

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299144

x
1070

1070
x

VORTRÄGE

über

BRÜCKENBAU,

von

Dr. **E. Winkler,**

Professor an der königl. technischen Hochschule zu Berlin.

Theorie der Brücken.

II. Heft.

Theorie der gegliederten Balkenträger.

Zweite Auflage.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1881.

THEORIE DER BRÜCKEN.

Theorie der gegliederten Balkenträger

von

Dr. **E. Winkler.**

Zweite Auflage.

Mit 234 Holzschnitten und 8 lithographirten Tafeln.

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen ist vorbehalten.

J. Pr. 18165.



WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1881.

VII C. 6.
500.



II ~~4895~~



Winkler, E. II - 351582

Zweite Auflage.

Verlag von Julius Springer, Berlin

Das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen ist vorbehalten.

WILK.

Druck und Verlag von Julius Springer, Berlin

1931

Akc. Nr. 5135/51

BRK-10-62 2014

INHALT.

A. Statisch bestimmte Stabsysteme.

I. Kap. Allgemeine Bestimmung der Spannungen in Stabsystemen	Seite 1
--	------------

I. Parallel-Gitterträger.

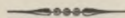
II. Kap. Träger mit einfachem eintheiligem Gitterwerke	11
III. Kap. Träger mit einfachem mehrtheiligem Gitterwerke	32
IV. Kap. Träger mit kombinirtem Gitterwerke.	69
A. Ohne künstliche Anspannung	69
B. Mit künstlicher Anspannung	72
V. Kap. Materialmenge	81

II. Gitterträger mit polygonalen Gurten.

VI. Kap. Allgemeine Theorie der Träger mit einfachem eintheiligem Gitterwerke	98
VII. Kap. Träger mit mehrtheiligem Gitterwerke im Allgemeinen	117
VIII. Kap. Parabelträger	127
IX. Kap. Pauli'sche Träger.	155
X. Kap. Halbparabelträger	159
XI. Kap. Hyperbelträger	175
XII. Kap. Verschiedene Trägerformen	199
XIII. Kap. Kontinuirliche Träger mit gekrümmten Gurten	221

B. Theorien, welche die Anwendung der Elastizitätslehre erfordern.

XIV. Kap. Theorie der statisch unbestimmten Systeme.	239
XV. Kap. Einfluss fester Verbindungen	276
XVI. Kap. Formänderung der Träger	348
XVII. Kap. Kontinuirliche Träger	372
Literatur	389
Bezeichnungen	393



II. Abschnitt.

Die inneren Kräfte der Balkenträger.

A. Statisch bestimmte Stabsysteme.

I. Kapitel.

Allgemeine Bestimmung der Spannungen in Stabsystemen.

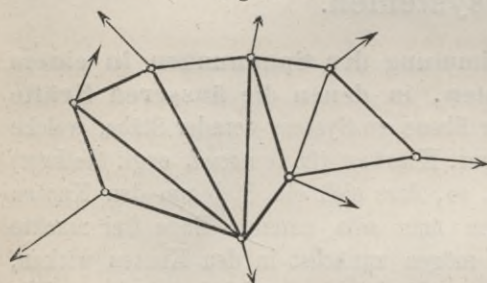
§. 1. Analytische Bestimmung der Spannungen in einem Stabsysteme mit Gelenkknoten, in denen die äusseren Kräfte wirken. Wir denken uns in der Ebene ein System gerader Stäbe, welche unter sich mit ihren Enden zu sogen. Knoten (fr. *le noeud*, engl. *the knot*) gelenkartig verbunden sind, d. h. so, dass sich ein Stab um den Knoten frei würde drehen können, wenn man sein anderes Ende frei machte (Fig. 1). Alle äusseren Kräfte mögen zunächst in den Knoten wirken, während wir uns die Stäbe selbst vorläufig als gewichtlos denken. Wir nehmen an, dass die Konstruktion und Verbindung der Stäbe eine derartige ist, dass dieselben durch die an ihren Enden übertragenen Kräfte geradlinig bleiben. In jedem Stabe tritt alsdann eine in allen Querschnitten gleichgrosse Spannung (franz. *la tension*, engl. *the stress*) auf, wenn wir unter Spannung die Summe aller in einem Querschnitte senkrecht zu demselben auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Elementarspannungen verstehen.

Zum Zwecke der Bestimmung dieser Spannungen stellt man für jeden einzelnen Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschiebung in zwei verschiedenen Richtungen auf, indem man die Summe der Komponenten der Spannungen und die im betreffenden Knotenpunkte wirkenden äusseren Kräfte nach diesen beiden Richtungen gleich Null setzt. Hierbei müssen sich zunächst so viele Gleichungen ergeben, als Stäbe oder unbekannte Spannungen vorhanden sind; da aber auch die äusseren Kräfte unter sich im Gleichgewichte sein müssen, also Gleichgewicht gegen Verschiebung nach zwei verschiedenen Richtungen und gegen Drehung um einen beliebigen Punkt stattfinden muss, so müssen sich noch drei Gleichungen mehr ergeben. Man kann hierbei etwa drei Komponenten der äusseren Kräfte als unbekannt annehmen. Bezeichnen wir also die Anzahl sämtlicher Stäbe mit n , die Anzahl der Knotenpunkte mit m , so muss

1. $2m = n + 3$

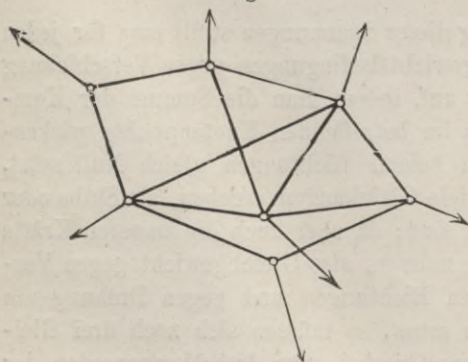
sein, damit die Aufgabe, die Spannungen der einzelnen Stäbe zu ermitteln, vollkommen bestimmt und zwar rein statisch bestimmt ist. Wir nennen ein solches System ein statisch bestimmtes. Ist $2m > n + 3$, so kann ebenfalls Gleichgewicht herrschen, wenn noch besondere Bedingungen und zwar $2m - n - 3$ Bedingungen hinzukommen. In diesem Falle tritt bei Aenderung der Kräfte eine Störung des Gleichgewichts ein, wesshalb wir ein solches System ein labiles nennen; wir gehen auf derartige Systeme erst bei den Hänge- und Sprengwerken ein. Ist dagegen $2m < n + 3$, so ist die Aufgabe statisch nicht mehr zu lösen; auf diesen Fall des statisch unbestimmten Systems kommen wir später zurück, indem wir uns zunächst nur mit dem Falle befassen, wo die Aufgabe rein statisch zu lösen ist.

Fig. 1.



$3 + 2x$ Seiten und es ist in der That $2(3 + x) = 3 + 2x + 3$. Wir nennen ein solches System ein Dreieckssystem (franz. *la système triangulaire*, engl. *the triangular-system*). Ein statisch bestimmtes System entsteht aber allgemein auch in der Weise, dass man an zwei schon vorhandene beliebige Knotenpunkte zwei zu einem neuen Knotenpunkte vereinigte Stäbe anschliesst, wie z. B. Fig. 2 zeigt; Kreuzungen der Stäbe können hierbei vorkommen, nur

Fig. 2.



Ein solches statisch bestimmtes System entsteht am einfachsten durch Aneinanderreihung von Dreiecken in der Weise, dass durch jedes Dreieck zwei neue Seiten und eine neue Ecke hinzukommen (Fig. 1); denn reiht man in dieser Weise an ein Dreieck noch x Dreiecke, so entstehen $3 + x$ Ecken und $3 + 2x$ Seiten und es ist in der That $2(3 + x) = 3 + 2x + 3$. Wir nennen ein solches System ein Dreieckssystem (franz. *la système triangulaire*, engl. *the triangular-system*). Ein statisch bestimmtes System entsteht aber allgemein auch in der Weise, dass man an zwei schon vorhandene beliebige Knotenpunkte zwei zu einem neuen Knotenpunkte vereinigte Stäbe anschliesst, wie z. B. Fig. 2 zeigt; Kreuzungen der Stäbe können hierbei vorkommen, nur sind die sich kreuzenden Stäbe nicht mit einander zu verbinden.

Man kann einen beliebigen Theil A des Systems vom übrigen Theile trennen, wenn man am ersteren die Spannungen des letzteren als äussere Kräfte anbringt; damit nun sämtliche Spannungen auf statischem Wege bestimmbar seien, darf der Theil A kein statisch unbestimmtes

System sein. Sonach dürfen je vier Knotenpunkte durch höchstens fünf Stäbe, nicht aber durch sechs Stäbe verbunden sein. Bei der vorhin an-

gegebenen allgemeinen Bildungsweise eines statisch bestimmten Systemes kann indess dieser Fall nicht eintreten.

Die sich als Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte ergebenden Gleichungen sind vom ersten Grade, so dass die Auflösung derselben leicht durchzuführen ist.

Die Spannung eines Theiles kann entweder positiv oder ein Zug (franz. *la traction*, engl. *the tension, the pull, the traction*) oder negativ oder ein Druck (franz. *la pression*, engl. *the pressure, the thrust*) sein. Da man indess in Voraus den Sinn der Spannung nicht wissen kann, so ist es rathsam, beim Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knotenpunkte alle Spannungen als positiv, also vom betreffenden Knotenpunkte nach dem betreffenden Stabe zu gerichtet anzunehmen. Das aus der Rechnung hervorgehende Vorzeichen der Spannung gibt alsdann den Sinn derselben an.

§. 2. Grafische Bestimmung der Spannungen durch die Polygonalmethode. Das Gleichgewicht der äusseren Kräfte erfordert: 1. dass sich die Kräfte zu einem geschlossenen Polygone, dem *Kräftepolygone* (franz. *le polygon des forces*, engl. *the polygon of forces*) aneinanderreihen lassen und 2. dass sich ein den Kräften entsprechendes *Seilpolygon* (franz. *le polygon funiculaire*, engl. *the polygonale frame, the funicular polygon*) konstruiren lasse, dessen Ecken also in die Richtungen der Kräfte fallen und dessen Seiten parallel den Strahlen sind, welche von einem beliebig gewählten Pole nach den Ecken des Kräftepolygones gehen.

Für jeden Knotenpunkt ist nun ein Kräftepolygon zu konstruiren, dessen eine Seite die im Knotenpunkte wirkende äussere Kraft und dessen übrige Seiten die Spannung der Stäbe nach Grösse und Richtung darstellen. Von den sämtlichen Seiten des Kräftepolygones sind die Richtungen gegeben; es ist demnach möglich, das Polygon zu konstruiren, wenn die Längen sämtlicher Seiten, weniger zwei, gegeben sind. Eine dieser Seiten ist die gegebene äussere Kraft; man muss also ausserdem noch sämtliche Seiten, weniger drei, kennen. Am einfachsten beginnt man mit einem Knotenpunkte, in welchem nur zwei Stäbe zusammenstossen, für welches also das Polygon, hier ein Dreieck, vollständig bestimmt ist. Sind durch Konstruktion derselben die Spannungen der beiden betreffenden Stäbe gefunden, so wird es möglich, für die beiden anstossenden Knotenpunkte die Konstruktion durchzuführen, wenn in diesem nicht mehr als 3 Stäbe vereinigt sind. So kann es möglich werden, ein Polygon mit Hilfe der zunächst vorhergehenden zu konstruiren.

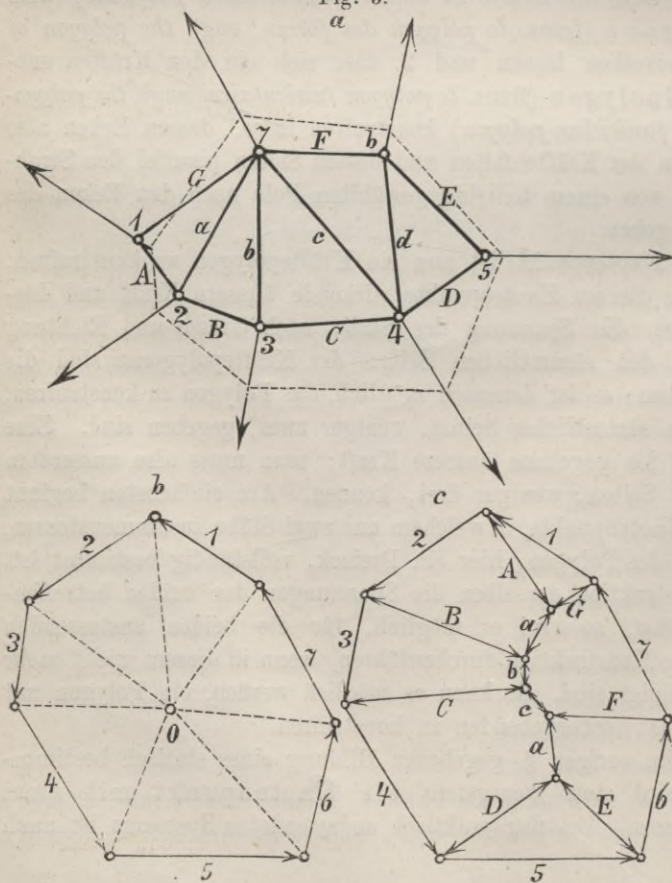
Nach der im vorigen §. gegebenen Bildung eines statisch bestimmten Systemes wird stets wenigstens ein Knotenpunkt mit zwei Stäben vorkommen. Bei den praktisch angewendeten Systemen ist auch

stets eine allmälige Konstruktion der Kräftepolygone möglich, wenn man von einem Knotenpunkte mit zwei Stäben beginnt. Es sind indess Systeme denkbar, wo eine allmälige Konstruktion nicht mehr möglich wird, wo also besondere geometrische Lösungen einzutreten haben.

Es ist nicht rathsam, die Kräftepolygone für einzelne Knotenpunkte getrennt zu zeichnen; man gelangt vielmehr schneller und einfacher zum Ziele und erhöht die Uebersichtlichkeit, wenn man die einzelnen Polygone zu einer einzigen Figur, einem sogenannten Kräfteplane, aneinander reiht, so dass die Seiten des Polygons der äusseren Kräfte gleichzeitig Seiten der Kräftepolygone für die einzelnen Knotenpunkte werden. Hierbei kann es allerdings vorkommen, dass eine Spannung zum Zwecke der Konstruktion eines der nächsten Polygone parallel verschoben werden muss.

Wir wollen noch speciell ein Dreieckssystem betrachten. Alle Stäbe, welche die Knotenpunkte zu einem geschlossenen Polygone verbinden, nennen wir Randstäbe, die übrigen die Zwischenstäbe. Am rathsamsten ist es, die äusseren Kräfte in der Reihenfolge der Ecken des Randstabpolygones oder in cyklischer Ordnung an einander zu reihen (Fig. 3).

Fig. 3.



In jedem Kräftepolygone muss die Richtung sämtlicher Kräfte in ein und demselben Sinne des Polygonumfanges wirken. Man zieht nun zunächst von den Ecken des Kräftepolygones (Fig. 3c) Parallelen zu den betreffenden Randstäben und konstruiert jetzt zwischen diesen parallel zu den entsprechenden Zwischenstäben eine gebrochene Linie. Hier erscheint

jede Kraft nur ein einziges Mal oder die Kräftepolygone für die einzelnen Knotenpunkte schliessen vollständig aneinander. Wir nennen diese Methode die Polygonalmethode.

Der Sinn der Spannung eines Theiles lässt sich leicht entscheiden. Wirkt in dem betreffenden Kräftepolygone die Kraft (in demselben Sinne des Polygonumfanges genommen, wie die im betreffenden Knotenpunkte wirkende äussere Kraft) in der Richtung vom Knotenpunkte nach dem anderen Ende des betreffenden Stabes, so ist die Spannung ein Zug, im entgegengesetzten Falle ein Druck.

Maxwell (1864) und in weiterer Ausbildung Cremona (1872) betrachten das gegebene Stabsystem mit den an ihm wirkenden äusseren Kräften einerseits und den zugehörigen Kräfteplan andererseits als Projektionen eines sogenannten Nullsystemes oder zweier reciproker Polyeder, bei denen (für ein beliebiges Kraftsystem) die Ecken des einen die Pole der Flächen des anderen sind und zwar als Projektionen auf eine zur Centralaxe senkrechte Ebene. Die Methode ist daher auch unter dem Namen Maxwell'sche oder Cremona'sche Methode bekannt.

§. 3. Bestimmung der Spannungen durch die Schnittmethode. Schneidet man ein Stabsystem durch einen ganz beliebigen Schnitt in zwei Theile A und B , so müssen die Spannungen der zerschnittenen Stäbe als äussere Kräfte, welche der eine Theil B auf den anderen Theil A ausübt, angebracht werden, um das Gleichgewicht zu erhalten. Diese Kräfte werden mit den auf den Theil A wirkenden äusseren Kräften oder der Resultante R derselben im Gleichgewichte sein. Werden drei Theile zerschnitten, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, so lassen sich die Spannungen bestimmen, da sich für die Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen lassen.

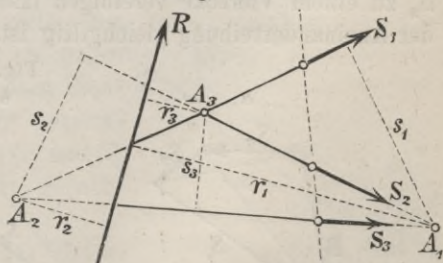
Am einfachsten ergibt sich eine der Spannungen S_1, S_2, S_3 , wenn man die Summe der Momente aller vier Kräfte für den Durchschnitt A der Richtungen der beiden anderen Spannungen Null setzt, weil für diesen Momentenpunkt das Moment dieser beiden Spannungen Null wird, so dass nur das Moment der äusseren Kraft

R und der zu bestimmenden Spannung zu berücksichtigen ist. Bezeichnen wir daher die Durchschnittspunkte der Spannungen S_2, S_3, S_1 und S_1, S_2 bezüglich mit A_1, A_2, A_3 , die Abstände dieser Punkte von der Kraft R mit r_1, r_2, r_3 und die Abstände derselben von den Richtungen der drei Spannungen mit s_1, s_2, s_3 (Fig. 4), so wird

$$2. \quad S_1 = R \frac{r_1}{s_1}, \quad S_2 = R \frac{r_2}{s_2}, \quad S_3 = R \frac{r_3}{s_3}.$$

Das Vorzeichen bestimmt man am besten durch den Umstand, dass die

Fig. 4.



fragliche Spannung S und die äussere Kraft R entgegengesetzte Drehungsrichtungen hinsichtlich des betreffenden Momentenpunktes A haben müssen. Je nachdem nun die so bestimmte Richtung der Spannung vom Schnittpunkte aus nach dem Aeusseren oder dem Inneren des fraglichen Stabes zu wirkt, ist sie ein Zug- oder ein Druck.

Diese Auffassung gestattet auch eine einfache grafische Lösung. Die Richtung der Resultante der zu bestimmenden Spannung S und der Kraft R muss nämlich durch den Durchschnittspunkt A der beiden anderen Spannungen gehen; ist also B der Durchschnittspunkt der fraglichen Spannung mit der Kraft R , so muss die Resultante beider Kräfte die Richtung AB haben. Hieraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion: Es seien noch B_1, B_2, B_3 die Durchschnittspunkte der drei Spannungen S_1, S_2, S_3 mit der Kraft R und CR stelle die Kraft R nach Grösse und Richtung dar. Zieht man durch C Parallelen zu den drei Spannungen, durch R Parallelen zu den drei Geraden A_1B_1, A_2B_2 und

Fig. 5.

A_3B_3 , welche die vorigen Parallelen bezüglich in S_1, S_2, S_3 schneiden, so stellen die Strecken CS_1, CS_2, CS_3 die Spannungen dar. Die Richtung derselben ist von S_1, S_2, S_3 nach C hin zu nehmen und jenachdem diese Richtung, am betreffenden Schnittpunkte des Stabes gedacht, nach dem Aeusseren oder Inneren des Stabes zeigt, ist die Spannung ein Zug oder ein Druck. In Fig. 5 beispielsweise ist S_1 ein Druck, S_2 und S_3 ein Zug.

Da sich die im Gleichgewichte befindlichen vier Kräfte R, S_1, S_2, S_3 zu einem Vierecke vereinigen lassen müssen, wobei die Reihenfolge der Aneinanderreihung gleichgiltig ist, so lassen sich statt der Anordnung

Fig. 6.

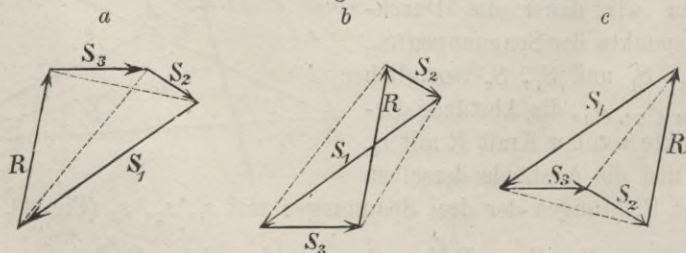


Fig. 5 b mit sieben Linien verschiedene andere Anordnungen mit nur sechs Linien treffen (Fig. 6 a, b, c).

Die Resultante R für einen beliebigen Schnitt bestimmt sich leicht mit Hilfe des Kräfte- und Seilpolygons der äusseren Kräfte.

Dieses Verfahren, welches wir die Schnittmethode und zwar bezüglich rechnende oder grafische Schnittmethode nennen, ist natürlich auch noch anwendbar, wenn vom Schnitte mehr als drei Stäbe getroffen werden, die Spannungen derselben aber, mit Ausnahme von dreien, bereits bekannt sind. Alsdann hätte man die bekannten Spannungen mit R zu einer Resultante zu vereinigen.

Im Allgemeinen führt die im vorigen § gezeigte Polygonalmethode schneller zum Ziele, wenn für die gegebenen äusseren Kräfte die Spannungen sämtlicher Stäbe zu bestimmen sind; dagegen ist die soeben gezeigte Schnittmethode meist vorzuziehen, wenn für gegebene äussere Kräfte nur die Spannungen einzelner Stäbe zu bestimmen sind.

Die rechnende Schnittmethode wurde namentlich in ihrer Anwendung auf Konstruktionen durch Ritter (1861) ausgebildet; sie ist daher vielfach unter dem Namen Ritter'sche Methode bekannt. Die grafische Schnittmethode wurde zuerst von Culmann (1864) angewendet.

§. 4. Einfluss von Kräften, welche nicht in den Knoten wirken. Wir setzen jetzt voraus, dass auf einen der Stäbe des Systemes beliebige Kräfte mit der Resultante G (Fig. 7) wirken. Zerschneidet man den Stab in einem beliebigen Querschnitte, so sind die senkrecht auf denselben wirkenden Spannungen in den einzelnen Fasern im Allgemeinen verschieden; ausser den Normalspannungen wirken aber auch Schubspannungen im Querschnitte selbst.

Legen wir die Schnitte unmittelbar neben die Enden, so wirkt die Resultante aller elementaren Normalspannungen des Querschnittes in Richtung der Verbindung der Mitten der Gelenke, welche wir die Axe des Stabes nennen. Wir legen aber die Schnitte an den Enden nicht normal zum Stabe, sondern parallel zur Kraft G (und normal zur Kraftebene). Die auf die Schnitte wirkenden Spannungen zerlegen wir in zwei in den Schnitten selbst wirkende Schubspannungen G_1 und G_2 und zwei in der Richtung von AB wirkende Kräfte. Die letzteren müssen, wenn Gleichgewicht gegen Verschiebung in einer zu G senkrechten Richtung bestehen soll, gleich sein; wir bezeichnen sie mit S . Die Schubspannungen G_1 und G_2 sind gleich den in A und B wirksam gedachten Komponenten von G .

Hieraus folgt, dass man, um das Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte zu untersuchen, sich die auf die Stäbe selbst wirkenden Lasten auf die Knotenpunkte vertheilt denken kann. Die sich hieraus nach den oben aufgestellten Regeln ergebenden Spannungen sind die auf schiefe, zur Rich-

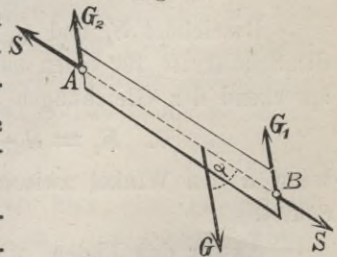
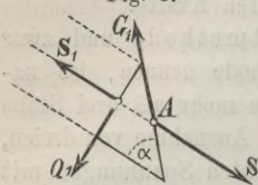


Fig. 7.

tung der auf den betreffenden Stab wirkenden Resultante parallel gelegte
 Fig. 8. Schnitte wirkenden Spannungen.



Will man die auf einen Normalschnitt wirkende Spannung S_1 und S_2 sowie die in diesem wirkende Schubspannung Q_1 und Q_2 kennen lernen, so ergibt sich aus dem Gleichgewichte eines dreiseitigen Prismas (Fig. 8) leicht

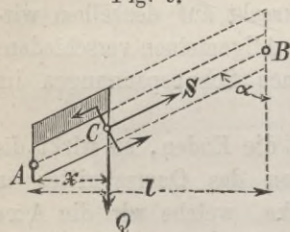
$$3. \begin{cases} S_1 = S - G_1 \cos \alpha, & S_2 = S + G_2 \cos \alpha, \\ Q_1 = G_1 \sin \alpha, & Q_2 = G_2 \sin \alpha. \end{cases}$$

Bei gleichmässig vertheilter Last wird $G_1 = G_2 =$ der halben auf den Stab wirkenden Last.

In dieser Weise ist natürlich auch das Gewicht der Stäbe zu berücksichtigen.

Wenn man den Schnitt nicht an eines der Enden legt, so ist auf die im Schnitte selbst wirkende Schubkraft und auf das Moment der Normalspannungen Rücksicht zu nehmen. Wir wollen hier nur eine über die ganze Länge des Stabes gleichmässig vertheilte Last voraussetzen. Die Projektion des Stabes auf eine zur Richtung der Last senkrechte Gerade habe die Länge l und die Last pro Längeneinheit dieser Projektion sei $= q$,

Fig. 9.



also die ganze Last $= ql$. Führen wir den Schnitt in einem Punkte C (Fig. 9), dessen Abstände AC und BC von den Enden des Stabes die Projektionen x und x_1 haben, parallel zur Richtung der Last, so ist die in der Schnittfläche wirkende Schubkraft Q :

$$4. \quad Q = \frac{1}{2} q (l - 2x).$$

Die parallel der Axe wirkenden Spannungen lassen sich zusammensetzen zu einer in Richtung der Axe wirkenden Kraft S und einem Kräftepaare mit dem Momente

$$5. \quad M = \frac{q x x_1}{2}.$$

Bezeichnet S_1 und Q_1 die in Richtung der Axe wirkende Kraft und die Schubkraft für einen normal zur Axe geführten Schnitt, so ist, entsprechend den Gleichungen 3:

$$6. \quad S_1 = S - Q \cos \alpha, \quad Q_1 = Q \sin \alpha,$$

wenn α den Winkel zwischen der Axe und der Richtung der Last bedeutet.

Ausser den Enden, wo $M = 0$, $Q = \frac{1}{2} ql$ wird, eignet sich auch die Mitte des Stabes für den Schnitt, weil hier $Q = 0$ wird. Das Moment M wird hier $= \frac{1}{8} ql^2$.

§. 5. **Querschnittsbestimmung.** Der Querschnitt f der nur auf Zug oder Druck beanspruchten Stäbe wurde bisher in der Regel dadurch bestimmt, dass man die grösstmögliche Spannung, welche der Stab aufzunehmen hat, durch einen Koeffizienten K , die sogenannte zulässige Inanspruchnahme, die zulässige spezifische Spannung oder den Sicherheitskoeffizienten dividirte. Bei dieser Bestimmungsweise ist es nur nöthig, die Summe der vom Eigengewichte erzeugten Spannung und der von der zufälligen Last erzeugten Maximalspannung zu bestimmen.

In neuerer Zeit aber wendet man sich mehr und mehr einer anderen Bestimmungsweise zu, welche den Einfluss der Wiederholung der Beanspruchung berücksichtigt. Bei dieser Bestimmungsweise ist es nothwendig, die Spannungen, welche das Eigengewicht erzeugt und die obere und untere Grenze der von der zufälligen Last erzeugten Spannung einzeln zu bestimmen. Die beiden letztgenannten Grenzen können nie in demselben Sinne wirken; es muss vielmehr die eine der beiden Grenzen Null sein oder es müssen beide Grenzen im entgegengesetzten Sinne wirken. Wir haben also die vom Eigengewichte erzeugte Spannung, sowie das positive und negative Maximum der von der zufälligen Last erzeugten Spannungen zu bestimmen, wobei das eine der beiden letzteren Null sein kann.

Nach der vom Verfasser angegebenen Berechnungsweise¹⁾ bestimmt man den Querschnitt f eines Stabes nach der allgemeinen Formel

$$7. \quad f = \frac{P_0}{K_0} + \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_2},$$

wenn P_0 die vom Eigengewichte, P_1 , P_2 die obere und untere Grenze der von der zufälligen Last erzeugten Spannungen, K_0 , K_1 , K_2 Erfahrungskoeffizienten bedeuten; die Spannungen sind hierbei absolut einzuführen; P_2 kann jedoch Null werden.

Die Werthe von K_0 , K_1 , K_2 sind im Allgemeinen für vorwiegenden Zug und vorwiegenden Druck verschieden. Beim Schmiedeeisen lassen sie sich indessen für beide Beanspruchungsweisen als gleich annehmen, wenn man sowohl in den gezogenen als gedrückten Theilen die durch die Nietlöcher verloren gehenden Theile der Querschnittsflächen abzieht. Bei den gedrückten Theilen kann indess eine vom Maximaldruck $P_0 + P_1$, respektive $P_0 + P_2$ abhängige Vergrösserung des Querschnittes nothwendig werden, um das Einknicken zu verhüten; wir wollen indess an dieser Stelle nicht näher auf diesen Umstand eingehen.

§. 6. **Gitterträger.** Wir gehen nun dazu über, das Gesagte auf die Bestimmung der Spannungen in Gitterträgern anzuwenden, wobei wir zunächst, wie bisher annehmen, dass die Gitterträger aus einzelnen,

¹⁾ Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenkonstruktionen mit Rücksicht auf die Wöhler'schen Festigkeitsversuche bei wiederholter Beanspruchung. Wien, 1877.

an den Knotenpunkten gelenkartig mit einander verbundenen Theilen bestehen.

Der Gitterträger (franz. *la poutre en treillis*, engl. *the trellis girder*) besteht aus zwei Gurten oder Gurtungen (franz. *la semelle*, *la plate-bande*, engl. *the chord*, *the boom*, *the flang*), so dass man Obergurt (franz. *la semelle supérieure*, engl. *the top-chord*, *the upper boom*) und Untergurt (franz. *la semelle inférieure*, engl. *the bottom-chord*, *the lower-boom*) unterscheiden kann. Zwischen den Gurten liegt das Gitterwerk (franz. *l'assemblage du treillis*, engl. *the trellis-work*), bestehend aus zwei oder drei Lagen von Gitterstäben (franz. *le lien*, engl. *the brace*). Gitterwerk mit nur zwei Lagen von Gitterstäben nennen wir einfaches Gitterwerk, solches mit drei Lagen von Gitterstäben kombinirtes Gitterwerk. Specielle Fälle des einfachen Gitterwerkes sind das Netzwerk, bei welchem beide Lagen unter gleichem Winkel geneigt sind und das Fachwerk, bei welchem die eine Lage vertikal, die andere geneigt ist, so dass wir hier Vertikalen und Diagonalen unterscheiden können. Nach der Beanspruchung auf Zug und Druck unterscheiden wir Zug- und Druckstäbe. Nach der Form der Gurte unterscheiden wir Parallelträger (franz. *la poutre en semelles parallèles*, *la poutre rectangulaire*, engl. *the parallel-girder*, *the parallel-truss*) mit geraden, parallelen Gurten und Träger mit gekrümmten Gurten (franz. *la poutre en semelles courbes*, engl. *the girder with arched chords*). Wir würden am schnellsten zum Ziele gelangen, wenn wir zunächst die letztere Klasse behandelten und durch Specialisirung die Regeln für Parallelträger ableiteten. Wir ziehen es indess des besseren Verständnisses wegen vor, zunächst die Regeln für Parallelträger direkt zu entwickeln.

Wir führen im Allgemeinen folgende Bezeichnung ein:

l die Spannweite;

h die Trägerhöhe, welche entweder konstant oder variabel ist;

α und β die Neigungswinkel der Gitterstäbe in beiden Lagen oder Schaaeren gegen die Vertikale;

g das Eigengewicht pro Längeneinheit;

p die zufällige Last pro Längeneinheit;

q die gesammte Last pro Längeneinheit $= g + p$;

$g_1, g_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ die auf den Ober- und Untergurt wirkenden Theile von g, p und q , falls eine solche Zerlegung möglich ist;

Q die Transversalkraft für einen beliebigen vertikalen oder geneigten Schnitt, d. i. die Summe oder Resultante aller auf einer Seite des Schnittes wirkenden äusseren Vertikalkräfte; wir nehmen die Transversalkraft als positiv, wenn die auf den linken Theil wirkende Resultante nach oben, oder die auf den rechten Theil wirkende Resultante nach unten wirkt;

M das Moment für diesen Schnitt, d. h. die Summe der Momente aller einzelnen auf einer Seite des Schnittes wirkenden Kräfte für einen bestimmten, noch näher zu bezeichnenden Momentenpunkt; wir nehmen das Moment als positiv, wenn die auf den linken Theil wirkende Resultante nach rechts oder die auf den rechten Theil wirkende Resultante nach links dreht;

S_1 und S_2 die Spannung des Ober- und Untergurtes an einer beliebigen Stelle;

P_1 und P_2 die Spannung der unter α und β geneigten Gitterstäbe.

I. Parallel-Gitterträger.

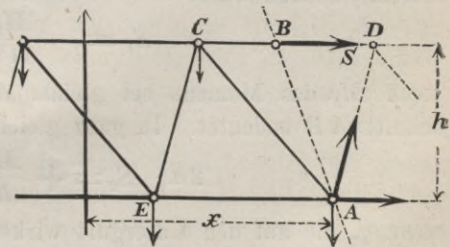
II. Kapitel.

Träger mit einfachem eintheiligem Gitterwerke.

§. 7. **Spannung in den Gurten. Berechnung.** Die Gitterstäbe bilden beim eintheiligem Gitterwerke mit den Gurtstücken Dreiecke. Um die Spannung S_1 in dem Obergurte zu finden, legen wir einen Schnitt durch das fragliche Gurtstück CD (Fig. 10) und den gegenüber-

Fig. 10.

liegenden Knotenpunkt A . Unter der Annahme, dass die Lasten nur in den Knotenpunkten wirken, ist die sonstige Lage des Schnittes ganz gleichgültig. Bezeichnen wir das Moment für diesen Schnitt und für den Punkt A als Momenten-



punkt mit M_1 , die Trägerhöhe mit h , so wird $S_1 h + M_1 = 0$, folglich

$$1. \quad S_1 = - \frac{M_1}{h}.$$

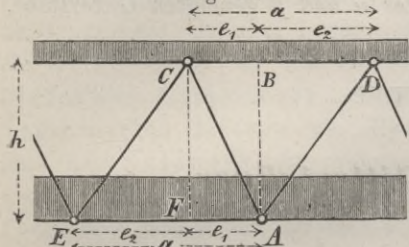
Ebenso ergibt sich für die Spannung S_2 eines Stückes AE des Untergurtes, wenn M_2 das Moment für einen durch dieses Gurtstück und den gegenüberliegenden Knotenpunkt C gelegten Schnitt für den Punkt C als Momentenpunkt bedeutet, zu

$$1a. \quad S_2 = + \frac{M_2}{h}.$$

Wir wollen nun eine gleichmässige Belastung und eine Belastung durch ein System von Einzellasten unterscheiden.

1. Gleichmässige Belastung. Wenn man, wie vorausgesetzt wurde, die äusseren Kräfte in den Knotenpunkten annimmt, so ist die Lage des Schnittes, wie bereits bemerkt, ganz gleichgültig. Wenn man aber die Last über beide Gurte gleichmässig vertheilt denkt, so ist die Lage des Schnittes nicht mehr gleichgültig; es dürfte alsdann wohl am rathsamsten sein, den Schnitt vertikal zu führen. Alsdann wird aber eine Reduktion nothwendig. Betrachten wir zunächst den durch den Knotenpunkt A des Untergurtes gelegten Schnitt AB (Fig. 11). Das Moment der am Untergurte wirkenden Last

Fig. 11.



ist hier bei gleichmässiger Vertheilung genau dasselbe, als bei der Wirkung in den Knotenpunkten. Im Obergurte ist hinsichtlich der auf die Länge CD wirkenden Last in C die Kraft $\frac{1}{2} q_1 a$ anzunehmen, wenn q_1 die auf den Obergurt wirkende Last pro Längeneinheit, a die Länge CD bedeutet; das Moment dieser Kraft in Beziehung auf A ist $-\frac{1}{2} q_1 a e_1$, wenn e_1 den Horizontalabstand der Punkte A und C bedeutet. Denkt man sich die Last über BC gleichmässig vertheilt, so ist das Moment in Beziehung auf $A = -q_1 e_1 \cdot \frac{1}{2} e_1 = -\frac{1}{2} q_1 e_1^2$. Setzen wir dieses Moment mehr x gleich dem vorigen, so haben wir $-\frac{1}{2} q_1 e_1^2 + x = -\frac{1}{2} q_1 a e_1$ oder $x = -\frac{1}{2} q_1 e_1 (a - e_1) = -\frac{1}{2} q_1 e_1 e_2$, wenn wir noch $BD = e_2$ setzen. Sonach wäre:

$$2. S_1 = -\frac{M_1}{h} + \frac{q_1 e_1 e_2}{2h},$$

wenn M_1 das Moment bei gleichmässiger Belastung für den Vertikalschnitt AB bedeutet. In ganz gleicher Weise ergibt sich

$$2a. S_2 = +\frac{M_2}{h} - \frac{q_2 e_1 e_2}{2h},$$

wenn q_2 die auf den Untergurt wirkende Last pro Längeneinheit, e_2 den Horizontalabstand der Punkte C und E bedeutet. Dies ist auch in Uebereinstimmung mit den im §. 4 aufgestellten Regeln.

Hierzu ist nun in Betreff des Eigengewichtes und der zufälligen Last noch Folgendes zu bemerken.

a. Eigengewicht. Hinsichtlich des Eigengewichtes könnte es nur noch fraglich sein, wie bei Anwendung der Formel 2 zu verfahren sei, wenn der eine Gurt nicht bis zu der durch den Lagerpunkt gehenden Vertikalen reicht. Bezeichnen wir das Gewicht dieses Gurtes mit g' , den Abstand seines Endes von der genannten Vertikalen mit b , so ist der Stützendruck $\frac{1}{2} g' (l - 2b)$, also das Moment für den Vertikalschnitt im Abstände x von der linken Stütze $M = \frac{1}{2} g' (l - 2b) x - \frac{1}{2} g' (x - b)^2$, d. i. $M =$

$\frac{1}{2} g' x (l - x) - \frac{1}{2} g' b^2$. Wenn man also den Gurt bei Bestimmung der Momente M_1 und M_2 bis zur Auflagervertikalen annimmt, so ist statt der Formel 2 zu setzen

$$3. \quad \begin{cases} S_1 = -\frac{M_1}{h} + \frac{g_1 e_1 e_2 + g' b^2}{2h} \\ S_2 = +\frac{M_2}{h} - \frac{g_2 e_1 e_2 + g' b^2}{2h} \end{cases}$$

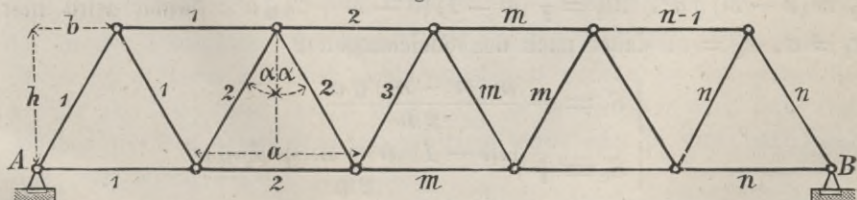
b. Zufällige Last. Ueberträgt sich die zufällige Last durch Querträger, welche an den Knotenpunkten angebracht sind, so geben die Formeln 1 und 2 vollständig richtige Resultate. Sind die Querträger an einzelnen Stellen des Gurtes zwischen den Knotenpunkten angebracht, so ist die zwischen zwei Knotenpunkten wirkende Last nach §. 4 auf beide Knotenpunkte zu vertheilen. Bei symmetrischer Vertheilung der Querträger gegen die Knotenpunkte bleiben die Regeln 2 auch hier noch richtig.

Bei kontinuierlichen Trägern ist zu beachten, dass der fragliche Querschnitt hinsichtlich des positiven Momentes von der zufälligen Last bedeckt, hinsichtlich des negativen Momentes unbedeckt ist (s. Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl. §. 49). Bezeichnet man daher die am Ober- und Untergurte wirkenden Theile der zufälligen Last mit p_1, p_2 , so ist in der Formel 2 für negative Momente $p_1 = p_2 = 0$, für positive Momente $p_1 = p, p_2 = 0$, wenn die Bahn am Obergurte, $p_2 = p, p_1 = 0$, wenn die Bahn am Untergurte liegt.

Die bisher aufgestellten Formeln gelten ganz allgemein für einfache und kontinuierliche Träger. Wir wollen nun noch die specielle Anwendung auf einfache Träger machen. Für diese wird das Moment in einem beliebigen Querschnitte zum Maximum bei totaler Belastung. Dasselbe ist $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$.

α. System des gleichschenkligen Dreiecks. Bezeichnet S_1 die Spannung des m^{ten} oberen, S_2 die Spannung des m^{ten} unteren Gurtstückes, so ist für den Fall, dass die Bahn am Untergurte liegt (Fig. 12), für M_1 $x = ma$, für M_2 dagegen $x = (m - 1)a + \frac{1}{2}a = \frac{2m - 1}{2}a$, mithin,

Fig. 12.



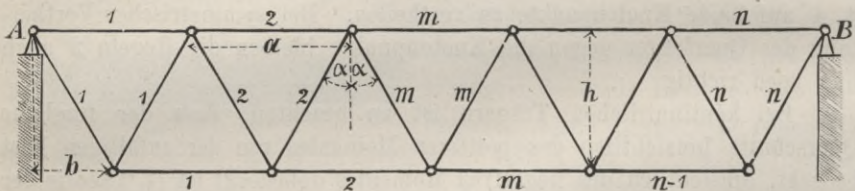
wenn die Spannweite $l = na$ ist, $M_1 = \frac{1}{2} m (n - m) q a^2$, $M_2 = \frac{1}{8} (2m - 1) (2n - 2m + 1) q a^2$, folglich, da hier $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} a$, $b = \frac{1}{2} a$ ist, nach Formel 3:

$$4. \begin{cases} S_1 = -\frac{a^2}{8h} [4m(n-m)q - g_1 - g'], \\ S_2 = +\frac{a^2}{8h} [(2m-1)(2n-2m+1)q - g_2 - g'], \end{cases}$$

wobei g' das Gewicht des Obergurtes pro Längeneinheit bezeichnet. Wenn die Bahn am Obergurt liegt (Fig. 13), so ergibt sich in ganz gleicher Weise

$$5. \begin{cases} S_1 = -\frac{a^2}{8h} [(2m-1)(2n-2m+1)q - g_1 - g''], \\ S_2 = +\frac{a^2}{8h} [4m(n-m)q - g_2 - g''], \end{cases}$$

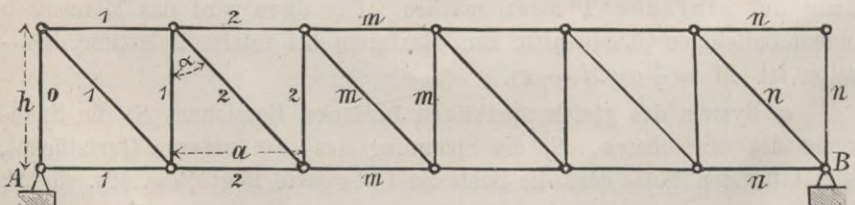
Fig. 13.



wobei g'' das Gewicht des Untergurtes pro Längeneinheit bezeichnet. Ist ein verticaler Endständer vorhanden, so ist das Glied g' und g'' wegzulassen.

β. System des rechtwinkligen Dreiecks. Bezeichnet wieder S_1 und S_2 die Spannung im m^{ten} Felde des bezüglichen Ober- und Untergurtes,

Fig. 14.



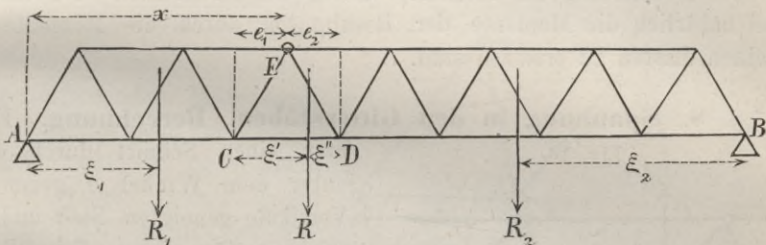
so ist für M_1 : $x = ma$, für M_2 dagegen $x = (m-1)a$, also $M_1 = \frac{1}{2}m(n-m)qa^2$, $M_2 = \frac{1}{2}(m-1)(n-m+1)qa^2$; ferner wird hier $e_1 = a$, $e_2 = 0$, daher nach den Gleichungen 2

$$6. \begin{cases} S_1 = -\frac{m(n-m)qa^2}{2h}, \\ S_2 = +\frac{(m-1)(n-m+1)qa^2}{2h}. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich die Spannungen für den Obergurt im m^{ten} Feld und den Untergurt im $(m+1)^{\text{ten}}$ Feld numerisch gleich.

2. System von Einzellasten. Hier wollen wir nur einfache Träger voraussetzen. Zunächst handelt es sich um die Bestimmung derjenigen Lage des Systemes, für welche das Moment M für einen Knotenpunkt zum Maximum wird, wobei wir annehmen, dass die Uebertragung der Last durch Querträger nur an den Knotenpunkten erfolge. Liegt der fragliche Knotenpunkt in demjenigen Gurte, an welchem die Bahn liegt, so ist die Bestimmung des Momentes ebenso vorzunehmen, als wenn Querträger nicht vorhanden wären (Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl., §. 14 und 15). Wenn aber der fragliche Knotenpunkt E (Fig. 15) im anderen Gurte liegt, so bezeichne R die Resultante der Lasten, welche

Fig. 15.



innerhalb der dem Punkte E gegenüberliegenden Gurtstrecke CD wirkt, ξ , ξ'' ihren Abstand von C und D , R_1 , R_2 die Resultanten der in den Strecken AC und BD wirkenden Kräfte, ξ_1 , ξ_2 ihre Abstände von A und B , a die Länge von CD , e_1 , e_2 die Horizontalstände des Punktes E von C und D , x den Horizontalstand des Punktes E von A . Die in C und D wirkenden Komponenten von R sind $R \frac{\xi'}{a}$, $R \frac{\xi''}{a}$. Daher ergibt sich als Moment M für den Punkt E (nach Formel 6 der Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl., Seite 22):

$$7. M = \left[R_1 \xi_1 + R \frac{\xi''}{a} (x - e_1) \right] \frac{l - x}{l} + \left[R \frac{\xi'}{a} (l - x - e_2) + R_2 \xi_2 \right] \frac{x}{l}.$$

Verschiebt man das System um A nach rechts, so ändern sich ξ_1 und ξ' um $+A$, ξ_2 und ξ'' um $-A$; ist M' das neue Moment, so wird demnach

$$M' - M = \frac{A}{l} \left[\left(R_1 + R \frac{e_1}{a} \right) (l - x) - \left(R_2 + R \frac{e_2}{a} \right) x \right].$$

Ist in der Parenthese das erste Glied grösser als das zweite, so ist $M' > M$, es muss also nach rechts verschoben werden, ist das erste Glied kleiner als das zweite, so ist $M' < M$, es muss daher nach links verschoben werden, damit M möglichst gross werde oder es muss nach rechts links verschoben werden, je nachdem

$$8. \frac{R_1 + R \frac{e_1}{a}}{x} \geq \frac{R_2 + R \frac{e_2}{a}}{l - x}$$

ist. Der für den Fall, dass keine Querträger vorhanden sind, gültige

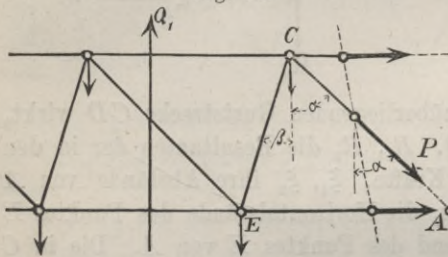
Satz, dass man das System so verschieben müsse, dass die Lasten pro Längeneinheit auf beiden Seiten des fraglichen Querschnittes möglichst gleich werden, gilt demnach auch hier, wenn man die Kraft R nach dem Verhältnisse e_1 und e_2 in zwei Theile zerlegt und den ersten Theil zu den links wirkenden, den zweiten zu den rechts wirkenden Lasten rechnet.

Hierbei muss ferner eine Last entweder an dem Querträger C oder an dem Querträger D liegen und zwar an demjenigen dieser beiden Querträger, auf dessen Seite bei Anwendung der Bedingung die kleinere Last pro Längeneinheit wirkt.

Die Berechnung des Momentes erfolgt am besten nach der Formel 7, wobei natürlich die Momente der Resultanten durch die Momente der einzelnen Lasten zu ersetzen sind.

§. 8. Spannung in den Gitterstäben. Berechnung.

Fig. 16.



man einen Schnitt durch einen unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigten Stab und bezeichnet für diesen Schnitt die Transversalkraft mit Q_1 , so fordert das Gleichgewicht gegen Verschiebung in vertikaler Richtung die Erfüllung der Gleichung $P_1 \cos \alpha - Q_1 = 0$, demnach ist

$$9. P_1 = + Q_1 \sec \alpha,$$

In gleicher Weise ergibt sich für die Spannung P_1 eines unter dem Winkel β geneigten Stabes

$$9a. P_2 = - Q_2 \sec \beta,$$

wenn Q_2 die Transversalkraft für einen durch diesen Stab geführten Schnitt bezeichnet. Wir unterscheiden nun wieder eine gleichmässige Belastung und eine solche durch ein System von Einzellasten.

1. Gleichmässige Belastung. Nimmt man die äusseren Kräfte in den Knotenpunkten an, so ist die Lage des Schnittes gleichgültig. Nimmt man die Last über beide Gurte gleichmässig vertheilt an, so erhält man dasselbe Resultat, wenn man den Schnitt parallel durch die Mitte der beiden Gurtstücke oder parallel zur anderen Stablage führt. Führt man den Schnitt vertikal, so ist eine Reduktion nöthig; bezeichnet man die Transversalkraft für einen vertikalen, durch die Mitte des fraglichen Stabes geführten Schnitt mit Q , so wird offenbar

$$10. Q_1 = Q - \frac{1}{2} (q_1 - q_2) e_2, \quad Q_2 = Q + \frac{1}{2} (q_1 - q_2) e_1,$$

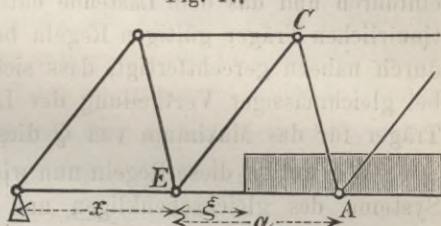
wobei $e_1 = h \tan \alpha$ und $e_2 = h \tan \beta$ ist. Hinsichtlich des Eigengewichtes und der zufälligen Last ist nun noch Folgendes zu bemerken:

a. Eigengewicht. Für das Eigengewicht kann man die Formeln 9 und 10 direkt anwenden. Es bleibt nur noch der Fall, dass der eine Gurt mit der Last g' pro Längeneinheit nicht bis zu der Lagervertikalen reicht, zu betrachten. Ist b der Abstand des Endes dieses Gurtes von den Lagervertikalen, so ist Q für den Abstand x vom Lager $= \frac{1}{2} g' (l - 2b) - g' (x - b) = \frac{1}{2} g' (l - 2x)$, d. h. Q ergibt sich ebenso gross, als wenn der Gurt bis zur Lagervertikalen reichen würde.

b. Zufällige Last. Wir wissen, dass für das positive und negative Maximum von Q bezüglich nur der rechte oder linke Theil des Feldes, vom betreffenden Querschnitte aus, belastet sein darf. Dies gilt sowohl für einfache als kontinuierliche Träger.

In vorliegendem Falle würde es sich nun aber noch darum handeln, den Punkt, bis zu welchem die Last reichen muss, genau anzugeben. Wir haben hier folgende Fälle zu unterscheiden: 1. Sind die Querträger nur an den Knotenpunkten angebracht, so lässt sich die Lage der Last und die entsprechende Transversalkraft für einfache Träger nach §. 25 des I. Abschnittes (Aeusserer Kräfte gerader Träger, II. Aufl.) ermitteln. Hiernach muss für die Gitterstäbe EC und AC (Fig. 17) der Kopf der Last vom nächsten nicht belasteten Querträger E , welcher von der nächsten nicht belasteten Stütze den Abstand x hat, die Entfernung

Fig. 17.



$$11. \quad \xi = \frac{ax}{l-a}$$

haben, wenn l die Spannweite, a den Abstand der Querträger bezeichnet. Hieraus folgt $\xi : a = x + \xi : l$, d. h. der Kopf der Last theilt das fragliche Fach EA in demselben Verhältnisse, wie die ganze Spannweite l . Die entsprechende für jeden der Gitterstäbe EC und AC einzuführende Transversalkraft ist

$$12. \quad Q = \frac{p(l-a-x)^2}{2(l-a)}$$

2. Liegen noch Querträger zwischen den Knotenpunkten, oder wirkt die Last direkt auf den Gurt, so gelten ganz dieselben Regeln, da sich der Druck auf die Knotenpunkte in Folge der zwischen A und E liegenden Lasten bei gleicher Lage der Lasten gleich gross ergibt, wie sich diese Lasten auch auf das Gurtstück AE übertragen mögen.

Für kontinuierliche Träger gelten allerdings die angegebenen Regeln zur Bestimmung des Maximums von Q nicht unmittelbar. Allein es genügt folgende Näherung, mit welcher man jedenfalls der Wahrheit sehr

nahe kommt. Bezeichnet man nämlich für den einfachen Träger den Abstand des Lastendes von der linken Stütze bei gleichmässiger Vertheilung der Last über den Träger, für welche die Transversalkraft ebenso gross wird, als mit Berücksichtigung der Querträger nach Formel 12, mit x_1 , so ist $Q = \frac{p(l-x_1)^2}{2l}$. Setzt man die beiden Ausdrücke für Q gleich, so ergibt sich

$$13. \quad x_1 = l - (l - a - x) \sqrt{\frac{l}{l-a}}$$

Diesen Abstand des Lastendes wird man auch für kontinuierliche Träger einführen und das dem Lastende entsprechende Q nach den für die kontinuierlichen Träger gültigen Regeln bestimmen. Diese Regel ist auch dadurch nahezu gerechtfertigt, dass sich ohne Anwendung von Querträgern bei gleichmässiger Vertheilung der Last für einfache und kontinuierliche Träger für das Maximum von Q dieselbe Lage des Zuges ergibt.

