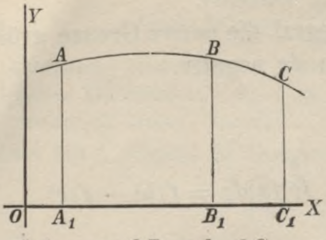



$OA_1 = a, \; OC_1 = c, \; OB_1 = b.$

$$A_1ACC_1 = \int_a^c f'(x)dx \quad \text{und} \quad C_1CBB_1 = \int_c^b f'(x)dx.$$

Der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn $c$ *nicht* zwischen $a$ und $b$ liegt. Es sei zunächst (vergl. Fig. 8) $a < b < c$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

Fig. 8




$OA_1 = a,\ OB_1 = b,\ OC_1 = c.$

$$A_1ACC_1 = \int_a^c f'(x)dx,$$

$$B_1BCC_1 = \int_b^c f'(x)dx,$$

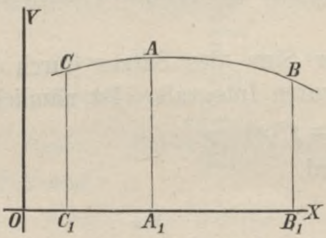
also

$$A_1ABB_1 = A_1ACC_1 - B_1BCC_1 = \int_a^c f'(x)dx - \int_b^c f'(x)dx,$$

oder nach Satz 2

$$A_1ABB_1 = \int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^b f'(x)dx.$$

Fig. 9.




$OC_1 = c,\ OA_1 = a,\ OB_1 = b.$

Ist endlich (vergl. Fig. 9) $c < a < b$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

$$C_1CBB_1 = \int_c^b f'(x)dx,$$

$$C_1CAA_1 = \int_c^a f'(x)dx,$$

also

$$A_1ABB_1 = C_1CBB_1 - C_1CAA_1 = \int_c^b f'(x)dx - \int_c^a f'(x)dx,$$

oder mit Rücksicht auf Satz 2

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^b f'(x)dx.$$

Der Satz lässt sich noch in der Weise verallgemeinern, dass man zwischen den Grenzen $a$ und $b$ nicht *eine*, sondern *beliebig viele* Grenzen einschaltet. Dadurch erhält man z. B.

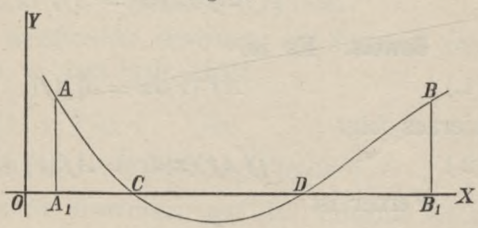
$$(31.)\quad \int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^d f'(x)dx + \int_d^e f'(x)dx + \int_e^b f'(x)dx,$$

wobei $c$, $d$ und $e$ ganz beliebige Zahlen sind.

Voraussetzung ist dabei, dass die einzelnen bestimmten Integrale, welche in Gleichung (31.) auftreten, eindeutig und endlich sind.

Bei der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals war bisher vorausgesetzt worden, dass der Bogen $AB$ der Curve, welche der Gleichung $y = f'(x)$ entspricht, entweder seiner ganzen Länge nach *oberhalb*, oder seiner ganzen Länge nach *unterhalb* der X-Axe liegt. Jetzt kann man aber die geometrische Deutung auch auf den Fall übertragen, wo der Bogen $AB$ theilweise *über*, theilweise *unter* der $X$-Axe liegt. Schneidet der Bogen die $X$-Axe z. B. in den Punkten $C$ und $D$ (Fig. 10), und setzt man

Fig. 10.




$$OA_1 = a,\ OC = c,\ OD = d,\ OB_1 = b,$$

so wird

$$(32.)\quad \int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^d f'(x)dx + \int_d^b f'(x)dx,$$

wobei für die einzelnen Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung die frühere Voraussetzung gilt, so dass man für das erste und dritte Integral einen *positiven* Werth, für das zweite Integral dagegen einen *negativen* Werth erhält.

So lange in dem unbestimmten Integral

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

die Integrations-Constante einen *beliebigen* Werth hat, nennt man das Integral ein „*allgemeines Integral*". Wenn dagegen der Werth der Integrations-Constanten bestimmt ist, so heisst das Integral ein „*particuläres Integral*".

## § 3.

## Einige Hülfssätze für die Ausführung der Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 7 und 8.)

**Satz 1.** *Ist die Differential-Function unter dem Integralzeichen mit einem constanten Factor multiplicirt, so darf man diesen constanten Factor vor das Integralzeichen setzen*, d. h. es ist

$$\int Af'(x)dx = A\int f'(x)dx.$$

**Beweis.** Es ist

(1.) $$Af'(x)dx = d[Af(x) + C],$$

hieraus folgt

(2.) $$\int Af'(x)dx = Af(x) + C.$$

Ferner ist

(3.) $$\int f'(x)dx = f(x) + C',$$

also

(4.) $$A\int f'(x)dx = Af(x) + A\,.\,C'.$$

Da nun die Werthe der Integrations-Constanten ganz beliebig sind, so darf man $A\,.\,C' = C$ setzen und erhält demnach aus den Gleichungen (2.) und (4.)

(5.) $$\int Af'(x)dx = A\int f'(x)dx.$$

**Satz 2.** *Das Integral einer Summe von Differential-Functionen ist gleich der Summe der Integrale dieser einzelnen Differential-Functionen;* es ist also

$$\int[f'(x)dx + g'(x)dx] = \int f'(x)dx + \int g'(x)dx.$$

**Beweis.** Weil

(6.) $$f'(x)dx + g'(x)dx = d[f(x) + g(x) + C],$$

so ist

(7.) $$\int[f'(x)dx + g'(x)dx] = f(x) + g(x) + C.$$

Ferner ist

(8.) $$\int f'(x)dx = f(x) + c,$$

(9.) $$\int g'(x)dx = g(x) + c'.$$

Durch Addition der Gleichungen (8.) und (9.) erhält man

(10.) $$\int f'(x)dx + \int g'(x)dx = f(x) + g(x) + c + c'.$$

Die Integrations-Constanten $C$, $c$, $c'$ haben auch hier *ganz beliebige Werthe*, so dass man $c + c' = C$ setzen darf. Man erhält demnach aus den Gleichungen (7.) und (10.)

(11.) $$\int[f'(x)dx + g'(x)dx] = \int[f'(x) + g'(x)]dx$$
$$= \int f'(x)dx + \int g'(x)dx.$$

Dieser Satz lässt sich unmittelbar erweitern auf Summen von beliebig vielen Gliedern, so dass man erhält

(12.) $$\int[f'(x) + g'(x) + h'(x) + \cdots]dx$$
$$= \int f'(x)dx + \int g'(x)dx + \int h'(x)dx + \cdots;$$

sodann lässt er sich auch übertragen auf das Integral einer Differenz, so dass man erhält

(13.) $$\int[f'(x) - g'(x)]dx = \int f'(x)dx - \int g'(x)dx.$$

## § 4.
## Unmittelbare Integration einiger Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 9—18.)

Aus der Erklärung des Integrals, nämlich aus der Formel

(1.) $$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

ergiebt sich ganz von selbst, wie man eine grosse Anzahl von Differential-Functionen integriren kann. Denn, nimmt man die Function $f(x)$ beliebig an und bildet $f'(x)$, so erhält man durch Einsetzen in Gleichung (1.) sofort $\int f'(x)dx$.

Indem man für $f(x)$ besonders oft vorkommende Functionen einsetzt, findet man ohne Weiteres die folgenden Formeln:

(2.) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Hierbei darf $m$ jeden beliebigen *positiven* oder *negativen*, *ganzzahligen* oder *gebrochenen* Werth haben. Eine *scheinbare* Ausnahme bildet nur der Werth $m = -1$, von welchem nachher noch ausführlich die Rede sein wird.

Besonders hervorgehoben sei noch der Fall $m = 0$, nämlich

(2a.) $$\int dx = x + C,$$

ein Resultat, das sich auch aus Formel Nr. 1 der Tabelle ergiebt.

Mit Hülfe von Gleichung (2.) ist jetzt die Integration *jeder ganzen rationalen* Function ausführbar, denn nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen wird

$$\int(ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)dx$$
$$= a\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + a_2\int x^{n-2}dx + \cdots + a_{n-1}\int xdx + a_n\int dx$$
$$= a\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + a_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{x^2}{2} + a_nx + C.$$

(3.) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a} + C.$$

(3a.) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

(4.) $$\int\frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C.$$

Diese Formel bildet die *scheinbare* Ausnahme von Gleichung (2.), aus der man für $m = -1$

(5.) $$\int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C,$$

oder

(6.) $$\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C = \infty + C$$

erhält. Das Integral selbst braucht deshalb aber nicht unendlich gross zu werden, weil man die Integrations-Constante gleich $-\infty$ setzen kann. Dadurch bringt man das Integral auf die unbestimmte Form $\infty - \infty$, zu deren Ermittelung man in Gleichung (2.)

$$(7.)\qquad C = -\frac{1}{m+1} + C'$$

setzen kann. Dadurch erhält man

$$(8.)\qquad \int x^m dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + C'.$$

Für $\lim m = -1$ wird

$$(9.)\qquad \lim \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{0}{0},$$

und wenn man Zähler und Nenner einzeln nach $m$ differentiirt (vergl. D.-R. § 58),

$$(10.)\qquad \lim \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \lim \frac{x^{m+1}\,\mathrm{l}x}{1} = \mathrm{l}x,$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichnng (4.)

$$(11.)\qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C'.$$

$$(12.)\qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

$$(13.)\qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

$$(14.)\qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$$

$$(15.)\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$$

$$(16.)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

$$(17.)\qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\, x + C = -\mathrm{arc\,ctg}\, x + C'.$$

Es erscheint auffallend, dass man für $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zwei Werthe, nämlich

$$\arcsin x + C \quad \text{und} \quad -\arccos x + C'$$

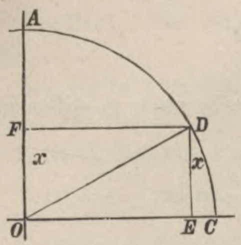
findet. Die Richtigkeit beider Resultate kann man zunächst durch Differentiation prüfen, wobei sich

$$d(\operatorname{arc}\sin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$d(-\operatorname{arc}\cos x + C') = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fig. 11.




ergiebt. Nach Satz 3 in § 1 können sich daher die Functionen $\operatorname{arc}\sin x$ und $-\operatorname{arc}\cos x$ nur durch eine Constante von einander unterscheiden. In der That, ist in einem Kreise mit dem Halbmesser 1

(18.) $$OF = ED = x$$

(vergl. Fig. 11), so wird

(19.) $$CD = \operatorname{arc}\sin x, \quad DA = \operatorname{arc}\cos x,$$

also

(20.) $$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = CD + DA = \frac{\pi}{2},$$

oder

(21.) $$\operatorname{arc}\sin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cos x.$$

Dies kann man auch unabhängig von der Figur zeigen, indem man

(22.) $$\operatorname{arc}\sin x = t, \quad \text{also} \quad x = \sin t$$

setzt; dann wird

(23.) $$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - t,$$

folglich ist

(24.) $$t = \operatorname{arc}\sin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cos x.$$

Ebenso findet man

(25.) $$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x,$$

wodurch man erkennt, dass Gleichung (17.) richtig ist.

## § 5.
## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll $x^3dx$ integriren.

**Auflösung.** Setzt man in Formel Nr. 9 der Tabelle $m = 3$, so folgt ohne Weiteres

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

**Aufgabe 2.** Man soll $7x^3 dx$ integriren.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 7 und 9 der Tabelle erhält man

$$\int 7x^3 dx = 7\int x^3 dx = 7\,\frac{x^4}{4} + C.$$

**Aufgabe 3.** Man soll $\sqrt[3]{x}\,dx$ integriren.

**Auflösung.** Es ist

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}};$$

hieraus ergiebt sich, dass

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C,$$

oder

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

**Aufgabe 4.** Man soll folgende Differential-Functionen integriren.

$$\frac{dx}{x^3},\quad \sqrt[3]{x^5}\,dx,\quad \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}},\quad 4\sqrt[3]{x}\,dx,\quad \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

**Auflösung.** Es wird

I. $$\int\frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

II. $$\int\sqrt[3]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = \tfrac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C.$$

III. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int x^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + C = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C,$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

IV. $\int 4\sqrt[3]{x}\, dx = 4\int \sqrt[3]{x}\, dx = 4\int x^{\frac{1}{3}} dx = 4\,\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C,$

$$\int 4\sqrt[3]{x}\, dx = 4\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x^4} + C.$$

V. $\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx = 4\int x^{-\frac{1}{3}} dx = 4\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = 4\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C,$

$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx = 4 \,.\, \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C = 6\sqrt[3]{x^2} + C.$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Function

$$\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right) dx$$

integriren.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 8 der Tabelle ergiebt sich

$$\begin{aligned}\int\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx \\ &= \int x^4\, dx + \int 7\sqrt[2]{x}\, dx - \int \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \int \frac{5}{x^6} dx \\ &= \int x^4 dx + 7\int x^{\frac{1}{2}} dx - 11\int x^{-\frac{5}{3}} dx + 5\int x^{-6} dx.\end{aligned}$$

Wenn man die Integrationen, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutet sind, nach Formel Nr. 9 der Tabelle ausführt und dabei die vier auftretenden Integrations-Constanten in eine einzige Constante zusammenfasst, so findet man

$$\int\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 7\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 11\,\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + 5\,\frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + 7\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 11\,\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 5\,\frac{x^{-5}}{-5} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.$$

**Aufgabe 6.** Man soll den Ausdruck

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$$

berechnen.

**Auflösung.** Man erhält zunächst

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x^3\,dx - 7\int x^{\frac{9}{5}}\,dx + \frac{4}{7}\int x^4\,dx - \frac{4}{3}\int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 7\,\frac{x^{\frac{9}{5}+1}}{\frac{9}{5}+1} + \frac{4}{7}\,\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{4}{3}\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C.$$

Dies giebt

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx = \frac{x^4}{16} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^{14}} + \frac{4}{35}x^5 + \frac{4}{3x} + C.$$

**Aufgabe 7.** Man soll den Ausdruck

$$\int(a\sin x + b\cos x + c\,e^x)dx$$

berechnen.

**Auflösung.** Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 13 und 14 der Tabelle erhält man

$$\int(a\sin x + b\cos x + c\,e^x)dx = -a\cos x + b\sin x + c\,e^x + C.$$

**Aufgabe 8.** Man soll den Ausdruck

$$\int\left(m\,a^x dx + n\,\frac{dx}{x} + p\,\frac{dx}{\cos^2 x}\right)$$

berechnen.

**Auflösung.** Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 12 und 15 der Tabelle erhält man

$$\int\left(ma^x dx + n\frac{dx}{x} + p\,\frac{dx}{\cos^2 x}\right) = m\frac{a^x}{\mathrm{l}a} + n\mathrm{l}x + p\,\mathrm{tg}x + C.$$

**Aufgabe 9.** Man soll den Ausdruck

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

berechnen.

**Auflösung.** Durch Anwendung der Formeln Nr. 16, 17 und 18 der Tabelle erhält man

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{arc\,tg}x - a\,\mathrm{ctg}x + \mathrm{arc\,sin}x + C.$$

**Bemerkung.**

Das vorstehende Resultat kann man auch auf die Form bringen

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\,\mathrm{arc\,ctg}x - a\,\mathrm{ctg}x - \mathrm{arc\,cos}x + C'.$$

Von der Richtigkeit dieser beiden Resultate kann man sich leicht durch Differentiation überzeugen, wobei man in beiden Fällen den Ausdruck unter dem Integralzeichen erhält.

## § 6.

## Integration durch Substitution.

Im Allgemeinen wird bei Anwendung der Formel

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \tag{1.}$$

nicht $f(x)$, sondern $f'(x) = \varphi(x)$ gegeben sein. Dann wird man $f(x)$ meistens nicht unmittelbar bestimmen können. Dagegen kommt man häufig dadurch zum Ziele, dass man statt der Veränderlichen $x$ eine andere Grösse $t$ als *Integrations-Veränderliche* einführt, indem man

$$x = \psi(t), \quad \text{also} \quad dx = \psi'(t)dt \tag{2.}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$\int\varphi(x)dx = \int\varphi\,[\psi(t)]\,.\,\psi'(t)dt = \int F(t)dt. \tag{3.}$$

In vielen Fällen wird man die Function $\psi(t)$ passend so wählen können, dass

(4.) $$F(t) = \Phi'(t)$$

und deshalb

(5.) $$\int\varphi(x)dx = \int\Phi'(t)dt = \Phi(t) + C$$

wird. Drückt man nun in diesem Resultate die Grösse $t$, der Gleichung (2.) entsprechend, durch $x$ aus, so ist die Integration vollzogen.

Dieses Verfahren, welches man „*Integration durch Substitution*" nennt, wird am besten durch Beispiele erläutert.

## § 7.

## Beispiele für die Substitutions-Methode.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 19 bis 52.)

**Aufgabe 1.** $$\int\frac{dx}{x+a} = ?$$

**Auflösung.** Setzt man

(1.) $$x + a = t, \quad \text{also} \quad x = t - a, \quad dx = dt,$$

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

(2.) $$\int\frac{dx}{x+a} = \int\frac{dt}{t} = \mathrm{l}t = \mathrm{l}(x+a).\text{*)}$$

In ähnlicher Weise findet man

(3.) $$\int\frac{dx}{x-a} = \mathrm{l}(x-a).$$

**Aufgabe 2.** $$\int\cos(x+a)dx = ?$$

**Auflösung.** Durch dieselbe Substitution wie bei Aufgabe 1 findet man nach Formel Nr. 13 der Tabelle

(4.) $$\int\cos(x+a)dx = \sin(x+a).$$

---

*) Die Integrations-Constante möge hier und bei den folgenden Aufgaben der Kürze wegen fortgelassen werden.

**Aufgabe 3.** $\int \sin(a + bx)dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(5.) $$a + bx = t, \quad \text{also} \quad x = \frac{t - a}{b}, \quad dx = \frac{dt}{b},$$

so erhält man nach Formel Nr. 14 der Tabelle

(6.) $$\int \sin(a + bx)dx = \frac{1}{b}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{b}\cos t = -\frac{1}{b}\cos(a + bx).$$

**Aufgabe 4.** $\int \frac{dx}{\cos^2(4 - 3x)} = ?$

**Auflösung.** Indem man

(7.) $$4 - 3x = t, \quad \text{also} \quad -3\,dx = dt$$

setzt, erhält man nach Formel Nr. 15 der Tabelle

(8.) $$\int \frac{dx}{\cos^2(4 - 3x)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg} t = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(4 - 3x).$$

**Aufgabe 5.** $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = ?$

**Auflösung.** Indem man

(9.) $$x = 2t, \quad \text{also} \quad dx = 2\,dt$$

setzt, erhält man

(10.) $$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

In ähnlicher Weise gelangt man zu den folgenden Resultaten:

(11.) $$\int e^{a+bx}dx = \frac{1}{b}\int e^{a+bx}\,.\,d(a + bx) = \frac{1}{b}e^{a+bx}.$$

(12.) $$\int e^{\frac{x}{a}}dx = a\int e^{\frac{x}{a}}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = ae^{\frac{x}{a}}.$$

(13.) $$\int e^{-\frac{x}{a}}dx = -a\int e^{-\frac{x}{a}}d\left(-\frac{x}{a}\right) = -ae^{-\frac{x}{a}}.$$

(14.) $$\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = n\int \frac{d\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = -n\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{n}\right).$$

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{1+(a+bx)^2}=\frac{1}{b}\int\frac{d(a+bx)}{1+(a+bx)^2}=\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(a+bx).$$

$$(16.)\quad \int(a+bx)^3dx=\frac{1}{b}\int(a+bx)^3d(a+bx)=\frac{(a+bx)^4}{4b}.$$

$$(17.)\quad \int\sqrt[5]{(a+bx)^3}\,dx=\frac{1}{b}\int(a+bx)^{\frac{3}{5}}d(a+bx)=\frac{5\sqrt[5]{(a+bx)^8}}{8b}.$$

$$(18.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt[7]{(a+bx)^4}}=\frac{1}{b}\int(a+bx)^{-\frac{4}{7}}d(a+bx)=\frac{7\sqrt[7]{(a+bx)^3}}{3b}.$$

**Aufgabe 6.** $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(19.)\quad x=at,\quad \text{also}\quad dx=a\,dt,\quad t=\frac{x}{a},$$

so erhält man nach Formel Nr. 18 der Tabelle

$$(20.)\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\,dt}{a^2+a^2t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

**Aufgabe 7.** $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$

**Auflösung.** Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(21.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

**Aufgabe 8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=?$

**Auflösung.** Hier wird man setzen

$$(22.)\quad t=x+\sqrt{a^2+x^2},\quad \text{also}\quad dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx,$$

oder

$$dt=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\frac{t\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

daraus folgt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{l}t=\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}). \tag{23.}$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ erhält man aus Gleichung (23.)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}). \tag{24.}$$

**Aufgabe 9.** $\int\frac{xdx}{a^2+x^2}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$a^2+x^2=t,\quad \text{also}\quad 2xdx=dt, \tag{25.}$$

so findet man

$$\int\frac{xdx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\mathrm{l}t=\frac{1}{2}\mathrm{l}(a^2+x^2). \tag{26.}$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ erhält man aus Gleichung (26.)

$$\int\frac{xdx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2-a^2). \tag{27.}$$

**Aufgabe 10.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$\sqrt{a^2-x^2}=t,\quad \text{also}\quad a^2-x^2=t^2, \tag{28.}$$

so wird

$$-xdx=tdt,$$

und

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{-tdt}{t}=-\int dt=-t=-\sqrt{a^2-x^2}. \tag{29.}$$

**Aufgabe 11.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$\sqrt{a^2+x^2}=t,\quad \text{also}\quad a^2+x^2=t^2, \tag{30.}$$

so wird

$$xdx = tdt$$

und

(31.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{tdt}{t} = \int dt = t = +\sqrt{a^2+x^2}.$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ findet man aus Gleichung (31.)

(32.) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\sqrt{x^2-a^2}.$$

Die in den Gleichungen (29.), (31.) und (32.) enthaltenen Resultate hätte man auch leicht durch *unmittelbare* Integration finden können, wenn man von den Formeln Nr. 30 bis 32 der Tabelle für die Differential-Rechnung ausgegangen wäre.

**Aufgabe 12.** $$\int\frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = ?$$

**Auflösung.** Setzt man

(33.) $$t = \mathrm{l}x, \quad \text{also} \quad dt = \frac{dx}{x},$$

so erhält man

(34.) $$\int\frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = \int\frac{dt}{t} = \mathrm{l}t = \mathrm{l}(\mathrm{l}x).$$

**Aufgabe 13.** $$\int\frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+11} = ?$$

**Auflösung.** Setzt man

(35.) $$4x^2-7x+11 = t, \quad \text{also} \quad (8x-7)dx = dt,$$

so erhält man

(36.) $$\int\frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+11} = \int\frac{dt}{t} = \mathrm{l}t = \mathrm{l}(4x^2-7x+11).$$

**Aufgabe 14.** $$\int\frac{(12x^3+15x^2-4x+8)dx}{3x^4+5x^3-2x^2+8x-7} = ?$$

**Auflösung.** Setzt man

(37.) $$3x^4+5x^3-2x^2+8x-7 = t,$$

also

$$(12x^3+15x^2-4x+8)dx = dt,$$

so erhält man

(38.) $$\int\frac{(12x^3+15x^2-4x+8)dx}{3x^4+5x^3-2x^2+8x-7}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{l}t$$
$$=\mathrm{l}(3x^4+5x^3-2x^2+8x-7).$$

Die in den letzten Aufgaben angewendete Methode bestand darin, dass man das Integral auf die Form $\int\frac{dt}{t}$ brachte. Dieses Verfahren ist immer anwendbar, wenn unter dem Integralzeichen ein Bruch steht, dessen Zähler das Differential des Nenners ist. Setzt man nämlich

(39.) $$f(x)=t,\quad \text{also}\quad f'(x)dx=dt,$$

so erhält man

(40.) $$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{l}t=\mathrm{l}[f(x)]$$

und damit den

**Satz.** *Steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners.*

Bei den Anwendungen dieses Satzes wird man allerdings häufig mit der Function unter dem Integralzeichen erst eine Umformung vornehmen müssen, um sie auf die beschriebene Form zu bringen, wie man aus den hier folgenden Aufgaben ersehen kann.

**Aufgabe 15.** $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = ?$

**Auflösung.** Bekanntlich ist $\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$, so dass man erhält

(41.) $$\int \mathrm{tg}\,x\,dx=-\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x}.$$

Jetzt steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, folglich ist das Integral der natürliche Logarithmus des Nenners, und man erhält

(42.) $$\int \mathrm{tg}\,x\,dx=-\mathrm{l}(\cos x).$$

In ähnlicher Weise findet man

(43.) $$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\mathrm{l}(\sin x).$$

**Aufgabe 16.** $\int\frac{dx}{\sin x\cos x} = ?$

**Auflösung.** Dividirt man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\cos^2 x$, so erhält man

$$(44.)\qquad \int\frac{dx}{\sin x\cos x} = \int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int\frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x},$$

folglich wird

$$(45.)\qquad \int\frac{dx}{\sin x\cos x} = \mathrm{l}(\operatorname{tg} x).$$

**Aufgabe 17.** $\int\frac{dx}{\sin x} = ?$

**Auflösung.** Diese Aufgabe lässt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen, indem man

$$(46.)\qquad x = 2t$$

setzt und die bekannte Formel

$$\sin x = \sin(2t) = 2\sin t\cos t$$

beachtet. Dadurch erhält man

$$(47.)\ \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{\sin t\cos t} = \mathrm{l}(\operatorname{tg} t) = \mathrm{l}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\mathrm{l}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

**Aufgabe 18.** $\int\frac{dx}{\cos x} = ?$

**Auflösung.** Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man

$$(48.)\qquad x = \frac{\pi}{2} - t,\quad \text{also}\quad \cos x = \sin t,\quad dx = -dt$$

setzt; dann erhält man

$$\int\frac{dx}{\cos x} = -\int\frac{dt}{\sin t} = -\mathrm{l}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right],$$

oder

$$(49.)\ \int\frac{dx}{\cos x} = -\mathrm{l}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = +\mathrm{l}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

**Aufgabe 19.** $\int \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx = ?$

**Auflösung.** Multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen mit $e^x$, so wird der Zähler, nämlich $(e^x + 1)dx$, das Differential des Nenners $e^x + x$, folglich wird das Integral gleich dem Logarithmus des Nenners; d. h. es wird

$$\int \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx = \int \frac{(e^x + 1)dx}{e^x + x} = \mathrm{l}(e^x + x). \tag{50.}$$

**Aufgabe 20.** $\int (\sin^4 x - 3\sin^3 x + 4\sin^2 x + 11\sin x)\cos x\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$\sin x = t, \quad \text{also} \quad \cos x\, dx = dt, \tag{51.}$$

so erhält man

(52.) $\int (\sin^4 x - 3\sin^3 x + 4\sin^2 x + 11\sin x)\cos x\, dx =$

$$\int (t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 11t)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{11}{2}t^2 =$$

$$\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{4}\sin^4 x + \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{11}{2}\sin^2 x.$$

Man erkennt sofort, dass diese Substitution immer eine Vereinfachung herbeiführt, wenn unter dem Integralzeichen eine Function von $\sin x$ steht, welche mit $\cos x\, dx$ multiplicirt ist denn man erhält dann

$$\int f(\sin x)\cos x\, dx = \int f(t)\, dt. \tag{53.}$$

**Aufgabe 21.** $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} = ?$

**Auflösung.** Indem man die soeben angegebene Substitution benutzt, findet man

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\sin^2 x}. \tag{54.}$$

Steht unter dem Integralzeichen eine Function von $\cos x$, multiplicirt mit $\sin x dx$, so wird man durch die Substitution

$$\cos x = t, \quad \text{also} \quad -\sin x\, dx = dt \tag{55.}$$

eine Vereinfachung herbeiführen; denn es wird

$$\int f(\cos x) \,.\, \sin x\, dx = -\int f(t) dt. \tag{56.}$$

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres die Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

**Aufgabe 22.** $\int(\cos^3 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 4)\sin x\, dx =$

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{3}{2}\cos^2 x + 4\cos x.$$

**Aufgabe 23.** $\displaystyle\int\frac{\sin x\, dx}{\cos^4 x} = +\frac{1}{3\cos^3 x}\cdot$

Häufig wird man die Function unter dem Integralzeichen erst umformen müssen, ehe man die in den Gleichungen (53.) und (56.) angedeuteten Substitutionen anwenden kann. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 24.** $\int\cos^3 x\, dx = ?$

**Auflösung.** Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \tag{57.}$$

erhält man

$$\int\cos^3 x\, dx = \int(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx = \int(1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) \tag{58.}$$

$$= \int(1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3}t^3 = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

**Aufgabe 25.** $\int\sin^5 x\, dx = ?$

**Auflösung.** Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \tag{59.}$$

erhält man

$$\int\sin^5 x dx = \int(1 - \cos^2 x)^2 \,.\, \sin x dx = -\int(1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) \tag{60.}$$

$$= -\int(1 - 2t^2 + t^4) dt = -\left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x.$$

**Aufgabe 26.** $\int \cos^{2n+1} x\, dx = ?$

**Auflösung.** In gleicher Weise wie bei Aufgabe 24 findet man hier

$$(61.)\quad \int \cos^{2n+1} x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^n . \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^n . d(\sin x).$$

Durch den Factor $d(\sin x)$ soll angedeutet werden, dass $\sin x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(62.)\quad \int \cos^{2n+1} x\, dx = \int (1 - t^2)^n dt$$

$$= \int \Big[ 1 - \binom{n}{1} t^2 + \binom{n}{2} t^4 - \binom{n}{3} t^6 + - \cdots \pm \binom{n}{1} t^{2n-2} \mp t^{2n} \Big] dt$$

$$= t - \binom{n}{1} \frac{t^3}{3} + \binom{n}{2} \frac{t^5}{5} - \binom{n}{3} \frac{t^7}{7} + - \cdots \pm \binom{n}{1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Aufgabe 27.** $\int \sin^{2n+1} x\, dx\,?$

**Auflösung.** In gleicher Weise wie bei Aufgabe 25 findet man hier

$$(63.)\quad \int \sin^{2n+1} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^n . \sin x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n . d(\cos x).$$

Auch hier soll durch den Factor $d(\cos x)$ angedeutet werden, dass $\cos x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(64.)\qquad \int \sin^{2n+1} x\, dx = -\int (1 - t^2)^n dt,$$

also, abgesehen vom Vorzeichen und von der Bedeutung der Veränderlichen $t$, dasselbe Integral wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

**Aufgabe 28.** $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = ?$

**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 26 findet man hier

$$(65.)\quad \int \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n . d(\sin x),$$

wo durch den Factor $d(\sin x)$ angedeutet werden soll, dass $\sin x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{(1-t^2)dt}{t^4}=\int(t^{-4}-t^{-2})dt \tag{66.}$$
$$=-\frac{t^{-3}}{3}+\frac{t^{-1}}{1}=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}\,.$$

**Aufgabe 29.** $\int\cos^m x\sin^{2n+1}x\,dx=?$

**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 27 findet man hier

$$\int\cos^m x\sin^{2n+1}x\,dx=-\int\cos^m x(1-\cos^2 x)^n d(\cos x), \tag{67.}$$

wo durch den Factor $d(\cos x)$ angedeutet werden soll, dass $\cos x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$\int\cos^2 x\sin^3 x\,dx=-\int t^2(1-t^2)dt=-\int(t^2-t^4)dt \tag{68.}$$
$$=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}\cdot$$

**Aufgabe 30.** $\int(\mathrm{tg}^3 x-8\,\mathrm{tg}^2 x+5\,\mathrm{tg}\,x-7)\frac{dx}{\cos^2 x}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$\mathrm{tg}\,x=t,\quad\text{also}\quad\frac{dx}{\cos^2 x}=dt, \tag{69.}$$

so erhält man

$$\int(\mathrm{tg}^3 x-8\,\mathrm{tg}^2 x+5\,\mathrm{tg}\,x-7)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(t^3-8t^2+5t-7)dt \tag{70.}$$
$$=\frac{t^4}{4}-\frac{8t^3}{3}+\frac{5t^2}{2}-7t=\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-\frac{8\,\mathrm{tg}^3 x}{3}+\frac{5\,\mathrm{tg}^2 x}{2}-7\,\mathrm{tg}\,x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Function von $\mathrm{tg}\,x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\cos^2 x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

$$\int f(\mathrm{tg}\,x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int f(\mathrm{tg}\,x)\,.\,d(\mathrm{tg}\,x), \tag{71.}$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{tg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{tg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

**Aufgabe 31.** $\int(\operatorname{ctg}^4 x - 3\operatorname{ctg}^2 x + 5)\frac{dx}{\sin^2 x} = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$\operatorname{ctg} x = t, \quad \text{also} \quad -\frac{dx}{\sin^2 x} = dt, \tag{72.}$$

so erhält man

$$\int(\operatorname{ctg}^4 x - 3\operatorname{ctg}^2 x + 5)\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int(t^4 - 3t^2 + 5)dt \tag{73.}$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 5t = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \operatorname{ctg}^3 x - 5\operatorname{ctg} x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{ctg} x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\sin^2 x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

$$\int f(\operatorname{ctg} x)\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int f(\operatorname{ctg} x) \,.\, d(\operatorname{ctg} x), \tag{74.}$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{ctg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Häufig wird man erst eine Umformung vornehmen müssen, ehe man auf die in den Aufgaben 30 und 31 vorausgesetzte Form der Differential-Functionen geführt wird. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 32.** $\int(\operatorname{tg}^3 x - 7\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 9)dx = ?$

**Auflösung.** Damit die Function unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{tg} x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\cos^2 x}$, wird, muss man sie durch $\cos^2 x$ dividiren und deshalb auch mit

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \tag{75.}$$

multipliciren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (69.)

$$(76.)\quad \int(\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 9)dx$$
$$= \int\frac{\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 9}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}$$
$$= \int\frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1}dt.$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$(77.)\quad t^3 - 7t^2 + 2t + 9 = (t^2 + 1)(t - 7) + t + 16,$$

folglich wird mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 9, 24 und 18 der Tabelle

$$(78.)\quad \int\frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1}dt = \int(t - 7)dt + \int\frac{tdt}{t^2 + 1} + 16\int\frac{dt}{1 + t^2}$$
$$= \frac{t^2}{2} - 7t + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(t^2 + 1) + 16\,\mathrm{arctg}\,t,$$

oder, wenn man beachtet, dass

$$(79.)\quad t = \mathrm{tg}\,x,\quad 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2x},\quad x = \mathrm{arctg}\,t$$

ist,

$$(80.)\quad \int(\mathrm{tg}^3x - 7\,\mathrm{tg}^2x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 9)dx = \frac{\mathrm{tg}^2x}{2} - 7\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{l}(\cos x) + 16\,x.$$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(81.)\quad \int f(\mathrm{tg}\,x)\,.\,dx = \int\frac{f(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot d(\mathrm{tg}\,x).$$

**Aufgabe 33.** $\int\mathrm{tg}^n x\,.\,dx = ?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (81.) erhält man, indem man $\mathrm{tg}\,x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit $t$ bezeichnet

$$(82.)\quad \int\mathrm{tg}^n x\,dx = \int\frac{\mathrm{tg}^n x}{\mathrm{tg}^2x + 1}\cdot d(\mathrm{tg}\,x) = \int\frac{t^n dt}{t^2 + 1}.$$

Bei der weiteren Behandlung des Integrals muss man zwei Fälle unterscheiden, jenachdem *n gerade* oder *ungerade* ist.

**I. Fall.** $n = 2m$.

$$(83.)\quad \int \operatorname{tg}^{2m}x\,.\,dx = \int \frac{t^{2m}}{t^2+1}\,dt = \int\left(t^{2m-2} - t^{2m-4} + - \cdots \pm 1 \mp \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2m-1}x}{2m-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2m-3}x}{2m-3} + - \cdots \pm \operatorname{tg}x \mp x.$$

Es ist z. B.

$$(84.)\quad \int \operatorname{tg}^6 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg}x - x.$$

**II. Fall.** $n = 2m + 1$

$$(85.)\quad \int \operatorname{tg}^{2m+1}x\,.\,dx = \int \frac{t^{2m+1}}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int\left(t^{2m-1} - t^{2m-3} + - \cdots \pm t \mp \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2m}x}{2m} - \frac{\operatorname{tg}^{2m-2}x}{2m-2} + - \cdots \pm \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+\operatorname{tg}^2 x),$$

wobei man noch

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+\operatorname{tg}^2 x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\mathrm{l}(\cos x)$$

setzen darf. Es ist z. B.

$$(86.)\quad \int \operatorname{tg}^7 x\,.\,dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \mathrm{l}(\cos x).$$

**Aufgabe 34.** $\int(\operatorname{ctg}^4 x + 3\operatorname{ctg}^2 x - 7)dx = ?$

**Auflösung.** Damit die Function unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{ctg}x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\sin^2 x}$, wird, muss man sie durch $\sin^2 x$ dividiren und deshalb auch mit

$$(87.)\quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$$

multipliciren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (72.)

$$(88.)\quad \int(\mathrm{ctg}^4x + 3\,\mathrm{ctg}^2x - 7)dx = -\int\frac{t^4 + 3t^2 - 7}{t^2 + 1}\,dt$$

$$= -\int\Big(t^2 + 2 - \frac{9}{1 + t^2}\Big)dt = -\Big(\frac{t^3}{3} + 2t + 9\,\mathrm{arc\,ctg}\,t\Big),$$

oder, da $\mathrm{ctg}\,x = t$ und $\mathrm{arc\,ctg}\,t = x$ ist,

$$(89.)\quad \int(\mathrm{ctg}^4x + 3\,\mathrm{ctg}^2x - 7)dx = -\frac{\mathrm{ctg}^3x}{3} - 2\,\mathrm{ctg}\,x - 9x.$$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(90.)\quad \int f(\mathrm{ctg}\,x)\,.\,dx = -\int\frac{f(\mathrm{ctg}\,x)}{\mathrm{ctg}^2x + 1}\cdot d(\mathrm{ctg}\,x).$$

**Aufgabe 35.** $\int\mathrm{ctg}^nx\,.\,dx = ?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (90.) erhält man, indem man $\mathrm{ctg}\,x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit $t$ bezeichnet,

$$(91.)\quad \int\mathrm{ctg}^nx\,.\,dx = -\int\frac{t^ndt}{t^2 + 1}\cdot$$

Die weitere Behandlung dieser Aufgabe ergiebt sich sodann aus Aufgabe 33.

**Aufgabe 36.** $\int\frac{dx}{\cos^4x} = ?$

**Auflösung.** Bekanntlich ist

$$(92.)\quad \frac{1}{\cos^2x} = 1 + \mathrm{tg}^2x \quad\text{und}\quad \frac{dx}{\cos^2x} = d(\mathrm{tg}\,x),$$

folglich wird

$$(93.)\quad \int\frac{dx}{\cos^4x} = \int\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{dx}{\cos^2x} = \int(1 + \mathrm{tg}^2x)d(\mathrm{tg}\,x)$$

$$= \mathrm{tg}\,x + \frac{\mathrm{tg}^3x}{3}\cdot$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(94.)\quad \int\frac{dx}{\cos^{2m}x} = \int(1 + \mathrm{tg}^2x)^{m-1}d(\mathrm{tg}\,x),$$

wo durch den Factor $d(\mathrm{tg}\,x)$ angedeutet werden soll, dass $\mathrm{tg}\,x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

**Aufgabe 37.** $$\int\frac{dx}{\sin^6 x} = ?$$

**Auflösung.** Bekanntlich ist

$$(95.)\qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x),$$

folglich wird

$$(96.)\qquad \int\frac{dx}{\sin^6 x} = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x)$$
$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{2\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}.$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(97.)\qquad \int\frac{dx}{\sin^{2m} x} = -\int(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{ctg} x),$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{ctg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

In ähnlicher Weise bildet man die folgenden Formeln, welche zur Vereinfachung der Integrale von transcendenten Functionen dienen.

$$(98.)\qquad \int f(a^x) \,.\, a^x dx = \frac{1}{\mathrm{l}\, a}\int f(a^x) \,.\, d(a^x),$$

$$(99.)\qquad \int f(e^x) \,.\, e^x dx = \int f(e^x) \,.\, d(e^x),$$

$$(100.)\qquad \int f(\mathrm{l} x) \cdot \frac{dx}{x} = \int f(\mathrm{l} x) \,.\, d(\mathrm{l} x),$$

$$(101.)\qquad \int f(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int f(\arcsin x) \,.\, d(\arcsin x),$$

$$(102.)\qquad \int f(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int f(\arccos x) \,.\, d(\arccos x),$$

$$(103.)\qquad \int f(\operatorname{arc\,tg} x) \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = \int f(\operatorname{arc\,tg} x) \,.\, d(\operatorname{arc\,tg} x),$$

$$(104.)\qquad \int f(\operatorname{arc\,ctg} x) \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = -\int f(\operatorname{arc\,ctg} x) \,.\, d(\operatorname{arc\,ctg} x).$$

Hierbei soll durch die Factoren $d(a^x)$, $d(e^x)$, $d(\mathrm{l}x)$, $d(\arcsin x)$, $d(\arccos x)$, $d(\mathrm{arc\,tg}\,x)$, $d(\mathrm{arc\,ctg}\,x)$ angedeutet werden, dass bezw. die Grössen $a^x$, $e^x$, $\mathrm{l}x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arc\,tg}\,x$, $\mathrm{arc\,ctg}\,x$ zu Integrations-Veränderlichen gewählt werden.

Zur Einübung dieser Formeln mögen die folgenden Aufgaben gelöst werden.

**Aufgabe 38.** $\int(a^{2x} + 3a^x - 7)dx = ?$

**Auflösung.** Bezeichnet man $a^x$ mit $t$, so wird

(105.) $$\int(a^{2x} + 3a^x - 7)dx = \int(a^x + 3 - 7a^{-x})\,.\,a^x dx$$
$$= \frac{1}{\mathrm{l}a}\int(t + 3 - 7t^{-1})dt = \frac{1}{\mathrm{l}a}\left(\frac{t^2}{2} + 3t - 7\,\mathrm{l}t\right)$$
$$= \frac{1}{\mathrm{l}a}\left(\frac{1}{2}a^{2x} + 3a^x - 7x\,\mathrm{l}a\right).$$

**Aufgabe 39.** $\int\frac{\cos(\mathrm{l}x)\,.\,dx}{x} = ?$

**Auflösung.** Bezeichnet man $\mathrm{l}x$ mit $t$, so wird

(106.) $$\int\frac{\cos(\mathrm{l}x)\,.\,dx}{x} = \int\cos t\,dt = \sin t = \sin(\mathrm{l}x).$$

**Aufgabe 40.** $\int\frac{\arcsin x\,.\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = ?$

**Auflösung.** Bezeichnet man $\arcsin x$ mit $t$, so wird

(107.) $$\int\frac{\arcsin x\,.\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\arcsin^2 x.$$

**Aufgabe 41.** $\int\frac{dx}{(1 + x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x} = ?$

**Auflösung.** Bezeichnet man $\mathrm{arc\,tg}\,x$ mit $t$, so wird

(108.) $$\int\frac{dx}{(1 + x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x} = \int\frac{dt}{t} = \mathrm{l}t = \mathrm{l}(\mathrm{arc\,tg}\,x).$$

Steht unter dem Integralzeichen irgend eine rationale Function von $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$, so kann man diese transcendenten Functionen durch die Substitution

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \tag{109.}$$

fortschaffen, so dass man unter dem Integralzeichen nur noch eine *rationale* Function von $t$ behält. Es folgt nämlich aus Gleichung (109.)

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner dieser Brüche durch $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ dividirt,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{110.}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{111.}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}. \tag{112.}$$

Aus Gleichung (109.) findet man sodann noch

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \tag{113.}$$

und erhält dadurch die Formel

$$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)dx = \tag{114.}$$
$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man z. B. die folgende Aufgabe lösen:

**Aufgabe 42.** $\displaystyle\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (114.) wird

$$\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}:\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$
$$=\int\frac{(1+t^2+2t)dt}{t(1+t^2+1-t^2)}=\frac{1}{2}\int(t+2+t^{-1})dt,$$

also

$$\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\mathrm{l}t\right) \tag{115.}$$
$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Bei der Integration durch Substitution ist die neue Integrations-Veränderliche $t$ im Allgemeinen so zu wählen, dass jedem Werthe von $x$ innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Werth von $t$ zugeordnet ist, und umgekehrt darf jedem Werthe von $t$ innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Werth von $x$ entsprechen. Wenn diese Regel nicht beachtet wird, so können leicht Fehler entstehen. In einem späteren Abschnitte soll dieser Fall noch besonders untersucht werden.

## § 8.
## Integration durch Zerlegung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 53 bis 60.)

In vielen Fällen kann man die Differential-Function $F(x)dx$ unter dem Integralzeichen in zwei oder mehrere Summanden zerlegen, die dann einzeln sehr leicht integrirt werden können. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 1.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=?$

**Auflösung.** Bringt man die beiden Brüche $\dfrac{1}{x-a}$ und $-\dfrac{1}{x+a}$ auf gleichen Nenner, so erhält man

$$(1.)\qquad \frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2},$$

deshalb wird

$$(2.)\qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}[\mathrm{l}(x-a)-\mathrm{l}(x+a)]=\frac{1}{2a}\mathrm{l}\left(\frac{x-a}{x+a}\right).$$

**Aufgabe 2.** $\int\frac{dx}{x^2+10x+16}=?$

**Auflösung.** Diese Aufgabe kann man auf die vorhergehende zurückführen. Ergänzt man nämlich die beiden ersten Glieder des Nenners zu einem vollständigen Quadrate, indem man 25 addirt und dann wieder subtrahirt, so erhält man

$$(3.)\qquad x^2+10x+16=(x^2+10x+25)+(16-25)=(x+5)^2-9.$$

Setzt man jetzt noch

$$(4.)\qquad x+5=t,\quad \text{also}\quad dx=dt,$$

so wird

$$(5.)\qquad \int\frac{dx}{x^2+10x+16}=\int\frac{dx}{(x+5)^2-9}=\int\frac{dt}{t^2-3^2},$$

oder nach Gleichung (2.), wenn man $x$ mit $t$ und $a$ mit 2 vertauscht,

$$(6.)\qquad \int\frac{dx}{x^2+10x+16}=\frac{1}{6}\mathrm{l}\left(\frac{t-3}{t+3}\right)=\frac{1}{6}\mathrm{l}\left(\frac{x+2}{x+8}\right).$$

**Aufgabe 3.** $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=?$

**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe wird man hier den Nenner auf die Form

$$(7.)\qquad x^2+6x+13=(x^2+6x+9)+(13-9)=(x+3)^2+4$$

bringen und

$$(8.)\qquad x+3=t,\quad \text{also}\quad dx=dt$$

setzen; dadurch erhält man

$$(9.)\qquad \int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+2^2}.$$

Wollte man jetzt die Integration nach der in Aufgabe 1 gefundenen Formel ausführen, so müsste man

$$a^2 = -4, \quad \text{also} \quad a = 2\sqrt{-1} = 2i$$

setzen, so dass man für das Resultat eine *complexe Form* erhalten würde. Dies kann man vermeiden, indem man Formel Nr. 20 der Tabelle, nämlich

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{a}\right)$$

für $a = 2$ anwendet. Dadurch findet man

$$(10.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+3}{2}\right).$$

**Aufgabe 4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = ?$

**Auflösung.** Wie man schon aus den beiden vorhergehenden Aufgaben erkennt, muss man bei dieser Aufgabe drei Fälle unterscheiden, jenachdem $b^2 - c$ positiv, negativ oder gleich Null ist.

**I. Fall.** $b^2 - c > 0.$

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

$$(11.) \quad b^2 - c = +a^2, \quad \text{also} \quad \sqrt{b^2 - c} = +a,$$

so wird $a$ eine reelle Grösse, und man erhält

$$(12.) \quad \begin{aligned} x^2 + 2bx + c &= (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2) \\ &= (x + b)^2 - a^2. \end{aligned}$$

Dies giebt, wenn man $x + b$ mit $t$ bezeichnet, nach Aufgabe 1

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \mathrm{l}\left(\frac{t-a}{t+a}\right),$$

oder

$$(13.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \mathrm{l}\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right).$$

Man erkennt ohne Weiteres den Zusammenhang dieses Verfahrens mit der Auflösung der quadratischen Gleichungen. Um nämlich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

aufzulösen, bringt man die Gleichung auf die Form

$$x^2 + 2bx + b^2 = b^2 - c$$

und zieht dann auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung die Quadratwurzel aus. Dadurch erhält man

$$x + b = \pm\sqrt{b^2 - c},$$

oder

(14.) $$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c},\quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c},$$

(15.) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2b,\quad x_1 . x_2 = c,\quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}, \\ x^2 + 2bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2), \end{cases}$$

wo $x_1$ und $x_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (13.) ein, so nimmt dieselbe die Form an

(13a.) $$\int\frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich in folgender Weise überzeugen. Es ist

$$\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(x - x_1)(x - x_2)},$$

oder

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right),$$

also wird in Uebereinstimmung mit Gleichung (13a.)

$$\int\frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\int\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2}[\mathrm{l}(x - x_1) - \mathrm{l}(x - x_2)] = \frac{1}{x_1 - x_2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

**II. Fall.** $\qquad b^2 - c < 0.$

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

(16.) $$b^2 - c = -a^2,\quad \text{oder}\quad \sqrt{c - b^2} = a,$$

so wird $a$ eine reelle Grösse, und man erhält

$$x^2 + 2bx + c = (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2) = (x + b)^2 + a^2.$$

Dies giebt, wenn man wieder $x + b$ mit $t$ bezeichnet,

$$\int\frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int\frac{dx}{(x + b)^2 + a^2} = \int\frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{t}{a}\right),$$

also

(17.) $$\int\frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}\right).$$

Es ist noch hervorzuheben, dass die Gleichungen (13.) und (17.) richtig bleiben, gleichviel ob $b^2 - c$ positiv oder negativ ist, die rechte Seite von Gleichung (13.) erhält aber eine complexe Form, wenn $b^2 - c < 0$ ist, und auf der rechten Seite von Gleichung (17.) wird die Grösse $\sqrt{c - b^2}$ imaginär, wenn $b^2 - c > 0$ ist. Der Zusammenhang beider Gleichungen ergiebt sich aus D.-R., Formel Nr. 182 der Tabelle, nämlich aus

$$\text{(18.)} \qquad \mathrm{l}\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i \operatorname{arc\,tg} \varphi .$$

Setzt man nämlich

$$\varphi = \frac{x}{a},$$

so folgt aus Gleichung (18.)

$$\mathrm{l}\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{a + xi}{a - xi}\right) = 2i \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\mathrm{l}\left(\frac{x - ai}{x + ai}\right) - \mathrm{l}(-1) = 2i \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dies giebt, wenn man beide Seiten der Gleichung durch $2ai$ dividirt und beachtet, dass nach D.-R., Formel Nr. 181 der Tabelle $\mathrm{l}(-1)$ den Werth $(2h + 1)\pi i$ hat,

$$\text{(19.)} \qquad \frac{1}{2ai} \mathrm{l}\left(\frac{x - ai}{x + ai}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2a},$$

wobei $h$ noch eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl ist.

Vertauscht man also in der Formel

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \mathrm{l}\left(\frac{x - a}{x + a}\right)$$

die Grösse $a$ mit $ai$, so erhält man

$$\text{(20.)} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2a}.$$

Setzt man noch

$$a = \sqrt{c - b^2}, \quad \text{also} \quad ai = i\sqrt{c - b^2} = \sqrt{b^2 - c}$$

und vertauscht $x$ mit $x + b$, so geht Gleichung (19.) über in

$$(21.)\quad \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + \frac{(2h+1)\pi}{2\sqrt{c-b^2}};$$

die beiden Werthe, welche man in den Gleichungen (13.) und (17.) für $\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}$ gefunden hat, unterscheiden sich also von einander nur durch die Constante $\frac{(2h+1)\pi}{2\sqrt{c-b^2}}$.

**III. Fall.** $b^2 - c = 0$, oder $c = b^2$.

Hier wird, wenn man wieder $x + b$ mit $t$ bezeichnet,

$$\int\frac{dx}{x^2+2bx+c} = \int\frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = \int\frac{dx}{(x+b)^2} = \int\frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t},$$

oder

$$(22.)\qquad \int\frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = -\frac{1}{x+b}.$$

## Beispiele.

**I. Fall.** $\int\frac{dx}{(x+3)(x+4)} = \mathrm{l}\left(\frac{x+3}{x+4}\right);$

**II. Fall.** $\int\frac{dx}{x^2+4x+20} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x+2}{4}\right);$

**III. Fall.** $\int\frac{dx}{x^2+8x+16} = -\frac{1}{x+4}.$

**Aufgabe 5.** $\int\frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c} = ?$

**Auflösung.** Wäre bei dem Bruche unter dem Integralzeichen der Zähler dem Differential des Nenners proportional, so könnte die Integration nach Formel Nr. 28 der Tabelle ausgeführt werden, nämlich nach der Formel

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)} = \mathrm{l}[f(x)].$$

In dem vorliegenden Falle ist
$$f'(x) = 2x + 2b,$$
deshalb nimmt man mit dem gesuchten Integrale die folgende Umformung vor. Es ist
$$Px + Q = (Px + Pb) + (Q - Pb) = \frac{P}{2}(2x + 2b) + (Q - Pb),$$
folglich wird
$$\int\frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = \int\frac{\frac{1}{2}P(2x + 2b) + (Q - Pb)}{x^2 + 2bx + c}dx$$
$$= \frac{P}{2}\int\frac{(2x + 2b)dx}{x^2 + 2bx + c} + (Q - Pb)\int\frac{dx}{x^2 + 2bx + c},$$
also
$$(23.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c} = \frac{P}{2}\,\mathrm{l}(x^2+2bx+c) + (Q-Pb)\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}.$$

Das Integral, welches auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen geblieben ist, findet man nach Aufgabe 4. So ist z. B. für $b^2 - c > 0$
$$(23\,\mathrm{a.})\quad \int\frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c}$$
$$= \frac{P}{2}\,\mathrm{l}(x^2 + 2bx + c) + \frac{Q - Pb}{2\sqrt{b^2 - c}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right),$$
oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.) und (15.)
$$\int\frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)}$$
$$= \frac{P}{2}\,\mathrm{l}[(x - x_1)(x - x_2)] + \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\,\mathrm{l}\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

Aus den bekannten Formeln
$$\mathrm{l}[(x - x_1)(x - x_2)] = \mathrm{l}(x - x_1) + \mathrm{l}(x - x_2),$$
$$\mathrm{l}\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right) = \mathrm{l}(x - x_1) - \mathrm{l}(x - x_2)$$
ergiebt sich daher
$$\int\frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \left(\frac{P}{2} + \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\right)\mathrm{l}(x - x_1)$$
$$+ \left(\frac{P}{2} - \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\right)\mathrm{l}(x - x_2),$$
oder

$$(24.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)} =$$
$$\frac{1}{x_1-x_2}\left[(Px_1+Q)\mathrm{l}(x-x_1)-(Px_2+Q)\mathrm{l}(x-x_2)\right].$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man in folgender Weise bestätigen. Es ist

$$(25.)\quad \frac{Px_1+Q}{x-x_1}-\frac{Px_2+Q}{x-x_2}=\frac{(Px+Q)(x_1-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)},$$

woraus sich durch Integration Gleichung (24.) unmittelbar ergiebt.

### Beispiele.

$$\text{I. } \int\frac{(2x+43)dx}{x^2+x-12}=\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-12}+42\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$
$$=\mathrm{l}(x^2+x-12)+6\mathrm{l}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$$
$$=7\mathrm{l}(x-3)-5\mathrm{l}(x+4).$$

Dasselbe Resultat findet man aus Gleichung (24.), denn es ist in diesem Falle

$$x_1=+3,\quad x_2=-4,\quad x_1-x_2=7,$$
$$P=2,\quad Q=43,\quad Px_1+Q=49,\quad Px_2+Q=35.$$

$$\text{II. } \int\frac{(2x-3)dx}{x^2-4x+20}=\int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+20}+\int\frac{dx}{(x-2)^2+4^2}$$
$$=\mathrm{l}(x^2-4x+20)+\tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

$$\text{III. } \int\frac{(4x-7)dx}{x^2+6x+9}=\int\frac{(4x+12)-19}{(x+3)^2}dx=4\int\frac{dx}{x+3}-19\int\frac{dx}{(x+3)^2}$$
$$=4\mathrm{l}(x+3)+\frac{19}{x+3}.$$

Die vorhergehenden Aufgaben behandeln nur die einfachsten Fälle der *Zerlegung in Partialbrüche.* In einem späteren Abschnitte wird gezeigt werden, wie man *jede gebrochene rationale* Function durch Zerlegung in Partialbrüche integriren kann.

**Aufgabe 6.** $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = ?$$

**Auflösung.** Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

erhält man

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x},$$

folglich wird nach Formel Nr. 15 und 16 der Tabelle

$$(26.) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$$
$$= -\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = -2\operatorname{ctg}(2x).$$

**Aufgabe 7.** $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = ?$$

**Auflösung.** Dieses Integral ist bereits durch Formel Nr. 31 der Tabelle berechnet. Damals wurde die Function unter dem Integralzeichen so umgeformt, dass der Zähler des Bruches das Differential des Nenners wurde. Man kann aber die Integration auch durch Zerlegung ausführen. Mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 29 und 30 der Tabelle erhält man nämlich

$$(27.) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$
$$= \mathrm{l}(\sin x) - \mathrm{l}(\cos x) = \mathrm{l}(\operatorname{tg} x).$$

**Aufgabe 8.** $$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = ?$$

**Auflösung.** Zunächst wird man hier die in Formel Nr. 52 der Tabelle angegebene Substitution benutzen und

$$(28.) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

setzen, dann erhält man

(29.) $$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \int\frac{2\,dt}{2\,at + b(1-t^2) + c(1+t^2)}$$
$$= \int\frac{2\,dt}{(c-b)t^2 + 2\,at + (b+c)},$$

oder, wenn man die Grössen $b_1$ und $c_1$ durch die Gleichungen

(30.) $$a = b_1(c-b),\quad b + c = c_1(c-b)$$

erklärt,

(31.) $$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\int\frac{dt}{t^2 + 2b_1 t + c_1}.$$

Für $b_1{}^2 - c_1 > 0$ erhält man daher nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 54 der Tabelle)

(32.) $$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b_1{}^2 - c_1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{t + b_1 - \sqrt{b_1{}^2 - c_1}}{t + b_1 + \sqrt{b_1{}^2 - c_1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{t(c-b) + a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{t(c-b) + a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}\right),$$

und für $b_1{}^2 - c_1 < 0$ erhält man nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 56 der Tabelle)

(33.) $$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{2}{c-b}\,\frac{1}{\sqrt{c_1 - b_1{}^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t + b_1}{\sqrt{c_1 - b_1{}^2}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t(c-b) + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}\right).$$

§ 9.

## Partielle Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 61 bis 86a.)

Sind $u$ und $v$ zwei beliebige Functionen von $x$, welche eine Ableitung besitzen, so ist bekanntlich (vergl. D.-R., Formel Nr. 28 der Tabelle)

(1.) $$d(uv) = vdu + udv,$$

oder

(1a.) $$udv = d(uv) - vdu,$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Gleichung integrirt, (2.) $$\int u dv = uv - \int v du.$$

Mit Hülfe dieser Formel ist die Integration der Differential-Function $udv$ zurückgeführt auf die Integration von $vdu$, wobei es durch passende Wahl der Factoren $u$ und $dv$ häufig erreicht werden kann, dass $\int vdu$ leichter zu ermitteln ist als $\int udv$.

Wie dieses Verfahren, welches man „*partielle Integration*" nennt*), angewendet wird, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 1.** $\int \mathrm{l}x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(3.) $$u = \mathrm{l}x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(4.) $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

folglich erhält man nach Gleichung (2.)

$$\int \mathrm{l}x \,.\, dx = x \,.\, \mathrm{l}x - \int x \,.\, \frac{dx}{x} = x \,.\, \mathrm{l}x - \int dx,$$

oder

(5.) $$\int \mathrm{l}x \,.\, dx = x(\mathrm{l}x - 1).$$

**Aufgabe 2.** $\int x^m \mathrm{l}x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man wieder

(6.) $$u = \mathrm{l}x, \quad \text{also} \quad dv = x^m dx,$$

so wird

(7.) $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

folglich erhält man nach Gleichung (2.)

(8.) $$\int x^m \mathrm{l}x \,.\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{l}x - \frac{1}{m+1}\int x^m dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\mathrm{l}x - \frac{1}{m+1}\right).$$

Für $m = 0$ geht diese Aufgabe in die vorhergehende über.

---

*) Die häufig gebrauchte Bezeichnung „*theilweise Integration*" ist sprachlich nicht zulässig.

**Aufgabe 3.** $\int x \,.\, e^{mx} \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(9.) $$u = x, \quad \text{also} \quad dv = e^{mx} \,.\, dx,$$

so wird

(10.) $$du = dx, \quad v = \frac{1}{m} \cdot e^{mx},$$

(11.) $$\int x \,.\, e^{mx} \,.\, dx = \frac{x}{m} \cdot e^{mx} - \frac{1}{m}\int e^{mx} \,.\, dx$$
$$= \frac{1}{m^2} \cdot e^{mx}(mx - 1).$$

**Aufgabe 4.** $\int x \sin x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(12.) $$u = x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \,.\, dx,$$

so wird

(13.) $$du = dx \qquad v = -\cos x,$$

(14.) $$\int x \sin x \,.\, dx = -x \cos x + \int \cos x \,.\, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x.$$

**Aufgabe 5.** $\int x^2 \cos x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(15.) $$u = x^2, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \,.\, dx,$$

so wird

(16.) $$du = 2x dx, \qquad v = \sin x,$$

(17.) $$\int x^2 \cos x \,.\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,.\, dx,$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (14.)

(18.) $$\int x^2 \cos x \,.\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

**Aufgabe 6.** $\int \operatorname{arc} \sin x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(19.) $$u = \operatorname{arc} \sin x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(20.) $$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad v = x,$$

$$\int \arcsin x \,.\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich erhält man aus Formel Nr. 25 der Tabelle

(21.) $$\int \arcsin x \,.\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

**Aufgabe 7.** $\int \operatorname{arc\,tg} x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(22.) $$u = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(23.) $$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \,.\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2},$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 24 der Tabelle

(24.) $$\int \operatorname{arc\,tg} x \,.\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \mathrm{l}(1+x^2).$$

**Aufgabe 8.** $\int (\mathrm{l}x)^m \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(25.) $$u = (\mathrm{l}x)^m, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

(26.) $$du = m(\mathrm{l}x)^{m-1} \,.\, \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

(27.) $$\int (\mathrm{l}x)^m \,.\, dx = x(\mathrm{l}x)^m - m \int (\mathrm{l}x)^{m-1} \,.\, dx.$$

Das gesuchte Integral ist durch diese Gleichung auf ein ähnliches zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man $m$ mit $m-1$ vertauscht, und das deshalb einfacher ist. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (27.) findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von $m$ das gesuchte Integral. Ist z. B. $m = 4$, so erhält man

$$(28.)\quad \int(\mathrm{l}x)^4 . dx = x(\mathrm{l}x)^4 - 4\int(\mathrm{l}x)^3 . dx,$$

$$(29.)\quad \int(\mathrm{l}x)^3 . dx = x(\mathrm{l}x)^3 - 3\int(\mathrm{l}x)^2 . dx,$$

$$(30.)\quad \int(\mathrm{l}x)^2 . dx = x(\mathrm{l}x)^2 - 2\int\mathrm{l}x . dx,$$

$$(31.)\quad \int\mathrm{l}x . dx = x\mathrm{l}x - x.$$

Indem man Gleichung (29.) mit $-4$, Gleichung (30.) mit $+4 . 3$, Gleichung (31.) mit $-4 . 3 . 2$ multiplicirt und sodann die Gleichungen (28.) bis (31.) addirt, erhält man

$$(32.)\quad \int(\mathrm{l}x)^4 . dx = x[(\mathrm{l}x)^4 - 4(\mathrm{l}x)^3 + 4 . 3(\mathrm{l}x)^2 - 4 . 3 . 2(\mathrm{l}x) + 4 . 3 . 2 . 1].$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(33.)\quad \int(\mathrm{l}x)^m . dx = x[(\mathrm{l}x)^m - m(\mathrm{l}x)^{m-1} + m(m-1)(\mathrm{l}x)^{m-2} - + \cdots \pm m(m-1) \ldots 3 . 2 . \mathrm{l}x \mp m!].$$

**Aufgabe 9.** $\int e^x . x^m . dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(34.)\quad u = x^m, \qquad \text{also} \qquad dv = e^x . dx,$$

so wird

$$(35.)\quad du = mx^{m-1} . dx, \qquad v = e^x,$$

$$(36.)\quad \int e^x . x^m dx = x^m . e^x - m\int e^x . x^{m-1} . dx.$$

Auch hier ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man $m$ mit $m-1$ vertauscht. Deshalb findet man durch das gleiche Verfahren wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$(37.)\quad \int e^x . x^m dx = e^x[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - + \cdots \pm m(m-1) \ldots 3 . 2 . x \mp m!].$$

**Aufgabe 10.** $\int\cos^2 x . dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(38.)\quad u = \cos x, \qquad \text{also} \qquad dv = \cos x . dx,$$

so wird

$$(39.)\quad du = -\sin x . dx, \qquad v = \sin x,$$

$$(40.)\quad \int\cos^2 x . dx = \cos x \sin x + \int\sin^2 x\, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

ist, so geht Gleichung (40.) über in

$$\int \cos^2 x \,.\, dx = \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x \,.\, dx.$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt,

$$(41.)\qquad \int \cos^2 x \,.\, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} \cdot$$

**Aufgabe 11.** $\int \sin^2 x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(42.)\qquad u = \sin x, \qquad \text{also} \qquad dv = \sin x \,.\, dx,$$

so wird

$$(43.)\qquad du = \cos x \,.\, dx, \qquad v = -\cos x,$$

$$(44.)\qquad \int \sin^2 x \,.\, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \,.\, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

ist, so geht Gleichung (44.) über in

$$\int \sin^2 x \,.\, dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \,.\, dx.$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt,

$$(45.)\qquad \int \sin^2 x \,.\, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} \cdot$$

Man erkennt ohne Weiteres den Zusammenhang zwischen den beiden letzten Aufgaben. Die Gleichungen (40.) und (44.) stimmen mit einander überein, und durch Addition der Gleichungen (41.) und (45.) erhält man

$$(46.)\qquad \int \cos^2 x \,.\, dx + \int \sin^2 x \,.\, dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = x.$$

Die Aufgaben 10 und 11 lassen eine wichtige Verallgemeinerung zu, die in den beiden folgenden Aufgaben untersucht werden soll.

**Aufgabe 12.** $\int \cos^m x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

(47.) $$u = \cos^{m-1} x, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \,.\, dx,$$

so wird

(48.) $$du = -(m-1)\cos^{m-2} x \sin x dx, \quad v = \sin x,$$

(49.) $$\int \cos^m x \,.\, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^2 x dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

(50.) $$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \text{also} \quad \cos^{m-2} x \sin^2 x = \cos^{m-2} x - \cos^m x$$

ist, so erhält man

(51.) $$\int \cos^m x \,.\, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \,.\, dx - (m-1)\int \cos^m x \,.\, dx,$$

oder, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist, auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch $m$ dividirt,

(52.) $$\int \cos^m x \,.\, dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x \,.\, dx.$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (41.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (52.) geht aus dem gesuchten Integral hervor, indem man $m$ mit $m - 2$ vertauscht, und wird daher einfacher, wenn $m \geqq 2$ ist. Es sei z. B. $m = 8$, dann wird

(53.) $$\int \cos^8 x \,.\, dx = \frac{1}{8}\cos^7 x \sin x + \frac{7}{8}\int \cos^6 x \,.\, dx,$$

(54.) $$\int \cos^6 x \,.\, dx = \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x \,.\, dx,$$

(55.) $$\int \cos^4 x \,.\, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x \,.\, dx,$$

(56.) $$\int \cos^2 x \,.\, dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2}\cdot$$

Indem man Gleichung (54.) mit $\frac{7}{8}$, Gleichung (55.) mit $\frac{7 \,.\, 5}{8 \,.\, 6}$, Gleichung (56.) mit $\frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3}{8 \,.\, 6 \,.\, 4}$ multiplicirt und sodann die Gleichungen (53.) bis (56.) addirt, erhält man

$$(57.)\quad \int \cos^8 x \,.\, dx = \sin x \left( \frac{1}{8}\cos^7 x + \frac{7}{8 \,.\, 6}\cos^5 x + \frac{7 \,.\, 5}{8 \,.\, 6 \,.\, 4}\cos^3 x + \frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3}{8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2}\cos x \right) + \frac{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2}\, x.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(58.)\quad \int \cos^7 x \,.\, dx = \sin x \left( \frac{1}{7}\cos^6 x + \frac{6}{7 \,.\, 5}\cos^4 x + \frac{6 \,.\, 4}{7 \,.\, 5 \,.\, 3}\cos^2 x + \frac{6 \,.\, 4 \,.\, 2}{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1} \right).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine *ungerade* Zahl ist, $\int \cos^m x\, dx$ lieber mit Hülfe von Formel Nr. 36 der Tabelle, nämlich mit Hülfe der Formel

$$\int \cos^{2n+1} x \,.\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \,.\, d(\sin x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

$$(59.)\quad \int \cos^7 x \,.\, dx = \int (1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x)$$
$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x.$$

Man kann die Uebereinstimmung der beiden Resultate in Gleichung (58.) und (59.) leicht nachweisen.

Ist dagegen $m$ eine *gerade* Zahl und positiv, so ist man auf die in Gleichung (52.) enthaltene Recursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (57.)

$$(60.)\quad \int \cos^{2n} x \,.\, dx = \sin x \left[ \frac{1}{2n}\cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cos^{2n-3} x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n \,.\, (2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5} x + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 5 \,.\, 3}{2n(2n-2)(2n-4) \ldots 4 \,.\, 2}\cos x \right] + \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{2n(2n-2)(2n-4) \ldots 4 \,.\, 2}\, x.$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man mit Rücksicht auf Gleichung (52.) durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ beweisen.

**Aufgabe 13.** $\int \sin^m x \,.\, dx = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$u = \sin^{m-1}x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \,.\, dx, \tag{61.}$$

so wird

$$du = (m-1)\sin^{m-2}x \cos x dx, \quad v = -\cos x, \tag{62.}$$

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\sin^{m-1}x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x \cos^2 x dx. \tag{63.}$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \text{also} \quad \sin^{m-2}x \cos^2 x = \sin^{m-2}x - \sin^m x \tag{64.}$$

ist, so geht Gleichung (63.) über in

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\sin^{m-1}x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x \,.\, dx$$
$$- (m-1)\int \sin^m x \,.\, dx.$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist, auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch $m$ dividirt,

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x \,.\, dx. \tag{65.}$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (45.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (65.) geht aus dem gesuchten hervor, indem man $m$ mit $m-2$ vertauscht, und wird daher einfacher für $m \geqq 2$. Es sei z. B. $m = 8$, dann erhält man

$$\int \sin^8 x \,.\, dx = -\frac{1}{8}\sin^7 x \cos x + \frac{7}{8}\int \sin^6 x \,.\, dx, \tag{66.}$$

$$\int \sin^6 x \,.\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x \,.\, dx, \tag{67.}$$

$$\int \sin^4 x \,.\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \,.\, dx, \tag{68.}$$

$$\int \sin^2 x \,.\, dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}\cdot \tag{69.}$$

Dies giebt ähnlich wie bei $\int \cos^8 x \,.\, dx$

$$(70.)\quad \int \sin^8 x \,.\, dx = -\cos x\left(\frac{1}{8}\sin^7 x + \frac{7}{8\,.\,6}\sin^5 x + \frac{7\,.\,5}{8\,.\,6\,.\,4}\sin^3 x + \frac{7\,.\,5\,.\,3}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}\sin x\right) + \frac{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}x.$$

In ähnlicher Weise findet man für $m = 7$

$$(71.)\quad \int \sin^7 x \,.\, dx = -\cos x\left(\frac{1}{7}\sin^6 x + \frac{6}{7\,.\,5}\sin^4 x + \frac{6\,.\,4}{7\,.\,5\,.\,3}\sin^2 x + \frac{6\,.\,4\,.\,2}{7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}\right).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine *ungerade* Zahl ist, $\int \sin^m x \,.\, dx$ lieber mit Hülfe von Formel Nr. 37 der Tabelle, nämlich mit Hülfe der Formel

$$\int \sin^{2n+1} x \,.\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

$$(72.)\quad \int \sin^7 x \,.\, dx = -\int (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x)d(\cos x)$$
$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x.$$

Wenn dagegen $m$ eine *gerade* Zahl ist, so ist man auf die in Gleichung (65.) enthaltene Recursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (70.)

$$(73.)\quad \int \sin^{2n} x \,.\, dx = -\cos x\left[\frac{1}{2n}\sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\sin^{2n-3} x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)}\sin^{2n-5} x + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}\sin x\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}x.$$

**Aufgabe 14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x} = ?$

**Auflösung.** Die Gleichung (52.) bleibt auch dann noch richtig, wenn $m$ eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (52.) über in

$$(74.)\quad \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x} = \frac{\sin x}{-(n-2)\cos^{n-1}x} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)}\int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

In diesem Falle ist aber das Integral auf der *linken* Seite der Gleichung einfacher als das auf der *rechten* Seite. Deshalb bringt man die Gleichung (74.) auf die Form

$$\frac{n-1}{n-2}\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-2)\cos^{n-1}x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x},$$

oder

$$(75.)\quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 33 der Tabelle

$$(76.)\quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$(77.)\quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x},$$

$$(78.)\quad \int \frac{dx}{\cos x} = -\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right],$$

also, wenn man Gleichung (77.) mit $\frac{3}{4}$, Gleichung (78.) mit $\frac{3 \,.\, 1}{4 \,.\, 2}$ multiplicirt und die Gleichungen (76.) bis (78.) addirt,

$$(79.)\quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{4 \,.\, 2\cos^2 x} - \frac{3 \,.\, 1}{4 \,.\, 2}\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

Für $n = 4$ erhält man

$$(80.)\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\,\mathrm{tg}\, x.$$

Man wird aber, wenn $n$ eine *gerade* Zahl ist, zur Berechnung von $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ zweckmässiger die Formel Nr. 44 der Tabelle anwenden, nach welcher

$$(81.)\qquad \int\frac{dx}{\cos^{2m}x}=\int(1+\mathrm{tg}^2x)^{m-1}\,.\,d(\mathrm{tg}\,x)$$

wird. In dem vorliegenden Falle ist z. B.

$$(82.)\qquad \int\frac{dx}{\cos^4x}=\int(1+\mathrm{tg}^2x)d(\mathrm{tg}\,x)$$

$$=\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3x.$$

**Aufgabe 15.** $\int\frac{dx}{\sin^n x}=?$

**Auflösung.** Auch Gleichung (65.) bleibt noch richtig, wenn $m$ eine *negative* Zahl ist. Setzt man daher wieder

$$m=-(n-2)=-n+2,$$

also

$$m-1=-n+1=-(n-1),\quad m-2=-n,$$

so geht Gleichung (65.) über in

$$(83.)\quad \int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}=-\frac{\cos x}{-(n-2)\sin^{n-1}x}+\frac{-(n-1)}{-(n-2)}\int\frac{dx}{\sin^n x}.$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(84.)\qquad \int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 32 der Tabelle

$$(85.)\qquad \int\frac{dx}{\sin^5x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sin^3x},$$

$$(86.)\qquad \int\frac{dx}{\sin^3x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x},$$

$$(87.)\qquad \int\frac{dx}{\sin x}=\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

also

$$(88.)\quad \int\frac{dx}{\sin^5x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4x}-\frac{3\cos x}{4\,.\,2\sin^2x}+\frac{3\,.\,1}{4\,.\,2}\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Ist $n$ eine *gerade* Zahl, so wird $\int\frac{dx}{\sin^n x}$ zweckmässiger durch die Formel Nr. 45 der Tabelle nämlich durch die Formel

$$\int\frac{dx}{\sin^{2m}x}=-\int(1+\operatorname{ctg}^2x)^{m-1}\,.\,d(\operatorname{ctg}x)$$

ermittelt. Es ist z. B.

$$(89.)\quad\int\frac{dx}{\sin^4x}=-\int(1+\operatorname{ctg}^2x)d(\operatorname{ctg}x)=-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x.$$

**Aufgabe 16.** $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(90.)\quad u=x^{m-1},\ \text{also}\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

so wird nach Formel Nr. 25 der Tabelle

$$(91.)\quad du=(m-1)x^{m-2}dx,\quad v=-\sqrt{a^2-x^2},$$

$$(92.)\quad\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+(m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \text{also dass}\ x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2x^{m-2}-x^m}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (92.) über in

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+(m-1)\int\frac{(a^2x^{m-2}-x^m)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dies giebt

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+(m-1)a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$-(m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist mit dem gesuchten Integrale identisch. Bringt man dasselbe auf die linke Seite und dividirt die ganze Gleichung durch $m$, so findet man

$$(93.)\quad\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

In dieser Formel geht das Integral auf der rechten Seite der Gleichung aus dem gesuchten Integral hervor, indem man $m$ mit $m-2$ vertauscht. Es ist daher, wenn die ganze Zahl $m \geqq 2$ ist, einfacher als das gesuchte Integral.

Für $m = 6$ erhält man z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 21 der Tabelle

$$\text{(94.)} \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^5}{6}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{5a^2}{6}\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\text{(95.)} \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^3}{4}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^2}{4}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\text{(96.)} \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\text{(97.)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Indem man Gleichung (95.) mit $\frac{5a^2}{6}$, Gleichung (96.) mit $\frac{5 \cdot 3a^4}{6 \cdot 4}$, Gleichung (97.) mit $\frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot a^6}{6 \cdot 4 \cdot 2}$ multiplicirt und die Gleichungen (94.) bis (97.) addirt, erhält man

$$\text{(98.)} \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5a^2x^3}{6 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3a^4x}{6 \cdot 4 \cdot 2}\right)$$
$$+ \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\, a^6 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

In ähnlicher Weise findet man für $m = 7$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 25 der Tabelle

$$\text{(99.)} \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6a^2x^4}{7 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 4a^4x^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2a^6}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}\right).$$

Man wird aber die in Gleichung (93.) enthaltene Recursionsformel nur anwenden, wenn $m$ eine *gerade* Zahl ist. Für *ungerades* $m$, also für $m = 2n + 1$ führt die Substitution

$$\text{(100.)} \qquad \sqrt{a^2-x^2} = t$$

schneller zum Ziele. Es wird dann nämlich

$$a^2 - x^2 = t^2, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad xdx = -tdt,$$

also

$$(101.)\quad \int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int\frac{(a^2-t^2)^n t dt}{t} = -\int(a^2-t^2)^n dt,$$

so dass man nur eine ganze rationale Function zu integriren hat. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= -\int(a^6-3a^4t^2+3a^2t^4-t^6)dt\\ &= -\left(a^6t-a^4t^3+\frac{3}{5}a^2t^5-\frac{1}{7}t^7\right)\\ &= -t\left(a^6-a^4t^2+\frac{3}{5}a^2t^4-\frac{1}{7}t^6\right),\end{aligned}$$

oder, wenn man für $t$ den Werth aus Gleichung (100.) einsetzt,

$$(102.)\quad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6a^2x^4}{7.5}+\frac{6.4a^4x^2}{7.5.3}\right.\\ \left.+\frac{6.4.2a^6}{7.5.3.1}\right).$$

Das in Gleichung (98.) enthaltene Resultat kann man sogleich verallgemeinern. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}G_1(x) &= \frac{x}{2},\\ G_2(x) &= \frac{x^3}{4}+\frac{3a^2x}{4.2},\\ G_3(x) &= \frac{x^5}{6}+\frac{5a^2x^3}{6.4}+\frac{5.3a^4x}{6.4.2},\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$(103.)\quad G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n}+\frac{(2n-1)a^2x^{2n-3}}{2n(2n-2)}+\\ \dots+\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3a^{2n-2}x}{2n(2n-2)\dots 4.2},$$

$$(104.)\quad G_{n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+2}+\frac{(2n+1)a^2x^{2n-1}}{(2n+2).2n}+\\ \dots+\frac{(2n+1)(2n-1)\dots 3a^{2n}x}{(2n+2).2n.(2n-2)\dots 4.2},$$

$$(105.)\quad c_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2n(2n-2)\dots 4.2},$$

so wird

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3a^2}{4} \cdot G_1(x),$$

$$G_3(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{5a^2}{6} \cdot G_2(x),$$

. . . . . . . . . .

$$(106.) \qquad G_{n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2} \cdot G_n(x),$$

$$(107.) \qquad c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n.$$

Nach Einführung dieser Bezeichnungen erhält man

$$(108.) \quad \int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = c_n \,.\, a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2} \cdot G_n(x).$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ beweisen. Es ist nämlich nach Gleichung (93.) für $m = 2n+2$

$$\int \frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2}\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder, wenn man voraussetzt, dass Gleichung (108.) richtig ist,

$$\int \frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2} c_n a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{(2n+1)a^2}{2n+2}\sqrt{a^2-x^2} \,.\, G_n(x),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (106.) und (107.)

$$(109.) \quad \int \frac{x^{2n+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = c_{n+1} a^{2n+2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2} \,.\, G_{n+1}(x).$$

Ist also die Gleichung (108.) richtig, so bleibt sie auch richtig, wenn man $n$ mit $n+1$ vertauscht. Aus den Gleichungen (94.) bis (98.) erkennt man, dass die Gleichung (108.) für $n = 1$, 2 und 3 richtig ist, folglich bleibt sie auch richtig für $n = 4$, 5, 6, ..., d. h. für *alle* ganzzahligen, positiven Werthe von $n$.

**Aufgabe 17.** $\int x^m dx \sqrt{a^2-x^2} = ?$

**Auflösung.** Es ist

$$x^m \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2x^m - x^{m+2}}{\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{110.}$$

folglich wird

$$\int x^m dx \sqrt{a^2-x^2} = a^2 \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{111.}$$

Nun erhält man aus Gleichung (93.) durch Vertauschung von $m$ mit $m+2$

$$\int \frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(m+1)a^2}{m+2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{112.}$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so ergiebt sich

$$\int x^m dx \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{113.}$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (93.) enthaltene Recursionsformel reduciren. Man findet z. B. für $m = 0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 21 der Tabelle

$$\int dx \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \tag{114.}$$

und für $m = 1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 25 der Tabelle

$$\begin{aligned} \int x dx \sqrt{a^2-x^2} &= \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{3}\sqrt{a^2-x^2} \\ &= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}. \end{aligned} \tag{115.}$$

Auch hier wird in dem Falle, wo der Exponent $m$ eine *ungerade* Zahl ist, die Substitution

$$\sqrt{a^2-x^2} = t, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad xdx = -tdt$$

schneller zum Ziele führen. So ist z. B.

$$\int xdx \sqrt{a^2-x^2} = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3},$$

woraus sich wieder das in Gleichung (115.) gefundene Resultat ergiebt.

**Aufgabe 18.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Gleichung (93.) bleibt auch dann noch richtig, wenn $m$ eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (93.) über in

$$\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{-(n-1)a^2}{-(n-2)}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}.$$

In dieser Gleichung ist das Integral auf der *linken* Seite einfacher als das auf der *rechten.* Deshalb vertauscht man beide Seiten der Gleichung und findet durch Multiplication mit dem Factor $\frac{n-2}{(n-1)a^2}$

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{116.}$$

Es ist z. B. für $n = 2$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}. \tag{117.}$$

Auf dieses Integral kann man $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{a^2-x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der gefundenen Recursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man für *ungerade* Werthe von $n$ zu dem in der folgenden Aufgabe gesuchten Integral.

**Aufgabe 19.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Für $n = 1$ ist die in Gleichung (116.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar, weil die rechte Seite die Form $-\infty + \infty$ erhält. In diesem Falle führt aber eine sehr einfache Substitution zum Ziele. Es sei

$$(118.)\qquad x = \frac{a}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t}\sqrt{t^2 - 1}, \quad t = \frac{a}{x},$$

dann wird

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{t^2 - 1}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}},$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 23 der Tabelle

$$(119.)\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{l}(t + \sqrt{t^2 - 1}) = -\frac{1}{a}\mathrm{l}\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$$

**Aufgabe 20.** $\displaystyle\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

**Auflösung.** Setzt man

$$(120.)\qquad u = x^{m-1}, \quad \text{also} \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

so erhält man

$$(121.)\qquad du = (m - 1)x^{m-2}dx, \quad v = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$(122.)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a^2 + x^2} - (m - 1)\int x^{m-2}dx\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad x^{m-2}\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a^2 x^{m-2} + x^m}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (122.) über in

$$(123.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a^2 + x^2} - (m - 1)a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$
$$- (m - 1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Bringt man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, da es mit dem gesuchten identisch ist, auf die linke Seite und dividirt die ganze Gleichung durch $m$, so erhält man

$$(124.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Es ist z. B. für $m = 6$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 22 der Tabelle

$$(125.)\quad \int\frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^5}{6}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{5a^2}{6}\int\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(126.)\quad \int\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{3a^2}{4}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(127.)\quad \int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$(128.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

Dies giebt

$$(129.)\quad \int\frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5a^2x^3}{6\,.\,4} + \frac{5\,.\,3a^4x}{6\,.\,4\,.\,2}\right)$$
$$- \frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2}a^6\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(130.)\quad \int\frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x^6}{7} - \frac{6a^2x^4}{7\,.\,5} + \frac{6\,.\,4a^4x^2}{7\,.\,5\,.\,3} - \frac{6\,.\,4\,.\,2a^6}{7.5.3.1}\right);$$

man wird aber, wenn $m$ eine *ungerade* Zahl ist, schneller zum Ziele kommen, indem man die Substitution

$$\sqrt{a^2+x^2} = t,\ x^2 = t^2 - a^2,\ \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = dt$$

anwendet. So findet man z. B.

$$(130a.)\quad \int\frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int x^6\,dt = \int(t^6 - 3a^2t^4 + 3a^4t^2 - a^6)dt$$
$$= \frac{t^7}{7} - \frac{3a^2t^5}{5} + a^4t^3 - a^6t.$$

Die vorstehenden Formeln bleiben sämmtlich noch richtig, wenn man $+a^2$ mit $-a^2$ vertauscht. Dadurch findet man z. B. aus Gleichung (124.)

$$(131.)\quad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

und aus den Gleichungen (127.) und (128.)

$$(132.)\quad \int\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$

**Aufgabe 21.** $\int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = ?$

**Auflösung.** Es ist

$$(133.)\quad x^m\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a^2x^m + x^{m+2}}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

folglich wird

$$(134.)\quad \int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = a^2\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Nun erhält man aus Gleichung (124.) durch Vertauschung von $m$ mit $m+2$

$$(135.)\quad \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m+1)a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen, so ergiebt sich

$$(136.)\quad \int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (124.) enthaltene Recursionsformel reduciren. Man findet z. B. für $m=0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 22 der Tabelle

$$(137.)\quad \int dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}),$$

und für $m=1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 26 der Tabelle

$$(138.)\quad \int x dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^2}{3}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{3}\sqrt{a^2+x^2} = \frac{1}{3}(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}.$$

Auch hier wird man in dem Falle, wo der Exponent $m$ eine *ungerade* Zahl ist, besser die Substitution

$$\sqrt{a^2+x^2} = t$$

benutzen.

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ gehen die Gleichungen (136.) bis (138.) über in

$$(139.)\quad \int x^m dx \sqrt{x^2-a^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$(140.)\quad \int dx \sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}),$$

$$(141.)\quad \int x dx \sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}.$$

**Aufgabe 22.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

**Auflösung.** Gleichung (124.) bleibt auch dann noch richtig, wenn $m$ eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (124.) über in

$$(142.)\quad \int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{(n-1)a^2}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Vertauscht man beide Seiten dieser Gleichung mit einander und multiplicirt mit dem Factor $-\frac{n-2}{(n-1)a^2}$, so erhält man

$$(143.)\quad \int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Es ist z. B. für $n=2$

$$(144.)\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$$

Auf dieses Integral kann $\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{a^2+x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (143.) enthaltenen Recursionsformel immer zurückgeführt werden. Dagegen gelangt man in dem Falle, wo $n$ eine *ungerade* Zahl ist, zu dem in der folgenden Aufgabe gesuchten Integral.

**Aufgabe 23.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

**Auflösung.** Für $n = 1$ ist die in Gleichung (143.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar, weil die rechte Seite die Form $\infty - \infty$ annimmt. Setzt man aber

$$(145.)\qquad x = \frac{a}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t}\sqrt{1+t^2}, \quad t = \frac{a}{x},$$

so erhält man

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 22 der Tabelle

$$(146.)\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{l}(t+\sqrt{1+t^2}) = -\frac{1}{a}\,\mathrm{l}\Big(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\Big).$$

Vertauscht man $+a^2$ mit $-a^2$, so gehen die Gleichungen (143.) und (144.) über in

$$(147.)\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$(148.)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}.$$

Auf dieses Integral lässt sich $\int \frac{dx}{x^{2m}\sqrt{x^2-a^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (147.) enthaltenen Recursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man in dem Falle, wo $n$ eine *ungerade* Zahl ist, zu dem in der folgenden Aufgabe gesuchten Integral.

**Aufgabe 24.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

**Auflösung.** Für $n = 1$ ist die in Gleichung (147.) enthaltene Recursionsformel wieder nicht anwendbar. Setzt man aber

$$(149.)\qquad x = \frac{a}{t}, \text{ also } dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2} = \frac{a}{t}\sqrt{1-t^2},\ t = \frac{a}{x},$$

so erhält man

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-adt\,.\,t\,.\,t}{t^2\,.\,a\,.\,a\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 17 der Tabelle

$$(150.)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin t = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right).$$

## § 10.
## Integration durch Einführung trigonometrischer Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 87 bis 89.)

Integrale von der Form

$$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$$

werden häufig durch die Substitution

$$(1.)\qquad x = a\sin t$$

auf einfachere zurückgeführt. Es wird dann nämlich

$$(2.)\qquad dx = a\cos t\,dt,\quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,$$

also

$$(3.)\qquad \int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx = \int f(a\sin t,\ a\cos t)\,.\,a\cos t\,dt,$$

wobei

$$(4.)\ \sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\ \operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

**Uebungs-Beispiele.**

$$1)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg} t = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

(Vergl. Formel Nr. 77 der Tabelle.)

2) $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\sin^2t\,dt = \frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right].$$

(Vergl. Formel Nr. 71 der Tabelle.)

3) $$\int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos t\,dt}{(b^2+a^2\sin^2t)a\cos t} = \int\frac{dt}{b^2+a^2\sin^2t}.$$

Indem man Zähler und Nenner dieser Differential-Function durch $\cos^2t$ dividirt und die bekannten Formeln

$$\frac{dt}{\cos^2t} = d(\operatorname{tg} t),\quad \frac{1}{\cos^2t} = 1+\operatorname{tg}^2t$$

beachtet, findet man

(5.) $$\int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{d(\operatorname{tg} t)}{b^2+(a^2+b^2)\operatorname{tg}^2t}.$$

Setzt man jetzt

(6.) $$\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = z,\quad \frac{b^2}{a^2+b^2} = c^2,$$

so erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 20 der Tabelle

$$\int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{dz}{c^2+z^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{c}\right),$$

oder

(7.) $$\int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right).$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx$$

kann man häufig die Substitution

(8.) $$x = a\operatorname{tg} t$$

mit gutem Erfolge anwenden. Man erhält dabei

(9.) $$dx = \frac{a\,dt}{\cos^2t},\quad \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t},$$

also

$$(10.)\qquad \int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx = \int f\left(a\operatorname{tg}t,\ \frac{a}{\cos t}\right)\cdot\frac{adt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$(11.)\qquad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \operatorname{tg}t = \frac{x}{a},\ \operatorname{ctg}t = \frac{a}{x}.$$

## Uebungs-Beispiele.

$$1)\qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{a^3\sin^3t\,.\,adt\,.\,\cos t}{\cos^3t\,.\,\cos^2t\,.\,a} = a^3\int\frac{\sin^3t\,dt}{\cos^4t},$$

oder, wenn man

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = z,\quad \text{also}\quad \sin t\,dt = -\,dz$$

setzt,

$$(12.)\quad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = -\,a^3\int\frac{(1-z^2)dz}{z^4} = -\,a^3\int(z^{-4}-z^{-2})dz$$

$$= -\,a^3\left(\frac{z^{-3}}{-3}-\frac{z^{-1}}{-1}\right) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z}\right).$$

Indem man schliesslich noch $z$ als Function von $x$ ausdrückt, findet man

$$(13.)\qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{(\sqrt{a^2+x^2})^3}{a^3}-\frac{3\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{a^2+x^2}\,(x^2-2a^2).$$

$$2)\qquad \int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^4}\int\frac{adt\,.\,\cos^4t\,.\,\cos t}{\cos^2t\,.\,\sin^4t\,.\,a} = \frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3t dt}{\sin^4t}$$

$$= \frac{1}{a^4}\int\left(\frac{1}{\sin^4t}-\frac{1}{\sin^2t}\right)d(\sin t)$$

$$= \frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3\sin^3t}+\frac{1}{\sin t}\right).$$

Nun ist

$$(14.)\qquad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x},$$

folglich wird

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{(\sqrt{a^2+x^2})^3}{3x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{3a^4x^3}(2x^2-a^2).$$

3) $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^3} = \int\frac{adt\,.\,\cos^3 t}{\cos^2 t\,.\,a^3}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt = \frac{\sin t}{a^2} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

4) $$\int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{adt\,.\cos t}{\cos^2 t(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)\,.\,a}$$

$$= \int\frac{\cos t\,dt}{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t} = \int\frac{\cos t\,dt}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}.$$

Auf dieses Integral kann man die in Formel Nr. 34 der Tabelle angegebene Regel anwenden, indem man

$$(16.)\quad \sin t = z, \quad \text{also} \quad \cos t\,dt = dz$$

setzt. Dies giebt, wenn man die Grösse $\pm c^2$ durch die Gleichung

$$(17.)\quad b^2 = \pm(a^2-b^2)c^2$$

erklärt,

$$(18.)\quad \int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{dz}{b^2+(a^2-b^2)z^2} = \frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{dz}{z^2\pm c^2}.$$

Gilt das *obere* Zeichen, ist also $a^2 > b^2$, so erhält man nach Formel Nr. 20 der Tabelle

$$(19.)\quad \int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{c}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

Gilt das *untere* Zeichen, ist also $a^2 < b^2$, so erhält man nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$(20.)\quad \int\frac{dx}{(b^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{2c}\,\mathrm{l}\left(\frac{z-c}{z+c}\right)$$

$$= -\frac{1}{2b\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x\sqrt{b^2-a^2}-b\sqrt{a^2+x^2}}{x\sqrt{b^2-a^2}+b\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx$$

kann man häufig die Substitution

$$x = \frac{a}{\cos t} \tag{21.}$$

mit gutem Erfolge anwenden. Dabei wird

$$dx = \frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\operatorname{tg} t, \tag{22.}$$

also

$$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t},\ a\operatorname{tg} t\right)\cdot\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}, \tag{23.}$$

wobei

$$\begin{cases} \sin t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},\ \cos t = \dfrac{a}{x}, \\ \operatorname{tg} t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\ \operatorname{ctg} t = \dfrac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}. \end{cases} \tag{24.}$$

**Uebungs-Beispiele.**

1) $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\sin t\,dt\,.\,\cos^4 t\,.\,\cos t}{\cos^2 t\,.\,a^4\,.\,a\sin t} = \frac{1}{a^4}\int\cos^3 t\,dt$$
$$= \frac{1}{a^4}\int(1-\sin^2 t)d(\sin t) = \frac{1}{a^4}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right),$$

also

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{3a^4}\left(\frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{x} - \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^3}{x^3}\right) \tag{25.}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{3a^4x^3}(2x^2+a^2).$$

2) $$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^3} = \int\frac{a\sin t\,dt\,.\,\cos^3 t}{\cos^2 t\,.\,a^3\sin^3 t}$$
$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2\sin t},$$

also

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}. \tag{26.}$$

3) $$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sin t\,dt\,.\cos t}{\cos^2 t\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}+a^2\right).\,a\sin t}$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{1+\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}.$$

Auf dieses Integral kann man wieder die in Formel Nr. 34 der Tabelle angegebene Regel anwenden, indem man

$$\sin t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=z$$

setzt; dann wird mit Rücksicht auf Formel Nr. 53 der Tabelle

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{z^2-2}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right),$$

oder

$$(27.)\quad \int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-a^2}-x\sqrt{2}}\right).$$

# Anwendungen der Integral-Rechnung.

---

II. Abschnitt.

## Quadratur der Curven.

§ 11.

### Quadratur der Curven bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten.

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle ist der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

1) von der Curve $y = \varphi(x)$,

2) von der X-Axe,

3) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

gleich

$$F = \int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a), \tag{1.}$$

wobei $f'(x) = \varphi(x)$ sein soll.

Die Berechnung des Flächeninhaltes von solchen ebenen Figuren nennt man: „*Quadratur der Curven*". Man kann die dafür angegebene Formel sofort zur Lösung der folgenden Aufgaben benutzen.

**Aufgabe 1.** Es sei eine Curve durch die Gleichung

$$8y = x^2 \tag{2.}$$

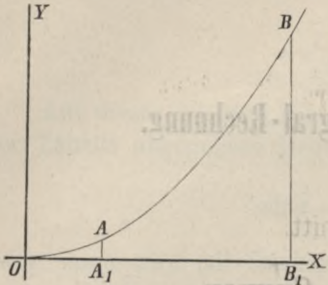
gegeben (Fig. 12); man soll die Fläche $A_1ABB_1$ berechnen, welche durch die beiden Ordinaten

$$x = a = 2 \quad \text{und} \quad x = b = 7$$

begrenzt wird.

**Auflösung.** Nach Gleichung (1.) wird

Fig. 12.




$$F = \frac{1}{8}\int\limits_2^7 x^2\,dx = \frac{1}{24}\left[x^3\right]_2^7 \tag{3.}$$

$$= \frac{1}{24}(7^3 - 2^3)$$

$$= \frac{343 - 8}{24} = \frac{335}{24}.$$

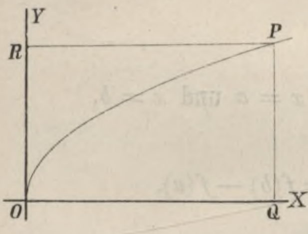
**Aufgabe 2.** Die Gleichung einer *Parabel* $OP$ (Fig. 13) sei

$$y^2 = 2px, \text{ oder } y = \sqrt{2px}; \tag{4.}$$

man soll den Flächeninhalt der Figur $OQP$ berechnen.

**Auflösung.** Da in diesem Falle der Punkt $O$ die Abscisse 0 und der Punkt $P$ die Abscisse $OQ$ gleich $x$ hat, so erhält man nach Gleichung (1.)

Fig. 13.




$$F = \int\limits_0^x y\,dx = \int\limits_0^x \sqrt{2px}\,.\,dx \tag{5.}$$

$$= \sqrt{2p}\int\limits_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{2x}{3}\sqrt{2px},$$

oder

$$F = \frac{2xy}{3}. \tag{6.}$$

In diesem Resultate ist der Satz enthalten:

*Die von der Parabel $OP$, der $X$-Axe und einer beliebigen Ordinate $QP$ begrenzte ebene Figur verhält sich zur Fläche des Rechtecks $OQPR$ mit den Seiten $OQ = x$ und $QP = y$ wie* $2:3$.

**Aufgabe 3.** Die Gleichung einer *Parabel* (Fig. 14) sei

$$y^2 = 9x, \quad \text{oder} \quad y = 3\sqrt{x}; \tag{7.}$$

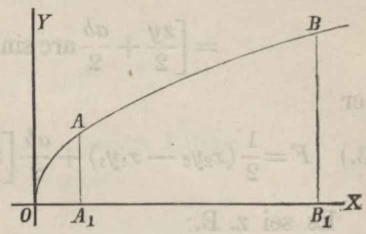
man soll die Fläche $A_1ABB_1$ berechnen, wenn

$$OA_1 = 4, \quad OB_1 = 25$$

ist.

**Auflösung.** Nach Gleichung (1.) wird in diesem Falle

Fig. 14.




$$(8.)\quad F = \int_4^{25} y\,dx = 3\int_4^{25} x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^{25} = 2\left[x\sqrt{x}\right]_4^{25},$$

also

$$(9.)\quad F = 2(125 - 8) = 234.$$

**Aufgabe 4.** In einer *Ellipse* mit der Gleichung

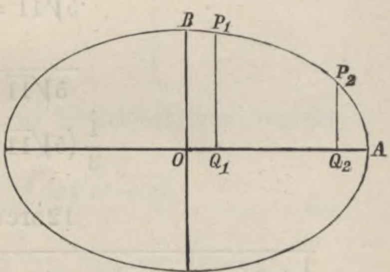
$$(10.)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

oder

$$(10\,\text{a.})\qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

sind die Ordinaten $Q_1P_1$ und $Q_2P_2$ gezogen (Fig. 15); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ berechnen.

Fig. 15.




**Auflösung.** Aus Gleichung (10 a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu beachten braucht,

$$(11.)\quad F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2 - x^2},^{*})$$

folglich wird nach Formel Nr. 74 der Tabelle und mit Rücksicht auf Gleichung (10 a.)

---

*) In gleicher Weise wie bei den geometrischen Anwendungen der Differential-Rechnung sollen auch hier die Coordinaten eines Curvenpunktes $P$ immer $x$ und $y$, die eines Curvenpunktes $P_1$ immer $x_1$ und $y_1$, allgemein die eines Curvenpunktes $P_n$ immer $x_n$ und $y_n$ heissen.

$$(12.)\qquad F = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \left[\frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_1}^{x_2},$$

oder

$$(13.)\quad F = \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{ab}{2}\left[\arc\sin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arc\sin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

Es sei z. B.

$$a = 6,\quad b = 4,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 5,$$

also

$$y_1 = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 1} = \frac{2}{3}\sqrt{35},\quad y_2 = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 25} = \frac{2}{3}\sqrt{11};$$

dann wird

$$F = \frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12\left[\arc\sin\left(\frac{5}{6}\right) - \arc\sin\left(\frac{1}{6}\right)\right].$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
5\sqrt{11} = \sqrt{275} &= 16{,}583\,123 \\
\sqrt{35} &= \phantom{0}5{,}916\,080 \\
\hline
5\sqrt{11} - \sqrt{35} &= 10{,}667\,043, \\
\frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) &= \phantom{0}3{,}555\,681 \\
12\arc\sin\left(\frac{5}{6}\right) &= 11{,}821\,327 \\
\hline
\frac{1}{3}(5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12\arc\sin\left(\frac{5}{6}\right) &= 15{,}377\,008 \\
12\arc\sin\left(\frac{1}{6}\right) &= \phantom{0}2{,}009\,377 \\
\hline
F &= 13{,}367\,631.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4a.** Man soll die ganze Fläche der *Ellipse* mit den Halbaxen $a$ und $b$ berechnen (Fig. 15).

**Auflösung.** Man erhält den Quadranten der Ellipse, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = a,$$

also

$$y_1 = b \quad \text{und} \quad y_2 = 0$$

setzt. Dies giebt

$$F = \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{14.}$$

folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Ellipse

$$E = 4F = ab\pi. \tag{15.}$$

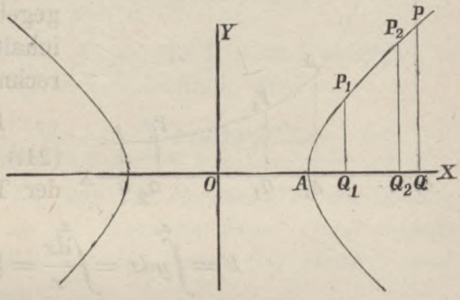
**Aufgabe 5.** In einer *Hyperbel* mit der Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \tag{16.}$$

oder

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{16a.}$$

Fig. 16.




sind die Ordinaten $Q_1P_1$ und $Q_2P_2$ gezogen (Fig. 16); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ berechnen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (16a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen braucht,

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{17.}$$

Deshalb wird nach Formel Nr. 82a der Tabelle

$$F = \frac{b}{a} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \mathrm{l}(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right]_{x_1}^{x_2}, \tag{18.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16a.)

$$F = \left[ \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \mathrm{l}\left(x + \frac{ay}{b}\right) \right]_{x_1}^{x_2} \tag{19.}$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{ab}{2} \mathrm{l}\left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}\right).$$

Dabei ist $l\left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}\right)$ aus $l\left(x_2 + \frac{ay_2}{b}\right) - l\left(x_1 + \frac{ay_1}{b}\right)$ entstanden.

Für den besonderen Fall, wo $x_1$ gleich $a$ und $x_2$ gleich $x$ ist, wo also die gesuchte Fläche $AQP$ im Scheitel der Hyperbel beginnt, wird

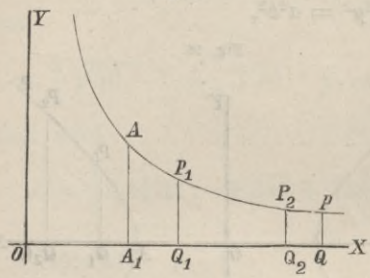
$$F = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right). \tag{20.}$$

**Aufgabe 6.** Die *gleichseitige Hyperbel* ist durch die Gleichung

$$xy = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x} \tag{21.}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ berechnen (Fig. 17).

Fig. 17




**Auflösung.** Aus Gleichung (21.) folgt nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = [lx]_{x_1}^{x_2},$$

also

$$F = lx_2 - lx_1 = l\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{22.}$$

Setzt man $x_1$ gleich 1 und $x_2$ gleich $x$, so erhält man

$$F = lx, \tag{23.}$$

so dass der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1APQ$, in welcher $OA_1$ gleich 1 sein möge, die geometrische Deutung für die Function $lx$ giebt.

**Aufgabe 7.** Die *verallgemeinerte Parabel* ist durch die Gleichung

$$y^n = 2px^m, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p} \,.\, x^{\frac{m}{n}} \tag{24.}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ berechnen (Fig. 18).

**Auflösung.** Aus Gleichung (24.) folgt nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(25.)\quad F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \sqrt[n]{2p}\int_{x_1}^{x_2} x^{\frac{m}{n}}\,dx$$

$$= \sqrt[n]{2p}\left[\frac{nx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n}{m+n}\left[x\sqrt[n]{2p}\,.\,x^{\frac{m}{n}}\right]_{x_1}^{x_2},$$

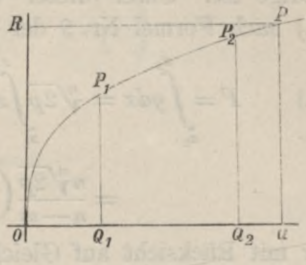


Fig. 18.

oder

$$(26.)\quad F = \frac{n}{m+n}\,[xy]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{m+n}(x_2y_2 - x_1y_1).$$

Für den besonderen Fall, wo $x_1$ gleich 0 und $x_2$ gleich $x$ ist, wo also die Figur im Scheitel $O$ beginnt, wird

$$(27.)\quad F = OQP = \frac{nxy}{m+n} = \frac{n}{m+n}\,OQPR.$$

Dies giebt den Satz: *Die von der Parabel $OP$, der X-Axe und einer beliebigen Ordinate $QP$ begrenzte Figur $OQP$ verhält sich zu dem Rechtecke $OQPR$ mit den Seiten $OQ$ gleich $x$ und $QP$ gleich $y$ wie $n$ zu $m+n$.*

**Aufgabe 8.** Die *verallgemeinerte Hyperbel* ist durch die Gleichung

$$(28.)\quad x^m y^n = 2p, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p}\,.\,x^{-\frac{m}{n}}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ (Fig. 19 und 20) berechnen.

Fig. 19.

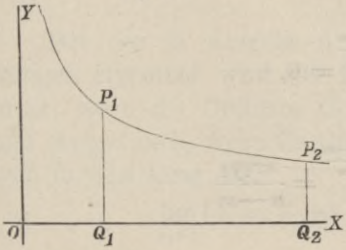
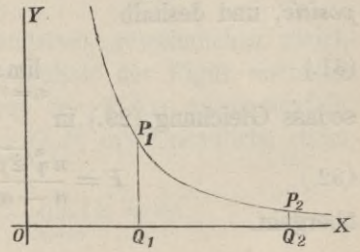


Fig. 20.



**Auflösung.** Es darf hier voraussgesetzt werden, dass die positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ von einander verschieden sind, weil der Fall, wo $m$ gleich $n$, bereits durch Aufgabe 6 erledigt ist. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gleichung (28.) nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(29.)\qquad F=\int_{x_1}^{x_2} y dx = \sqrt[n]{2p}\int_{x_1}^{x_2} x^{-\frac{m}{n}} dx = \sqrt[n]{2p}\left[\frac{nx^{\frac{n-m}{n}}}{n-m}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m}\left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (28.)

$$(30.)\qquad F = \frac{n}{n-m}\left[x\sqrt[n]{2p}\,.\,x^{-\frac{m}{n}}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{n-m}[xy]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n(x_2y_2 - x_1y_1)}{n-m}.$$

Bei dieser Aufgabe tritt ein bemerkenswerther Umstand ein, von dem später noch ausführlicher die Rede sein wird, wenn sich die Ordinate $Q_1P_1$ der $Y$-Axe immer mehr nähert, wenn also

$$\lim x_1 = 0$$

wird. Die $Y$-Axe ist nämlich eine Asymptote der Curve, so dass sich in diesem Grenzfalle der Flächenstreifen in der Richtung der $Y$-Axe bis in's Unendliche erstreckt. Damit ist aber noch nicht gesagt, dass dann auch der Flächeninhalt der Figur unendlich gross wird; es wird sich vielmehr ergeben, dass derselbe einen *endlichen* Werth erhält, wenn $n > m$ ist (Fig. 19). Dann wird nämlich in Gleichung (29.) der Exponent $\frac{n-m}{n}$ *positiv*, und deshalb

$$(31.)\qquad \lim_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0,$$

sodass Gleichung (29.) in

$$(32.)\qquad F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m}x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2y_2}{n-m}$$

übergeht.

Ist dagegen $n < m$ (Fig. 20), so wird $\frac{n-m}{n}$ *negativ*, so dass man Gleichung (29.) besser auf die Form

$$(33.)\qquad F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{m-n}\left(\frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} - \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}}\right).$$

bringen wird. Jetzt ist

$$(34.)\qquad \lim_{x_1=0} x_1^{\frac{m-n}{n}} = 0,$$

also

$$(35.)\qquad \lim_{x_1=0} F = \infty.$$

Eine ähnliche Betrachtung stellt sich ein, wenn man $x_2$ in's Unbegrenzte wachsen lässt. Dann erstreckt sich der Flächenstreifen in der Richtung der $X$-Axe bis in's Unendliche, und man erhält in dem ersten Falle, wo

$$n > m, \quad \frac{n-m}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \infty$$

ist, aus Gleichung (29.)

$$(36.)\qquad \lim_{x_2=\infty} F = \infty.$$

In dem zweiten Falle, wo

$$n < m, \quad \frac{m-n}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}} = 0$$

ist, findet man aus Gleichung (33.)

$$(37.)\qquad \lim_{x_2=\infty} F = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{m-n} \cdot \frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{nx_1y_1}{m-n}.$$

Bei der in Aufgabe 6 behandelten gewöhnlichen gleichseitigen Hyperbel wird der Flächeninhalt der Figur unendlich gross, wenn die Ordinate $Q_1P_1$ mit der $Y$-Axe zusammenfällt, und ebenso auch, wenn die Ordinate $Q_2P_2$ in's Unendliche rückt, weil in Gleichung (22.)

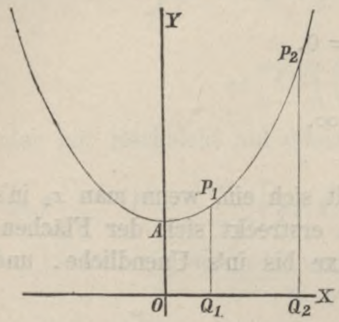
$$\lim_{x_1=0} \mathrm{l}x_1 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x_2=\infty} \mathrm{l}x_2 = \infty.$$

**Aufgabe 9.** Die *Kettenlinie* ist durch die Gleichung

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{38.}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ (Fig. 21) berechnen.

Fig. 21.




**Auflösung.** Aus Gleichung (38.) folgt nach Formel Nr. 11 der Tabelle

$$F = \int\limits_{x_1}^{x_2} y dx \tag{39.}$$

$$= \frac{a}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Nun ergiebt sich aber, wie auf Seite 337 und 338 der D.-R. gezeigt wurde, aus Gleichung (38.)

$$\pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \tag{40.}$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, jenachdem $x$ positiv oder negativ ist. Sind also $x_1$ und $x_2$ *beide positiv*, so geht Gleichung (39.) über in

$$F = a\left[\sqrt{y^2 - a^2}\right]_{x_1}^{x_2} = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}\right). \tag{41.}$$

Wäre $x_1$ *negativ*, so würde man erhalten

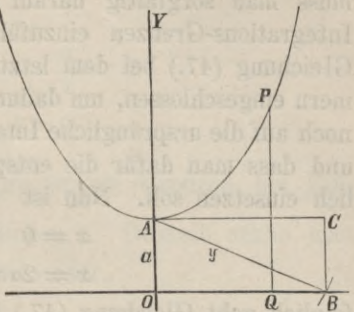
$$F = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} + \sqrt{y_1^2 - a^2}\right). \tag{42.}$$

Wird $x_1$ gleich 0 und $x_2$ gleich $x$ (Fig. 22), so ist der Flächeninhalt der Figur $OAPQ$ gleich

$$F = a\sqrt{y^2 - a^2} \tag{43.}$$

und lässt sich auch sehr leicht als Rechteck darstellen. Beschreibt man nämlich um den Punkt $A$ mit dem Halbmesser $y$ einen Kreisbogen, welcher die $X$-Axe im Punkte $B$ schneidet, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

Fig. 22.




(44.) $$OB = \sqrt{y^2 - a^2},$$

also Rechteck

$$OACB = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

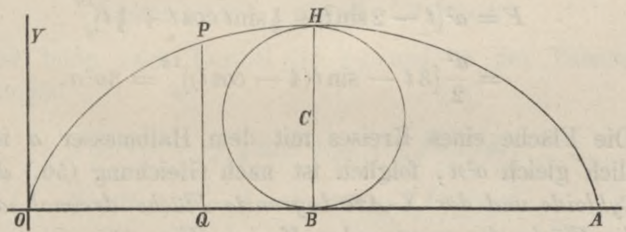
Daraus erkennt man auch, wie man die Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ (Fig. 21) in ein Rechteck verwandeln kann, bei dem wieder $OA = a$ die eine Seite und $\sqrt{y_2^2 - a} - \sqrt{y_1^2 - a^2}$ die andere Seite ist.

**Aufgabe 10.** Die *Cykloide* ist durch die Gleichungen

(45.) $$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche von einem ganzen Bogen $OHA$ der Cykloide und von der $X$-Axe begrenzt wird (Fig. 23).

Fig. 23.




**Auflösung.** Sind $x$ und $y$ als Functionen einer dritten Veränderlichen $t$ gegeben, so wird es bei der Quadratur der Curven (und ebenso bei den übrigen Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Geometrie) im Allgemeinen zweckmässig sein, diese Grösse $t$ als neue Integrations-Veränderliche einzuführen. In der vorliegenden Aufgabe bildet man daher zunächst

(46.) $$dx = a(1 - \cos t)dt,$$

also, da $OA$ gleich dem Umfange $2a\pi$ des rollenden Kreises ist,

(47.) $$F = \int_0^{2a\pi} y dx = a^2 \int_{(0)}^{(2a\pi)} (1 - \cos t)(1 - \cos t)dt.$$

Bei Einführung einer neuen Integrations-Veränderlichen muss man sorgfältig darauf achten, dass dabei auch andere Integrations-Grenzen einzuführen sind. Deshalb sind auch in Gleichung (47.) bei dem letzten Integral die Grenzen in Klammern eingeschlossen, um dadurch anzudeuten, dass sich dieselben noch auf die ursprüngliche Integrations-Veränderliche $x$ beziehen, und dass man dafür die entsprechenden Werthe von $t$ nachträglich einsetzen soll. Nun ist

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$
$$x = 2a\pi \quad „ \quad t = 2\pi,$$

folglich geht Gleichung (47.) über in

$$F = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt. \tag{48.}$$

Nach den Formeln Nr. 10, 13 und 62 der Tabelle ist

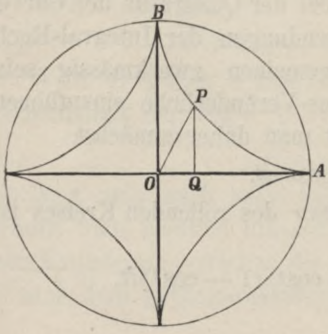
$$\begin{cases} \int dt = t, \quad \int \cos t dt = \sin t, \\ \int \cos^2 t dt = \tfrac{1}{2}\sin t \cos t + \tfrac{1}{2}t, \end{cases} \tag{49.}$$

so dass man erhält

$$F = a^2\left[t - 2\sin t + \tfrac{1}{2}\sin t\cos t + \tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} \tag{50.}$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[3t - \sin t(4 - \cos t)\right]_0^{2\pi} = 3a^2\pi.$$

Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser $a$ ist bekanntlich gleich $a^2\pi$, folglich ist nach Gleichung (50.) *die von der Cykloide und der X-Axe begrenzte Fläche dreimal so gross wie die Fläche des erzeugenden Kreises* (Fig. 23).

Fig. 24.




**Aufgabe 11.** Die *Astroide* sei durch die Gleichungen

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \tag{51.}$$

gegeben (Fig. 24); man soll die von ihr eingeschlossene Fläche berechnen.

**Auflösung.** Um zunächst den Flächeninhalt des Quadranten $OBA$ zu berechnen, muss man in der allgemeinen Formel für $x$ die Grenzen 0 und $a$ einsetzen. Da nun

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \quad „ \quad t = 0$$

wird, so sind $\frac{\pi}{2}$ und 0 die entsprechenden Grenzen bei Einführung der Integrations-Veränderlichen $t$. Deshalb erhält man

$$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt, \tag{52.}$$

$$F = \int_0^a y dx = -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t \,.\, \cos^2 t \sin t dt \tag{53.}$$

$$= +3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt.$$

Zur Ermittelung des unbestimmten Integrals von $\sin^4 t \cos^2 t dt$ beachte man zunächst, dass

$$\int \sin^4 t \cos^2 t dt = \int \sin^4 t dt - \int \sin^6 t dt \tag{54.}$$

ist, und bilde nach Formel Nr. 63 und 66 der Tabelle die Gleichungen

$$\int \sin^6 t dt = -\tfrac{1}{6}\sin^5 t \cos t + \tfrac{5}{6}\int \sin^4 t dt, \tag{55.}$$

$$\int \sin^4 t dt = -\tfrac{1}{4}\sin^3 t \cos t + \tfrac{3}{4}\int \sin^2 t dt, \tag{56.}$$

$$\int \sin^2 t dt = -\tfrac{1}{2}\sin t \cos t + \tfrac{1}{2}t. \tag{57.}$$

Indem man Gleichung (55.) mit $-1$, Gleichung (56.) mit $+\frac{1}{6}$, Gleichung (57.) mit $+\frac{1}{8}$ multiplicirt und dann alle drei Gleichungen addirt, findet man

$$\int \sin^4 t dt - \int \sin^6 t dt = \frac{1}{6}\sin^5 t \cos t - \frac{1}{24}\sin^3 t \cos t \tag{58.}$$
$$- \frac{1}{16}\sin t \cos t + \frac{1}{16}t;$$

folglich ist

$$(59.)\qquad F = \frac{a^2}{16}\Big[\cos t(8\sin^5 t - 2\sin^3 t - 3\sin t) + 3t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{16}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

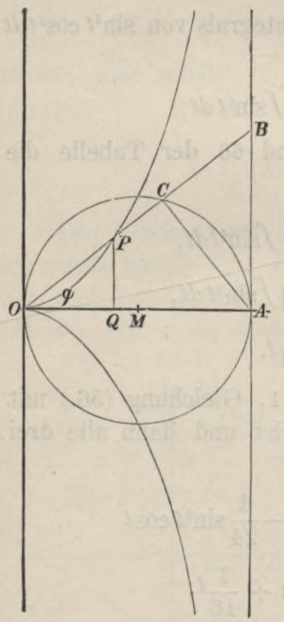
Der Flächeninhalt der ganzen Astroide ist daher

$$(60.)\qquad 4F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Dies giebt den Satz: *Der Flächeninhalt der Astroide verhält sich zu dem Flächeninhalte des umschriebenen Kreises wie* 3 *zu* 8.

**Aufgabe 12.** Die *Cissoide des Diokles* ist durch die Gleichungen

Fig. 25.




$$(61.)\qquad x = 2a\sin^2\varphi,\quad y = 2a\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

gegeben (D.-R., Seite 367); man soll den Flächeninhalt der Figur $OQP$ (Fig. 25) berechnen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (61.) folgt

$$x = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0,$$

$$x = 2a \quad \text{„} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$(62.)\qquad dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

oder

$$(63.)\qquad F = \int_0^x y\,dx = 8a^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi,$$

folglich wird nach Formel Nr. 67 der Tabelle, wenn man $n$ gleich 2 setzt,

$$(64.)\qquad F = 8a^2\Big[-\cos\varphi\Big(\frac{1}{4}\sin^3\varphi + \frac{3}{4\,.\,2}\sin\varphi\Big) + \frac{3\,.\,1}{4\,.\,2}\varphi\Big]_0^\varphi$$

$$= a^2[3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)].$$

Da die Gerade $AB$ eine Asymptote der Curve ist, so erstreckt sich der Flächenstreifen bis in's Unendliche, wenn die Ordinate $QP$ der Asymptote immer näher rückt und schliesslich mit ihr zusammenfällt, wenn also

$$(65.)\qquad \lim x = 2a, \quad \text{oder} \quad \lim \varphi = \frac{\pi}{2}$$

wird. Der Flächeninhalt der Figur bleibt aber endlich, da man aus Gleichung (64.)

$$(66.)\qquad \lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}} F = \frac{3a^2\pi}{2}$$

erhält. Die Curve liegt zur $X$-Axe symmetrisch; deshalb wird der Flächeninhalt der Figur, welche von der ganzen Cissoide und der Asymptote begrenzt ist, gleich

$$3a^2\pi.$$

**Aufgabe 13.** Es ist die Gleichung

$$(67.)\qquad y = \frac{1}{12}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

gegeben; man soll $\int\limits_a^b ydx$ berechnen.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 9 der Tabelle wird

$$(68.)\quad F = \int\limits_a^b ydx = \frac{1}{12}\int\limits_a^b (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)dx$$

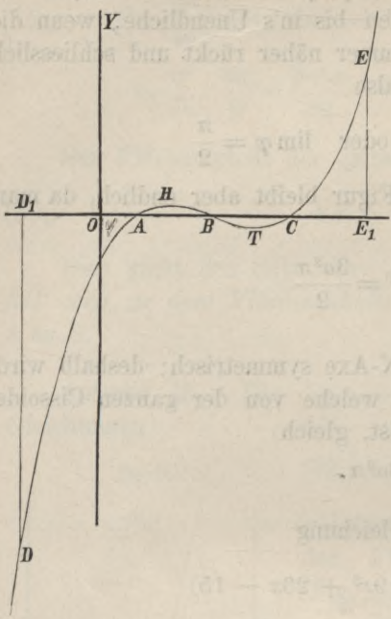
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 23\,\frac{x^2}{2} - 15x\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{48}(b^4 - 12b^3 + 46b^2 - 60b - a^4 + 12a^3 - 46a^2 + 60a).$$

Will man sich über die Bedeutung dieses Resultates Rechenschaft geben, so muss man beachten, dass die der Gleichung (67.), oder der Gleichung

$$(67\text{a.})\qquad y = \frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-5)$$

Fig. 26.




entsprechende Curve die $X$-Axe in den Punkten $A$, $B$, $C$ mit den Abscissen

$$OA = 1, \quad OB = 3,$$
$$OC = 5$$

schneidet. Setzt man daher

$$a = -2, \quad b = +1,$$

so erhält man

$$(69.)\quad D_1AD = \int_{-2}^{+1} y dx$$
$$= \frac{1}{48}(-25 - 416)$$
$$= -\frac{147}{16}.$$

Der Ausdruck ist *negativ*, weil die Figur $D_1AD$ *unterhalb* der $X$-Axe liegt. Ferner wird der Flächeninhalt der Figur

$$(70.)\qquad AHB = \int_{+1}^{+3} y dx = \frac{1}{48}(-9 + 25) = \frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck *positiv*, weil die Figur $AHB$ *oberhalb* der $X$-Axe liegt. Indem man $a$ gleich 3 und $b$ gleich 5 setzt, findet man den Flächeninhalt der Figur

$$(71.)\qquad BTC = \int_{3}^{5} y dx = \frac{1}{48}(-25 + 9) = -\frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck wieder *negativ*, weil die Figur *unterhalb* der $X$-Axe liegt. Endlich ist der Flächeninhalt der Figur

$$(72.)\qquad CE_1E = \int_{5}^{7} y dx = \frac{1}{48}(119 + 25) = +3.$$

Dieser Ausdruck ist *positiv*, weil die Figur *oberhalb* der $X$-Axe liegt. Demnach ist

$$(73.)\qquad \int_{-2}^{+7} y dx = \frac{1}{48}(119 - 416) = -\frac{99}{16}$$

und kann geometrisch gedeutet werden durch die Summe der Figuren

$$D_1AD,\quad AHB,\quad BTC \text{ und } CE_1E,$$

wobei aber die erste und dritte mit *negativem*, die zweite und vierte mit *positivem* Vorzeichen zu nehmen ist.

Dies giebt in Uebereinstimmung mit der auf Seite 15 ausgeführten Untersuchung den Satz: *Wenn man den Flächeninhalt einer ebenen Figur zwischen einer Curve $y = f(x)$, der Abscissen-Axe und zwei beliebigen Ordinaten durch Integration berechnet, so sind die Flächenstücke über der Abscissen-Axe mit positivem, und die Flächenstücke unter der Abscissen-Axe mit negativem Vorzeichen berücksichtigt.*

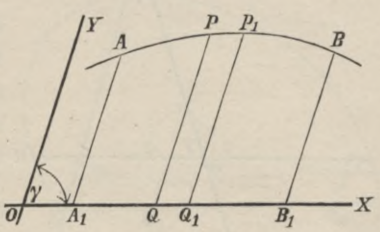
## § 12.

## Quadratur der Curven bei Anwendung schiefwinkliger Coordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 90.)

Ist die Gleichung einer Curve für *schiefwinklige* Coordinaten gegeben, und bezeichnet man den Winkel, welchen die positiven Richtungen der Coordinaten-Axen mit einander bilden, durch $\gamma$, so wird der Flächeninhalt eines Streifens $QPP_1Q_1$ (Fig. 27), wenn man ihn unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als Parallelogramm betrachtet,

Fig 27.




$$(1.)\qquad \sphericalangle QPP_1Q_1 = ydx \,.\, \sin\gamma,$$

also

$$(2.)\qquad A_1ABB_1 = \sin\gamma \int_a^b ydx.$$

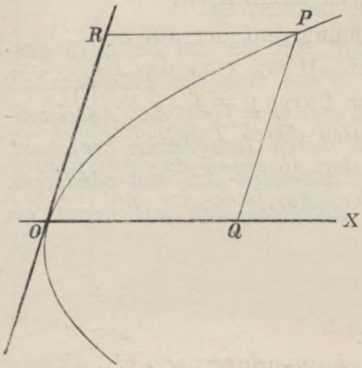
## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Die Gleichung

$$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2p} \,.\, x^{\frac{1}{2}} \tag{3.}$$

stellt auch für schiefwinklige Coordinaten eine *Parabel* dar, wobei die $Y$-Axe eine beliebige Tangente ist, und die $X$-Axe durch den Berührungspunkt parallel zur Axe der Parabel läuft (Fig. 28); man soll den Flächeninhalt der Figur $OQP$ berechnen.

Fig. 28.




**Auflösung.** Hier ist nach Gleichung (2.)

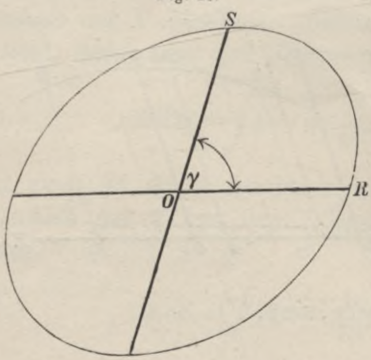
$$F = \sin\gamma \,.\, \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx \tag{4.}$$

$$= \sin\gamma \,.\, \sqrt{2p} \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x$$

$$= \frac{2xy}{3} \sin\gamma.$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OQPR$ ist gleich $xy \sin\gamma$, folglich bleibt der auf Seite 82 angeführte Satz auch in diesem Falle noch richtig.

Fig. 29.




**Aufgabe 2.** Macht man in der Ellipse zwei conjugirte Durchmesser, deren Länge $2r$ und $2s$ sein möge, zu Coordinaten Axen, so hat die Ellipse (Fig. 29) die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1, \tag{5.}$$

oder

$$y = \pm \frac{s}{r} \sqrt{r^2 - x^2};$$

man soll den Flächeninhalt der Ellipse berechnen.

**Auflösung.** Hier ist nach Gleichung (2.) mit Rücksicht auf Formel Nr. 74 der Tabelle

$$F = 4\sin\gamma\int_0^r y dx = \frac{4s.\sin\gamma}{r}\int_0^r dx\sqrt{r^2-x^2}$$

$$= \frac{4s.\sin\gamma}{r}\left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r,$$

oder

(6.) $$F = rs\pi\sin\gamma.$$

Da der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbaxen $a$ und $b$, wie schon in Aufgabe 4a des vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, gleich $ab\pi$ ist, so folgt hieraus die wichtige Formel

(7.) $$rs.\sin\gamma = ab.$$

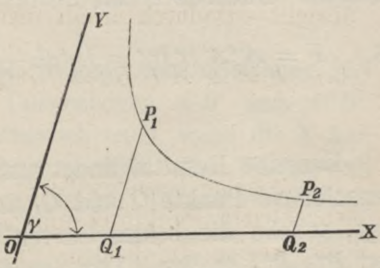
**Aufgabe 3.** Die Gleichung einer Hyperbel ist, wenn man die Asymptoten zu Coordinaten-Axen macht,

(8.) $$4xy = e^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{e^2}{4}\cdot\frac{1}{x};$$

man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ (Fig. 30) berechnen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (2.) folgt in diesem Falle mit Rücksicht auf Formel Nr. 12 der Tabelle

Fig. 30.




(9.) $$F = \sin\gamma\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

$$= \frac{e^2\sin\gamma}{4}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{e^2\sin\gamma}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

§ 13.

## Quadratur von Figuren, welche oben und unten durch eine Curve begrenzt sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 91.)

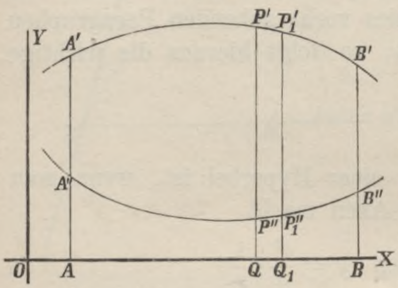
Eine Figur sei oben begrenzt durch die Curve (Fig. 31)

(1.) $$y' = f(x),$$

unten durch die Curve

(2.) $$y'' = g(x),$$

Fig. 31.




rechts und links durch die Ordinaten $B''B'$ und $A''A'$ mit den Gleichungen

(3.) $x = b$ und $x = a$.

Man kann dann den Flächeninhalt der Figur $A''A'B'B''$ berechnen, indem man zuerst den Flächeninhalt der Figur

(4.) $$AA'B'B = \int_a^b y'dx$$

berechnet und davon den Flächeninhalt der Figur

5.) $$AA''B''B = \int_a^b y''dx$$

abzieht. Dadurch erhält man

(6.) $$F = A''A'B'B'' = \int_a^b y'dx - \int_a^b y''dx = \int_a^b (y' - y'')dx.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man durch zwei benachbarte Punkte $Q$ und $Q_1$ der $X$-Axe Parallele zur $Y$-Axe legt, welche die beiden Curven bezw. in den Punkten $P'$, $P'_1$ und $P''$, $P''_1$ treffen. Den Streifen $P''P'P_1'P_1''$ darf man unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als ein Rechteck mit den Seiten

$$P''P' = y' - y'' \quad \text{und} \quad QQ_1 = dx$$

betrachten, wenn $QQ_1$ verschwindend klein wird. Dadurch erhält man für den Flächeninhalt des Streifens

$$P''P'P'_1P''_1 = (y' - y'')dx,$$

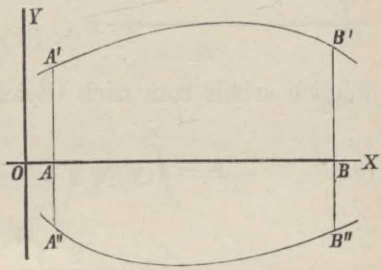
so dass die Summe aller dieser Streifen, nämlich

$$F = \int_a^b (y' - y'')dx$$

den Flächeninhalt der ganzen Figur $A''A'B'B''$ giebt.

Dabei ist zunächst stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Curvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ beide *über* der $X$-Axe liegen. Das Resultat bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Liegt z. B. der eine Bogen $A''B''$ *unter* der $X$-Axe (Fig. 32), so hat, wie schon früher hervorgehoben wurde, $\int_a^b y''dx$ einen *negativen* Werth, so dass

Fig. 32.




$$\int_a^b y'dx - \int_a^b y''dx = \int_a^b (y' - y'')dx$$

die *Summe* der beiden Flächenstücke $AA'B'B$ und $A''ABB'$ giebt.

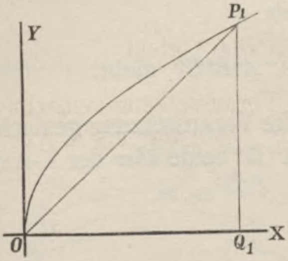
In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass Gleichung (6.) noch richtig bleibt, wenn *beide* Curvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ unter der $X$-Axe liegen, und schliesslich auch, wenn die $X$-Axe von den Begrenzungscurven geschnitten wird. Den letzten Fall kann man dadurch auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, dass man die Figur in mehrere Theile zerlegt, indem man durch die Schnittpunkte der beiden Curven mit der $X$-Axe Parallele zu der $Y$-Axe zieht. Für jeden einzelnen Theil gelten dann die früheren Voraussetzungen.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Von einer Parabel mit der Gleichung

$$(7.)\qquad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$$

Fig. 33.




ist durch die Sehne $OP_1$ (Fig. 33) das Segment über $OP_1$ abgeschnitten; man soll den Flächeninhalt dieses Segmentes berechnen.

**Auflösung.** Die Gleichungen der beiden begrenzenden Curven sind in diesem Falle

$$(8.)\qquad y' = \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{y_1}{x_1}\,x,$$

folglich erhält man nach Gleichung (6.)

$$(9.)\qquad F = \int_0^{x_1}(y' - y'')dx = \int_0^{x_1}\left(\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{y_1}{x_1}\,x\right)dx$$

$$= \left[\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{y_1}{x_1}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_1},$$

oder

$$(10.)\qquad F = \frac{2}{3}\,x_1y_1 - \frac{1}{2}\,x_1y_1 = \frac{x_1y_1}{6}.$$

*Das Segment über $OP_1$ ist also dreimal kleiner als das zugehörige Dreieck $OQ_1P_1$.*

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man von der Fläche $OQ_1P_1$, deren Inhalt nach Aufgabe 2 in § 11 gleich $\frac{2}{3}x_1y_1$ ist, den Flächeninhalt des Dreiecks $OQ_1P_1$, nämlich $\frac{1}{2}x_1y_1$, abzieht.

**Aufgabe 2.** Von der Parabel mit der Gleichung

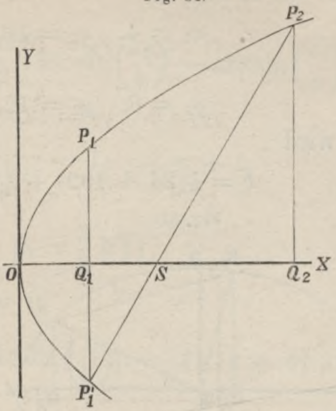
$$(11.)\qquad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y' = \pm\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$$

ist durch eine Gerade $P'_1P_2$ mit der Gleichung

$$(12.)\qquad y'' = mx + \mu$$

ein Segment $P_1'OP_2$ abgeschnitten (Fig. 34); man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

Fig. 34.




**Auflösung.** In dem vorliegenden Falle, wo der Punkt $P'_1$ *unter* der $X$-Axe liegen möge, muss man die Figur durch die Gerade $P'_1P_1$, welche der $Y$-Axe parallel ist, in zwei Theile zerlegen und erhält

$$(13.)\qquad P'_1OP_1 = \int\limits_0^{x_1} 2y'dx = 2\sqrt{2p}\int\limits_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4x_1y_1}{3},$$

$$(14.)\qquad P'_1P_1P_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2}(y' - y'')\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}(\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}} - mx - \mu)dx$$

$$= \left[\sqrt{2p}\,.\,\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{mx^2}{2} - \mu x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{2}{3}\,(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{m}{2}\,(x_2^2 - x_1^2) - \mu(x_2 - x_1).$$

Dabei ist aber bekanntlich

$$(15.)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{y_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}; \\[2ex] \mu = \dfrac{x_2y'_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} = -\dfrac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2 - x_1}, \end{cases}$$

folglich wird, wenn man noch die Gleichungen (13.) und (14.) addirt,

$$(16.)\qquad F = \tfrac{2}{3}(x_1y_1 + x_2y_2) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_1y_2 + x_2y_1$$
$$= \tfrac{1}{6}(x_1y_1 + x_2y_2) + \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Es sei z. B.

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 16, \quad 2p = 9,$$

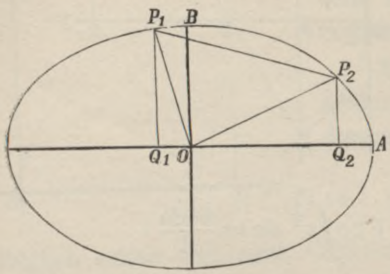
also

$$y_1 = 6, \quad y_2 = 12,$$

dann wird

(17.) $$F = \tfrac{1}{6}(24 + 192) + \tfrac{1}{2}(48 + 96) = 108.$$

Fig. 35.




**Aufgabe 3.** Die Gerade

(18.) $$y'' = mx + \mu$$

schneide von der Ellipse

(19.) $$y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ein Segment $P_1BP_2$ (Fig. 35) ab; man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

**Auflösung.** Nach Gleichung (6.) wird in diesem Falle

(20.) $$F = \int_{x_1}^{x_2}(y' - y'')dx = \int_{x_1}^{x_2}\Big(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - mx - \mu\Big)dx$$

$$= \Big[\frac{b}{a}\Big\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big\} - \frac{mx^2}{2} - \mu x\Big]_{x_1}^{x_2},$$

$$= \frac{1}{2}\Big[xy - mx^2 - 2\mu x + ab\arcsin\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_2y_2 - x_1y_1) - m(x_2{}^2 - x_1{}^2) - 2\mu(x_2 - x_1)$$

$$+ ab\arcsin\Big(\frac{x_2}{a}\Big) - ab\arcsin\Big(\frac{x_1}{a}\Big)\Big].$$

Nun ist aber bekanntlich

(21.) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \mu = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1},$$

folglich wird

(22.) $$m(x_2{}^2 - x_1{}^2) + 2\mu(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + 2(x_2y_1 - x_1y_2)$$
$$= (x_2y_2 - x_1y_1) + (x_2y_1 - x_1y_2).$$

Dies giebt

$$(23.)\quad F = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{ab}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

Es sei z. B.

$$(24.)\qquad a = 6,\quad b = 4,\quad x_1 = -1,\quad x_2 = +5,$$

also

$$(25.)\qquad y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{35},\quad y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{11},$$

dann geht Gleichung (23.) über in

$$(26.)\quad F = 12\left[\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{6}\right)\right] - \frac{1}{3}(\sqrt{11} + 5\sqrt{35}).$$

Dabei ist

$$12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11{,}821\,327,\qquad \sqrt{11} = \ 3{,}327\,708,$$

$$12\arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = \ 2{,}009\,377,\qquad 5\sqrt{35} = 29{,}580\,399,$$

also

$$(27.)\qquad F = 13{,}830\,704 - \tfrac{1}{3}\,.\,32{,}908\,107 = 2{,}861\,335.$$

Verbindet man den Nullpunkt $O$ mit den Punkten $P_1$ und $P_2$ (Fig. 35), so erhält man ein Dreieck $OP_1P_2$ mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$. Wenn man daher dieses Dreieck zu dem Segmente über der Sehne $P_1P_2$ hinzufügt, so ergiebt sich nach Gleichung (23.) für den Sector $P_1OP_2$ der Flächeninhalt

$$(28.)\qquad \text{Sector} = \frac{ab}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right].$$

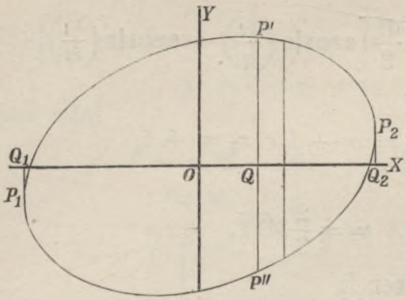
**Aufgabe 4.** Eine *Ellipse* sei durch die Gleichung

$$(29.)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt derselben berechnen.

**Auflösung.** Der Anfangspunkt der Coordinaten liegt im Mittelpunkte der Curve, aber die Coordinaten-Axen fallen nicht

Fig. 36.




mit den Axen der Ellipse zusammen (Fig. 36). Damit die Gleichung eine reelle Ellipse darstellt, müssen die Ungleichungen

$$(30.)\quad \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ a_{22}a_{33} < 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Aus Gleichung (29.) folgt dann

$$a_{22}y' = -a_{12}x + \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$

$$a_{22}y'' = -a_{12}x - \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$

also

$$(31.)\quad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}}\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}}.$$

Nach den in den Ungleichungen (30.) ausgesprochenen Voraussetzungen kann man zwei positive Grössen $c^2$ und $k^2$ durch die Gleichungen

$$(32.)\quad c^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad k^2 = -\frac{a_{22}a_{33}}{c^2}$$

erklären, so dass Gleichung (31.) übergeht in

$$(33.)\quad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}}\sqrt{-c^2x^2 + k^2c^2} = \frac{2c}{a_{22}}\sqrt{k^2 - x^2};$$

folglich wird

$$(34.)\quad F = \int_{x_1}^{x_2}(y' - y'')dx = \frac{2c}{a_{22}}\int_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{k^2 - x^2}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen beachte man, dass $(y'-y'')dx$ einer der Streifen ist, in welche man sich die ganze Fläche zerlegt denken muss. Die durch die Integration ausgeführte Summation aller dieser Streifen beginnt in demjenigen Punkte $P_1$ und endigt in demjenigen Punkte $P_2$, in welchem der Punkt $P'$ mit dem Punkte $P''$ zusammenfällt, so dass die Tangenten in den Punkten $P_1$ und $P_2$ zur $Y$-Axe parallel sind. Die Werthe von $x_1$ und $x_2$ findet man daher, indem man

$$y' - y'' = \frac{2c}{a_{22}} \sqrt{k^2 - x^2}$$

gleich 0 setzt. Daraus ergiebt sich

$$x_1 = -k \quad \text{und} \quad x_2 = +k, \tag{35.}$$

$$F = \frac{2c}{a_{22}} \int_{-k}^{+k} dx \sqrt{k^2 - x^2}, \tag{36.}$$

also nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$\begin{aligned} F &= \frac{2c}{a_{22}} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{k^2 - x^2} + \frac{k^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{k}\right) \right]_{-k}^{+k} \\ &= \frac{k^2 c}{a_{22}} [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \frac{k^2 c \pi}{a_{22}}, \end{aligned} \tag{37.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (32.)

$$F = -\frac{a_{22} a_{33} \pi}{a_{22} c} = -\frac{a_{33} \pi}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}. \tag{38.}$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man die Halbaxen $a$ und $b$ bestimmt und in die Formel

$$F = ab\pi$$

einsetzt, denn es ist bekanntlich

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}}, \\ b &= \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}}, \end{aligned} \tag{39.}$$

also

$$\begin{aligned} ab &= \frac{-2a_{33}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11} - a_{22})^2 - 4a_{12}^2}} \\ &= \frac{-a_{33}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}. \end{aligned} \tag{40.}$$

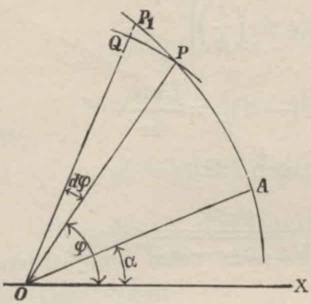
§ 14.

## Quadratur der Curven bei Anwendung von Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 92.)

Bei Anwendung von Polarcoordinaten mögen die Coordinaten eines Punktes $P$ immer mit $r$ und $\varphi$, die eines Punktes $P_1$ mit $r_1$ und $\varphi_1$, allgemein die eines Punktes $P_n$ mit $r_n$ und $\varphi_n$ bezeichnet werden. Nennt man den Flächeninhalt einer Figur $AOP$, welche durch zwei beliebige *Radii vectores* $OA$, $OP$ und durch den Curvenbogen $AP$ begrenzt wird (Fig. 37), $S$ (*Sector*), so ist $S$ eine Function von $\varphi$. Den unendlich kleinen Zuwachs

Fig. 37.




(1.) $$dS = POP_1,$$

welchen diese Function $S$ erleidet, wenn der Winkel $XOP$ gleich $\varphi$ um $d\varphi$ zunimmt, findet man, indem man $POP_1$ als ein geradliniges Dreieck ansieht. Dadurch erhält man nach bekannten Formeln

(2.) $$dS = \tfrac{1}{2}OP\,.\,OP_1 \sin(d\varphi) = \tfrac{1}{2}r(r+dr)\cdot\frac{\sin(d\varphi)}{d\varphi}\cdot d\varphi,$$

oder, weil für einen verschwindend kleinen Werth von $d\varphi$

(3.) $$\lim(r+dr) = r \quad \text{und} \quad \lim\frac{\sin(d\varphi)}{d\varphi} = 1$$

ist,

(4.) $$dS = \tfrac{1}{2}r^2 d\varphi,$$

also

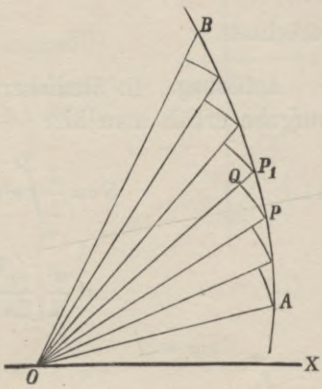
(5.) $$S = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

wobei $\sphericalangle XOA = \alpha$ und $\sphericalangle XOP = \varphi$ gesetzt ist.

Gewöhnlich wird bei den Anwendungen auch die obere Grenze $\varphi$ einen constanten Werth $\beta$ haben, welcher dem *Radius vector* $OB$ (Fig. 38) entspricht.

Auch dieses Integral kann als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen betrachtet werden. Theilt man nämlich den Winkel $AOB$ in $n$ (gleiche oder ungleiche) Theile, so wird auch der Sector $AOB$ in $n$ Theile zerlegt (Fig. 38), von denen man jeden einzelnen $POP_1$ unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung, nämlich unter Vernachlässigung der Dreiecke $PQP_1$, als einen Kreissector mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}r^2d\varphi$ betrachten kann. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass die Anzahl $n$ der Sectoren unendlich gross wird, und dass die einzelnen Sectoren dabei sämmtlich unendlich klein werden.

Fig. 38.




Durch Summirung aller dieser unendlich kleinen Sectoren findet man für den Flächeninhalt des ganzen Sectors

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \tag{6.}$$

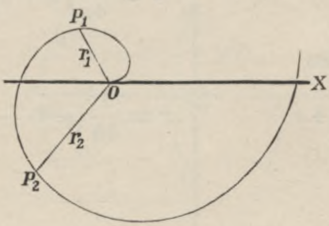
## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll den Flächeninhalt des Sectors $P_1OP_2$ bei der *Archimedischen Spirale*

$$r = a\varphi \tag{7.}$$

berechnen (Fig. 39).

Fig. 39.




**Auflösung.** Nach Gleichung (6.) ist in diesem Falle

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi \tag{8.}$$

$$= \frac{a^2}{6}\left[\varphi^3\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{6a}(a^3\varphi_2{}^3 - a^3\varphi_1{}^3),$$

also

(9.) $$S = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}.$$

**Aufgabe 2.** Man soll den Flächeninhalt des Sectors $P_1OP_2$ bei der *allgemeinen Spirale*

(10.) $$r = a\varphi^n$$

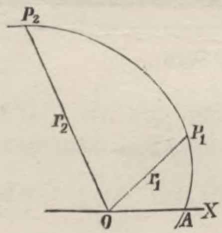
berechnen.

**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe erhält man hier

(11.) $$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^{2n} d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2(\varphi_2^{2n+1} - \varphi_1^{2n+1})}{2(2n+1)}.$$

Fig. 40.




**Aufgabe 3.** Man soll den Flächeninhalt des Sectors $P_1OP_2$ bei der *logarithmischen Spirale*

(12.) $$r = e^{a\varphi}$$

berechnen (Fig. 40).

**Auflösung.** Aus Gleichung (6.) erhält man in diesem Falle

(13.) $$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{4a}\int\limits_{(\varphi_1)}^{(\varphi_2)} e^{2a\varphi} d(2a\varphi) = \frac{1}{4a}\left[e^{2a\varphi}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

also

(14.) $$F = \frac{1}{4a}(e^{2a\varphi_2} - e^{2a\varphi_1}) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}.$$

**Aufgabe 4.** Die Gleichung

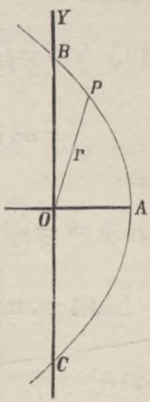
$$(15.)\qquad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

stellt eine *Parabel* dar (Fig. 41); man soll das Segment $BAC$ berechnen.

Fig. 41.




**Auflösung.** Aus Gleichung (15.) folgt in diesem Falle

$$(16.)\quad S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

oder, wenn man

$$\varphi = 2t$$

setzt und Formel Nr. 44 der Tabelle berücksichtigt,

$$(17.)\qquad S = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^4 t} = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (1 + \mathrm{tg}^2 t)d(\mathrm{tg}\, t)$$

$$= a^2\Big[\mathrm{tg}\, t + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 t\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = a^2(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}) = \frac{8a^2}{3}.$$

**Aufgabe 5.** Man soll den Flächeninhalt der *Cardioide* mit der Gleichung

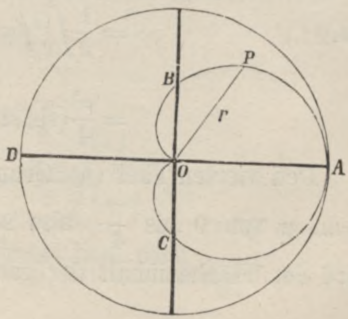
$$(18.)\qquad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

berechnen (Fig. 42).

Fig. 42.




**Auflösung.** Setzt man

$$\varphi = 2t,$$

so wird zunächst mit Rücksicht auf Formel Nr. 65 der Tabelle

$$(19.)\qquad S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = a^2\int_0^{t} \cos^4 t\, dt$$

$$= a^2\left[\tfrac{1}{4}\cos^3 t \sin t + \tfrac{3}{8}\cos t \sin t + \tfrac{3}{8}t\right]_0^t,$$

also

$$(20.)\quad S = \frac{a^2}{8}\left[2\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3\,\frac{\varphi}{2}\right].$$

Lässt man $\varphi$ bis $\pi$, also $\frac{\varphi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so wird

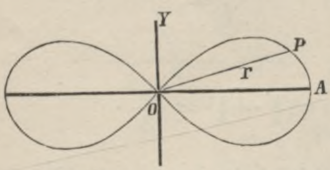
$$(21.)\qquad S = \frac{3a^2\pi}{16}$$

die Hälfte des gesuchten Flächeninhalts, für welchen man daher

$$(22.)\qquad F = \frac{3a^2\pi}{8}$$

erhält. *Der Flächeninhalt der Cardioide verhält sich also zum Flächeninhalt des Kreises mit dem Halbmesser a wie 3 zu 8.*

Fig. 43.




**Aufgabe 6.** Man soll den Flächeninhalt der *Lemniscate* berechnen (Fig. 43).

**Auflösung.** Die Gleichung der Lemniscate ist

$$(23.)\qquad r^2 = a^2\cos(2\varphi),$$

folglich wird

$$(24.)\qquad S = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \cos(2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\sin(2\varphi)\right]_0^{\varphi} = \frac{a^2}{4}\sin(2\varphi).$$

Den vierten Theil (Quadranten) der Lemniscate erhält man, wenn $\varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$, also $2\varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Lemniscate

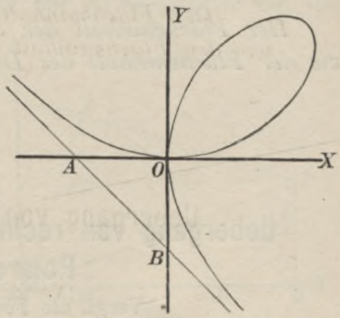
$$F = a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2. \tag{25.}$$

**Aufgabe 7.** Die Gleichung des *Folium Cartesii* war für rechtwinklige Coordinaten

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0; \tag{26.}$$

man soll den Flächeninhalt der Schleife berechnen (Fig. 44).

Fig. 44.




**Auflösung.** Bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten müsste man die kubische Gleichung (26.) nach $y$ auflösen und erhielte einen Ausdruck für $y' - y''$, dessen Integration grosse Schwierigkeiten bereiten würde. Führt man dagegen durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{27.}$$

Polarcoordinaten ein, so geht Gleichung (26.) über in

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}; \tag{28.}$$

deshalb findet man für den gesuchten Flächeninhalt

$$F = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}. \tag{29.}$$

Indem man Zähler und Nenner des Bruches, der unter dem Integralzeichen steht, durch $\cos^6\varphi$ dividirt und beachtet, dass

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d(\operatorname{tg}\varphi)$$

ist, ergiebt sich

$$F = \frac{9a^2}{2}\int\limits_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3\varphi)^2} = \frac{9a^2}{2}\int\limits_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2}, \tag{30.}$$

wobei $\operatorname{tg}\varphi$ mit $t$ bezeichnet ist. Setzt man noch

$$1 + t^3 = z, \quad \text{also} \quad 3t^2dt = dz,$$

so wird

$$\int \frac{3t^2dt}{(1+t^3)^2} = \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2}dz = -\frac{1}{z}, \tag{31.}$$

folglich ist

$$F = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{z}\right]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}. \tag{32.}$$

*Der Flächeninhalt der Schleife ist daher dreimal so gross wie der Flächeninhalt des Dreiecks AOB.*

## § 15.

## Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 93.)

Ist eine Curve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1.}$$

gegeben, so führt man zur Berechnung des von ihr eingeschlossenen Flächeninhalts häufig mit gutem Erfolge Polarcoordinaten ein. Aus den Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{2.}$$

findet man nämlich

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{3.}$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \tag{4.}$$

und wenn man diese Gleichung mit

$$r^2\cos^2\varphi = x^2$$

multiplicirt,

$$r^2d\varphi = xdy - ydx = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt. \tag{5.}$$

Dadurch geht Formel Nr. 92 der Tabelle über in

$$(6.)\quad S = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\limits_{(\alpha)}^{(\beta)} (xdy - ydx) = \tfrac{1}{2}\int\limits_{(\alpha)}^{(\beta)}\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dt.$$

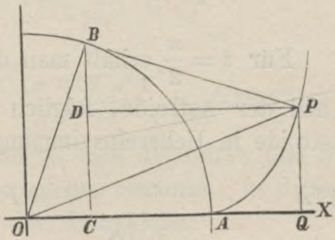
## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll den Sector der *Kreisevolvente* mit den Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 45).

Fig. 45.




**Auflösung.** Aus den Gleichungen (7.) findet man

$$(8.)\quad \begin{cases} dx = at\cos t\,dt, \\ dy = at\sin t\,dt, \end{cases}$$

folglich wird

$$(9.)\quad xdy - ydx = a^2t^2dt,$$

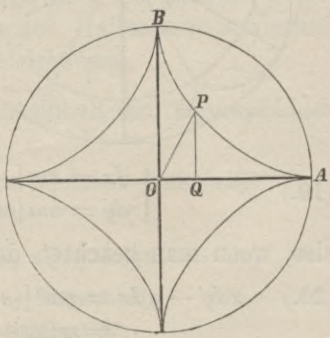
$$(10.)\quad S = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^t t^2dt = \frac{a^2t^3}{6} = AOP.$$

**Aufgabe 2.** Man soll den Flächeninhalt der *Astroide* mit den Gleichungen

$$(11.)\quad x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

berechnen (Fig. 46).

Fig. 46.




**Auflösung.** Aus den Gleichungen (11.) findet man

$$(12.)\quad \begin{cases} dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt, \\ dy = +3a\sin^2 t\cos t\,dt, \end{cases}$$

folglich wird

$$(13.)\quad xdy - ydx = 3a^2(\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt = 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt,$$

$$(14.)\qquad S = \frac{3a^2}{2}\int_0^t \sin^2 t \cos^2 t\, dt = AOP,$$

oder

$$(15.)\qquad S = \frac{3a^2}{8}\int_0^t 4\sin^2 t \cos^2 t\,.\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_{(0)}^{(t)} \sin^2(2t)\, d(2t).$$

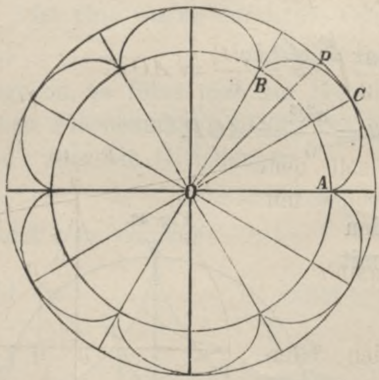
Dies giebt nach Formel Nr. 63 der Tabelle

$$(16.)\quad S = \frac{3a^2}{16}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(2t)\cos(2t) + t\right]_0^t = \frac{3a^2}{16}\left[t - \tfrac{1}{4}\sin(4t)\right].$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Sector $AOB$, d. h. den vierten Theil der Astroide, folglich ist der Flächeninhalt der ganzen Astroide in Uebereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 11

$$(17.)\qquad F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Fig. 47.




**Aufgabe 3.** Man soll den Flächeninhalt der *Epicykloiden* mit den Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} x = a[m\cos t - \cos(mt)], \\ y = a[m\sin t - \sin(mt)] \end{cases}$$

berechnen (Fig. 47).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (18.) folgt

$$(19.)\qquad \begin{cases} dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]\,dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]\,dt, \end{cases}$$

also, wenn man beachtet, dass hier $m = n + 1$ zu setzen ist,

$$(20.)\quad \begin{aligned} xdy - ydx &= ma^2[(m+1) - (m+1)\cos(nt)]\,dt \\ &= m(m+1)a^2[1 - \cos(nt)]\,dt. \end{aligned}$$

Dies giebt für den Sector $AOP$

$$(21.)\qquad S = \frac{m(m+1)a^2}{2}\int_0^t [1 - \cos(nt)]\,dt$$

$$= \frac{m(m+1)a^2}{2}\left[t - \frac{1}{n}\sin(nt)\right].$$

Wenn der Sector durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, wenn es sich also um den Sector $AOBC$ handelt, so hat man den Wälzungswinkel des rollenden Kreises

$$nt = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n}$$

zu setzen und erhält

$$(22.)\qquad S = \frac{m(m+1)a^2\pi}{n} = \frac{(n+1)(n+2)a^2\pi}{n} = AOBC.$$

Ist $n$ eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve und die ganze Fläche besteht genau aus $n$ solchen Sectoren; in diesem Falle wird also der Flächeninhalt der Epicykloide

$$(23.)\qquad F = n\,.\,AOBC = (n+1)(n+2)a^2\pi.$$

Ist z. B. $n = 6$, wie es in Figur 47 der Fall ist, so wird

$$(24.)\qquad F = 56a^2\pi.$$

Für $n = 1$ ist die Epicykloide eine *Cardioide*, deren Flächeninhalt demnach

$$(25.)\qquad F = 6a^2\pi$$

ist. Dieses Resultat stimmt mit dem in § 14 Aufgabe 5 gefundenen überein; nur war damals der Halbmesser $a$ viermal grösser als in den hier benutzten Gleichungen.

**Aufgabe 4.** Man soll den Flächeninhalt der *Hypocykloiden* mit den Gleichungen

$$(26.)\qquad x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 48).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (26.) folgt

$$(27.)\qquad \begin{cases} dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt, \end{cases}$$

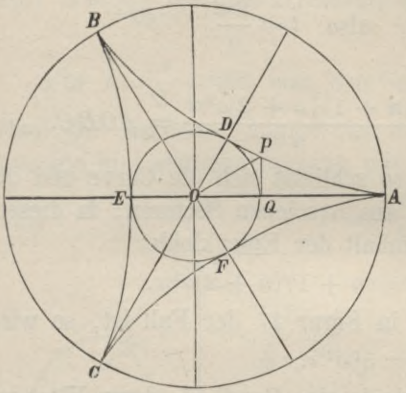
also, wenn man beachtet, dass hier $m = n - 1$ zu setzen ist,

$$(28.) \qquad xdy - ydx = ma^2[(m-1) - (m-1)\cos(nt)]dt$$
$$= m(m-1)a^2[1 - \cos(nt)]dt,$$

folglich wird

$$(29.) \qquad S = \frac{m(m-1)a^2}{2}\int_0^t [1 - \cos(nt)]dt$$
$$= \frac{m(m-1)a^2}{2}\left[t - \frac{1}{n}\sin(nt)\right] = AOP.$$

Fig. 48.




Wenn der Sector durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, so hat man den Wälzungswinkel dieses Kreises

$$nt = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n}$$

zu setzen; dann wird

$$(30.) \quad S = \frac{m(m-1)a^2\pi}{n}$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)a^2\pi}{n}$$
$$= AOBD.$$

Ist $n$ eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve, und man erhält für den Flächeninhalt der ganzen Hypocykloide

$$(31.) \qquad F = n \,.\, AOBD = (n-1)(n-2)a^2\pi.$$

Für den in Figur 48 berücksichtigten Fall ist

$$(32.) \qquad n = 3 \quad \text{und} \quad F = 2a^2\pi,$$

also doppelt so gross wie der rollende Kreis, oder wie der durch die Punkte $DEF$ gelegte Kreis.

Bei der *Astroide* hat man $n = 4$ zu setzen und erhält in Uebereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 11 und Aufgabe 2 in diesem Paragraphen

$$(33.) \qquad F = 6a^2\pi,$$

nur ist in der vorliegenden Darstellung der Werth von $a$ viermal kleiner als dort.

III. Abschnitt.

# Kubatur der Rotationskörper.

## § 16.

## Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers.

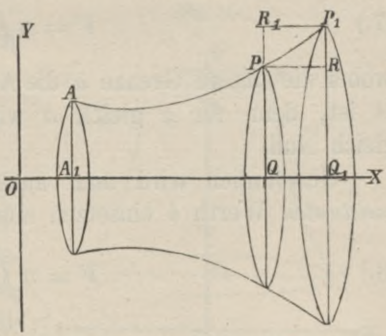
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 94—96.)

Eine Curve (Fig. 49) mit der Gleichung

(1.) $$y = f(x)$$

rotire um die $X$-Axe, dann beschreibt jeder Punkt der Curve einen Kreis. Um das Volumen $V$ des Körpers zu berechnen, welcher bei der Rotation von der Figur $A_1APQ$ beschrieben wird, beachte man zunächst, dass $V$ eine Function von $x$ ist. Wenn nämlich $OQ = x$ um die Grösse $QQ_1 = \Delta x$ wächst, so wächst auch $V$ um den von dem Viereck $QPP_1Q_1$ beschriebenen Rotationskörper $\Delta V$. Dabei ist $\Delta V$ *grösser* als der von dem Rechteck $QPRQ_1$ bei der Rotation beschriebene Cylinder $y^2\pi . \Delta x$ und *kleiner* als der von dem Rechteck $QR_1P_1Q_1$ bei der Rotation beschriebene Cylinder $y_1^2\pi . \Delta x$; es ist daher

Fig. 49.




(2.) $$y^2\pi . \Delta x \leqq \Delta V \leqq y_1^2\pi . \Delta x.$$

Dies gilt nur, wenn die Curve (wie in Figur 49) vom Punkte $P$ bis zum Punkte $P_1$ *steigt*; wenn sie dagegen in diesem Intervalle *fällt*, so wird

$$y^2\pi \,.\, \Delta x \geqq \Delta V \geqq y_1{}^2\pi \,.\, \Delta x. \tag{3.}$$

Steigt und fällt die Curve in dem Intervalle von $P$ bis $P_1$ abwechselnd (vergl. Fig. 3), so sei $y'$ die Ordinate des höchsten Punktes $H$ und $y''$ die Ordinate des tiefsten Punktes $T$, dann wird

$$y'^2\pi \,.\, \Delta x \geqq \Delta V \geqq y''^2\pi \,.\, \Delta x. \tag{4.}$$

In dieser Ungleichung sind die beiden vorhergehenden Ungleichungen (2.) und (3.) als besondere Fälle inbegriffen. Indem man die Ungleichung (4.) durch $\Delta x$ dividirt, erhält man

$$y'^2\pi \geqq \frac{\Delta V}{\Delta x} \geqq y''^2\pi. \tag{5.}$$

Da nun für $\lim \Delta x = 0$

$$\lim y' = \lim y'' = y$$

wird, so folgt hieraus

$$\frac{dV}{dx} = y^2\pi, \quad \text{oder} \quad dV = y^2\pi dx; \tag{6.}$$

dies giebt

$$V = \pi\int_a^x y^2 dx, \tag{7.}$$

wobei die untere Grenze $a$ die Abscisse $OA_1$ des Curvenpunktes $A$ ist, denn für $x$ gleich $a$ wird das Volumen des Körpers gleich Null.

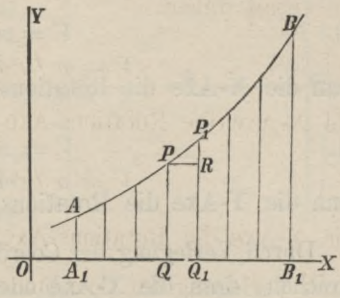
Gewöhnlich wird man auch für die obere Grenze einen *constanten* Werth $b$ einsetzen müssen, so dass man erhält

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx. \tag{8.}$$

Auch dieses Integral kann man als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen ansehen. Zerlegt man nämlich die ebene Figur $A_1ABB_1$ durch Parallele zur $Y$-Axe in $n$ Streifen, die alle verschwindend klein werden, wenn $n$ in's Unbegrenzte wächst (Fig. 50), so darf man diese Streifen als

Rechtecke betrachten, denn die kleinen Dreiecke $PRP_1$, welche dabei vernachlässigt werden, beschreiben bei der Rotation ringförmige Körper, deren Volumina unendlich kleine Grössen *höherer Ordnung* sind.

Fig. 50.




Das Volumen des Cylinders, welcher bei der Rotation von dem Rechteck $QPRQ_1$ beschrieben wird, ist aber

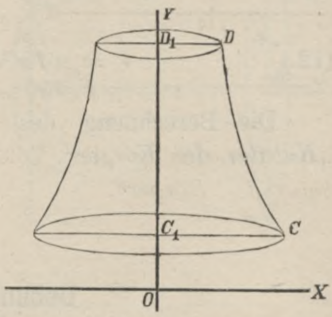
$$y^2\pi \,.\, dx,$$

wenn man die Höhe $dx$ des Cylinders sogleich verschwindend klein annimmt. Die Summe aller dieser unendlich vielen, unendlich flachen Cylinder giebt dann das gesuchte Volumen des Rotationskörpers, nämlich in Uebereinstimmung mit Gleichung (8.)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

In ähnlicher Weise findet man auch das Volumen eines Rotationskörpers, bei welchem die $Y$-Axe die Rotations-Axe ist; nur muss man in diesem Falle $x$ und $y$ mit einander vertauschen, so dass man

Fig. 51.




$$(9.) \qquad V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

erhält. Es ist dabei zu beachten, dass hier $y$ die Integrations-Veränderliche ist, und dass man deshalb erst integriren kann, nachdem man in Gleichung (9.) $x^2$ als Function von $y$ dargestellt hat, während in Gleichung (8.) $x$ die Integrations-Veränderliche war.

Um dies anzudeuten, mögen die Integrationsgrenzen $a$ und $b$, da sie besondere Werthe von $x$ sind, in Gleichung (8.) mit $x_1$ und $x_2$ bezeichnet werden; und ebenso mögen in Gleichung (9.)

die Integrationsgrenzen $c$ und $d$, da sie besondere Werthe von $y$ sind, mit $y_1$ und $y_2$ bezeichnet werden.

Man erhält daher

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \tag{10.}$$

wenn die $X$-Axe die Rotations-Axe ist, und

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy, \tag{11.}$$

wenn die $Y$-Axe die Rotations-Axe ist.

Durch Verlegung der Coordinaten-Axen kann man es immer erreichen, dass die $X$-Axe oder die $Y$-Axe mit der Rotations-Axe zusammenfällt. Ist z. B. in Figur 52 die Gerade $C_1D_1$ mit der Gleichung

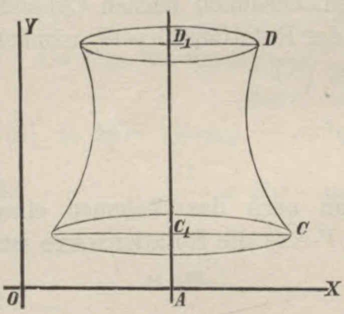
$$x = a$$

Rotations-Axe, so verschiebe man die $Y$-Axe parallel mit sich um die Strecke $OA$ gleich $a$, indem man

$$x = x' + a, \quad \text{oder} \quad x' = x - a$$

setzt, dann wird

Fig. 52.




$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x'^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x - a)^2 dy. \tag{12.}$$

Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „*Kubatur der Körper*".

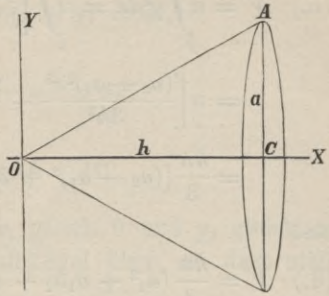
## § 17.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Ein *gerader Kreiskegel*, dessen Grundkreis den Halbmesser $a$ hat, und dessen Höhe gleich $h$ ist, entsteht, indem ein rechtwinkliges Dreieck $OCA$ (Fig. 53) um die $X$-Axe rotirt; man soll das Volumen des Kegels berechnen.

**Auflösung.** In dem rechtwinkligen Dreieck $OCA$ ist die Kathete $OC$ gleich $h$, und die andere Kathete $CA$ gleich $a$, folglich hat die Hypotenuse $OA$ die Gleichung

Fig. 53.




$$y = \frac{ax}{h}. \tag{1.}$$

Das Volumen des Kegels wird daher nach Formel Nr. 94 der Tabelle

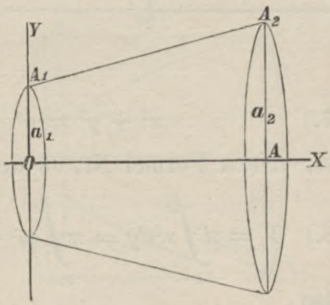
$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \frac{a^2\pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx, \tag{2.}$$

also

$$V = \frac{a^2\pi}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2\pi h}{3}. \tag{3.}$$

**Aufgabe 2.** Ein *abgestumpfter gerader Kreiskegel* habe die Höhe $h$ und sei begrenzt durch die beiden Kreise mit den Halbmessern $a_1$ und $a_2$; man soll das Volumen des Kegelstumpfes berechnen.

Fig. 54.




**Auflösung.** Der Kegelstumpf entsteht durch Rotation des Paralleltrapezes $OA_1A_2A$ um die $X$-Axe (Fig. 54), wobei $OA$ gleich $h$ mit der $X$-Axe und $OA_1$ gleich $a_1$ mit der $Y$-Axe zusammenfällt. Die Gleichung der Geraden $A_1A_2$ ist daher

$$y = \frac{a_2 - a_1}{h} x + a_1, \tag{4.}$$

folglich wird

$$(5.)\quad V = \pi\int_0^h y^2dx = \pi\int_0^h\Big[\frac{(a_2-a_1)^2x^2}{h^2} + \frac{2(a_2-a_1)a_1x}{h} + a_1^2\Big]dx$$

$$= \pi\Big[\frac{(a_2-a_1)^2x^3}{3h^2} + \frac{2(a_2-a_1)a_1x^2}{2h} + a_1^2x\Big]_0^h$$

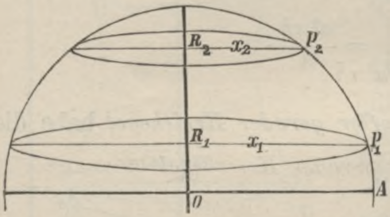
$$= \frac{h\pi}{3}[(a_2-a_1)^2 + 3(a_2-a_1)a_1 + 3a_1^2],$$

also

$$(6.)\quad V = \frac{h\pi}{3}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2).$$

**Aufgabe 3.** Der Halbmesser einer *Kugel* sei $a$; man soll das Volumen einer *Kugelschicht* berechnen, welche oben und unten von zwei Kreisen mit den Halbmessern $x_1$ und $x_2$ begrenzt ist und die Höhe $h$ hat.

Fig. 55.




**Auflösung.** Die Kugelschicht entsteht (Fig. 55) durch Rotation der Figur $R_1P_1P_2R_2$ um die $Y$-Axe, wobei $P_1P_2$ der Bogen eines Kreises mit der Gleichung

$$(7.)\qquad x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - y^2$$

ist. Nach Formel Nr. 95 der Tabelle erhält man daher

$$(8.)\quad V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2dy = \pi\int_{y_1}^{y_2}(a^2-y^2)dy = \pi\Big[a^2y - \frac{y^3}{3}\Big]_{y_1}^{y_2},$$

also

$$(9.)\quad V = \frac{\pi}{3}[3a^2(y_2-y_1) - (y_2^3 - y_1^3)]$$

$$= \frac{(y_2-y_1)\pi}{3}[3a^2 - y_2^2 - y_1y_2 - y_1^2]$$

$$= \frac{(y_2-y_1)\pi}{6}[3(a^2-y_2^2) + 3(a^2-y_1^2) + (y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2)].$$

Nun ist aber

$$y_2 - y_1 = h, \quad y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = h^2, \tag{10.}$$

und nach Gleichung (7.)

$$a^2 - y_1^2 = x_1^2, \quad a^2 - y_2^2 = x_2^2,$$

folglich wird

$$V = \frac{h\pi}{6}(3x_1^2 + 3x_2^2 + h^2). \tag{11.}$$

Setzt man in Gleichung (8.) $y_1$ gleich 0 und $y_2$ gleich $a$, so geht die Kugelschicht in die Halbkugel über, so dass man für das Volumen der ganzen Kugel

$$V = 2\pi \left[a^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{4a^3\pi}{3} \tag{12.}$$

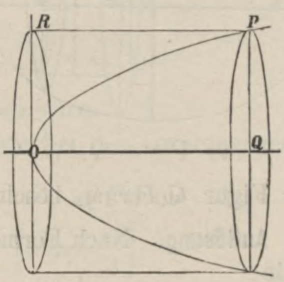
erhält.

**Aufgabe 4.** Die *Parabel OP* mit der Gleichung

$$y^2 = 2px \tag{13.}$$

rotire um die $X$-Axe (Fig. 56); man soll das Volumen des von der Figur $OQP$ beschriebenen *Rotations-Paraboloids* berechnen.

Fig. 56.




**Auflösung.** Nach Formel Nr. 94 der Tabelle ist

$$V = \pi\int_0^x y^2dx = 2p\pi\int_0^x xdx \tag{14.}$$

$$= 2p\pi \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x \,.\, 2px \,.\, \pi}{2}$$

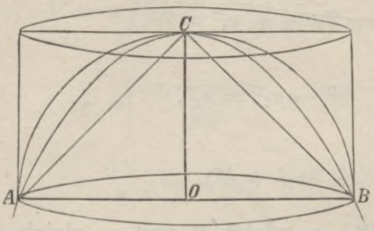
$$= \frac{xy^2\pi}{2}.$$

Dies giebt den Satz: *Das Volumen des Rotations-Paraboloids ist halb so gross wie der von dem entsprechenden Rechteck OQPR mit den Seiten x und y bei der Rotation beschriebene Cylinder.*

Für $x$ gleich $y$ wird

$$V = \frac{x^3\pi}{2}. \tag{15.}$$

Fig. 57.




Beschreibt man über einem Kreise mit dem Halbmesser $x$ einen Cylinder mit der Höhe $x$, eine *Halbkugel*, ein *Rotations-Paraboloid* und einen *Kegel* mit der Höhe $x$ (Fig. 57), so sind die Volumina dieser vier Körper bezw.

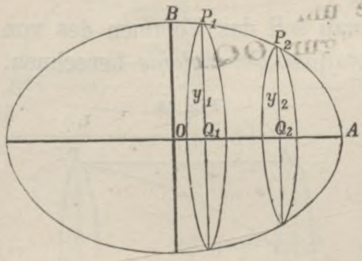
$$x^3\pi, \quad \frac{2x^3\pi}{3}, \quad \frac{x^3\pi}{2}, \quad \frac{x^3\pi}{3}$$

und verhalten sich daher zu einander wie

$$6:4:3:2.$$

**Aufgabe 5.** Rotirt eine *Ellipse* mit der Gleichung

Fig. 58.




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{16.}$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

um die grosse Axe (Fig. 58), so heisst der dabei beschriebene Rotationskörper „*längliches Rotations-Ellipsoid*"; man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation von der Figur $Q_1P_1P_2Q_2$ beschrieben wird.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 94 der Tabelle wird in diesem Falle

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{x_1}^{x_2}(a^2 - x^2)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} \tag{17.}$$

$$= \frac{b^2\pi}{3a^2}[3a^2(x_2 - x_1) - (x_2{}^3 - x_1{}^3)]$$

$$= \frac{b^2\pi(x_2 - x_1)}{3a^2}(3a^2 - x_2{}^2 - x_1x_2 - x_1{}^2),$$

$$(17a.)\quad V = \frac{\pi(x_2 - x_1)}{6}\left[\frac{3b^2}{a^2}(a^2 - x_2{}^2) + \frac{3b^2}{a^2}(a^2 - x_1{}^2) + \frac{b^2}{a^2}(x_2 - x_1)^2\right],$$

oder, wenn man die Höhe $x_2 - x_1$ der Schicht wieder mit $h$ bezeichnet und Gleichung (16.) beachtet,

$$(18.)\quad V = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1{}^2 + 3y_2{}^2 + \frac{b^2h^2}{a^2}\right).$$

Für $y_1$ gleich 0, $y_2$ gleich 0, $h$ gleich $2a$ erhält man das Volumen des ganzen Rotations-Ellipsoids, nämlich

$$(19.)\quad V = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

**Aufgabe 6.** Rotirt eine *Ellipse* mit der Gleichung

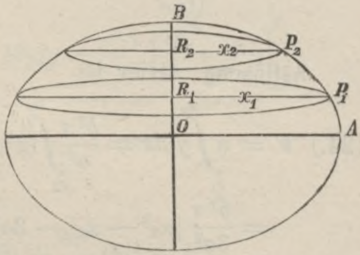
$$(20.)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

um die *kleine Axe*, so heisst der dabei beschriebene Rotationskörper „*Sphäroid*“ (Fig. 59); man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation durch die Figur $R_1P_1P_2R_2$ beschrieben wird.

Fig. 59.




**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(21.)\quad V = \frac{a^2\pi}{b^2}\int_{y_1}^{y_2}(b^2 - y^2)dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\left[b^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{h\pi}{6}\left(3x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + \frac{a^2h^2}{b^2}\right),$$

wobei die Höhe $y_2 - y_1$ mit $h$ bezeichnet ist.

Für $x_1$ gleich 0, $x_2$ gleich 0, $h$ gleich $2b$ erhält man das Volumen des ganzen Sphäroids, nämlich

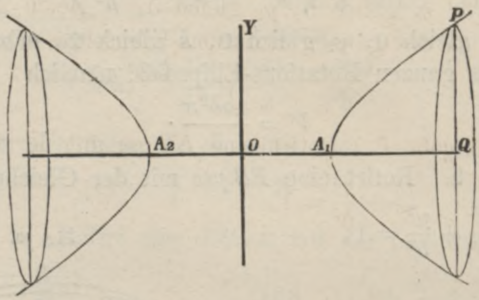
$$(22.)\quad V = \frac{4a^2b\pi}{3}.$$

**Aufgabe 7.** Rotirt eine *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(23.)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

um die $X$-Axe, so entsteht das „*zweischalige Rotations-Hyperboloid*“ (Fig. 60); man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.

Fig. 60.




**Auflösung.** Hier ist

$$(24.)\quad V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{x_1}^{x_2}(x^2 - a^2)dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{x^3}{3} - a^2x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{b^2\pi}{3a^2}[x_2^3 - x_1^3 - 3a^2(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{b^2\pi(x_2 - x_1)}{3a^2}(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3a^2)$$

$$= \frac{\pi(x_2 - x_1)}{6}\left[\frac{3b^2}{a^2}(x_2^2 - a^2) + \frac{3b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2}(x_2 - x_1)^2\right],$$

oder, wenn man $x_2 - x_1$ mit $h$ bezeichnet und Gleichung (23.) berücksichtigt,

$$(25.)\qquad V = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right).$$

Für

$$x_1 = a,\ y_1 = 0; \quad x_2 = x,\ y_2 = y; \quad h = x - a$$

erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation von der Figur $A_1QP$ beschrieben wird, nämlich

$$(26.)\quad V = \frac{(x-a)\pi}{6}\left[3y^2 - \frac{b^2(x-a)^2}{a^2}\right] = \frac{b^2(x-a)^2\pi}{3a^2}(x+2a).$$

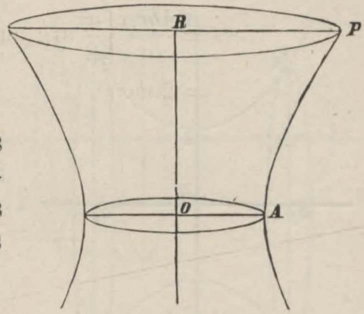
**Aufgabe 8.** Rotirt eine *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(27.)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(27a.)\quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

Fig. 61.




um die $Y$-Axe, so entsteht das „*einschalige Rotations-Hyperboloid*“ (Fig. 61); man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.

**Auflösung.** Hier ist

$$(28.)\quad V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\int_{y_1}^{y_2}(y^2 + b^2)dy = \frac{a^2\pi}{b^2}\left[\frac{y^3}{3} + b^2 y\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a^2\pi(y_2 - y_1)}{3b^2}(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2 + 3b^2),$$

oder

$$(29.)\quad V = \frac{(y_2 - y_1)\pi}{6}\left[\frac{3a^2}{b^2}(y_2^2 + b^2) + \frac{3a^2}{b^2}(y_1^2 + b^2) - \frac{a^2}{b^2}(y_2 - y_1)^2\right].$$

Bezeichnet man die Höhe $y_2 - y_1$ der Schicht wieder mit $h$, so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (27a.)

$$(30.)\quad V = \frac{h\pi}{6}\left(3x_1^2 + 3x_2^2 - \frac{a^2h^2}{b^2}\right).$$

Für

$$x_1 = a,\ y_1 = 0;\quad x_2 = x,\ y_2 = y,\ h = y$$

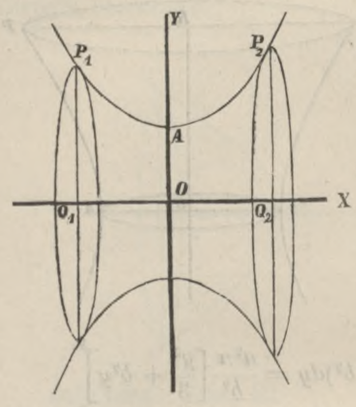
erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Figur $OAPR$ um die $Y$-Axe beschrieben wird, nämlich

$$(31.)\quad V = \frac{y\pi}{6}\left(3a^2 + 3x^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right) = \frac{a^2y\pi}{3b^2}(y^2 + 3b^2).$$

**Aufgabe 9.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* um die $X$-Axe entsteht (Fig. 62).

**Auflösung.** Die Gleichung der Kettenlinie ist

Fig. 62.




$$(32.)\quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

oder

$$\pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

folglich wird

$$(33.)\quad V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $x_1$ und $x_2$ beide positiv sind, erhält man

$$(34.)\quad V = \frac{a\pi}{2}\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\cdot\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[y_2\sqrt{y_2^2 - a^2} - y_1\sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

Wird dagegen $x_1$ negativ, wie es in Figur 62 der Fall ist, so wird

$$(34a.)\quad V = \frac{a\pi}{2}\left[y_2\sqrt{y_2^2 - a^2} + y_1\sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

Für $x_1 = 0,\ y_1 = a;\ x_2 = x,\ y_2 = y$ erhält man

$$(35.)\quad V = \frac{a\pi}{2}\left(y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right).$$

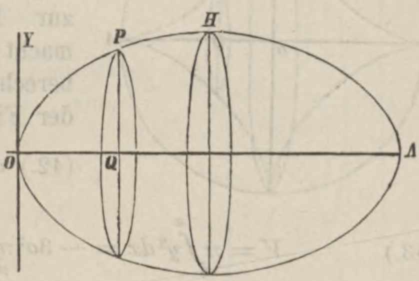
**Aufgabe 10.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cykloide* um die $X$-Axe entsteht (Fig. 63).

**Auflösung.** Die Gleichungen der Cykloide sind

$$(36.)\quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

d. h. $x$ und $y$ sind beide als Functionen einer dritten Veränderlichen $t$ dargestellt; deshalb wird es zweckmässig sein, $t$ als Integrations-Veränderliche einzuführen.

Fig. 63.




Dies giebt

$$(37.)\qquad dx = a(1 - \cos t)dt,$$

also, wenn der Körper durch Rotation der Figur $OPQ$ entsteht,

$$(38.)\qquad V = \pi\int_0^x y^2 dx = a^3\pi\int_0^t (1 - \cos t)^3 dt$$

$$= a^3\pi\int_0^t (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt,$$

folglich wird nach den Formeln Nr. 10, 13, 62 und 36 der Tabelle

$$(39.)\qquad V = a^3\pi(t - 3\sin t + \tfrac{3}{2}\sin t\cos t + \tfrac{3}{2}t - \sin t + \tfrac{1}{3}\sin^3 t)$$

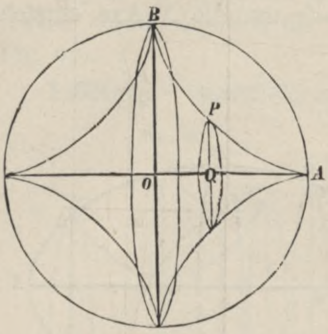
$$= a^3\pi\left[\tfrac{5}{2}t + \sin t(-4 + \tfrac{3}{2}\cos t + \tfrac{1}{3}\sin^2 t)\right].$$

Für $t = 2\pi$ erhält man das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der ganzen Cykloide $OPHA$ entsteht, nämlich

$$(40.)\qquad V = 5a^3\pi^2.$$

**Aufgabe 11.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide* um die $X$-Axe entsteht (Fig. 64).

Fig. 64.




**Auflösung.** Die Gleichungen der Astroide sind

(41.) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$

folglich ist, wenn man wieder $t$ zur Integrations-Veränderlichen macht und zunächst den Körper berechnet, welcher durch Rotation der Figur $OQPB$ entsteht,

(42.) $dx = -3a\cos^2 t\sin t dt,$

$$(43.)\qquad V = \pi\int_0^x y^2 dx = -3a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin^6 t\cos^2 t\sin t dt$$

$$= 3a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^t (1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,.\,d(\cos t).$$

Setzt man also

$$\cos t = z,$$

so wird, wenn man beachtet, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gleich 0 ist,

$$(44.)\qquad V = 3a^3\pi\int_0^z (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8)dz$$

$$= 3a^3\pi\left(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\right)$$

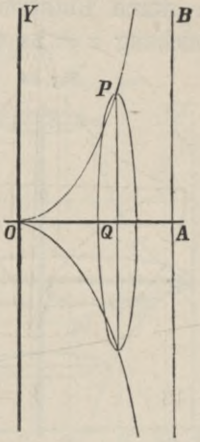
$$= \frac{a^3\pi}{105}(105\cos^3 t - 189\cos^5 t + 135\cos^7 t - 35\cos^9 t).$$

Für $t$ gleich 0 erhält man das Volumen des Körpers, welcher bei der Rotation von dem Quadranten $AOB$ beschrieben wird, folglich ist das Volumen des ganzen Rotationskörpers

$$(45.)\qquad V = \frac{2a^3\pi}{105}(105 - 189 + 135 - 35) = \frac{32a^3\pi}{105}\,.$$

**Aufgabe 12.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cissoide* um die $X$-Axe entsteht (Fig. 65).

Fig. 65.




**Auflösung.** Die Gleichungen der *Cissoide* sind

$$(46.)\quad x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi},$$

folglich wird

$$(47.)\quad dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$(48.)\quad V = \pi\int\limits_0^x y^2 dx = 16a^3\pi\int\limits_0^\varphi \frac{\sin^7\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Setzt man also

$$(49.)\quad \cos\varphi = t, \quad \sin^2\varphi = 1 - t^2,$$
$$\sin\varphi\, d\varphi = -dt,$$

so wird

$$t = 1 \quad \text{für} \quad \varphi = 0,$$

und man erhält

$$(50.)\quad V = -16a^3\pi\int\limits_1^t \frac{(1-t^2)^3 dt}{t}$$

$$= -16a^3\pi\int\limits_1^t \left(\frac{1}{t} - 3t + 3t^3 - t^5\right)dt$$

$$= -16a^3\pi\left[\mathrm{l}t - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right]_1^t$$

$$= \frac{4a^3\pi}{3}(-12\mathrm{l}t + 18t^2 - 9t^4 + 2t^6 - 11)$$

$$= \frac{4a^3\pi}{3}[-6\mathrm{l}(t^2) - 2(1-t^2)^3 - 3(1-t^2)^2 - 6(1-t^2)].$$

Nun ist

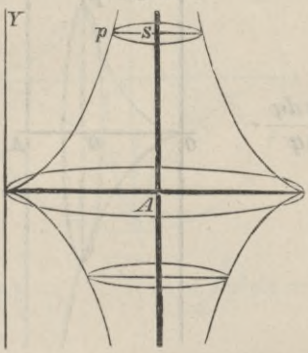
$$(51.)\quad t^2 = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{2a - x}{2a}, \quad 1 - t^2 = \frac{x}{2a},$$

folglich wird

$$(52.)\quad V = \frac{\pi}{3}\left[24a^3\mathrm{l}\left(\frac{2a}{2a-x}\right) - x^3 - 3ax^2 - 12a^2x\right].$$

**Aufgabe 13.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, der durch Rotation der *Cissoide* um die Asymptote mit der Gleichung $x = 2a$ entsteht (Fig. 66).

Fig. 66.




**Auflösung.** Zunächst möge das Volumen des Körpers berechnet werden, welcher bei der Rotation von der Figur $OASP$ beschrieben wird. Nach Formel Nr. 96 der Tabelle findet man in diesem Falle

$$(53.)\qquad V = \pi\int_0^y (x - 2a)^2 dy.$$

Dabei folgt aus den Gleichungen (46.)

$$(54.)\qquad \begin{cases} x - 2a = -2a\cos^2\varphi, \\ dy = \dfrac{2a}{\cos^2\varphi}(3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

also

$$(55.)\qquad V = 8a^3\pi\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi(3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi.$$

Nun ist

$$(56.)\qquad \begin{cases} 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2(2\varphi), \\ 3\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 + 2\cos^2\varphi = 2 + \cos(2\varphi), \end{cases}$$

so dass man erhält

$$(57.)\qquad V = a^3\pi\int_{(0)}^{(\varphi)} \sin^2(2\varphi)[2 + \cos(2\varphi)]d(2\varphi).$$

Dies giebt nach Formel Nr. 63 und 34 der Tabelle

$$(58.)\qquad V = a^3\pi[-\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) + 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3(2\varphi)].$$

Wenn $\varphi$ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so wird $y$ unendlich gross. Gleichzeitig erstreckt sich auch der Rotationskörper bis in's Unendliche; trotzdem bleibt aber sein Volumen endlich, denn man erhält

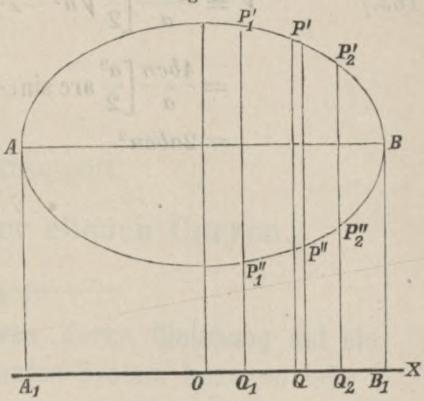
$$(59.)\qquad \lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}} V = a^3\pi^2.$$

**Aufgabe 14.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Ellipse*

(60.) $y = c \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

um die $X$-Axe entsteht (Fig. 67).

Fig. 67.




**Auflösung.** Man kann das gesuchte Volumen $V$ als die Differenz zweier Volumina $V'$ und $V''$ betrachten, von denen $V'$ bei der Rotation von der Figur $Q_1P_1'P_2'Q_2$ und $V''$ von der Figur $Q_1P_1''P_2''Q_2$ beschrieben wird. Dabei ist

$$V' = \pi\int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx, \quad V'' = \pi\int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx, \tag{61.}$$

also

$$V = V' - V'' = \pi\int_{x_1}^{x_2}(y'^2 - y''^2)dx. \tag{62.}$$

Bei der vorliegenden Aufgabe ist

$$y' = c + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y'' = c - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$y' + y'' = 2c, \quad y' - y'' = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich wird

$$(y' + y'')(y' - y'') = y'^2 - y''^2 = \frac{4bc}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{63.}$$

$$V = \frac{4bc\pi}{a}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{64.}$$

Will man das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *ganzen* Ellipse entsteht, so hat man

$$x_1 = -a, \quad x_2 = +a$$

zu setzen und erhält nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$V = \frac{4bc\pi}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{+a} \tag{65.}$$

$$= \frac{4bc\pi}{a}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin(+1) - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1)\right]$$

$$= 2abc\pi^2.$$

## IV. Abschnitt.

# Rectification der ebenen Curven.

## § 18.

## Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen ist.

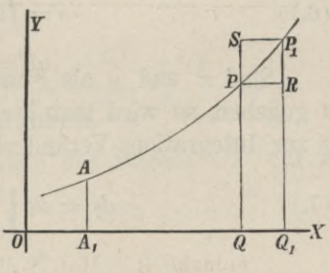
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 97.)

Ist

(1.) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer Curve (Fig. 68), so wird der Bogen $AP$ gleich $s$ ebenfalls eine Function von $x$. Wächst nämlich $x$ um die Grösse $QQ_1$ gleich $\Delta x$, so wächst auch der Bogen $s$ um die Grösse $\widehat{PP_1}$ gleich $\Delta s$. Betrachtet man zunächst $\Delta s$ als die Sehne $\overline{PP_1}$, so ist $\Delta s$ die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck $PRP_1$, so dass man erhält

Fig. 68.




(2.) $$\overline{PP_1}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RP_1}^2, \quad \text{oder} \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

(2a.) $$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Lässt man die beiden Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe rücken, so gehen $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta s$ bezw. in die Differentiale $dx$, $dy$, $ds$ über, und der unendlich kleine Bogen $PP_1$ fällt mit der unendlich kleinen Sehne $PP_1$ gleich $ds$ zusammen. Deshalb erhält man für den unendlich kleinen Zuwachs $ds$ des Bogens $s$ aus Gleichung (2a.)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3.}$$

Daraus folgt durch Integration für den Bogen $AP$ selbst

$$s = \int_a^x dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{4.}$$

Man wird hierbei die Integrationsgrenzen zweckmässiger Weise mit $x_1$ und $x_2$ bezeichnen, um anzudeuten, dass $x$ die Integrations-Veränderliche ist. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{4a.}$$

Man kann nämlich auch $y$ zur Integrations-Veränderlichen machen, denn aus Gleichung (3.) folgt

$$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{5.}$$

also

$$s = \int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{6.}$$

Sind $x$ und $y$ als Functionen einer dritten Veränderlichen $t$ gegeben, so wird man in den meisten Fällen mit gutem Erfolge $t$ zur Integrations-Veränderlichen machen und schreiben

$$ds = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{7.}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{8.}$$

In dieser Formel sind die Gleichungen (4a.) und (6.) als besondere Fälle enthalten, welche sich ergeben, wenn man

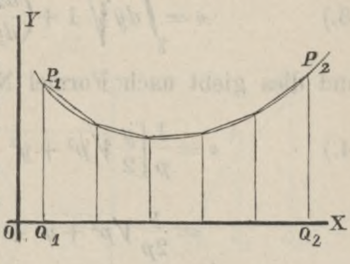
$$t = x \quad \text{bezw.} \quad t = y$$

setzt.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen betrachten.

Zerlegt man nämlich den Abschnitt $Q_1 Q_2$ auf der $X$-Axe (Fig. 69) in $n$ (gleiche oder ungleiche) Theile und legt durch die Schnittpunkte Parallele zur $Y$-Axe, so wird auch der Bogen $P_1 P_2$ gleich $s$ in $n$ Theile zerlegt.

Fig. 69.




Indem man die auf einander folgenden Schnittpunkte des Bogens durch gerade Linien mit einander verbindet, erhält man zwischen $P_1$ und $P_2$ ein Polygon von $n$ Seiten. Wird nun $n$ unendlich gross, und werden die einzelnen Seiten des Polygons unendlich klein, so fallen sie mit den Bögen, deren Sehnen $ds$ sie sind, zusammen.

Der ganze Bogen $P_1 P_2$ oder $s$ wird daher die Summe von diesen unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen $ds$, so dass man wieder erhält

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

## § 19.

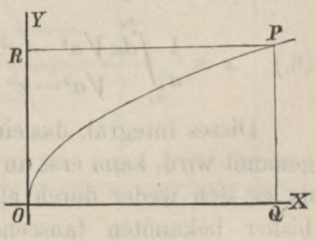
## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Länge des Bogens $OP$ der *Parabel* mit der Gleichung

(1.) $$y^2 = 2px$$

berechnen (Fig. 70).

Fig. 70.




**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$ydy = pdx, \text{ oder } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

Man wird hier nämlich $y$ zur Integrations-Veränderlichen machen weil sich $x$ und $\frac{dx}{dy}$ rational durch $y$

darstellen lassen. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 97 der Tabelle

$$(3.)\qquad s = \int_0^y dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p}\int_0^y dy \sqrt{p^2 + y^2},$$

und dies giebt nach Formel Nr. 82 der Tabelle

$$(4.)\qquad s = \frac{1}{p}\left[\frac{y}{2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2}\,\mathrm{l}(y + \sqrt{p^2 + y^2})\right]_0^y$$

$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right).$$

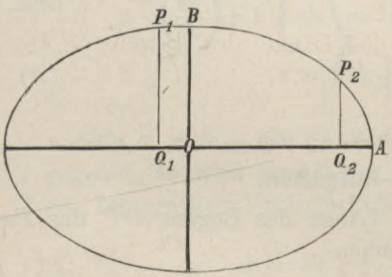
**Aufgabe 2.** Man soll die Länge des Bogens $P_1P_2$ der *Ellipse* mit der Gleichung

$$(5.)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

berechnen (Fig. 71).

**Auflösung.** Aus Gleichung (5.) folgt

Fig. 71.




$$(6.)\qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(7.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

wobei

$$e^2 = a^2 - b^2$$

ist. Daraus ergiebt sich

$$(8.)\qquad s = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2} \frac{(a^4 - e^2x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}}.$$

Dieses Integral, das ein „*elliptisches Integral zweiter Gattung*" genannt wird, kann erst an einer späteren Stelle ermittelt werden, da es sich weder durch algebraische Functionen noch durch die bisher bekannten tanscendenten Functionen ausdrücken lässt.

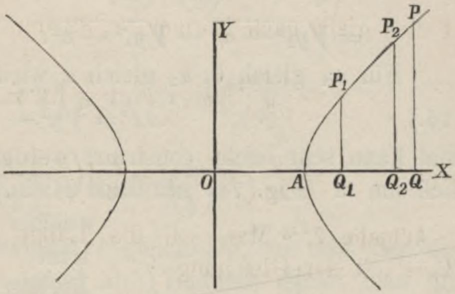
Man erkennt daher aus dieser Aufgabe, wie die Anwendungen der Integral-Rechnung auf neue transcendente Functionen führen.

**Aufgabe 3.** Man soll die Länge des Bogens der *Hyperbel* mit der Gleichung

(9.) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

berechnen (Fig. 72).

Fig. 72.




**Auflösung.** Man findet hier in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$s = \frac{1}{a}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{(a^4 - e^2x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}}, \tag{10.}$$

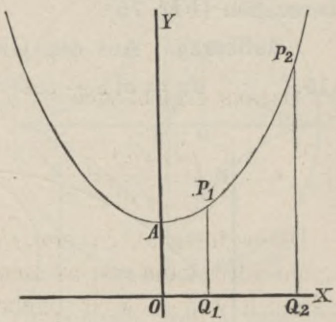
nur ist bei der Hyperbel $e^2$ gleich $a^2 + b^2$.

**Aufgabe 4.** Man soll die Länge des Bogens $P_1P_2$ der *Kettenlinie* mit der Gleichung

$$(11.)\quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \text{ oder } \pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

berechnen (Fig. 73).

Fig. 73.




**Auflösung.** Aus den Gleichungen (11.) folgt

$$(12.)\quad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$(13.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right),$$

oder

$$(13a.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,\quad \frac{ds}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$(14.)\quad s = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]_{x_1}^{x_2} = \left[\sqrt{y^2 - a^2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

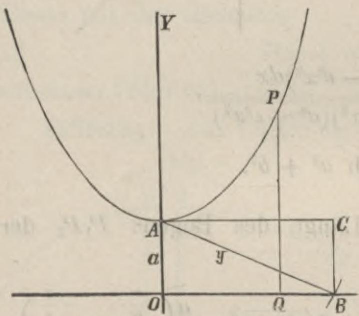
$$= \sqrt{y_2{}^2 - a^2} - \sqrt{y_1{}^2 - a^2}.$$

Für $x_1$ gleich 0, $x_2$ gleich $x$ wird der Bogen

$$(15.)\qquad AP = \sqrt{y^2 - a^2}$$

und kann sehr leicht construirt werden. Beschreibt man nämlich um $A$ (Fig. 74) mit dem Halbmesser $y$ einen Kreisbogen, welcher die $X$-Axe im Punkte $B$ trifft, und vervollständigt das Rechteck $OACB$, so ist

Fig. 74.




$$(16.)\quad AC = \sqrt{y^2 - a^2} = \widehat{AP}.$$

In ähnlicher Weise könnte man die Bögen $AP_1$ und $AP_2$ als gerade Linien $AC_1$ und $AC_2$ darstellen, deren Differenz

$$(17.)\quad AC_2 - AC_1 = C_1C_2 = \widehat{P_1P_2}$$

sein würde.

**Aufgabe 5.** Man soll die Länge des Bogens $OP$ bei der *Cykloide* mit den Gleichungen

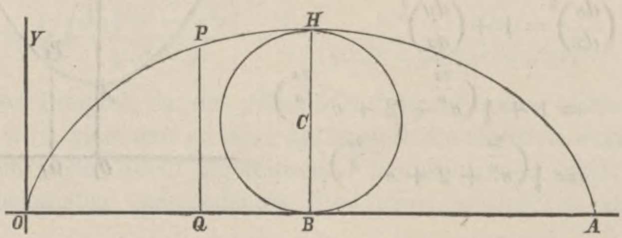
$$(18.)\qquad x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$$

berechnen (Fig. 75).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (18.) folgt

$$(19.)\qquad dx = a(1 - \cos t)dt,\quad dy = a\sin t dt,$$

Fig. 75.



$$(20.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)dt^2$$
$$= 2a^2(1 - \cos t)dt^2 = 4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2,$$

$$(21.)\quad ds = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right),$$

folglich ist

$$(22.)\quad s = 4a\int_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t$$
$$= 4a\left[1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 8a\sin^2\left(\frac{t}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel $t$ gleich $2\pi$, so rollt der die Curve erzeugende Kreis einmal ab. Dadurch erhält man für den Bogen der *ganzen* Cykloide

$$(23.)\quad s = 8a,$$

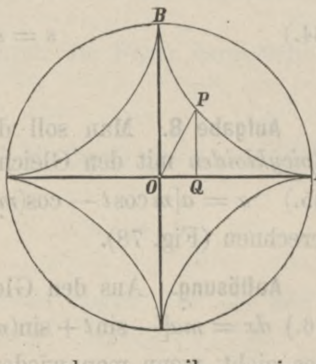
ein Resultat, das schon bei der Krümmung der Curven (D.-R., Seite 411 und 412) ermittelt wurde.

**Aufgabe 6.** Man soll die Länge des Bogens $BP$ bei der *Astroide* mit den Gleichungen

$$(24.)\quad x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

berechnen (Fig. 76).

Fig. 76.




**Auflösung.** Aus den Gleichungen (24.) folgt

$$(25.)\quad \begin{cases} dx = -3a\cos^2 t\sin t dt, \\ dy = +3a\sin^2 t\cos t dt, \end{cases}$$

$$(26.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt^2$$
$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t dt^2,$$

also

$$(27.)\quad ds = \pm 3a\sin t\cos t dt.$$

Hierbei ist das untere Zeichen zu nehmen, weil $s$ zunimmt, wenn $t$ abnimmt. Dies giebt

$$(28.)\qquad s = -3a\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sin t\cos t dt = -\frac{3a}{2}[\sin^2 t]_{\frac{\pi}{2}}^{t}$$

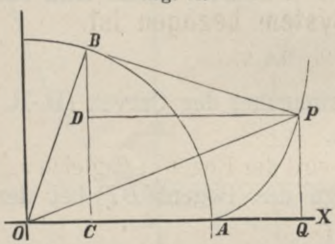
$$= \frac{3a}{2}(1 - \sin^2 t) = \frac{3a}{2}\cos^2 t.$$

Für $t$ gleich 0 wird $s$ dem Quadranten $BA$ der Astroide gleich, nämlich

$$(29.)\qquad s = \frac{3a}{2}.$$

**Aufgabe 7.** Man soll die Länge des Bogens $AP$ der *Kreisevolvente* mit den Gleichungen

Fig. 77.




$$(30.)\qquad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 77).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(31.)\qquad \begin{cases} dx = at\cos t dt, \\ dy = at\sin t dt, \end{cases}$$

$$(32.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)dt^2 = a^2t^2dt^2,$$

$$(33.)\qquad ds = at\,dt,$$

$$(34.)\qquad s = a\int_0^t t dt = \frac{at^2}{2}.$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Länge des Bogens $AP$ bei den *Epicykloiden* mit den Gleichungen

$$(35.)\qquad x = a[m\cos t - \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 78).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (35.) folgt

$$(36.)\qquad dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt,\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt;$$

dies giebt, wenn man wieder $m - 1$ mit $n$ bezeichnet,

$$(37.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2a^2[1 - \cos(nt)]dt^2$$
$$= 4m^2a^2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt^2,$$

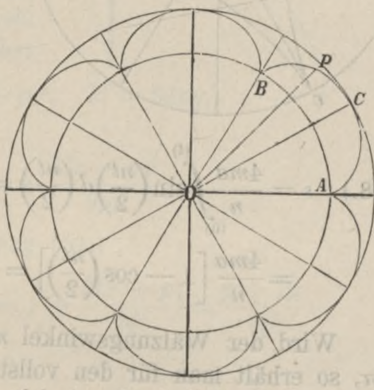
$$(38.)\qquad ds = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{4ma}{n}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$(39.)\qquad s = \frac{4ma}{n}\int\limits_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n}\left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t$$
$$= \frac{4ma}{n}\left[1 - \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n}\sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel $nt$ des rollenden Kreises gleich $2\pi$, so erhält man für den vollständigen Bogen $ACB$ (Fig. 78)

$$(40.)\qquad s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n+1)a}{n}.$$

Fig. 78.




Ist $n$ eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve; ihr Umfang $U$ besteht aus $n$ solchen Bögen, so dass man erhält

$$(41.)\qquad U = 8(n+1)a.$$

Auch dieses Resultat ergab sich bereits bei der Krümmung der Curven (D.-R., Seite 415).

Für den Fall $n = 6$, welcher durch die Figur dargestellt ist, erhält man also

$$(42.)\qquad U = 56a.$$

In dem Falle, wo $n = 1$ ist, wird die Curve eine *Cardioide*, deren Umfang also

$$(43.)\qquad U = 16a$$

ist.

**Aufgabe 9.** Man soll die Länge des Bogens $AP$ bei den *Hypocykloiden* mit den Gleichungen

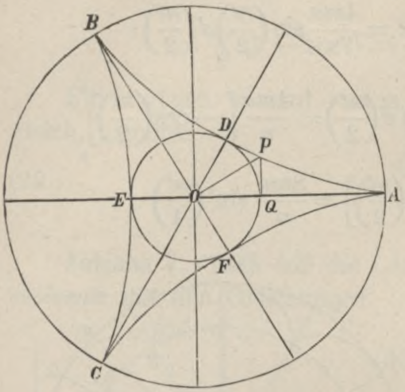
$$(44.)\qquad x = a[m\cos t + \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 79).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (44.) folgt

(45.) $dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt, \quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt;$

Fig. 79.




dies giebt, wenn man (in Uebereinstimmung mit der früher gebrauchten Bezeichnung) $m+1$ gleich $n$ setzt,

$$(46.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2a^2[1-\cos(nt)]dt^2 = 4m^2a^2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt^2,$$

$$(47.)\quad ds = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{4ma}{n}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$(48.)\quad s = \frac{4ma}{n}\int\limits_{(0)}^{(t)}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n}\left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t$$
$$= \frac{4ma}{n}\left[1-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n}\sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel $nt$ des rollenden Kreises gleich $2\pi$, so erhält man für den vollständigen Bogen $ADB$ (Fig. 79)

$$(49.)\quad s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n-1)a}{n}.$$

Ist $n$ eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve; ihr Umfang $U$ besteht dann aus $n$ solchen Bögen, so dass man erhält

$$(50.)\quad U = 8(n-1)a.$$

Für den in Figur 79 gewählten Fall, in welchem $n$ gleich 3 ist, erhält man z. B.

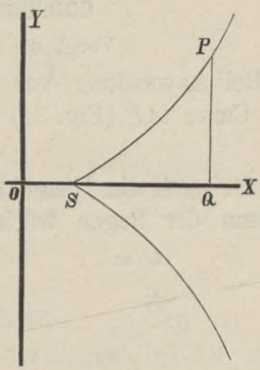
$$(51.)\quad U = 16a.$$

Bei der *Astroide* hat man $n$ gleich 4 zu setzen und erhält

$$(52.)\quad U = 24a.$$

**Aufgabe 10.** Man soll die Bogenlänge bei der *Neil'schen Parabel* berechnen (Fig. 80).

Fig. 80.




**Auflösung.** Die Evolute der Parabel

(53.) $$y^2 = 2px$$

ist bekanntlich (vergl. D.-R., Seite 406)

(54.) $$F(x, y) = 27py^2 - 8(x - p)^3 = 0,$$

eine Curve, welche man auch die „*Neil'sche Parabel*" nennt. Zur Berechnung der Bogenlänge bei dieser Curve bilde man zunächst

(55.) $$F_1 = -24(x - p)^2, \quad F_2 = 54py,$$

folglich wird

(56.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = +\frac{4(x - p)^2}{9py},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

(57.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{16(x - p)^4}{81p^2y^2} = 1 + \frac{2(x - p)}{3p} = \frac{p + 2x}{3p},$$

(57a.) $$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{p + 2x}}{\sqrt{3p}}.$$

Setzt man daher

(58.) $$\sqrt{p + 2x} = t, \quad \text{also} \quad p + 2x = t^2, \quad dx = tdt,$$

so erhält man

(59.) $$s = \frac{1}{\sqrt{3p}} \int_p^x dx \sqrt{p + 2x} = \frac{1}{\sqrt{3p}} \int_{(p)}^{(x)} t^2 dt = \frac{1}{3\sqrt{3p}} \left[t^3\right]_{(p)}^{(x)},$$

oder

(60.) $$s = \frac{1}{3\sqrt{3p}} \left[(2x + p)\sqrt{2x + p} - 3p\sqrt{3p}\right].$$

§ 20.

## Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf Polarcoordinaten bezogen ist.

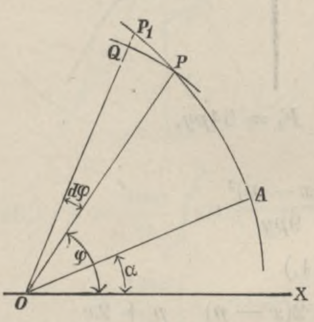
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 98.)

Bei Anwendung von Polarcoordinaten sei die Gleichung einer Curve $AP$ (Fig. 81)

$$r = F(\varphi), \tag{1.}$$

dann ist auch die Länge $s$ des Bogens $AP$ eine Function von $\varphi$, denn der Bogen wächst gleichzeitig mit dem Winkel $\varphi$. Nimmt man sogleich an, dass der Zuwachs $POP_1$ von $\varphi$ unendlich klein ist, und bezeichnet denselben dem entsprechend mit $d\varphi$, so wird auch der Zuwachs $PP_1$ oder $ds$ des Bogens unendlich klein. Beschreibt man daher um $O$ mit dem Halbmesser $OP$ gleich $r$ einen Kreisbogen $PQ$, so kann man das rechtwinklige Dreieck $PQP_1$ als ein *geradliniges* Dreieck betrachten und findet nach dem Pythagoräischen Lehrsatze, wie auch schon früher gezeigt wurde,

Fig. 81.




$$\overline{PP_1}^2 = \overline{QP_1}^2 + \overline{PQ}^2,$$

oder (vergl. D.-R., Formel Nr. 108 der Tabelle)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{2.}$$

Dies giebt

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}, \tag{3.}$$

also, wenn man die Grenzen sogleich mit $\varphi_1$ und $\varphi_2$ bezeichnet,

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}. \tag{4.}$$

Man kann natürlich statt $\varphi$ auch andere Integrations-Veränderliche einführen. Sind z. B. $r$ und $\varphi$ beide Functionen von $t$, so folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.)\qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = dt\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2};$$

und für $t$ gleich $r$

$$(6.)\qquad ds = dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2};$$

dies giebt

$$(7.)\qquad s = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \int_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

## § 21.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Länge des Bogens bei der *Archimedischen Spirale* mit der Gleichung

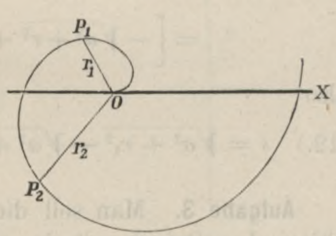
$$(1.)\qquad r = a\varphi$$

berechnen (Fig. 82).

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$(2.)\qquad dr = ad\varphi,$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$
$$= a^2(1 + \varphi^2)d\varphi^2,$$

Fig. 82.




folglich wird

$$(3.)\qquad ds = ad\varphi\sqrt{1 + \varphi^2},$$

$$(4.)\qquad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 82 der Tabelle

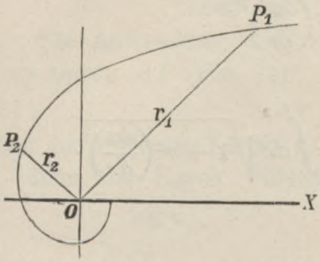
$$(5.)\qquad s = a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

oder

$$(5a.)\qquad s = \frac{a}{2}\left[\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2^2} - \varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} + \mathrm{l}\left(\frac{\varphi_2 + \sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1 + \sqrt{1+\varphi_1^2}}\right)\right]$$
$$= \frac{r_2\sqrt{a^2 + r_2^2} - r_1\sqrt{a^2 + r_1^2}}{2a} + \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{r_2 + \sqrt{a^2 + r_2^2}}{r_1 + \sqrt{a^2 + r_1^2}}\right).$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Länge des Bogens bei der *hyperbolischen Spirale* mit der Gleichung

Fig. 83.




$$r\varphi = a \tag{6.}$$

berechnen (Fig. 83).

**Auflösung.** Aus Gleichung (6.) folgt

$$dr = -a\varphi^{-2}d\varphi, \tag{7.}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = a^2(\varphi^{-4} + \varphi^{-2})d\varphi^2, \tag{8.}$$

$$ds = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,.\,d\varphi, \tag{9.}$$

$$s = a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2} = a\Big[\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}} + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\Big]. \tag{10.}$$

Dies giebt nach den Formeln Nr. 85 und 22 der Tabelle

$$s = a\Big[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \mathrm{l}(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tag{11.}$$

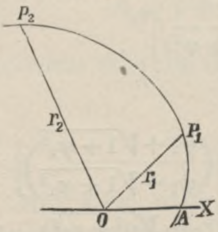
$$= \Big[-\sqrt{a^2+r^2} + a\,\mathrm{l}\Big(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\Big)\Big]_{r_1}^{r_2},$$

also

$$s = \sqrt{a^2+r_1{}^2} - \sqrt{a^2+r_2{}^2} + a\,\mathrm{l}\Big(\frac{r_1(a+\sqrt{a^2+r_2{}^2})}{r_2(a+\sqrt{a^2+r_1{}^2})}\Big). \tag{12.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Länge des Bogens bei der *logarithmischen Spirale* mit der Gleichung

Fig. 84.




$$r = e^{a\varphi} \tag{13.}$$

berechnen (Fig. 84).

**Auflösung.** Aus Gleichung (13.) folgt

$$dr = e^{a\varphi}\,.\,ad\varphi = ard\varphi, \tag{14.}$$

oder

$$d\varphi = \frac{dr}{ar}, \tag{14a.}$$

$$(15.)\qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right),$$

$$(16.)\qquad ds = dr\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \frac{dr}{a}\sqrt{a^2 + 1};$$

dies giebt

$$(17.)\qquad s = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\int\limits_{r_1}^{r_2} dr = \frac{r_2 - r_1}{a}\sqrt{a^2+1}.$$

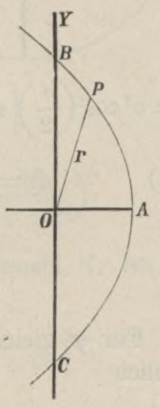
**Aufgabe 4.** Man soll die Länge des Bogens $AP$ bei der *Parabel* mit der Gleichung

$$(18.)\qquad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right),\quad \text{oder}\quad r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

berechnen (Fig. 85).

**Auflösung.** Aus Gleichung (18.) folgt

Fig. 85.




$$(19.)\qquad dr = \frac{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$(20.)\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\cos^6\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$(21.)\qquad ds = \frac{a d\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

also, wenn man $\varphi = 2t$ setzt und die Formeln Nr. 68 und 33 der Tabelle beachtet,

$$(22.)\qquad s = 2a\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2a\int\limits_0^t \frac{dt}{\cos^3 t}$$

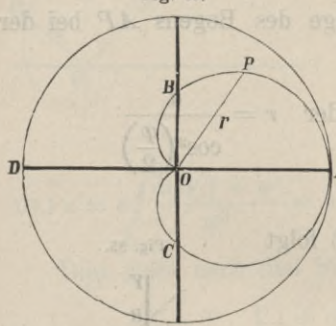
$$= 2a\left[\frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left\{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right\}\right]_0^t,$$

oder

$$(23.)\qquad s = \frac{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + a\,l\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-\varphi}{4}\right)\right].$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Länge des Bogens $AP$ bei der *Cardioide* mit der Gleichung

Fig. 86.




$$(24.)\qquad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$(24a.)\qquad r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

berechnen (Fig. 86).

**Auflösung.** Aus Gleichung (24a.) folgt

$$(25.)\quad dr = -a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi,$$

$$(26.)\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$= a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\varphi^2 = a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi^2,$$

$$(27.)\qquad ds = a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$(28.)\qquad s = 2a\int_0^{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für $\varphi$ gleich $\pi$ erhält man die Länge des Bogens $APO$, nämlich

$$(29.)\qquad s = 2a,$$

d. h. *der Bogen $APO$ ist dem Durchmesser des der Cardioide umschriebenen Kreises gleich.*

**Aufgabe 6.** Man soll die Länge des Bogens $OP$ bei der *Cissoide* mit der Gleichung

$$(30.)\qquad r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

berechnen (Fig. 87).

**Auflösung.** Aus Gleichung (30.) folgt

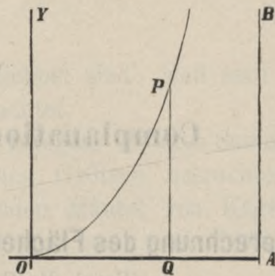
$$dr = \frac{2a\sin\varphi(1+\cos^2\varphi)d\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{31.}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{4a^2\sin^2\varphi(1+3\cos^2\varphi)d\varphi^2}{\cos^4\varphi}, \tag{32.}$$

also

$$ds = \frac{2a\sin\varphi\, d\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}. \tag{33.}$$

Fig. 87.




Setzt man

$$\sqrt{3}\,.\cos\varphi = t, \tag{34.}$$

also

$$-\sqrt{3}\sin\varphi\, d\varphi = dt,$$

so wird

$$ds = -\frac{2a\sqrt{3}\,.\,dt\sqrt{1+t^2}}{t^2}, \tag{35.}$$

$$s = -2a\sqrt{3}\int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt\sqrt{1+t^2}}{t^2} \tag{36.}$$

$$= -2a\sqrt{3}\Big(\int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} + \int\limits_{(0)}^{(\varphi)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\Big),$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 85 und 22 der Tabelle

$$s = -2a\sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + \mathrm{l}(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{(0)}^{(\varphi)}, \tag{37.}$$

oder

$$s = 2a\Big[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} - 2 - \sqrt{3}\,.\,\mathrm{l}\Big(\frac{\sqrt{3}\,.\cos\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2+\sqrt{3}}\Big)\Big]. \tag{38.}$$

## V. Abschnitt.

# Complanation der Rotationsflächen.

## § 22.

## Berechnung des Flächenelementes bei einer Rotationsfläche.

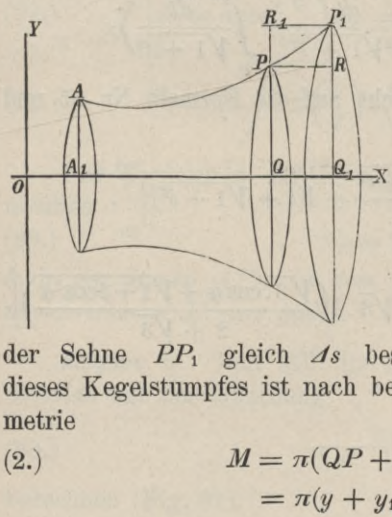
(Vergl die Formel-Tabelle Nr. 99 und 100.)

Rotirt eine Curve mit der Gleichung

$$y = f(x) \tag{1.}$$

um die $X$-Axe, so beschreibt der Bogen $AP$ (Fig. 88) eine Rotationsfläche, deren Oberfläche $O$ eine Function von $x$ ist.

Fig. 88.




Wächst nämlich $x$ um die Grösse $QQ_1$ gleich $\Delta x$, so wächst auch die Oberfläche um denjenigen Theil $\Delta O$ der Rotationsfläche, welcher bei der Rotation von dem Bogen $PP_1$ beschrieben wird.

Zur Berechnung von $\Delta O$ betrachte man zunächst den Mantel des Kegelstumpfes, welcher bei der Rotation von der Sehne $PP_1$ gleich $\Delta s$ beschrieben wird. Der Mantel dieses Kegelstumpfes ist nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

$$\begin{aligned} M &= \pi(QP + Q_1P_1) \,.\, PP_1 \\ &= \pi(y + y_1) \,.\, \Delta s. \end{aligned} \tag{2.}$$

Rückt nun der Punkt $F_1$ dem Punkte $P$ unendlich nahe, so fällt der Bogen $PP_1$ mit der Sehne $PP_1$ zusammen; dabei geht $\Delta s$ über in $ds$ und $\lim y_1$ wird gleich $y$; folglich findet man für das *Oberflächenelement* $dO$ aus Gleichung (2.)

$$dO = 2\pi y ds. \tag{3.}$$

Daraus ergiebt sich durch Integration

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds, \tag{4.}$$

wobei die Grenzen mit $x_1$ und $x_2$ bezeichnet sind, weil man $x$ als die Integrations-Veränderliche betrachtet.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen betrachten, und zwar sind die einzelnen Summanden Mäntel von Kegelstumpfen mit der Seitenkante $ds$, begrenzt von zwei Kreisen mit den Halbmessern $y$ und $y + dy$.

Rotirt die Curve um die $Y$-Axe, so erhält man in ähnlicher Weise für den Flächeninhalt der Rotationsoberfläche durch Vertauschung von $x$ mit $y$

$$O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds. \tag{5.}$$

Die auf diese Weise ausgeführte Berechnung der Oberfläche nennt man: „*Complanation der Rotationsflächen*".

## § 23.

## Uebungs-Aufgaben.

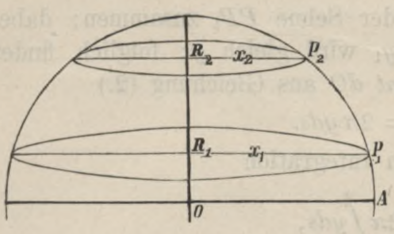
**Aufgabe 1.** Man soll den Flächeninhalt einer *Kugelzone* berechnen (Fig. 89).

**Auflösung.** Rotirt der Bogen $P_1P_2$ des Kreises mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a^2 - y^2} \tag{1.}$$

um die $Y$-Axe, so beschreibt er eine Kugelzone, deren Oberfläche nach Formel Nr. 100 der Tabelle

Fig. 89.




$$(2.)\qquad O = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x ds$$

wird. Dabei folgt aus Gleichung (1.)

$$(3.)\qquad dx = -\frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$(4.)\qquad ds^2 = \frac{(y^2 + a^2 - y^2)dy^2}{a^2 - y^2}$$

$$= \frac{a^2dy^2}{a^2 - y^2},$$

$$(5.)\qquad ds = \frac{ady}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{ady}{x},$$

$$(6.)\qquad xds = ady,$$

$$(7.)\qquad O = 2a\pi\int_{y_1}^{y_2} dy = 2a\pi(y_2 - y_1) = 2a\pi h,$$

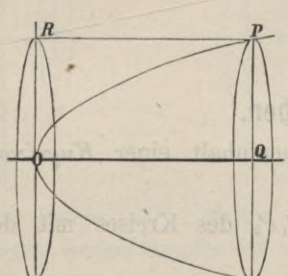
wenn man die Höhe $y_2 - y_1$ der Kugelzone wieder mit $h$ bezeichnet.

Setzt man $y_2$ gleich $+a$, $y_1$ gleich $-a$, also $h$ gleich $2a$ so erhält man für die Oberfläche der ganzen Kugel

$$(8.)\qquad O = 4a^2\pi.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Oberfläche des *Rotationsparaboloids* berechnen (Fig. 90).

Fig. 90.