Wir wollen diese Regeln nun wiederum für einfache Träger mit dem Systeme des gleichschenkligen und des rechtwinkligen Dreiecks anwenden.

a. System des gleichschenkligen Dreiecks. Liegt die Last unten (Fig. 12, Seite 13), so haben wir hinsichtlich des Eigengewichtes bei Anwendung der Formeln 9 den Querschnitt für den m -ten Zugstab in der Entfernung $(m - \frac{1}{4})a$, für den m -ten Druckstab in der Entfernung $(m - \frac{3}{4})a$ von der linken Stütze zu legen, so dass für den Vertikalschnitt Q bezüglich $= \frac{1}{2} n g a - (m - \frac{1}{4}) g a$ und $\frac{1}{2} n g a - (m - \frac{3}{4}) g a$ wird. Ferner ist zur Bestimmung von Q_1 und Q_2 nach Formel 10: $\tan \alpha = \tan \beta = \frac{a}{2h}$. Hinsichtlich der zufälligen Last ist bei Anwendung der Formeln 12: $x = (m - 1) a$ zu setzen. Demnach wird

$$14. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = + \frac{1}{4} \left[(2n - 4m + 1) g - g_1 + g_2 \right] a \sec \alpha \\ \quad \quad \quad + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{4} \left[(2n - 4m + 3) g + g_1 - g_2 \right] a \sec \alpha \\ \quad \quad \quad - \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha. \end{array} \right.$$

In ganz gleicher Weise ergibt sich für den Fall, dass die Bahn am Obergurte liegt (Fig. 13, Seite 14), für den m -ten Zug- und Druckstab:

$$15. \left\{ \begin{array}{l} P_1 = + \frac{1}{4} \left[(2n - 4m + 3)g - g_1 + g_2 \right] a \sec \alpha \\ \quad + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{4} \left[(2n - 4m + 1)g + g_1 - g_2 \right] a \sec \alpha \\ \quad - \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha. \end{array} \right.$$

b. System des rechtwinkligen Dreiecks mit gedrückten Vertikalen und gezogenen Diagonalen (Fig. 14, Seite 14). Wenn die Bahn am Untergurte liegt, so ist zur Anwendung der Formeln 9 der Schnitt für den m -ten Zugstab in der Entfernung $ma - \frac{1}{2}a$ und für den m -ten Druckstab (die Endvertikale als 0-ten Druckstab angenommen) in der Entfernung ma von der linken Stütze zu legen, so dass Q bezüglich $= \frac{1}{2}nga - (m - \frac{1}{2})ga$ und $\frac{1}{2}nga - mga$ wird. Ferner ist zur Bestimmung von Q_1 , und Q_2 bezüglich $e_1 = h \tan \beta = 0$, $e_2 = h \tan \alpha = a$ zu setzen. Hinsichtlich der zufälligen Last ist zur Anwendung der Formel 12 bezüglich $x = (m-1)a$ und $x = ma$ zu setzen. Daher wird:

$$16. \left\{ \begin{array}{l} P_1 = + \frac{1}{2} (n - 2m + 1) g a \sec \alpha + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{2} \left[(n - 2m) g + g_1 - g_2 \right] a - \frac{(n-m-1)^2}{2(n-1)} p a. \end{array} \right.$$

Wenn die Bahn am Obergurte liegt, so ergibt sich in gleicher Weise für den m -ten Zug- und Druckstab:

$$17. \left\{ \begin{array}{l} P_1 = + \frac{1}{2} (n - 2m + 1) g a \sec \alpha + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{2} \left[(n - 2m) g + g_1 - g_2 \right] a - \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p a. \end{array} \right.$$

2. System von Einzellasten. Damit die für die Gitterstäbe CE und DE (Fig. 15) gültige positive Transversalkraft zum Maximum werde, muss der Träger rechts von E belastet sein. Bezeichnen wir die Resultante aller Lasten mit R' , ihren Abstand von B mit ξ' , die Resultante der in dem Fache CD wirkenden Lasten mit R , ihren Abstand von D mit ξ , so ist

$$18. \quad Q = R' \frac{\xi'}{l} - R \frac{\xi}{a}.$$

Verschiebt man das System um Δ nach rechts, so wird ξ' und ξ um Δ kleiner; ist Q' die neue Transversalkraft, so ist demnach

$$Q' - Q = \left(\frac{R}{a} - \frac{R'}{l} \right) \Delta.$$

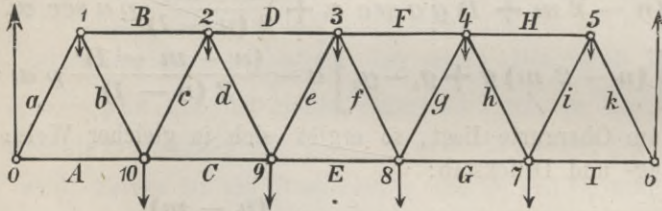
Wie in §. 8 können wir daher schliessen: Damit Q möglichst gross werde, muss man das Lastensystem so verschieben, dass $\frac{R}{a}$ und $\frac{R'}{l}$ oder die im fraglichen Fache CD und auf den ganzen Träger wirkende Last pro Längeneinheit möglichst gleich gross wird.

Hierbei muss ausserdem eine Last am Querträger G liegen, wenn $\frac{R}{a} < \frac{R'}{l}$; dagegen muss eine Last am Querträger D liegen, wenn $\frac{R}{a} > \frac{R'}{l}$ ist. Bei den üblichen Lastenvertheilungen bei Eisenbahnzügen und Strassenwagen, wo die schwersten Lasten am Kopfe des Zuges wirken, wird indess immer eine Last am Querträger D liegen müssen.

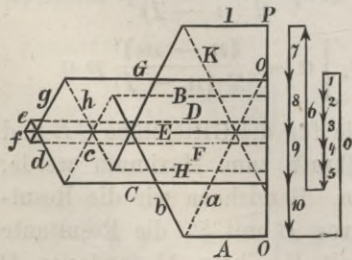
Die Berechnung der Transversalkraft kann nach Formel 18 erfolgen, wobei nur die Momente der Resultanten durch die Summen der Momente der einzelnen Lasten zu ersetzen sind.

§. 9. Grafische Bestimmung der Spannungen. Die in §. 2 gezeigte allgemeine Methode der grafischen Ermittlung der Spannungen in einem statisch bestimmten Systeme lässt sich hier unmittelbar anwenden. Das

Fig. 18.



anwenden. Das Polygon der äusseren Kräfte geht hier in eine vertikale Gerade über. In Fig. 18 ist diese Anwendung ge-



zeigt. Hinsichtlich des Eigengewichtes, überhaupt einer konstanten Belastung, führt diese Methode einfach zum Ziele; weniger einfach aber hinsichtlich der Maximalspannungen der Gitterstäbe und bei Annahme eines Systemes von Einzellasten auch hinsichtlich der Gurte, weil die Lage der zufälligen Last für

jeden Theil eine andere ist.

Man wird sich daher hier zweckmässiger der Schnittmethode bedienen, über welche wir noch das Folgende bemerken (Taf. II):

1. Gurte. Man konstruirt mit Rücksicht auf die Lage der Querträger nach der Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl., §. 26 die Momente für sämtliche Punkte, wie es in Fig. 7 (Taf. II) geschehen ist. Für irgend ein Gurtstück ist alsdann die Spannung nach dem Obigen

$= \frac{M}{h}$, wenn M sich auf den gegenüberliegenden Knotenpunkt bezieht. So z. B. würde für das Gurtstück *II III* das Moment *3 3''*, für das Gurtstück *3 4* das Moment *III III''* massgebend sein.

Nach der gewöhnlichen Methode der Querschnittsbestimmung würde der Gurtquerschnitt $f = \frac{M}{Kh}$ zu setzen sein, wenn K die zulässige Inanspruchnahme bedeutet. Konstruiert man einen Masstab, dessen Einheit das Kh fache der Einheit des Momentenmasstabes oder, wenn d die Poldistanz bedeutet, dessen Einheit das $\frac{Kh}{d}$ fache der Einheit des Längemasstabes ist, so geben die Ordinaten auf diesem Masstabe gemessen, direkt die Querschnittsflächen.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) würde die Querschnittsfläche

$$f = \frac{1}{h} \left(\frac{M_0}{K_0} + \frac{M_1}{K_1} \right),$$

wenn M_0 , M_1 die Momente für das Eigengewicht und die zufällige Last bedeuten. Bei kontinuierlichen Trägern kann auch noch das Glied $\frac{M_2}{K_2}$ hinzutreten. Hier kann man drei Masstäbe konstruieren, deren Einheiten bezüglich das $K_0 h$, $K_1 h$ und $K_2 h$ fache des Momentenmasstabes sind und nach Abmessung der Grössen $\frac{M_0}{K_0 h}$, $\frac{M_1}{K_1 h}$, $\frac{M_2}{K_2 h}$ dieselben numerisch addieren, wie es auf Taf. II geschehen ist. Statt dessen aber kann man auch bei Konstruktion der Momente die Einheit des Momentenmasstabes für das Eigengewicht gleich dem $\frac{K_1}{K_0}$ fachen, die Einheit für die Momente M_2 gleich dem $\frac{K_1}{K_2}$ fachen des Momentenmasstabes für die Momente M_1 der zufälligen Last annehmen. Konstruiert man dann einen Masstab, dessen Einheit das $K_1 h$ fache des Masstabes für die Momente M_1 ist, so gibt die Summe der Momente M_0 , M_1 , M_2 , auf diesem Masstabe gemessen, direkt die Querschnittsfläche.

2. Gitterstäbe. Ebenso konstruiert man mit Rücksicht auf die Lage der Querträger die Transversalkräfte nach der Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl., §. 25, wie es in Fig. 2, Taf. II geschehen ist. Die Spannung eines Gitterstabes ist alsdann $Q \sec \alpha$, der entsprechende Querschnitt nach der gewöhnlichen Bestimmungsweise $\frac{Q \sec \alpha}{K}$. Man kann nun $Q \sec \alpha$ geometrisch konstruieren, wie es auf Taf. II geschehen ist; so z. B. stellt *3 3'* die Transversalkraft für den Stab *3 III*, die zu *3 III* gezogene Parallele *3' 3''* die Spannung des Stabes *3 III* dar. Konstruiert man jetzt einen Masstab, dessen Einheit das K fache des Kraftmasstabes ist, so gibt die die Spannung darstellende Gerade, z. B. *3' 3''*, auf diesem Mass-

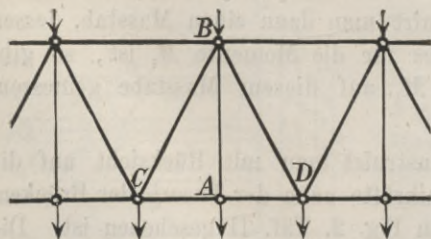
stabe gemessen, direkt die Querschnittsfläche. Haben alle Stäbe gleiche Lage, so ist es nicht nöthig, die Spannung $Q \text{ sec } \alpha$ zu konstruiren; man konstruirt vielmehr besser einen Masstab, dessen Einheit das $K \cos \alpha$ fache des Kraftmasstabes ist; die Ordinaten, z. B. $3 \text{ } 3'$, welche die Transversalkraft darstellen, geben alsdann, auf diesem Masstabe gemessen, die Querschnittsfläche.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung tritt dieselbe Aenderung ein, wie oben hinsichtlich der Gurte angegeben wurde.

§. 10. **Vertheilung der Last auf beide Gurte.** Wir haben bisher angenommen, dass die Last an beiden Gurten wirke, sei es nun in den Knotenpunkten der Gurte oder gleichmässig vertheilt. Wenn die Bahn an einem Gurte liegt, so ist es leicht, den auf jeden Gurt entfallenden Theil zu bestimmen. Da beide Gurte in der Regel nahezu gleich schwer sind, so kann man zunächst für jeden Gurt die Hälfte des Eigengewichtes der Träger annehmen; auf den Gurt, an welchem die Bahn liegt, kommt alsdann noch das Gewicht der Querträger, der Windverstrebung und Bahn, sowie die zufällige Last; auf den andern das Gewicht der hier etwa liegenden Querverbindungen und Windverstrebung. Liegen Querverbindungen zwischen Ober- und Untergurt, so kann man auf jeden Gurt noch das halbe Gewicht dieser Querverbindungen rechnen. Wir haben nun aber in dieser Beziehung noch folgende specielle Fälle zu untersuchen:

1. Wenn beim Systeme des gleichschenkligen Dreiecks zum Zwecke der Anordnung einer grösseren Anzahl von Querträgern Vertikalen AB (Fig. 19) angeordnet werden, welche die Mitten der Stücke desjenigen

Fig. 19.



Gurtes, an welchem die Bahn liegt, mit den gegenüberliegenden Knotenpunkten verbinden, so wird hierdurch die Hälfte des Gewichtes der Bahn und der zufälligen Last, sowie die Hälfte des Gewichtes des Gurtes, an welchem die Bahn liegt, auf den andern Gurt übertragen. Dies ist allerdings nur

dann streng richtig, wenn auch die Knotenpunkte A , in welchen die Vertikalen von dem die Bahn tragenden Gurte abzweigen, scharnierartig angeordnet sind, wird aber auch in anderen Fällen als nahezu richtig gelten können. Mit hinreichender Genauigkeit wird man annehmen können, dass auf beide Gurte eine nahezu gleichgrosse Last komme. Die von einem Gurte auf den andern zwischen zwei Knotenpunkten übertragene Last ist die Spannung einer Vertikalen.

Hinsichtlich des Einflusses der zufälligen Last auf die Spannungen der Gitterstäbe ist zu bemerken, dass zur Bestimmung von ξ nach der Formel 11 für a der halbe Abstand der Hauptknotenpunkte, also $AC = AD$ und für x hinsichtlich des Gitterstabes CB der Abstand des Punktes C , hinsichtlich des Gitterstabes DB der Abstand des Punktes A von der linken Stütze zu nehmen ist; ξ bedeutet alsdann den Abstand des Lastendes bezüglich von C und A . An die Stelle des Faktors $\frac{(n-m)^2}{2(n-1)}$ in den Formeln 14 und 15 tritt in den Formeln 14 für Druck,

in den Formeln 15 für Zug: $\frac{(2n-2m+1)^2}{4(2n-1)}$

und in den Formeln 14 für Zug, in den Formeln 15 für Druck: $\frac{(n-m)^2}{2n-1}$

2. Dieselben Regeln bleiben gültig, wenn an sämtlichen Knotenpunkten des Ober- und Untergurtes Vertikalen angeordnet sind, mit denen in beliebiger Höhe die Bahn verbunden ist. (Fig. 20.)

3. Es bleibt noch der Fall des Systems des rechtwinkligen Dreiecks zu untersuchen, bei welchem die Bahn mit den Vertikalen in beliebiger Höhe verbunden ist. Für die Bestimmung der Spannungen in beiden Gurten und in den Diagonalen nach den Formeln 5, 14 und 15 kommt die Vertheilung der Last auf beide Gurte gar nicht in Frage. Die Vertikalen haben in den über und unter der Bahn liegenden Theilen verschiedene Spannungen, welche man findet, wenn man den Schnitt bezüglich durch den oberen und unteren Theil der fraglichen Vertikalen legt. Man gelangt hierdurch leicht zu dem Schlusse,

dass sich die Spannung für den unteren Theil ebenso gross ergibt, als wenn die Bahn am Obergurte läge, für den oberen Theil dagegen ebenso gross, als wenn die Bahn am Untergurte läge.

§. 11. Unterstützung der Gurte durch sekundäre Konstruktionen.

Um auch beim Systeme des rechtwinkligen Dreiecks noch zwischen den Knotenpunkten Querträger anbringen zu können, hat man die Mitte der Diagonalen mit dem betreffenden Gurte durch Neben- oder Hilfsvertikalen CD (Fig. 22 und 23) und mit den oberen Enden der Hauptvertikalen durch Neben- oder Hilfsdiagonalen CE verbunden

Fig. 20.

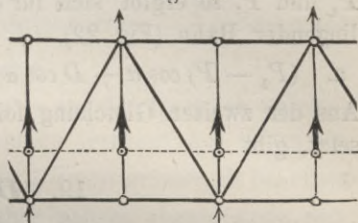


Fig. 21.

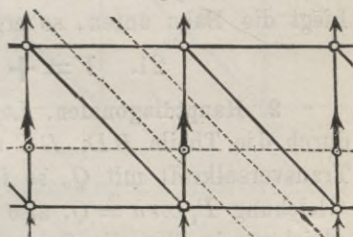


Fig. 22.

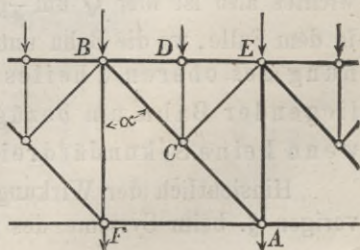
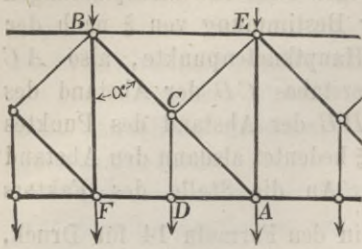


Fig. 23.



P_1 und P , so ergibt sich für das Gleichgewicht des Punktes C bei oben liegender Bahn (Fig. 22).

a. $(P_1 - P) \cos \alpha + D \cos \alpha + V = 0$, $(P_1 - P) \sin \alpha - D \sin \alpha = 0$.
Aus der zweiten Gleichung folgt $P_1 - P = D$; dies in die erste eingesetzt, gibt

$$19. \quad D = -\frac{1}{2} V \sec \alpha;$$

V aber ist gleich dem Gewichte der Bahn, plus dem des Gurtes, an welchem die Bahn liegt, plus der zufälligen Last auf die halbe Länge eines Faches oder auf die Länge $\frac{1}{2} a$, negativ genommen. Ist diese Last = G , so ist also

$$20. \quad V = -G, \quad D = +\frac{1}{2} G \sec \alpha$$

Liegt die Bahn unten, so ergibt sich in gleicher Weise

$$21. \quad V = +G, \quad D = +\frac{1}{2} G \sec \alpha.$$

2. Hauptdiagonalen. Legt man bei obenliegender Bahn einen Schnitt durch die Theile BD , BC und FA und bezeichnet für denselben die Transversalkraft mit Q , so fordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Gleichung $P_1 \cos \alpha = Q$, also ist $P_1 = Q \sec \alpha$. Denkt man sich die Last gleichmässig über die Gurte vertheilt, so muss man den Schnitt durch die Mitte von BD , von BC und von FA legen, damit sich dasselbe Resultat ergibt, als wenn man die Last in den Knotenpunkten wirkend annimmt. Der Schnitt liegt sonach im Obergurte und in der Diagonale um $\frac{1}{4} a$ weiter nach links, als man ihn legen müsste, wenn kein Sekundärdreieck vorhanden wäre. Hinsichtlich der Wirkung des Eigengewichtes also ist hier Q um $\frac{1}{4} g_1 a$ grösser. Schliesst man in gleicher Weise in dem Falle, wo die Bahn unten liegt, so ergibt sich, dass die Spannung des oberen Theiles der Diagonale bei oben und unten liegender Bahn um bezüglich $\frac{1}{4} g_1 a$ und $\frac{1}{4} g_2 a$ grösser ist, als wenn keine Sekundärdreiecke vorhanden sind.

Hinsichtlich der Wirkung der zufälligen Last gilt dasselbe, was im vorigen §. beim Systeme des gleichschenkeligen Dreiecks gesagt wurde.

(System Pettit). Es fragt sich nun, wie hierdurch die Spannungen der Haupttheile geändert werden und wie gross die Spannungen der Nebentheile sind.

1. Hilfsstäbe. Bezeichnen wir die Spannung der Hilfsvertikalen CD mit V , die Spannung der Hilfsdiagonalen CE mit D , die Spannung der beiden Theile BC und CA der Hauptdiagonalen mit

Es ist nämlich in der Formel 11 zur Bestimmung von ξ und in der Formel 12 zur Bestimmung von $Q \frac{1}{2} a$ für a zu setzen; in den Formeln 16 und 17 ist $\frac{(2n-2m+1)^2}{4(2n-1)}$ für $\frac{(n-m)^2}{2(n-1)}$ zu setzen. Der Unterschied gegen Träger ohne Sekundärdreiecke ergibt sich für $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}l$ nahezu $=\frac{1}{4}pa$.

Aus der zweiten der Gleichungen a folgt:

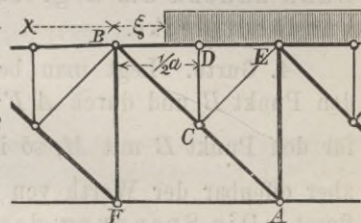
$$P = P_1 - D.$$

Ist das Gewicht der Bahn und des Gurtes, an welchem die Bahn liegt, pro Längeneinheit $= g'$, so ist für das Eigengewicht $D = +\frac{1}{4}g'a \sec \alpha$, also

$$P = P_1 - \frac{1}{4}g'a \sec \alpha.$$

Nun aber ist g' fast genau das Gewicht, welches auf den Gurt, an welchem die Bahn liegt, entfällt (es fehlt nur das halbe Gewicht des Gitterwerkes). Nach dem Obigen ist P_1 nahezu um $\frac{1}{4}g'a \sec \alpha$ grösser, als bei einem Systeme ohne Sekundärdreiecke; P wird daher nahezu ebenso gross sein, als bei einem solchen Systeme.

Fig. 24.



Hinsichtlich der zufälligen Last wird allerdings eine besondere Untersuchung nothwendig. Das Ende der auf dem rechten Theile des Trägers liegenden zufälligen Last habe bei oben liegender Bahn und bei gleichmässiger Bslastung von B den Abstand ξ (Fig. 24). Alsdann ist der Druck auf B : $V_0 = \frac{p(\frac{1}{2}a - \xi)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a} =$

$\frac{p(a - 2\xi)^2}{4a}$, der Druck auf D , also auch die Spannung der Hilfsvertikalen

$$CD: V_1 = \frac{p(\frac{1}{4}a^2 - \xi^2)}{2 \cdot \frac{1}{2}a} + \frac{1}{4}pa = \frac{p(a^2 - 4\xi^2)}{4a} + \frac{pa}{4} = \frac{1}{2}pa - \frac{p\xi^2}{a}. \text{ Die}$$

Transversalkraft für einen durch BD gelegten Schnitt ist $\frac{p(l-x-\xi)^2}{2l} - V_0$, daher ist

$$P_1 = \left[\frac{p(l-x-\xi)^2}{2l} - V_0 \right] \sec \alpha.$$

Da nun $P = P_1 - D = P_1 - \frac{1}{2}V_1 \sec \alpha$ wird, so ist

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{p(l-x-\xi)^2}{2l} - V_0 - \frac{1}{2}V_1 \right] \sec \alpha \\ &= \left[\frac{(l-x-\xi)^2}{2l} - \frac{(a-2\xi)^2}{4a} - \frac{a}{4} + \frac{\xi^2}{2a} \right] p \sec \alpha \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(l-x-\xi)^2}{l} - \frac{(a-\xi)^2}{a} \right] p \sec \alpha. \end{aligned}$$

Ganz derselbe Ausdruck ergibt sich aber, wenn das Sekundärdreieck nicht vorhanden ist. Dasjenige ξ , für welches P zum Maximum wird, wird also ebenfalls dasselbe sein (Formel 11). Dasselbe ergibt sich bei unten liegender Bahn. Man kann also behaupten, dass die Spannung des unteren Theiles der Diagonalen hinsichtlich der zufälligen Last nicht, hinsichtlich des Eigengewichtes fast nicht durch die Sekundärdreiecke geändert wird.

3. Vertikalen. Bei oben liegender Bahn (Fig. 22) ergibt sich für das Gleichgewicht des Punktes A : $P_2 = g_2 a - P \cos \alpha$; da nun aber P und g_2 denselben Werth haben, als beim Systeme ohne Sekundärdreiecke, so hat auch P_2 denselben Werth. Bei unten liegender Bahn (Fig. 23) ergibt sich für das Gleichgewicht des Punktes A , wenn G_2 die auf A entfallende Last bedeutet,

$$P_2 = G_2 - P \cos \alpha.$$

Nun aber ist P fast ebenso gross, als bei einem Systeme ohne Sekundärdreiecke, G_2 dagegen ist um G kleiner, mithin wird der absolute Werth von P_2 um G grösser. Die Spannung der Vertikalen ist daher bei oben liegender Bahn ebenso gross, bei unten liegender Bahn nahezu um G grösser, als bei einem Systeme ohne Sekundärdreiecke.

4. Gurte. Legt man bei oben oder unten liegender Bahn durch den Punkt B und durch $A F$ einen Schnitt und bezeichnet das Moment für den Punkt B mit M , so ist $S_2 h - M = 0$, $S_2 = + \frac{M}{h}$. Nun wird aber offenbar der Werth von M durch die Sekundärdreiecke nicht beeinflusst. Die Spannung des Untergurtes ist also ebenso gross, als bei einem Systeme ohne Sekundärdreiecke.

Legen wir bei oben oder unten liegender Bahn durch den Punkt A und durch $C E$, sowie durch $B E$ einen Schnitt und bezeichnen das Moment für den Punkt A mit M , so ergibt sich $S_1 h + D h \sin \alpha + M = 0$, also

$$S_1 = - \frac{M}{h} - D \sin \alpha = - \frac{M}{h} - \frac{1}{2} G \tan \alpha.$$

Der Werth von M wird durch die Sekundärdreiecke nicht geändert. Die Spannung des Obergurtes ist demnach um $\frac{1}{2} G \tan \alpha$ grösser, als beim Systeme ohne Sekundärdreiecke.

Es ist bemerkenswerth, dass durch die Sekundärdreiecke nur Vergrösserungen der Spannungen, nicht aber Verminderungen herbeigeführt werden.

Die Behandlung hätte auch durch Zerlegung in zwei Systeme in der in §. 21. angewendeten Weise erfolgen können.

§. 12. Beispiele. Zur weiteren Erläuterung der Bestimmung der Spannungen und der Querschnittsflächen durch Rechnung mögen die folgenden beiden Beispiele dienen.

1. Eingeleisige Eisenbahnbrücke mit zwei Gitterträgern nach dem Systeme des rechtwinkligen Dreiecks von 40 Met. Spannweite. Die Bahn liege zwischen dem Ober- und Untergurte. Wir nehmen die Höhe h zu $\frac{1}{8} l = 5$ Met. und den Winkel α zu 45° an. Es sei wiederum $g = 1,25$ Ton pro Met. und zwar $g_1 = 0,5$, $g_2 = 0,5$ und g_3 , d. i. das Gewicht der Bahn = $0,25$ Ton. pro Met.; ferner sei für die Momente $p = 2,3$, für die Transversalkräfte $p = 2,6$ Ton. pro Met. Die zulässige Inanspruchnahme nach der gewöhnlichen Auffassung sei für Zug $K = 0,75$, für Druck $\mathfrak{K} = 0,65$ Ton. pro \square Centimeter.

Gurte. Es ist $q = 1,25 + 2,3 = 3,55$, $a = \frac{1}{8} l = 5$, $h = 5$, folglich nach Formel 6:

$$S_1 = - \frac{m(8-m)q \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} l}{2 \cdot 5}, \quad S_2 = + \frac{(m-1)(9-m)q \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} l}{2 \cdot 5}, \quad \text{d. i.}$$

$$S_1 = - \frac{1}{64} m(8-m)ql = - 8,87 m(8-m) \text{ Tonnen,}$$

$$S_2 = + \frac{1}{64} (m-1)(9-m)ql = + 8,87 (m-1)(9-m) \text{ Tonnen.}$$

Der entsprechende volle Querschnitt f und nutzbare Querschnitt \mathfrak{f} wird

$$f = \frac{-S_1}{0,65} = 13,66 m(8-m) \square \text{ Centim.}$$

$$\mathfrak{f} = \frac{S_2}{0,75} = 11,83 (m-1)(9-m) \square \text{ Centim.}$$

Gitterstäbe. Es ist $q = 1,25 + 2,6 = 3,85$, $g = 1,25 = 0,320 q$, $p = 2,6 = 0,675 q$, $g_1 = g_2 = 0,5 = 0,130 q$, $g_3 = 0,5 = 0,065 q$, $\alpha = 45$, $\sec \alpha = \sqrt{2} = 1,414$. Die Spannung P_1 der Diagonalen wird nach Formel 16 oder 17:

$$P_1 = \frac{1}{2} (9-2m) 0,325 q \frac{1}{8} l \sqrt{2} + \frac{1}{2} \frac{(8-m)^2}{2 \cdot 7} 0,675 q \frac{1}{8} l \sqrt{2}, \quad \text{d. i.}$$

$$P_1 = + (0,2010 - 0,04845 m + 0,002130 m^2) q l \\ = + (123,8 - 29,84 m + 1,312 m^2) \text{ Tonnen.}$$

Der entsprechende nutzbare Querschnitt f_1 wird

$$f_1 = \frac{P_1}{0,75} = (165,1 - 39,79 m + 1,749 m^2) \square \text{ Centim.}$$

Die Spannung P_1' des oberen Theiles und die Spannung P_2'' des unteren Theiles der Vertikalen wird bezüglich nach den Formeln 16 und 17 mit Berücksichtigung des in §. 10 (3) Gesagten:

$$P_1' = - \frac{1}{2} \left[(8-2m) 0,325 q - 0,130 q + 0,195 q \right] \frac{1}{8} l - \frac{(7-m)^2}{2 \cdot 7} 0,675 q \cdot \frac{1}{8} l$$

$$P_2'' = - \frac{1}{2} \left[(8-2m) 0,325 q - 0,195 q + 0,130 q \right] \frac{1}{8} l - \frac{(8-m)^2}{2 \cdot 7} 0,675 q \cdot \frac{1}{8} l, \quad \text{d. i.}$$

$$P_1' = - (0,1159 - 0,03125 m + 0,001506 m^2) q l \\ = - (71,1 - 19,25 m + 0,928 m^2) \text{ Tonnen,}$$

$$P_2'' = - (0,1361 - 0,03427 m + 0,001506 m^2) q l \\ = - (83,8 - 21,11 m + 0,928 m^2) \text{ Tonnen.}$$

Die entsprechenden Querschnittsflächen werden

$$f_2' = -\frac{P_1'}{0,65} = (109,4 - 29,62 m + 1,428 m^2) \square \text{Centimeter.}$$

$$f_2'' = -\frac{P_2''}{0,65} = (128,9 - 32,48 m + 1,428 m^2) \square \text{Centimeter.}$$

Die nach diesen Formeln berechneten Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Index	Spannungen					Querschnittsflächen				
	Oberg. Druck	Unterg. Zug	Diagon. Zug	Vertikalen		Oberg. voll	Unterg. nutzb.	Diagon. nutzb.	Vertikalen	
				oben Druck	unten Druck				oben voll	unten voll
0	—	—	—	0,116	0,136	—	—	—	109	129
1	0,110	0	0,155	0,086	0,104	96	0	127	81	98
2	0,188	0,110	0,113	0,059	0,074	164	83	92	56	69
3	0,235	0,188	0,075	0,036	0,047	205	142	61	33	44
4	0,250	0,235	0,042	0,015	0,023	219	177	34	14	22
5	0,250	0,250	0,012	—	0,003	—	—	10	—	—
6	0,235	0,250	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0,188	0,235	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0,110	0,188	—	—	—	—	—	—	—	—

. q l . q l □ Centimeter.

Die für die zweite Hälfte des Trägers angegebenen Spannungen der Gurte und Vertikalen haben keine Gültigkeit, weil hier das System mit der rechten Schaar von Diagonalen in Wirksamkeit tritt; die Spannungen und Querschnittsflächen sind hier dieselben, wie in der linken Hälfte.

2. Eingleisige schiefe Eisenbahnbrücke mit zwei Gitterträgern nach dem Systeme des gleichschenkligen Dreiecks von 19,5 Met. Spannweite, 2,5 Met. Trägerhöhe mit oben liegender Bahn (Taf. II). Die Entfernung des Knotenpunktes ist zu 2,5 Met. angenommen; nur am linken Ende ist in Folge des Umstandes, dass die Brücke eine schiefe ist, eine andere Entfernung nöthig geworden. Es sei $g = 0,48$ und zwar $g_1 = 0,35$, $g_2 = 0,13$ Ton. pro Met.; als zufällige Last sei ein Eisenbahnzug mit der auf Taf. II angegebenen Lastvertheilung anzunehmen. Die Querschnittsflächen seien nach der Regel 7 (Seite 9) zu bestimmen und zwar für $K_0 = 1,4$, $K_1 = 0,6$, $K_2 = 1,3$ Ton. pro $\square \text{cm}$.

Gurte. Das Moment hinsichtlich des Eigengewichtes für einen oberen Knotenpunkt im Abstände x von der linken Stütze wird bei dem Abstände a der Knoten:

$$M = \frac{0,35}{2} x (l - x) + \frac{0,13}{2} \left[x (l - x) - \frac{1}{4} a^2 \right]$$

$$= 0,24 x (l - x) - 0,0162 a^2.$$

Das zweite Glied wird für $a = 2,5 = 0,102$. Ebenso ergibt sich für einen unteren Knotenpunkt im Abstände x von der linken Stütze:

$$M = \frac{0,13}{2} x (l - x) + \frac{0,35}{2} \left[x (l - x) - \frac{1}{4} a^2 \right]$$

$$= 0,24 x (l - x) - 0,0437 a^2.$$

Das zweite Glied wird für $a = 2,5 = 0,273$. Hinsichtlich der zufälligen Last ergeben sich die Momente für die oberen Knotenpunkte ebenso, als wenn keine Querträger

vorhanden wären. Durch spezielle Untersuchung ergibt sich, dass bei den Knotenpunkten I, II das II Rad, beim Knotenpunkte III das III Rad bei nach links gehendem Zuge, bei den Knotenpunkten IV, V das III Rad, bei den Knotenpunkten VI, VII das II Rad bei nach rechts gehendem Zuge am fraglichen Knotenpunkte ruhen muss. Hinsichtlich der unteren Knotenpunkte muss für die Knotenpunkte 1, 2, 3, bezüglich das II, II, III Rad bei nach links gehendem Zuge am rechts vom Knotenpunkte liegenden Querträger, für die Knotenpunkte 4 und 5 das II Rad, bezüglich bei nach links und rechts gehendem Zuge am links und rechts vom Knotenpunkte liegenden Querträger und endlich bei den Knotenpunkten 6, 7, 8, bezüglich das III-, II, II Rad bei nach rechts gehendem Zuge an dem links neben dem Knotenpunkte liegenden Querträger ruhen.

Sind M_0 , M_1 die Momente für das Eigengewicht und die zufällige Last in Tonnenmetern, so ist die betreffende Querschnittsfläche f des Gurtes

$$f = \frac{100 M_0}{1,4 \cdot 250} + \frac{100 M_1}{0,6 \cdot 250} = 0,286 M_0 + 0,667 M_1 \quad \square \text{Centim.}$$

Die Rechnungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Knotenpunkt	Moment für einen Punkt des						Querschnittsfläche	
	Untergurtes			Obergurtes			Obergurt	Untergurt
	Eigeng.	zuf.Last	Summe	Eigeng.	zuf.Last	Summe		
0				0	0	0		0
1	4,4	28,0	32,4	8,9	51,8	60,7	19,9	37,0
2	12,4	66,6	79,0	16,1	89,6	105,7	47,9	64,3
3	18,7	96,3	115,0	20,9	107,7	128,6	69,5	77,8
4	22,0	110,9	132,9	22,7	111,6	134,3	80,3	80,9
5	22,3	115,4	137,7	21,6	114,2	135,8	83,3	82,3
6	19,6	101,4	121,0	17,3	106,3	123,6	73,2	75,8
7	13,8	81,8	95,6	11,1	59,2	70,3	58,5	42,6
8	5,0	29,6	34,6	0	0	0	21,2	0
VIII								

Tonnenmeter.

□ Centimeter.

Für die grafische Durchführung ist 1 Meter = 6mm (Masstab I) eine Tonne = 1,5mm (Masstab II) und die Poldistanz $d = 15$ Tonnen angenommen. Nur für das Eigengewicht ist die Poldistanz gleich der Spannweite = $5,2 d$, dem entsprechend eine Tonne = $5,2 \cdot 1,5 = 7,8$ mm angenommen. In Fig. 7 geben die Ordinaten der Kurven a , b , c , auf dem Längenmasstabe I gemessen, mit d multipliziert, die Momente für das Eigengewicht, die zufällige Last und die Summe von beiden; konstruiert man einen Masstab, dessen Einheit $\frac{1}{d} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ der Einheit des Längenmasstabes I ist,

so würden die Ordinaten der Kurven auf diesem Masstabe gemessen, die Momente in Tonnenmetern geben. In den Masstäben VI und VII ist die Einheit bezüglich gleich $\frac{1,4 \cdot 250}{15} = 23,33$ und $\frac{0,6 \cdot 250}{15} = 10$ Centim. oder 0,233 und 0,1 Meter des Längemasstabes I gemacht. Die Ordinaten der Kurven *a* und *b* geben alsdann nach diesen Masstäben die Querschnittsflächen für das Eigengewicht und die zufällige Last. So z. B. gibt die Ordinate III III' nach dem Masstabe VI = 6, die Ordinate III III'' nach dem Masstabe VII = 72 □*cm*, der Querschnitt des Gurtstückes 3 4 wäre also 6 + 22 = 78 □*cm*. In Fig. 8 sind die Querschnittsflächen nach dem Masstabe IV (10*cm* = 0,2*mm*) aufgetragen.

Gitterstäbe. Hinsichtlich des Eigengewichtes ist die Transversalkraft für einen nach rechts fallenden Stab, dessen oberes Ende den Abstand *x* vom linken Ende hat:

$$Q = \frac{1}{2} 0,48 \cdot 19,5 - 0,35 \left(x + \frac{1}{2} a \right) - 0,13 x \\ = 4,68 - 0,48 x - 0,175 a.$$

Für *a* = 2,5 wird *Q* = 4,24 - 0,48 *x*. Ferner wird für einen nach links fallenden Stab, dessen oberes Ende den Abstand *x* vom linken Ende hat:

$$Q = \frac{1}{2} 0,48 \cdot 19,5 - 0,35 \left(x - \frac{1}{2} a \right) - 0,13 x \\ = 4,68 - 0,48 x + 0,175 a.$$

Für *a* = 2,5 wird *Q* = 5,12 - 0,48 *x*. Hinsichtlich der zufälligen Last ergibt sich, dass für je zwei unter einem oberen Fache liegende Stäbe für *max* (+ *Q*) bei nach links gehendem Zuge das I Rad über dem rechten Querträger, für *max* (- *Q*) bei nach rechts gehendem Zuge das I Rad über dem rechten Querträger liegen muss.

Ist *Q*₀ die absolut genommene Transversalkraft für das Eigengewicht, sind ferner *Q*₁, *Q*₂ die absolut genommenen Grenzen der Transversalkraft für die zufällige Last, so ist die entsprechende Querschnittsfläche

$$f = \left(\frac{Q_0}{1,4} + \frac{Q_1}{0,6} + \frac{Q_2}{1,3} \right) \sec \alpha.$$

Vom Stabe II 3 an wird $\tan \alpha = \frac{1,25}{2,5} = \frac{1}{2}$, also $\sec \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = 1,118$, daher

$$f = 0,799 Q_0 + 1,863 Q_1 + 0,860 Q_2.$$

Für die Stäbe 0 1, 1 I wird $\sec \alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{2,15}{5} \right)^2} = 1,088$, für die Stäbe

I 2, 2 II $\sec \alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{2,35}{5} \right)^2} = 1,105$.

Die Rechnungsergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Knoten- punkte	Transversalkraft					Querschnittsfläche			
	Eigen- gewicht	auf Last		Summe		rechts fallend		links fallend	
		max (+ Q)	max (- Q)	max (+ Q)	max (- Q)	gezog.	gedr.	gezog.	gedr.
0		+	—	+	—				
I	+ 4,24	24,50	0	28,74	—	47,7			
	+ 4,02	n	n	28,52	—				47,5
II	+ 3,24	18,80	1,00	22,04	—	37,9			
	+ 2,93	n	n	21,73	—				37,7
III	+ 2,08	14,24	3,20	16,32	1,12	30,9			
	+ 1,76	n	n	16,00	1,44				30,7
IV	+ 0,88	10,02	5,79	10,90	4,91	24,3			
	+ 0,56	n	n	10,58	5,32				24,1
V	— 0,32	6,41	9,17	6,09	9,49		22,8		
	— 0,65	n	n	5,76	9,82				23,1
VI	— 1,52	3,70	13,40	2,18	14,92		29,3		
	— 1,85	n	n	1,85	15,25				29,6
VII	— 2,72	1,23	17,86	—	20,58		35,5		
	— 3,05	n	n	—	20,91				35,7
VIII	— 3,92	0	23,56	—	27,48		47,0		
	— 4,16	n	n	—	27,72				47,1

Tonnen.

□ Centimeter.

Der Stützdruck wird für das Eigengewicht $\frac{1}{2} \cdot 0,48 \cdot 19,5 = 4,68$; also der Druck im linken Ständer $4,68 - \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot 1,05 = 4,68 - 0,07 = 4,61$, im rechten Ständer $4,68 - \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot 1,25 = 4,68 - 0,68 = 4,60$. Der Maximaldruck in Folge der zulässigen Last entsteht, wenn das erste Rad über der fraglichen Stütze steht und ergibt sich zu 30,29. Demnach wird der Querschnitt eines Ständers $\frac{4,61}{1,4} + \frac{30,29}{0,6} = 3,29 + 50,49 = 53,78$ □ cm.

In der in Fig. 2 durchgeführten grafischen Ermittlung wurden zunächst unter Zugrundelegung des Kraftmasstabes II die Transversalkräfte für das Eigengewicht und die zufällige Last konstruiert. Mit Hilfe des Proportionalwinkels Fig. 2a wurden die Transversalkräfte für das Eigengewicht mit $\frac{0,6}{1,4} = 0,429$, die für die zufällige Last mit $\frac{0,6}{1,3} = 0,462$ multipliziert und zu den positiven Transversalkräften für die zufällige Last die mit $0,429$ multiplizierten Transversalkräfte für das Eigengewicht und die mit $0,462$ multiplizierten negativen Transversalkräfte für die zufällige Last hinzugefügt; ebenso wurden zu den negativen Transversalkräften für die zufällige Last die mit $0,429$ multiplizierten Transversalkräfte für das Eigengewicht und die mit $0,462$ multiplizierten positiven Transversalkräfte für die zufällige Last hinzugefügt. Es sind hierdurch die mit $0, 1, I, 2, \dots$ bezeichneten umringelten Punkte erhalten worden, welche immer den rechten Enden des fraglichen Gitterstabes entsprechen. Durch diese Punkte wurden zu den fraglichen Gitterstäben Parallelen bis zur Abscissenaxe gezogen. Betrachtet man diese Linien nach dem Kraftmasstabe II als Kräfte, so geben dieselben mit $0,6$ dividirt, die Querschnittsflächen. In dem Masstabe III wurde eine Einheit gleich $0,6$ Einheiten des Masstabes III oder $1 \square^{cm} = 1,5 \cdot 0,6 = 0,9mm$ gemacht; die Parallelen der Gitterstäbe in Fig. 2 geben dann auf diesem Masstabe gemessen, direkt die Querschnittsflächen. In Fig. 3 sind die Querschnittsflächen nach dem Masstabe IV ($1 \square^{cm} = 0,2mm$) aufgetragen.

In Fig. 9 ist die Bestimmung der Spannungen für das Eigengewicht nach der Polygonalmethode nach dem besonderen Kraftmasstabe VII ($1 \text{ Tonne} = 5mm$) durchgeführt.

Die Resultate sind für beide Beispiele auf Taf. I in Fig. 1 und 2 grafisch dargestellt.

III. Kapitel.

Parallelträger mit einfachem, mehrtheiligem Gitterwerke.

§. 13. Principien. Ein mehrtheiliges Gitterwerk ist im Allgemeinen kein statisch bestimmtes System, obwohl in der Regel nur eine Gleichung fehlt. Die Gleichungen zur genauen Bestimmung der Spannungen lassen sich zwar im vorliegenden Falle leicht aufstellen, dieselben führen indess immerhin noch zu komplizirten Regeln, wesshalb man sich stets mit einer Näherung begnügt hat.

In der Regel hat man das gegebene mehrtheilige System mit der Theilungszahl n in n eintheilige Systeme, Elementarsysteme, zerlegt. Hierbei tritt jeder Gitterstab in den Elementarsystemen nur einmal auf, während jedes Gurtstück in sämtlichen Elementarsystemen auftritt. Eine solche Zerlegung ist offenbar dann zulässig, wenn sich bei der Deformirung der einzelnen Systeme, welche durch die äusseren Kräfte veranlasst wird, eine vollkommene Uebereinstimmung der Knotenpunkte ergibt. Um eine

gleiche Verrückung der Knotenpunkte in horizontaler Beziehung herbeizuführen, ist es nur nothwendig, jedes Gurtstück des gegebenen Systemes

Fig. 25.

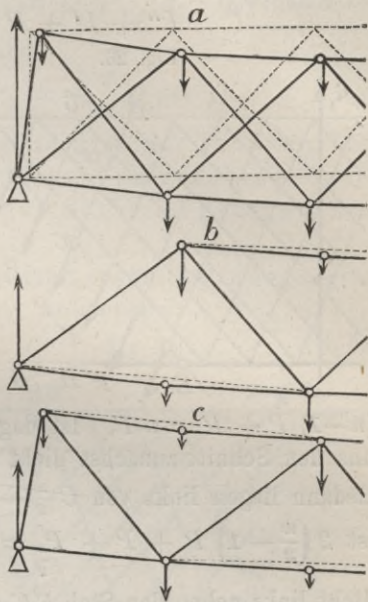
in n Gurtstücke derart zu zerlegen, dass die relative Längenänderung der Gurtstücke der einzelnen Systeme gleich gross wird, dass sich also die Querschnittsflächen zu einander verhalten, wie die Spannungen. Damit aber auch eine gleiche Verrückung in vertikaler Beziehung entstehe, ist es nothwendig, dass man die Gurtstücke der einzelnen Systeme nicht geradlinig, sondern n fach gebrochen und in den Brechpunkten die den Spannungen das Gleichgewicht haltenden Kräfte annimmt (Fig. 25). Nun aber ist klar, dass die letzteren Kräfte gegen die in den Knotenpunkten wirkenden Lasten der geringen Durchbiegung wegen nur sehr klein sein können, so dass man sie vernachlässigen kann. Hier-nach erscheint also eine Zerlegung in einzelne Elementarsysteme als zulässig.

In den Knotenpunkten dieser Systeme sind diejenigen Lasten wirkend anzunehmen, welche beim gegebenen Systeme in den entsprechenden Knotenpunkten wirken. Die Spannungen der Gitterstäbe erhält man hierbei direkt; diejenigen der Gurte erhält man durch Summirung der Spannungen des betreffenden Gurtstückes in den Elementarsystemen.

Anstatt eine Zerlegung in Einzelsysteme hat man auch andere Methoden in Anwendung gebracht. Man gelangt z. B. zu Ausdrücken für die Spannungen, wenn man die Spannungen der Gitterstäbe, welche von einem Schnitte getroffen werden, als gleich annimmt; noch genauere Resultate erhält man, wenn man den Unterschied der Spannungen zweier aufeinander folgenden Gitterstäbe innerhalb eines Schnittes als gleich annimmt. Wir werden zur genaueren Bestimmung der Spannungen die Zerlegung in einzelne eintheilige Systeme, welche wohl die rationellste ist, in Anwendung bringen, werden aber später auch noch die exakte Behandlungsweise vorführen.

§. 14. Näherungsbestimmung der Spannungen.

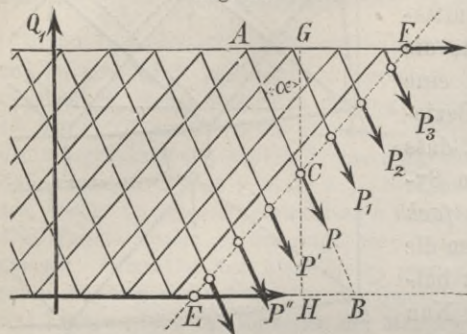
1. Spannung der Gitterstäbe. Am einfachsten gelangt man zu einem Ausdrucke für die Spannung P eines Gitterstabes AB (Fig. 26), wenn man durch die Mitte C dieses Gitterstabes einen Schnitt FE parallel zu



der anderen Gitterstablage führt. Bezeichnet man die Spannungen der links und rechts von C geschnittenen Stäbe mit... P'' , P' , P_1 , P_2 ,... und die Transversalkraft für den schiefen Schnitt mit Q_1 , so ist

$$(\dots P'' + P' + P + P_1 + P_2 \dots) \cos \alpha = Q_1.$$

Fig. 26.

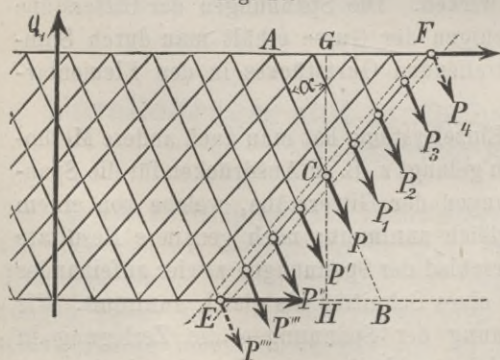


Nimmt man nun an, dass der Unterschied der Spannungen von Stab zu Stab gleich gross sei, so ist $P' + P_1 = 2P$, $P'' + P_2 = 2P$, u. s. w., so dass die angedeutete Summierung leicht vorzunehmen ist. Ist die Teilungszahl n ungerade (Fig. 26), so liegen links und rechts von C zusammen $n-1$ Stäbe, also ist die Summe aller Spannungen

$(n-1)P + P = nP$. Ist dagegen n eine gerade Zahl, so denken wir uns den Schnitt zunächst dicht rechts neben dem Stabe EF (Fig. 27); alsdann liegen links von C $\frac{n}{2} - 1$ Stäbe, rechts $\frac{n}{2}$ Stäbe und die Summe ist $2\left(\frac{n}{2} - 1\right)P + P + P_n = (n-1)P + P_n$. Legen wir den Schnitt

dicht links neben den Stab EF , so liegen links von C $\frac{n}{2}$ Stäbe, rechts $\frac{n}{2} - 1$ Stäbe und die Summe ist $P^{\frac{n}{2}} + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)P + P = P^{\frac{n}{2}} + (n-1)P$.

Fig. 27.



Die Summierung der beiden so erhaltenen Gleichungen gibt

$$\left[2(n-1)P + P^{\frac{n}{2}} + P_n^{\frac{n}{2}} \right]$$

$\cos \alpha = 2Q_1$. Da aber nach der eben gemachten Annahme

$$P^{\frac{n}{2}} + P_n^{\frac{n}{2}} = 2P \text{ ist, so wird}$$

$$2nP \cos \alpha = 2Q_1 \dots, \text{ also allgemein } nP \cos \alpha = Q_1.$$

Ebenso ist bei der Bestimmung der Spannung eines gegen die Vertikale unter dem Winkel β geneigten Stabes zu verfahren. Bezeichnet man jetzt die Spannung der unter α und β gegen die Vertikale geneigten Stäbe mit P_1 und P_2 , so wird mithin

$$22. \quad P_1 = + \frac{1}{n} Q_1 \sec \alpha, \quad P_2 = - \frac{1}{n} Q_2 \sec \beta,$$

und hierin bedeuten Q_1 und Q_2 die Transversalkräfte für den durch die Mitte des fraglichen Stabes parallel zur anderen Stabschaar gelegten Schnitt.

Legt man den Schnitt durch die Mitte des fraglichen Stabes vertikal und bezeichnet die entsprechende Transversalkraft mit Q , so ist

$$Q_1 = Q - \frac{1}{2} (q_1 - q_2) h \tan \beta, \quad Q_2 = Q + \frac{1}{2} (q_1 - q_2) h \tan \alpha.$$

Annähernd ist $Q_1 = Q_2 = Q$, also nahezu

$$23. \quad P_1 = + \frac{1}{n} Q \sec \alpha, \quad P_2 = - \frac{1}{n} Q \sec \beta.$$

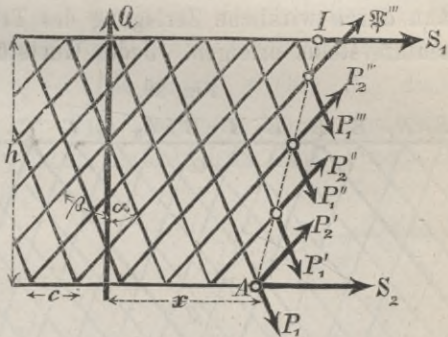
Die Spannungen der Gitterstäbe sind also der Transversalkraft proportional und der Theilungszahl umgekehrt proportional; der eine der sich kreuzenden Stäbe ist gezogen, der andere gedrückt.

Die zufällige Last wäre hinsichtlich ihrer ungünstigsten Lage durch den betreffenden schiefen Schnitt begrenzt anzunehmen.

2. Spannungen der Gurte.

Fig. 28.

Zur Bestimmung der Spannung S eines Stückes des oberen Gurtes führen wir durch die Mitte J desselben einen Schnitt in Richtung der aufrechten Maschendiagonalen. Derselbe schneide den Untergurt im Punkte A . Bezeichnen wir nun die Spannungen der geschnittenen Gitterstäbe bezüglich mit $P_1', P_1'', P_1''', \dots, P_2', P_2'', P_2''', \dots$, die Abstände der unteren Enden dieser



Stäbe von A mit e', e'', e''', \dots und das Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf den schiefen Schnitt und in Beziehung auf den Punkt A mit M_1 , so ist

$$S_1 h + (P_1' e' + P_1'' e'' + \dots) \cos \alpha + (P_2' e' + P_2'' e'' + \dots) \cos \beta + M_1 = 0.$$

Da die Transversalkräfte zur Bestimmung der Spannungen P_1 und P_2 mit gleichem Index sich auf nahe bei einander gelegene Schnitte beziehen, so sind sie nahezu gleich, also ist nahezu $P_1' \cos \alpha = - P_2' \cos \beta$, $P_1'' \cos \alpha = - P_2'' \cos \beta$, u. s. w. Daher erhalten wir annähernd sehr einfach $S_1 h = - M_1$. In gleicher Weise wäre die Bestimmung der Spannung S_2 des Untergurtes vorzunehmen. Somit erhält man:

$$24. \quad S_1 = - \frac{M_1}{h}, \quad S_2 = + \frac{M_2}{h}.$$

Hierbei beziehen sich die Momente M_1 und M_2 auf den durch die Mitte des fraglichen Gurtstückes in Richtung der transversalen Maschendiagonalen gelegten Schnitt und auf den in dem anderen Gurte liegenden Punkt dieses Schnittes. Bezeichnet man das Moment für einen durch diesen Momentenpunkt gelegten Vertikalschnitt mit M und die Horizontalprojektion des schiefen Schnittes mit e , wobei $e = \frac{1}{2} h (\tan \beta - \tan \alpha)$ ist, so ist

$$25. \quad M_1 = M + \frac{1}{2} q_1 e^2, \quad M_2 = M - \frac{1}{2} q_2 e^2.$$

Beim Netzwerke ($\alpha = \beta$) ist $e = 0$; aber auch in anderen Fällen ist das Glied $\frac{1}{2} q_1 e^2, \frac{1}{2} q_2 e^2$ so klein, dass man annähernd $M_1 = M_2 = M$ setzen kann; annähernd ist also

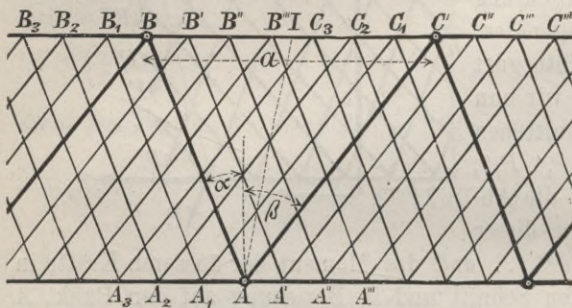
$$26. \quad S_1 = -\frac{M}{h}, \quad S_2 = +\frac{M}{h}.$$

Die Gurtspannungen sind also dem Momente proportional und der Trägerhöhe umgekehrt proportional; der eine Gurt ist gezogen, der andere gedrückt.

§. 15. Genauere Bestimmung der Gurtspannungen für gleichmässige Belastung.

Die genauere Bestimmung der Spannungen kann durch wirkliche Zerlegung des Trägers in einzelne eintheilige Elementarsysteme erfolgen. Jedes Gurtstück des gegebenen Trägers gehört

Fig. 29.



hierbei sämtlichen n Elementarsystemen an. Bezeichnen wir die Momente für die Knotenpunkte $A_3, A_2 \dots A'''$ (Fig. 29) der Elementarsysteme, welchen das fragliche Gurtstück $B''' C_3$ gegenüberliegt, mit m_1, m_2, m_3, \dots , so sind die Spannungen

des fraglichen Gurtstückes in den Elementarsystemen $\frac{m_1}{h}, \frac{m_2}{h}, \dots$, folglich die wirkliche Spannung des fraglichen Gurtstückes

$$27. \quad \begin{cases} S_1 = -\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}{h} = -\frac{\Sigma m}{h}, \\ S_2 = +\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}{h} = +\frac{\Sigma m}{h}. \end{cases}$$

Einfach wird die Anwendung der Regel sowohl in der Rechnung als in der grafischen Ermittlung nur bei gleichmässiger Lastvertheilung, wo sich die Werthe von m_1, m_2, \dots leicht bestimmen lassen. Aber auch hier lässt sich noch eine Vereinfachung durch algebraische Summirung der einzelnen Momente erreichen, welche die Bestimmung der Spannungen um so mehr erleichtern wird, je grösser die Theilungszahl n ist.

Wir bestimmen zunächst die Spannung S eines Stückes des oberen Gurtes, dessen Mitte I ist (Fig. 29 und 30). Die durch I gezogene transversale Maschendiagonale schneide den Untergurt in A . Je nach-

dem die Theilungszahl n ungerade oder gerade ist, fällt A in einen Knotenpunkt (Fig. 29) oder in die Mitte zwischen zwei Knotenpunkte (Fig. 30). Im letzteren

Falle denken wir uns A als Knotenpunkt eines idealen Systemes und nennen in beiden Fällen das System mit dem Knotenpunkte A das Leitsystem.