**Auflösung.** Die Gleichung der Parabel ist

$$(9.)\qquad y^2 = 2px;$$

daraus folgt

$$(10.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}, \\ \left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = \dfrac{p^2 + y^2}{y^2} = \dfrac{p^2 + 2px}{y^2}, \end{cases}$$

$$(11.)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{p^2 + 2px},$$

$$(12.)\qquad yds = dx\sqrt{p^2 + 2px}.$$

Setzt man

(13.) $\sqrt{p^2 + 2px} = t$, also $p^2 + 2px = t^2$, $pdx = tdt$,

so wird nach Formel Nr. 99 der Tabelle

$$(14.)\qquad yds = \frac{t^2dt}{p},$$

$$(15.)\qquad O = \frac{2\pi}{p}\int\limits_{(0)}^{(t)} t^2dt = \frac{2\pi}{3p}\left[(\sqrt{p^2 + 2px})^3\right]_0^x.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (9.)

$$(16.)\qquad O = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + y^2)\sqrt{p^2 + y^2} - p^3\right].$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Oberfläche des *Rotationsellipsoids* berechnen (Fig. 91).

**Auflösung.** Die Gleichung der Ellipse ist

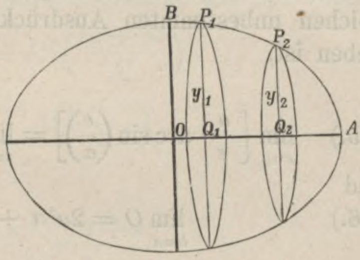
(17.) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$;

daraus folgt

$$(18.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$(19.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(a^4 - e^2x^2)}{a^4y^2},$$

Fig. 91.




$$(20.)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2y}\sqrt{a^4 - e^2x^2},$$

$$(21.)\qquad yds = \frac{b\,.\,dx}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x^2} = \frac{b\,.\,d(ex)}{a^2e}\sqrt{a^4 - e^2x^2},$$

$$(22.)\qquad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\int\limits_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex)\sqrt{a^4 - e^2x^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 74 der Tabelle, wenn man $a^2$ mit $a^4$ und $x$ mit $ex$ vertauscht,

$$(23.)\qquad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\left[\frac{ex}{2}\sqrt{a^4 - e^2x^2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\left(\frac{ex}{a^2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Für $x_2$ gleich $a$ wird

$$\sqrt{a^4 - e^2 x_2^2} = a\sqrt{a^2 - e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, wenn man Gleichung (23.) mit 2 multiplicirt und $x_1$ gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$(24.)\qquad O = \frac{2b\pi}{a^2 e}\left[a^2 be + a^4 \arcsin\left(\frac{e}{a}\right)\right]$$

$$= 2b^2\pi + \frac{2a^2 b\pi}{e} \arcsin\left(\frac{e}{a}\right).$$

Man kann sich davon überzeugen, dass der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotirende Ellipse in einen Kreis übergeht, wenn man also $a$ gleich $b$ und $e$ gleich 0 macht. Allerdings nimmt dann das zweite Glied die Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Ausdrücken in D.-R., Seite 274 angegeben ist,

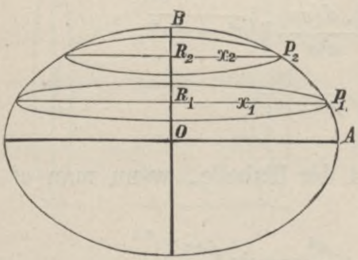
$$(25.)\qquad \lim_{e=0}\left[\frac{a}{e}\cdot \arcsin\left(\frac{e}{a}\right)\right] = \lim_{z=0}\frac{\arcsin z}{z} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{1} = 1$$

und

$$(26.)\qquad \lim_{b=a} O = 2a^2\pi + 2a^2\pi = 4a^2\pi.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Oberfläche des *Sphäroids* berechnen (Fig. 92).

Fig. 92.




**Auflösung.** Aus der Gleichung (17.) der Ellipse folgt

$$27.)\qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x},$$

$$28.)\qquad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}$$

$$= \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{b^4 x^2}$$

$$= \frac{a^2(b^4 + e^2 y^2)}{b^4 x^2},$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2 x}\sqrt{b^4 + e^2 y^2}, \tag{29.}$$

$$xds = \frac{a \, . \, dy}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2 y^2} = \frac{a \, . \, d(ey)}{b^2 e}\sqrt{b^4 + e^2 y^2}, \tag{30.}$$

$$O = \frac{2a\pi}{b^2 e}\int\limits_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey)\sqrt{b^4 + e^2 y^2}. \tag{31.}$$

Dies giebt nach Formel Nr. 82 der Tabelle, wenn man $a^2$ mit $b^4$ und $x$ mit $ey$ vertauscht,

$$O = \frac{2a\pi}{b^2 e}\left[\frac{ey}{2}\sqrt{b^4 + e^2 y^2} + \frac{b^4}{2}\,\mathrm{l}(ey + \sqrt{b^4 + e^2 y^2})\right]_{y_1}^{y_2}. \tag{32.}$$

Für $y_2$ gleich $b$ wird

$$\sqrt{b^4 + e^2 y_2^2} = b\sqrt{b^2 + e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, wenn man Gleichung (32.) mit 2 multiplicirt und $y_1$ gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Sphäroids

$$\begin{aligned} O &= \frac{2a\pi}{b^2 e}\left[ab^2 e + b^4 \mathrm{l}\left(\frac{be + ab}{b^2}\right)\right] \\ &= 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{a + e}{b}\right). \end{aligned} \tag{33.}$$

Nun ist

$$\frac{(a + e)^2}{b^2} = \frac{(a + e)^2}{a^2 - e^2} = \frac{a + e}{a - e},$$

folglich kann man den Ausdruck für $O$ auch auf die Form bringen

$$O = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{a + e}{a - e}\right). \tag{34.}$$

Auch hier kann man sich davon überzeugen, dass der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotirende Ellipse in den Kreis übergeht, wenn man also $a$ gleich $b$ und $e$ gleich 0 macht. Allerdings nimmt das zweite Glied wieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Formen in D.-R., Seite 274 angegeben ist,

$$(35.)\qquad \lim_{e=0} \frac{a}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{a+e}{a-e}\right) = \lim_{z=0} \frac{\mathrm{l}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{z} = \lim \frac{\mathrm{l}(1+z) - \mathrm{l}(1-z)}{z}$$

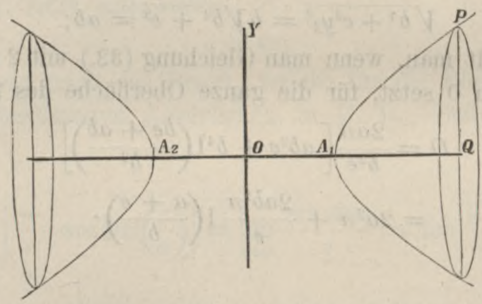
$$= \lim \frac{\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}}{1} = 2$$

und

$$(36.)\qquad \lim_{b=a} O = 2a^2\pi + a^2\pi \,.\, 2 = 4a^2\pi.$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Oberfläche des *zweischaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 93).

Fig. 93.




**Auflösung.** Die Gleichung der Hyperbel ist

$$(37.)\qquad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

daraus folgt

$$(38.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

$$(39.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(e^2x^2 - a^4)}{a^4y^2},$$

$$(40.)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2y}\sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(41.)\qquad yds = \frac{b\,.\,dx}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} = \frac{b\,.\,d(ex)}{a^2e}\sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(42.)\qquad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\int_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex)\sqrt{e^2x^2 - a^4}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 82a der Tabelle, wenn man $a^2$ mit $a^4$ und $x$ mit $ex$ vertauscht,

$$(43.)\quad O = \frac{2b\pi}{a^2e}\left[\frac{ex}{2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} - \frac{a^4}{2}\,\mathrm{l}(ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4})\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Setzt man $x_1$ gleich $a$ und $x_2$ gleich $x$, so wird

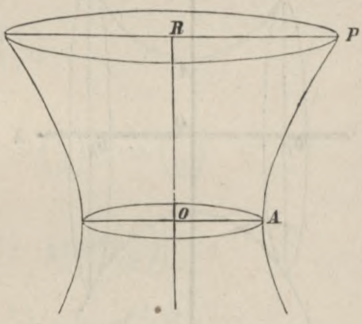
$$\sqrt{e^2x_1{}^2 - a^4} = a\sqrt{e^2 - a^2} = ab,$$

und man erhält für die von dem Bogen $AP$ bei der Rotation beschriebene Fläche

$$(44.)\quad O = \frac{bx\pi}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4} - b^2\pi - \frac{a^2b\pi}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a(e+b)}\right).$$

**Aufgabe 6.** Man soll die Oberfläche des *einschaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 94).

Fig. 94.




**Auflösung.** Aus der Gleichung (37.) der Hyperbel folgt

$$(45.)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x},$$

$$(46.)\quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{a^2(b^4 + e^2y^2)}{b^4x^2},$$

$$(47.)\quad \frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2x}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(48.)\quad xds = \frac{a\,.\,dy}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} = \frac{a\,.\,d(ey)}{b^2e}\sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(49.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\int\limits_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey)\sqrt{b^4 + e^2y^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 82 der Tabelle, wenn man $a^2$ mit $b^4$ und $x$ mit $ey$ vertauscht,

$$(50.)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2e}\left[\frac{ey}{2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{2}\,\mathrm{l}(ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2})\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Für $y_1$ gleich 0, $y_2$ gleich $y$ erhält man daher

$$(51.)\quad O = \frac{ay\pi}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{ab^2\pi}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right).$$

**Aufgabe 7.** Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* mit der Gleichung

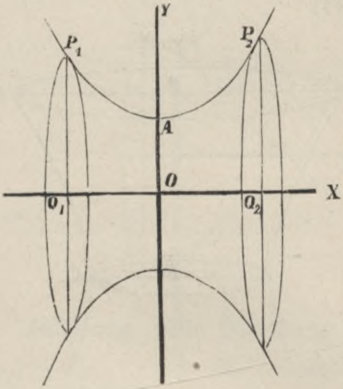
$$(52.)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

oder

$$(52a.)\qquad \pm\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

um die $X$-Axe entsteht (Fig. 95).

Fig. 95.




**Auflösung.** Aus Gleichung (52.) folgt

$$(53.)\quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$(54.)\quad O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\,ds$$

$$= \frac{a\pi}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{a\pi}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{a\pi}{2}\left[\frac{a}{2}\,e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}\,e^{-\frac{2x}{a}}\right]_{x_1}^{x_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (52.) und (52a.)

$$(55.)\quad O = \pi\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\cdot\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + ax\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \pi\left[y\sqrt{y^2 - a^2} + ax\right]_{x_1}^{x_2} = \pi\left[y_2\sqrt{y_2{}^2 - a^2} \mp y_1\sqrt{y_1{}^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)\right].$$

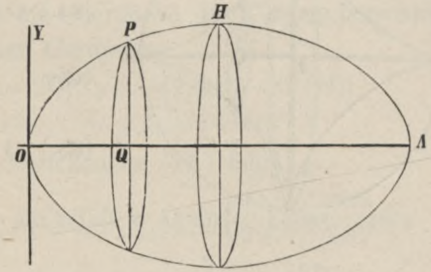
Hierbei gilt das obere oder das untere Vorzeichen, jenachdem $x_1$ positiv oder negativ ist.

**Aufgabe 8.** Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{56.}$$

um die $X$-Axe entsteht (Fig. 96).

Fig. 96.




**Auflösung.** Aus den Gleichungen (56.) folgt

$$ds = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt, \tag{57.}$$

$$yds = 2a^2(1 - \cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4a^2 \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt. \tag{58.}$$

Dies giebt

$$O = 16a^2\pi \int_0^t \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) d\left(\frac{t}{2}\right) \tag{59.}$$

$$= -16a^2\pi \int_{(0)}^{(t)} \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] d\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -16a^2\pi \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \tfrac{1}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{16a^2\pi}{3}\left[2 - 3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right].$$

Für $t$ gleich $2\pi$ erhält man die Oberfläche, welche bei der Rotation von dem ganzen Cykloidenbogen $OHA$ beschrieben wird, nämlich

$$O = \frac{16a^2\pi}{3}(2 + 3 - 1) = \frac{64a^2\pi}{3}. \tag{60.}$$

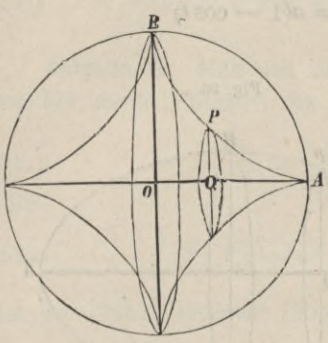
**Aufgabe 9.** Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide*

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \tag{61.}$$

um die $X$-Axe entsteht (Fig. 97).

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (61.) folgt

Fig. 97.



(62.) $ds = -3a\sin t\cos t\,dt$

(63.) $yds = -3a^2\sin^4 t\cos t\,dt.$

Dies giebt für die ganze Oberfläche

(64.) $O = -12a^2\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos t\,dt,$

oder

(65.) $O = +12a^2\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,.\,d(\sin t)$

$$= \frac{12a^2\pi}{5}\left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12a^2\pi}{5}.$$

**Aufgabe 10.** Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kreisevolvente*

(66.) $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$

um die $X$-Axe entsteht.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (66.) folgt

(67.) $ds = at\,dt,$

(68.) $yds = a^2(t\sin t - t^2\cos t)dt,$

(69.) $O = 2a^2\pi\int\limits_0^t (t\sin t - t^2\cos t)dt.$

Setzt man

(70.) $u = t^2, \quad dv = \cos t\,dt,$ also $du = 2t\,dt, \quad v = \sin t$

in die Formel Nr. 61 der Tabelle, nämlich in die Gleichung

(71.) $\int udv = uv - \int vdu$

ein, so erhält man

(72.) $\int t^2\cos t\,dt = t^2\sin t - 2\int t\sin t\,dt.$

Setzt man dagegen

(73.) $u = t, \quad dv = \sin t\,dt,$ also $du = dt, \quad v = -\cos t$

in die Gleichung (71.) ein, so ergiebt sich

(74.) $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int\cos t\,dt = -t\cos t + \sin t.$

Indem man Gleichung (72.) mit $-1$, Gleichung (74.) mit $+3$ multiplicirt und dann beide Gleichungen addirt, findet man

$$\int t\sin t\,dt - \int t^2\cos t\,dt = -t^2\sin t - 3t\cos t + 3\sin t. \tag{75.}$$

Deshalb wird

$$O = 2a^2\pi(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t). \tag{76.}$$

**Aufgabe 11.** Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cardioide*

$$x = a[2\cos t - \cos(2t)],\quad y = a[2\sin t - \sin(2t)] \tag{77.}$$

um die $X$-Axe entsteht.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (77.) folgt

$$dx = 2a[-\sin t + \sin(2t)]dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)dt, \tag{78.}$$

$$dy = 2a[\cos t - \cos(2t)]dt = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)dt, \tag{79.}$$

also

$$ds^2 = 16a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2,\quad ds = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt, \tag{80.}$$

$$\begin{aligned} yds &= 4a^2[2\sin t - \sin(2t)]\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &= 8a^2\sin t(1-\cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &= 32a^2\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt = 64a^2\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)d\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned} \tag{81.}$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} O &= 128a^2\pi\int\limits_0^{(\pi)}\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)d\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{128a^2\pi}{5}\left[\sin^5\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{128a^2\pi}{5}. \end{aligned} \tag{82.}$$

---

## VI. Abschnitt.

# Rectification der Raumcurven.

## § 24.

## Berechnung des Bogenelementes einer Raumcurve.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr 101.)

Der Durchschnitt zweier krummen Flächen mit den Gleichungen

(1.) $$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

ist im Allgemeinen eine Raumcurve (vergl. § 112 der D.-R.). Indem man aus den beiden Gleichungen (1.) die Veränderliche $z$ eliminirt, erhält man

(2.) $$H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die $XY$-Ebene projicirt. Ebenso findet man durch Elimination der Veränderlichen $y$ aus den Gleichungen (1.)

(3.) $$K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die $XZ$-Ebene projicirt.

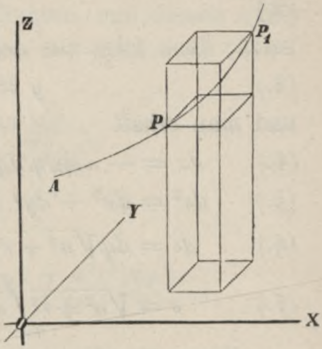
Setzt man noch für $x$ irgend eine Function von einer vierten Veränderlichen $t$, so werden mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.) auch $y$ und $z$ Functionen von $t$, so dass man die Raumcurve auch durch die drei Gleichungen

(4.) $$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

darstellen kann. Umgekehrt lassen sich drei solche Gleichungen auch immer als Raumcurve geometrisch deuten.

Um nun die Länge $s$ des Curvenbogens $AP$ zu bestimmen, nehme man auf der Curve zwei benachbarte Punkte $P$ und $P_1$ an und lege durch dieselben Ebenen, parallel zu den Coordinaten-Ebenen (Fig. 98). Dann erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten

Fig. 98.




$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

und mit der Diagonale

$$(5.)\quad \overline{PP_1} = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}.$$

Rücken die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe, so fällt der *Bogen* $PP_1$ mit der *Sehne* $PP_1$ zusammen, die Grössen

$$PP_1, \quad x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

gehen bezw. über in

$$ds, \quad dx, \quad dy, \quad dz$$

und aus der Gleichung (5.) ergiebt sich

$$(6.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Daraus folgt für die Länge des Bogens $AP$

$$(7.)\quad s = \int ds = \int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Für $x$ gleich $t$ wird z. B.

$$(8.)\qquad s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

## § 25.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Bogenlänge bei der *cylindrischen Schraubenlinie* (vergl. D.-R., Seite 494)

$$(1.)\qquad x^2 + y^2 = a^2, \quad y = x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right)$$

berechnen.

**Auflösung.** In dem vorliegenden Falle wird es zweckmässig sein, $x$, $y$ und $z$ als Functionen einer einzigen Veränderlichen $\varphi$ auszudrücken, indem man

$$x = a\cos\varphi \tag{2.}$$

setzt; dann folgt aus den Gleichungen (1.)

$$y = a\sin\varphi,\quad z = c\varphi, \tag{3.}$$

und man erhält

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi,\quad dy = a\cos\varphi\, d\varphi,\quad dz = c d\varphi, \tag{4.}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2, \tag{5.}$$

$$ds = d\varphi\sqrt{a^2 + c^2}, \tag{6.}$$

$$s = \sqrt{a^2 + c^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)\sqrt{a^2 + c^2}. \tag{7.}$$

Dieses Resultat ergiebt sich auch daraus, dass die Schraubenlinie entsteht, indem man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a\varphi$, $c\varphi$ und der Hypotenuse $\varphi\sqrt{a^2 + c^2}$ auf den Kreiscylinder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

so aufwickelt, dass die Kathete $a\varphi$ mit der Basiscurve (d. h. mit dem Kreise) zusammenfällt. Die Hypotenuse bildet dann die Schraubenlinie.

**Aufgabe 2.** Man soll die Bogenlänge bei der *conischen Spirale*

$$x = e^{a\varphi}\cos\varphi,\quad y = e^{a\varphi}\sin\varphi,\quad z = ce^{a\varphi} \tag{8.}$$

berechnen.

**Auflösung.** Die Projection der Curve in die $XY$-Ebene ist eine Curve, bei welcher $\varphi$ der Winkel zwischen der $X$-Axe und dem Radius vector ist, denn aus den Gleichungen (8.) folgt

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{9.}$$

Die Projection hat daher die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 = e^{2a\varphi},\quad \text{oder}\quad r = e^{a\varphi}, \tag{10.}$$

d. h. die conische Spirale liegt auf einem Cylinder, welcher auf der $XY$-Ebene senkrecht steht und die *logarithmische Spirale* zur Basiscurve hat. Ausserdem folgt aus den Gleichungen (8.)

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0; \tag{11.}$$

die conische Spirale liegt also auch auf einem Kreiskegel, dessen Spitze mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, und dessen Axe mit der $Z$-Axe zusammenfällt.

Aus den Gleichungen (8.) findet man

$$\begin{cases} dx = e^{a\varphi}(a\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi, \\ dy = e^{a\varphi}(a\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi, \\ dz = e^{a\varphi} \,.\, ac\,d\varphi. \end{cases} \tag{12.}$$

Dies giebt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2a\varphi}(a^2 + 1 + a^2c^2)d\varphi^2, \tag{13.}$$

$$ds = e^{a\varphi} \,.\, d\varphi \sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}, \tag{14.}$$

$$s = \sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi} \,.\, d\varphi = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1 + c^2}\,(e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}), \tag{15.}$$

oder

$$s = \frac{z_2 - z_1}{c}\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1 + c^2} = \frac{z_2 - z_1}{ac}\sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}. \tag{16.}$$

Für einen ganzen Umgang wird

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi, \quad z_2 = ce^{a(\varphi_1 + 2\pi)} = z_1 \,.\, e^{2a\pi}, \tag{17.}$$

also

$$s = \frac{z_1}{ac}(e^{2a\pi} - 1)\sqrt{1 + a^2 + a^2c^2}. \tag{18.}$$

---

# Zweiter Theil.

## VII. Abschnitt.

## Integration der gebrochenen rationalen Functionen.

### § 26.

### Aecht gebrochene und unächt gebrochene rationale Functionen.

Wie schon in der Differential-Rechnung (Seite 10) gezeigt wurde, lässt sich jede *gebrochene* rationale Function als Quotient zweier *ganzen* rationalen Functionen darstellen, d. h. sie lässt sich auf die Form

$$(1.)\qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m}{ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$$

bringen. Hierbei sind die Coefficienten $A, A_1, A_2, \ldots a, a_1, a_2, \ldots$ beliebige constante Zahlen, und die Exponenten $m$ und $n$ sind beliebige *positive ganze* Zahlen. Den Coefficienten $a$ der höchsten Potenz von $x$ im Nenner kann man immer gleich 1 machen, weil man, wenn $a$ von 1 verschieden ist, Zähler und Nenner des Bruches durch $a$ dividiren kann. Der Nenner $f(x)$ soll daher in dem Folgenden immer die Form

$$(2.)\qquad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

haben.

Man theilt die gebrochenen rationalen Functionen in *ächt gebrochene* und *unächt gebrochene* rationale Functionen ein, und zwar *heisst eine gebrochene rationale Function „ächt gebrochen"*, *wenn der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners; sie heisst dagegen „unächt gebrochen", wenn der Grad des Zählers grösser oder mindestens ebenso gross ist wie der Grad des Nenners.*

Hiernach ist die durch Gleichung (1.) erklärte Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ *ächt gebrochen*, wenn $m < n$, und sie ist *unächt gebrochen*, wenn $m \geqq n$ ist.

**Satz.** *Jede unächt gebrochene rationale Function lässt sich als die Summe einer ganzen und einer ächt gebrochenen rationalen Function darstellen.* Es ist also

$$\frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{3.}$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function und der Grad von $\varphi(x)$ kleiner ist als der von $f(x)$.

Der Beweis des Satzes ergiebt sich einfach durch Division. Ist nämlich bei der Division von $F(x)$ durch $f(x)$ der Quotient gleich $g(x)$ und der Rest gleich $\varphi(x)$, so ist

$$F(x) = f(x)\,g(x) + \varphi(x), \tag{4.}$$

wobei der Grad des Restes $\varphi(x)$ kleiner gemacht werden kann als der Grad des Divisors $f(x)$. Aus Gleichung (4.) ergiebt sich sofort

$$\frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}. \tag{5.}$$

Am besten erkennt man das Verfahren aus einem Beispiele. Es sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3},$$

dann erhält man durch Division

$$x^3 + 9x^2 + 12x - 16 = (x^2 + 2x - 3)(x + 7) + (x + 5),$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - \phantom{1}3x \phantom{{}-16} \\ \hline + 7x^2 + 15x - 16 \\ + 7x^2 + 14x - 21 \\ \hline x + \phantom{1}5 \end{array}$$

oder

$$(6.)\quad \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3} = (x + 7) + \frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(7.)\quad \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 34x - 9}{x^2 - 3x + 4} = (2x^2 + 3x - 5) + \frac{7x + 11}{x^2 - 3x + 4}.$$

## § 27.

## Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämmtlich von einander verschieden sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 102.)

Nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze kommt es bei der Integration der gebrochenen rationalen Functionen nur auf die Integration der *ächt* gebrochenen rationalen Functionen an; denn, wäre die vorgelegte Function *unächt* gebrochen, so könnte man sie in eine *ganze* und in eine *ächt* gebrochene rationale Function zerlegen. Die Integration der *ganzen* rationalen Functionen ist aber bereits auf Seite 18 in § 4 erledigt.

Die Integration der *ächt* gebrochenen rationalen Functionen kann man durch *Zerlegung in Partialbrüche* ausführen, wobei der Generalnenner der einzelnen Partialbrüche $f(x)$ sein muss. Deshalb muss man hier die Zerlegung der ganzen rationalen Function $f(x)$ in lineare Factoren benutzen. In § 82 der Differential-Rechnung (Seite 351) war nämlich der Satz bewiesen worden: *Jede ganze rationale Function $n^{ten}$ Grades lässt sich in $n$ lineare Factoren zerlegen.* Es ist also

$$(1).\quad \begin{aligned} f(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n), \end{aligned}$$

und $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2.)\quad f(x) = 0.$$

Für das Folgende muss man zwei Fälle unterscheiden, jenachdem diese Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sämmtlich von einander verschieden sind oder nicht.

Hier möge zunächst der *erste Fall* behandelt werden, wo die Wurzeln der Gleichung (2.) sämmtlich von einander verschieden sind. Um die vielen Indices zu vermeiden, mögen dabei diese Wurzeln mit $a$, $b$, $c$, ... $k$, $l$ bezeichnet werden, so dass die Gleichung (1.) übergeht in

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\dots(x - k)(x - l). \tag{3.}$$

Es soll dann gezeigt werden, dass die *ächt* gebrochene rationale Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ auf die Form

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{K}{x - k} + \frac{L}{x - l} \tag{4.}$$

gebracht werden kann, wobei die Zähler $A$, $B$, $C$, ... $K$, $L$ der Partialbrüche constante Grössen sind.

**Beweis.** Es sei

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x - a} = (x - b)(x - c)\dots(x - k)(x - l), \tag{5.}$$

dann ist $f_1(x)$ nur noch eine ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades; ferner sei

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}. \tag{6.}$$

Nach diesen Festsetzungen wird

$$\varphi(x) - Af_1(x) = \frac{\varphi(x)f_1(a) - \varphi(a)f_1(x)}{f_1(a)} \tag{7.}$$

gleich 0 für $x = a$, so dass nach Satz 2 in § 82 der D.-R. (Seite 350) $\varphi(x) - Af_1(x)$ durch $x - a$ theilbar sein muss. Man erhält also

$$\varphi(x) - Af_1(x) = (x - a)\varphi_1(x), \tag{8.}$$

oder

$$\varphi(x) = Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x),$$

wo $\varphi_1(x)$ eine *ganze* rationale Function von $x$ ist, deren Grad höchstens gleich $n - 2$ sein kann. Hieraus folgt

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x)}{(x - a)f_1(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}. \tag{9.}$$

Dabei ist $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ nach den gemachten Angaben wieder eine ächt gebrochene rationale Function, welche aber einfacher ist als $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, denn $f_1(x)$ ist nur noch vom Grade $n-1$, und $\varphi_1(x)$ ist höchstens vom Grade $n-2$.

In derselben Weise kann man jetzt zeigen, dass

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x-b} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \tag{10.}$$

wo $f_2(x)$ vom Grade $n-2$ und $\varphi_2(x)$ höchstens vom Grade $n-3$ ist. So kann man fortfahren und findet die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} &= \frac{C}{x-c} + \frac{\varphi_3(x)}{f_3(x)}, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\varphi_{n-2}(x)}{f_{n-2}(x)} &= \frac{K}{x-k} + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)}, \\ \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} &= \frac{L}{x-l}. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Addirt man die Gleichungen (9.), (10.) und (11.) und lässt die Glieder fort, welche auf beiden Seiten der Gleichung stehen, so erhält man

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}. \tag{12.}$$

Dieser Beweis liefert sogleich den Werth von $A$; es ist nämlich

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l)}. \tag{13.}$$

In derselben Weise, wie $A$ aus $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ berechnet ist, könnte man jetzt $B$ aus $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$, $C$ aus $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \cdots$ berechnen. Dazu würde aber erstens die Bildung von $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}, \cdots$ erforderlich sein, und zweitens könnte man leicht glauben, dass die durch Gleichung (12.) erfolgte Zerlegung in Partialbrüche verschiedene Resultate liefere, jenachdem man zuerst das Glied $\frac{A}{x-a}$ oder ein anderes absondert. Dies ist aber nicht der Fall, es gilt vielmehr der Satz: *Die Zerlegung in Partialbrüche ist eindeutig*; d. h. die Werthe von $A, B, C, \ldots K, L$ sind unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie herleitet. Multiplicirt man nämlich Gleichung (12.) mit

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - k)(x - l),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & A(x - b)(x - c) \ldots (x - k)(x - l) \\ & + B(x - a)(x - c) \ldots (x - k)(x - l) \\ & + C(x - a)(x - b) \ldots (x - k)(x - l) \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + K(x - a)(x - b) \ldots (x - i)(x - l) \\ & + L(x - a)(x - b) \ldots (x - i)(x - k). \end{aligned} \tag{14.}$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \ldots x = k, \quad x = l,$$

so wird

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(a) &= A(a - b)(a - c) \ldots (a - k)(a - l), \\ \varphi(b) &= B(b - a)(b - c) \ldots (b - k)(b - l), \\ \varphi(c) &= C(c - a)(c - b) \ldots (c - k)(c - l), \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi(l) &= L(l - a)(l - b) \ldots (l - i)\, l - k). \end{aligned} \right. \tag{15.}$$

Dies giebt

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\varphi(a)}{(a - b)(a - c) \ldots (a - k)(a - l)}, \\ B &= \frac{\varphi(b)}{(b - a)(b - c) \ldots (b - k)(b - l)}, \\ C &= \frac{\varphi(c)}{(c - a)(c - b) \ldots (c - k)(c - l)}, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L &= \frac{\varphi(l)}{(l - a)(l - b) \ldots (l - i)(l - k)}. \end{aligned} \right. \tag{16.}$$

Man erhält also für die Zähler der Partialbrüche genau dieselben Werthe, gleichviel ob man mit der Absonderung des betreffenden Partialbruches anfängt oder nicht.

Die Gleichungen (16.) lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Es war nämlich

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

wobei nach Gleichung (5.)

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x - a},$$

oder, da $f(a) = 0$ ist,

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{17.}$$

Hieraus folgt (vergl. D.-R., Formel Nr. 15 oder 81 der Tabelle)

$$f_1(a) = \lim_{x=a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{1} = f'(a),$$

also

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \tag{18.}$$

und ebenso

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \quad \ldots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)}, \quad L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}. \tag{18a.}$$

Für die Ausführung der numerischen Berechnung ist dasselbe Verfahren wie bei dem oben gegebenen Beweise am meisten geeignet; man schaffe also in Gleichung (12.) durch Multiplication mit

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - k)(x - l)$$

die Nenner fort, um die Gleichung (14.) zu erhalten, aus der sich dann die Werthe von $A$, $B$, $C, \ldots K$, $L$ unmittelbar ergeben, indem man bezw.

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \ldots x = k, \quad x = l$$

einsetzt.

Man kann allerdings zur Berechnung der Grössen $A$, $B$, $C, \ldots K$, $L$ auch das folgende Verfahren anwenden, das später in dem allgemeineren Falle noch in Betracht kommen wird, wo die Wurzeln von $f(x)$ nicht alle von einander verschieden sind.

In Gleichung (14.) ist die linke Seite höchstens vom Grade $n - 1$; ebenso ist die rechte Seite eine Function vom Grade $n - 1$, die man sich nach Potenzen von $x$ geordnet denken kann.

Da die Gleichung für alle Werthe von $x$ gilt, so müssen die einzelnen Coefficienten der linken Seite gleich sein den gleichstelligen Coefficienten auf der rechten Seite, welche lineare Functionen (d. h. Functionen ersten Grades) der gesuchten Grössen $A, B, C, \ldots K, L$ sind. Nun hat aber eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades im Ganzen $n$ Coefficienten. Man erhält also $n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten, welche sich in diesem Falle stets auflösen lassen.

Am besten wird man dieses Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

**Aufgabe 1.** Man soll den Bruch $\dfrac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Man setzt den Nenner gleich Null und erhält dadurch die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0. \tag{19.}$$

Löst man diese Gleichung auf, so ergeben sich folgende Wurzeln

$$a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2, \tag{20.}$$

deshalb wird

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x-7)(x+3)(x-2). \tag{21.}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} &= \frac{15x^2 - 70x - 95}{(x-7)(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}. \end{aligned} \tag{22.}$$

Um die Werthe von $A$, $B$ und $C$ zu ermitteln, schaffe man die Nenner fort, indem man Gleichung (22.) mit

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x-7)(x+3)(x-2)$$

multiplicirt. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} 15x^2 - 70x - 95 = {} & A(x+3)(x-2) \\ & + B(x-7)(x-2) + C(x-7)(x+3). \end{aligned} \tag{23.}$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von $x$ gilt, so findet man daraus für $x = 7$

$$150 = 50A, \quad \text{oder} \quad A = 3,$$

für $x = -3$

$$250 = 50B, \quad \text{oder} \quad B = 5,$$

und für $x = 2$

$$-175 = -25C, \quad \text{oder} \quad C = 7,$$

folglich wird

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2}. \tag{24.}$$

Man kann auch die rechte Seite von Gleichung (23.) nach fallenden Potenzen von $x$ ordnen und erhält dann

$$\begin{aligned} &15x^2 - 70x - 95 \\ &= x^2(A+B+C) + x(A-9B-4C) + (-6A+14B-21C). \end{aligned} \tag{25.}$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von $x$, folglich müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von $x$ auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein, d. h. es muss

$$A + B + C = 15, \tag{26.}$$

$$A - 9B - 4C = -70, \tag{27.}$$

$$-6A + 14B - 21C = -95 \tag{28.}$$

sein. Löst man diese Gleichungen für $A$, $B$ und $C$ auf, so ergiebt sich wieder

$$A = 3, \quad B = 5, \quad C = 7. \tag{29.}$$

Zu demselben Resultate kommt man natürlich auch durch Anwendung der Gleichungen (18.) und (18a.), indem man

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} \tag{30.}$$

setzt. In dem vorliegenden Falle ist

$$a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2 \tag{31.}$$

und

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 13; \tag{32.}$$

dies giebt

$$(33.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\varphi(7)}{f'(7)} = \dfrac{15\,.\,49 - 70\,.\,7 - 95}{3\,.\,49 - 12\,.\,7 - 13} = \dfrac{150}{50} = 3, \\ B = \dfrac{\varphi(-3)}{f'(-3)} = \dfrac{15\,.\;\;9 + 70\,.\,3 - 95}{3\,.\;\;9 + 12\,.\,3 - 13} = \dfrac{250}{50} = 5, \\ C = \dfrac{\varphi(2)}{f'(2)} = \dfrac{15\,.\;\;4 - 70\,.\,2 - 95}{3\,.\;\;4 - 12\,.\,2 - 13} = \dfrac{-175}{-\;25} = 7. \end{cases}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Function $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Hier ist

$$(34.)\qquad f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1),$$

also

$$(35.)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\,.$$

Um die Grössen $A$, $B$, $C$ zu bestimmen, multiplicirt man die Gleichung (35.) mit $x^3 - x$ und erhält

$$(36.)\qquad x^2 + 1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werthe von $x$, deshalb findet man für $x = 0$

$$(37.)\qquad 1 = -A, \quad \text{oder} \quad A = -1,$$

für $x = 1$

$$(38.)\qquad 2 = 2B, \quad \text{oder} \quad B = +1$$

und für $x = -1$

$$(39.)\qquad 2 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = +1;$$

folglich wird

$$(40.)\qquad \frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,.$$

Ordnet man die rechte Seite von Gleichung (36.) nach fallenden Potenzen von $x$, so erhält man

$$(36\text{a.})\qquad x^2 + 1 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A.$$

Da die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so zerfällt die Gleichung (36a.) in die Gleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} A + B + C = 1, \\ \qquad B - C = 0, \\ \qquad\quad -A = 1. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt wieder

$$(42.)\quad A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, indem man

$$(43.)\quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)},$$

$$(44.)\quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1,$$

$$(45.)\quad f'(x) = 3x^2 - 1, \quad \varphi(x) = x^2 + 1$$

setzt, denn es wird

$$(46.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\varphi(0)}{f'(0)} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1, \\[2ex] B = \dfrac{\varphi(1)}{f'(1)} = \dfrac{1+1}{3-1} = +1, \\[2ex] C = \dfrac{\varphi(-1)}{f'(-1)} = \dfrac{1+1}{3-1} = +1. \end{cases}$$

**Aufgabe 3.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\dfrac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Hier ist

$$(47.)\quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

multiplicirt,

$$(48.)\quad 4x^2 - 15x + 19 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) \\ + C(x-1)(x-2).$$

Dies giebt für $x = 1$

$$8 = 2A, \quad \text{oder} \quad A = 4,$$

für $x = 2$

$$5 = -B, \quad \text{oder} \quad B = -5$$

und für $x = 3$

$$10 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = 5,$$

also

$$(49.)\quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{1}{1 + x - x^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Hier muss man erst Zähler und Nenner des Bruches mit $-1$ multipliciren, damit der Coefficient von $x^2$ im Nenner gleich $+1$ wird. Dadurch erhält man

$$(50.)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2 - x - 1}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(51.)\quad f(x) = x^2 - x - 1 = 0$$

sind

$$(52.)\quad a = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad b = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Deshalb ist

$$(53.)\quad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})},$$

oder

$$(54.)\quad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{2A}{2x - 1 - \sqrt{5}} + \frac{2B}{2x - 1 + \sqrt{5}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$(2x - 1 - \sqrt{5})(2x - 1 + \sqrt{5}) = 4(x^2 - x - 1),$$

so erhält man

$$-4 = 2A(2x - 1 + \sqrt{5}) + 2B(2x - 1 - \sqrt{5}),$$

oder

$$(55.)\quad -2 = 2x(A + B) + A(-1 + \sqrt{5}) + B(-1 - \sqrt{5});$$

daraus folgt

$$(56.)\quad \begin{cases} A + B = 0, \\ A(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2, \end{cases}$$

oder

$$(57.)\quad A = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = +\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dies giebt

$$(58.)\quad \frac{1}{1+x-x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2x-1+\sqrt{5}} - \frac{1}{2x-1-\sqrt{5}}\right).$$

**Aufgabe 5.** Man soll die gebrochene rationale Function $\frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Die vorgelegte Function ist eine *unächt gebrochene*; deshalb muss man sie zunächst durch Division in eine *ganze* und eine *ächt gebrochene* rationale Function zerlegen. Dadurch erhält man

$$(59.)\quad \frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} = 2x+5+\frac{10x-27}{x^2-6x+7}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^2-6x+7 = 0$$

sind

$$(60.)\quad a = 3+\sqrt{2},\quad b = 3-\sqrt{2},$$

folglich wird

$$(61.)\quad f(x) = (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}),$$

$$(62.)\quad \frac{10x-27}{x^2-6x+7} = \frac{A}{x-3-\sqrt{2}} + \frac{B}{x-3+\sqrt{2}},$$

$$(63.)\quad 10x-27 = A(x-3+\sqrt{2}) + B(x-3-\sqrt{2}).$$

Für $x = 3+\sqrt{2}$ erhält man daher

$$(64.)\quad 3+10\sqrt{2} = 2A\sqrt{2},\quad \text{oder}\quad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3+10\sqrt{2}),$$

und für $x = 3-\sqrt{2}$

$$(65.)\quad 3-10\sqrt{2} = -2B\sqrt{2},\quad \text{oder}\quad B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3+10\sqrt{2}),$$

also

$$(66.)\quad \frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} =$$
$$2x+5+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3+10\sqrt{2}}{x-3-\sqrt{2}} + \frac{-3+10\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right).$$

Die angegebene Methode für die Zerlegung in Partialbrüche bleibt richtig, gleichviel ob die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reelle oder complexe Grössen*) sind.

Im letzteren Falle werden aber die Partialbrüche selbst eine complexe Form annehmen, die man vermeiden kann, wenn die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $f(x)$ reell sind.

Wie dies geschieht, möge zunächst die folgende Aufgabe lehren.

**Aufgabe 6.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Indem man den Nenner gleich Null setzt, erhält man die Gleichung

$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = 0 \tag{67.}$$

mit den Wurzeln

$$a = 5, \quad b = 3 + 2\sqrt{-1}, \quad c = 3 - 2\sqrt{-1}, \tag{68.}$$

oder, wenn man $\sqrt{-1}$ mit $i$ bezeichnet,

$$a = 5, \quad b = 3 + 2i, \quad c = 3 - 2i. \tag{68a.}$$

Demnach ist der Nenner der gebrochenen Function

$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x - 5)(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i). \tag{69.}$$

Dies giebt

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 3 - 2i} + \frac{C}{x - 3 + 2i}, \tag{70.}$$

und wenn man diese Gleichung mit $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$ multiplicirt,

$$\begin{aligned} 13x^2 - 68x + 95 = {} & A(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i) \\ & + B(x - 5)(x - 3 + 2i) \\ & + C(x - 5)(x - 3 - 2i). \end{aligned} \tag{71.}$$

Dies giebt für $x = 5$

$$80 = A(2 - 2i)(2 + 2i) = 8A, \quad \text{oder} \quad A = 10, \tag{72.}$$

für $x = 3 + 2i$

*) Vergl. D.-R., § 131—140.

(73.) $-44+20i=(-2+2i)4i\,.\,B,\quad$ oder $\quad B=\dfrac{3-8i}{2}$

und für $x=3-2i$

(74.) $-44-20i=-(-2-2i)4i\,.\,C,\quad$ oder $\quad C=\dfrac{3+8i}{2}$,

folglich ist

$$(75.)\quad \frac{13x^2-68x+95}{x^3-11x^2+43x-65}=\frac{10}{x-5}+\frac{3-8i}{2(x-3-2i)}+\frac{3+8i}{2(x-3+2i)}.$$

Da die beiden letzten Glieder conjugirt complexe Grössen sind, so muss ihre Summe reell sein.*) In der That, es ist

$$\frac{3-8i}{2(x-3-2i)}+\frac{3+8i}{2(x-3+2i)}=\frac{3x+7}{x^2-6x+13},$$

also

$$(76.)\quad \frac{13x^2-68x+95}{x^3-11x^2+43x-65}=\frac{10}{x-5}+\frac{3x+7}{x^2-6x+13}.$$

Ganz allgemein gilt nun Folgendes. Sind in $f(x)$ die Coefficienten reell, so treten die complexen Wurzeln in $f(x)=0$ bekanntlich paarweise auf.**) Ist z. B. $b$ gleich $g+hi$, so ist eine andere Wurzel, sie heisse $c$, gleich $g-hi$, also

$$(77.)\quad b=g+hi,\quad c=g-hi.$$

Sind nun auch in $\varphi(x)$ die Coefficienten reell, so wird

$$(78.)\quad \begin{cases} B=\dfrac{\varphi(b)}{f'(b)}=\dfrac{\varphi(g+hi)}{f'(g+hi)}=G+Hi, \\[2ex] C=\dfrac{\varphi(c)}{f'(c)}=\dfrac{\varphi(g-hi)}{f'(g-hi)}=G-Hi, \end{cases}$$

folglich erhält man

$$(79.)\quad \frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{G+Hi}{x-g-hi}+\frac{G-Hi}{x-g+hi}=\frac{2G(x-g)-2Hh}{(x-g)^2+h^2},$$

oder

$$(80.)\quad \frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{Px+Q}{(x-g)^2+h^2},$$

wo

$$(81.)\quad P=2G,\quad Q=-2Gg-2Hh$$

reelle Grössen sind.

---

*) Vergl. D.-R., Seite 589, Satz 1.

**) Vergl. D.-R., § 140.

Durch Anwendung der Gleichung (80.) kann man also bei der Partialbruchzerlegung die complexen Grössen ganz vermeiden.

In Aufgabe 6 hätte man z. B. setzen können

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x - 5} + \frac{Px + Q}{x^2 - 6x + 13}. \tag{82.}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x - 5)(x^2 - 6x + 13),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 13x^2 - 68x + 95 &= A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x - 5) \\ &= x^2(A + P) + x(-6A - 5P + Q) + (13A - 5Q). \end{aligned} \tag{83.}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} A + P &= \phantom{-}13, \\ -6A - 5P + Q &= -68, \\ 13A - 5Q &= \phantom{-}95. \end{aligned} \right. \tag{84.}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$A = 10, \quad P = 3, \quad Q = 7, \tag{85.}$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (82.) einsetzt,

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}.$$

Dieses Resultat stimmt natürlich mit dem früheren überein.

Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung durch die folgenden Ueberlegungen. Aus Gleichung (83.), nämlich aus der Gleichung

$$13x^2 - 68x + 95 = A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x - 5)$$

ergiebt sich für

$$x^2 - 6x + 13 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 6x - 13 \tag{86.}$$

$$10x - 74 = (P + Q)x - 13P - 5Q. \tag{87.}$$

Da Gleichung (86.) für *zwei* Werthe von $x$ befriedigt wird, nämlich für

$$x = 3 + 2i \quad \text{und} \quad x = 3 - 2i,$$

so wird auch Gleichung (87.) für diese beiden Werthe von $x$ befriedigt. Nun ist aber Gleichung (87.) nur vom *ersten* Grade, folglich müssen (nach D.-R., § 82, Satz 5 auf Seite 351) die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein, d. h. es wird

(88.) $P + Q = 10, \quad 13P + 5Q = 74, \quad \text{also} \quad P = 3, \quad Q = 7.$

Wie sich dieses Verfahren allgemein durchführen lässt, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 7.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Indem man den Nenner

(89.) $$x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = 0$$

setzt, erhält man für die Wurzeln dieser Gleichung

(90.) $$a = 3, \quad b = 2 + 4i, \quad c = 2 - 4i.$$

Deshalb ist

(91.) $$x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = (x-3)(x-2-4i)(x-2+4i) = (x-3)(x^2-4x+20),$$

(92.) $$\frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60} = \frac{A}{x-3} + \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 20}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(x - 3)(x^2 - 4x + 20)$, so ergiebt sich

(93.) $$6x^2 - 25x + 89 = A(x^2 - 4x + 20) + P(x^2 - 3x) + Q(x - 3).$$

Daraus folgt für $x = 3$

(94.) $$68 = 17A, \quad \text{oder} \quad A = 4,$$

und für

(95.) $$x^2 - 4x + 20 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 4x - 20$$

(96.) $$-x - 31 = (P + Q)x - 20P - 3Q.$$

Indem man die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleichsetzt, findet man

(97.) $$P + Q = -1, \quad 20P + 3Q = 31,$$

(98.) $$P = 2, \quad Q = -3;$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (92.) einsetzt,

(99.) $$\frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60} = \frac{4}{x-3} + \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 20}.$$

**Aufgabe 8.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Indem man den Nenner

$$f(x) = (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5) = 0 \tag{100.}$$

setzt, erhält man die vier complexen Wurzeln

$$a = 2 + 3i,\quad b = 2 - 3i,\quad c = -1 + 2i,\quad d = -1 - 2i, \tag{101.}$$

deshalb wird man den vorgelegten Bruch auf die Form

$$\frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 13} + \frac{Rx + S}{x^2 + 2x + 5} \tag{102.}$$

bringen. Hieraus erhält man durch Fortschaffung der Nenner

$$\begin{aligned} 7x^3 - 6x^2 + 9x + 108 = {} & (Px + Q)(x^2 + 2x + 5) \\ & + (Rx + S)(x^2 - 4x + 13). \end{aligned} \tag{103.}$$

Dies giebt für

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 4x - 13,\ x^3 = 3x - 52$$

$$6x - 178 = P(16x - 78) + Q(6x - 8). \tag{104.}$$

Da die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so gelten die Gleichungen

$$8P + 3Q = 3, \quad 39P + 4Q = 89, \tag{105.}$$

folglich wird

$$P = 3, \quad Q = -7. \tag{106.}$$

Setzt man in Gleichung (103.)

$$x^2 + 2x + 5 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = -2x - 5, \quad x^3 = -x + 10,$$

so findet man in ähnlicher Weise die Gleichungen

$$14x + 208 = R(20x + 30) + S(-6x + 8), \tag{107.}$$

$$10R - 3S = 7, \quad 15R + 4S = 104, \tag{108.}$$

$$R = 4, \quad S = 11, \tag{109.}$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (102.) einsetzt,

$$\frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 13} + \frac{4x + 11}{x^2 + 2x + 5}. \tag{110.}$$

§ 28.

## Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln besitzt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 103.)

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so kann man diese gleichen Wurzeln zusammenfassen und $f(x)$ auf die Form

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda \tag{1.}$$

bringen, wobei die Grössen $a, b, c, \dots k, l$ sämmtlich von einander verschieden sind, und

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa + \lambda = n \tag{2.}$$

ist. Man erkennt sogleich, dass in diesem Falle die Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}$$

nicht mehr bestehen kann, weil der Generalnenner auf der rechten Seite nicht mehr gleich $f(x)$ ist.

Hier sei

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda \tag{3.}$$

und

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}, \tag{4.}$$

dann wird die ganze Function

$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = \frac{\varphi(x) f_1(a) - \varphi(a) f_1(x)}{f_1(a)} \tag{5.}$$

gleich 0 für $x = a$, folglich ist sie theilbar durch $x - a$. Man erhält also

$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-a)\varphi_1(x), \tag{6.}$$

oder

$$\varphi(x) = A_1 f_1(x) + (x-a)\varphi_1(x), \tag{6a.}$$

wo $\varphi_1(x)$ eine ganze Function und höchstens vom Grade $n-2$ ist. Nach diesen Angaben wird also

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 f_1(x) + (x-a)\varphi_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}. \tag{7.}$$

Man hat also von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ein Glied $\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}$ abgesondert. so dass nur noch eine ächt gebrochene Function $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}$ übrig bleibt, bei welcher der Grad des Nenners nicht mehr $n$, sondern nur noch $n-1$ ist.

Ist $\alpha > 1$, so kann man dieses Verfahren wiederholen und erhält ebenso

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}, \tag{8.}$$

also

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}, \tag{9.}$$

wo jetzt in der ächt gebrochenen Function $\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}$ der Grad des Nenners wieder um 1 kleiner ist.

Wendet man dieses Verfahren $\alpha$-mal an, so ergiebt sich

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}. \tag{10.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet schliesslich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ & + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}. \end{aligned} \tag{11.}$$

Die Zähler $A_1, A_2, \ldots A_\alpha, B_1, B_2, \ldots B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots L_\lambda$ dieser Partialbrüche berechnet man, indem man die Gleichung (11.) mit dem Generalnenner $f(x)$ multiplicirt, nach Potenzen von $x$ ordnet und die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Dies giebt dann, wie man leicht bestätigen kann, $n$ lineare Gleichungen mit den $n$ Unbekannten

$$A_1, A_2, \ldots A_\alpha, B_1, B_2, \ldots B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots L_\lambda,$$

und zwar sind diese Gleichungen immer lösbar.

Aus dem Umstande, dass diese $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten nur *eine* Lösung besitzen, kann man wieder schliessen, dass auch in diesem Falle die Partialbruchzerlegung nur auf *eine* Weise geschehen kann, d. h. dass man dasselbe Resultat erhält, gleichviel ob man zuerst die Partialbrüche

$$\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$

absondert, oder ob man mit der Absonderung der Partialbrüche in einer späteren Zeile von Gleichung (11.) anfängt.

Die Rechnung wird ziemlich umständlich, wenn $n$ eine grosse Zahl ist; dann kommt man schneller zum Ziele, indem man, der Gleichung (4.) entsprechend, zunächst

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}$$

berechnet und das gleiche Verfahren auf die Ermittelung von $B_1, C_1, \ldots K_1, L_1$ anwendet. Dies geschieht am einfachsten, indem man in Gleichung (11.) durch Multiplication mit

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa (x-l)^\lambda$$

die Nenner fortschafft und dann der Reihe nach

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \ldots x = k, \quad x = l$$

setzt. Die Berechnung der übrigen Zähler der Partialbrüche geschieht dann nach dem zuerst beschriebenen Verfahren, ist aber viel leichter geworden, weil man nur noch $n - m$ lineare Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten hat, wobei $m$ die Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln $a, b, c \ldots k, l$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dieser Angaben dienen.

**Aufgabe 1.** Man soll die gebrochene rationale Function $\dfrac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** In diesem Falle muss man

$$(12.)\quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3}$$
$$= \frac{A}{x-7} + \frac{B_1}{(x-5)^3} + \frac{B_2}{(x-5)^2} + \frac{B_3}{x-5}$$

setzen. Dies giebt, wenn man mit $(x-7)(x-5)^3$ multiplicirt,

$$(13.)\quad 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619$$
$$= A(x-5)^3 + B_1(x-7) + B_2(x-7)(x-5) + B_3(x-7)(x-5)^2,$$

oder

$$(14.)\quad 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619 = x^3(A + B_3)$$
$$+ x^2(-15A + B_2 - 17B_3) + x(75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3)$$
$$+ (-125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3).$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$(15.)\quad \left\{\begin{array}{r} A + B_3 = 4, \\ -15A + B_2 - 17B_3 = -63, \\ 75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3 = 338, \\ -125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 = -619. \end{array}\right.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$(16.)\quad A = 4, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -3, \quad B_3 = 0,$$

so dass man erhält

$$(17.)\quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{4}{x-7} + \frac{2}{(x-5)^3} - \frac{3}{(x-5)^2}.$$

Wendet man das andere Verfahren an, indem man in Gleichung (13.) zuerst $x = 7$ setzt, so findet man

$$(18.)\quad 32 = 8A, \quad \text{oder} \quad A = 4;$$

und für $x = 5$ findet man aus Gleichung (13.)

$$(19.)\quad -4 = -2B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2.$$

Zur Ermittelung von $B_2$ und $B_3$ braucht man jetzt nur noch *zwei* Gleichungen. Deshalb wählt man von den *vier* Gleichungen (15.), welche zur Verfügung stehen, diejenigen aus, welche sich am leichtesten herleiten lassen; d. h. man braucht jetzt gar nicht mehr die Gleichung (14.) vollständig zu bilden, sondern berechnet von der rechten Seite dieser Gleichung nur den Coefficienten von $x^3$ und das constante Glied. Daraus ergeben sich in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (15.) die Gleichungen

$$A + B_3 = 4, \tag{20.}$$

$$-125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 = -619, \tag{21.}$$

die sich aber mit Hülfe der Gleichungen (18.) und (19.) auf

$$B_3 = 0, \tag{20a.}$$

$$35B_2 - 175B_3 = -105, \quad \text{oder} \quad B_2 = -3 \tag{21a.}$$

reduciren. Auf diese Weise wird man wieder zu dem in Gleichung (17.) angegebenen Resultate geführt.

**Aufgabe 2.** Man soll den Bruch $\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Hier muss man

$$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1} \tag{22.}$$

setzen und erhält durch Multiplication mit

$$(x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

$$\begin{aligned} 3x^3 + 10x^2 - x = {} & A_1(x+1)^2 + A_2(x+1)^2(x-1) \\ & + B_1(x-1)^2 + B_2(x+1)(x-1)^2. \end{aligned} \tag{23.}$$

Hieraus ergiebt sich für $x = 1$

$$12 = 4A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 3, \tag{24.}$$

und für $x = -1$

$$8 = 4B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2. \tag{25.}$$

Zur Ermittelung von $A_2$ und $B_2$ suche man auf der rechten Seite von Gleichung (23.) den Coefficienten von $x^3$ und das constante Glied auf und setze die gefundenen Grössen den gleichstelligen Coefficienten auf der linken Seite gleich. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen

$$A_2 + B_2 = 3, \tag{26.}$$

$$A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = 0, \tag{27.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (24.) und (25.)

$$-A_2 + B_2 = -5, \tag{27a.}$$

also

$$A_2 = 4, \quad B_2 = -1, \tag{28.}$$

so dass Gleichung (22.) übergeht in

$$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}. \tag{29.}$$

Dieses Verfahren gilt auch hier noch, wenn die Wurzeln $a, b, c, \ldots k, l$ sämmtlich oder theilweise complex sind. Man kann aber, wenn in $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Coefficienten sämmtlich reell sind, das Resultat gleichfalls auf eine reelle Form bringen. Ist z. B. $b$ gleich $g + hi$, so wird eine andere Wurzel, sie heisse $c$, gleich $g - hi$, und es wird $\beta$ gleich $\gamma$ sein, wie in der Algebra bewiesen wird (Vergl. D.-R., § 140). Nun folgt aber aus der Bildung der Grössen $B_1, B_2, \ldots B_\beta$ und $C_1, C_2, \ldots C_\gamma$, dass man die letzteren durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ aus den ersteren erhält. Ist also

$$B_1 = G_1 + H_1 i,\ B_2 = G_2 + H_2 i, \ldots B_\beta = G_\beta + H_\beta i, \tag{30.}$$

so wird

$$C_1 = G_1 - H_1 i,\ C_2 = G_2 - H_2 i, \ldots C_\gamma = C_\beta = G_\beta - H_\beta i. \tag{31.}$$

Deshalb werden die Summen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{B_1}{(x-b)^\beta} + \dfrac{C_1}{(x-c)^\beta}, \\ \dfrac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dfrac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{B_\beta}{x-b} + \dfrac{C_\beta}{x-c} \end{array}\right. \tag{32.}$$

sämmtlich reell.

Man kann auch hier in der Zwischenrechnung die complexen Grössen ganz vermeiden. Wenn man nämlich die Ausdrücke (32.) auf gleichen Nenner bringt und addirt, so erhält man $\dfrac{F(x)}{[(x-g)^2 + h^2]^\beta}$, wo der Nenner vom Grade $2\beta$, der Zähler aber höchstens vom Grade $2\beta - 1$ ist. Jetzt findet man durch Division

$$F(x) = [(x-g)^2 + h^2]F_1(x) + P_1x + Q_1, \tag{33.}$$

also

$$\frac{F(x)}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} = \frac{P_1x+Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}}. \tag{34.}$$

Ebenso findet man

$$\frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} = \frac{P_2x+Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \frac{F_2(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-2}}. \tag{35.}$$

In derselben Weise kann man fortfahren und erhält schliesslich

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{C_\beta}{x-c} \tag{36.}$$
$$= \frac{P_1x+Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{P_2x+Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x+Q_\beta}{(x-g)^2+h^2}.$$

Die Berechnung der Grössen $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots P_\beta, Q_\beta$ erfolgt jetzt wieder wie früher, indem man den Ausdruck, welcher sich für $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch Partialbruchzerlegung ergiebt, vorläufig aber noch die unbestimmten Grössen $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots P_\beta, Q_\beta$ u. s. w. enthält, mit $f(x)$ multiplicirt, nach Potenzen von $x$ ordnet und die einzelnen Coefficienten den gleichstelligen Coefficienten von $\varphi(x)$ gleichsetzt. Dadurch erhält man $n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten, deren Auflösung nach diesen Unbekannten immer möglich ist.

Man kann aber auch hier die Rechnung wesentlich abkürzen, indem man

$$(x-g)^2 + h^2 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 2gx - g^2 - h^2$$

setzt. Dadurch kann man die eben beschriebene Gleichung auf den ersten Grad bringen und durch Gleichsetzung der gleichstelligen Coefficienten die beiden darin verbliebenen Unbekannten $P_1$ und $Q_1$ berechnen.

Am besten wird dieses Verfahren durch Beispiele erläutert.

**Aufgabe 3.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Nach dem Gesagten muss man hier

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1} \tag{37.}$$

setzen. Wenn man diese Gleichung mit $(x-1)(x^2+1)^2$ multiplicirt, erhält man

$$x+1 = A(x^2+1)^2 + (P_1x+Q_1)(x-1) + (P_2x+Q_2)(x-1)(x^2+1), \tag{38.}$$

oder, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von $x$ ordnet,

$$\begin{aligned} x+1 = {} & x^4(A+P_2) + x^3(-P_2+Q_2) + x^2(2A+P_1+P_2-Q_2) \\ & + x(-P_1+Q_1-P_2+Q_2) + (A-Q_1-Q_2). \end{aligned} \tag{39.}$$

Durch Gleichsetzung der gleichstelligen Coefficienten ergiebt sich hieraus

$$\left\{ \begin{aligned} A + P_2 &= 0, \\ -P_2 + Q_2 &= 0, \\ 2A + P_1 + P_2 - Q_2 &= 0, \\ -P_1 + Q_1 - P_2 + Q_2 &= 1, \\ A - Q_1 - Q_2 &= 1. \end{aligned} \right. \tag{40.}$$

Löst man diese Gleichungen auf, so findet man

$$A = \tfrac{1}{2}, \quad P_1 = -1, \quad Q_1 = 0, \quad P_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad Q_2 = -\tfrac{1}{2}, \tag{41.}$$

also

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1}\right). \tag{42.}$$

Die Rechnung wird wesentlich abgekürzt, wenn man in Gleichung (38.) zunächst $x = 1$ setzt. Dadurch erhält man

$$2 = 4A, \quad \text{oder} \quad A = \tfrac{1}{2}. \tag{43.}$$

Für $x^2 = -1$ geht sodann Gleichung (38.) über in

$$x + 1 = (P_1x + Q_1)(x-1) = (-P_1 + Q_1)x - P_1 - Q_1, \tag{44.}$$

und daraus folgt

$$-P_1 + Q_1 = 1, \quad -P_1 - Q_1 = 1, \tag{45.}$$

$$P_1 = -1, \qquad Q_1 = 0. \tag{46.}$$

Um noch die beiden Grössen $P_2$ und $Q_2$ zu berechnen, braucht man auf der rechten Seite von Gleichung (38.) nur diejenigen beiden Coefficienten zu berechnen, welche sich am leichtesten ermitteln lassen, nämlich die Coefficienten von $x^4$ und $x^0$. Wenn man diese Grössen den gleichstelligen Coefficienten auf der linken Seite von Gleichung (38.) gleichsetzt, erhält man

(47.) $$A + P_2 = 0, \quad A - Q_1 - Q_2 = 1,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (43.) und (46.)

(48.) $$P_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad Q_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Daraus ergiebt sich wieder Gleichung (42.).

**Aufgabe 4.** Man soll die ächt gebrochene rationale Function
$$\frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x + 2x + 2)^2}$$
in Partialbrüche zerlegen.

**Auflösung.** Hier ist zu setzen

(49.) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2+2x+2},$$

folglich wird

(50.) $$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8 \\ &= A_1(x^2 + 2x + 2)^2 + A_2(x-2)(x^2 + 2x + 2)^2 \\ &\quad + (P_1x + Q_1)(x-2)^2 + (P_2x + Q_2)(x-2)^2(x^2 + 2x + 2).\end{aligned}$$

Dies giebt für $x = 2$

(51.) $$100 = 100A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 1$$

und für $x^2 + 2x + 2 = 0$, oder $x^2 = -2x - 2$

$$10x + 30 = (P_1x + Q_1)(-6x + 2) = (14P_1 - 6Q_1)x + (12P_1 + 2Q_1),$$

also

(52.) $$7P_1 - 3Q_1 = 5, \quad 6P_1 + Q_1 = 15,$$

(53.) $$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3.$$

Setzt man jetzt noch die Coefficienten von $x^5$, $x^4$ und $x^0$ auf beiden Seiten von Gleichung (50.) einander gleich, so erhält man

$$A_2 + P_2 = 3, \quad A_1 + 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 2,$$
$$4A_1 - 8A_2 + 4Q_1 + 8Q_2 = -8,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (51.) und (53.)

(54.) $$A_2 + P_2 = 3, \quad 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 1, \quad A_2 - Q_2 = 3,$$

also

(55.) $$A_2 = 2, \quad P_2 = 1, \quad Q_2 = -1.$$

Indem man diese Werthe in die Gleichung (49.) einsetzt, erhält man

$$\frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = \tag{56.}$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche ist vorausgesetzt, dass man die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ermittelt hat.

Weitere Uebungs-Aufgaben kann sich der Anfänger sehr leicht selbst stellen, indem er beliebig gewählte Partialbrüche auf den gemeinsamen Generalnenner bringt und dadurch die Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ bildet.

## § 29.

## Integration der Functionen $\frac{A}{x-a}dx$ und $\frac{A}{(x-a)^n}dx$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 19, 53, 54, 55, 57, 59 und 104.)

Die Zerlegung in Partialbrüche macht es möglich, jede gebrochene rationale Function zu integriren, denn man kann sie nach den Ausführungen der vorhergehenden Paragraphen stets (nöthigenfalls nach Absonderung einer ganzen rationalen Function) in eine Summe verwandeln, deren einzelne Glieder entweder die Form $\frac{A}{x-a}$ oder $\frac{A}{(x-a)^n}$ haben. Diese Ausdrücke kann man aber sehr leicht integriren.

Setzt man nämlich

$$x - a = t, \quad \text{also} \quad dx = dt, \tag{1.}$$

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dt}{t} = A\,\mathrm{l}t,$$

oder in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 19 der Tabelle

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A l(x-a). \tag{2.}$$

Ferner wird, wenn $n$ von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 9 der Tabelle, indem man $m = -n$ setzt,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{dt}{t^n} = A \int t^{-n} dt = A \frac{t^{-n+1}}{-n+1},$$

oder

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}. \tag{3.}$$

Für $n = 2$ ergiebt sich hieraus Formel Nr. 57 der Tabelle nämlich

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b}. \tag{3a.}$$

Wendet man dies auf die in § 27 und 28 behandelten Beispiele an, so findet man ohne Weiteres die Lösung der folgenden Aufgaben.

**Aufgabe 1.** $\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 1 in § 27 ist

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2},$$

folglich wird

$$\begin{aligned}\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx &= \int \frac{3}{x-7} dx + \int \frac{5}{x+3} dx + \int \frac{7}{x-2} dx \\ &= 3l(x-7) + 5l(x+3) + 7l(x-2) \\ &= l[(x-7)^3 (x+3)^5 (x-2)^7].\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** $\int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 2 in § 27 ist

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx = -\int\frac{1}{x}\,dx + \int\frac{1}{x-1}\,dx + \int\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= -\,lx + l(x-1) + l(x+1)$$
$$= l\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$$

**Aufgabe 3.** $\int\frac{4x^2-15x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 3 in § 27 ist

$$\frac{4x^2-15x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3},$$

folglich wird

$$\int\frac{4x^2-15x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{S}x = 4\int\frac{dx}{x-1} - 5\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x-3}$$
$$= 4\,l(x-1) - 5\,l(x-2) + 5\,l(x-3).$$

**Aufgabe 4.** $\int\frac{dx}{1+x-x^2} = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 4 in § 27 ist

$$\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{2x-1+\sqrt{5}} - \frac{2}{2x-1-\sqrt{5}}\right),$$

folglich wird

$$\int\frac{dx}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int\frac{2dx}{2x-1+\sqrt{5}} - \int\frac{2dx}{2x-1-\sqrt{5}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[l(2x-1+\sqrt{5}) - l(2x-1-\sqrt{5})\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,l\left(\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}\right).$$

**Aufgabe 5.** $\int\frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7}\,dx = ?$

**Auflösung** Nach Aufgabe 5 in § 27 ist

$$\frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7} = 2x+5+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3+10\sqrt{2}}{x-3-\sqrt{2}} + \frac{-3+10\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right),$$

folglich wird

$$\int\frac{2x^3-7x^2-6x+8}{x^2-6x+7}\,dx = 2\int x\,dx + 5\int dx$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{(3+10\sqrt{2})dx}{x-3-\sqrt{2}}+\int\frac{(-3+10\sqrt{2})dx}{x-3+\sqrt{2}}\right]$$
$$= x^2+5x+\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+10\sqrt{2})\,l(x-3-\sqrt{2})$$
$$+(-3+10\sqrt{2})\,l(x-3+\sqrt{2})]$$
$$= x^2+5x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[3\,l\left(\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right)+10\sqrt{2}\,l(x^2-6x+7)\right]$$
$$= x^2+5x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right)+5l\,(x^2-6x+7).$$

**Aufgabe 6.** $\int\frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)}=?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe Nr. 6 in § 27 ist

$$\frac{13x^2-68x+95}{(x-5)(x^2-6x+13)}=\frac{10}{x-5}+\frac{3-8i}{2(x-3-2i)}+\frac{3+8i}{2(x-3+2i)},$$

folglich wird

$$\int\frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)} = 10\int\frac{dx}{x-5}+\frac{3-8i}{2}\int\frac{dx}{x-3-2i}$$
$$+\frac{3+8i}{2}\int\frac{dx}{x-3+2i}$$
$$= 10\,l(x-5)+\frac{3-8i}{2}\,l(x-3-2i)$$
$$+\frac{3+8i}{2}\,l(x-3+2i).$$

Dieses Resultat befriedigt deshalb nicht, weil es complexe Grössen enthält, obgleich man es, wie später gezeigt werden soll, auf eine reelle Form bringen kann.

**Aufgabe 7.** $\int\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}\,dx=?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 1 in § 28 ist

$$\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}=\frac{4}{x-7}+\frac{2}{(x-5)^3}-\frac{3}{(x-5)^2},$$

folglich wird

$$\int\frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7)(x-5)^3}dx = 4\int\frac{dx}{x-7}+2\int\frac{dx}{(x-5)^3}$$
$$-3\int\frac{dx}{(x-5)^2}$$
$$= 4l(x-7)-\frac{1}{(x-5)^2}+\frac{3}{x-5}$$
$$= 4l(x-7)+\frac{3x-16}{(x-5)^2}.$$

**Aufgabe 8.** $\int\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}dx = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 2 in § 28 ist

$$\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\int\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}dx = 3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+4\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$-\int\frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{-3}{x-1}+4l(x-1)-\frac{2}{x+1}-l(x+1)$$
$$= l\left(\frac{(x-1)^4}{x+1}\right)-\frac{5x+1}{x^2-1}.$$

Die einfachsten Fälle der Partialbruchzerlegung sind schon im ersten Theile (§ 8) berücksichtigt worden. So ergiebt sich z. B. Formel Nr. 53 der Tabelle, nämlich

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}l\left(\frac{x-a}{x+a}\right),$$

ohne Weiteres durch Partialbruchzerlegung, denn es ist

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}, \tag{4.}$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $(x-a)(x+a) = x^2-a^2$ multiplicirt,

$$1 = A(x+a)+B(x-a). \tag{5.}$$

Dies giebt für $x = a$

$$1 = 2Aa, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2a},$$

und für $x = -a$

$$1 = -2Ba, \quad \text{oder} \quad B = -\frac{1}{2a}.$$

Setzt man diese Werthe von $A$ und $B$ in die Gleichung (4.) ein, so erhält man

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

also

$$(6.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}[\mathrm{l}(x-a) - \mathrm{l}(x+a)] = \frac{1}{2a}\mathrm{l}\left(\frac{x-a}{x+a}\right).$$

In gleicher Weise ergeben sich auch die Formeln Nr. 54 und 55 der Tabelle, denn es ist

$$(7.) \quad \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

oder

$$(8.) \quad 1 = A(x-x_2) + B(x-x_1).$$

Dies giebt für $x = x_1$

$$(9.) \quad 1 = A(x_1 - x_2), \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{x_1 - x_2},$$

und für $x = x_2$

$$(10.) \quad 1 = B(x_2 - x_1), \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Dadurch erhält man in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 55 der Tabelle

$$(11.) \quad \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right),$$

$$(12.) \quad \int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\mathrm{l}\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right).$$

Daraus ergiebt sich dann auch Formel Nr. 54 der Tabelle, denn bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung

(13.) $$x^2 + 2bx + c = 0$$

mit $x_1$ und $x_2$, so wird

(14.) $$\begin{cases} x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c},\ x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \\ x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}, \end{cases}$$

(15.) $$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2bx + c,$$

so dass Gleichung (12.) übergeht in

(16.) $$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \mathrm{l}\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right).$$

Ebenso findet man auch Formel Nr. 59 der Tabelle am einfachsten durch Partialbruchzerlegung, denn es ist

(17.) $$\frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

(18.) $$Px + Q = A(x - x_2) + B(x - x_1).$$

Dies giebt für $x = x_1$

(19.) $$Px_1 + Q = A(x_1 - x_2), \quad \text{oder} \quad A = \frac{Px_1 + Q}{x_1 - x_2},$$

und für $x = x_2$

(20.) $$Px_2 + Q = B(x_2 - x_1), \quad \text{oder} \quad B = \frac{Px_2 + Q}{x_2 - x_1}.$$

Daraus folgt in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 59 der Tabelle

(21.) $$\frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{Px_1 + Q}{x - x_1} - \frac{Px_2 + Q}{x - x_2}\right),$$

(22.) $$\int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} =$$

$$\frac{1}{x_1 - x_2}[(Px_1 + Q)\mathrm{l}(x - x_1) - (Px_2 + Q)\mathrm{l}(x - x_2)].$$

## § 30.

## Integration der Functionen

## $\frac{dx}{(x-g)^2+h^2}$ und $\frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 105 bis 107.)

Nach Formel Nr. 20 der Tabelle war

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right). \tag{1.}$$

Auf den Zusammenhang dieser Formel mit Nr. 53 der Tabelle, nämlich mit

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{l}\left(\frac{x-a}{x+a}\right), \tag{2.}$$

ist bereits auf Seite 47 hingewiesen worden.

Aus Formel Nr. 20 der Tabelle ergiebt sich Formel Nr. 56, nämlich

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right), \tag{3.}$$

indem man das Integral auf die Form

$$\int \frac{d(x+b)}{(x+b)^2+c-b^2}$$

bringt und $c-b^2$ gleich $a^2$ setzt. Dieses Integral geht in

$$\int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{d(x-g)}{(x-g)^2+h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-g}{h}\right) \tag{4.}$$

über, wenn man

$$b = -g, \quad c-b^2 = h^2 \tag{5.}$$

setzt. Noch unmittelbarer erhält man dieses Resultat durch die Substitution

$$x-g = ht, \quad dx = hdt, \tag{6.}$$

dann wird nämlich in Uebereinstimmung mit Gleichung (5.)

$$\int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{hdt}{h^2(t^2+1)} = \frac{1}{h}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg} t \tag{7.}$$
$$= \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$

Dieselbe Substitution kann man anwenden, um $\int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ zu berechnen für den Fall, wo $n > 1$ ist; dann erhält man nämlich

$$(8.)\quad \int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = \int \frac{hdt}{h^{2n}(1+t^2)^n} = \frac{1}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Nun ist

$$(9.)\quad \frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^n},$$

folglich wird

$$(10.)\quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^n}.$$

Setzt man jetzt in Formel Nr. 61 der Tabelle, nämlich in

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

$$u = \frac{t}{2}, \quad dv = \frac{2tdt}{(1+t^2)^n} = \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n},$$

also

$$du = \tfrac{1}{2}dt, \quad v = \frac{-1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}},$$

so erhält man

$$(11.)\quad \int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},$$

und wenn man diese Gleichung von Gleichung (10.) subtrahirt,

$$(12.)\quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = +\frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Durch diese Formel ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt. Durch wiederholte Anwendung kommt man schliesslich auf

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t.$$

**Beispiel** für $n = 3$.

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t,$$

also

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t$$
$$= \frac{t(3t^2+5)}{8(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t.$$

Man kann das gesuchte Integral auch auf Formel Nr. 65 der Tabelle zurückführen, indem man

$$(13.)\qquad t = \operatorname{tg} z,\ \text{ also }\ z = \operatorname{arc\,tg} t,\ dz = \frac{dt}{1+t^2}$$

setzt, dann wird mit Rücksicht auf Formel Nr. 65 der Tabelle

$$(14.)\quad 1+t^2 = 1+\operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z},\ \frac{1}{1+t^2} = \cos^2 z,\ \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2} z,$$

$$(15.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int\cos^{2n-2} z\,dz$$
$$= \sin z\left[\frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3} z + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5} z\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2}\cos z\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2}z.$$

Dabei ist

$$(16.)\quad \cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin z\cos z = \frac{t}{1+t^2}.$$

Für $n = 3$ erhält man z. B. wieder

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \sin z\left(\frac{1}{4}\cos^3 z + \frac{3}{4.2}\cos z\right) + \frac{3.1}{4.2}z$$
$$= \frac{t}{1+t^2}\left(\frac{1}{4(1+t^2)} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t.$$

## § 31.

## Integration der Functionen $\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}$ und $\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 108 und 109.)

Setzt man in Formel Nr. 58 der Tabelle, nämlich in

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c}=\frac{P}{2}\mathrm{l}(x^2+2bx+c)+(Q-Pb)\int\frac{dx}{x^2+2bx+c},$$

(1.) $$b=-g,\quad c-b^2=h^2,$$

so geht sie über in

(2.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}=\frac{P}{2}\mathrm{l}[(x-g)^2+h^2]+(Pg+Q)\int\frac{dx}{(x-g)^2+h^2},$$

oder nach Formel Nr. 105 der Tabelle

(3.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}=\frac{P}{2}\mathrm{l}[(x-g)^2+h^2]+\frac{Pg+Q}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$

In ähnlicher Weise kann man $\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ auffinden, wenn $n>1$ vorausgesetzt wird. Es ist nämlich

(4.) $$\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=\int\frac{P(x-g)+Pg+Q}{[(x-g)^2+h^2]^n}dx$$
$$=\frac{P}{2}\int\frac{2(x-g)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}+(Pg+Q)\int\frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}.$$

Setzt man jetzt

(5.) $$(x-g)^2+h^2=y,\quad\text{also}\quad 2(x-g)dx=dy,$$

und

(6.) $$x-g=ht,\quad\text{also}\quad dx=hdt,$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}=\frac{P}{2}\int\frac{dy}{y^n}+\frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

oder

$$(7.)\quad \int\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = -\frac{P}{(2n-2)[(x-g)^2+h^2]^{n-1}} + \frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

wobei das Integral auf der rechten Seite nach Formel Nr. 106 oder 107 der Tabelle berechnet werden kann.

## § 32.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** $\int\frac{(13x^2-68x+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)} = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 6 in § 27 ist

$$(1.)\quad \frac{13x^2-68x+95}{(x-5)(x^2-6x+13)} = \frac{10}{x-5} + \frac{3x+7}{x^2-6x+13}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 19 der Tabelle

$$(2.)\quad \int\frac{10dx}{x-5} = 10\mathrm{l}(x-5)$$

und nach Formel Nr. 108 der Tabelle

$$(3.)\quad \int\frac{(3x+7)dx}{x^2-6x+13} = \int\frac{(3x+7)dx}{(x-3)^2+2^2} = \frac{3}{2}\mathrm{l}(x^2-6x+13) + 8\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-3}{2}\right),$$

folglich wird

$$(4.)\quad \int\frac{(13x^2-68+95)dx}{(x-5)(x^2-6x+13)} = 10\mathrm{l}(x-5) + \frac{3}{2}\mathrm{l}(x^2-6x+13) + 8\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

**Aufgabe 2.** $\int\frac{(6x^2-25x+89)dx}{(x-3)(x^2-4x+20)} = ?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 7 in § 27 ist

$$(5.)\quad \frac{6x^2-25x+89}{(x-3)(x^2-4x+20)} = \frac{4}{x-3} + \frac{2x-3}{x^2-4x+10}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 19 der Tabelle

$$(6.)\qquad \int\frac{4dx}{x-3}=4\mathrm{l}(x-3)$$

und nach Formel Nr. 108 der Tabelle

$$(7.)\qquad \int\frac{(2x-3)dx}{x^2-4x+20}=\int\frac{(2x-3)dx}{(x-2)^2+4^2}$$

$$=\mathrm{l}(x^2-4x+20)+\tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{4}\right),$$

folglich wird

$$(8.)\qquad \int\frac{(6x^2-25x+89)dx}{(x-3)(x^2-4x+20)}=4\mathrm{l}(x-3)+\mathrm{l}(x^2-4x+20)$$

$$+\tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

**Aufgabe 3.** $\int\frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)^2}=?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 3 in § 28 ist

$$(9.)\qquad \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}-\frac{x+1}{x^2+1}\right).$$

Nun ist nach Formel Nr. 19 der Tabelle

$$(10.)\qquad \int\frac{dx}{x-1}=\mathrm{l}(x-1),$$

nach Formel Nr. 109 der Tabelle ist

$$(11.)\qquad \int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2+1}$$

und nach Formel Nr. 108 der Tabelle ist

$$(12.)\qquad \int\frac{(x+1)dx}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x.$$

Dieses letzte Resultat hätte man auch mit Hülfe der Formeln Nr. 24 und 18 der Tabelle finden können. Aus den Gleichungen (9.) bis (12.) ergiebt sich daher

$$(13.)\qquad \int\frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{l}(x-1)+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+1)-\operatorname{arctg}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{l}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

**Aufgabe 4.** $\int\frac{(3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}=?$

**Auflösung.** Nach Aufgabe 4 in § 28 ist

$$(14.)\quad \frac{3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}$$
$$+\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Nun ist nach den Formeln Nr. 104, 19, 108 und 109 der Tabelle

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2},\quad \int\frac{2dx}{x-2}=2\,\mathrm{l}(x-2),$$

$$(16.)\quad \int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{(x-1)dx}{(x+1)^2+1}$$
$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1),$$

$$(17.)\quad \int\frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{(2x+3)dx}{[(x+1)^2+1]^2}$$
$$=-\frac{1}{x^2+2x+2}+\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei $x+1$ gleich $t$ gesetzt ist. Dies giebt nach Formel Nr. 106 der Tabelle

$$(18.)\quad \int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t$$
$$=\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1),$$

folglich wird

$$(19.)\quad \int\frac{(3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}=$$
$$-\frac{1}{x-2}+2\,\mathrm{l}(x-2)+\frac{x-1}{2(x^2+2x+2)}$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+2x+2)-\tfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1).$$

**Aufgabe 5.** $\int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=?$

**Auflösung.** Da in diesem Falle

(20.) $$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}$$

ist, so erhält man nach Formel Nr. 109 der Tabelle, indem man

(21.) $$P=1,\quad Q=3,\quad g=-\tfrac{1}{2},\quad h=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad n=2$$

setzt,

(22.) $$\int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{20}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei

(23.) $$2x+1=t\sqrt{3}$$

gesetzt ist. Dies giebt nach Formel Nr. 106 der Tabelle

(24.) $$\begin{aligned}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}&=\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t\\&=\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{8(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

also

(25.) $$\int\frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{5x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

**Aufgabe 6.** $\int\frac{(5x^2-8x-4)dx}{x^3+1}=?$

**Auflösung.** Hier ist

(26.) $$\frac{5x^2-8x-4}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x+1},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $(x+1)(x^2-x+1)$ multiplicirt,

(27.) $$5x^2-8x-4=A(x^2-x+1)+(Px+Q)(x+1).$$

Dies giebt für $x=-1$

(28.) $$9=3A,\quad \text{oder}\quad A=3$$

und für $x^2-x+1=0$, oder $x^2=x-1$

$$-3x-9=(2P+Q)x+(-P+Q),$$

also

(29.) $$2P+Q=-3,\quad -P+Q=-9,$$

$$P = 2, \quad Q = -7, \tag{30.}$$

$$\frac{5x^2 - 8x - 4}{x^3 + 1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2x - 7}{x^2 - x + 1}. \tag{31.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 19 der Tabelle

$$3\int\frac{dx}{x+1} = 3\,\mathrm{l}(x+1) \tag{32.}$$

und nach Formel Nr. 108 der Tabelle

$$\begin{aligned}\int\frac{(2x-7)dx}{x^2-x+1} &= \int\frac{(2x-7)dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \mathrm{l}(x^2-x+1) - 4\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big),\end{aligned} \tag{33.}$$

folglich findet man

$$\int\frac{(5x^2-8x-4)dx}{x^3+1} = 3\mathrm{l}(x+1) + \mathrm{l}(x^2-x+1) - 4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big). \tag{34.}$$

Dem Anfänger wird die Prüfung der vorstehenden Auflösungen durch Differentiation empfohlen.

In manchen Fällen, wo die Integration durch Partialbruchzerlegung sehr umständlich oder in Folge von algebraischen Schwierigkeiten gar nicht durchführbar sein würde, gelingt die Integration durch zweckmässige Umformungen und Substitutionen, wie durch einige Beispiele zur Erläuterung gezeigt werden möge.

**Aufgabe 7.** $\int\frac{dx}{x(x^3+1)} = ?$

**Auflösung.** Setzt man in diesem Falle

$$x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \tag{35.}$$

so wird

$$\int\frac{dx}{x(x^3+1)} = -\int\frac{t^2dt}{t^3+1} = -\tfrac{1}{3}\mathrm{l}(t^3+1), \tag{36.}$$

oder

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x^3+1)} &= -\tfrac{1}{3}\mathrm{l}\Big(\frac{1}{x^3}+1\Big) = -\tfrac{1}{3}\mathrm{l}\Big(\frac{x^3+1}{x^3}\Big) \\ &= \tfrac{1}{3}\mathrm{l}\Big(\frac{x^3}{x^3+1}\Big) = \mathrm{l}\Big(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\Big).\end{aligned} \tag{37.}$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender Weise finden. Es ist

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{(x^3+1)-x^3}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^3+1},$$

also

$$\int \frac{dx}{x(x^3+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^2dx}{x^3+1}$$
$$= \mathrm{l}x - \tfrac{1}{3}\mathrm{l}(x^3+1) = \mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right).$$

**Aufgabe 8.** $\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = ?$

**Auflösung.** Setzt man in diesem Falle wieder

(38.) $$x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

so wird

(39.) $$\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = -\int \frac{t^3dt}{t^4+1} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{l}(t^4+1),$$

oder

(40.) $$\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{l}\left(\frac{1}{x^4}+1\right) = -\tfrac{1}{4}\mathrm{l}\,\frac{x^4+1}{x^4}$$
$$= \tfrac{1}{4}\mathrm{l}\left(\frac{x^4}{x^4+1}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right).$$

Auch hier findet man dasselbe Resultat aus der Gleichung

$$\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{(x^4+1)-x^4}{x(x^4+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1},$$

aus der dann unmittelbar folgt

$$\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^3dx}{x^4+1} = \mathrm{l}x - \tfrac{1}{4}\mathrm{l}(x^4+1) = \mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right).$$

## VIII. Abschnitt.

# Integration der irrationalen Functionen.

§ 33.

### Allgemeine Bemerkungen.

Im ersten Theile der Integral-Rechnung sind bereits irrationale Differential-Functionen in grösserer Anzahl integrirt und in die Formel-Tabelle aufgenommen worden. (Man vergleiche die Formel-Tabelle Nr. 17, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 70 bis 89).

In Betreff der übrigen irrationalen Differential-Functionen ist zu bemerken, dass es verhältnissmässig nur wenige Fälle giebt, bei denen sich die Integration durch Anwendung algebraischer Functionen oder der bisher bekannten transcendenten Functionen ausführen lässt. In den meisten Fällen werden durch die Integrale algebraischer Differential-Functionen *neue* (d. h. bisher noch unbekannte) transcendente Functionen erklärt.

Hier mögen zunächst solche *irrationale* Differential-Functionen in Betracht gezogen werden, welche sich durch eine Substitution auf Functionen zurückführen lassen, deren Integral bereits bekannt ist, oder in *rationale* Differential-Functionen umgewandelt werden können, und zwar sollen nur die einfacheren Fälle berücksichtigt werden.

§ 34.

### Integration rationaler Functionen der Argumente

$$x, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \quad \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots .$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 110 und 111.)

Kommen in der Function unter dem Integralzeichen keine anderen Irrationalitäten vor als Wurzeln aus $x$ selbst, so lässt sich die Differential-Function durch die Substitution

$$(1.)\qquad x = t^{\varkappa}$$

sehr leicht *rational* machen, wenn man den Exponenten $\varkappa$ so wählt, dass $\varkappa$ durch alle auftretenden Wurzel-Exponenten theilbar ist.

Wie dies gemeint ist, möge zunächst ein Beispiel zeigen.

**Aufgabe 1.** $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = ?$

**Auflösung.** Das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzel-Exponenten 2, 3, 4 und 6 ist 12, folglich muss man

$$(2.)\qquad x = t^{12},\quad \text{oder}\quad \sqrt[12]{x} = t$$

setzen und erhält

$$(3.)\qquad \sqrt[4]{x^3} = t^9,\quad \sqrt[3]{x^2} = t^8,\quad \sqrt{x} = t^6,\quad \sqrt[3]{x} = t^4,\quad \sqrt[6]{x} = t^2.$$

Dies giebt

$$(4.)\qquad \int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12\int\frac{(t^9 - 7t^8 + 12t^6)t^{11}dt}{t^{12}(t^4 - t^2)}$$

$$= 12\int\frac{(t^6 - 7t^5 + 12t^3)dt}{t^2 - 1}.$$

Nun ist

$$(5.)\qquad t^6 - 7t^5 + 12t^3 = (t^2 - 1)(t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1) + 5t + 1,$$

also

$$(6.)\qquad \frac{t^6 - 7t^5 + 12t^3}{t^2 - 1} = t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{5t + 1}{t^2 - 1}$$

$$= t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{3}{t - 1} + \frac{2}{t + 1},$$

folglich ist

$$(7.)\qquad \int\frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12\Big[\frac{t^5}{5} - \frac{7t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + t$$

$$+ 3l(t - 1) + 2l(t + 1)\Big],$$

wobei nach Gleichung (2.)

$$t = \sqrt[12]{x}$$

ist.

Daraus erkennt man schon, dass die oben angegebene Regel ganz allgemein anwendbar ist, denn aus Gleichung (1.) ergiebt sich

$$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots)dx = \int f(t^{\varkappa}, t^{\frac{\varkappa m}{n}}, t^{\frac{\varkappa p}{q}} \ldots)\varkappa t^{\varkappa-1}dt, \tag{8.}$$

wobei die Exponenten $\frac{\varkappa m}{n}, \frac{\varkappa p}{q}, \cdots$ sämmtlich ganze Zahlen werden, wenn $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $n$, $q, \ldots$ ist.

Auf diesen Fall kann man den allgemeineren zurückführen, wo unter dem Integralzeichen eine rationale Function der Argumente

$$x, \left(\frac{a + bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots$$

steht. Setzt man nämlich

$$\frac{a + bx}{A + Bx} = y, \tag{9.}$$

so wird

$$x = \frac{Ay - a}{b - By}, \quad dx = \frac{(Ab - Ba)dy}{(b - By)^2}, \tag{10.}$$

so dass man erhält

$$\int f\left[x, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right] dx = \tag{11.}$$

$$\int f\left(\frac{Ay - a}{b - By}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)\cdot\frac{(Ab - Ba)dy}{(b - By)^2}.$$

Ist jetzt $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzelexponenten $n, q, \ldots$, so wird die Differential-Function *rational* durch die Substitution

$$y = t^{\varkappa}. \tag{12.}$$

## § 35.

## Uebungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x - 1} dx = ?$

**Auflösung.** Um die vorliegende Differential-Function rational zu machen, muss man

(1.) $$\sqrt{x} = t, \quad \text{also} \quad x = t^2, \quad dx = 2tdt$$

setzen und erhält

(2.) $$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = \int \frac{t\,.\,2tdt}{t^2-1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-1} = 2\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1},$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 53 der Tabelle

(3.) $$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t + \mathrm{l}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$
$$= 2\sqrt{x} + \mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

**Aufgabe 2.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} dx = ?$

**Auflösung.** In diesem Falle muss man

(4.) $$\sqrt[3]{x} = t, \quad x = t^3, \quad dx = 3t^2dt$$

setzen und erhält

(5.) $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} dx = \int \frac{t\,.\,3t^2dt}{t^3-1} = 3\int \frac{t^3dt}{t^3-1} = 3\int \frac{(t^3-1+1)dt}{t^3-1}$$
$$= 3\int \left(1 + \frac{1}{t^3-1}\right)dt = 3t + 3\int \frac{dt}{t^3-1}.$$

Um $3\int \frac{dt}{t^3-1}$ zu ermitteln, wende man Partialbruchzerlegung an und setze

(6.) $$\frac{3}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Pt+Q}{t^2+t+1};$$

dies giebt durch Fortschaffung der Nenner

(7.) $$3 = A(t^2+t+1) + (Pt+Q)(t-1),$$

also für $t = 1$

(8.) $$3 = 3A, \quad \text{oder} \quad A = 1$$

und für $t^2 + t + 1 = 0$

(9.) $$3 = (-2P+Q)t + (-P-Q),$$

also

(10.) $$-2P+Q=0, \quad P+Q=-3, \quad \text{oder} \quad P=-1, \quad Q=-2.$$

Dadurch erhält man nach Formel Nr. 19 und 108 der Tabelle

$$(11.)\quad 3\int\frac{dt}{t^3-1}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{(t+2)dt}{t^2+t+1}$$

$$=\mathrm{l}(t-1)-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(t^2+t+1)-\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right),$$

also

$$(12.)\quad \int\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx=3\sqrt[3]{x}+\mathrm{l}(\sqrt[3]{x}-1)-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$-\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

**Aufgabe 3.** $\int xdx\sqrt{a+x}=?$

**Auflösung.** Hier ist zu setzen

$$(13.)\quad \sqrt{a+x}=t,\quad \text{also}\quad a+x=t^2,\quad x=t^2-a,\quad dx=2tdt,$$

dann wird

$$(14.)\quad \int xdx\sqrt{a+x}=\int 2(t^2-a)t^2dt$$

$$=2\int t^4dt-2a\int t^2dt=\frac{2t^5}{5}-\frac{2at^3}{3},$$

oder

$$(15.)\quad \int xdx\sqrt{a+x}=\tfrac{2}{15}t^3(3t^2-5a)=\tfrac{2}{15}(a+x)\sqrt{a+x}(3x-2a).$$

Man hätte auch die Integration in folgender Weise ausführen können. Man setze

$$(16.)\quad x\sqrt{a+x}=(a+x-a)\sqrt{a+x}=(a+x)^{\frac{3}{2}}-a(a+x)^{\frac{1}{2}},$$

also nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(17.)\quad \int xdx\sqrt{a+x}=\int(a+x)^{\frac{3}{2}}d(a+x)-a\int(a+x)^{\frac{1}{2}}d(a+x)$$

$$=\tfrac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{2}{3}a(a+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\tfrac{2}{15}(a+x)\sqrt{a+x}(3x-2a).$$

**Aufgabe 4.** $\int(a-x)dx\sqrt[3]{(b-x)^2}=?$

**Auflösung.** Es sei

(18.) $\sqrt[3]{b-x}=t,$ also $b-x=t^3,\ x=b-t^3,\ dx=-3t^2dt,$
dann wird

$$(19.)\quad \int(a-x)dx\sqrt[3]{(b-x)^2}=\int(a-b+t^3)(-3t^2dt)\,.\,t^2$$
$$=-3\int[(a-b)t^4+t^7]dt$$
$$=-3\Big[\frac{(a-b)t^5}{5}+\frac{t^8}{8}\Big]$$
$$=\frac{3t^5}{40}[-8(a-b)-5t^3]$$
$$=\frac{3(b-x)\sqrt[3]{(b-x)^2}}{40}(5x-8a+3b).$$

**Aufgabe 5.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=?$

**Auflösung.** Es sei

(20.) $\sqrt{x+a}=t,$ also $x+a=t^2,\ x=t^2-a,\ dx=2tdt,$
dann wird

$$(21.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=\int\frac{2tdt}{(t^2-a)t}=2\int\frac{dt}{t^2-a}\,.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$(22.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}\Big)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\Big)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})^2}{x}\Big)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{x+2a-2\sqrt{a(a+x)}}{x}\Big).$$

**Aufgabe 6.** $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=?$

**Auflösung.** Es sei

$$(23.)\quad \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t,\quad\text{also}\quad \frac{a+x}{a-x}=t^2,\ x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$dx = \frac{4atdt}{(t^2+1)^2}, \tag{24.}$$

dann wird

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = 4a\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} = 4a\int\frac{(t^2+1-1)dt}{(t^2+1)^2} \tag{25.}$$
$$= 4a\left[\int\frac{dt}{t^2+1} - \int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right].$$

Nun ist nach Formel Nr. 18 und 106 der Tabelle

$$\int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t, \tag{26.}$$

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t, \tag{27.}$$

folglich wird

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = 4a\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(1+t^2)}\right], \tag{28.}$$

oder, da

$$1 + t^2 = 1 + \frac{a+x}{a-x} = \frac{2a}{a-x}, \quad \frac{t}{1+t^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$$

ist,

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = 2a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2}. \tag{29.}$$

Einfacher kann man in diesem Falle die Integration ausführen, indem man

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2}{(a-x)(a+x)}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30.}$$

setzt; dadurch erhält man nach Formel Nr. 21 und 25 der Tabelle

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{31.}$$
$$= a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}.$$

Dieses Resultat weicht allerdings in der Form von dem in Gleichung (29.) enthaltenen ab; setzt man aber

$$\text{(32.)}\qquad \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = z, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} z = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

so ist

$$\operatorname{tg}^2 z = \frac{a+x}{a-x}, \quad \text{also} \quad x = a\frac{\operatorname{tg}^2 z - 1}{\operatorname{tg}^2 z + 1},$$

oder

$$\text{(33.)}\qquad x = a\frac{\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = -a(\cos^2 z - \sin^2 z) = -a\cos(2z)$$

$$= a\sin\left(2z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deshalb wird

$$\text{(34.)}\qquad \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = 2z - \frac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \frac{\pi}{2},$$

so dass die beiden in den Gleichungen (29.) und (31.) angegebenen Resultate sich nur durch eine Integrations-Constante von einander unterscheiden.

## § 36.

## Zurückführung der Differential-Functionen von der Form $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ auf Differential-Functionen von der Form $f(y, \sqrt{y^2-a^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2+y^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2-y^2})dy$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 112—115.)

Es sei $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Function von $x$ und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, dann mögen 4 Fälle unterschieden werden.

I. Fall. $\qquad A > 0, \quad B^2 - AC > 0.$

Setzt man

$$\text{(1.)}\qquad \sqrt{A} = \alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{B}{\alpha} = \beta, \quad \frac{\sqrt{B^2-AC}}{\sqrt{A}} = a,$$

so sind die Grössen $\alpha$, $\beta$ und $a$ reell, und man erhält

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + C \\ &= (\alpha x + \beta)^2 + C - \beta^2 \\ &= (\alpha x + \beta)^2 - \frac{B^2 - AC}{A}, \end{aligned}$$

oder

(2.) $$Ax^2 + 2Bx + C = (\alpha x + \beta)^2 - a^2.$$

Deshalb setzt man

(3.) $$y = \alpha x + \beta = \frac{Ax + B}{\sqrt{A}}$$

und findet daraus

(4.) $$x = \frac{y\sqrt{A} - B}{A}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{A}}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

(5.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})\,dx =$$

$$\int F\left(\frac{y\sqrt{A} - B}{A}, \sqrt{y^2 - a^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{A}}.$$

II. Fall. $A > 0$, $B^2 - AC < 0$.

Hier sei

(6.) $$\sqrt{A} = \alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{B}{\alpha} = \beta, \quad \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}} = a,$$

dann werden die Grössen $\alpha$, $\beta$ und $a$ wieder reell, und man erhält

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + C \\ &= (\alpha x + \beta)^2 + C - \beta^2 \\ &= (\alpha x + \beta)^2 + \frac{AC - B^2}{A}, \end{aligned}$$

oder

(7.) $$Ax^2 + 2Bx + C = (\alpha x + \beta)^2 + a^2.$$

Deshalb setzt man

(8.) $$y = \alpha x + \beta = \frac{Ax + B}{\sqrt{A}}$$

und findet

$$(9.)\quad x=\frac{y\sqrt{A}-B}{A},\ dx=\frac{dy}{\sqrt{A}},\ \sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\sqrt{y^2+a^2},$$

also

$$(10.)\int F(x,\sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx=\int F\Big(\frac{y\sqrt{A}-B}{A},\sqrt{a^2+y^2}\Big)\frac{dy}{\sqrt{A}}.$$

III. Fall. $\qquad A<0,\quad B^2-AC>0.$

Hier sei

$$(11.)\quad \sqrt{-A}=\alpha,\quad \frac{B}{\sqrt{-A}}=\frac{B}{\alpha}=\beta,\quad \frac{\sqrt{B^2-AC}}{\sqrt{-A}}=a,$$

dann sind die drei Grössen $\alpha$, $\beta$, $a$ wieder reell, und man erhält

$$\begin{aligned}Ax^2+2Bx+C&=-\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+C\\&=-(\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2)+C+\beta^2,\end{aligned}$$

oder

$$(12.)\ Ax^2+2Bx+C=-(\alpha x-\beta)^2+\frac{B^2-AC}{-A}=a^2-(\alpha x-\beta)^2.$$

Setzt man also

$$(13.)\qquad y=\alpha x-\beta=-\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}},$$

so wird

$$(14.)\quad x=\frac{y\sqrt{-A}+B}{-A},\ dx=\frac{dy}{\sqrt{-A}},\ \sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\sqrt{a^2-y^2},$$

$$(15.)\qquad \int F(x,\sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx=$$

$$\int F\Big(\frac{y\sqrt{-A}+B}{-A},\sqrt{a^2-y^2}\Big)\frac{dy}{\sqrt{-A}}.$$

IV. Fall. $\qquad A<0,\quad B^2-AC<0.$

Hier sei

$$(16.)\qquad \sqrt{-A}=\alpha,\ \frac{B}{\sqrt{-A}}=\frac{B}{\alpha}=\beta,\ \frac{\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{-A}}=a,$$

dann sind die Grössen $\alpha$, $\beta$, $a$ wieder reell, und man erhält

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= -\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + C \\ &= -(\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2) + C + \beta^2 \\ &= -(\alpha x - \beta)^2 - \frac{AC - B^2}{-A}, \end{aligned}$$

oder

(17.) $$Ax^2 + 2Bx + C = -(\alpha x - \beta)^2 - a^2 = -[(\alpha x - \beta)^2 + a^2],$$

(18.) $$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = i\sqrt{(\alpha x - \beta)^2 + a^2}.$$

Da $(\alpha x - \beta)^2 + a^2$ unter den gemachten Voraussetzungen beständig positiv ist, so wird $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$ für alle Werthe von $x$ *imaginär*, so dass in diesem Falle $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine *complexe* Grösse ist. Deshalb lassen sich auch bei Ermittelung des gesuchten Integrals complexe Grössen nicht vermeiden. Man wird deshalb in diesem Falle am besten

(19.) $$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = i\sqrt{-(Ax^2 + 2Bx + C)}$$

setzen und erhält dadurch eine Wurzelgrösse, auf welche die im Falle II gemachten Voraussetzungen zutreffen. Man kann aber auch — und das kommt auf dasselbe hinaus —

(20.) $$y = \alpha x - \beta = -\frac{Ax + B}{\sqrt{-A}}$$

setzen und erhält dadurch

(21.) $$\begin{cases} x = \dfrac{y\sqrt{-A} + B}{-A}, \quad dx = \dfrac{dy}{\sqrt{-A}}, \\ \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = i\sqrt{a^2 + y^2}, \end{cases}$$

(22.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})\,dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{-A} + B}{-A},\; i\sqrt{a^2 + y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{-A}}.$$

## § 37.

## Uebungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 116 und 117.)

**Aufgabe 1.** $$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = ?$$

**Auflösung.** Im Falle I erhält man nach Formel Nr. 112 der Tabelle

$$(1.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\int\frac{dy}{\sqrt{A}\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\mathrm{l}(y+\sqrt{y^2-a^2})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\mathrm{l}\Big(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\Big).$$

**Beispiel.** $A=4,\quad B=2,\quad C=-3,\quad B^2-AC=16.$

$$(2.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}).$$

Im Falle II erhält man das Endresultat in derselben Form wie in Gleichung (1.).

**Beispiel.** $A=1,\quad B=\frac{1}{2},\quad C=1,\quad B^2-AC=-\frac{3}{4}\cdot$

$$(3.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\mathrm{l}\Big(\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\Big)\cdot$$

Im Falle III erhält man nach Formel Nr. 114 der Tabelle

$$(4.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\int\frac{dy}{\sqrt{-A}\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\Big(\frac{y}{a}\Big)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\Big(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\Big)\cdot$$

**Beispiel.** $A=-1,\quad B=\frac{r}{2},\quad C=0,\quad B^2-AC=\frac{r^2}{4}\cdot$

$$(5.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{rx-x^2}}=\arcsin\Big(\frac{2x-r}{r}\Big)\cdot$$

Der Fall IV wird auf Fall II zurückgeführt, indem man

$$(6.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{i}\int\frac{dx}{\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1}}$$
$$=\frac{1}{i\sqrt{A_1}}\mathrm{l}\Big(\frac{A_1x+B_1}{\sqrt{A_1}}+\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1}\Big)$$

setzt. Dabei ist

$$(7.)\quad A_1=-A,\quad B_1=-B,\quad C_1=-C.$$

**Aufgabe 2.** $\int dx\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = ?$

**Auflösung.** Im Falle I und II erhält man nach den Formeln Nr. 112 und 113 der Tabelle

$$\int dx\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{A}}\int dy\sqrt{y^2 \mp a^2}, \tag{8.}$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 82 und 82a der Tabelle

$$\int dx\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2 \mp a^2} \mp \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(y + \sqrt{y^2 \mp a^2})\right] \tag{9.}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{Ax + B}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right.$$

$$\left. + \frac{AC - B^2}{A}\,\mathrm{l}\left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right)\right].$$

**Beispiel 1.** $A = 4,\ B = 2,\ C = -3,\ B^2 - AC = 16.$

$$\int dx\sqrt{4x^2 + 4x - 3} = \tfrac{1}{4}[(2x + 1)\sqrt{4x^2 + 4x - 3} \tag{10.}$$

$$- 4\,\mathrm{l}(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 3})].$$

**Beispiel 2.** $A = 1,\ B = \tfrac{1}{2},\ C = 1,\ B^2 - AC = -\tfrac{3}{4}.$

$$\int dx\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x + 1}{2}\sqrt{x^2 + x + 1}\right. \tag{11.}$$

$$\left. + \frac{3}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{2x + 1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\right].$$

Im Falle III wird nach Formel Nr. 114 der Tabelle

$$\int dx\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\int dy\sqrt{a^2 - y^2}, \tag{12.}$$

also nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$\int dx\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right] \tag{13.}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-A}}\left[-\frac{Ax + B}{\sqrt{-A}}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right.$$

$$\left. + \frac{B^2 - AC}{-A}\arcsin\left(-\frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)\right].$$

**Beispiel 3.** $A = -1,\ B = \frac{r}{2},\ C = 0,\ B^2 - AC = \frac{r^2}{4}.$

$$\int dx \sqrt{rx - x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x-r}{2}\sqrt{rx-x^2} + \frac{r^2}{4}\arcsin\left(\frac{2x-r}{r}\right)\right].$$

Diese Beispiele mögen zeigen, wie durch das in § 36 angegebene Verfahren Integrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ mitunter auf bereits bekannte Integrale zurückgeführt werden können.

## § 38.

## Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn $A$ positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 118 und 119.)

**Aufgabe 1.** $\int f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})dy = ?$

**Auflösung.** Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

(1.) $\sqrt{y^2 \pm a^2} = t - y,$ oder $t = y + \sqrt{y^2 \pm a^2},$

also

(2.) $y^2 \pm a^2 = t^2 - 2ty + y^2,$ oder $y = \frac{t^2 \mp a^2}{2t},$

$$(3.)\quad \sqrt{y^2 \pm a^2} = t - \frac{t^2 \mp a^2}{2t} = \frac{t^2 \pm a^2}{2t},$$

$$(4.)\quad dy = \frac{(t^2 \pm a^2)dt}{2t^2},$$

folglich wird

$$(5.)\quad \int f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})dy = \int f\left(\frac{t^2 \mp a^2}{2t}, \frac{t^2 \pm a^2}{2t}\right) \cdot \frac{(t^2 \pm a^2)\,dt}{2t^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})$ eine rationale Function von $y$ und $\sqrt{y^2 \pm a^2}$ ist, so hat man es durch die angegebene Substitution erreicht, dass die Function unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Function der einzigen Veränderlichen $t$ geworden ist. Diese Substitution wurde bereits zur Herleitung der Formeln Nr. 22 und 23 der Tabelle benutzt.

Nach Gleichung (5.) wird nämlich

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2\pm a^2}}=\int\frac{(t^2\pm a^2)dt\,.\,2t}{2t^2(t^2\pm a^2)}=\int\frac{dt}{t}=\mathrm{l}t$$
$$=\mathrm{l}(y+\sqrt{y^2\pm a^2}).$$

**Aufgabe 2.** $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = ?$

**Auflösung.** In § 36 wurde gezeigt, wie man das gesuchte Integral in dem Falle, wo $A>0$ ist, auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{y^2\pm a^2})dy$ zurückführen kann (vgl. Formel Nr. 112 und 113 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Function in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=t-x\sqrt{A} \tag{6.}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$Ax^2+2Bx+C=t^2-2tx\sqrt{A}+Ax^2, \tag{7.}$$

oder

$$2x(t\sqrt{A}+B)=t^2-C,$$

$$x=\frac{t^2-C}{2(t\sqrt{A}+B)},\quad dx=\frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2}, \tag{8.}$$

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=t-\frac{(t^2-C)\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}=\frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}. \tag{9.}$$

Dies giebt

$$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx= \tag{10.}$$
$$\int F\left(\frac{t^2-C}{2(t\sqrt{A}+B)}, \frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}\right).\frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2},$$

wobei nach Gleichung (6.)

$$t=x\sqrt{A}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C} \tag{11.}$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Function von $x$ und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (10.) jetzt nur noch eine *rationale* Function von $t$, welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integrirt werden kann.

Man erkennt, dass die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, welchen man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit $y$ bezeichnet und

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = \pm a^2$$

setzt.

## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 3.** $\int dy\sqrt{y^2 \pm a^2} = ?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (5.) erhält man

$$\begin{aligned}(12.)\quad \int dy\sqrt{y^2 \pm a^2} &= \int \frac{(t^2 \pm a^2)dt}{2t^2} \cdot \frac{t^2 \pm a^2}{2t} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(t^2 \pm a^2)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int (t \pm 2a^2t^{-1} + a^4t^{-3})dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} \pm 2a^2 \,\mathrm{l}\, t - \frac{a^4}{2t^2}\right) = \frac{t^4 - a^4}{8t^2} \pm \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}\, t.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$y = \frac{t^2 \mp a^2}{2t}, \quad \sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{t^2 \pm a^2}{2t},$$

also

$$(13.)\qquad y\sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{t^4 - a^4}{4t^2},$$

folglich erhält man in Uebereinstimmung mit den Formeln Nr. 82 und 82a der Tabelle

$$(14.)\quad \int dy\sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{y}{2}\sqrt{y^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(y + \sqrt{y^2 \pm a^2}).$$

**Aufgabe 4.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$

**Auflösung.** In diesem Falle ist

$$A = 1, \quad \sqrt{A} = 1, \quad B = \tfrac{1}{2}, \quad C = 1,$$

also

$$(15.)\quad \begin{cases} t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}, & x = \dfrac{t^2 - 1}{2t + 1}, \\ dx = \dfrac{2(t^2 + t + 1)dt}{(2t + 1)^2}, & \sqrt{x^2 + x + 1} = \dfrac{t^2 + t + 1}{2t + 1}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{2(t^2-1)(t^2+t+1)dt}{(2t+1)^2(t^2+t+1)} = 2\int\frac{(t^2-1)dt}{(2t+1)^2}.$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$2t^2-2 = (2t+1)(t-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}(2t+1)^2 - (2t+1) - \tfrac{3}{2},$$

also

$$(17.)\qquad \frac{2t^2-2}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(2t+1)^2},$$

folglich wird

$$(18.)\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2t+1) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2t+1}$$

$$= \frac{4t^2+2t+3}{4(2t+1)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2t+1)$$

$$= \frac{t^2+t+1}{2t+1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(2t+1).$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.)

$$(19.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{x^2+x+1} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).$$

Bedeutend leichter findet man dieses Resultat durch Anwendung von Formel Nr. 113 der Tabelle, indem man

$$(20.)\quad x = \frac{2y-1}{2},\quad \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{y^2+a^2},\quad dx = dy$$

setzt; dann wird

$$(21.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{(2y-1)dy}{2\sqrt{a^2+y^2}} = \int\frac{ydy}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}},$$

also nach den Formeln Nr. 26 und 22 der Tabelle

$$(22.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{a^2+y^2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(y+\sqrt{a^2+y^2})$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right).$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem vorhin gefundenen nur durch eine Integrations-Constante.

**Aufgabe 5.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$

**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$\begin{aligned}(23.)\quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= 2\int \frac{(t^2-1)^2dt}{(2t+1)^3}\\ &= \frac{1}{8}\int \Big[2t-3-\frac{2}{2t+1}+\frac{12}{(2t+1)^2}\\ &\qquad\qquad +\frac{9}{(2t+1)^3}\Big]dt,\\ &= \frac{1}{8}\Big[t^2-3t-\frac{7}{4}-\mathrm{l}(2t+1)-\frac{6}{2t+1}\\ &\qquad\qquad -\frac{9}{4(2t+1)^2}\Big],\end{aligned}$$

wobei die Integrations-Constante $-\frac{7}{32}$ so gewählt ist, dass das Endresultat einfacher wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}t^2-3t-\frac{7}{4}-\frac{6}{2t+1}-\frac{9}{4(2t+1)^2} &= \frac{4t^4-8t^3-18t^2-22t-10}{(2t+1)^2}\\ &= \frac{4t^2-12t-10}{2t+1}\cdot\frac{t^2+t+1}{2t+1}\\ &= \Big(\frac{4(t^2-1)}{2t+1}-6\Big)\frac{t^2+t+1}{2t+1}\\ &= (4x-6)\sqrt{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Deshalb wird

$$\begin{aligned}(24.)\quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}\\ &\qquad -\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).\end{aligned}$$

Auch hier ergiebt sich das Resultat leichter durch Anwendung der in den Gleichungen (20.) angegebenen Substitution; dann wird

$$(25.)\quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{4}\int \frac{(4y^2-4y+1)dy}{\sqrt{a^2+y^2}},$$

also nach Formel Nr. 80, 26 und 22 der Tabelle

$$(26.)\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{y-2}{2}\sqrt{a^2+y^2} - \frac{1}{8}[\mathrm{l}(y+\sqrt{a^2+y^2}+12]$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}$$

$$-\frac{1}{8}\mathrm{l}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).$$

In ähnlicher Weise kann man die Aufgaben

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?\;\ldots\;\int\frac{x^ndx}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$$

behandeln.

**Aufgabe 6.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = ?$

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (15.) ergiebt sich hier

$$(27.)\qquad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int\frac{dt}{t^2-1},$$

also nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$(28.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \mathrm{l}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

$$= \mathrm{l}\left(\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(x+2)}{x}\right).$$

**Aufgabe 7.** $\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2\pm a^2}} = ?$

**Auflösung.** Aus Gleichung (5.) findet man

$$(29.)\qquad \int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2\pm a^2}} = 2\int\frac{dt}{t^2-2kt\mp a^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 54 der Tabelle, indem man

$$b=-k,\quad c=\mp a^2$$

setzt,

$$(30.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2\pm a^2}}\mathrm{l}\left(\frac{t-k-\sqrt{k^2\pm a^2}}{t-k+\sqrt{k^2\pm a^2}}\right).$$

Gilt das untere Zeichen, und ist $a^2>k^2$, so erhält der gefundene Ausdruck imaginäre Form, dann wird nach Formel Nr. 56 der Tabelle

$$(31.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2-k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-k}{\sqrt{a^2-k^2}}\right).$$

Zum Schluss muss man noch

$$t=x+\sqrt{x^2\pm a^2}$$

einsetzen.

**Aufgabe 8.** $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (5.) ist in diesem Falle

$$x=\frac{t^2-1}{2t},\quad \sqrt{1+x^2}=\frac{t^2+1}{2t},\quad dx=\frac{(t^2+1)dt}{2t^2},$$

$$1-x^2=(1+x)(1-x)=\frac{t^2+2t-1}{2t}\cdot\frac{-t^2+2t+1}{2t}=-\frac{t^4-6t^2+1}{4t^2},$$

also

$$(32.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=-4\int\frac{tdt}{t^4-6t^2+1}=-2\int\frac{du}{u^2-6u+1},$$

wenn man $t^2$ mit $u$ bezeichnet. Nun ist nach Formel Nr. 55 der Tabelle

$$(33.)\quad \int\frac{du}{u^2-6u+1}=\int\frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)}=\frac{1}{u_1-u_2}\mathrm{l}\left(\frac{u-u_1}{u-u_2}\right),$$

wobei

$$u_1=3+2\sqrt{2},\quad u_2=3-2\sqrt{2},\quad u_1-u_2=4\sqrt{2}$$

ist. Dies giebt

$$(34.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{l}\left(\frac{u-3-2\sqrt{2}}{u-3+2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{l}\left(\frac{t^2-3+2\sqrt{2}}{t^2-3-2\sqrt{2}}\right).$$

Um das Endresultat als Function von $x$ darzustellen, beachte man, dass

$$\frac{t^2-1}{2t} = x,\quad \frac{-2+2\sqrt{2}}{2t} = \frac{-1+\sqrt{2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = (-1+\sqrt{2})(\sqrt{1+x^2}-x),$$

also

$$(35.)\quad \frac{t^2-3+2\sqrt{2}}{2t} = (2-\sqrt{2})x + (-1+\sqrt{2})\sqrt{1+x^2}$$

$$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})$$

ist. Ebenso findet man

$$(36.)\quad \frac{t^2-3-2\sqrt{2}}{2t} = (-\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}),$$

folglich wird

$$(37.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})}{(-\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2})}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left[\frac{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})^2}{x^2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)+\mathrm{l}(\sqrt{2}-1)\right].$$

Schneller kommt man zum Ziele durch Anwendung von Formel Nr. 88 der Tabelle, indem man

$$(38.)\quad x = \mathrm{tg}\,t,\quad \text{also}\quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$(39.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t-\sin^2 t} = \int\frac{\cos t\,dt}{1-2\sin^2 t},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{2}\sin t = z,\quad \text{also}\quad \sqrt{2}\cos t\,dt = dz$$

setzt und Formel Nr. 53 der Tabelle beachtet,

$$(40.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{z-1}{z+1}\right);$$

dabei ist

$$z = \sqrt{2}\sin t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich wird

$$(41.)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}\right).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von der Integrations-Constanten, mit dem früher gefundenen überein.

§ 39.

## Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn $C$ positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 120 und 121.)

**Aufgabe 1.** $\int f(x, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = ?$

**Auflösung.** Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

$$(1.)\quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = ty - a, \quad \text{oder} \quad t = \frac{a+\sqrt{a^2 \pm y^2}}{y},$$

also

$$(2.)\quad a^2 \pm y^2 = t^2y^2 - 2aty + a^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{2at}{t^2 \mp 1},$$

$$(3.)\quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = \frac{2at^2}{t^2 \mp 1} - a = \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1},$$

$$(4.)\quad dy = -\frac{2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2},$$

folglich wird

$$(5.)\quad \int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right)\cdot\frac{-2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})$ eine rationale Function von $y$ und $\sqrt{a^2 \pm y^2}$ ist, so hat man es durch die angegebene Substitution erreicht, dass die Function unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Function der einzigen Veränderlichen $t$ geworden ist. Hiernach wird z. B.

$$(6.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{l}t = -\frac{1}{a}\,\mathrm{l}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right),$$

ein Resultat, welches mit Formel Nr. 78 der Tabelle übereinstimmt.

**Aufgabe 2.** $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = ?$

**Auflösung.** In § 36 wurde bereits gezeigt, wie man das gesuchte Integral auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy$ zurückführen kann (vergl. Formel Nr. 113 und 114 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Function in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = tx - \sqrt{C} \tag{7.}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$Ax^2+2Bx+C = t^2x^2 - 2tx\sqrt{C} + C,$$

oder

$$Ax + 2B = t^2x - 2t\sqrt{C}, \tag{8.}$$

also

$$x = \frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2-A}, \quad dx = -\frac{2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2-A)^2}, \tag{9.}$$

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2-A}. \tag{10.}$$

Dies giebt

$$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \tag{11.}$$

$$\int F\left(\frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2-A}, \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2-A}\right) \cdot \frac{-2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2-A)^2},$$

wobei

$$t = \frac{1}{x}\left(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right) \tag{12.}$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ eine rationale Function von $x$ und $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (11.) jetzt nur noch eine *rationale* Function von $t$, welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integrirt werden kann.

Man erkennt, dass auch hier die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, den man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit $y$ bezeichnet und

$$A = \pm 1, \quad B = 0, \quad C = +a^2$$

setzt.

### Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = ?$

**Auflösung.** Nach Gleichung (11.) erhält man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -2\int\frac{dt}{t^2-A}. \tag{13.}$$

Ist $A$ *positiv*, so folgt hieraus nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{t-\sqrt{A}}{t+\sqrt{A}}\Big) \tag{14.}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}}{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-x\sqrt{A}}\Big).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von einer Integrations-Constanten, mit dem in § 37, Gleichung (1.) gegebenen (vergl. Formel Nr. 116 der Tabelle) überein, denn es ist

$$(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2B+C}-x\sqrt{A})(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C})$$
$$= (B+\sqrt{AC})(\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}),$$

folglich wird

$$\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+x\sqrt{A}}{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-x\sqrt{A}} \tag{15.}$$
$$= \frac{Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{B+\sqrt{AC}},$$

also

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \tag{16.}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\Big) - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\Big(\frac{B+\sqrt{AC}}{\sqrt{A}}\Big).$$

Ist $A$ *negativ*, so erhält man aus Gleichung (13.) nach Formel Nr. 20 der Tabelle

$$\text{(17.)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\frac{2}{\sqrt{-A}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right)$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{-A}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x\sqrt{-A}}\right).$$

Auch in diesem Falle kann man die Uebereinstimmung mit dem in § 37 Gleichung (4.) gefundenen Resultate (vergl. Formel Nr. 116 der Tabelle) nachweisen. Setzt man nämlich

$$\text{(18.)} \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right), \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{-A}},$$

so wird

$$\text{(19.)} \quad \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2t\sqrt{-A}}{t^2-A},$$

$$\text{(20.)} \quad \cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = -\frac{t^2+A}{t^2-A}.$$

Ist der Bogen $\alpha$ erklärt durch die Gleichungen

$$\text{(21.)} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2-AC}}, \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{-AC}}{\sqrt{B^2-AC}},$$

so erhält man

$$\text{(22.)} \quad \sin(\alpha-\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi$$
$$= \frac{-B(t^2+A)}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}} + \frac{\sqrt{-AC}\cdot 2t\sqrt{-A}}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}}$$
$$= \frac{-2A(t\sqrt{C}+B)}{(t^2-A)\sqrt{B^2-AC}} - \frac{B}{\sqrt{B^2-AC}}$$
$$= -\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}.$$

Fügt man also in Gleichung (17.) die Integrations-Constante $\frac{\alpha}{\sqrt{-A}}$ hinzu, so erhält man in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 116 der Tabelle

$$(23.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{\alpha-\varphi}{\sqrt{-A}} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

**Aufgabe 4.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}} = ?$

**Auflösung.** Hier ist

$$(24.)\qquad A=1,\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=1,$$

also

$$(25.)\quad \begin{cases} x = \frac{2t+1}{t^2-1}, & dx = -\frac{2(t^2+t+1)dt}{(t^2-1)^2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{1+x+x^2}}{x}, & \sqrt{1+x+x^2} = \frac{t^2+t+1}{t^2-1}. \end{cases}$$

Dies giebt in Uebereinstimmung mit Aufgabe 4 in § 38, wenn man die Integrations-Constante $1+\frac{1}{2}\mathrm{l}3$ hinzufügt,

$$\begin{aligned}(26.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}} &= -2\int\frac{(2t+1)dt}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\int\left[-\frac{3}{(t-1)^2}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{t-1}-\frac{1}{t+1}+2+\mathrm{l}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)-\mathrm{l}3\right] \\ &= \frac{t^2+t+1}{t^2-1}-\frac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^2-1}\right) \\ &= \sqrt{1+x+x^2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}).\end{aligned}$$

**Aufgabe 5.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Hier ist

$$(27.)\qquad A=-1,\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=1,$$

also

$$
(28.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}, \quad dx = -\dfrac{2(t^2 + t - 1)dt}{(t^2 + 1)^2}, \\ t = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x - x^2}}{x}, \quad \sqrt{1 + x - x^2} = \dfrac{t^2 + t - 1}{t^2 + 1}. \end{cases}
$$

$$
(29.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x - x^2}} = -2\int \frac{(2t + 1)dt}{(t^2 + 1)^2}
$$

$$
= \frac{2}{t^2 + 1} - 2\int \frac{dt}{(1 + t^2)^2}.
$$

Nun wird nach Formel Nr. 106 der Tabelle

$$
(30.)\quad \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,
$$

folglich ist, wenn man die Integrations-Constante gleich $-1$ setzt,

$$
(31.)\quad \int \frac{xdx}{1 + x - x^2} = \frac{2}{t^2 + 1} - \frac{t}{t^2 + 1} - 1 - \operatorname{arctg} t
$$

$$
= -\frac{t^2 + t - 1}{t^2 + 1} - \operatorname{arctg} t
$$

$$
= -\sqrt{1 + x - x^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x - x^2}}{x}\right).
$$

Bedeutend leichter wird die Lösung durch Anwendung der Formel Nr. 114 der Tabelle, indem man

$$
(32.)\quad \begin{cases} 2x = 2y + 1, \quad \text{also} \quad dx = dy, \\ \sqrt{1 + x - x^2} = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 2a = \sqrt{5} \end{cases}
$$

setzt; dann erhält man nach Formel Nr. 25 und 20 der Tabelle

$$
(33.)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x - x^2}} = \int \frac{(2y + 1)dy}{2\sqrt{a^2 - y^2}}
$$

$$
= -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)
$$

$$
= -\sqrt{1 + x - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{5}}\right).
$$

Um die Uebereinstimmung dieses Resultats mit dem früheren nachzuweisen, setze man

$$(34.)\quad \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right),\ \text{also}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x},$$

dann wird

$$(35.)\qquad \sin\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2(2x-1+\sqrt{1+x-x^2})}{5},$$

$$(36.)\qquad \cos\varphi = \frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2x-1-4\sqrt{1+x-x^2}}{5}.$$

Erklärt man sodann den Bogen $\alpha$ durch die Gleichungen

$$(37.)\qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

so wird

$$(38.)\qquad \sin(\alpha-\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi = \frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

Fügt man also in Gleichung (31.) die Integrations-Constante $\frac{\alpha}{2}$ hinzu, so erhält man

$$(39.)\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{\alpha-\varphi}{2}$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).$$

**Aufgabe 6.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (28.), erhält man

$$(40.)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int\frac{dt}{2t+1} = -\mathrm{l}(2t+1)$$

$$= -\mathrm{l}\left(\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right).$$

**Aufgabe 7.** $\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Hier ist

(41.) $$a=1,\quad A=-1,\quad B=0,\quad C=1,$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 120 oder 121 der Tabelle

(42.) $$x=\frac{2t}{t^2+1},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{2(t^2-1)dt}{(t^2+1)^2},$$

(43.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}=2\int\frac{dt}{kt^2-2t+k},$$

oder, wenn man $k$ mit $\frac{1}{r}$ bezeichnet und die Formeln Nr. 54 und 55 der Tabelle berücksichtigt,

(44.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}=2r\int\frac{dt}{t^2-2rt+1}$$

$$=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{l}\left(\frac{t-r-\sqrt{r^2-1}}{t-r+\sqrt{r^2-1}}\right),$$

wenn $r^2>1$ ist, und

(45.) $$\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-r}{\sqrt{1-r^2}}\right),$$

wenn $r^2<1$ ist. Zum Schluss muss man noch

(46.) $$t=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\text{und}\quad r=\frac{1}{k}$$

einsetzen.

**Aufgabe 8.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (42.), erhält man

(47.) $$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{(t^2+1)dt}{t^4+6t^2+1}.$$

Da die quadratische Gleichung

(48.) $$t^4+6t^2+1=0$$

die beiden Wurzeln

$$(49.)\qquad \begin{cases} t_1^2 = -3 + 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}-1)^2, \\ t_2^2 = -3 - 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}+1)^2 \end{cases}$$

hat, so findet man durch Partialbruchzerlegung

$$(50.)\qquad \frac{-2t^2-2}{t^4+6t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{t^2+a^2} - \frac{1+\sqrt{2}}{t^2+b^2}\right),$$

wobei

$$(51.)\qquad a = \sqrt{2}-1, \quad b = \sqrt{2}+1$$

gesetzt ist. Dies giebt nach Formel Nr. 20 der Tabelle

$$(52.)\qquad \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{a}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{b}\right)\right].$$

Setzt man noch

$$(53.)\qquad \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{a}\right) = \varphi, \quad \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{b}\right) = \psi,$$

so wird

$$(54.)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{t}{a} = \frac{t}{\sqrt{2}-1}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{t}{b} = \frac{t}{\sqrt{2}+1},$$

also

$$(55.)\qquad \operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi} = \frac{2t\sqrt{2}}{1-t^2} = -\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich wird

$$(56.)\qquad \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Einfacher findet man dieses Resultat durch Einführung trigonometrischer Functionen, also durch die Substitution

$$(57.)\qquad x = \sin t, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

Vergl. § 10, Gleichung (7.).

## § 40.

## Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn $B^2 - AC$ positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 122.)

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0 \tag{1.}$$

sind bekanntlich

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{2.}$$

Unter der Voraussetzung, dass $B^2 - AC > 0$ ist, werden beide Wurzeln $x_1$ und $x_2$ *reell*. Setzt man in diesem Falle

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad \alpha\gamma = A \tag{3.}$$

sein möge, so wird

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= A(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \alpha\gamma\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right) = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta). \end{aligned} \tag{4.}$$

Jetzt möge die neue Integrations-Veränderliche $t$ durch die Gleichung

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = t(\alpha x + \beta) \tag{5.}$$

eingeführt werden. Dadurch erhält man

$$Ax^2 + 2Bx + C = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) = t^2(\alpha x + \beta)^2,$$

oder

$$\gamma x + \delta = t^2(\alpha x + \beta), \tag{6.}$$

$$x = \frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \quad dx = \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2}, \tag{7.}$$

$$t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}. \tag{8.}$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} &\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = \\ &\int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right) \cdot \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2}, \end{aligned} \tag{9.}$$

wobei

$$(10.)\quad t=\sqrt{\frac{\gamma x+\delta}{\alpha x+\beta}},\quad \sqrt{Ax^2+2Bx+C}=\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}.$$

## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=?$

**Auflösung.** Aus Gleichung (9.) folgt

$$(11.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=2\int\frac{dt}{\gamma-\alpha t^2}.$$

Setzt man hierbei $\frac{\gamma}{\alpha}=\pm k^2$, jenachdem $\frac{\gamma}{\alpha}$ positiv oder negativ ist, so erhält man für das obere Vorzeichen nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$(12.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=-\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=-\frac{1}{\alpha k}\,\mathrm{l}\left(\frac{t-k}{t+k}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}}\,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{\alpha(\gamma x+\delta)}+\sqrt{\gamma(\alpha x+\beta)}}{\sqrt{\alpha(\gamma x+\delta)}-\sqrt{\gamma(\alpha x+\beta)}}\right).$$

Für das untere Vorzeichen wird nach Formel Nr. 20 der Tabelle

$$(13.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}}=-\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=-\frac{2}{\alpha k}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{t}{k}\right)$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{-\alpha\gamma}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{-\alpha(\gamma x+\delta)}{\gamma(\alpha x+\beta)}}.$$

**Aufgabe 2.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{rx-x^2}}=?$

**Auflösung.** In diesem Falle kann man setzen

$$(14.)\quad \alpha x+\beta=x,\quad \gamma x+\delta=r-x,$$

also

$$(15.)\quad \alpha=1,\quad \beta=0,\quad \gamma=-1,\quad \delta=r,\quad \beta\gamma-\alpha\delta=-r,$$

$$(16.)\qquad x = \frac{r}{t^2+1}, \quad \sqrt{rx-x^2} = \frac{rt}{t^2+1},$$

$$dx = -\frac{2rtdt}{(t^2+1)^2}, \quad t = \sqrt{\frac{r-x}{x}},$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 106 der Tabelle

$$(17.)\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{rx-x^2}} = -2r\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = -2r\left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t\right]$$

$$= -\sqrt{rx-x^2} - r\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r-x}{x}}.$$

In ähnlicher Weise kann man $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{rx-x^2}}, \int\frac{x^3dx}{\sqrt{rx-x^2}}, \ldots$ berechnen.

**Aufgabe 3.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{rx-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (16.), erhält man hier

$$(18.)\qquad \int\frac{dx}{x\sqrt{rx-x^2}} = -\frac{2}{r}\int dt = -\frac{2t}{r}$$

$$= -\frac{2}{r}\sqrt{\frac{r-x}{x}} = -\frac{2\sqrt{rx-x^2}}{rx}.$$

**Aufgabe 4.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = ?$

**Auflösung.** Hier sei

$$(19.)\qquad \alpha x + \beta = 1 + x, \quad \text{also} \quad \gamma x + \delta = 1 - x,$$

$$(20.)\quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = -2,$$

$$(21.)\quad x = -\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad dx = -\frac{4tdt}{(t^2+1)^2},$$

$$(22.)\qquad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x+1 = \frac{2}{t^2+1}.$$

Dies giebt

(23.) $$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=-\int dt=-t=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

**Aufgabe 5.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=?$

In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

(24.) $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

**Aufgabe 6.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=?$

**Auflösung.** Hier sei

$$\alpha x+\beta=x+1,\quad \text{also}\quad \gamma x+\delta=x-1,$$

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad \gamma=1,\quad \delta=-1,\quad \beta\gamma-\alpha\delta=2,$$

(25.) $$x=\frac{t^2+1}{1-t^2},\quad \sqrt{x^2-1}=\frac{2t}{1-t^2},\quad dx=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}.$$

(26.) $$t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad x+1=\frac{2}{1-t^2}.$$

Dies giebt

(27.) $$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\int dt=t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

**Aufgabe 7.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=?$

In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

(28.) $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

**Aufgabe 8.** $\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}}=?$

**Auflösung.** Auch hier findet die durch die Gleichungen (16.) angegebene Substitution Anwendung, und zwar erhält man, wenn man

(29.) $$r = kg$$
setzt,

(30.) $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = -2\int \frac{dt}{r-k(t^2+1)} = -2\int \frac{dt}{kg-k(t^2+1)}$$
$$= \frac{2}{k}\int \frac{dt}{t^2-g+1}.$$

Dies giebt für $g>1$ nach Formel Nr. 53 der Tabelle

(31.) $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{1}{k\sqrt{g-1}} \,\mathrm{l}\left(\frac{t-\sqrt{g-1}}{t+\sqrt{g-1}}\right).$$

Dieses Resultat kann man noch auf die Form

(32.) $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{k(r-k)}} \,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{k(r-x)}-\sqrt{x(r-k)}}{\sqrt{k(r-x)}+\sqrt{x(r-k)}}\right)$$

bringen. Ist $g<1$, so findet man nach Formel Nr. 20 der Tabelle

(33.) $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{2}{k\sqrt{1-g}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{1-g}}\right),$$

also

(34.) $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{k(k-r)}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{k(r-x)}}{\sqrt{x(k-r)}}\right).$$

**Aufgabe 9.** $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = ?$$

**Auflösung.** Hier sei

(35.) $$\alpha x + \beta = 1 - x, \quad \gamma x + \delta = 1 + x,$$
also

(36.) $$\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 2,$$

(37.) $$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

(38.) $$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad 1 + x^2 = \frac{2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Daraus folgt

(39.) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(t^2+1)dt}{t^4+1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$(40.)\qquad t^4 + 1 = (t^2 - i)(t^2 + i) = 0,$$

nämlich

$$(41.)\quad t_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ t_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}},\ t_3 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ t_4 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

sind sämmtlich complex. Indem man je zwei complexe Factoren von $t^4 + 1$ mit einander multiplicirt, erhält man die reellen Producte

$$(42.)\qquad (t - t_1)(t - t_2) = t^2 - t\sqrt{2} + 1,$$

$$(43.)\qquad (t - t_3)(t - t_4) = t^2 + t\sqrt{2} + 1$$

und die Partialbruchzerlegung

$$(44.)\qquad \frac{t^2+1}{t^4+1} = \frac{Pt+Q}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{Rt+S}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\right).$$

Deshalb findet man nach Formel Nr. 56 der Tabelle

$$(45.)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)].$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch wesentlich vereinfachen. Setzt man nämlich

$$(46.)\qquad \operatorname{arctg}(t\sqrt{2} - 1) = \xi,\quad \operatorname{arctg}(t\sqrt{2} + 1) = \eta,$$

so wird

$$(47.)\qquad \operatorname{tg}\xi = t\sqrt{2} - 1,\quad \operatorname{tg}\eta = t\sqrt{2} + 1,$$

$$(48.)\qquad \operatorname{tg}(\xi+\eta) = \frac{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}\eta}{1 - \operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\eta} = \frac{2t\sqrt{2}}{2-2t^2} = -\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (37.) und (38.)

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1},\quad \text{also}\quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2t}{t^2-1},$$

folglich wird

$$(49.)\ \operatorname{tg}(\xi+\eta) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}},\quad \xi + \eta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right),$$

$$(50.)\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right).$$

In § 39, Aufgabe 8 hatte sich ergeben

$$(51.)\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Die Uebereinstimmung dieser beiden Resultate findet man leicht, indem man

$$(52.)\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right) = \varphi, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$$

setzt; dann wird

$$(53.)\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right), \quad \frac{\pi}{2}-\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Fügt man also in Gleichung (50.) die Integrations-Constante $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hinzu, so erhält man in Uebereinstimmung mit Gleichung (51.)

$$(54.)\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Es war schon damals hervorgehoben worden, dass eine einfachere Lösung dieser Aufgabe durch die in § 10 angegebene Methode, nämlich durch Einführung trigonometrischer Functionen, gefunden wird.

## § 41.

## Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn die drei Grössen $A$, $C$ und $B^2-AC$ negativ sind.

Es sei jetzt

$$(1.)\quad B^2-AC<0, \quad \text{also} \quad AC>B^2>0;$$

die beiden Grössen $A$ und $C$ haben also dasselbe Vorzeichen, so dass die weitere Voraussetzung

$$A < 0 \tag{2.}$$

die andere

$$C < 0 \tag{3.}$$

nothwendiger Weise herbeiführt. Nun wird

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= \frac{1}{A}[A^2x^2 + 2ABx + B^2 + AC - B^2] \\ &= \frac{1}{A}[(Ax + B)^2 + (AC - B^2)]; \end{aligned} \tag{4.}$$

folglich ist in diesem Falle der Ausdruck in der eckigen Klammer *beständig positiv*, was auch $x$ sein mag, also $Ax^2+2Bx+C$ *beständig negativ*, denn $A$ ist negativ. Deshalb wird die Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ selbst eine *complexe* Grösse, wenn die Ungleichungen (1.), (2.) und (3.) gelten, weil $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ stets *imaginär* sein muss. Es ist daher nicht möglich, $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ in *reeller* Form darzustellen. Unter diesen Umständen wird man, wie schon in § 36 hervorgehoben wurde, am besten

$$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F(x, i\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1})dx \tag{5.}$$

setzen, wobei

$$A_1 = -A, \quad B_1 = -B, \quad C_1 = -C \tag{6.}$$

ist. Man kann dann das in § 38 und § 39 angegebene Verfahren benutzen.

§ 42.

## Normalintegrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$

Ist $F(x, \sqrt{X})$ eine ganze rationale Function von $x$ und $\sqrt{X}$, wobei man der Kürze wegen $Ax^2 + 2Bx + C$ mit $X$ bezeichnet hat, so kann man $F(x, \sqrt{X})$ immer auf die Form

$$F(x, \sqrt{X}) = \frac{g(x) + h(x) \cdot \sqrt{X}}{\varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{X}} \tag{1.}$$

bringen, so dass $g(x)$, $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *ganze rationale* Functionen von $x$ sind. Daraus folgt

$$(2.)\quad F(x,\sqrt{X}) = \frac{[g(x)+h(x).\sqrt{X}].[\varphi(x)-\psi(x).\sqrt{X}]}{[\varphi(x)+\psi(x).\sqrt{X}].[\varphi(x)-\psi(x).\sqrt{X}]} = \frac{G(x)+H(x).\sqrt{X}}{\varphi(x)^2-\psi(x)^2.X},$$

wenn man

$$(3.)\quad \begin{cases} g(x)\,\varphi(x)-h(x)\,\psi(x).X = G(x), \\ h(x)\,\varphi(x)-g(x)\,\psi(x) = H(x) \end{cases}$$

setzt. Bezeichnet man noch den Nenner $\varphi(x)^2-\psi(x)^2.X$ mit $N(x)$, so ergiebt sich

$$(4.)\quad F(x,\sqrt{X}) = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)}{N(x)}\cdot\sqrt{X} = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)X}{N(x).\sqrt{X}}.$$

Die gebrochene rationale Function $\frac{G(x)}{N(x)}$ kann man nach den Angaben des vorhergehenden Abschnittes durch Partialbruchzerlegung integriren. Ebenso kann man $\frac{H(x).X}{N(x)}$ (nöthigenfalls nach Absonderung einer *ganzen* rationalen Function) in Partialbrüche von der Form

$$\frac{K}{(x-k)^n} \text{ und } \frac{Px+Q}{[(x-g)^2+h^2]^n}$$

zerlegen. Deshalb kommt es im Wesentlichen nur auf die Berechnung der folgenden *Normalintegrale* an:

$$(5.)\quad \begin{cases} J_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{X}},\quad J_2 = \int\frac{x^m dx}{\sqrt{X}},\quad J_3 = \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{X}}, \\ J_4 = \int\frac{(Px+Q)\,dx}{[(x-g)^2+h^2]^n\sqrt{X}}. \end{cases}$$

Diese Betrachtung bleibt auch noch richtig, wenn $X$ eine ganze rationale Function beliebig hohen Grades ist. Bei den ganzen rationalen Functionen zweiten Grades wird es im Allgemeinen zweckmässig sein, die in § 36 angegebene Umformung vorzunehmen, so dass es bei dem Normalintegral $J_1$ nur auf die in den Formeln Nr. 21, 22 und 23 der Tabelle berechneten Integrale

$$(6.)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \text{ und } \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \mathrm{l}(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$$

ankommt. In gleicher Weise geben nach dieser Umformung die Formeln Nr. 25, 26, 27, 70, 79 und 79a der Tabelle an, wie das Normalintegral $J_2$, nämlich

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ und } \int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

berechnet wird. Auch $J_3$ kann man in dem Falle, wo $k=0$ ist, mit Anwendung der Formeln Nr. 76, 77, 78, 84, 84a, 85 85a, 86 und 86a der Tabelle berechnen. Ist aber $k \gtrless 0$, so setze man zur Berechnung von $\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2+x^2}}$

$$(7.)\quad x = \frac{kz+a^2}{z-k}, \text{ also } x-k = \frac{k^2+a^2}{z-k},$$

$$(8.)\quad dx = -\frac{(k^2+a^2)dz}{(z-k)^2}, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \frac{\sqrt{(k^2+a^2)(a^2+z^2)}}{z-k},$$

$$(9.)\quad z = \frac{kx+a^2}{x-k}, \quad \sqrt{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{(k^2+a^2)(a^2+x^2)}}{x-k}.$$

Dies giebt

$$(10.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{(k^2+a^2)^{n-1}\sqrt{k^2+a^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2+z^2}}.$$

Das Normalintegral $J_3$ ist also auf die Normalintegrale $J_1$ und $J_2$ zurückgeführt.

In ähnlicher Weise setze man zur Berechnung von $\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{x^2-a^2}}$

$$(11.)\quad x = \frac{kz-a^2}{z-k}, \text{ also } x-k = \frac{k^2-a^2}{z-k},$$

$$(12.)\quad dx = -\frac{(k^2-a^2)dz}{(z-k)^2}, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(z^2-a^2)}}{z-k},$$

$$(13.)\quad z = \frac{kx-a^2}{x-k}, \quad \sqrt{z^2-a^2} = \frac{\sqrt{(k^2-a^2)(x^2-a^2)}}{x-k}.$$

Ist $k^2 > 0$, so wird daher

$$(14.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{k^2-a^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{z^2-a^2}},$$

und für $k^2 < a^2$ wird

$$(15.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{a^2-k^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

Die in den Gleichungen (11.), (12.) und (13.) angegebene Substitution führt auch zur Umformung von $\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}}$; es wird nämlich

$$(16.)\quad \begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{\sqrt{(k^2-a^2)(a^2-z^2)}}{z-k}, \\ \sqrt{a^2-z^2} = \dfrac{\sqrt{(k^2-a^2)(a^2-x^2)}}{x-k}, \end{cases}$$

also für $k^2 > a^2$

$$(17.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{k^2-a^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{a^2-z^2}},$$

und für $k^2 < a^2$

$$(18.)\quad \int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{(k^2-a^2)^{n-1}\sqrt{a^2-k^2}}\int\frac{(z-k)^{n-1}dz}{\sqrt{z^2-a^2}}.$$

Das Normalintegral $J_4$ kann bei Anwendung complexer Grössen durch Integrale von der Form $J_3$ dargestellt werden. Will man aber complexe Grössen ganz vermeiden, so wird man entweder die in § 38, 39 und 40 angegebenen Methoden anwenden, oder man wird im Allgemeinen noch zweckmässiger nach den Angaben in § 10 (vergl. Formel Nr. 87, 88 und 89 der Tabelle) trigonometrische Functionen einführen, nachdem man durch die lineare Substitution

$$(19.)\quad x = \frac{\alpha z + \beta}{z+1}$$

und durch passende Bestimmung der Grössen $\alpha$ und $\beta$ das Integral auf Integrale von der Form

$$\int\frac{(Px+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{Z}}$$

zurückgeführt hat, wobei $Z$ einen der drei Werthe $a^2+z^2$, $z^2-a^2$ oder $a^2-z^2$ haben soll. Durch die Substitution

$$z = a\,\mathrm{tg}\,t,\quad dz = \frac{adt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{a^2+z^2} = \frac{a}{\cos t} \tag{20.}$$

erhält man dann

$$\begin{aligned}\int\frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{a^2+z^2}} &= \int\frac{(Pa\sin t + Q\cos t)\cos^{2n-2}t\,.\,dt}{(a^2\sin^2 t + p^2\cos^2 t)^n}\\ &= -Pa\int\frac{\cos^{2n-2}t\,d(\cos t)}{[a^2+(p^2-a^2)\cos^2 t]^n}\\ &\quad + Q\int\frac{(1-\sin^2 t)^{n-1}d(\sin t)}{[(a^2-p^2)\sin^2 t + p^2]^n}.\end{aligned} \tag{21.}$$

Durch die Substitution

$$z = \frac{a}{\cos t},\quad dz = \frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{z^2-a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t \tag{22.}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\int\frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{z^2-a^2}} &= \int\frac{(Pa+Q\cos t)\cos^{2n-2}t\,.\,dt}{(a^2+p^2\cos^2 t)^n}\\ &= Pa\int\frac{d(\mathrm{tg}\,t)}{[(a^2+p^2)+a^2\,\mathrm{tg}^2 t]^n}\\ &\quad + Q\int\frac{(1-\sin^2 t)^{n-1}\,.\,d(\sin t)}{[(a^2+p^2)-p^2\sin^2 t]^n}.\end{aligned} \tag{23.}$$

Durch die Substitution

$$z = a\sin t,\quad dz = a\cos t\,dt,\quad \sqrt{a^2-z^2} = a\cos t \tag{24.}$$

findet man

$$\int\frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{a^2-z^2}} = \int\frac{(Pa\sin t + Q)dt}{(a^2\sin^2 t + p^2)^n} \tag{25.}$$

$$= -Pa\int\frac{d(\cos t)}{[(a^2+p^2)-a^2\cos^2 t]^n} + Q\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2 t)^{n-1}d(\mathrm{tg}\,t)}{[(a^2+p^2)\,\mathrm{tg}^2 t + p^2]^n}.$$

Ausserdem kann man auch Recursionsformeln herleiten von der Form

$$(26.)\quad \int\frac{(Pz+Q)dz}{(z^2+p^2)^n\sqrt{Z}} = \frac{(Rz+S)\sqrt{Z}}{(z^2+p^2)^{n-1}} + \int\frac{(P_1z+Q_1)dz}{(z^2+p^2)^{n-1}\sqrt{Z}} + \int\frac{(P_2z+Q_2)dz}{(z^2+p^2)^{n-2}\sqrt{Z}},$$

wobei man die unbestimmten Coefficienten $R$, $S$, $P_1$, $Q_1$, $P_2$, $Q_2$ durch Differentiation von $\dfrac{(Rz+S)\sqrt{Z}}{(z^2+p^2)^{n-1}}$ findet.

## IX. Abschnitt.

# Integration transcendenter Functionen.

## § 43.

### Herleitung einiger Recursionsformeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 123 bis 128.)

Schon im ersten Theile ist die Integration zahlreicher transcendenter Functionen ausgeführt worden, wobei sich die Formeln Nr. 13 bis 16, 29 bis 52, 60, 62 bis 69 der Tabelle ergaben.

Diesen Formeln mögen noch einige weitere durch die Lösung der folgenden Aufgaben hinzugefügt werden.

**Aufgabe 1.** $\int \sin^m x \cos^n x dx = ?$

**Auflösung.** Ist $n$ eine *ungerade* Zahl, so findet man die einfachste Lösung der Aufgabe mit Hülfe von Formel Nr. 38 der Tabelle; und ist $m$ eine *ungerade* Zahl, so kann man Formel Nr. 39 der Tabelle mit gutem Erfolge anwenden. Sind aber $m$ und $n$ beide *gerade* Zahlen, so wird man durch *partielle* Integration zum Ziele kommen. Nach Formel Nr. 61 der Tabelle ist nämlich

$$\int u dv = uv - \int v du; \tag{1.}$$

setzt man also in dieser Formel

$$u = \sin^{m-1} x, \quad dv = \cos^n x \sin x dx, \tag{2.}$$

und deshalb

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx, \quad v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}, \tag{3.}$$

so erhält man

$$(4.)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x \cos^{n+2}x\, dx.$$

Ist $m$ positiv und $n$ negativ, so ist diese Formel sehr brauchbar. Ist z. B.

$$n = -m,$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x}{(-m+1)\cos^{m-1}x} + \frac{m-1}{-m+1}\int \frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{m-2}x}\, dx,$$

oder

$$(5.)\qquad \int \operatorname{tg}^m x\, dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{tg}^{m-1}x - \int \operatorname{tg}^{m-2}x\, dx.$$

Ist aber $n$ gleichfalls positiv, so benutze man die Beziehungen

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\sin^{m-2}x \cos^{n+2}x = \sin^{m-2}x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

oder

$$\frac{m+n}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx.$$

Daraus folgt

$$(6.)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten $m$ reduciren, wenn $m$ positiv ist.

Einen besonderen Fall dieser Gleichung enthält bereits Formel Nr. 66 der Tabelle.

Vertauscht man in Gleichung (6.) $m$ mit $-m+2$, also $m-1$ mit $-m+1$, $m-2$ mit $-m$, so erhält man

$$\int\frac{\cos^n x}{\sin^{m-2}x}dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{(n-m+2)\sin^{m-1}x} - \frac{m-1}{n-m+2}\int\frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx,$$

oder

$$(7.)\quad \int\frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int\frac{\cos^n x}{\sin^{m-2}x}dx.$$

Einen besonderen Fall dieser Gleichung enthält bereits Formel Nr. 69 der Tabelle.

In ähnlicher Weise kann man den Exponenten $n$ reduciren. Setzt man nämlich

$$(8.)\quad u = \cos^{n-1}x,\quad dv = \sin^m x\cos x\,dx,$$

also

$$(9.)\quad du = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,dx,\quad v = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1},$$

so wird nach Gleichung (1.)

$$(10.)\quad \int\sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx.$$

Ist $n$ positiv und $m$ negativ, so ist diese Formel sehr brauchbar, ist z. B.

$$m = -n,$$

so geht die Gleichung (10.) über in

$$(11.)\quad \int\operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1} - \int\operatorname{ctg}^{n-2}x\,dx.$$

Ist aber $m$ gleichfalls positiv, so benutze man die Beziehungen

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x,$$

$$\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x = \sin^m x\cos^{n-2}x - \sin^m x\cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (10.) über in

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$
$$- \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

oder

$$\frac{m+n}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx;$$

daraus folgt

$$(12.) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten $n$ reduciren, wenn $n$ positiv ist.

Einen besonderen Fall dieser Gleichung enthält bereits Formel Nr. 64 der Tabelle.

Vertauscht man in Gleichung (12.) $n$ mit $-n+2$, also $n-1$, mit $-n+1$, $n-2$ mit $-n$, so erhält man

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} \, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n+2) \cos^{n-1} x} + \frac{-n+1}{m-n+2} \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} \, dx,$$

oder

$$(13.) \quad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} \, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} \, dx.$$

Einen besonderen Fall dieser Gleichung enthält bereits Formel Nr. 68 der Tabelle.

Die hergeleiteten Formeln bleiben richtig, gleichviel, ob $m$ und $n$ *gerade* oder *ungerade* sind.

## § 44.

## Integration trigonometrischer Functionen durch Anwendung der *Moivre*'schen Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 129 bis 134.)

Die Integration von $\cos^m \varphi \, d\varphi$ und von $\sin^m \varphi \, d\varphi$, welche bereits durch die Formeln Nr. 36, 37, 64—67 der Tabelle gegeben ist, kann auch mit Hülfe der *Moivre*'schen Formeln ausgeführt werden. Nach D.-R., Formel Nr. 176 der Tabelle ist

$$(1.)\quad 2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}2\cos(2n-4)\varphi + \cdots + \binom{2n}{n-1}2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(2.)\quad 2^{2n}\int\cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{2}{2n}\sin(2n\varphi) + \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)\varphi + \cdots + \binom{2n}{n-1}\sin(2\varphi) + \binom{2n}{n}\varphi.$$

**Beispiel.**

$$(3.)\quad 64\int\cos^6\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\sin(6\varphi) + 3\sin(4\varphi) + 15\sin(2\varphi) + 20\varphi.$$

Nach D.-R., Formel Nr. 177 der Tabelle ist

$$(4.)\quad 2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} = 2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1}2\cos(2n-1)\varphi + \cdots + \binom{2n+1}{n-1}2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n}2\cos\varphi;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(5.)\quad 2^{2n+1}\int\cos^{2n+1}\varphi d\varphi = \frac{2}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\varphi + \cdots + \binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\sin(3\varphi) + \binom{2n+1}{n}2\sin\varphi.$$

**Beispiel.**

$$(6.)\quad 128\int\cos^7\varphi d\varphi = \frac{2}{7}\sin(7\varphi) + \frac{14}{5}\sin(5\varphi) + 14\sin(3\varphi) + 70\sin\varphi.$$

Nach D.-R., Formel Nr. 178 der Tabelle ist

$$(7.)\quad (-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}2\cos(2n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}2\cos(2\varphi) + (-1)^n\binom{2n}{n};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(8.)\quad (-1)^n 2^{2n}\int\sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{2}{2n}\sin(2n\varphi) - \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\sin(2\varphi) + (-1)^n\binom{2n}{n}\varphi.$$

**Beispiel.**

$$(9.)\quad -64\int\sin^6\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\sin(6\varphi) - 3\sin(4\varphi) + 15\sin(2\varphi) - 20\varphi.$$

Endlich ist nach Formel Nr. 179 der Tabelle

$$(10.)\quad (-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} = 2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1}2\sin(2n-1)\varphi + - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}2\sin(3\varphi) + (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\sin\varphi;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $d\varphi$ multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(11.)\quad (-1)^n 2^{2n+1}\int\sin^{2n+1}\varphi d\varphi = -\frac{2}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\cos(2n-1)\varphi - + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\cos(3\varphi) + (-1)^{n+1}\binom{2n+1}{n}2\cos\varphi.$$

**Beispiel.**

$$(12.)\quad 128\int\sin^7\varphi d\varphi = \frac{2}{7}\cos(7\varphi) - \frac{14}{5}\cos(5\varphi) + 14\cos(3\varphi) - 70\cos\varphi.$$

In ähnlicher Weise kann man auch $\int\sin^m\varphi\cos^n\varphi\, d\varphi$ berechnen, wenn man die Formeln

$$(13.)\qquad 2i\sin\varphi = e^{\varphi i} - e^{-\varphi i},\quad 2\cos\varphi = e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}$$

berücksichtigt. Es ist z. B. nach den Gleichungen (13.), wenn man

$$(14.)\quad e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi = u,\quad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi = v$$

setzt und beachtet, dass $uv = 1$ ist,

$$\begin{aligned}
-64\sin^2\varphi\cos^4\varphi &= (e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^2(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^4\\
&= (u-v)^2(u+v)^4\\
&= u^6 + 2u^5v - u^4v^2 - 4u^3v^3 - u^2v^4 + 2uv^5 + v^6\\
&= (u^6+v^6) + 2(u^4+v^4) - (u^2+v^2) - 4\\
&= 2\cos(6\varphi) + 4\cos(4\varphi) - 2\cos(2\varphi) - 4,
\end{aligned}$$

also

$$-64\int\sin^2\varphi\cos^4\varphi d\varphi = \tfrac{1}{3}\sin(6\varphi) + \sin(4\varphi) - \sin(2\varphi) - 4\varphi.$$

Zur Berechnung von $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ und $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ kann man Formel Nr. 61 der Tabelle, nämlich die Gleichung

$$(15.)\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

verwenden, indem man

$$(16.)\qquad u = e^{ax},\quad dv = \cos(bx)dx,$$

also

$$(17.)\qquad du = ae^{ax}dx,\quad v = \frac{1}{b}\sin(bx)$$

setzt; dann findet man

$$(18.)\quad \int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

Setzt man dagegen in Gleichung (15.)

$$(19.)\qquad u = e^{ax},\quad dv = \sin(bx)dx,$$

also

$$(20.)\qquad du = ae^{ax}dx,\quad v = -\frac{1}{b}\cos(bx),$$

so erhält man

$$(21.)\quad \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx.$$

Dies giebt, wenn man Gleichung (21.) mit $-\frac{a}{b}$ multiplicirt, zu Gleichung (18.) addirt und das Resultat durch $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ dividirt,

$$(22.)\quad \int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax}\cdot\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}.$$

Multiplicirt man dagegen Gleichung (18.) mit $\frac{a}{b}$, addirt dann Gleichung (21.) und dividirt durch $\frac{a^2+b^2}{b^2}$, so erhält man

$$(23.)\quad \int e^{ax}\sin(bx)dx = e^{ax}\cdot\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}.$$

Noch einfacher findet man diese Resultate durch Anwendung der *Moivre*'schen Formeln. Es ist nämlich nach D.-R., Formel Nr. 173 der Tabelle

$$(24.)\quad e^{ax}[\cos(bx)+i\sin(bx)] = e^{ax}\,.\,e^{bxi} = e^{(a+bi)x}.$$

Erklärt man also das Integral einer complexen Grösse $A+Bi$ durch die Gleichung

$$(25.)\quad \int(A+Bi)dx = \int Adx + i\int Bdx,$$

so ergiebt sich aus Gleichung (24.)*)

$$(26.)\quad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx + i\int e^{ax}\sin(bx)dx = \int e^{(a+bi)x}dx$$

$$= \frac{1}{a+bi}\cdot e^{(a+bi)x}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}[\cos(bx)+i\sin(bx)]$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}[a\cos(bx)+b\sin(bx)]$$

$$+ \frac{i}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}[a\sin(bx)-b\cos(bx)].$$

---

*) Die Zulässigkeit des hier folgenden Verfahrens ergiebt sich aus D.-R., § 136.

Sind aber zwei complexe Grössen einander gleich, so müssen die reellen Theile und ebenso auch die Factoren der imaginären Theile einander gleich sein, folglich findet man aus Gleichung (26.) in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (22.) und (23.)

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2},$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\cdot\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}.$$

Eine weitere Anwendung dieser Methode liefert die Berechnung von $\int\cos(a_1x+b_1)\cos(a_2x+b_2)\ldots\cos(a_nx+b_n)dx$.

Setzt man der Kürze wegen

$$(27.)\quad a_1x+b_1=\varphi_1,\quad a_2x+b_2=\varphi_2,\ \ldots a_nx+b_n=\varphi_n,$$

so ergiebt sich aus der bekannten Formel

$$(28.)\qquad 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

ohne Weiteres

$$(29.)\ \int\cos(a_1x+b_1)\cos(a_2x+b_2)dx=\frac{1}{2(a_1+a_2)}\sin[(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)]+\frac{1}{2(a_1-a_2)}\sin[(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)].$$

Beachtet man, dass sich Gleichung (28.) mit Hülfe der *Moivre*'schen Formeln herleiten lässt, indem man

$$\begin{aligned}4\cos\varphi_1\cos\varphi_2&=(e^{\varphi_1 i}+e^{-\varphi_1 i})(e^{\varphi_2 i}+e^{-\varphi_2 i})\\&=e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}+e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}+e^{-(\varphi_1-\varphi_2)i}+e^{-(\varphi_1+\varphi_2)i}\\&=2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\end{aligned}$$

setzt, so erkennt man sofort, in welcher Weise sich das in Gleichung (29.) gefundene Resultat verallgemeinern lässt. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}(30.)\ 4\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3=&\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+\cos(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)\\&+\cos(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3),\end{aligned}$$

also

$$(31.)\ \int \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3\, dx = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}{4(a_1 + a_2 + a_3)} + \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)}{4(a_1 + a_2 - a_3)} + \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)}{4(a_1 - a_2 + a_3)} + \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}{4(a_1 - a_2 - a_3)}.$$

Dieses Verfahren kann man auf beliebig viele Factoren ausdehnen und dadurch

$$\int \cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2) \ldots \cos(a_n x + b_n) dx$$

bestimmen.

---

## X. Abschnitt.

# Theorie der bestimmten Integrale.

### § 45.

### Integration bei unendlichen Grenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 135 und 136.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

war bisher vorausgesetzt worden, dass die Grenzen $a$ und $b$ endliche, constante Grössen seien. Jetzt kann man sich aber vorstellen, dass die obere Grenze $b$ nicht mehr eine constante, sondern eine veränderliche Grösse sei, welche schliesslich bis in's Unbegrenzte wächst. Demgemäss würde $\int_a^\infty f'(x)dx$ durch die Gleichung

$$(2.)\qquad \int_a^\infty f'(x)dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f'(x)dx = \lim_{b=\infty} f(b) - f(a)$$

erklärt werden.

Auch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt einer ebenen Figur bleibt in diesem Grenzfalle noch bestehen, die ebene Figur aber, deren Flächeninhalt durch das Integral ausgedrückt wird, erstreckt sich längs der $X$-Axe bis in's Unendliche. Es war schon früher (§ 11, Aufgabe 8) gezeigt worden, dass der Flächeninhalt der Figur trotzdem einen endlichen Werth haben kann.

In gleicher Weise kann auch die untere Grenze $a$ sich ändern und bis in's Unbegrenzte abnehmen. Dann möge $\int\limits_{-\infty}^{b} f'(x)dx$ durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \int\limits_{-\infty}^{b} f'(x)dx = \lim_{a=-\infty} \int\limits_{a}^{b} f'(x)dx = f(b) - \lim_{a=-\infty} f(a)$$

erklärt werden.

Aus den folgenden Beispielen kann man ersehen, dass hierbei drei Fälle zu unterscheiden sind:

I. Das Integral mit unendlichen Grenzen wird selbst *unendlich gross*;

II. Das Integral behält einen *endlichen* Werth;

III. das Integral wird *unbestimmt*.

## Beispiele.

$$1.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} e^x dx = \lim_{b=\infty} \left[e^x\right]_0^b = \lim_{b=\infty} e^b - 1 = \infty.$$

$$2.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -\lim_{b=\infty} \left[e^{-x}\right]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty} \left(\frac{1}{e^b}\right) = 1.$$

$$3.)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \lim_{b=\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b=\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2a}.$$

$$4.)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{\substack{c=+\infty \\ b=-\infty}} \int\limits_{b}^{c} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \lim_{\substack{c=+\infty \\ b=-\infty}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_b^c$$

$$= \frac{1}{a}\left[\lim_{c=+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\right) - \lim_{b=-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

Aus diesem Beispiele sieht man, dass auch gleichzeitig beide Grenzen unendlich werden können. Im Uebrigen kann man die letzte Aufgabe auch durch Zerlegung des Integrals auf die vorhergehende Aufgabe zurückführen. Es ist nämlich, wenn man $y = -x$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$= -\int_{+\infty}^{0}\frac{dy}{a^2+y^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$= 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}.$$

5.) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b=\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\lim_{b=\infty}\sqrt{b} - 2 = \infty.$$

6.) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2\lim_{b=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^b = 2 - 2\lim_{b=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = 2.$$

7.) $$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b=\infty}\left[\mathrm{l}\,x\right]_a^b = \lim_{b=\infty}\mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right) = \infty.$$

8.) $$\int_0^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{b=\infty}\left[\sin x\right]_0^b = \lim_{b=\infty}\sin b.$$

Dieser Ausdruck nähert sich keiner bestimmten Grenze; in diesem Falle wird also das Integral *unbestimmt*, wenn man die obere (oder untere) Grenze unendlich gross werden lässt.

Auch bei der Kubatur der Rotationskörper war ein derartiges Integral bereits aufgetreten. In § 17, Aufgabe 13 erhielt man für das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der *Cissoide* um die Asymptote $x = 2a$ entsteht, einen Werth, der auch dann noch endlich bleibt, wenn $y$ unendlich gross wird. Es war nämlich

$$x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = 2a\,\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}, \quad x - 2a = -2a\cos^2\varphi,$$

$$V = \pi\int_0^y (x - 2a)^2 dy = a^3\pi\,[-\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) + 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3(2\varphi)].$$

Für $\lim y = \infty$ wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also

$$V = \pi\int_0^\infty (x - 2a)^2 dy = a^3\pi^2.$$

## § 46.

## Integration von Differential-Functionen, die an den Grenzen des Integrals unstetig werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 137—139.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a),$$

war bisher auch die Voraussetzung gemacht worden, dass $f'(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ stetig sei. Jetzt möge aber $f'(x)$ stetig sein für

$$a \leqq x < b,$$

während

$$(2.)\qquad f'(b) = \pm\infty$$

ist. Bezeichnet man dann mit $\beta$ eine beliebig kleine positive Grösse, so gilt für

$$\int_a^{b-\beta} f'(x)dx = f(b - \beta) - f(a)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein $\beta$ auch sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b f'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \int_a^b f'(x)dx = \lim_{\beta=0}\int_a^{b-\beta} f'(x)dx = \lim_{\beta=0} f(b - \beta) - f(a).$$

Es sei z. B.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{b-x}}, \text{ also } f'(b) = \pm\infty,$$

dann wird

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = -2\lim_{\beta=0}\left[\sqrt{b-x}\right]_a^{b-\beta}$$

$$= -2\left(\lim_{\beta=0}\sqrt{\beta} - \sqrt{b-a}\right) = 2\sqrt{b-a}.$$

Bleibt $f'(x)$ stetig für

$$a < x \leqq b,$$

während

(4.) $$f'(a) = \pm\infty$$

ist, so bezeichne man mit $\alpha$ eine beliebig kleine positive Grösse, dann gilt für

$$\int_{a+\alpha}^b f'(x)dx = f(b) - f(a+\alpha)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein auch $\alpha$ sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b f'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

(5.) $$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\alpha=0}\int_{a+\alpha}^b f'(x)dx = f(b) - \lim_{\alpha=0} f(a+\alpha).$$

Es kann auch vorkommen, dass beide Fälle vereinigt sind, dass also

(6.) $$f'(a) = \pm\infty \quad\text{und}\quad f'(b) = \pm\infty,$$

dass $f'(x)$ aber stetig ist für

$$a < x < b;$$

dann wird $\int_a^b f'(x)dx$ erklärt durch die Gleichung

(7.) $$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\int_{a+\alpha}^{b-\beta} f'(x)dx = \lim_{\beta=0} f(b-\beta) - \lim_{\alpha=0} f(a+\alpha).$$

Beispiele von derartigen Integralen waren bei der Quadratur der Curven mehrfach aufgetreten. So ergab sich bei Aufgabe 8 in § 11 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche oben von der *verallgemeinerten Hyperbel*

$$y = \sqrt[n]{2p} \, . \, x^{-\frac{m}{n}}$$

begrenzt wird,

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m}\left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}}\right). \tag{8.}$$

Ist $n > m$, so wird $\lim\limits_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0$, und man erhält für

$$F = \int_0^{x_2} y dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2y_2}{n-m} \tag{9.}$$

einen endlichen Werth, obgleich $y$ unendlich gross wird für $x = 0$, so dass sich der Flächenstreifen längs der $Y$-Axe in's Unendliche erstreckt.

Ferner fand man bei Aufgabe 12 in § 11 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche von der *Cissoide* mit den Gleichungen

$$x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = 2a\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} \tag{10.}$$

begrenzt wird,

$$\begin{aligned} F = \int_0^x y dx &= 8a^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi \, d\varphi \\ &= a^2[3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)]. \end{aligned} \tag{11.}$$

Für $x = 2a$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $y$ unendlich gross, so dass sich der Flächenstreifen längs der Asymptote $x = 2a$ in's Unendliche erstreckt. Trotzdem bleibt

$$F = \int_0^{2a} y dx = a^2 \lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}} [3\varphi - \cos\varphi(2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi)] = \frac{3a^2\pi}{2} \tag{12.}$$

endlich.

Man erkennt aus den angeführten Beispielen, dass bei dieser Erklärung das bestimmte Integral auch dann noch als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann, wenn die Function unter dem Integralzeichen an den Grenzen unendlich gross wird.

## Uebungs-Beispiele.

1.) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \lim_{\alpha=0} \int_{a+\alpha}^b (x-a)^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \lim_{\alpha=0} \left[\sqrt[3]{x-a}\right]_{a+\alpha}^b$$
$$= 3\sqrt[3]{b-a} - 3 \lim_{\alpha=0} \sqrt[3]{\alpha} = 3\sqrt[3]{b-a}.$$

2.) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{\alpha=0} \int_{a+\alpha}^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{\alpha=0} \left[\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_{a+\alpha}^b$$
$$= \mathrm{l}(b+\sqrt{b^2-a^2}) - \lim_{\alpha=0} \mathrm{l}(a+\alpha+\sqrt{2a\alpha+\alpha^2})$$
$$= \mathrm{l}(b+\sqrt{b^2-a^2}) - \mathrm{l}a = \mathrm{l}\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

3.) $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-ab+(a+b)x-x^2}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab - \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)x + x^2\right]}},$$

oder, wenn man

$$x - \frac{a+b}{2} = t, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2,$$

also

$$dx = dt, \quad 2c = b - a$$

setzt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{dt}{\sqrt{c^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{c}\right)$$
$$= \arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

Deshalb wird

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\left[\arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right]_{a+\alpha}^{b-\beta}$$
$$= \lim_{\beta=0} \arcsin\left(\frac{b-2\beta-a}{b-a}\right) - \lim_{\alpha=0}\left(\frac{a+2\alpha-b}{b-a}\right)$$
$$= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = 2\arcsin 1 = \pi.$$

4.) $$\int_0^b \frac{dx}{x^2-b^2} = \lim_{\beta=0}\left[\frac{1}{2b}\,\mathrm{l}\left(\frac{b-x}{b+x}\right)\right]_0^{b-\beta} = \frac{1}{2b}\lim_{\beta=0} \mathrm{l}\left(\frac{\beta}{2b-\beta}\right) = -\infty.$$

## § 47.

## Integration von Differential-Functionen, die zwischen den Grenzen unendlich werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 140.)

Wird die Function $f'(x)$ für $x = c$ unendlich gross, wobei $c$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ liegen möge, während $f'(x)$ stetig bleibt für

$$a \leqq x < c \quad \text{und für} \quad c < x \leqq b,$$

dann soll $\int_a^b f'(x)dx$ erklärt werden durch die Gleichung

(1.) $$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\gamma=0} \int_a^{c-\gamma} f'(x)dx + \lim_{\delta=0} \int_{c+\delta}^b f'(x)dx$$
$$= f(b) - f(a) + \lim_{\gamma=0} f(c-\gamma) - \lim_{\delta=0} f(c+\delta),$$

wobei $\gamma$ und $\delta$ beliebig kleine positive Grössen sind.

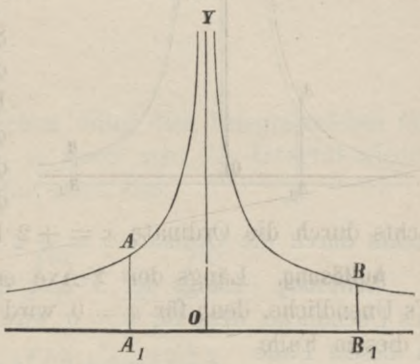
## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Der Gleichung

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \tag{2.}$$

entspricht eine Curve (Fig. 99), welche die $Y$-Axe zur Asymptote und ausserdem zur Symmetrie-Axe hat; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche oben durch diese Curve, unten durch die $X$-Axe, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

Fig. 99.




**Auflösung.** Längs der $Y$-Axe erstreckt sich die Figur in's Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich ist in diesem Falle

$$F = \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} y dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} y dx \tag{3.}$$

$$= \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= 3 \lim_{\gamma=0} \left[\sqrt[3]{x}\right]_{-1}^{-\gamma} + 3 \lim_{\delta=0} \left[\sqrt[3]{x}\right]_{+\delta}^{+2},$$

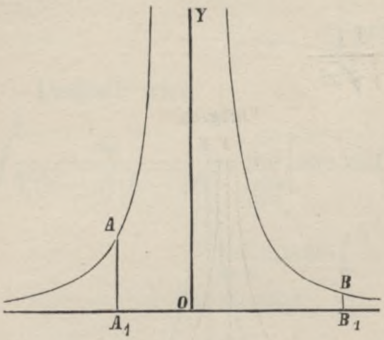
also

$$F = 3\left[1 - \lim_{\gamma=0} \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{2} - \lim_{\delta=0} \sqrt[3]{\delta}\right] = 3(1 + \sqrt[3]{2}). \tag{4.}$$

Man erhält also für den Flächeninhalt der Figur, die sich längs der $Y$-Axe bis in's Unendliche erstreckt, einen endlichen Werth.

**Aufgabe 2.** Der Gleichung

Fig. 100.




$$y = \frac{1}{x^2} \tag{5.}$$

entspricht eine Curve (Fig. 100), welche gleichfalls die $Y$-Axe zur Asymptote und zur Symmetrie-Axe hat; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur berechnen, welche oben durch diese Curve, unten durch die $X$-Axe, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

**Auflösung.** Längs der $Y$-Axe erstreckt sich die Figur bis in's Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich wird auch in diesem Falle

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\gamma=0} \int\limits_{-1}^{-\gamma} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta=0} \int\limits_{+\delta}^{+2} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{\gamma=0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\gamma} + \lim_{\delta=0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{+\delta}^{+2} \\ &= \lim_{\gamma=0} \frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} = \infty. \end{aligned} \tag{6.}$$

Man hätte einen *Fehler* gemacht, wenn man geschrieben hätte

$$F = \int\limits_{-1}^{+2} \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{+2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Wie man sieht, bleibt die geometrische Deutung des bestimmten Integrals, wie sie früher unter Ausschluss von Unstetigkeiten gegeben wurde, bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Gleichung (1.) auch dann noch bestehen, wenn $f'(x)$ für einzelne Werthe von $x$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ unstetig wird. In dem Falle nämlich, wo $f'(x)$ für $n$ verschiedene Werthe von $x$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ unstetig wird, muss man $\int\limits_a^b f'(x)dx$ in $n+1$ Integrale zerlegen und bei jedem einzelnen das in Gleichung (1.) angedeutete Grenzverfahren anwenden.

**Aufgabe 3.** $\int\limits_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = ?$

**Auflösung.** Da die Function unter dem Integralzeichen für $x = 0$ unendlich gross wird, so muss man das Integral wieder in zwei andere zerlegen. Man setzt also

$$\int\limits_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim_{\gamma=0} \int\limits_{-a}^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta=0} \int\limits_{+\delta}^{+b} \frac{dx}{x} \tag{7.}$$

$$= \lim_{\gamma=0} \mathrm{l}\left(\frac{\gamma}{a}\right) + \lim \mathrm{l}\left(\frac{b}{\delta}\right)$$

$$= \mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right) + \lim \mathrm{l}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

In diesem Falle hängt der Werth des bestimmten Integrals von dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\delta}$ ab. Da dieses Verhältniss unendlich viele Werthe haben darf, so hat auch das Integral unendlich viele Werthe. Für $\gamma = \delta$ wird

$$\int\limits_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right) + \mathrm{l}\,1 = \mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right). \tag{8.}$$

Dieser Werth heisst nach *Cauchy* „der *Hauptwerth*" des bestimmten Integrals.

**Aufgabe 4.** $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} = ?$ wenn $a < c < b$.

**Auflösung.** Indem man wieder die Zerlegung des Integrals ausführt, findet man

$$(9.)\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} = \int\limits_a^b (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx$$

$$= \lim_{\gamma=0} \int\limits_a^{c-\gamma} (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx + \lim_{\delta=0} \int\limits_{c+\delta}^b (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx$$

$$= 5 \lim_{\gamma=0} \left[\sqrt[5]{x-c}\right]_a^{c-\gamma} + 5 \lim_{\delta=0} \left[\sqrt[5]{x-c}\right]_{c+\delta}^b$$

$$= 5\left[\lim_{\gamma=0} \sqrt[5]{-\gamma} - \sqrt[5]{a-c} + \sqrt[5]{b-c} - \lim_{\delta=0} \sqrt[5]{\delta}\right]$$

$$= 5(\sqrt[5]{b-c} + \sqrt[5]{c-a}).$$

## § 48.

## Näherungsmethoden durch Einführung einfacherer Functionen.

In vielen Fällen, wo das *unbestimmte* Integral einer Differential-Function schwer zu ermitteln ist, kann man den Werth des *bestimmten* Integrals durch andere Hülfsmittel genau, oder doch mit grosser Annäherung berechnen.

Von diesen Hülfsmitteln sollen hier einige angeführt werden.

Aus der geometrischen Deutung eines bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f'(x)dx$ als Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben begrenzt ist durch die Curve $y = f'(x)$, rechts und links durch die Ordinaten $x = b$, bezw. $x = a$ und unten durch die X-Axe (vergl. Formel Nr. 4 der Tabelle), ergiebt sich sofort der folgende

**Satz 1.** *Sind $y_1 = \varphi(x)$ und $y = f'(x)$ zwei Functionen, welche zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ sich durch Curven geometrisch darstellen lassen, und bleibt in diesem Intervalle $\varphi(x)$ beständig gleich oder kleiner als $f'(x)$, so ist auch*

$$(1.)\quad \int\limits_a^b \varphi(x)dx \leqq \int\limits_a^b f'(x)dx;$$

denn die von der Curve $y = f'(x)$ begrenzte Figur hat einen grösseren Flächeninhalt als die von der anderen Curve $y_1 = \varphi(x)$ begrenzte Figur. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, dass die Curven beide *über* der $X$-Axe liegen; der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung *nicht* erfüllt ist.

Man kann den Beweis auch unabhängig von der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals führen, indem man dasselbe als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\varphi(x)dx$, bezw. $f'(x)dx$ betrachtet. Aus

$$\varphi(x)dx \leqq f'(x)dx \tag{2.}$$

folgt dann auch die Ungleichheit der Summen, also

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f'(x)dx.$$

**Satz 2.** *Liegt die Function $f'(x)$ für alle Werthe von $x$ innerhalb des Intervalles von $a$ bis $b$ der Grösse nach beständig zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also*

$$\varphi(x) \leqq f'(x) \leqq \psi(x), \tag{3.}$$

*so ist auch*

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f'(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx. \tag{4.}$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus Satz 1.

## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} = ?$

**Auflösung.** Da $x$ beständig ein positiver ächter Bruch ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$0 \leqq x < 1,$$
$$0 \leqq x^3 \leqq x^2,$$
$$1 \geqq 1 - x^3 \geqq 1 - x^2,$$

$$1 \geqq \sqrt{1-x^3} \geqq \sqrt{1-x^2},$$

$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich wird auch

$$(5.)\qquad \int\limits_0^{0,5} dx < \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$(6.)\qquad 0,5 < \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0,5\,235\,988.$$

Am häufigsten wird der Satz zur Anwendung kommen in dem Falle, wo für die Werthe eines bestimmten Integrals, welches einen *„variablen Parameter“* enthält, eine Tabelle bereits berechnet ist. In dieser Tabelle sind natürlich nur einzelne Werthe des Parameters berücksichtigt; will man dann den Werth des Integrals auch für andere Werthe des Parameters ermitteln, so muss man zunächst den angegebenen Satz benutzen, um einen angenäherten Werth zu erhalten. Wie dies gemeint ist, möge die folgende Aufgabe zeigen.

**Aufgabe 2.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\,\sin^2 x}} = ?$

**Auflösung.** Liegt der Winkel $\alpha$, welcher in diesem Beispiele der *„variable Parameter“* ist, zwischen den beiden spitzen Winkeln $\alpha_1$ und $\alpha_2$, ist also

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2,$$

so wird

$$\sin^2\alpha_1 < \sin^2\alpha < \sin^2\alpha_2,$$

$$\sin^2\alpha_1 \sin^2 x \leqq \sin^2\alpha \sin^2 x \leqq \sin^2\alpha_2 \sin^2 x,$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\sin^2 x} \geqq \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2 x} \geqq \sqrt{1-\sin^2\alpha_2\sin^2 x},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\sin^2 x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2 x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2\sin^2 x}},$$

also

$$(7.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1 \sin^2 x}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2 \sin^2 x}}.$$

Es sei z. B.

$$\alpha_1 = 38^0, \quad \alpha = 38^0\,30', \quad \alpha_2 = 39^0,$$

dann ist, wie man den Tafeln von *Legendre* entnehmen kann,

$$(8.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1 \sin^2 x}} = 1{,}7633, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2 \sin^2 x}} = 1{,}7748,$$

also

$$(9.)\quad 1{,}7633 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}} < 1{,}7748.$$

Der genaue Werth des Integrals wird 1,7690.

## § 49.

## Mittelwerthsätze.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 141, 141a und 142.)

Es sei jetzt

$$(1.)\quad f'(x) = g(x) \,.\, h(x),$$

wobei die stetige Function $h(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ zunächst *beständig positiv* sein möge. Ferner erreiche die in diesem Intervalle stetige Function $g(x)$ ihren *kleinsten* Werth $K$ für $x = x_1$ und ihren grössten Werth $G$ für $x = x_2$, wobei $x_1$ und $x_2$ noch zwischen den Grenzen $a$ und $b$ liegen oder mit diesen Grenzen zusammenfallen sollen; es sei also

$$(2.)\quad g(x_1) = K \quad \text{und} \quad g(x_2) = G,$$

dann wird

$$(3.)\quad K \leqq g(x) \leqq G,$$

und deshalb auch

$$(4.)\quad K \,.\, h(x)dx \leqq g(x) \,.\, h(x)dx = f'(x)dx \leqq G \,.\, h(x)dx;$$

folglich wird nach Satz 2 in § 48

$$(5.)\qquad K\int_a^b h(x)dx < \int_a^b g(x)\,.\,h(x)dx < G\int_a^b h(x)dx.$$

Erklärt man also die Grösse $M$ durch die Gleichung

$$(6.)\qquad \int_a^b f'(x)dx = \int_a^b g(x)\,.\,h(x)dx = M\int_a^b h(x)dx,$$

so folgt aus Gleichung (5.)

$$(7.)\qquad K = g(x_1) \leqq M \leqq G = g(x_2).$$

Nach einem bekannten Satze über stetige Functionen muss es daher zwischen $x_1$ und $x_2$ einen Werth von $x$ geben — er heisse $\xi$ —, für welchen

$$(8.)\qquad M = g(\xi)$$

wird. Da $\xi$ zwischen $x_1$ und $x_2$ liegt, so muss $\xi$ auch zwischen $a$ und $b$ liegen; es ist also

$$(9.)\qquad a \leqq \xi \leqq b.$$

Erklärt man also eine Grösse $\Theta$ durch die Gleichung

$$(10.)\qquad \Theta = \frac{\xi - a}{b - a},$$

so liegt $\Theta$ zwischen 0 und 1, und man erhält

$$(11.)\qquad \xi = a + \Theta(b - a),\quad M = g[a + \Theta(b - a)].$$

Deshalb geht Gleichung (6.) über in

$$(12.)\qquad \int_a^b g(x)\,.\,h(x)dx = g[a + \Theta(b - a)]\int_a^b h(x)dx.$$

Der Satz, welcher in dieser Gleichung enthalten ist, heisst „*der erste Mittelwerthsatz*“*) und bleibt auch dann noch richtig, wenn $h(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ *beständig negativ* ist. In diesem Falle kehren sich beim Beweise nur einige Ungleichheitszeichen um. Es genügt also für die Gültigkeit des in Gleichung (12.) enthaltenen Satzes die Voraussetzung, dass $h(x)$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ dass Vorzeichen nicht wechselt.

---

*) Der *zweite* Mittelwerthsatz möge hier übergangen werden.

. Aus Gleichung (12.) folgen noch unmittelbar die Formeln

$$(13.)\qquad \int_0^x g(x)\,.\,h(x)dx = g(\Theta x)\int_0^x h(x)dx,$$

$$(14.)\qquad \int_a^{a+c} g(x)\,.\,h(x)dx = g(a+\Theta c)\int_a^{a+c} h(x)dx.$$

Setzt man

$$h(x) = 1, \quad \text{also} \int_a^b h(x)dx = \int_a^b dx = b - a,$$

so geht Gleichung (12.) über in

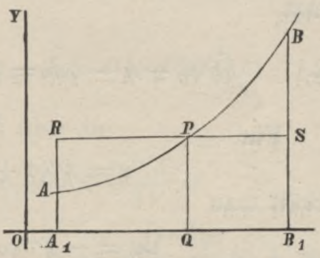
$$(15.)\qquad \int_a^b g(x)dx = (b-a)g[a + \Theta(b-a)],$$

oder

$$(15a.)\qquad \int_a^b f'(x)dx = (b-a)f'[a + \Theta(b-a)].$$

Für diesen besonderen Fall des ersten Mittelwerthsatzes ergiebt sich unmittelbar die folgende geometrische Deutung. Der Gleichung $y = f'(x)$ entspreche die Curve $AB$, dann ist der Flächeninhalt der ebenen Figur

Fig. 101.




$$(16.)\qquad A_1ABB_1 = \int_a^b f'(x)dx.$$

Da nun der Curvenbogen $AB$ stetig ist, so giebt es zwischen $A$ und $B$ *mindestens einen* Punkt $P$, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die Gerade $RS$, welche durch $P$ zur $X$-Axe parallel gezogen ist, ein Rechteck $A_1RSB_1$ bestimmt, welches mit $A_1ABB_1$ gleichen Flächeninhalt besitzt. Macht man nämlich

$$OQ = a + \Theta(b-a),$$

so wird in diesem Rechteck

$$A_1B_1 = b - a, \quad QP = f'[a + \Theta(b - a)],$$

also

$$(17.)\quad A_1ABB_1 = \int_a^b f'(x)dx = A_1RSB_1 = (b-a)f'[a + \Theta(b-a)].$$

## § 50.

## Neuer Beweis des *Taylor*'schen Lehrsatzes.

Aus den Sätzen, welche in den vorhergehenden Paragraphen hergeleitet worden sind, ergiebt sich ein äusserst einfacher Beweis des *Taylor*'schen Lehrsatzes.

Die Function $f(x)$ sei mit ihren $n+1$ ersten Ableitungen stetig für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $a+h$, dann findet man durch partielle Integration, nämlich nach der Formel

$$(1.)\quad \int u dv = uv - \int v du,$$

indem man

$$u = f'(a + h - t), \quad dv = dt,$$

also

$$du = -f''(a + h - t)dt, \quad v = t$$

setzt,

$$(2.)\quad \int_0^t f'(a + h - t)dt = tf'(a + h - t) + \int_0^t f''(a + h - t)t\,dt.$$

Für

$$u = f''(a + h - t), \quad dv = tdt$$

erhält man

$$du = -f'''(a + h - t)dt, \quad v = \frac{t^2}{2!},$$

$$(3.)\quad \int_0^t f''(a+h-t)tdt = \frac{t^2}{2!}f''(a+h-t) + \int_0^t f'''(a+h-t)\frac{t^2}{2!}dt.$$

Wenn man in dieser Weise fortfährt, findet man die Gleichungen

$$(4.)\quad \int_0^t f'''(a+h-t)\frac{t^2}{2!}dt = \frac{t^3}{3!}f'''(a+h-t) + \int_0^t f^{(4)}(a+h-t)\frac{t^3}{3!}dt,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(5.)\quad \int_0^t f^{(n)}(a+h-t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(a+h-t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a+h-t)\frac{t^n}{n!}dt.$$

Durch Addition der Gleichungen (2.) bis (5.) ergiebt sich daher

$$(6.)\quad \int_0^t f'(a+h-t)\,dt = \frac{t}{1!}f'(a+h-t) + \frac{t^2}{2!}f''(a+h-t) + \frac{t^3}{3!}f'''(a+h-t) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(a+h-t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a+h-t)\frac{t^n}{n!}dt.$$

Beachtet man, dass

$$(7.)\quad \int_0^t f'(a+h-t)dt = -f(a+h-t) + f(a+h)$$

ist, so geht Gleichung (6.) für $t = h$ über in

$$(8.)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R,$$

wobei

$$(9.)\quad R = \int_0^h f^{(n+1)}(a+h-t)\frac{t^n}{n!}dt$$

ist. Nach dem Mittelwerthsatz (Formel Nr. 141a der Tabelle) ist daher, wenn man $1-\Theta$ mit $\Theta_1$ bezeichnet,

$$(10.)\quad R = f^{(n+1)}(a + h - \Theta h)\int_0^h \frac{t^n dt}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Da $\Theta$ zwischen 0 und 1 liegt, muss in diesem Ausdrucke auch $\Theta_1$ zwischen 0 und 1 liegen. Setzt man zum Schlusse noch $a = x$ und schreibt $\Theta$ statt $\Theta_1$, so erhält Gleichung (8.) die Form

$$(11.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R,$$

wo

$$(12.)\quad R = \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

ist. Dieses Resultat stimmt genau mit D.-R., Formel Nr. 49 der Tabelle überein.

## § 51.
## Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 143.)

Die Glieder $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ der unendlichen Reihe

$$(1.)\quad f'(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

seien Functionen von $x$, welche in dem Intervalle von $a$ bis $b$ *stetig* sind. Lässt sich dann eine hinreichend grosse Zahl $m$ so bestimmen, dass für $n \geqq m$ der absolute Betrag des Unterschiedes $R_n$ zwischen der Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1}$$

der ersten $n$ Glieder und der bestimmten, endlichen Grenze $f'(x)$ stets kleiner bleibt als eine vorgeschriebene, beliebig kleine Grösse $\varepsilon$, welchen Werth $x$ auch in dem Intervalle von $a$ bis $b$ haben mag, so heisst die Reihe *„gleichmässig convergent"*. Da hierbei $R_n$ eine Function von $x$ ist, so möge diese Grösse bei der folgenden Untersuchung mit $R_n(x)$ bezeichnet werden. Demgemäss sei

$$(2.)\qquad R_n(x) = f'(x) - (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}),$$

oder

$$(2a.)\qquad f'(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + R_n(x).$$

Daraus folgt

$$(3.)\quad \int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \cdots + \int_a^b u_{n-1} dx + \int_a^b R_n(x) dx.$$

Da sich aus Gleichung (2.) ergiebt, dass auch $R_n(x)$ für die betrachteten Werthe von $x$ eine stetige Function ist, so kann man für die Berechnung von $\int_a^b R_n(x) dx$ den in Formel Nr. 142 der Tabelle ausgesprochenen Mittelwerthsatz anwenden, nach welchem

$$(4.)\qquad \int_a^b R_n(x) dx = (b-a) R_n[a + \Theta(b-a)]$$

ist. Nach Voraussetzung wird aber $R_n(x)$ für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $b$ beliebig klein, wenn $n$ (gleich oder) grösser als $m$ ist, folglich wird auch $R_n[a + \Theta(b-a)]$, und da $b-a$ eine endliche Grösse ist, auch $\int_a^b R_n(x)\,dx$ beliebig klein. Man findet also $\int_a^b f'(x) dx$, indem man die einzelnen Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots$ integrirt, denn der Rest $\int_a^b R_n(x)\,dx$, welchen man bei Berücksichtigung von $n$ Gliedern vernachlässigt, wird für hinreichend grosse Werthe von $n$ beliebig klein. Dadurch erhält man den folgenden

**Satz.** *Sind die Functionen $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $b$ stetig, und ist die Reihe*

$$f'(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

*in dem betrachteten Intervalle gleichmässig convergent, so ist auch die Reihe*

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \cdots$$

*in diesem Intervalle gleichmässig convergent, und ihre Summe ist gleich* $\int_a^b f'(x)dx$.

Dabei darf man noch die obere Grenze mit $x$ bezeichnen, so dass sich ergiebt

$$(5.)\qquad \int_a^x f'(x)dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \cdots.$$

Dieser Satz hat schon in der Differential-Rechnung bei der Methode der unbestimmten Coefficienten Anwendung gefunden (D.-R., § 41).

Damals setzte man

$$(6.)\qquad f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + R,$$

also

$$(7.)\qquad f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots + nA_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx}.$$

Wie die Gleichung (7.) aus Gleichung (6.) hervorgeht durch *Differentiation* der einzelnen Glieder, so findet man umgekehrt die Gleichung (6.) aus Gleichung (7.) durch *Integration* der einzelnen Glieder zwischen den Grenzen 0 und $x$, und zwar erhält man dadurch $f(x) - f(0)$, woraus sich für $A$ der Werth $f(0)$ ergiebt. Dabei erhielt man den Satz: *Ist für hinreichend grosse Werthe von n die Grösse* $\frac{dR}{dx}$ *beliebig klein, so gilt dasselbe auch von R.*

Man erkennt, dass dieser Satz nur ein besonderer Fall des eben bewiesenen Satzes ist, denn, während es sich damals nur um Potenzreihen von $x$ handelte, sind jetzt $u_0, u_1, u_2, \ldots$ beliebige stetige Functionen von $x$.

Die Beispiele, welche bei der Methode der unbestimmten Coefficienten in der Differential-Rechnung gegeben wurden, nämlich die Entwickelung von

(8.) $\quad \mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$ für $-1 < x \leqq +1$,

(9.) $\quad \operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$ für $-1 \leqq x \leqq +1$,

(10.) $\quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

für $-1 \leqq x \leqq +1$

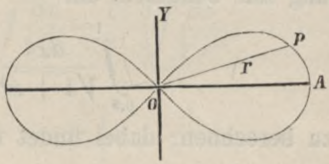
nach steigenden Potenzen von $x$, eignen sich daher auch als Beispiele für den vorliegenden Satz.

**Aufgabe 1.** Man soll die Länge des Bogens bei der *Lemniscate*

(11.) $\quad r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$

berechnen (Fig. 102).

Fig. 102.




**Auflösung.** Aus Gleichung (11.) folgt

$$rdr = -a^2 \sin(2\varphi) d\varphi,$$

oder

(12.)
$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r}{a^2 \sin(2\varphi)},$$

(13.)
$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 1 + \frac{r^4}{a^4 \sin^2(2\varphi)} = 1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4} = \frac{a^4}{a^4 - r^4},$$

(14.)
$$ds = \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}, \quad s = a^2 \int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Setzt man

$$r = at, \quad \text{also} \quad dr = adt,$$

so wird

(15.)
$$s = a \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Da $t^2 \leqq 1$ ist, so wird nach dem binomischen Lehrsatze

(16.)
$$\frac{1}{\sqrt{1 - t^4}} = (1 - t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^{12} + \cdots,$$

also

$$(17.)\quad s = a\left(\frac{t}{1}+\frac{1}{2}\frac{t^5}{5}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{t^9}{9}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{t^{13}}{13}+\cdots\right)$$

$$= a\left(\frac{r}{a}+\frac{1}{2}\frac{r^5}{5a^5}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{r^9}{9a^9}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{r^{13}}{13a^{13}}+\cdots\right).$$

**Aufgabe 2.** $\int\limits_{0,5}^{4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = ?$

**Auflösung.** Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(18.)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^6-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^9+-\cdots,$$

so lange $-1 < x < +1$ ist. Deshalb kann man diese Entwickelung nur benutzen, um

$$\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\gamma=0}\int\limits_{0,5}^{1-\gamma}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

zu berechnen; dabei findet man aus Gleichung (18.)

$$(19.)\quad \int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} =$$

$$\lim_{\gamma=0}\left[\frac{x}{1}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^7}{7}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^{10}}{10}+-\cdots\right]_{0,5}^{1-\gamma}.$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch für $x = 1$ convergent bleibt, so erhält man

$$(20.)\quad \int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 1-\frac{1}{2\,.\,4}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,7}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,10}+-\cdots$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,4\,.\,2^4}-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,7\,.\,2^7}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,10\,.\,2^{10}}-+\cdots.$$

Die Entwickelung in Gleichung (18.) gilt nicht mehr, wenn $x > 1$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatze wird aber, wenn $|\,b\,| > |\,a\,|$ ist,

$$(21.)\quad (a+b)^m = b^m+\binom{m}{1}ab^{m-1}+\binom{m}{2}a^2b^{m-2}+\binom{m}{3}a^3b^{m-3}+\cdots.$$

Setzt man also in dem Falle, wo $x > 1$ ist,

$$a = 1, \quad b = x^3, \tag{22.}$$

so wird die Bedingung, dass $|b| > |a|$ sein soll, erfüllt, und man erhält

$$(1 + x^3)^m = x^{3m} + \binom{m}{1} x^{3m-3} + \binom{m}{2} x^{3m-6} + \binom{m}{3} x^{3m-9} + \cdots, \tag{23.}$$

also für $m = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^9}} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{1}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{1}{\sqrt{x^{21}}} + - \cdots. \tag{24.}$$

Dies giebt

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = \lim_{\delta=0}\Big[\int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2}\int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^9}} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{21}}} + - \cdots\Big], \tag{25.}$$

oder

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = \lim_{\delta=0}\Big[-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{2}{7\sqrt{x^7}} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{2}{13\sqrt{x^{13}}} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{2}{19\sqrt{x^{19}}} - + \cdots\Big]_{1+\delta}^{4}. \tag{26.}$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch für $x = 1$ convergent bleibt, so erhält man

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = -\Big(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{7 \,.\, 4^3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{1}{13 \,.\, 4^6} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{1}{19 \,.\, 4^9} + - \cdots\Big) + 2\Big(1 - \frac{1}{2 \,.\, 7} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 13} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 19} + - \cdots\Big). \tag{27.}$$

Durch Addition der Gleichungen (20.) und (27.) erhält man schliesslich das gesuchte Integral

$$(28.)\qquad \int\limits_{0,5}^{4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} + \int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

## § 52.

## Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 144 bis 151.)

Das in dem vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren kann man auch zur Berechnung der *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung* benutzen. Das elliptische Normalintegral *erster* Gattung, auf welches sehr viele Aufgaben der Geometrie, Physik und Mechanik führen, hat die Form

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei $k^2 < 1$ und $x \leqq 1$ sein mögen. Dann erhält man zunächst nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}k^6x^6 + \cdots,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(2.)\qquad c_1 = \frac{1}{2},\quad c_2 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4},\quad \ldots c_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)}$$

setzt,

$$(3.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + c_1k^2x^2 + c_2k^4x^4 + c_3k^6x^6 + \cdots,$$

$$(4.)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + c_2k^4\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots.$$

Da diese Reihe zwischen den Grenzen 0 und $x$ *gleichmässig convergent* ist, so wird

$$(5.)\quad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2\int\limits_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ c_2k^4\int\limits_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6\int\limits_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

$$= \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} \int\limits_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 72 der Tabelle

$$(6.)\quad \int\limits_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_n \arcsin x - G_n(x)\,.\,\sqrt{1-x^2},$$

wobei

$$G_1(x) = \frac{x}{2} = c_1x,$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3\,.\,x}{4\,.\,2} = c_2\left(\frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right),$$

$$G_3(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{6\,.\,4} + \frac{5\,.\,3\,.\,x}{6\,.\,4\,.\,2} = c_3\left(\frac{1}{c_2}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

allgemein

$$(7.)\quad G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\,.\,x}{(2n)(2n-2)\ldots 4\,.\,2}$$

$$= c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}}\frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\right).$$

Deshalb erhält man

$$(8.)\quad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right)\arcsin x$$

$$- \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x).$$

Von besonderem Interesse ist der Werth dieses Integrals, den man für $x = 1$ erhält und mit $K$ bezeichnet. Es wird nämlich

$$(9.)\quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{\beta=0} \int_0^{1-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right),$$

oder

$$(10.)\quad K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Noch häufiger wird man durch Aufgaben aus der Geometrie, Physik und Mechanik auf elliptische Integrale *zweiter* Gattung geführt, die man auf die Normalform

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

bringen kann. Hier wird nach dem binomischen Lehrsatze

$$(11.)\quad \sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \frac{1}{2}k^2x^2 - \frac{1}{2\,.\,4}k^4x^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}k^6x^6 - \cdots$$
$$= 1 - c_1\frac{k^2x^2}{1} - c_2\frac{k^4x^4}{3} - c_3\frac{k^6x^6}{5} - \cdots,$$

oder

$$(12.)\quad \sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \frac{k^{2n}x^{2n}}{2n-1},$$

also

$$(13.)\quad \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1}\,\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da diese Reihe zwischen den Grenzen 0 und $x$ *gleichmässig convergent* ist, so erhält man

$$(14.)\quad \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1}\int_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

also nach Formel Nr. 72 der Tabelle, nämlich nach Gleichung (6.),

$$(15.)\qquad \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big(1-\sum_{n-1}^{n=\infty}\frac{c_n^2k^{2n}}{2n-1}\Big)\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_nk^{2n}}{2n-1}\,G_n(x).$$

Für $x=1$ ergiebt sich hieraus der Werth des Integrals, den man mit $E$ bezeichnet, nämlich

$$(15a.)\qquad E=\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\Big(1-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_nk^{2n}}{2n-1}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big(1-c_1{}^2k^2-\frac{1}{3}c_2{}^2k^4-\frac{1}{5}c_3{}^2k^6-\cdots\Big).$$

Auf ein solches Integral wird man z. B. bei der Rectification der Ellipse

$$(16.)\qquad b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

geführt (vgl. Aufgabe 2 in § 19). Aus Gleichung (16.) folgt nämlich

$$(17.)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\quad \Big(\frac{ds}{dx}\Big)^2=\frac{a^4-e^2x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

also

$$(18.)\qquad s=\frac{1}{a}\int_0^x\frac{dx\sqrt{a^4-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Setzt man jetzt

$$(19.)\qquad x=at,\quad e=ak,$$

so wird

$$(20.)\qquad s=a\int_0^t\frac{dt\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}},$$

wobei die Bedingungen

$$(21.)\qquad t\leqq 1 \quad\text{und}\quad k<1$$

wirklich erfüllt sind. Der Bogen $s$ wird also, vom Factor $a$ abgesehen, dem in Gleichung (15.) berechneten elliptischen

Normalintegral zweiter Gattung gleich, nur muss man die Integrations-Veränderliche $x$ mit $t = \frac{x}{a}$ vertauschen.

Die in den Gleichungen (8.), (10.), (15.) und (15a.) angegebenen Reihen convergiren nur langsam. Für die numerische Berechnung sind daher die folgenden Entwickelungen geeigneter. Es ist bekanntlich

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

also

$$\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

oder

$$\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha. \tag{22.}$$

Daraus folgt

$$\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{2\varphi i}\right]\cdot\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{-2\varphi i}\right]$$

$$= \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}\right)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\alpha\left(e^{2\varphi i} - 2 + e^{-2\varphi i}\right) = 1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi,$$

oder

$$1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi = \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{2\varphi i}\right]\cdot\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{-2\varphi i}\right]. \tag{23.}$$

Wenn $\alpha$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1$; ausserdem ist der absolute Betrag von

$$e^{\pm 2\varphi i} = \cos(2\varphi) \pm i\sin(2\varphi)$$

$\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi) = 1$; folglich kann man $\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{+2\varphi i}\right]^m$ und $\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{-2\varphi i}\right]^m$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und erhält, wenn man der Kürze wegen $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ mit $\varepsilon$ bezeichnet,

$$(1+\varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m = 1+\binom{m}{1}\varepsilon^2 e^{2\varphi i}+\binom{m}{2}\varepsilon^4 e^{4\varphi i}+\binom{m}{3}\varepsilon^6 e^{6\varphi i}+\cdots,$$

$$(1+\varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m = 1+\binom{m}{1}\varepsilon^2 e^{-2\varphi i}+\binom{m}{2}\varepsilon^4 e^{-4\varphi i}+\binom{m}{3}\varepsilon^6 e^{-6\varphi i}+\cdots.$$

Indem man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt und dabei die Regeln anwendet, welche (in D.-R., § 49 und 135, vergl. auch D.-R., Formel Nr. 75 der Tabelle) für die Multiplication zweier unbedingt convergenten Reihen

$$u_0+u_1+u_2+\cdots \quad \text{und} \quad v_0+v_1+v_2+\cdots$$

gegeben worden sind, so erhält man, weil

$$e^{\lambda\varphi i}+e^{-\lambda\varphi i} = 2\cos(\lambda\varphi)$$

ist, die Gleichung

$$(24.)\qquad (1+\varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m(1+\varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m =$$

$$1+\binom{m}{1}\varepsilon^2\,.\,2\cos(2\varphi)+\varepsilon^4\left[\binom{m}{2}2\cos(4\varphi)+\binom{m}{1}^2\right]$$

$$+\;\varepsilon^6\left[\binom{m}{3}2\cos(6\varphi)+\binom{m}{1}\binom{m}{2}2\cos(2\varphi)\right]$$

$$+\;\varepsilon^8\left[\binom{m}{4}2\cos(8\varphi)+\binom{m}{1}\binom{m}{3}2\cos(4\varphi)+\binom{m}{2}^2\right]$$

$$+\,\varepsilon^{10}\left[\binom{m}{5}2\cos(10\varphi)+\binom{m}{1}\binom{m}{4}2\cos(6\varphi)+\binom{m}{2}\binom{m}{3}2\cos(2\varphi)\right]$$

$$+\cdots,$$

oder, wenn man die Glieder vereinigt, welche mit $\cos(2\lambda\varphi)$ multiplicirt sind, und Gleichung (23.) beachtet,

$$(25.)\quad (1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^m = A_0+2A_1\cos(2\varphi)+2A_2\cos(4\varphi)$$
$$+\,2A_3\cos(6\varphi)+\cdots.$$

Dabei wird, wenn man $\binom{m}{0}=1$ setzt,

$$(26.)\ A_0 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1+\binom{m}{1}^2\varepsilon^4+\binom{m}{2}^2\varepsilon^8+\binom{m}{3}^2\varepsilon^{12}+\cdots\right]$$

$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}^2\varepsilon^{4n}.$$

(27.) $$A_1 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{1}\varepsilon^2 + \binom{m}{1}\binom{m}{2}\varepsilon^6 + \binom{m}{2}\binom{m}{3}\varepsilon^{10} + \cdots\right]$$
$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{n+1}\varepsilon^{2+4n},$$

(28.) $$A_2 = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{2}\varepsilon^4 + \binom{m}{1}\binom{m}{3}\varepsilon^8 + \binom{m}{2}\binom{m}{4}\varepsilon^{12} + \cdots\right]$$
$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{n+2}\varepsilon^{4+4n},$$

allgemein

(29.) $$A_\nu = \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\binom{m}{\nu}\varepsilon^{2\nu} + \binom{m}{1}\binom{m}{\nu+1}\varepsilon^{2\nu+4} + \binom{m}{2}\binom{m}{\nu+2}\varepsilon^{2\nu+8} + \cdots\right]$$
$$= \cos^{4m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{m}{n}\binom{m}{\nu+n}\varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Wenn $\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ hinreichend klein ist, so sind die Grössen $A$ durch stark convergente Reihen ausgedrückt.

Die durch Gleichung (25.) dargestellte Reihe ist *gleichmässig convergent*, so dass man $\int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi)^m d\varphi$ erhält, indem man die einzelnen Glieder der Reihe integrirt. Dies giebt

(30.) $$\int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi)^m d\varphi =$$
$$A_0\varphi + \frac{A_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{A_2}{2}\sin(4\varphi) + \frac{A_3}{3}\sin(6\varphi) + \cdots.$$

In dieser Formel sind auch die *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung* als besondere Fälle enthalten. Setzt man nämlich

(31.) $$x = \sin\varphi, \quad k = \sin\alpha,$$

also

(32.) $$dx = \cos\varphi d\varphi, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos\varphi,$$

so wird

$$(33.) \quad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$(34.) \quad \int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = E(k, \varphi).$$

Zur Entwickelung des elliptischen Normalintegrals *erster* Gattung $F(k, \varphi)$ hat man daher in den Gleichungen (24.) bis (30.) $m = -\frac{1}{2}$ zu setzen und erhält

$$(35.) \quad \binom{m}{1} = -\frac{1}{2} = -c_1, \binom{m}{2} = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} = +c_2, \ldots$$
$$\binom{m}{n} = \pm\frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots(2n)} = \pm c_n.$$

Setzt man in diesem Falle

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = -a_1, \quad A_2 = +a_2, \quad \ldots A_n = (-1)^n a_n,$$

so geht Gleichung (3.) über in

$$(36.) \quad F(k, \varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$
$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2}\sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3}\sin(6\varphi) + - \cdots,$$

wobei nach Gleichung (26.) bis (29.), wenn man $c_0 = 1$ setzt,

$$(37.) \quad a_0 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(1 + c_1{}^2\varepsilon^4 + c_2{}^2\varepsilon^8 + c_3{}^2\varepsilon^{12} + \cdots)$$
$$= (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n{}^2\varepsilon^{4n}$$

$$(38.) \quad a_1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(c_1\varepsilon^2 + c_1 c_2\,\varepsilon^6 + c_2 c_3\,\varepsilon^{10} + \cdots)$$
$$= (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1}\,\varepsilon^{2+4n},$$

$$(39.)\quad a_2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(c_2\varepsilon^4 + c_1c_3\varepsilon^8 + c_2c_4\varepsilon^{12}\cdots)$$

$$= (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+2}\varepsilon^{4+4n},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Allgemein ist

$$(40.)\qquad a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{\nu+n}\varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Man braucht aber nur $a_0$ und $a_1$ durch diese Reihen zu berechnen, denn aus der Gleichung

$$(41.)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = a_0 - 2a_1\cos(2\varphi) + 2a_2\cos(4\varphi)$$
$$- 2a_3\cos(6\varphi) + - \cdots$$

folgt durch Differentiation

$$(42.)\quad \frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^3}} = 4a_1\sin(2\varphi) - 8a_2\sin(4\varphi)$$
$$+ 12a_3\sin(6\varphi) - + \cdots.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$(43.)\qquad \frac{2(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}{\sin^2\alpha} = \frac{2-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos(2\varphi)}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \cos(2\varphi)$$

multiplicirt und der Kürze wegen

$$(44.)\qquad \frac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \zeta$$

setzt, so erhält man, weil $2\sin(2\lambda\varphi)\cos(2\varphi)$ bekanntlich gleich $\sin(2\lambda+2)\varphi + \sin(2\lambda-2)\varphi$ ist,

$$(45.)\quad \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -(-4a_1\zeta + 4a_2)\sin(2\varphi)$$
$$+ (2a_1 - 8a_2\zeta + 6a_3)\sin(4\varphi)$$
$$- (4a_2 - 12a_3\zeta + 8a_4)\sin(6\varphi)$$
$$+ (6a_3 - 16a_4\zeta + 10a_5)\sin(8\varphi)$$
$$- + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Andererseits ergiebt sich, indem man Gleichung (41.) mit $\sin(2\varphi)$ multiplicirt und die bekannte Formel

$$2\sin(2\varphi)\cos(2\lambda\varphi) = \sin(2\lambda+2)\varphi - \sin(2\lambda-2)\varphi$$

anwendet,

$$(46.)\quad \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -(a_2-a_0)\sin(2\varphi)+(a_3-a_1)\sin(4\varphi)$$
$$-(a_4-a_2)\sin(6\varphi)+(a_5-a_3)\sin(8\varphi)-+\cdots.$$

Aus der Vergleichung der Coefficienten in diesen beiden Entwickelungen von $\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$ findet man

$$\begin{aligned}
a_2-a_0 &= \phantom{2a_1}-\phantom{1}4a_1\zeta+\phantom{1}4a_2,\\
a_3-a_1 &= 2a_1-\phantom{1}8a_2\zeta+\phantom{1}6a_3,\\
a_4-a_2 &= 4a_2-12a_3\zeta+\phantom{1}8a_4,\\
a_5-a_3 &= 6a_3-16a_4\zeta+10a_5,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

folglich wird

$$(47.)\quad \begin{cases}
3a_2 = \phantom{1}4a_1\zeta - \phantom{3}a_0,\\
5a_3 = \phantom{1}8a_2\zeta - 3a_1,\\
7a_4 = 12a_3\zeta - 5a_2,\\
9a_5 = 16a_4\zeta - 7a_3,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\,;
\end{cases}$$

allgemein erhält man also für $n \geqq 2$

$$(48.)\quad (2n-1)a_n = 4(n-1)a_{n-1}\zeta - (2n-3)a_{n-2}.$$

Zur Entwickelung des *elliptischen Normalintegrals zweiter Gattung* muss man, wie aus Gleichung (34.) hervorgeht, in den Gleichungen (24.) bis (30.) $m = +\frac{1}{2}$ setzen und erhält

$$(49.)\quad \binom{m}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{m}{2} = -\frac{1}{2\,.\,4} = -\frac{c_1}{4},\ \binom{m}{3} = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} = +\frac{c_2}{6},\cdots$$

allgemein

$$(50.)\quad \binom{m}{n} = (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{2n}.$$

Setzt man in diesem Falle

(51.) $A_0 = b_0,\ A_1 = +b_1,\ A_2 = -b_2,\ A_3 = +b_3, \ldots A_n = (-1)^{n-1} b_n,$

so gehen die Gleichungen (25.) bis (30.) über in

$$(52.)\quad \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = b_0 + 2b_1\cos(2\varphi) - 2b_2\cos(4\varphi) \\ + 2b_3\cos(6\varphi) - + \cdots,$$

$$(53.)\quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi \\ = b_0\varphi + \frac{b_1}{1}\sin(2\varphi) - \frac{b_2}{2}\sin(4\varphi) + \frac{b_3}{3}\sin(6\varphi) - + \cdots.$$

Dabei ist nach Gleichung (26.)

$$(54.)\quad b_0 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^4}{2^2} + \frac{c_1^{\,2}}{4^2}\varepsilon^8 + \frac{c_2^{\,2}}{6^2}\varepsilon^{12} + \cdots\right) \\ = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n^2 \varepsilon^{4n}}{(2n+2)^2}\right).$$

Man kann aber die Grösse $b_0$ auch durch $a_0$ und $a_1$ ausdrücken. Es ist nämlich nach den Gleichungen (37.) und (38.)

$$(37\text{a.})\quad a_0 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 \varepsilon^{4n} = (1+\varepsilon^2)\left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}^2 \varepsilon^{4n}\right),$$

$$(38\text{a.})\quad a_1 = (1+\varepsilon^2)\,\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1}\,\varepsilon^{4n};$$

ferner ist

$$(55.)\quad k^2 = \sin^2\alpha = \frac{4\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left[1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2} = \frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2},$$

$$(56.)\quad 2 - k^2 = \frac{2(1+\varepsilon^4)}{(1+\varepsilon^2)^2}.$$

Daraus folgt

$$(57.)\quad (2-k^2)a_0 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} (c_{n+1}^2 + c_n^2)\varepsilon^{4n}\right],$$

$$(58.)\quad k^2 a_1 = \frac{2\varepsilon^4}{1+\varepsilon^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} 2c_n c_{n+1}\varepsilon^{4n},$$

also

$$(59.)\quad (2-k^2)a_0 - k^2 a_1 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{n=\infty} (c_n - c_{n+1})^2 \varepsilon^{4n}\right].$$

Nun ist aber

$$(60.)\qquad c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}c_n, \text{ also } c_n - c_{n+1} = \frac{c_n}{2n+2};$$

deshalb geht Gleichung (59.) über in

$$(61.)\ (2-k^2)a_0 - k^2a_1 = \frac{2}{1+\varepsilon^2}\left[1 + \varepsilon^4\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n}{(2n+2)^2}\varepsilon^{4n}\right] = 2b_0.$$

Auch die anderen Coefficienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kann man sehr einfach durch die Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ausdrücken. Durch Differentiation der Gleichung (52.) findet man nämlich

$$(62.)\qquad -\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = -4b_1\sin(2\varphi) + 8b_2\sin(4\varphi)$$
$$-12b_3\sin(6\varphi) + - \cdots;$$

ausserdem folgt aus Gleichung (46.)

$$(63.)\ -\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}} = \frac{k^2}{2}\left[(a_2-a_0)\sin(2\varphi) - (a_3-a_1)\sin(4\varphi)\right.$$
$$\left. + (a_4-a_2)\sin(6\varphi) - + \cdots\right],$$

folglich erhält man

$$8b_1 = k^2(a_0-a_2),\quad 16b_2 = k^2(a_1-a_3),\quad 24b_3 = k^2(a_2-a_4), \ldots,$$

allgemein

$$(64.)\qquad 8nb_n = k^2(a_{n-1}-a_{n+1}).$$

Setzt man also

$$a_0 - a_2 = 2^2 \,.\, B_1,\quad a_1 - a_3 = 4^2 \,.\, B_2,\quad a_2 - a_4 = 6^2 \,.\, B_3, \ldots,$$

allgemein

$$(65.)\qquad a_{n-1} - a_{n+1} = (2n)^2 B_n,$$

so wird

$$(66.)\ b_1 = \frac{k^2}{2}\cdot B_1,\ \frac{b_2}{2} = \frac{k^2}{2}\cdot B_2,\ \frac{b_3}{3} = \frac{k^2}{2}\cdot B_3,\ \cdots \frac{b_n}{n} = \frac{k^2}{2}\cdot B_n,$$

folglich geht Gleichung (53.) über in

$$(67.)\ E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$
$$= b_0\varphi + \frac{k^2}{2}\left[B_1\sin(2\varphi) - B_2\sin(4\varphi) + B_3\sin(6\varphi) - + \cdots\right].$$

Von besonderem Interesse sind die Werthe der beiden Integrale $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, die man bezw. mit $K$ und $E$ bezeichnet. Nach den Gleichungen (36.), (53.) und (61 ) wird

$$(68.)\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^3\varphi}} = \frac{a_0 \pi}{2},$$

$$(69.)\qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = \frac{b_0 \pi}{2} = \frac{\pi}{4}[(2 - k^2)a_0 - k^2 a_1].$$

**Beispiel.**

Die angeführten Reihen convergiren um so schlechter, je mehr sich $k = \sin\alpha$ dem Werthe 1 nähert. Wenn also in dem folgenden Beispiele

$$(70.)\qquad k = 0{,}8, \quad \varepsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k} = 0{,}5$$

gesetzt wird, so möge hervorgehoben werden, dass die Rechnung für kleinere Werthe von $k$ noch einfacher wird. Hier erhält man

$$\begin{array}{rlrl}
1 + \varepsilon^2 &= 1{,}25 & \varepsilon^{12} &= 0{,}0002\,4414 \\
(1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2 &= 0{,}3125 & \varepsilon^{16} &= 0{,}0000\,1526 \\
\varepsilon^4 &= 0{,}0625 & \varepsilon^{20} &= 0{,}0000\,0095 \\
\varepsilon^8 &= 0{,}0039\,0625 & \varepsilon^{24} &= 0{,}0000\,0006;
\end{array}$$

ferner ist

$$\begin{array}{rlrl}
c_1^2 &= 0{,}25 & c_1c_2 &= 0{,}1875 \\
c_2^2 &= 0{,}1406\,25 & c_2c_3 &= 0{,}1171\,875 \\
c_3^2 &= 0{,}0976\,5625 & c_3c_4 &= 0{,}0854\,4922 \\
c_4^2 &= 0{,}0747\,6807 & c_4c_5 &= 0{,}0672\,9126 \\
c_5^2 &= 0{,}0605\,6214 & c_5c_6 &= 0{,}0555\,1529 \\
 & & c_6c_7 &= 0{,}0472\,5409.
\end{array}$$

Daraus folgt

$$(71.)\qquad a_0 = (1 + \varepsilon^2)(1 + c_1^2\varepsilon^4 + c_2^2\varepsilon^8 + \cdots) = 1{,}2702\,4920,$$

$$(72.)\qquad a_1 = (1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2(c_1 + c_1c_2\varepsilon^4 + c_2c_3\varepsilon^8 + \cdots) = 0{,}1600\,6202.$$

Aus den Gleichungen (47.), nämlich aus den Formeln

(73.) $3a_2 = 4a_1\zeta - a_0, \quad 5a_3 = 8a_2\zeta - 3a_1, \quad 7a_4 = 12a_3\zeta - 5a_2, \ldots,$

wobei

(74.) $$\zeta = \frac{2-k^2}{k^2} = \frac{2-0{,}64}{0{,}64} = \frac{17}{8}$$

ist, findet man

(75.) $$\begin{cases} a_2 = 0{,}0300\,9265 & a_8 = 0{,}0000\,0386 \\ a_3 = 0{,}0062\,7780 & a_9 = 0{,}0000\,0091 \\ a_4 = 0{,}0013\,7439 & a_{10} = 0{,}0000\,0021 \\ a_5 = 0{,}0003\,0941 & a_{11} = 0{,}0000\,0005 \\ a_6 = 0{,}0000\,7093 & a_{12} = 0{,}0000\,0001. \\ a_7 = 0{,}0000\,1647 & \end{cases}$$

Es darf nicht verschwiegen werden, dass man diese Werthe aus den Gleichungen (47.) nur dann findet, wenn man noch einige Decimalstellen mehr berücksichtigt. Bei derartigen recurrirenden Formeln werden nämlich die Fehler, welche durch die Vernachlässigung der folgenden Decimalstellen entstehen, im Allgemeinen bei jedem späteren Gliede grösser. Wenn z. B. die letzte Decimalstelle in $a_0$ und $a_1$ auch nur um 2 Einheiten unsicher ist, so wird in der Gleichung

$$3a_2 = 4a_1\zeta - a_0$$

$a_1$ (und deshalb auch der Fehler von $a_1$) mit $4\zeta = 8{,}5$ multiplicirt, so dass $3a_2$ um 19 Einheiten, $a_2$ selbst um $\frac{19}{3}$ Einheiten in der letzten Decimalstelle unsicher ist. Die Grösse $a_3$ wird um etwa 23, $a_4$ um etwa 172 Einheiten unsicher. So steigert sich die Unsicherheit mit jedem späteren Gliede ausserordentlich schnell, weshalb die vorstehenden Resultate nach Gleichung (40.), nämlich nach der Formel

$$a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{\nu+n}\varepsilon^{2\nu+4n}$$

berechnet sind. Sodann findet man aus den Gleichungen

$$2b_0 = (2-k^2)a_0 - k^2 a_1 = 1{,}36 \,.\, a_0 - 0{,}64 a_1,$$

$$4B_1 = a_0 - a_2, \quad 16B_2 = a_1 - a_3, \quad 36B_3 = a_2 - a_4, \ldots$$

$$(76.)\quad \begin{cases} b_0 = 0{,}8125\,4961 & B_5 = 0{,}0000\,1303 \\ B_1 = 0{,}3100\,3914 & B_6 = 0{,}0000\,0203 \\ B_2 = 0{,}0096\,1151 & B_7 = 0{,}0000\,0034 \\ B_3 = 0{,}0007\,9773 & B_8 = 0{,}0000\,0006 \\ B_4 = 0{,}0000\,9326 & B_9 = 0{,}0000\,0001. \end{cases}$$

Daraus folgt dann

$$(77.)\qquad K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0\pi}{2} = 1{,}9953\,0278,$$

$$(78.)\qquad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_0\pi}{2} = 1{,}2763\,4994.$$

Soll z. B. bei der Rectification der Ellipse mit den Halbaxen

$$a = 10, \quad b = 6$$

der Quadrant $q$ berechnet werden, so erhält man $e = 8$, also $k = \frac{e}{a} = 0{,}8$ und nach Gleichung (20.)

$$(79.)\qquad q = a\int_0^1 \frac{dt\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} = aE\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 12{,}763\,4994.$$

Zur Prüfung dieses Resultates beachte man, dass der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser $a$ gleich 15,7079 633, und der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser $b$ gleich 9,4247 780 ist.

## § 53.
## Differentiation der Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 152—154.)

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle war ein bestimmtes Integral durch die Gleichung

$$(1.)\qquad F = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

erklärt worden. Man kann daher $F$ als eine Function von $a$ und $b$ betrachten und erhält

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -f'(a), \quad \frac{\partial F}{\partial b} = f'(b), \tag{2.}$$

also

$$dF = d\int_a^b f'(x)dx = -f'(a)da + f'(b)db. \tag{3.}$$

Ist die Function unter dem Integralzeichen ausser von $x$ noch abhängig von einem variablen Parameter $t$, ist also

$$f'(x) = \varphi(x, t), \quad F = \int_a^b \varphi(x, t)dx, \tag{4.}$$

so ist auch das bestimmte Integral $F$ eine Function von $t$. Die Integrationsgrenzen $a$ und $b$ seien zunächst *unabhängig* von $t$, dann wird $F$ übergehen in $F + \Delta F$, wenn $t$ um $\Delta t$ wächst, wobei

$$F + \Delta F = \int_a^b \varphi(x, t + \Delta t)dx \tag{5.}$$

ist. Aus den Gleichungen (4.) und (5.) folgt daher

$$\Delta F = \int_a^b \varphi(x, t + \Delta t)dx - \int_a^b \varphi(x, t)dx, \tag{6.}$$

$$= \int_a^b [\varphi(x, t + \Delta t) - \varphi(x, t)]dx,$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\varphi(x, t + \Delta t) - \varphi(x, t)}{\Delta t} dx; \tag{7.}$$

folglich erhält man, wenn $\Delta t$ verschwindend klein wird,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \varphi(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dx. \tag{8.}$$

Sind die Integrationsgrenzen $a$ und $b$ gleichfalls Functionen von $t$, so wird nach D.-R., Formel Nr. 136 der Tabelle

20*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{9.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (4.)

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x, t)dx \\ &= -\varphi(a, t)\cdot\frac{da}{dt} + \varphi(b, t)\cdot\frac{db}{dt} + \int_a^b \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{10.}$$

Ist $F$ das *unbestimmte* Integral einer Differential-Function $\varphi(x, t)dx$, welche noch einen variablen Parameter $t$ enthält, so kann die Integrations-Constante $C$ gleichfalls noch von dem Parameter $t$ abhängig sein, so dass man erhält

$$F = \int \varphi(x, t)dx + \psi(t), \tag{11.}$$

wobei $\psi(t)$ eine ganz beliebige Function von $t$ ist. Wächst $t$ um $\Delta t$, so geht $F$ über in

$$F + \Delta F = \int \varphi(x, t + \Delta t)dx + \psi(t + \Delta t); \tag{12.}$$

folglich wird

$$\Delta F = \int [\varphi(x, t + \Delta t) - \varphi(x, t)]dx + \psi(t + \Delta t) - \psi(t), \tag{13.}$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \int \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}dx + \psi'(t). \tag{14.}$$

Da $\psi(t)$ eine ganz beliebige Function von $t$ ist, so gilt dasselbe von $\psi'(t)$, d. h. $\psi'(t)$ spielt auch in Gleichung (14.) die Rolle einer beliebigen Integrations-Constanten, so dass in Gleichung (14.) der Satz ausgesprochen ist: *Ein unbestimmtes Integral wird nach einem variablen Parameter differentiirt, indem man die Function unter dem Integralzeichen nach diesem Parameter differentiirt.*

## § 54.
## Berechnung der Werthe von einigen bestimmten Integralen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 155, 155a und 156.)