Am einfachsten führt die Betrachtung der grafischen Konstruktion zum Ziele. Wir denken uns zunächst nur einen Gurt mit der Last q auf die Längeneinheit belastet. Die Ecken des Seilpolygones für ein Elementarsystem, dessen Poldistanz wir gleich 1 annehmen, liegen auf einer Parabel mit dem Parameter $\frac{1}{2} \frac{q}{n}$. Die Punkte A (Fig. 31) dieser Parabel und A' des Seilpolygones für das Leitsystem mögen dem fraglichen Momentenpunkte des Leitsystemes entsprechen. Die Punkte D

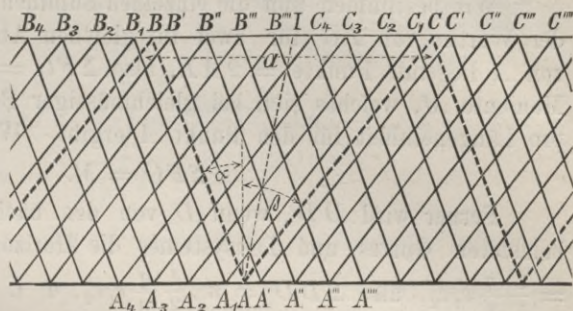
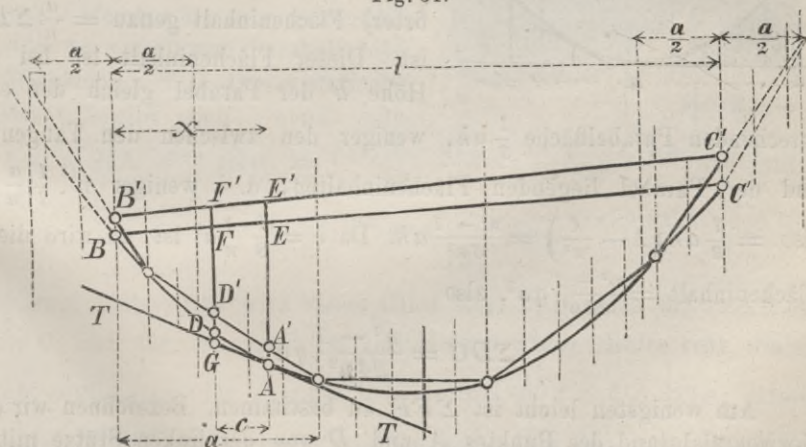


Fig. 30.

Fig. 31.



der Parabel und D' des Seilpolygones entsprechen einem beliebigen Elementarsysteme. Die Punkte B, C der Parabel, sowie die Punkte B', C' des Seilpolygones für das beliebige Elementarsystem mögen den Stützen entsprechen. Zieht man die Gerade BC , welche die Vertikale von A und D in E und F schneidet und die Gerade $B'C'$, welche die Vertikale von D in F' schneidet, dann ist das Moment m für den Punkt $D = D'F' = DF' - DD' = DF + FF' - DD'$. Legt man in A eine Tangente an die Parabel, welche die Vertikale von D in G schneidet, so ist $DF = FG - DG$, also

$$m = FG - DD' - DG + FF', \text{ also} \\ \Sigma m = \Sigma FG - \Sigma DD' - \Sigma DG + \Sigma FF'.$$

Wir bestimmen nun die einzelnen Summen. Zunächst ist die Summe der Werthe von FG für zwei im gleichen Abstände links und rechts von A liegende Punkte $= 2AE$, also $\Sigma FG = nAE$, d. i. gleich dem Momente M , welches sich bei gleichmässiger Belastung mit der Last q pro Längeneinheit für den Punkt A ergibt. Wir setzen also

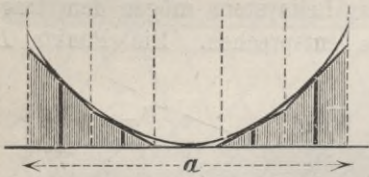
$$\Sigma FG = M.$$

Ferner wird DD' , wenn D von den nächsten Knotenpunkten des belasteten Gurtes und Leitsystemes die Horizontalabstände e_1, e_2 hat, $= \frac{1}{2} \frac{q}{n} e_1 e_2$, also $\Sigma DD' = n \cdot \frac{1}{2} \frac{q}{n} e_1 e_2$, d. i.

$$\Sigma DD' = \frac{1}{2} q e_1 e_2$$

Die Summe von DG ist die Summe der den einzelnen Systemen entsprechenden in Fig. 32 stark ausgezogenen Ordinaten der Parabel in

Fig. 32.



Beziehung auf die Tangente. Legt man in den entsprechenden Punkten Tangenten an die Parabel, so erhält man ein Polygon, dessen (in Fig. 32 schraffirter) Flächeninhalt genau $= \frac{a}{n} \Sigma DG$ ist. Dieser Flächeninhalt ist bei der Höhe h der Parabel gleich der entsprechenden Parabelfläche $\frac{1}{3} ah$, weniger den zwischen den Tangenten

und der Parabel liegenden Flächeninhalten, d. i. weniger $n \cdot \frac{1}{3} \frac{a}{n} \frac{h}{n^2}$, also $= \frac{1}{3} ah \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2 - 1}{3n^2} ah$. Da $h = \frac{1}{8} \frac{q}{n} a^2$ ist, so wird dieser Flächeninhalt $= \frac{n^2 - 1}{24n^3} qa^3$, also

$$\Sigma DG = \frac{n^2 - 1}{24n^2} qa^2.$$

Am wenigsten leicht ist $\Sigma FF'$ zu bestimmen. Bezeichnen wir den Horizontalabstand des Punktes A und D von der linken Stütze mit x, x_1 , den Horizontalabstand von A und D mit c und setzen wir $BB' = y, CC' = z, FF' = \mu$, so ist $\mu = y \frac{l - x_1}{l} + z \frac{x_1}{l} = y \frac{l - x + c}{l} + z \frac{x - c}{l} = y - \frac{x}{l} (y - z) + \frac{c}{l} (y - z)$, also

$$\Sigma FF' = \Sigma \mu = \Sigma y - \frac{x}{l} \Sigma (y - z) + \frac{1}{l} \Sigma (cy - cz).$$

Σy ist die Summe der Ordinaten der Parabel Fig. 33 in Beziehung auf die Sehne. Zieht man das betreffende Polygon, so ist die in Fig. 33

schraffierte Fläche desselben $= \frac{a}{n} \Sigma y$.

Diese Fläche aber ist gleich der entsprechenden Parabelfläche $\frac{2}{3} a h$, weniger den zwischen der Parabel und dem Polygone liegenden Flächen, d. i. weniger

$n \cdot \frac{2}{3} \frac{a}{n} \frac{h}{n^2}$, also $= \frac{2}{3} a h \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2(n^2 - 1)}{3n^2} a h$. Da $h = \frac{1}{8} \frac{q}{n} a^2$

ist, so wird diese Fläche $= \frac{n^2 - 1}{12n^3} q a^3$, also

$$\Sigma y = \frac{n^2 - 1}{12n^2} q a^2.$$

Ferner wird offenbar $\Sigma y = \Sigma z$, also $\Sigma (y - z) = 0$. Ziehen wir endlich links und rechts von B zwei Vertikalen im Abstände $\frac{1}{2} a$ von B , so bedeuten in Σcy die y die den Knotenpunkten entsprechenden, zwischen Parabel und Seilpolygon des Leitsystemes gelegenen Ordinatenstücke innerhalb der beiden oben gezogenen Vertikalen, c ihre Horizontalabstände von B , also Σyc das statische Moment der Ordinatenstücke in Beziehung auf die durch B gehende

Vertikale. Nahezu ist $\frac{a}{n} \Sigma yc$ das statische Moment der entsprechenden, in Fig. 34 schraffierten Parabelstücke in Beziehung auf B . Dieses statische Moment ergibt sich, wenn man

$HI = e$, $HK = e'$ setzt, $= \frac{2ee_1(e - e_1)}{3a} h = \frac{ee_1(e - e_1)qa}{12n}$ und mithin wird

$$\frac{1}{l} \Sigma yc = \frac{qee_1(e - e_1)}{12l}.$$

Für zwei Leitsysteme wird dieses Glied stets 0, nämlich für $e = 0$ oder $e_1 = 0$ und für $e = e_1 = \frac{1}{2} a$. Das Maximum des Gliedes tritt, wie sich leicht ergibt, ein für $e = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) a = 0,789a$ und $0,211a$; dasselbe wird $= \frac{0,096qa^3}{12l}$, d. i. $0,192 \frac{a}{l}$ des Gliedes ΣDG oder $0,096 \frac{a}{l}$ des Gliedes Σy . Hiernach wird selbst das Maximum von $\frac{1}{l} \Sigma cy$ nur klein werden. Dasselbe gilt natürlich auch von $\frac{1}{l} \Sigma cz$. Wenn wir aber $\frac{1}{l} \Sigma (cy - cz)$ vernachlässigen, so ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \Sigma m &= M - \frac{1}{2} q e_1 e_2 - \frac{n^2 - 1}{24n^2} q a^2 + \frac{n^2 - 1}{12n^2} q a^2 \\ &= M - \frac{1}{2} q e_1 e_2 + \frac{n^2 - 1}{24n^2} q a^2. \end{aligned}$$

Fig. 33.

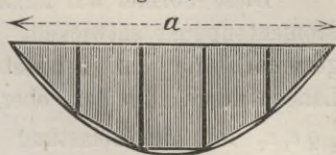
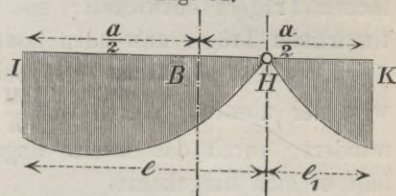


Fig. 34.



Diese Formel war zunächst nur für einen im Untergurte gelegenen Momentenpunkt entwickelt. Hierbei bedeutete q die Last auf die Längeneinheit für den belasteten Gurt. Ist nun q_1, q_2 die Last auf die Längeneinheit für den oberen und unteren Gurt, so wird das Glied $\frac{1}{2} q e_1 e_2$ für die Belastung des Obergurtes $\frac{1}{2} q_1 e_1 e_2$, für die des Untergurtes dagegen Null, weil hier einer der Faktoren e_1, e_2 Null wird. Das Gesagte lässt sich nun auch für einen im Obergurte gelegenen Momentenpunkt anwenden; wir erhalten somit die Regeln:

$$28. \quad \begin{cases} S_1 = -\frac{M}{h} + \frac{q_1 e_1 e_2}{2h} - \frac{n^2 - 1}{24n^2} \frac{q a^2}{h}, \\ S_2 = +\frac{M}{h} - \frac{q_2 e_1 e_2}{2h} + \frac{n^2 - 1}{24n^2} \frac{q a^2}{h}. \end{cases}$$

M bedeutet hierin, um es nochmals zu erwähnen, das Moment für einen Vertikalschnitt, welcher durch den dem fraglichen Gurstücke gegenüberliegenden Knotenpunkt des Leitsystemes gelegt wird und zwar unter Annahme einer gleichmässigen Lastvertheilung.

Die Regel wurde zwar unter der speziellen Voraussetzung eines einfachen Trägers entwickelt; sie wird sich indess ebenso auch für kontinuierliche Träger anwenden lassen.

Wenn M positiv ist, also bei einfachen Trägern an allen Stellen, so wird der absolute Werth von $\frac{M}{h}$ durch das erste Korrektionsglied vermindert, durch das zweite dagegen vermehrt. Bei negativem M verhält es sich umgekehrt.

Wir wollen nun noch einige specielle Anwendungen machen:

1. **Netzwerk.** Wenn die Winkel α und β gleich sind, d. i. beim sogen. Netzwerke, so wird $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} a$, also das zweite Glied $= \frac{q_1 a^2}{8h}$ und $\frac{q_2 a^2}{8h}$. Für specielle Theilungszahlen wird daher, wenn wir im letzten Gliede $q = q_1 + q_2$ setzen:

$$29. \quad \begin{cases} n = 1: S_1 h = -M + \frac{1}{8} q_1 a^2, & S_2 h = +M - \frac{1}{8} q_2 a^2, \\ n = 2: S_1 h = -M + \frac{1}{32} (3q_1 - q_2) a^2, & S_2 h = +M - \frac{1}{32} (3q_2 - q_1) a^2, \\ n = 4: S_1 h = -M + \frac{1}{128} (11q_1 - 5q_2) a^2, & S_2 h = +M - \frac{1}{128} (11q_2 - 5q_1) a^2, \\ n = \infty: S_1 h = -M + \frac{1}{24} (2q_1 - q_2) a^2, & S_2 h = +M - \frac{1}{24} (2q_2 - q_1) a^2. \end{cases}$$

Hiernach wird in ein und demselben Querschnitte stets derjenige Gurt die stärkere Spannung zeigen, an welchem die Bahn nicht liegt.

2. **Fachwerk.** Wenn der eine Winkel $\beta = 0$ ist, d. i. beim sogen. Fachwerke, so wird einer der Faktoren e_1 und $e_2 = 0$, also das erste Korrektionsglied $= 0$. Sonach wird

$$30 \left\{ \begin{array}{l} n = 1: S_1 h = -M, \quad S_2 h = +M, \\ n = 2: S_1 h = -M - \frac{1}{32} q a^2, \quad S_2 h = +M + \frac{1}{32} q a^2, \\ n = 4: S_1 h = -M - \frac{5}{128} q a^2, \quad S_2 h = +M + \frac{5}{128} q a^2, \\ n = \infty: S_1 h = -M - \frac{1}{24} q a^2, \quad S_2 h = +M + \frac{1}{24} q a^2. \end{array} \right.$$

Hiernach sind die Korrektionsglieder immer sehr klein und können beim Netzwerke (das eintheilige ausgenommen) höchstens $\frac{1}{40}$, beim Fachwerke sogar nur $\frac{1}{300}$ des Maximums des Hauptgliedes werden.

Die Berücksichtigung des Gliedes $\frac{1}{l} \Sigma(cy - cz)$ hat keine besondere Schwierigkeit. Durch direkte Berechnung ergibt sich in einzelnen Fällen:

$$31. \left\{ \begin{array}{l} n = 2: \frac{1}{l} \Sigma cy = -\frac{1}{64} + \frac{1}{64} \\ n = 3: \quad \quad \quad = -0 - \frac{1}{81} + \frac{1}{81} \\ n = 4: \quad \quad \quad = -\frac{3}{512} - \frac{5}{512} + \frac{5}{512} - \frac{3}{512} \\ n = 5: \quad \quad \quad = -0 - \frac{1}{125} - \frac{1}{125} + \frac{1}{125} + \frac{1}{125} \\ n = 6: \quad \quad \quad = -\frac{19}{5184} - \frac{15}{1728} - \frac{35}{5184} + \frac{35}{5184} + \frac{15}{1728} + \frac{19}{5184} \end{array} \right\} \cdot \frac{q a^3}{l}$$

Dieselben Regeln gelten natürlich auch für $\frac{1}{l} \Sigma cz$. Das Vorzeichen von Σcy ist positiv, wenn in der Fig. 31 rechts von B die grössere Parabelfläche liegt; ebenso ist das Vorzeichen von Σcz positiv, wenn rechts von C die grössere Parabelfläche liegt.

§. 16. Genauere Bestimmung der Spannungen im Gitterwerke für gleichmässige Belastung. Die Bestimmung der Spannung eines Gitterstabes ist wesentlich einfacher, als die der Gurte, weil es sich hier nur um eines der durch Zerlegung des Trägers entstandenen Elementarsysteme handelt. Bezeichnen wir die Transversalkraft für einen durch den fraglichen Stab mit der Spannung P_1 und P_2 gelegten Schnitt und zwar für das Elementarsystem, in welchem der Stab liegt, und welches wir auch hier das Leitsystem nennen, mit q_1 und q_2 , so ist nach Formel 9 und 9a (S. 16):

$$P_1 = + q_1 \sec \alpha, \quad P_2 = - q_2 \sec \beta.$$

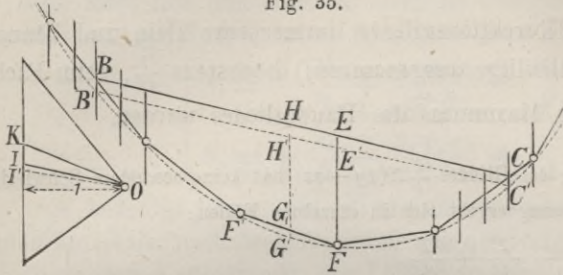
Denkt man sich die gesammte Last auf das Leitsystem wirkend und zwar derart, dass in jedem oberen und unteren Knotenpunkte die Last $q_1 a$ und $q_2 a$ wirkt und bezeichnet jetzt die fragliche Transversalkraft mit Q_1 und Q_2 , so ist $Q_1 = n q_1$, $Q_2 = n q_2$, also

$$32. P_1 = + \frac{1}{n} Q_1 \sec \alpha, \quad P_2 = - \frac{1}{n} Q_2 \sec \beta.$$

Hinsichtlich der Bestimmung von Q_1 und Q_2 unterscheiden wir das Eigengewicht und die zufällige Last.

1. **Einfluss des Eigengewichtes.** Denkt man sich das Eigengewicht gleichmässig über die Gurte vertheilt, so begeht man einen Fehler wegen der falschen Belastung der Endknotenpunkte, zu welchem man am einfachsten durch Betrachtung der Fig. 35 gelangt. Diese Figur entspricht zunächst

Fig. 35.



der Belastung des Untergurtes; zieht man im Lastpolygone vom Pole O aus die Parallelen OJ , OJ' und OK zu BC , $B'C'$ und zur Polygonseite FF' , an welcher der fragliche Gitterstab liegt, so stellt JK die wirkliche Transversalkraft dar, während $J'K$ die Transversalkraft bei Annahme einer gleichmässigen Lastvertheilung darstellt; der gemachte Fehler ist also $= JJ' = z$. Nimmt man die Poldistanz $= 1$ an und setzt wie im vorigen §. $BB' = y$, $CC' = z$, so wird $JJ' = \frac{y-z}{l}$. Bezeichnet man nun den Abstand der äussersten Knotenpunkte des Untergurtes von den Stützen mit c_2 , c'_2 , so ist $y = \frac{1}{2} g_2 c_2 (a - c_2)$, $z = \frac{1}{2} g_2 c'_2 (a - c'_2)$. Ebenso lässt sich der Fehler hinsichtlich des Obergurtes bestimmen; bezeichnet man die Abstände der äussersten Knotenpunkte des Obergurtes von den durch die Stützen gehenden Vertikalen mit c_1 , c'_1 , so ist der gesammte Fehler bei Annahme einer gleichmässigen Lastvertheilung

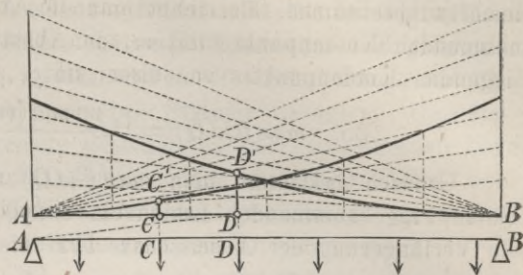
$$33. \quad z = \frac{1}{2l} \left[g_1 \{ c_1 (a - c_1) - c'_1 (a - c'_1) \} + g_2 \{ c_2 (a - c_2) + c'_2 (a - c'_2) \} \right]$$

Dieser Betrag ist von der Transversalkraft für gleichmässige Lastvertheilung abzuziehen. Dieser Fehler ist theils positiv, theils negativ, und im Mittel $= 0$; das Maximum des Fehlers wird beim Netzwerke höchstens $\frac{1}{150}$, beim Fachwerke höchstens $\frac{1}{600}$ des Maximums der Transversalkraft, so dass es wohl zulässig erscheint, denselben zu vernachlässigen. Uebrigens hat es indess gar keinen Anstand, denselben in Rücksicht zu ziehen oder die genaue Transversalkraft direkt durch Einführung der auf die Elementarsysteme in den Knotenpunkten wirkenden Einzellasten mit Hilfe der Rechnung oder durch Konstruktion mit Hilfe des Seilpolygons zu bestimmen.

Aus der im I. Abschnitte (II. Aufl., §. 13, Fig. 23) gezeigten Konstruktion der Transversalkraft für den Fall, dass im fraglichen Querschnitte eine Last und ausserdem nur rechts oder links von demselben Lasten liegen,

geht als einfache Konstruktion hervor: Man konstruiere zwei Seilpolygone, für welche die Axe AB eine Seite ist und für welche eine Last bezüglich in A und B liegt (Fig. 36). Für eine beliebige Lage der Lasten ist alsdann, wenn in C

Fig. 36.



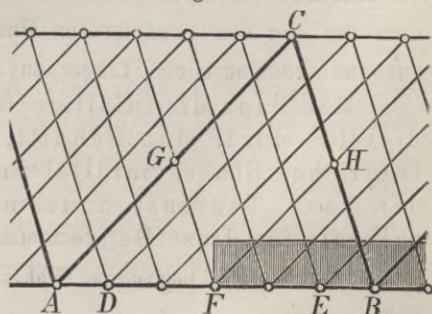
und D zwei benachbarte Lasten liegen, $-CC'$ die Transversalkraft für die links von C liegenden Lasten, $+DD'$ die Transversalkraft für die rechts von D liegenden Lasten, also $DD' - CC'$ die Transversalkraft zwischen C und D für die totale Belastung.

Nimmt man die Last gleichmässig vertheilt an und bestimmt die Transversalkraft Q für einen durch die Mitte des fraglichen Stabes gelegten Vertikalschnitt, so ist nach Formel 10 (Seite 16):

$$34. \quad Q_1 = Q - \frac{1}{2}(g_1 - g_2) h \tan \beta, \quad Q_2 = Q + \frac{1}{2}(g_1 - g_2) h \tan \alpha.$$

2. Einfluss der zufälligen Last. Es kommt nun noch darauf an, die gefährlichste Lage der zufälligen Last festzustellen. Es handle sich um die positive Transversalkraft hinsichtlich eines durch einen der Stäbe AC oder BC (Fig. 37) gelegten Schnittes; die Bahn befinde sich beispielsweise am Untergurte. Befindet sich das Ende der den rechten Theil bedeckenden zufälligen Last zwischen den den Punkten A und B zunächst liegenden Knotenpunkten D und E , so ist die auf das Leitsystem wirkende Last in $A = 0$, in $B = \frac{1}{n} p a$; die Transversalkraft bleibt also ganz dieselbe, das Ende mag zwischen den Punkten D und F liegen, wo es wolle. Rückt das Lastende von E nach B hin, so vermindert sich der Druck in B , hiermit aber der linke Stützendruck oder die

Fig. 37.



Transversalkraft. Rückt das Lastende in die Strecke AD , so wirkt in A eine Last; dieselbe erzeugt aber eine negative Transversalkraft, weil der Stützendruck, welchen dieselbe hervorruft, kleiner ist, als die in A wirkende Last. Sonach darf das Lastende weder innerhalb BE , noch innerhalb AD liegen oder allgemein:

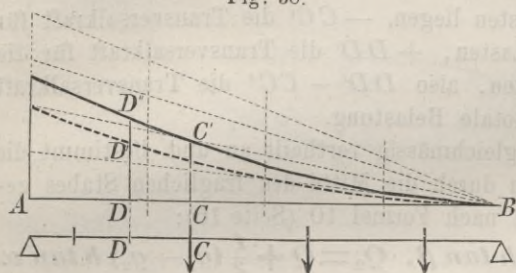
Die Spannung eines Gitterstabes wird zum Maximum, wenn sich das Lastende innerhalb derjenigen Knotenpunkte befindet, welche den Enden des fraglichen Stabes und seines benachbarten Stabes zunächst liegen.

Für einen einfachen Träger ist die entsprechende Transversalkraft leicht zu bestimmen. Bezeichnet man die Anzahl der als belastet anzunehmenden Knotenpunkte mit m , den Abstand des der Stütze zunächst liegenden Knotenpunktes von dieser mit c , so ist

$$35. \max(\pm Q) = \pm \frac{p m a [(m - 1) a + c]}{2l}.$$

Grafisch bestimmt man $\max(+Q)$ am besten, indem man für die in Frage kommenden Lasten ein Seilpolygon konstruiert, für welches die Verlängerung der Abscissenaxe AB die erste Seite ist, für welches

Fig. 38.



eine Last am rechten Ende B der Spannweite AB liegt und für welches die Poldistanz gleich der Spannweite $AB = l$ ist. Ist C der letzte belastete Knotenpunkt, so ist $\max(+Q)$ gleich der Ordinate CC' . Da die Lasten gleich und in gleichen Abständen angeordnet sind, so

liegen die Ecken dieses Seilpolygons auf einer Parabel, dessen Scheitel $\frac{1}{2}a$ rechts von B und um $\frac{pa^2}{8l}$ unter AB liegt. Nimmt man diese Parabel statt des Polygons an, so erhält man $\max(+Q)$ im Maximum um $\frac{pa^2}{8l}$ zu klein. Nimmt man dagegen die Parabel, welche das Seilpolygon tangiert, so erhält man $\max(+Q)$ im Maximum um $\frac{pa^2}{8l}$ zu gross. Diese letztere Annahme ist wohl die empfehlenswerthere; nur ist es rathsam, den Scheitel der Parabel um $\frac{1}{2}a$ nach links, d. h. nach der Stütze B zu verschieben; die Transversalkraft ist alsdann nicht in C , sondern in dem um $\frac{1}{2}a$ von C entfernten Punkte D abzugreifen. Dehnen wir dies auch auf kontinuierliche Träger aus, so können wir allgemein sagen:

Man kann die zufällige Last gleichmässig vertheilt und dieselbe durch den Schnitt, welcher durch die Mitte des fraglichen Stabes parallel zur anderen Stablage gelegt werden kann, begrenzt annehmen und hierbei die Transversalkraft für diese Begrenzung bestimmen.

Der hierbei begangene Fehler ist im Minimum 0, im Maximum $\frac{pa^2}{8l}$. Würde man von den so erhaltenen Transversalkräften noch $\frac{pa^2}{24l}$ abziehen, so würde der durchschnittliche Fehler Null werden.

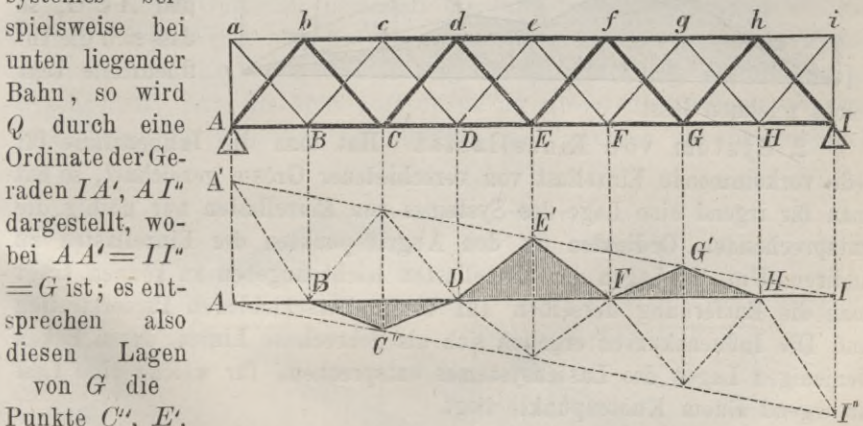
Die in §. 14 gezeigte Näherungsbestimmung gibt sowohl hinsichtlich des Eigengewichtes als der zufälligen Last dieselben Resultate.

§. 17. **Spannungen für ein System von Einzellasten.** Bei einem Systeme von Einzellasten ist jede Last zunächst in zwei auf die beiden benachbarten Knotenpunkte wirkende Komponenten zu zerlegen. Die Spannungen ergeben sich alsdann durch die Behandlung der Elementarsysteme nach dem über eintheilige Systeme Gesagten. Umständlich aber wird hierbei die genaue Bestimmung der gefährlichsten Lage des gegebenen Systemes von Einzellasten. Am einfachsten führt wohl eine grafische Methode zum Ziele, die wir aus der Betrachtung des Einflusses einer Einzellast ableiten wollen.

1. Einzellast. Wir denken uns die Einzellast G über den ganzen Träger bewegt und stellen die fragliche Spannung, die Transversalkraft oder das Moment durch eine Ordinate am Angreifspunkte der Einzellast dar. Die so erhaltene Kurve nennen wir mit Fränkel die Influenz-kurve oder Influenzlinie.

Es handle sich zunächst um die Transversalkraft Q für den Stab Ed (Fig. 39). Liegt G an den Knotenpunkten des den Stab Ed enthaltenden Leit-systemes beispielsweise bei unten liegender Bahn, so wird Q durch eine Ordinate der Geraden IA' , AI'' dargestellt, wobei $AA' = II'' = G$ ist; es entsprechen also diesen Lagen von G die Punkte C'' , E' , G' der Geraden AI'' und $A'I$. Liegt G an einem Knotenpunkte eines anderen Systemes, so ist $Q = 0$; diesen Lagen von G entsprechen also die Punkte B , D , F , H . Da bei einer Verschiebung der Last G um A die Veränderungen der Komponenten von G dem A proportional sind, so wird die Influenzlinie eine gebrochene Linie $ABC''DE'FG'HI$ sein.

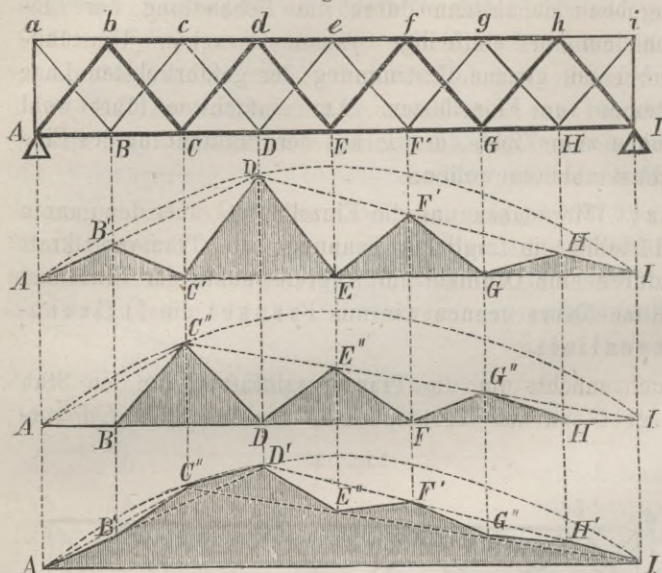
Fig. 39.



Handelt es sich um die Spannung eines beliebigen Gurtstückes cd (Fig. 40), so ist die Summe der Momente für die Punkte D und C massgebend. Für das Elementarsystem, welches den Punkt D enthält, wird die Influenzlinie die gebrochene Linie $AB'CD'EF'GH'I$, für das Elementarsystem mit dem Punkte C wird sie die gebrochene Linie $ABC''DE''FG''HI$. Durch Addition der Ordinaten beider Influenzlinien

ergibt sich die massgebende Influenzlinie $AB'C''D'E''F'G''H'I$. Die Punkte D' und C'' liegen auf einer Parabel mit der Gleichung $y = \frac{Gx(l-x)}{l}$,

Fig. 40.



da bei einem einfachen Träger, welcher durch eine Einzellast G belastet ist, das Moment am Angriffspunkte der Last diesen Werth hat. Die übrigen Ecken der Influenzlinie liegen abwechselnd auf den Geraden $AD'I$ und $AC''I$, so dass sich die Influenzlinie sehr

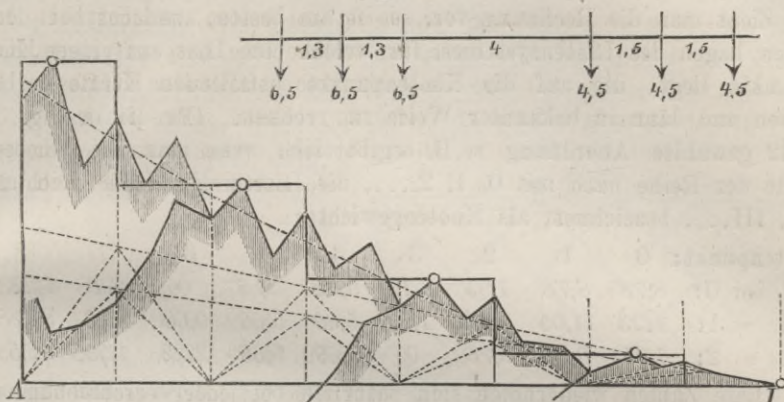
leicht zeichnen lässt.

2. System von Einzellasten. Hat man die Influenzlinie für jede vorkommende Einzellast von verschiedener Grösse gezeichnet, so hat man für irgend eine Lage des Systemes von Einzellasten nur nöthig, die entsprechenden Ordinaten an den Angriffspunkten der Einzellasten zu addiren. Um die Lagen der Einzellasten leicht angeben zu können, trägt man die Entfernung derselben auf einem verschiebbaren Papierstreifen auf. Die Influenzkurven ergeben sich als gebrochene Linien, deren Ecken denjenigen Lagen des Lastensystemes entsprechen, für welche eine Last an irgend einem Knotenpunkte liegt.

Hinsichtlich der Transversalkraft ist es am besten, zunächst für jedes Elementarsystem den Stützendruck bei variabler Lage des Lastensystemes darzustellen; Fig. 41 stellt den linken Stützendruck für das Elementarsystem in Fig. 39 dar, welches den Stab Ed enthält und zwar ist der Stützendruck D als Ordinate an der vorderen Last aufgetragen. Für den Stab Ed ist nun für den nach links gehenden Zug Anfangs $Q = D$; erst wenn die erste Last den Punkt D überschritten hat, ist $Q = D$ weniger der Summe der Komponenten, welche auf die links von E liegenden Knotenpunkte des Leitsystemes wirken und die sich leicht grafisch bestimmen lassen. Die so erhaltene Linie gibt sowohl die gefährlichste Lage des Lastensystemes als auch den Maximalwerth von Q selbst.

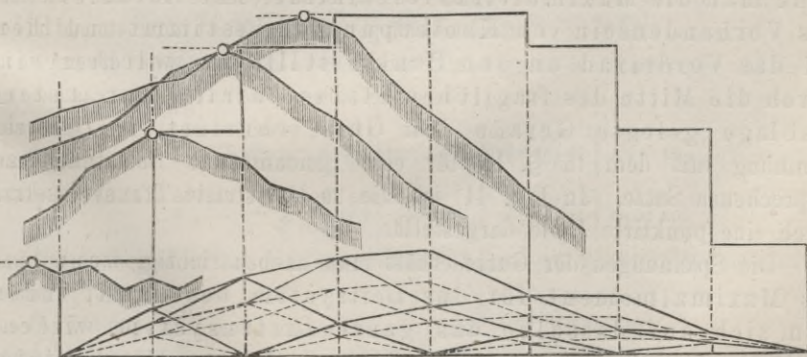
Bei dreiachsigen Lokomotiven wird in der Regel die mittlere Achse über dem dem Zuge zugekehrten Querträger des fraglichen Faches liegen müssen.

Fig. 41.



Umständlicher ist die Bestimmung der Maximalmomente, da man hier für jedes Gurtstück besonders die Influenzlinie zu konstruieren und hiernach den Werth von Σm für verschiedene Lagen des Lastensystemes zu bestimmen hat, wie dies in Fig. 42 für die Theile des Obergurtes durchgeführt ist; die Momentensumme ist wieder als Ordinate am Angriffspunkte der vorderen Last aufgetragen. Hiernach hat für das Stück

Fig. 42.



ab die III. Last bei B , für bc die I. Last bei B , für cd die III. Last bei D , für de die III. Last bei E zu liegen. Da man nach dem für die Momente einfacher Träger gültigen Satze, dass das Moment an einer beliebigen Stelle zum Maximum wird, wenn die Last pro Längeneinheit auf jeder Seite derselben möglichst gleich gross ist und wenn die schwersten Lasten in der Nähe der fraglichen Stelle liegen, doch beliebig die anzunehmende Lage des Lastensystemes angeben kann, so

wird es immer nur auf die Anwendung der gezeigten Konstruktion für wenige Lagen des Lastensystemes ankommen oder man wird statt der in Fig. 42 angegebenen vollständigen Linien nur kurze Stücke derselben in der Nähe der Maximalpunkte zu konstruieren haben.

Zieht man die Rechnung vor, so ist am besten, zunächst bei denjenigen Lagen des Lastensystemes, für welche eine Last auf einem Knotenpunkte liegt, die auf die Knotenpunkte entfallenden Kräfte zu berechnen und dann in bekannter Weise zu rechnen. Für die in Fig. 39 bis 42 gewählte Anordnung z. B. ergibt sich, wenn man die Knotenpunkte der Reihe nach mit 0, 1, 2, ..., die Lasten der Reihe nach mit I, II, III, ..., bezeichnet, als Knotengewichte:

Knotenpunkt:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I bei 0:	8,78	8,78	1,95	3,19	5,23	3,87	0	8,78	4,23
II " 1:	4,23	11,05	4,23	1,59	5,69	5,69	0,68	4,23	8,78
III " 2:	1,95	8,78	8,78	0	5,69	5,69	2,28	1,95	4,55

Diese Zahlen wiederholen sich natürlich bei jeder Verschiebung um eine Knotenweite.

3. Näherungsverfahren. Wenn man nur das Leitsystem in Betracht zieht, auf dieses das ganze Lastensystem wirken lässt und nach den Regeln für eintheiliges Gitterwerk die Spannung eines Gitterstabes und Gurtstückes bestimmt, wobei im ersten Falle das Resultat durch n zu dividieren ist, so erhält man die Spannung stets zu klein.

Die Spannungen der Gitterstäbe erhält man aber nahezu richtig, wenn man die Maximaltransversalkraft ohne Rücksicht auf das Vorhandensein von Knotenpunkten bestimmt und hierbei das Vorderrad an den Punkt stellt, in welchem eine durch die Mitte des fraglichen Stabes parallel zur anderen Stablage gelegte Gerade den Gurt schneidet, in Uebereinstimmung mit dem in §. 16 für eine gleichmässige Belastung ausgesprochenen Satze. In Fig. 41 ist die so konstruierte Transversalkraft durch eine punktirte Linie dargestellt.

Die Spannungen der Gurte erhält man nahezu richtig, wenn man das Maximalmoment für das Leitsystem bestimmt, indem man sich auf dasselbe das ganze Lastensystem wirkend denkt und entsprechend der Formel 28 das Korrektionsglied $\frac{n^2 - 1}{24 n^2} q a^2$ hinzufügt. Hierbei ist aber q etwa doppelt so gross anzunehmen, als sich durch Division eines Raddruckes der Lokomotive oder bei Strassenbrücken des schwersten Wagens durch den Radstand ergibt.

§. 18. Regelmässiger Abschluss für Netzwerk. Die Trägerenden bedürfen wegen des hier hinzukommenden Abschlusses durch die

Endständer bei Anwendung der in §. 15 und 16 aufgestellten Regeln einer besonderen Untersuchung. Wir untersuchen zunächst den Fall, dass die regelmässige Lage der Gitterstäbe bis zum Anschlusse an die Endständer beibehalten werde (Fig. 43).

1. **Gitterstäbe.** Die Regeln 32 und 34 behalten auch für die Endgitterstäbe ihre Giltigkeit. Bei der Näherungsbestimmung der Transversalkräfte unter Annahme einer gleichmässig vertheilten Last hat man den Schnitt durch die Mitte des zur vollen Länge EE' ergänzten fraglichen Gitterstabes EH (Fig. 43 a) zu führen, sowohl hinsichtlich des Eigengewichtes, als hinsichtlich der zufälligen Last.

Ist für das Leitsystem, welches irgend einem Endgitterstabe entspricht, die Anzahl der unteren und oberen Knotenpunkte = m , der Abstand des ersten Knotenpunktes im Ober- und Untergurte von der Lagervertikalen bezüglich c_1 und c_2 , so

ist die entsprechende Transversalkraft für den einfachen Träger $Q = \frac{m q_1 a}{n l} \left[l - c_1 - \frac{m-1}{2} a \right] + \frac{m q_2 a}{n l} \left[l - c_2 - \frac{m-1}{2} a \right]$, oder, da $ma = l$ ist,

$$Q = \frac{1}{2n} q_1 (l + a - 2c_1) + \frac{1}{2n} q_2 (l + a - 2c_2), \text{ oder}$$

$$36. \quad Q = \frac{1}{2n} q (l + a) - \frac{1}{n} (q_1 c_1 + q_2 c_2).$$

Für die Zugstäbe ist $c_1 = c_2 + \frac{1}{2} a$, für die Druckstäbe $c_2 = c_1 + \frac{1}{2} a$, daher wird

$$37. \quad \begin{cases} P_1 = + \frac{1}{2n} [q(l - 2c_2) + q_2 a] \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{2n} [q(l - 2c_1) + q_1 a] \sec \alpha. \end{cases}$$

Bei kontinuierlichen Trägern würde für $\frac{1}{2} ql$ der Maximalstützdruck zu setzen sein.

2. **Ständer.** Die an den Knotenpunkten des Ständers wirkenden Spannungen der Gitterstäbe lassen sich in Vertikal- und Horizontalkräfte zerlegen. Sind P_1 und P_2 die Spannungen der von ein und dem-

Fig. 43.

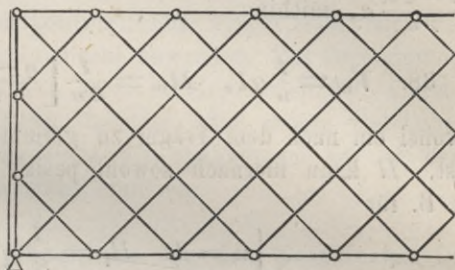
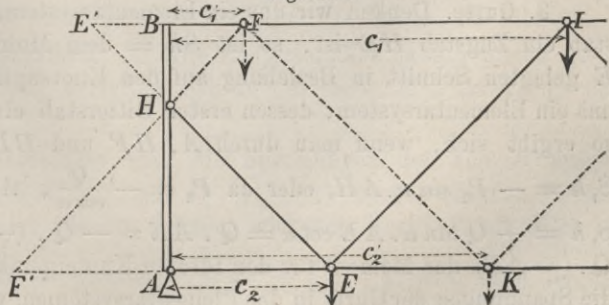


Fig. 43 a.



selben Punkte H ausgehenden Stäbe, V und H die im Punkte H auf den Ständer wirkende Vertikal- und Horizontalkraft, so ist

$$V = P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha = \frac{1}{2n} \left[q(2l + a) - 2q(c_1 + c_2) \right],$$

$$H = P_1 \sin \alpha + P_2 \sin \alpha = \frac{1}{2n} \left[2q(c_1 - c_2) + (q_2 - q_1)a \right] \tan \alpha.$$

Nun aber ist stets $c_1 + c_2 = \frac{1}{2}a$; für den m^{ten} Knotenpunkt, den Punkt A als den ersten gerechnet, wird $c_1 - c_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{n}\right)a - \frac{m}{n}a = \frac{n-4m}{2n}a$, mithin

$$38. \quad V_m = \frac{1}{n}ql, \quad H_m = \frac{1}{2n} \left[\frac{n-4m}{n}q - q_1 + q_2 \right] a \tan \alpha,$$

wobei ein nach dem Träger zu gerichtetes H als positiv angenommen ist. H kann hiernach sowohl positiv als negativ sein. Hiernach wird z. B. für

$$39. \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 4: \quad H_1 = \frac{1}{8}(q_2 - q_1)a \tan \alpha, \\ n = 6: \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1 = \frac{1}{18}(2q_2 - q_1)a \tan \alpha, \\ H_2 = \frac{1}{18}(q_2 - 2q_1)a \tan \alpha, \end{array} \right. \\ n = 8: \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1 = \frac{1}{32}(3q_2 - q_1)a \tan \alpha, \\ H_2 = \frac{1}{16}(q_2 - q_1)a \tan \alpha, \\ H_3 = \frac{1}{32}(q_2 - 3q_1)a \tan \alpha. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Liegt die Bahn am Obergurte, so sind die nach aussen gerichteten Kräfte, liegt die Bahn am Untergurte, so sind die nach innen gerichteten Kräfte überwiegend. Es ist nun leicht, die Beanspruchung des Endständers auf Biegung weiter zu verfolgen, worauf wir hier indess nicht näher eingehen wollen.

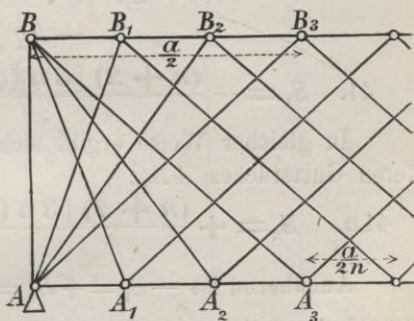
3. Gurte. Denken wir uns ein Elementarsystem, dessen erster Gitterstab ein Zugstab HE ist, so ist $S_1 h$ = dem Momente für den durch E gelegten Schnitt in Beziehung auf den Knotenpunkt E . Denken wir uns ein Elementarsystem, dessen erster Gitterstab ein Druckstab FH ist, so ergibt sich, wenn man durch A , HF und BF einen Schnitt legt, $S_1 h = -P_2 \sin \alpha \cdot AH$, oder da $P_2 = -\frac{Q}{\cos \alpha}$, $AH = AE \cdot \cot \alpha$ ist, $S_1 h = +Q \tan \alpha \cdot AE \cot \alpha = Q \cdot AE = -Q \cdot (-AE)$. Nun aber ist $Q \cdot (-AE)$ das Moment für den idealen Knotenpunkt F' . Das Gesetz für die Spannungen der Gurte in den Elementarsystemen, welches in §. 15 ermit-

telt wurde, gilt also auch an den Enden, so dass die in §. 15 zur Bestimmung der Gurtspannungen aufgestellten Regeln ohne Weiteres angewendet werden können. Allerdings können hier die Fehler bei Anwendung der Näherungsregeln verhältnissmässig gross werden, da die Spannungen nur klein sind. In der Regel schadet dies nichts, weil man die Querschnitte hier meist grösser machen muss, als die Spannungen erfordern würden. Indess ist es nach Bestimmung der Spannungen der Gitterstäbe leicht möglich, die Spannungen der Gurte genau zu bestimmen, indem man einen Vertikalschnitt legt.

Auch über den Mittelstützen kontinuierlicher Träger lassen sich die in §. 15 und 16 aufgestellten Regeln direkt anwenden. Zur Bestimmung der auf den Mittelständer wirkenden grössten Horizontalkräfte müsste man eines der angrenzenden Felder belastet, das andere unbelastet annehmen und für diese Belastungsweise die Spannungen der an den Mittelständer anschliessenden Gitterstäbe ermitteln.

§. 19. Unregelmässiger Abschluss für das Netzwerk. Da der Endständer bei der vorigen Anordnung auf Bruchfestigkeit beansprucht wird, so hat man häufig die Gitterstäbe nur von den beiden Enden des Ständers ausgehen lassen; alsdann erhalten allerdings einige Gitterstäbe eine von der normalen Lage abweichende Lage (Fig. 44).

Fig. 44.



1. **Gitterstäbe.** Die im vorigen §. aufgestellten Formeln 36 und 37 für die Spannung der Endgitterstäbe behalten hier ihre volle Giltigkeit; nur erhält hier α für die einzelnen Gitterstäbe einen verschiedenen Werth. Bei Annahme einer gleichmässig vertheilten Last nach §. 15 wäre zur Bestimmung der Transversalkraft der Schnitt durch die Mitte idealer Gitterstäbe mit der normalen Lage, welche mit den wirklich vorhandenen Gitterstäben das nicht an den Ständer anschliessende Ende gemein haben, zu führen.

Da die Transversalkraft für alle Endgitterstäbe nahezu gleich gross ist, so ist die Spannung derselben nahezu der $\sec \alpha$, d. i. der Länge der Stäbe proportional.

2. **Ständer.** Bezeichnet man die Spannungen der von B ausgehenden Stäbe BA_1, BA_2, \dots mit P_1, P_1', \dots , die betreffenden Winkel mit α, α', \dots , so ist die im Ständer wirkende Vertikalkraft $V = - \left(P_1 \cos \alpha_1 + P_1' \cos \alpha_1 + \dots + P_1^{\frac{n}{2}} \cos \alpha^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2} q_1 \frac{a}{n} \right)$, d. i. nach 37, da

c_2 der Reihe nach die Werthe $\frac{a}{n}, 2\frac{a}{n}, 3\frac{a}{n}, \dots, \frac{n}{2}\frac{a}{n}$ annimmt,

$$V = -\frac{1}{2n} \left[\frac{n}{2} (ql + q_2 a) - 2q \frac{a}{n} \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right) \right] + \frac{1}{2n} q_1 a, \text{ d. i.}$$

$$40. \quad V = -\frac{1}{4} ql - \frac{n-2}{8n} (q_2 - q_1) a.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man V durch das Gleichgewicht des unteren Knotenpunktes A bestimmt. Bei einem kontinuierlichen Träger würde für $\frac{1}{2} ql$ der Maximalstützdruck zu setzen sein. Hier nach ist der Druck im Ständer nahezu gleich dem halben Stützdrucke.

3. Gurte. In den Spannungen der Gurte tritt an den Enden eine Unregelmässigkeit ein, weil zur Bestimmung der Spannungen nicht n Elementarsysteme zur Frage kommen, sondern für das erste Gurtstück nur $\frac{n}{2}$ Systeme, für das zweite Gurtstück $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ Systeme u. s. w. Bezeichnen wir die Spannung des ersten, zweiten, ... oberen und unteren Gurtstückes mit $S_1, S_1', \dots, S_2, S_2', \dots$, so ist $S_1 = -P_1 \sin \alpha - P_1' \sin \alpha' - \dots$, d. i. nach Gleichung 37

$$S_1 = -\frac{1}{2nh} \left[(ql + q_2 a) \frac{a}{n} \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right) - 2q \frac{a^2}{n^2} \left(1^2 + 2^2 + \dots + \frac{n^2}{4} \right) \right], \text{ d. i.}$$

$$41. \quad S_1 = -\frac{(n+2) [3n(ql + q_2 a) - 2(n+1)qa] a}{48n^2 h}$$

In gleicher Weise ergibt sich für die Spannung S_2 des ersten unteren Gurtstückes AA_1 :

$$41a. \quad S_2 = +\frac{(n+2) [3n(ql + q_1 a) - 2(n+1)qa] a}{48n^2 h}$$

Annähernd ist $-S_1 = +S_2 = \frac{n+2}{n} \frac{qla}{h}$. Bezeichnet man die Summe der Horizontalkomponenten der Spannungen zweier in einem Knotenpunkte zusammenstossenden Gitterstäbe der Reihe nach für den Obergurt mit H_1, H_1', \dots , für den Untergurt mit H_2, H_2', \dots , so ergibt sich durch das Gleichgewicht der Knotenpunkte leicht $H_1 = -P_2 \cos \alpha_1 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha) - q_1 \frac{a}{h} \tan \alpha$, $H_1' = -P_2' \cos \alpha_1 (\tan \alpha_2 + \tan \alpha) - q_1 \frac{a}{h} \tan \alpha$, u. s. w., d. i. nach Formel 37:

$$42. \quad \begin{cases} H_1 = \frac{(2+n) [q(nl - 2a) + nq_2 a] a}{2n^2 h} - \frac{q_1 a^2}{2nh}, \\ H_1' = \frac{(4+n) [q(nl - 4a) + nq_2 a] a}{2n^2 h} - \frac{q_1 a^2}{2nh} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

H_2, H_2', \dots erhält man durch Vertauschung von q_1 mit q_2 . Es ist nun $S_1' = S_1 - H_1$, $S_1'' = S_1' - H_1', \dots$ und $S_2' = S_2 + H_2$, $S_2'' = S_2' + H_2'$.

Für kontinuierliche Träger ist in den Formeln 40 bis 42 für $\frac{1}{2} q l$ der Endstützdruck zu setzen.

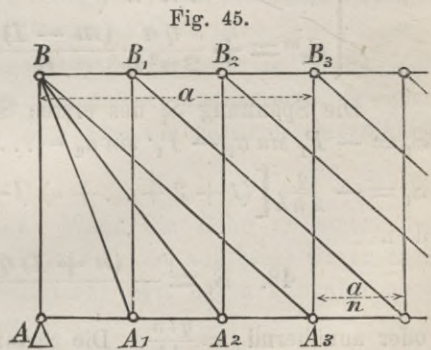
Für die Mittelpfeiler kontinuierlicher Träger ist in den Formeln 40 bis 42 für jede Seite des Ständers statt $\frac{1}{2} q l$ die Transversalkraft unmittelbar neben der Stütze einzuführen und zwar für die Belastung beider neben dieser Stütze liegender Felder, für welche sowohl das Moment als die Transversalkraft an der Stütze zum Maximum wird. In den Formeln 41 und 41 a kommt ausserdem noch bezüglich das Glied $+\frac{M}{h}$ und $-\frac{M}{h}$ hinzu, wobei M das Maximalmoment an der Stütze (absolut genommen) bedeutet. Statt der Formel 40 würde sich als Druck V im Ständer

$$43. \quad V = -\frac{1}{2} D - \frac{n-2}{4n} (q_2 - q_1) a$$

ergeben, wenn D den betreffenden Maximalstützdruck bedeutet.

§. 20. Abschluss für Fachwerk. Beim Fachwerke würde der Anschluss der Gitterstäbe an den Endständer zwischen den Enden desselben eine starke Beanspruchung auf Bruchfestigkeit herbeiführen. Hier lässt man daher die Gitterstäbe stets nur vom oberen Ende des Endständers ausgehen (Fig. 45).

1. Gitterstäbe. Die in §. 15 aufgestellten Regeln behalten auch für die Endgitterstäbe ihre Giltigkeit; nur muss man bei Annahme einer gleichmässig vertheilten Last zur Bestimmung der Transversalkraft den Schnitt durch die Mitte idealer Gitterstäbe mit der normalen Lage, welche mit den wirklich vorhandenen Stäben das untere Ende gemein haben, führen.



Der Ausdruck 36 für Q in §. 18 behält hier für einen Zugstab seine Giltigkeit; nur wird $c_1 = c_2$, also $Q = \frac{1}{2n} q (l + a - 2c)$ oder

$$44. \quad P_1 = + \frac{1}{2n} q (l + a - 2c) \sec \alpha,$$

wenn c den Abstand des unteren Endes des fraglichen Stabes vom Endständer bedeutet. Ist P_2 die Spannung der Vertikalen, welche mit diesem Zugstabe das untere Ende gemein hat, so fordert das Gleichgewicht des unteren Knotenpunktes die Erfüllung der Bedingung $P_1 \cos \alpha + P_2 = q_2 \frac{a}{n}$, mithin wird

$$45. P_2 = -P_1 \cos \alpha + \frac{1}{n} q_2 a = -\frac{1}{2n} q (l + a - 2c) + \frac{1}{n} q_2 a.$$

Für kontinuierliche Träger ist für $\frac{1}{2} ql$ der Stützdruck zu setzen.

2. Ständer. Der Ständer hat hier den vollen Stützdruck, weniger der auf ihn entfallenden, am Untergurte wirkenden Last $\frac{q_2 a}{2n}$ als Druck aufzunehmen. Beim einfachen Träger wird also der Druck im Ständer

$$46. V = \frac{1}{2} ql - \frac{q_2 a}{2n}.$$

Beim kontinuierlichen Träger ist für $\frac{1}{2} ql$ der Stützdruck zu setzen.

3. Gurte. Wir beginnen mit der Bestimmung der Spannungen im Untergurte. Ist die Spannung der Theile $AA_1, A_1A_2, \dots = S_2, S_2', \dots$ die Spannung der Zugstäbe $BA_1, BA_2, \dots = P_1, P_1', \dots$, so ist $S_2 = 0$, $S_2' = P_1 \sin \alpha_1$, $S_2'' = S_2' + P_1' \sin \alpha_2, \dots$, $S_2^m = S_2^{m-1} + P_1^{m-1} \sin \alpha_m$. Die Einsetzung obigen Ausdruckes für P_1 gibt:

$$47. \begin{cases} S_2 = 0, \\ S_2' = + \frac{qa}{2n^2 h} \left(l + \frac{n-2}{n} a \right), \\ S_2'' = + \frac{qa}{2n^2 h} \left(3l + \frac{3n-10}{n} a \right), \\ S_2^m = + \frac{qa}{2n^2 h} \frac{(m-1)m}{6} \left[3l + \frac{3n-4m+2}{n} a \right]. \end{cases}$$

Die Spannung S_1 des ersten Stückes BB_1 des oberen Gurtes ist $S_1 = -P_1 \sin \alpha_1 - P_1' \sin \alpha_2 - \dots - P_1^n \sin \alpha_n$, d. i. nach Formel 44: $S_1 = -\frac{q}{2nh} \left[(1+2+\dots+n)(l+a)\frac{a}{n} - 2(l^2+2^2+\dots+n^2)\frac{a^2}{n^2} \right]$. d. i.

$$48. S_1 = -\frac{(n+1)qa[3nl - (n+2)a]}{12n^2 h}$$

oder annähernd $= \frac{qla}{4h}$. Die Spannung der übrigen Gurtstücke erfolgt in regelmässiger Weise nach den in §. 15 aufgestellten Regeln. Bei kontinuierlichen Trägern ist für $\frac{1}{2} ql$ der Stützdruck zu setzen.

Für die Mittelstützen kontinuierlicher Träger ist in Formel 44 und 45 für $\frac{1}{2} ql$ die betreffende grösste Transversalkraft zu setzen. Der Druck V im Ständer wird

$$49. V = D - \frac{1}{n} q_2 a,$$

wenn D den betreffenden Maximalstützdruck bedeutet. Die Spannung des ersten unteren Gurtstückes neben der Stütze wird $-\frac{M}{h}$, wenn M das

Maximalmoment an der Stütze (absolut genommen) bedeutet. Die Spannungen der übrigen Stücke findet man, wenn man zu den Ausdrücken 47 (für $\frac{1}{2} q l$ aber die Transversalkraft gesetzt) das Glied $-\frac{M}{h}$ hinzufügt. Im Obergurte erfolgt die Bestimmung der Spannungen in regelmässiger Weise.