Zur Berechnung eines *bestimmten* Integrals ist es nicht immer erforderlich, vorher das *unbestimmte* Integral zu ermitteln; es sind dabei vielmehr häufig Vereinfachungen möglich, wie man aus den folgenden Beispielen ersehen kann.

Nach Formel Nr. 65 der Tabelle ist

$$\text{(1.)} \quad \int \cos^{2n}x dx = \sin x \left[\frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\cos^{2n-3}x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\cos x\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}x;$$

da nun

$$\text{(2.)} \qquad \sin 0 = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ist, so wird

$$\text{(3.)} \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\,\frac{\pi}{2}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich aus Formel Nr. 67 der Tabelle, nämlich aus

$$\text{(4.)} \quad \int \sin^{2n}x dx = -\cos x \left[\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)}\sin^{2n-3}x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\sin x\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}x,$$

das bestimmte Integral

$$\text{(5.)} \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Die Formeln Nr. 65 und 67 der Tabelle, deren Herleitung immerhin mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, braucht man aber gar nicht einmal zur Berechnung dieser bestimmten

Integrale; man findet vielmehr weit einfacher aus Formel Nr. 64 der Tabelle, nämlich aus

$$(6.)\quad \int \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2n}\cos^{2n-1}x\sin x + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}x dx,$$

das bestimmte Integral

$$(7.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}x dx,$$

weil das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (6.) an der oberen und an der unteren Grenze verschwindet. Indem man $n$ mit $n-1$ vertauscht, geht Gleichung (7.) über in

$$(8.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4}x dx.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, bis man endlich die Formeln

$$(9.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx,$$

$$(10.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

erhält. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich dann wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (3.).

Ebenso liefert die Formel Nr. 66 der Tabelle die Gleichungen

$$(11.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}x dx,$$

$$(12.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4}x dx,$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$(13.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx,$$

$$(14.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (5.).

Setzt man in Formel Nr. 64 der Tabelle $m = 2n + 1$, so erhält man

$$(15.)\qquad \int \cos^{2n+1} x dx = \frac{1}{2n+1}\cos^{2n} x \sin x + \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1} x dx,$$

also

$$(16.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx.$$

Ebenso wird

$$(17.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx = \frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} x dx,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(18.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{3}\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$

folglich wird

$$(19.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1}.$$

Ebenso findet man aus Formel Nr. 66 der Tabelle

$$(20.) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4 . 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5 . 3 . 1}.$$

In ähnlicher Weise liefern die Formeln Nr. 124 und 127 der Tabelle, nämlich die Gleichungen

$$(21.) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx,$$

$$(22.) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx,$$

ein einfaches Verfahren für die Berechnung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Aus Gleichung (21.) folgt nämlich, wenn $m > 1$ ist,

$$(23.) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Jenachdem $m$ *gerade* oder *ungerade* ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Vereinfachung das gesuchte Integral schliesslich entweder auf das bereits ermittelte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$, oder auf

$$(24.) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx = -\left[\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

zurückgeführt.

Aus Gleichung (22.) folgt, wenn $n > 1$ ist,

$$(25.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Jenachdem $n$ *gerade* oder *ungerade* ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das gesuchte Integral schliesslich entweder auf das bereits ermittelte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, oder auf

$$(26.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x dx = \left[\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m+1}$$

zurückgeführt.

Diese Resultate kann man auch zur Berechnung der Zahl $\pi$ benutzen. Es ist nämlich für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$(27.)\qquad \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x,$$

also nach den in § 48 ausgeführten Sätzen

$$(28.)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx,$$

oder

$$(29.)\qquad \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$(30.)\qquad \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}.$$

Daraus folgt

$$(31.)\qquad \frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

und

$$(32.)\qquad \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Die rechten Seiten dieser beiden Ungleichungen unterscheiden sich von einander nur durch den Factor $\frac{2n}{2n+1}$, der sich für unbegrenzt wachsendes $n$ der Grenze 1 nähert, folglich ist

$$(33.)\qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Diese Formel rührt von *Wallis* her und ist bereits vor Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung gefunden worden.

§ 55.

## Berechnung bestimmter Integrale durch Differentiation.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 157 und 158.)

Aus Formel Nr. 20 der Tabelle, nämlich aus

$$(1.)\qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

folgt durch Vertauschung von $a^2$ mit $t$

$$(2.)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* $t$ differentiirt und mit $-1$ multiplicirt, erhält man nach Formel Nr. 153 der Tabelle

$$(3.)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t\sqrt{t}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung nochmals nach $t$ differentiirt und durch $-2$ dividirt, so ergiebt sich

$$(4.)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^3} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{t^2\sqrt{t}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^4} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{5.}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+t)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{1}{t^{n-1}\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{6.}$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{6a.}$$

Aus

$$\int e^{-tx}dx = -\frac{1}{t}\cdot e^{-tx} = -\frac{1}{t\,.\,e^{tx}} \tag{7.}$$

folgt für positive Werthe von $t$

$$\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t}. \tag{8.}$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* $t$ differentiirt und mit $-1$ multiplicirt, erhält man nach Formel Nr. 153 der Tabelle

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,xdx = \frac{1}{t^2}, \tag{9.}$$

und wenn man dieses Verfahren wiederholt,

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x^2dx = \frac{1.2}{t^3}, \tag{10.}$$

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x^3dx = \frac{1.2.3}{t^4}, \tag{11.}$$

. . . . . . . . . . .

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,.\,x^ndx = \frac{n!}{t^{n+1}}. \tag{12.}$$

§ 56.

## Darstellung der Coefficienten einer trigonometrischen Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 159.)

Sind die beiden positiven ganzen Zahlen $m$ und $n$ von einander verschieden, so wird

$$\int_0^\pi \cos(m-n)x\,.\,dx = \frac{1}{m-n}\Big[\sin(m-n)x\Big]_0^\pi = 0, \tag{1.}$$

$$\int_0^\pi \cos(m+n)x\,.\,dx = \frac{1}{m+n}\Big[\sin(m+n)x\Big]_0^\pi = 0. \tag{2.}$$

Beachtet man die beiden bekannten Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b, \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \end{array}\right. \tag{3.}$$

so findet man durch Addition und Subtraction der Gleichungen (1.) und (2.) für $m \gtrless n$

$$\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = 0, \tag{4.}$$

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)dx = 0. \tag{5.}$$

Dagegen geht Gleichung (1.) für $m = n$ über in

$$\int_0^\pi \cos(m-n)x\,.\,dx = \int_0^\pi dx = \pi, \tag{1a.}$$

während Gleichung (2.) auch noch für $m = n$ richtig bleibt; folglich wird für $m = n > 1$

$$\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^\pi \cos^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}, \tag{6.}$$

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}. \tag{7.}$$

Weiss man nun, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

(8.) $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_n \cos(nx) + \cdots$

entwickeln lässt, so lange $x$ zwischen 0 und $\pi$ liegt, so kann man die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in folgender Weise bestimmen.

Multiplicirt man Gleichung (8.) mit $dx$ und integrirt auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und $\pi$, so erhält man, da die Reihe gleichmässig convergent ist und deshalb gliedweise integrirt werden darf,

$$\int_0^\pi f(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0 \int_0^\pi dx = \tfrac{1}{2}a_0\pi, \text{ oder } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \tag{9.}$$

denn $\int_0^\pi \cos(nx)dx$ verschwindet für $n > 0$. Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (8.) mit $\cos(nx)dx$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und $\pi$, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.) und (6.)

$$\int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx = a_n \int_0^\pi \cos^2(nx) dx = a_n \frac{\pi}{2}, \tag{10.}$$

oder

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx. \tag{10a.}$$

Hierbei ist $f(x)$ eine periodische *gerade* Function, die sich gar nicht ändert, wenn man $x$ mit $-x$, oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

$$f(2\pi - x) = f(-x) = f(x); \tag{11.}$$

deshalb findet man aus Gleichung (9.) und (10a.), indem man die Integrations-Veränderliche $y$ nennt und dann $y = 2\pi - x$ setzt,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)dy = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\pi f(2\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)dx, \tag{12.}$$

$$(13.)\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\cos(ny)dy = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\pi} f(2\pi - x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx;$$

folglich ergiebt sich durch Addition der Gleichungen (9.) und (12.), bezw. der Gleichungen (10a.) und (13.)

$$(14.)\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Weiss man, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

$$(15.)\quad f(x) = b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \cdots + b_n\sin(nx) + \cdots$$

entwickeln lässt, so lange $x$ zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ liegt, so darf die Reihe gliedweise integrirt werden, und man erhält mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.) und (7.)

$$(16.)\qquad \int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = b_n\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = b_n\cdot\frac{\pi}{2},$$

oder

$$(16a.)\qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

In diesem Falle ist $f(x)$ eine periodische *ungerade* Function, die nur ihr Zeichen wechselt, wenn man $x$ mit $-x$, oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

$$(17.)\qquad f(2\pi - x) = f(-x) = -f(x).$$

Deshalb findet man aus Gleichung (16a.), indem man die Integrations-Veränderliche $y$ nennt und dann $y = 2\pi - x$ setzt,

$$(18.)\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\sin(ny)dy = -\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

also durch Addition zu Gleichung (16a.)

$$(19.)\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Weiss man endlich, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

$$(20.)\qquad f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \cdots$$

entwickeln lässt, so lange $x$ zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$ liegt, so wird mit Rücksicht darauf, dass

$$(21.)\ \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)dx = 0$$

ist, gleichviel ob $m$ und $n$ von einander verschieden sind oder nicht,

$$(22.)\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Dies giebt den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)],$$

*welche in dem Intervalle von* 0 *bis* $2\pi$ *gleichmässig convergent ist, haben die Coefficienten* $a_n$ *und* $b_n$ *die Werthe*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

§ 57.

## Berechnung bestimmter Integrale bei Anwendung mehrdeutiger Substitutionen.

Führt man in ein bestimmtes Integral $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ durch die Substitution

$$y = \psi(x) \tag{1.}$$

eine neue Integrations-Veränderliche $y$ ein, so muss man auch die Integrationsgrenzen ändern, und zwar ist in dem vorliegenden Falle die untere Grenze $\psi(a)$ und die obere $\psi(b)$. Bei der Ausrechnung ist aber noch besondere Vorsicht erforderlich, wenn die Gleichung (1.) in Bezug auf $x$ mehrdeutig ist. Ein einfaches Beispiel möge zeigen, wie bei solchen mehrdeutigen Substitutionen leicht Fehler entstehen.

Es ist

$$\int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 13x\right]_1^7 = 48. \tag{2.}$$

Wendet man dagegen die Substitution

$$y = x^2 - 6x + 13 \tag{3.}$$

an, so wird $y = 8$ für $x = 1$ und $y = 20$ für $x = 7$. Da nun

$$x = 3 \pm \sqrt{y - 4}, \quad \text{also} \quad dx = \pm \frac{dy}{2\sqrt{y-4}} \tag{4.}$$

ist, so wird man geneigt sein, entweder

$$\int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = +\frac{1}{2}\int\limits_8^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}}, \tag{5.}$$

oder

$$\int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_8^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} \tag{6.}$$

zu setzen. Thatsächlich sind aber die Gleichungen (5.) und (6.) *beide unrichtig*, wie man schon daraus erkennt, dass

$$(7.)\quad \pm\frac{1}{2}\int\limits_{8}^{20}\frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \pm\tfrac{1}{3}\Big[(y+8)\sqrt{y-4}\Big]_{8}^{20} = \pm\frac{80}{3}$$

ist, während das gesuchte Integral nach Gleichung (2.) den Werth 48 hat.

Zur Lösung des Widerspruches beachte man, dass nach Gleichung (4.) zu jedem Werthe von $y$ *zwei* Werthe von $x$ gehören, von denen der eine, nämlich

$$(8.)\qquad x = 3 + \sqrt{y-4}$$

immer *grösser* als 3 ist, während der andere, nämlich

$$(9.)\qquad x = 3 - \sqrt{y-4}$$

immer *kleiner* als 3 ist. Diesen beiden verschiedenen Werthen von $x$, welche zu demselben Werthe von $y$ gehören, entsprechen die beiden verschiedenen Werthe von $dx$, und zwar erkennt man aus den Gleichungen (4.), dass den Werthen von $x$, welche grösser als 3 sind,

$$(10.)\qquad dx = +\frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

zugeordnet werden muss, während den Werthen von $x$, welche *kleiner* als 3 sind, der Werth

$$(11.)\qquad dx = -\frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

entspricht. Dieses Verhalten muss bei der Umformung des gesuchten Integrals berücksichtigt werden, weil der Werth $x = 3$ *zwischen* den Grenzen 1 und 7 liegt. Es kommen deshalb bei der Berechnung des gesuchten Integrals Werthe von $x$ vor, welche *kleiner* als 3 sind, und ausserdem auch solche, welche *grösser* als 3 sind, so dass man nicht *durchweg denselben* Werth von $dx$ benutzen darf. Man muss vielmehr das gesuchte Integral in zwei andere Integrale zerlegen, indem man

$$(12.)\quad \int\limits_{1}^{7}(x^2-6x+13)dx = \int\limits_{1}^{3}(x^2-6x+13)dx + \int\limits_{3}^{7}(x^2-6x+13)dx$$

setzt. Bei dem ersten Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $x \leqq 3$, folglich muss man bei diesem

$$dx = -\frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

setzen. Bei dem zweiten Integrale ist $x \geqq 3$, folglich muss man dabei

$$dx = +\frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

setzen. Da nun noch $y = 4$ wird für $x = 3$, so erhält man

$$(13.)\quad \int\limits_1^3 (x^2 - 6x + 13)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_8^4 \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2}\int\limits_4^8 \frac{ydy}{\sqrt{y-4}},$$

$$(14.)\quad \int\limits_3^7 (x^2 - 6x + 13)dx = +\frac{1}{2}\int\limits_4^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(15.)\quad \int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \frac{1}{2}\int\limits_4^8 \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} + \frac{1}{2}\int\limits_4^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}}.$$

Nun ist nach den Ausführungen in § 47

$$(16.)\quad \frac{1}{2}\int\limits_4^8 \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha=0}\int\limits_{4+\alpha}^8 \frac{ydy}{\sqrt{y-4}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\alpha=0}\left[(y+8)\sqrt{y-4}\right]_{4+\alpha}^8 = \frac{1}{3}\left[(y+8)\sqrt{y-4}\right]_4^8 = \frac{32}{3},$$

$$(17.)\quad \frac{1}{2}\int\limits_4^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha=0}\int\limits_{4+\alpha}^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\alpha=0}\left[(y+8)\sqrt{y-4}\right]_{4+\alpha}^{20} = \frac{1}{3}\left[(y+8)\sqrt{y-4}\right]_4^{20} = \frac{112}{3};$$

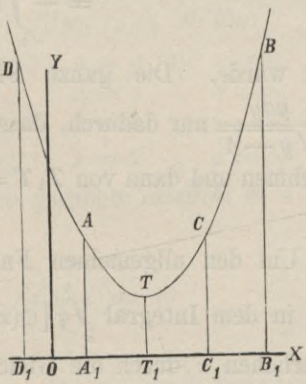
man erhält also in Uebereinstimmung mit Gleichung (2.)

$$(18.)\quad \int\limits_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx = \frac{32}{3} + \frac{112}{3} = 48.$$

Um die vorstehende Untersuchung auf graphischem Wege zu veranschaulichen, sei in Figur 103 die Curve gezeichnet, welche der Substitutions-Gleichung

(19.) $y = x^2 - 6x + 13$

Fig. 103.*)




entspricht. Für alle Werthe von $x$, welche kleiner als 3 sind, *fällt* die Curve, folglich ist $\frac{dy}{dx}$ für diese Werthe von $x$ *negativ*. Für alle Werthe von $x$ dagegen, welche grösser als 3 sind, *steigt* die Curve, folglich ist $\frac{dy}{dx}$ für diese Werthe von $x$ *positiv*. Deshalb darf man nicht in dem ganzen Intervalle von $x = 1$ bis $x = 7$ die Grösse

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt{y - 4}$$

mit demselben Vorzeichen nehmen; es gilt vielmehr für alle Werthe von $x = 1$ bis $x = 3$ das *untere* Zeichen und für alle Werthe von $x = 3$ bis $x = 7$ das *obere* Zeichen.

Aus Figur 103 erkennt man auch leicht, weshalb die Gleichungen (5.) und (6.) fehlerhaft sind.

Das gesuchte Integral giebt nämlich den Flächeninhalt der Figur

$$(20.)\qquad A_1ABB_1 = \int_1^7 y dx = \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)dx,$$

während

$$(21.)\qquad \frac{1}{2}\int_8^{20} \frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \int_5^7 ydx = \int_5^7 (x^2 - 6x + 13)\,dx = C_1CBB_1$$

und

*) Um Platz zu sparen, sind in der Figur alle Ordinaten um die Hälfte verkürzt, d. h. die gezeichnete Curve entspricht der Gleichung

$$2y = x^2 - 6x + 13.$$

$$(22.)\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{8}^{20}\frac{ydy}{\sqrt{y-4}} = \int\limits_{1}^{-1} ydx$$

$$= -\int\limits_{-1}^{+1}(x^2 - 6x + 13)dx = -D_1DAA$$

sein würde. Die ganze Fläche $A_1ABB_1$ erhält man aus $\frac{1}{2}\int\frac{ydy}{\sqrt{y-4}}$ nur dadurch, dass man $y$ von $A_1A = 8$ bis $T_1T = 4$ abnehmen und dann von $T_1T = 4$ bis $B_1B = 20$ zunehmen lässt.

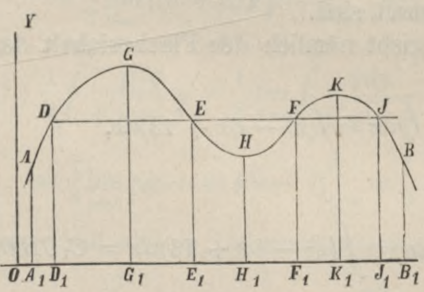
Um den allgemeinen Fall zu behandeln, nehme man an, dass in dem Integral $\int\limits_a^b \varphi[\psi(x)]\,dx$ statt der Integrations-Veränderlichen $x$ durch die Gleichung

$$(23.)\qquad y = \psi(x)$$

die neue Integrations-Veränderliche $y$ substituirt werde. Ist nun die Curve, welche der Gleichung (23.) entspricht, durch die Figur 104 dargestellt, so hat $y$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ für

$$(24.)\qquad x = g = OG_1,\quad x = h = OH_1,\quad x = k = OK_1$$

Fig. 104.




Maxima bezw. Minima. Es werden also zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ diejenigen Werthe von $y$, welche zwischen den Grenzen $x = a = OA_1$ und $x = g$ vorkommen, wenigstens theilweise wiederkehren. Ebenso werden zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = k$ diejenigen Werthe, welche zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ vorkommen, wenigstens theilweise wiederkehren. U. s. w. Es haben z. B. die 4 Punkte $D$, $E$, $F$ und $J$, welche in den 4 von einander unterschiedenen Intervallen liegen, gleiche Ordinaten $y$, obgleich die zugehörigen Abscissen $x$ von einander verschieden sind; d. h. die Gleichung (23.) hat, wenn man sie nach $x$ auflöst, für die betrachteten Werthe von $y$ mehrere Wurzeln. In Figur 104 ist z. B. die Zahl dieser Wurzeln gleich 4. Bezeichnet man diese Wurzeln mit $f_1(y), f_2(y), f_3(y), f_4(y)$, ist also

(25.) $x = f_1(y)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = g$,

(26.) $x = f_2(y)$ „ „ „ $x = g$ „ $x = h$,

(27.) $x = f_3(y)$ „ „ „ $x = h$ „ $x = k$,

(28.) $x = f_4(y)$ „ „ „ $x = k$ „ $x = b$,

so muss man dem entsprechend das gesuchte Integral in 4 Integrale zerlegen, indem man

$$(29.)\quad \int_a^b \varphi[\psi(x)]dx = \int_a^g \varphi[\psi(x)]dx + \int_g^h \varphi[\psi(x)]dx + \int_h^k \varphi[\psi(x)]dx + \int_k^b \varphi[\psi(x)]dx$$

setzt. Dadurch erhält man nach Einführung der neuen Integrations-Veränderlichen $y$

$$(30.)\quad \int_a^g \varphi[\psi(x)]dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(g)} \varphi(y) \cdot f_1'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (25.)]}$$

$$(31.)\quad \int_g^h \varphi[\psi(x)]dx = \int_{\psi(g)}^{\psi(h)} \varphi(y) \cdot f_2'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (26.)]}$$

$$(32.)\quad \int_h^k \varphi[\psi(x)]dx = \int_{\psi(h)}^{\psi(k)} \varphi(y) \cdot f_3'(y)dy, \qquad \text{[nach Gl. (27.)]}$$

$$(33.)\quad \int_k^b \varphi[\psi(x)]dx = \int_{\psi(k)}^{\psi(b)} \varphi(y) \cdot f_4'(y)dy; \qquad \text{[nach Gl. 28.)]}$$

das gesuchte Integral wird daher

$$(34.)\quad \int_a^b \varphi[\psi(x)]dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(g)} \varphi(y) \cdot f_1'(y)dy + \int_{\psi(g)}^{\psi(h)} \varphi(y) \cdot f_2'(y)dy + \int_{\psi(h)}^{\psi(k)} \varphi(y) \cdot f_3'(y)dy + \int_{\psi(k)}^{\psi(b)} \varphi(y) \cdot f_4'(y)dy.$$

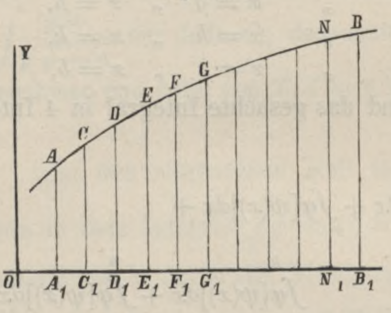
§ 58.

## Messungsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 160 und 161.)

Soll der Flächeninhalt $F = A_1ABB_1$ einer ebenen Figur berechnet werden, welche oben wieder durch den Curvenbogen $AB$ (Fig. 105) mit der Gleichung

Fig. 105.




$$(1.)\qquad y = f'(x),$$

unten von der $X$-Axe, links und rechts von den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, so kann man

$$(2.)\qquad F = A_1ABB_1 = \int_a^b f'(x)dx$$

näherungsweise auch durch *lineare Messungen* finden. Man braucht dann die Function

$$(3.)\qquad f(x) = \int f'(x)dx$$

gar nicht zu bestimmen, ja es braucht nicht einmal die Function $y = f'(x)$ bekannt zu sein.

Theilt man nämlich die Strecke $A_1B_1$ in $n$ gleiche Theile $h$ und legt durch die Theilpunkte Parallele zur $Y$-Axe, so wird die Figur in $n$ schmale Streifen zerlegt. Diese Streifen kann man näherungsweise als Paralleltrapeze betrachten, indem man die einzelnen Curvenbögen durch gerade Linien ersetzt. Dies giebt, wenn man

$$(4.)\qquad f'(a) = y_0,\quad f'(a+h) = y_1,\quad f'(a+2h) = y_2, \ldots$$
$$f'(a+nh) = f'(b) = y_n$$

setzt,

$$(5.)\qquad A_1ACC_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1),\quad C_1CDD_1 = \frac{h}{2}(y_1 + y_2),$$

$$D_1DEE_1 = \frac{h}{2}(y_2 + y_3),\ \ldots N_1NBB_1 = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n),$$

also

$$(6.)\quad A_1ABB_1 = \int\limits_a^b f'(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f'(a) + 2f'(a+h) + 2f'(a+2h) + \cdots + 2f'(b-h) + f'(b)].$$

Je grösser die Anzahl $n$ der Streifen wird, um so genauer wird das Resultat; wächst $n$ in's Unendliche, so wird der gefundene Ausdruck dem gesuchten Integral, bezw. dem gesuchten Flächeninhalt sogar genau gleich.

**Beispiel.**

Es sei

$$(7.)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Für $n = 8$, $h = \frac{1}{8}$ wird in diesem Falle

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}\left[f'(0) + 2f'\left(\frac{1}{8}\right) + 2f'\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + 2f'\left(\frac{7}{8}\right) + f'(1)\right],$$

oder, da $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist,

$$\pi = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{128}{65} + \frac{128}{68} + \frac{128}{73} + \frac{128}{80} + \frac{128}{89} + \frac{128}{100} + \frac{128}{113} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{32}{65} + \frac{8}{17} + \frac{32}{73} + \frac{2}{5} + \frac{32}{89} + \frac{8}{25} + \frac{32}{113} + \frac{1}{8}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
1:4 &= 0{,}25\\
32:65 &= 0{,}4923\,0769\\
8:17 &= 0{,}4705\,8824\\
32:73 &= 0{,}4383\,5616\\
2:5 &= 0{,}4\\
32:89 &= 0{,}3595\,5056\\
8:25 &= 0{,}32\\
32:113 &= 0{,}2831\,8584\\
1:8 &= 0{,}125;
\end{aligned}$$

folglich erhält man *näherungsweise*

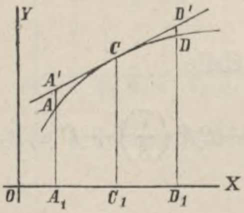
$$\pi = 3{,}1389\,8849.$$

Der gefundene Werth ist also um 0,0026 0416 *kleiner* als der wahre Werth der Zahl

$$\pi = 3{,}1415\,9265.$$

Bei dem angegebenen Verfahren ist an die Stelle des Curvenbogens $AB$ ein der Curve *eingeschriebenes* Polygon getreten. Man kann mit gleichem Rechte auch ein der Curve *umschriebenes* Polygon in Betracht ziehen, indem man in den Punkten $C$, $E$, $G\ldots$ (Fig. 105) an die Curve Tangenten legt und z. B. die beiden Streifen $A_1ACC_1$ und $C_1CDD_1$ durch das Paralleltrapez $A_1A'D'D_1$ (Fig. 106) ersetzt. Dabei wird

Fig. 106.




$$A_1A' + D_1D' = 2\,C_1C = 2f'(a+h), \tag{8.}$$

also

$$A_1A'D'D_1 = 2h\,.\,f'(a+h). \tag{9.}$$

Ebenso findet man für die beiden folgenden Streifen den Näherungswerth

$$2h\,.\,f'(a+3h), \tag{10.}$$

u. s. w.

Unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Streifen eine *gerade* ist — sie heisse jetzt $2n$ —, findet man daher für den Flächeninhalt der ganzen Figur den Näherungswerth

$$\begin{aligned} F &= 2h[f'(a+h) + f'(a+3h) + \cdots + f'(b-h)] \\ &= 2h(y_1 + y_3 + y_5 \cdots + y_{2n-1}), \end{aligned} \tag{11.}$$

wo wieder

$$f'(a+h) = y_1,\quad f'(a+3h) = y_3,\quad f'(a+5h) = y_5, \ldots$$
$$f'[a+(2n-1)h] = f'(b-h) = y_{2n-1}$$

gesetzt ist.

Zu bemerken ist dabei, dass die Tangenten in den Punkten $C$ und $E$ (Fig. 105) die Ordinate $D_1D$ im Allgemeinen nicht genau in demselben Punkte $D'$ treffen werden, so dass die Figur, deren Flächeninhalt durch Gleichung (11.) berechnet worden ist, von dem umschriebenen Polygon sich um eine kleine Grösse unterscheidet.

**Beispiel.**

Es möge auch diese letzte Formel auf die Berechnung der Zahl $\pi$ angewendet werden, wenn man wieder von Gleichung (7.) ausgeht. In diesem Falle sei die Anzahl der Streifen

$$2n = 16, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{16},$$

dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8}\left[f'\left(\frac{1}{16}\right) + f'\left(\frac{3}{16}\right) + \cdots + f'\left(\frac{15}{16}\right)\right],$$

$$\pi = \frac{128}{257} + \frac{128}{265} + \frac{128}{281} + \frac{128}{305} + \frac{128}{337} + \frac{128}{377} + \frac{128}{425} + \frac{128}{481}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
128 : 257 &= 0{,}4980\,5447 \\
128 : 265 &= 0{,}4830\,1887 \\
128 : 281 &= 0{,}4555\,1601 \\
128 : 305 &= 0{,}4196\,7213 \\
128 : 337 &= 0{,}3798\,2196 \\
128 : 377 &= 0{,}3395\,2255 \\
128 : 425 &= 0{,}3011\,7647 \\
128 : 481 &= 0{,}2661\,1227;
\end{aligned}$$

folglich erhält man *näherungsweise*

$$\pi = 3{,}1428\,9473.$$

Der gefundene Werth ist also um 0,0013 0208 *grösser* als der wahre Werth der Zahl

$$\pi = 3{,}1415\,9265.$$

Der Fehler ist in diesem Falle etwa *halb so gross* wie bei der vorhergehenden Methode.

Diese zweite Methode wird auch bei anderen Anwendungen in der Regel genauere Resultate liefern als die erste, ohne dass man mehr einzelne Glieder zu berechnen braucht, weil sich im Allgemeinen die Tangenten einer Curve enger anschmiegen als die Sehnen. Von diesem Umstande wird in dem folgenden Paragraphen Vortheil gezogen werden.

## § 59.

# *Simpson*'sche Regel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 162.)

Es möge wieder eine Figur begrenzt sein oben durch den Curvenbogen $AB$ mit der Gleichung

(1.) $$y = f'(x),$$

unten durch die $X$-Axe, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$ (vergl. Figur 105); die Strecke $A_1B_1$ sei in $2n$ gleiche Theile von der Länge $h$, und die Figur selbst sei durch die Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{2n-1}$ in $2n$ Streifen zerlegt. Vereinigt man zunächst je 2 benachbarte Streifen, so dass man thatsächlich nur noch $n$ Doppelstreifen hat, und ersetzt die begrenzenden Curvenbögen durch die zugehörigen Sehnen, so findet man aus Formel Nr. 160 der Tabelle für den gesuchten Flächeninhalt, indem man $h$ mit $2h$ vertauscht, den angenäherten Werth

(2.) $$F_1 = h[f'(a) + 2f'(a+2h) + 2f'(a+4h) + \cdots + 2f'(b-2h) + f'(b)].$$

Ersetzt man dagegen bei den Doppelstreifen die Curvenbögen bezw. durch die Tangenten, welche in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, y_5, \ldots y_{2n-1}$ an die Curve gelegt sind, so erhält man nach Formel Nr. 161 der Tabelle den angenäherten Werth

(3.) $$F_2 = 2h[f'(a+h) + f'(a+3h) + f'(a+5h) + \cdots + f'(b-h)].$$

Ist der begrenzende Curvenbogen $AB$ zwischen $A$ und $B$ *nach oben convex*, so ist $F_1$ *kleiner* als der gesuchte Flächeninhalt

(4.) $$F = \int_a^b f'(x)dx,$$

und $F_2$ ist *grösser* als $F$; es ist also

(5.) $$F_1 < F < F_2.$$

Ist dagegen der begrenzende Curvenbogen $AB$ zwischen $A$ und $B$ *nach oben concav*, so wird

(6.) $$F_1 > F > F_2.$$

In beiden Fällen ist $F$ ein Mittelwerth zwischen $F_1$ und $F_2$, so dass die Grösse $v$, welche durch die Gleichung

$$\frac{F-F_1}{F_2-F}=v \tag{7.}$$

erklärt wird, immer *positiv* ist, und zwar wird $v$ für hinreichend grosse Werthe von $n$ in der Regel grösser als 1 sein, weil sich die Tangenten enger an die Curve anschmiegen als die Sehnen. Aus Gleichung (7.) ergiebt sich sodann

$$F=\frac{F_1+vF_2}{1+v}. \tag{8.}$$

Bei der angenäherten Berechnung der Zahl $\pi$ im vorhergehenden Paragraphen war z. B. $F-F_1$ etwa doppelt so gross wie $F_2-F$. Setzt man daher in den Gleichungen (7.) und (8.) $v=2$, so erhält man durch die Formel

$$F=\frac{F_1+vF_2}{1+v}=\frac{F_1+2F_2}{3} \tag{9.}$$

eine noch stärkere Annäherung an den wirklichen Werth des bestimmten Integrals. Dies giebt, wenn man die Werthe von $F_1$ und $F_2$ in Gleichung (9.) einsetzt,

$$\begin{aligned} F=\frac{h}{3}[f'(a)+4f'(a+h)+2f'(a+2h)+4f'(a+3h)+2f'(a+4h) \\ +\cdots+2f'(b-2h)+4f'(b-h)+f'(b)], \end{aligned} \tag{10.}$$

oder

$$F=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}). \tag{11.}$$

Für die Zahl $\pi$ erhält man daher unter Benutzung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate

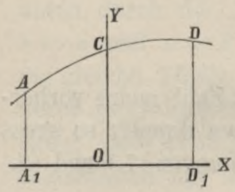
$$\pi=\frac{1}{3}(3{,}1389\,8849+6{,}2857\,8946)=3{,}1415\,9265.$$

Der gefundene Werth stimmt also bis auf 8 Decimalstellen genau mit dem wahren Werthe von $\pi$ überein.

Die in den Gleichungen (10.) und (11.) enthaltene Formel, welche unter dem Namen „*Simpson*'sche Regel“ bekannt ist, giebt nicht nur für die Berechnung der Zahl $\pi$ sehr genaue

Werthe, sondern auch für die Berechnung von anderen bestimmten Integralen, wenn man nur die Zahl $n$ gross genug macht. Der Grund davon liegt darin, dass man dieselbe Formel auch findet, wenn man bei der Berechnung der Doppelstreifen die einzelnen Curvenbögen durch passend gewählte *Parabelbögen* ersetzt, welche sich der Curve sehr eng anschliessen. Dies geschieht in folgender Weise.

Fig. 107.




Die Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c \tag{12.}$$

stellt, was auch die constanten Coefficienten $a$, $b$, $c$ sein mögen, eine Parabel dar, deren Axe zur $Y$-Axe parallel ist. Ueber die Coefficienten $a$, $b$, $c$ kann man nun so verfügen, dass die Parabel durch die drei Punkte $A$, $C$, $D$ (Fig. 107) mit den Coordinaten $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, $(+h, y_2)$ hindurchgeht, indem man die Gleichungen

$$\begin{cases} y_0 = ah^2 - bh + c, \\ y_1 = c, \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases} \tag{13.}$$

befriedigt. Daraus ergiebt sich

$$a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2),\quad b = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2),\quad c = y_1, \tag{14.}$$

so dass Gleichung (12.) übergeht in

$$y = \frac{1}{2h^2}\left[(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + h(-y_0 + y_2)x + 2h^2 y_1\right]. \tag{15.}$$

Der Flächeninhalt der Figur $A_1ADD_1$ wird daher

$$\begin{aligned} A_1ADD_1 &= \int_{-h}^{+h} y\,dx \\ &= \frac{1}{2h^2}\left[(y_0 - 2y_1 + y_2)\frac{x^3}{3} + h(-y_0 + y_2)\frac{x^2}{2} + 2h^2 y_1 x\right]_{-h}^{+h} \\ &= \frac{1}{h^2}\left[(y_0 - 2y_1 + y_2)\frac{h^3}{3} + 2h^2 y_1 h\right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned} \tag{16.}$$

Da bei einer beliebigen Parallelverschiebung der $Y$-Axe sich weder die Länge der Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ noch die

Grösse $h$ ändert, so kann man in ähnlicher Weise den Flächeninhalt der sämmtlichen Doppelstreifen (in Figur 105) berechnen und findet dafür bezw.

$$\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),\ \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4),\ \cdots\ \frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n});$$

dabei hat man die einzelnen Curvenbögen durch Parabelbögen ersetzt, welche durch je 3 auf einander folgende Punkte der begrenzenden Curve $AB$ hindurchgehen. Für den Flächeninhalt der ganzen Figur erhält man dann den angenäherten Werth

$$(17.)\quad F=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}),$$

ein Ausdruck, welcher mit Gleichung (11.), d. h. mit der *Simpson*'schen Regel genau übereinstimmt.

Um sich darüber Rechenschaft zu geben, wie genau die durch Anwendung der *Simpson*'schen Regel gefundenen Resultate sind, diene die folgende Betrachtung. Entwickelt man

$$(18.)\quad \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)=\frac{h}{3}\left[f'(a)+4f'(a+h)+f'(a+2h)\right]$$

nach steigenden Potenzen von $h$, so erhält man durch Anwendung der *Taylor*'schen Reihe

$$(19.)\quad \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)=2h\,.f'(a)+2h^2\,.f''(a)+\frac{4h^3}{3}f'''(a)+\frac{2h^4}{3}f^{(4)}(a)+\frac{5h^5}{18}f^{(5)}(a)+\cdots.$$

Andererseits ist nach der *Taylor*'schen Reihe

$$(20.)\quad \int\limits_a^{a+2h}f'(x)dx=f(a+2h)-f(a)$$
$$=\frac{2h}{1!}f'(a)+\frac{4h^2}{2!}f''(a)+\frac{8h^3}{3!}f'''(a)+\frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(a)+\frac{32h^5}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots,$$

folglich wird

$$(21.)\quad \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)-\int\limits_a^{a+2h}f'(x)dx=\frac{h^5}{90}f^{(5)}(a)+\cdots.$$

Man erkennt daraus, dass der Unterschied zwischen dem Näherungswerth, den die *Simpson*'sche Regel liefert, und dem wahren Werthe des Integrals mit $h$ zugleich unendlich klein wird von der *fünften* Ordnung.

Für $n$ Doppelstreifen ist daher der Unterschied etwa $n$-mal so gross, folglich wird der gesammte Fehler, da $2nh = b - a$ ist, gleich einem Mittelwerthe von $f^{(5)}(x)$, multiplicirt mit $\frac{(b-a)h^4}{180}$.

Es war bei Herleitung der Näherungsformeln in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen bisher die Voraussetzung gemacht worden, dass der begrenzende Curvenbogen $AB$ *über* der $X$-Axe liegt; es gelten aber noch dieselben Schlüsse auch dann, wenn der Bogen $AB$ *unter* der $X$-Axe liegt, es wird dann aber der Werth des bestimmten Integrals *negativ*. Die Formeln bleiben sogar noch richtig, wenn die Curve theilweise *über*, theilweise *unter* der $X$-Axe liegt, wie aus der Zerlegung des bestimmten Integrals hervorgeht.

Ebenso ist es nicht nothwendig, dass der Bogen $AB$ in seiner ganzen Ausdehnung *nach oben convex* oder *nach oben concav* ist. Es wird aber zweckmässig sein, durch die Ordinaten der Wendepunkte, welche zwischen $A$ und $B$ möglicher Weise vorhanden sind, die Figur (bezw. das bestimmte Integral) zu zerlegen.

Das Verfahren, durch welches die *Simpson*'sche Regel zuletzt hergeleitet worden ist, lässt sich noch verallgemeinern, indem man die Figur in $3n$ Streifen von gleicher Breite $h$ zerlegt und in der Gleichung

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{22.}$$

die 4 constanten Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$ so bestimmt, dass die neue Curve mit dem Curvenbogen $AB$ (Fig. 105) 4 auf einander folgende Punkte, z. B. die 4 Punkte $A$, $C$, $D$, $E$, gemeinschaftlich hat. Auf diese Weise erhält man eine Curve, welche sich der gegebenen Curve längs des Bogens $ACDE$ im Allgemeinen noch enger anschliesst. Deshalb findet man dann auch bei der Berechnung des Inhaltes der Fläche $A_1AEE_1$ noch genauere Resultate als durch die bisherigen Methoden, wenn man die ge-

gegebene Curve durch die der Gleichung (22.) entsprechende ersetzt.

In dieser Weise kann man fortfahren und die einzelnen Theile des gegebenen Curvenbogens $AB$ durch Curvenbögen mit der Gleichung

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \tag{23.}$$

ersetzen, welche durch je $m + 1$ auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve hindurchgehen.

## § 60.

## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll mit Anwendung der *Simpson*'schen Regel

$$12 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \tag{1.}$$

berechnen.

**Auflösung.** Es sei $2n = 10$, also $h = \frac{1}{10}$, dann wird

$$12 = \frac{1}{30}[f'(1) + 4f'(1,1) + 2f'(1,2) + \cdots + 4f'(1,9) + f'(2)] \tag{2.}$$

$$= \frac{1}{30}\left(1 + \frac{40}{11} + \frac{20}{12} + \frac{40}{13} + \frac{20}{14} + \frac{40}{15} + \frac{20}{16} + \frac{40}{17} + \frac{20}{18} + \frac{40}{19} + \frac{10}{20}\right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
1 : 30 &= 0{,}0333\,3333 \\
4 : 33 &= 0{,}1212\,1212 \\
2 : 36 &= 0{,}0555\,5556 \\
4 : 39 &= 0{,}1025\,6410 \\
2 : 42 &= 0{,}0476\,1905 \\
4 : 45 &= 0{,}0888\,8889 \\
2 : 48 &= 0{,}0416\,6667 \\
4 : 51 &= 0{,}0784\,3137 \\
2 : 54 &= 0{,}0370\,3704 \\
4 : 57 &= 0{,}0701\,7544 \\
1 : 60 &= 0{,}0166\,6667;
\end{aligned}$$

folglich findet man für $l2$ den Näherungswerth 0,6931 5024, der sich von dem wahren Werthe, nämlich von

$$l2 = 0{,}6931\,4718$$

nur um 0,0000 0306 unterscheidet.

**Aufgabe 2.** Man soll die Zahl $\pi$ durch Anwendung der *Simpson*'schen Regel aus der Gleichung

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{0,5} = \frac{\pi}{6} \tag{3.}$$

berechnen.

**Auflösung.** Für $2n = 8$, also $h = \frac{1}{16}$ erhält man

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{6h}{3}\Big[f'(0) + 4f'\Big(\frac{1}{16}\Big) + \cdots + 4f'\Big(\frac{7}{16}\Big) + f'\Big(\frac{8}{16}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{8}\Big(1 + \frac{64}{\sqrt{255}} + \frac{32}{\sqrt{252}} + \frac{64}{\sqrt{247}} + \frac{32}{\sqrt{240}} + \frac{64}{\sqrt{231}} + \frac{32}{\sqrt{220}} \\ &\qquad + \frac{64}{\sqrt{207}} + \frac{16}{\sqrt{192}}\Big),\end{aligned} \tag{4.}$$

oder

$$\begin{aligned}\pi = \frac{1}{8} &+ \frac{\sqrt{16320}}{255} + \frac{\sqrt{112}}{42} + \frac{\sqrt{15808}}{247} + \frac{\sqrt{15}}{15} \\ &+ \frac{\sqrt{14784}}{231} + \frac{\sqrt{220}}{55} + \frac{\sqrt{1472}}{69} + \frac{\sqrt{3}}{12}.\end{aligned} \tag{5.}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1 : 8 &= 0{,}125 \\ \sqrt{16320} : 255 &= 0{,}5009\,7943 \\ \sqrt{112} : \ \ 42 &= 0{,}2519\,7631 \\ \sqrt{15808} : 247 &= 0{,}5090\,2781 \\ \sqrt{15} : \ \ 15 &= 0{,}2581\,9889 \\ \sqrt{14784} : 231 &= 0{,}5263\,6135 \\ \sqrt{220} : \ \ 55 &= 0{,}2696\,7995 \\ \sqrt{1472} : \ \ 69 &= 0{,}5560\,3844 \\ \sqrt{3} : \ \ 12 &= 0{,}1443\,3757; \end{aligned}$$

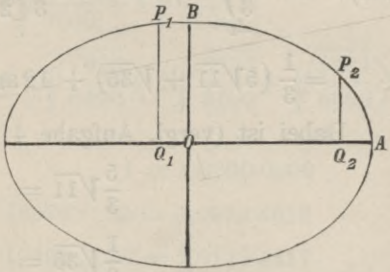
folglich erhält man für die Zahl $\pi$ den Näherungswerth 3,1415 9975, der sich von dem wahren Werthe, nämlich von

$$\pi = 3{,}1415\,9265$$

nur um die Grösse 0,000 0710 unterscheidet.

**Aufgabe 3.** Von einer Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mit den Halbaxen $a = 6$, $b = 4$ soll man das Flächenstück $Q_1P_1P_2Q_2$ berechnen (Fig. 108), wenn $OQ_1 = -1$ und $OQ_2 = +5$ ist.

Fig. 108.




**Auflösung.** Aus der Gleichung der Ellipse folgt

$$(6.)\quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{36 - x^2},$$

so dass man für den gesuchten Flächeninhalt

$$(7.)\quad F = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{+5} dx\sqrt{36 - x^2}$$

erhält. Nach der *Simpson*'schen Regel wird daher für $2n = 12$, $h = \frac{1}{2}$

$$(8.)\quad F = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\Big(\sqrt{35} + 4\sqrt{35{,}75} + 2\sqrt{36} + 4\sqrt{35{,}75} + 2\sqrt{35} + 4\sqrt{33{,}75} + 2\sqrt{32} + 4\sqrt{29{,}75} + 2\sqrt{27} + 4\sqrt{23{,}75} + 2\sqrt{20} + 4\sqrt{15{,}75} + \sqrt{11}\Big).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
2\sqrt{36} &= 2\,.\,6 &&= 12{,}0000\,000\\
8\sqrt{35{,}75} &= \sqrt{2288} &&= 47{,}8330\,430\\
3\sqrt{35} &= \sqrt{315} &&= 17{,}7482\,393\\
4\sqrt{33{,}75} &= \sqrt{540} &&= 23{,}2379\,001\\
2\sqrt{32} &= \sqrt{128} &&= 11{,}3137\,085\\
4\sqrt{29{,}75} &= \sqrt{476} &&= 21{,}8174\,242\\
2\sqrt{27} &= \sqrt{108} &&= 10{,}3923\,048
\end{aligned}$$

$$4\sqrt{23,75} = \sqrt{380} = 19,4935\,887$$
$$2\sqrt{20} = \sqrt{80} = 8,9442\,719$$
$$4\sqrt{15,75} = \sqrt{252} = 15,8745\,079$$
$$\sqrt{11} = 3,3166\,248;$$

man erhält daher für $F$ den *Näherungswerth*

(9.) $$191,9716\,132 : 9 = 21,3301\,7924.$$

Den *wahren* Werth von $F$ findet man aus

(10.) $$F = \frac{2}{3}\int_{-1}^{5} dx\sqrt{36-x^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{36-x^2} + 18\arcsin\left(\frac{x}{6}\right)\right]_{-1}^{+5}$$
$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{11} + \sqrt{35}\right) + 12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) - 12\arcsin\left(-\frac{1}{6}\right).$$

Dabei ist (vergl. Aufgabe 4 in § 11)

$$\frac{5}{3}\sqrt{11} = 5,527\,708$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{35} = 1,972\,027$$
$$12\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11,821\,327$$
$$12\arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2,009\,377$$

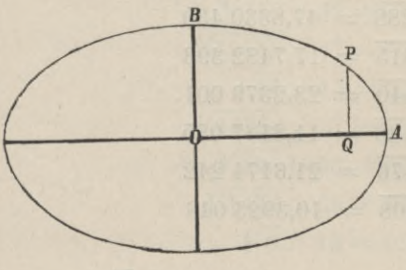
also

(11.) $$F = 21,330\,439.$$

Der durch die Anwendung der *Simpson*'schen Regel gefundene Werth ist also um 0,000 260 zu klein.

**Aufgabe 4.** In einer Ellipse (Fig. 109) mit der Gleichung

Fig. 109.




(12.) $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

seien die beiden Halbaxen

(13.) $$a = 10 \text{ und } b = 6;$$

man soll die Länge des Bogens $BP$ bestimmen, wenn $OQ$ gleich 8 ist.

**Auflösung.** Aus Gleichung (12.) folgt

$$(14.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

In dem vorliegenden Falle ist also

$$(15.)\qquad s = BP = \int_0^8 dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}.$$

Deshalb erhält man durch Anwendung der *Simpson*'schen Regel für $2n = 8$, $h = 1$

$$(16.)\quad s = \frac{1}{3}\Big(1 + 4\sqrt{\frac{9936}{9900}} + 2\sqrt{\frac{9744}{9600}} + 4\sqrt{\frac{9424}{9100}}$$
$$+ 2\sqrt{\frac{8976}{8400}} + 4\sqrt{\frac{8400}{7500}} + 2\sqrt{\frac{7696}{6400}} + 4\sqrt{\frac{6864}{5100}} + \sqrt{\frac{5904}{3600}}\Big).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&& 1 &= 1{,}0000\,0000\\
4\sqrt{9936} : \sqrt{9900} &= & \sqrt{48576} : 55 &= 4{,}0072\,6612\\
2\sqrt{9744} : \sqrt{9600} &= & \sqrt{406} : 10 &= 2{,}0149\,4417\\
4\sqrt{9424} : \sqrt{9100} &= & \sqrt{3430336} : 455 &= 4{,}0705\,8600\\
2\sqrt{8976} : \sqrt{8400} &= & \sqrt{20944} : 70 &= 2{,}0674\,3457\\
4\sqrt{8400} : \sqrt{7500} &= & \sqrt{448} : 5 &= 4{,}2332\,0210\\
2\sqrt{7696} : \sqrt{6400} &= & \sqrt{481} : 10 &= 2{,}1931\,7122\\
4\sqrt{6864} : \sqrt{5100} &= & \sqrt{155584} : 85 &= 4{,}6404\,8678\\
\sqrt{5904} : \sqrt{3600} &= & \sqrt{41} : 5 &= 1{,}2806\,2485;
\end{aligned}$$

folglich findet man für die Bogenlänge $BP$ den Näherungswerth

$$(17.)\qquad s = 25{,}5077\,1581 : 3 = 8{,}5025\,7194.$$

Soll der Quadrant der Ellipse, nämlich

$$(18.)\qquad q = \int_0^{10} dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}$$

berechnet werden, so würde die Rechnung auf Schwierigkeiten stossen, weil

$$f'(x) = \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}$$

für $x = 10$ unendlich gross wird. Um auch in diesem Falle die angenäherte Berechnung von $\int\limits_8^{10} f'(x)dx$ auszuführen, mache man $y$ zur Integrations-Veränderlichen, indem man

$$(19.)\qquad y = \frac{6}{10}\sqrt{100 - x^2},\quad \text{oder}\quad x = \frac{10}{6}\sqrt{36 - y^2}$$

setzt. Dies giebt (Fig. 109)

$$(20.)\qquad dx = -\frac{5ydy}{3\sqrt{36 - y^2}},\quad ds = -dy\sqrt{\frac{1296 + 64y^2}{36(36 - y^2)}},$$

$$(21.)\qquad PA = \int\limits_8^{10} f'(x)\,dx = -\int\limits_{3,6}^{0} dy\sqrt{\frac{324 + 16y^2}{9(36 - y^2)}}$$

$$= +\int\limits_0^{3,6} dy\sqrt{\frac{324 + 16y^2}{9(36 - y^2)}}.$$

Wendet man auf die Berechnung dieses Integrals die *Simpson*'sche Regel an, indem man $2n = 4$, also $h = 0,9$ setzt, so erhält man

$$(22.)\qquad PA = 0,3\left(1 + 4\sqrt{\frac{416}{391}} + 2\sqrt{\frac{116}{91}} + 4\sqrt{\frac{544}{319}} + \sqrt{\frac{41}{16}}\right).$$

Nun ist

$$0,3 = 0,3000\,0000$$

$$1,2\,.\sqrt{416} : \sqrt{391} = \sqrt{234224,64} : 391 = 1,2377\,6880$$

$$0,6\,.\sqrt{116} : \sqrt{91} = \sqrt{3800,16} : 91 = 0,6774\,2239$$

$$1,2\,.\sqrt{544} : \sqrt{319} = \sqrt{249891,84} : 319 = 1,5670\,5902$$

$$0,3\,.\sqrt{41} : \sqrt{16} = \sqrt{3,69} : 4 = 0,4802\,3432;$$

folglich erhält man für $PA$ den Näherungswerth

$$(23.)\qquad PA = 4,2624\,8453,$$

so dass man mit Rücksicht auf Gleichung (17.) für den ganzen Ellipsenquadranten

$$BPA = q = 12{,}7650\,5647 \tag{24.}$$

erhält. Durch wirkliche Berechnung des elliptischen Integrals hatte man auf Seite 306 in § 53 für denselben Ellipsenquadranten

$$q = 12{,}763\,4994 \tag{25.}$$

gefunden, so dass das durch Anwendung der *Simpson*'schen Regel berechnete Resultat um 0,0015 571 d. h. um 0,0001 2200 der Bogenlänge zu gross ist.

Wenn man für die Zahl $n$ noch grössere Werthe wählt, so werden die Resultate natürlich genauer.

## XI. Abschnitt.

# Kubatur der Körper und Complanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale.

### § 61.

### Kubatur der Körper durch Anwendung einfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 163.)

Es war bereits in Abschnitt III gezeigt worden, wie man das Volumen eines Rotationskörpers berechnen kann. Es wurde damals der Körper durch Schnitte, senkrecht zur Rotations-Axe in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, die man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung als Kreiscylinder betrachten darf. Ist z. B. die den Körper begrenzende Fläche durch Rotation der Curve

$$y = f(x) \tag{1.}$$

um die $X$-Axe entstanden, so ist die Grundfläche eines solchen Cylinders ein Kreis mit dem Halbmesser $y$ und dem Flächeninhalte $y^2\pi$. Da der Cylinder die Höhe $dx$ hat, so wird das Volumen einer solchen unendlich dünnen Schicht

$$dV = y^2\pi dx, \tag{2.}$$

also das Volumen des ganzen Rotationskörpers

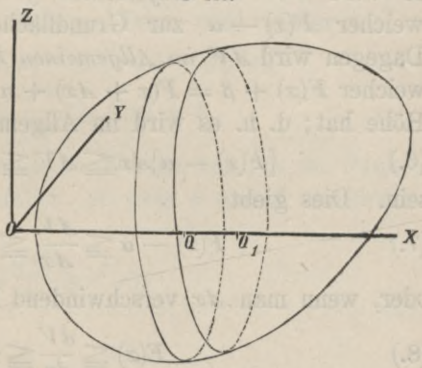
$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \tag{3.}$$

wie bereits in Formel Nr. 94 der Tabelle angegeben ist.

Ein ähnliches Verfahren kann man auch für die Berechnung des Volumens bei andern Körpern anwenden. Man theilt dieselben in unendlich viele, unendlich dünne Schichten durch Schnitte, welche zur $X$-Axe senkrecht stehen, und summirt die Volumina dieser einzelnen Schichten.

Zur Berechnung des Volumens der einzelnen Schichten muss zunächst der Flächeninhalt der einzelnen Schnitte als stetige Function von $x$ bekannt sein, wobei $x = OQ$ der Abstand des betreffenden Schnittes von der $YZ$-Ebene ist (Fig. 110). Es sei also $F(x)$ der Flächeninhalt eines solchen Schnittes, welcher in $F(x + \varDelta x)$ übergeht, wenn $x$ um $\varDelta x = QQ_1$ wächst, d. h. wenn der Schnitt durch den Punkt $Q_1$ der $X$-Axe gelegt wird.

Fig. 110.




Zieht man durch die Umgrenzungen der beiden Schnitte $F(x)$ und $F(x + \varDelta x)$ Parallele zur $X$-Axe, so werden die beiden Umgrenzungscurven der Schnitte in die $YZ$-Ebene projicirt. In Figur 111 sei z. B. die Curve $ABCJEFGK$ die Projection von $F(x)$, und die Curve $ALCDEMGH$ die Projection von $F(x + \varDelta x)$. Die beiden Figuren haben das Stück $ALCJEMGK$ gemeinschaftlich; dieses Stück muss man um

(4.) $\alpha_1 = ABCL$ und $\alpha_2 = EFGM$

vermehren, damit man $F(x)$ erhält, während man

Fig. 111.


(4a.) $$\beta_1 = GHAK \text{ und } \beta_2 = CDEJ$$

hinzufügen muss, damit man $F(x + \varDelta x)$ erhält.

Denselben Schluss wird man auch allgemein ausführen können. Die Projectionen der beiden Schnitte werden ein Flächenstück

(5.) $$F(x) - \alpha = F(x + \varDelta x) - \beta$$

gemeinschaftlich haben, wenn man mit $\alpha$ und $\beta$ die Summe der kleinen Flächenstücke bezeichnet, welche das gemeinsame Stück bezw. zu $F(x)$ und $F(x + \varDelta x)$ ergänzen. In Figur 111 ist z. B.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Dabei sind $\alpha$ und $\beta$ kleine Grössen, welche mit $\varDelta x$ zugleich verschwindend klein werden, weil $F(x)$ als eine stetige Function von $x$ vorausgesetzt worden ist.

Bezeichnet man das Volumen der dünnen Schicht mit $\varDelta V$, so wird $\varDelta V$ *im Allgemeinen grösser* sein als ein Cylinder, welcher $F(x) - \alpha$ zur Grundfläche und $\varDelta x$ zur Höhe hat. Dagegen wird $\varDelta V$ *im Allgemeinen kleiner* sein als ein Cylinder, welcher $F(x) + \beta = F(x + \varDelta x) + \alpha$ zur Grundfläche und $\varDelta x$ zur Höhe hat; d. h. es wird im Allgemeinen

$$[F(x) - \alpha]\varDelta x \leqq \varDelta V \leqq [F(x) + \beta]\varDelta x \tag{6.}$$

sein. Dies giebt

$$F(x) - \alpha \leqq \frac{\varDelta V}{\varDelta x} \leqq F(x) + \beta, \tag{7.}$$

oder, wenn man $\varDelta x$ verschwindend klein werden lässt,

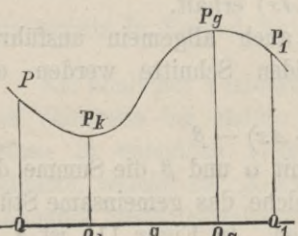
$$F(x) \leqq \frac{dV}{dx} \leqq F(x), \tag{8.}$$

also

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \tag{9.}$$

Wie bereits hervorgehoben wurde, gelten die Schlüsse *nur im Allgemeinen.* Die krumme Fläche, welche die betrachtete Schicht begrenzt, kann möglicher Weise zwischen den beiden Schnitten $F(x)$ und $F(x + \varDelta x)$ solche Einbiegungen oder Ausbiegungen haben, dass der Cylinder mit der Grundfläche $F(x) - \alpha$ und der Höhe $\varDelta x$ nicht ganz *innerhalb* der Schicht $\varDelta V$ liegt, oder dass der Cylinder mit der Grundfläche $F(x) + \beta$ und der Höhe $\varDelta x$ die Schicht $\varDelta V$ nicht vollständig *einschliesst.*

Fig. 112.




In diesem Falle lege man durch eine Gerade $g$, welche zur $X$-Axe parallel ist und die Schicht durchbohrt, eine beliebige Ebene $QPP_1Q_1$ (Fig. 112). Diese Ebene sei auf der einen Seite durch die Gerade $g$ begrenzt und schneide die Figuren $F(x)$ und $F(x + \varDelta x)$ bezw. in den Geraden $QP$ und $Q_1P_1$. Die begrenzende Fläche schneide sie in dem Curvenbogen $PP_1$, welcher in den Punkten $P_k$ und $P_g$ bezw. den kleinsten und den grössten Abstand von der Geraden $g$ haben möge. Dreht sich nun die Ebene $QPP_1Q_1$ um die Gerade $g$, so beschreiben die Punkte $P_k$ und $P_g$ auf der begrenzenden krummen Fläche zwei Curven, deren Projectionen in die $YZ$-Ebene jetzt mit $F(x) - \alpha$ und $F(x) + \beta$ bezeichnet werden mögen. Dann wird wieder

$$[F(x) - \alpha]\Delta x \leqq \Delta V \leqq [F(x) + \beta]\Delta x,$$

$$F(x) - \alpha \leqq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqq F(x) + \beta,$$

also, weil für verschwindend kleine Werthe von $\Delta x$ die Punkte $P_k$ und $P_g$ mit $P$ zusammenfallen, so dass $\alpha$ und $\beta$ verschwindend klein werden,

$$F(x) \leqq \frac{dV}{dx} \leqq F(x);$$

dies giebt wieder

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \qquad V = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)dx.$$

In dieser strengeren Herleitung ist der zuerst behandelte, am häufigsten vorkommende Fall eingeschlossen.

Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „*Kubatur der Körper*".

§ 62.

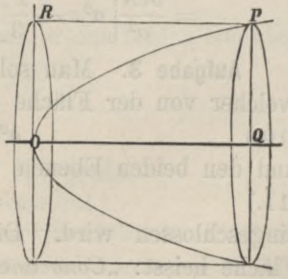
## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von dem *elliptischen Paraboloid* mit der Gleichung

(1.) $$y^2 + a^2z^2 = 2px$$

und von der Ebene mit der Gleichung $x = c$ eingeschlossen ist (Fig. 113).

Fig. 113.




**Auflösung.** Jeder Schnitt senkrecht zur $X$-Axe schneidet aus der Fläche eine Ellipse mit der Gleichnng

(2.) $$\frac{y^2}{2px} + \frac{a^2z^2}{2px} = 1$$

und mit den Halbaxen

$$a_1 = \sqrt{2px}, \quad b_1 = \frac{1}{a}\sqrt{2px}$$

aus. Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist bekanntlich

$$F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{2px}{a}\pi, \tag{3.}$$

folglich findet man für das Volumen des Körpers

$$V = \int_0^c F(x)\,dx = \frac{2p\pi}{a}\int_0^c x dx = \frac{p\pi}{a}\left[x^2\right]_0^c = \frac{c^2 p\pi}{a}. \tag{4.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll das Volumen des dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5.}$$

berechnen.

**Auflösung.** Auch hier ist jeder Schnitt, senkrecht zur $X$-Axe, eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 y^2}{b^2(a^2 - x^2)} + \frac{a^2 z^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1 \tag{6.}$$

und mit den Halbaxen

$$a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad b_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{7.}$$

folglich ist der Flächeninhalt dieser Ellipse

$$F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)\pi. \tag{8.}$$

Das Volumen des Ellipsoids wird daher

$$V = \int_{-a}^{+a} F(x)\,dx = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)dx \tag{9.}$$

$$= \frac{bc\pi}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{bc\pi}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4abc\pi}{3}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von der Fläche $4^{\text{ten}}$ Grades

$$a^2 y^2 + x^2 z^2 = b^2 x^2 \tag{10.}$$

und den beiden Ebenen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a \tag{11.}$$

eingeschlossen wird. Die durch Gleichung (10.) dargestellte Fläche heisst: „*Conocuneus* von *Wallis*“.

**Auflösung.** Die Schnitte, senkrecht zur $X$-Axe, sind wieder Ellipsen mit der Gleichung

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{12.}$$

und mit den Halbaxen

$$a_1 = \frac{bx}{a}, \quad b_1 = b, \tag{13.}$$

folglich wird der Flächeninhalt eines solchen Schnittes

$$F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{b^2 x\pi}{a}. \tag{14.}$$

Das Volumen des oben beschriebenen Körpers wird daher

$$V = \int_0^a F(x)dx = \frac{b^2\pi}{a}\int_0^a xdx = \frac{b^2\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{ab^2\pi}{2}. \tag{15.}$$

Gleichzeitig gewinnt man aus dieser Untersuchung Auskunft über die Gestalt der Fläche.

Aus Gleichung (10.) ergiebt sich zunächst, dass die Coordinaten-Ebenen Symmetrie-Ebenen der Fläche sind, und aus Gleichung (12.) erkennt man, dass die Schnitte, senkrecht zur $X$-Axe, Ellipsen sind, welche alle dieselbe Halbaxe $b_1 = b$ haben, während die andere Halbaxe $a_1 = \frac{bx}{a}$ mit $x$ proportional zunimmt. Die $XY$-Ebene (mit der Gleichung $z = 0$) schneidet die Fläche in zwei geraden Linien mit den Gleichungen

$$ay = \pm bx, \tag{16.}$$

und die $ZX$-Ebene (mit der Gleichung $y = 0$) schneidet die Fläche in der Doppel-Geraden

$$x = 0, \tag{17.}$$

welche mit der $Z$-Axe zusammenfällt, und in den beiden Geraden

$$z = +b, \quad z = -b. \tag{18.}$$

§ 63.

## Einführung mehrfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 164.)

In den soeben behandelten Aufgaben war $F(x)$ der Flächeninhalt einer ebenen Figur, der nach den Ausführungen in Abschnitt II selbst wieder durch Integration ermittelt wird, und zwar war in allen drei Aufgaben

$$F(x) = a_1 b_1 \pi \tag{1.}$$

der Flächeninhalt einer Ellipse

$$b_1^2 y^2 + a_1^2 z^2 = a_1^2 b_1^2, \quad \text{oder} \quad z = \pm \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - y^2}. \tag{2.}$$

Nach Formel Nr. 91 der Tabelle findet man daher $F(x)$ aus der Gleichung

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-a_1}^{+a_1} (z' - z'')dy = \frac{2b_1}{a_1} \int_{-a_1}^{+a_1} dy \sqrt{a_1^2 - y^2} \\ &= \frac{2b_1}{a_1} \left[ \frac{y}{2} \sqrt{a_1^2 - y^2} + \frac{a_1^2}{2} \arcsin\left(\frac{y}{a_1}\right) \right]_{-a_1}^{+a_1} = a_1 b_1 \pi. \end{aligned} \tag{3.}$$

Dabei war in den Aufgaben 1, 2 und 3 bezw.

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2px}, & b_1 = \frac{1}{a}\sqrt{2px}; \\ a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, & b_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \\ a_1 = \frac{bx}{a}, & b_1 = b. \end{cases} \tag{4.}$$

Daraus erkennt man auch, dass in der Gleichung (3.) die Integrationsgrenzen $-a_1$ und $+a_1$ noch Functionen von $x$ sind.

In ähnlicher Weise wird auch die Aufgabe, das Volumen eines Körpers zu berechnen, *ganz allgemein* zu behandeln sein. Den Schnitt, welcher senkrecht auf der $X$-Axe steht, und dessen Flächeninhalt mit $F(x)$ bezeichnet worden ist, erhält man, indem man in den Gleichungen der den Körper oben und unten begrenzenden Flächen

$$z' = g(x, y) \quad \text{und} \quad z'' = h(x, y) \tag{5.}$$

die Grösse $x$ als *Constante* betrachtet. Setzt man

$$z' - z'' = g(x, y) - h(x, y) = f(x, y), \tag{6.}$$

so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

$$F(x) = \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'')dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy, \tag{7.}$$

wobei im Allgemeinen, je nach den Bedingungen der Aufgabe,

$$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x) \tag{8.}$$

noch Functionen von $x$ sein werden. Da nun nach Formel Nr. 163 der Tabelle das Volumen des Körpers

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{9.}$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'')dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy. \tag{10.}$$

Besondere Aufmerksamkeit ist dabei auf die richtige Bestimmung der Grenzen $y_1 = \varphi(x)$ und $y_2 = \psi(x)$ zu verwenden. Den Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (10.) nennt man *„ein Doppelintegral“*.

Am besten wird man das angedeutete Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

**Aufgabe 1.** Die Gleichung

$$p(z - z_0) = xy \tag{11.}$$

stellt ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben von dieser Fläche, unten von der $XY$-Ebene, vorn und rückwärts von den Ebenen $y = c$ und $y = d$, links und rechts von den Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Dabei ist $z_0$ so gross gewählt, dass das durch die angegebenen Grenzen eingeschlossene Stück der Fläche oberhalb der $XY$-Ebene liegt.

**Auflösung.** In diesem Falle ist

$$z' = z_0 + \frac{xy}{p}, \quad z'' = 0; \tag{12.}$$

die Grenzen der Integrations-Veränderlichen $y$ sind constant, denn es ist

$$y_1 = c, \quad y_2 = d. \tag{13.}$$

Man erhält daher

$$(14.)\qquad V = \int_a^b dx \int_c^d (z' - z'')dy = \frac{1}{p}\int_a^b dx \int_c^d (pz_0 + xy)dy$$

$$= \frac{1}{p}\int_a^b dx \left[pz_0 y + \frac{xy^2}{2}\right]_c^d$$

$$= \frac{1}{2p}\int_a^b dx [2pz_0(d-c) + (d^2 - c^2)x]$$

$$= \frac{d-c}{2p}\left[2pz_0 x + (d+c)\frac{x^2}{2}\right]_a^b,$$

also

$$(15.)\qquad V = \frac{(b-a)(d-c)}{4p}[4pz_0 + (a+b)(c+d)].$$

**Aufgabe 2.** Die Gleichung

$$(16.)\qquad 2p(z - z_0) = y^2 - m^2x^2$$

stellt ein *hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben durch diese Fläche, unten durch die $XY$-Ebene und seitlich durch den *Cylinder*

$$(17.)\qquad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird. Dabei sei $z_0$ wieder so gross gewählt, dass das von dem Cylinder eingeschlossene Stück des Paraboloids oberhalb der $XY$-Ebene liegt.

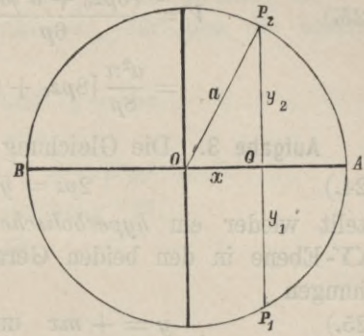
**Auflösung.** Auch hier ist $z'' = 0$, also

$$(18.)\qquad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{1}{2p}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (2pz_0 + y^2 - m^2x^2)dy$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{x_1}^{x_2} dx \left[2pz_0 y + \frac{y^3}{3} - m^2x^2y\right]_{y_1}^{y_2}.$$

In diesem Falle sind aber $y_1$ und $y_2$ Functionen von $x$, denn der Schnitt, welchen man durch den Punkt $Q$ der $X$-Axe

Fig. 114.




zur $X$-Axe senkrecht legt, schneidet den begrenzenden Cylinder in zwei Geraden, welche auf der $XY$-Ebene in den Punkten $P_1$ und $P_2$ senkrecht stehen (Fig. 114). Deshalb wird

$$(19.)\quad \begin{cases} y_2 = +\sqrt{a^2 - x^2}, \\ y_1 = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

und

$$(20.)\quad V = \frac{1}{2p}\int\limits_{x_1}^{x_2} 2dx\sqrt{a^2-x^2}\,[2pz_0 - m^2x^2 + \tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)]$$

$$= \frac{6pz_0+a^2}{3p}\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2-x^2} - \frac{3m^2+1}{3p}\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 73, 71 und 74 der Tabelle

$$(21.)\quad \int x^2dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left[x(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2-x^2} + a^4\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right],$$

$$(22.)\quad \int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dabei muss der Punkt $Q$ den ganzen Kreisdurchmesser $BA$ durchlaufen, d. h. $x_1$ ist gleich $-a$ und $x_2$ gleich $+a$. Dies giebt

$$(21a.)\quad \int\limits_{-a}^{+a} x^2dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^4}{4}\arcsin 1 = \frac{a^4\pi}{8},$$

$$(22a.)\quad \int\limits_{-a}^{+a} dx\sqrt{a^2-x^2} = a^2\arcsin 1 = \frac{a^2\pi}{2},$$

also

$$(23.)\qquad V = \frac{(6pz_0 + a^2)a^2\pi}{6p} - \frac{(3m^2+1)a^4\pi}{24p}$$

$$= \frac{a^2\pi}{8p}[8pz_0 + (1-m^2)a^2].$$

**Aufgabe 3.** Die Gleichung

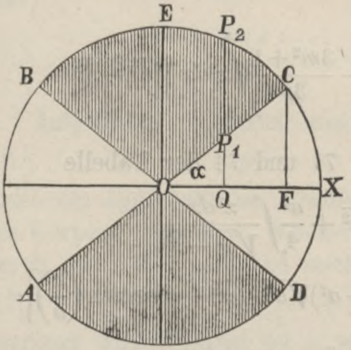
$$(24.)\qquad 2pz = y^2 - m^2x^2$$

stellt wieder ein *hyperbolisches Paraboloid* dar, welches die $XY$-Ebene in den beiden Geraden $AC$ und $BD$ mit den Gleichungen

$$(25.)\qquad y = +mx \quad \text{und} \quad y = -mx$$

schneidet (Fig. 115); man soll das Volumen des Körpers berechnen, der oben von der Fläche, unten von der $XY$-Ebene und seitlich von dem Cylinder

Fig. 115.




$$(26.)\qquad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird.

**Auflösung.** Wenn die Constante $p$ positiv ist, so liegt nur derjenige Theil der Fläche *über* der $XY$-Ebene, für welchen $y^2 > m^2x^2$ ist; das Körperstück, welches berechnet werden soll, liegt also ausschliesslich über dem schraffirten Theile der Figur. Da die $XZ$-Ebene und die $YZ$-Ebene Symmetrie-Ebenen sind, so genügt es, das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher über dem Kreissector $COE$ liegt, wenn man das gefundene Resultat noch mit 4 multiplicirt. Es wird also

$$(27.)\qquad V = 4\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{2}{p}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (y^2 - m^2x^2)dy,$$

wobei

$$(28.)\qquad y_1 = QP_1 = mx, \quad y_2 = QP_2 = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(29.)\qquad x_1 = 0, \quad x_2 = OF = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} = a\cos\alpha$$

ist, wenn man den Winkel $XOC$ mit $\alpha$ bezeichnet. Es ist nämlich $x_2$ die Abscisse des Punktes $C$, für den die beiden Gleichungen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y = mx$$

gemeinschaftlich gelten, für den also

$$a^2 - x^2 = m^2x^2, \quad \text{oder} \quad x^2(1 + m^2) = a^2$$

wird. Deshalb findet man aus Gleichung (27.)

$$(30.)\quad V = \frac{2}{p}\int_{x_1}^{x_2} dx\left[\frac{y^3}{3} - m^2x^2y\right]_{mx}^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{2}{3p}\int_{x_1}^{x_2} dx\left[\sqrt{a^2-x^2}(a^2 - x^2 - 3m^2x^2) + 2m^3x^3\right]$$

$$= \frac{2}{3p}\left[a^2\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2-x^2} - (1 + 3m^2)\int_{x_1}^{x_2} x^2\,dx\sqrt{a^2-x^2} + 2m^3\int_{x_1}^{x_2} x^3dx\right].$$

Nun ist nach Gleichung (22.) und (29.)

$$(31.)\quad \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{a^2-x^2} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{a\cos\alpha}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin\alpha\cos\alpha + \arcsin(\cos\alpha)\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{m}{1 + m^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right];$$

nach Gleichung (21.) ist ferner

$$(32.)\quad \int_{x_1}^{x_2} x^2dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{8}\left[x(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2-x^2} + a^4\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{a\cos\alpha}$$

$$= \frac{a^4}{8}\left[\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) + \arcsin(\cos\alpha)\right]$$

$$= \frac{a^4}{8}\left[\frac{m(1 - m^2)}{(1 + m^2)^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right];$$

und endlich ist

$$(33.)\qquad \int\limits_{x_1}^{x_2} x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{a\cos\alpha} = \frac{a^4}{4}\cos^4\alpha = \frac{a^4}{4(1+m^2)^2},$$

folglich wird nach Gleichung (30.)

$$V = \frac{2a^4}{3p}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{m}{1+m^2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) - \frac{1+3m^2}{8}\Big(\frac{m(1-m^2)}{(1+m^2)^2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) + \frac{m^3}{2(1+m^2)^2}\Big],$$

oder

$$(34.)\qquad V = \frac{a^4}{8p}[2m + (1-m^2)(\pi - 2\alpha)].$$

**Aufgabe 4.** Aus einer Kugel mit der Gleichung

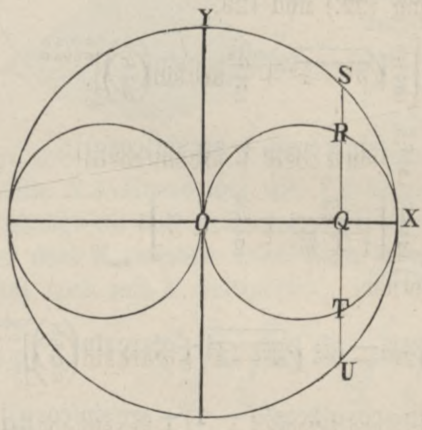
$$(35.)\qquad x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

bohren die beiden Kreiscylinder mit den Gleichungen

$$(36.)\qquad x^2+y^2-ax=0 \quad \text{und} \quad x^2+y^2+ax=0$$

Oeffnungen heraus; wie gross ist das Volumen des übrig gebliebenen Theiles der Kugel?

Fig. 116.




$OQ = x,\ QS = \sqrt{a^2-x^2},$
$QR = \sqrt{ax-x^2}.$

**Auflösung.** Die $XY$-Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem Halbmesser $a$ und die beiden Kreiscylinder in Kreisen mit den Halbmessern $\frac{a}{2}$ (Fig. 116). Legt man durch den Punkt $Q$ der $X$-Axe einen Schnitt senkrecht zur $X$-Axe, so schneidet derselbe aus der Kugel einen Kreis mit dem Halbmesser

$$(37.)\qquad QS = \sqrt{a^2-x^2}$$

und aus dem einen Cylinder die beiden Geraden $P'P''$ und $N'N''$, deren Abstand

$$QR = \sqrt{ax - x^2}$$

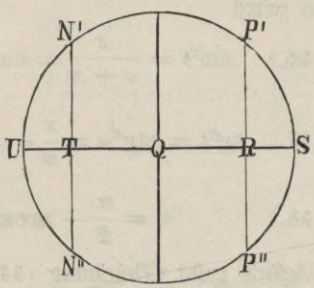
vom Mittelpunkt $Q$ des Kreises sich aus der Gleichung

(38.) $\quad x^2 + y^2 - ax = 0,$

oder

(38a.) $\quad y = \sqrt{ax - x^2}$

Fig. 117.




ergiebt (Figur 117). Da der Kreis um $Q$ auf der Kugelfläche liegt, so genügen die Coordinaten der Punkte $P'$ und $P''$ der Gleichung (35.), die man auf die Form

$$(39.)\quad \begin{cases} z' = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ z'' = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

bringen kann. Man erhält daher für den Flächeninhalt des Schnittes $F(x)$, welcher aus den beiden Kreissegmenten $P'SP''$ und $N'UN''$ besteht,

$$(40.)\quad F(x) = 2\int_{y_1}^{y_2}(z' - z'')dy = 4\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei

$$(41.)\quad y_1 = QR = \sqrt{ax - x^2},\quad y_2 = QS = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist. Nun wird nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$(42.)\quad \int dy\sqrt{c^2 - y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{c^2 - y^2} + \frac{c^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{c}\right),$$

folglich ist, wenn man $c^2 = a^2 - x^2$ setzt,

$$(43.)\quad F(x) = 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{a^2 - x^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)\right]_{y_1}^{y_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.)

$$F(x) = 2(a^2 - x^2)\left(\arcsin 1 - \arcsin\sqrt{\frac{ax - x^2}{a^2 - x^2}}\right) - 2\sqrt{ax - x^2}\sqrt{a^2 - ax},$$

also

$$(44.)\quad F(x) = 2(a^2 - x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a + x}}\right) - 2(a - x)\sqrt{ax}.$$

Setzt man noch

$$\text{(45.)}\qquad \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = t = \frac{\pi}{2} - u,$$

so wird

$$\text{(46.)}\qquad \sin^2 t = \frac{x}{a+x} = \cos^2 u,\quad \cos^2 t = \frac{a}{a+x} = \sin^2 u,$$

$$\text{(47.)}\qquad \operatorname{tg}^2 t = \operatorname{ctg}^2 u = \frac{x}{a},\quad t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$\text{(48.)}\qquad u = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

folglich geht Gleichung (44.) über in

$$\text{(49.)}\qquad F(x) = 2(a^2 - x^2)\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - 2(a-x)\sqrt{ax}.$$

Da die $YZ$-Ebene den Körper in zwei symmetrische Theile zerlegt, so erhält man

$$\text{(50.)}\qquad V = 2\int_0^a F(x)dx = 4\int_0^a (a^2 - x^2)\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot dx$$
$$- 4\sqrt{a}\int_0^a (a-x)\sqrt{x}\,dx.$$

Setzt man in Uebereinstimmung mit Gleichung (48.)

$$\text{(51.)}\qquad x = aw^2,\quad u = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}} = \operatorname{arcctg} w,\quad dv = (a^2 - x^2)dx,$$

also

$$\text{(52.)}\qquad du = -\frac{dw}{1+w^2},\quad v = a^2x - \frac{x^3}{3} = \frac{a^3}{3}(3w^2 - w^6),$$

so wird nach Formel Nr. 61 der Tabelle durch partielle Integration

$$\text{(53.)}\qquad \int (a^2 - x^2)\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{a}}$$
$$+ \frac{a^3}{3}\int\frac{-w^6 + 3w^2}{w^2+1}dw.$$

Nun ist

$$(54.)\quad \int \frac{w^6 - 3w^2}{w^2 + 1} dw = \int \left( w^4 - w^2 - 2 + \frac{2}{1 + w^2} \right) dw$$

$$= \frac{w^5}{5} - \frac{w^3}{3} - 2w - 2u$$

$$= \sqrt{\frac{x}{a}} \left( \frac{x^2}{5a^2} - \frac{x}{3a} - 2 \right) - 2 \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{x}{a}},$$

folglich geht Gleichung (53.) über in

$$(55.)\quad \int (a^2 - x^2) \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot dx = \frac{\sqrt{ax}}{45} (-3x^2 + 5ax + 30a^2)$$

$$+ \frac{2a^3 + 3a^2x - x^3}{3} \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$(56.)\quad \int_0^a (a^2 - x^2) \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot dx =$$

$$+ \frac{32a^3}{45} + \frac{4a^3}{3} \operatorname{arc\,ctg} 1 - \frac{2a^3}{3} \operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{32a^3}{45}.$$

Ferner ist

$$(57.)\quad \int_0^a (a - x) \sqrt{x}\, dx = \left[ \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^a = \frac{4a^2\sqrt{a}}{15},$$

folglich ist nach Gleichung (50.)

$$(58.)\quad V = \frac{128a^3}{45} - \frac{16a^3}{15} = \frac{16a^3}{9}.$$

Man hätte auch das Volumen $V_1$ der beiden Cylinder berechnen können, soweit sie in der Kugel liegen. Zieht man dann das gefundene Resultat von dem Volumen der ganzen Kugel, nämlich von $\frac{4a^3\pi}{3}$, ab, so ist die Aufgabe gelöst. Nach Figur 116 und 117 wird bei dieser Behandlung

$$(59.)\quad F_1(x) = 4 \int_0^{y_1} dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei wieder

$$y_1 = QR = \sqrt{ax - x^2} \tag{60.}$$

ist. Dies giebt nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$F_1(x) = 2\left[y\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-x^2)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right]_0^{y_1} \tag{61.}$$

$$= 2(a-x)\sqrt{ax} + 2(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}},$$

folglich findet man

$$V_1 = 2\int_0^a F_1(x)\,dx = 4\sqrt{a}\int_0^a (a-x)\sqrt{x}\,dx \tag{62.}$$

$$+ 4\int_0^a (a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx.$$

Indem man dieselben Bezeichnungen anwendet wie in den Gleichungen (45.) bis (48.), erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (56.)

$$\int_0^a (a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = \int_0^a (a^2-x^2)\left(\frac{\pi}{2} - u\right)dx \tag{63.}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a - \int_0^a (a^2-x^2)\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot dx$$

$$= \frac{a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{45},$$

also

$$V_1 = 4\sqrt{a}\left[\frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^a + \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{128a^3}{45} \tag{64.}$$

$$= \frac{16a^3}{15} + \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{128a^3}{45} = \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{16a^3}{9},$$

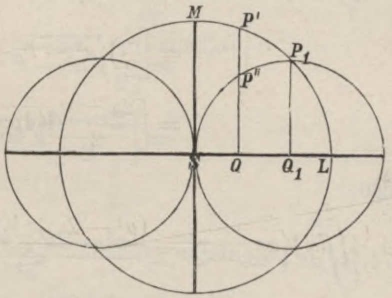
folglich wird wieder

$$V = \frac{4a^3\pi}{3} - V_1 = \frac{16a^3}{9}. \tag{65.}$$

Mit demselben Rechte, mit welchem man bisher die Schnitte senkrecht zur $X$-Axe legte, darf man natürlich auch zunächst Schnitte senkrecht zur $Y$-Axe oder senkrecht zur $Z$-Axe legen.

Wenn man z. B. in der letzten Aufgabe den Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, durch Schnitte, senkrecht zur $Z$-Axe, in Schichten zerlegt, so stellt Figur 118 einen solchen Schnitt dar, wobei $OS = z$ der Abstand dieses Schnittes von der $XY$-Ebene ist. Die Kugel wird in einem Kreise mit dem Halbmesser

Fig. 118.




(66.) $\quad SL = \sqrt{a^2 - z^2},$

und die beiden Cylinder werden in Kreisen mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ geschnitten. Da die Axen $SL$ und $SM$ die Figur in 4 symmetrische Theile zerlegen, so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

$$F(z) = 4SP_1M = 4\int_0^{x_1}(y' - y'')dx, \tag{67.}$$

wobei $P'$ ein Punkt der Kugel und $P''$ ein Punkt des Cylinders ist, so dass

$$y' = \sqrt{a^2 - z^2 - x^2}, \quad y'' = \sqrt{ax - x^2} \tag{68.}$$

wird, folglich erhält man

$$F(z) = 4\int_0^{x_1}(\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} - \sqrt{ax - x^2})dx. \tag{69.}$$

Im Punkte $P_1$ werden $y'$ und $y''$ einander gleich; man findet daher den Werth von $x_1$, indem man

$$y' = y'', \quad \text{oder} \quad a^2 - z^2 - x^2 = ax - x^2 \tag{70.}$$

setzt; dies giebt

$$x_1 = \frac{a^2 - z^2}{a}. \tag{71.}$$

Nun wird nach Formel Nr. 74 der Tabelle

$$\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - z^2 - x^2}\,.dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} + \frac{a^2 - z^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - z^2}}\right)\right]_0^{x_1} \tag{72.}$$
$$= \frac{(a^2 - z^2)z\sqrt{a^2 - z^2}}{2a^2} + \frac{a^2 - z^2}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a_2 - z^2}}{a}\right).$$

Ferner wird, wenn man

$$2x = t + a, \quad \text{also} \quad 2a - 2x = a - t \tag{73.}$$

setzt,

$$4\int_0^{x_1} dx\sqrt{ax - x^2} = \int_{(0)}^{(x_1)} dt\sqrt{a^2 - t^2}$$

$$= \left[\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{t}{a}\right)\right]_{(0)}^{(x_1)},$$

$$= \left[\frac{2x - a}{2}\sqrt{4ax - 4x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{2x - a}{a}\right)\right]_0^{x_1},$$

also

$$4\int_0^{x_1} dx\sqrt{ax - x^2} = \frac{(a^2 - 2z^2)z\sqrt{a^2 - z^2}}{a^2} + \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{a^2 - 2z^2}{a^2}\right) + \arcsin 1\right]. \tag{74.}$$

Deshalb ist nach Gleichung (69.)

$$F(z) = z\sqrt{a^2 - z^2} + 2(a^2 - z^2)\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{a^2 - 2z^2}{a^2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{75.}$$

Setzt man hierbei

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}\right) = t, \quad \text{also} \quad \sin^2 t = \frac{a^2 - z^2}{a^2}, \quad \cos^2 t = \frac{z^2}{a^2}, \tag{76.}$$

so wird

$$z = a\cos t, \quad \sqrt{a^2 - z^2} = a\sin t, \quad dz = -a\sin t dt, \tag{77.}$$

$$a^2 - 2z^2 = a^2(1 - 2\cos^2 t) = -a^2\cos(2t) = a^2\cos(\pi - 2t)$$

$$= a^2\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right),$$

folglich ist

$$\arcsin\left(\frac{a^2 - 2z^2}{a^2}\right) = 2t - \frac{\pi}{2}, \tag{78.}$$

und deshalb

$$F(z) = a^2(\sin t\cos t + 2t\sin^2 t - t). \tag{79.}$$

Dies giebt

$$(80.)\quad V = 2\int\limits_0^a F(z)\,dz = 2a^3\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin^2 t\cos t - 2t\sin^3 t + t\sin t)dt$$

$$= 2a^3\Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin t - 2\sin^3 t)dt\Big].$$

Dabei ist

$$(81.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t dt = \tfrac{1}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$\int t(\sin t - 2\sin^3 t)dt = \int t(2\cos^2 t - 1)\sin t dt$$

$$= t(\cos t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t) - \int(\cos t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t)dt$$

$$= t(\cos t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t) - \tfrac{1}{3}\sin t - \tfrac{2}{9}\sin^3 t,$$

also

$$(82.)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin t - 2\sin^3 t)dt = -\frac{5}{9},$$

folglich wird nach Gleichung (80.) wieder

$$(83.)\quad V = 2a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right) = \frac{16a^3}{9}.$$

## § 64.

## Theorie der mehrfachen Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 165.)

Wie aus dem vorhergehenden Paragraphen zu ersehen ist, wird man durch die Kubatur der Körper auf *Doppelintegrale* geführt, und zwar in folgender Weise. Es war

$$(1.)\quad F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

wobei

$$(2.)\quad f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

und

(3.) $$z' = g(x, y), \quad z'' = h(x, y)$$

die Gleichungen der beiden, den Körper oben und unten begrenzenden Flächen sind. Bei dem in Gleichung (1.) aufgestellten Integrale ist $y$ die *Integrations-Veränderliche*, während $x$ als *Constante* betrachtet werden muss. Deshalb dürfen auch die Grenzen

(4.) $$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x)$$

dieses Integrals noch Functionen von $x$ sein, wobei die Gleichungen (4.) auf der $XY$-Ebene senkrecht stehende Cylinder darstellen, welche den Körper vorn und rückwärts begrenzen. Das Volumen des Körpers wird dann

(5.) $$V = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

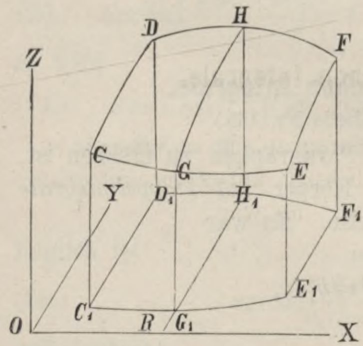
Aus dem Vorstehenden folgt gleichzeitig, dass auch umgekehrt ein solches Doppelintegral stets als das Volumen eines Körpers betrachtet werden kann, der oben von der Fläche

(6.) $$z = f(x, y),$$

unten von der $XY$-Ebene, vorn und rückwärts durch die Cylinder

(7.) $$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

Fig. 119.




links und rechts von den Ebenen

(8.) $$x_1 = a, \quad x_2 = b$$

begrenzt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus Figur 119; dabei entspricht der Gleichung (6.) die Fläche $CDFE$, den Gleichungen (7.) entsprechen die Cylinder $CC_1E_1E$ und $DD_1F_1F$, und den Gleichungen (8.) entsprechen die Ebenen $CC_1D_1D$ und $EE_1F_1F$.

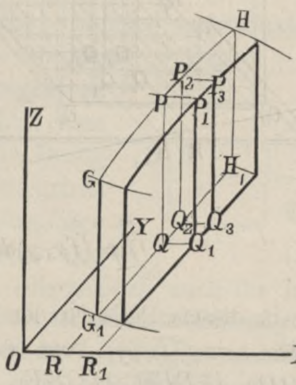
Für einen constanten Werth von $x$, z. B. für $x = OR$ erhält man eine Ebene, senkrecht zur $X$-Axe, welche aus dem Körper die ebene Figur

$$(9.)\qquad GG_1H_1H = F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$$

ausschneidet.

Aus dieser geometrischen Deutung des Doppelintegrals folgt auch, dass es als eine Summe von *zweifach* unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen aufgefasst werden kann. Der betrachtete Körper wird nämlich durch die Schnitte, senkrecht zur $X$-Axe, in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, und jede solche Schicht wird wieder durch Schnitte, senkrecht zur $Y$-Axe, in unendlich viele, unendlich dünne Säulchen (Fig. 120) zerlegt, deren Höhe

Fig. 120.




$$(10.)\qquad QP = z = f(x, y),$$

und deren Grundfläche ein unendlich kleines Rechteck $QQ_1Q_3Q_2$ mit den Seiten $dx$, $dy$ und dem Flächeninhalte $dxdy$ ist.

Da bei der Integration in Bezug auf $y$ die Grössen $x$ und $dx$ constant bleiben, so kann man natürlich die Gleichung (5.) auch in der Form

$$(11.)\qquad V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dxdy$$

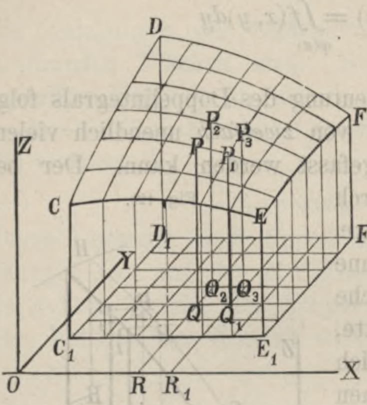
schreiben, wobei

$$(12.)\qquad f(x, y)dxdy = zdxdy$$

das Volumen eines solchen unendlich dünnen Säulchens $QQ_1Q_3Q_2$ $PP_1P_3P_2$ ist.

Auch die Ordnung der Integration darf man ändern, denn man kann die unendlich dünnen Säulchen, welche zu demselben Werthe von $y$ gehören, durch Summation zu einer unendlich dünnen Schicht vereinigen, welche zur $XZ$-Ebene parallel ist, und dann durch Summation aller dieser Schichten den ganzen Körper erhalten. Zu beachten ist aber, dass hierbei im Allgemeinen auch eine *Aenderung der Integrationsgrenzen* stattfindet.

Fig. 121.




Nur in dem Falle, wo die Integrationsgrenzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von $x$ unabhängig sind, werden die Cylinder

$$(13.)\qquad y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

in Ebenen

$$(14.)\qquad y = c \quad \text{und} \quad y = d$$

übergehen (Fig. 121). Dann folgt aus der geometrischen Deutung des Doppelintegrals ohne Weiteres

$$(15.)\qquad \int_a^b dx \int_c^d f x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx,$$

denn in diesem Falle ist der Körper begrenzt von der krummen Fläche $z = f(x, y)$, von der $XY$-Ebene und den 4 Ebenen $C_1CDD_1$, $E_1EFF_1$, $C_1CEE_1$, $D_1DFF_1$ mit den Gleichungen

$$(16.)\qquad x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d.$$

Dies giebt den Satz:

*Sind die Grenzen eines Doppelintegrals in Bezug auf $x$ und $y$ constante Grössen, so wird der Werth des Doppelintegrals nicht geändert, wenn man die Ordnung der Integration in Bezug auf die beiden Veränderlichen $x$ und $y$ umkehrt, während die Integrationsgrenzen unverändert bleiben.*

Jetzt ergiebt sich von selbst, was man unter einem *dreifachen Integrale*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)dz$$

zu verstehen hat. In ähnlicher Weise kann man auch ein *n-faches Integral* erklären und als eine Summe von $n$-fach unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen deuten.

Es ist möglich, das Volumen eines Körpers auch als ein dreifaches Integral darzustellen, denn es ist

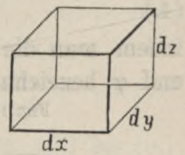
$$z' - z'' = \int_{z''}^{z'} dz = \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dz,$$

also

(17.) $$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dz = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{h(x,y)}^{g(x,y)} dx dy dz.$$

Hierbei ist $dxdydz$ ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon (Fig. 122), welches das *Volumenelement* genannt wird. Die angegebenen Integrationsgrenzen deuten darauf hin, dass man zuerst in Bezug auf $z$, dann in Bezug auf $y$ und zuletzt in Bezug auf $x$ integriren soll. Man darf aber auch die Reihenfolge der Integrationen ändern, nur muss man dabei beachten, dass sich dann im Allgemeinen auch die Integrationsgrenzen ändern. Wenn man z. B. zuerst in Bezug auf $x$ integrirt, so sind die Grenzen $x_1$ und $x_2$ im Allgemeinen noch Functionen von $y$ und $z$, welche durch die Gleichungen der begrenzenden Flächen bestimmt sind.

Fig. 122.




§ 65.

## Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 166—168.)

Wie man bei den einfachen Integralen durch Substitution eine neue Integrations-Veränderliche zur leichteren Ermittelung des gesuchten Integrals einführte, so kann man auch bei den $n$-fachen Integralen durch Substitution $n$ neue Veränderliche einführen und dadurch möglicher Weise die Berechnung des mehrfachen Integrals wesentlich erleichtern. Bei einem Doppelintegrale

(1.) $$V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy$$

setze man z. B.

(2.) $$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

und mache $u$ und $v$ zu *Integrations-Veränderlichen.* Während aber bei der Darstellung von $V$ durch Gleichung (1.) constante Werthe von $x$ Schnitte, senkrecht zur $X$-Axe, lieferten, erhält man für $u = c$ aus den Gleichungen (2.) die Gleichungen

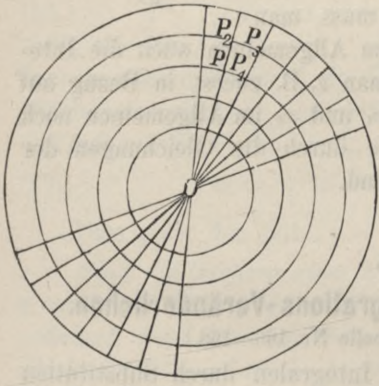
(3.) $$x = f_1(c, v), \quad y = f_2(c, v),$$

welche für jeden Werth von $c$ einer Curve in der $XY$-Ebene oder einer Cylinderfläche im Raume entsprechen. Ebenso erhält man für constante Werthe von $v$ aus den Gleichungen (2.) wieder Cylinderflächen, welche auf der $XY$-Ebene senkrecht stehen. Setzt man z. B.

(4.) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

indem man die beiden neuen Integrations-Veränderlichen mit $r$ und $\varphi$ bezeichnet, so erhält man für constante Werthe von $r$

Fig. 123.



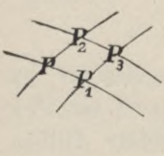
concentrische Kreise (Fig. 123), bezw. coaxiale Kreiscylinder, und für constante Werthe von $\varphi$ gerade Linien durch den Nullpunkt, bezw. Ebenen durch die $Z$-Axe.

So lange $x$ und $y$ die Integrations-Veränderlichen waren, musste man sich den Körper in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen zerlegt denken, deren Höhe $z = f(x, y)$, und deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $dx$, $dy$ und dem Flächeninhalte $dxdy$ ist. Jetzt wird der Körper auch in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen mit der Höhe

(5.) $$z = f(x, y) = f[f_1(u, v), \quad f_2(u, v)]$$

zerlegt, aber die Grundflächen $PP_1P_3P_2$ (Fig. 124) sind nicht

Fig. 124.




mehr Rechtecke mit dem Flächeninhalte $dxdy$, sondern kleine Vierecke mit den Ecken $P$, $P_1$, $P_3$, $P_2$. Die Coordinaten dieser Punkte entsprechen nach den vorhergehenden Ausführungen bezw. den Werthen $(u, v)$, $(u + du, v)$, $(u + du, v + dv)$, $(u, v + dv)$, d. h. es wird

$$(6.)\qquad x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial u}du, \qquad\qquad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial u}du,$$

$$(7.)\qquad x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad\qquad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$(8.)\qquad x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad y_3 = y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Vierecks $PP_1P_3P_2$, da man die Seiten als gerade Linien betrachten kann,

$$G = \tfrac{1}{2}[x(y_1 - y_2) + x_1(y_3 - y) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y - y_3)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[(x_3 - x)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y)],$$

oder

$$(9.)\qquad 2G = \begin{vmatrix} x_3 - x, & x_2 - x_1 \\ y_3 - y, & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.) bis (8.)

$$2G = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, & \frac{\partial x}{\partial v}dv - \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, & \frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial y}{\partial u}du \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Elemente der zweiten Colonne von denen der ersten Colonne subtrahirt,

$$(10.)\quad 2G = 2du \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}dv - \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial y}{\partial u}du \end{vmatrix} = 2du\,dv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

also

$$(10a.)\qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv.$$

Deshalb ist das Volumen eines solchen Säulchens

$$(11.)\qquad f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

und das Volumen des ganzen Körpers

$$(12.)\qquad V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

wobei man für $x$ und $y$ noch die in Gleichung (2.) angegebenen Werthe einsetzen und die Integrationsgrenzen passend bestimmen muss.

Den Ausdruck

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \tag{13.}$$

nennt man „*die Functionaldeterminante*".

Aus den Gleichungen (1.) und (12.) folgt ganz allgemein für die Doppelintegrale die Formel

$$\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_{g(u)}^{h(u)} f(x,y)\,.\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv. \tag{14.}$$

Für den Fall, dass man durch die Gleichungen

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{15.}$$

ebene Polarcoordinaten einführt, wird z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi, \tag{16.}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=+r\cos\varphi; \tag{17.}$$

die Functionaldeterminante ist daher

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial r}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r, \tag{18.}$$

folglich geht Gleichung (14.) über in

$$\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,.\,rd\varphi dr. \tag{19.}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass man zuerst in Bezug auf $r$ und dann in Bezug auf $\varphi$ integrirt; man kann aber auch zuerst in Bezug auf $\varphi$ und dann in Bezug auf $r$ integriren, nur muss man dann die Grenzen anders bestimmen.

Das in Gleichung (19.) enthaltene Resultat findet man noch leichter, wenn man beachtet, dass die Grundflächen $PP_1P_3P_2$

in diesem Falle kleine Rechtecke mit den Seiten $rd\varphi$ und $dr$ sind (Fig. 123).

Wie nützlich die Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen mitunter bei der Ermittelung von Doppelintegralen ist, kann man z. B. aus den in § 63 behandelten Aufgaben ersehen. So war in Aufgabe 2

$$V = \frac{1}{2p}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}(2pz_0 + y^2 - m^2x^2)dxdy. \tag{20.}$$

Führt man in diesem Falle für die rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $y$ ebene Polarcoordinaten durch die Gleichungen (15.) ein, so erhält man nach Gleichung (19.)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a[2pz_0 + r^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)]rdr \\ &= \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[pz_0r^2 + \frac{r^4}{4}(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{8p}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi[4pz_0 + a^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)], \end{aligned} \tag{21.}$$

und dies giebt nach Formel Nr. 62 und 63 der Tabelle in Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultate

$$\begin{aligned} V &= \frac{a^2}{8p}\left[4pz_0\varphi - \frac{1+m^2}{2}a^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1-m^2}{2}a^2\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2\pi}{8p}[8pz_0 + (1-m^2)a^2]. \end{aligned} \tag{22.}$$

In Aufgabe 3 (vgl. Fig. 115) sollte

$$V = \frac{2}{p}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}(y^2 - m^2x^2)dxdy \tag{23.}$$

berechnet werden, wobei

$$m = \operatorname{tg}\alpha,\quad y_1 = mx,\quad y_2 = \sqrt{a^2 - x^2},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = a\cos\alpha$$

war. Durch Einführung von Polarcoordinaten wird nach Gleichung (19.)

$$(24.)\qquad V = \frac{2}{p}\int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a r^2(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi) r dr$$

$$= \frac{a^4}{2p}\int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi)d\varphi,$$

also nach Formel Nr. 62 und 63 der Tabelle

$$(25.)\quad V = \frac{a^4}{4p}\Big[-(1+m^2)\sin\varphi\cos\varphi + (1-m^2)\varphi\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^4}{4p}\Big[(1-m^2)\frac{\pi}{2} + (1+m^2)\sin\alpha\cos\alpha - (1-m^2)\alpha\Big],$$

oder, da $1 + m^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ist,

$$(26.)\qquad V = \frac{a^4}{8p}[2m + (1-m^2)(\pi - 2\alpha)].$$

In Aufgabe 4 war nach den Gleichungen (40.) und (50.) in § 63

$$(27.)\qquad V = 8\int\limits_0^a\int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.\,dxdy.$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten wird nach Gleichung (19.)

$$(28.)\qquad V = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^a rdr\sqrt{a^2-r^2},$$

also nach Formel Nr. 75 der Tabelle

$$(29.)\qquad V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)\sqrt{a^2-r^2}\right]_{a\cos\varphi}^{a}$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = -\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi).$$

Dies giebt wieder

$$(30.)\qquad V = -\frac{8a^3}{3}\left[\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^3}{9}.$$

Mitunter wird man sogar bei Anwendung derartiger Substitutionen *einfache* Integrale dadurch ermitteln, dass man sie auf *Doppelintegrale* zurückführt. Es sei z. B.

$$(31.)\qquad J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

zu berechnen; dann ist auch, wenn man $x$ mit $y$ vertauscht,

$$(32.)\qquad J = \int_0^\infty e^{-y^2}dy.$$

Indem man die Gleichungen (31.) und (32.) mit einander multiplicirt, erhält man

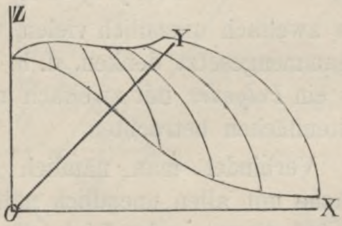
$$(33.)\qquad J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Dieses Integral stellt das Volumen eines Körpers dar, welcher oben durch die Rotationsfläche

$$(34.)\qquad z = e^{-(x^2+y^2)},$$

unten durch die $XY$-Ebene und seitlich durch die $XZ$-Ebene und die $YZ$-Ebene begrenzt wird (Fig. 125).

Fig. 125.




Durch Einführung von Polarcoordinaten findet man daher nach Gleichung (19.)

$$(35.)\qquad J^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r d\varphi dr.$$

Dies giebt, indem man

$$(36.)\qquad r^2 = -t, \quad \text{also} \quad 2rdr = -dt$$

setzt,

$$(37.)\quad J^2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-\infty} e^t dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[e^t\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

folglich wird

$$(38.)\qquad J = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der höheren Vermessungskunde.

## § 66.

## Complanation der Flächen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 169.)

Wie man sich den Bogen einer Curve zusammengesetzt denken kann aus unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen $ds$, d. h. wie man den Bogen einer Curve als ein *Polygon* mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachten kann, so kann man sich auch eine gekrümmte Fläche

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

aus zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen ebenen Stücken zusammengesetzt denken, d. h. man kann die gekrümmte Fläche als ein *Polyeder* mit zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen Seitenflächen betrachten.

Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt $P$ der Fläche mit allen unendlich nahen Punkten durch gerade Linien, so sind diese geraden Linien Tangenten der Fläche im Punkte $P$

und liegen im Allgemeinen sämmtlich in einer Ebene, welche die Tangentialebene der Fläche im Punkte $P$ genannt wird und die Gleichung

$$(2.)\qquad F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0,$$

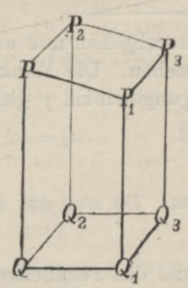
oder

$$(2\text{a.})\qquad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y)$$

hat. (Vergl. D.-R., Formel Nr. 145 der Tabelle.)

Legt man also wieder unendlich viele Schnitte, senkrecht zur $X$-Axe und senkrecht zur $Y$-Axe, so zertheilen diese die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke $PP_1P_3P_2$, deren Eckpunkte sämmtlich in der Tangentialebene des Punktes $P$ liegen (Fig. 126). Man kann also das Viereck $PP_1P_3P_2$ als *eben* betrachten und findet den Flächeninhalt $dO$ desselben aus der Gleichung

Fig. 126.



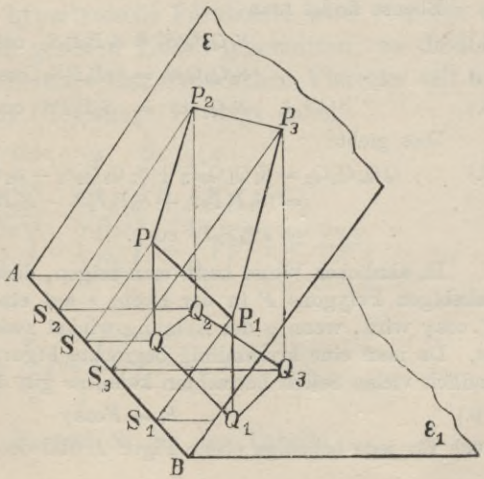

$$(3.)\qquad PP_1P_3P_2 \,.\, \cos\gamma = dO \,.\, \cos\gamma$$
$$= QQ_1Q_3Q_2 = dxdy,$$

wobei $QQ_1Q_3Q_2$ die Projection von $PP_1P_3P_2$ auf die $XY$-Ebene und $\gamma$ der Winkel ist, welchen die Tangentialebene des Punktes $P$ mit der $XY$-Ebene bildet.*)

*) Der hierbei angewendete Satz ergiebt sich unmittelbar aus Figur 127.

Wird nämlich das beliebige Viereck $PP_1P_3P_2$ in der Ebene $\varepsilon$ auf die Ebene $\varepsilon_1$ projicirt, so liegen die Lothe $QP$, $Q_1P_1$, $Q_3P_3$, $Q_2P_2$, welche man bezw. von den Punkten $P$, $P_1$, $P_3$, $P_2$ auf die Ebene $\varepsilon_1$ fällt, in den Ebenen $PSQ$, $P_1S_1Q_1$, $P_3S_3Q_3$, $P_2S_2Q_2$, welche durch die Eckpunkte des Vierecks $PP_1P_2P_3$ hin-

Fig. 127.



Dabei ist nach Gleichung (2.) und (2a.) in diesem Falle

$$(11.)\qquad \cos\gamma = \frac{F_3}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

folglich wird

$$(12.)\qquad dO = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \frac{dx\,dy}{F_3}\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2},$$

oder

$$(12a.)\qquad dO = dxdy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

---

durchgehen und auf der Schnittlinie $AB$ der Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon_1$ senkrecht stehen. Die Winkel $PSQ$, $P_1S_1Q_1$, $P_3S_3Q_3$, $P_2S_2Q_2$ sind alle dem Neigungswinkel $\gamma$ gleich, so dass

$$(4.)\qquad SQ = SP.\cos\gamma,\ S_1Q_1 = S_1P_1.\cos\gamma,\ S_3Q_3 = S_3P_3.\cos\gamma,$$
$$S_2Q_2 = S_2P_2.\cos\gamma$$

ist. Da nun das Paralleltrapez

$$SQQ_1S_1 = \tfrac{1}{2}(SQ+S_1Q_1).SS_1,$$

und das Paralleltrapez

$$SPP_1S_1 = \tfrac{1}{2}(SP+S_1P_1).SS_1,$$

so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.), dass

$$(5.)\qquad SQQ_1S_1 = SPP_1S_1.\cos\gamma.$$

Ebenso findet man

$$(6.)\qquad S_1Q_1Q_3S_3 = S_1P_1P_3S_3.\cos\gamma,$$

$$(7.)\qquad S_3Q_3Q_2S_2 = S_3P_3P_2S_2.\cos\gamma,$$

$$(8.)\qquad S_2Q_2QS = S_2P_2PS.\cos\gamma.$$

Dies giebt

$$(9.)\qquad \begin{aligned} QQ_1Q_3Q_2 &= S_1Q_1Q_3S_3 + S_3Q_3Q_2S_2 - S_2Q_2QS - SQQ_1S_1 \\ &= (S_1P_1P_3S_3 + S_3P_3P_2S_2 - S_2P_2PS - SPP_1S_1)\cos\gamma \\ &= PP_1P_3P_2\ \cos\gamma. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass die Projection $F_1$ eines beliebigen Polygons $F$ in der Ebene $\varepsilon$ auf eine andere Ebene $\varepsilon_1$ gleich $F.\cos\gamma$ wird, wenn $\gamma$ der Neigungswinkel zwischen den beiden Ebenen ist. Da man eine krummlinig begrenzte Figur als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten betrachten kann, so gilt die Formel

$$(10.)\qquad F_1 = F\cos\gamma$$

auch für jede beliebige ebene Figur $F$ und deren Projection $F_1$.

Die Integration dieses Ausdruckes in Bezug aus $y$ bedeutet, dass man alle diese unendlich kleinen Vierecke summirt, welche zu demselben Werthe von $x$ gehören. Die erste Integration giebt also einen unendlich dünnen Flächenstreifen.

Integrirt man dann noch in Bezug auf $x$, so erhält man die ganze Oberfläche

$$(13.)\quad O = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Berechnung des Inhalts einer krummen Oberfläche nennt man: „*Complanation der Flächen*".

## § 67.

## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Die Gleichung

$$(1.)\quad pz = xy$$

stellt ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche zwischen den Ebenen

$$(2.)\quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = b$$

berechnen.

**Auflösung.** Das hyperbolische Paraboloid wird von den begrenzenden Ebenen in geraden Linien geschnitten, so dass die gesuchte Fläche die Seiten eines räumlichen Vierecks mit einander verbindet. Aus Gleichung (1.) folgt dabei

$$(3.)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{p},$$

$$(4.)\quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + x^2 + y^2};$$

deshalb wird

$$(5.)\quad O = \frac{1}{p}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \sqrt{p^2 + x^2 + y^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 82 der Tabelle

$$(6.)\quad O = \frac{1}{2p}\int_0^a dx\Big[y\sqrt{p^2+x^2+y^2} + (p^2+x^2)\mathrm{l}(y+\sqrt{p^2+x^2+y^2})\Big]_0^b$$
$$= \frac{1}{2p}\int_0^a dx\Big[b\sqrt{p^2+b^2+x^2} + (p^2+x^2)\mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\Big)\Big].$$

Setzt man

$$(7.)\qquad u = \mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\Big),\quad dv = (p^2+x^2)dx,$$

so wird

$$(8.)\qquad v = p^2x + \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3}(3p^2+x^2),$$

$$(9.)\qquad du = \frac{xdx}{(b+\sqrt{p^2+b^2+x^2})\sqrt{p^2+b^2+x^2}} - \frac{xdx}{p^2+x^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{p^2+b^2+x^2}-b)xdx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}} - \frac{xdx}{p^2+x^2}$$
$$= -\frac{bxdx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}},$$

folglich erhält man nach der Formel

$$\int udv = uv - \int vdu$$

für die partielle Integration

$$(10.)\quad \int(p^2+x^2)\mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\Big)dx$$
$$= \frac{x}{3}(3p^2+x^2)\mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\Big) + \frac{b}{3}\int\frac{(3p^2x^2+x^4)dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 80 und 22 der Tabelle

$$(11.)\quad \int\frac{(x^4+3p_2x^2)dx}{(x^2+p^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}$$
$$= \int\frac{(x_2+2p^2)dx}{\sqrt{p^2+b^2+x^2}} - 2p^4\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{p^2+b^2+x^2} + \frac{3p^2-b^2}{2}\mathrm{l}(x+\sqrt{p^2+b^2+x^2})$$
$$- 2p^4\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}.$$

Setzt man noch

$$\sqrt{p^2+b^2} = c \quad \text{und} \quad x = c\,.\mathrm{tg}\,t, \tag{12.}$$

so wird

$$dx = \frac{c\,.\,dt}{\cos^2 t}\,, \quad \sqrt{p^2+b^2+x^2} = \frac{c}{\cos t}\,, \tag{13.}$$

also

$$\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}} = \int\frac{c\,.\,dt\,.\cos t}{(p^2\cos^2 t+c^2\sin^2 t)\,.\,c} = \int\frac{\cos t\,.\,dt}{p^2+b^2\sin^2 t}. \tag{14.}$$

Wenn man ferner

$$b\sin t = pw, \quad \text{also} \quad b\cos t\,.\,dt = pdw \tag{15.}$$

einführt, so findet man aus Gleichung (14.)