§. 21. Fachwerk mit schlaffen Diagonalen. Bei dem Fachwerke pflegt man die Vertikalen steif, die Diagonalen dagegen schlaff zu konstruiren. Alsdann können natürlich die Diagonalen keinen Druck aufnehmen. In demjenigen Theile des Trägers, in welchem die Transversalkraft positiv und negativ werden kann, müssen dann entweder die Diagonalen steif konstruirt werden, wie es mehrfach geschehen ist, oder man muss hier, wie es meist geschieht, zwei Schaaren von Diagonalen, d. h. rechts fallende und links fallende anordnen. Wir nennen diese Anordnung Doppelfachwerk. Zerlegt man den Träger in zwei Systeme, von denen das eine die eine, das andere die andere Schaar von Diagonalen enthält, so findet man, dass die eine Schaar einen Druck aufzunehmen hat, während die andere gezogen ist. Da nun aber die schlaffen Diagonalen keinen Druck aufnehmen können, so biegen sich diese Diagonalen seitlich aus und treten dadurch nahezu ausser Wirksamkeit. Man pflegt daher die Rechnung unter der Annahme durchzuführen, dass nur die gezogenen Diagonalen vorhanden seien, dass man es also mit einfachem Fachwerke zu thun habe.

Wie weit jede Schaar der Diagonalen fortzusetzen ist, ergibt sich bei der Bestimmung der Spannungen von selbst, indem man sie eben soweit fortsetzt, als sich noch ein Zug oder ein positiver Querschnitt ergibt.

§. 22. Vertheilung der Last. Wenn die Bahn an einem der beiden Gurte liegt, so ist die Vertheilung der Last auf beide Gurte nach dem in §. 10 Gesagten leicht zu bestimmen. Wir haben nun aber noch einzelne specielle Fälle zu besprechen.

1. Beim engmaschigen Gitterwerke kommt es häufig vor, dass die Querträger, welche die Bahn tragen, nicht an allen Knotenpunkten angebracht sind, so dass man also belastete Knotenpunkte unterscheiden kann, zwischen denen nicht belastete, oder vielmehr nur mit dem halben Trägergewichte belastete Knotenpunkte liegen. Nach der Theorie, welche Gelenkknotenpunkte voraussetzt, haben die Gitterstäbe, welche von den nicht belasteten Knotenpunkten ausgehen, eine wesentlich kleinere Spannung, als die von den belasteten Knotenpunkten ausgehenden Stäbe. Bei steif konstruirten Gurten tritt allerdings eine Vertheilung der Last ein. Eine genauere Theorie würde ziemlich komplizirt werden; es wird indess zulässig sein, eine gleichmässige Vertheilung der Last über sämt-

liche Knotenpunkte des betreffenden Gurtes anzunehmen; der Gurt muss hierbei eine Stärke erhalten, welche einer dieser Vertheilung entsprechenden Beanspruchung auf Bruchfestigkeit genügt.

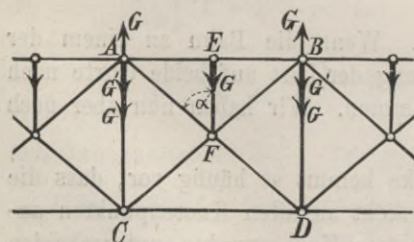
2. Häufig ordnet man beim Netzwerke ausser den geneigten Stäben noch Vertikalen an, mit denen die Bahn, sei es an einem der beiden Gurte oder zwischen diesen, verbunden wird. Wir können indess diesen Fall erst bei den kombinierten Gittersystemen behandeln.

3. Beim Fachwerke kann die Bahn an den Vertikalen in beliebiger Höhenlage gegen die Gurte angebracht werden. Nach dem in §. 10 Gesagten erhalten die über der Bahn liegenden Theile der Vertikalen eine Spannung, als wenn die Bahn am Untergurte läge, die unter der Bahn liegenden Theile eine Spannung, als wenn die Bahn am Obergurte läge, während die Lage der Bahn auf die Spannung der Gurte und der Diagonalen keinen Einfluss übt.

§. 23. Unterstützung der Gurte durch Sekundärkonstruktionen. Sekundärkonstruktionen zur Unterstützung der Gurte zwischen den Knotenpunkten zum Zwecke der Anbringung von Querträgern werden bei mehrtheiligen Gittersystemen weniger nöthig, als beim eintheiligen und wir wollen auch nur die Verbindung der Gurte mit den Kreuzungspunkten der Gitterstäbe beim zweitheiligen Netzwerke durch Vertikalen (Fig. 45) untersuchen.

Am einfachsten denkt man sich ein solches System in ein gewöhnliches zweitheiliges System ohne Hilfsvertikalen und ein System von Dreieckshäng- oder Sprengwerken (Fig. 45 b) zerlegt. Wir bezeichnen die auf die unterstützten Punkte E entfallende Last, d. i. das Gewicht des

Fig. 45 a.



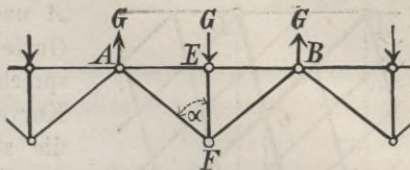
betreffenden Gurtes, das Gewicht der Bahn und die zufällige Last auf den halben Abstand zweier Knotenpunkte mit G , die in den Hauptknotenpunkten A, B wirkenden Lasten mit G' , wobei G' nur um das halbe Gewicht des Gitterwerkes, auf den halben Abstand zweier Knotenpunkte, grösser ist, als G . Wir denken uns G' in eine nach

unten gerichtete Kraft $G' + G$ und eine nach oben gerichtete Kraft G zerlegt. Die in E wirkenden Lasten denken wir uns nur auf das Hilfssystem (Fig. 45 b) wirkend; die in A und B wirkenden Kräfte $G' + G$ denken wir uns nur auf das Hauptsystem, die nach oben wirkenden Kräfte G dagegen auf das Hilfssystem wirkend; dies ist nothwendig, um im Hilfssysteme das Gleichgewicht der äusseren Kräfte herbeizuführen. Im Hauptsysteme bleiben die Spannungen dieselben, als wenn die Hilfsvertikalen nicht vorhanden wären.

Im Hilfssysteme bleiben die horizontalen Stücke ohne Spannung. Die Spannung der Gurte wird daher durch die Hilfsvertikalen nicht geändert.

Die Spannung der Hilfsvertikalen ist $=G$ und zwar ein Druck, wenn die Bahn am Obergurte, ein Zug, wenn die Bahn am Untergurte liegt.

Fig. 45 b.



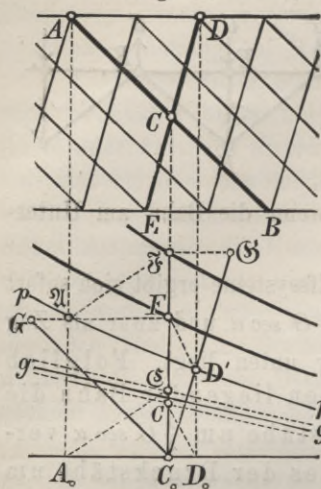
Die Spannung der geneigten Stäbe im Hilfssysteme ergibt sich sofort durch das Gleichgewicht des Punktes F zu $\frac{1}{2} G \sec \alpha$ und zwar als Zug oder Druck, je nachdem die Bahn oben oder unten liegt. Folglich wird durch die Hilfsvertikalen bei oben liegender Bahn die Spannung des oberen Theiles der Zugstäbe um $\frac{1}{2} G \sec \alpha$ vermehrt, die Spannung des oberen Theiles der Druckstäbe um $\frac{1}{2} G \sec \alpha$ vermindert, während bei unten liegender Bahn die Spannung des unteren Theiles der Zugstäbe um $\frac{1}{2} G \sec \alpha$ vermindert, die des unteren Theiles der Druckstäbe um $\frac{1}{2} G \sec \alpha$ vermehrt wird.

§. 24. Grafische Bestimmung der Spannungen und Querschnitte. Die grafische Bestimmung der Spannungen haben wir in dem bisher Gesagten bereits mehrfach erwähnt, so dass es nur noch erübrigt, einige ergänzende Bemerkungen zu machen. Die grafische Konstruktion kann, wie die Rechnung in verschiedener Weise durchgeführt werden. Wir erwähnen die folgenden drei Methoden:

1. Ohne Zerlegung in Elementarsysteme. Die einfachste Methode, die indess, namentlich für ein System von Einzellasten, nicht ganz genau ist, entspricht dem in §. 15 und 16 Gesagten. Sie beruht auf der Kenntniss der Transversalkräfte Q und Momente M . Diese beiden Grössen sind für die einzelnen vertikalen Querschnitte entweder zu berechnen oder zu konstruiren (in der im I. Abschnitte gezeigten Weise), in jedem Falle aber durch Kurven darzustellen, deren Ordinaten in dem fraglichen Querschnitte den Werthen Q und M entsprechen.

a. Gitterstäbe. Neben der Linie gg (Fig. 46), welche die Transversalkräfte für das Eigengewicht darstellt, zieht man zwei Linien, welche von dieser den Vertikalabstand $-\frac{1}{2}(g_1 - g_2) h \tan \beta$ und $+\frac{1}{2}(g_1 - g_2) h \tan \alpha$ haben, also nach §. 16 die Transversalkraft Q_1 und Q_2 darstellen, welcher die Spannungen der Gitterstäbe proportional sind. Der Mitte C der beiden Stäbe AB und DE entsprechen die Ordinaten $C_0 C$

Fig. 46.



$P_1 = +\frac{1}{n} C_0 F \cdot \sec \alpha$, $P_2 = -\frac{1}{n} C_0 \mathfrak{F} \cdot \sec \beta$.

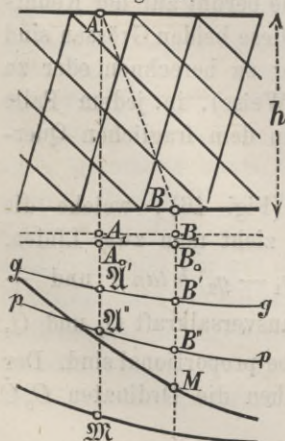
Will man die Spannungen P_1 und P_2 selbst haben, so ziehe man durch F und \mathfrak{F} Horizontalen, und durch C_0 Parallelen zu den Stäben, welche die ersteren in G und \mathfrak{G} schneiden; alsdann ist $P_1 = +\frac{1}{n} C_0 G$, $P_2 = -\frac{1}{n} C_0 \mathfrak{G}$. Indess kann man auch P_1 und P_2 durch Konstruktion entsprechender Masstäbe bestimmen; konstruirt man nämlich zwei Masstäbe, deren Einheiten gleich $\frac{n}{\sec \alpha}$ und $\frac{n}{\sec \beta}$ oder $n \cos \alpha$ und $n \cos \beta$ von der Einheit des Masstabes für die Transversalkräfte sind, so gibt $C_0 F$ und $C_0 \mathfrak{F}$, nach diesen Masstäben gemessen, direkt die Werthe für P_1 und P_2 .

Bezeichnet man die Querschnittsflächen beider Gitterstäbe mit f_1 und f_2 , die zulässige Inanspruchnahme mit K_1 und K_2 , so ist

$$f_1 = \frac{P_1}{K_1} = \frac{\sec \alpha}{K_1 n} \cdot C_0 F, \quad f_2 = \frac{P_2}{K_2} = \frac{\sec \beta}{K_2 n} \cdot C_0 \mathfrak{F}.$$

Konstruirt man zwei neue Masstäbe, deren Einheiten $= K_1 n \cos \alpha$ und $K_2 n \cos \beta$ von der Einheit des Masstabes für die Transversalkräfte sind, so gibt $C_0 F$ und $C_0 \mathfrak{F}$, auf diesen Masstäben gemessen, direkt den Werth von f_1 und f_2 an.

Fig. 47.



b. Gurte. Um die Spannung S des oberen Gurtstückes, dessen Mitte A (Fig. 47) ist, zu bestimmen, legt man durch A in Richtung der stehenden Maschendiagonalen einen Schnitt, welcher den Untergurt in B schneidet. Es seien nun $A_0 \mathfrak{M}'$ und $A_0 \mathfrak{M}''$ die Momente für den Punkt A , $B_0 B_1$ und $B_0 B''$ die Momente für den Punkt B hinsichtlich des Eigengewichtes und der zufälligen Last bei gleichmässiger Lastvertheilung und

$$B_0 B_1 = \frac{n^2 - 1}{24 n^2} q a^2 - \frac{q_1 e_1 e_2}{2}.$$

Macht man $A_0 \mathfrak{M} = B_0 B_1 + B_0 B'' + B_0 B_1 = B_1 B_1 + B_0 B''$, so ist $S_1 h = A_0 \mathfrak{M}$. Ist B die Mitte eines unteren Gurtstückes mit der Spannung S_2 und

macht man $A_0 A_1 = \frac{n^2 - 1}{24 n^2} q a^2 - \frac{q_2 e_1 e_2}{2}$, $B_0 M = A_1 \mathfrak{M}' + A_0 \mathfrak{M}''$, so ist $S_2 h = B_0 M$.

Bedeutet F_1 und F_2 die Querschnittsfläche des Ober- und Untergurtes, K_1 und K_2 die zulässige Inanspruchnahme, so ist

$$F_1 = \frac{S_1}{K_1} = \frac{A_0 \mathfrak{M}}{K_1 h}, \quad F_2 = \frac{S_2}{K_2} = \frac{B_0 M}{K_2 h}.$$

Konstruiert man daher zwei neue Masstäbe, deren Einheiten = $K_1 h$ und $K_2 h$ von der Einheit des Masstabes für die Momente sind, so gibt $A_0 \mathfrak{M}$ und $B_0 M$ auf diesen Masstäben gemessen, unmittelbar den Werth von F_1 und F_2 an.

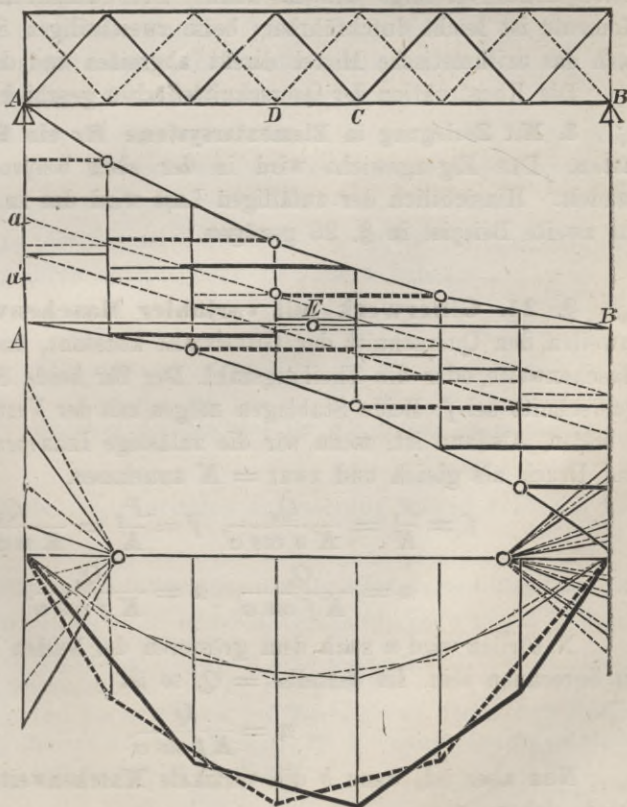
Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung tritt eine entsprechende Anordnung ein, die aus dem ersten Beispiele in §. 26 hervorgeht.

2. Mit Zerlegung in Elementarsysteme für eine gleiche Belastung der Knotenpunkte. In Fig. 48 ist beispielsweise ein zweitheiliges System angenommen. Die

Fig. 48.

auf das I. und II. Elementarsystem bezüglichen Linien sind voll und punktiert, für die zufällige Last stark, für das Eigengewicht schwach.

a. Gitterstäbe. Die Maximal-Transversalkräfte für die zufällige Last lassen sich in sehr einfacher Weise nach §. 16 (Fig. 38) konstruieren. Für das Eigengewicht ist der Stützendruck mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygones zu konstruieren, wobei man sich sämtliche untere und



obere Lasten in ihrem Mittelpunkte vereinigt denken kann. Statt dessen kann der Stützdruck direkt nach den Hebelgesetzen bestimmt werden; macht z. B. für das I. System Aa gleich der Summe aller unteren, Aa' gleich der Summe aller oberen Knotengewichte, so sind die Ordinaten der Geraden Ba , Ba' , welche den Mittelpunkten C und D aller unteren und oberen Knotengewichte entsprechen, die linken Stützdrücke für diese Lasten, die man nur zu addiren hat. Die Transversalkräfte nehmen alsdann von Stab zu Stab abwechselnd um ein oberes und unteres Knotengewicht ab. Speziell beim zweitheiligen Systeme sind die Transversalkräfte die den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten zweier Parallelen, welche von der Mitte E von AB einen Vertikalabstand haben, welcher gleich der Hälfte eines oberen oder unteren Knotengewichtes ist.

b. Gurte. Die Seilpolygone für die Elementarsysteme sind in bekannter Weise zu konstruiren. Will man hierbei die Schlusslinien zusammenfallen lassen, wie in Fig. 48 (was indess nicht nothwendig ist), so muss man bei unsymmetrischer Anordnung die Seilpolygone zunächst probeweise konstruiren, wobei man sich indess die Kräfte in ihrem Mittelpunkte vereinigt denken kann. Die Summirung der betreffenden Momente ist leicht durchführbar; beim zweitheiligen Systeme kann man auch das arithmetische Mittel direkt abgreifen und dasselbe verdoppeln.

Die Konstruktion der Querschnittsflächen geschieht nun wie unter 1.

3. Mit Zerlegung in Elementarsysteme für ein System von Einzel-lasten. Das Eigengewicht wird in der eben besprochenen Weise behandelt. Hinsichtlich der zufälligen Last wird das in §. 17 Gesagte und das zweite Beispiel in §. 26 genügen.

§. 25. Gitterwerk mit variabler Maschenweite. Man lässt zuweilen den Querschnitt der Gitterstäbe konstant, ändert dafür aber die Maschenweite oder die Theilungszahl. Der für beide Stablagen gewählte Querschnitt sei f . Beide Stablagen mögen mit der Vertikalen den Winkel α bilden. Alsdann ist, wenn wir die zulässige Inanspruchnahme für Zug und Druck als gleich und zwar $= K$ annehmen,

$$f = \frac{P_1}{K} = \frac{Q_1}{K n \cos \alpha}, \quad f = \frac{P_2}{K} = \frac{Q_2}{K n \cos \alpha};$$

$$n = \frac{Q_1}{K f \cos \alpha}, \quad n = \frac{Q_2}{K f \cos \alpha}.$$

Natürlich wird n nach dem grösseren der beiden Werthe Q_1 und Q_2 zu berechnen sein. Ist derselbe $= Q$, so ist

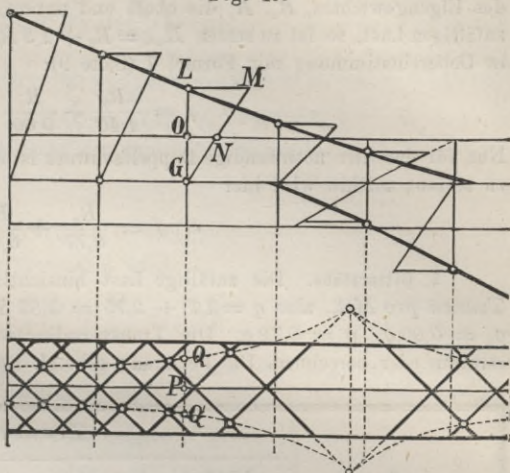
$$n = \frac{Q}{K f \cos \alpha}.$$

Nun aber ist, wenn b die vertikale Maschenweite bezeichnet, $h = \frac{l}{2} n b$, daher

$$\frac{b}{2} = \frac{h}{n} = \frac{K f \cos \alpha}{Q} h.$$

Fig. 49.

Hieraus folgt folgende Konstruktion (Fig. 49): Es sei GL das Q für den Querschnitt G . Man mache $GO = \frac{1}{2} h$, lege durch O eine Horizontale, ziehe durch L eine Horizontale LM , mache $LM = 2 K f \cos \alpha$ und ziehe die Gerade GM , welche die durch O gelegte Horizontale in N schneidet. Alsdann ist $ON : LM = GO : GL$, d. i. $ON : 2 K f \cos \alpha = \frac{1}{2} h : Q$, daher $ON = \frac{K f \cos \alpha}{Q} h = \frac{1}{2} b$. Macht man



nun $PQ = PQ' = ON$, so ist QQ' die vertikale Maschenweite b . Verbindet man alle so erhaltenen Punkte Q, Q' durch Kurven, so liegen in denselben die oberen und unteren Ecken der mittleren Maschen, so dass es hiernach leicht ist, das Gitterwerk zu verzeichnen.

Sollte sich an der Stelle, wo Q zum Minimum wird, b zu gross ergeben, so müssen die Kurven vor dem Verzeichnen des Gitterwerkes entsprechend abgeändert werden.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung würde sich das Verfahren entsprechend zu ändern haben.

Beispiel. Es sei $l = 40^m$, $q = 6,5$ Ton. pro Met., $K = 0,67$ Ton. pro \square^m , $\alpha = \beta = 45^\circ$ und $Q = k q l$, so ist

$$b = \frac{2 \cdot 0,67 \cdot 50 \cdot 0,707}{k \cdot 6,5 \cdot 40} h = 0,182 \frac{h}{k}$$

also ist $LM = 0,182$ Einheiten des Masstabes für $q l^2$, $GO = \frac{1}{2} h$ zu machen.

§. 26. Beispiele. Zur weiteren Erläuterung mögen noch die folgenden Beispiele dienen.

I. Beispiel: Wir behandeln im Folgenden als Beispiel eine Gitterbrücke mit kontinuierlichen Trägern für zwei Felder von 50 Met. Spannweite und 5 Met. $= \frac{1}{10} l$ Höhe; für ein Gleis seien zwei Träger angeordnet; die Bahn liege am Obergurte. Das Gitterwerk sei zweitheiliges Fachwerk mit unter 45° geneigten Diagonalen (Taf. III). Das Eigengewicht pro Träger sei $g = 1,1$ Tonnen pro Meter; hiervon komme $0,75$ Tonnen auf den Obergurt, $0,35$ Tonnen auf den Untergurt. Die theoretische Querschnittsfläche irgend eines Theiles sei bestimmt durch die Regel

$$a. f = \frac{R_{\max}}{0,77} - \frac{R_{\min}}{1,70},$$

wenn R_{max} und R_{min} die obere und untere Grenze der Spannung des Theiles bezeichnet (siehe Winkler, Wahl der zulässigen Inanspruchnahme, Wien, 1877). Hierbei ist die zufällige Last in der 1,3fachen Grösse einzuführen. Ist R_0 die Spannung in Folge des Eigengewichtes, R_1 , R_2 die obere und untere Grenze der Spannung in Folge der zufälligen Last, so ist zu setzen $R_{max} = R_0 + 1,3 R_1$, $R_{min} = R_0 - 1,3 R_2$, daher wird, in Uebereinstimmung mit Formel 7 (Seite 9):

$$b. f = \frac{R_0}{1,40} + \frac{R_1}{0,60} + \frac{R_2}{1,30}.$$

Nur für das hier nothwendige Doppelfachwerk ist die untere Spannungsgrenze $R_{min} = 0$ zu setzen; mithin wird hier

$$c. f = \frac{R_0}{0,77} + \frac{R_1}{0,60}.$$

1. Gitterstäbe. Die zufällige Last hinsichtlich der Transversalkräfte sei 2,75 Tonnen pro Met., also $q = 1,1 + 2,75 = 3,85$ Tonnen, $g = 0,28 q$, $g_1 = 0,19 q$, $g_2 = 0,09 q$, $p = 0,72 q$. Die Transversalkräfte lassen sich nun geometrisch konstruiren oder berechnen. Die Rechnung gibt (I. Heft, II. Aufl. §. 53–56):

x	Transversalkraft Q		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	max (+ Q)
0	+ 0,375	+	—
0,1	+ 0,275	0,4375	0,0625
0,2	+ 0,175	0,3437	0,0687
0,3	+ 0,075	0,2624	0,0874
0,375	0	0,1932	0,1182
0,4	— 0,025	0,1491	0,1491
0,5	— 0,125	0,1359	0,1609
0,6	— 0,225	0,0898	0,2148
0,7	— 0,325	0,0544	0,2794
0,8	— 0,425	0,0287	0,3537
0,9	— 0,525	0,0119	0,4369
1	— 0,625	0,0027	0,5277
		0	0,6250
. l	. gl	. pl	. pl

Auf Taf. III. sind hiernach die Transversalkräfte für das Eigengewicht und die zufällige Last, bezüglich nach den Masstäben II und III aufgetragen. Nach dem Obigen sind die Transversalkräfte Q für die Gesamtlast konstruirt und durch stark ausgezogene Linien dargestellt. Hierbei ist hinsichtlich des Eigengewichtes für die II. Schaar (Vertikalen) die punktirte Linie $g e$, welche $\frac{1}{2} (g_1 - g_2) h \tan \alpha = \frac{1}{2} (0,75 - 0,35) \frac{g}{1,1} \frac{l}{10} 1 = 0,0182 gl$ über der Linie GG' und die punktirte Linie $g'e'$, welche $\frac{1}{2} (g_1 - g_2) h \tan \alpha = 0,0182 gl$ unter der Linie gg' liegt, für die I. und III. Schaar (Diagonalen) die volle Linie GG' massgebend.

Bezeichnet Q_0, Q_1, Q_2 die Transversalkraft für das Eigengewicht und die beiden Grenzen für die zufällige Last, so wird die Querschnittsfläche f_1 der einfachen Diagonalen nach Formel b :

$$f_1 = \left(\frac{Q_0}{1,4} + \frac{Q_1}{0,6} + \frac{Q_2}{1,3} \right) \frac{\sec \alpha}{2},$$

oder auch, weil $\sec \alpha = 1,414$ und $Q_1 - Q_2 = \frac{p}{g} Q_0 = 2,5 Q_0$, also $Q_2 = Q_1 - 2,5 Q_0$ ist,

$$f_1 = -0,852 Q_0 + 1,722 Q_1 = 1,722 (Q_1 - 0,495 Q_0).$$

Dagegen wird die Querschnittsfläche der doppelten Diagonalen nach Formel c :

$$f_1 = \left(\frac{Q_0}{0,77} + \frac{Q_1}{0,6} \right) \frac{\sec \alpha}{2}, \text{ d. i.}$$

$$f_1 = 1,193 (Q_1 + 0,769 Q_0).$$

Die Querschnittsfläche f_2 der Vertikalen wird

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_0}{1,4} + \frac{Q_1}{0,6} + \frac{Q_2}{1,3} \right).$$

Der Vertikalschnitt, für welchen Q_1 und Q_2 zu nehmen ist, liegt hier um $2,5^m$ links, bezüglich rechts neben dem Vertikalschnitte, für welchen Q_0 zu nehmen ist;

daher ist $Q_1 - Q_2 = \frac{p}{g} (Q_0 + 2,5 g)$. Dies eingesetzt gibt:

$$f_2 = 1,218 (Q_1 - 0,495 q l) - 0,013 g l.$$

Setzen wir $Q_0 = k_0 g l$, $Q_1 = k_1 q l$, $Q_2 = k_2 q l$ und hierin $q l = 3,85 \cdot 50 = 192,5'$, so wird

$$f_1 = 332 (k_1 - 0,495 k_0) \text{ oder } 230 (k_1 + 0,769 k_2),$$

$$f_2 = 235 (k_1 - 0,495 k_0 - 0,011).$$

Macht man nun $A F = 0,495 A G$, $B F' = 0,495 B G'$, $A f = 0,495 A g$, $B f' = 0,495 B g$ und $A F_1 = 0,769 A G$, $B F_1' = 0,769 B G'$ und zieht die Geraden $F E F'$, $f e, f' e'$, $F_1 E F_1'$ und zieht noch über und unter der Axe $A' B$ im Abstände $0,011$ (nach dem Masstabe IV) eine Horizontale, so lassen sich die Grössen $k_1 - 0,495 k_0$, $k_1 + 0,769 k_2$, $k_1 - 0,495 k_0 - 0,011$ abgreifen. Für die Diagonalen sind die Ordinaten der Mitte der fraglichen Diagonalen entsprechend, für die Vertikalen dagegen ist k_1 dem oberen Ende der die Vertikale kreuzenden Diagonalen und k_0 der Vertikalen selbst entsprechend abzugreifen.

Konstruirt man jetzt drei neue Masstäbe V, Va und VI, deren Einheiten bezüglich $\frac{1}{332} = 0,00301$, $\frac{1}{230} = 0,00435$ und $\frac{1}{235} = 0,00425$ der Einheit des Massstabes IV sind, so erhält man direkt die Querschnittsflächen.

Die so gefundenen Querschnittsflächen sind in Fig. 3 als Höhen der die einzelnen Stäbe repräsentirenden Rechtecke aufgetragen und in diese Rechtecke selbst eingeschrieben.

Bei den Enddiagonalen 01 und XX 19 ist die Transversalkraft, welche sich für die ganz normale Lage, d. i. für die Lage des Stabes (bei gleichem unteren Ende) unter 45° ergeben würde, im Verhältniss der Sekanten der Winkel, d. i. dem Verhältnisse der Sekanten der Winkel, deren Tangenten $= 1$ und $\frac{1}{2}$ sind, zu ändern, was auf Taf. III durch Konstruktion geschehen ist.

2. Gurte. Für die Gurte ist $g = 1,1$, $p = 2,5$ Tonnen pro Meter zu setzen also $q = 3,6$ Tonnen pro Meter, $g = 0,31 q$, $p = 0,69 q$. Die Momente, welche sich nach der Theorie der kontinuierlichen Träger ergeben (I. Heft, II. Aufl. §. 53–56), sind:

x	Moment M		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		$\max (+ M)$	$\max (- M)$
0	0	+	-
0,1	+ 0,0325	0,0388	0,0063
0,2	+ 0,0550	0,0675	0,0125
0,3	+ 0,0675	0,0863	0,0188
0,4	+ 0,0700	0,0950	0,0250
0,5	+ 0,0625	0,0938	0,0313
0,6	+ 0,0450	0,0825	0,0375
0,7	+ 0,0175	0,0613	0,0438
0,75	0	0,0469	0,0469
0,8	- 0,0200	0,0300	0,0500
0,85	- 0,0425	0,0152	0,0577
0,9	- 0,0675	0,0061	0,0736
0,95	- 0,0950	0,0014	0,0964
1	- 0,1250	0	0,1250
l	$\cdot g l^2$	$\cdot p l^2$	$\cdot p l^2$

Auf Taf. III. ist hiernach M für das Eigengewicht und die zufällige Last durch schwache Linien grafisch dargestellt. Die Ordinaten entsprechen unmittelbar den Zahlen der Tabelle, wenn man sie nach den Masstäben VIII und IX misst, deren Einheiten bezüglich 0,31 und 0,69 der Einheit des Masstabes X sind. Die Spannungen des Ober- und Untergurtes sind nun nach Formel 28, da $\frac{n^2 - 1}{24 n^2} a^2 = \frac{2^2 - 1}{24 \cdot 2^2} \cdot l^2 = 0,00031 l^2$ wird, für positive Momente (für welche die fragliche Stelle des Trägers von der zufälligen Last bedeckt ist),

$$S_1 = - \frac{M + 0,00031 q l^2}{h}, \quad S_2 = + \frac{M + 0,00031 q l^2}{h},$$

und für negative Momente (für welche die fragliche Stelle des Trägers von der zufälligen Last nicht bedeckt, also die Last pro Längeneinheit $= g = 0,31 q$ zu setzen ist),

$$S_1 = - \frac{M + 0,00010 q l^2}{h}, \quad S_2 = + \frac{M + 0,00010 q l^2}{h}.$$

Nach §. 23 wären nun zur Abscissenaxe im Abstände $0,00031 q l^2$ und $0,00010 q l^2$ (nach dem Masstabe X) zwei Parallelen zu ziehen (nach unserem Masstab lässt sich $0,00031 q l^2$ und $0,00010 q l^2$ nicht mehr auftragen) und nun die der Grösse $M + 0,00031 q l^2$, respective $M + 0,00010 q l^2$ entsprechenden Ordinaten für Ober- und Untergurt mit Berücksichtigung des entsprechenden Momentenpunktes aufzutragen. Hierdurch ergeben sich in Fig. 5 die starken Linien.

Bezeichnet man die Momente für das Eigengewicht und die beiden Grenzen für die zufällige Last mit M_0, M_1, M_2 , so wird die Querschnittsfläche F für die Strecke mit positiven Momenten, M_2 absolut genommen,

$$F = \frac{1}{h} \left(\frac{M_0 + 0,00031 g l^2}{1,4} + \frac{M_1 + 0,00031 p l^2}{0,6} + \frac{M_2}{1,3} \right)$$

und für die Strecke mit negativen Momenten, M_0 , M_1 und M_2 absolut genommen

$$F = \frac{1}{h} \left(\frac{M_0 - 0,00031 g l^2}{1,4} + \frac{M_1}{0,6} + \frac{M_2 - 0,00031 p l^2}{1,3} \right).$$

Setzt man hierin $M_1 - M_2 = \frac{g}{p} M_0 = 2,273 M_0$, ferner $M_0 = k_0 g l^2$, $M_1 = k_1 g l^2$

und $\frac{g l^2}{h} = \frac{3,6 \cdot 50 \cdot 50}{5} = 1800$, so wird

$$F = 4385 (k_1 - 0,419 k_0 + 0,00022),$$

$$F = 4385 (k_1 - 0,419 k_0 - 0,00010).$$

In Fig. 5 ist durch Multiplikation der Ordinaten der Momentenlinie für das Eigengewicht mit 0,419 mit Hilfe des Reduktionswinkels Fig. 5a die punktirte Linie erhalten. Zieht man noch zwei Horizontalen im Abstände 0,00022 und 0,00010 nach dem Masstabe X von der Abscissenaxe über derselben, so lassen sich die Grössen $k_1 - 0,419 k_0 + 0,00022$ und $k_1 - 0,419 k_0 - 0,00010$ abgreifen. Zeichnet man einen Masstab XI, dessen Einheit $= \frac{1}{4385} = 0,000228$ von der Einheit des Masstabes X ist, so geben die eben genannten Längen, auf diesem Masstabe gemessen, die Querschnittsflächen.

Die so gefundenen Querschnittsflächen sind in Fig. 6 nochmals in einem halb so grossen Masstabe (Masstab XII) aufgetragen und in Quadratcentimetern eingeschrieben.

Die beiden letzten Gurtstücke 01 und 1920 des Untergurtes bedürfen einer besonderen Bestimmung. Nach Formel 47 ist die Spannung des Gurtstückes 01 = 0

und die Spannung S_2 des Gurtstückes 1920 = $\frac{M}{h}$, wenn M das Moment an der Mittel-

stütze für gleichmässige Belastung bezeichnet, d. i. $S_2 = -\frac{0,125 (g + p) l^2}{h}$, also die

betreffende Querschnittsfläche = $\frac{0,125 \cdot 50^2}{5} \left(\frac{1,1}{1,4} + \frac{2,5}{0,6} \right) = 310 \square \text{Centimeter}$.

II. Beispiel. Eingleisige Eisenbahnbrücke von 25^m Spannweite mit zweitheiligem Netzwerke und oben liegender Bahn (Taf. IV). Die Trägerhöhe sei 3^m, die Entfernung der Knotenpunkte 2,5^m, das Eigengewicht pro Träger und pro Meter 0,8^t, und zwar für den Obergurt 0,56^t für den Untergurt 0,24^t. Das Knotengewicht wird dann für einen oberen Knotenpunkt 0,56 · 2,5 = 1,4^t, für einen unteren Knotenpunkt 0,24 · 2,5 = 0,6^t. Die zufällige Last nehmen wir als ein System von Einzellasten nach dem in Fig. 10 (Taf. IV) dargestellten Schema an. Die Querschnittsfläche der einzelnen Theile soll nach der Formel 7 (Seite 9) bestimmt werden, wo sowohl für gezogene als gedrückte Stäbe $K_0 = 1,4$, $K_1 = 0,6$, $K_2 = 1,3$ pro $\square \text{cm}$ zu setzen ist.

Wir führen eine Zerlegung in zwei Elementarsysteme durch und nennen das auf Taf. IV in Fig. 1 und 5 ausgezogene und punktirte System bezüglich das I. und II. System.

1. Berechnung.

a. Gitterstäbe. Hinsichtlich des Eigengewichtes ist der Stützdruck für das I. System $= \frac{1}{2} (5 \cdot 1,4 + 4 \cdot 0,6) = 4,7$ ^t, für das II. System $= \frac{1}{2} (4 \cdot 1,4 + 5 \cdot 0,6) = 4,3$ ^t. Daher sind die Transversalkräfte für die einzelnen Gitterstäbe der Reihe nach für das I. System = 4,7, 4,7 - 1,4 = 3,3, 3,3 - 0,6 = 2,7, 2,7 - 1,4 = 1,3 u. s. w., für das II. System = 4,3, 4,3 - 0,6 = 3,7, 3,7 - 1,4 = 2,3, 2,3 - 0,6 = 1,7 u. s. w. In der zweiten Tabelle der folgenden Seite sind diese Werthe zusammengestellt.

Hinsichtlich der zufälligen Last führen wir die Berechnung beispielsweise nur für den Stab 2 III durch, welcher dem I. Systeme angehört. Folgendes Schema gibt

für verschiedene Stellungen des Zuges die auf die einzelnen Knotenpunkte des I. Systemes wirkenden Kräfte, die entsprechenden Stützendrücke D auf die linke Stütze und die positive Maximal-Transversalkraft Q für den Stab III 4:

Last bei Punkt		I	III	V	VII	IX	D	Q
V	VII	0	1,56	7,02	8,10	4,99	7,58	6,02
III	V	0	0,26	9,62	7,20	2,86	7,44	7,18
I	IV	0	0	9,62	7,02	2,60	7,68	7,68
VII	VIII	0	0	10,66	6,31	1,56	7,88	7,88
IV	VII	0	0	11,96	6,30	1,16	7,99	7,99
II	V	0	0	12,74	5,22	1,44	8,08	8,08
V	VIII	0	0	10,92	2,70	2,70	6,54	6,54
III	VII	0	0	9,62	1,80	4,50	5,80	5,80

Hierbei ist, wenn wir die Belastung der Knotenpunkte mit G_1, G_3, \dots bezeichnen, $D = \frac{1}{10}(G_9 + 3G_7 + 5G_5 + 7G_3 + 9G_1)$, $Q = D - G_1 - G_3$. Für den Stab III 4 wäre sonach die Lage der Last II bei Knotenpunkt V bei nach links gehendem Zuge die gefährlichste und entsprechend $\max(+Q) = 8,08t$. Die in dieser Weise bezeichneten Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Ist Q_0 die Transversalkraft für das Eigengewicht, Q_1, Q_2 das positive und negative Maximum der Transversalkraft für die zufällige Last, so ist die Querschnittsfläche f des Stabes

$$f = \left(\frac{Q_0}{1,4} + \frac{Q_1}{0,6} + \frac{Q_2}{1,3} \right) \sec \alpha.$$

Nun aber wird $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{2,5}{3,0}\right)^2} = 1,302$, mithin

$$f = 0,930 Q_0 + 2,170 Q_1 + 1,001 Q_2.$$

Hierbei ist Q_1, Q_2 absolut, Q_0 mit Rücksicht auf das Vorzeichen einzuführen. Die hiernach bestimmten Querschnittsflächen sind ebenfalls in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Stab				Transversalkraft			Querschnittsfläche für		Beanspruchungsweise
				Eigengewicht	zufällige Last		Zug	Druck	
				$\max(+Q)$	$\max(-Q)$				
0	1	X	9	+ 4,3	15,93	0	38,6	11,9	Zug
I	2	IX	8	+ 3,3	12,98	1,28	32,5	12,7	
II	3	VIII	7	+ 2,3	10,02	2,55	26,4	13,4	
III	4	VII	6	+ 1,3	8,08	4,34	23,1	16,3	
IV	5	VI	5	+ 0,3	6,14	6,14	19,7	19,2	Druck und Zug
V	6	V	4	- 0,7	4,35	8,08	17,2	22,5	
VI	7	IV	3	- 1,7	2,55	10,02	14,0	25,9	
VII	8	III	2	- 2,7	1,78	12,98	13,2	31,9	Druck
VIII	9	II	1	- 3,7	0	15,93	12,5	38,0	
IX	10	I	0	- 4,7	0	20,59	16,2	49,1	
				Tonnen			□ Centimeter.		

b. Endständer. Jeder Endständer, welcher nur dem II. Systeme angehört, erfährt durch das Eigengewicht den Druck von $\frac{1}{2}(2 \cdot 0,7 + 4 \cdot 1,4 + 5 \cdot 0,6) = 5,0^t$. Der Stützendruck in Folge der zufälligen Last wird am grössten, wenn die I. Last am Knotenpunkte 0 liegt und beträgt im Maximum $16,0^t$. Daher ist die entsprechende

$$\text{Querschnittsfläche} = \frac{5,0}{1,4} + \frac{16,0}{0,6} = 30,3 \text{ cm}^2.$$

c. Gurte. Hinsichtlich des Eigengewichtes ergibt sich leicht als Moment für das I. System für einen oberen Knotenpunkt $M = 0,5 + 12,5m - 1,25m^2$, für einen unteren Knotenpunkt $M = 0,75 + 11,75m - 1,25m^2$, für das II. System für einen oberen Knotenpunkt $M = 1,75 + 10,75m - 1,25m^2$, für einen unteren Knotenpunkt $M = -0,5 + 12,5m - 1,25m^2$, worin der Abstand des Momentenpunktes von der linken Stütze $2,5m$ gesetzt ist. Für das m te obere Gurtstück ist das Moment für den m ten oder $(m-1)$ sten unteren Knotenpunkt des I. Systemes und für den $(m-1)$ sten oder m ten unteren Knotenpunkt des II. Systemes zu addiren, je nachdem m gerade oder ungerade ist; für das m te untere Gurtstück ist das Moment für den $(m-1)$ sten oder m ten oberen Knotenpunkt des I. Systemes und für den m ten oder $(m-1)$ sten oberen Knotenpunkt des II. Systemes zu addiren, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Hiernach ist die Summe M_g der Momente

$$\begin{array}{l} \text{Obergurt: } M_g = -11 + 21,78m - 2,5m^2 \quad - 10,25 - 21,75m - 2,5m^2 \\ \text{Untergurt: } M_g = -9 + 20,75m - 2,5m^2 \quad - 7,25 - 20,75m - 2,5m^2. \end{array}$$

Das Resultat der Rechnung enthält die Tabelle auf folgender Seite.

Hinsichtlich der zufälligen Last wollen wir die Rechnung beispielsweise nur für das 4te Gurtstück 34 durchführen. Folgendes Schema gibt für verschiedene Stellungen des nach rechts gehenden Zuges die auf die Knotenpunkte wirkenden Kräfte, sowie die entsprechenden Momente M für die Elementarsysteme und die Summe M_p beider:

Last bei Punkt	System	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	M	M_p
VIII III	I	10,4		25,5		7,6		4,3		20,3	102,7	180,5
	II		6,8		6,8		15,1		17,2		77,8	
V VI	I	12,6		23,9		5,4		5,4		15,6	95,9	179,8
	II		5,2		9,9		16,2		14,0		83,9	
VII IV	I	14,0		19,2		2,2		11,9		24,4	89,4	184,4
	II		3,8		19,2		13,0		5,7		95,0	
IX III	I	14,4		19,2		2,3		12,6		23,1	90,6	184,1
	II		3,6		19,2		12,6		5,2		93,5	
XI I	I	16,2		14,0		3,1		12,6		21,3	79,1	164,3
	II		5,4		21,8		3,6		4,4		85,2	
VIII IV	I	13,7		6,8		6,8		15,1		17,2	65,8	177,4
	II		10,4		25,5		7,6		4,3		111,5	

Hiernach wäre für dieses Gurtstück die Lage der Last VII beim Punkte IV die gefährlichste und die entsprechende Momentensumme $184,4$ Tonnenmeter. Die in dieser Weise berechneten Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Die Querschnittsfläche F des Gurtes ist nun

$$F = \frac{M_g}{3 \cdot 1,4} + \frac{M_p}{3 \cdot 0,6} = \frac{M_g}{4,2} + \frac{M_p}{1,8},$$

wonach sich die folgenden Resultate ergeben:

Obergurt				Untergurt			
Gurtstück	M_g	M_p	F	Gurtstück	M_g	M_p	F
0 I	10,8	39,8	24,7	0 1	11,8	42,7	26,5
I II	30,8	92,8	58,9	1 2	31,8	110,7	69,1
II III	45,8	141,0	89,2	2 3	46,8	156,4	98,0
III IV	55,8	165,9	105,4	3 4	56,8	184,4	115,9
IV V	60,8	185,3	117,4	4 5	61,8	195,9	123,6
Tonnenmeter			□ Cent.	Tonnenmeter			□ Cent.

2. Grafische Behandlung. Die grafische Behandlung ist auf Taf. IV hinsichtlich der zufälligen Last mittels Influenzlinie erfolgt. Längensmasstab I: $1^m = 4,7^{\text{mm}}$.

a. Gitterstäbe. In Fig. 2 stellen die blauen ausgezogenen und strichpunktirten Linien die Transversalkräfte für das I. und II. System dar; die Stufen sind abwechselnd $= 1,4^t$ und $0,6^t$, wonach die Linien mit Hilfe des Kraftmasstabes II ($1^t = 2^{\text{mm}}$) leicht zu konstruieren sind. In Fig. 3 sind die Influenzlinien hinsichtlich des linken Stützdruckes für eine Einzellast von $6,5$ und $4,5^t$ für das I. und II. System dargestellt. Mit Hilfe derselben ist der linke Stützdruck für den angenommenen Wagenzug und zwar für jede Lage, bei welcher ein Rad der ersten Lokomotive oder des ersten Tenders an einem Knotenpunkte liegt, bestimmt und in der dem ersten Rade entsprechenden Ordinate aufgetragen. Dies gibt für das I. und II. System die bezüglich ausgezogene und strichpunktirte rothe obere Linie in Fig. 2. Die Abweichung dieser Linien von der punktirten rothen Linie, welche dem Stützdrucke für den gegebenen Träger entspricht und die in bekannter Weise leicht zu konstruieren ist, ist nach oben und unten gleich gross. Die rothen, nach abwärts gehenden Linien entsprechen der Transversalkraft, wenn die I. Last über den entsprechenden Knotenpunkt hinaus gerückt ist; sie lassen sich leicht mit Hilfe der in Fig. 3 konstruirten geneigten Parallelen konstruieren. Die Maximalpunkte sind umringelt; sie entsprechen fast durchgehend der Lage der II. Last am rechten Querträger des fraglichen Faches.

Die negativen Maximal-Transversalkräfte sind der Symmetrie halber den positiven gleich; sie sind in Fig. 2 auf der unteren Seite durch horizontale rothe Linien angegeben.

Die horizontalen schwarzen Linien in Fig. 2 entsprechen der Grösse $\varnothing = \frac{0,6}{1,4} Q_0 + Q_1 + \frac{0,6}{1,3} Q_2$, wobei das erste und letzte Glied mit Hilfe des Proportionalwinkels Fig. 2a bestimmt ist. Im Masstabe III ist 1 Einheit $= 0,6 \cos \alpha = 0,461$ Einheiten des Masstabes II ($1 \square^{\text{cm}} = 0,461 \cdot 2 = 0,922^{\text{mm}}$) gemacht; die Ordinaten \varnothing auf diesem Masstabe gemessen, geben dann die Querschnittsflächen der Gitterstäbe, die in Fig. 4 noch einmal nach dem Masstabe VII aufgetragen sind.

Die unteren ausgezogenen schwarzen Linien in Fig. 2 entsprechen den Maximal-Transversalkräften $Q_0 + Q_1$ für die nach rechts und links fallenden Stäbe und zwar ist die Ordinate, welche der Mitte des fraglichen Stabes entspricht, massgebend.

b. Gurte. Für das Eigengewicht sind die blau dargestellten Seilpolygone konstruirt. Hierbei ist $1^m = 0,25^{\text{mm}}$ angenommen (Masstab IV); die Poldistanz ist gleich der Spannweite angenommen; für den Kraftmasstab ist alsdann $1^t = 1$, d. i.

25 Einheiten des Momentenmasstabes oder $1^t = 25 \cdot 0,25 = 6,25^{mm}$ anzunehmen. Um in dem die Summen je zweier Momente direkt durch das arithmetische Mittel zu erhalten und hinsichtlich der Querschnittsbestimmung eine direkte Addition zu den Momenten der zufälligen Last zu ermöglichen, sind die Kräfte $2 \cdot \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{7}$ mal so gross angenommen, als sie wirklich sind, also $\frac{6}{7} 1,4 = 1,2^t$ und $\frac{6}{7} 0,6 = 0,514^t$ statt $1,4^t$ und $0,6^t$. In Fig. 7 sind die Ordinaten der Influenzlinien die Summen der Momente für die zwei jedem Gurtstücke gegenüberliegenden Knotenpunkte für eine variable Last von $6,5$ und $4,5^t$ nach §. 17 und zwar entsprechen die vollen Linien dem Obergurte, die strichpunktirten Linien dem Untergurte. Die umhüllenden Parabeln entsprechen einem Seilpolygone für gleiche, in den Knotenpunkten wirkende Lasten, welche $= 2 \cdot 6,5 \frac{2,5}{25} = 1,3$ und $2 \cdot 4,5 \frac{2,5}{25} = 0,9$ sind. Hieraus sind nach §. 17 für das angenommene System von Einzellasten die rothen Kurven in Fig. 6 abgeleitet. Die Momentensumme ist hierbei auf der linken Seite (Untergurt) für den nach links gehenden Zug an der I. Last, für den nach rechts gehenden Zug an der IX. Last aufgetragen; auf der rechten Seite (Obergurt) ist es umgekehrt. Die Maximalordinaten sind durch kleine Kreise markirt. Durch Addition dieser Ordinaten zu den arithmetischen Mitteln der den betreffenden Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten oder blauen Polygone sind die schwarzen Horizontallinien erhalten. Die Ordinaten derselben geben direkt die Querschnittsflächen, wenn man sie auf dem Masstabe V misst, dessen Einheit $= h \cdot 0,6 = 3 \cdot 0,6 = 1,8$ Einheiten des Masstabes IV ist.

In Fig. 9 sind noch zur Kontrolle die Spannungen für das Eigengewicht nach der Polygonalmethode konstruirt, wobei die Kräftepläne für beide Elementarsysteme vereinigt sind.

IV. Kapitel.

Träger mit kombinirtem Gitterwerke.

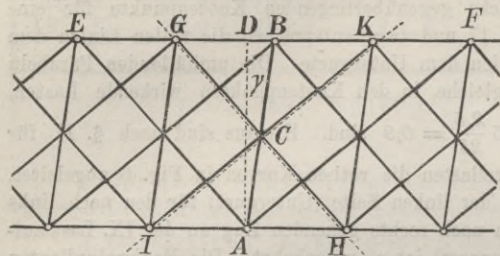
A. Ohne künstliche Anspannung.

§. 27. **Näherungstheorie.** Zum Zwecke einer möglichst einfachen Bestimmung der Spannungen in einem kombinirten Gittersysteme, d. i. in einem Systeme mit drei Lagen von Gitterstäben, pflegt man dasselbe in zwei Systeme mit einfachem Gitterwerke zu zerlegen, so dass die steilsten Gitterstäbe, welche wir Pfosten, eventuell Vertikalen, nennen, in beiden Systemen, jede der anderen Gitterstablagen, welche wir Diagonalen nennen, nur in einem Systeme vorkommen. Diese Zerlegung ist an und für sich zulässig; man macht aber auch noch die Annahme, dass die von beiden Systemen aufzunehmenden Lasten gleich gross seien, welche Annahme nur dann gerechtfertigt sein würde, wenn sich die resultirenden Verrückungen der Knotenpunkte in beiden Systemen als gleich herausstellen würden, was aber nur näherungsweise der Fall ist. Wir wollen

indess zunächst unter dieser Annahme die Spannungen entwickeln; eine genauere Theorie werden wir später bei Besprechung der statisch unbestimmten Systeme geben. Als Theilungszahl n betrachten wir die Anzahl der Theile, in welche eine Diagonale durch die sie kreuzenden Diagonalen getheilt wird.

1. Spannungen der Pfosten. Die Spannung eines beliebigen Pfostens

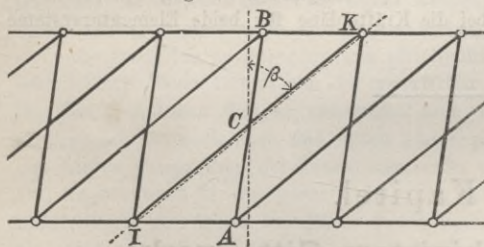
Fig. 50.



AB (Fig. 50), welcher gegen die Vertikale unter dem Winkel γ geneigt ist, sei V , in den beiden einfachen Systemen (Fig. 50 a und b) aber V_1 und V_2 . Bezeichnet man die Transversalkraft für zwei durch die Mitte C von AB parallel zu den unter

α und β gegen die Vertikale geneigten Stäben gelegte Schnitte bei gleichmässiger Belastung für das gegebene System bezüglich mit Q_1 und Q_2 , so sind die entsprechenden Transversalkräfte für die einfachen Systeme $\frac{1}{2} Q_1$ und $\frac{1}{2} Q_2$, mithin nach den Formeln 31 (Seite 41), wenn man berücksichtigt, dass die Theilungszahl jedes einzelnen einfachen Systemes $= \frac{1}{2} n$ ist.

Fig. 50 a und b.



$$V_1 = -\frac{1}{n} Q_1 \sec \gamma,$$

$$V_2 = +\frac{1}{n} Q_2 \sec \gamma;$$

mithin wird

$$V = V_1 + V_2 \\ = -\frac{1}{n} (Q_1 - Q_2) \sec \gamma.$$

$Q_1 - Q_2$ aber ist die zwischen den beiden schiefen Schnitten liegende Last, d. i. hinsichtlich des Eigengewichtes $= \frac{1}{2} (g_1 - g_2) a$, wenn wir wieder EF ,

d. i. die Summe der Horizontalprojektionen beider Diagonalen $= a$ setzen. Hinsichtlich der zufälligen Last wird $Q_1 - Q_2$ am grössten, wenn die ganze Strecke zwischen beiden Schnitten belastet ist, während der übrige Theil des Trägers beliebig belastet sein kann. Sonach ist $Q_1 - Q_2 = \frac{1}{2} (g_1 - g_2) a$ zu setzen, mithin

$$50. \quad V = -\frac{1}{2n} (g_1 - g_2) a \sec \gamma.$$

Die Pfosten haben sonach einen Druck oder einen Zug aufzunehmen, je nachdem die Bahn oben oder unten liegt; bei gleichmässiger Vertheilung der Last über beide Gurte wird $V = 0$.

2. Spannung der Diagonalen. Bezeichnet man die Transversalkraft für einen durch die Mitte C der unter α und β geneigten Diagonalen parallel zu den Pfosten gelegten Schnitt für das gegebene System mit Q' , so sind die entsprechenden Transversalkräfte für die einfachen Systeme $= \frac{1}{2} Q'$, folglich die Spannung der Diagonalen nach den Formeln 31 (Seite 41), wenn man wieder berücksichtigt, dass die Theilungszahl jedes Elementarsystemes $= \frac{1}{2} n$ ist

$$P_1 = + \frac{1}{n} Q' \sec \alpha, \quad P_2 = - \frac{1}{n} Q' \sec \beta,$$

oder, wenn man die Transversalkraft für einen durch C gelegten Vertikalschnitt mit Q , die Horizontalprojektion eines Pfostens mit e bezeichnet,

$$51. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = + \frac{1}{n} \left[Q - \frac{1}{2} (q_1 - q_2) e \right] \sec \alpha, \\ P_2 = - \frac{1}{n} \left[Q + \frac{1}{2} (q_1 - q_2) e \right] \sec \beta. \end{array} \right.$$

Annähernd ist $P_1 = + \frac{1}{n} Q \sec \alpha$, $P_2 = - \frac{1}{n} Q \sec \beta$. Sonach ist die Spannung in den Diagonalen fast ebenso gross, als wenn die Pfosten nicht vorhanden wären.

Bei einem einfachen Träger mit der Spannweite l ist die grösste Spannung einer Diagonale $= \frac{1}{2n} q l \sec \alpha$ oder $\frac{1}{2n} q l \sec \beta$, die Maximalspannung eines Pfostens, wenn man sich die ganze Last an einem Gurte wirkend denkt, $\frac{1}{2n} q a \sec \gamma$; in Wirklichkeit aber ist diese Spannung noch kleiner. Sonach ist die Spannung der Pfosten gegen die Maximalspannung der Diagonalen nur sehr klein.

3. Spannungen der Gurte. Da die Pfosten eine nur sehr geringe Spannung haben und die Spannung der Diagonalen fast dieselbe ist, als wenn die Pfosten nicht vorhanden wären, so wird die Spannung der Gurte ebenfalls fast dieselbe sein, als wenn keine Pfosten vorhanden wären, so dass die früher für einfaches Gitterwerk aufgestellten Regeln direkt in Anwendung gebracht werden können.

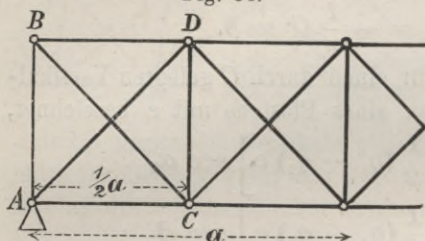
§. 28. Endverbindungen. Wir wollen nur diejenige Endverbindung betrachten, bei welcher ein vertikaler Endpfosten angeordnet ist, von dessen unterem und oberem Ende die Gitterstäbe ausgehen (Fig. 51 und 52).