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}} &= \frac{1}{pb}\int\frac{dw}{1+w^2} = \frac{1}{pb}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b\sin t}{p}\right)\\ &= \frac{1}{pb}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\right),\end{aligned} \tag{16.}$$

folglich geht Gleichung (11.) über in

$$\begin{aligned}&\int\frac{(3p^2x^2+x^4)dx}{(p^2+x^2)\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\\ &\qquad = \frac{x}{2}\sqrt{p^2+b^2+x^2} + \frac{3p^2-b^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{p^2+b^2+x^2})\\ &\qquad\qquad - \frac{2p^3}{b}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\right),\end{aligned} \tag{17.}$$

und Gleichung (10.) ergiebt

$$\begin{aligned}&\int(p^2+x^2)\,\mathrm{l}\left(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\right)dx\\ &\qquad = \frac{x}{3}(3p^2+x^2)\,\mathrm{l}\left(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\right) + \frac{bx}{6}\sqrt{p^2+b^2+x^2}\\ &+\frac{(3p^2-b^2)b}{6}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{p^2+b^2+x^2}) - \frac{2}{3}\,p^3\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\right).\end{aligned} \tag{18.}$$

Da nun noch nach Formel Nr. 82 der Tabelle

$$\begin{aligned}\int b\,dx\sqrt{p^2+b^2+x^2} &= \frac{bx}{2}\sqrt{p^2+b^2+x^2}\\ &\qquad + \frac{(p^2+b^2)b}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{p^2+b^2+x^2})\end{aligned} \tag{19.}$$

ist, so folgt aus Gleichung (6.)

$$(20.)\quad O = \frac{1}{2p}\Big[\frac{2bx}{3}\sqrt{p^2+b^2+x^2} + \frac{(3p^2+b^2)b}{3}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{p^2+b^2+x^2})$$
$$+\frac{(3p^2+x^2)x}{3}\,\mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+b^2+x^2}}{\sqrt{p^2+x^2}}\Big) - \frac{2p^3}{3}\operatorname{arctg}\Big(\frac{bx}{p\sqrt{p^2+b^2+x^2}}\Big)\Big]_0^a,$$

also

$$(21.)\quad O = \frac{ab}{3p}\sqrt{p^2+a^2+b^2} + \frac{(3p^2+a^2)a}{6p}\,\mathrm{l}\Big(\frac{b+\sqrt{p^2+a^2+b^2}}{\sqrt{p^2+a^2}}\Big)$$
$$+\frac{(3p^2+b^2)b}{6p}\,\mathrm{l}\Big(\frac{a+\sqrt{p^2+a^2+b^2}}{\sqrt{p^2+b^2}}\Big) - \frac{p^2}{3}\operatorname{arctg}\Big(\frac{ab}{p\sqrt{p^2+a^2+b_2}}\Big).$$

Da bei dieser Aufgabe die Integrationsgrenzen constant sind, so hätte man auch die Reihenfolge der Integrationen umkehren können, ohne die Grenzen zu ändern.

**Aufgabe 2.** Die Gleichung

$$(22.)\qquad 2pz = x^2 - y^2$$

stellt wieder ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche innerhalb des Cylinders

$$(23.)\qquad x^2 + y^2 = a^2$$

berechnen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (22.) folgt

$$(24.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{p},$$

$$(25.)\qquad \sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2+y^2};$$

deshalb wird

$$(26.)\qquad O = \frac{4}{p}\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,\sqrt{p^2+x^2+y^2}.$$

Durch Einführung von ebenen Polarcoordinaten erhält man nach Formel Nr. 167 der Tabelle

$$(27.)\qquad O = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r\,dr\,\sqrt{p^2+r^2}$$

und daraus nach Formel Nr. 83 der Tabelle

$$(28.) \qquad O = \frac{4}{3p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \Big[(p^2 + r^2)\sqrt{p^2 + r^2}\Big]_0^a$$

$$= \frac{4}{3p}\Big[(p^2 + a^2)\sqrt{p^2 + a^2} - p^3\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3p}[(p^2 + a^2)\sqrt{p^2 + a^2} - p^3].$$

Auch hier hätte man die Reihenfolge bei den Integrationen ändern und die Gleichung (27.) auf die Form

$$(29.) \quad O = \frac{4}{p}\int_0^a r dr \sqrt{p^2 + r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2\pi}{p}\int_0^a r dr \sqrt{p^2 + r^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2 + r^2)\sqrt{p^2 + r^2}\Big]_0^a = \frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2 + a^2)\sqrt{p^2 + a^2} - p^3\Big]$$

bringen können.

**Aufgabe 3.** Man soll denjenigen Theil der Kugeloberfläche mit der Gleichung

$$(30.) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \text{ oder } z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

berechnen, der von den beiden Cylindern

$$(31.) \qquad x^2 + y^2 = ax \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = -ax$$

herausgebohrt wird. (Vergl. die Figuren 116 und 117.)

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(32.) \qquad F_1 = 2x, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 2z,$$

$$(33.) \quad \frac{1}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Da die gesuchte Oberfläche durch die Coordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Theile zerlegt wird, so braucht man nur einen solchen Theil zu berechnen und mit 8 zu multipliciren. Dadurch erhält man nach den Formeln Nr. 169 und 21 der Tabelle

$$O = 8a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \tag{34.}$$

$$= 8a\int\limits_0^a dx\left[\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{ax-x^2}};$$

also

$$O = 8a\int\limits_0^a dx \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,. \tag{35.}$$

Setzt man

$$u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}, \quad dv = dx, \tag{36.}$$

so wird

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad v = x = a\operatorname{tg}^2 u, \tag{37.}$$

folglich findet man durch partielle Integration

$$\int dx \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - a\int \operatorname{tg}^2 u du, \tag{38.}$$

und wenn man

$$\operatorname{tg} u = t, \quad \text{also} \quad u = \operatorname{arctg} t, \quad du = \frac{dt}{1+t^2} \tag{39.}$$

setzt,

$$\int \operatorname{tg}^2 u du = \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \tag{40.}$$

$$= t - \operatorname{arctg} t = \operatorname{tg} u - u$$

$$= \sqrt{\frac{x}{a}} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,.$$

Dies giebt

$$O = 8a\int\limits_0^a dx \,.\, \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = 8a\left[(x+a)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{ax}\right]_0^a,$$

also

$$(41.)\qquad O = 8a(2a\,.\arcsin\sqrt{\tfrac{1}{2}} - a) = 4a^2\pi - 8a^2.$$

Da die ganze Kugel die Oberfläche

$$(42.)\qquad K = 4a^2\pi$$

hat, so bleibt für den ausserhalb der beiden Cylinder liegenden Theil der Kugeloberfläche

$$(43.)\qquad O_1 = 8a^2$$

übrig.

Die Lösung der Aufgabe wird bedeutend einfacher, wenn man ebene Polarcoordinaten einführt; dadurch geht nach Formel Nr. 167 der Tabelle Gleichung (34.) über in

$$(44.)\qquad O = 8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\varphi}$$

$$= 8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,[a - a\sin\varphi] = 8a^2\,[\varphi + \cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

folglich erhält man wieder

$$(45.)\qquad O = 4a^2\pi - 8a^2.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Oberfläche der beiden Kreiscylinder

$$(46.)\qquad x^2 + y^2 - ax = 0 \quad\text{und}\quad x^2 + y^2 + ax = 0$$

berechnen, so weit dieselbe innerhalb der Kugel

$$(47.)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

liegt. (Vergl. die Figuren 116 und 117.)

**Auflösung.** Die gesuchte Oberfläche wird durch die Coordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Theile zerlegt; man braucht daher wieder nur einen dieser Theile zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multipliciren. Die Gleichung der Fläche ist

$$(46\text{a.})\qquad F(x, y, z) = x^2 + y^2 - ax = 0$$

und enthält die Veränderliche $z$ gar nicht. Damit die gegebene Methode anwendbar wird, muss man die Coordinaten in Formel

Nr. 169 der Tabelle mit einander vertauschen. Indem man z. B. $y$ als Function von $x$ und $z$ ansieht, geht diese Formel für die Berechnung der krummen Oberfläche über in

$$(48.)\qquad O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dz}{F_2} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}.$$

Aus Gleichung (46a.) findet man

$$(49.)\qquad F_1 = 2x - a, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 0,$$

$$(50.)\qquad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (46a.)

$$(51.)\qquad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = a^2, \quad \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = a,$$

folglich wird

$$(52.)\qquad O = 8a \int_0^a dx \int_0^{z_1} \frac{dz}{2y} = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \int_0^{z_1} dz.$$

Da $z_1$, der Grenzwerth von $z$, zu einem Punkte gehört, welcher auf der Kugel *und* auf dem Kreiscylinder liegt, so wird

$$z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei aber noch nach Gleichung (46a.)

$$x^2 + y^2 = ax$$

ist, folglich erhält man

$$(53.)\qquad z_1 = \sqrt{a^2 - ax}.$$

Dies giebt

$$(54.)\quad O = 4a \int_0^a dx \sqrt{\frac{a^2 - ax}{ax - x^2}} = 4a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8a\sqrt{a}\,\Big[\sqrt{x}\Big]_0^a,$$

also

$$(55.)\qquad O = 8a^2.$$

Die Fläche der beiden Kreiscylinder, so weit sie von der Kugel eingeschlossen wird, ist also gerade so gross wie derjenige Theil der Kugeloberfläche, welcher ausserhalb der beiden Cylinder liegt.

**Aufgabe 5.** Aus der Schraubenfläche

$$y - x\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = 0 \tag{56.}$$

schneiden die beiden coaxialen Kreiscylinder

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2 \tag{57.}$$

und die beiden Ebenen

$$z = -\frac{c\pi}{2}, \qquad z = +\frac{c\pi}{2} \tag{58.}$$

einen Theil der Oberfläche heraus; man soll den Flächeninhalt dieses Theiles berechnen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (56.) folgt

$$F_1 = -\mathrm{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = -\frac{y}{x}, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = -\frac{x}{c}\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right] = -\frac{x^2 + y^2}{cx}, \tag{59.}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = \frac{c^2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2}{c^2x^2} = \frac{x^2+y^2}{c^2x^2}(c^2+x^2+y\ ), \tag{60.}$$

$$\frac{1}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \pm\sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}, \tag{61.}$$

also, da hier nur das obere Zeichen in Betracht kommt,

$$O = \int dx \int dy \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}. \tag{62.}$$

Die Bestimmung der Integrationsgrenzen ist unterblieben, weil durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{63.}$$

neue Integrations-Veränderliche eingeführt werden sollen. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 167 der Tabelle

$$O = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_a^b r dr \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{r^2}} = \int\limits_a^b dr\sqrt{c^2 + r^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi. \tag{64.}$$

Die Grenzen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ bestimmen sich daraus, dass nach Gleichung (56.)

(65.) $$z = c\varphi$$

wird. Nach Formel Nr. 82 der Tabelle erhält man daher

(66.) $$O = \pi \int\limits_a^b dr \sqrt{c^2 + r^2} = \frac{\pi}{2}\Big[r\sqrt{c^2 + r^2} + c_2 \mathrm{l}(r + \sqrt{c^2 + r^2})\Big]_a^b$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \mathrm{l}\Big(\frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}\Big)\Big].$$

## § 68.

## Einführung zweier variablen Parameter.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 170.)

Ist die Gleichung einer Fläche in der Form

(1.) $$z = f(x, y)$$

gegeben, so kann man, wie es auch bereits in § 65 bei der Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen geschehen war, $x$ und $y$ als Functionen von 2 neuen, von einander unabhängigen Veränderlichen $u$ und $v$ darstellen, indem man

(2.) $$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

setzt, wo $f_1(u, v)$ und $f_2(u, v)$ für den jedesmaligen Zweck passend gewählte Functionen sind. Trägt man diese Werthe von $x$ und $y$ in die Gleichung (1.) ein, so erhält man

(3.) $$z = f[f_1(u, v), \ f_2(u, v)] = f_3(u, v).$$

Man kann also eine Fläche durch die drei Gleichungen

(4.) $$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

darstellen; und umgekehrt: Sind die drei Gleichungen (4.) beliebig gegeben, so stellen sie eine Fläche dar, deren Gleichung man durch Elimination von $u$ und $v$ aus den Gleichungen (4.) erhält.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt sodann

(5.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}, \end{cases}$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{6.}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{7.}$$

Setzt man also

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = B, \tag{8.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = C,$$

so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}, \tag{9.}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{10.}$$

Deshalb erhält man nach Formel Nr. 166 der Tabelle, da die Functionaldeterminante gleich $C$ ist,

$$O = \int\!\!\int dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \int\!\!\int du\,dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{11.}$$

Wie diese Formel verwendet werden kann, möge das folgende Beispiel zeigen.

**Aufgabe.** Durch die Gleichungen

$$x = u^3 - 3uv^2 - 3u, \quad y = 3u^2 - 3v^2, \quad z = v^3 - 3u^2v - 3v \tag{12.}$$

wird eine Fläche dargestellt, auf welcher man für constante Werthe von $u$ und $v$ zwei Schaaren von ebenen Curven dritten Grades erhält, die einander rechtwinklig schneiden.*) Man soll auf der Fläche den Inhalt eines Vierecks berechnen, welches durch die Curven

$$u = a, \quad u = b, \quad v = c, \quad v = d \tag{13.}$$

begrenzt wird.

---

*) Diese Linien sind die *Krümmungslinien* der Fläche, welche die „*Enneper*'sche Minimalfläche" genannt wird. Davon soll aber bei dieser Aufgabe kein Gebrauch gemacht werden, weil in diesem Lehrbuche wegen der Beschränkung des Stoffes eine Erklärung der Krümmungslinien nicht gegeben werden konnte.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (12.) folgt

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 3(u^2 - v^2 - 1), & \dfrac{\partial y}{\partial u} = 6u, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = -6uv, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -6uv, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -6v, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = 3(v^2 - u^2 - 1), \end{cases}$$

deshalb wird

$$(15.)\quad \begin{cases} A = -18u(u^2 + v^2 + 1), \\ B = 9(u^2 + v^2 + 1)(u^2 + v^2 - 1), \\ C = +18v(u^2 + v^2 + 1), \end{cases}$$

$$(16.)\quad A^2 + B^2 + C^2 = 81(u^2 + v^2 + 1)^4.$$

Dies giebt nach Gleichung (11.)

$$(17.)\quad O = 9\int_a^b du \int_c^d (u^2 + v^2 + 1)^2 dv$$

$$= 9\int_a^b du \int_c^d (u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 1)dv$$

$$= 9\int_a^b du[(u^4 + 2u^2 + 1)(d - c) + \tfrac{2}{3}(u^2 + 1)(d^3 - c^3) + \tfrac{1}{5}(d^5 - c^5)],$$

also

$$(18.)\quad O = 9[\tfrac{1}{5}(b^5 - a^5)(d - c) + \tfrac{1}{5}(d^5 - c^5)(b - a) + \tfrac{2}{9}(b^3 - a^3)(d^3 - c^3)$$
$$+ \tfrac{2}{3}(b^3 - a^3)(d - c) + \tfrac{2}{3}(d^3 - c^3)(b - a) + (b - a)(d - c)].$$

## § 69.

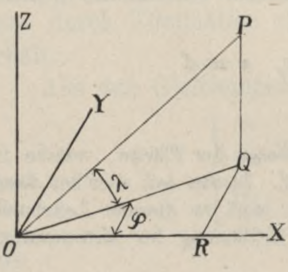
## Einführung räumlicher Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 171.)

Führt man räumliche Polarcoordinaten ein, indem man

$$(1.)\quad x = r\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = r\cos\lambda\sin\varphi, \quad z = r\sin\lambda$$

Fig. 128.




setzt, so ist (Fig. 128) $OP$ gleich $r$ der *Radius vector*, $\lambda$ der Neigungswinkel $QOP$ von $OP$ gegen die $XY$-Ebene, und $\varphi$ der Winkel $XOQ$, welchen die Projection $OQ$ des Radius vectors $OP$ auf die $XY$-Ebene mit der positiven Richtung der X-Axe bildet. Indem man dabei $\lambda$ und $\varphi$ als die beiden unabhängigen Veränderlichen betrachtet, erhält man

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\cos\lambda\cos\varphi - r\sin\lambda\cos\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\cos\lambda\sin\varphi - r\sin\lambda\sin\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\sin\lambda + r\cos\lambda, \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\lambda\cos\varphi - r\cos\lambda\sin\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\lambda\sin\varphi + r\cos\lambda\cos\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\lambda; \end{cases}$$

folglich wird, wenn man $u$ mit $\lambda$ und $v$ mit $\varphi$ vertauscht,

$$(3.)\quad \begin{cases} A = -r\dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi - r\dfrac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi - r^2\cos^2\lambda\cos\varphi, \\[2mm] B = -r\dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi + r\dfrac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r^2\cos^2\lambda\sin\varphi, \\[2mm] C = +r\dfrac{\partial r}{\partial \lambda}\cos^2\lambda - r^2\sin\lambda\cos\lambda, \end{cases}$$

$$(4.)\quad \begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\cos^2\lambda + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^4\cos^2\lambda \\ &= r^2\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$(5.)\quad \begin{aligned} O &= \iint\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv \\ &= \iint r\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\lambda\,d\varphi. \end{aligned}$$

Constanten Werthen von $\varphi$ entsprechen Ebenen durch die $Z$-Axe, und constanten Werthen von $\lambda$ Kegelflächen, welche die $Z$-Axe zur Axe haben. Durch diese Ebenen und Kegel wird die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke zerlegt. Indem man in Bezug auf $\varphi$ integrirt, erhält man die Summe von diesen Vierecken auf einem ringförmigen, unendlich schmalen

Streifen zwischen zwei benachbarten Kegelflächen. Alle diese unendlich schmalen Streifen werden sodann durch Integration in Bezug auf $\lambda$ summirt. Daraus ergiebt sich für jeden einzelnen Fall die Bestimmung der Grenzen.

Wie dies geschieht, möge die folgende Aufgabe zeigen.

**Aufgabe.** Die gegebene Fläche habe die Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \tag{6.}$$

oder bei Einführung räumlicher Polarcoordinaten durch die Gleichungen (1.)

$$r^2 = a^2 \cos^2\lambda \cos(2\varphi); \tag{7.}$$

man soll die gesammte Oberfläche berechnen.

**Auflösung.** Um sich eine Vorstellung von der Fläche zu machen, beachte man, dass $r \leqq a$ sein muss, dass die Fläche also ganz innerhalb einer Kugel mit dem Halbmesser $a$ liegt. Die $XY$-Ebene schneidet sie in einer *Lemniscate* mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{oder} \quad r^2 = a^2\cos(2\varphi), \tag{8.}$$

und die Ebenen durch die $Z$-Axe in zwei Kreisen mit den Gleichungen

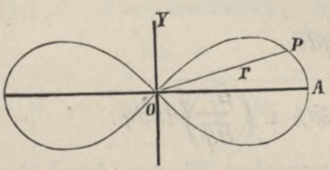
$$x^2 + y^2 = \pm\, a_1 x, \quad \text{oder} \quad r = \pm\, a_1 \cos\lambda, \tag{9.}$$

wobei

$$a_1 = a\sqrt{\cos(2\varphi)} \tag{10.}$$

ist. Die Fläche entsteht also aus der Lemniscate in der $XY$-Ebene (Fig. 129), indem man sämmtliche Radii vectores $OP$ zu Durchmessern von Kreisen macht, deren Ebenen auf der $XY$-Ebene senkrecht stehen.

Fig. 129.




Da die Coordinaten-Ebenen die Fläche in 8 symmetrische Theile zerlegen, so braucht man nur die Oberfläche eines solchen Theiles zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multipliciren. Die Grenzen von $\varphi$ sind dabei $0$ und $\frac{\pi}{4}$, die von $\lambda$ sind $0$ und $\frac{\pi}{2}$.

Aus Gleichung (7.) folgt dabei

$$(11.)\qquad r\frac{\partial r}{\partial\lambda} = -a^2\cos\lambda\sin\lambda\cos(2\varphi),$$

$$(12.)\qquad r\frac{\partial r}{\partial\varphi} = -a^2\cos^2\lambda\sin(2\varphi);$$

deshalb wird

$$(13.)\quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2 = a^4\cos^2\lambda\sin^2\lambda\cos^2(2\varphi) = a^2r^2\sin^2\lambda\cos(2\varphi),$$

$$(14.)\quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 = a^4\cos^4\lambda\sin^2(2\varphi) = a^2r^2\cos^2\lambda\cdot\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)},$$

$$(15.)\quad \left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 = a^2\cos(2\varphi)\cos^2\lambda + a^2\cos^2\lambda\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} = \frac{a^2\cos^2\lambda}{\cos(2\varphi)} = \frac{r^2}{\cos^2(2\varphi)}\cdot$$

Dies giebt nach Gleichung (5.)

$$(16.)\quad O = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^2d\varphi}{\cos(2\varphi)} = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\lambda d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$= 2a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\lambda d\lambda = a^2\pi\Big[\sin\lambda\cos\lambda+\lambda\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi^2}{2}\cdot$$

## XII. Abschnitt.

# Integration der Differentiale der Functionen von mehreren Veränderlichen.

### § 70.

### Vollständige Differentiale der Functionen von zwei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 172.)

Ist

$$u = f(x, y) \tag{1.}$$

eine Function von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen, so ist nach D.-R., Formel Nr. 134 der Tabelle das *vollständige* oder *totale* Differential von $u$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \tag{2.}$$

wobei

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \tag{3.}$$

noch Functionen von $x$ und $y$ sind, so dass Gleichung (2.) übergeht in

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \tag{2a.}$$

Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: „Man soll $u$ als Function der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ bestimmen, wenn $du$ durch die Gleichungen (2a.)

gegeben ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind.“

Dabei erkennt man aber sogleich, dass die Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ nicht ganz beliebig gegeben sein dürfen; es müssen vielmehr $M$ und $N$ die partiellen Ableitungen ein und derselben Function $u = f(x, y)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, muss nach D.-R., Formel Nr. 137 der Tabelle

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{4a.}$$

sein. Diese Bedingung ist *nothwendig*, wenn

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{5.}$$

ein *vollständiges Differential* sein soll; sie ist aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend*, um die Function

$$u = f(x, y) \tag{6.}$$

zu bestimmen, deren vollständiges Differential mit $Mdx + Ndy$ übereinstimmt.

**Beweis.** Wie die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \tag{7.}$$

aus Gleichung (6.) hervorgeht, indem man $y$ als eine Constante betrachtet und nach $x$ *differentiirt*, so wird Gleichung (6.) aus Gleichung (7.) hervorgehen, indem man $y$ wieder als constant ansieht und in Bezug auf $x$ *integrirt*. Dies giebt

$$u = \int M(x, y)dx + Y. \tag{8.}$$

Hierbei ist die Integrations-Constante mit $Y$ bezeichnet worden, um anzudeuten, dass sie noch eine Function von $y$ sein darf, weil bei der in Gleichung (8.) angedeuteten Operation $x$ als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

(9.) $$\int M(x, y)dx = v,$$
so geht Gleichung (8.) über in
(10.) $$u = v + Y.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)
(11.) $$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$
also
(12.) $$\frac{dY}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite eine Function der einzigen Veränderlichen $y$. Damit die Aufgabe lösbar ist, muss auch die *rechte* Seite der Gleichung von $x$ unabhängig sein. Das ist auch nach der in Gleichung (4a.) festgestellten Voraussetzung der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf Gleichung (9.)
(13.) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach Gleichung (4a.) gleich 0, folglich muss $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ von $x$ unabhängig sein. Die Gleichung (12.) enthält also keinen Widerspruch, so dass man daraus ohne Weiteres durch Integration
(14.) $$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + C$$
ermitteln kann. Setzt man diesen Werth von $Y$ in die Gleichung (10.) ein, so findet man
(15.) $$u = v + \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + C,$$
wobei
(16.) $$v = \int M(x, y)dx$$
ist. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn nach den Gleichungen (15.) und (16.) ist in der That

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y), \tag{17.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = N(x, y). \tag{18.}$$

Man nennt den Ausdruck

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

„*ein vollständiges oder totales Differential*“, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{19.}$$

erfüllt ist. Man muss daher, wenn man sicher gehen will, ehe man integrirt, untersuchen, ob Gleichung (19.) befriedigt wird. Man kann aber auch mit der Berechnung von

$$v = \int M(x, y)dx \tag{20.}$$

beginnen und dann untersuchen, ob $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ unabhängig von $x$ ist. Wenn dies zutrifft, so wird ja, wie schon in Gleichung (13.) gezeigt wurde,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \tag{21.}$$

d. h. die in Gleichung (19.) angegebene Bedingung wird befriedigt.

## § 71.
## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

$$du = (3x^2 + 8xy)dx + (4x^2 + 3y^2)dy \tag{1.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Um zunächst zu untersuchen, ob die rechte Seite von Gleichung (1.) ein *vollständiges Differential* ist, bilde man

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 8xy)}{\partial y} = 8x, \tag{2.}$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(4x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 8x. \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt, dass

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{4.}$$

ist, dass also in diesem Falle $Mdx + Ndy$ ein *vollständiges Differential* ist. Man darf daher ohne Weiteres das in § 70 angegebene Integrations-Verfahren anwenden und erhält

$$v = \int M(x, y)dx = \int (3x^2 + 8xy)dx = x^3 + 4x^2y. \tag{5.}$$

Ferner wird

$$N - \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2 + 3y^2 - 4x^2 = 3y^2 \tag{6.}$$

und deshalb

$$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = \int 3y^2 dy = y^3 + C. \tag{7.}$$

Dies giebt

$$u = v + Y = x^3 + 4x^2y + y^3 + C. \tag{8.}$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man sehr leicht durch Differentiation prüfen.

Man kann selbstverständlich die Aufgabe auch so lösen, dass man zunächst

$$u = \int Ndy + X = w + X \tag{9.}$$

bildet, wobei $X$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist, und dass man dann $X$ aus der Gleichung

$$X = \int\left(M - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dx \tag{10.}$$

berechnet.

**Aufgabe 2.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

(11.) $du = (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (-7x^3 + 2x + 3)dy$

gegeben ist.

**Auflösung.** Man kann zunächst durch Bildung von $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ zeigen, dass

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -21x^2 + 2 \tag{12.}$$

wird, und dass deshalb die rechte Seite in Gleichung (11.) ein *vollständiges Differential* ist. Dann erhält man

$$\begin{aligned} v &= \int M dx = \int (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx \\ &= 5x^4 - 7x^3y + 2xy, \end{aligned} \tag{13.}$$

$$N - \frac{\partial v}{\partial y} = (-7x^3 + 2x + 3) - (-7x^3 + 2x) = 3, \tag{14.}$$

$$Y = \int \Big(N - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dy = \int 3dy = 3y + C. \tag{15.}$$

Dies giebt

$$u = v + Y = 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C. \tag{16.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

$$du = (2ax + by + c)dx + (bx + 2my + n)dy \tag{17.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Hier wird

$$\frac{\partial M}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = b, \quad \text{also} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{18.}$$

folglich ist die rechte Seite von Gleichung (17.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher

$$v = \int M dx = \int (2ax + by + c)dx = ax^2 + bxy + cx, \tag{19.}$$

$$N - \frac{\partial v}{\partial y} = (bx + 2my + n) - bx = 2my + n, \tag{20.}$$

$$\begin{aligned} Y &= \int \Big(N - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dy = \int (2my + n)dy \\ &= my^2 + ny + C. \end{aligned} \tag{21.}$$

Dies giebt

$$u = v + Y = ax^2 + bxy + cx + my^2 + ny + C. \tag{22.}$$

**Aufgabe 4.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{23.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Die Gleichung (23.) kann man auch in der Form

$$du = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2} \tag{23a.}$$

schreiben, aus der man leichter erkennt, dass

$$M = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{24.}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{25.}$$

Da diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, so ist die rechte Seite von Gleichung (23.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher nach Formel Nr. 20 der Tabelle

$$v = \int M dx = -y \int \frac{dx}{y^2 + x^2} = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{26.}$$

$$N - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0, \tag{27.}$$

$$Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = C. \tag{28.}$$

Dies giebt

$$u = v + Y = C - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right). \tag{29.}$$

**Aufgabe 5.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

$$du = \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) dy \tag{30.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Den Nachweis, dass die rechte Seite von Gleichung (30.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man führen, indem man

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x-y)^3} \tag{31.}$$

bildet. Man darf aber auch ohne Weiteres

$$\begin{aligned} v &= \int M dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx \\ &= 1x + \frac{y^2}{x-y} \end{aligned} \tag{32.}$$

berechnen und erhält daraus, dass

$$\begin{aligned} N - \frac{\partial v}{\partial y} &= \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) - \frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y} \end{aligned} \tag{33.}$$

eine Function der einzigen Veränderlichen $y$ ist, diesen Nachweis. Da nun noch

$$Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \int\left(1 - \frac{1}{y}\right)dy = y - 1y + C \tag{34.}$$

ist, so ergiebt sich

$$u = v + Y = 1x + \frac{y^2}{x-y} + y - 1y + C, \tag{35.}$$

oder

$$u = 1\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x-y} + C. \tag{35a.}$$

**Aufgabe 6.** Man soll $u$ als Function von $x$ und $y$ bestimmen, wenn

$$du = \left(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5\right)dx + \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7\right)dy \tag{36.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Den Nachweis, dass die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man auch hier führen, indem man zeigt, dass

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{6x^4y^2 + 2y^6}{(x^4 - y^4)^2} + 1 \tag{37.}$$

ist. Man kann sich aber diese etwas umständliche Differentiation auch ersparen und ohne Weiteres

$$v = \int M dx = \int\left(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5\right)dx$$

berechnen. Dadurch erhält man

$$v = \int \frac{y dx}{x^2 - y^2} - \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} + xy - 5x,$$

oder nach den Formeln Nr. 53 und 20 der Tabelle

$$(38.)\qquad v = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{x - y}{x + y}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy - 5x.$$

Daraus folgt

$$(39.)\qquad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7\right) - \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x\right)$$
$$= -2y - 7.$$

Da dieser Ausdruck von $x$ unabhängig ist, so ist die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(40.)\qquad Y = \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = -\int(2y + 7)dy = -y^2 - 7y + C,$$

$$(41.)\qquad u = v + Y = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{x - y}{x + y}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + xy - 5x - y^2 - 7y + C.$$

## § 72.

## Vollständige Differentiale der Functionen von drei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr 173.)

Ist

$$(1.)\qquad u = f(x, y, z)$$

eine Function von drei von einander unabhängigen Veränderlichen, so wird nach D.-R., Formel Nr. 136 der Tabelle das *vollständige* oder *totate Differential* von $u$

$$(2.)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

wobei

$$(3.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z),\quad \frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z)$$

noch Functionen von $x, y, z$ sind, so dass Gleichung (2.) übergeht in

$$du = Fdx + Gdy + Hdz, \tag{2a.}$$

wenn man bezw. $F, G, H$ statt $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ schreibt. Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: Man soll $u$ als Function der drei Veränderlichen $x, y, z$ bestimmen, wenn $du$ durch die Gleichung (2a.) gegeben ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind.

Dabei erkennt man aber wieder sogleich, dass die drei Functionen $F, G, H$ nicht ganz beliebig gegeben sein dürfen; sie müssen vielmehr die partiellen Ableitungen ein und derselben Function $u = f(x, y, z)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ergiebt sich aus D.-R., Formel Nr. 137 der Tabelle

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial y}, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}. \tag{4a.}$$

Diese Bedingungen sind *nothwendig*, wenn die rechte Seite von Gleichung (2a.) ein *vollständiges Differential* sein soll; sie sind aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend*, um eine Function

$$u = f(x, y, z) \tag{5.}$$

zu bestimmen, deren vollständiges Differential mit

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

übereinstimmt.

**Beweis.** Wie die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z) \tag{6.}$$

aus Gleichung (5.) hervorgeht, indem man $y$ und $z$ als Constanten betrachtet und die Function $u$ nach $x$ *differentiirt*, so wird Gleichung (5.) aus Gleichung (6.) hervorgehen, indem man $y$ und $z$ wieder als constant ansieht und die Function $F(x, y, z)$ in Bezug auf $x$ *integrirt*. Dies giebt

$$u = \int F(x, y, z)dx + \varphi(y, z). \tag{7.}$$

Hierbei ist die Integrations-Constante mit $\varphi(y, z)$ bezeichnet worden, um anzudeuten, dass sie noch eine Function von $y$ und $z$ sein darf, weil bei der in Gleichung (7.) ausgeführten Integration $x$ als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

$$\int F(x, y, z)dx = v, \tag{8.}$$

so geht Gleichung (7.) über in

$$u = v + \varphi(y, z). \tag{9.}$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}, \tag{10.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}, \tag{11.}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = G - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{12.}$$

Hierbei sollen $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}$ von der Veränderlichen $x$ unabhängig sein, folglich muss auch die rechte Seite dieser Gleichungen (12.) von $x$ unabhängig sein, wenn die Aufgabe lösbar sein soll. Das ist auch nach den in den Gleichungen (4a.) aufgestellten Voraussetzungen der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf Gleichung (8.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\end{aligned} \tag{13.}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.\end{aligned} \tag{14.}$$

Die Gleichungen (12.) enthalten daher keinen Widerspruch, so dass man die Function $\varphi(y, z)$ aus der Gleichung

$$d\varphi = \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz \tag{15.}$$

bestimmen kann. Auch die Bedingung, dass hierbei der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (15.) ein *vollständiges Differential* ist, wird erfüllt, denn man erhält nach den Gleichungen (4a.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{16.}$$

Man kann daher die Gleichung (15.) nach dem in § 70 angegebenen Verfahren integriren, wie folgt. Es sei

$$w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy, \tag{17.}$$

dann ist mit Rücksicht auf Gleichung (15.)

$$\varphi(y, z) = w + \psi(z), \tag{18.}$$

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d\psi(z)}{dz}, \tag{19.}$$

oder

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{20.}$$

Dass auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Function der einzigen Veränderlichen $z$ steht, folgt schon aus den Erläuterungen in § 70, lässt sich aber auch zeigen, indem man den Ausdruck nach $y$ differentiirt. Dann erhält man nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (17.) und (4a.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0.\end{aligned} \tag{21.}$$

Aus Gleichung (20.) folgt daher

$$\psi(z) = \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz + C, \tag{22.}$$

also nach den Gleichungen (9.) und (18.)

$$u = v + w + \psi(z), \tag{23.}$$

wobei sich die Werthe von $v$, $w$ und $\psi(z)$ aus den Gleichungen (8.), (17.) und (22.) ergeben.

Man ist natürlich nicht an eine bestimmte Reihenfolge der Integrationen gebunden, d. h. man ist nicht gezwungen, zuerst $\int F(x, y, z)dx$, sodann $\int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$ und endlich $\int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$ zu bilden, sondern man kann auch mit $\int G(x, y, z)dy$ oder $\int H(x, y, z)dz$ beginnen und dann die Rechnung in ähnlicher Weise fortsetzen wie bei dem angegebenen Verfahren.

Man erkennt auch, wie sich die angegebene Methode auf Functionen von $n$ Veränderlichen übertragen lässt. Dabei kann die rechte Seite von der Gleichung

$$du = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \cdots + M_n dx_n \tag{24.}$$

nur dann ein *vollständiges Differential* einer Function

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{25.}$$

sein, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial M_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{26.}$$

befriedigt sind. Indem man

$$v = \int M_1 dx_1 \quad \text{und} \quad u = v + \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n) \tag{27.}$$

setzt, hat man den vorliegenden Fall einer Function von $n$ Veränderlichen auf den einfacheren Fall einer Function von $n - 1$ Veränderlichen zurückgeführt, da dann noch die Function $\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ aus der Gleichung

$$(28.)\qquad d\varphi = \left(M_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx_2 + \left(M_3 - \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)dx_3 + \cdots + \left(M_n - \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)dx_n$$

zu berechnen ist.

## § 73.
## Uebungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll $u$ als Function von $x, y, z$ bestimmen, wenn

$$(1.)\qquad du = \frac{adx}{y} - \frac{ax + bz}{y^2}dy + \frac{bdz}{y}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** In diesem Falle ist

$$(2.)\qquad F = \frac{a}{y},\quad G = -\frac{ax + bz}{y^2},\quad H = \frac{b}{y},$$

also

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial x} = -\dfrac{a}{y^2}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{b}{y^2}. \end{cases}$$

Die rechte Seite von Gleichung (1.) ist daher ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(4.)\qquad v = \int F dx = \int \frac{adx}{y} = \frac{ax}{y},$$

$$(5.)\qquad G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ax + bz}{y^2} + \frac{ax}{y^2} = -\frac{bz}{y^2},$$

$$(6.)\qquad w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = -\int \frac{bz}{y^2}dy = \frac{bz}{y},$$

$$(7.)\qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{b}{y},\quad H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\psi(z) = \int\Big(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)dz = C, \tag{8.}$$

folglich wird

$$u = \frac{ax + bz}{y} + C. \tag{9.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll $u$ als Function von $x$, $y$, $z$ bestimmen, wenn

$$du = (y^3 + yz^2)dx + (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z)dy + (4z^3 + 2xyz + y^3)dz \tag{10.}$$

gegeben ist.

**Auflösung.** Hier ist

$$F = y^3 + yz^2, \quad G = 3xy^2 + xz^2 + 3y^2z, \quad H = 4z^3 + 2xyz + y^3, \tag{11.}$$

also

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial x} = 3y^2 + z^2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial x} = 2yz, \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = 2xz + 3y^2. \end{cases} \tag{12.}$$

Die rechte Seite von Gleichung (10.) ist daher ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$v = \int F dx = \int (y^3 + yz^2)dx = xy^3 + xyz^2, \tag{13.}$$

$$G - \frac{\partial v}{\partial y} = (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z) - (3xy^2 + xz^2) = 3y^2z, \tag{14.}$$

$$w = \int\Big(G - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy = \int 3y^2z dy = y^3z, \tag{15.}$$

$$H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = (4z^3 + 2xyz + y^3) - 2xyz - y^3 = 4z^3, \tag{16.}$$

$$\psi(z) = \int\Big(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)dz = \int 4z^3 dz = z^4 + C, \tag{17.}$$

folglich wird

$$u = xy^3 + xyz^2 + y^3z + z^4 + C. \tag{18.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll $u$ als Function von $x$, $y$ und $z$ bestimmen, wenn

$$\begin{aligned} du = &\left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{x}{z}}\right]dx \\ &+ \left[\frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \sin y\right]dy \\ &+ \left[\frac{1}{r} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}} - \cos z\right]dz \end{aligned} \tag{19.}$$

gegeben ist, wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{20.}$$

sein soll.

**Auflösung.** Die Untersuchung, ob die rechte Seite von Gleichung (19.) ein vollständiges Differential ist, kann übergangen werden, da sich ergeben wird, dass $G - \frac{\partial v}{\partial y}$ von $x$ unabhängig ist, und dass $H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}$ nur noch die einzige Veränderliche $z$ enthält. Es wird nämlich, da $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ist,

$$\begin{aligned} v = \int F dx = &\int\left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{x}{z}}\right]dx \\ &= \mathrm{l}(z+r) - \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{\frac{x}{z}}, \end{aligned} \tag{21.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}}, \tag{22.}$$

$$G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y, \tag{23.}$$

$$w = \int\left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = -\int \sin y dy = \cos y. \tag{24.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z+r}{r(z+r)} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \frac{x}{z^2} e^{\frac{x}{z}}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{25.}$$

$$\psi(z) = \int\left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = -\int \cos z dz = -\sin z + C, \tag{26.}$$

folglich wird

$$u = 1(z+r) - \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{\frac{x}{z}} + \cos y - \sin z + C. \tag{27.}$$

## XIII. Abschnitt.

# Theorie der gewöhnlichen Differential-Gleichungen erster Ordnung.

## § 74.

## Begriff und Eintheilung der Differential-Gleichungen.

Jede Gleichung, in der mehrere Veränderliche und ausserdem noch *Differentiale* oder *Differential-Quotienten* beliebig hoher Ordnung enthalten sind, heisst eine *Differential-Gleichung.*

Da die veränderlichen Grössen $x, y, z \ldots$ selbst *endliche*, die Differentiale aber *unendlich kleine* Grössen sind, die neben den endlichen Grössen vernachlässigt werden dürfen, so müssen beide Seiten einer Differential-Gleichung *homogene* Functionen der Differentiale sein, d. h. sie dürfen sich gar nicht ändern, wenn man

$$\begin{array}{l} dx,\; dy,\; dz,\; \ldots \text{ mit } t, \\ d^2x,\; d^2y,\; d^2z, \ldots \text{ mit } t^2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ d^nx,\; d^ny,\; d^nz,\; \ldots \text{ mit } t^n \end{array}$$

multiplicirt und dann beide Seiten der Gleichung durch eine passend gewählte Potenz von $t$ dividirt.

Dies gilt auch noch, wenn in der Differential-Gleichung *partielle* Differentiale und Differential-Quotienten auftreten.

Man unterscheidet *gewöhnliche* und *partielle* Differential-Gleichungen, jenachdem dieselben Functionen von *einer einzigen* oder Functionen von *mehreren unabhängigen* Veränderlichen enthalten. Hier soll nur von den *gewöhnlichen* Differential-Gleichungen die Rede sein.

Man theilt die gewöhnlichen Differential-Gleichungen in *verschiedene* Ordnungen ein nach der Ordnung des höchsten darin enthaltenen Differentials, bezw. des höchsten Differential-Quotienten. Es giebt also Differential-Gleichungen *erster Ordnung*, *zweiter Ordnung*, u. s. w. allgemein *$n^{ter}$ Ordnung*. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, wo nur zwei Veränderliche $x$ und $y$ mit ihren Differentialen vorkommen, so sind z. B. die Gleichungen

$$(3y^2 + 7x^2)dy + (12xy - 8x^2)dx = 0, \tag{1.}$$

oder

$$(3y^2 + 7x^2)\frac{dy}{dx} + 12xy - 8x^2 = 0, \tag{1a.}$$

$$y^2 - ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{2.}$$

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a, \tag{3.}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \,. f(x) = \varphi(x) \tag{4.}$$

*Differential-Gleichungen erster Ordnung*, die Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{x}{a^2}\,. \tag{5.}$$

$$F(x, y)\frac{d^2y}{dx^2} = G(x, y)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{6.}$$

$$\frac{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = cy\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{7.}$$

sind *Differential-Gleichungen zweiter Ordnung*, und die Gleichung

$$F_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + F_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + F_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_n(x)\,.\,y = \Phi(x) \tag{8.}$$

ist eine *Differential-Gleichung $n^{ter}$ Ordnung*, und zwar heisst diese Gleichung eine Differential-Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung und *ersten Grades* oder eine *lineare* Differential-Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, weil sie in Bezug auf die Grössen

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

vom ersten Grade ist.

## § 75.
## Auflösbarkeit der Differential-Gleichungen. Integrations-Constanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 174—177.)

Die einfachste Form einer gewöhnlichen Differential-Gleichung zwischen zwei Veränderlichen $x$ und $y$ tritt bei der Ermittelung eines jeden Integrals auf, wo die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{1.}$$

gegeben und die Gleichung

$$y = f(x) + C \tag{2.}$$

so zu bestimmen ist, dass Gleichung (1.) daraus durch Differentiation abgeleitet werden kann. Man nennt dann

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + C \tag{2a.}$$

das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung. Dabei tritt noch eine beliebige *Integrations-Constante* $C$ auf, welche man so bestimmen kann, dass $y$ den Werth $b$ annimmt, wenn $x$ gleich $a$ wird. Setzt man nämlich

$$C = b - f(a),$$

so wird

$$y = b + f(x) - f(a) = F(x, a, b). \tag{2b.}$$

Will man das angegebene Verfahren auf eine beliebige Differential-Gleichung erster Ordnung

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3.}$$

übertragen, so heisst auch dabei die gesuchte Function

$$y = F(x, a, b), \tag{4.}$$

welche für $x = a$ den Werth $b$ annimmt, das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung, wenn Gleichung (3.) durch Einsetzen dieses Werthes von $y$ befriedigt wird, wenn also

(5.) $$G[x,\ F(x, a, b),\ F'(x, a, b)] = 0$$

wird, was auch $x$, $a$ und $b$ sein mögen.

Man kann sich zunächst durch ein *graphisches* Verfahren davon überzeugen, dass ein solches allgemeines Integral immer existirt, bei welchem man den Anfangswerth $b$ von $y$ noch beliebig annehmen kann.

Bringt man nämlich die Gleichung (3.) auf die Form

(6.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

und beachtet man, dass der gesuchten Gleichung

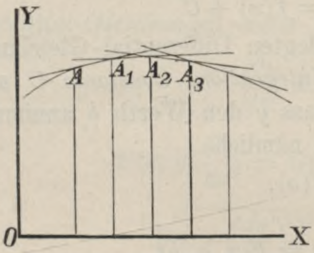
(7.) $$y = F(x, a, b)$$

eine Curve in der $XY$-Ebene entspricht, so erkennt man aus der geometrischen Deutung des Differential-Quotienten (vergl. D.-R., Formel Nr. 16 der Tabelle), nämlich aus der Gleichung

(8.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

dass Gleichung (6.) für jeden Werth von $x$ die Richtung der Curventangente angiebt; denn $\alpha$ ist in Gleichung (8.) der Winkel, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der $X$-Axe bildet. Ist also $A$ der Anfangspunkt der Curve (Fig. 130) mit den Coordinaten $a$ und $b$, so kann man die Tangente im Punkte $A$ construiren, weil man aus der Gleichung

Fig. 130.




(9.) $$\operatorname{tg}\alpha = \varphi(a, b)$$

den Winkel $\alpha$ berechnen kann.

Auf dieser Tangente liegt aber noch ein unendlich naher Curvenpunkt $A_1$ mit den Coordinaten $a_1$, $b_1$. Auch für diesen Punkt findet man aus der Gleichung

(10.) $$\operatorname{tg}\alpha_1 = \varphi(a_1,\ b_1)$$

die Richtung der nächsten Tangente $A_1A_2$, wobei der Punkt $A_2$ dem Punkte $A_1$ unendlich nahe liegen möge, so dass auch $A_2$ noch ein Punkt der Curve ist. Jetzt findet man aus der Gleichung

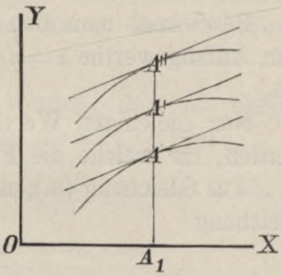
(11.) $$\operatorname{tg}\alpha_2 = \varphi(a_2, b_2)$$

die Richtung der Tangente im Punkte $A_2$. Indem man so weiter fortfährt, findet man beliebig viele Punkte und Tangenten der gesuchten Curve, welche der vorgelegten Differential-Gleichung genügt.

Da man in Wirklichkeit die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, ... einander nicht unendlich nahe legen kann, so liefert dieses Verfahren bei der praktischen Ausführung zwar nur ein angenähertes Resultat; in der Vorstellung ist man aber dieser Beschränkung nicht unterworfen, so dass man damit bewiesen hat, dass *die vorgelegte Differential-Gleichung immer ein Integral besitzt.*

Gleichzeitig erkennt man aus diesem *graphischen* Verfahren, dass die Differential-Gleichung nicht *ein* Integral, sondern *unendlich viele* Integrale besitzt. Weil nämlich Gleichung (6.) nur die *Richtung* der Tangente angiebt, so kann man für die Abscisse $x = a$ die Ordinate $y = b$ noch beliebig wählen, d. h. es wird nicht *eine* Curve geben, welche der vorgelegten Differential-Gleichung genügt, sondern *unendlich viele.*

Fig. 131.




Dieses graphische Verfahren kann man auch benutzen, um die auf einander folgenden Werthe $b$, $b_1$, $b_2$, ... von $y$ zu berechnen, denn aus Gleichung (6.) findet man zunächst

(12.) $$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} = \varphi(a, b), \quad \text{oder} \quad b_1 = b + (a_1 - a)\varphi(a, b)$$

und ebenso

(13.) $$b_2 = b_1 + (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1),$$

u. s. w. Dabei sind allerdings $b_1$, $b_2$, ... nur *Näherungswerthe*, die um so weniger von den wahren Werthen abweichen, je kleiner man die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, ... nimmt.

Wesentlich ist dabei die Erkenntniss, dass, so lange die Function $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von $x$ und $y$ eindeutig und stetig bleibt, einer stetigen Aufeinanderfolge der

Werthe von $x$ auch eine stetige Aufeinanderfolge der zugehörigen Werthe der $y$ entspricht. Macht man daher die Voraussetzung, dass die Differential-Gleichung (6.) ein Integral von der Form

$$y = F(x, a, b) \tag{14.}$$

besitzt, so kann man diese *Integral-Function*, welche der Kürze wegen mit $f(x)$ bezeichnet werden möge, mit Hülfe des *Taylor*'schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln, wobei noch der Anfangswerth $a$ ganz beliebig ist. Dies giebt (vergl. D.-R., Formeln Nr. 50 der Tabelle)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R. \tag{15.}$$

Bezeichnet man den willkürlichen Werth von $y$, welcher dem Anfangswerthe $x = a$ zugeordnet ist, mit $b$, so wird

$$b = f(a). \tag{16.}$$

Nur diejenigen Werthe von $a$ und $b$ sollen ausgeschlossen werden, für welche die Function $\varphi(x, y)$ *unstetig* wird.

Aus Gleichung (6.), nämlich aus der vorgelegten Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

folgt dann zunächst

$$f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \varphi(a, b). \tag{17.}$$

Hierbei ist mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, welchen man erhält, wenn man $x = a$ und $y = b$ setzt. Ebenso möge

$$f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=a} \tag{18.}$$

aus $\frac{d^n y}{dx^n}$ hervorgehen, indem man $x = a$, $y = b$ setzt. Aus Gleichung (6.) folgt dann weiter (vergl. D.-R., Formel Nr. 87 der Tabelle)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi_1 + \varphi_2 \frac{dy}{dx}, \tag{19.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{20.}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Daraus findet man

$$f''(a) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}, \quad f'''(a) = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=a}, \ldots, \tag{21.}$$

d. h. man kann sämmtliche Coefficienten auf der rechten Seite von Gleichung (15.) berechnen.

Die Bedingungen dafür, dass der Rest $R$ für hinreichend grosse Werthe von $n$ beliebig klein wird, sollen erst an einer späteren Stelle aufgesucht werden, erstens, damit die vorliegende Darstellung nicht unterbrochen wird, und zweitens, weil die Herleitung dieser Bedingungen für den Anfänger möglicher Weise noch zu schwer ist. Deshalb möge die Untersuchung der Convergenz in einem besonderen Paragraphen ausgeführt werden, den der Anfänger nöthigenfalls übergehen kann, ohne das Verständniss für das Folgende zu verlieren.

Es möge hier also vorausgesetzt werden, dass die durch das beschriebene Verfahren aufgefundene unendliche Reihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{22.}$$

*convergent* sei, dann kann man auch beweisen, dass

$$y = f(x) \tag{23.}$$

das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung ist, wobei nach Gleichung (16.)

$$f(a) = b$$

sein soll. Setzt man nämlich den gefundenen Werth von $y$ in die Function $\varphi(x, y)$ ein und entwickelt dieselbe nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$\varphi(x, y) = \varphi(a, b) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=a} \frac{x-a}{1!} + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=a} \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots. \tag{24.}$$

Andererseits erhält man aus Gleichung (15.), da die rechte Seite dieser Gleichung eine Potenzreihe ist, die man differentiirt, indem man die einzelnen Glieder differentiirt,

$$\frac{dy}{dx} = f'(a) + f''(a)\frac{x-a}{1!} + f'''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots. \tag{25.}$$

Nun ist aber nach den Gleichungen (17.) und (21.)

$$f'(a) = \varphi(a, b),\ f''(a) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=a},$$
$$f'''(a) = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=a}, \ldots,$$

d. h. die rechte Seite von Gleichung (25.) stimmt Glied für Glied mit der rechten Seite von Gleichung (24.) überein, folglich müssen auch die linken Seiten einander gleich sein, es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{26.}$$

was zu beweisen war.

Man kann also

$$y = f(x) = F(x, a, b)$$

so als Function von $x$ bestimmen, dass einem gegebenen Anfangswerthe $x = a$ ein beliebiger Anfangswerth $y = b$ zugeordnet ist, und dass diese Function der vorgelegten Differential-Gleichung genügt.

Das angegebene Verfahren kann in allen Fällen, wo $\varphi(x, y)$ eine eindeutige, stetige Function ist, angewendet werden und wird meist sehr brauchbare Resultate liefern. In vielen Fällen wird es aber möglich sein, das *allgemeine Integral* in *geschlossener* Form, d. h. *ohne* Reihen-Entwickelung durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{27.}$$

darzustellen. Aus dieser Gleichung, welche man die „*Integral-Gleichung*" nennt, kann man im Allgemeinen die Integrations-Constante $C$ so bestimmen, dass für $x = a$ die abhängige Veränderliche $y$ gleich $b$ wird; man braucht ja nur die Gleichung

$$\Phi(a, b, C) = 0 \tag{28.}$$

nach $C$ aufzulösen. Setzt man einen der gefundenen Werthe von $C$ in die Gleichung (27.) ein und entwickelt wieder $y$ nach steigenden Potenzen von $x - a$, so muss man genau dasselbe Resultat wie vorher erhalten, weil in beiden Entwickelungen das erste Glied gleich $b$ wird, und weil sich die Coefficienten der folgenden Glieder schon aus der vorgelegten Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \tag{29.}$$

ergeben, welche aus der Integral-Gleichung (27.) durch Differentiation hervorgeht. Rechnet man nämlich aus Gleichung (27.) die Grössen $y$ und $\frac{dy}{dx}$ aus und setzt dieselben in Gleichung (29.) ein, so muss die Gleichung *identisch* befriedigt werden, sie muss für *alle* Werthe von $x$ und $C$ gelten. Deshalb kann man auch die Differential-Gleichung (29.) aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{30.}$$

durch Elimination von $C$ herleiten.

Wie man also auch die Integral-Gleichung aufgefunden haben mag, man erhält in allen Fällen dasselbe allgemeine Integral, so lange $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von $x$ und $y$ eine eindeutige, stetige Function ist.

Sollen *zwei* veränderliche Grössen $y$ und $z$ als Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x$ erklärt werden, so würde *eine* Gleichung zwischen den Grössen $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ dazu nicht ausreichen. Es müssen also mindestens *zwei* solche Gleichungen gegeben sein, die man „*ein System simultaner Differential-Gleichungen*“ nennt, weil sie *gleichzeitig* gelten. Der Einfachheit wegen kann man sich diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z) \tag{31.}$$

gebracht denken.

Auch hier ergiebt sich ohne Weiteres die geometrische Deutung und damit die Auflösbarkeit dieser Differential-Gleichungen. Beachtet man nämlich, dass zwei Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$ zwischen $x, y, z$ im Allgemeinen einer *Raumcurve* entsprechen, und dass nach D.-R., Formel Nr. 142 der Tabelle die Tangente an die Raumcurve im Punkte $P$ die Gleichungen

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \quad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) \tag{32.}$$

hat, so erkennt man, dass die Gleichungen (31.) für jeden beliebigen Punkt der Raumcurve die Richtung der Tangente angeben. Den Anfangspunkt $A$ mit den Coordinaten $a$, $b$, $c$ kann man noch beliebig annehmen und findet dann aus den Gleichungen (32.) die Gleichungen

$$(33.)\quad b_1 - b = (a_1 - a)\varphi(a, b, c),\quad c_1 - c = (a_1 - a)\psi(a, b, c)$$

die Coordinaten $a_1$, $b_1$, $c_1$ eines benachbarten Punktes $A_1$ auf dieser Tangente, wobei man noch den Werth von $a_1$ so nahe an $a$ annehmen darf, wie man will, damit der Punkt $A_1$ auch noch auf der Raumcurve liegt. Ebenso findet man aus den Gleichungen

$$(34.)\quad b_2 - b_1 = (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1, c_1),\quad c_2 - c_1 = (a_2 - a_1)\psi(a_1, b_1, c_1)$$

die Coordinaten eines dritten Curvenpunktes $A_2$ und kann in dieser Weise beliebig fortfahren.

In Wirklichkeit kann man auch hier die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, ... einander nicht unendlich nahe legen und erhält daher bei der praktischen Ausführung dieses Verfahrens nur ein *angenähertes Resultat*; in der Vorstellung ist man aber dieser Beschränkung nicht unterworfen.

Gleichzeitig erkennt man aus dieser Betrachtung, dass die Anfangswerthe $b$ und $c$ von $y$ und $z$, welche dem Anfangswerthe $x = a$ entsprechen, noch ganz beliebig sind, so dass das System simultaner Differential-Gleichungen noch zweifach unendlich viele Lösungen besitzt.

Dieses Resultat ergiebt sich auch aus der analytischen Behandlung der Aufgabe. Setzt man nämlich

$$(35.)\quad y = f(x) \quad \text{und} \quad z = g(x),$$

$$(36.)\quad f(a) = b \quad \text{und} \quad g(a) = c,$$

wobei die Anfangswerthe $b$ und $c$ noch ganz beliebig gewählt werden dürfen, so wird nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze

$$(37.)\quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

$$(38.)\quad z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_1,$$

und man erhält nach den Gleichungen (31.)

$$(39.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = \varphi(a, b, c),$$

$$(40.)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a} = g'(a) = \psi(a, b, c).$$

Ferner wird

$$(41.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z),$$

$$(42.)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z),$$

also

$$(43.)\quad f''(a) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=a} = \varphi'(a, b, c),$$

$$(44.)\quad g''(a) = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=a} = \psi'(a, b, c).$$

Ebenso findet man

$$(45.)\quad f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right)_{x=a} = \varphi^{(n-1)}(a, b, c),$$

$$(46.)\quad g^{(n)}(a) = \left(\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}}\right)_{x=a} = \psi^{(n-1)}(a, b, c).$$

Wenn $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ und die partiellen Ableitungen dieser Functionen für die betrachteten Werthe von $x$, $y$, $z$ stetig und eindeutig sind, so lässt sich wieder durch functionentheoretische Untersuchungen zeigen, dass die Restglieder $R$ und $R_1$ für hinreichend kleine Werthe von $|x-a|$ mit unbegrenzt wachsendem $n$ verschwindend klein werden. Dann sind die Gleichungen (37.) und (38.) die *allgemeinen Integral-Gleichungen* der gegebenen Differential-Gleichungen, denn man kann zeigen, dass die gefundenen Werthe von $y$ und $z$ den Gleichungen (31.) genügen, wie man auch die Anfangswerthe $b$ und $c$ wählen mag. Setzt man nämlich die gefundenen Werthe von

$y$ und $z$ in $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ ein und entwickelt diese Functionen nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$(47.)\quad \varphi(x, y, z) = \varphi(a, b, c) + \frac{\varphi'(a, b, c)}{1!}(x - a) + \frac{\varphi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

$$(48.)\quad \psi(x, y, z) = \psi(a, b, c) + \frac{\psi'(a, b, c)}{1!}(x - a) + \frac{\psi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \cdots.$$

Andererseits findet man aus den Gleichungen (37.) und (38.) durch Differentiation

$$(49.)\quad \frac{dy}{dx} = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$

$$(50.)\quad \frac{dz}{dx} = g'(a) + \frac{g''(a)}{1!}(x - a) + \frac{g'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots.$$

Aus den Gleichungen (43.) bis (46.) erkennt man aber, dass die rechten Seiten von Gleichung (47.) und (49.), desgleichen auch von Gleichung (48.) und (50.) Glied für Glied mit einander übereinstimmen, folglich sind auch die linken Seiten einander gleich, d. h. es wird

$$(51.)\quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

$$(52.)\quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z).$$

Besonders zu beachten ist dabei der Umstand, dass man über *zwei* willkürliche Integrations-Constante verfügt, indem man die Anfangswerthe $b$ und $c$ von $y$ und $z$ noch beliebig wählen darf.

Man kann dieses Verfahren ohne Weiteres auf ein System von $m$ simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung mit $m$ Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ der einzigen unabhängigen Veränderlichen $x$ übertragen.

Denkt man sich nämlich die Gleichungen auf die Form

$$(53.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x;\, y_1, y_2, \ldots y_m), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x;\, y_1, y_2, \ldots y_m), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \varphi_m(x;\, y_1, y_2, \ldots y_m) \end{cases}$$

gebracht, so kann man noch die dem Anfangswerthe $x = a$ zugeordneten Anfangswerthe $b_1, b_2, \ldots b_m$ von $y_1, y_2, \ldots y_m$ beliebig annehmen und dann diese Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln. Dies giebt

$$(54.)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(a) + \dfrac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_1''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \\ y_2 = f_2(x) = f_2(a) + \dfrac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_2''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_m = f_m(x) = f_m(a) + \dfrac{f_m'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f_m''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \end{cases}$$

wobei für $\alpha = 1, 2, \ldots m$

$$(55.)\quad f_\alpha(a) = b_\alpha, \quad f_\alpha'(a) = \left(\frac{dy_\alpha}{dx}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha(a;\, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

$$(56.)\quad f_\alpha''(a) = \left(\frac{d^2y_\alpha}{dx^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha'(a;\, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

allgemein

$$(57.)\quad f^{(n)}{}_\alpha(a) = \left(\frac{d^ny_\alpha}{dx^n}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right)_{x=a} = \varphi_\alpha^{(n-1)}(a;\, b_1, b_2, \ldots b_m);$$

und zwar findet man nach D.-R., Formel Nr. 136 der Tabelle $\dfrac{d\varphi_\alpha}{dx} = \varphi_\alpha'(x;\, y_1, y_2, \ldots y_m)$ aus der Gleichung

$$(58.)\quad \frac{d\varphi_\alpha}{dx} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx},$$

wobei man noch aus den Gleichungen (53.) die Werthe von

$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_m}{dx}$ einsetzen muss. Ebenso findet man aus Gleichung (58.)

$$\frac{d^n\varphi_\alpha}{dx^n} = \varphi_\alpha^{(n)}(x;\, y_1, y_2, \dots y_m), \tag{59.}$$

indem man $\varphi_\alpha$ mit $\varphi_\alpha^{(n-1)}$ vertauscht.

Aus dieser Lösung ergiebt sich, dass man bei der Integration noch über $m$ willkürliche Integrations-Constanten $b_1, b_2, \dots b_m$ verfügt.

Gelingt es, das System simultaner Differential-Gleichungen in geschlossener Form zu integriren, so ist es natürlich nicht immer nöthig, dass die $m$ Integrations-Constanten gerade die Anfangswerthe $b_1, b_2, \dots b_m$ von $y_1, y_2, \dots y_m$ sind. Die Lösung kann auch durch das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x;\, y_1, y_2, \dots y_m;\, c_1, c_2 \dots c_m) = 0, \\ F_2(x;\, y_1, y_2, \dots y_m;\, c_1, c_2 \dots c_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x;\, y_1, y_2, \dots y_m;\, c_1, c_2, \dots c_m) = 0 \end{array}\right. \tag{60.}$$

gegeben sein. Ob diese Gleichungen wirklich ein System von *Integral-Gleichungen* sind, kann man ermitteln, indem man aus den $m$ Gleichungen (60.) und aus den $m$ Gleichungen

$$\frac{dF_1}{dx} = 0, \quad \frac{dF_2}{dx} = 0, \cdots \frac{dF_m}{dx} = 0 \tag{61.}$$

die $m$ Grössen $c_1, c_2, \dots c_m$ eliminirt und dann untersucht, ob das sich daraus ergebende System von $m$ Gleichungen mit den Gleichungen (53.) gleichbedeutend ist. Sollen die Gleichungen (60.) das System der *allgemeinen* (oder *vollständigen*) Integral-Gleichungen sein, so muss es möglich sein, die Constanten $c_1$, $c_2, \dots c_m$ so zu bestimmen, dass $y_1, y_2, \dots y_m$ für $x = a$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerthe $b_1, b_2, \dots b_m$ annehmen.

Auf den soeben erläuterten Fall lässt sich auch die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen. Ist z. B. die Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0, \tag{62.}$$

oder

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) \tag{63.}$$

gegeben, so setze man

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1}. \tag{64.}$$

Dadurch kann man die gegebene Differential-Gleichung auf die Form

$$\frac{dy_{m-1}}{dx} = \varphi(x;\ y,\ y_1,\ y_2, \ldots y_{m-1}) \tag{65.}$$

bringen, d. h. man hat die Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung durch ein System von $m$ Differential-Gleichungen *erster* Ordnung ersetzt, welche durch die Gleichungen (64.) und (65.) gegeben sind.

Bei der Lösung kann man noch dem Anfangswerthe $x = a$ die willkürlichen Anfangswerthe $b,\ b_1,\ b_2, \ldots b_{m-1}$ von $y, y_1$ $y_2, \ldots y_{m-1}$ zuordnen.

Daraus ergiebt sich für $y$ die Reihen-Entwickelung

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots, \tag{66.}$$

wobei

$$f(a) = b,\quad f'(a) = b_1,\quad f''(a) = b_2, \ldots f^{(m-1)}(a) = b_{m-1} \tag{67.}$$

ganz beliebige Grössen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$\begin{cases} f^{(m)}(a) = \varphi(a,\ b,\ b_1, \ldots b_{m-1}), \\ f^{(m+1)}(a) = \varphi'(a,\ b,\ b_1, \ldots b_{m-1}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \tag{68.}$$

Die hier angedeutete Methode hat den Nachtheil, dass sie die Integral-Gleichungen nicht in *endlicher*, *geschlossener* Form liefert, aber sie giebt den Nachweis, dass bei der Integration einer Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung $m$ beliebige Integrations-Constanten auftreten.

Die Anzahl der Fälle, wo man die Integral-Gleichungen in endlicher, geschlossener Form auffindet, ist verhältnissmässig klein; in den meisten Fällen führt die Integration der Differential-Gleichungen durch unendliche Reihen auf bisher unbekannte Functionen.

In den späteren Paragraphen sollen nur einige Aufgaben hervorgehoben werden, bei denen die Lösung in endlicher Form möglich ist.

Zunächst aber soll noch die Untersuchung nachgeholt werden, unter welchen Bedingungen die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

durch eine *convergente* Reihe von der Form

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots$$

möglich ist. Da aber die dazu erforderlichen Beweise etwas schwierig sind, so darf der Anfänger, wie schon oben bemerkt worden ist, den folgenden Paragraphen ohne Nachtheil für das Verständniss der späteren Paragraphen übergehen.

## § 76.

## Untersuchung der Convergenz-Bedingungen.

Die Integration eines vollständigen Differentials von *zwei* unabhängigen Veränderlichen

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{1.}$$

kann noch in einer etwas anderen Form ausgeführt werden, als es in § 70 geschehen ist. Bezeichnet man nämlich mit $a$ und $b$ diejenigen Werthe von $x$ und $y$, für welche $u$ gleich Null wird, so erhält man aus Gleichung (1.)

$$u = \int_a^x M(x, y)dx + \varphi(y), \tag{2.}$$

wobei $\varphi(y)$ noch eine passend zu bestimmende Function der einzigen Veränderlichen $y$ ist.

Zur Ermittelung dieser Function beachte man zunächst, dass

$$(3.)\qquad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

sein muss, damit $du$ ein vollständiges Differential ist. Deshalb findet man, indem man die Gleichung (2.) partiell nach $y$ differentiirt und dabei auf der rechten Seite die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt,

$$(4.)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_a^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

$$= \int\limits_a^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = [N(x, y)]_a^x + \varphi'(y)$$
$$= N(x, y) - N(a, y) + \varphi'(y),$$

oder

$$(5.)\qquad \varphi'(y) = N(a, y), \quad \varphi(y) = \int\limits_b^y N(a, y) dy.$$

Dies giebt

$$(6.)\qquad u = \int\limits_a^x M(x, y) dx + \int\limits_b^y N(a, y) dy.$$

Ebenso findet man

$$(7.)\qquad u = \int\limits_b^y N(x, y) dy + \int\limits_a^x M(x, b) dx.$$

Indem man die beiden für $u$ gefundenen Werthe einander gleichsetzt, erhält man

$$(8.)\qquad \int\limits_a^x [M(x, y) - M(x, b)] dx = \int\limits_b^y [N(x, y) - N(a, y)] dy.$$

Diese Gleichung gilt für zwei beliebige Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$, welche der einzigen durch die Gleichung (3.) aufgestellten Bedingung unterworfen sind.

Jetzt sei $f(z)$ eine Function, welche für die betrachteten Werthe der complexen Veränderlichen

$$(9.)\qquad z = x + yi = r(\cos t + i\sin t) = r\,.\,e^{ti}\text{*)}$$

*eindeutig* und *stetig* sein und eine bestimmte, stetige Ableitung $f'(z)$ besitzen möge; dann wird

$$(10.)\qquad dz = e^{ti}dr + ir\,.\,e^{ti}dt,$$

$$(11.)\qquad f(z)dz = M(r, t)dr + N(r, t)dt,$$

wobei

$$(12.)\qquad M(r, t) = f(r\,.\,e^{ti})\,.\,e^{ti},$$

$$(13.)\qquad N(r, t) = f(r\,.\,e^{ti})\,.\,ir\,.\,e^{ti}.$$

Zunächst erkennt man, dass die rechte Seite von Gleichung (11.) ein vollständiges Differential ist, denn es wird

$$(14.)\qquad \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial r} = ie^{ti}\,[f(r\,.\,e^{ti}) + r\,.\,e^{ti}f'(r\,.\,e^{ti})].$$

Setzt man die Werthe von $M$ und $N$ aus den Gleichungen (12.) und (13.) in die Gleichung (8.) ein, indem man $x$ mit $r$ und $y$ mit $t$ vertaucht, so erhält man

$$(15.)\int\limits_a^r [M(r, t) - M(r, b)]dr = \int\limits_b^t [N(r, t) - N(a, t)]dt.$$

Da die Grenzen $a$ und $r$, $b$ und $t$ noch ganz beliebig sind, so setze man

$$a = 0,\quad b = 0,\quad t = 2\pi,\quad \text{also}\quad e^{bi} = e^0 = 1,\quad e^{ti} = e^{2\pi i} = 1,$$

während $r$ vorläufig noch einen beliebigen Werth haben soll. Da $f(z)$ für die betrachteten Werthe von $z$ nach Voraussetzung *eindeutig* und *stetig* ist, so wird nach Gleichung (12.)

$$(16.)\qquad M(r, t) - M(r, b) = f(r) - f(r) = 0,$$

und nach Gleichung (13.)

$$(17.)\qquad N(r, t) - N(a, t) = ir\,.\,e^{ti}\,.\,f(r\,.\,e^{ti}),$$

folglich geht Gleichung (15.) über in

---

*) Das Argument ist hier mit $t$ und nicht, wie gewöhnlich, mit $\varphi$ bezeichnet, damit der Buchstabe $\varphi$ in dem Folgenden noch als Functionszeichen verwendet werden kann.

$$\int_0^{2\pi} N(r, t)dt = i\int_0^{2\pi} r \,.\, e^{ti} f(r \,.\, e^{ti})dt = 0,$$

oder

(18.) $$\int_0^{2\pi} r \,.\, e^{ti} f(r \,.\, e^{ti})dt = \int_0^{2\pi} z f(z)dt = 0,$$

wo bei der Integration $r$ einen constanten Werth hat. Für

(19.) $$f(z) = \frac{F(z) - F(a)}{z - a}$$

erhält man daher

$$\int_0^{2\pi} \frac{z[F(z) - F(a)]}{z - a} dt = 0,$$

oder

(20.) $$\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{z - a} = F(a)\int_0^{2\pi} \frac{zdt}{z - a}.$$

Nun wird, wenn $|a| < |z|$ ist, nach dem binomischen Lehrsatze

(21.) $$\frac{z}{z - a} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \cdots,$$

also

(22.) $$\int_0^{2\pi} \frac{zdt}{z - a} = \int_0^{2\pi} dt + \sum_{m=1}^{m=\infty} a^m \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z^m}$$

$$= 2\pi + \sum \frac{a^m}{r^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} dt$$

$$= 2\pi + \sum \frac{a^m}{r^m} \left[\frac{i}{m} e^{-mti}\right]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

folglich geht Gleichung (20.) über in

(23.) $$\int_0^{2\pi} \frac{z\, F(z)dt}{z - a} = 2\pi \,.\, F(a),$$

oder

$$F(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{z-a}. \tag{24.}$$

Diese wichtige Formel rührt von *Cauchy* her und kann noch in folgender Weise verallgemeinert werden. Differentiirt man beide Seiten der Gleichung (24.) nach $a$, so erhält man, indem man auf der rechten Seite die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt, der Reihe nach die Gleichungen

$$F'(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{(z-a)^2},$$

$$F''(a) = \frac{1\,.\,2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{(z-a)^3},$$

$$F'''(a) = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{(z-a)^4},$$

. . . . . . . . . .

allgemein

$$F^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zF(z)dt}{(z-a)^{m+1}}. \tag{25.}$$

Der absolute Betrag von $z$ bleibt bei der Integration constant und möge deshalb mit $R$ bezeichnet werden, so dass $z = R\,.\,e^{ti}$ wird. Dadurch geht Gleichung (25.) für $a = 0$ über in

$$F^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi\,.\,R^m}\int_0^{2\pi} e^{-mti}F(R\,.\,e^{ti})dt. \tag{26.}$$

Wenn man schliesslich noch

$$F(z) = \varphi(a+z)$$

setzt, so ergiebt sich hieraus die Formel

$$\varphi^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi\,.\,R^m}\int_0^{2\pi} e^{-mti}\varphi(a+R\,.\,e^{ti})dt. \tag{27.}$$

Da man ein bestimmtes Integral als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen auffassen kann, und da der absolute Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge (vgl. D.-R., § 134), so erhält man aus Gleichung (27.) die folgende Ungleichung

$$|\varphi^{(m)}(a)| \leqq \frac{m!}{2\pi \, . \, R^m} \int_0^{2\pi} |e^{-mti}| \, . \, |\varphi(a + R \, . \, e^{ti})| \, dt,$$

oder, da $|e^{-mti}| = 1$ ist,

$$(28.) \qquad |\varphi^{(m)}(a)| \leqq \frac{m!}{2\pi \, . \, R^m} \int_0^{2\pi} |\varphi(a + R \, . \, e^{ti})| \, dt.$$

Bezeichnet man nun mit $G$ den *grössten* Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x)$, wenn $r$ in $x = a + r \, . \, e^{ti}$ alle Werthe von 0 bis $R$ und $t$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$ durchläuft, so ist auch

$$(29.) \qquad |\varphi(a + R \, . \, e^{ti})| \leqq G,$$

und die Ungleichung (28.) wird noch verstärkt, wenn man $|\varphi(a + R \, . \, e^{ti})|$ mit $G$ vertauscht; folglich findet man

$$|\varphi^{(m)}(a)| \leqq \frac{m!}{2\pi \, . \, R^m} \int_0^{2\pi} G dt = \frac{m! \, G}{R^m} \, .$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

**Satz 1.** *Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige Function der complexen Veränderlichen $x = a + r \, . \, e^{ti}$, welche mit ihrer ersten Ableitung stetig ist, so lange $r \leqq R$ bleibt, und ist $G$ der grösste Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x)$, wenn $r$ alle Werthe von* 0 *bis $R$ und $t$ alle Werthe von* 0 *bis $2\pi$ durchläuft, so ist*

$$(30.) \qquad |\varphi^{(m)}(a)| \leqq \frac{m! \, G}{R^m} \, .$$

Diesen Satz kann man sogleich auf Functionen von zwei oder mehr Veränderlichen übertragen. Aus Gleichung (27.) folgt, wenn man $y$ zunächst als Constante und $\varphi(x, y)$ als Function der einzigen Veränderlichen $x$ betrachtet,

$$(31.)\quad \frac{\partial^m \varphi(a, y)}{\partial a^m} = \frac{m!}{2\pi \,.\, R^m}\int_0^{2\pi} e^{-mti}\varphi(a + R \,.\, e^{ti}, y)dt^{*}),$$

wobei $\varphi(x, y)$ als Function von $x$ denselben Bedingungen unterworfen ist wie vorher $\varphi(x)$. Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung $n$-mal partiell nach $y$, so geschieht das auf der rechten Seite der Gleichung wieder, indem man unter dem Integralzeichen differentiirt. Dadurch erhält man

$$(32.)\quad \frac{\partial^{m+n}\varphi(a, y)}{\partial a^m \partial y^n} = \frac{m!}{2\pi \,.\, R^m}\int_0^{2\pi} e^{-mti}\frac{\partial^n \varphi(a + R \,.\, e^{ti}, y)}{\partial y^n}\,dt.$$

Nun ist aber wieder nach Gleichung (27.), wenn man $x$ mit $y$, $a$ mit $b$, $t$ mit $u$, $m$ mit $n$ und $R$ mit $S$ vertauscht,

$$(33.)\quad \frac{\partial^n \varphi(a+R \,.\, e^{ti}, b)}{\partial b^n} = \frac{n!}{2\pi \,.\, S^n}\int_0^{2\pi} e^{-nui}\,\varphi(a+R \,.\, e^{ti}, b+S \,.\, e^{ui})du,$$

wobei man voraussetzt, dass die Function $\varphi(x, y)$ auch in Bezug auf $y$ mit ihrer ersten Ableitung *eindeutig* und *stetig* ist, und wo $y$ gleich $b+S \,.\, e^{ui}$ gesetzt ist. Für $y$ gleich $b$ geht daher Gleichung (32.) über in

$$(34.)\quad \frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} =$$

$$\frac{m!\, n!}{4\pi^2 . R^m . S^n}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} e^{-(mt+nu)i}\varphi(a+R \,.\, e^{ti},\quad b + S \,.\, e^{ui})dt\,du.$$

Ist $G$ der *grösste* Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x, y)$, wenn $r = |\,x\,|$ alle Werthe von 0 bis $R$, $s = |\,y\,|$ alle Werthe von 0 bis $S$, $t$ und $u$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$ durchlaufen, und wendet man jetzt wieder den Satz an, dass der absolute

---

*) Hierbei ist der Werth von $\dfrac{\partial^m \varphi(x, y)}{\partial x^m}$ für $x=a$ der Kürze wegen mit $\dfrac{\partial^m \varphi(a, y)}{\partial a^m}$ bezeichnet. In ähnlicher Weise möge in dem Folgenden der Werth von $\dfrac{\partial^{m+n}\varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$ für $x = a$, $y = b$ der Kürze wegen mit $\dfrac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}$ bezeichnet werden.

Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge, so findet man aus der Gleichung (34.) die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| \leqq \frac{m!\,n!}{4\pi^2 . R^m . S^n}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} |\,\varphi(a + R . e^{ti},\, b + S . e^{ui})\,|\, dt du$$

$$\leqq \frac{m!\,n!}{4\pi^2 . R^m . S^n}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} G dt du,$$

oder

$$(35.)\qquad \left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a,b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| \leqq \frac{m!\,n!\,G}{R^m . S^n}.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

**Satz 2.** *Ist $\varphi(x, y)$ eine eindeutige Function der beiden complexen Veränderlichen*

$$x = a + r . e^{ti}, \quad y = b + s . e^{ui},$$

*welche mit den beiden ersten partiellen Ableitungen* $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$ stetig ist, so lange $r \leqq R$, $s \leqq S$ *bleibt, und ist G der grösste Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x, y)$, wenn r alle Werthe von 0 bis R, s alle Werthe von 0 bis S, t und u alle Werthe von 0 bis $2\pi$ durchlaufen, so ist der absolute Betrag von* $\frac{\partial^{m+n}\varphi(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}$ *für $x = a$, $y = b$ kleiner als* $\frac{m!\,n!\,G}{R^m . S^n}$.

Diesem Satze kann man noch eine andere Fassung geben. Es sei

$$(36.)\qquad \Phi(x, y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)},$$

dann wird

$$(37.)\quad \frac{\partial^{m+n}\Phi(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{m!\,n!\,G}{R^m . S^n\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{m+1}\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)^{n+1}},$$

also für $x = a$, $y = b$

$$(38.)\qquad \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} = \frac{m!\, n!\, G}{R^m S^n},$$

folglich geht Ungleichung (35.) über in

$$(39.)\qquad \left|\frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right| < \left|\frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}\right|.$$

Nun lässt sich die Differential-Gleichung

$$(40.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)} = \Phi(x, y)$$

sehr leicht integriren, wenn man Gleichung (40.) auf die Form

$$(41.)\qquad \left(1 - \frac{y-b}{S}\right) dy = \frac{G dx}{1 - \frac{x-a}{R}}$$

bringt und beide Seiten der Gleichung integrirt. Beachtet man dabei noch, dass $y = b$ sein soll für $x = a$, so findet man

$$(42.)\qquad y - b - \frac{(y-b)^2}{2S} = -G \,.\, R \,.\, \mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right),$$

oder

$$y - b = S \pm \sqrt{S^2 + 2G \,.\, R \,.\, S \,.\, \mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für $x = a$

$$y - b = S \pm S,$$

folglich muss das untere Zeichen gelten; es ist also

$$(43.)\qquad y = b + S - \sqrt{S^2 + 2G \,.\, R \,.\, S \,.\, \mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)} = F(x).$$

Diese Function ist *eindeutig* und *stetig*, so lange

$$(44.)\qquad \left|\mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\right| > -\frac{S}{2G \,.\, R},$$

denn die Quadratwurzel wechselt nur dann ihr Vorzeichen, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen verschwindet, wenn also $\mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)$ gleich $-\frac{S}{2G \,.\, R}$ wird; und auch der Werth von $\mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)$ ist in diesem Falle eindeutig bestimmt, weil er für $x = a$ verschwinden soll. Setzt man

$$(45.)\qquad R\left(1 - e^{-\frac{S}{2G.R}}\right) = g$$

und beschränkt $x$ auf solche Werthe, für welche

$$(46.)\qquad |x - a| < g$$

ist, so wird mit Rücksicht darauf, dass der absolute Betrag einer Differenz (gleich oder) grösser ist als die Differenz der absoluten Beträge,

$$(47.)\qquad \left|1 - \frac{x-a}{R}\right| \geqq 1 - \frac{|x-a|}{R} > 1 - \frac{g}{R} = e^{-\frac{S}{2G.R}}.$$

Nun ist der absolute Betrag des Logarithmus einer complexen Grösse $r . e^{\varphi i}$ (gleich oder) grösser als der Logarithmus des absoluten Betrages dieser Grösse, denn es ist allgemein

$$|\,\mathrm{l}(r . e^{\varphi i})\,| = |\,\mathrm{l}r + \varphi i\,| = \sqrt{(\mathrm{l}r)^2 + \varphi^2} \geqq \mathrm{l}r,$$

folglich ist auch

$$(48.)\qquad \left|\,\mathrm{l}\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\right| \geqq \mathrm{l}\left|1 - \frac{x-a}{R}\right| > -\frac{S}{2G.R}.$$

Wenn also die Ungleichung (46.) gilt, so gilt erst recht die Ungleichung (44.). Dann wird aber $y = F(x)$ eine *eindeutige*, *stetige* Function, die man mit Hülfe des *Taylor*'schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln kann; und zwar findet man die Coefficienten der Reihe

$$(49.)\qquad y = b + \frac{F'(a)}{1}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

aus Gleichung (40.). Es ist nämlich

$$(50.)\qquad \begin{cases} F'(a) = \Phi(a, b) = G, \\ F''(a) = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=a,\ y=b}, \\ F'''(a) = \left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a,\ y=b}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die Bildung dieser Ausdrücke wird dadurch erleichtert, dass nach Gleichung (38.)

$$\left(\frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial x^m\,\partial y^n}\right)_{x=a,\ y=b} = \frac{m!\; n!\; G}{R^m . S^n}$$

ist. Gleichzeitig erkennt man hieraus, dass die partiellen Ableitungen von $\Phi(x, y)$ für $x = a$, $y = b$ sämmtlich *reell* und *positiv* sind. Deshalb sind auch die Grössen $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$,... sämmtlich *reell* und *positiv*.

Bezeichnet man mit $A$ den grössten Werth des absoluten Betrages von $y$, wenn in

$$x = a + r \,.\, e^{ti}$$

$r$ alle Werthe von 0 bis $g$ und $t$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$ durchläuft, so wird nach Ungleichung (30.)

$$F^{(m)}(a) \leqq \frac{m!\,A}{g^m}, \tag{51.}$$

folglich ist die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (49.) *convergent*, da die einzelnen Glieder derselben (gleich oder) kleiner sind als die Glieder der geometrischen Progression

$$A + \frac{A(x-a)}{g} + \frac{A(x-a)^2}{g^2} + \frac{A(x-a)^3}{g^3} + \cdots = \frac{Ag}{g-(x-a)}. \tag{52.}$$

Vergleicht man nun mit der soeben gelösten Differential-Gleichung erster Ordnung die allgemeinere

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{53.}$$

so ergiebt sich Folgendes. Es sei wieder $\varphi(x, y)$ eine *eindeutige* Function der beiden complexen Veränderlichen

$$x = a + r \,.\, e^{ti}, \quad y = b + s \,.\, e^{ui},$$

welche den in Satz 2 angegebenen Bedingungen genügen möge, dann kann man jetzt beweisen, dass die schon in Gleichung (22.) des vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Reihe

$$y = b + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{54.}$$

*convergent* ist für alle Werthe von $x$, bei denen der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als $g$ ist.

Nach Ungleichung (39.) war nämlich

$$\left| \frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right| \leqq \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n},$$

folglich wird auch der absolute Betrag von

$$f^{(p)}(a) = \left(\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-1}}\right)_{x=a,\ y=b}$$

(gleich oder) kleiner als

$$F^{(p)}(a) = \left(\frac{d^{p-1}\Phi}{dx^{p-1}}\right)_{x=a,\ y=b},$$

wie aus der mehrfach erwähnten Bildung der Grössen $f'(a)$, $f''(a), f'''(a), \ldots$ und $F'(a), F''(a), F'''(a), \ldots$ hervorgeht. Unter der Voraussetzung, dass die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (54.) convergent ist, war aber schon in dem vorhergehenden Paragraphen nachgewiesen worden, dass die Gleichung (54.) das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

Damit ist bewiesen:

**Satz 3.** *Wenn $\varphi(x, y)$ eine eindeutige Function der beiden complexen Veränderlichen*

$$x = a + r \,.\, e^{ti}, \quad y = b + s \,.\, e^{ui}$$

*ist und mit ihren beiden ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}$ stetig bleibt, so lange $r \leqq R$, $s \leqq S$ bleibt, so existirt eine (analytische) Function $y = f(x)$, welche eindeutig und stetig bleibt, so lange der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als eine bestimmte reelle, positive Grösse $g$ bleibt, für $x = a$ den Werth $b$ annimmt und der Differential-Gleichung*

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

*genügt.*

Die Grösse $g$ ist dabei durch die Gleichung (45.) erklärt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Existenz allgemeiner Integral-Gleichungen nachweisen, wenn ein System von $m$ simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung, also $m$ Gleichungen zwischen $x, y_1, y_2, \ldots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$ gegeben sind.

Auf diesen Fall lässt sich dann auch, wie schon angedeutet wurde, die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen.

## § 77.
## Trennung der Variabeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 178.)

Ist die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1.}$$

gegeben, so löse man sie in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ auf, d. h. man bringe sie auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{2.}$$

oder

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2a.}$$

Ist nun hierbei $M(x, y)$ eine Function $X$ der einzigen Veränderlichen $x$ und $N(x, y)$ eine Function $Y$ der einzigen Veränderlichen $y$, ist also

$$M(x, y) = X, \quad N(x, y) = Y, \tag{3.}$$

so kann man sofort das *allgemeine Integral*

$$\int X\,dx + \int Y dy = C \tag{4.}$$

bilden. Hat die Differential-Gleichung diese Form noch nicht, so wird man sie auf diese Form zu bringen suchen. Das Verfahren, welches man dabei ausführt, nennt man „*Integration durch Trennung der Variabeln*“. Ist z. B. die Differential-Gleichung

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0 \tag{5.}$$

gegeben, wo $X_1$ und $X_2$ Functionen der einzigen Veränderlichen $x$, $Y_1$ und $Y_2$ Functionen der einzigen Veränderlichen $y$ sind, so dividirt man die linke Seite von Gleichung (5.) durch $X_2 Y_1$ und erhält

$$\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0, \tag{6.}$$

also

$$\int \frac{X_1}{X_2}\,dx + \int \frac{Y_2}{Y_1}\,dy = C. \tag{7.}$$

Da ein Integral von der Form $\int X dx$ als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann, (deren Begrenzung in Formel Nr. 4 der Tabelle angegeben ist), so nennt man hier, wo von der Integration der Differential-Gleichungen die Rede ist, die Ermittelung eines solchen Integrals eine „*Quadratur*".

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$ydx - xdy = 0 \tag{8.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die linke Seite von Gleichung (8.) durch $-xy$ dividirt, erhält man

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \tag{9.}$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}y - \mathrm{l}x = \mathrm{l}C,$$

$$y = Cx. \tag{10.}$$

Die Integrations-Constante ist in diesem Falle mit $\mathrm{l}C$ bezeichnet worden, damit der Uebergang von den Logarithmen zu den Numeri erleichtert wird.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(x^2 - a^2)dy - ydx = 0 \tag{11.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die linke Seite von Gleichung (11.) durch $(x^2 - a^2)y$ dividirt, erhält man

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0, \tag{12.}$$

also nach Formel Nr. 53 der Tabelle

$$2a\int \frac{dy}{y} - 2a\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = 2a\,\mathrm{l}y - \mathrm{l}\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \mathrm{l}C,$$

$$y^{2a} = C\frac{x-a}{x+a}. \tag{13.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$x^2dy + (y - a)dx = 0 \tag{14.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die linke Seite von Gleichung (14.) durch $x^2(y - a)$ dividirt, erhält man

$$\frac{dy}{y - a} + \frac{dx}{x^2} = 0, \tag{15.}$$

$$\int\frac{dy}{y - a} + \int\frac{dx}{x^2} = \mathrm{l}(y - a) - \frac{1}{x} = \mathrm{l}C,$$

$$\mathrm{l}(y - a) = \mathrm{l}C + \frac{1}{x} = \mathrm{l}C + \mathrm{l}(\sqrt[x]{e}),$$

$$y - a = C\,.\sqrt[x]{e}. \tag{16.}$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$xydx - (a + x)(b + y)dy = 0 \tag{17.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die linke Seite von Gleichung (17.) durch $y(a + x)$ dividirt, erhält man

$$\frac{xdx}{a + x} - \frac{(b + y)dy}{y} = \left(1 - \frac{a}{a + x}\right)dx - \left(1 + \frac{b}{y}\right)dy = 0, \tag{18.}$$

$$\int\left(1 - \frac{a}{a + x}\right)dx - \int\left(1 + \frac{b}{y}\right)dy = x - a\,\mathrm{l}(a + x) - y - b\,\mathrm{l}y = C,$$

oder

$$x - y = C + \mathrm{l}[(a + x)^a\,.\,y^b]. \tag{19.}$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$x^3ydx + ydx + xy^2dy - xdy = 0 \tag{20.}$$

integriren.

**Auflösung.** Man kann die vorgelegte Differential-Gleichung zunächst auf die Form

$$(x^3 + 1)ydx + x(y^2 - 1)dy = 0$$

bringen und dann durch $xy$ dividiren. Dadurch erhält man

$$\frac{(x^3 + 1)dx}{x} + \frac{(y^2 - 1)dy}{y} = 0, \tag{21.}$$

$$\int\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy = C,$$

oder

$$\frac{x^3}{3} + \mathrm{l}x + \frac{y^2}{2} - \mathrm{l}y = C. \tag{22.}$$

**Aufgabe 6.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0 \tag{23.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die linke Seite von Gleichung (23.) durch $(1 + x^2)\sqrt{1-y^2}$ dividirt, erhält man

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{dx}{1 + x^2} = 0, \tag{24.}$$

also

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int\frac{dx}{1 + x^2} = \arcsin y - \mathrm{arctg}\, x = C. \tag{25.}$$

**Aufgabe 7.** Man soll die Differential-Gleichung

$$xdy - ydx = dy\sqrt{1 + x^2} + dx\sqrt{1 + y^2} \tag{26.}$$

integriren.

**Auflösung.** Man bringt die Differential-Gleichung zunächst auf die Form

$$(x - \sqrt{1 + x^2})dy - (y + \sqrt{1 + y^2})dx = 0 \tag{27.}$$

und dividirt die linke Seite dieser Gleichung durch $(x - \sqrt{1 + x^2})$ und durch $(y + \sqrt{1 + y^2})$; dies giebt

$$\frac{dy}{y + \sqrt{1 + y^2}} - \frac{dx}{x - \sqrt{1 + x}} = 0, \tag{28.}$$

oder

$$(\sqrt{1 + y^2} - y)dy + (\sqrt{1 + x^2} + x)dx = 0, \tag{29.}$$

folglich findet man nach Formel Nr. 82 der Tabelle

$$\frac{y}{2}\sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2}\mathrm{l}(y + \sqrt{1 + y^2}) - \frac{y^2}{2}$$
$$+ \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{l}(x + \sqrt{1 + x^2}) + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}C,$$

oder

$$x^2 - y^2 + x\sqrt{1 + x^2} + y\sqrt{1 + y^2} + \mathrm{l}[(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2})] = C. \tag{30.}$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\sin x \sin y dy = \cos x \cos y dx \tag{31.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (31.) durch $-\sin x \cos y$ dividirt, erhält man

$$\frac{\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{\sin y\,dy}{\cos y} = 0, \tag{32.}$$

also durch Integration

$$\mathrm{l}(\sin x) + \mathrm{l}(\cos y) = \mathrm{l}C,$$

oder

$$\sin x \cos y = C. \tag{33.}$$

**Aufgabe 9.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Subtangente eine constante Länge $a$ hat.

**Auflösung.** Da die Subtangente einer Curve $St = y\,\frac{dx}{dy}$ ist, so erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$y\,\frac{dx}{dy} = a, \tag{34.}$$

$$dx = \frac{a\,dy}{y}, \tag{35.}$$

$$x - x_0 = a\,\mathrm{l}y, \tag{36.}$$

oder

$$y = e^{\frac{x-x_0}{a}}. \tag{37.}$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Linie.*

**Aufgabe 10.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Subtangente $n$-mal so gross ist wie die zugehörige Abscisse.

**Auflösung.** Für die gesuchten Curven wird

$$y\,\frac{dx}{dy} = nx, \tag{38.}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,dy}{y}, \tag{39.}$$

$$\mathrm{l}x + \mathrm{l}(2p) = n\,\mathrm{l}y, \tag{40.}$$

wobei man die Integrations-Constante mit $\mathrm{l}(2p)$ bezeichnet hat. Dies giebt

$$y^n = 2px, \tag{41.}$$

also die Gleichung der *verallgemeinerten Parabel.*

Für $n = 2$ stellt die Gleichung die *gewöhnliche Parabel* dar, für welche die Subtangente doppelt so gross ist wie die Abscisse.

**Aufgabe 11.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Polar-Subnormale eine constante Länge $a$ hat.

**Auflösung.** Die Polar-Subnormale ist $Sn = \frac{dr}{d\varphi}$, folglich wird für die gesuchten Curven

$$\frac{dr}{d\varphi} = a, \quad \text{oder} \quad dr = a\,.\,d\varphi, \tag{42.}$$

$$r = a(\varphi - \varphi_0). \tag{43.}$$

Die gesuchten Curven sind also *Archimedische Spiralen.*

**Aufgabe 12.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Polar-Subtangente eine constante Länge $a$ hat,

**Auflösung.** Die Polar-Subtangente ist $St = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$, folglich wird für die gesuchten Curven

$$\frac{r^2 d\varphi}{dr} = a, \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{adr}{r^2}, \tag{44.}$$

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{a}{r}, \quad \text{oder} \quad r(\varphi - \varphi_0) = -a. \tag{45.}$$

Die gesuchten Curven sind also *hyperbolische Spiralen.*

**Aufgabe 13.** Man soll alle Curven bestimmen, welche mit der $X$-Axe, vom Nullpunkte an gerechnet, und mit der Ordinate $QP$ ein Flächenstück $OQP$ begrenzen, dessen Inhalt der $n^{\text{te}}$ Theil des Rechtecks $xy$ ist.

**Auflösung.** Da das von der Curve begrenzte Flächenstück den Inhalt

$$F = \int_0^x y dx \tag{46.}$$

hat, so erhält man für die gesuchten Curven die Gleichung

$$xy = n\int_0^x y dx, \quad \text{oder} \quad xdy + ydx = nydx, \tag{47.}$$

$$xdy = (n - 1)ydx,$$

$$\frac{dy}{y} = (n - 1)\frac{dx}{x}, \tag{48.}$$

$$\mathrm{l}y = (n-1)\mathrm{l}x + \mathrm{l}C = \mathrm{l}(Cx^{n-1}),$$

$$y = Cx^{n-1}. \tag{49.}$$

Die gesuchten Curven sind wieder *verallgemeinerte Parabeln.*

**Aufgabe 14.** Man soll eine Curve bestimmen, deren Tangente die constante Länge $a$ hat.

**Auflösung.** Die Tangente einer Curve ist $T = y\dfrac{ds}{dy}$, folglich erhält man

$$y\frac{ds}{dy} = a, \quad \text{oder} \quad y^2(dx^2 + dy^2) = a^2dy^2, \tag{50.}$$

$$y^2dx^2 = (a^2 - y^2)dy^2, \quad \pm\, ydx = \sqrt{a^2-y^2}\,.\,dy,$$

$$\pm\, dx = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy = \frac{a^2dy}{y\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}. \tag{51.}$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung integrirt, findet man nach den Formeln Nr. 78 und 25 der Tabelle

$$\pm\,(x - x_0) = \sqrt{a^2-y^2} - a\,\mathrm{l}\left(\frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y}\right). \tag{52.}$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, wird „*Tractrix* von *Huyghens*“ genannt.

**Aufgabe 15.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen der Flächeninhalt eines jeden Sectors zu der Differenz der Quadrate der den Sector begrenzenden Leitstrahlen proportional ist.

**Auflösung.** Nennt man die begrenzenden Leitstrahlen $r_1$ und $r$ und die zugehörigen Argumente $\varphi_1$ und $\varphi$, so wird nach Formel Nr. 92 der Tabelle der Flächeninhalt des Sectors

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi, \tag{53.}$$

so dass für die gesuchten Curven die Gleichung

$$n(r^2 - r_1^{\,2}) = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi \tag{54.}$$

gilt. Betrachtet man dabei $r$ und $\varphi$ als veränderlich, während

$r_1$ und $\varphi_1$ constant sind, so folgt aus Gleichung (54.) durch Differentiation

$$4nrdr = r^2 d\varphi, \tag{55.}$$

$$4n\frac{dr}{r} = d\varphi, \tag{56.}$$

$$\varphi - \varphi_0 = 4n \operatorname{l} r,$$

$$r^{4n} = e^{\varphi - \varphi_0}, \quad r = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{4n}}, \tag{57.}$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{4n} = a, \quad e^{-a\varphi_0} = C \tag{58.}$$

setzt,

$$r = e^{a(\varphi - \varphi_0)}, \quad \text{oder} \quad r = C \,.\, e^{a\varphi}. \tag{59.}$$

Dies ist die Gleichung einer *logarithmischen Spirale.*

## § 78.

## Integration der Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 179.)

In den meisten Fällen wird die Trennung der Variabeln bei der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.}$$

durch einfache Multiplication oder Division nicht möglich sein. Mitunter wird aber die Differential-Gleichung durch passende Substitution so umgeformt werden können, dass dann die Trennung der Variabeln durchführbar ist.

Sind z. *B.* $M(x, y)$ und $N(x, y)$ beide *homogene Functionen* $m^{ten}$ *Grades*, wird also

$$M(tx, ty) = t^m \,.\, M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^m \,.\, N(x, y), \tag{2.}$$

so kann man die Trennung der Variabeln in folgender Weise ermöglichen.

Aus den Gleichungen (2.) findet man für $t = \frac{1}{x}$

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{M(x, y)}{x^m}, \quad N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{N(x, y)}{x^m}. \tag{3.}$$

Dividirt man also Gleichung (1.) durch $x^m$ und bezeichnet

$-\dfrac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}$ mit $f\left(\frac{y}{x}\right)$, so erhält man

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.}$$

Setzt man jetzt

$$\frac{y}{x} = z, \quad \text{also} \quad y = xz, \tag{6.}$$

so wird

$$dy = zdx + xdz, \tag{7.}$$

und Gleichung (5.) geht über in

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z), \tag{8.}$$

oder

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}; \tag{9.}$$

die Trennung der Variabeln ist also durchgeführt.

Man hätte natürlich auch mit demselben Rechte $x = yz$ setzen können und dadurch eine Differential-Gleichung zwischen $y$ und $z$ erhalten, bei der sich ebenfalls die Trennung der Variabeln ohne Weiteres ausführen lässt.

## Beispiele.

In den folgenden Aufgaben ist das angegebene Verfahren anwendbar, weil $M(x, y)$ und $N(x, y)$ jedes Mal *homogene* Functionen gleich hohen Grades sind.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(x + y)dx + xdy = 0 \tag{10.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + x(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch $x$ dividirt und ordnet,

$$(1 + 2z)dx + xdz = 0. \tag{11.}$$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0 \tag{12.}$$

und durch Integration

$$2\,\mathrm{l}x + \mathrm{l}(1 + 2z) = \mathrm{l}C,$$

also

$$x^2(1 + 2z) = C, \quad \text{oder} \quad x(x + 2y) = C. \tag{13.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(x + y)dx + (y - x)dy = 0 \tag{14.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + (xz - x)(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch $x$ dividirt und ordnet,

$$(1 + z^2)dx + (z - 1)xdz = 0. \tag{15.}$$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z - 1)dz}{1 + z^2} = 0 \tag{16.}$$

und durch Integration

$$\mathrm{l}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1 + z^2) - \operatorname{arctg} z = \mathrm{l}C,$$

oder

$$\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{17.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2} \tag{18.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$x(zdx + xdz) - xzdx = x^2dz = dx\sqrt{x^2 + x^2z^2},$$

oder, wenn man durch $x$ dividirt,

(19.) $$xdz = dx\sqrt{1 + z^2},$$

also durch Trennung der Variabeln

(20.) $$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

und durch Integration

$$\mathrm{l}(z + \sqrt{1 + z^2}) = \mathrm{l}x + \mathrm{l}C,$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx,$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y.$$

Dies giebt

$$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2,$$

oder

(21.) $$1 + 2Cy - C^2x^2 = 0.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

(22.) $$(2x^3 - 135y^3)dx + 81xy^2dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(2x^3 - 135x^3z^3)dx + 81x^3z^2(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch $x^3$ dividirt,

$$(2 - 135z^3)dx + 81z^2(xdz + zdx) = 0,$$

(23.) $$(2 - 54z^3)dx + 81z^2xdz = 0.$$

Durch Trennung der Variabeln erhält man daher

(24.) $$\frac{2dx}{x} = \frac{81z^2dz}{27z^3 - 1}$$

und durch Integration

$$\mathrm{l}(x^2) = \mathrm{l}(27z^3 - 1) - \mathrm{l}C,$$

also

(25.) $$Cx^2 = 27z^3 - 1, \quad \text{oder} \quad Cx^5 = 27y^3 - x^3.$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0 \tag{26.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, erhält man

$$(8xz + 10x)dx + (5xz + 7x)(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch $x$ dividirt und ordnet,

$$(5z^2 + 15z + 10)dx + (5z + 7)xdz = 0. \tag{27.}$$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{5dx}{x} = -\frac{(5z + 7)dz}{z^2 + 3z + 2} = -\frac{2dz}{z + 1} - \frac{3dz}{z + 2} \tag{28.}$$

und durch Integration

$$5\mathrm{l}x = \mathrm{l}C - 2\mathrm{l}(z + 1) - 3\mathrm{l}(z + 2),$$

also

$$x^5(z + 1)^2(z + 2)^3 = C, \quad \text{oder} \quad (x + y)^2(2x + y)^3 = C. \tag{29.}$$

**Aufgabe 6.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)dy = 0 \tag{30.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = xz$ setzt, erhält man

$$(a\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cxz)(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch $x$ dividirt und ordnet,

$$[(a + bz)\sqrt{1 + z^2} - c(1 + z^2)]dx + x(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz = 0. \tag{31.}$$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dx}{x} + \frac{(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz}{\sqrt{1 + z^2}(a + bz - c\sqrt{1 + z^2})} = 0, \tag{32.}$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{\left(b - \frac{cz}{\sqrt{1 + z^2}}\right)dz}{a + bz - c\sqrt{1 + z^2}} = 0. \tag{32a.}$$

Da in dem zweiten Gliede der Zähler gerade das Differential des Nenners ist, so erhält man durch Integration

$$\mathrm{l}x + \mathrm{l}(a + bz - c\sqrt{1 + z^2}) = \mathrm{l}C,$$

also

$$x(a + bz - c\sqrt{1+z^2}) = C,$$

oder

(33.) $$ax + by - c\sqrt{x^2+y^2} = C.$$

Weit leichter wird die Lösung dieser Aufgabe durch die Substitution

(34.) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad xdx + ydy = rdr,$$

denn dadurch geht Gleichung (30.) über in

$$ardx + brdy - crdr = 0,$$

oder

(35.) $$adx + bdy - cdr = 0,$$

woraus man wieder in Uebereinstimmung mit Gleichung (33.)

$$ax + by - cr = C$$

findet.

**Aufgabe 7.** Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Summe der Abscisse $x$ und des Radiusvector $r$ gleich der Subtangente ist.

**Auflösung.** Die Subtangente einer Curve ist bekanntlich $y\frac{dx}{dy}$, folglich gilt für die gesuchten Curven die Differential-Gleichung

$$y\frac{dx}{dy} = x + r,$$

oder

(36.) $$ydx = (x + \sqrt{x^2+y^2})dy.$$

Hier wird man zweckmässiger Weise $x = yz$ setzen, wodurch Gleichung (36.) übergeht in

$$y(ydz + zdy) = (yz + \sqrt{y^2z^2 + y^2})dy,$$

oder, wenn man durch $y$ dividirt und ordnet,

(37.) $$ydz = \sqrt{1+z^2}\,dy.$$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

(38.) $$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dy}{y}$$

und durch Integration

$$\mathrm{l}(z + \sqrt{1+z^2}) = \mathrm{l}y - \mathrm{l}p,$$

wobei die Integrations-Constante mit $lp$ bezeichnet ist. Daraus folgt

$$p(z + \sqrt{1 + z^2}) = y, \quad \text{oder} \quad p(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = y^2, \tag{39.}$$

$$p\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 - px,$$

$$p^2x^2 + p^2y^2 = y^4 - 2pxy^2 + p^2x^2,$$

$$y^2 = 2px + p^2. \tag{40.}$$

Die gesuchten Curven sind also *Parabeln*, deren Brennpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt ist. Dabei wird

$$r = x + p, \quad St = x + r = 2x + p. \tag{41.}$$

## § 79.

## Einige weitere Fälle, in denen man die Trennung der Variabeln ausführen kann.

Mitunter kann man die Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ in der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.}$$

auch wenn sie *nicht homogen* sind, durch eine Parallelverschiebung der Coordinaten, also indem man

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta \tag{2.}$$

setzt und die Constanten $\xi$ und $\eta$ passend wählt, *homogen machen.* Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$2(x - 2y - 5)dx + (5x - y - 7)dy = 0 \tag{3.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man die Werthe von $x$ und $y$ aus der Gleichung (2.) in die Gleichung (3.) einsetzt, erhält man

$$2(x' - 2y' + \xi - 2\eta - 5)dx' + (5x' - y' + 5\xi - \eta - 7)dy' = 0. \tag{4.}$$

Damit die Factoren von $dx'$ und $dy'$ in dieser Gleichung homogene Functionen ersten Grades von $x'$ und $y'$ werden, muss man $\xi$ und $\eta$ so bestimmen, dass

(5.) $\xi - 2\eta - 5 = 0$ und $5\xi - \eta - 7 = 0$

wird. Dies giebt

(6.) $\xi = 1, \quad \eta = -2,$

also

(7.) $x = x' + 1, \quad y = y' - 2.$

Dadurch geht Gleichung (4.) über in

(8.) $2(x' - 2y')dx' + (5x' - y')dy' = 0.$

Indem man $y' = x'z$ setzt, erhält man

$$2(x' - 2x'z)dx' + (5x' - x'z)(x'dz + zdx') = 0,$$

oder, wenn man durch $x'$ dividirt und ordnet,

(9.) $(2 + z - z^2)dx' + (5 - z)x'dz = 0.$

Jetzt ergiebt sich durch Trennung der Variabeln

(10.) $$\frac{dx'}{x'} = \frac{(-z + 5)dz}{z^2 - z - 2} = -\frac{2dz}{z + 1} + \frac{dz}{z - 2}$$

und durch Integration

$$lx' = -2l(z + 1) + l(z - 2) + lC,$$

oder

$$x'(z + 1)^2 = C(z - 2),$$

(11.) $(y' + x')^2 = C(y' - 2x').$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (7.)

(12.) $(x + y + 1)^2 = C(y - 2x + 4).$

In ähnlicher Weise kann man ganz allgemein die Differential-Gleichung

(13.) $(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$

integriren. Setzt man nämlich wieder

(14.) $x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta,$

so geht Gleichung (13.) über in

(15.) $(ax' + by' + a\xi + b\eta + c)dx' + (a_1x' + b_1y' + a_1\xi + b_1\eta + c_1)dy' = 0.$

Jetzt kann man die Constanten $\xi$ und $\eta$ so bestimmen, dass

(16.) $a\xi + b\eta + c = 0$ und $a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$

wird, indem man

(17.) $$\xi = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \eta = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

setzt. Dadurch werden in Gleichung (15.) die Factoren von $dx'$ und $dy'$, nämlich

(18.) $$M(x', y') = ax' + by' \quad \text{und} \quad N(x', y') = a_1x' + b_1y',$$

homogene Functionen, und die Differential-Gleichung erhält die Gestalt

(19.) $$(ax' + by')dx' + (a_1x' + b_1y')dy' = 0,$$

so dass man sofort das im vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren anwenden kann.

Bei dieser Umformung ist allerdings stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Determinante $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist. Wenn

(20.) $$ab_1 - a_1b = 0, \quad \text{oder} \quad a : a_1 = b : b_1 = m$$

ist, so wird

(21.) $$ax + by = m(a_1x + b_1y).$$

Das weist darauf hin, dass man hier

(22.) $$a_1x + b_1y = z, \quad \text{also} \quad a_1dx + b_1dy = dz$$

setzt; dann geht die gegebene Differential-Gleichung (13.) über in

$$(mz + c)dx + (z + c_1)dy = 0,$$

oder

$$b_1(mz + c)dx + (z + c_1)(dz - a_1dx) = 0,$$

$$[(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)]dx + (z + c_1)dz = 0,$$

(23.) $$dx = -\frac{(z + c_1)dz}{(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)}.$$

## Beispiel.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

(24.) $$(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** In diesem Falle ist also

$z = -3x + 6y,\ m = -\frac{1}{3},\ b_1m - a_1 = 1,\ b_1c - a_1c_1 = -3,$
folglich wird nach Gleichung (23.)

$$dx = -\frac{(z-19)dz}{z-3} = -dz + 16\frac{dz}{z-3}, \tag{25.}$$

also

$$x = -z + 16\mathrm{l}(z-3) + 2C,$$

oder

$$x - 3y + 8\mathrm{l}(6y - 3x - 3) + C = 0. \tag{26.}$$

Unter der Voraussetzung, dass $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist, kann man die Differential-Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$$

auch dadurch integriren, dass man

$$M(x, y) = ax + by + c = u, \quad N(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = v \tag{27.}$$

setzt und die Grössen $u$ und $v$ zu Integrations-Veränderlichen macht; dann wird

$$du = adx + bdy, \quad dv = a_1dx + b_1dy, \tag{28.}$$

also

$$\left\{\begin{array}{l}(ab_1 - a_1b)dx = b_1du - bdv,\\ (ab_1 - a_1b)dy = -a_1du + adv.\end{array}\right. \tag{29.}$$

Deshalb geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$u(b_1du - bdv) + v(-a_1du + adv) = 0,$$

oder

$$(b_1u - a_1v)du + (-bu + av)dv = 0. \tag{30.}$$

In dieser Gleichung sind die Factoren von $du$ und $dv$ *homogene* Functionen ersten Grades von $u$ und $v$.

### Beispiel.

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0 \tag{31.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier setze man

$$3y - 7x + 7 = u, \quad 7y - 3x + 3 = v, \tag{32.}$$

dann wird

$$3dy - 7dx = du, \quad 7dy - 3dx = dv,$$

(33.) $$40dx = -7du + 3dv, \quad 40dy = -3du + 7dv,$$

folglich geht Gleichung (31.) über in

$$u(-7du + 3dv) + v(-3du + 7dv) = 0,$$

oder

(34.) $$(7u + 3v)du + (-3u - 7v)dv = 0.$$

Für $v = uz$ erhält man hier aus

$$(7u + 3uz)du + (-3u - 7uz)(udz + zdu) = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch $u$ dividirt und ordnet,

(35.) $$7(1 - z^2)du = (3 + 7z)udz,$$

(36.) $$\frac{7du}{u} = \frac{(3 + 7z)dz}{1 - z^2} = -\left(\frac{5}{z - 1} + \frac{2}{z + 1}\right)dz,$$

(37.) $$7\mathrm{l}u + 5\mathrm{l}(z - 1) + 2\mathrm{l}(z + 1) = \mathrm{l}C,$$

oder

(38.) $$u^7(z - 1)^5(z + 1)^2 = C.$$

Dies giebt

$$(v - u)^5(v + u)^2 = C,$$

oder

$$4^5(x + y - 1)^5 . 10^2(x - y - 1)^2 = C,$$

(39.) $$(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C_1,$$

wobei

(40.) $$C = 4^5 . 10^2 . C_1$$

gesetzt worden ist.

## § 80.

## Lineare Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 180.)

Die Differential-Gleichungen erster Ordnung kann man weiter eintheilen nach dem Grade, den sie in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ und $y$ haben. Demnach versteht man unter einer Differential-Gleichung *erster Ordnung* und *ersten Grades* eine Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + y \,.\, f(x) = \varphi(x), \tag{1.}$$

wobei $f(x)$ und $\varphi(x)$ noch beliebige stetige Functionen von $x$ sind. Gewöhnlich nennt man eine solche Gleichung „*eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung*“ und kann zu ihrer Integration die folgenden Methoden anwenden.

1. *Methode von Bernoulli.* Man setze

$$y = uz, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}, \tag{2.}$$

dann geht Gleichung (1.) über in

$$u\frac{dz}{dx} + z\left[\frac{du}{dx} + u \,.\, f(x)\right] = \varphi(x). \tag{3.}$$

Von den beiden Functionen $u$ und $z$ kann man die eine noch ganz beliebig annehmen; deshalb werde $u$ so bestimmt, dass in Gleichung (3.) der Factor von $z$ verschwindet, dass also

$$\frac{du}{dx} + u \,.\, f(x) = 0 \tag{4.}$$

wird. Dies giebt

$$\frac{du}{u} = -f(x)dx, \tag{5.}$$

also durch Integration

$$\mathrm{l}u = -\int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x)dx}. \tag{6.}$$

Durch diese Bestimmung von $u$ reducirt sich Gleichung (3.) auf

$$u\frac{dz}{dx} = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad dz = \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx, \tag{7.}$$

folglich wird

$$z = \int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C, \tag{8.}$$

also

$$y = uz = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C\right]. \tag{9.}$$

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

(10.) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (10.)

(11.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3.$$

Damit der Factor von $z$ in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man $u$ so, dass

(12.) $$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}$$

wird. Dies giebt

(13.) $$\mathrm{l}u = 2\mathrm{l}(x+1), \quad \text{oder} \quad u = (x+1)^2.$$

Für diesen Werth von $u$ reducirt sich Gleichung (11.) auf

(14.) $$u\frac{dz}{dx} = (x+1)^3, \quad \text{oder} \quad dz = (x+1)dx.$$

Hieraus findet man durch Integration

(15.) $$2z = (x+1)^2 + C,$$

(16.) $$2y = 2uz = (x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

Da es bei der Bestimmung von $u$ nur darauf ankommt, dass in Gleichung (3.) der Factor von $z$ verschwindet, so braucht man in Gleichung (6.) keine Integrations-Constante hinzuzufügen.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

(17.) $$\frac{dy}{dx} - ay = x^4$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (17.)

(18.) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - au\right) = x^4.$$

Damit der Factor von $z$ in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man $u$ so, dass

(19.) $$\frac{du}{dx} - au = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = adx$$

wird. Dies giebt

$$(20.)\qquad \mathrm{l}u = ax, \quad \text{oder} \quad u = e^{ax}.$$

Für diesen Werth von $u$ reducirt sich Gleichung (18.) auf

$$(21.)\qquad u\frac{dz}{dx} = x^4, \quad \text{oder} \quad dz = e^{-ax} . x^4 dx.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch partielle Integration

$$(22.)\qquad z = -\frac{1}{a^5} \cdot e^{-ax}(a^4x^4 + 4a^3x^3 + 12a^2x^2 + 24ax + 24) + C,$$

folglich wird

$$(23.)\qquad a^5(Ce^{ax} - y) = a^4x^4 + 4a^3x^3 + 12a^2x^2 + 24ax + 24.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = uz$ setzt, erhält man der Reihe nach die folgenden Gleichungen

$$(25.)\qquad u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}\right) = a\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} = 0, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(26.)\qquad \mathrm{l}u = \mathrm{l}(x + \sqrt{1+x^2}), \quad u = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Deshalb geht Gleichung (25.) über in

$$u\frac{dz}{dx} = a\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}},$$

also

$$(27.)\qquad dz = \frac{adx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z = a . \arcsin x + C,$$

$$(28.)\qquad y = uz = (x + \sqrt{1+x^2})(a . \arcsin x + C).$$

2. *Methode von Lagrange (Variation der Constanten).*

Man ersetze zunächst die Differential-Gleichung

$$(29.)\qquad \frac{dy}{dx} + y . f(x) = \varphi(x)$$

durch die Gleichung

(30.) $$\frac{dy}{dx} + y\,.f(x) = 0,$$

welche in Bezug auf $y$ und $\frac{dy}{dx}$ *homogen* ist, und bei der ohne Weiteres die Trennung der Variabeln ausgeführt werden kann. Dadurch erhält man

(31.) $$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

und durch Integration

(32.) $$\mathrm{l}y = -\int f(x)dx + \mathrm{l}c,$$

oder

(33.) $$y = c\,.\,e^{-\int f(x)dx}.$$

Versucht man jetzt, ob die Gleichung (33.) auch ein Integral der Gleichung (29.) ist, so erkennt man, dass dies nur möglich ist, wenn man $c$ nicht als eine *Constante*, sondern als eine Function von $x$ betrachtet. Aus Gleichung (33.) oder (32.) findet man sodann durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} + f(x) = \frac{1}{c}\,\frac{dc}{dx},$$

oder

(34.) $$\frac{dy}{dx} + y\,.f(x) = \frac{y}{c}\,\frac{dc}{dx},$$

folglich wird nach Gleichung (29.) und (33.)

$$\frac{y}{c}\,\frac{dc}{dx} = e^{-\int f(x)dx}\frac{dc}{dx} = \varphi(x),$$

(35.) $$\frac{dc}{dx} = \varphi(x)\,.\,e^{\int f(x)dx},$$

oder

(36.) $$c = \int\varphi(x)\,.\,e^{\int f(x)dx}\,.\,dx + C,$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichung (9.)

(37.) $$y = e^{-\int f(x)dx}\Big[\int\varphi(x)\,.\,e^{\int f(x)dx}\,.\,dx + C\Big].$$

## Beispiele.

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \,.\, e^{mx} \tag{38.}$$

integriren.

**Auflösung.** Integrirt man zunächst die lineare, *homogene* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0, \tag{39.}$$

so findet man durch Trennung der Variabeln

$$\frac{dy}{y} = -\,adx, \quad \text{also} \quad \mathrm{l}y = -\,ax + \mathrm{l}c, \tag{40.}$$

$$y = c \,.\, e^{-ax}. \tag{41.}$$

Wenn man hierbei $c$ als eine Function von $x$ betrachtet, so ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\,a + \frac{1}{c}\frac{dc}{dx},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} + ay = \frac{y}{c}\frac{dc}{dx}. \tag{42.}$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (38.) und (41.)

$$\frac{y}{c}\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{mx}, \quad \text{oder} \quad e^{-ax}\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{mx},$$

also

$$\frac{dc}{dx} = b \,.\, e^{(a+m)x}, \tag{43.}$$

$$c = b\int e^{(a+m)x} \,.\, dx = \frac{b}{a+m}\left[e^{(a+m)x} + C\right], \tag{44.}$$

$$y = \frac{b}{a+m}(e^{mx} + Ce^{-ax}). \tag{45.}$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \tag{46.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \tag{47.}$$

erhält man

$$\mathrm{l}y = \mathrm{l}c - \mathrm{l}x, \quad \text{oder} \quad xy = c. \tag{48.}$$

Betrachtet man jetzt $c$ als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dc}{dx} - \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y}{c}\frac{dc}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dc}{dx}. \tag{49.}$$

Deshalb geht Gleichung (46.) über in

$$\frac{1}{x}\frac{dc}{dx} = a, \quad \text{also} \quad dc = axdx, \tag{50.}$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (48.)

$$2c = ax^2 + C, \quad \text{also} \quad 2xy = ax^2 + C. \tag{51.}$$

**Aufgabe 6.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = a \tag{52.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad \text{oder} \quad 2\frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{1 - x^2} \tag{53.}$$

erhält man

$$\mathrm{l}(y^2) = \mathrm{l}(1 - x^2) + \mathrm{l}c, \quad \text{oder} \quad y^2 = c(1 - x^2). \tag{54.}$$

Betrachtet man jetzt $c$ als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2} + \frac{1}{c}\frac{dc}{dx},$$

oder

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = (1 - x^2)\frac{y}{2c}\cdot\frac{dc}{dx}. \tag{55.}$$

Deshalb geht Gleichung (52.) über in

$$(1 - x^2)\frac{y}{2c} \cdot \frac{dc}{dx} = a; \tag{56.}$$

dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

$$\frac{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{dc}{dx} = a, \quad \text{oder} \quad c^{-\frac{1}{2}}dc = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} . 2adx, \tag{57.}$$

also für $x = \sin t$

$$2\sqrt{c} = 2a\int(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = 2a\int\frac{dt}{\cos^2 t} = 2a\operatorname{tg} t + 2C,$$

$$\sqrt{c} = \frac{ax}{\sqrt{1 - x^2}} + C. \tag{58.}$$

Deshalb findet man aus Gleichung (54.)

$$y = ax + C\sqrt{1 - x^2}. \tag{59.}$$

3. *Methode des integrirenden Factors.*

Man multiplicire die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y \,.f(x) = \varphi(x) \tag{60.}$$

mit dem Factor $\psi(x)dx$, man bilde also

$$\psi(x)dy + \psi(x)[y \,.f(x) - \varphi(x)]dx = 0 \tag{61.}$$

und bestimme die Function $\psi(x)$ so, dass die linke Seite von Gleichung (61.) ein *vollständiges Differential* wird, d. h. so, dass die Bedingung

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{62.}$$

erfüllt wird, wobei in dem vorliegenden Falle

$$M(x, y) = \psi(x)[y \,.f(x) - \varphi(x)], \quad N(x, y) = \psi(x) \tag{63.}$$

ist. Dies giebt also die Gleichung

$$\psi(x) \,.f(x) = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = f(x)dx, \tag{64.}$$

$$\mathrm{l}[\psi(x)] = \int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^{\int f(x)dx}. \tag{65.}$$

Deshalb geht Gleichung (61.) über in

$$du = e^{\int f(x)dx} . [y \,.f(x) - \varphi(x)]dx + e^{\int f(x)dx} . dy = 0, \tag{66.}$$

folglich wird nach dem in § 70 angegebenen Verfahren

$$u = \int N(x, y)dy + v = y \,.\, e^{\int f(x)dx} + v, \tag{67.}$$

wobei $v$ nur noch eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist. Dabei wird mit Rücksicht auf Gleichung (66.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \,.\, e^{\int f(x)dx} f(x) + \frac{dv}{dx} = e^{\int f(x)dx}[y \,.\, f(x) - \varphi(x)],$$

also

$$\frac{dv}{dx} = -e^{\int f(x)dx} \,.\, \varphi(x), \quad v = -\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx; \tag{68.}$$

man findet daher in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (9.) und (37.)

$$u = y \,.\, e^{\int f(x)dx} - \int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx = C, \tag{69.}$$

oder

$$y = e^{-\int f(x)dx} \,.\, \left[\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} \,.\, dx + C\right]. \tag{70.}$$

## Beispiele.

**Aufgabe 7.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1 + x^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2} \tag{71.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Multiplication mit $\psi(x)dx$ geht Gleichung (71.) über in

$$\psi(x)\left(\frac{y}{1 + x^2} - \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}\right)dx + \psi(x)dy = 0. \tag{72.}$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential wird, muss

$$\frac{\psi(x)}{1 + x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \frac{dx}{1 + x^2} \tag{73.}$$

sein. Daraus folgt, wenn man $\operatorname{arc\,tg} x$ mit $t$ bezeichnet,

$$\mathrm{l}[\psi(x)] = \operatorname{arc\,tg} x = t, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^t. \tag{74.}$$

Gleichung (72.) geht daher über in

$$du = e^t(y - t)\frac{dx}{1 + x^2} + e^t dy = 0, \tag{75.}$$

oder

(75a.) $$du = e^t(y - t)dt + e^t dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

(76.) $$u = y \,.\, e^t + v = C,$$

wobei $v$ eine Function der einzigen Veränderlichen $t$ ist,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = y \,.\, e^t + \frac{dv}{dt} = y \,.\, e^t - t \,.\, e^t,$$

also

(77.) $$dv = -t \,.\, e^t dt, \quad v = -e^t(t - 1),$$

(78.) $$u = y \,.\, e^t - e^t(t - 1) = C,$$

(79.) $$y = t - 1 + C \,.\, e^{-t} = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}.$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Differential-Gleichung

(80.) $$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (80.) mit $\psi(x)dx$ multiplicirt, erhält man

(81.) $$\psi(x)\left(\frac{xy}{1 + x^2} - \frac{\sin x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, muss

(82.) $$\frac{x\psi(x)}{1 + x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{xdx}{1 + x^2}$$

sein. Daraus folgt

(83.) $$\mathrm{l}[\psi(x)] = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1 + x^2), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Gleichung (81.) geht daher über in

(84.) $$du = \left(\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} - \sin x\right)dx + \sqrt{1 + x^2} \,.\, dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

(85.) $$u = y\sqrt{1 + x^2} + v = C,$$

wobei $v$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist, also mit Rücksicht auf Gleichung (84.)

(86.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{dv}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} - \sin x,$$

(87.) $$dv = -\sin x dx, \quad v = \cos x,$$

(88.) $$u = y\sqrt{1+x^2} + \cos x = C.$$

**Aufgabe 9.** Man soll die Differential-Gleichung

(89.) $$\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x = 2\cos^2 x$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (89.) mit $\psi(x)dx$ multiplicirt, erhält man

(90.) $$\psi(x)(-y\,\mathrm{tg}\,x - 2\cos^2 x)dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, muss

(91.) $$-\psi(x)\,\mathrm{tg}\,x = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{-\sin x dx}{\cos x}$$

sein. Daraus folgt

(92.) $$\mathrm{l}[\psi(x)] = \mathrm{l}(\cos x), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \cos x.$$

Gleichung (90.) geht daher über in

(93.) $$du = -(y\sin x + 2\cos^3 x)dx + \cos x\,.\,dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

(94.) $$u = y\cos x + v = C,$$

wobei $v$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist, also mit Rücksicht auf Gleichung (93.)

(95.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -y\sin x + \frac{dv}{dx} = -y\sin x - 2\cos^3 x,$$

(96.) $$dv = -2\cos^3 x dx = -2(1-\sin^2 x)\cos x dx,$$
$$v = -2(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x),$$

(97.) $$3u = 3y\cos x - 6\sin x + 2\sin^3 x = 3C.$$

## § 81.

## Gleichung von *Bernoulli*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 181.)

In manchen Fällen lässt sich eine Differential-Gleichung erster Ordnung, welche *nicht* linear ist, durch eine passend gewählte

Substitution zu einer linearen machen. Es sei z. B. nach *Bernoulli*

$$(1.)\qquad y^p \frac{dy}{dx} + y^{p+1} . f(x) = y^q . \varphi(x),$$

wobei $p$ und $q$ beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen sind. Setzt man dann $q - p = n$, so kann man die Gleichung auf die Form

$$(2.)\qquad \frac{dy}{dx} + y . f(x) = y^n . \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = \varphi(x)$$

bringen. Daraus ergiebt sich durch die Substitution

$$(3.)\qquad z = -\frac{1}{y^{n-1}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{n-1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

die *lineare* Differential-Gleichung erster Ordnung

$$(4.)\qquad \frac{dz}{dx} - (n-1)z . f(x) = (n-1)\varphi(x).$$

Man kann auch die Differential-Gleichung (2.) unmittelbar integriren, indem man wieder

$$(5.)\qquad y = uz$$

setzt. Daraus ergiebt sich

$$(6.)\qquad u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + u . f(x)\right) = u^n z^n . \varphi(x).$$

Wenn man die Function $u$ so bestimmt, dass der Factor von $z$ verschwindet, erhält man

$$(7.)\qquad \frac{du}{dx} + u . f(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -f(x)dx,$$

$$(8.)\qquad \mathrm{l}u = -\int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x)dx}.$$

Dadurch geht Gleichung (6.) über in

$$(9.)\qquad u\frac{dz}{dx} = u^n z^n . \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = z^n . e^{-(n-1)\int f(x)dx} . \varphi(x),$$

$$(10.)\qquad \frac{dz}{z^n} = e^{-(n-1)\int f(x)dx} . \varphi(x)dx.$$

Macht man die Voraussetzung, dass $n \gtrless 1$ ist, so folgt aus Gleichung (10.)

$$(11.)\quad z^{1-n} = (1-n)\int e^{-(n-1)\int f(x)dx} \,.\, \varphi(x)dx + C(1-n),$$

$$(12.)\quad y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int f(x)dx}\Big[\int e^{-(n-1)\int f(x)dx} \,.\, \varphi(x)dx + C\Big].$$

Dagegen erhält man für $n = 1$ aus Gleichung (2.)

$$\frac{dy}{dx} + y\,.f(x) = y\,.\,\varphi(x),$$

oder

$$(13.)\quad \frac{dy}{y} = [\varphi(x) - f(x)]dx,$$

$$(14.)\quad \mathrm{l}y = \int[\varphi(x) - f(x)]dx.$$

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(15.)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2\mathrm{l}x$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (15.)

$$(16.)\quad u\frac{dz}{dx} + z\Big(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\Big) = au^2z^2\mathrm{l}x.$$

Damit in dieser Gleichung der Factor von $z$ verschwindet, bestimmt man die Function $u$ so, dass

$$(17.)\quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x},\quad \text{oder}\quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

wird. Dies giebt durch Integration

$$(18.)\quad \mathrm{l}u = -\mathrm{l}x,\quad \text{oder}\quad u = \frac{1}{x}\cdot$$

Hierdurch geht Gleichung (16.) über in

$$(19.)\quad \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x^2}z^2\mathrm{l}x,\quad \text{also}\quad \frac{dz}{z^2} = a\,\mathrm{l}x\,.\,\frac{dx}{x};$$

folglich wird durch Integration

$$(20.)\quad -\frac{1}{z} = \frac{a}{2}(\mathrm{l}x)^2 + C,\quad \text{also}\quad -\frac{1}{y} = x\Big[\frac{a}{2}(\mathrm{l}x)^2 + C\Big],$$

oder

$$(21.)\quad xy[a(\mathrm{l}x)^2 + 2C] + 2 = 0.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + 2y\,\mathrm{tg}\,x = ay^2\,\mathrm{ctg}\,x \tag{22.}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (22.)

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + 2u\,\mathrm{tg}\,x\right) = au^2z^2\,\mathrm{ctg}\,x. \tag{23.}$$

Damit in dieser Gleichung der Factor von $z$ verschwindet, bestimmt man die Function $u$ so, dass

$$\frac{du}{dx} + 2u\,\mathrm{tg}\,x = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -2\,\frac{\sin x dx}{\cos x} \tag{24.}$$

wird. Dies giebt durch Integration

$$\mathrm{l}u = 2\,\mathrm{l}(\cos x), \quad \text{oder} \quad u = \cos^2 x. \tag{25.}$$

Hierdurch geht Gleichung (23.) über in

$$\cos^2 x \cdot \frac{dz}{dx} = a\cos^4 x \,.\, z^2\,\mathrm{ctg}\,x,$$

oder

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{a\cos^3 x dx}{\sin x} = a\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)d(\sin x), \tag{26.}$$

folglich wird durch Integration

$$-\frac{1}{z} = a[\mathrm{l}(\sin x) - \tfrac{1}{2}\sin^2 x] + C = -\frac{u}{y}, \tag{27.}$$

oder

$$ay[2\,\mathrm{l}(\sin x) - \sin^2 x] + 2Cy + 2\cos^2 x = 0. \tag{28.}$$

## § 82.

## Erklärung des integrirenden Factors.

Es war schon früher gezeigt worden, dass jede Differential-Gleichung erster Ordnung sich auf die Form

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.}$$

bringen lässt und ein allgemeines Integral

$$F(x, y, C) = 0 \tag{2.}$$

besitzt. Löst man diese Gleichung (2.) nach der Constanten $C$ auf, so erhält man

$$C = f(x, y), \tag{3.}$$

wobei $f(x, y)$ eine Function von $x$ und $y$ ist, die mit $u$ bezeichnet werden möge. Dann folgt aus Gleichung (3.)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0. \tag{4.}$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}, \tag{5.}$$

während sich aus Gleichung (1.)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{6.}$$

ergiebt. Da diese beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ mit einander übereinstimmen müssen, so wird

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{7.}$$

Bestimmt man daher eine Function $v$ von $x$ und $y$ durch die Gleichung

$$v = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x, y)}, \tag{8.}$$

so ergiebt sich aus Gleichung (7.) und (8.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \,.\, M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v \,.\, N(x, y). \tag{9.}$$

Es wird deshalb mit Rücksicht auf Gleichung (4.)

$$du = v \,.\, M(x, y)dx + v \,.\, N(x, y)dy. \tag{10.}$$

Damit ist der Satz bewiesen: *Es giebt stets eine Function $v$ von $x$ und $y$, welche die Eigenschaft hat, dass*

$$v[M(x, y)dx + N(x, y)dy]$$

*ein vollständiges Differential wird. Die Auflösung der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*ist dann*

$$u = C. \tag{11.}$$

Hierbei heisst die Function $v$ „*der integrirende Factor*“.

Die vorgelegte Differential-Gleichung besitzt *unendlich viele integrirende Factoren.* Multiplicirt man nämlich Gleichung (10.) mit einer beliebigen Function $\varphi(u)$ von $u$, so erhält man

$$\varphi(u)du = d\int\varphi(u)du = v.\varphi(u)\,M(x,y)dx + v.\varphi(u)\,N(x,y)dy. \tag{12.}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das vollständige Differential von $\int\varphi(u)du$. Dies giebt den zweiten Satz: *Ist $v$ ein integrirender Factor der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

*welcher das Integral $u = C$ liefert, so ist auch $v.\varphi(u)$ ein integrirender Factor.*

Damit sind aber alle integrirenden Factoren erschöpft, denn es gilt auch der folgende dritte Satz: *Sind $V$ und $v$ zwei integrirende Factoren der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

*und ist der Quotient von $V$ und $v$ keine Constante, so ist das vollständige Integral der vorgelegten Differential-Gleichung*

$$\frac{V}{v} = C_1, \tag{13.}$$

*wobei $C_1$ eine willkürliche Constante bedeutet.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind

$$du = v(Mdx + Ndy) \quad \text{und} \quad dU = V(Mdx + Ndy) \tag{14.}$$

vollständige Differentiale, folglich wird

$$dU = \frac{V}{v}du, \text{ oder } \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{V}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right), \tag{15.}$$

also

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{16.}$$

Da diese Gleichung für unendlich viele Werthe von $dx$ und $dy$ gelten soll, so muss

(17.) $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y}$$

sein. Setzt man nun

(18.) $$u = \varphi(x, y), \quad U = \Phi(x, y),$$

so kann man $y$ aus der ersten dieser beiden Gleichungen ausrechnen und in die zweite einsetzen. Dadurch erhält man

(19.) $$y = \psi(x, u), \quad U = \Phi[x, \psi(x, u)] = F(x, u).$$

Dies giebt

(20.) $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

(21.) $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v}\frac{\partial u}{\partial y} = \qquad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y},$$

folglich ist

(22.) $$\frac{V}{v} = \frac{\partial F}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

d. h. $U = F(x, u)$ und deshalb auch $\frac{V}{v} = \frac{\partial F}{\partial u}$ sind Functionen der einzigen Veränderlichen $u$, so dass

(23.) $$\frac{V}{v} = \varphi(u) = C_1$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

## § 83.

## Beispiele zur Erläuterung.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

(1.) $$ydx - (x + y)dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Da die vorgelegte Differential-Gleichung homogen ist, so setze man $y = xz$; dann ergiebt sich

$$zdx - (1 + z)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$z^2dx + (1 + z)xdz = 0, \quad \frac{dx}{x} + (z^{-1} + z^{-2})dz = 0,$$

(2.) $$\mathrm{l}x + \mathrm{l}z - \frac{1}{z} = C, \text{ oder } \mathrm{l}y - \frac{x}{y} = C.$$

In diesem Falle ist also

$$u = \mathrm{l}y - \frac{x}{y} = C, \tag{3.}$$

$$du = -\frac{dx}{y} + \frac{(x+y)dy}{y^2} = 0. \tag{4.}$$

Damit Gleichung (1.) diese Form erhält, muss man sie mit $-\frac{1}{y^2}$ multipliciren. Der integrirende Factor ist daher in diesem Beispiele

$$v = -\frac{1}{y^2}. \tag{5.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$xdy - ydx = 0 \tag{6.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Trennung der Variabeln findet man aus dieser Gleichung ohne Weiteres

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \mathrm{l}y - \mathrm{l}x = \mathrm{l}C,$$

oder

$$\frac{y}{x} = C. \tag{7.}$$

Bezeichnet man also die Function $\frac{y}{x}$ mit $u$, so wird

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0. \tag{8.}$$

Damit Gleichung (6.) diese Form erhält, muss man sie mit dem integrirenden Factor

$$v = \frac{1}{x^2} \tag{9.}$$

multipliciren.

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$[y(x-y)^2 - xy^3]dx + [x^3y - x(x-y)^2]dy = 0 \tag{10.}$$

integriren.

**Auflösung.** Die vorgelegte Differential-Gleichung kann durch keine der bisher angegebenen Methoden integrirt werden. Multiplicirt man sie aber mit dem Factor

$$v = \frac{1}{xy(x-y)^2}, \tag{11.}$$

so geht sie über in

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0. \tag{12.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das vollständige Differential der Function

$$u = \mathrm{l}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x-y} + C, \tag{13.}$$

wie bereits in § 71, Aufgabe 5 ermittelt worden ist.

Weitere Beispiele für die Bestimmung des integrirenden Factors wurden bereits bei der Integration der linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung in § 80 (Aufgabe 7, 8 und 9) ausgeführt.

## § 84.

## Bestimmung des integrirenden Factors.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 182 bis 187.)

Die Bedingung, dass $v(Mdx + Ndy)$ ein vollständiges Differential wird, ist nach Formel Nr. 172 der Tabelle

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x};$$

dies giebt

$$v\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{1.}$$

Diese Bedingung ist *nothwendig*, aber auch *hinreichend* dafür, dass $v$ ein *integrirender Factor* ist, und zwar ist Gleichung (1.) eine *partielle* Differential-Gleichung für $v$, denn sie enthält die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$. Man kann schon daraus entnehmen, dass die Integration dieser partiellen Differential-Gleichung im Allgemeinen schwieriger sein wird als die Integration der ursprünglich gegebenen Differential-Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Es giebt aber mehrere Fälle, wo die Bestimmung von $v$ ausführbar ist. Von diesen Fällen sollen hier einige hervorgehoben werden.

**I. Fall.** *Der integrirende Factor $v$ sei eine Function von $x$ allein*, es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx}. \tag{2.}$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$-N\frac{dv}{dx} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen $x$, folglich muss es auch die rechte Seite sein. Ist also der Ausdruck $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ von $y$ unabhängig, so findet man einen integrirenden Factor $v$ aus Gleichung (3); es wird nämlich

$$1v = -\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}, \quad v = e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}}. \tag{4.}$$

## Beispiel.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0 \tag{5.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{(1 + 3x^2) - (x^2 + 1)}{x + x^3} = \frac{2x}{1 + x^2}, \tag{6.}$$

folglich wird nach Gleichung (3.)

$$(7.)\qquad \frac{dv}{v} = -\frac{2x dx}{1+x^2},\quad \mathrm{l}v = -\mathrm{l}(1+x^2),\quad v = \frac{1}{1+x^2}.$$

Indem man Gleichung (5.) mit diesem integrirenden Factor $v$ multiplicirt, erhält man

$$(8.)\qquad du = \left(y + \frac{1}{1+x^2}\right)dx + x dy = 0,$$

also

$$(9.)\qquad u = \int x dy + \varphi(x) = xy + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist, die man aus der Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{d\varphi(x)}{dx} = y + \frac{1}{1+x^2}$$

findet, und zwar wird

$$(11.)\qquad d\varphi(x) = \frac{dx}{1+x^2},\quad \varphi(x) = \operatorname{arctg} x,$$

folglich ist

$$(12.)\qquad u = xy + \operatorname{arctg} x = C.$$

**II. Fall.** *Der integrirende Factor $v$ sei eine Function von $y$ allein*, es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dy}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$M\frac{dv}{dy} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$(13.)\qquad \frac{1}{v}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen $y$, folglich muss es auch die rechte sein. Ist also der Ausdruck $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ von $x$ unabhängig, so findet man einen integrirenden Factor $v$ aus Gleichung (13); es wird nämlich

(14.) $$\mathrm{l}v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}, \quad v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}}.$$

## Beispiel.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

(15.) $$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

(16.) $$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{y^2(x-y)} = -\frac{2}{y},$$

folglich wird nach Gleichung (14.)

(17.) $$\mathrm{l}v = -2\mathrm{l}y, \quad v = \frac{1}{y^2}.$$

Indem man Gleichung (15.) mit diesem integrirenden Factor $v$ multiplicirt, erhält man

(18.) $$du = (x-y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0,$$

also

(19.) $$u = \int(x-y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $y$ ist, die man aus der Gleichung

(20.) $$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - x$$

findet, und zwar wird

(21.) $$\varphi'(y)dy = \frac{dy}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y},$$

folglich ist

(22.) $$u = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C,$$

oder

(22a.) $$x^2y - 2xy^2 - 2Cy - 2 = 0.$$

**III. Fall.** *Der integrirende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen* $z = xy$; es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{dv}{dz},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$(xM - yN)\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{23.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen $z$, folglich muss es auch die rechte Seite sein. Ist also $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $xy = z$, so findet man einen integrirenden Factor $v$ aus Gleichung (23.); es wird nämlich

$$\mathrm{l}v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM - yN}, \tag{24.}$$

$$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM - yN}}. \tag{25.}$$

### Beispiel.

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0 \tag{26.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (1 - 2xy) - (1 + 2xy) = -4xy, \tag{27.}$$

$$xM - yN = (xy + x^2y^2) - (xy - x^2y^2) = 2x^2y^2, \tag{28.}$$

folglich wird

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z} \tag{29.}$$

eine Function von $z = xy$ allein, so dass man aus den Gleichungen (24.) und (25.)

$$\mathrm{l}v = -2\int\frac{dz}{z} = -2\mathrm{l}z,\quad\text{oder}\quad v = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2} \tag{30.}$$

findet. Multiplicirt man Gleichung (26.) mit diesem integrirenden Factor $v$, so ergiebt sich

$$(31.)\qquad du = \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0,$$

$$(32.)\qquad u = \int\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \varphi(y) = -\frac{1}{xy} + 1x + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $y$ ist, die man aus der Gleichung

$$(33.)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}$$

findet; und zwar wird

$$(34.)\qquad \varphi'(y)dy = -\frac{dy}{y},\quad \varphi(y) = -1y,$$

folglich ist

$$u = 1x - 1y - \frac{1}{xy} = C,$$

oder

$$(35.)\qquad 1\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{xy} = C.$$

**IV. Fall.** *Der integrirende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen* $z = \frac{y}{x}$; es sei also

$$(36.)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{dv}{dz},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$\frac{xM + yN}{x^2}\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

$$(37.)\qquad \frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen $z$, folglich muss es auch die rechte sein. Ist also $\frac{x^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $\frac{y}{x} = z$, so findet man einen integrirenden Factor $v$ aus Gleichung (37); es wird nämlich

$$(38.)\qquad \mathrm{l}v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM + yN},$$

$$(39.)\qquad v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM + yN}}.$$

## Beispiel.

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(40.)\qquad \left[3x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Bezeichnet man $\frac{y}{x}$ mit $z$, so wird in diesem Falle

$$\frac{x^2}{xM + yN} = \frac{x^2}{(3x^2\sin z + xy\cos z) - xy\cos z} = \frac{1}{3\sin z},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (-\cos z - z\sin z) - (3\cos z + \cos z - z\sin z) = -5\cos z,$$

also ist

$$(41.)\qquad \frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{5\cos z}{3\sin z}$$

eine Function von $z = \frac{y}{x}$ allein, so dass man aus den Gleichungen (38.) und (39.)

$$(42.)\qquad \mathrm{l}v = -\frac{5}{3}\int\frac{\cos z dz}{\sin z} = -\frac{5}{3}\mathrm{l}(\sin z),\quad v = \frac{1}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}}$$

findet. Multiplicirt man Gleichung (40.) mit diesem integrirenden Factor $v$, so ergiebt sich

$$(43.)\qquad du = \left[\frac{3x}{(\sin z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y\cos z}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}}\right]dx - \frac{x\cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} = 0.$$

Daraus folgt

$$(44.)\qquad u = -\int\frac{x\cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} + \varphi(x) = -x^2\int(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z dz + \varphi(x)$$

$$= +\frac{3x^2}{2}(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = \frac{3x^2}{2}\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ ist, die man aus der Gleichung

(45.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z + \varphi'(x)$$

$$= 3x(\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y(\sin z)^{-\frac{5}{3}}\cos z$$

findet. Es wird also

(46.) $$\varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = c.$$

Dabei kann man die Integrations-Constante $c$ gleich Null setzen, weil man auf der rechten Seite von Gleichung (44.) bereits eine Integrations-Constante $C$ hinzugefügt hat. Man erhält daher

$$u = \frac{3x^2}{2}\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} = C,$$

oder

(47.) $$3x^2 = 2C\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man noch $8C^3 = 27C_1^2$, so kann man diese Gleichung auf die Form

(48.) $$x^6 = C_1^2\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{oder} \quad x^3 = \pm C_1\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

bringen.

**V. Fall.** *Der integrirende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen* $z = x^2 + y^2$; es sei also

(49.) $$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$2(yM - xN)\frac{dv}{dz} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

oder

(50.) $$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2(yM - xN)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen $z$, folglich muss es auch die rechte sein.

Ist also $\dfrac{1}{yM - xN}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$ nur abhängig von $x^2+y^2 = z$, so findet man einen integrirenden Factor $v$ aus Gleichung (50.); es wird nämlich

$$(51.)\qquad \mathrm{l}\, v = \int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM - xN)},$$

$$(52.)\qquad v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM - xN)}}.$$

## Beispiel.

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(53.)\qquad (a\sqrt{x^2+y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2+y^2} - cy)dy = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Bezeichnet man $x^2+y^2$ mit $z$, so ist in diesem Falle

$$(54.)\quad yM - xN = (ay\sqrt{z} - cxy) - (bx\sqrt{z} - cxy) = (ay - bx)\sqrt{z},$$

$$(55.)\qquad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{bx}{\sqrt{z}} - \frac{ay}{\sqrt{z}} = -\frac{ay - bx}{\sqrt{z}},$$

folglich ist

$$(56.)\qquad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{yM - xN} = -\frac{1}{z}$$

eine Function der einzigen Veränderlichen $z$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (51.) und (52.)

$$(57.)\qquad \mathrm{l}\, v = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\, z, \quad v = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Multiplicirt man Gleichung (53.) mit diesem integrirenden Factor $v$, so ergiebt sich

$$(58.)\quad du = \left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0,$$

$$(59.)\quad u = \int\left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \varphi(y) = ax - c\sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $y$ ist, die man aus der Gleichung

$$(60.)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = b - \frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

findet. Es wird also

$$(61.)\qquad \varphi'(y) = b, \quad \varphi(y) = by,$$

$$(62.)\qquad u = ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

In ähnlicher Weise kann man noch eine ganze Reihe von besonderen Fällen behandeln, bei denen der integrirende Factor eine Function einer einzigen Veränderlichen $z$ ist, die selbst wieder eine passend gewählte Function von $x$ und $y$ sein darf. In allen diesen Fällen ist zuerst der Ausdruck

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

zu bilden. Ist dieser Ausdruck gleich Null, so ist schon

$$Mdx + Ndy$$

selbst ein *vollständiges Differential*, ist er aber von Null verschieden, so kann man der Reihe nach versuchen, ob

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \text{ eine Function von } x \text{ allein,}$$

oder ob $\quad +\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $y$ „

„ „ $\quad \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $xy$ „

„ „ $\quad \frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $\frac{y}{x}$ „

„ „ $\quad \frac{1}{yM - xN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ „ „ „ $x^2 + y^2$ „

ist. Trifft einer dieser 5 Fälle ein, so kann man nach den angegebenen Regeln den integrirenden Factor leicht bestimmen.

Erwähnt möge noch werden, dass der häufig vorkommende Ausdruck $xdy - ydx$ die integrirenden Factoren

$$\frac{1}{x^2},\ \frac{1}{y^2},\ \frac{1}{x^2 + y^2}$$

besitzt. Es folgt dabei aus den Gleichungen

$$(63.)\qquad du_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2},\quad du_2 = \frac{xdy - ydx}{y^2},\quad du_3 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$(64.)\qquad u_1 = \frac{y}{x},\quad u_2 = -\frac{x}{y},\quad u_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Der Ausdruck $xdx + ydy$ hat den integrirenden Factor $\frac{1}{x^2 + y^2}$, und zwar folgt aus

$$du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} \tag{65.}$$

$$u = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2 + y^2). \tag{66.}$$

§ 85.

## Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades.

Eine Differential-Gleichung erster Ordnung und $n^{\text{ten}}$ Grades hat die Form

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + U = 0. \tag{1.}$$

Hierbei bedeuten die Coefficienten $P, Q, \ldots T, U$ beliebige Functionen von $x$ und $y$ oder constante Grössen.

Denkt man sich nun Gleichung (1.) in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so erhält man $n$ verschiedene Differential-Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F_2(x, y), \ldots \frac{dy}{dx} = F_n(x, y), \tag{2.}$$

wobei $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots F_n(x, y)$ Functionen von $x$ und $y$ oder constante Grössen sind.

Durch Integration der Gleichungen (2.) erhält man dann

$$\varphi_1(x, y, c_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, c_2) = 0, \ldots \varphi_n(x, y, c_n) = 0. \tag{3.}$$

Jede dieser Gleichungen ist ein Integral der Differential-Gleichung (1.). Man kann alle diese Lösungen zusammenfassen, indem man die Gleichungen (3.) mit einander multiplicirt. Dies giebt

$$\varphi_1(x, y, c_1) \cdot \varphi_2(x, y, c_2) \ldots \varphi_n(x, y, c_n) = 0. \tag{4.}$$

Da dieses Product gleich 0 wird, wenn man *einen* der Factoren gleich 0 setzt, so wird die Allgemeinheit der Lösung nicht beschränkt, wenn man die Integrations-Constanten $c_1$,

$c_2, \ldots c_n$ alle einander gleich setzt. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$\text{(4a.)} \qquad \varphi_1(x, y, c) \,.\, \varphi_2(x, y, c) \ldots \varphi_n(x, y, c) = 0.$$

Sind z. B. in Gleichung (1.) die Coefficienten $P, Q, \ldots T, U$ constante Grössen, so gehen die Gleichungen (1.) und (2.) über in

$$\text{(1a.)} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + U$$
$$= \left(\frac{dy}{dx} - a_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - a_2\right)\cdots\left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0.$$

Daraus folgen die $n$ Differential-Gleichungen

$$\text{(5.)} \qquad \frac{dy}{dx} = a_1, \quad \frac{dy}{dx} = a_2, \quad \cdots \quad \frac{dy}{dx} = a_n,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots a_n$ auch constante Grössen sind. Deshalb wird in diesem Falle

$$\text{(6.)} \quad \varphi_1 = y - a_1x + c = 0, \varphi_2 = y - a_2x + c = 0, \ldots \varphi_n = y - a_nx + c = 0,$$

oder

$$\text{(6a.)} \quad \frac{y+c}{x} - a_1 = 0, \quad \frac{y+c}{x} - a_2 = 0, \cdots \frac{y+c}{x} - a_n = 0.$$

Gleichung (4a.) geht daher in diesem Falle über in

$$\text{(7.)} \quad \left(\frac{y+c}{x} - a_1\right)\left(\frac{y+c}{x} - a_2\right)\cdots\left(\frac{y+c}{x} - a_n\right) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1a.) in

$$\text{(7a.)} \quad \left(\frac{y+c}{x}\right)^n + P\left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-2} + \cdots + T\frac{y+c}{x} + U = 0.$$

In diesem Falle ist also die Auflösung der Gleichung (1.) nach $\frac{dy}{dx}$, welche mitunter bedeutende algebraische Schwierigkeiten verursachen würde, nicht einmal erforderlich.

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\text{(8.)} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Aus Gleichung (8.) folgt zunächst

$$\frac{dy}{dx} = +a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a \tag{9.}$$

und daraus durch Integration

$$y + c = ax \quad \text{und} \quad y + c = -ax,$$

oder

$$(y + c - ax)(y + c + ax) = (y + c)^2 - a^2x^2 = 0. \tag{10.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 7\frac{dy}{dx} + 6 = 0 \tag{11.}$$

integriren.

**Auflösung.** Gleichung (11.) lässt sich auf die Form

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right)\left(\frac{dy}{dx} + 3\right) = 0 \tag{11a.}$$

bringen, folglich erhält man für das allgemeine Integral

$$(y + c - x)(y + c - 2x)(y + c + 3x) = 0, \tag{12.}$$

oder

$$(y + c)^3 - 7x^2(y + c) + 6x^3 = 0. \tag{12a.}$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ax \tag{13.}$$

integriren.

**Auflösung.** Aus Gleichung (13.) folgt

$$dy = +\sqrt{ax}\,dx \quad \text{und} \quad dy = -\sqrt{ax}\,dx \tag{14.}$$

und durch Integration

$$y + c - \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0 \quad \text{und} \quad y + c + \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0. \tag{15.}$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann als Integral der vorgelegten Differential-Gleichung angesehen werden. Indem man die beiden Gleichungen (15.) mit einander multiplicirt, vereinigt man beide Lösungen und erhält

$$[3(y + c) - 2x\sqrt{ax}]\,[3(y + c) + 2x\sqrt{ax}] = 0,$$

oder

$$9(y + c)^2 - 4ax^3 = 0. \tag{16.}$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \tag{17.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Auflösung von Gleichung (17.) nach $\frac{dy}{dx}$ findet man die beiden Werthe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad\text{und}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x - \sqrt{x^2+y^2}}{y}, \tag{18.}$$

oder

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = +dx \quad\text{und}\quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -dx, \tag{19.}$$

also durch Integration

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + c \quad\text{und}\quad \sqrt{x^2+y^2} = -x - c, \tag{20.}$$

oder, wenn man beide Lösungen vereinigt,

$$(\sqrt{x^2+y^2} - x - c)(\sqrt{x^2+y^2} + x + c) = y^2 - 2cx - c^2 = 0. \tag{21.}$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + bx(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - bx = 0 \tag{22.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Auflösung der Gleichung (22.) nach $\frac{dy}{dx}$ erhält man die drei Differential-Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -bx,\quad \frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{23.}$$

und findet daraus durch Integration

$$y + c = -\frac{bx^2}{2},\quad y + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),\quad y + c = -\arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{24.}$$

Indem man diese drei Lösungen vereinigt, ergiebt sich die Gleichung

$$\left(y + c + \frac{bx^2}{2}\right)\left[y + c - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]\left[y + c + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] = 0,$$

oder

$$(25.)\quad (y+c)^3 + \frac{bx^2}{2}(y+c)^2 - \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 (y+c) - \frac{bx^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 = 0.$$

## § 86.
## Integration durch Differentiation.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 188 bis 191 a.)

Es war schon in dem vorhergehenden Paragraphen erwähnt worden, dass die Auflösung der Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades nach $\frac{dy}{dx}$ häufig auf grosse algebraische Schwierigkeiten stösst. Es sollen deshalb hier noch einige Fälle untersucht werden, bei denen man die Integration durch andere Mittel ausführen kann.

Der Kürze wegen möge hierbei

$$(1.)\quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = pdx$$

gesetzt werden.

**I. Fall.** *Die Differential-Gleichung enthalte $y$ gar nicht und sei auflösbar nach $x$*; die Gleichung habe also die Form

$$(2.)\quad x = \varphi(p);$$

dann findet man durch Differentiation

$$(3.)\quad dx = \varphi'(p)dp,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$(4.)\quad pdx = dy = \varphi'(p) . pdp,$$

$$(5.)\quad y = \int \varphi'(p) . pdp + C.$$

Indem man aus den Gleichungen (2.) und (5.) die Grösse $p$ eliminirt, erhält man die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

### Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(6.)\quad x = 4p^3 - 6p^2 + 12p - 15$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (6.) differentiirt, erhält man die Gleichungen

$$(7.)\qquad dx = (12p^2 - 12p + 12)dp,$$

$$(8.)\qquad dy = (12p^3 - 12p^2 + 12p)dp,$$

also

$$(9.)\qquad y = 3p^4 - 4p^3 + 6p^2 + C.$$

Durch Elimination der Grösse $p$ aus den Gleichungen (6.) und (9.) findet man dann die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(10.)\qquad x = \arcsin p - \sqrt{1-p^2}$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (10.) differentiirt, erhält man die Gleichungen

$$(11.)\qquad dx = \left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)dp,$$

$$(12.)\qquad dy = \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}}\right)dp,$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 25 und 71 der Tabelle

$$(13.)\qquad y = -\sqrt{1-p^2} - \frac{p}{2}\sqrt{1-p^2} + \frac{1}{2}\arcsin p + C,$$

oder

$$(14.)\qquad 2y - x = 2C - (1+p)\sqrt{1-p^2}.$$

**II. Fall.** *Die Differential-Gleichung enthalte $x$ gar nicht und sei auflösbar nach $y$*; die Gleichung habe also die Form

$$(15.)\qquad y = \varphi(p);$$

dann findet man durch Differentiation mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$(16.)\qquad dy = pdx = \varphi'(p)dp,$$

$$(17.)\qquad dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

also

$$(18.)\qquad x = \int\frac{\varphi'(p)dp}{p} + C.$$

Indem man aus den Gleichungen (15.) und (18.) die Grösse $p$ eliminirt, findet man die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

**Beispiele.**

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$y = \frac{2a}{1 + p^2} \tag{19.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Differentiation findet man aus Gleichung (19.)

$$dy = pdx = -\frac{4apdp}{(1 + p^2)^2}, \tag{20.}$$

$$dx = -\frac{4adp}{(1 + p^2)^2}. \tag{21.}$$

Dies giebt nach Formel Nr. 106 der Tabelle

$$x = -4a\int\frac{dp}{(1 + p^2)^2} = -2a\left(\frac{p}{1 + p^2} + \operatorname{arctg} p\right) + C. \tag{22.}$$

Setzt man

$$C - a\pi = x_0, \quad p = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - t}{2}\right),$$

also

$$\frac{2}{1 + p^2} = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t, \quad \frac{2p}{1 + p^2} = \sin t, \quad \pi - t = 2\operatorname{arctg} p,$$

so gehen die Gleichungen (19.) und (22.) über in

$$y = a(1 - \cos t), \tag{19a.}$$

$$x = a(t - \pi - \sin t) + C,$$

oder

$$x - x_0 = a(t - \sin t). \tag{22a.}$$

Das allgemeine Integral stellt also eine Schaar von *Cykloiden* dar.

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{a^2 p} \tag{23.}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Differentiation folgt aus Gleichung (23.)

$$dy = p\,dx = -\frac{dp}{p^2\sqrt{a^2 - p^2}}, \tag{24.}$$

$$dx = -\frac{dp}{p^3\sqrt{a^2 - p^2}}, \tag{25.}$$

also nach Formel Nr. 76 und 78 der Tabelle

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2p^2} - \frac{1}{2a^2}\int\frac{dp}{p\sqrt{a^2-p^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2p^2} + \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{l}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-p^2}}{p}\right). \end{aligned} \tag{26.}$$

Da noch aus Gleichung (23.) folgt, dass

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^4y^2 + 1}}, \quad \sqrt{a^2-p^2} = \frac{a^3y}{\sqrt{a^4y^2 + 1}} \tag{27.}$$

ist, so findet man aus Gleichung (26.)

$$2a^3(x - x_0) = a^2y\sqrt{a^4y^2 + 1} + \mathrm{l}(a^2y + \sqrt{a^4y^2 + 1}). \tag{28.}$$

**III. Fall.** *Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Grössen $x$, $y$ und $p$, sei aber nach $x$ auflösbar*; die Gleichung habe also die Form

$$x = f(y, p). \tag{29.}$$

Indem man diese Gleichung differentiirt und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp,$$

oder

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dy - \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0. \tag{30.}$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen $y$ und $p$, die in Bezug auf $\frac{dy}{dp}$ nur vom ersten Grade ist und sich in vielen Fällen leichter integriren lässt als die vorgelegte Differential-Gleichung (29.). Hat man die Integral-Gleichung

$$\varphi(y, p, C) = 0 \tag{31.}$$

gefunden, so folgt durch Elimination von $p$ aus den Gleichungen (29.) und (31.) die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

**Beispiel.**

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(32.)\qquad yp^2 - 2xp + y = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{y(1+p^2)}{2p}$$

integriren.

**Auflösung.** Durch Differentiation folgt aus Gleichung (32.)

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{p(1+p^2)dy - y(1-p^2)dp}{2p^2},$$

oder

$$(33.)\qquad p(1-p^2)dy + y(1-p^2)dp = (1-p^2)(pdy + ydp) = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man *entweder*

$$(34.)\qquad 1 - p^2 = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

*oder*

$$(35.)\qquad pdy + ydp = 0$$

setzt. Aus Gleichung (34.) folgt durch Integration

$$(36.)\qquad y = \pm x + C.$$

Dasselbe Resultat findet man aber auch *ohne Integration*, indem man $p = \pm 1$ in die Gleichung (32.) einsetzt, woraus man auch erkennt, dass in Gleichung (36.) der Werth der Integrations-Constanten $C$ gleich 0 sein muss, dass also Gleichung (36.) in

$$(36\text{a.})\qquad y = \pm x$$

übergeht.

Aus Gleichung (35.) findet man dagegen durch Trennung der Variabeln

$$(37.)\qquad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0,$$

$$(38.)\qquad \mathrm{l}y + \mathrm{l}p = \mathrm{l}C, \quad \text{oder} \quad py = C, \quad \text{also} \quad p = \frac{C}{y}.$$

Trägt man diesen Werth von $p$ in Gleichung (32.) ein, so findet man

$$(39.)\qquad y^2 - 2Cx + C^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung und stellt eine *Schaar von Parabeln* dar, welche sämmtlich die beiden durch Gleichung (36a.) dargestellten geraden Linien in den Punkten mit den Coordinaten

$$x = C, \quad y = \pm C$$

berühren.

**IV. Fall.** *Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Grössen $x$, $y$ und $p$, sei aber auflösbar nach $y$*; die Gleichung habe also die Form

$$y = f(x, p). \tag{40.}$$

Indem man diese Gleichung differentiirt und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dy = pdx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp,$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) = 0. \tag{41.}$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen $x$ und $p$, die in Bezug auf $\frac{dp}{dx}$ nur vom ersten Grade ist und sich in vielen Fällen leichter integriren lässt als die vorgelegte Differential-Gleichung (40.). Hat man die Integral-Gleichung

$$\varphi(x, p, C) = 0 \tag{42.}$$

gefunden, so folgt durch Elimination von $p$ aus den Gleichungen (40.) und (42.) die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

Hat die Differential-Gleichung z. B. die Form

$$y = x \,.\, f(p) + \varphi(p), \tag{43.}$$

so wird mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + [x \,.\, f'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}, \tag{44.}$$

oder

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - x \,.\, f'(p) = \varphi'(p). \tag{45.}$$

Dies ist aber eine *lineare Differential-Gleichung erster Ordnung*, die man nach den Angaben in § 80 integriren kann. (Vergl. auch Formel Nr. 180 der Tabelle.)

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo in der vorhergehenden Entwickelung $f(p)$ gleich $p$ ist, wo also die Differential-Gleichung die Form

$$y = px + \varphi(p) \tag{46.}$$

hat. Dann erhält man durch Differentiation

$$dy = pdx = pdx + xdp + \varphi'(p)dp,$$

oder

$$[x + \varphi'(p)]dp = 0. \tag{47.}$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man entweder

$$dp = 0, \tag{48.}$$

oder

$$x + \varphi'(p) = 0 \tag{49.}$$

setzt. Aus Gleichung (48.) folgt durch Integration

$$p = \frac{dy}{dx} = C, \quad \text{also} \quad y = Cx + C_1, \tag{50.}$$

wobei die zweite Integrations-Constante ermittelt wird, indem man den gefundenen Werth von $p$ in die Gleichung (46.) einsetzt. Dies giebt

$$y = Cx + \varphi(C), \quad \text{also} \quad C_1 = \varphi(C). \tag{51.}$$

Da hierbei die Integrations-Constante $C$ unendlich viele Werthe hat, so ist Gleichung (51.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Ganz verschieden davon ist die Lösung, welche man findet, indem man aus den Gleichungen (46.) und (49.) die Grösse $p$ eliminirt. Dass man auf diese Weise wirklich eine Lösung erhält, kann man in folgender Weise zeigen. Denkt man sich aus Gleichung (49.) $p$ als Function von $x$ ausgerechnet und in Gleichung (46.) eingesetzt, so findet man, indem man diese Gleichung nach $x$ differentiirt,

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

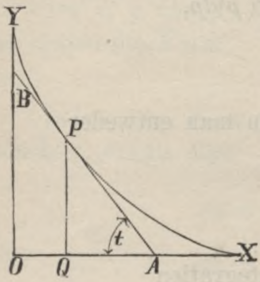
also mit Rücksicht auf Gleichung (49.)

$$\frac{dy}{dx} = p. \tag{52.}$$

**Beispiel.**

**Aufgabe 6.** Man soll eine Curve bestimmen, bei welcher der Abschnitt der Tangente zwischen den beiden Coordinaten-Axen eine constante Länge $c$ hat.

Fig. 132.




**Auflösung.** Damit die Gerade $AB$ (Fig. 132) eine Tangente der Curve im Punkte $P$ ist, muss

$$(52.)\qquad y' = \frac{dy}{dx}x' + \mu, \quad \text{oder} \quad y' = px' + \mu$$

sein, wobei die *laufenden* Coordinaten der Geraden mit $x'$ und $y'$ bezeichnet worden sind. Die Abschnitte $OA = a$ und $OB = b$, welche diese Gerade auf den Coordinaten-Axen abschneidet, sind dann

$$(53.)\qquad a = -\frac{\mu}{p}, \quad b = \mu.$$

Da nach der Forderung der Aufgabe

$$(54.)\qquad a^2 + b^2 = c^2$$

sein soll, so findet man

$$(55.)\qquad \frac{\mu^2}{p^2} + \mu^2 = c^2, \quad \text{oder} \quad \mu = \pm\frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Nimmt man hierbei das obere Zeichen, so geht Gleichung (52.) über in

$$(56.)\qquad y' = px' + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da die Gerade durch den Punkt $P$ hindurchgehen soll, so erhält man die Differential-Gleichung

$$(57.)\qquad y = px + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = p = p + \left(x + \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

oder

$$(58.)\qquad \left(x + \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt, indem man

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C \tag{59.}$$

setzt und diesen Werth von $p$ in Gleichung (57.) einträgt, woraus man

$$y = Cx + \frac{Cc}{\sqrt{1 + C^2}} \tag{60.}$$

findet. Diese Gleichung enthält die willkürliche Constante $C$ und ist daher das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung. Jede Curve der gefundenen Curvenschaar ist eine *gerade Linie*, welche mit ihrer Tangente zusammenfällt und auf den Coordinaten-Axen die Abschnitte

$$a = -\frac{c}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad b = +\frac{cC}{\sqrt{1 + C^2}} \tag{61.}$$

bestimmt. Da hieraus

$$a^2 + b^2 = c^2$$

folgt, so wird der Forderung der Aufgabe genügt.

Gleichung (58.) wird aber auch befriedigt, wenn man

$$x + \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{-c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} \tag{62.}$$

setzt. Bezeichnet man den Winkel $BAO$ mit $t$, so wird

$$p = -\operatorname{tg} t, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = -\cos t, \quad \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = +\sin t; \tag{63.}$$

dadurch gehen die Gleichungen (62.) und (57.) über in

$$x = c\cos^3 t, \quad y = c\sin^3 t. \tag{64.}$$

Durch Elimination von $t$ findet man aus diesen Gleichungen

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}. \tag{65.}$$

Die gesuchte Curve ist also eine *Astroide*. Für einen beliebigen Punkt $P$ der Astroide wird

$$p = -\operatorname{tg} t, \tag{66.}$$

so dass man für die zugehörige Tangente die Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

oder

$$y' - c\sin^3 t = -\operatorname{tg} t(x' - c\cos^3 t),$$

$$(67.)\qquad y' = -\operatorname{tg} t \,.\, x' + c\sin t$$

findet. Deshalb sind die Abschnitte, welche diese Tangente auf den Coordinaten-Axen abschneidet,

$$(68.)\qquad a = c\cos t,\quad b = c\sin t,\quad \text{also}\quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Hätte man in Gleichung (55.) das *untere* Zeichen genommen, so hätte sich in den folgenden Gleichungen nur das Vorzeichen von $c$ geändert.

Setzt man in Gleichung (67.) $-\operatorname{tg} t$ gleich $C$, so geht sie in Gleichung (60.) über, welche das *allgemeine* Integral der Differential-Gleichung darstellte; d. h. die Astroide, welche man als eine *besondere* Lösung der Differential-Gleichung gefunden hat, berührt alle geraden Linien, die der *allgemeinen* Lösung entsprechen.

## § 87.

## Die singulären Auflösungen der Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 192.)

Bei den Aufgaben 5 und 6 des vorhergehenden Paragraphen und ebenso bei der Differential-Gleichung

$$(1.)\qquad y = px + \varphi(p)$$

fand man *zwei* Lösungen, von denen die eine noch eine willkürliche Integrations-Constante enthält, die zweite aber nicht. Auch erkennt man bei diesen Aufgaben sofort, dass diese zweite Lösung, welche ohne Ausführung einer Integration gefunden werden konnte, kein *particuläres* Integral ist, d. h. die zweite Lösung geht nicht aus der ersten hervor, indem man der Integrations-Constanten einen besonderen Werth giebt.

Man nennt daher eine solche besondere Lösung *„eine singuläre Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung“*.

Der Zusammenhang zwischen der *allgemeinen* und einer solchen *singulären* Lösung ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es sei

$$(2.) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder

$$(2\text{ a.}) \qquad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

die gegebene Differential-Gleichung, und

$$(3.) \qquad G(x, y, C) = 0$$

sei das allgemeine Integral. Die Gleichung (3.) stellt eine ganze Schaar von Curven dar, weil die Integrations-Constante $C$ unendlich viele Werthe annehmen darf. $C$ ist also in Gleichung (3.) ein *variabler Parameter*. Für die Coordinaten der Schnittpunkte zweier benachbarten Curven der Schaar, welche den variablen Parametern $C$ und $C + \Delta C$ entsprechen, gelten die Gleichungen

$$(4.) \qquad G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, C + \Delta C) = 0$$

gemeinschaftlich; deshalb gelten für die Coordinaten der Schnittpunkte auch die beiden Gleichungen

$$(5.) \quad G(x, y, C) = 0 \ \text{ und } \ \frac{G(x, y, C + \Delta C) - G(x, y, C)}{\Delta C} = 0.$$

Wird $\Delta C$ verschwindend klein, so gehen diese Gleichungen über in

$$(6.) \qquad G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen den variablen Parameter $C$ eliminirt, so erhält man den geometrischen Ort aller dieser Schnittpunkte, d. h. die *Umhüllungscurve* der gegebenen Curvenschaar. (Vergl. D.-R., § 117 und Formel Nr. 146 der Tabelle.) Giebt es eine solche *Umhüllungscurve* oder *Enveloppe* mit der Gleichung

$$(7.) \qquad S(x, y) = 0,$$

so ist diese Gleichung eine *singuläre Lösung* der gegebenen Differential-Gleichung. Es galt nämlich der Satz: „*Die Umhüllungs-Curve (Enveloppe) hat in den Punkten, welche sie mit einer der Curven der gegebenen Curvenschaar*

$$G(x, y, C) = 0$$

*gemein hat, auch die Tangente mit dieser Curve gemein*". (D.-R., § 117.) Im Punkte $P$ mit den Coordinaten $x$ und $y$ hat daher

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

denselben Werth, gleichviel ob man annimmt, dass der Punkt $P$ ein Punkt auf einer Curve der durch Gleichung (3.) dargestellten Curvenschaar ist, oder ob man den Punkt $P$ als einen Punkt der Umhüllungscurve mit der Gleichung (7.) ansieht.

Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass zwischen der *allgemeinen* Lösung

$$G(x, y, C) = 0 \tag{8.}$$

und der *singulären* Lösung

$$S(x, y) = 0 \tag{9.}$$

einer Differential-Gleichung erster Ordnung immer dieser Zusammenhang besteht. Durch Differentiation der Gleichung (8.) erhält man nämlich

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = G_1 + G_2\frac{dy}{dx} = 0, \tag{10.}$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{G_1(x, y, C)}{G_2(x, y, C)}. \tag{11.}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung wird im Allgemeinen noch die Constante $C$ enthalten. Damit dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen, nämlich in $-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, übergeht, muss man also den Werth von $C$ aus Gleichung (8.) ausrechnen und in Gleichung (11.) einsetzen. Bringt man z. B. Gleichung (8.) auf die Form

$$C = \varphi(x, y), \tag{8b.}$$

so geht Gleichung (11.) über in

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{G_1[x, y, \varphi(x, y)]}{G_2[x, y, \varphi(x, y)]} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{12.}$$

Es ist nun die Frage, wie ist es möglich, dass man aus irgend einer anderen Gleichung

(13.) $$S(x, y) = 0$$

denselben Werth von $\frac{dy}{dx}$ erhält?

Bestimmt man zur Beantwortung dieser Frage jetzt die Grösse $C$ so, dass für alle Werthe von $x$ und $y$

(14.) $$G(x, y, C) = S(x, y)$$

wird, so ergiebt sich hieraus die Gleichung

(15.) $$C = \psi(x, y).$$

Dabei sind die Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ möglicher Weise zunächst *von einander verschieden*; da aber nur solche Werthe von $x$ und $y$ in Betracht kommen, für welche $S(x, y)$ und deshalb nach Gleichung (14.) auch $G(x, y, C)$ verschwindet, so werden die Werthe von $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von $x$ und $y$ *einander gleich*, so dass man

$$C = \psi(x, y) = \varphi(x, y)$$

und

(16.) $$G(x, y, C) = G[x, y, \varphi(x, y)] = 0$$

erhält. Durch Differentiation findet man hieraus, indem man $y$ und $C$ als Functionen von $x$ betrachtet,

(17.) $$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0.$$

Damit nun diese Gleichung denselben, durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen Werth liefert wie Gleichung (12.), muss

(18.) $$\frac{\partial G}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0$$

sein. Dies ist aber nur möglich, wenn *entweder*

(19.) $$\frac{dC}{dx} = 0$$

ist, wenn also $C$ wirklich eine *Constante* ist, *oder* wenn

(20.) $$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

wird. Gilt Gleichung (19.), so erhält man das *allgemeine* Integral, gilt dagegen Gleichung (20.), so braucht $C$ keine Constante zu sein; man findet dann durch Elimination von $C$ aus den

Gleichungen (16.) und (20.) eine Gleichung, welche mit der Gleichung

$$S(x, y) = 0$$

gleichbedeutend ist, d. h. man findet die *singuläre Lösung*. Die *allgemeine* Lösung stellt daher immer eine Schaar von Curven dar, welche die der *singulären* Lösung

$$S(x, y) = 0$$

entsprechende Curve zur *Umhüllungscurve* haben.

## § 88.
## Uebungs-Beispiele.

Schon in § 86 sind zwei Differential-Gleichungen integrirt worden, die eine singuläre Lösung zulassen. In Aufgabe 5 hatte man für die Differential-Gleichung

$$yp^2 - 2xp + y = 0 \tag{1.}$$

das *allgemeine* Integral

$$G(x, y, C) = y^2 - 2Cx + C^2 = 0 \tag{2.}$$

gefunden. Die Umhüllungscurve (Enveloppe) erhält man durch Elimination von $C$ aus Gleichung (2.) und aus der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2x + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = x. \tag{3.}$$

Dies giebt

$$y^2 - x^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pm x. \tag{4.}$$

Die Gleichung der Enveloppe stimmt also überein mit der singulären Lösung der Differential-Gleichung.

In Aufgabe 6 hatte man für die Differential-Gleichung

$$y = px + \frac{cp}{\sqrt{1 + p^2}} \tag{5.}$$

das *allgemeine* Integral

$$G(x, y, C) = y - Cx - \frac{cC}{\sqrt{1 + C^2}} = 0 \tag{6.}$$

gefunden. Die Gleichung der Curve, welche von diesen geraden

Linien eingehüllt wird, erhält man, indem man $C$ aus der Gleichung (6.) und aus der Gleichung

$$(7.)\qquad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -x - \frac{c}{(1 + C^2)\sqrt{1 + C^2}} = 0$$

eliminirt. Setzt man dabei wieder

$$(8.)\qquad C = -\operatorname{tg} t,\quad \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} = -\cos t,\quad \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} = \sin t,$$

so folgt aus den Gleichungen (6.) und (7.)

$$(9.)\qquad x = c\cos^3 t,\quad y = c\sin^3 t,$$

oder

$$(10.)\qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Enveloppe, nämlich die Gleichung der Astroide, giebt also die *singuläre* Lösung der Differential-Gleichung.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.)\qquad y^2 - 2xyp + (1 + x^2)p^2 = 1$$

integriren.

**Auflösung.** Indem man Gleichung (11.) nach $y$ auflöst, erhält man

$$(12.)\qquad y = xp \pm \sqrt{1 - p^2},$$

daraus folgt durch Differentiation

$$(13.)\qquad p = p + x\frac{dp}{dx} \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\frac{dp}{dx},$$

oder

$$(13a.)\qquad \left(x \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man *entweder*

$$(14.)\qquad \frac{dp}{dx} = 0,\quad \text{also}\quad p = \frac{dy}{dx} = C,$$

*oder*

$$(15.)\qquad x \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} = 0,\quad \text{also}\quad \pm\sqrt{1 - p^2} = \frac{p}{x}$$

setzt. Gleichung (14.) giebt das *allgemeine* Integral; indem man nämlich den gefundenen Werth von $p$ in Gleichung (11.) einsetzt, erhält man

$$G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2(1 + x^2) - 1 = 0. \tag{16.}$$

Aus Gleichung (15.) dagegen ergiebt sich die *singuläre* Lösung, und zwar erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (12.)

$$y = xp + \frac{p}{x} = \frac{p}{x}(1 + x^2), \quad p = \frac{xy}{1 + x^2}, \tag{17.}$$

oder, wenn man diesen Werth von $p$ in Gleichung (11.) einsetzt,

$$y^2 - \frac{2x^2y^2}{1 + x^2} + \frac{x^2y^2}{1 + x^2} = 1,$$

oder

$$y^2 - x^2 = 1. \tag{18.}$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne Weiteres erkennt, wenn man die Enveloppe der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (16.) dargestellten Curvenschaar bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von $C$ aus Gleichung (16.) und aus

$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2xy + 2C(1 + x^2) = 0, \text{ oder } C = \frac{xy}{1 + x^2}. \tag{19.}$$

Dieses Beispiel führte *Taylor* auf die Entdeckung der singulären Lösungen.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$ydx - xdy \pm a\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0 \tag{20.}$$

integriren.

**Auflösung.** Die gegebene Differential-Gleichung kann man auf die Form

$$y = px \mp a\sqrt{1 + p^2} \tag{21.}$$

bringen, aus der durch Differentiation

$$p = p + x\frac{dp}{dx} \mp a\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\frac{dp}{dx},$$

oder

$$(22.)\qquad \left(x \mp \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

folgt. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$(23.)\qquad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C$$

setzt. Trägt man diesen Werth von $p$ in die Gleichung (21.) ein, so erhält man

$$y = Cx \mp a\sqrt{1 + C^2},$$

oder

$$(24.)\qquad G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2x^2 - a^2(1 + C^2) = 0.$$

Dies ist die *allgemeine* Lösung der gegebenen Differential-Gleichung. Die *singuläre* Lösung findet man aus Gleichung (22.), indem man

$$(25.)\qquad x \mp \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm\sqrt{1+p^2} = \frac{ap}{x}$$

setzt. Dies giebt in Verbindung mit Gleichung (21.)

$$(26.)\qquad y = px - \frac{a^2p}{x} = \frac{p}{x}\left(x^2 - a^2\right), \quad \text{oder} \quad p = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Bringt man Gleichung (21.) noch auf die Form

$$y^2 - 2xyp + x^2p^2 = a^2(1 + p^2),$$

oder

$$(27.)\qquad y^2 - 2xyp + (x^2 - a^2)p^2 - a^2 = 0$$

und setzt den eben gefundenen Werth von $p$ ein, so erhält man

$$(28.)\qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne Weiteres erkennt, wenn man die Enveloppe der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (24.) dargestellten Schaar gerader Linien bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von $C$ aus Gleichung (24.) und aus

$$(29.)\qquad \frac{\partial G(x,y,C)}{\partial C} = -2xy + 2C(x^2 - a^2) = 0, \quad \text{oder } C = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(30.)\qquad (xp - y)(x - yp) = 2p$$

integriren.

**Auflösung.** Setzt man

(31.) $x = \sqrt{z+u}$, $y = \sqrt{z-u}$, also $2z = x^2 + y^2$, $2u = x^2 - y^2$,

so wird

(32.) $dx = \dfrac{dz + du}{2\sqrt{z+u}}$, $dy = \dfrac{dz - du}{2\sqrt{z-u}}$, $p = \dfrac{(dz - du)\sqrt{z+u}}{(dz + du)\sqrt{z-u}}$,

(33.) $xp - y = \dfrac{2(udz - zdu)}{(dz + du)\sqrt{z-u}}$, $x - yp = \dfrac{2du\sqrt{z+u}}{dz + du}$.

Trägt man diese Werthe in Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$\frac{4(udz - zdu)du\sqrt{z+u}}{(dz + du)^2\sqrt{z-u}} = \frac{2(dz - du)\sqrt{z+u}}{(dz + du)\sqrt{z-u}},$$

oder

(34.) $$dz^2 - 2udzdu + (2z - 1)du^2 = 0.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\dfrac{dz}{du}$ mit $p_1$, so erhält Gleichung (34.) die Form

(35.) $p_1^2 - 2up_1 + 2z - 1 = 0$, oder $u = \dfrac{p_1^2 + 2z - 1}{2p_1}$.

Indem man diese Gleichung nach $u$ differentiirt, findet man

$$1 = \frac{p_1\left(2p_1\dfrac{dp_1}{du} + 2p_1\right) - (p_1^2 + 2z - 1)\dfrac{dp_1}{du}}{2p_1^2},$$

oder

(36.) $$(p_1^2 - 2z + 1)\frac{dp_1}{du} = 0.$$

Hieraus folgt das *allgemeine* Integral, indem man

(37.) $\dfrac{dp_1}{du} = 0$, also $p_1 = C$

setzt und in die Gleichung (35.) einträgt. Dies giebt

(38.) $$2z - 2Cu = 1 - C^2,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

(39.) $G(x, y, C) = x^2 + y^2 - C(x^2 - y^2) - 1 + C^2 = 0$,

oder

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{1-C} = 1. \tag{40.}$$

Dieser Gleichung entspricht eine Schaar concentrischer Ellipsen und Hyperbeln.

Die *singuläre* Lösung findet man, wenn man in Gleichung (36.) den Factor

$$p_1{}^2 - 2z + 1 = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = \pm\sqrt{2z-1} \tag{41.}$$

setzt und in die Gleichung (35.) einträgt. Dies giebt

$$2(2z-1) \mp 2u\sqrt{2z-1} = 0, \quad \text{oder} \quad u = \pm\sqrt{2z-1}, \tag{42.}$$

wobei der Fall $\pm\sqrt{2z-1} = p_1 = 0$, welcher ein *particuläres* Integral ($C = 0$) liefert, ausgeschlossen ist. Daraus folgt

$$u^2 = 2z - 1, \tag{43.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4 = 0, \tag{44.}$$

oder

$$(x+y+\sqrt{2})(x+y-\sqrt{2})(x-y+\sqrt{2})(x-y-\sqrt{2}) = 0. \tag{44a.}$$

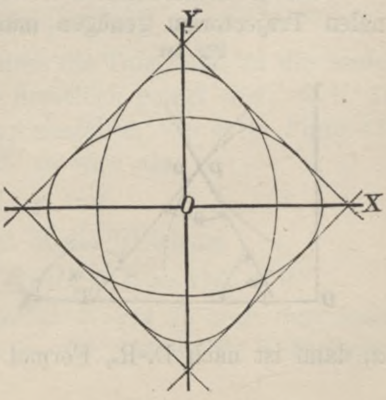
Dieselbe Gleichung findet man, wenn man die Enveloppe der durch Gleichung (39.) dargestellten Curvenschaar bestimmt, indem man aus dieser Gleichung und aus

$$\frac{\partial G(x,y,C)}{\partial C} = -(x^2-y^2) + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{x^2-y^2}{2} \tag{45.}$$

den variablen Parameter $C$ eliminirt.

Der Gleichung (44.) oder (44a.) entspricht ein System von 4 geraden Linien (Fig. 133), die sämmtliche Curven der durch Gleichung (40.) gegebenen Curvenschaar berühren. Gleichzeitig stellt jede dieser geraden Linien eine *singuläre* Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung dar. Setzt man z. B.

Fig. 133.



$$(46.)\qquad x - y + \sqrt{2} = 0, \quad \text{oder} \quad y = x + \sqrt{2},$$

also

$$(47.)\qquad p = 1,$$

und trägt diese Werthe in die Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$(x - x - \sqrt{2})(x - x - \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$$

und erkennt, dass Gleichung (30.) durch diesen Werth von $y$ befriedigt wird.

## § 89.

## Isogonale Trajectorien.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 193 und 194.)

Wenn eine Schaar von Curven durch die Gleichung

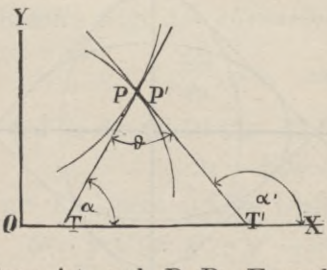
$$(1.)\qquad F(x, y, u) = 0$$

mit dem *variablen Parameter* $u$ gegeben ist, und wenn die sämmtlichen Curven dieser Curvenschaar von einer anderen Curve nach einem bestimmten Gesetze geschnitten werden, so nennt man diese schneidende Curve „eine *Trajectorie*“ der gegebenen Curvenschaar.

Unter den Trajectorien sind besonders bemerkenswerth die *isogonalen Trajectorien*, welche die sämmtlichen Curven einer Curvenschaar unter einem gegebenen Winkel $\vartheta$ schneiden. Ist dieser Winkel $\vartheta$ ein *rechter* Winkel, so nennt man die schneidende Curve „eine *orthogonale Trajectorie*“.

Um die Differential-Gleichung zu finden, welcher die isogonalen Trajectorien genügen müssen, gebe man dem variablen

Fig. 134




Parameter $u$ in Gleichung (1.) zunächst einen bestimmten Werth, d. h. man greife aus der gegebenen Schaar eine bestimmte Curve heraus. Der Winkel, welchen die Tangente dieser Curve (Fig. 134) im Punkte $P$ mit der positiven Richtung der $X$-Axe bildet, sei $\alpha$, dann ist nach D.-R., Formel Nr. 16 und 88 der Tabelle

$$\text{(2.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)},$$

wobei die partiellen Ableitungen von $F(x, y, u)$ nach $x$ und $y$ bezw. mit $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ bezeichnet worden sind. Nennt man nun die laufenden Coordinaten der isogonalen Trajectorie $x'$, $y'$ und den Winkel, welchen die Tangente dieser Trajectorie im Punkte $P'$ mit der positiven Richtung der $X$-Axe bildet, $\alpha'$, so ist

$$\text{(3.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{dy'}{dx'}.$$

Damit nun diese beiden Tangenten den Winkel $\vartheta$ mit einander bilden, muss

$$\text{(4.)} \qquad \alpha' = \alpha + \vartheta$$

sein. Dies giebt

$$\text{(5.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \vartheta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\vartheta},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.)

$$\text{(6.)} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{-\dfrac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)} + \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \dfrac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)}\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{F_2 \operatorname{tg}\vartheta - F_1}{F_2 + F_1 \operatorname{tg}\vartheta},$$

wobei der Kürze wegen $F_1$ und $F_2$ statt $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ gesetzt ist. Multiplicirt man auf der rechten Seite dieser Gleichung noch Zähler und Nenner mit $\cos\vartheta$, so erhält man

$$\text{(7.)} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{F_2 \sin\vartheta - F_1 \cos\vartheta}{F_2 \cos\vartheta + F_1 \sin\vartheta}.$$

Jetzt wird aber verlangt, dass die Tangenten an die beiden Curven in einem Schnittpunkte derselben gelegt sind, d. h. die Punkte $P$ und $P'$ müssen zusammenfallen, wie es in Figur 134 bereits angenommen worden ist; es wird also

$$x' = x, \quad y' = y,$$

so dass Gleichung (7.) übergeht in die Gleichung

$$\text{(8.)} \qquad (F_1 \cos\vartheta - F_2 \sin\vartheta)dx + (F_1 \sin\vartheta + F_2 \cos\vartheta)dy = 0.$$

Im Allgemeinen werden hierbei $F_1$ und $F_2$ noch Functionen von $u$ sein, so dass die Curve, für welche die Differential-

Gleichung (8.) gilt, nur diese *eine*, dem bestimmten Werthe von $u$ entsprechende Curve unter dem Winkel $\vartheta$ schneidet.

Damit *sämmtliche* Curven der gegebenen Curvenschaar unter dem Winkel $\vartheta$ geschnitten werden, muss man Gleichung (1.) in Bezug auf $u$ auflösen und den gefundenen Werth von $u$ in Gleichung (8) einsetzen, oder man muss, was auf dasselbe hinauskommt, aus den Gleichungen (1.) und (8.) die Grösse $u$ eliminiren. Dadurch erhält man eine Gleichung

(9.) $$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Differential-Gleichung der gesuchten *isogonalen Trajectorie* ist.

Bei der Integration dieser Differential-Gleichung erster Ordnung tritt eine Integrations-Constante $C$ auf, die man noch *willkürlich* bestimmen kann. Deshalb giebt es zu der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

eine *ganze Schaar* isogonaler Trajectorien.

Bei den *orthogonalen* Trajectorien ist $\vartheta$ ein rechter Winkel, dann wird also

(10.) $$\sin\vartheta = 1, \quad \cos\vartheta = 0,$$

so dass Gleichung (8.) übergeht in

(11.) $$-F_2 dx + F_1 dy = 0.$$

Die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien findet man also, indem man aus den Gleichungen (1.) und (11.) den variablen Parameter $u$ eliminirt.

## § 90.

## Uebungs-Aufgaben.

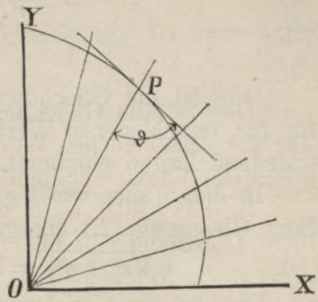
(Vergl. die Formel-Tabelle 195—199.)

**Aufgabe 1.** Durch die Gleichung

(1.) $$F(x, y, u) = y - ux = 0$$

ist eine Schaar von geraden Linien gegeben, welche sämmtlich durch den Nullpunkt hindurchgehen; man soll die Gleichung der Trajectorien aufsuchen, welche alle diese Geraden unter dem Winkel $\vartheta$ schneiden.

Fig. 135.




**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt durch partielle Differentiation

(2.) $$F_1 = -u, \quad F_2 = 1,$$

deshalb findet man aus Formel Nr. 193 der Tabelle für die isogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

(3.) $$(-u\cos\vartheta - \sin\vartheta)dx + (-u\sin\vartheta + \cos\vartheta)dy = 0,$$

wobei aber noch nach Gleichung (1.)

(4.) $$u = \frac{y}{x}$$

zu setzen ist. Dies giebt

(5.) $$(-y\cos\vartheta - x\sin\vartheta)dx + (-y\sin\vartheta + x\cos\vartheta)dy = 0,$$

oder, wenn man durch $-\sin\vartheta$ dividirt,

(5a.) $$(xdx + ydy) + \operatorname{ctg}\vartheta(ydx - xdy) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird ein vollständiges Differential, wie aus den Bemerkungen in § 84, Seite 478 und 479 hervorgeht, wenn man durch den integrirenden Factor $x^2 + y^2$ dividirt, und zwar erhält man aus

(6.) $$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

nach den damals angegebenen Regeln

(7.) $$\mathrm{l}\,(\sqrt{x^2 + y^2}) - \operatorname{ctg}\vartheta \,.\, \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{l}\,C.$$

Diese Gleichung wird noch wesentlich einfacher durch Einführung von Polarcoordinaten, indem man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \text{also} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi$$

setzt und den constanten Factor $\operatorname{ctg}\vartheta$ mit $a$ bezeichnet. Dadurch geht Gleichung (7.) über in

(8.) $$\mathrm{l}r = \mathrm{l}C + a\varphi = \mathrm{l}(C \,.\, e^{a\varphi}),$$
oder
(9.) $$r = C \,.\, e^{a\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Spirale*, welche für die verschiedenen Werthe der Integrations-Constanten $C$ verschiedene Lagen einnimmt.

In dem Falle, wo $\vartheta$ gleich $90^0$ ist, wird $\operatorname{ctg}\vartheta = 0$, so dass dann Gleichung (7.) übergeht in

(10.) $$\mathrm{l}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \mathrm{l}C, \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Schaar *concentrischer Kreise*.

**Aufgabe 2.** Durch die Gleichung

(11.) $$F(x, y, u) = x^2 - 2u(y - x\sqrt{3}) = 0$$

ist eine Schaar von Parabeln gegeben; man soll diejenigen Curven aufsuchen, welche alle diese Parabeln unter einem Winkel von $\pm\, 60^0$ schneiden.

**Auflösung.** Hier ist

(12.) $$\vartheta = \pm\, 60^0, \quad \text{also} \quad \sin\vartheta = \pm\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos\vartheta = \tfrac{1}{2},$$

(13.) $$F_1 = 2x + 2u\sqrt{3}, \quad F_2 = -\, 2u,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 193 der Tabelle für die isogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

(14.) $$(x + u\sqrt{3} \pm u\sqrt{3})dx + [\pm\,(x + u\sqrt{3})\sqrt{3} - u]dy = 0.$$

Für das *obere* Zeichen erhält man daher

(15.) $$(x + 2u\sqrt{3})dx + (x\sqrt{3} + 2u)dy = 0,$$

wobei aber nach Gleichung (11.)

(16.) $$2u = \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}$$

einzusetzen ist. Dies giebt

$$\left(x + \frac{x^2\sqrt{3}}{y - x\sqrt{3}}\right)dx + \left(x\sqrt{3} + \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}\right)dy = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichungen mit $\dfrac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multiplicirt,

(17.) $$y dx + (y\sqrt{3} - 2x)dy = 0.$$

Da in dieser Gleichung die Coefficienten von $dx$ und $dy$ homogene Functionen gleichen Grades sind, so setze man

(18.) $$y = xz, \quad dy = xdz + zdx.$$

Dadurch erhält man, wenn man Gleichung (17.) noch durch $x$ dividirt,

$$zdx + (z\sqrt{3} - 2)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

(19.) $$(z^2\sqrt{3} - z)dx + (z\sqrt{3} - 2)xdz = 0,$$

(20.) $$\frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 2)dz}{z(z\sqrt{3} - 1)} = -\frac{2dz}{z} + \frac{\sqrt{3}dz}{z\sqrt{3} - 1},$$

also

(21.) $$\mathrm{l}x = \mathrm{l}(z\sqrt{3} - 1) - 2\,\mathrm{l}\,z + \mathrm{l}\,C,$$

oder

(22.) $$xz^2 = C(z\sqrt{3} - 1).$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

(23.) $$y^2 = C(y\sqrt{3} - x).$$

Diese Gleichung stellt ebenfalls eine *Schaar von Parabeln* dar, und zwar geht Gleichung (11.) in Gleichung (23.) über, wenn man $x$ mit $y$ und $2u$ mit $-C$ vertauscht.

Wenn man dagegen in Gleichung (14.) das *untere* Zeichen beachtet, so erhält man

(24.) $$xdx - (x\sqrt{3} + 4u)dy = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16.)

$$xdx - \left(x\sqrt{3} + \frac{2x^2}{y - x\sqrt{3}}\right)dy = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit $\frac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multiplicirt,

(25.) $$(y - x\sqrt{3})dx - (y\sqrt{3} - x)dy = 0.$$

Auch hier sind die Coefficienten von $dx$ und $dy$ homogene Functionen gleichen Grades, folglich wendet man wieder die in den Gleichungen (18.) angegebene Substitution an und erhält

$$(z - \sqrt{3})dx - (z\sqrt{3} - 1)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})dx + (z\sqrt{3} - 1)xdz = 0, \tag{26.}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 1)dz}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\frac{d(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}}; \tag{27.}$$

folglich wird

$$\mathrm{l}(x^2) + \mathrm{l}(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}) = \mathrm{l}C,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

$$(x^2 + y^2)\sqrt{3} - 2xy = C. \tag{28.}$$

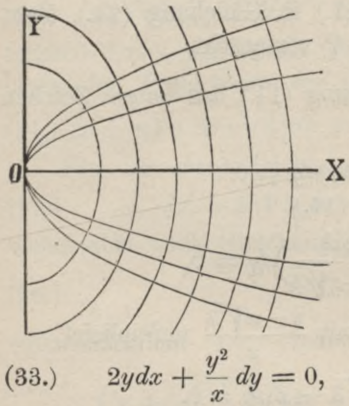
Dies ist die Gleichung einer Schaar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen*, deren Axen die Winkel zwischen den Coordinaten-Axen halbiren.

**Aufgabe 3.** Durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = y^2 - ux = 0 \tag{29.}$$

ist eine Schaar von *Parabeln* mit gleichem Scheitel und gleicher Axe gegeben (Fig. 136); man soll die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajectorien ermitteln.

Fig. 136.




**Auflösung.** Hier ist

$$F_1 = -u, \quad F_2 = 2y, \tag{30.}$$

folglich findet man nach Formel Nr. 194 der Tabelle

$$2ydx + udy = 0, \tag{31.}$$

wobei aber nach Gleichung (29.)

$$u = \frac{y^2}{x} \tag{32.}$$

zu setzen ist. Dies giebt

$$2ydx + \frac{y^2}{x}dy = 0, \quad \text{oder} \quad 2xdx + ydy = 0. \tag{33.}$$

Daraus folgt durch Integration

$$2x^2 + y^2 = C. \tag{34.}$$

Dies ist die Gleichung einer Schaar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.*

**Aufgabe 4.** Durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} - 1 = 0 \tag{35.}$$

ist eine Schaar *confocaler Ellipsen* gegeben, wobei der variable Parameter $u$ alle Werthe von $-b^2$ bis $+\infty$ durchläuft. Wenn dagegen $u$ alle Werthe von $-a^2$ bis $-b^2$ durchläuft, so stellt Gleichung (35.) eine Schaar *confocaler Hyperbeln* dar. Man soll für beide Fälle die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajectorien bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F_1 = \frac{2x}{a^2 + u}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2 + u}, \tag{36.}$$

folglich findet man nach Formel Nr. 194 der Tabelle für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$-\frac{ydx}{b^2 + u} + \frac{xdy}{a^2 + u} = 0, \tag{37.}$$

wobei man noch den variablen Parameter $u$ aus den Gleichungen (35.) und (37.) in folgender Weise eliminiren kann. Aus Gleichung (37.) findet man

$$\frac{y^2}{b^2 + u} = \frac{xyp}{a^2 + u}, \tag{38.}$$

setzt man diesen Werth in Gleichung (35.) ein und bezeichnet man $a^2 - b^2$ mit $e^2$, so erhält man

$$a^2 + u = x(x + yp), \quad b^2 + u = x(x + yp) - e^2, \tag{39.}$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (35.) einsetzt,

$$\frac{x}{x + yp} + \frac{y^2}{x(x + yp) - e^2} = 1,$$

oder

$$(x + yp)(y - xp) = -e^2 p. \tag{40.}$$

Diese Differential-Gleichung für die orthogonalen Trajectorien lässt sich ähnlich behandeln wie die in § 88, Aufgabe 3. Man setze nämlich

$$x^2 = z + t, \quad y^2 = z - t, \quad \text{also} \quad 2z = x^2 + y^2, \quad 2t = x^2 - y^2, \tag{41.}$$

dann wird

$$dz = (x + yp)dx, \quad dt = (x - yp)dx, \tag{42.}$$

also, wenn man $\frac{dz}{dt}$ mit $p_1$ bezeichnet,

$$\frac{dz}{dt} = p_1 = \frac{x + yp}{x - yp}, \quad p = \frac{x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)}. \tag{43.}$$

$$(44.)\qquad x + yp = \frac{2xp_1}{p_1+1},\quad y - xp = \frac{2(z-tp_1)}{y(p_1+1)}.$$

Deshalb geht Gleichung (40.) über in

$$\frac{4xp_1(z-tp_1)}{y(p_1+1)^2} = -\frac{e^2x(p_1-1)}{y(p_1+1)},$$

oder

$$(45.)\qquad 4p_1(z-tp_1) = -e^2(p_1^2-1).$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$(46.)\qquad z = tp_1 - \frac{e^2(p_1^2-1)}{4p_1}$$

bringen und erhält daraus durch Differentiation nach $t$

$$(47.)\qquad \left[t - \frac{e^2(p_1^2+1)}{4p_1^2}\right]\frac{dp_1}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$(48.)\qquad \frac{dp_1}{dt} = 0,\quad \text{also}\quad p_1 = C$$

setzt. Indem man diesen Werth von $p_1$ in Gleichung (45.) einträgt, erhält man

$$4C(z-tC) = e^2(1-C^2),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.)

$$2Cx^2(1-C) + 2Cy^2(1+C) = e^2(1-C^2),$$

oder

$$(49.)\qquad \frac{2Cx^2}{e^2(1+C)} + \frac{2Cy^2}{e^2(1-C)} = 1.$$

Führt man jetzt statt der Integrations-Constanten $C$ einen variablen Parameter $\varkappa$ ein, indem man

$$(50.)\qquad C = \frac{e^2}{a^2+b^2+2\varkappa},$$

also

$$\frac{e^2(1+C)}{2C} = a^2+\varkappa,\quad \frac{e^2(1-C)}{2C} = b^2+\varkappa$$

setzt, so geht Gleichung (49.) über in

$$(51.)\qquad \frac{x^2}{a^2+\varkappa} + \frac{y^2}{b^2+\varkappa} = 1.$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Schaar *confocaler Ellipsen und Hyperbeln* dar, welche mit der gegebenen Curvenschaar identisch ist. Dabei schneiden, wie bereits bekannt ist, in der That die sämmtlichen Hyperbeln die sämmtlichen Ellipsen *rechtwinklig*.

Hätte man in Gleichung (47.), um die *singuläre* Lösung zu erhalten, den Factor

$$t - \frac{e^2(p_1^2 + 1)}{4p_1^2} = 0, \quad \text{oder} \quad p_1^2(4t - e^2) = e^2 \tag{52.}$$

gesetzt, so würde man mit Rücksicht darauf, dass nach Gleichung (46.)

$$4p_1 z = p_1^2(4t - e^2) + e^2 \tag{53.}$$

ist, die Gleichungen

$$4p_1 z = 2e^2, \quad \text{oder} \quad 4p_1^2 z^2 = e^4, \quad \text{also} \quad 4z^2 = e^2(4t - e^2)$$

gefunden haben. Dies giebt, wenn man die Werthe von $z$ und $t$ aus den Gleichungen (41.) einsetzt,

$$(x^2 + y^2)^2 = e^2(2x^2 - 2y^2 - e^2),$$

oder

$$(x^2 - e^2)^2 = -y^2(2x^2 + y^2 + 2e^2). \tag{54.}$$

Die singuläre Lösung liefert also eine *imaginäre* Curve, denn Gleichung (54.) kann durch *reelle* Werthe von $x$ und $y$ nicht befriedigt werden.

Im Allgemeinen wird die Integration der für die orthogonalen Trajectorien gefundenen Differential-Gleichungen in geschlossener Form nicht ausführbar sein; deshalb ist es von Interesse, einige Fälle hervorzuheben, wo die Integration durch Trennung der Variabeln unmittelbar bewirkt werden kann. Die gegebene Curvenschaar habe die Gleichung

$$F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0, \tag{55.}$$

wobei $f(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$ und $g(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $y$ sein möge; dann wird

$$F_1 = f'(x), \quad F_2 = g'(y), \tag{56.}$$

so dass die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien (vergl. Formel Nr. 194 der Tabelle) in

$$-g'(y)dx + f'(x)dy = 0,$$

oder

$$\frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)} \tag{57.}$$

übergeht. Danach kann man ohne Weiteres die folgenden Aufgaben behandeln.

**Aufgabe 5.** Man soll die orthogonalen Trajectorien der Curven mit der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} - u = 0 \tag{58.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}, \quad g(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}, \tag{59.}$$

also

$$f'(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}, \quad g'(y) = \frac{\beta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta-1}, \tag{60.}$$

folglich findet man nach Gleichung (57.) für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$\frac{a^{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \frac{b^{\beta}}{\beta} \cdot \frac{dy}{y^{\beta-1}}. \tag{61.}$$

Die Fälle, wo $\alpha = 2$ oder $\beta = 2$ ist, muss man besonders untersuchen. Ist z. B. $\alpha = 2$ *und* $\beta = 2$, so geht Gleichung (61.) über in

$$a^2 \cdot \frac{dx}{x} = b^2 \cdot \frac{dy}{y}, \tag{62.}$$

folglich wird

$$b^2 \mathrm{l} y = a^2 \mathrm{l} x + \mathrm{l} C, \quad \text{oder} \quad y^{bb} = Cx^{aa}. \tag{63.}$$

Dagegen findet man unter der Voraussetzung, dass $\alpha \gtrless 2$, $\beta \gtrless 2$ ist, aus Gleichung (61.) durch Integration

$$a^{\alpha}\beta(\beta - 2)x^{2-\alpha} = b^{\beta}\alpha(\alpha - 2)y^{2-\beta} + C. \tag{64.}$$

Ist z. B.

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3},$$

und vertauscht man $u$ mit $u^{\frac{2}{3}}$, so geht Gleichung (58.) über in

(65.) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = u^{\frac{2}{3}},$$

d. h. die gegebene Curvenschaar ist eine Schaar *ähnlicher und ähnlich liegender Astroiden.*

Für die orthogonalen Trajectorien findet man dann aus Gleichung (64.)

(66.) $$x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = v^{\frac{4}{3}}.$$

Man kann das angegebene Verfahren auch dann noch anwenden, wenn die Gleichung der gegebenen Curvenschaar die Form

(67.) $$f(x) \,.\, g(y) - u = 0$$

hat, weil man sie durch die Gleichung

(68.) $$F(x, y, u) = \mathrm{l}[f(x)] + \mathrm{l}[g(y)] - \mathrm{l}u = 0$$

ersetzen kann. Dann wird

(69.) $$F_1 = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad F_2 = \frac{g'(y)}{g(y)},$$

so dass man aus Formel Nr. 194 der Tabelle für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$-\frac{g'(y)}{g(y)}dx + \frac{f'(x)}{f(x)}dy = 0,$$

oder

(70.) $$\frac{f(x)}{f'(x)}dx = \frac{g(y)}{g'(y)}dy$$

erhält.

**Aufgabe 6.** Man soll die orthogonalen Trajectorien für die *verallgemeinerten gleichseitigen Hyperbeln* mit der Gleichung

(71.) $$x^m y^n = u$$

bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

(72.) $$f(x) = x^m, \quad g(y) = y^n, \quad f'(x) = mx^{m-1}, \quad g'(y) = ny^{n-1},$$

folglich ergiebt sich aus Gleichung (70.) für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$2mydy = 2nxdx; \tag{73.}$$

die orthogonalen Trajectorien selbst haben daher die Gleichung

$$my^2 = nx^2 + C. \tag{74.}$$

Ist die Gleichung der gegebenen Curvenschaar in *Polarcoordinaten* ausgedrückt, geht man also von der Gleichung

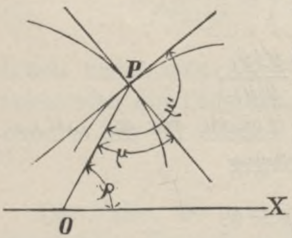
$$F(r, \varphi, u) = 0 \tag{75.}$$

aus, so ist der Winkel $\mu$, welchen die Tangente im Curvenpunkte $P$ mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, durch die Gleichung (vergl. D.-R., Formel Nr. 109 der Tabelle)

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} \tag{76.}$$

gegeben. Bezeichnet man vorläufig die Coordinaten einer orthogonalen Trajectorie mit $r'$, $\varphi'$ und den Winkel, welchen die Tangente dieser Curve mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, mit $\mu'$, so ist

Fig. 137.




$$\mathrm{tg}\mu' = \frac{r'd\varphi'}{dr'}. \tag{77.}$$

Nun soll $\mu' - \mu = 90^0$ sein, deshalb wird

$$\mathrm{tg}(\mu' - \mu) = \frac{\mathrm{tg}\,\mu' - \mathrm{tg}\,\mu}{1 + \mathrm{tg}\mu\,\mathrm{tg}\mu'} = \infty, \tag{78.}$$

oder

$$1 + \mathrm{tg}\mu\,\mathrm{tg}\mu' = 1 + \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{r'd\varphi'}{dr'} = 0. \tag{79.}$$

Setzt man hierbei der Kürze wegen

$$\frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial r} = F_1, \quad \frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial \varphi} = F_2, \tag{80.}$$

so folgt aus Gleichung (75.)

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{F_1(r, \varphi, u)}{F_2(r, \varphi, u)} = -\frac{F_1}{F_2}, \tag{81.}$$

folglich geht Gleichung (79.) über in

$$(82.)\qquad 1 - \frac{rF_1}{F_2} \cdot \frac{r'd\varphi'}{dr'} = 0;$$

da aber die Berührungspunkte $P$ und $P'$ zusammenfallen müssen, so wird

$$(83.)\qquad F_2 - F_1 r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Im Allgemeinen werden hierbei $F_1$ und $F_2$ noch den Parameter $u$ enthalten; indem man $u$ aus den Gleichungen (75.) und (83.) eliminirt, erhält man die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien.

**Aufgabe 7.** Die Gleichung

$$(84.)\qquad F(r, \varphi, u) = r^2\cos(2\varphi + 2u) - a^2\cos(2u) = 0$$

stellt eine Schaar von *gleichseitigen Hyperbeln* dar, welche den Nullpunkt zum gemeinsamen Mittelpunkte haben und sämmtlich durch den Punkt $A$ mit den Coordinaten $r = a$, $\varphi = 0$ hindurchgehen; man soll die orthogonalen Trajectorien bestimmen.

**Auflösung.** In diesem Falle ist

$$(85.)\qquad F_1 = 2r\cos(2\varphi + 2u), \quad F_2 = -2r^2\sin(2\varphi + 2u),$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

$$-2r^2\sin(2\varphi + 2u) - 2r^3\cos(2\varphi + 2u)\frac{d\varphi}{dr} = 0;$$

daraus findet man

$$(86.)\qquad \operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = -r\frac{d\varphi}{dr}.$$

Nun kann man Gleichung (84.) auf die Form

$$r^2\cos(2\varphi)\cos(2u) - r^2\sin(2\varphi)\sin(2u) - a^2\cos(2u) = 0,$$

oder

$$(87.)\qquad \operatorname{tg}(2u) = \frac{r^2\cos(2\varphi) - a^2}{r^2\sin(2\varphi)}$$

bringen, folglich wird

$$(88.)\qquad \operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi) + \operatorname{tg}(2u)}{1 - \operatorname{tg}(2\varphi)\operatorname{tg}(2u)}$$

$$= \frac{r^2\sin(2\varphi)\operatorname{tg}(2\varphi) + r^2\cos(2\varphi) - a^2}{r^2\sin(2\varphi) - \operatorname{tg}(2\varphi)[r^2\cos(2\varphi) - a^2]}$$

$$= \frac{r^2 - a^2\cos(2\varphi)}{a^2\sin(2\varphi)}.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (86.)

$$(89.)\qquad \frac{r^2 - a^2\cos(2\varphi)}{a^2\sin(2\varphi)} = -\frac{rd\varphi}{dr},$$

oder, wenn man

$$(90.)\qquad a^2\cos(2\varphi) = t,\quad \text{also}\quad -2a^2\sin(2\varphi)d\varphi = dt$$

setzt,

$$(91.)\qquad \frac{dt}{dr} + \frac{2t}{r} = 2r.$$

Weil dies eine *lineare Differential-Gleichung* erster Ordnung ist, setze man

$$(92.)\qquad t = vz,\quad \text{also}\quad dt = vdz + zdv,$$

wodurch man

$$(93.)\qquad v\frac{dz}{dr} + z\left(\frac{dv}{dr} + \frac{2v}{r}\right) = 2r$$

erhält. Indem man die Function $v$ so bestimmt, dass in dieser Gleichung der Coefficient von $z$ verschwindet, erhält man

$$(94.)\qquad \frac{dv}{v} = -\frac{2dr}{r},\quad \text{also}\quad \mathrm{l}v = -\mathrm{l}(r^2),\quad \text{oder}\quad v = \frac{1}{r^2};$$

deshalb geht Gleichung (93.) über in

$$(95.)\qquad \frac{1}{r^2}\frac{dz}{dr} = 2r,\quad \text{oder}\quad dz = 2r^3dr.$$

Dies giebt, wenn man die Integrations-Constante mit $\frac{1}{2}(a^4 - b^4)$ bezeichnet,

$$(96.)\qquad 2z = r^4 + a^4 - b^4,\quad \text{also}\quad 2vz = r^2 + \frac{a^4 - b^4}{r^2} = 2t,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (90.)

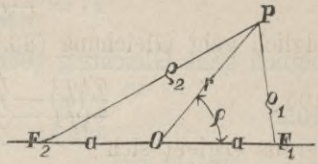
$$(97.)\qquad r^4 - 2a^2r^2\cos(2\varphi) + a^4 = b^4,$$

wobei $b$ der variable Parameter ist.

Diese Gleichung stellt eine Schaar von Curven dar, welche unter dem Namen „*Cassini*'sche Curven“ bekannt sind und die Eigenschaft besitzen, dass das Product der Abstände eines jeden Curvenpunktes von zwei festen Punkten mit den Coordinaten $x = \pm a$, $y = 0$ den constanten Werth $b^2$ besitzt. Sind nämlich

$F_1$ und $F_2$ die beiden festen Punkte, die „*Brennpunkte*“ genannt werden, und $\varrho_1$, $\varrho_2$ die nach einem beliebigen Curvenpunkte $P$ gezogenen „*Brennstrahlen*“, so wird nach dem Cosinussatze

Fig. 138.




(98.) $\varrho_1{}^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi, \quad \varrho_2{}^2 = r^2 + a^2 + 2ra\cos\varphi,$

also

$$(99.)\qquad \varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\varphi = b^4,$$

woraus sich ohne Weiteres Gleichung (97.) ergiebt.

Für $b = a$ reducirt sich die Gleichung der *Cassini*'schen Curve auf

$$(100.)\qquad r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$$

und stellt eine *Lemniscate* dar.

Auch bei Anwendung von Polarcoordinaten kann man Fälle hervorheben, in denen die Integration durch Trennung der Variabeln ohne Weiteres ausführbar ist. Hat nämlich die Gleichung der gegebenen Curvenschaar die Form

$$(101.)\qquad F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0,$$

wobei $f(r)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $r$ und $g(\varphi)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $\varphi$ sein möge, so wird

$$(102.)\qquad F_1 = f'(r), \quad F_2 = g'(\varphi),$$

so dass Gleichung (83.) übergeht in

$$(103.)\qquad g'(\varphi) - f'(r)\,.\,r^2\frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

oder

$$(103\text{a.})\qquad \frac{dr}{r^2\,.f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)}\,.$$

Hat die Gleichung der gegebenen Curvenschaar die Form

$$(104.)\qquad f(r)\,.\,g(\varphi) = u,$$

oder, wenn man $\mathrm{l}u$ mit $u_1$ bezeichnet,

$$(104\text{a.})\qquad F(r, \varphi, u_1) = \mathrm{l}[f(r)] + \mathrm{l}[g(\varphi)] - u_1 = 0,$$

so wird

$$F_1 = \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad F_2 = \frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)},$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

$$\frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)} - \frac{f'(r)}{f(r)} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dr} = 0; \tag{105.}$$

daraus ergiebt sich

$$\frac{f(r)dr}{r^2 . f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}. \tag{105a.}$$

### Beispiele.

**Aufgabe 8.** Durch die Gleichung

$$r^n \cos(m\varphi) - u = 0 \tag{106.}$$

ist eine Curvenschaar gegeben; man soll die orthogonalen Trajectorien bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$f(r) = r^n, \quad g(\varphi) = \cos(m\varphi), \tag{107.}$$

also

$$f'(r) = nr^{n-1}, \quad g'(\varphi) = -m\sin(m\varphi),$$

folglich geht Gleichung (105a.) über in

$$\frac{dr}{nr} = -\frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{m\sin(m\varphi)};$$

daraus ergiebt sich

$$m^2 \frac{dr}{r} = -mn \frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{\sin(m\varphi)}, \tag{108.}$$

also

$$m^2 \mathrm{l} r = -n \mathrm{l}[\sin(m\varphi)] + \mathrm{l} C,$$

$$r^{mm} \sin^n(m\varphi) = C. \tag{109.}$$

Für $m = n$ wird die Gleichung der gegebenen Curvenschaar

$$r^m \cos(m\varphi) = u \tag{110.}$$

und die der orthogonalen Trajectorien

$$r^m \sin(m\varphi) = v. \tag{111.}$$

Man erkennt unmittelbar die Gleichartigkeit der beiden Curvenschaaren.

Für $m = -n$ wird die Gleichung der gegebenen Curvenschaar, wenn man $\frac{1}{u}$ mit $u'$ bezeichnet,

$$r^m = u' \cos(m\varphi) \tag{112.}$$

und die der orthogonalen Trajectorien

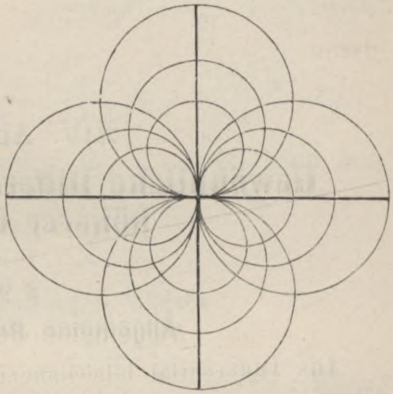
$$r^m = v \sin(m\varphi). \tag{113.}$$

Für $m = 1$ geht z. B. die Gleichung (112.) über in

$$r = u' \cos\varphi \tag{114.}$$

und stellt eine Schaar von Kreisen dar, welche sämmtlich durch den Nullpunkt hindurchgehen und ihren Mittelpunkt in der $X$-Axe haben, während der Durchmesser $u'$ verschiedene Werthe annimmt (Fig. 139). Die orthogonalen Trajectorien haben dann die Gleichung

Fig. 139.



$$r = v \sin\varphi \tag{115.}$$

und sind Kreise mit dem veränderlichen Durchmesser $v$, die gleichfalls durch den Nullpunkt hindurchgehen, ihren Mittelpunkt aber in der $Y$-Axe haben.

# XIV. Abschnitt.

# Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

## § 91.

## Allgemeine Bemerkungen.

Die Differential-Gleichungen höherer Ordnung bieten im Allgemeinen bei der Integration noch weit grössere Schwierigkeiten als die von der ersten Ordnung. Man kennt bisher nur eine geringe Anzahl von besonderen Fällen, in denen sich die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung in endlicher, geschlossener Form ausführen lässt. Einige von diesen Fällen mögen hier hervorgehoben werden.

## § 92.

## Integration der Differential-Gleichung $\frac{d^my}{dx^m} = \varphi(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 200.)

Ist die $m^{\text{te}}$ Ableitung von $y$ als Function von $x$ gegeben; gilt also die Gleichung

$$\frac{d^my}{dx^m} = \varphi(x), \tag{1.}$$

wobei $\varphi(x)$ eine bekannte Function der einzigen Veränderlichen $x$ sein möge, so kann man das allgemeine Integral sofort bestimmen. Es wird dann nämlich

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int\varphi(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1, \tag{2.}$$

$$(3.)\quad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$(4.)\quad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \int \varphi_2(x)dx + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3$$
$$= \varphi_3(x) + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(5.)\quad y = \int \varphi_{m-1}(x)dx + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{C_{m-1}x}{1!} + C_m.$$

Die $m$ Integrations-Constanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ kann man noch so bestimmen, dass die $m$ Grössen

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\quad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}},\ \ldots\ \frac{dy}{dx},\ y$$

für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Werthe

$$y_0^{(m-1)},\quad y_0^{(m-2)},\ \ldots\ y_0',\ y_0$$

annehmen.

Dabei geht $\int \varphi_{m-1}(x)dx$ aus $\varphi(x)$ durch $m$-malige Integration hervor und ist deshalb ein $m$-faches Integral

$$(6.)\quad \varphi_m(x) = \int \varphi_{m-1}(x)dx = \int dx \int dx \ldots \int \varphi(x)dx.$$

Diesen Ausdruck kann man aber noch vereinfachen durch partielle Integration, also durch die Formel

$$(7.)\quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Bezeichnet man nämlich in den Gleichungen (2.) bis (5.) die Integrationsgrenzen mit $x_0$ und $x$, die Integrations-Veränderliche aber mit $z$, so wird

$$(8.)\quad \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)dz,\quad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(z)dz,\quad \varphi_3(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_2(z)dz, \ldots .$$

Setzt man jetzt

$$(9.)\quad u = \varphi_1(x),\quad dv = dx,$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 152 der Tabelle

$$du = \varphi(x)dx,\quad v = x,$$

so erhält man nach Gleichung (7.)

$$(10.)\qquad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x)dx = x\varphi_1(x) - \int_{x_0}^{x} x\varphi(x)dx$$

$$= x\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz - \int_{x_0}^{x} z\varphi(z)dz,$$

folglich wird

$$(11.)\qquad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x}(x-z)\varphi(z)dz.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(12.)\qquad \varphi_3(x) = \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^2\varphi(z)dz,$$

$$(13.)\qquad \varphi_4(x) = \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^3\varphi(z)dz,$$

. . . . . . . . . . .

$$(14.)\qquad \varphi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln folgt durch den Schluss von $n$ auf $n+1$. Ist nämlich

$$(15.)\qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz,$$

oder

$$(15\text{a.})\qquad \varphi_n(x) =$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\Big[x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\varphi(z)dz - \binom{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x}z\varphi(z)dz + - \cdots$$

$$+ (-1)^k\binom{n-1}{k}x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz + \cdots \pm \int_{x_0}^{x}z^{n-1}\varphi(z)\,dz\Big],$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}z^k\varphi(z)dz,$$

so wird, da $\binom{n-1}{k} \cdot n = \binom{n}{k} \cdot (n-k)$ ist,

$$(16.)\quad \varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz.$$

Setzt man nun in Gleichung (7.)

$$(17.)\quad u = \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz, \quad dv = (n-k) x^{n-k-1} dx,$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 152 der Tabelle

$$(18.)\quad du = x^k \varphi(x) dx, \quad v = x^{n-k},$$

so erhält man durch partielle Integration

$$(19.)\quad \begin{aligned} &\int\limits_{x_0}^{x} (n-k) x^{n-k-1} dx \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz \\ &= x^{n-k} \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz - \int\limits_{x_0}^{x} x^n \varphi(x) dx \\ &= x^{n-k} \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz - \int\limits_{x_0}^{x} z^n \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Dies giebt

$$(20.)\quad \begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_n(x) dx &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} \int\limits_{x_0}^{x} z^k \varphi(z) dz \\ &\quad - \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} z^n \varphi(z) dz \,.\, \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} - (-1)^n \\ &= (1-1)^n - (-1)^n = -(-1)^n \end{aligned}$$

ist, so geht die Gleichung (20.) über in

$$(21.)\qquad \varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}\int_{x_0}^{x} z^k\varphi(z)dz$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^n\varphi(z)dz.$$

Dies ist aber eine Gleichung, welche aus Gleichung (15.) entsteht, indem man $n$ mit $n+1$ vertauscht.

Man kann daher das allgemeine Integral von Gleichung (1.) auf die Form

$$(22.)\quad y = \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{C_{m-1}x}{1!} + C_m$$

bringen.

## § 93.

## Differential-Gleichungen von der Form

$$F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0.$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 201 und 202.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung zunächst die Form

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

so bezeichne man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit $p$, also $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit $\frac{dp}{dx}$. Dadurch erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.)\qquad \frac{dp}{dx} = f(p), \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

folglich ist

$$(3.)\qquad x = \int\frac{dp}{f(p)} + C_1.$$

Ferner ist nach Gleichung (2.)

$$(4.)\qquad dy = pdx = \frac{pdp}{f(p)},$$

also

$$(5.)\qquad y = \int \frac{pdp}{f(p)} + C_2.$$

Durch die Gleichungen (3.) und (5.) sind $x$ und $y$ als Functionen von $p$ dargestellt. Durch Elimination von $p$ findet man daraus die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

integriren.