Nach der im vorigen Paragraphen angewendeten Zerlegung des kombinierten Systemes in zwei einfache Systeme sind die Spannungen der Endstücke definitiv bestimmt. Der Endpfosten ist in dem einen Systeme

gar nicht enthalten, während im anderen Systeme nur vom oberen Ende des Pfostens Gitterstäbe ausgehen, so dass der Pfosten hier den vollen Stützendruck dieses Systemes, d. i. den halben Stützendruck des gegebenen Systemes aufzunehmen hätte. Nach der entwickelten Näherungstheorie würde also der Endpfosten einen Druck aufzunehmen haben, welcher gleich dem halben Stützendrucke ist.

Nach dem vorigen Paragraf ist die Spannung der Pfosten nur gering, mit Ausnahme der im vorigen Paragraf auszuschliessenden Endpfosten. Man wird daher auch die Spannung der Endtheile ziemlich genau erhalten, wenn man die Pfosten, mit Ausnahme der Endpfosten, als nicht vorhanden

Fig. 51.



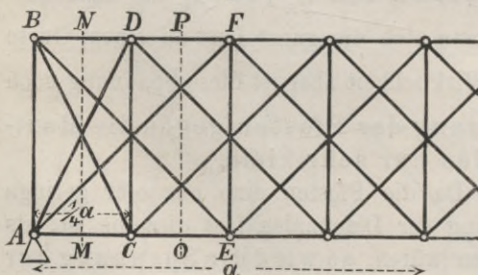
handen ansieht, also nach den in §. 16 und 17 enthaltenen Regeln für ein einfaches System rechnet. Auch nach dieser Theorie entsteht in den Endpfosten ein Druck gleich dem halben Stützendrucke oder es ist die Spannung V des Endständers nach Formel 40 (S. 52) für ein zweitheiliges System (Fig. 51)

$$52. \quad V_0 = -\frac{1}{2} D$$

und für ein viertheiliges System (Fig. 52)

$$52 \text{ a.} \quad V_0 = -\frac{1}{2} D - \frac{1}{16} (q_2 - q_1) a,$$

Fig. 52.



wenn D den für eine gleichmässige Belastung zu berechnenden Stützendruck bezeichnet. Für den Mittelpfosten eines kontinuierlichen Trägers ist 1 für $\frac{1}{2}$ zu setzen. Die Spannungen der Endgitterstäbe und Endgurtstücke lassen sich nach den Formeln 38 (S. 49) bestimmen.

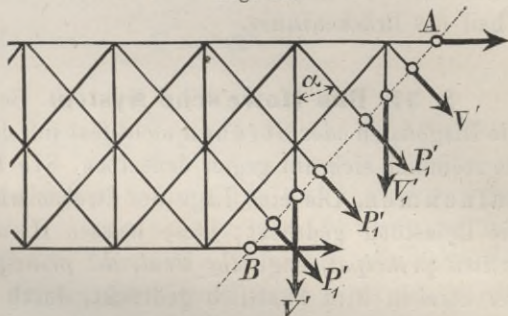
B. Mit künstlicher Anspannung.

§. 29. **Spannungen im unbelasteten Träger.** Wir wollen die Theorie nur unter der Annahme vertikaler Pfosten durchführen. Wir setzen zunächst voraus, dass der Träger ganz ohne Belastung sei; also auch sein Gewicht, etwa durch das unterstützende Gerüst, aufgehoben sei. Wir nehmen aber an, dass einem Theile oder einzelnen Theilen in irgend einer Weise eine Spannung gegeben werde, welche offenbar auch eine

Spannung in den übrigen Theilen hervorrufft. Diese Spannungen nennen wir zum Unterschiede von den durch die Belastung hervorgerufenen Spannungen künstliche Spannungen.

Führen wir einen Schnitt AB (Fig. 53) in Richtung der links fallenden Diagonalen, nehmen wir ferner die Spannungen der geschnittenen Vertikalen, sowie der geschnittenen Diagonalen annähernd als gleich an und bezeichnen die Spannungen der Vertikalen mit V' , die der rechts fallenden Diagonalen mit P_1' , so fordert das Gleichgewicht gegen Verschiebung in vertikaler Richtung die Erfüllung der

Fig. 53.



Bedingung $n P_1' \cos \alpha + \frac{1}{2} n V' = 0$ oder $P_1' = -\frac{1}{2} V' \sec \alpha$. Führen wir ferner einen Vertikalschnitt und bezeichnen die Spannung der links fallenden Diagonalen mit P_2' , des oberen und unteren Gurtes mit S_1' , S_2' , so fordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingungen $\frac{n}{2} P_1' \cos \alpha = \frac{n}{2} P_2' \cos \alpha$, $S_1' + S_2' + \frac{n}{2} P_1' \sin \alpha + \frac{n}{2} P_2' \sin \alpha = 0$, $S_2' = S_1'$. Hiernach wird $P_1' = P_2'$, $S_1' = -\frac{1}{2} n P_1' \sin \alpha$ oder

$$53. P_1' = P_2' = -\frac{1}{2} V' \sec \alpha,$$

$$54. S_1' = S_2' = +\frac{1}{4} n V' \tan \alpha.$$

Gibt man den Vertikalen einen künstlichen Zug, so entsteht also in den Diagonalen ein Druck, in den Gurten ein Zug.

§. 30. Spannungen im belasteten Zustande. Die Spannungen S_1, S_2, P_1, P_2 und V , welche die Belastung allein hervorrufft, sind durch §. 27 bestimmt. Fügt man zu diesen Spannungen noch die künstlichen Spannungen hinzu, so findet man als wirkliche Spannungen während der Belastung, welche wir durch zwei Apostrophe auszeichnen:

$$55. \begin{cases} P_1'' = +\frac{1}{n} Q \sec \alpha - \frac{1}{2} V' \sec \alpha, \\ P_2'' = -\frac{1}{n} Q \sec \alpha - \frac{1}{2} V' \sec \alpha; \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} S_1'' = -\frac{M}{h} + \frac{n}{4} V' \tan \alpha, \\ S_2'' = +\frac{M}{h} + \frac{n}{4} V' \tan \alpha. \end{cases}$$

$$57. V'' = -\frac{1}{2n} (q_1 - q_2) a + V.$$

V' ist vor der Hand noch beliebig und erst durch weiter zu stellende Bedingungen zu bestimmen. Wir unterscheiden in dieser Beziehung die beiden Systeme mit künstlich gezogenen und künstlich gedrückten Vertikalen oder das Howe'sche und Rider'sche System. Hinsichtlich der Begründung dieser Systeme, bei welcher praktische Rücksichten in Betracht kommen, verweisen wir auf den konstruktiven Theil des Brückenbaues.

§. 31. Das Howe'sche System. Beim Howe'schen Systeme sind die Diagonalen oder Streben nicht fest mit dem Gurte verbunden, sondern sie stemmen sich nur gegen denselben. Sie können also keinen Zug aufnehmen. Die eine Lage der Streben wird künstlich und auch durch die Belastung gedrückt; diese heissen Hauptstreben (franz. *le tien*, *le tien principal*, engl. *the strut*, *the principal-strut*). Die andere Lage der Streben wird künstlich gedrückt, durch die Belastung aber gezogen; diese heissen Gegenstreben (franz. *le contrelien*, engl. *the counter-strut*).

1. Vertikalen. Nach dem Gesagten muss die künstliche Anspannung der Vertikalen so gross sein, dass die Spannung der Gegenstreben bei partieller Belastung, bei welcher der grösste Zug eintreten würde, = Null ist; eine grössere Spannung würde den Druck in den Hauptstreben und den Zug in den Vertikalen nur unnöthig vergrössern. Setzen wir aber in Gleichung 55. $P_1'' = 0$, so ergibt sich

$$58. \quad V' = \frac{2}{n} Q.$$

Die Spannung V'' während der Belastung ist nach Formel 57:

$$59. \quad V'' = \frac{2}{n} Q - \frac{1}{2n} (q_1 - q_2) a.$$

Liegt die Bahn oben oder ist $q_1 > q_2$, so ist $V'' < V'$; liegt die Bahn unten oder ist $q_1 < q_2$, so wird umgekehrt $V'' > V'$. Die Vertikalen wären sonach im ersten Falle für den unbelasteten Zustand, im letzteren Falle für den belasteten Zustand der Brücke zu berechnen. Wegen der Kleinheit von V wird indess sehr nahe $V' = V_1$.

2. Hauptstreben. Nach der Formel 55 wird die Spannung P''_2 während der Belastung

$$60. \quad P_2'' = - \frac{2}{n} Q \sec \alpha,$$

wobei Q die Transversalkraft für einen durch die Mitte der fraglichen Hauptstrebe gelegten Vertikalschnitt bezeichnet. Die partielle zufällige Belastung ist durch diesen Vertikalschnitt begrenzt anzunehmen.

Die Maximalspannung der Vertikalen und Hauptstreben im belasteten Zustande ist also ebenso gross, als wenn die

Gegenstreben nicht vorhanden wären, was sich einfach dadurch erklärt, dass die Spannung der Gegenstreben bei diesem Belastungszustande Null ist.

3. **Gegenstreben.** Die grösste Beanspruchung erleiden die Gegenstreben im ganz unbelasteten Zustande. Die bezügliche Spannung ist nach Formel 53 und 58:

$$61. P_1'' = -\frac{1}{n} Q \sec \alpha$$

oder nach Formel 60:

$$61a. P_1'' = \frac{1}{2} P_2'',$$

d. h. die Spannung der Gegenstreben im unbelasteten Zustande ist nahezu halb so gross, als die Spannung der Hauptstreben im belasteten Zustande. Meist hat man daher den Gegenstreben einen halb so grossen Querschnitt gegeben, als den Hauptstreben. Da aber diese Spannung der Gegenstreben nur kurze Zeit dauert und ohne Stösse erfolgt, so ist es sogar zulässig, den Querschnitt der Gegenstreben noch kleiner zu nehmen und ihn für die grösste dauernde Spannung, welche während der blossen Belastung durch das Eigengewicht eintritt, zu berechnen. Bezeichnen wir diese Spannung mit P_1''' , so ist nach Formel 55:

$$P_1''' = -\frac{1}{n} (Q - Q'') \sec \alpha.$$

wenn Q die Transversalkraft für die Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung, Q'' die Transversalkraft für das Eigengewicht allein bezeichnet; $Q - Q''$ ist also die Transversalkraft Q''' für die Wirkung der zufälligen Belastung allein. Daher wird

$$62. P_1''' = -\frac{1}{n} Q''' \sec \alpha.$$

4. **Gurte.** Die Spannung der Gurte ist nun nach Formel 56 zu bestimmen. Hierbei ist V durch Formel 58 bestimmt. Da die Spannung der Gegenstreben bei partieller Belastung Null ist, aber die Spannung bei derjenigen Belastung, für welche M zum Maximum wird, ebenfalls sehr gering ist, so wird sich die Spannung der Gurte fast ebenso gross ergeben, als wenn die Gegenstreben nicht vorhanden wären.

§. 32. **Das Rider'sche System.** Während beim Howe'schen Systeme die Vertikalen einen künstlichen Zug erhalten, so erhalten beim Rider'schen Systeme die Diagonalen einen künstlichen Zug oder die Vertikalen einen künstlichen Druck. Da die Diagonalen schlaff konstruirt sind, d. h. aus Rund- oder Flacheisen bestehen, welchem ein Druck nicht zugemuthet werden kann, so muss die künstliche Anspannung so weit gehen, dass durch die Belastung kein Druck entstehen kann.

Die eine Lage der Diagonalen wird künstlich und auch durch die Belastung gezogen; diese heissen Hauptdiagonalen (franz. *le tirant*, *le tirant principal*, engl. *the tie*, *the principal-tie*). Die andere Lage der Diagonalen wird künstlich gezogen, durch die Belastung aber gedrückt; diese heissen Gegendiagonalen (franz. *le contre-tirant*, engl. *the counter-tie*). Zur Bestimmung der künstlichen Spannung ist P_1'' in Formel 55 = 0 zu setzen. Dies gibt

$$63. \quad V' = -\frac{2}{n} Q.$$

Die weitere Behandlung ist nun ganz dem Howe'schen Systeme entsprechend. Auch hier ergibt sich, dass die Spannungen der Gegendiagonalen im unbelasteten Zustande nahezu halb so gross sind, als die Spannungen der Hauptdiagonalen im belasteten Zustande.

Auf ein weiteres Eingehen verzichten wir, da dieses System bei uns keine Anwendung findet. Ebenso verzichten wir auf ein näheres Eingehen auf die Post'sche Abänderung des Rider'schen Systemes mit schiefen Pfosten.

§. 33. Endverbindungen. Eine besondere Betrachtung verlangen wiederum die Endverbindungen, da die bisher aufgestellten Gleichungen für diese zum Theil keine Anwendung zulassen. Wir wollen hierbei indess lediglich das Howe'sche System in Betracht ziehen. Bei diesem besteht die Endvertikale gewöhnlich aus einer eisernen Spannstange, welche künstlich angespannt wird, um den nöthigen Druck in der Gegenstrebe zu erzeugen und in einem hölzernen oder gusseisernen Pfosten zur Aufnahme des Druckes. Wir setzen voraus, dass man den Pfosten erst mit den Gurten verbinde, nachdem die künstliche Anspannung der Spannstangen erfolgt ist, damit dieser kein Hinderniss in den Weg gelegt wird. Alsdann sind die Gleichungen für die künstliche Spannung lediglich die Spannstange, die Gleichungen für die von der Belastung erzeugten Spannungen aber auf Pfosten und Spannstange gleichzeitig zu erstrecken.

I. Zweitheiliges System (Fig. 51). Stellt man für den unbelasteten Träger die Gleichgewichtsbedingungen für die oberen und unteren Knotenpunkte auf, so findet man der Reihe nach

$$64. \quad \begin{cases} P_{11}' = P_{21}' = -V_0' \sec \alpha, \\ P_{12}' = P_{22}' = -(V_1' - V_0') \sec \alpha, \\ P_{13}' = P_{23}' = -(V_2' - V_1' + V_0') \sec \alpha, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

$$65. \quad \begin{cases} S_{11}' = S_{21}' = +V_0' \tan \alpha, \\ S_{12}' = S_{22}' = +(V_1' - V_0') \tan \alpha, \\ S_{13}' = S_{23}' = +(V_2' - V_1' + V_0') \tan \alpha \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Bestimmt man nun nach Formel 51 die Spannungen $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{22}, \dots$ der Streben, welche durch die Belastung erzeugt werden, so kann man

nach den Gleichungen 64 allmählig diejenigen künstlichen Spannungen V_0, V_1, \dots bestimmen, für welche sich die resultirenden Spannungen $P_{11}' + P_{11}, P_{12}' + P_{12}, \dots$ der Gegenstreben = Null ergeben. Es wird

$$66. \quad \begin{cases} V_0 = + P_{11} \cos \alpha, \\ V_1 = + (P_{11} + P_{12}) \cos \alpha, \\ V_2 = + (P_{12} + P_{13}) \cos \alpha \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Hiernach wird die künstliche Spannung der Endvertikalen nahezu halb so gross, als die der nächsten Vertikalen.

Hat man nach Formel 52 die Spannung V der Endvertikalen, welche durch die Belastung herbeigeführt wird, ermittelt und sind V' und V'' die Spannungen der Spannstange und des Pfostens, so ist $V' + V'' = V$, und, da beide Theile ihre Länge um gleich viel ändern

müssen, $\frac{V'}{E' f'} = \frac{V''}{E'' f''}$, folglich

$$67. \quad V' = \frac{E' f'}{E' f' + E'' f''} V, \quad V'' = \frac{E'' f''}{E' f' + E'' f''} V,$$

wenn E', E'' und f', f'' die Elastizitätskoeffizienten und Querschnittsflächen der Spannstange und des Pfostens bezeichnen.

II. Viertheiliges System (Fig. 52). Stellt man für den unbelasteten Träger für sämtliche Knotenpunkte die Gleichgewichtsbedingungen gegen vertikale Verschiebung auf, so ergeben sich so viel Gleichungen, als Streben vorhanden sind, so dass sich die Spannungen der Streben durch die der Vertikalen ausdrücken lassen. Weniger streng, indess hinreichend genau, ist ein dem §. 28 entsprechendes Verfahren. Zunächst ergibt sich aus der Symmetrie gegen eine horizontale Axe, dass $P_{10} = P_{20}, P_{11} = P_{21}, \dots$ ist. Die Gleichgewichtsbedingungen der drei ersten Knotenpunkte eines Gurtcs gegen vertikale Verschiebung sind nun $V_0' + P_{10}' \cos \alpha_0 + P_{11}' \cos \alpha = 0, V_1' + P_{10}' \cos \alpha_0 + P_{12}' \cos \alpha = 0, V_2' + P_{12}' \cos \alpha + P_{13}' \cos \alpha = 0$. Setzen wir wieder $P_{11}' + P_{13}' = 2P_{12}'$ oder $P_{13}' = 2P_{12}' - P_{11}'$, so geht die letzte Gleichung über in $V_2' + 2P_{12}' \cos \alpha = 0$. Hieraus folgt $P_{12}' = -\frac{1}{2} V_2' \sec \alpha$; dies in die zweite Gleichung gesetzt, gibt $V_1' + P_{10}' \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} V_2' = 0$ oder $P_{10}' = -(V_1' - \frac{1}{2} V_2') \sec \alpha_0$. Dies in die erste Gleichung gesetzt, gibt $V_0' - V_1' + \frac{1}{2} V_2' + P_{11}' \cos \alpha = 0$, mithin $P_{11}' = -(V_0' - V_1' + \frac{1}{2} V_2') \sec \alpha$. Sonach ist

$$68. \quad \begin{cases} P_{10}' = P_{20}' = -(V_1' - \frac{1}{2} V_2') \sec \alpha_0, \\ P_{11}' = P_{21}' = -(V_0' - V_1' + \frac{1}{2} V_2') \sec \alpha, \\ P_{12}' = P_{22}' = -\frac{1}{2} V_2' \sec \alpha. \end{cases}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knotenpunkte gegen horizontale Verschiebung ergibt sich nun sofort

$$69. \begin{cases} S_{11}' = S_{21}' = (V_1' - \frac{1}{2} V_2') \tan \alpha_0 + (V_0' - V_1' + \frac{1}{2} V_3') \tan \alpha, \\ S_{12}' = S_{22}' = + (V_0' - V_1' + V_2') \tan \alpha, \\ S_{13}' = S_{23}' = - (V_0' - V_1' - V_2') \tan \alpha. \end{cases}$$

Nach §. 28 sind nun die Spannungen $P_{10}, P_{20}, P_{11}, P_{21}, \dots$, welche durch die Belastung erzeugt werden, zu bestimmen. Setzt man sodann die Spannung der Gegenstreben, d. i. $P_{10} + P_{10}', P_{11} + P_{11}', \dots = \text{Null}$, so ergibt sich als künstliche Spannung der Vertikalen:

$$70. \begin{cases} V_0 = P_{10} \cos \alpha_0 + P_{11} \cos \alpha, \\ V_1 = P_{10} \cos \alpha_0 + P_{12} \cos \alpha, \\ V_2 = 2 P_{12} \cos \alpha. \end{cases}$$

Die Gleichungen 67 behalten auch hier Giltigkeit.

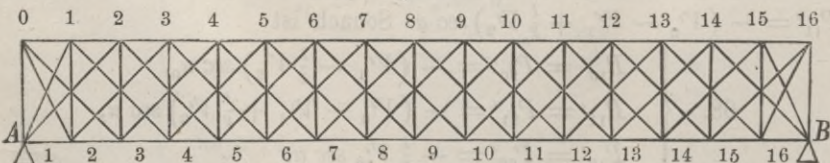
Für die Konstruktion der Howe'schen Brücken in Holz dürfte es indess genügen, die Hauptstreben und Vertikalen unter der Annahme zu berechnen, dass die Gegenstreben nicht vorhanden seien und sodann die grösste Spannung der Gegenstreben halb so gross anzunehmen, als die der Hauptstreben. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich nach den Formeln 67 und 70 auch leicht die Spannung der Endspannstangen. Im belasteten Zustande wird die Spannung der Endvertikalen nahezu Null, d. h. es erzeugt sich im Endpfosten ein Druck, welcher dem Zuge in der Endspannstange gleich ist.

Nach der genaueren Bestimmung wird die grösste Spannung im Endpfosten und den Endspannstangen etwas geringer.

§. 34. Beispiel. Zur weiteren Erläuterung der Näherungsbehandlung eines kombinierten Systemes möge noch ein Beispiel dienen.

Howe'sche Gitterbrücke in Holz für ein Eisenbahngleis mit zwei einfachen Trägern von $l = 30 \text{ Met.}$ Spannweite. Die Brücke soll nur provisorisch dienen. Die Höhe h sei $= \frac{1}{3} l = 3,75 \text{ Met.}$ Das System sei ein 4theiliges und der Strebenwinkel $= 45^\circ$, also $a = 2 h \tan \alpha = 2 \cdot 3,75 \cdot \tan 45^\circ = 7,5 \text{ Met.}$ Das eigene Gewicht nehmen wir vorläufig pro Träger zu $g = 0,8 \text{ Ton. pro Met. an}$; hiervon komme $0,2 \text{ Ton.}$ auf die am Obergurte liegende Bahn, also $g_1 = 0,3 + 0,2 = 0,5 \text{ Ton.}$ auf den Obergurt, $g_2 = 0,3 \text{ Ton.}$ auf den Untergurt. Die zufällige Last sei hinsichtlich der Transversalkräfte $p = 2,7$, hinsichtlich der Momente $p = 2,3 \text{ Ton. pro Meter.}$

Fig. 54.



1. Vertikalen. Für die Transversalkräfte ist $q = 0,8 + 2,7 = 3,5$, also $g = 0,8 = 0,23 q$, $p = 2,7 = 0,77 q$, $g_1 = 0,5 = 0,14 q$, $g_2 = 0,3 = 0,09 q$. Der Querschnitt der Vertikalen ist für den unbelasteten Zustand zu bestimmen. Nach Formel 58 aber

wird $V' = \frac{2}{n} Q = \frac{l}{2} Q$, d. i. für die m te Vertikale im Abstände $x = m c$ von der linken Stütze, falls c den Abstand der Vertikalen bedeutet,

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l},$$

$$= \frac{1}{4} 0,23 (n - 2m) q \frac{l}{16} + \frac{1}{4} 0,77 \frac{(n-m)^2}{n} q \frac{l}{16}, \text{ d. i.}$$

$$V_1 = 23,80 - 3,281 m + 0,0790 m^2 \text{ Tonnen.}$$

Nehmen wir als Sicherheitskoefficient des Schmiede Eisens 1 Tonne pro \square Centim., so drückt V' gleichzeitig die Querschnittsfläche f_2 der Vertikalen aus. Daher ist $f_2 = 23,80 - 3,281 m + 0,0790 m^2$. Lassen wir die Vertikalen aus zwei Rundeisen mit dem Durchmesser δ und dem Kerndurchmesser δ_1 der Schraubengewinde bestehen, so ist $2 \frac{\pi \delta_1^2}{4} = f_2$, also

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2f_2}{\pi}} = 0,798 \sqrt{f_2}$$

und, nahe entsprechend der Whitworth'schen Schraubenscala.

$$\delta = 1,1 \delta_1 + 0,14 \text{ Centimeter.}$$

Hiernach ergeben sich die folgenden Zahlen:

Nr. m	Spannung V'	Theor. Querschnitts- fläche d. Vert. f_2	Theoretischer		Gewählter	
			Kerndurch- messer δ_1	Bolzendurch- messer δ	Bolzendurch- messer	Bolzen- quer- schnitt
0	24,66	24,66	3,96	4,50	3,5	19,24
1	20,59	20,59	3,62	4,12	4,5	31,81
2	17,55	17,55	3,34	3,81	4,0	25,14
3	14,66	14,66	3,06	3,51	3,5	19,24
4	11,93	11,93	2,76	3,18	3,5	19,24
5	9,36	9,36	2,44	2,82	3,0	14,14
6	6,94	6,94	2,10	2,45	2,5	9,82
7	4,69	4,69	1,73	2,04	2,0	6,28
8	2,61	2,61	1,29	1,55	2,0	6,28
	Tonnen	\square Centim.	Centimeter		Centim.	\square Centim.

2. Streben. Wir ordnen die Hauptstreben doppelt, die Gegenstreben einfach an, geben aber beiden gleiche Dicke. Die Gegenstreben haben dann eine mehr als ausreichende Stärke. Die Spannung einer Hauptstrebe ist nach Formel 60 $P_2' = -\frac{2}{n} Q \sec \alpha = -\frac{1}{2} Q \sec \alpha$, wenn Q die Transversalkraft für einen durch die Mitte der Strebe gelegten Vertikalschnitt bedeutet, d. i. für die Strebe, deren Mitte mit der m ten Vertikalen zusammenfällt,

$$P_2' = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l} \right] \sec \alpha = -\frac{1}{1024} (256 - 32m + 0,77m^2) q l \sec \alpha$$

$$= 37,12 - 4,640 m + 0,1117 m^2 \text{ Tonnen.}$$

Für die Hauptstrebe im ersten Felde hat man sich den Schnitt durch die Mitte einer idealen unter dem Winkel α geneigten Strebe, welche mit der wirklichen

den oberen Punkt gemein hat, zu legen, es ist also hier $m = 0$ zu setzen; ausserdem ist α_0 für α , oder $\sec \alpha_0 = 1,118$ für $\sec \alpha = 1,414$ zu setzen. Hiernach wird P_2' für diese Strebe $= -\frac{256.3,5 \cdot 30}{1024} 1,118 = -29,35$ Tonnen.

Wir nehmen die Streben quadratisch an und wenden zur Berechnung der Dicke a die halbempirische Formel

$$\frac{1}{2} P_2' = \mathfrak{K} a^2 \frac{383 a^2}{l^2 + 383 a^2},$$

an, worin \mathfrak{K} den Sicherheitscoefficienten für Druck, l die Länge der Strebe bedeutet (siehe des Verfassers Lehre von der Elasticität und Festigkeit, §. 179). Wir haben $\frac{1}{2} P_2'$ gesetzt, weil sich die Kraft P_2' auf 2 Streben vertheilt. Setzen wir $\mathfrak{K} = 0,06$ Tonnen pro $\square\text{cm}$, $l = 375 \cdot \sqrt{2} = 530\text{cm}$, so wird $\frac{1}{2} P_2' = \frac{22,98 a^4}{280900 + 388 a^2}$ oder

$$a. a^4 - 8,333 P_2' a^2 - 6112 P_2' = 0.$$

Bei den steileren Endstreben ist 3820 für 6112 zu setzen.

Hiernach ergeben sich folgende Resultate:

Nr. <i>m</i>	Spannungen der Hauptstreben P_2'	Theoretische Querschnitts- fläche a^2	Theoretische Dicke a	Angenommene	
				Dicke	Querschnitts- fläche
0	29,35	478,8	21,9	22,5	506
1	32,59	602,3	24,5	25	625
2	28,28	547,6	23,4	25	625
3	24,21	495,4	22,3	22,5	506
4	20,35	445,2	21,1	22,5	506
5	16,71	396,7	19,9	20	400
6	13,30	346,0	18,6	20	400
7	10,11	294,2	17,2	20	400
8	7,14	241,0	15,5	20	400
	Tonnen	\square Centim.	Centim.	Centim.	\square Centim.

3. Endvertikalen. Der in der Endspannstange zu erzeugende künstliche Zug ist nach §. 33 $= \frac{1}{2} (29,35 \cos \alpha_0 + 32,59 \cos \alpha) = \frac{1}{2} (29,35 \cdot 0,895 + 32,59 \cdot 0,707) = 24,66$, welcher einen Bolzendurchmesser von 4,5cm verlangt.

Die Spannung im hölzernen Endpfosten ist nach §. 33 ebenfalls 24,66. Wenden wir 2 quadratische Säulen an, so ergibt sich statt der Gleichung a der geringeren Länge wegen $a^4 - 8,333 \cdot 24,00 a^2 - 3056 \cdot 24,66 = 0$, woraus $a^2 = 350$, $a = 18,7\text{cm}$ folgt. Der leichteren praktischen Durchführung wegen wählen wir zwei Säulen von 25cm im Quadrat.

4. Obergurt. Für die Momente ist $q = 0,8 + 2,3 = 3,1$ also $g = 0,8 = 0,26 q$, $p = 2,3 = 0,74 q$. Nehmen wir die Gegenstreben als nicht vorhanden an, so wird die Spannung S_1 des m ten oberen Gurtstückes nach Formel 28:

$$S_1 = -\frac{M}{h} - \frac{2^2 - 1 q a^2}{24 \cdot 2^2 h} = -\frac{M}{h} - 0,363.$$

Hierin bedeutet für das *m*te obere Gurtstück *M* das Moment für einen durch die Mitte des (*m* - 1)ten unteren Gurtstückes gelegten Vertikalschnitt, d. i. $M = \frac{1}{2} q \left(m - \frac{3}{2}\right) c \left[l - \left(m - \frac{3}{2}\right) c\right] = \frac{1}{8} (2m - 3) (2n - 2m + 3) q c^2$. Setzt man die Werthe für *q*, *h* und *c* ein, so erhält man

$$S_1 = 37,8 - 27,61m + 1,453 m^2 \text{ Tonnen.}$$

Nehmen wir den Sicherheitskoefficienten für Druck zu 0,06 Tonnen pro \square cm an, so ergibt sich als Querschnittsfläche

$$f_1 = -630 + 460,2m - 24,22 m^2 \square \text{ Centim.}$$

Die grösste Querschnittsfläche ergibt sich für *m* = 8 zu $f_1 = 1503 \square$ cm. Nehmen wir drei Balken an, so kommt auf jeden 501 \square cm. Nehmen wir die Breite zu 25cm an, so ergibt sich, wenn wir für die zum Anstemmen der Streben dienenden Klötze einen 2cm tiefen Einschnitt voraussetzen, die Höhe zu $\frac{501}{25} + 2 = 20,04 + 2,00 = 22,04$, wofür wir 25cm annehmen, so dass der wirkliche Querschnitt $3 \cdot 25 \cdot 25 = 1875 \square$ cm beträgt. Wir behalten diese Stärke im ganzen Träger bei.

5. **Untergurt.** In gleicher Weise ergibt sich für die Spannung S_2 des *m*ten Stückes des Untergurtes

$$S_2 = 32,0 + 18,89m - 1,453 m^2 \text{ Tonnen,}$$

und wenn wir den Sicherheitskoefficienten für Zug zu 0,08 Tonnen pro \square cm annehmen, als Gurtquerschnittsfläche f_2 :

$$f_2 = 400 + 236,1m - 18,16 m^2 \square \text{ Centim.}$$

Die grösste Querschnittsfläche ergibt sich hiernach für *m* = 8 zu $f_2 = 1127$; auf jeden der 3 Balken kommen sonach 376 \square cm. Im 4ten und 6ten Felde sollen Stösse angeordnet und hier der gestossene Balken bei der Bestimmung der Querschnittsfläche nicht einbezogen werden; für *m* = 6 aber wird $f_2 = 1163$, so dass auf jeden der 2 Balken 582 \square cm kommen. Bei einer Breite von 25cm und einem Einschnitte von 2cm wird die Höhe $= \frac{582}{25} + 2 = 25,28$, wofür wir 25cm annehmen.

V. Kapitel.

Materialmenge.

§. 35. **Vorbemerkung.** Theils zur Aufstellung eines Näherungsausdruckes für die vorläufige Bestimmung des Eigengewichtes einer Brücke, theils zur Ermittlung der zweckmässigsten Anordnung des Systemes, sowie zum Vergleiche verschiedener Systeme wird es nothwendig, einen Ausdruck für die theoretische Materialmenge aufzustellen. Wir verstehen darunter diejenige Materialmenge, welche der Träger erhalten würde, wenn alle Theile nur die theoretisch nothwendige Querschnittsfläche erhielten. Die Verwendung dieser Ausdrücke zur Ermittlung der wirklichen Materialmenge durch Multiplikation mit sogenannten Konstruktionskoefficienten wird im praktischen Theile gezeigt werden.

§. 36. **Volumen der Gurte.** Wir wollen nur den Fall behandeln, dass für beide Gurte dieselbe zulässige Inanspruchnahme K angewendet werde. Das gesammte Volumen beider Gurte bezeichnen wir mit V_1 , das variable Volumen pro Längeneinheit mit v_1 . Legen wir in Richtung der transversalen Maschendiagonalen einen Schnitt, welcher den Ober- und Untergurt

in Punkten schneidet, die den Punkten V und W (Fig. 55) entsprechen und stellen VV' , WW' die Maximalmomente für die Punkte V und W dar, so ist die Spannung des Obergurtes $= \frac{WW'}{h}$, die des Untergurtes $\frac{VV'}{h}$, also die Materialmenge pro Längeneinheit $v_1 = \frac{WW'}{Kh} + \frac{VV'}{Kh} = \frac{VV' + WW'}{Kh}$. Nun aber ist, wenn man mit M das Moment, welches einem in der Mitte zwischen V und W liegenden Punkte entspricht, sehr nahe $VV' + WW' = 2M$, mithin

$$v_1 = \frac{2M}{Kh},$$

also das Gesamtvolumen

$$71. V_1 = \frac{2}{Kh} \int M dx,$$

wobei die Integration über die gesammte Länge des Trägers auszudehnen ist.

Stellt man die Momente M durch Ordinaten dar, so ist $\int M dx$ die gesammte von diesen Ordinaten gebildete Fläche (Fig. 55). Bezeichnet man ein mittleres Moment mit \mathfrak{M} , die gesammte Länge des Trägers mit L , so ist $\int M dx = \mathfrak{M}L$, mithin

$$71 a. V_1 = \frac{2\mathfrak{M}L}{Kh}.$$

Wendet man zur Bestimmung der Querschnittsfläche die Formel 7, Seite 9 an, so tritt an Stelle dieses Ausdruckes der Ausdruck

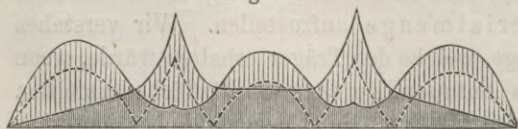
$$72. V_1 = \frac{2L}{h} \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{K_0} + \frac{\mathfrak{M}_1}{K_1} + \frac{\mathfrak{M}_2}{K_2} \right),$$

wenn \mathfrak{M}_0 das mittlere Moment für das Eigengewicht, \mathfrak{M}_1 das Mittel der absolut genommenen Maxima der Momente und \mathfrak{M}_2 das Mittel der absolut genommenen Minima der Momente für die zufällige Last bedeutet. In Fig. 56 ist die Momentenlinie für das Eigengewicht punktirt; die gesammte schraffierte Fläche stellt $\mathfrak{M}_1 L$, die dunkel schraffierte Linie stellt $\mathfrak{M}_0 L$ dar.

Fig. 55.



Fig. 56.



a. **Einfacher Träger.** Für einen einfachen Träger lässt sich \mathfrak{M} durch eine Parabel mit der Fläche $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l = \frac{1}{12} q l^3$ darstellen; hier ist also $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} q l^2$, also

$$73. \quad V_1 = \frac{q l^3}{6 K h}.$$

Bei Anwendung der Formel 72 ist $\mathfrak{M}_0 = \frac{1}{12} g l^2$, $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{12} p l^2$, $\mathfrak{M}_2 = 0$ zu setzen, daher wird

$$74. \quad V_1 = \frac{l^3}{6 h} \left(\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1} \right).$$

b. **Kontinuierlicher Träger.** Die Werthe von \mathfrak{M} für Träger mit 2, 3 und 4 Feldern sind in der „Theorie der Brücken, I. Abschnitt, X. Kap.“ angegeben. Ebenso sind die Werthe von V_1 nach Formel 71a in: „Eiserne Brücken, II. Heft“ (II. Aufl. S. 237) zusammengestellt. Allgemein kann man \mathfrak{M} durch einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{M} = (A g + B p) l^2$$

darstellen, wenn l eine mittlere Spannweite bedeutet, so dass also bei m Oeffnungen

$$75. \quad V_1 = \frac{2(A g + B p) m l^3}{K h}$$

wird; hierbei ist $A = 0,042$ bis $0,049$, $B = 0,068$ bis $0,077$ und man kann durchschnittlich

$$75a. \quad V_1 = \frac{(0,09 g + 0,14 p) m l^3}{K h}$$

setzen. Bei Anwendung der Formel 74 ist annähernd allgemein $\mathfrak{M}_0 = A g l^2$, $\mathfrak{M}_1 = B p l^2$ und $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = \frac{p}{g} \mathfrak{M}_0$ oder $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 - \frac{p}{g} \mathfrak{M}_0 = B p l^2 - A p l^2$ oder $\mathfrak{M}_2 = (B - A) p l^2$ zu setzen und zwar ist $B - A$ durchschnittlich $= 0,34 B$. Ferner kann man für Schmiedeeisen¹⁾ $K_2 = 2,2 K_1$ bis $2,5 K_1$ setzen. Daher wird annähernd

$$76. \quad V_1 = \left(0,09 \frac{g}{K_0} + 0,16 \frac{p}{K_1} \right) \frac{m l^3}{h}.$$

c. **Kontinuierlicher Gelenkträger.** Hier lassen sich die Werthe von \mathfrak{M} , welche nach „Theorie der Brücken, I. Abschn. §. 31“ zu bestimmen sind, weniger genau durch Mittelwerthe ersetzen, da nicht nur das Verhältniss der Felderlängen, sondern auch die Lage der Gelenke Einfluss übt. Für drei Felder kann man unter der Voraussetzung günstiger Anordnung etwa durchschnittlich, mögen die Gelenke in dem äusseren oder im inneren Felde liegen, $\mathfrak{M}_0 = 0,045 g l^2$, $\mathfrak{M}_1 = 0,075 p l^2$, $\mathfrak{M}_2 = 0,030 p l^2$ setzen. In Formel 75a würde daher $0,15$ statt $0,14$ und in For-

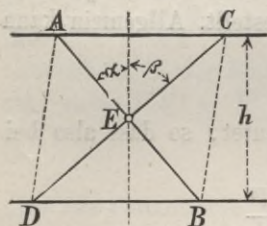
¹⁾ Winkler, Wahl der zulässigen Inanspruchnahme. Wien, 1877.

mel 76 würde 0,175 statt 0,16 zu setzen sein, um diese Formeln annähernd für kontinuierliche Gelenkträger passend zu machen.

Sind zwei verschiedene Koeffizienten K' und K'' für beide Gurte anzuwenden, so ist $\frac{1}{K'} + \frac{1}{K''}$ für $\frac{2}{K}$ zu setzen. Das Gewicht ergibt sich, wenn man $\frac{\gamma'}{K'} + \frac{\gamma''}{K''}$ für $\frac{2}{K}$ setzt, falls γ' und γ'' die Gewichte der Volumeneinheit bezeichnen.

§. 37. Volumen des einfachen Gitterwerkes bei gleichem Materiale. Die Spannungen der unter α und β gegen die Vertikale geneigten Stäbe AB und CD sind $+\frac{1}{n} Q_1 \sec \alpha$, $-\frac{1}{n} Q_2 \sec \beta$, wenn Q_1

Fig. 57.



und Q_2 die Transversalkräfte für die Schnitte CD und AB bezeichnen. Die Querschnittsflächen beider Stäbe sind sonach unter der Annahme gleicher Zug- und Druckfestigkeit $\frac{1}{nK} Q_1 \sec \alpha$ und $\frac{1}{nK} Q_2 \sec \beta$ und ihre Längen $h \sec \alpha$ und $h \sec \beta$. Sonach ist das Volumen beider Stäbe

$$\frac{h}{nK} (Q_1 \sec^2 \alpha + Q_2 \sec^2 \beta).$$

Es genügt für den vorliegenden Zweck, statt Q_1 und Q_2 die Transversalkraft Q für den durch die Mitte E beider Stäbe gehenden Vertikalschnitt einzuführen. Alsdann wird das Volumen beider Stäbe

$$\frac{Qh}{nK} (\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta).$$

Die Länge $AC = BD$ ist $=\frac{1}{2} h (\tan \alpha + \tan \beta)$. Auf diese Länge kommen $\frac{1}{2} n$ Stäbe mit der Neigung α und $\frac{1}{2} n$ Stäbe mit der Neigung β . Sonach ist das Volumen V_2 des Gitterwerkes auf die Längeneinheit

$$77. \quad v_2 = \frac{Q (\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta)}{K (\tan \alpha + \tan \beta)}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass weder die Trägerhöhe h , noch die Theilungszahl n auf das Volumen des Gitterwerkes von Einfluss ist.

Soll das Volumen zu einem Minimum werden, so müssen die Differentialquotienten von v_2 nach α und $\beta = 0$ gesetzt werden. Da nun aber der Ausdruck für v_2 in Beziehung auf α und β symmetrisch ist, so müssen sich für α und β gleiche Werthe ergeben. Setzt man aber $\alpha = \beta$, so wird

$$78. \quad v_2 = \frac{2Q}{K \sin 2\alpha}.$$

Sonach wird v_2 zum Minimum, wenn $\sin 2\alpha$ zum Maximum wird, d. i. für $2\alpha = 90^\circ$ oder für $\alpha = 45^\circ$. Das Gitterwerk beansprucht

also möglichst wenig Material, wenn beide Lagen der Gitterstäbe unter 45 Grad geneigt sind. Für diese Lage (Netzwerk) wird

$$79. v_2 = 2 \frac{Q}{K}$$

Für das Fachwerk ($\beta = 0$) dagegen wird

$$80. v_2 = \frac{Q(1 + \sec^2 \alpha)}{K \tan \alpha} = \frac{Q(2 + \tan^2 \alpha)}{K \tan \alpha}$$

Hiernach wird v_2 zu einem Minimum für

$$\tan \alpha = \sqrt{2}, \quad \alpha = 54^\circ 44' 8''.$$

Für diese Neigung wird

$$81. v_2 = 2\sqrt{2} \frac{Q}{K}$$

so dass das Fachwerk $\sqrt{2} = 1,414$ mal soviel Material beansprucht, als das Netzwerk mit $\alpha = \beta = 45^\circ$. Für $\beta = 0$ und $\alpha = 45^\circ$ wird

$$82. v_2 = 3 \frac{Q}{K}$$

so dass hier das Fachwerk 1,5 mal soviel Material beansprucht, als das Netzwerk mit $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Für eine beliebige Lage der Gitterstäbe können wir sonach

$$83. v_2 = C \frac{Q}{K}$$

setzen, wobei C einen zwischen den Grenzen 2 und 3 schwankenden Koeffizienten bezeichnet. Das gesammte Volumen V_2 des Gitterwerkes ist sonach

$$84. V_2 = \frac{C}{K} \int Q dx,$$

wobei die Integration über die Ausdehnung des ganzen Trägers zu erstrecken ist. Stellt man die Transversalkraft Q durch Ordinaten dar, so ist $\int Q dx$ die gesammte von diesen Ordinaten gebildete Fläche (Fig. 58).

Fig. 58.

Bezeichnet man eine mittlere Transversalkraft mit Ω , so ist $\int Q dx = \Omega L$, mithin

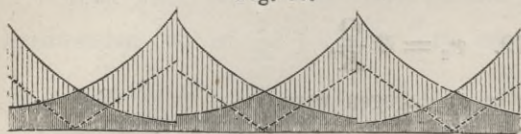
$$V_2 = \frac{C \Omega L}{K}$$

Wendet man zur Bestimmung der Querschnittsfläche die Formel 7 (Seite 9) an, so ist statt dieser Formel

$$85. V_2 = CL \left(\frac{\Omega_0}{K_0} + \frac{\Omega_1}{K_1} + \frac{\Omega_2}{K_2} \right)$$

anzuwenden, wenn, entsprechend der Formel 72, \mathfrak{D}_0 die mittlere Transversalkraft für das Eigenwicht, \mathfrak{D}_1 das Mittel der absolut genommenen

Fig. 59.



Maxima der Transversalkräfte, \mathfrak{D}_2 das Mittel der absolut genommenen Minima der Transversalkräfte bedeutet. In Fig. 59 ist die

Transversalkraft für das Eigengewicht durch eine punktirte Linie angegeben; die gesammte schraffierte Fläche stellt $\mathfrak{D}_1 L$, die dunkel schraffierte Fläche stellt $\mathfrak{D}_2 L$ dar.

a. **Einfacher Träger.** Für den einfachen Träger wird bekanntlich $Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}$. Da nur der absolute Werth von Q in Frage kommt, so ist die Integration nur von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2} l$ auszudehnen und das Integral doppelt zu nehmen. Sonach wird

$$\mathfrak{D} l = g \int_0^{\frac{1}{2} l} (l - 2x) dx + \frac{p}{l} \int_0^{\frac{1}{2} l} (l - x)^2 dx.$$

Die Ausführung der Integration gibt $\mathfrak{D} = \frac{1}{4} gl + \frac{7}{24} pl$; sonach ist

$$86. \quad V_2 = \frac{Cl^2}{4K} (g + \frac{7}{6} p).$$

Zur Anwendung der Formel 85 ist $\mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4} gl$, $\mathfrak{D}_1 = \frac{7}{24} pl$ und

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{p}{l^2} \int_0^{\frac{1}{2} l} x^2 dx = \frac{1}{24} pl$$

zu setzen. Setzen wir ausserdem nach dem vorigen Paragraphen durchschnittlich $K_2 = 2,35 K_1$, so wird

$$87. \quad V_2 \equiv C V^2 \left(0,25 \frac{g}{K_0} + 0,31 \frac{p}{K_0} \right).$$

b. **Kontinuierlicher Träger.** Die Werthe von \mathfrak{D} für Träger mit 2, 3 und 4 Feldern sind in der „Theorie der Brücken, I. Abschnitt, X. Kap.“ angegeben. Ebenso sind die Werthe von V_2 in „Eiserne Brücken“, II. Heft (II. Aufl. S. 237) zusammengestellt. Allgemein kann man \mathfrak{D} durch einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{D} = (Ag + Bp) l$$

darstellen, wenn wieder l eine mittlere Spannweite bezeichnet, so dass also bei m Oeffnungen

$$88. \quad V_2 = \frac{C(Ag + Bp) m l^2}{K}$$

wird; hierbei ist $A = 0,256$ bis $0,264$, $B = 0,329$ bis $0,354$. Man kann daher durchschnittlich setzen:

$$88 a. \quad V_2 = \frac{C}{K} (0,26 g + 0,34 p) ml^2.$$

Bei Anwendung der Formel 85 ist $\Omega_0 = A g l$, $\Omega_1 = B p l$ $\Omega_2 = (B - A) p l$ ist zu setzen und zwar ist durchschnittlich $B - A = 0,24 B$. Setzen wir ausserdem, wie vorhin $K_2 = 2,35 K$, so wird

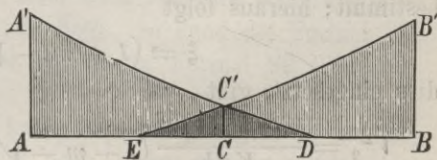
$$89. \quad V_2 = C l^2 m \left(0,26 \frac{g}{K_0} + 0,37 \frac{p}{K_1} \right).$$

c. **Kontinuierlicher Gelenkträger.** Unter der Voraussetzung günstiger Anordnung lässt sich hier durchschnittlich $\Omega_0 = 0,262 g l$, $\Omega_1 = 0,326 p l$, $\Omega_2 = 0,064 p l$ setzen. Hiernach würde in Formel 88 a $0,33$ für $0,34$, in Formel 89 $0,35$ für $0,37$ zu setzen sein, um diese Formeln für kontinuierliche Gelenkträger passend zu machen.

§. 38. Volumen des Fachwerkes mit schlaffen Diagonalen.

Die im vorigen §. gemachte Untersuchung setzt voraus, dass der Träger durchgehend nur einfaches Gitterwerk erhalte. Beim Fachwerke mit schlaffen Diagonalen aber müssen die Diagonalen in derjenigen Strecke DE (Fig. 60), in welcher die Transversalkraft positiv und negativ werden kann, doppelt angeordnet werden. Hier müssen bei der Bestimmung des Volumens die Vertikalen und Diagonalen gesondert werden.

Fig. 60.



Das Volumen einer Vertikalen ist $\frac{Q}{nK} \cdot h$; da auf die Länge $h \tan \alpha$ aber n Vertikalen kommen, so ist das Volumen v'_2 der Vertikalen pro Längeneinheit

$$v'_2 = \frac{Q}{K} \cot \alpha = \frac{Q h}{K a}.$$

Das Volumen einer Diagonalen ist $\frac{Q}{nK} \sec \alpha \cdot h \sec \alpha = \frac{Q h \sec^2 \alpha}{nK}$. Da auf die Länge $h \tan \alpha$ wieder n Diagonalen kommen, so ist das Volumen v''_2 der Diagonalen pro Längeneinheit

$$v''_2 = \frac{2 Q}{K \sin 2\alpha} = \frac{Q a^2 + h^2}{K a h}.$$

Wir bestimmen nun zunächst das Gesamtvolumen V_2 für einen einfachen Träger. Das Volumen V'_2 der Vertikalen ist $= \frac{h}{Ka} \int Q dx$, wobei das Integral der Fläche $ABB'C'A'$ (Fig. 60) entspricht, d. i.

$$V'_2 = 2 \cdot \frac{h}{2Ka} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[g(l-2x) + p \frac{(l-x)^2}{l} \right] dx$$

$$= \frac{hl^2}{24Ka} (6g + 7p) = \frac{(6m+7)ql^2h}{24(1+m)Ka}$$

wenn man das Verhältniss $\frac{g}{p}$ mit m bezeichnet. Das Volumen V'_2 der Diagonalen ist $= \frac{a^2+h^2}{Kah} \int Q dx$, wobei das Integral den beiden Flächen $AA'D$ und $BB'E$ (Fig. 60) entspricht, d. i. wenn wir die Länge AD mit ξ bezeichnen,

$$V''_2 = 2 \frac{a^2+h^2}{2Kah} \int_0^{\xi} \left[g(l-2x) + p \frac{(l-x)^2}{l} \right] dx$$

$$= \frac{(a^2+h^2)\xi}{Kahl} \left[gl(l-\xi) + p(l^2-l\xi + \frac{1}{3}\xi^2) \right].$$

Für $x=0$ wird $Q=0$, mithin ist ξ durch die Gleichung $gl(l-2\xi) + p(l-\xi)^2 = 0$ oder

$$\xi^2 - 2(1+m)l\xi + (1+m)l^2 = 0$$

bestimmt; hieraus folgt

$$\xi = (1+m - \sqrt{m+m^2})l;$$

dies eingesetzt, gibt

$$V''_2 = \frac{(a^2+h^2)l^2}{Kah} (1+m - \sqrt{m+m^2}) \left[g(\sqrt{m+m^2} - m) \right. \\ \left. + \frac{1}{3}p \left\{ 1 + 2m^2 + (1-2m)\sqrt{m+m^2} \right\} \right], \text{ oder}$$

$$V''_2 = \frac{ql^2}{3K} \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) (1-m - 2m^2 + 2m\sqrt{m+m^2}).$$

Das Gesamtvolumen V_2 kann man sonach setzen:

$$90. \quad V_2 = \left(\gamma \frac{a}{h} + \delta \frac{h}{a} \right) \frac{ql^2}{K},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$90 a. \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{3} [1 - m - 2m^2 + 2m\sqrt{m+m^2}], \\ \delta = \frac{6m+7}{24(1+m)} + \frac{1}{3} [1 - m - 2m^2 + 2m\sqrt{m+m^2}] \end{cases}$$

Hiernach schwankt γ nur zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, δ nur zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{1}{3}$, wenn m zwischen den Grenzen 0 und ∞ schwankt. Eine Tabelle für γ und δ findet sich in „Eiserne Brücken“, II. Heft (I. Aufl. S. 192). Sehr nahe wird hiernach

$$91. \quad \begin{cases} \gamma = 0,235 \frac{q}{a} + 0,315 \frac{p}{q} \\ \delta = 0,486 \frac{q}{a} + 0,616 \frac{p}{q} \end{cases}$$

Es genügt aber auch für die praktische Anwendung, $\delta = 2\gamma$ und $\gamma = \frac{6m+7}{24(1+m)}$, also

$$92. \quad V_2 = \left(0,250g + 0,292p \right) \left(\frac{a}{h} + 2 \frac{h}{a} \right) \frac{l^2}{K}$$

zu setzen. Es wird dann diese Formel übereinstimmend mit der Formel 86, da für Fachwerk nach Formel 80 $C = \frac{2 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} = \frac{a}{h} + 2 \frac{h}{a}$ wird. Diese Näherung kommt auf die Vernachlässigung des Dreieckes $DC'E$ (Fig. 60) oder auf die Vernachlässigung der Gegendiagonalen in der Strecke DE hinaus. Der hierbei begangene Fehler liegt zwischen den Grenzen 0 und 4 Procent.

Bei Anwendung der Formel 7, Seite 9 zur Querschnittsbestimmung wird der genaue Ausdruck für das Volumen noch etwas komplizierter, weil für die doppelten Diagonalen, deren untere Spannungsgrenze Null ist, eine Abweichung hinsichtlich der Querschnittsbestimmung eintritt (vergl. das I. Beispiel zu §. 26). Wenn man aber auch hier die Näherung zulässt, welche der Formel 92 zu Grunde liegt, so kann die Formel 87 auch hier in Anwendung kommen oder es ist in Formel 92 0,31 für 0,292 zu setzen.

Auch für kontinuierliche Träger kann man die Formel 88 bis 89 verwenden; jedoch kann hier der Fehler noch etwas grösser werden als beim einfachen Träger.

§. 39. Einfaches Gitterwerk bei ungleichem Materiale. Wenn für die beiden Stablagen ungleiches Material gewählt wird, so ist nicht mehr das Volumen für die zweckmässigste Anordnung massgebend, sondern der Preis. Wir müssen daher einen Ausdruck für den Preis des Gitterwerkes aufstellen. Bezeichnen wir den für Zug und Druck zu wählenden Sicherheitscoefficienten mit K' und K'' , den entsprechenden Preis der Volumeinheit mit k' und k'' , so sind die Kosten der beiden Stäbe AB und CD (Fig. 57), wenn wir die Transversalkraft für beide Stäbe wieder gleich, und zwar $= Q$ annehmen, $\frac{Q \sec \alpha}{n K'} \cdot h \sec \alpha \cdot k'$ und $\frac{Q \sec \beta}{n K''} \cdot h \sec \beta \cdot k''$. Auf die Länge $h (\tan \alpha + \tan \beta)$ kommen von jeder Schaar n Stäbe, mithin sind die Kosten des Gitterwerkes pro Längeneinheit, wenn man noch die Verhältnisse $\frac{k'}{K'}$ und $\frac{k''}{K''}$ bezüglich mit ε' und ε'' bezeichnet,

$$93. \quad p = Q \frac{\varepsilon' \sec^2 \alpha + \varepsilon'' \sec^2 \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

Differenziert man nach α und β und setzt jeden Differenzialquotienten $= 0$, so ergibt sich

$$2 \varepsilon' \tan \alpha (\tan \alpha + \tan \beta) = \varepsilon' \sec^2 \alpha + \varepsilon'' \sec^2 \beta,$$

$$2 \varepsilon'' \tan \beta (\tan \alpha + \tan \beta) = \varepsilon' \sec^2 \alpha + \varepsilon'' \sec^2 \beta.$$

Die Division dieser Gleichungen gibt $\varepsilon' \tan \alpha = \varepsilon'' \tan \beta$ oder

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \tan \alpha.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, $\sec^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ und setzt sodann für $\tan \beta$ den eben erhaltenen Ausdruck, so ergibt sich für die zweckmässigste Lage der Gitterstäbe die einfache Regel:

$$94. \quad \begin{cases} \tan \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{K' k''}{K'' k'}} \\ \tan \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}} = \sqrt{\frac{K'' k'}{K' k''}} \end{cases}$$

Hiernach wird $\tan \beta = \cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$ oder $\beta = 90^\circ - \alpha$, d. i.: Die Gitterstäbe sollen auf einander senkrecht stehen.

Setzt man die für $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ erhaltenen Werthe in die Formel 93 ein, so findet man als Minimalpreis pro Längeneinheit

$$95. \quad p = 2 Q \sqrt{\frac{k' k''}{K' K''}} = 2 Q \sqrt{\varepsilon' \varepsilon''},$$

während für $\alpha = \beta = 45^\circ$

$$96. \quad p = Q \left(\frac{k'}{K'} + \frac{k''}{K''} \right) = Q (\varepsilon' + \varepsilon'')$$

würde, so dass sich dieser Preis zum Minimalpreis wie das arithmetische Mittel zum geometrischen Mittel von ε' und ε'' verhält. Meist werden beide Werthe nicht viel von einander abweichen.

Nach 94 ergibt sich diejenige Schaar der Gitterstäbe als die steilere, für welche der Sicherheitskoeffizient der kleinere und der Preis der Volumeneinheit der grössere ist. Hinsichtlich der praktischen Zulässigkeit dieser Werthe für α und β sprechen wir im konstruktiven Theile.

Wir haben bei der soeben geführten Entwicklung die gewöhnliche Methode der Querschnittsbestimmung vorausgesetzt, weil die Werthe der Koeffizienten K_0 , K_1 , K_2 in der neueren Regel 7, Seite 9 für verschiedene Materialien noch nicht hinreichend bekannt sind. Wenn das Verhältniss dieser Koeffizienten bei verschiedenen Materialien dasselbe wäre, so würden die Regeln 94 für die Lage der Gitterstäbe ihre Giltigkeit behalten.

§. 40. Doppelfachwerk mit künstlicher Anspannung. Wir setzen im Folgenden nur Gitterwerk mit Vertikalen, sowie Haupt- und

Gegendiagonalen voraus. Die grösste Spannung einer Vertikale ist $2 \frac{Q}{n}$, also ihr Volumen $\frac{2Qh}{K'n}$ und das Volumen pro Längeneinheit, da der Abstand zweier Vertikalen $= \frac{2}{n} h \tan \alpha$ ist,

$$v'_2 = \frac{Q}{K' \tan \alpha}.$$

Die Spannung einer Hauptdiagonale ist $\frac{2}{n} Q \sec \alpha$, also das Volumen derselben $\frac{2Q}{K''n} h \sec^2 \alpha$, und das Volumen pro Längeneinheit, da auf die Länge $\frac{2}{n} h \tan \alpha$ eine Diagonale kommt,

$$v''_2 = \frac{Q \sec^2 \alpha}{K'' \tan \alpha} = \frac{Q}{K''} \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha}.$$

Nehmen wir an, dass die Gegendiagonalen einen Querschnitt erhalten, welcher das κ fache von dem der Hauptdiagonalen ist, so wird das Volumen der Gegendiagonalen

$$v'''_2 = \kappa \frac{Q}{K''} \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha}.$$

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1. **Gleiches Material.** Das Gesamtvolumen v_2 des Gitterwerkes wird für $K' = K'' = K$:

$$97. \quad v_2 = \frac{Q}{K} \frac{2 + \kappa + (1 + \kappa) \tan^2 \alpha}{\tan \alpha}.$$

Hiernach wird v zu einem Minimum für

$$98. \quad \tan \alpha = \sqrt{\frac{2 + \kappa}{1 + \kappa}}$$

und zwar wird

$$99. \quad \min v_2 = \frac{Q}{K} 2 \sqrt{(1 + \kappa)(2 + \kappa)}.$$

Für $\kappa = \frac{1}{3}$ wird $\tan \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{15} = 1,291$ und $\min v_2 = \sqrt{15} \frac{Q}{K} = 3,873 \frac{Q}{K}$, während für $\tan \alpha = 1$ $v_2 = 4 \frac{Q}{K}$ und bei Weglassung der Gegendiagonalen $\min v_2 = 2 \sqrt{2} \frac{Q}{K} = 2,828 \frac{Q}{K}$ wird. Für Netzwerk wird $\min v_2 = 2 \frac{Q}{K}$, so dass beim Doppelfachwerke der Materialbedarf auf das Doppelte steigen kann.

2. **Verschiedenes Material.** Hinsichtlich der zweckmässigsten Lage der Diagonalen kann nur der Preis entscheiden; derselbe wird, wenn der Preis der Volumeneinheit für Vertikalen und Diagonalen bezüglich k' und k'' ist, pro Längeneinheit

$$100. \quad k = \frac{Q}{\tan \alpha} \left[\frac{k'}{K'} + \frac{k''}{K''} (1 + \kappa) (1 + \tan^2 \alpha) \right].$$

Hiernach wird k zum Minimum für

$$101. \tan \alpha = \sqrt{1 + \frac{k' K''}{(1 + \kappa) k'' K'}}$$

und zwar wird

$$102. \min k = 2 Q \sqrt{(1 + \kappa) \frac{k''}{K''} \left[\frac{k'}{K'} + (1 + \kappa) \frac{k''}{K''} \right]}$$

Wenn es sich nur um die Bestimmung des Gewichtes handelt, so erhält man als Gewicht g pro Längeneinheit, wenn γ_1, γ_2 das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet,

$$103. g = \frac{Q}{\tan \alpha} \left[\frac{\gamma'}{K'} + \frac{\gamma''}{K''} (1 + \kappa) (1 + \tan^2 \alpha) \right].$$

Für Howe'sche Brücken mit hölzernen Streben und eisernen Vertikalen kann man $\kappa = 0,5$ und ungefähr $\gamma_1 = 7,7, \gamma_2 = 0,9$ Tonnen pro Kubikmeter und $K' = 4000, K'' = 500$ Tonnen pro \square Meter annehmen. Daher würde in Tonnen pro lauf. Meter

$$104. g = \frac{0,00463 + 0,00270 \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} Q$$

und für $\alpha = 45^\circ: g = 0,0073 Q$.

Die Bestimmung des Gesamtgewichtes hat nun ganz wie in §. 37 zu erfolgen. Man kann die dort angewendeten Regeln ohne Weiteres beibehalten, wenn man statt des dort auftretenden Faktors $\frac{C}{K}$ den Faktor $\frac{1}{\tan \alpha} \left[\frac{\gamma'}{K'} + \frac{\gamma''}{K''} (1 + \kappa) (1 + \tan^2 \alpha) \right]$ setzt. Das Verhältniss κ bleibt in denjenigen Theilen des Trägers, wo die Transversalkraft entweder nur positiv oder negativ ist, konstant, z. B. beim Howe'schen Träger $= 0,5$. In demjenigen Theile, wo Q positiv und negativ werden kann, können die Gegendiagonalen auch die Stelle der Hauptdiagonalen zu übernehmen haben und hier müssen die Gegendiagonalen zum Theil stärker, κ also grösser genommen werden. Indess sind hier die Transversalkräfte so klein, dass der Fehler nur sehr klein wird, wenn man κ konstant nimmt; der Fehler wird selbst kleiner, als der im vorigen §. angegebene Fehler für das einfache Fachwerk, wenn man dort die Gegendiagonalen vernachlässigt.

§. 41. Lagerständer.

1. **Netzwerk mit regelmässigem Anschlusse des Gitterwerkes.** Wenn das Gitterwerk regelmässig bis zum Ständer fortgesetzt ist (Fig. 43, S. 43), so ist bei dem Stützdrucke D und der Theilungszahl n der Druck in den einzelnen Theilen nach §. 18 von oben herab $\frac{1}{n} D, \frac{2}{n} D, \frac{3}{n} D, \dots, \frac{n-1}{n} D$. Die Anzahl der Theile des Ständers ist $= \frac{1}{2} n$. Demnach ist das theoretische Volumen v_3 des Ständers

$$v_3 = \frac{D}{K} \frac{2h}{n} \left[\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right].$$

Die Summierung der Reihe in der Parenthese gibt $\frac{1}{2}n$; sonach wird

$$v_3 = \frac{Dh}{2K}.$$

Demnach wird das Volumen V_3 beider Ständer eines einfachen Trägers, da hier $D = \frac{1}{2}ql$ ist,

$$105. \quad V_3 = \frac{qlh}{2K}.$$

Bei einem kontinuierlichen Träger oder kontinuierlichem Gelenkträger mit m Feldern von der mittleren Spannweite l ist die Summe aller Stützendrücke bei totaler Belastung mq ; die Summe aller Maximalstützendrücke ist indess etwas grösser, wir können dieselbe $= m(g + \varepsilon p)$ setzen und erhalten also als Volumen aller Ständer

$$106. \quad V_3 = \frac{1}{2} m (g + \varepsilon p) \frac{lh}{K}.$$

Für kontinuierliche Träger wird für zwei Felder $\varepsilon = 1,063$, für 3 Felder nahezu $\varepsilon = 1,10$, für 4 oder mehr Felder nahezu $\varepsilon = 1,12$, für kontinuierliche Gelenkträger mit 3 Feldern wird nahezu $\varepsilon = 1,03$ bis $1,04$, so dass man allgemein hinreichend genau

$$107. \quad V_3 = m(0,50g + 0,54p) \frac{lh}{K}$$

setzen kann.

2. Netzwerk mit unregelmässigem Anschlusse des Gitterwerkes. Wir setzen jetzt voraus, dass die Gitterstäbe nur vom oberen und unteren Ende des Ständers ausgehen (Fig. 44, S. 52). Alsdann ist der Stützendruck nach §. 19 nahezu $= \frac{1}{2}D$, folglich das theoretische Volumen, wie oben, $= \frac{Dh}{2K}$, so dass hier die Formeln 105 bis 107 ebenfalls gültig bleiben. Da hier indess an den Enden etwas mehr Material für das Gitterwerk nothwendig ist, so wird es noch nöthig, diesen Mehrbedarf zu bestimmen. Die Spannung eines von einem Ende des Ständers ausgehenden Stabes ist sehr nahe $\frac{1}{n}Q \sec \alpha_1$, wenn Q die Maximaltransversalkraft am Ständer, α_1 den variablen Strebenwinkel bedeutet; sonach ist das Volumen aller von beiden Enden des Ständers ausgehenden Stäbe $2 \frac{Q}{nK} h \Sigma \sec^2 \alpha_1 = 2 \frac{Q}{nK} h \Sigma (1 + \tan^2 \alpha_1) = \frac{2Qh}{nK} \left[\frac{n}{2} + \frac{a^2}{n^2 h^2} (1^2 + 2^2 + \dots + \frac{n^2}{4}) \right] = \frac{2Qh}{nK} \left[\frac{n}{2} + \frac{(n+1)(n+2)a^2}{24nh^2} \right]$ oder

$$= \frac{Qh}{K} \left[1 + \frac{(n+1)(n+2)}{3n^2} \tan^2 \alpha \right].$$

Bei regelmässigem Anschlusse des Gitterwerkes ergibt sich als Volumen sämmtlicher an den Ständer anschliessenden Stäbe $2 \frac{Q}{nK} h \sec^2 \alpha \cdot \frac{2}{n} (1 + 2 + \dots + \frac{n}{2}) = \frac{(2+n) Q h \sec^2 \alpha}{2 n K}$ oder

$$= \frac{Q h n + 2}{K} \frac{1}{2n} (1 + \tan^2 \alpha).$$

Der Unterschied in beiden Fällen, also der Mehrbedarf v_4 gegen den regelmässigen Anschluss ist

$$v_4 = \frac{Q h n - 2}{K} \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{n+2}{3n} \tan^2 \alpha \right).$$

Sonach wird der Mehrbedarf V_4 für beide Enden eines einfachen Trägers

$$103. \quad V_4 = \frac{q l h n - 2}{K} \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{n+2}{3n} \tan^2 \alpha \right).$$

Hiernach ergibt sich für einige Theilungszahlen

allgemein: für $\alpha = 45^\circ$ Grad:

$$n = 2: \quad V_4 = 0 \qquad V_4 = 0.$$

$$n = 4: \quad V_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K}, \quad V_4 = \frac{1}{8} \frac{q l h}{K}.$$

$$n = 6: \quad V_4 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{9} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K}, \quad V_4 = \frac{5}{27} \frac{q l h}{K}.$$

$$n = \infty: \quad V_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K}, \quad V_4 = \frac{1}{3} \frac{q l h}{K}.$$

Bei einem kontinuierlichen Träger oder kontinuierlichen Gelenkträger ist $m(g + \varepsilon p) l$ für $q l$ zu setzen wenn m , ε und l dieselbe Bedeutung haben, wie oben.

3. Fachwerk mit unregelmässigem Anschlusse des Gitterwerkes. Wir setzen voraus, dass die Gitterstäbe nur vom oberen Ende des Ständers ausgehen (Fig. 45, S. 54). Alsdann ist der Druck im Ständer gleich dem Stützdrucke D , das theoretische Volumen des Ständers also

$$v_3 = \frac{D h}{K}.$$

Das theoretische Volumen V_3 beider Ständer eines einfachen Trägers ist sonach

$$109. \quad V_3 = \frac{q l h}{K}.$$

Bei einem kontinuierlichen Träger oder kontinuierlichen Gelenkträger ist wieder $m(g + \varepsilon p) l$ für $q l$ zu setzen.

Der Mehrbedarf v_4 an Material im Gitterwerke gegenüber dem regelmässigen Anschlusse ergibt sich ganz in derselben Weise wie im vorigen Falle; derselbe ist für den Anschluss an einen Ständer

$$v_4 = \frac{Q h n - 1}{K} \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{n+1}{3n} \tan^2 \alpha \right).$$

Sonach wird der Mehrbedarf V_4 für beide Enden eines einfachen Trägers

$$110. \quad V_4 = \frac{q l h n - 1}{K} \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{n+1}{3n} \tan^2 \alpha \right).$$

Hiernach ergibt sich für einige Theilungszahlen:

	allgemein:	für $\alpha = 45$ Grad:
$n = 1:$	$V_4 = 0,$	$V_4 = 0,$
$n = 2:$	$V_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K},$	$V_4 = \frac{1}{8} \frac{q l h}{K},$
$n = 3:$	$V_4 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{9} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K},$	$V_4 = \frac{5}{27} \frac{q l h}{K},$
$n = \infty:$	$V_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) \frac{q l h}{K},$	$V_4 = \frac{1}{3} \frac{q l h}{K}.$

Ueberhaupt ergibt sich V_4 ebenso gross wie beim Netzwerke mit doppelt so grosser Theilungszahl. Bei einem kontinuierlichen Träger oder kontinuierlichen Gelenkträger ist wieder $m(g + \varepsilon p) l$ für $q l$ zu setzen.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung ist in den Formeln 105, 108, 109 und 110 für einfache Träger nur $\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1}$ für $\frac{q}{K}$ zu setzen. Bei kontinuierlichen Trägern und kontinuierlichen Gelenkträgern aber kann der Stützendruck in Folge der zufälligen Last auch negativ werden; setzen wir das negative Maximum gleich dem ε -fachen des Stützendruckes für totale Belastung, so ist $\frac{g}{K_0} + \frac{\varepsilon p}{K_1} + \frac{\varepsilon p}{K_2}$ für $\frac{g + \varepsilon p}{K}$ zu setzen. Es wird genau $\varepsilon = \varepsilon - 1$; setzen wir durchschnittlich $\varepsilon = 1,08$, $K_2 = 2,35 K_1$, so ist $\frac{g}{K_0} + 1,16 \frac{p}{K_1}$ für $\frac{g + \varepsilon p}{K}$ oder $0,50 \frac{g}{K_0} + 0,56 \frac{p}{K_1}$ für $\frac{0,50g + 0,54p}{K}$ zu setzen.

§. 42. Gesamtvolumen des Trägers. Das Gesamtvolumen eines Parallel-Gitterträgers lässt sich nun nach den erhaltenen Regeln darstellen durch den Ausdruck

$$111. \quad V = \left(A_0 \frac{l}{h} + B_0 + C_0 \frac{h}{l} \right) \frac{g l^2}{K_0} + \left(A_1 \frac{l}{h} + B_1 + C_1 \frac{h}{l} \right) \frac{p l^2}{K_1},$$

worin sich die Glieder mit den Koeffizienten A, B, C auf das Volumen der Gurte, des Gitterwerkes und der Endständer (incl. Mehrbedarf im Gitterwerke bei unregelmässigem Anschlusse) beziehen. Bei einem kontinuierlichen Träger ist immer $m l$, d. i. die Gesamtlänge für l zu setzen.

Die Koeffizienten sind etwas variabel, je nachdem es sich um einfache oder kontinuierliche Träger, Netzwerk oder Gitterwerk handelt. Die Werthe von A_1, B_1, C_1 werden etwas verschieden, jenachdem man $K_0 = K_1$ (und $K_2 = 0$) setzt oder für K_0 und K_1 in Uebereinstimmung mit der Formel 7 (Seite 9) verschiedene Werthe annimmt. Im letzteren Falle wollen wir A_1', B_1', C_1' für A_1, B_1, C_1 setzen. Im Folgenden stellen wir diese Koeffizienten nochmals zusammen:

I. Gurte: Einfache Träger: $A_0 = A_1 = \frac{1}{6} = 0,167$;

kontinuierliche Träger: $A_0 = 0,08$ bis $0,10$, $A_1 = 0,14$ bis $0,15$,

$A_1' = 0,16$ bis $0,17$, im Mittel $A_0 = 0,09$, $A_1 = 0,14$, $A_1' = 0,16$;

kontinuierliche Gelenkträger: im Mittel $A_0 = 0,09$, $A_1 = 0,15$,

$A_1' = 0,175$.

II. a. Gitterwerk: Netzwerk: einfache Träger $B_0 = 0,50$, $B_1 = 0,58$,

$B_1' = 0,62$;

kontinuierliche Träger: $B_0 = 0,51$ bis $0,53$, $B_1 = 0,66$ bis $0,70$,

$B_1' = 0,70$ bis $0,75$, im Mittel $B_0 = 0,52$, $B_1 = 0,70$, $B_1' = 0,74$;

kontinuierliche Gelenkträger: im Mittel $B_0 = 0,52$, $B_1 = 0,65$,

$B_1' = 0,70$;

b. Fachwerk: einfache Träger: $B_0 = 0,75$, $B_1 = 0,87$, $B_1' = 0,93$;

kontinuierliche Träger: $B_0 = 0,77$ bis $0,80$, $B_1 = 1,00$ bis $1,05$,

$B_1' = 1,05$ bis $1,13$, im Mittel $B_0 = 0,78$, $B_1 = 1,05$,

$B_1' = 1,11$;

kontinuierliche Gelenkträger: im Mittel $B_0 = 0,78$, $B_1 = 0,98$,

$B_1' = 1,05$.

III. Ständer, einschl. Mehrbedarf an Gitterwerk:

Netzwerk mit regelmässigem Anschlusse; einfache Träger: $C_0 = C_1 =$

$C_1' = 0,50$, kontinuierliche Träger, einschliesslich Gelenkträger:

$C_0 = 0,50$, $C_1 = 0,54$, $C_1' = 0,56$;

Netzwerk mit unregelmässigem Anschlusse; einfache Träger: $C_0 =$

$C_1 = C_1' = 0,50$ bis $0,63$, kontinuierliche Träger, einschliesslich

Gelenkträger: $C_0 = 0,50$ bis $0,63$, $C_1 = 0,54$ bis $0,69$, $C_1' = 0,56$

bis $0,72$;

Fachwerk mit unregelmässigem Anschlusse; einfache Träger: $C_0 =$

$C_1 = C_1' = 1,00$ bis $1,13$, kontinuierliche Träger, einschliesslich

Gelenkträger: $C_0 = 1,00$ bis $1,13$, $C_1 = 1,10$ bis $1,25$, $C_1' = 1,14$

bis $1,30$.

Durchschnittlich wird

Netzwerk

Fachwerk

$$\text{Einfacher Träger: } V = 0,17 \left(\frac{l}{h} + 3,4 + 3,0 \frac{h}{l} \right) \frac{q l^2}{K}, \quad V = 0,17 \left(\frac{l}{h} + 5,0 + 6,0 \frac{h}{l} \right) \frac{q l^2}{K},$$

$$\text{Kontinuirl. Träger: } V = 0,13 \left(\frac{l}{h} + 5,0 + 4,2 \frac{h}{l} \right) \frac{q l^2}{K}, \quad V = 0,13 \left(\frac{l}{h} + 7,6 + 8,6 \frac{h}{l} \right) \frac{q l^2}{K}.$$

Bei den unteren Formeln sind kontinuierliche Gelenkträger inbegriffen. Bei Anwendung zweier Koeffizienten ist $\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1}$ für $\frac{g}{K}$ zu setzen. Man erkennt aus diesen Formeln das Verhältniss der Materialmenge der drei Theile des Trägers: Gurte, Gitterwerk und Lagerstände. Für $l = 8h$ bis $9h$ wird dieses Verhältniss

	Netzwerk:	Fachwerk:
Einfacher Träger:	$70 : 27 : 3,$	$59 : 35 : 6,$
Kontinuierlicher Träger:	$60 : 36 : 4,$	$50 : 46 : 4.$

Das Verhältniss der Volumina des kontinuierlichen und einfachen Trägers ergibt sich bei gleicher Höhe wenig variabel, wenn sich $\frac{l}{h}$ zwischen etwa 7,5 und 10 ändert. Wir können dieses Verhältniss ν setzen:

$$\text{Netzwerk: } \nu = \frac{1,39 \frac{g}{K_0} + 2,24 \frac{p}{K_1}}{2,06 \frac{g}{K_0} + 2,18 \frac{p}{K_1}},$$

$$\text{Fachwerk: } \nu = \frac{1,70 \frac{g}{K_0} + 2,68 \frac{p}{K_1}}{2,36 \frac{g}{K_0} + 1,54 \frac{p}{K_1}}.$$

Für eiserne Eisenbahnbrücken ist etwa $K_1 = \frac{7}{3}K_0$ zu setzen. Hier wird demnach:

$$\text{Netzwerk: } \nu = 0,67 \frac{g + 3,8p}{g + 2,5p},$$

$$\text{Fachwerk: } \nu = 0,72 \frac{g + 3,7p}{g + 2,5p}.$$

Hiernach ergibt sich z. B. für

	$g = 0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8, q$
Netzwerk:	$\nu = 1,01$	$1,00$	$0,98$	$0,96$	$0,93$	$0,89$	$0,86$	$0,81,$
Fachwerk:	$\nu = 1,04$	$1,03$	$1,01$	$0,99$	$0,96$	$0,92$	$0,89$	$0,85.$

Nimmt man nach der älteren Methode der Querschnittsbestimmung $K_0 = K_1$ und $K_2 = 0$ an, so ergibt sich das Verhältniss für die kontinuierlichen Träger wesentlich günstiger und zwar ergibt sich hier ν um 0,10 bis 0,12, durchschnittlich um 0,11 kleiner. Während also z. B. für kleine, mittlere und grosse Spannweiten die kontinuierlichen Träger (einschliesslich kontinuierliche Gelenkträger) nach der älteren Methode der Querschnittsbestimmung ein Materialersparniss von ungefähr 8, 16, 27 Prozent aufweisen, zeigen sie nach der neueren rationelleren Methode eine Ersparniss von bezüglich — 3, + 4, + 17 Prozent, bei kleinen Spannweiten also sogar einen Mehrbedarf.

Um weitere Schlüsse, z. B. hinsichtlich des Eigengewichtes, der günstigsten Höhe etc. ziehen zu können, wird es nöthig, die theoretischen Regeln durch Multiplikation mit den schon oben (S. 79) erwähnten Konstruktionskoeffizienten zu korrigiren, worauf wir indess erst im konstruktiven Theile eingehen können.

B. Gitterträger mit polygonalen Gurten.

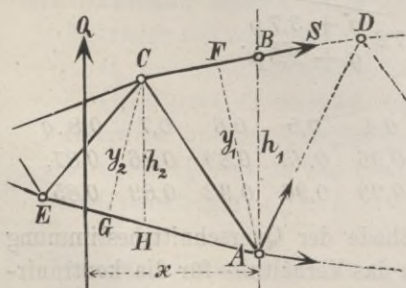
VI. Kapitel.

Allgemeine Theorie der Träger mit einfachem, eintheiligem Gitterwerke.

§. 43. Analytische Bestimmung der Spannung in den Gurten.

Um die Spannung S eines Theiles CD (Fig. 61) des Obergurtes zu finden, legen wir durch diesen Theil und den gegenüberliegenden Knotenpunkt einen sonst beliebigen Schnitt AB . Ist M_1 das Moment der auf den linken Theil des Trägers wirkenden Kräfte in Beziehung auf den Punkt A und zwar unter der Annahme, dass die äusseren Kräfte in den Knotenpunkten wirken, y_1 der normale Abstand AF des Punktes A von CD , so fordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingung $S_1 y_1 + M_1 = 0$, mithin ist

Fig. 61.



$$1. \quad S_1 = - \frac{M_1}{y_1}.$$

Ebenso ergibt sich als Spannung S_2 eines Stückes AE des Untergurtes, wenn M_2 das Moment für einen durch C und AE gelegten Schnitt in Beziehung auf den Punkt C und y_2 den normalen Abstand CG bedeutet,

$$1a. \quad S_2 = + \frac{M_2}{y_2}.$$

Bezeichnet man die vertikale Höhe, bezüglich in den Punkten A und C gemessen, mit h , den Neigungswinkel der betreffenden Stücke des Ober- und Untergurtes mit σ und τ , so ist $y_1 = h \cos \sigma$, $y_2 = h \cos \tau$, mithin auch

$$2. \quad S_1 = - \frac{M_1}{h} \sec \sigma, \quad S_2 = + \frac{M_2}{h} \sec \tau.$$

Für die Anwendung kann es bequemer erscheinen, sich die Last gleichmässig über die Gurte vertheilt zu denken und den Schnitt durch

die Punkte A und C vertikal zu führen. Bezeichnet man alsdann das bezügliche Moment mit M , so ist nach Gleichung 5 (S. 8) und 2 u. 2a (S. 13) und entsprechend den Gleichungen 25 (S. 35):

$$3. \quad M_1 = M - \frac{1}{2} q_1 e'_1 e''_1, \quad M_2 = M - \frac{1}{2} q_2 e'_2 e''_2,$$

wenn e'_1, e''_1 und e'_2, e''_2 den Abstand des bezüglichen Vertikalschnittes von den benachbarten Knotenpunkten des Ober- und Untergurtes, q_1 und q_2 die auf den Ober- und Untergurt pro Längeneinheit wirkende Last bedeutet.

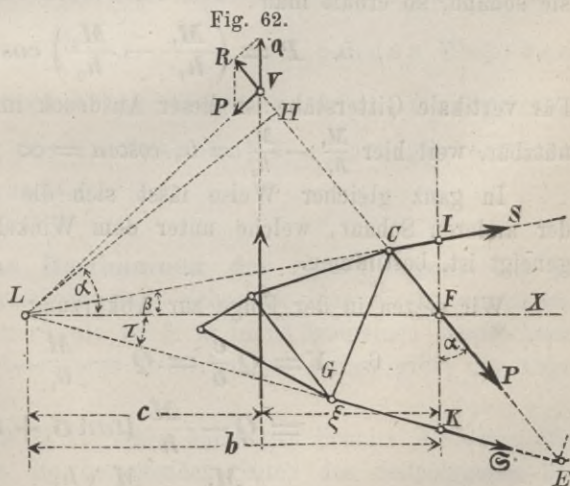
§. 44. Analytische Bestimmung der Spannung der Gitterstäbe. Zur Bestimmung der Spannung P des unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigten Stabes CE (Fig. 62) legen wir durch diesen Stab einen beliebigen Schnitt IK . Die Verlängerungen der beiden geschnittenen Gurtstücke mögen sich in L schneiden. Ist Q die Resultante der auf der linken Seite des Schnittes wirkenden Vertikalkräfte oder die Transversalkraft, c der Abstand ihrer Richtung von L , sowie z der normale Abstand LH des fraglichen Gitterstabes von L , so fordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingung $Pz - Qc = 0$, mithin ist

$$4. \quad P = + Q \frac{c}{z}.$$

Für die wirkliche Anwendung zur numerischen Berechnung ist diese Formel etwas unbequem, da sie die Bestimmung der Längen c und z voraussetzt. Indess lässt sich leicht eine entsprechende Umformung vornehmen. Wir legen zu diesem Zwecke durch L eine Horizontale LX , welche den fraglichen Stab in F schneide. Bezeichnen wir die Länge LF mit b , so ist $z = b \cos \alpha$, mithin

$$P = + Q \frac{c}{b} \sec \alpha.$$

Bezeichnet man ferner noch den Abstand der Richtung der Transversalkraft vom Punkte F mit ξ , das Moment aller links vom Schnitte wirkenden äusseren Kräfte in Beziehung auf den



Punkt F mit M , so ist $M = Q \xi$, also $\xi = \frac{M}{Q}$, $c = b - \xi = b - \frac{M}{Q}$

Dies eingesetzt, gibt:

$$P = \left(Q - \frac{M}{b} \right) \sec \alpha.$$

Bezeichnen wir noch den Abstand IK der Gurte in der durch den Punkt F gelegten Vertikalen mit h , die Neigungswinkel der Gurte gegen die Horizontale mit σ und τ , so ist $h = b (\tan \sigma + \tan \tau)$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{h} (\tan \sigma + \tan \tau)$, folglich

$$P = \left[Q - \frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau) \right] \sec \alpha.$$

Legen wir im Abstände e von F noch einen zweiten Vertikalschnitt durch den Stab und bezeichnen für diesen Schnitt das Moment mit M_1 , die vertikale Trägerhöhe mit h_1 , so ist $M = Q\xi$ und, weil zwischen beiden Schnitten keine äussere Kraft wirkt, $M_1 = Q(\xi + e) = M + Qe$ oder $Q = \frac{M_1 - M}{e}$. Ferner wird $\tan \sigma + \tan \tau = \frac{h_1 - h}{h}$. Dies in die vorige Formel eingesetzt, gibt $P = \left[\frac{M_1 - M}{e} - \frac{M}{h} \frac{h_1 - h}{e} \right] \sec \alpha$ oder

$$P = \left(\frac{M_1}{h_1} - \frac{M}{h} \right) \frac{h_1}{e} \sec \alpha.$$

Bezeichnet man die Momente für die durch E und C (Fig. 62) gelegten Vertikalschnitte in Beziehung auf E und C mit M_1 , M_2 , die vertikalen Höhen in E und C mit h_1 , h_2 , so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen $Sh_1 \cos \sigma + Ph_1 \sin \alpha + M_2 = 0$, $Sh_2 \cos \sigma = M_1$; dividirt man diese Gleichungen durch bezüglich h_1 und h_2 und subtrahirt sie sodann, so erhält man

$$5. \quad P = \left(\frac{M_1}{h_1} - \frac{M_2}{h_2} \right) \operatorname{cosec} \alpha.$$

Für vertikale Gitterstäbe ist dieser Ausdruck im Allgemeinen nicht benützlich, weil hier $\frac{M_1}{h_1} - \frac{M_2}{h_2} = 0$, $\operatorname{cosec} \alpha = \infty$ wird.

In ganz gleicher Weise lässt sich die Spannung eines Stabes der anderen Schaar, welche unter dem Winkel β gegen die Vertikale geneigt ist, bestimmen.

Wir setzen in der Folge zur Abkürzung

$$\begin{aligned} 6. \quad Y &= Q \frac{e}{b} = Q - \frac{M}{b} \\ &= Q - \frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau) \\ &= \left(\frac{M_1}{h_1} - \frac{M}{h} \right) \frac{h_1}{e} \\ &= \left(\frac{M_1}{h_1} - \frac{M_2}{h_2} \right) \cot \alpha, \end{aligned}$$

wobei sich sowohl die Höhe h , als das Moment M auf den Durchschnittspunkt F der durch L gelegten Horizontalen LX mit dem fraglichen Stabe bezieht. Bezeichnen wir wieder die Spannung der nach rechts und links fallenden Stäbe mit P_1 und P_2 , die entsprechenden Werthe von Y mit Y_1 und Y_2 , so wird

$$7. \quad P_1 = + Y_1 \sec \alpha, \quad P_2 = - Y_2 \sec \beta,$$

so dass also hier Y dieselbe Rolle spielt, wie die Transversalkraft Q bei dem Parallelträger. In der That geht Y in Q über, wenn man horizontale Gurte annimmt oder $\sigma = \tau = 0$ setzt.

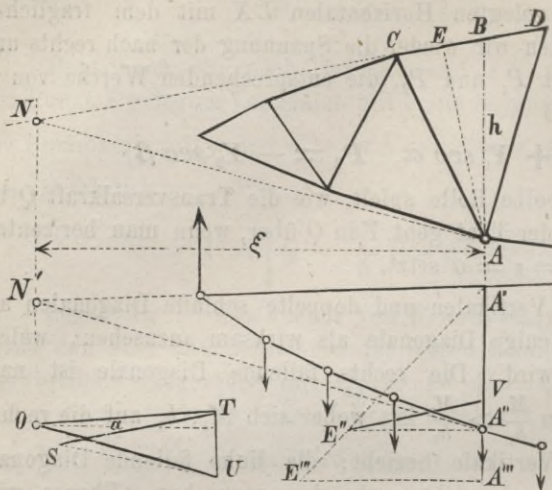
Wenn man steife Vertikalen und doppelte schlaife Diagonalen anwendet, so ist nur diejenige Diagonale als wirksam anzusehen, welche auf Zug beansprucht wird. Die rechts fallende Diagonale ist nach Formel 5 gezogen, wenn $\frac{M_1}{h_1} > \frac{M_2}{h_2}$ ist, wobei sich M_1, h_1 auf die rechte, M_2, h_2 auf die linke Vertikale bezieht; die links fallende Diagonale wäre hier gedrückt, also als nicht vorhanden anzusehen. Ebenso wird die links fallende Diagonale gezogen, wenn $\frac{M_2}{h_2} > \frac{M_1}{h_1}$. Es ist also stets diejenige Diagonale gezogen, welche nach derjenigen Vertikalen hin fällt, für welche $\frac{M}{h}$ den grösseren Werth hat.

Ist $\frac{M_1}{h_1} > \frac{M_2}{h_2}$, so ist demnach die rechts fallende Diagonale gezogen, also für das obere und untere Gurtstück $S_1 = -\frac{M_1}{h_1} \sec \sigma$, $S_2 = +\frac{M_2}{h_2} \sec \tau$; ist dagegen $\frac{M_2}{h_2} > \frac{M_1}{h_1}$, so ist die links fallende Diagonale gezogen, also $S_1 = -\frac{M_2}{h_2} \sec \sigma$, $S_2 = -\frac{M_1}{h_1} \sec \tau$. Von den beiden Werthen $\frac{M_1}{h_1}$ und $\frac{M_2}{h_2}$ kommt demnach für die Spannung des Obergurtes stets der grössere, für die Spannung des Untergurtes stets der kleinere in Betracht.

§. 45. Grafische Bestimmung der Spannungen. Die in §. 2 gezeigte Polygonalmethode lässt sich auch hier direkt anwenden. Wir haben daher nur noch die in §. 3 im Allgemeinen besprochene Schnittmethode, die zu besonderen Bemerkungen Anlass gibt, ins Auge zu fassen.

Die Transversalkraft Q für einen beliebigen Schnitt AB (Fig. 63) erhält man, wenn man die betreffenden Seiten des Seilpolygones bis zum Durchschnitte N' verlängert und im Kraftpolygone zu diesen Seiten parallele Strahlen OT und OU zieht; alsdann ist $Q = TU$,

Fig. 63.



während N' ein Punkt der Richtung der Transversalkraft ist.

1. Spannungen der Gurte. *a.* Nach dem in §. 3 Gesagten findet man die Spannung S eines Gurtstückes CD , wenn man den Durchschnittspunkt N der Verlängerung desselben mit dem gegenüberliegenden Knotenpunkte A verbindet und durch T und U Parallelen zu ND und NA zieht,

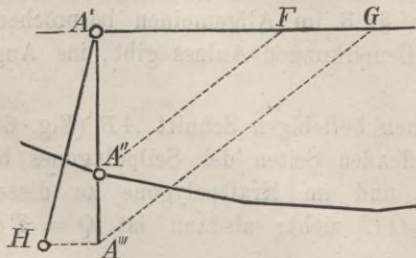
welche sich in S schneiden; alsdann ist $S = TS$.

Diese Konstruktion setzt allerdings voraus, dass der Punkt N noch auf das Papier fällt. Da man zur Erzielung dessen oft genöthigt ist, die Zeichnung in kleinem Massstabe zu machen, so kann folgende Methode vortheilhafter sein.

b. Ist H die Horizontalkomponente von S , h die vertikale Höhe AB , ξ der Horizontalabstand des Punktes N von AB , so ist $Hh = Q\xi$. Bei der Poldistanz a ist, wenn wir die dem Punkte A entsprechende vertikale Höhe des Seilpolygons $= y$ setzen, $Q : a = y : \xi$, also $Q\xi = ay$, folglich $Hh = ay$ oder $H : a = y : h$, was auch sofort daraus folgt, dass das Moment $Q\xi$ bekanntlich $= ay$ ist. Hieraus lässt sich H leicht durch eine einfache Konstruktion bestimmen, indem man $A'A''' = h$, $A'''E''' = a$ macht. Legt man durch E'' eine Parallele zum fraglichen Gurtstücke, welche $A'A''$ in V schneidet, so ist $E''V = S$.

c. Statt dessen kann man auch in Fig. 64 auf der Horizontalen $A'F =$ der Höhe h und $A'G =$ der Poldistanz H machen und die Parallelen FA'' und GA'' ziehen.

Fig. 64.

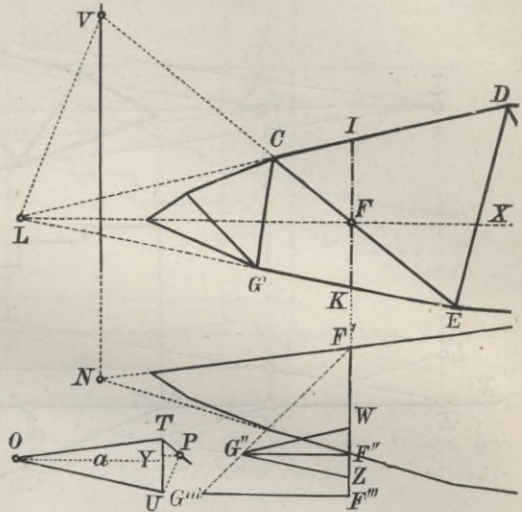


Als dann ist $A'A''' : A'A'' = H : h$, also $A'A''' = A'A'' \frac{H}{h} = \frac{Hy}{h} = \frac{M}{h}$.

Zieht man noch durch A' eine Gerade, welche auf dem betreffenden Gurtstücke senkrecht steht und schneidet dieselbe in H durch eine durch A''' gezogene Horizontale, so ist $A'H = S$.

2. **Spannung der Gitterstäbe.** *a.* Bestimmt man den Durchschnittspunkt V (Fig. 65) der Verlängerung des fraglichen Stabes CE mit der Richtung der Transversalkraft Q , und zieht durch T und U Parallelen zu CE und LV , welche sich in P schneiden, so stellt TP die fragliche Spannung P dar. Indess auch diese Konstruktion leidet an dem Mangel, dass der Massstab oft klein gewählt werden muss, damit alle nöthigen Punkte auf das Papier fallen. Indess ergibt sich leicht in folgender Weise eine meist besser entsprechende Konstruktion.

Fig. 65.

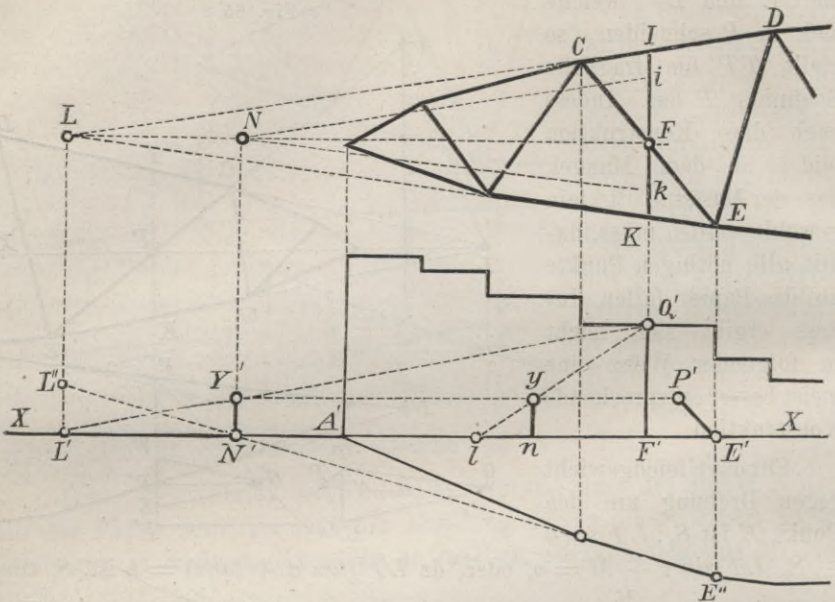


b. Für das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt F' ist $S_1 \cdot LF \sin \sigma - S_2 \cdot LF \sin \tau + M = 0$, oder, da $LF (\tan \sigma + \tan \tau) = h$ ist, $S_1 \sin \sigma - S_2 \sin \tau = -\frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau)$. Für das Gleichgewicht gegen Verschiebung in vertikaler Richtung ist $P \cos \alpha = Q + S_1 \sin \sigma - S_2 \sin \tau = Q - \frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau)$, wie in §. 44. Nun aber ist, wenn $F'F'' = y$ die dem Punkte F entsprechende Höhe des Seilpolygons ist, $M = a y$, wonach sich das Glied $\frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau)$ leicht konstruiren lässt, indem man $F'F''' = h$, $F'''G''' = a$, $G''W$ und $G''Z$ parallel zum Ober- und Untergurte macht. Alsdann ist $WZ = \frac{M}{h} (\tan \sigma + \tan \tau)$. Macht man daher $UY = WZ$ und legt durch Y eine Horizontale, welche eine durch T parallel zum fraglichen Gitterstabe gezogene Gerade in P schneidet, so stellt TP die Spannung desselben dar.

c. Aus der Formel $Y = Q \frac{c}{b}$ geht die folgende Konstruktion hervor. Man mache die zur Axe XX (Fig. 66) senkrechte, dem Punkte F entsprechende Ordinate $F'Q'$ gleich der Transversalkraft Q , bestimme die Punkte L' und N' , in welchen XX durch die Vertikalen, welche durch die Schnittpunkte L und N gehen, geschnitten wird. Zieht man jetzt die Gerade $L'Q'$, welche die durch N' gehende Vertikale in Y' schneidet, so ist $N'Y' = F'Q' \frac{L'N'}{L'F'} = Q \frac{c}{b} = Y$. Schneidet man eine

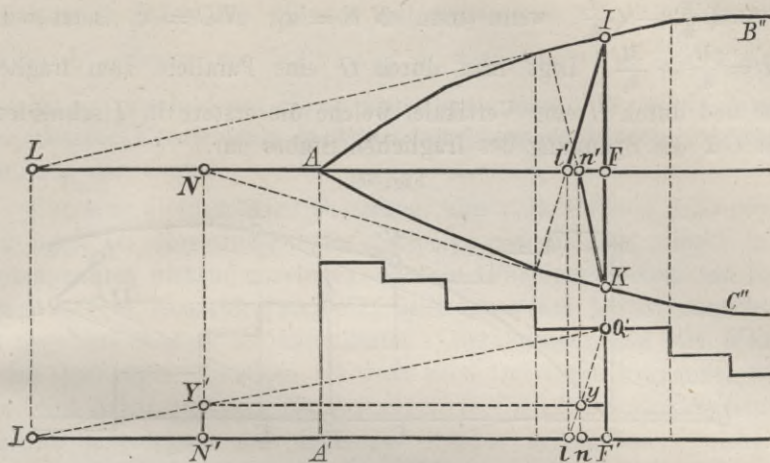
Parallele zum fraglichen Gitterstabe durch Horizontalen, welche durch N' und Y gehen, in den Punkten E und P' , so ist $E'P' = Y \sec \alpha = P$.

Fig. 66.



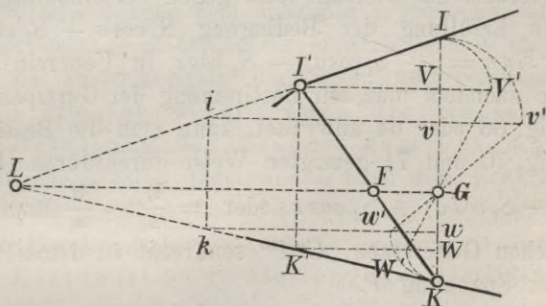
Sollten die Punkte L und N nicht auf das Papier fallen, so kann man auf XX' zwei Punkte l, n derart bestimmen, dass sich $F'l : F'n = F'L' : L'N'$ verhält; zieht man alsdann die Gerade lQ , welche die durch n gehende Vertikale in y schneidet, so ist ny ebenfalls $= Y$. Die Punkte l und n lassen sich in verschiedener Weise bestimmen. Legt man durch den Durchschnittspunkt N der durch L gehenden Horizontalen und der durch N gehenden Vertikalen Parallelen zu den Gurstücken CD und AE , welche die vertikale Höhe KI in k und i schneiden, so verhält sich $KI : ki = FL : FN = F'L' : F'N'$; man kann also $F'l = KI$, $F'n = ki$ machen. Diese Konstruktion ist allerdings nur möglich, wenn der Punkt N auf das Papier fällt. Ist in Fig. 67 AIB'' eine Linie, deren Ordinaten den Trägerhöhen proportional sind und AKC'' das Seilpolygon, so fälle man von K eine Senkrechte auf das betreffende Stück der Linie AB'' und von I eine Senkrechte auf das betreffende Stück des Seilpolygons AC'' ; schneiden diese Senkrechten die durch L gehende Horizontale in l' und n' , so verhält sich $F'l' : F'n' = FK : FN$, $F'n' : FK = FI : FL$; hieraus folgt sofort $F'l' : F'n' = FL : FN = F'L' : F'N'$. Man kann also $F'l = F'l'$, $F'n = F'n'$ machen. Die absolute Länge von $F'l$ und $F'n$ hat man dadurch in der Hand, dass man die Höhen der Kurven AB'' und AC'' beliebig gross wählen kann.

Fig. 67.



Wenn der Punkt L nicht auf das Papier fällt, so lässt sich allerdings der Punkt F nicht direkt, wohl aber in folgender Weise bestimmen. Es seien IK und $I'K'$ (Fig. 68) zwei beliebige Vertikal-

Fig. 68.



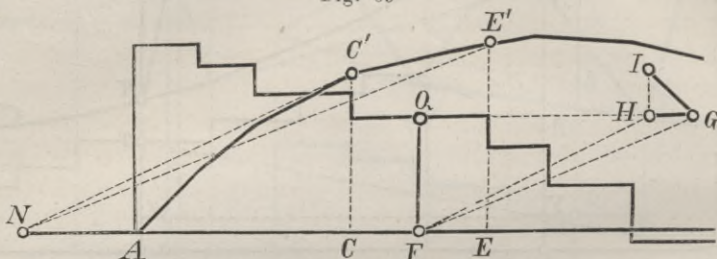
schnitte durch die fraglichen Gurtstücke. Wird IK von der durch L gelegten Horizontalen in G geschnitten und legt man durch I' und K' die Horizontalen $I'V$, $K'W$, so verhält sich $IG : KG = IV : KW$, woraus sofort die folgende Konstruktion

folgt. Man mache VV' parallel WW' und $VV' = VI$, $WW' = WK$; legt man durch V' und W' eine Gerade, so schneidet dieselbe die Höhe IK im Punkte G . Statt der Punkte V' und K' kann man auch zwei beliebige andere Punkte, welche auf den durch I und K gelegten Parallelen liegen, wählen. Auch lässt sich nachweisen, dass LG durch den Durchschnittspunkt der von I und K auf die gegenüberliegenden Gurte gefällten Senkrechten geht; jedoch wird der Schnitt meist zu spitz. Ist der eine Gurt gerade, so liegt der Punkt F stets in diesem Gurte.

d. Aus der Formel 5 ergibt sich ebenfalls eine einfache Konstruktion. In Fig. 69 sei $EE' = h_1$, $CC' = h_2$ und FQ' gleich der Transversalkraft Q , welche dem durch den fraglichen Stab gelegten Schnitte entspricht. Zieht man durch F Parallelen zu NE' und NC' , welche

die durch Q gelegte Horizontale in G und H schneiden, so ist $GH = Q \frac{x_1}{h_1} - Q \frac{x_2}{h_2}$, wenn man $NE = x_1$, $NC = x_2$ setzt, d. i. $GH = \frac{M_1}{h_1} - \frac{M_2}{h_2}$. Legt man durch G eine Parallele zum fraglichen Stabe und durch H eine Vertikale, welche die erstere in I schneidet, so stellt GI die Spannung des fraglichen Stabes dar.

Fig. 69



e. Hat man die Spannungen der Gurte bereits bestimmt, so ist es leicht, aus diesen diejenigen der Gitterstäbe abzuleiten. Sind S_1, S_2 die Spannungen derjenigen Stücke des Ober- und Untergurtes, welche von einem durch den fraglichen Gitterstab gelegten Schnitt getroffen werden, so erfordert das Gleichgewicht gegen Verschiebung in horizontaler Richtung die Erfüllung der Bedingung $S_1 \cos \sigma + S_2 \cos \tau + P \sin \alpha = 0$, also $P \sin \alpha = (-S_1 \cos \sigma) - S_2 \cos \tau$ in Uebereinstimmung mit Formel 5. Je nachdem man zur Bestimmung der Gurtspannungen die Konstruktion Fig. 63 oder 64 anwendet, kann man die Bestimmung von P in der in Fig. 70 und 71 gezeigten Weise durchführen. Hierin ist $EV = C''H = (-S_1 \cos \sigma) - S_2 \cos \tau$ oder $= \frac{M_1}{h_1} - \frac{M_2}{h_2}$ und EP parallel zum fraglichen Gitterstabe, $C''P''$ senkrecht zu demselben und $EP = C''P'' =$ der Spannung P .

Fig. 70.

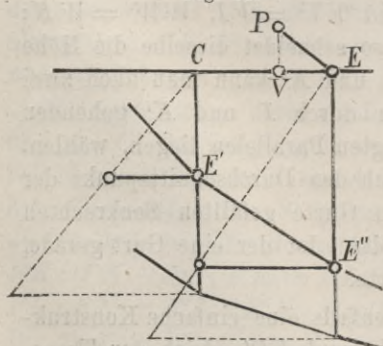
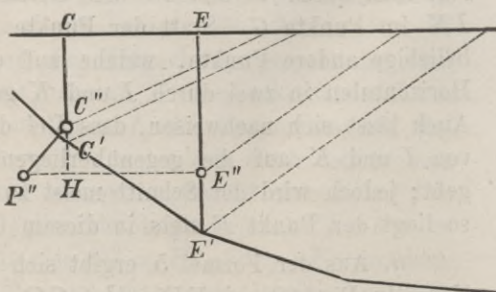


Fig. 71.



f. Aus der bekannten Eigenschaft des Seilpolygones bezüglich des Momentes der Kräfte folgt, dass das Moment Qc in Beziehung auf den

Punkt L gleich ist dem Produkte aus der Poldistanz H und dem Vertikalabstände $L'L''$ (Fig. 66) der Seilpolygonseiten $A'X$ und $N'E''$ im Punkte L' . Setzen wir $L'L'' = y$, so wird also $P = \frac{Hy}{z}$, $Y = \frac{Hy}{b}$, was sich in verschiedener Weise konstruiren lässt. Es würde hiernach ganz dieselbe Konstruktion in Anwendung kommen können, wie für die Spannung der Gurte.

Für eine gleichmässige Belastung, also z. B. für das Eigengewicht, wird man bei Konstruktion des Seilpolygones die Last direkt in den Knotenpunkten wirkend annehmen. Für ein beliebiges System von Einzellasten dagegen konstruirt man das Seilpolygon am besten zunächst für das gegebene System der Einzellasten. Bekanntlich sind die Momente an den Querträgern dieselben, als wenn keine Querträger vorhanden wären; man wird daher von dem für das gegebene System der Einzellasten konstruirten Seilpolygone nur diejenigen Punkte beibehalten, welche den Knotenpunkten, in denen die Querträger angebracht sind, entsprechen und diese Punkte geradlinig verbinden.

§. 46. Gefährlichste Belastungsweise für einen einfachen Träger.

a. **Gurte.** Da die Gurtspannungen dem Momente proportional sind, das Moment aber für gleichmässige Belastung für einen beliebigen Querschnitt nach der Theorie der äusseren Kräfte der Balkenträger bei totaler Belastung zum Maximum wird, so werden auch die Gurtspannungen bei totaler Belastung des Trägers zum Maximum.

Für ein System von Einzellasten ergeben sich nach dem Früheren (Theorie der Brücken, I. Heft, II. Aufl., §. 14 und 15, vorliegendes Heft, §. 7, Seite 15) die Regeln:

Das System von Lasten ist so zu stellen, dass die Lasten pro Längeneinheit auf jeder Seite des fraglichen Knotenpunktes möglichst gleich werden. Bei Anwendung dieser Regel sind aber zwei Fälle zu unterscheiden:

a. Am fraglichen Knotenpunkte liegt ein Querträger. Hier wird durch das Bestreben, das Lastensystem nach derjenigen Seite zu schieben, auf welcher die Last pro Längeneinheit kleiner ist, immer einer Last an den fraglichen Knotenpunkt zu liegen kommen. Nur wenn zufällig die Last pro Längeneinheit auf beiden Seiten wirklich gross ist, ist die Lage gleichgiltig.

b. Der fragliche Knotenpunkt liegt zwischen zwei Querträgern. Ist der Horizontalabstand des fraglichen Knotenpunktes von den beiden Querträgern gleich e_1 und e_2 , die Summe der zwischen beiden Querträgern liegenden Lasten = G , so ist G nach dem Verhältnisse e_1 zu e_2 in zwei Theile zu zerlegen und der erstere zu den links, der andere zu

den rechts wirkenden Lasten zu rechnen. Durch das Bestreben, das Lastensystem wieder nach derjenigen Seite hin zu schieben, auf welcher die kleinere Last pro Längeneinheit wirkt, wird im Allgemeinen eine Last an einen der beiden Querträger zu liegen kommen.

Es kann vorkommen, dass die aufgestellte Bedingung für verschiedene Lagen des Lastensystemes erfüllt ist. Alsdann ist für jede dieser Lagen der Werth des Momentes zu bestimmen und nur der grösste Werth beizubehalten. Im Allgemeinen wird dieser derjenigen Lage entsprechen, für welche die schwersten Lasten in der Nähe des fraglichen Knotenpunktes liegen.

b. Gitterstäbe. Das Vorzeichen der Kraft Y lässt sich am einfachsten in folgender Weise entscheiden: Y ist gleich und entgegengesetzt der Vertikalkomponente der Spannung P eines unter α geneigten Gitterstabes; Y muss also, als eine im Punkte F (Fig. 62) wirkende Vertikalkraft gedacht, mit der auf den linken Trägertheil wirkenden Transversalkraft in Beziehung auf den Punkt L gleiche Drehungsrichtung oder mit der auf den rechten Theil wirkenden Transversalkraft entgegengesetzte Drehungsrichtung haben.

Liegt nun eine Einzellast rechts vom fraglichen Gitterstabe, so ist die auf den linken Trägertheil wirkende Transversalkraft der linke Stützendruck D ; Y wird also positiv sein, wenn der linke Auflagerpunkt A und der Punkt F auf ein und derselben Seite des Punktes L liegen, d. h. wenn der Punkt L links vom linken Auflagerpunkte A oder rechts von L liegt. Bei allen bisher angewendeten einfachen Trägern schneiden sich die Verlängerungen der Gurte ausserhalb der beiden Auflagerpunkte, der Punkt L wird also stets links von A oder rechts von L liegen, Y wird also stets positiv sein, wenn eine Einzellast rechts von L liegt. Ebenso lässt sich nachweisen, dass Y stets negativ ist, wenn eine Einzellast links von L liegt. Hieraus folgt nun sofort:

Die Kraft Y wird zum positiven oder negativen Maximum, wenn von dem fraglichen Gitterstabe aus bezüglich der ganze rechte oder linke Theil des Trägers belastet ist. Die früher für Parallelträger gefundene Regel hat also eine allgemeinere Gültigkeit.

Um die Lage des Systemes noch bestimmter anzugeben, bezeichne für das positive Maximum von Y R' die Resultante aller Lasten, ξ' ihren Abstand von der rechten Stütze B (Fig. 72), R die Resultante der im fraglichen Fache CD , in welchen der durch den fraglichen Stab CE geführte Schnitt liegt, liegenden Lasten, ξ ihren Abstand von D , c und x den Horizontalabstand der Stütze A von den Punkten L und C . Auf den linken Theil des Trägers wirkt in A' der Stützendruck $R' \frac{\xi'}{l}$, welcher die Vertikalkraft $R' \frac{\xi'}{l} \frac{c}{b}$, und in C nach abwärts die Kraft $R \frac{\xi}{a}$, welche

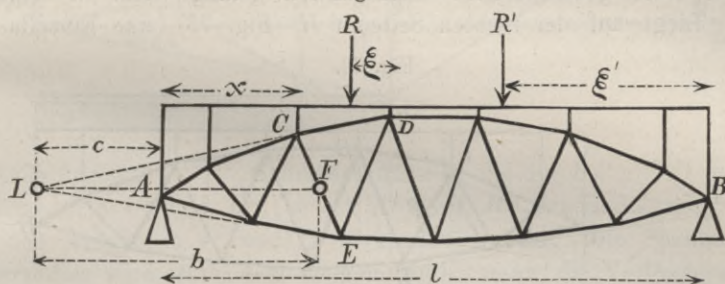
die Vertikalkraft $-R \frac{\xi}{a} \frac{c+x}{b}$ erzeugt. Demnach ist die Vertikalkraft für den Stab CE :

$$8. \quad Y = R' \frac{\xi' c}{lb} - R \frac{\xi(c+x)}{ab}.$$

Verschiebt man das Lastensystem um Δ nach rechts, so wird ξ und ξ' um $\Delta \xi$ kleiner. Ist ΔY die Aenderung der Vertikalkraft, so ist demnach

$$\Delta Y = \left(\frac{R(c+x)}{ac} - \frac{R'}{l} \right) \frac{c \Delta \xi}{b}.$$

Fig. 72.