**Auflösung.** Aus Gleichung (6.) folgt

$$(7.)\quad \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad dy = \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(8.)\qquad x = \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \mathrm{l}(p + \sqrt{1 + p^2}) + C_1,$$

$$(9.)\qquad y = \int \frac{pdp}{\sqrt{1 + p^2}} = \sqrt{1 + p^2} + C_2.$$

Dies giebt, wenn man die Integrations-Constanten $C_1$ und $C_2$ bezw. mit $x_0$ und $y_0$ bezeichnet,

$$(10.)\qquad \sqrt{1 + p^2} = y - y_0, \quad p = \pm\sqrt{(y - y_0)^2 - 1},$$

$$(11.)\qquad x - x_0 = \mathrm{l}[y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}],$$

also

$$(12.)\qquad e^{x - x_0} = y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1},$$

$$(13.)\quad e^{-(x - x_0)} = \frac{1}{y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}} = y - y_0 \mp \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}.$$

Indem man die Gleichungen (12.) und (13.) addirt, erhält man schliesslich

$$(14.)\qquad 2(y - y_0) = e^{x - x_0} + e^{-(x - x_0)}.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Gleichung derjenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser die constante Länge $a$ hat.

**Auflösung.** Nach D.-R., Formel Nr. 107 der Tabelle ist

$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

deshalb müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$\pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = a\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder} \quad \pm(\sqrt{1+p^2})^3 = a\frac{dp}{dx} \tag{15.}$$

genügen. Daraus folgt

$$dx = \pm \frac{adp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}, \tag{16.}$$

oder, wenn man

$$p = \operatorname{tg} t, \quad \text{also} \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t} \tag{17.}$$

setzt,

$$dx = \pm\, a\cos t\,.\,dt, \quad dy = pdx = \pm\, a\sin t\,.\,dt. \tag{18.}$$

Dies giebt, wenn man die beiden Integrations-Constanten wieder mit $x_0$ und $y_0$ bezeichnet,

$$x - x_0 = \pm\, a\sin t = \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{19.}$$

$$y - y_0 = \mp\, a\cos t = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{20.}$$

Indem man die Gleichungen (19.) und (20.) in's Quadrat erhebt und addirt, erhält man

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \tag{21.}$$

Die gesuchten Curven sind demnach Kreise mit dem Halbmesser $a$; ihr Mittelpunkt hat die Coordinaten $x_0$, $y_0$, die als *willkürliche Integrations-Constanten* eingeführt worden sind. Der *Kreis* ist daher die einzige Curve, deren Krümmungshalbmesser eine constante Länge hat.

Ist eine Gleichung zwischen

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{dp}{dx} \tag{22.}$$

gegeben, welche nicht nach $q$, sondern nur nach $p$ auflösbar ist, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$p = \varphi(q), \tag{23.}$$

so findet man durch Differentiation nach $x$

$$q = \varphi'(q) \cdot \frac{dq}{dx}, \tag{24.}$$

also

$$dx = \frac{\varphi'(q)dq}{q}, \quad dy = pdx = \frac{\varphi(q)\varphi'(q)dq}{q}, \tag{25.}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(q)dq}{q} + C_1, \quad y = \int \frac{\varphi(q)\varphi'(q)dq}{q} + C_2. \tag{26.}$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse $q$ eliminirt, ergiebt sich die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$.

Das angegebene Verfahren kann man auch auf die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Es sei

$$u = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad v = \frac{d^my}{dx^m}, \quad \text{also} \quad \frac{du}{dx} = v, \tag{27.}$$

und die gegebene Differential-Gleichung habe die Form

$$v = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = f(u), \tag{28.}$$

dann wird

$$dx = \frac{du}{f(u)}, \quad x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1. \tag{29.}$$

Lässt sich diese Gleichung in Bezug auf $u$ auflösen, so findet man

$$u = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \varphi(x) \tag{30.}$$

und kann das in § 92 angegebene Verfahren anwenden.

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

$$u = \varphi(v), \tag{31.}$$

so findet man durch Differentiation nach $x$

$$v = \varphi'(v) \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{\varphi'(v)dv}{v}, \tag{32.}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(v)dv}{v} + C_1. \tag{33.}$$

Lässt sich diese Gleichung in Bezug auf $v$ auflösen, so kann man wieder das in § 92 angegebene Verfahren anwenden, nachdem man den gefundenen Werth von $v$ in Gleichung (31.) eingesetzt hat.

## § 94.

## Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^my}{dx^m}, \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right) = 0.$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 203—206.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y), \tag{1.}$$

so setze man wieder

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{p} = dx, \tag{2.}$$

dann geht Gleichung (1.) über in

$$\frac{dp}{dx} = f(y), \quad \text{oder} \quad dp = f(y)dx = \frac{f(y)dy}{p}, \tag{3.}$$

folglich wird

$$2pdp = 2f(y)dy, \tag{4.}$$

$$p^2 = 2\int f(y)dy + C_1. \tag{5.}$$

Aus dieser Gleichung folgt dann

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}}, \tag{6.}$$

also

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)dy}} + C_2. \tag{7.}$$

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2} \tag{8.}$$

integriren.

**Auflösung.** Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$dp = \frac{ydx}{a^2} = \frac{ydy}{a^2p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2pdp = 2ydy, \tag{9.}$$

so erhält man durch Integration

$$a^2p^2 = y^2 + C_1, \tag{10.}$$

oder

$$ady = \pm\sqrt{y^2 + C_1} \,.\, dx, \tag{11.}$$

$$dx = \pm\frac{ady}{\sqrt{y^2 + C_1}}, \tag{12.}$$

also nach Formel Nr. 22 der Tabelle

$$x = \pm a\,\mathrm{l}(y + \sqrt{y^2 + C_1}) + C_2. \tag{13.}$$

Setzt man hierbei die Integrations-Constante

$$C_2 = \mp a\,\mathrm{l}(2A),$$

so geht Gleichung (13.) über in

$$\pm\frac{x}{a} = \mathrm{l}\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + C_1}}{2A}\right), \tag{14.}$$

oder

$$2A\,.\,e^{\pm\frac{x}{a}} = y + \sqrt{y^2 + C_1}. \tag{15.}$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $y - \sqrt{y^2 + C_1}$, so erhält man

$$2A\,.\,e^{\pm\frac{x}{a}}(y - \sqrt{y^2 + C_1}) = -C_1, \tag{16.}$$

und wenn man die Integrations-Constante $C_1$ gleich $-4AB$ setzt,

$$2A\,.\,e^{\pm\frac{x}{a}}(y - \sqrt{y^2 + C_1}) = 4AB,$$

oder

$$2B\,.\,e^{\mp\frac{x}{a}} = y - \sqrt{y^2 + C_1}. \tag{17.}$$

Durch Addition der Gleichungen (15.) und (17.) ergiebt sich schliesslich

$$y = A \cdot e^{\pm \frac{x}{a}} + B \cdot e^{\mp \frac{x}{a}}. \tag{18.}$$

Dabei sind $A$ und $B$ zwei beliebige Constanten, welche die Integrations-Constanten ersetzen.

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2} \tag{19.}$$

integriren.

**Auflösung.** Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$dp = -\frac{ydx}{a^2} = -\frac{ydy}{a^2p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2pdp = -2ydy, \tag{20.}$$

so erhält man durch Integration

$$a^2p^2 = C_1 - y^2. \tag{21.}$$

Da hierbei $C_1$ nur *positive* Werthe haben kann, möge $C_1$ mit $c^2$ vertauscht werden. Dadurch erhält man

$$ap = a\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c^2 - y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm\frac{dx}{a}, \tag{22.}$$

folglich findet man durch Integration nach Formel Nr. 21 der Tabelle

$$\arcsin\left(\frac{y}{c}\right) = C_2 \pm \frac{x}{a}, \tag{23.}$$

oder

$$y = c\sin\left(C_2 \pm \frac{x}{a}\right) = c\sin C_2 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \pm c\cos C_2 \sin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{24.}$$

Setzt man noch

$$\pm c\cos C_2 = A, \quad c\sin C_2 = B, \tag{25.}$$

so geht Gleichung (24.) über in

$$y = A\sin\left(\frac{x}{a}\right) + B\cos\left(\frac{x}{a}\right). \tag{26.}$$

Dabei sind $A$ und $B$ wieder zwei beliebige Constanten, welche die Integrations-Constanten ersetzen.

Ist allgemein die Gleichung

$$(27.)\qquad F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

gegeben, so setze man

$$(28.)\qquad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = u, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{dv}{dx} = w$$

und bringe die gegebene Differential-Gleichung durch Auflösung nach $w$ auf die Form

$$(29.)\qquad w = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = f(u).$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $2v = 2\frac{du}{dx}$ multiplicirt, erhält man

$$(30.)\qquad 2v\frac{dv}{dx} = 2f(u)\frac{du}{dx}$$

und durch Integration

$$(31.)\qquad v^2 = 2\int f(u)du + C_1.$$

Dies giebt

$$(32.)\quad v = \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}, \text{ oder } dx = \pm\frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}},$$

$$(33.)\qquad x = \pm\int\frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_2.$$

Lässt sich diese Gleichung nach $u$ auflösen, so dass sie die Form

$$(34.)\qquad u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \varphi(x)$$

erhält, so kann man zur Ausführung der weiteren Integration das in § 92 angegebene Verfahren anwenden.

Lässt sich aber $u$ nicht explicite als Function von $x$ darstellen, so folgt aus Gleichung (32.)

$$(35.)\qquad udx = d\left(\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}\right) = \pm\frac{udu}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}},$$

also

$$(36.)\qquad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \pm\int\frac{udu}{\sqrt{C_1+2\int f(u)du}} + C_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $dx = \pm\dfrac{du}{\sqrt{C_1+2\int f(u)du}}$ und integrirt auf beiden Seiten, so erhält man

$$(37.)\quad \frac{d^{m-4}y}{dx^{m-4}} = \pm\int\frac{du}{\sqrt{C_1+2\int f(u)du}}\left[\pm\int\frac{udu}{\sqrt{C_1+2\int f(u)du}} + C_3\right] + C_4.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und schliesslich auch $y$ als Function von $u$ darstellen.

## § 95.

## Fälle, in denen sich die Ordnung der Differential-Gleichung erniedrigen lässt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 207 bis 209.)

Enthält die Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung die Function $y$ und die $n-1$ ersten Ableitungen gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(1.)\qquad F\left(x,\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \ldots\ \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man sie auf eine Differential-Gleichung $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung reduciren, indem man

$$(2.)\qquad \frac{d^ny}{dx^n} = u,\quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{du}{dx}, \ldots\ \frac{d^my}{dx^m} = \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}$$

einführt. Die vorgelegte Differential-Gleichung wird dadurch auf die Form

$$(3.)\qquad F\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots\ \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}\right) = 0$$

gebracht.

### Beispiel.

**Aufgabe 1.** Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse zu der zugehörigen Abscisse steht.

**Auflösung.** Bezeichnet man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit $p$, so müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(4.)\qquad \varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{a^2}{2x},\ \text{oder}\ \pm(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{2x}\cdot\frac{dp}{dx}$$

genügen. Daraus folgt, wenn man

$$(5.)\qquad p = \operatorname{tg} t,\quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt,

$$(6.)\qquad \pm 2x\,dx = \frac{a^2 dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = a^2\cos t\,.\,dt,$$

also durch Integration

$$(7.)\qquad \pm x^2 + C_1 = a^2\sin t = \frac{a^2 p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder

$$(8.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{C_1 \pm x^2}{\sqrt{a^4-(C_1\pm x^2)^2}},$$

daraus folgt

$$(9.)\qquad y = \pm\int\frac{(C_1\pm x^2)dx}{\sqrt{a^4-(C_1\pm x^2)^2}} + C_2.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, heisst „die *elastische Linie*“, weil ein elastischer Stab, der an dem einen Ende befestigt und an dem anderen Ende belastet ist, diese Form annimmt.

Enthält die Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung die unabhängige Veränderliche $x$ gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(10.)\qquad F\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \dots\ \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man die Ordnung wieder um eine Einheit herabdrücken, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und $y$ als unabhängige Veränderliche einführt. Man erhält dann

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}, \tag{11.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\,\frac{d^2p}{dy^2}\right]p, \tag{12.}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Dadurch geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$G\left(y,\, p,\, \frac{dp}{dy},\, \cdots \frac{d^{m-1}p}{dy^{m-1}}\right) = 0. \tag{13.}$$

## Beispiele.

**Aufgabe 2.** Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale.

**Auflösung.** Nach D.-R., Formel Nr. 100 und 107 der Tabelle sind die Ausdrücke für die Normale und für den Krümmungshalbmesser

$$N = y\frac{ds}{dx} \quad \text{und} \quad \varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{14.}$$

Die gesuchten Curven müssen daher der Differential-Gleichung

$$\pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y\,\frac{ds}{dx}, \quad \text{oder} \quad \pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = y\,\frac{d^2y}{dx^2} \tag{15.}$$

genügen. Indem man

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy} \tag{16.}$$

setzt, erhält man

$$\pm(1 + p^2) = yp \cdot \frac{dp}{dy}, \quad \text{oder} \quad \pm\frac{2dy}{y} = \frac{2p\,dp}{1+p^2}. \tag{17.}$$

Daraus findet man durch Integration

$$\pm[\mathrm{l}(y^2) + \mathrm{l}C_1] = \mathrm{l}(1 + p^2). \tag{18.}$$

Berücksichtigt man in Gleichung (18.) zuerst das *obere* Zeichen, so wird

$$(19.)\qquad 1+p^2=C_1y^2,\quad \text{oder } p=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y^2-1}.$$

Da hierbei $C_1$ nur *positive* Werthe haben kann, so setze man

$$(20.)\qquad C_1=\frac{1}{a^2},$$

dann geht Gleichung (19.) über in

$$(21.)\qquad p=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{a}\sqrt{y^2-a^2},\quad \text{oder}\quad \pm\frac{dx}{a}=\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Dies giebt durch Integration

$$(22.)\qquad \pm\frac{x-x_0}{a}=\mathrm{l}(y+\sqrt{y^2-a^2})-\mathrm{l}a=\mathrm{l}\left(\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right),$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die Integrations-Constante $\mp\frac{x_0}{a}$ hinzugefügt ist. Daraus folgt

$$(23.)\qquad a\,.\,e^{\pm\frac{x-x_0}{a}}=y+\sqrt{y^2-a^2},$$

und wenn man beide Seiten der Gleichung mit $y-\sqrt{y^2-a^2}$ multiplicirt,

$$a\,.\,e^{\pm\frac{x-x_0}{a}}(y-\sqrt{y^2-a^2})=a^2,$$

oder

$$(24.)\qquad a\,.\,e^{\mp\frac{x-x_0}{a}}=y-\sqrt{y^2-a^2}.$$

Durch Addition der Gleichungen (23.) und (24.) erhält man

$$(25.)\qquad y=\frac{a}{2}\left(e^{\pm\frac{x-x_0}{a}}+e^{\mp\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

Dies ist die Gleichung der ***Kettenlinie***, bei der, wie schon in D.-R., § 89, Aufgabe 4 gezeigt wurde, der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale; der Krümmungshalbmesser hat dabei aber die entgegengesetzte Richtung wie die Normale. Die willkürlichen Integrations-Constanten sind in Gleichung (25.) durch die beliebigen Grössen $a$ und $x_0$ vertreten.

Berücksichtigt man in Gleichung (18.) das *untere* Zeichen, so wird

$$(26.)\qquad 1 + p^2 = \frac{1}{C_1 y^2}\cdot$$

Auch hier möge die Integrations-Constante $C_1$, da sie nur positive Werthe haben kann, mit $\frac{1}{a^2}$ vertauscht werden. Dadurch erhält man

$$(27.)\qquad 1 + p^2 = \frac{a^2}{y^2}, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{y}\sqrt{a^2 - y^2},$$

$$(28.)\qquad \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm\, dx,$$

$$(29.)\qquad \pm(x - x_0) = -\sqrt{a^2 - y^2}, \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 + y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Halbmesser $a$, dessen Mittelpunkt in der $X$-Axe liegt. Der Krümmungshalbmesser ist gleich $a$ und hat dieselbe Länge und dieselbe Richtung wie die Normale. Auch hier vertreten die beliebigen Grössen $a$ und $x_0$ die beiden Integrations-Constanten.

Die gestellte Aufgabe hat *zwei* verschiedene Lösungen, die man erhält, jenachdem der Krümmungshalbmesser *dieselbe* oder die *entgegengesetzte* Richtung hat wie die Normale.

**Aufgabe 3.** Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser doppelt so lang ist wie die zugehörige Normale.

**Auflösung.** Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.) müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(30.)\qquad \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2y\frac{ds}{dx}, \quad \text{oder} \quad \pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 2y\frac{d^2y}{dx^2}$$

genügen. Indem man wieder

$$(31.)\qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

setzt, findet man

$$(32.)\qquad \pm(1 + p^2) = 2yp \cdot \frac{dp}{dy}, \quad \text{oder} \quad \pm\frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1 + p^2}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(33.)\qquad \pm\, \mathrm{l}y + \mathrm{l}C = \mathrm{l}(1 + p^2).$$

Berücksichtigt man zunächst das *obere* Zeichen, so wird

$$(34.)\qquad 1 + p^2 = Cy, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy - 1},$$

$$(35.)\qquad \pm\, dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy-1}}, \quad \text{also} \quad \pm C(x - x_0) = \int \frac{d(Cy-1)}{\sqrt{Cy-1}} = 2\sqrt{Cy-1},$$

$$C^2(x - x_0)^2 = 4Cy - 4,$$

oder, wenn man die Integrations-Constante $C$ mit $\frac{2}{a}$ vertauscht,

$$(36.)\qquad (x - x_0)^2 = 2ay - a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel* mit dem willkürlichen Parameter $a$, deren Leitlinie zur $X$-Axe gemacht ist. Die $Y$-Axe liegt noch ganz beliebig, weil $x_0$ die zweite willkürliche Integrations-Constante ist.

Hierbei hat der Krümmungshalbmesser die entgegengesetzte Richtung wie die Normale.

Berücksichtigt man in Gleichung (33.) das *untere* Zeichen, so wird

$$(37.)\qquad 1 + p^2 = \frac{C}{y}, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C-y}{y}} = \pm\sqrt{\frac{C}{y} - 1},$$

$$(38.)\qquad \pm\, dx = dy\sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Da hierbei $\frac{C}{y} - 1 > 0$, oder $0 < \frac{y}{C} < 1$ sein muss, wenn die Wurzelgrösse *reell* sein soll, so setze man

$$(39.)\qquad y = C\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{C}{2}(1 - \cos t),$$

also

$$(40.)\qquad C - y = C\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{C}{2}(1 + \cos t),$$

$$(41.)\quad \sqrt{\frac{y}{C-y}} = \mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}\right),\quad dy = \frac{C}{2}\sin t\,.\,dt = C\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

folglich wird

$$(42.)\qquad \pm\, dx = C\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{C}{2}(1 - \cos t)dt,$$

$$(43.)\qquad x - x_0 = \pm\frac{C}{2}(t - \sin t).$$

Vertauscht man $t$ mit $-t$, so ändert sich Gleichung (39.) gar nicht, während in Gleichung (43.) sich nur das Vorzeichen der rechten Seite umkehrt. Man erhält daher dieselbe Curve, gleichviel ob man in den Gleichungen (37.), (38.) und (43.) das obere oder das untere Vorzeichen nimmt; deshalb kann man das doppelte Vorzeichen fortlassen. Indem man schliesslich noch $C$ mit $2a$ vertauscht, gehen die Gleichungen (43.) und (39.) über in

$$(44.)\qquad x - x_0 = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t).$$

Dies sind die Gleichungen der *Cykloide*, für welche schon in D.-R., § 83, Aufgabe 5 gezeigt wurde, dass der Krümmungshalbmesser die doppelte Länge und dieselbe Richtung besitzt wie die Normale.

Auch diese Aufgabe hat zwei verschiedene Lösungen, die sich ergeben, jenachdem der Krümmungshalbmesser dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die Normale.

**Aufgabe 4.** Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser dem Quadrate der zugehörigen Ordinate proportional ist.

**Auflösung.** Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.) und (16.) müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(45.)\qquad \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ay^2,\quad \text{oder}\quad \pm(\sqrt{1+p^2})^3 = ay^2\,.\,p\frac{dp}{dy}$$

genügen. Dies giebt

$$(46.)\qquad \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{apdp}{(\sqrt{1+p^2})^3} = \pm \frac{a}{2}\,\frac{d(1+p^2)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also durch Integration

$$(47.)\quad -\frac{1}{y} = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C, \quad \text{oder} \quad \frac{Cy+1}{y} = \pm \frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich wird

$$(48.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{(a^2-C^2)y^2 - 2Cy - 1}}{Cy+1},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(49.)\qquad a^2 - C^2 = \pm A^2$$

setzt,

$$(50.)\qquad \pm dx = \frac{(Cy+1)dy}{\sqrt{\pm A^2y^2 - 2Cy - 1}}.$$

Gilt in Gleichung (49.) das *obere* Zeichen, so setze man

$$(51.)\qquad A^2y = t + C, \quad \text{also} \quad t = A^2y - C,$$

dann wird

$$(52.)\quad Cy + 1 = \frac{Ct + a^2}{A^2},\ dy = \frac{dt}{A^2},\ \sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1} = \frac{1}{A}\sqrt{t^2 - a^2},$$

folglich geht Gleichung (50.) über in

$$(53.)\qquad \pm dx = \frac{(Ct + a^2)dt}{A^3\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 und 23 der Tabelle

$$(54.)\quad \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \sqrt{t^2 - a^2},\quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \mathrm{l}(t + \sqrt{t^2 - a^2}),$$

deshalb findet man aus Gleichung (53.) durch Integration

$$(55.)\quad \pm A^3(x - C_2) = AC\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1} \\ + a^2\mathrm{l}(A^2y - C + A\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1}).$$

Eine besonders einfache Form erhält die Lösung, wenn man die Integrations-Constante

$$(56.)\qquad C = 0, \quad \text{also} \quad A = a$$

setzt, dann geht Gleichung (55.) über in

$$\pm a(x - C_2) = \mathrm{l}(a^2y + a\sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$a(ay + \sqrt{a^2y^2 - 1}) = e^{\pm a(x - C_2)}. \tag{57.}$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}$ multiplicirt, erhält man

$$a = e^{\pm a(x - C_2)} \cdot (ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$a(ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}) = a^2 \cdot e^{\mp a(x - C_2)}. \tag{58.}$$

Durch Addition der Gleichungen (57.) und (58.) erhält man

$$2a^2y = e^{\pm a(x - C_2)} + a^2 \cdot e^{\mp a(x - C_2)}. \tag{59.}$$

Setzt man jetzt noch

$$aC_2 = ax_0 \mp \mathrm{l}a,$$

so wird

$$\begin{cases} e^{\pm a(x - C_2)} = e^{\pm a(x - x_0) + \mathrm{l}a} = a \cdot e^{\pm a(x - x_0)}, \\ e^{\mp a(x - C_2)} = e^{\mp a(x - x_0) - \mathrm{l}a} = \dfrac{1}{a} \cdot e^{\mp a(x - x_0)}, \end{cases} \tag{60.}$$

folglich geht Gleichung (59.) über in

$$2ay = e^{\pm a(x - x_0)} + e^{\mp a(x - x_0)}. \tag{61.}$$

Dies giebt, wenn man $a$ mit $\frac{1}{c}$ vertauscht,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{-\frac{x - x_0}{c}}\right). \tag{62.}$$

Das ist die Gleichung der *Kettenlinie.*

Wird die Integrations-Constante $C$ so bestimmt, dass in Gleichung (49.) das *untere* Zeichen gilt, ist also

$$a^2 - C^2 = -A^2, \quad \text{oder} \quad A = \sqrt{C^2 - a^2}, \tag{63.}$$

so setze man

$$A^2y = t - C, \quad \text{also} \quad t = A^2y + C, \tag{64.}$$

dann wird

$$(65.)\quad \begin{cases} Cy + 1 = \dfrac{Ct - a^2}{A^2}, \quad dy = \dfrac{dt}{A^2}, \\ \sqrt{-A^2y^2 - 2Cy - 1} = \dfrac{1}{A}\sqrt{a^2 - t^2}, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (50.) über in

$$(66.)\qquad \pm dx = \frac{(Ct - a^2)dt}{A^3\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 25 und 21 der Tabelle

$$(67.)\quad \int\frac{tdt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\sqrt{a^2 - t^2}, \int\frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right),$$

deshalb findet man aus Gleichung (66.) durch Integration

$$(68.)\quad \pm A^3(x - x_0) = -AC\sqrt{-A^2y^2 - 2Cy - 1} - a^2\arcsin\left(\frac{A^2y + C}{a}\right).$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(69.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

integriren.

**Auflösung.** Setzt man wieder

$$(70.)\qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

so erhält man aus Gleichung (69.)

$$(71.)\qquad p\frac{dp}{dy} = f(y) \cdot p^2, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = f(y)dy.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(72.)\qquad \mathrm{l}p = \int f(y)dy + \mathrm{l}C_1,$$

$$(73.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = C_1 \cdot e^{\int f(y)dy},$$

$$(74.)\qquad C_1dx = e^{-\int f(y)dy} . dy,$$

also

$$(75.)\qquad C_1x = \int e^{-\int f(y)dy} . dy + C_2.$$

Ist die vorgelegte Differential-Gleichung in Bezug auf die Grössen

$$(76.)\qquad y,\ y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ y^{(m)} = \frac{d^my}{dx^m}$$

*homogen* von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, hat sie also die Form

$$(77.)\quad F(x, y, y', y'', \ldots y^{(m)}) = y^n F\left(x, \frac{y}{y}, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots \frac{y^{(m)}}{y}\right) = 0,$$

so führe man eine neue Function $u$ durch die Gleichung

$$(78.)\qquad y' = yu, \quad \text{oder} \quad \mathrm{l}y = \int u dx, \quad y = e^{\int u dx}$$

ein, dann wird

$$(79.)\qquad y'' = y'u + y\frac{du}{dx} = y\left(\frac{du}{dx} + u^2\right),$$

$$(80.)\qquad y''' = y'\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) + y\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2u\frac{du}{dx}\right)$$

$$= y\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u\frac{du}{dx} + u^3\right),$$

. . . . . . . . . . . . . .

Setzt man diese Werthe in Gleichung (77.) ein, so erhält man eine Differential-Gleichung von der Form

$$(81.)\qquad G\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

die nur noch von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

## Beispiel.

**Aufgabe 6.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(82.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Mit Rücksicht auf die Gleichungen (78.) und (79.) kann man die vorgelegte Differential-Gleichung auf die Form

$$y\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) + \frac{yu}{x} - \frac{y}{x^2} = 0,$$

oder

$$(83.)\qquad (x^2u^2 + xu - 1)dx + x^2du = 0$$

bringen. Diese Differential-Gleichung ist nur noch von der *ersten* Ordnung und enthält $u$ nur in der Verbindung $xu$; deshalb setze man

$$(84.)\qquad xu = z,\quad \text{oder}\quad u = \frac{z}{x},\quad du = \frac{xdz - zdx}{x^2}.$$

Dadurch geht Gleichung (83.) über in

$$(z^2 + z - 1)dx + xdz - zdx = 0,$$

oder

$$(85.)\qquad (z^2 - 1)dx + xdz = 0,\quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z^2 - 1} = 0,$$

folglich erhält man durch Integration

$$(86.)\qquad \mathrm{l}(x^2) + \mathrm{l}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \mathrm{l}C,$$

$$(87.)\quad x^2(z - 1) = C(z + 1),\ \text{oder}\ x^2(xu - 1) = C(xu + 1).$$

Dies giebt

$$(88.)\qquad u = \frac{y'}{y} = \frac{dy}{ydx} = \frac{x^2 + C}{x(x^2 - C)}.$$

Hieraus findet man durch Partialbruchzerlegung

$$(89.)\qquad \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x - \sqrt{C}} + \frac{1}{x + \sqrt{C}} - \frac{1}{x}\right)dx$$

und durch Integration

$$(90.)\qquad \mathrm{l}y = \mathrm{l}(x^2 - C) - \mathrm{l}x + \mathrm{l}C_1,$$

$$(91.)\qquad y = C_1\,\frac{x^2 - C}{x}.$$

Setzt man hierbei noch

$$(92.)\qquad C_1 = A,\quad -CC_1 = B,$$

so geht Gleichung (91.) über in

$$(93.)\qquad y = Ax + Bx^{-1}.$$

## XV. Abschnitt.

# Lineare Differential-Gleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung.

### § 96.

### Allgemeine Bemerkungen.

Eine Differential-Gleichung von der Form

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots$$
$$+ f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x),$$

in welcher $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ und $\varphi(x)$ gegebene Functionen von $x$ sind, heisst *„eine lineare Differential-Gleichung* $m^{\text{ter}}$ *Ordnung"*. Dabei soll es auch zulässig sein, dass sich die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_m(x)$ auf Constante reduciren, die dann mit $f_1, f_2, \ldots f_m$ bezeichnet werden mögen. In diesem Falle erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x).$$

Wird die Function $\varphi(x)$ identisch gleich Null, hat also die lineare Differential-Gleichung die Form

$$(3.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots$$
$$+ f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = 0,$$

so heisst sie *„homogen"*. Es wird später gezeigt werden, dass die Integration der *nicht homogenen* Differential-Gleichung (1.) immer zurückgeführt werden kann auf die Integration der *homogenen* linearen Differential-Gleichung (3.), welche aus Gleichung

(1.) hervorgeht, indem man das Glied $\varphi(x)$ auf der rechten Seite der Gleichung gleich Null setzt.

Es sollen deshalb zunächst die *homogenen* linearen Differential-Gleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung behandelt werden.

## § 97.
## Homogene lineare Differential-Gleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr 210 bis 212.)

**Satz 1.** *Hat die gegebene homogene lineare Differential-Gleichung*

$$(1.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_m(x)\,.\,y=0$$

*n particuläre Integrale* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *so ist auch*

$$(2.)\qquad y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

*ein Integral dieser Gleichung, welche Werthe die Constanten* $C_1$, $C_2, \ldots C_n$ *auch annehmen mögen.*

**Beweis.** Aus Gleichung (2.) folgt

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=C_1\dfrac{dy_1}{dx}+C_2\dfrac{dy_2}{dx}+\cdots+C_n\dfrac{dy_n}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=C_1\dfrac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\dfrac{d^2y_2}{dx^2}+\cdots+C_n\dfrac{d^2y_n}{dx^2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d^my}{dx^m}=C_1\dfrac{d^my_1}{dx^m}+C_2\dfrac{d^my_2}{dx^m}+\cdots+C_n\dfrac{d^my_n}{dx^m}. \end{cases}$$

Addirt man die Gleichungen (2.) und (3.), nachdem man sie bezw. mit $f_m(x), f_{m-1}(x), \ldots f_2(x), f_1(x)$ und 1 multiplicirt hat, so erhält man

$$\begin{aligned}(4.)\qquad &\frac{d^my}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_m(x)\,.\,y \\ &=C_1\Big[\frac{d^my_1}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}+\cdots+f_{m-1}(x)\frac{dy_1}{dx}+f_m(x)\,.\,y_1\Big] \\ &+C_2\Big[\frac{d^my_2}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}+\cdots+f_{m-1}(x)\frac{dy_2}{dx}+f_m(x)\,.\,y_2\Big] \\ &+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+C_n\Big[\frac{d^my_n}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y_n}{dx^{m-1}}+\cdots+f_{m-1}(x)\frac{dy_n}{dx}+f_m(x)\,.\,y_n\Big]=0.\end{aligned}$$

**Satz 2.** *Kennt man $m$ particuläre Integrale $y_1, y_2, \dots y_m$ und kann man in*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_my_m \tag{5.}$$

*die Constanten $C_1, C_2, \dots C_m$ so bestimmen, dass*

$$y,\ y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\ y^{(m-1)} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \tag{6.}$$

*für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerthe $y_0, y_0'$, $y_0'', \dots y_0^{(m-1)}$ annehmen, so ist $y$ das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.*

Dass $y$ ein Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist, folgt schon aus Satz 1, und da man die Anfangswerthe $y_0, y_0', y_0'', \dots y_0^{(m-1)}$, welche dem Werthe $x = x_0$ entsprechen, nach Voraussetzung noch beliebig annehmen kann, so ist $y$ auch das *allgemeine* Integral.

Es ist nur noch zu erklären, weshalb diese Voraussetzung hinzugefügt werden muss, obwohl in Gleichung (5.) scheinbar bereits $m$ willkürliche Constanten $C_1, C_2, \dots C_m$ enthalten sind. Die Grössen $y_1, y_2, \dots y_m$ sind möglicher Weise nicht von einander unabhängig, es kann z. B. zwischen $y_1$, $y_2$ und $y_3$ die lineare Gleichung

$$y_3 = ky_1 + ly_2 \tag{7.}$$

bestehen. Dann ist aber Gleichung (5.), nämlich

$$y = (C_1 + kC_3)y_1 + (C_2 + lC_3)y_2 + C_4y_4 + \cdots + C_my_m, \tag{8.}$$

kein *allgemeines* Integral, da in diesem Ausdrucke nur $m - 1$ willkürliche Constanten enthalten sind. Umgekehrt kann man auch zeigen, dass die Grössen $y_1, y_2, \dots y_m$ durch eine lineare Gleichung verbunden sind, wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist; der Beweis dieser Behauptung möge hier aber übergangen werden.

Nach Formel Nr. 209 der Tabelle kann man die Ordnung einer Differential-Gleichung, welche in Bezug auf $y, y', y'', \dots y^{(m)}$ homogen ist, um eine Einheit erniedrigen, indem man

$$\frac{y'}{y} = u, \quad \frac{y''}{y} = \frac{du}{dx} + u^2, \quad \frac{y'''}{y} = \frac{d^2u}{dx^2} + 3u\frac{du}{dx} + u^3, \dots \tag{9.}$$

setzt. Dies giebt

**Satz 3.** *Die Ordnung einer homogenen linearen Differential-Gleichung kann stets um eine Einheit erniedrigt werden.*

Durch die angegebene Substitution erhält also Gleichung (1.) die Form

$$\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\cdots+[u^m+f_1(x)u^{m-1}+\cdots+f_{m-1}(x)u+f_m(x)]=0. \tag{10.}$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nicht mehr homogen und im Allgemeinen auch nicht mehr linear, aber sie kann doch zu *particulären* Integralen führen. Hat z. B. die Gleichung

$$F(u)=u^m+f_1(x)u^{m-1}+f_2(x)u^{m-2}+\cdots+f_{m-1}(x)u+f_m(x)=0 \tag{11.}$$

Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_n$, die von $x$ unabhängig sind, so werden

$$u=r_1,\quad u=r_2, \ldots u=r_n \tag{12.}$$

*particuläre* Integrale der Gleichung (10.) sein, weil

$$\frac{dr_1}{dx}=0,\quad \frac{dr_2}{dx}=0, \cdots \quad \frac{dr_n}{dx}=0 \tag{13.}$$

ist. Die zugehörigen Werthe von $y=e^{\int u dx}$ sind dann

$$y_1=e^{r_1x},\quad y_2=e^{r_2x}, \ldots y_n=e^{r_nx}. \tag{14.}$$

Dieser Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Grössen $f_1(x)=f_1, f_2(x)=f_2, \ldots f_m(x)=f_m$ sämmtlich von $x$ unabhängig sind. Die Gleichung

$$F(u)=u^m+f_1u^{m-1}+f_2u^{m-2}+\cdots+f_{m-1}u+f_m=0 \tag{15.}$$

hat dann lauter constante Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$. Sind diese Wurzeln zunächst sämmtlich von einander verschieden, so findet man aus den $m$ particulären Integralen

$$y_1=e^{r_1x},\quad y_2=e^{r_2x}, \ldots y_m=e^{r_mx} \tag{16.}$$

der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) ohne Weiteres das *allgemeine* Integral

$$y=C_1 . e^{r_1x}+C_2 . e^{r_2x}+\cdots+C_m . e^{r_mx}. \tag{17.}$$

Der gefundene Ausdruck ist in der That das *allgemeine* Integral, denn man kann beweisen, dass durch passende Wahl der Constanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ die $m$ Grössen $y, y', y'', \ldots y^{(m-1)}$ für $x=x_0$ beliebig vorgeschriebene Anfangswerthe $y_0, y_0', y_0''$, $\ldots y_0^{(m-1)}$ annehmen. Aus Gleichung (17.) folgen nämlich die Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} y = C_1 \quad . e^{r_1 x} + C_2 \quad . e^{r_2 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x}, \\ y' = C_1 r_1 . e^{r_1 x} + C_2 r_2 . e^{r_2 x} + \cdots + C_m r_m . e^{r_m x}, \\ y'' = C_1 r_1^2 . e^{r_1 x} + C_2 r_2^2 . e^{r_2 x} + \cdots + C_m r_m^2 . e^{r_m x}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y^{(m-1)} = C_1 r_1^{m-1} . e^{r_1 x} + C_2 r_2^{m-1} . e^{r_2 x} + \cdots + C_m r_m^{m-1} . e^{r_m x}, \end{cases}$$

welche zunächst für $x = 0$ in

$$(19.)\quad \begin{cases} y_0 = C_1 \quad + C_2 \quad + \cdots + C_m, \\ y_0' = C_1 r_1 \quad + C_2 r_2 \quad + \cdots + C_m r_m, \\ y_0'' = C_1 r_1^2 \quad + C_2 r_2^2 \quad + \cdots + C_m r_m^2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_0^{(m-1)} = C_1 r_1^{m-1} + C_2 r_2^{m-1} + \cdots + C_m r_m^{m-1} \end{cases}$$

übergehen sollen. Bildet man die Function

$$(20.)\qquad \frac{F(r)}{r - r_1} = (r - r_2)(r - r_3) \ldots (r - r_m) = F_1(r),$$

so hat $F_1(r)$ die Form

$$(20\text{a.})\qquad F_1(r) = r^{m-1} + k_1 r^{m-2} + \cdots + k_{m-2} r + k_{m-1}.$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (19.) bezw. mit $k_{m-1}$, $k_{m-2}, \ldots k_1$, 1, so erhält man durch Addition

$$(21.)\ k_{m-1} y_0 + k_{m-2} y_0' + k_{m-3} y_0'' + \cdots + k_1 y_0^{(m-2)} + y_0^{(m-1)} = C_1 F_1(r_1),$$

denn die Glieder

$$C_2 F_1(r_2),\quad C_3 F_1(r_3),\ \ldots C_m F_1(r_m)$$

werden sämmtlich gleich Null. Dabei ist bekanntlich

$$(22.)\qquad F_1(r_1) = \lim_{r = r_1} \frac{F(r) - F(r_1)}{r - r_1} = F'(r_1).$$

In ähnlicher Weise, wie sich der Werth von $C_1$ aus Gleichung (21.) ergiebt, findet man auch die Werthe von $C_2$, $C_3$, $\ldots C_m$. Vertauscht man $x$ mit $x - x_0$, so kann man in gleicher Weise die Constanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ so bestimmen, dass dem Werthe $x = x_0$ beliebige Anfangswerthe der $m$ Grössen $y$, $y'$, $y''$, $\ldots y^{(m-1)}$ zugeordnet sind. Deshalb ist Gleichung (17.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

**Beispiel.**

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = 0 \tag{23.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$F(u) = u^2 - \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{1}{a}, \quad r_2 = -\frac{1}{a}, \tag{24.}$$

folglich wird in Uebereinstimmung mit Aufgabe 1 in § 94

$$y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}. \tag{25.}$$

Hat die Gleichung $F(u) = 0$ auch complexe Wurzeln, so bleibt die gegebene Lösung noch richtig, sie nimmt aber eine complexe Form an. Dem Endresultate kann man jedoch leicht wieder eine reelle Form geben, wenn man beachtet, dass die complexen Wurzeln paarweise conjugirt auftreten. Ist z. B.

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi, \tag{26.}$$

so wird

$$\begin{aligned} C_1 \,.\, e^{r_1 x} + C_2 \,.\, e^{r_2 x} &= C_1 \,.\, e^{ax+bix} + C_2 \,.\, e^{ax-bix} \\ &= e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos(bx) + i(C_1 - C_2)\sin(bx)], \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$C_1 + C_2 = A, \quad i(C_1 - C_2) = B \tag{27.}$$

setzt,

$$C_1 \,.\, e^{r_1 x} + C_2 \,.\, e^{r_2 x} = e^{ax}[A\cos(bx) + B\sin(bx)]. \tag{28.}$$

**Beispiele.**

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2} \tag{29.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$F(u) = u^2 + \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{i}{a}, \quad r_2 = -\frac{i}{a}, \tag{30.}$$

folglich wird in Uebereinstimmung mit Aufgabe 2 in § 94

$$(31.)\quad y = C_1 . e^{\frac{xi}{a}} + C_2 . e^{-\frac{xi}{a}} = (C_1 + C_2)\cos\left(\frac{x}{a}\right) + i(C_1 - C_2)\sin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= A\cos\left(\frac{x}{a}\right) + B\sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(32.)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$(33.)\quad F(u) = u^3 - 7u + 6 = 0,\quad \text{also}\quad r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = -3,$$

folglich wird

$$(34.)\qquad y = C_1 . e^x + C_2 . e^{2x} + C_3 . e^{-3x}.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(35.)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 13\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$(36.)\qquad F(u) = u^3 - 6u^2 + 13u - 10 = 0,$$

also

$$r_1 = 2,\quad r_2 = 2 + i,\ r_3 = 2 - i,$$

folglich wird

$$(37.)\qquad y = C_1 . e^{2x} + C_2 . e^{2x+ix} + C_3 . e^{2x-ix}$$
$$= e^{2x}(C_1 + A\cos x + B\sin x).$$

Bisher war vorausgesetzt worden, dass die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$ der Gleichung $F(u) = 0$ alle von einander verschieden sind. Hat aber $F(u) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so erhält man durch Gleichung (17.) nicht mehr das *allgemeine* Integral. Ist z. B. $r_1 = r_2$, so kann man in Gleichung (17.) die Glieder

$$C_1 . e^{r_1x} + C_2 . e^{r_2x} \quad \text{in} \quad (C_1 + C_2) . e^{r_1x}$$

zusammenfassen, so dass der Ausdruck für $y$ nur noch $m - 1$ Integrations-Constanten enthält.

Aber auch hier kann man das *allgemeine* Integral durch eine Grenzbetrachtung aus der bisher angegebenen Form finden. Es sei zunächst

$$r_2 = r_1 + h, \tag{38.}$$

also

$$\begin{aligned} y &= C_1 . e^{r_1 x} + C_2 . e^{r_1 x + hx} + C_3 . e^{r_3 x} + \cdots + C_m e^{r_m x} \\ &= (C_1 + C_2 . e^{hx}) e^{r_1 x} + C_3 . e^{r_3 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x}. \end{aligned} \tag{39.}$$

Nun ist aber

$$C_1 + C_2 . e^{hx} = C_1 + C_2 + C_2 \frac{hx}{1!} + C_2 \cdot \frac{h^2 x^2}{2!} + \cdots. \tag{40.}$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$C_1 + C_2 = C, \quad C_2 h = C', \tag{41.}$$

so sind auch $C$ und $C'$ noch zwei beliebige Constanten; Gleichung (40.) erhält dadurch die Form

$$C_1 + C_2 . e^{hx} = C + C'x + C' \frac{hx^2}{2!} + C' \cdot \frac{h^2 x^3}{3!} + \cdots. \tag{42.}$$

Lässt man jetzt $h$ sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$\lim_{h=0} r_2 = r_1, \quad \lim_{h=0} (C_1 + C_2 . e^{hx}) = C + C'x, \tag{43.}$$

folglich geht Gleichung (39.) in diesem Falle über in

$$y = (C + C'x) . e^{r_1 x} + C_3 . e^{r_3 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x}. \tag{44.}$$

In dieser Formel treten wieder $m$ willkürliche Integrations-Constanten auf, wenn $r_1, r_3, \ldots r_m$ sämmtlich von einander verschieden sind.

Setzt man jetzt in Gleichung (44.)

$$r_3 = r_1 + h, \tag{45.}$$

also

$$\begin{aligned} y &= (C + C'x) . e^{r_1 x} + C_3 . e^{r_1 x + hx} + C_4 . e^{r_4 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x} \\ &= (C + C'x + C_3 . e^{hx}) . e^{r_1 x} + C_4 . e^{r_4 x} + \cdots + C_m . e^{r_m x}, \end{aligned} \tag{46.}$$

so wird

$$C + C'x + C_3 . e^{hx} = C + C'x + C_3 + C_3 \frac{hx}{1!} + C_3 \frac{h^2 x^2}{2!} + \cdots, \tag{47.}$$

oder, wenn man

$$C + C_3 = A_1, \quad C' + C_3 h = A_2, \quad C_3 h^2 = 2A_3 \tag{48.}$$

setzt,

$$(49.)\quad C + C'x + C_3 \,.\, e^{hx} = A_1 + A_2x + A_3x^2 + 2A_3\frac{hx^3}{3!} + \cdots,$$

wobei $A_1$, $A_2$, $A_3$ wieder drei willkürliche Constanten sind. Lässt man jetzt $h$ sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(50.)\quad \lim_{h=0} r_3 = r_1,\quad \lim_{h=0}(C + C'x + C_3 \,.\, e^{hx}) = A_1 + A_2x + A_3x^2,$$

folglich geht Gleichung (46.) in diesem Falle, wo $r_1 = r_2 = r_3$ ist, über in

$$(51.)\quad y = (A_1 + A_2x + A_3x^2) \,.\, e^{r_1x} + C_4 \,.\, e^{r_4x} + \cdots + C_m \,.\, e^{r_mx}.$$

Dieser Ausdruck enthält wieder $m$ willkürliche Constanten, wenn $r_1, r_4, \ldots r_m$ von einander verschieden sind.

In gleicher Weise kann man alle Fälle erledigen, in denen $F(u) = 0$ mehrfache Wurzeln hat.

Dieselben Resultate findet man auch auf einem anderen Wege. Nach D.-R., Formel Nr. 48 der Tabelle ist

$$(52.)\quad \frac{d^n(uv)}{dx^n} = u\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{d^nu}{dx^n}v.$$

Führt man also in die Gleichung

$$\frac{d^my}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m \,.\, y = 0$$

für $y$ das Product $uv$ ein, so erhält man

$$(53.)\quad \left(\frac{d^mv}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dv}{dx} + f_m \,.\, v\right)u$$
$$+ \frac{1}{1!}\left[m\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + (m-1)f_1\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-2)f_2\frac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + f_{m-1}.v\right]\frac{du}{dx}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[m(m-1)\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2)f_1\frac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots + 2.1f_{m-2}.v\right]\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{m!}m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1v \cdot \frac{d^mu}{dx^m} = 0,$$

oder

$$(54.)\quad Vu + \frac{1}{1!} V_1 \frac{du}{dx} + \frac{1}{2!} V_2 \frac{d^2u}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{m!} V_m \frac{d^m u}{dx^m} = 0,$$

wobei

$$(55.)\quad \begin{cases} V = \dfrac{d^m v}{dx^m} + f_1 \dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + f_2 \dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \cdots + f_m \cdot v, \\ V_1 = m \dfrac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + (m-1) f_1 \dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-2) f_2 \dfrac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots \\ \qquad\qquad + f_{m-1} \cdot v, \\ V_2 = m(m-1) \dfrac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2) f_1 \dfrac{d^{m-3}v}{dx^{m-3}} + \cdots \\ \qquad\qquad + 2 \cdot 1 f_{m-2} \cdot v \end{cases}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Von den beiden Functionen $u$ und $v$ kann man die eine, z. B. $v$, noch willkürlich bestimmen. Setzt man daher

$$(56.)\quad v = e^{rx}, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx} = r \cdot e^{rx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = r^2 \cdot e^{rx}, \ldots$$

so gehen die Gleichungen (55.) über in

$$(57.)\quad \begin{cases} V = e^{rx}(r^m + f_1 r^{m-1} + f_2 r^{m-2} + \cdots + f_{m-1} r + f_m) = e^{rx} \cdot F(r), \\ V_1 = e^{rx}[m r^{m-1} + (m-1) f_1 r^{m-2} + (m-2) f_2 r^{m-3} + \cdots + f_{m-1}] \\ \qquad = e^{rx} \cdot F'(r), \\ V_2 = e^{rx}[m(m-1) r^{m-2} + (m-1)(m-2) f_1 r^{m-3} + \cdots + 2.1 f_{m-2}] \\ \qquad = e^{rx} \cdot F''(r), \end{cases}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Deshalb erhält Gleichung (54.), wenn man den allen Gliedern gemeinsamen Factor $e^{rx}$ fortlässt, die Form

$$(58.)\quad F(r) \cdot u + \frac{F'(r)}{1!} \frac{du}{dx} + \frac{F''(r)}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} + \cdots + \frac{F^{(m-1)}(r)}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{d^m u}{dx^m} = 0.$$

Jetzt sei $r_1$ eine *einfache* Wurzel von $F(r) = 0$, dann wird Gleichung (58.) befriedigt, wenn man

$$(59.)\qquad r = r_1, \quad u = C_1, \quad \text{also} \quad y = C_1 \cdot e^{r_1 x}$$

setzt. Ist dagegen $r_1$ eine $\alpha$-fache Wurzel von $F(r) = 0$, so wird

$$F(r_1) = 0, \quad F'(r_1) = 0, \quad F''(r_1) = 0, \ldots \quad F^{(\alpha-1)}(r_1) = 0,$$

so dass Gleichung (58.) befriedigt wird, wenn man

(60.) $$r = r_1, \quad u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1},$$

also

(61.) $$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1}) \,.\, e^{r_1 x}$$

setzt. Auf diese Weise kann man immer einen Ausdruck finden, der $m$ willkürliche Constanten enthält und deshalb das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

### Beispiel.

**Aufgabe 5.** Man soll die Differential-Gleichung

(62.) $$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

(63.) $$F(r) = r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = (r^2 - 2r + 1)(r^2 - 2r + 5) = 0,$$

also

(64.) $$r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 1 + 2i, \quad r_4 = 1 - 2i,$$

folglich wird

(65.) $$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2 x)e^x + e^x[A\cos(2x) + B\sin(2x)] \\ &= e^x[C_1 + C_2 x + A\cos(2x) + B\sin(2x)]. \end{aligned}$$

## § 98.

## Nicht homogene lineare Differential-Gleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 213—215.)

In der Differential-Gleichung

(1.) $$\frac{d^my}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x),$$

mögen die Coefficienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ zunächst *constante* Grössen sein, dann setze man

(2.) $$z = C_1 \,.\, e^{r_1(x-t)} + C_2 \,.\, e^{r_2(x-t)} + \cdots + C_m \,.\, e^{r_m(x-t)},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots r_m$ wieder die $m$ Wurzeln der Gleichung

$$(3.)\quad F(r) = r^m + f_1 r^{m-1} + f_2 r^{m-2} + \cdots + f_{m-1} r + f_m = 0$$

sind. Durch Gleichung (2.) ist $z$ als eine Function der beiden Veränderlichen $x$ und $t$ erklärt, wobei $t$ vorläufig als eine *Constante* betrachtet werden möge. Unter der Voraussetzung, dass $r_1, r_2, \ldots r_m$ sämmtlich von einander verschieden sind, kann man nach den Ausführungen in § 97 die Constanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ so bestimmen, dass die Grössen $z, z', z'', \ldots z^{(m-1)}$ für $x = t$ beliebig vorgeschriebene Anfangswerthe $z_0, z_0', z_0'', \ldots z_0^{(m-1)}$ annehmen. Für den vorliegenden Zweck setze man

$$(4.)\quad z_0 = 0,\ z_0' = 0,\ z_0'' = 0,\ \ldots z_0^{(m-2)} = 0,\ z_0^{(m-1)} = \varphi(t),$$

d. h. es mögen die Constanten $C_1, C_2, \ldots C_m$ so bestimmt werden, dass

$$(5.)\quad \begin{cases} C_1 + C_2 + \cdots + C_m = 0, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 + \cdots + C_m r_m = 0, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + \cdots + C_m r_m^2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1 r_1^{m-2} + C_2 r_2^{m-2} + \cdots + C_m r_m^{m-2} = 0, \\ C_1 r_1^{m-1} + C_2 r_2^{m-1} + \cdots + C_m r_m^{m-1} = \varphi(t) \end{cases}$$

wird. Wie in § 97, Gleichung (21.) und (22.) gezeigt wurde, findet man aus diesen Gleichungen

$$(6.)\quad C_1 = \frac{\varphi(t)}{F'(r_1)},\ C_2 = \frac{\varphi(t)}{F'(r_2)},\ \ldots C_m = \frac{\varphi(t)}{F'(r_m)}.$$

Die Function

$$(7.)\quad z = \frac{\varphi(t)\,.\,e^{r_1(x-t)}}{F'(r_1)} + \frac{\varphi(t)\,.\,e^{r_2(x-t)}}{F'(r_2)} + \cdots + \frac{\varphi(t)\,.\,e^{r_m(x-t)}}{F'(r_m)}$$

hat also die Eigenschaft, dass sie mit ihren $m-2$ ersten Ableitungen für $x = t$ verschwindet, während die $(m-1)^{\text{te}}$ Ableitung gleich $\varphi(t)$ wird.

Jetzt mögen mit

$$(z)_{t=x},\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_{t=x} = (z')_{t=x},\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=x} = (z'')_{t=x},\ \cdots \left(\frac{d^mz}{dx^m}\right)_{t=x} = (z^{(m)})_{t=x}$$

diejenigen Werthe bezeichnet werden, welche $z, z', z'', \ldots z^{(m)}$ für $t = x$ annehmen. Dabei ergiebt sich aus den Gleichungen (5.), dass

(8.) $(z)_{t=x} = 0,\ (z')_{t=x} = 0,\ (z'')_{t=x} = 0,\ \ldots (z^{(m-2)})_{t=x} = 0$

wird, während

(9.) $$(z^{(m-1)})_{t=x} = \varphi(x)$$

ist. Setzt man also

(10.) $$Y = \int_0^x z\,dt,$$

so findet man nach Formel Nr. 154 der Tabelle

(11.) $$\frac{dY}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{dx}\,dt + (z)_{t=x} = \int_0^x \frac{dz}{dx}\,dt,$$

(12.) $$\frac{d^2Y}{dx^2} = \int_0^x \frac{d^2z}{dx^2}dt + (z')_{t=x} = \int_0^x \frac{d^2z}{dx^2}\,dt,$$

(13.) $$\frac{d^3Y}{dx^3} = \int_0^x \frac{d^3z}{dx^3}dt + (z'')_{t=x} = \int_0^x \frac{d^3z}{dx^3}\,dt,$$

(14.) $$\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} = \int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\,dt + (z^{(m-2)})_{t=x} = \int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\,dt,$$

(15.) $$\frac{d^mY}{dx^m} = \int_0^x \frac{d^mz}{dx^m}\,dt + (z^{(m-1)})_{t=x} = \int_0^x \frac{d^mz}{dx^m}\,dt + \varphi(x).$$

Indem man diese Werthe von $Y, \dfrac{dY}{dx}, \dfrac{d^2Y}{dx^2}, \ldots \dfrac{d^mY}{dx^m}$ in Gleichung (1.) für $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots \dfrac{d^my}{dx^m}$ einsetzt, erhält man, da sich $\varphi(x)$ weghebt,

(16.) $$\int_0^x \left(\frac{d^mz}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dz}{dx} + f_m . z\right)dt = 0.$$

Diese Gleichung wird aber in der That befriedigt, denn nach Formel Nr. 210 der Tabelle ist $z$ ein *particuläres* Integral der *homogenen* linearen Differential-Gleichung

(17.) $$\frac{d^mz}{dx^m} + f_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}\frac{dz}{dx} + f_m . z = 0,$$

folglich ist $Y$ ein *particuläres* Integral der Differential-Gleichung (1.) Aus dem *particulären* Integral findet man sofort das *allgemeine*, indem man

$$y = Y + v \tag{18.}$$

in die Gleichung (1.) einsetzt; dann wird nämlich

$$\frac{d^m v}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1} \frac{dv}{dx} + f_m \cdot v = 0, \tag{19.}$$

also

$$v = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} + \cdots + c_m \cdot e^{r_m x} \tag{20.}$$

und nach den Gleichungen (7.) und (10.)

$$\begin{aligned} y = & \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_1(x-t)} dt}{F'(r_1)} + c_1 \cdot e^{r_1 x}\right] \\ & + \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_2(x-t)} dt}{F'(r_2)} + c_2 \cdot e^{r_2 x}\right] \\ & + \cdots + \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_m(x-t)} dt}{F'(r_m)} + c_m \cdot e^{r_m x}\right], \end{aligned} \tag{21.}$$

oder, wenn man

$$c_1 \cdot F'(r_1) = C_1,\ c_2 \cdot F'(r_2) = C_2,\ \ldots c_m \cdot F'(r_m) = C_m \tag{22.}$$

setzt,

$$\begin{aligned} y = & \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)}\left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_1 t} dt\right] + \frac{e^{r_2 x}}{F'(r_2)}\left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_2 t} dt\right] \\ & + \cdots + \frac{e^{r_m x}}{F'(r_m)}\left[C_m + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_m t} dt\right]. \end{aligned} \tag{23.}$$

Dasselbe Resultat kann man auch durch die Methode des *integrirenden Factors* oder durch *Variation der Constanten* finden.

## Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = \varphi(x) \tag{24.}$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$(25.)\quad \begin{cases} F(r) = r^2 - \dfrac{1}{a^2}, \quad r_1 = \dfrac{1}{a}, \quad r_2 = -\dfrac{1}{a}, \\ F'(r) = 2r, \quad F'(r_1) = \dfrac{2}{a}, \quad F'(r_2) = -\dfrac{2}{a}, \end{cases}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$(26.)\quad y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} \left[ C_1 + \int_0^x \varphi(t) \, . \, e^{-\frac{t}{a}} dt \right] - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[ C_2 + \int_0^x \varphi(t) \, e^{\frac{t}{a}} dt \right].$$

Ist z. B.

$$(27.)\quad \varphi(x) = e^{\frac{x}{a}},$$

so wird

$$(28.)\quad \int_0^x \varphi(t) \, . \, e^{-\frac{t}{a}} dt = \int_0^x dt = x, \quad \int_0^x \varphi(t) \, . \, e^{\frac{t}{a}} dt = \int_0^x e^{\frac{2t}{a}} dt = \frac{a}{2}\left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right),$$

so dass Gleichung (26.) übergeht in

$$(29.)\quad \begin{aligned} y &= \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} \left( C_1 + x \right) - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[ C_2 + \frac{a}{2}\left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[ \left( C_1 + x \right) e^{\frac{x}{a}} - C_2 e^{-\frac{x}{a}} \right] - \frac{a^2}{4}\left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right). \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(30.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 4000x^2$$

integriren.

**Auflösung.** Hier ist

$$(31.)\quad \begin{cases} F(r) = r^2 - 9r + 20 = 0, \quad F'(r) = 2r - 9, \quad \varphi(x) = 4000\,x^2, \\ r_1 = 5, \quad r_2 = 4, \quad F'(r_1) = 1, \quad F'(r_2) = -1, \end{cases}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$(32.)\quad y = e^{5x} \left[ C_1 + 4000 \int_0^x t^2 e^{-5t} \, . \, dt \right] - e^{4x} \left[ C_2 + 4000 \int_0^x t^2 e^{-4t} dt \right].$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$(33.)\qquad \int t^2 e^{at}dt = e^{at}\left(\frac{t^2}{a} - \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right),$$

so dass Gleichung (32.) übergeht in

$$(34.)\quad y = e^{5x}\left[C_1 + 4000\,e^{-5x}\left(-\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} - \frac{2}{125}\right) + \frac{8000}{125}\right]$$

$$- e^{4x}\left[C_2 + 4000\,e^{-4x}\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{2x}{16} - \frac{2}{64}\right) + \frac{8000}{64}\right]$$

$$= (C_1 + 64)e^{5x} - 32(25x^2 + 10x + 2)$$

$$- (C_2 + 125)e^{4x} + 125(8x^2 + 4x + 1),$$

oder, wenn man $C_1 + 64$ mit $A$, $C_2 + 125$ mit $-B$ bezeichnet,

$$(35.)\qquad y = Ae^{5x} + Be^{4x} + 200x^2 + 180x + 61.$$

Die angegebene Lösung gilt nur, wenn die Coefficienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ constante Grössen sind. Ist diese Voraussetzung *nicht* erfüllt, so gelingt es doch in vielen Fällen, die Differential-Gleichung

$$(36.)\qquad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x)$$

von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung auf eine niedrigere Ordnung zu reduciren. Ist z. B. $y = y_1$ ein *particuläres* Integral der *homogenen* Differential-Gleichung

$$(37.)\qquad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)\,.\,y = 0,$$

so setze man

$$(38.)\qquad Y = Cy_1,$$

wo aber $C$ noch eine Function von $x$ sein muss, wenn dieser Werth von $y$ der Gleichung (36.) genügen soll. Nun ist

$$(39.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1\dfrac{dC}{dx} + C\dfrac{dy_1}{dx}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} = y_1\dfrac{d^2C}{dx^2} + 2\dfrac{dy_1}{dx}\,\dfrac{dC}{dx} + C\dfrac{d^2y_1}{dx^2}, \\[1ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[1ex] \dfrac{d^my}{dx^m} = y_1\dfrac{d^mC}{dx^m} + \dbinom{m}{1}\dfrac{dy_1}{dx}\,\dfrac{d^{m-1}C}{dx^{m-1}} + \cdots + C\dfrac{d^my_1}{dx^m}\,. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (36.) ein und beachtet, dass der Factor von $C$ verschwindet, so bleibt eine Gleichung von der Form

$$(40.)\qquad y_1\frac{d^mC}{dx^m}+g_1(x)\frac{d^{m-1}C}{dx^{m-1}}+\cdots+g_{m-1}(x)\frac{dC}{dx}=\varphi(x).$$

Führt man also die Function $u$ durch die Gleichungen

$$(41.)\qquad \frac{dC}{dx}=u,\quad\text{oder}\quad C=\int udx+A$$

ein, so erhält man aus Gleichung (40.)

$$(42.)\qquad y_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+g_1(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}}+\cdots+g_{m-1}(x)\,.\,u=\varphi(x).$$

Aus dem *allgemeinen* Integral $u$ dieser Differential-Gleichung, die nur noch von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, findet man das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (36.) durch die Gleichung

$$(43.)\qquad y=y_1\left(\int udx+A\right).$$

Ebenso kann man die Ordnung der Differential-Gleichung (36.) um *zwei* Einheiten erniedrigen, wenn man *zwei* particuläre Integrale $y_1$ und $y_2$ der *homogenen* Differential-Gleichung (37.) kennt. Man setze dann

$$(44.)\qquad y=C_1y_1+C_2y_2$$

und betrachte $C_1$ und $C_2$ als Functionen von $x$, welche der Bedingung

$$(45.)\qquad y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}=0,\quad\text{oder}\quad\frac{dC_2}{dx}=-\frac{y_1}{y_2}\frac{dC_1}{dx}$$

genügen. Bezeichnet man dabei $-\dfrac{y_1}{y_2}$ mit $\varphi_1(x)$, so folgt aus den Gleichungen (44.) und (45.)

$$(46.)\qquad \frac{dC_2}{dx}=\varphi_1(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},$$

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = C_1\dfrac{dy_1}{dx} + C_2\dfrac{dy_2}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = C_1\dfrac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\dfrac{d^2y_2}{dx^2} + \varphi_2(x)\cdot\dfrac{dC_1}{dx}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = C_1\dfrac{d^3y_1}{dx^3} + C_2\dfrac{d^3y_2}{dx^3} + \varphi_2(x)\cdot\dfrac{d^2C_1}{dx^2} + \varphi_3(x)\cdot\dfrac{dC_1}{dx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

wobei $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \dots$ leicht zu ermittelnde Functionen von $x$ sind. Setzt man diese Werthe in Gleichung (36.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Factoren von $C_1$ und $C_2$, und es bleibt

$$(48.)\quad G_0(x)\frac{d^{m-1}C_1}{dx^{m-1}} + G_1(x)\frac{d^{m-2}C_1}{dx^{m-2}} + \cdots + G_{m-2}(x)\frac{dC_1}{dx} = \varphi(x).$$

Wenn man jetzt noch

$$(49.)\quad \frac{dC_1}{dx} = z, \quad \text{also} \quad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x)\,.\,z,$$

$$C_1 = \int z dx + A_1, \quad C_2 = \int\varphi_1(x)\,.\,z dx + A_2$$

setzt, so geht Gleichung (48.) über in

$$(50.)\quad G_0(x)\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + G_1(x)\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + G_{m-2}(x)\,.\,z = \varphi(x).$$

Aus dem *allgemeinen* Integral $z$ dieser Gleichung, welche nur noch von der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, findet man nach den Gleichungen (44.) und (49.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (36.) durch die Formel

$$(51.)\quad y = y_1\left(\int z dx + A_1\right) + y_2\left(\int\varphi_1(x)\,.\,z dx + A_2\right).$$

Dieses Verfahren kann man fortsetzen und den Satz beweisen:

*Kennt man n verschiedene particuläre Integrale* $y_1, y_2, \dots y_n$ *der homogenen Differential-Gleichung*

$$(52.)\quad \frac{d^my}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)\,.\,y = 0,$$

*so lässt sich die nicht homogene lineare Differential-Gleichung*

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x) \cdot y = \varphi(x) \tag{53.}$$

*auf eine andere nicht homogene lineare Differential-Gleichung von der Ordnung $m - n$ reduciren.*

**Beweis.** Sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ die bekannten particulären Integrale von Gleichung (52.), so setze man

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{54.}$$

und bestimme $\frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_3}{dx}, \cdots \frac{dC_n}{dx}$ als Functionen von $\frac{dC_1}{dx}$ durch die $n - 1$ linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} = 0. \end{array}\right. \tag{55.}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \quad \frac{dC_3}{dx} = \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \quad \cdots \quad \frac{dC_n}{dx} = \varphi_{n-1}(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \tag{56.}$$

wobei die Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ leicht zu ermitteln sind. Nach diesen Festsetzungen wird

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}, \tag{57.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}, \tag{58.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}, \tag{59.}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \cdots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + \psi(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \tag{60.}$$

$$(61.)\quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = C_1\frac{d^{n+1}y_1}{dx^{n+1}} + C_2\frac{d^{n+1}y_2}{dx^{n+1}} + \cdots$$
$$+ C_n\frac{d^{n+1}y_n}{dx^{n+1}} + \psi(x)\cdot\frac{d^2C_1}{dx^2} + \psi_1(x)\cdot\frac{dC_1}{dx},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (53.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Coefficienten von $C_1, C_2, \ldots C_n$, so dass sich die Gleichung auf

$$(62.)\quad L_0(x)\frac{d^{m-n+1}C_1}{dx^{m-n+1}} + L_1(x)\frac{d^{m-n}C_1}{dx^{m-n}} + \cdots + L_{m-n}(x)\frac{dC_1}{dx} = \varphi(x)$$

reducirt. Indem man noch die Function $v$ durch die Gleichung

$$(63.)\quad \frac{dC_1}{dx} = v$$

einführt, erhält man daher

$$(64.)\quad L_0(x)\frac{d^{m-n}v}{dx^{m-n}} + L_1(x)\frac{d^{m-n-1}v}{dx^{m-n-1}} + \cdots + L_{m-n}(x)\,.\,v = \varphi(x).$$

Dabei ist nach den Gleichungen (54.), (56.) und (63.)

$$(65.)\quad C_1 = \int v dx + A_1,\quad C_2 = \int\varphi_1(x)\,.\,v dx + A_2,\ \ldots$$
$$C_n = \int\varphi_{n-1}(x)\,.\,v dx + A_n,$$

$$(66.)\quad y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n.$$

Diese Betrachtungen gelten auch dann noch, wenn $n = m$ ist. Für $n = m - 1$ kann man durch das angegebene Verfahren die vorgelegte Differential-Gleichung auf eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung von der Form

$$(67.)\quad L_0(x)\frac{dv}{dx} + L_1(x)\,.\,v = \varphi(x)$$

zurückführen, deren Integration in § 80 behandelt worden ist. (Vergl. auch Formel Nr. 180 der Tabelle.)

---

# Tabelle

## der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung.*)

1.) $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x).$ [§ 1, Gl. (3.) und (4.)]

2.) $d\int f'(x)dx = f'(x)dx.$ [§ 1, Gl. (5.)]

3.) Ist $a$ der Werth von $x$, für welchen das Integral von $f'(x)dx$ verschwindet, so ist

$$\int_a f'(x)dx = f(x) - f(a).$$ [§ 2, Gl. (3.)]

4.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

1.) von der Curve $y = \varphi(x)$,

2.) von der X-Axe,

3.) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

ist gleich

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b f'(x)dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a),$$

wobei $f'(x) = \varphi(x)$ sein soll. [§ 2, Gl. (5.) und (8a.)]

5.) $\int_a^b f'(x)dx = -\int_b^a f'(x)dx.$ [§ 2, Gl. (29.)]

---

*) Die Integrations-Constante ist überall der Kürze wegen fortgelassen.

6.) $\int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^b f'(x)dx.$ [§ 2, Gl. (30.)]

7.) $\int Af'(x)dx = A\int f'(x)dx.$ [§ 3, Gl. (5.)]

8.) $\int [f'(x) \pm g'(x)]dx = \int f'(x)dx \pm \int g'(x)dx.$ [§ 3, Gl. (11.) und (13.)]

9.) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$ [§ 4, Gl. (2.)]

10.) $\int dx = x.$ [§ 4, Gl. (2a.)]

11.) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a}, \int e^x dx = e^x.$ [§ 4, Gl. (3.) und (3a.)]

12.) $\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x.$ [§ 4, Gl. (4.)]

13.) $\int \cos x dx = \sin x.$ [§ 4, Gl. (12.)]

14.) $\int \sin x dx = -\cos x.$ [§ 4, Gl. (13.)]

15.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x.$ [§ 4, Gl. (14.)]

16.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x.$ [§ 4, Gl. (15.)]

17.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$ [§ 4, Gl. (16.) und (21.)]

18.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\, x.$ [§ 4, Gl. (17.) und (25.)]

19.) $\int \frac{dx}{x \pm a} = \mathrm{l}(x \pm a).$ [§ 7, Gl. (2.), (3.) und § 29, Gl. (2.)]

20.) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$ [§ 7, Gl. (20.)]

21.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$ [§ 7, Gl. (21.)]

22.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \mathrm{l}(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$ [§ 7, Gl. (23.)]

23.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{l}(x + \sqrt{x^2-a^2}).$ [§ 7, Gl. (24.)]

24.) $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2 \pm a^2).$ [§ 7, Gl. (26) und (27.)]

25.) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}.$ [§ 7, Gl. (29.)]

26.) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = +\sqrt{a^2+x^2}.$ [§ 7, Gl. (31.)]

27.) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = +\sqrt{x^2-a^2}.$ [§ 7, Gl. (32.)]

28.) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \mathrm{l}[f(x)].$ [§ 7, Gl. (40.)]

29.) $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\mathrm{l}(\cos x).$ [§ 7, Gl. (42.)]

30.) $\int \mathrm{ctg}\, x dx = +\mathrm{l}(\sin x).$ [§ 7, Gl. (43.)]

31.) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \mathrm{l}(\mathrm{tg}x) = -\mathrm{l}(\mathrm{ctg}x).$ [§ 7, Gl. (45.) und § 8, Gl. (27.)]

32.) $\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\mathrm{l}\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$ [§ 7, Gl. (47.)]

33.) $\int \frac{dx}{\cos x} = -\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = +\mathrm{l}\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$
[§ 7, Gl. (49.)]

34.) $\int f(\sin x)\cos x\, dx = \int f(t)\, dt,$ wo $t = \sin x.$ [§ 7, Gl. (53.)]

35.) $\int f(\cos x) \,.\, \sin x dx = -\int f(t) dt,$ wo $t = \cos x.$ [§ 7, Gl. (56.)]

36.) $\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \,.\, d(\sin x).$ [§ 7, Gl. (61.)]

37.) $\int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n \,.\, d(\cos x).$ [§ 7, Gl. (63.)]

38.) $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n \,.\, d(\sin x),$
[§ 7, Gl. (65.)]

39.) $\int \cos^m x \sin^{2n+1} x dx = -\int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^n \,.\, d(\cos x).$
[§ 7, Gl. (67.)]

40.) $\int f(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\operatorname{tg} x) \,.\, d(\operatorname{tg} x).$ [§ 7, Gl. (71.)]

41.) $\int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int f(\operatorname{ctg} x) \,.\, d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 7, Gl. (74.)]

42.) $\int f(\operatorname{tg} x) \,.\, dx = \int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x).$ [§ 7, Gl. (81.)]

42a.) $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x).$ [§ 7, Gl. (82.)]

43.) $\int f(\operatorname{ctg} x) \,.\, dx = -\int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 7, Gl. (90.)]

43a.) $\int \operatorname{ctg}^n x \,.\, dx = -\int \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 7, Gl. (91.)]

44.) $\int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{tg} x).$ [§ 7, Gl. (94.)]

45.) $\int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} \,.\, d(\operatorname{ctg} x).$ [§ 7, Gl. (97.)]

46.) $\int f(a^x) \,.\, a^x dx = \frac{1}{\mathrm{l}\, a} \int f(a^x) \,.\, d(a^x).$ [§ 7, Gl. (98.)]

46a.) $\int f(e^x) \,.\, e^x dx = \int f(e^x) \,.\, d(e^x).$ [§ 7, Gl. (99.)]

47.) $\int f(\mathrm{l} x) \cdot \frac{dx}{x} = \int f(\mathrm{l} x) \,.\, d(\mathrm{l} x).$ [§ 7, Gl. (100.)]

48.) $\int f(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int f(\arcsin x) \,.\, d(\arcsin x).$

[§ 7, Gl. (101.)]

49.) $\int f(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int f(\arccos x) \,.\, d(\arccos x).$

[§ 7, Gl. (102.)]

50.) $\int f(\operatorname{arc\,tg} x) \,.\, \frac{dx}{1 + x^2} = \int f(\operatorname{arc\,tg} x) \,.\, d(\operatorname{arc\,tg} x).$ [§ 7, Gl. (103.)]

51.) $\int f(\operatorname{arc\,ctg} x) \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = -\int f(\operatorname{arc\,ctg} x) \,.\, d(\operatorname{arc\,ctg} x).$

[§ 7, Gl. (104.)]

52.) $\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)dx =$

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1-t^2}{2t}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2},$$

wobei

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$ [§ 7, Gl. (109.) und (114.)]

53.) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\left(\frac{x-a}{x+a}\right).$ [§ 8, Gl. (2.) und § 29, Gl. (6.)]

54.) $\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\,\mathrm{l}\left(\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right).$
[§ 8, Gl. (13.) und § 29, Gl (16.)]

55.) $\int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right).$
[§ 8, Gl. (13a.) und § 29, Gl. (12.)]

56.) $\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right).$ [§ 8, Gl. (17.)]

57.) $\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b}.$
[§ 8, Gl. (22.) und § 29, Gl. (3a.)]

58.) $\int \frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c} = \frac{P}{2}\,\mathrm{l}(x^2+2bx+c)+(Q-Pb)\int\frac{dx}{x^2+2bx+c}.$
[§ 8, Gl. (23.)]

59.) $\int \frac{(Px+Q)dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\left[(Px_1+Q)\,\mathrm{l}(x-x_1)-(Px_2+Q)\,\mathrm{l}(x-x_2)\right].$$
[§ 8, Gl. (24.) und § 29, Gl. (22.)]

60.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg}(2x).$ [§ 8, Gl. (26.)]

61.) $\int u dv = uv - \int v du.$ [§ 9, Gl. (2.)]

62.) $\int \cos^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}.$ [§ 9, Gl. (41.)]

63.) $\int \sin^2 x\,.\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}.$ [§ 9, Gl. (45.)]

64.) $$\int \cos^m x \,.\, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \,.\, dx.$$
[§ 9, Gl. (52.)]

65.) $$\int \cos^{2n} x \,.\, dx = \sin x \left[ \frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \cos^{2n-3} x \right.$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-5} x + \cdots$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \,.\, 3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \,.\, 2} \cos x \right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \,.\, 2} x.$$ [§ 9, Gl. (60.)]

66.) $$\int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \,.\, dx.$$
[§ 9, Gl. (65.)]

67.) $$\int \sin^{2n} x \,.\, dx = -\cos x \left[ \frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \sin^{2n-3} x \right.$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-5} x + \cdots$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \,.\, 3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \,.\, 2} \sin x \right]$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \,.\, 2} x.$$ [§ 9, Gl. (73.)]

68.) $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \cdot$$ [§ 9, Gl. (75.)]

69.) $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \cdot$$ [§ 9, Gl. (84.)]

70.) $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot$$
[§ 9, Gl. (93.)]

71.) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \cdot$$
[§ 9, Gl. (96.) und (97.)]

72.) $$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = c_n \,.\, a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} \,.\, G_n(x),$$

wobei

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)a^2x^{2n-3}}{2n(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3a^{2n-2}x}{2n(2n-2)\ldots 4.2},$$

$$c_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}.$$ [§ 9, Gl. (103.), (105.) und (108.)]

73.) $$\int x^m dx \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$ [§ 9, Gl. (113.)]

74.) $$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$ [§ 9, Gl. (114.)]

75.) $$\int x dx\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}.$$ [§ 9, Gl. (115.)]

76.) $$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}.$$ [§ 9, Gl. (116.)]

77.) $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$ [§ 9, Gl. (117.)]

78.) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{l}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$ [§ 9, Gl. (119.)]

79.) $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$ [§ 9, Gl. (124.)]

79a.) $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ [§ 9, Gl. (131.)]

80.) $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$ [§ 9, Gl. (127.) und (128.)]

80a.) $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$ [§ 9, (Gl. (132.)]

81.) $$\int x^m dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$ [§ 9, Gl. (136.)]

81a.) $$\int x^m dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$ [§ 9, Gl. (139.)]

82.) $\int dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

[§ 9, Gl. (137.)]

82a.) $\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-a^2}).$ [§ 9, Gl. (140.)]

83.) $\int x dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{1}{3}(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}.$ [§ 9, Gl. (138.)]

83a.) $\int x dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}.$ [§ 9, Gl. (141.)]

84.) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}.$

[§ 9, Gl. (143.)]

84a.) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}}.$

[§ 9, Gl. (147.)]

85.) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$ [§ 9, Gl. (144.)]

85a.) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}.$ [§ 9, Gl. (148.)]

86.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{l}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$ [§ 9, Gl. (146.)]

86a.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right).$ [§ 9, Gl. (150.)]

87.) $\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx = \int f(a\sin t,\ a\cos t)\,.\,a\cos t dt,$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\ \mathrm{tg}\, t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \mathrm{ctg}\, t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

[§ 10, Gl. (3.) und (4.)]

88.) $\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})dx = \int f\left(a\,\mathrm{tg}\, t,\ \frac{a}{\cos t}\right)\cdot\frac{a dt}{\cos^2 t};$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}, \operatorname{tg} t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}.$$

[§ 10, Gl. (10.) und (11.)]

89.) $$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t}, \ a\operatorname{tg} t\right) \cdot \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, \quad \cos t = \frac{a}{x}, \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}, \operatorname{ctg} t = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

[§ 10, Gl. (23.) und (24.)]

90.) Bilden die Coordinaten-Axen den Winkel $\gamma$ mit einander, so ist

$$F = \sin\gamma \int_a^b y dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1ABB_1$, welche oben von der Curve $AB$ mit der Gleichung $y = f'(x)$, unten von dem Abschnitte $A_1B_1$ auf der $X$-Axe und links und rechts von den Ordinaten $A_1A$ und $B_1B$ mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

[§ 12, Gl. (2.)]

91.) Der Flächeninhalt einer ebenen, von zwei Curvenbögen

$$y' = f(x) \quad \text{und} \quad y'' = g(x)$$

und von den beiden Ordinaten mit den Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

begrenzten Figur ist für rechtwinklige Coordinaten

$$F = \int_a^b (y' - y'')dx. \qquad \text{[§ 13, Gl (6.)]}$$

92.) Der Flächeninhalt eines Sectors $AOB$, welcher von zwei beliebigen Radii vectores $OA$ und $OB$ und von einer Curve mit der Gleichung $r = f(\varphi)$ begrenzt wird, ist

$$S = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi. \qquad \text{[§ 14, Gl. (6.)]}$$

93.) Ist die begrenzende Curve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, so wird der Flächeninhalt des Sectors $AOB$

$$S = \frac{1}{2}\int_{(\alpha)}^{(\beta)}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{(\alpha)}^{(\beta)}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

[§ 15, Gl. (6.)]

94.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die $X$-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx. \qquad \text{[§ 16, Gl. (10.)]}$$

95.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die $Y$-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy. \qquad \text{[§ 16, Gl. (11.)]}$$

96.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die Gerade $x = a$ zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2}(x - a)^2 dy. \qquad \text{[§ 16, Gl. (12.)]}$$

97.) Die Länge eines Curvenbogens ist bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \qquad \text{[§ 18, Gl. (4a.), (6.) und (8.)]}$$

98.) Die Länge eines Curvenbogens ist bei Anwendung von Polarcoordinaten

$$s = \int\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} = \int_{r_1}^{r_2} dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

[§ 20, Gl. (3.), (4.) und (7.)]

99.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die $X$-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds. \qquad [\S\ 22,\ \text{Gl. } (4.)]$$

100.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die $Y$-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds. \qquad [\S\ 22,\ \text{Gl. } (5.)]$$

101.) Die Länge des Bogens einer Raumcurve ist

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

[§ 24, Gl. (7.) und (8.)]

102.) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \cdots + \dfrac{K}{x-k} + \dfrac{L}{x-l}$,

wenn in

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)$$

die Wurzeln $a, b, \ldots k, l$ sämmtlich von einander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Dabei ist

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)},\ B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)},\ \cdots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)},\ L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

Am einfachsten findet man die Zähler $A, B, \ldots K, L$ der Partialbrüche, indem man in der Gleichung

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \cdots + K\frac{f(x)}{x-k} + L\frac{f(x)}{x-l}$$

der Reihe nach $x = a,\quad x = b, \ldots x = k,\quad x - l$ setzt.

Ist

$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$

und sind die Coefficienten in $\varphi(x)$ und $f(x)$ sämmtlich reell, so wird

$$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px + Q}{(x-g)^2 + h^2}.$$

[§ 27, Gl. (3.), (4.), (15.), (16.), (18.), (18a.) und (80.)]

103.) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l},$$

wenn in
$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$
die Wurzeln $a, b, \ldots l$ sämmtlich von einander verschieden sind, und wenn der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von $f(x)$. Ist
$$b = g + hi, \quad c = g - hi,$$
und sind die Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ sämmtlich reell, so wird $\beta$ gleich $\gamma$, und man kann setzen
$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b}$$
$$+ \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{C_\beta}{x-c} =$$
$$\frac{P_1 x + Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x-g)^2+h^2}.$$
[§ 28, Gl. (11.) und (36.)]

104.) $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, \text{ wenn } n > 1.$$ [§ 29, Gl. (3.)]

105.) $$\int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \frac{1}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$ (Vergl. Formel Nr. 56 d. T.)

[§ 30, Gl. (5.) und (7.)]

106.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$
[§ 30, Gl. (12.)]

106a.) $$\int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = \frac{1}{h^{2n-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \text{ wobei } x-g = ht.$$
[§ 30, Gl. (8.)]

107.) $$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \cos^{2n-2} z\,dz,$$

wobei

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z \cos z = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} z = t, \quad z = \operatorname{arctg} t.$$ [§ 30, Gl. (13.), (15.) und (16.)]

108.) $$\int \frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2} = \frac{P}{2}\,\mathrm{l}[(x-g)^2+h^2] + \frac{Pg+Q}{h}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-g}{h}\right).$$ [§ 31, Gl. (3.)]

109.) $$\int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = -\frac{P}{(2n-2)[(x-g)^2+h^2]^{n-1}} + \frac{Pg+Q}{h^{2n-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

wobei

$$x-g = ht \quad \text{und} \quad n > 1.$$ [§ 31, Gl. (7.)]

110.) $$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots)dx = \int f(t^\varkappa, t^{\frac{\varkappa m}{n}}, t^{\frac{\varkappa p}{q}}, \ldots)\varkappa t^{\varkappa-1}dt,$$

wobei $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $n$, $q$, ... ist. [(§ 34, Gl. (8.)]

111.) $$\int f\left[x, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right]dx =$$

$$\int f\left(\frac{Ay-a}{b-By}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)\cdot\frac{(Ab-Ba)dy}{(b-By)^2}.$$ [§ 34, Gl. (11.)]

112.) $$\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \sqrt{y^2-a^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{A}},$$

wobei

$$y = \frac{Ax+B}{\sqrt{A}}, \quad \sqrt{y^2-a^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}, \quad a = \frac{\sqrt{B^2-AC}}{\sqrt{A}}.$$

[§ 36, Gl. (1.), (3.), (4.) und (5.)]

113.) $$F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \sqrt{a^2+y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{A}},$$

wobei

$$y = \frac{Ax+B}{\sqrt{A}}, \sqrt{a^2+y^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}, \; a = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{A}}.$$

[§ 36, Gl. (6.), (8.), (9.) und (10.)]

114.) $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{-A}+B}{-A}, \sqrt{a^2-y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{-A}}$,

wobei

$$y = -\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}},\ \sqrt{a^2-y^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C},\ a = \frac{\sqrt{B^2-AC}}{\sqrt{-A}}.$$

[§ 36, Gl. (11.), (13.), (14.) und (15.)]

115.) $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$

$$= \int F\left(\frac{y\sqrt{-A}+B}{-A},\ i\sqrt{a^2+y^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{-A}},$$

wobei

$$y = -\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}},\ i\sqrt{a^2+y^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C},\ a = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{-A}}.$$

[§ 36, Gl. (16.), (20.), (21.) und (22.)]

116.) $\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$,

oder

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

[§ 37, Gl. (1.) und (4.)]

117.) $\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{Ax+B}{\sqrt{A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + \frac{AC-B^2}{A}\,\mathrm{l}\left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)\right],$$

oder

$$\int dx\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{2\sqrt{-A}}\left[-\frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + \frac{AC-B^2}{A}\arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)\right].$$

[§ 37, Gl. (9.) und (13.)]

118.) $\int f(x, \sqrt{x^2\pm a^2})dx = \int f\left(\frac{t^2\mp a^2}{2t}, \frac{t^2\pm a^2}{2t}\right)\cdot\frac{(t^2\pm a^2)dt}{2t^2}$,

wobei

$$t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}.\qquad \text{[§ 38, Gl. (5.) und (1.)]}$$

119.) $\displaystyle\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$

$$= \int F\left(\frac{t^2 - C}{2(t\sqrt{A}+B)}, \frac{t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A}+B)}\right)\cdot \frac{(t^2\sqrt{A}+2Bt+C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A}+B)^2},$$

wobei

$$t = x\sqrt{A} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}.\qquad \text{[§ 38, Gl. (10.) und (11.)]}$$

120.) $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right)\cdot \frac{-2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2},$

wobei

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}.\qquad \text{[§ 39, Gl. (5.) und (1.)]}$$

121.) $\displaystyle\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx =$

$$\int F\left(\frac{2(t\sqrt{C}+B)}{t^2 - A}, \frac{t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C}}{t^2 - A}\right)\cdot \frac{-2(t^2\sqrt{C}+2Bt+A\sqrt{C})dt}{(t^2 - A)^2},$$

wobei

$$t = \frac{1}{x}(\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C}).\qquad \text{[§ 39, Gl. (11.) und (12.)]}$$

122.) $\displaystyle\int F(x, \sqrt{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)})dx$

$$= \int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right) \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)tdt}{(\gamma - \alpha t^2)^2},$$

wobei

$$t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}.\qquad \text{[§ 40, Gl. (9.) und (10.)]}$$

123.) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^m x\,dx = \frac{1}{m-1}\,\mathrm{tg}^{m-1}x - \int \mathrm{tg}^{m-2}x\,dx.$ [§ 43, Gl. (5.)]

124.) $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x dx.$

[§ 43, Gl. (6.)]

125.) $\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x}$.

[§ 43, Gl. (7.)]

126.) $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx = -\frac{1}{m-1}\operatorname{ctg}^{m-1}x - \int \operatorname{ctg}^{m-2}x\,dx$. [§ 43, Gl. (11.)]

127.) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\,dx$.

[§ 43, Gl. (12.)]

128.) $\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2}x}$.

[§ 43, Gl. (13.)]

129.) $2^{2n}\int \cos^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{2}{2n}\sin(2n\varphi) + \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)\varphi +$

$\binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)\varphi + \cdots + \binom{2n}{n-1}\sin(2\varphi) + \binom{2n}{n}\cdot\varphi$.

[§ 44, Gl. (2.)]

130.) $2^{2n+1}\int \cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi = \frac{2}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi$

$+\binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\varphi + \cdots + \binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\sin(3\varphi)$

$+\binom{2n+1}{n}2\sin\varphi$. [§ 44, Gl. (5.)]

131.) $(-1)^n 2^{2n}\int \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{2}{2n}\sin(2n\varphi) - \binom{2n}{1}\frac{2}{2n-2}\sin(2n-2)\varphi$

$+\binom{2n}{2}\frac{2}{2n-4}\sin(2n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\sin(2\varphi)$

$+ (-1)^n\binom{2n}{n}\varphi$. [§ 44, Gl. (8.)]

132.) $(-1)^n 2^{2n+1}\int \sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi$

$+\binom{2n+1}{1}\frac{2}{2n-1}\cos(2n-1)\varphi - +$

$\cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{n-1}\frac{2}{3}\cos(3\varphi) + (-1)^{n+1}\binom{2n+1}{n}2\cos\varphi$.

[§ 44, Gl. (11.)]

133.) $\int e^{ax}\cos(bx)dx = e^{ax} \cdot \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2 + b^2}$. [§ 44, Gl. (22.)]

134.) $\int e^{ax}\sin(bx)dx = e^{ax} \cdot \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2 + b^2}$. [§ 44, Gl. (23.)]

135.) $\int_a^\infty f'(x)dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f'(x)dx = \lim_{b=\infty} f(b) - f(a)$. [§ 45, Gl. (2.)]

136.) $\int_{-\infty}^b f'(x)dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f'(x)dx = f(b) - \lim_{a=-\infty} f(a)$.

[§ 45, Gl. (3.)]

137.) Ist $f'(b) = \pm\infty$, $f'(x)$ aber stetig für $a \leqq x < b$, so ist

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\beta=0} \int_a^{b-\beta} f'(x)dx = \lim_{\beta=0} f(b-\beta) - f(a). \quad [\S\ 46, \text{Gl. } (3.)]$$

138.) Ist $f'(a) = \pm\infty$, $f'(x)$ aber stetig für $a < x \leqq b$, so ist

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\alpha=0} \int_{a+\alpha}^b f'(x)dx = f(b) - \lim_{\alpha=0} f(a+\alpha). \quad [\S\ 46, \text{Gl. } (5.)]$$

139.) Ist $f'(a) = \pm\infty$, $f'(b) = \pm\infty$, $f'(x)$ aber stetig für $a < x < b$, so ist

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\substack{\alpha=0\\\beta=0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} f'(x)dx = \lim_{\beta=0} f(b-\beta) - \lim_{\alpha=0} f(a+\alpha).$$

[§ 46, Gl. (7.)]

140.) Ist $f'(c) = \pm\infty$, $f'(x)$ aber stetig für $a \leqq x < c$ und $c < x \leqq b$, so ist

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\gamma=0} \int_a^{c-\gamma} f'(x)dx + \lim_{\delta=0} \int_{c+\delta}^b f'(x)dx$$
$$= f(b) - f(a) + \lim_{\gamma=0} f(c-\gamma) - \lim_{\delta=0} f(c+\delta).$$

[§ 47, Gl. (1.)]

141.) $\int_a^b g(x) \cdot h(x)dx = g[a + \Theta(b-a)] \int_a^b h(x)dx$,

wenn $h(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ das Vorzeichen nicht wechselt. [§ 49, Gl. (12.)]

141a.) $\int\limits_0^x g(x) \,.\, h(x)dx = g(\Theta x)\int\limits_0^x h(x)dx.$ [§ 49, Gl. (13.)]

142.) $\int\limits_a^b g(x)dx = (b-a)g[a+\Theta(b-a)].$ [§ 49, Gl. (15.)]

143.) Ist für alle Werthe von $x$ zwischen $a$ und $b$

$$f'(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine gleichmässig convergente Reihe, deren Glieder $u_0$, $u_1$, $u_2, \ldots$ in dem betrachteten Intervalle stetige Functionen von $x$ sind, so ist auch

$$\int\limits_a^b u_0 dx + \int\limits_a^b u_1 dx + \int\limits_a^b u_2 dx + \cdots$$

eine gleichmässig convergente Reihe, deren Summe gleich

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)dx$$

ist. Dabei darf man noch die obere Grenze mit $x$ bezeichnen. [§ 51, Gl. (3.) bis (5.)]

144.) $$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \Big(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\Big) \arcsin x$$
$$- \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x),$$

wobei

$$c_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots (2n)},$$

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\,.\,x}{(2n)(2n-2)\ldots 4\,.\,2}$$
$$= c_n\Big(\frac{1}{c_{n-1}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}} \cdot \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{c_1}\frac{x^3}{3} + \frac{x}{1}\Big).$$

[§ 52, Gl. (2.), (7.) und (8.)]

145.) $$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\Big(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\Big)$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big[1 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 k^2 + \Big(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\Big)^2 k^4 + \Big(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\Big)^2 k^6 + \cdots\Big].$$

[§ 52, Gl. (9.) und (10.)]

146.) $$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)\arcsin x$$
$$+ \sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1}\, G_n(x).$$ [§ 52, Gl. (15.)]

147.) $$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - c_1^2 k^2 - \frac{1}{3}c_2^2 k^4 - \frac{1}{5}c_3^2 k^6 - \cdots\right).$$
[§ 52, Gl. (15a.)]

148.) $$F(k,\varphi) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$
$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1}\sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2}\sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3}\sin(6\varphi) + - \cdots,$$
wobei
$$x = \sin\varphi,\quad k = \sin\alpha = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\quad \varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k},$$
$$a_0 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 \cdot \varepsilon^{4n},\quad a_1 = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1} \cdot \varepsilon^{2+4n}, \ldots,$$
$$a_\nu = (1+\varepsilon^2)\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+\nu} \cdot \varepsilon^{2\nu+4n},$$
oder, wenn man $\dfrac{2-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1+\varepsilon^4}{2\varepsilon^2}$ mit $\zeta$ bezeichnet,
$$(2n-1)a_n = 4(n-1)a_{n-1}\zeta - (2n-3)a_{n-2}.$$
[§ 52, Gl. (31.), (33.), (36.), (37.), (38.), (40.), (44.) und (48.)]

149.) $$E(k,\varphi) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$
$$= b_0\varphi + \frac{k^2}{2}\left[B_1\sin(2\varphi) - B_2\sin(4\varphi) + B_3\sin(6\varphi) - + \cdots\right],$$
wobei

$$2b_0 = (2 - k^2)a_0 - k^2 a_1, \quad 4B_1 = a_0 - a_2, \quad 16B_2 = a_1 - a_3,$$
$$36B_3 = a_2 - a_4, \ldots (2n)^2 B_n = a_{n-1} - a_{n+1}.$$

[§ 52, Gl. (34.), (61.), (65.) und (67.)]

150.) $$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}} = \frac{a_0\pi}{2}\cdot$$ [§ 52, Gl. (68.)]

151.) $$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi} = \frac{b_0\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[(2 - k^2)a_0 - k^2 a_1\right].$$ [§ 52, Gl. (69.)]

152.) $$d\int_a^b f'(x)dx = -f'(a)da + f'(b)db.$$ [§ 53, Gl. (3.)]

153.) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \varphi(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dx.$$ [§ 53, Gl. (8.)]

154.) $$\frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x, t)dx = -\varphi(a, t)\cdot\frac{da}{dt} + \varphi(b, t)\cdot\frac{db}{dt}$$
$$+ \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dx.$$ [§ 53, Gl. (10.)]

155.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)\ldots 6\,.\,4\,.\,2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$
[§ 54, Gl. (3.) und (5.)]

155a.) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4\,.\,2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}.$$
[§ 54, Gl. (19.) und (20.)]

156.) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$
[Formel von *Wallis*, § 54, Gl. (33.)]

157.) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}$.

[§ 55, Gl. (6a.)]

158.) $\int\limits_0^\infty e^{-tx} \,.\, x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$. [§ 55, Gl. (12.)]

159.) In jeder trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

welche in dem Intervalle von 0 bis $2\pi$ gleichmässig convergent ist, haben die Coefficienten $a_n$ und $b_n$ die Werthe

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

[§ 56, Gl. (22.

160.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben (oder unten) begrenzt ist durch die Curve $y = f'(x)$, unten (oder oben) durch die $X$-Axe, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$, ist *näherungsweise*

$$F = \int\limits_a^b f'(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f'(a) + 2f'(a+h) + 2f'(a+2h) + \cdots + 2f'(b-h) + f'(b)],$$

wobei

$nh = b - a,\ y_0 = f'(a),\ y_1 = f'(a+h), \ldots\ y_{n-1} = f'(b-h),\ y_n = f'(b)$

ist. [§ 58, Gl. (4.) und (6.)]

161.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 160 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int\limits_a^b f'(x) dx = 2h[f'(a+h) + f'(a+3h) + \cdots + f'(b-h)]$$

$$= 2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}),$$

wobei aber

$2nh = b - a,\ y_1 = f'(a+h),\ y_3 = f'(a+3h), \ldots\ y_{2n-1} = f'(b-h)$

ist. [§ 58, Gl. (11.)]

162.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 160 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f'(x)dx = \frac{h}{3}[f'(a) + 4f'(a+h) + 2f'(a+2h) + 4f'(a+3h)$$
$$+ 2f'(a+4h) + \cdots + 2f'(b-2h) + 4f'(b-h) + f'(b)],$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

wobei

$$2nh = b - a,\ y_0 = f'(a),\ y_1 = f'(a+h),\ y_2 = f'(a+2h), \ldots$$
$$y_3 = f'(a+3h), \ldots\ y_{2n-1} = f'(b-h),\ y_{2n} = f'(b)$$

ist. (*Simpson*'sche Regel.) [§ 59, Gl. (10.) und (11.)]

163.) Das Volumen eines Körpers ist

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx,$$

wobei $F(x)$ der Flächeninhalt eines Schnittes, senkrecht zur X-Axe, im Abstande $x$ von der $YZ$-Ebene ist.

[§ 61, Gl. (9.)]

164.) Ist der Körper oben begrenzt durch die Fläche

$$z' = g(x, y),$$

unten durch die Fläche

$$z'' = h(x, y),$$

vorn und rückwärts durch die Cylinder

$$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

links und rechts durch die Ebenen

$$x = x_1, \quad x = x_2,$$

so ist das Volumen

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'')dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

wobei

$$f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

[§ 63, Gl. (10.)]

165.) $$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx,$$

wenn die Integrationsgrenzen $a$ und $b$, $c$ und $d$ constant sind.

[§ 64, Gl. (15.)]

166.) $$\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{g(u)}^{h(u)} f(x,y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv,$$

wobei

$$x = f_1(u,v) \quad y = f_2(u,v)$$

ist. [§ 65, Gl. (2.) und (14.)]

167.) $$\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,.\,rd\varphi dr.$$ [§ 65, Gl. (19.)]

168.) $$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$ [§ 65, Gl. (38.)]

169.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

[§ 66, Gl. (13.)]

170.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \iint dx\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \iint du\,dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wobei

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u,v),$$

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

[§ 68, Gl. (4.), (8.) und (11.)]

171.) Führt man räumliche Polarcoordinaten durch die Gleichungen

$$x = r\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = r\cos\lambda\sin\varphi, \quad z = r\sin\lambda$$

ein, so wird

$$O = \iint r\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cos^2\lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\lambda d\varphi.$$

[§ 69, Gl. (1.) und (5.)]

172.) $$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$
ist ein vollständiges Differential, wenn
$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$
ist. Man erhält dann
$$u = v + \int\Big(N - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy + C, \quad \text{wobei} \quad v = \int M(x, y)dx.$$
[§ 70, Gl. (4a.), (15.) und (16.)]

173.) $du = F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz$
ist ein vollständiges Differential, wenn
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}$$
ist. Man erhält dann
$$u = v + w + \int\Big(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)dz + C,$$
wobei
$$v = \int F dx, \quad w = \int\Big(G - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy.$$
[§ 72, Gl. (4a.), (8.), (17.), (22.) und (23.)]

174.) Die Differential-Gleichung erster Ordnung
$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$
kann integrirt werden durch die Reihe
$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots,$$
wobei $f(a) = b$ eine ganz beliebige Grösse ist. Die Coefficienten findet man für $x = a$ aus den Gleichungen
$$f'(x) = \varphi(x, y),$$
$$f''(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y),$$
$$f'''(x) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \varphi''(x, y),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
es wird also

$$f'(a) = \varphi(a, b),\quad f''(a) = \varphi'(a, b),\quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \ldots.$$

[§ 75, Gl. (17.) bis (22.)]

175.) Die simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z),\quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

können integrirt werden durch die Reihen

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

$$z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wobei $f(a) = b$ und $g(a) = c$ ganz beliebige Grössen sind. Die Coefficienten findet man für $x = a$, $y = b$ aus den Gleichungen

$$f'(x) = \varphi(x, y, z),$$

$$f''(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z),$$

$$f'''(x) = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \varphi''(x, y, z),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$g'(x) = \psi(x, y, z),$$

$$g''(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z),$$

$$g'''(x) = \frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \psi''(x, y, z),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

es wird also

$$f'(a) = \varphi(a, b, c),\quad f''(a) = \varphi'(a, b, c),\quad f'''(a) = \varphi''(a, b, c), \ldots$$

$$g'(a) = \psi(a, b, c),\quad g''(a) = \psi'(a, b, c),\quad g'''(a) = \psi''(a, b, c), \ldots$$

[§ 75, Gl. (31.), (37.) bis (46.)]

176.) Die $m$ simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_m}{dx} = \varphi_m(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m)$$

können integrirt werden durch die Reihen

$$y_\alpha = f_\alpha(x) = f_\alpha(a) + \frac{f'_\alpha(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_\alpha''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wo $\alpha = 1, 2, \ldots m$ zu setzen ist, und wo

$$f_1(a) = b_1, \quad f_2(a) = b_2, \quad f_m(a) = b_m$$

noch ganz beliebige Grössen sind. Dabei ist

$$\begin{aligned}
f_\alpha'(x) &= \varphi_\alpha(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),\\
f_\alpha''(x) &= \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx},\\
&= \varphi'_\alpha(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),\\
f_\alpha'''(x) &= \frac{\partial\varphi'_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'_\alpha}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial\varphi'_\alpha}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial\varphi'_\alpha}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx}\\
&= \varphi''_\alpha(x;\ y_1, y_2, \ldots y_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
f_\alpha'(a) &= \varphi_\alpha(a;\ b_1, b_2, \ldots b_m),\\
f_\alpha''(a) &= \varphi_\alpha'(a;\ b_1, b_2, \ldots b_m),\\
f_\alpha'''(a) &= \varphi_\alpha''(a;\ b_1, b_2, \ldots b_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

[§ 75, Gl. (53.) bis (59.)]

177.) Die Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

kann integrirt werden durch die Reihe

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots,$$

wobei

$$f(a) = b, \quad f'(a) = b_1, \ldots f^{(m-1)}(a) = b_{m-1}$$

ganz beliebige Grössen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(a) &= \varphi(a;\ b, b_1, \ldots b_{m-1}),\\
f^{(m+1)}(a) &= \varphi'(a;\ b, b_1, \ldots b_{m-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

[§ 75, Gl. (63.) bis (68.)]

178.) Sind $M(x, y) = X_1Y_1$, $N(x, y) = X_2Y_2$, wo $X_1$ und $X_2$ Functionen der einzigen Veränderlichen $x$, $Y_1$ und $Y_2$ Functionen der einzigen Veränderlichen $y$ sind, so kann die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

durch *Trennung der Variabeln* auf die Form

$$\frac{X_1}{X_2}dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0$$

gebracht und ohne Weiteres integrirt werden.

[§ 77, Gl. (2a.) bis (7.)]

179.) Sind $M(x, y)$ und $N(x, y)$ homogene Functionen $m^{\text{ten}}$ Grades, so führt die Substitution $y = xz$, oder $x = yz$ in der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + Nx, y)dy = 0$$

zur Trennung der Variabeln.

[§ 78, Gl. (1.) bis (9.)]

180.) Die lineare Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + y \,.\, f(x) = \varphi(x)$$

wird integrirt

a) nach *Bernoulli*, indem man $y = uz$ setzt und $u$ so bestimmt, dass in der dadurch sich ergebenden Differential-Gleichung der Factor von $z$ verschwindet;

b) nach *Lagrange* durch Variation der Constanten, indem man bei dem Integral der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y \,.\, f(x) = 0$$

die Integrations-Constante als eine Function von $x$ betrachtet;

c) durch den *integrirenden Factor*

$$\psi(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Durch jede dieser drei Methoden findet man

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \varphi(x) \,.\, e^{\int f(x)dx} dx + C\right].$$

[§ 80, Gl. (9.), (37.) und (70.)]

181.) Ebenso kann man die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = y^n \cdot \varphi(x)$$

integriren, indem man $y = uz$ setzt und $u$ so bestimmt, dass in der sich daraus ergebenden Differential-Gleichung der Factor von $z$ verschwindet.

[§ 81, Gl. (1.) bis (12.)]

182.) Die Function $v$ heisst ein *integrirender Factor* der Differential-Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

wenn $v(Mdx + Ndy)$ ein *vollständiges Differential* ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

[§ 84, Gl. (1.)]

183.) Ist $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $x$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen $x$.

[§ 84, Gl. (4.)]

184.) Ist $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $y$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen $y$.

[§ 84, Gl. (14.)]

185.) Ist $\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z = xy$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM - yN}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veeränderlichen $z$.

[§ 84, Gl. (25.)]

186.) Ist $\frac{x^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z=\frac{y}{x}$, so ist der integrirende Factor

$$v=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM+yN}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen $z$.

[§ 84, Gl. (39.)]

187.) Ist $\frac{1}{yM-xN}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z=x^2+y^2$, so ist der integrirende Factor

$$v=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM-xN)}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen $z$.

[§ 84, Gl. (52.)]

188.) Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ der Kürze wegen mit $p$, so wird die Integration der Differential-Gleichung

$$x=\varphi(p)$$

durch die Ermittelung von

$$y=\int\varphi'(p)\,.\,pdp+C$$

ausgeführt. [§ 86, Gl. (2.) und (5.)]

189.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y=\varphi(p)$$

wird durch die Ermittelung von

$$x=\int\frac{\varphi'(p)dp}{p}+C$$

ausgeführt. [§ 86, Gl. (15.) und (18.)]

190.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$x=f(y,p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy-\frac{\partial f}{\partial p}dp=0$$

zurückgeführt. [§ 86, Gl. (29.) und (30.)]

191.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y = f(x, p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx = 0$$

zurückgeführt. [§ 86, Gl. (40.) und (41.)]

191a.) So kann man z. B. die Differential-Gleichung

$$y = x \cdot f(p) + \varphi(p)$$

auf die Integration der *linearen Differential-Gleichung erster Ordnung*

$$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \cdot f'(p) = \varphi'(p)$$

zurückführen. [§ 86, Gl. (43.) und (45.)]

192.) Aus der *allgemeinen* Lösung

$$G(x, y, C) = 0$$

einer Differential-Gleichung findet man die *singuläre* durch Elimination von $C$ aus den beiden Gleichungen

$$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

[§ 87, Gl. (3.) und (6.)]

193.) Die Differential-Gleichung der *isogonalen* Trajetorien, welche die sämmtlichen Curven der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter dem constanten Winkel $\vartheta$ schneiden, findet man durch Elimination von $u$ aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0$$

und

$$(F_1 \cos\vartheta - F_2 \sin\vartheta) dx + (F_1 \sin\vartheta + F_2 \cos\vartheta) dy = 0.$$

[§ 89, Gl. (1.) und (8.)]

194.) Die Differential-Gleichung der *orthogonalen* Trajectorien, welche die sämmtlichen Curven der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter rechtem Winkel schneiden, findet man durch Elimination von $u$ aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad -F_2 dx + F_1 dy = 0.$$

[§ 89, Gl. (11.)]

195.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)}.$$ [§ 90, Gl. (55.) und (57.)]

196.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$f(x) \cdot g(y) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(x)dx}{f'(x)} = \frac{g(y)dy}{g'(y)}.$$

[§ 90, Gl. (67.) und (70.)]

197.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$F(r, \varphi, u) = 0$$

genügen einer Differential-Gleichung, die man durch Elimination von $u$ aus den Gleichungen

$$F(r, \varphi, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial r} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

findet. [§ 90, Gl. (75.), (80.) und (83.)]

198.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dr}{r^2 . f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)}.$$ [§ 90, Gl. (101.) und (103a.)]

199.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$f(r) \cdot g(\varphi) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(r)dr}{r^2 . f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

[§ 90, Gl. (104.) und (105a.)]

200.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$$

kann auf die Form

$$y = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}\varphi(z)dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{C_{m-1}x}{1!} + C_m$$

gebracht werden. [§ 92, Gl. (1.) und (22.)]

201.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{oder} \quad q = f(p)$$

findet man durch Elimination von $p$ aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{pdp}{f(p)} + C_2.$$

[§ 93, Gl. (1.), (3.) und (5.)]

202.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \text{oder} \quad p = \varphi(q)$$

findet man durch Elimination von $q$ aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{\varphi'(q)dq}{q} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{\varphi(q)\,\varphi'(q)dq}{q} + C_2.$$

[§ 93, Gl. (23.) und (26.)]

203.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

ist

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int f(y)\,dy}} + C_2.$$

[§ 94, Gl. (1.) und (7.)]

204.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A.e^{\frac{x}{a}} + B.e^{-\frac{x}{a}}.$$ [§ 94, Gl. (8.) und (18.)]

38*

205.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A\sin\left(\frac{x}{a}\right) + B\cos\left(\frac{x}{a}\right).$$

[§ 94, Gl. (19.) und (26.)]

206.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u), \quad \text{wo} \quad u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}},$$

findet man, indem man die Gleichung

$$x = \pm\int\frac{du}{\sqrt{C_1 + 2\int f(u)du}} + C_2$$

nach $u$ auflöst und das in Formel Nr. 200 angegebene Verfahren anwendet. [§ 94, Gl. (29.), (33.) und (34.)]

207.) Die Differential-Gleichung

$$F\left(x, \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

reducirt sich auf die Form

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}\right) = 0,$$

wenn man $\frac{d^ny}{dx^n}$ mit $u$ bezeichnet. [§ 95, Gl. (1.) bis (3.)]

208.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und $y$ zur unabhängigen Veränderlichen macht. [§ 95, Gl. (10.) bis (13.)]

209.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn die Gleichung in Bezug auf die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^my}{dx^m}$ homogen ist, indem man durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = yu$$

$u$ als abhängige Veränderliche einführt. [§ 95, Gl. (76.) bis (81.)]

210.) Das allgemeine Integral der homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^my}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = 0,$$

in welcher die Coefficienten $f_1, f_2, \ldots f_m$ constante Grössen sind, ist

$$y = C_1 \,.\, e^{r_1 x} + C_2 \,.\, e^{r_2 x} + \cdots + C_m \,.\, e^{r_m x},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots r_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$F(u) = u^m + f_1 u^{m-1} + f_2 u^{m-2} + \cdots + f_{m-1} u + f_m = 0$$

sind, vorausgesetzt, dass $r_1, r_2, \ldots r_m$ sämmtlich von einander verschieden sind. [§ 97, Gl. (1.), (15.) und (17.)]

211.) Ist

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi,$$

so kann man $C_1 \,.\, e^{r_1 x} + C_2 \,.\, e^{r_2 x}$ ersetzen durch

$$e^{ax}[A \cos(bx) + B \sin(bx)].$$

[§ 97, Gl. (26.) bis (28.)]

212.) Sind unter den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_m$ der Gleichung $F(u) = 0$ gleiche vorhanden, ist z. B.

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_\alpha,$$

so giebt Formel Nr. 210 nicht mehr das allgemeine Integral; dieses hat in diesem Falle vielmehr die Form

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_\alpha x^{\alpha-1}) e^{r_1 x} + C_{\alpha+1} \,.\, e^{r_{\alpha+1} x} + \cdots + C_m \,.\, e^{r_m x}.$$

[§ 97, Gl. (44.), (51.) und (61.)]

213.) Das allgemeine Integral der nicht homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^my}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x)$$

ist, wenn die Wurzeln der Gleichung $F(u) = 0$ sämmtlich von einander verschieden sind,

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)}\Big[C_1 + \int_0^x \varphi(t)\,.\,e^{-r_1 t}dt\Big] + \frac{e^{r_2 x}}{F'(r_2)}\Big[C_2 + \int_0^x \varphi(t)\,.\,e^{-r_2 t}dt\Big]$$

$$+ \cdots + \frac{e^{r_m x}}{F'(r_m)}\Big[C_m + \int_0^x \varphi(t)\,.\,e^{-r_m t}dt\Big].$$ [§ 98, Gl. (1.) und (23.)]

214.) Ist $y_1$ ein particuläres Integral der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = 0,$$

so lässt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x)$$

durch die Substitution

$$y = y_1\Big(\int u dx + A\Big), \quad \text{oder} \quad u = \frac{d}{dx}\Big(\frac{y}{y_1}\Big)$$

auf eine nicht homogene Differential-Gleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$y_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + g_1(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + g_{m-1}(x)\,.\,u = \varphi(x)$$

zurückführen. [§ 98, Gl. (36.) bis (43.)]

215.) Sind $n$ particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)\,.\,y = 0$$

bekannt, so lässt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)\,.\,y = \varphi(x)$$

auf eine andere nicht homogene Differential-Gleichung $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$L_0(x)\frac{d^{m-n}v}{dx^{m-n}} + L_1(x)\frac{d^{m-n-1}v}{dx^{m-n-1}} + \cdots + L_{m-n}(x)\,.\,v = \varphi(x)$$

zurückführen, wobei

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

und

$$C_1 = \int v dx + A_1, \quad C_2 = \int \varphi_1(x) . v dx + A_2, \ldots$$

$$C_n = \int \varphi_{n-1}(x) . v dx + A_n .$$

Die Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots \varphi_{n-1}(x)$ sind durch die Gleichungen

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

oder

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_3}{dx} = \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \cdots \frac{dC_n}{dx} = \varphi_{n-1}(x) . \frac{dC_1}{dx}$$

erklärt. [§ 98, Gl. (52.) bis (66.)]

Gebauer-Schwetschke'sche Buchdruckerei, Halle (Saale).