Nach der fünften der Formeln 6 ergibt sich, wenn man den Horizontalabstand der beiden Enden des fraglichen Gitterstabes von A mit x_1, x_2 , von C mit e_1, e_2 und die Höhen des Trägers, welche diesen Enden des Gitterstabes entsprechen, mit h_1, h_2 bezeichnet,

$$\Delta Y = - \left[\frac{R'}{l} \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} \right) - \frac{R}{a} \left(\frac{e_1}{h_1} - \frac{e_2}{h_2} \right) \right] \Delta \xi \cot \alpha.$$

In der bekannten Weise kann man daher schliessen: Man muss das Lastensystem so verschieben, dass möglichst die Bedingung erfüllt wird:

$$9. \quad \begin{cases} \frac{R(c+x)}{ac} = \frac{R'}{l} \text{ oder} \\ \frac{R}{a} \left(\frac{e_1}{h_1} - \frac{e_2}{h_2} \right) = \frac{R'}{l} \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} \right). \end{cases}$$

Für den Parallelträger geht $\frac{c+x}{c}$ in 1 über; da im Allgemeinen $\frac{c+x}{c} > 1$ ist, so wird hier das Lastensystem im Allgemeinen etwas mehr nach rechts gerückt erscheinen, als für den Parallelträger.

Bezeichnet man für gleichmässige Belastung den Horizontalabstand des Kopfes O des Zuges von D mit ξ_1 , so ist nach der eben aufgestellten Bedingung

$$\frac{p \xi_1}{a} k = \frac{p(l-x-a+\xi_1)}{l}$$

zu setzen, wenn man zur Abkürzung

$$10. \quad k = \frac{c+x}{c} = \frac{\frac{e_1}{h_1} - \frac{e_2}{h_2}}{\frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2}} = \frac{e_1 h_2 - e_2 h_1}{x_1 h_2 - x_2 h_1}$$

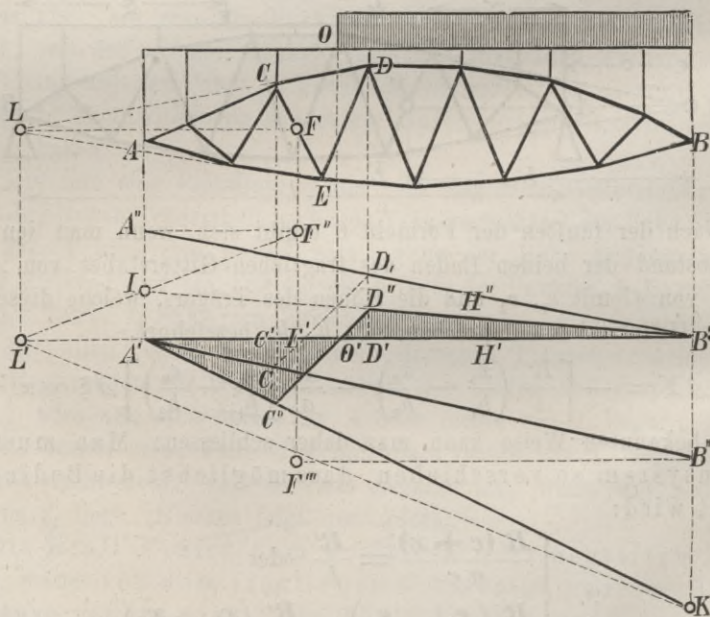
einführt. Hieraus ergibt sich

$$11. \quad \xi_1 = \frac{l-a-x}{kl-a} a.$$

Der Punkt O ist identisch mit dem Angriffspunkte einer Einzellast, welchem der Werth $Y = 0$ entspricht.

Zu einer geometrischen Konstruktion gelangt man in folgender Weise. Liegt auf der rechten Seite in H (Fig. 73) eine Einzellast G ,

Fig. 73.

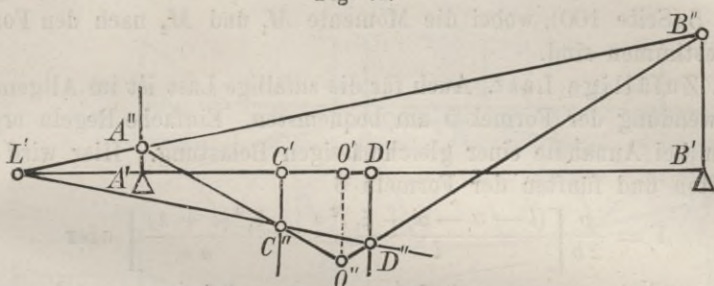


so ist $Q = G \frac{c'}{l}$, wenn man $BH = \xi'$ setzt, also $Y = G \frac{c'}{l} \frac{c}{b}$. Macht man nun $A'A'' = F'F'' = G$, legt durch L' und F'' eine Gerade, welche die linke Pfeilervertikale in I schneidet und zieht die Gerade $B'I$, so ist die der Geraden $B'I$ entsprechende Ordinate $H'H'' = Y$; die Linie $B'D''$ ist also die Influenzlinie (vergl. §. 17) für eine rechts liegende Last hinsichtlich der Vertikalkraft Y . In gleicher Weise findet man die Influenzlinie $A'C''$ für eine links liegende Last, indem man $B'B'' = F'F''' = G$ macht, durch L' und F''' eine Gerade legt, welche die rechte Pfeilervertikale in K schneidet und die Gerade AK zieht. Die Gerade $C''D''$ ist alsdann die Influenzlinie für eine zwischen C und D liegende Last. Schneidet diese Gerade die Axe $A'B'$ in O' , so ist Y

positiv oder negativ, je nachdem die Einzellast rechts oder links von O liegt.

Handelt es sich nicht um die Influenzlinie für eine Einzellast selbst, wie sie für die Folge nöthig wird, so ergibt sich eine einfachere Konstruktion in folgender Weise. Eine in O' (Fig. 74) liegende Einzellast gebe

Fig. 74.



das Seilpolygon $A''O''B''$. Schneidet dasselbe die durch C und D gehenden Vertikalen in C'' und D'' , so ist $A''C''D''B''$ das Seilpolygon für die auf den Träger in C und D wirkenden Drücke. Die Spannung des Gitterstabes wird nach dem Obigen Null, wenn die Verlängerung von $C''D''$ durch L' geht. Hieraus ergibt sich die folgende zuerst von Kullmann angegebene Konstruktion: Man ziehe durch L' zwei Gerade, von denen die eine die Auflagervertikalen in A'' und B'' , die andere die durch C und D gehenden Vertikalen in C'' und D'' schneidet. Legt man durch A'' und C'' , sowie durch B'' und D'' zwei Gerade, welche sich in O'' schneiden, so wird für eine Last, welche in der durch O'' gehenden Vertikale wirkt, die Spannung des Stabes Null. Für die Punkte A'' und B'' kann man auch die Punkte A' und B' wählen.

Mit Einführung des Punktes O lässt sich die obige Bedingung für die gefährlichste Belastungsweise auch in folgender Weise ausdrücken. Es muss möglichst

$$12. \quad \frac{R}{\xi} = \frac{R'}{l - a - x + \xi} \quad \text{oder} \quad \frac{R}{O'D'} = \frac{R'}{B'D'}$$

d. h. es müssen die auf $O'D'$ und $B'D'$ wirkenden Lasten pro Längeneinheit möglichst gleich sein.

§. 47. Bestimmung der grössten Spannungen durch Rechnung.

1. Spannung der Gurte. Einfache Regeln ergeben sich nur unter Annahme einer gleichmässigen Belastung; hierbei ist eine totale Belastung vorauszusetzen. Bezeichnen wir den Abstand des dem fraglichen Gurtstücke gegenüberliegenden Knotenpunktes von der linken Stütze mit x , so ist das für Ober- und Untergurt in Frage kommende Moment nach Gleichung 3 (S. 99):

$$13. \quad M_1 = \frac{1}{2} q x (l - x) - \frac{1}{2} q_1 e'_1 e''_1, \quad M_2 = \frac{1}{2} q x (l - x) - \frac{1}{2} q_2 e'_2 e''_2,$$

wobei e'_1 , e''_1 und e'_2 , e''_2 die in §. 43 bezeichnete Bedeutung haben. Die Gurtspannungen selbst sind nun durch die Gleichungen 2 (S. 98) bestimmt. Beim Fachwerke, d. i. beim Gitterwerke mit Vertikalen und geneigten Stäben verschwinden die Korrektionsglieder mit q_1 und q_2 .

2. Spannung der Gitterstäbe. a. Einfluss des Eigengewichtes. Die einfachste Regel besteht im Allgemeinen in der Anwendung der Formel 5 (Seite 100), wobei die Momente M_1 und M_2 nach den Formeln 3 zu bestimmen sind.

b. Zufällige Last. Auch für die zufällige Last ist im Allgemeinen die Anwendung der Formel 5 am bequemsten. Einfache Regeln ergeben sich nur bei Annahme einer gleichmässigen Belastung. Hier wird nach der dritten und fünften der Formeln 6

$$Y = \frac{p}{2b} \left[\frac{(l - a - x + \xi_1)^2 c}{l} - \frac{\xi_1^2 (c + x)}{a} \right] \text{ oder}$$

$$Y = \frac{p}{2} \left[\frac{(l - a - x + \xi_1)^2}{l} \left(\frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} \right) - \frac{\xi_1^2}{a} \left(\frac{e_1}{h_1} - \frac{e_2}{h_2} \right) \right] \cot \alpha.$$

Setzt man für ξ_1 den Ausdruck 11 ein, so erhält man als positives Maximum von Y

$$14. \max(+Y) = \frac{p(l - a - x)^2 (c + x) c}{2b [(c + x)l - ac]}$$

oder

$$15. \max(+Y) = \frac{p(l - a - x)^2}{(2kl - a)} \left(\frac{e_1}{h_1} - \frac{e_2}{h_2} \right) \cot \alpha.$$

Für das negative Maximum von Y ist der übrige Theil des Trägers belastet anzunehmen. Der Ausdruck für $\max(-Y)$ ergibt sich aus dem für $\max(+Y)$, wenn man $-(l + c)$ für c , $l - x - a$ für x und $c + a + x$ für $c + x$ setzt. Der Ausdruck 14 geht hierdurch über in

$$16. \max(-Y) = -\frac{p x^2 (c + a + x) (l + c)}{2b [(c + x)l - ac]}.$$

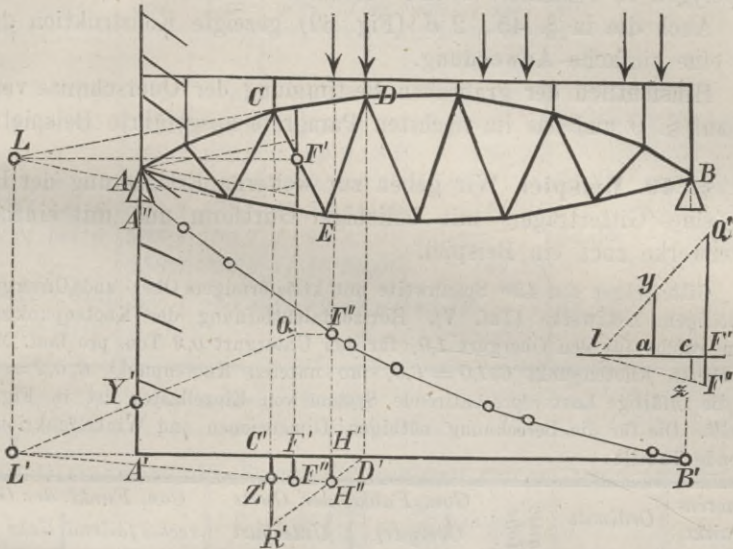
§. 48. Bestimmung der grössten Spannungen durch Konstruktion.

Hinsichtlich der Bestimmung der Gurtspannungen ist zu dem in §. 45 Gesagten nichts weiter hinzuzufügen. Ebenso kann die Bestimmung der vom Eigengewichte erzeugten Spannungen der Gitterstäbe unmittelbar nach §. 45 erfolgen. Nur hinsichtlich der zufälligen Last sind noch einige Bemerkungen zu machen.

Wenn man für das positive Maximum von Y nur alle rechts vom fraglichen Stabe liegenden Knotenpunkte als belastet annimmt, so ist die Transversalkraft Q identisch mit dem Stützendrucke D auf die linke Stütze A (Fig. 75). Der Angriffspunkt N der Transversalkraft Q hat hier also eine konstante Lage und zwar fällt er in den linken Stützpunkt A . Die Konstruktion nach der in §. 45 unter 2, c besprochenen

Methode wird hier eine sehr einfache. In der durch den Punkt F gehenden Vertikalen macht man $F'Q'$ = der Transversalkraft Q , zieht die Gerade $L'Q'$, welche die linke Stützenvertikale in Y schneidet; alsdann ist $A'Y' = Y$. Für den Fall, dass L nicht auf das Papier fällt, kann die bereits in §. 45 mitgetheilte und auch in Fig. 75 angegebene Modifikation eintreten.

Fig. 75.



Nimmt man ein System von Einzellasten an, so wird in vielen Fällen für das Maximum von Y innerhalb CD keine Last liegen dürfen, vielmehr die erste Last in D liegen. In diesem Falle ist das eben gezeigte Verfahren direkt anwendbar.

Liegt innerhalb CD eine Last R im Abstände $D'H' = \xi$ von D , so ist die Transversalkraft Q die Resultante aus dem nach oben wirkenden Stützendrucke D und der nach abwärts in C wirkenden Reaktion $R \frac{a}{a}$. Den vom Stützendrucke D erzeugten Theil von Y konstruirt man, wie vorhin mitgetheilt; hierbei ist nur zu bemerken, dass in dem in bekannter Weise (I. Heft, II. Aufl., §. 13, Fig. 23) konstruirten Polygone $B'A''$ die Ordinate $H'H''$, welche der vorderen Last entspricht, den Stützendruck D darstellt. Der von der Reaktion $R \frac{\xi}{a}$ erzeugte Theil von Y lässt sich aber ebenfalls leicht konstruiren. Macht man $C'R' = R$, zieht die Gerade $R'D'$, welche die durch H gehende Vertikale in H'' schneidet, so ist $H'H'' = R \frac{\xi}{a}$; macht man jetzt $F'F'' = H'H''$, zieht die Gerade $L'F''$, welche die durch C , dem Angriffspunkte der fraglichen Reaktion, gehende Vertikale in Z' schneidet, so ist $C'Z'$ der

von dieser Reaktion erzeugte Theil von Y . In Wirklichkeit ist jetzt $Y = AY' - C'Z'$. Für den Fall, dass L nicht auf das Papier fällt, ist die in §. 45 mitgetheilte und auch in Fig. 75 angegebene Modifikation anzuwenden.

Liegen mehrere Lasten innerhalb CD , so könnte das Verfahren für jede einzelne Last wiederholt oder die in C wirkende Reaktion durch das Seilpolygon in bekannter Weise bestimmt werden.

Auch die in §. 45, 2 d (Fig. 69) gezeigte Konstruktion gestattet hier eine einfache Anwendung.

Hinsichtlich der grafischen Bestimmung der Querschnitte verweisen wir auf §. 9 und das im nächsten Paragrafe ausgeführte Beispiel.

§. 49. Beispiel. Wir geben zur weiteren Erläuterung der Behandlung eines Gitterträgers mit beliebiger Gurtform und mit eintheiligem Gitterwerke noch ein Beispiel.

Gitterträger von 42^m Spannweite mit kreisförmigem Ober- und Untergurte und eintheiligem Netzwerke (Taf. V). Horizontalentfernung der Knotenpunkte = 6^m. Eigengewicht für den Obergurt 1,0, für den Untergurt 0,2 Ton. pro lauf. Met., also pro oberen Knotenpunkt 6.1,0 = 6,0, pro unteren Knotenpunkt 6.0,2 = 1,2 Ton. Das die zufällige Last repräsentirende System von Einzellasten ist in Fig. 2 dargestellt. Die für die Berechnung nöthigen Dimensionen und Winkelfunktionen gibt folgende Tabelle:

Knotenpunkt		Ordinate		Ganze Höhe	Gon. Funkt. der Gurte				Gon. Funkt. der Gitterst.			
oben	unt.	oben	unt.		Obergurt		Untergurt		rechts fallend		links fallend	
					$\tan \sigma$	$\sec \sigma$	$\tan \tau$	$\sec \tau$	$\cot \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$\cot \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
0	0	0,50	0,50	1,00			0,223	1,025				
	1		1,17	2,28	0,205	1,021			0,557	1,145		
2		1,73		3,42			0,172	1,015			0,967	1,391
	3		2,20	4,34	0,137	1,009			1,310	1,648		
4		2,55		5,05			0,100	1,005			1,583	1,873
	5		2,80	5,55	0,067	1,002			1,783	2,044		
6		2,95		5,85			0,033	1,001			1,917	2,162
	7		3,00	5,95	0	1			1,983	2,221		
		Meter										

Die Querschnittsfläche f irgend eines Theiles werde bestimmt durch die Regel

$$f = \frac{R_0}{1,4} + \frac{R_1}{0,8} + \frac{R_2}{1,7} \quad \square \text{ Centim.},$$

wenn R_0 , R_1 , R_2 die Spannung für das Eigengewicht und die obere und untere Grenze der Spannung für die zufällige Last in Tonnen bedeuten.

I. Berechnung.

1. Gurte. Die Spannung eines Gurtstückes ist zu berechnen nach der Formel $S = \frac{M}{h} \sec \sigma$. Die Berechnung der Querschnittsfläche des Gurtstückes hat nach der

Regel $f = \frac{S_0}{1,4} + \frac{S_1}{0,8}$ zu erfolgen, weil die untere Grenze der Spannung für die zufällige Last = 0 ist. Die Rechnungsergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Punkt	Gefährlichste Lage der zufäll. Last	Moment M		Mom. durch Höhe = $\frac{M}{h}$		Spannung S				Querschnitt f	
		Eigen- gew.	Zufäll. Last	Eigen- gew.	Zufäll. Last	Ober- gurt	Unter- gurt	Ober- gurt	Unter- gurt	Ober- gurt	Unter- gurt
0	0	0	0	0	0	—	+	—	+		
1	I bei 2	65,7	59,5	28,75	26,04	29,35		26,59		54,2	
2	"	128,7	119,0	37,69	34,84		38,25		35,36		71,5
3	"	173,7	149,4	40,02	34,43	40,38		34,74		72,3	
4	VII bei 3	215,1	178,9	42,59	35,43		42,84		35,60		75,1
5	VII bei 6	238,5	199,7	42,98	35,98	43,07		36,05		75,8	
6	"	258,3	222,3	44,15	38,00		44,19		38,04		79,1
7	{VII b. 6 o.} {VIII bei 8}	260,1	220,4	43,72	37,04	43,72		37,04		77,5	
		Tonnenmeter		Tonnen		Tonnen				□ Centim.	

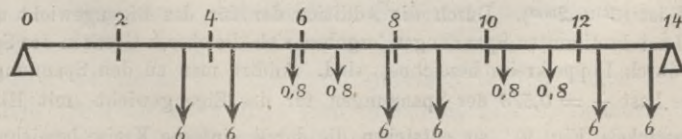
2. Gitterwerk. Die Spannung P bestimmt man am besten nach der Formel

$$P = \pm \left(\frac{M_2}{h_2} - \frac{M_1}{h_1} \right) \operatorname{cosec} \alpha$$

und zwar sowohl für das Eigengewicht, als die zufällige Last. Für das positive Maximum von Y muss der rechts vom fraglichen Stabe liegende Theil belastet sein; welche Lasten in demjenigen Querträgerfache liegen müssen, unter welchem der fragliche Stab liegt, ergibt sich nach Formel 9. Beispielsweise wird für den Stab 23 $\frac{x_2}{h_2} - \frac{x_1}{h_1} = \frac{9}{4,34} - \frac{6}{3,41} = 0,312$, $\frac{e_2}{h_2} - \frac{e_1}{h_1} = \frac{3}{4,34} - \frac{0}{3,41} = 0,690$; also soll mög-

lichst $0,312 \frac{R'}{l} = 0,690 \frac{R}{a}$ sein. Legen wir die Last I in das Fach 24 (Fig. 76), so wird $R' = 6 \cdot 6 + 4 \cdot 0,8 = 39,2$, $R = 6$, also $0,312 \frac{R}{l} = 0,312 \frac{39,2}{42} = 0,291$, $0,690 \frac{R}{a} = 0,690 \frac{6}{6} = 0,690$. Sonach liegt im Fache 24 eine zu grosse Last, das

Fig. 76.



Lastensystem muss also nach rechts verschoben werden. Liegt aber die Last I rechts von 4, so wird $R = 0$, das Lastensystem müsste dann nach links verschoben werden. Sonach muss die Last I am Querträger 4 liegen. Es ergibt sich im vorliegenden Falle für sämtliche Stäbe, dass die Last am rechten Querträger des über dem fraglichen Stabe liegenden Querträgerfaches liegen müsse.

Die spezielle Berechnung ergibt folgende Resultate:

Punkt	$\frac{M}{h}$ für	Zufällige Last				Spannung						Querschnitt		
		M		$\frac{M}{h}$		rechts fallend			links fallend			rechts fallend	links fallend	
oben	unten	Eigen- gewicht	rechts fallend	links fallend	rechts fallend	links fallend	P_0	P_1	P_2	P_0	P_1	P_2	rechts fallend	links fallend
0	0	0	0	0	0	0		+	-		-	+		
1	28,75	57,2	57,2	24,98	24,98	+32,92	28,60	0					59,2	
2	37,69	81,7	114,5	32,89	33,48					-12,43	11,82	0		23,7
3	40,02	122,6	122,6	28,25	28,25	+ 3,84	7,20	5,87					15,2	
4	42,59	112,7	163,4	22,32	32,35					- 4,81	7,68	3,76		15,3
5	42,98	140,9	140,9	25,39	25,39	+ 0,80	6,28	6,68					12,4	
6	44,15	102,4	169,0	17,51	28,89					- 2,75	7,57	4,99		14,4
7	43,72	119,5	119,5	20,08	20,08	- 0,96	5,71	7,26					13,1	
8	44,15	73,0	136,6	12,48	23,35					- 0,96	7,26	5,71		13,1
9	42,98	82,1	82,1	14,79	14,79	- 2,75	4,99	7,57					14,4	
10	42,59	36,3	91,2	7,18	18,06					+ 0,80	6,68	6,26		12,4
11	40,02	39,9	39,9	0,19	9,19	- 4,81	3,76	7,68					15,3	
12	37,69	0	43,6	0	12,75					+ 3,84	5,87	7,20		15,2
13	28,75	0	0	0	0	-12,43	0	11,82					23,7	
14	0	0	0	0	0					+32,32	0	28,60		59,2
		Ton.	Tonnenmeter	Tonnen				Tonnen						□ Centim.

Ein Endständer erleidet durch das Eigengewicht den Druck $\frac{1}{2}(2,3 + 6,6 + 2,09 + 5 \cdot 1,2) = 27,4$, in Folge der zufälligen Last den Maximaldruck 25,0 Tonnen. Sonach wird die nöthige Querschnittsfläche $= \frac{27,4}{1,4} + \frac{25,0}{0,8} = 50,8$.

II. Konstruktion.

1. Gurte. Das Seilpolygon wurde in Fig. 3 für das Eigengewicht, in Fig. 2 für die zufällige Last konstruirt und zwar mit Benützung des Kräftemasstabes II ($1^t = 2mm$) unter Annahme einer Poldistanz von 18^t . Die in Fig. 2 konstruirten, den Maximalmomenten entsprechenden Höhen des Seilpolygones sind in Fig. 3 wieder aufgetragen. Die Konstruktion der Spannungen ist nach §. 45, 2 c (Fig. 64) erfolgt, hierbei aber die Trägerhöhe h (AF in Fig. 64) in dreifacher Grösse aufgetragen. Die Spannungen ergeben sich alsdann in $\frac{1}{3}$ der Grösse nach dem Kräftemasstabe II oder in wirklicher Grösse nach dem Masstabe III, dessen Einheit $= \frac{1}{3}$ von dem Masstabe II ist ($3^t = 2mm$). Durch die Addition der für das Eigengewicht und die zufällige Last bestimmten Spannungen ergeben sich die oberen Grenzen der Spannungen, welche durch Doppelkreise bezeichnet sind. Addirt man zu den Spannungen für die zufällige Last $\frac{8}{14} = 0,573$ der Spannungen für das Eigengewicht (mit Hilfe des Reduktionswinkels Fig. 9), so entstehen die durch einfache Kreise bezeichneten Spannungen \ominus . Die Querschnittsfläche f ist alsdann $= \frac{\ominus}{0,8}$. Die Strecken, welche \ominus nach dem Masstabe III darstellen, geben demnach nach dem Masstabe IV, dessen Einheit $= 0,8$ von der des Masstabes III ist ($3 \square^{cm} = 16mm$), die Querschnittsflächen. Dieselben sind in Fig. 4 nochmals nach dem Masstabe VII ($10 \square^{cm} = 2mm$) aufgetragen.

2. Gitterwerk. In Fig. 6 ist zunächst in bekannter Weise die Transversalkraft für das Eigengewicht und die zufällige Last bezüglich durch eine blaue und rothe ausgezogene Linie dargestellt und zwar mit Benützung des Kräftestabes II. Die Vertikalkräfte Y und die daraus abgeleiteten Spannungen P sind für das Eigengewicht nach §. 45, 2 c (Fig. 66), für die zufällige Last nach §. 48 (Fig. 74) konstruiert. Für die Stäbe 1 bis 6, 11 bis 14 wurden die Durchschnittspunkte L der Verlängerungen der betreffenden Gurtstücke benützt; nur für die Stäbe 7 und 8 für das Eigengewicht, 7 bis 10 für die zufällige Last, bei welchen der Punkt L nicht auf das Papier fiel, wurde die in §. 45 und 48 (Fig. 67 und 75) gezeigte Modifikation benützt. Für das Eigengewicht sind die Angriffspunkte N (Fig. 67) der Transversalkräfte in Fig. 3 konstruiert und nach Fig. 6 übertragen. Durch Addition der positiven und negativen Maximalspannungen zu den vom Eigengewichte erzeugten Spannungen wurden die oberen und unteren Spannungsgrenzen, welche durch Doppelkreise angegeben sind, erhalten. Ferner wurde zum absoluten Maximum der Spannung für die zufällige Last $\frac{s}{14} = 0,573$ der Spannung für das Eigengewicht (algebraisch) und $\frac{s}{17} = 0,471$ des entgegengesetzten Maximums der Spannung für die zufällige Last (mit Hilfe des Reduktionswinkels Fig. 9) und hierdurch die durch einfache Kreise bezeichneten Spannungen \mathfrak{P} erhalten. Die Querschnittsfläche f ist alsdann $f = \frac{\mathfrak{P}}{0,8} \square \text{cm}$, wobei \mathfrak{P} nach dem Masstabe II zu messen ist. Misst man die die Spannungen \mathfrak{P} darstellenden Strecken auf dem Masstabe V, dessen Einheit = 0,8 Einheiten des Masstabes II ist ($1 \square \text{cm} = 1,6 \text{mm}$), so erhält man direkt die Querschnittsfläche f . Die so bestimmten Querschnittsflächen sind in Fig. 8 nochmals nach dem Masstabe VII aufgetragen.

In Fig. 7 sind noch die Spannungen für das Eigengewicht nach der Polygonalmethode konstruiert und zwar im halb so grossen Masstabe als in Fig. 6 oder in $1\frac{1}{2}$ so grossem Masstabe als in Fig. 3 (Masstab VI, $1' = 1 \text{mm}$).

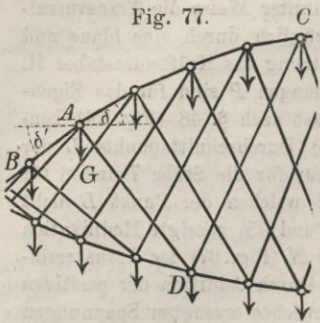
VII. Kapitel.

Träger mit mehrtheiligem Gitterwerke im Allgemeinen.

§. 50. **Principien.** Das in §. 13 hinsichtlich der Zulässigkeit einer Zerlegung des gegebenen mehrtheiligen Systemes in eintheilige Systeme Gesagte gilt auch für Träger mit polygonalen Gurten. Nur sind hier die Vertikalkräfte, welche in den Elementarsystemen in den Ecken der Gurte wirken, nicht mehr so klein, dass sich in Voraus behaupten liesse, es sei zulässig, dieselben zu vernachlässigen. Wir haben daher zunächst eine nähere Untersuchung über den Einfluss dieser Kräfte anzustellen.

Die in einem beliebigen Knotenpunkte A (Fig. 77) des gegebenen Systemes wirkende Vertikalkraft G ist, wenn das System n theilig ist, in n vertikale Komponenten $G_1, g_2, g_3 \dots g_n$ zu zerlegen, von denen G_1

Fig. 77.



dem Elementarsysteme entspreche, welches in A einen Knotenpunkt hat, während die übrigen Kräfte $g_2, g_3 \dots g_n$ (Fig. 77) auf die Brechpunkte des Gurtes der übrigen Elementarsysteme wirken mögen; alsdann ist

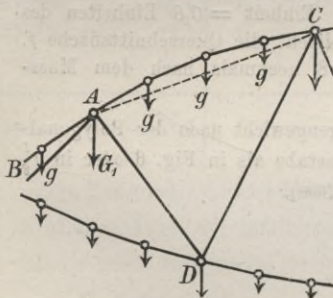
$$G = G_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n.$$

Bezeichnet man die Spannungen der rechts und links von A liegenden Gurtstücke in den Elementarsystemen mit $s_1, s'_1, s_2, s'_2, \dots s_n, s'_n$, die Neigungswinkel dieser Gurtstücke gegen die Horizontale mit σ, σ' , so fordert das Gleichgewicht die Erfüllung der Bedingungen

$$g_2 = -s_2 \sin \sigma + s'_2 \sin \sigma', \quad g_3 = -s_3 \sin \sigma + s'_3 \sin \sigma', \\ \dots g_n = -s_n \sin \sigma + s'_n \sin \sigma'.$$

Die Spannungen desselben Gurtstückes in den Elementarsystemen ergeben sich nahezu gleich. Bezeichnen wir daher die Spannungen der rechts und links von A liegenden Gurtstücke im gegebenen Systeme mit S, S' , so ist sehr nahe $s_2 = s_3 = \dots = s_n = \frac{1}{n} S, s'_2 = s'_3 = \dots = s'_n = \frac{1}{n} S'$, folglich nahezu

Fig. 78.

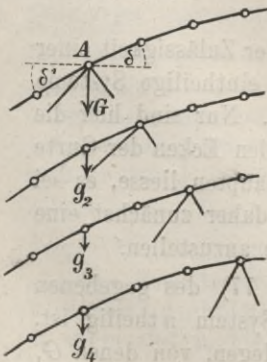


nahe $s_2 = s_3 = \dots = s_n = \frac{1}{n} S, s'_2 = s'_3 = \dots = s'_n = \frac{1}{n} S'$, folglich nahezu

$$g_2 = g_3 = \dots g_n = \frac{1}{n} (S' \sin \sigma' - S \sin \sigma), \\ G_1 = G - \frac{n-1}{n} (S' \sin \sigma' - S \sin \sigma).$$

Die in den Ecken des Gurtstückes AC des Elementarsystemes mit dem Knotenpunkte A wirkenden Vertikalkräfte können wir bei regelmässiger Gurtform als nahezu gleich ansehen; sie seien $= g$. Ebenso können wir die in den Ecken des Gurtstückes AB wirkenden Vertikalkräfte als nahezu gleich ansehen; dieselben seien $= g'$.

Fig. 79.



Das Gurtstück AC kann beseitigt werden, wenn man dafür in den Knotenpunkten A und C die Spannungen der von A und B ausgehenden Gurtstücke anbringt. Jede dieser Spannungen aber lässt sich zerlegen in eine in Richtung der Sehne AC wirkende Spannung und in eine Vertikalkraft. Diese Komponenten müssen den in den Ecken des Gurtstückes AC wirkenden Vertikalkräften g das Gleichgewicht halten; daher müssen die beiden in Richtung der Sehne AB wirkenden Komponenten gleich und jede der in A und C wirkenden Vertikalkomponenten gleich der halben Summe der in den Ecken des Gurtstückes AC wirkenden Ver-

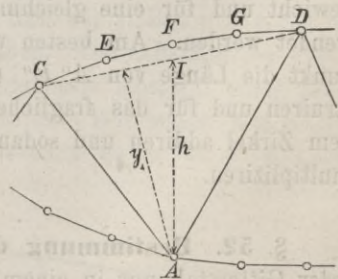
tikalkräfte g , d. i. $= \frac{1}{2}(n-1)g$ sein. Dasselbe lässt sich vom Gurtstücke AB sagen; wir erhalten statt dieses Gurtstückes zwei in Richtung der Sehne AB wirkende Kräfte und zwei in A und B wirkende Vertikalkräfte, deren jede $= \frac{1}{2}(n-1)g'$ ist. Die beiden in A wirkenden Vertikalkräfte geben eine Vertikalkraft $\frac{1}{2}(n-1)(g+g')$. Nun aber kann $\frac{1}{2}(g+g')$ gleich der in A bei denjenigen Elementarsystemen, in denen A nicht Knotenpunkt ist, wirkenden Vertikalkraft, d. i. $= g_2 = g_3 = \dots = \frac{1}{n}(S' \sin \sigma' - S \sin \sigma)$ angenommen werden und sonach wäre die in A wirkende, durch die Zerlegung der Spannungen s, s' herrührende Vertikalkraft $= \frac{n-1}{n}(S' \sin \sigma' - S \sin \sigma)$. Ausserdem wirkt in A die Vertikalkraft $G_1 = G - \frac{n-1}{n}(S' \sin \sigma' - S \sin \sigma)$. Diese beiden Kräfte zusammen geben die Vertikalkraft G , d. i. diejenige Kraft, welche im Knotenpunkte A des gegebenen Systemes wirkt. Sonach lässt sich mit einer für die praktische Anwendung hinreichenden Genauigkeit behaupten:

Das gegebene System lässt sich in Elementarsysteme zerlegen, wenn man in den Knotenpunkten derselben diejenigen Lasten anbringt, welche in den entsprechenden Knotenpunkten des gegebenen Systemes wirken und wenn man für die polygonalen Gurtstücke der Elementarsysteme gerade Gurtstücke unter Beibehaltung der Knotenpunkte der Elementarsysteme substituirt.

§. 51. Bestimmung der Gurtspannungen. Wenn man nach dem soeben Gesagten das gegebene mehrtheilige System in einzelne eintheilige Systeme zerlegt, so geben die Gleichungen 1 und 2 (Seite 98) die Spannung des geradlinigen Gurtstückes CD (Fig. 80), welches das polygonale Gurtstück $CEFGD$ ersetzt, vorausgesetzt,

Fig. 80.

dass y den normalen Abstand der Sehne CD vom gegenüberliegenden Knotenpunkte A und h den Vertikalabstand der Sehne CD von A bedeutet. Bezeichnet man die Spannung des geraden Gurtstückes CD mit S_0 , den Neigungswinkel der Geraden CD gegen die Horizontale mit σ_0 , den Neigungswinkel der einzelnen wirklichen Gurtstücke gegen die Horizontale mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, so ist die



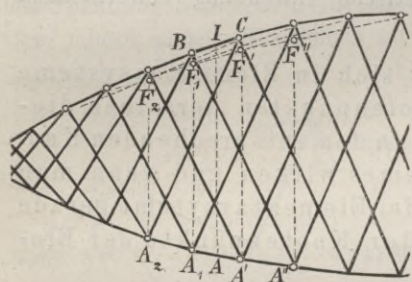
Horizontalkomponente von $S_0 = S_0 \cos \sigma_0$, also die Spannung der einzelnen wirklichen Gurtstücke $S_0 \cos \sigma_0 \sec \sigma_1, S_0 \cos \sigma_0 \sec \sigma_2, \dots$. Die Gleichungen 2 (S. 98) geben sonach die Spannungen der wirklichen Gurtstücke, wenn für σ und τ der Neigungswinkel des frag-

lichen wirklichen Gurtstückes gesetzt wird, wobei aber die Höhe h auf die betreffende Sehne CD zu beziehen ist.

Die wirkliche Spannung eines beliebigen Gurtstückes ergibt sich nun dadurch, dass man die Spannung dieses Gurtstückes nach dem soeben Gesagten für sämtliche Elementarsysteme, in welche sich das gegebene System zerlegen lässt, bestimmt und die erhaltenen Spannungen summirt. Die numerische Summierung in einem gegebenen Falle hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Allein die algebraische Summierung zur Erzielung eines bestimmten Ausdruckes für die Gurtspannung, welcher eine Zerlegung nicht erfordert, wie sie in §. 15 für Parallelträger erfolgt ist, ist im Allgemeinen nicht durchführbar, da für die Elementarsysteme, deren Spannungen zu summieren sind, der Nenner h ein verschiedener ist.

Bezeichnen wir die Momente

Fig. 81.



für die Elementarsysteme, welchen das fragliche Gurtstück angehört, für den dem fraglichen Gurtstücke gegenüber liegenden Knotenpunkt mit \dots , m_2 , m_1 , m' , m'' , \dots , die Vertikalabstände dieser Punkte von den gegenüber liegenden Sehnen der Elementarsysteme mit \dots , h_2 , h_1 , h' , h'' , \dots , so wird die Spannung S_1 des Gurtstückes BC (Fig. 81), wenn dasselbe im Obergurt liegt,

$$17. \quad S_1 = - \left(\dots + \frac{m_2}{h_2} + \frac{m_1}{h_1} + \frac{m'}{h'} + \frac{m''}{h''} + \dots \right) \sec \sigma.$$

Für den Untergurt würde S_1 mit $-S_2$, σ mit τ zu vertauschen sein. Für die Momente in den Elementarsystemen gelten die Regeln 3 (Seite 99).

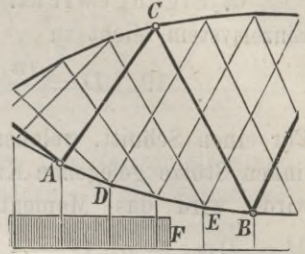
Die in §. 45 gezeigte grafische Bestimmung kann für das Eigengewicht und für eine gleichmäßige zufällige Belastung auch hier angewendet werden. Am besten wird man hier für jeden einzelnen Knotenpunkt die Länge von $A''E''$ (Fig. 63) oder von $A'A'''$ (Fig. 64) konstruieren und für das fragliche Gurtstück die betreffenden Längen mit dem Zirkel addiren und sodann die Summe durch Konstruktion mit $\sec \sigma$ multiplizieren.

§. 52. Bestimmung der Spannungen der Gitterstäbe. Da jeder Gitterstab nur in einem einzigen der Elementarsysteme vorkommt, so kann die Bestimmung der Spannung ohne Weiteres nach dem für einheitliche Systeme aufgestellten Regeln erfolgen.

Auch die in §. 46 ermittelte gefährlichste Belastungsweise bleibt im Allgemeinen giltig; nur ist die präzise Bestimmung des Lastendes

für gleichmässige Belastung nach dem über Parallelträger in §. 16, 2. Gesagten abzuändern. Hiernach wird die Spannung eines Gitterstabes zum Maximum, wenn sich das Lastende innerhalb derjenigen Knotenpunkte befindet, welche den Enden A und B des fraglichen Stabes und seines benachbarten Stabes zunächst liegen (Fig. 82), eine gleichmässige Belastung vorausgesetzt. Dabei bleibt es gleichgiltig, bis zu welchem Punkte der Strecke zwischen den beiden genannten Knotenpunkten die Last reicht.

Fig. 82.



Die für das eintheilige System in §. 44, 45 und 48 gezeigte Bestimmung der Spannungen kann hier ohne Weiteres in Anwendung kommen.

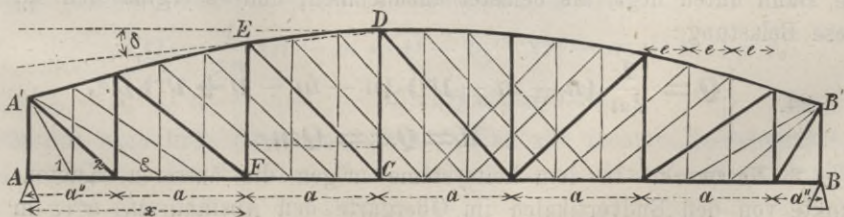
§. 53. Anwendung auf regelmässiges Fach- und Netzwerk.

Wenn die Knotenpunkte, wie gewöhnlich, eine konstante Horizontalentfernung erhalten, so lassen sich einfache, genaue Ausdrücke für die Transversalkräfte und Momente aufstellen, wenn man eine gleiche Belastung der Knotenpunkte voraussetzt. Wir wollen den Untergurt als gerade voraussetzen, so dass hinsichtlich der Spannungen eines Gitterstabes das Moment M auf das untere Ende dieses Gitterstabes zu beziehen ist. Auch wollen wir die Bahn am Untergurte liegend annehmen. Ferner denken wir uns hierbei auf ein Elementarsystem die ganze Last wirkend, also an einem Knotenpunkte des Elementarsystemes hinsichtlich des Eigengewichtes am Obergurte die Last $g_1 a$, am Untergurte die Last $g_2 a$, hinsichtlich der zufälligen Last am Untergurte die Last $p a$, wenn a die horizontale Entfernung der Knotenpunkte des Elementarsystemes bezeichnet.

1. **Fachwerk.** In dem fraglichen Elementarsysteme oder dem Leitsysteme mögen die äussersten Knotenpunkte von der linken und rechten Stütze den Abstand a' und a'' (Fig. 83) haben. Der Abstand der Vertikalen im gegebenen Systeme sei e , der horizontale Abstand eines beliebigen Knotenpunktes von der linken Stütze x . Wir setzen nun

$$18. \quad l = ne, \quad x = me, \quad a = ve, \quad a' = v'e, \quad a'' = v''e.$$

Fig. 83.



Wir führen diese Bezeichnung ein, weil in der Regel n, m, v, v', v'' ganze Zahlen sein werden, wobei die Zahl m den fraglichen Knotenpunkt zählt.

a. Eigengewicht. Der linke Stützendruck D ergibt sich für ein Einzelsystem leicht zu

$$19. D = \frac{(n + v - v' - v'')(n - v' + v'')}{2n} g e.$$

Für einen Schnitt, welcher durch einen im Horizontalabstande x von der linken Stütze gelegenen Knotenpunkt des Ober- oder Untergurtes geführt wird, wird das Moment M in Beziehung auf diesen Knotenpunkt

$$M = D m e - g a \left(\frac{x - a'}{a} + 1 \right) \frac{x - a'}{2} \text{ oder}$$

$$20. M = \frac{1}{2n} \left[m (n + v - v' - v'') (n - v' + v'') - n (m + v - v') (m - v') \right] g e^2.$$

Für einen durch eine Diagonale, deren unteres Ende vom linken Auflager den Abstand $x = m e$ hat, gelegten Schnitt ergibt sich als Transversalkraft $Q = D - g a \frac{x - a'}{a}$, d. i.

$$21. Q = \frac{1}{2n} \left[(n + v - v' - v'') (n - v' + v'') - 2n (m - v') \right] g e.$$

Für einen durch eine Vertikale mit dem Abstände $x = m e$ gelegten Schnitt ergibt sich dagegen $Q = D - g a \frac{x - a'}{a} - g_2 a$, d. i.

$$22. Q = \frac{1}{2n} \left[(n + v - v' - v'') (n - v' + v'') - 2n (n - v') \right] g e - v g_2 e.$$

b) Zufällige Last. Die Gurtspannungen werden zum Maximum bei totaler Belastung und es gilt hier die Formel 20, wenn man p für g setzt. Für eine nach rechts fallende Diagonale CE sind alle rechten Knotenpunkte, einschliesslich C oder D , als belastet anzunehmen und es ergibt sich für diese Belastung

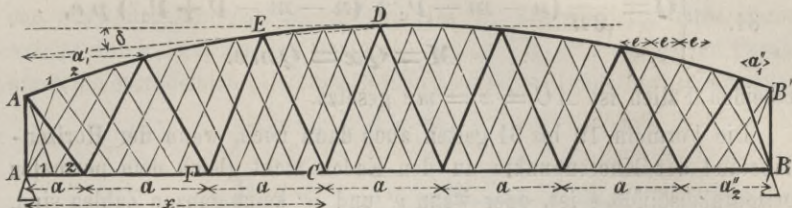
$$23. \begin{cases} Q = \frac{1}{2n} (n - m + v - v'') (n - m + v'') p e, \\ M = Q x = Q m e. \end{cases}$$

Für eine im linken Trägertheile liegende Vertikale EF sind alle rechten Knotenpunkte, einschliesslich des Punktes C (falls, wie wir vorausgesetzt, die Bahn unten liegt) als belastet anzunehmen, und es ergibt sich für diese Belastung:

$$24. \begin{cases} Q = \frac{1}{2n} (n - m - v'') (n - m - v + v'') p e, \\ M = Q x = Q m e. \end{cases}$$

2. Netzwerk. In dem Leitsysteme mögen die äusseren Knotenpunkte von den Endvertikalen im Obergurte den Abstand a'_1, a''_1 , im

Fig. 84.



Untergurte den Abstand a'_2 , a''_2 (Fig. 84) haben. Der Horizontalabstand der Knotenpunkte im gegebenen Systeme sei wiederum e , der Horizontalabstand der Knotenpunkte im Leitsysteme a . Wir setzen wiederum

$$25. \quad l = ne, x = me, a = \nu e, a_1' = \nu_1' e, a_1'' = \nu_1'' e, a_2' = \nu_2' e, a_2'' = \nu_2'' e.$$

a) Eigengewicht. Für das Leitsystem ergibt sich als linker Stützdruck

$$26. \quad D = \frac{e}{2n} [(n + \nu - \nu_1' - \nu_1'')(n - \nu_1' + \nu_1'')g_1 + (n + \nu - \nu_2' - \nu_2'')(n - \nu_2' + \nu_2'')g_2].$$

Für einen durch einen Knotenpunkt C des Untergurtes, welcher vom linken Ende den Abstand $x = me$ hat, gelegten Schnitt ergibt sich als Moment in Beziehung auf den Punkt C :

$$27. \quad M = D m e - \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2} \nu - \nu_1' \right) \left(m + \frac{1}{2} \nu - \nu_1' \right) g_1 e^2 \\ - \frac{1}{2} \left(m - \nu_2' \right) \left(m + \nu - \nu_2' \right) g_2 e^2.$$

Für einen durch einen Knotenpunkt des Obergurtes gelegten Schnitt sind g_1 und g_2 , ebenso ν_1 und ν_2 zu vertauschen.

Als Transversalkraft ergibt sich für den nach rechts fallenden Stab CE

$$28. \quad Q = D - \left(m - \frac{1}{2} \nu - \nu_1' \right) g_1 e - \left(m - \nu_2' \right) g_2 e$$

und für den nach links fallenden Stab CD

$$29. \quad Q = D - \left(m - \frac{1}{2} \nu - \nu_1' \right) g_1 e - \left(m + \nu - \nu_2' \right) g_2 e.$$

b) Zufällige Last. Für die Gurtspannungen ist die Formel 27 massgebend; hierin ist p für g_2 und o für g_1 zu setzen, falls die Bahn unten liegt. Für den nach rechts fallenden Stab CE sind alle rechten Knotenpunkte, einschliesslich des Punktes C , als belastet anzunehmen und es wird, ganz entsprechend der Formel 23:

$$30. \quad \begin{cases} Q = \frac{1}{2n} (n - m + \nu - \nu_2'') (n - m + \nu_2'') p e, \\ M = Q x = Q m e. \end{cases}$$

Für den nach links fallenden Stab CD sind alle rechten Knotenpunkte, einschliesslich des Punktes H , als belastet anzunehmen und es ergibt sich ganz entsprechend der Formel 24:

$$31. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{1}{2n} (n - m - \nu_2'') (n - m - \nu + \nu_2'') p e, \\ M = Q x = Q m e. \end{array} \right.$$

In beiden Fällen ist $AC = x = m e$ gesetzt.

Die Formeln 19 bis 31 gelten auch dann noch, wenn der Horizontalabstand der Knotenpunkte an den Enden nicht gleich dem normalen Horizontalabstande e ist, oder wenn ν' und ν'' keine ganzen Zahlen sind.

Für specielle Fälle vereinfachen sich die Formeln wesentlich. Beispielsweise wollen wir die Formeln für den in Fig. 83 dargestellten Fall aufstellen, worin $n = 18$, $\nu = 3$ ist. Wir nennen die Systeme mit den Diagonalen $A'1$, $A'2$, $A'3$ bezüglich das I., II. und III. System, wobei für das I. System $\nu' = 1$, $\nu'' = 2$, für das II. System $\nu' = 2$, $\nu'' = 1$ und für das III. System $\nu' = 0$ oder $= 3$, $\nu'' = 0$ oder $= 3$ ist.

a. **Eigengewicht.** Das Moment M ergibt sich nach Formel 20:

$$\text{I. und II. System: } M = (9m - 0,5m^2 + 1) g e^2,$$

$$\text{III. System: } M = (9m - 0,5m^2) g e^2.$$

Als Transversalkraft ergibt sich für eine Diagonale nach Formel 21 für alle drei Systeme:

$$Q = (10,5 - m) g e$$

und für eine Vertikale nach Formel 22 für alle drei Systeme

$$Q = (10,5 - m) g e - 3 g_2 e.$$

b. **Zufällige Last.** Das für die Spannung der Gurte maassgebende Moment ist nach Formel 20:

$$\text{I. und II. System: } M = (9m - 0,5m^2 + 1) p e^2,$$

$$\text{III. System: } M = (9m - 0,5m^2) p e^2.$$

Für die Spannung einer Diagonale wird nach den Formeln 23:

$$\text{I. und II. System: } Q = \frac{1}{36} (19 - m) (20 - m) p e, \quad M = Q m e,$$

$$\text{III. System: } Q = \frac{1}{36} (18 - m) (21 - m) p e, \quad M = Q m e.$$

Für die Spannung einer Vertikale endlich wird nach den Formeln 24:

$$\text{I. und II. System: } Q = \frac{1}{36} (16 - m) (17 - m) p e, \quad M = Q m e,$$

$$\text{III. System: } Q = \frac{1}{36} (15 - m) (18 - m) p e, \quad M = Q m e.$$

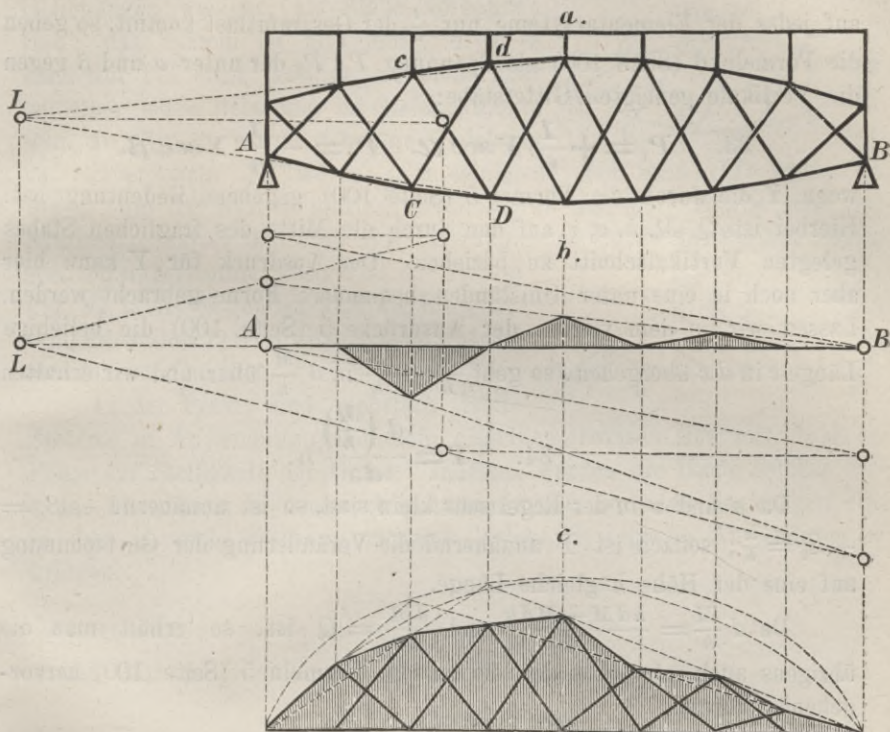
Etwas weniger einfach werden die speciellen Formeln für Gitterträger mit Netzwerk.

§. 54. Bestimmung der Spannungen für ein System von Einzellasten. Für ein System von Einzellasten lässt sich das in S. 17 hinsichtlich der Parallelträger Gesagte auch hier anwenden. Bei Anwendung der grafischen Methode mit Hilfe von Influenzlinien ist die Konstruktion derselben natürlich nach §. 45 und 48 zu modificiren.

Hinsichtlich der Gitterstäbe wurde die Konstruktion der Influenzlinie in §. 46 (Fig. 73) gezeigt. Mit Hilfe dieser Linie ist dann ohne Weiteres die Influenzlinie für das Elementarsystem zu konstruiren, welchem der fragliche Gitterstab angehört. In Fig. 85b ist die Influenzlinie für den Stab cD konstruirt.

Hinsichtlich der Gurtspannungen tritt an Stelle der Parabel für den Parallelträger (Fig. 40, S. 46) eine in Fig. 85 c punktierte Kurve, welche durch Division der Ordinaten der in Fig. 83 c punktierten Parabel durch die betreffenden vertikalen Höhen des Trägers (vom fraglichen Knoten-

Fig. 85.



punkte bis zur gegenüberliegenden Sehne des Elementarsystemes gerechnet) erhalten wird. Diese Division kann in der im §. 45 (Fig. 63 und 64) gezeigten Weise geschehen. In Fig. 85 c ist die Influenzlinie für das Gurtstück cd konstruiert. Auch das auf Seite 48 hinsichtlich eines Näherungsverfahrens Gesagte behält hier seine Giltigkeit.

§. 55. Näherungsbestimmung der Spannungen. Für manche Zwecke ist es ausreichend, Näherungsregeln unter Annahme kontinuierlich gekrümmter Gurte anzuwenden. Wir wollen daher im Folgenden noch solche Näherungsregeln aufstellen.

1. **Gurte.** In Formel 17 kann man annähernd die Glieder $\frac{m_2}{h_2}, \frac{m_1}{h_1} \dots$ als gleich annehmen und zwar kann man das Moment und die Höhe auf den Vertikalschnitt beziehen, welcher durch die Mitte des fraglichen Gurtstückes geht. Bezeichnen wir unter dieser Annahme das Moment

für das gegebene System mit M , den Vertikalabstand der Gurte mit h , so wird die Spannung S_1 und S_2 des Ober- und Untergurtes:

$$32. \quad S_1 = -\frac{M}{h} \sec \sigma, \quad S_2 = +\frac{M}{h} \sec \tau.$$

2. Gitterwerk. Beachtet man, dass bei einem n -theiligen Systeme auf jedes der Elementarsysteme nur $\frac{1}{n}$ der Gesamtlast kommt, so geben die Formeln 6 (Seite 100) als Spannung P_1, P_2 der unter α und β gegen die Vertikale geneigten Gitterstäbe:

$$33. \quad P_1 = +\frac{1}{n} Y \sec \alpha, \quad P_2 = -\frac{1}{n} Y \sec \beta.$$

wenn Y die durch die Formel 5 (Seite 100) gegebene Bedeutung hat. Hierbei ist Q, M, h, σ, τ auf den durch die Mitte des fraglichen Stabes gelegten Vertikalschnitt zu beziehen. Der Ausdruck für Y kann hier aber noch in eine unter Umständen bequemere Form gebracht werden. Lassen wir in dem vierten der Ausdrücke 5 (Seite 100) die beliebige Länge e in dx übergehen, so geht $\frac{M}{h} - \frac{M}{h}$ in $d\frac{M}{h}$ über und wir erhalten

$$34. \quad Y = \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} h.$$

Da σ und τ in der Regel sehr klein sind, so ist annähernd $-S_1 = +S_2 = \frac{M}{h}$; sonach ist Y annähernd die Veränderung der Gurtspannung auf eine der Höhe h gleiche Länge.

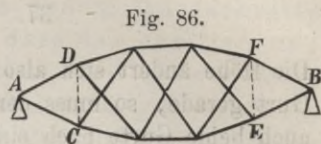
Da $d\frac{M}{h} = \frac{hdM - Mdh}{h^2}$ und $\frac{dM}{dx} = Q$ ist, so erhält man die übrigens auch sofort aus der dritten der Formeln 5 (Seite 100) hervorgehende Formel

$$35. \quad Y = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}.$$

Speziell für das positive Maximum von Y ist $M = Qx$, also $d\frac{M}{h} = Q d\frac{x}{h}$; ebenso ist für das negative Maximum von Y $M = -Q(l-x)$, also $d\frac{M}{h} = -Q d\frac{l-x}{h}$. Hierbei ist für das positive Maximum $Q = \frac{p(l-x)^2}{2l}$, für das negative Maximum $Q = -\frac{px^2}{2l}$ zu setzen. Hierdurch erhält man

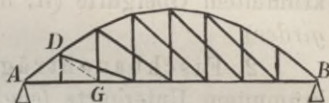
$$36. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max (+ Y) = \frac{p(l-x)^2 h}{2l} \frac{d\frac{x}{h}}{dx} = -\frac{px^2(l-x)^2}{2lh} \frac{d\frac{x}{h}}{dx} \\ \max (- Y) = \frac{px^2 h}{2l} \frac{d\frac{l-x}{h}}{dx} = -\frac{px^2(l-x)^2}{2lh} \frac{d\frac{l-x}{h}}{dx} \end{array} \right.$$

§. 56. **Labile Systeme.** Bei mehrfachen Systemen mit Gurten, welche sich über den Auflagern vereinigen, ist man leicht versucht, labile Systeme (vergl. Seite 2) anzuwenden. Wenn man von jedem Knotenpunkte eines Gurtes in regelmässiger Weise höchstens zwei Stäbe ausgehen lässt (Fig. 86), so erhält man bei n solchen Systemen $n - 1$ Gleichungen weniger, als Stäbe vorhanden



sind; das System ist also labil, d. h. es kann nur bei einer bestimmten, nicht aber bei einer jeden Belastung im Gleichgewichte sein. In Fig. 86 würde sich eine Gleichung zu viel ergeben. Es würde z. B. genügen, den Stab CD hinzu zu fügen, um das System statisch bestimmt zu machen. Würde man der Symmetrie halber den Stab EF hinzufügen, so würde das System bereits statisch unbestimmt. Ebenso ist das System Fig. 87 labil; es genügt aber die Einschaltung des Stabes DG , um das System statisch bestimmt zu machen.

Fig. 87.



In der Praxis sind mehrfach labile Systeme in Anwendung gekommen; dieselben erweisen sich nur stabil in Folge der Steifigkeit der Gurte. Indessen werden die Gurte solcher Systeme übermässig in Anspruch genommen und es treten Senkungen ein, so dass es nicht rathsam erscheint, solche Systeme in Anwendung zu bringen.

VIII. Kapitel.

Parabelträger.

§. 57. **Prinzip.** Die Form der Gurte lässt sich nach verschiedenen Prinzipien feststellen. Ein vielfach in Anwendung gebrachtes Prinzip, welches wir zunächst behandeln wollen, ist das, dass bei totaler Belastung das Gitterwerk ohne Beanspruchung ist, dass also die Gurte allein im Stande sind, eine totale Belastung aufzunehmen. Dies tritt ein, wenn die Vertikalkraft $Y = 0$ ist, d. i. nach Formel 34, wenn

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{M}{h} \right) = 0$$

wird. Hiernach muss $\frac{M}{h}$ eine Konstante sein; bezeichnen wir dieselbe mit $\frac{1}{c}$, so wird

$$h = CM,$$

d. h. die Höhe muss dem Momente proportional sein. Bei gleichmässig vertheilter Last wird $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, also $h = \frac{1}{2} C q x (l - x)$. Ist die Höhe in der Mitte h_1 , so wird $h_1 = \frac{1}{8} C q l^2$, mithin

$$37. \quad h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Die Höhe ändert sich also nach dem Gesetze der Parabel. Ist der eine Gurt gerade, so muss der andere eine Parabel bilden. Ebenso können auch beide Gurte nach einer Parabel gestaltet werden. Man nennt daher diese Art von Trägern Parabelträger (fr. *la poutre parabolique*, engl. *the parabolic truss*). Man kann hauptsächlich vier Klassen derselben unterscheiden, nämlich:

1. Bogensehnenträger mit geradem Unter- und parabolisch gekrümmtem Obergurte (fr. *la poutre en bowstring*, engl. *the bow-string girder*).

2. Fischbauchträger mit geradem Ober- und parabolisch gekrümmtem Untergurte (engl. *the fish-bellied girder*).

3. Fisch- oder Linsenträger mit symmetrisch gekrümmtem Ober- und Untergurte (engl. *the bowstring suspension girder*, *the Brunel-girder*).

4. Sichelträger mit nach oben gekrümmtem Ober- und Untergurte. Diese Trägerform kommt indess weniger für Brücken, als für Dächer in Anwendung.

§. 58. Näherungstheorie der Parabelträger.

1. Gurte. Die Spannungen der Gurte ist annähernd $S_1 = -\frac{M}{h} \sec \sigma$, $S_2 = \frac{M}{h} \sec \tau$, oder weil $\frac{M}{h} = \frac{1}{C} = H$ ist, wenn H eine neue Konstante bezeichnet,

$$38. \quad S_1 = -H \sec \sigma, \quad S_2 = +H \sec \tau.$$

Da σ und τ nur klein sind, so wird $\sec \sigma$ und $\sec \tau$ nur wenig von 1 abweichen, d. h. die Gurtspannungen sind im Allgemeinen nahezu konstant. Ist einer der Gurte gerade, so ist die Spannung dieses Gurtes wirklich konstant; beim Bogensehnenträger ist also die Spannung des Untergurtes, beim Fischbauchträger die des Obergurtes konstant.

Das grösste Moment in der Mitte ist $\frac{1}{8} q l^2$, daher ist für die Mitte, weil hier $\sigma = \tau = 0$ ist, $S_1 = S_2 = H = \frac{M}{h_1}$, d. i.

$$39. \quad H = \frac{q l^2}{8 h_1}.$$

2. Gitterwerk. Für das Eigengewicht, welches wir uns als gleichmässige Belastung denken, wird der Annahme zufolge $Y = 0$. Es ist

ferner $h = \frac{4h_1 x(l-x)}{l^2}$, $d \frac{h}{x} = -\frac{4h_1}{l^2} dx$, $d \frac{h}{l-x} = \frac{4h_1}{l^2} dx$. Dies in die letzteren der Ausdrücke 36 eingesetzt, gibt

$$40. \max(+Y) = +\frac{p x(l-x)}{2l}, \max(-Y) = -\frac{p x(l-x)}{2l}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass Y in jedem Querschnitte positiv und negativ werden kann und dass das positive und negative Maximum von Y einander gleich sind. Beim einfachen Gitterwerke kann hiernach jeder Gitterstab sowohl auf Zug als auf Druck beansprucht werden und zwar ist der grösste Zug gleich dem grössten Drucke. Dass $\max(-Y) = -\max(+Y)$ ist, geht auch einfach daraus hervor, dass sich die Belastungen, welche dem positiven und negativen Maximum von Y entsprechen, zur totalen Belastung ergänzen, für die totale Belastung aber $Y=0$, also $\max(+Y) + \max(-Y) = 0$ sein muss.

Da für die totale Belastung das durch die zufällige Last erzeugte Moment $M' = \frac{1}{2} p x(l-x)$ ist, so kann man auch setzen:

$$41. \max(\pm Y) = \pm \frac{M'}{l} = \pm \frac{1}{8} \frac{h}{h_1} p l.$$

Hiernach ist das Maximum von Y dem Maximum des Momentes oder der Trägerhöhe h proportional.

Die Spannungen P_1, P_2 der Gitterstäbe sind nun durch die Formeln 27 bestimmt.

Die Spannung der Gitterstäbe ist hiernach ihrer Länge proportional. Haben die Knotenpunkte einen konstanten Horizontalabstand, so ist auch die Spannung der einzelnen Gurtstücke ihrer Länge proportional.

§. 59. Parabelträger mit eintheiligem Doppelfachwerke. Wenn man steife Vertikalen und schlaife Diagonalen anwendet, so müssen doppelte Diagonalen oder sogenanntes Doppelfachwerk in Anwendung kommen, weil eine Diagonale nach dem vorigen Paragrafe auch auf Druck beansprucht werden könnte.

Die Gurte nehmen wir polygonal an und zwar so, dass die Ecken derselben auf zwei Parabeln liegen, deren Vertikalabstand in der Mitte $= h_1$ ist. Die Höhe h der Vertikalen im Abstände x von der linken Stütze wird alsdann

$$42. h = \frac{4x(l-x)h_1}{l^2}.$$

Der Abstand der Vertikalen sei e . Sind z', z'' die Höhen der beiden Parabeln in der Mitte, so sind die Gleichungen dieser beiden Parabeln

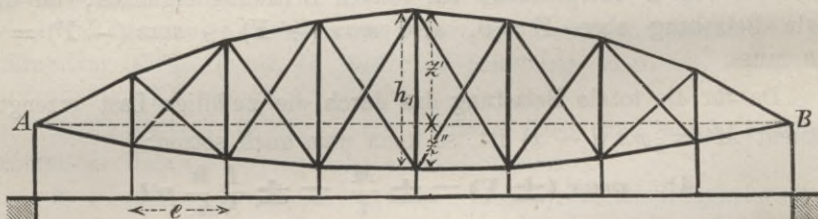
$$43. y' = \frac{4x_1(l-x_1)z'}{l^2}, \quad y'' = \frac{4x_1(l-x_1)z''}{l^2}.$$

Die Gurtstücke sind den Tangenten der Parabeln in der Mitte zwischen den betreffenden Vertikalen parallel. Sind daher σ , τ die Neigungen der beiden Gurtstücke auf der linken Seite der Vertikalen mit der Höhe h , so ist $\tan \sigma = \frac{dy'}{dx_1}$, $\tan \tau = \frac{dy''}{dx_1}$ für $x_1 = x - \frac{l}{2} e$. Nun aber ist $\frac{dy'}{dx_1} = \frac{4z'}{l^2} (l - 2x_1)$, $\frac{dy''}{dx_1} = \frac{4z''}{l^2} (l - 2x_1)$, also

$$44. \quad \tan \sigma = \frac{4z'}{l^2} (l - 2x + e), \quad \tan \tau = \frac{4z''}{l^2} (l - 2x + e).$$

Wir nennen das System, welches nur die nach rechts fallenden Diagonalen enthält (Fig. 94), das I., das System mit den nach links fallenden Diagonalen (Fig. 93) das II. System.

Fig. 88.



1. **Totale gleichmässige Belastung.** Nehmen wir die Last als gleichmässig über die Brücke vertheilt, aber nur 'an den Knotenpunkten auf die Träger übertragen an, so werden die Ecken des Seilpolygons oder der Momentenlinie stets auf einer Parabel, deren vertikale Axe durch die Mitte geht, liegen, mögen nun die Knotenpunkte einen gleichen oder ungleichen Abstand haben. Demnach ist das Moment für einen beliebigen Vertikalschnitt an einem Knotenpunkte oder zwischen denselben der betreffenden Höhe des Trägers proportional und zwar ist an allen Stellen

$$45. \quad \frac{M}{h} = \frac{ql^2}{8h_1}.$$

a) **Diagonalen.** Wir denken uns zunächst nur das I. System vorhanden. Da für alle Vertikalschnitte das Moment der betreffenden vertikalen Trägerhöhe proportional ist, so ist in Formel 5 (Seite 100) $\frac{M_1}{h_1} = \frac{M_2}{h_2}$, also $Y = 0$, d. h. die Spannung der Diagonale ist Null. Ganz dasselbe ergibt sich auch für eine Diagonale des II. Systemes. Bei totaler gleichmässiger Belastung sind also die Diagonalen ohne Spannung. Das Eigengewicht erzeugt hiernach keine Spannung in den Diagonalen.

b) **Gurte.** Die Bedingung für das Gleichgewicht eines Knotenpunktes fordert bei gleichmässiger Belastung, da hier die Diagonalen ohne Spannung sind, dass die Horizontalkomponenten H der auf beiden Seiten desselben wirkenden Gurtspannungen gleich sind. Legen wir einen

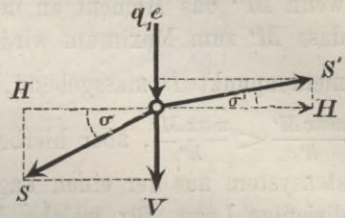
Vertikalschnitt durch den Träger, so ergibt das Gleichgewicht gegen Drehung sofort mit Rücksicht auf den Werth 45 von $\frac{M}{h}$:

$$46. \quad S_1 = -\frac{ql^2}{8h_1} \sec \sigma, \quad S_2 = +\frac{ql^2}{8h_1} \sec \tau.$$

Ist ein Gurt gerade, so ist die Spannung desselben also $= \frac{ql^2}{8h}$.

c) Vertikalen. Die Spannung V der Vertikalen ergibt sich leicht aus dem Gleichgewichte des oberen oder unteren Knotenpunktes. Ist q_1, q_2 die auf den Ober- und Untergurt wirkende Last pro Längeneinheit, σ, σ' der Neigungswinkel des oberen Gurtes auf beiden Seiten der Vertikale, so ist die Bedingung gegen Verschiebung in vertikaler Richtung (Fig. 89) $q_1 e - H \tan \sigma + H \tan \sigma' + V = 0$, also $V = -q_1 e + H(\tan \sigma - \tan \sigma')$, d. i. nach Formel 44:

Fig. 89.



$$V = -q_1 e + \frac{ql^2}{8h_1} \left[\frac{4z'}{l^2} (l - 2x + e) - \frac{4z''}{l^2} (l - 2x - e) \right] = -q_1 e + qe \frac{z'}{h_1}.$$

Da $q_1 = q - q_2$, $z' = h_1 - z''$ ist, so wird auch $V = +q_2 e - qe \frac{z''}{h_1}$, also

$$47. \quad V = -q_1 e + qe \frac{z'}{h_1} = +q_2 e - qe \frac{z''}{h_1}.$$

Für den Bogensehnenträger ist $z'' = 0$, also $V = +q_2 e$; hier werden die Vertikalen gezogen. Für den Fischbauchträger ist $z' = 0$, also $V = -q_1 e$; hier werden die Vertikalen gedrückt. Für den Fischträger ist $z' = z'' = \frac{1}{2} h_1$, also

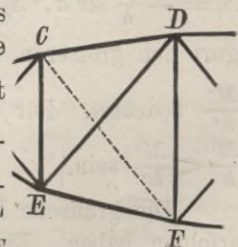
$$48. \quad V = -\frac{1}{2} (2q_1 - q) e = +\frac{1}{2} (2q_2 - q) e.$$

Haben die Endvertikalen vom Ende den Abstand e_0 , so ist für diese $\frac{1}{2}(e + e_0)$ statt e einzuführen.

2. Totale Belastung durch ein System von Einzellasten. Hier kommt nur die Spannung der Gurte und die positive Spannung der Vertikalen in Betracht.

a) Gurte. Man bestimmt in bekannter Weise für die einzelnen Vertikalen die Maximalmomente. Es beziehe sich M', h' auf die rechte, M'', h'' auf die linke Vertikale. Wenn nun $\frac{\max M''}{h''} > \frac{\max M'}{h'}$ ist, so ist natürlich auch $\frac{\max M''}{h''} > \frac{M'}{h'}$, wenn M' dasjenige Moment an der rechten Vertikalen DF (Fig. 90) bezeichnet, welches bei derselben Belastung wie $\max M''$ eintritt. Demnach ist nach §. 44 die Diagonale DE

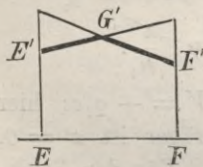
Fig. 90.



gezogen, folglich ist für den Obergurt CD der Momentenpunkt E massgebend, also $\max S_1 = -\frac{M''}{h''} \sec \sigma$. Für ein oberes Gurtstück kommt also von den für die Vertikalen bestimmten Werthen von $\frac{\max M}{h}$ immer der grössere der für die beiden begrenzenden Vertikalen giltigen Werthe in Betracht.

Schwieriger ist die Entscheidung hinsichtlich eines unteren Gurtstückes EF . Ist $\frac{\max M'}{h'} < \frac{\max M''}{h''}$ und zugleich auch $\frac{\max M'}{h'} < \frac{M''}{h''}$, wenn M'' das Moment an der rechten Vertikale bezeichnet für den Fall, dass M' zum Maximum wird, so wäre für das Gurtstück EF der Momentenpunkt D massgebend, also $\max S_2 = \frac{\max M'}{h'} \sec \tau$. Es sei nun aber $\frac{\max M'}{h'} < \frac{\max M''}{h''}$, aber hierbei $\frac{\max M'}{h'} > \frac{M''}{h''}$. Wir denken uns das Lastensystem aus der einen Lage, für welche M' zum Maximum wird, in diejenige Lage, für welche M'' zum Maximum wird, verschoben und tragen für jede Lage $\frac{M'}{h'}$ und $\frac{M''}{h''}$ als Ordinate an einer der Lasten auf;

Fig. 91.



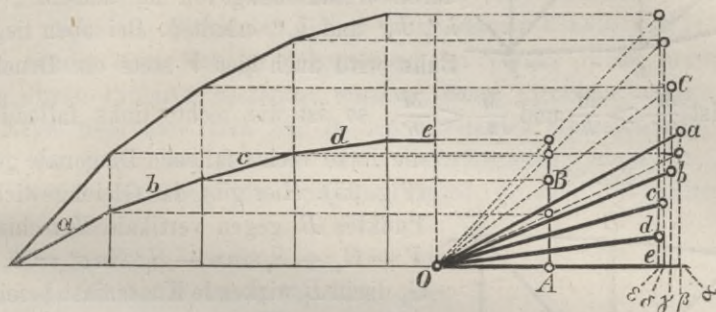
hierdurch ergeben sich zwei sich schneidende gerade oder gebrochene Linien (Fig. 91). Für jede Lage des Lastensystemes würde für die Spannung S_2 des Untergurtes nach §. 44 die kleinere der beiden Ordinaten, also in Fig. 91 die starke Linie $E'G'F'$ massgebend sein. S_2 wird demnach für die dem Punkte G' entsprechende Lage des Lastensystemes zum Maximum, d. h. für diejenige Lage, für welche $\frac{M'}{h'} = \frac{M''}{h''}$ ist, also keine der beiden Diagonalen gespannt ist. Da aber beim Parabelträger die Werthe von $\frac{M}{h}$ nur wenig von einander abweichen werden, so wird es immer genügen, wenn man, vorausgesetzt, dass $\frac{\max M'}{h'} < \frac{\max M''}{h''}$ ist, stets $\max S_2 = \frac{\max M'}{h'} \sec \tau$ setzt; man wird hierbei S_2 eher etwas zu gross als zu klein erhalten.

Hiernach würden die Maximalgurtspannungen nach der Regel $S_1 = -\frac{M}{h} \sec \sigma$, $S_2 = +\frac{M}{h} \sec \tau$ zu bestimmen sein, wenn $\frac{M}{h}$ für den Obergurt den grösseren, für den Untergurt den kleineren der Werthe $\frac{M'}{h'}$ und $\frac{M''}{h''}$ bedeutet. Für die linke Hälfte des Trägers wird in der Regel $\frac{M'}{h'} < \frac{M''}{h''}$ sein.

Die grafische Bestimmung der Spannungen würde nach §. 45 zu erfolgen haben. Eine etwas andere Anordnung der Darstellung zeigt

Fig. 92. Hierin ist OA gleich der Poldistanz H , AB gleich der in Frage kommenden Höhe h , γC gleich der in Frage kommenden Höhe y des Seilpolygones; $O\gamma$ ist alsdann $= \frac{Hh}{h} = \frac{M}{h}$.

Fig. 92.

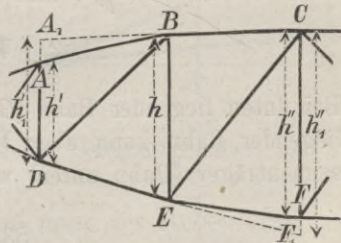


b. Vertikalen. Für irgend eine Belastung beziehe sich M, h auf die fragliche Vertikale, M', h' auf die rechte, M'', h'' auf die linke Vertikale. Es sind nun die folgenden vier Fälle möglich:

Ist $\frac{M'}{h'} > \frac{M}{h}$ und $\frac{M}{h} > \frac{M''}{h''}$, so sind die links fallenden Diagonalen gezogen (Fig. 93). Es mögen hier h_1', h_1'' die Höhen DA' und CF' , bis zur Verlängerung von CB und DE gerechnet, bezeichnen. Bei unten liegender Bahn folgt aus der vierten der Gleichungen 5 (S. 100), da hier die Spannung V gleich der Vertikalkraft Y ist,

$$49. \quad V = \left(\frac{M}{h} - \frac{M'}{h_1'} \right) \frac{h_1'}{e}.$$

Fig. 93.



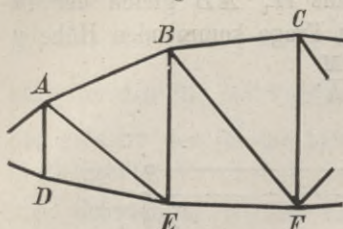
V kann hiernach sowohl Zug als Druck sein. Bei oben liegender Bahn wird $V = \left(\frac{M''}{h_1''} - \frac{M}{h} \right) \frac{h_1''}{e}$; da aber $\frac{M}{h} > \frac{M''}{h''}$ ist, so ist, weil $h_1'' > h''$ ist, auch $\frac{M}{h} > \frac{M''}{h_1''}$, mithin V stets ein Druck. Dieser Fall kommt also nicht weiter in Betracht. Allgemein ist $h_1' = h' + e \tan \tau$. Für den Bogensehenträger (Bahn unten) wird $h_1' = h + (h - h'') = 2h - h''$, daher

$$50. \quad V = \frac{M(2h - h'') - M'h}{eh}.$$

Beim Fischbauchträger liegt die Bahn stets oben, hier ist also V nur negativ. Beim Fischträger wird $h_1' = h + \frac{1}{2}(h - h'') = \frac{3}{2}h - \frac{1}{2}h''$, mithin bei unten liegender Bahn

$$51. \quad V = \frac{M(3h - h'') - 2M'h}{2eh}.$$

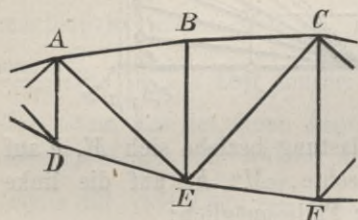
Fig. 94.



Ist umgekehrt $\frac{M''}{h''} > \frac{M}{h}$ und $\frac{M}{h} > \frac{M'}{h'}$, so sind die rechts fallenden Diagonalen gezogen (Fig. 94). Die Ausdrücke für V werden hier aus den soeben aufgestellten einfach durch Vertauschung von M' und M'' , h' und h'' , h_1' und h_1'' erhalten. Bei oben liegender Bahn wird auch hier V stets ein Druck sein.

Ist $\frac{M''}{h''} > \frac{M}{h}$ und $\frac{M}{h} < \frac{M'}{h'}$, so ist die rechte links fallende und die linke rechts fallende Diagonale gezogen

Fig. 95.



(Fig. 95). Hier gibt das Gleichgewicht des Punktes B gegen vertikale Verschiebung: $V + G_1 + S_1 \sin \sigma - S_1' \sin \sigma' = 0$, wenn G_1 die in B wirkende Knotenlast bezeichnet. Da $S_1 = -\frac{M}{h} \sec \sigma$, $S_1' = -\frac{M}{h} \sec \sigma'$ ist, so wird

$$V = \frac{M}{h} (\tan \sigma - \tan \sigma') - G_1.$$

Nun aber ist $\tan \sigma = \frac{4z'}{l^2} (l - 2x + c)$, $\tan \sigma' = \frac{4z'}{l^2} (l - 2x - e)$, also $\tan \sigma - \tan \sigma' = \frac{8z'e}{l^2}$, also

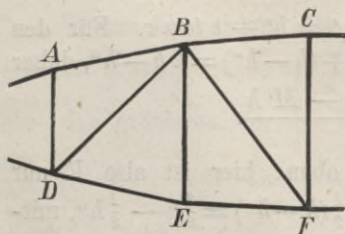
$$52. \quad V = \frac{8Mz'e}{l^2 h} - G_1.$$

Bei unten liegender Bahn ($G_1 = 0$) ist hier V stets ein Zug. Bei oben liegender Bahn kann aber V auch ein Druck sein. Für den Bogen-sehnenträger (Bahn unten) wird $z' = h_1$, $G_1 = 0$, also

$$53. \quad V = \frac{8Mh_1e}{l^2 h}.$$

Für den Fischbauchträger ist $z' = 0$, also $V = -G_1$, so dass hier im vorliegenden Falle kein Zug in der Vertikalen entstehen kann.

Fig. 96.



Ist endlich $\frac{M'}{h'} < \frac{M}{h}$ und $\frac{M}{h} > \frac{M''}{h''}$, so ist die rechte rechts fallende und die linke links fallende Diagonale gezogen (Fig. 96). Hier ergibt sich V durch das Gleichgewicht des unteren Knotenpunktes E in der eben gezeigten Weise zu

$$54. \quad V = -\frac{8Mz''e}{l^2 h} + G_2.$$

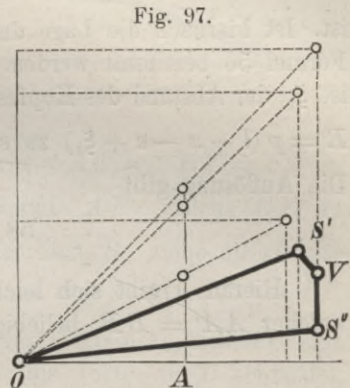
Bei oben liegender Bahn ($G_2 = 0$) ist hier V stets ein Druck. Bei unten liegender Bahn kann aber V auch ein Zug sein.

Für den Fischbauchträger (Bahn oben) ist $G_2 = 0$, also V negativ, so dass hier wiederum kein Zug in der Vertikalen eintreten kann. Für den Bogensehnenträger (Bahn unten) ist $z'' = 0$, also

$$55. \quad V = + G_2.$$

In der Regel wird der erste Fall (Fig. 93) eintreten. Welche Last an der fraglichen Vertikalen liegen muss, damit V zum positiven Maximum werde, lässt sich im Allgemeinen im Voraus nicht angeben und muss durch Probiren bestimmt werden. Beim Fischbauchträger wird in der Regel überhaupt kein Zug in den Vertikalen eintreten oder nur ein Zug, der gegen den grössten Druck verschwindend klein ist, so dass hier die Bestimmung des grössten Zuges in den Vertikalen unterbleiben kann.

Die grafische Bestimmung wird am einfachsten in der Weise durchgeführt, dass man, etwa nach Fig. 92, für die fragliche Lage des Lastensystemes die Werthe von $\frac{M}{h}$ für die drei in Betracht kommenden Vertikalen bestimmt, alsdann nach dem eben Gesagten entscheidet, welche Diagonalen gezogen sind und nun für einen Knotenpunkt an der mittleren Vertikalen das Kraftpolygon konstruirt. In Fig. 97 ist z. B. das Kraftpolygon für den Knotenpunkt B in Fig. 94 konstruirt.



3. Partielle Belastung. Für die partielle Belastung haben wir nur die Spannung der Gitterstäbe zu bestimmen.

a. Diagonalen. Für das I. System muss der rechte Theil, für das II. System dagegen der linke Theil belastet sein, damit die Spannung der Diagonalen positiv und zum Maximum werde. Es genügt, das I. System in Betracht zu ziehen, da man durch Umkehrung des Trägers (hinsichtlich der rechten und linken Seite) aus dem I. Systeme das II. System machen kann.

Für ein System von Einzellasten ergibt sich unter Beibehaltung der in §. 46 gebrauchten Bezeichnungen, wobei sich x auf das obere Ende der fraglichen Diagonale bezieht,

$$P = \left(\frac{R' \xi' (x + e)}{l h'} - \frac{R' \xi' x}{l h} - \frac{R \xi}{h'} \right) \operatorname{cosec} \alpha,$$

oder, wenn wir $h' = \frac{4h_1}{l^2} (x + e) (l - x - e)$, $h = \frac{4h_1}{l^2} x (l - x)$, also $\frac{h}{h'} = \frac{x(l-x)}{(x+e)(l-x-e)}$ setzen und die Länge $e \operatorname{cosec} \alpha$ des Stabes mit λ bezeichnen,

$$56. \quad P = \left(\frac{R' \xi' x + e}{l} - \frac{R \xi}{e} \right) \frac{\lambda}{h'}$$

$$= \frac{R' \xi' e (x + e) - R \xi l (l - x)}{4 (l - x) (l - x - e) (x + e)} \frac{l}{h_1} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Verschiebt man das Lastensystem um $\Delta \xi$ nach rechts, so wird die entsprechende Änderung ΔP von P :

$$\Delta P = \left(\frac{R' x + e}{l} - \frac{R}{e} \right) \frac{\lambda \Delta \xi}{h'}.$$

Hiernach ist das Lastensystem so zu stellen, das möglichst $R'l(x+e) = Rl(l-x)$ oder möglichst

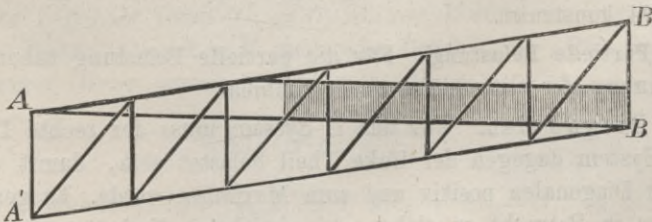
$$57. \quad \frac{R'}{R} = \frac{l(l-x)}{e(x+e)}$$

ist. Ist hiernach die Lage des Lastensystemes ermittelt, so kann P nach Formel 56 bestimmt werden. Ist die Last gleichmässig vertheilt und ist ξ_1 der Abstand des Kopfes von der rechten Vertikalen, so ist $R = p \xi_1$, $R' = p(l-x-e+\xi_1)$ zu setzen; sonach würde $\frac{l-x-e+\xi_1}{\xi_1} = \frac{l(l-x)}{e(x+e)}$. Die Auflösung gibt

$$58. \quad \xi_1 = \frac{x+e}{l+e} e.$$

Hieraus ergibt sich leicht die in Fig. 98 gezeigte Konstruktion, in welcher $AA' = BB'$ beliebig gross zu nehmen ist. Ist die Gleichung 58

Fig. 98.



erfüllt, so geht der Ausdruck 56 über in

$$P = \frac{R l^2 (\xi' - \xi)}{4 h_1 (x + e) (l - x - e)} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Setzt man hierin $R = p \xi_1$, $\xi = \frac{1}{2} \xi_1$, $\xi' = \frac{1}{2} (l - x - e + \xi_1)$, so erhält man

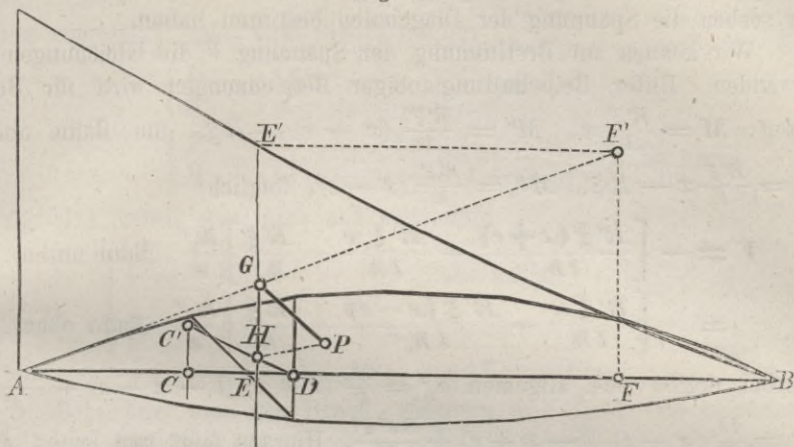
$$59. \quad \max (+P) = \frac{p e l^2}{8 h_1 (l + e)} \operatorname{cosec} \alpha = \frac{p l^2 \lambda}{8 h_1 (l + e)}.$$

Hiernach ist die Maximalspannung einer Diagonale ihrer Länge proportional.

Für die grafische Behandlung lassen sich aus den Eigenschaften der Parabel verschiedene Konstruktionen ableiten. Wir beschränken

uns auf die folgende: Aus dem ersten der Ausdrücke 56 ergibt sich sofort, wenn in dem fraglichen Fache CD (Fig. 99) eine Last R im Punkte E

Fig. 99.



liegt, die folgende Konstruktion: Man mache $BF = AC = x$, $EE' = FF' =$ dem linken Stützdrucke $\frac{R' \xi'}{l}$, ziehe die Gerade AF' , welche EE' in G schneidet. Ferner mache man $CC' =$ der Last R , ziehe die Gerade DC' , welche EE' in H schneidet. Alsdann ist $GH = \frac{R' \xi'}{l} \frac{x+e}{l-x} - \frac{R \xi}{e}$. Zieht man durch H eine Parallele zum oberen Gurtstücke, durch G eine Parallele zur fraglichen Diagonalen, welche die vorige in P schneidet, so ist $GP = GH \frac{\lambda}{h'} =$ der Spannung P .

Wenn eine Last im fraglichen Fache nicht liegt, also $R = 0$ ist, so ist $\frac{R' \xi'}{l}$ die Transversalkraft Q , also

$$60. \quad P = Q \frac{x+e}{l-x} \frac{\lambda}{h'}.$$

Für den Bogensehnenträger wird $\lambda = h \sec \alpha$; setzt man $\frac{h}{h'} = \frac{x(l-x)}{(x+e)(l-x-e)}$, so wird

$$61. \quad P = Q \frac{x}{l-x+e} \sec \alpha.$$

Für den Fischbauchträger wird $\lambda = h' \sec \alpha$, also

$$62. \quad P = Q \frac{x+e}{l-x} \sec \alpha.$$

Nimmt man alle Punkte rechts vom fraglichen Fache mit $p e$ belastet an, so wird $Q = \frac{1}{2} p \frac{(l-x)(l-x-e)}{l}$, daher

$$63. \quad P = \frac{p(x+e)(l-x-e)\lambda}{2lh'} = \frac{p l \lambda}{8h_1}.$$

b. Vertikalen. Die Spannung der Vertikalen ist nur für dasjenige der durch Zerlegung entstandenen Systeme zu bestimmen, für welches sich die Spannung der Diagonalen positiv ergibt, also für dasjenige, für welches wir soeben die Spannung der Diagonalen bestimmt haben.

Wir können zur Bestimmung der Spannung V die Gleichungen 49 anwenden. Unter Beibehaltung obiger Bezeichnungen wird für Bahn unten:

$$M = \frac{R' \xi'}{l} x, \quad M' = \frac{R' \xi'}{l} (x + e) - R \xi, \quad \text{für Bahn oben:}$$

$$M = \frac{R' \xi'}{l} x - R \xi, \quad M'' = \frac{R' \xi'}{l} (x - e), \quad \text{folglich:}$$

$$64. \quad V = - \left[\frac{R' \xi' (x+e)}{l h_1'} - \frac{R' \xi' x}{l h} - \frac{R \xi}{h_1'} \right] \frac{h_1'}{e} \quad (\text{Bahn unten}),$$

$$= - \left[\frac{R' \xi' x}{l h} - \frac{R' \xi' (x-e)}{l h_1''} - \frac{R \xi}{h} \right] \frac{h_1''}{e} \quad (\text{Bahn oben}).$$

$$\text{Hierbei ergibt sich allgemen } h_1' = \frac{4h_1}{l^2} (x + e) (l - x - e) + \frac{8e^2 z'}{l^2},$$

$$h_1'' = \frac{4h_1}{l^2} (x - e) (l - x + e) + \frac{8e^2 z''}{l^2}. \quad \text{Hieraus folgt nun leicht, dass}$$

man für das Maximum der Beanspruchung den Zug so stellen muss, dass möglichst:

$$65. \quad \begin{cases} \frac{R}{R'} = \frac{e h - x (h_1' - h)}{l h} & (\text{Bahn unten}), \\ \frac{R}{R'} = \frac{e h - x (h - h_1'')}{l h_1''} & (\text{Bahn oben}) \end{cases}$$

ist. Ist hiernach die Lage des Lastensystemes bestimmt, so kann die Berechnung von V selbst nach der Gleichung 64 erfolgen.

Für den Bogensehenträger (Bahn unten) wird $h_1' - h = \frac{4h_1 e}{l^2} (l - 2x + e)$. Dies eingesetzt, gibt, dass möglichst

$$66. \quad \frac{R}{R'} = \frac{e (x - e)}{l (l - x)}.$$

werden muss und zwar wird

$$67. \quad V = \frac{R' \xi' x - e}{l} \frac{R \xi}{l - x} - \frac{R \xi}{e}.$$

Hieraus ergibt sich leicht eine der in Fig. 99 für die Diagonalen angegebenen Konstruktion entsprechende Konstruktion.

Für den Fischbauchträger (Bahn oben) wird $h_1'' = \frac{4h_1}{l^2} (l x - x^2 - e l + 2e x + e^2)$, $h - h_1'' = \frac{4h_1 e}{l^2} (l - 2x - e)$; daher ergibt sich, dass möglichst

$$68. \quad \frac{R}{R'} = \frac{e x (x + e)}{l [x (l - x) - e (l - 2x - e)]}$$

sein muss und zwar wird

$$69. \quad V = \frac{R' \xi' x + e}{l} \frac{R \xi x (l - x) - e (l - 2x - e)}{l - x} - \frac{R \xi}{e} \frac{x (l - x)}{x (l - x)}.$$

Für den Fischträger endlich wird $h_1' = \frac{4h_1}{l^2} (lx - x^2 - 2ex + el)$,
 $h_1'' = \frac{4h_1}{l^2} (lx - x^2 + 2ex - el)$, $h_1' - h = h - h_1'' = \frac{4h_1}{l^2} (l - 2x)$.
 Dies eingesetzt, gibt, dass die Bedingung

$$70. \quad \begin{cases} \frac{R}{R'} = \frac{ex}{l(l-x)}, & \text{(Bahn unten)} \\ \frac{R}{R'} = \frac{ex^2}{l[x(l-x) - e(l-2x)]}, & \text{(Bahn oben)} \end{cases}$$

möglichst erfüllt sein muss und zwar wird

$$71. \quad \begin{cases} V = \frac{R'\xi'}{l} \frac{x}{l-x} - \frac{R\xi}{e}, & \text{(Bahn unten)} \\ V = \frac{R'\xi'}{l} \frac{x}{l-x} - \frac{R\xi}{e} \frac{x(l-x) - e(l-2x)}{x(l-x)}, & \text{(Bahn oben)}. \end{cases}$$

Bezeichnet man den Bruch, welchem sich $\frac{R}{R'}$ für die gefährlichste Belastungsweise möglichst nähern muss, mit k , so muss für gleichmässige Belastung für Bahn unten $\frac{l-x-e+\xi_1}{\xi_1} = k$, oder $\xi_1 = \frac{l-x-e}{k-1}$, für Bahn oben $\frac{l-x+\xi_1}{\xi_1} = k$ oder $\xi_1 = \frac{l-x}{k-1}$ sein. Hieraus folgt für den Bogensehenträger

$$72. \quad \xi_1 = \frac{(l-x-e)(x-e)}{l(l-x) - e(x-e)} e,$$

für den Fischbauchträger

$$73. \quad \xi_1 = \frac{x(x+e)}{l(x-e) + e(x+e)} e$$

und für den Fischträger

$$74. \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{(l-x-e)x}{l(l-x) - ex} e, & \text{(Bahn unten)} \\ \xi_1 = \frac{x^2}{lx - e(l-x)} e, & \text{(Bahn oben)}. \end{cases}$$

Bei sehr kleinem e wird für alle Fälle annähernd $\xi_1 = \frac{x}{l} e$.

Ist die Gleichung 65 genau erfüllt, so wird

$$V = \frac{R(\xi' - \xi)}{e}.$$

Hierin ist $R = p\xi_1$, $\xi' - \xi$ für Bahn unten $= \frac{1}{2}(l-x-e)$, für Bahn oben $= \frac{1}{2}(l-x)$. Daher wird für den Bogensehenträger

$$75. \quad \max(-V) = -\frac{p(l-x-e)^2(x-e)}{2[l(l-x) - e(x-e)]},$$

für den Fischbauchträger

$$76. \quad \max(-V) = -\frac{px(l-x)(x+e)}{2[l(x-e) + e(x+e)]}$$

und für den Fischträger

$$77. \begin{cases} \max(-V) = -\frac{px(l-x-e)^2}{2[l(l-x)-ex]}, & \text{(Bahn unten),} \\ \max(-V) = -\frac{px^2(l-x)}{2[x-e(l-x)]}, & \text{(Bahn oben).} \end{cases}$$

Bei sehr kleinem e wird annähernd in allen Fällen $\max(-V) = \frac{px(l-x)}{2l} = \frac{plh}{8h_1}$.

Die Werthe von V für links fallende Diagonalen erhält man, indem man $l-x$ für x setzt. Es ergibt sich hierdurch, dass V auf der linken Seite für rechts fallende, auf der rechten Seite dagegen für links fallende Diagonalen zum Maximum wird.

Wenn eine Last im fraglichen Fache nicht liegt, also $R=0$ ist, so ist $\frac{R'\xi'}{l}$ die Transversalkraft Q . Alsdann ergibt sich

$$78. \begin{cases} \max(-V) = -Q \frac{x-e}{l-x} \left(1 - 2 \frac{z'}{h_1} \frac{e}{x+e}\right), & \text{(Bahn unten),} \\ \max(-V) = -Q \frac{x-e}{l-x} \left(1 + 2 \frac{z''}{h_1} \frac{e}{x-e}\right), & \text{(Bahn oben).} \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich für die einzelnen Fälle leicht:

$$79. \begin{cases} \text{Bogensehenträger: } \max(-V) = -Q \frac{x-e}{l-x}, \\ \text{Fischbauchträger: } \dots \max(-V) = -Q \frac{x+e}{l-x}, \\ \text{Fischträger: } \dots \dots \max(-V) = -Q \frac{x}{l-x}. \end{cases}$$

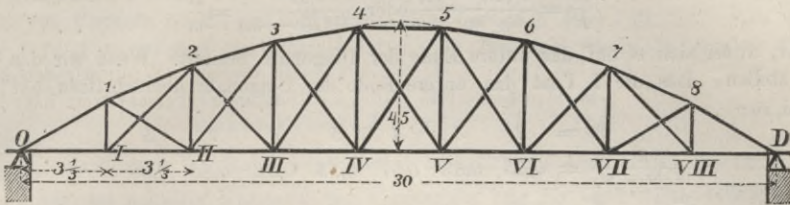
Nimmt man jeden der belasteten Punkte mit pe belastet an, so wird für Bahn unten: $Q = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x-e)$, dagegen für Bahn oben: $Q = \frac{p}{2l}(l-x)(l-x+e)$, mithin:

$$80. \begin{cases} \text{Bogensehenträger: } \dots \max(-V) = -\frac{p(x-e)(l-x-e)}{2l}, \\ \text{Fischbauchträger: } \dots \max(-V) = -\frac{p(x+e)(l-x+e)}{2l}, \\ \text{Fischträger} \begin{cases} \text{Bahn unten: } \max(-V) = -\frac{px(l-x-e)}{2l}, \\ \text{Bahn oben: } \max(-V) = -\frac{px(l-x+e)}{2l}. \end{cases} \end{cases}$$

§. 60. **Beispiele.** Zur weiteren Erläuterung führen wir im Folgenden drei Beispiele durch, bei welchen die verschiedene Gurtform und verschiedene Form des Gitterwerkes berücksichtigt ist.

I. Beispiel. Eingleisige Brücke von 30 Meter Spannweite mit Bogensehnen-trägern und eintheiligem Doppelfachwerke; die Höhe h_1 der Parabel in der Mitte sei 4,5 Meter; die Vertikalen theilen die Spannweite in 9 gleiche Theile von $\frac{30}{9} = 3,333$ Meter (Fig. 100). Das Eigengewicht sei für einen Träger 1,0 Tonnen pro laufenden

Fig. 100.



Meter und zwar komme 0,3 Tonnen auf den Obergurt, 0,7 Tonnen auf den Untergurt. Die zufällige Last bestehe aus einem Zuge aus drei Lokomotiven; das entsprechende System von Einzellasten sei durch die folgenden Zahlen gegeben:

Entfernung: 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 Met.
Achsendruck: 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 Ton.

Nach Formel 42 wird die Höhe der m ten Vertikalen

$$h_m = \frac{2}{9} m (9 - m) \text{ Meter.}$$

Hiernach ergibt sich

$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h = 0$	1,788	3,111	4,000	4,444	4,444	4,000	3,111	1,778	0 Meter.

1. Gurte. Die Spannung des Untergurtes in Folge des Eigengewichtes ist nach Formel 46

$$S_2 = + \frac{1,0 \cdot 30^2}{8 \cdot 4,5} = + 25 \text{ Tonnen;}$$

die des Obergurtes wird daher $-25 \sec \sigma$. Die Spannung der Gurte in Folge der zufälligen Last ist $S_1 = -\frac{M}{h} \sec \sigma$, $S_2 = +\frac{M}{h}$, wobei nach dem vorigen Paragraphen für S_1 der grössere, für S_2 dagegen der kleinere der beiden Werthe von $\frac{M}{h}$, welche für die das fragliche Gurtstück eingrenzenden Vertikalen gelten, massgebend ist. Die Querschnittsfläche ist, entsprechend dem §. 5, nach der Regel

$$f = \frac{S_g}{1,4} + \frac{S_p}{0,6}$$

berechnet, wenn S_g , S_p die Spannungen in Folge des Eigengewichtes und der zufälligen Last bezeichnen. Die Rechnungsresultate gibt die folgende Tabelle:

Vertikale	h	max M für zuf. Last	max M h	Nr. der Last an der Vertik.	$\sec \sigma$	Spannung				Querschn.	
						Obergurt		Untergurt		Ober- gurt	Unter- gurt
						Eigeng.	Zuf. L.	Eigeng.	Zuf. L.		
0	0,533	34,29	64,4	II	—	—	+				
1	1,778	114,7	64,4	II	1,134	28,4	73,9	25,0	64,4	141,0	125,2
2	3,111	192,5	61,9	III	1,077	26,9	66,7	25,0	61,9	130,4	121,1
3	4,000	242,6	60,7	VII	1,035	25,9	62,8	25,0	60,7	122,8	119,1
4	4,444	266,2	59,9	VIII	1,008	25,2	60,4	25,0	59,9	118,7	117,7
5	4,444	266,2	59,9	VIII	1,000	25,0	59,9	25,0	59,9	117,7	117,7

Met.

Tonn. Met.

Ton.

Tonnen

□ Centim.

2. **Diagonalen.** Das Eigengewicht führt keine Spannung der Diagonalen herbei, so dass hier nur die zufällige Last zu berücksichtigen ist. Wir ziehen zunächst das System I. mit nach rechts fallenden Diagonalen in Betracht. Der Zug muss hierbei von rechts über das untere Ende *C* der Diagonale so weit vorgeschoben werden, dass eine Last bei *C* liegt und nach Formel 58 möglichst

$$\frac{R'}{R} = \frac{9(10 - m)}{m} \text{ oder } \frac{R'}{9(10 - m)} = \frac{R}{m}$$

wird, wobei sich *m* auf das untere Ende der Diagonale bezieht. Wenn wir den Zug so stellen, dass die I. Last das untere Ende der Diagonale überschritten hat, so wird für

$$\begin{array}{cccccccc} m = & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{R'}{9(10 - m)} = & 0,85 & 0,83 & 0,97 & 0,73 & 0,92 & 0,85 & 1,08 \\ \frac{R}{m} = & 3,25 & 2,17 & 1,63 & 1,30 & 1,08 & 0,93 & 0,81. \end{array}$$

Hiernach muss für jede Diagonale die Last I. am unteren Ende der Diagonale liegen; nur für die Diagonale im 8. Felde muss die Last II. am unteren Ende der Diagonale liegen. Die Berechnung der Maximalspannungen *P* ist in der folgenden Tabelle nach der ersten der Formeln 56 durchgeführt, worin $\frac{R' \xi'}{l}$ den linken Stützdruck *D* bedeutet und $\frac{x + e}{l - x} = \frac{m}{10 - m}$ zu setzen ist. Die untere Spannungsgrenze ist hier Null; daher ist die Querschnittsfläche im Sinne des §. 5 nach der Regel $f = \frac{1,3 \cdot P}{0,77} = \frac{P}{0,6}$ zu berechnen.

Bezeichn. der Diagonalen	<i>h'</i>	<i>λ</i>	<i>D</i>	$\frac{m}{10 - m}$	$\frac{P h'}{\lambda}$	<i>P</i>	Quer- schnitt
I 2	3,111	3,777	26,98	$\frac{1}{4}$	6,75	8,19	13,7
II 3	4,000	4,563	20,57	$\frac{3}{7}$	8,82	10,06	16,8
III 4	4,444	5,204	14,72	$\frac{2}{3}$	9,48	11,10	18,5
IV 5	4,444	5,555	10,18	$\frac{1}{2}$	10,18	12,73	21,2
V 6	4,000	5,555	6,51	$\frac{2}{5}$	9,77	13,56	22,6
VI 7	3,111	5,204	3,50	$\frac{7}{3}$	8,17	13,66	22,7
VII 8	1,778	4,563	2,17	$\frac{4}{2}$	6,12	15,81	26,3
	Meter		Ton.		Tonnen		□ Centim

Die nach links fallenden Diagonalen haben dieselben Spannungen und Querschnittsflächen in umgekehrter Reihenfolge.

3. **Vertikalen.** Die Vertikalen haben in Folge des Eigengewichtes einen Zug aufzunehmen, welcher nach Formel 47 = $0,7 \cdot 3,333 = 2,33$ Tonnen ist.

Ebenso entsteht bei totaler Belastung durch die zufällige Last ein Zug in den Vertikalen. Die Last, bei welcher derselbe am grössten wird, lässt sich nur durch Probiren bestimmen. Es handle sich beispielsweise um die Vertikale 2. Die Werthe von $\frac{M}{h}$ für die Vertikalen 1, 2, 3 werden a) wenn die Last I an der Vertikalen liegt,

50,3 57,8 57,5, b) wenn die Last II daselbst liegt, 54,0 59,0 55,8, c) wenn die Last III daselbst liegt, 61,3 62,5 59,1; ferner d) wenn die Last IV an der Vertikalen liegt, 56,9 56,4 56,4, e) wenn die Last V daselbst liegt, 42,7 42,4 45,1 und endlich f) wenn die Last VI daselbst liegt, 55,9 57,4 58,4. Hiernach sind in den Fällen a), b), c) die Diagonalen 1 II und 3 II, im Falle d) nur die Diagonale 2 I, im Falle e) die Diagonalen 2 I und 2 III und im Falle f) die Diagonalen 1 II und 2 III gezogen. Nach den Formeln 50, 53 und 55 ergibt sich bezüglich $V = 7,71 \ 7,87 \ 8,34 \ 7,43 \ 9,45 \ 6,44$ Ton., so dass hier $\max(+V) = 9,45$ Ton. sein würde. In gleicher Weise ergibt sich

Vertikale	1	2	3	4
$\max(+V)$	14,4	9,5	9,6	11,8.

An der betreffenden Vertikalen liegt hierbei bezüglich die Last II, VI, V, IX.

Für das negative Maximum von V muss der Zug für nach rechts fallende Diagonalen so gestellt werden, dass möglichst $\frac{R'}{9(9-m)} = \frac{R}{m-1}$ wird. Stellen wir den Zug so, dass die erste Last das untere Ende der rechts von der fraglichen Vertikalen liegenden Diagonalen überschritten hat, so wird

$m =$	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{R'}{9(9-m)}$	0,83	0,97	0,73	0,92	0,89	1,08	0,72
$\frac{R}{m-1}$	6,50	3,25	2,17	1,63	1,30	1,08	0,93.

Für sämtliche Vertikalen muss demnach die erste Last am unteren Ende der rechten Diagonale liegen. Die Berechnung von V ist nun nach der Formel 67 durchzuführen, worin $\frac{R' \xi'}{l}$ den linken Stützendruck D bedeutet und $\frac{x-e}{l-x} = \frac{m-1}{9-m}$ zu setzen ist. Die Resultate der Rechnung gibt die folgende Tabelle:

Vertikale	D	$\frac{m-1}{9-m}$	V
2	20,57	$\frac{1}{7}$	2,94
3	14,72	$\frac{1}{3}$	4,91
4	10,18	$\frac{2}{5}$	6,11
5	6,51	1	6,51
6	3,50	$\frac{5}{3}$	5,85
7	1,32	3	3,96
8	0	7	0
	Tonnen		Tonnen

Von den Spannungen zweier symmetrisch liegender Vertikalen ist nur die grössere beizubehalten, da bei umgekehrter Richtung des Zuges die Vertikalen in umgekehrter Reihenfolge beansprucht werden. Ist V_g der Zug in Folge des Eigengewichtes, $\max(+V_p)$ und $\max(-V_p)$ der grösste Zug und Druck in Folge der zufälligen Last, so ist im Sinne des §. 5 die Querschnittsfläche f zu setzen:

$$\text{für Zug: } f_1 = + \frac{V_g}{1,4} + \frac{\max(+V_p)}{0,6} + \frac{\max(-V_p)}{1,3}$$

$$\text{für Druck: } f_2 = - \frac{V_g}{1,4} + \frac{\max(-V_p)}{0,6} + \frac{\max(+V_p)}{1,3}$$

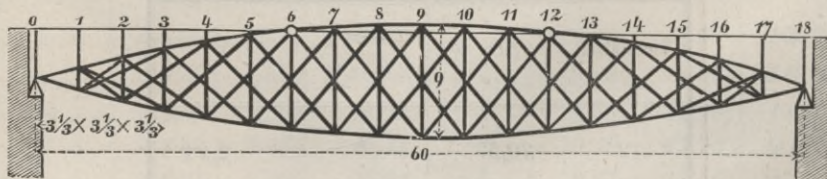
Die Resultate der Rechnung gibt folgende Tabelle:

Vertikale	V_g	$\max(-V_p)$	$\max(+V_q)$	Querschnitt	
				für Zug	für Druck
1	2,33	0	14,4	25,7	9,4
2	2,33	3,96	9,5	20,5	12,3
3	2,33	5,85	9,6	22,8	15,5
4	2,33	6,51	11,8	26,3	18,3
5	2,33	6,51	11,8	26,3	18,3
6	2,33	5,85	9,6	22,2	15,5
7	2,33	3,96	9,5	20,5	12,3
8	2,33	0	14,4	25,7	1,4

Tonnen □ Centimeter

II. Beispiel. Eingleisige Eisenbahnbrücke mit Fischträgern. Die Träger haben 60 Meter Spannweite und in der Mitte die Parabelhöhe $h_1 = 9$ Meter. Das Gitterwerk sei zweitheiliges Doppelfachwerk, dessen Vertikalen den Abstand $e = \frac{1}{18} l = 3 \frac{1}{3}$ Meter haben. Die Bahn habe die in Fig. 101 angegebene Lage. Das Eigengewicht sei

Fig. 101.



für einen Träger 1,7 Ton. pro lauf. Met. wovon 0,4 Ton. auf die Bahn kommen. Die zufällige Last wollen wir nur als gleichmässig vertheilt annehmen und zwar für die Gurte zu 2,3, für das Gitterwerk zu 2,5 Ton. pro lauf. Meter. Alsdann wird für die Gurte $q = 1,7 + 2,3 = 4,0$; $g = 0,43 q$, $p = 0,57 q$, für das Gitterwerk $q = 1,7 + 2,5 = 4,2$, $g = 0,40 q$, $p = 0,60 q$. Die zulässige Inanspruchnahme (nach der gewöhnlichen Auffassung) sei 0,75 Ton. pro □ Centim.

Die Höhe h_m der m ten Vertikale wird $h_m = \frac{4m(18-m)^2}{3 \cdot 4}$, d. i.

$$h_m = \frac{1}{9} m(18-m).$$

Hiernach wird:

$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h_m = 0$	1,889	3,556	5,000	6,222	7,222	8,000	8,222	8,889	9 Met.

1. Gurte. Die Spannung eines Gurtstückes in jedem der beiden Elementarsysteme ist nach Formel 46 mit Rücksicht auf den §. 51 $= \frac{1}{2} \frac{q l^2}{8 h_1} \sec \sigma$; mithin ist die Spannung dieses Gurtstückes in dem gegebenen Systeme $= 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{q l^2}{8 h_1} \sec \sigma$, d. i.

$$-S_1 = +S_2 = \frac{q l^2 \sec \sigma}{8 h_1} = \frac{4,0 \cdot 60^2}{8 \cdot 9} \sec \sigma = 200 \sec \sigma.$$

Sonach wird die nöthige Querschnittsfläche f eines Gurtes: $f = \frac{200}{0,75} \sec \sigma$, d. i.
 $f = 266,67 \sec \sigma$ Centim.

Hierbei ist, da die Vertikalen, welche das m te Gurtstück begrenzen, die Höhen h_m und h_{m-1} haben, $\tan \sigma = \frac{h_m - h_{m-1}}{2e} = \frac{19 - 2m}{60}$, $\sec \sigma = \sqrt{1 + \tan^2 \sigma}$. Hiernach ergibt sich

m	$\tan \sigma$	$\sec \sigma$	f
1	0,283	1,039	277,1
2	0,250	1,031	274,9
3	0,217	1,024	273,1
4	0,189	1,018	271,5
5	0,150	1,011	269,6
6	0,167	1,007	268,5
7	0,083	1,003	267,5
8	0,050	1,001	266,9
9	0,017	1,000	266,7

Centim.

2. Diagonalen. Das Eigengewicht ruft in den Diagonalen keine Spannung hervor. Die ungünstigste Belastungsweise hinsichtlich der zufälligen Last ist für die rechts fallenden Diagonalen diejenige, bei welcher die Last vom rechten Ende bis zu der die fragliche Diagonale kreuzenden Vertikalen reicht. Die Maximalspannung wird nach Formel 63 mit Rücksicht auf §. 50

$$P = \frac{1}{2} \frac{p l \lambda}{8 h_1} = \frac{2,5 \cdot 60 \cdot \lambda}{2 \cdot 8 \cdot 9} = 1,042 \lambda,$$

also die entsprechende Querschnittsfläche $f_1 = \frac{1,042 \lambda}{0,75}$, d. i.

$$f_1 = 1,389 \lambda.$$

Die Länge λ des Gitterstabes ist, wenn m den Index der die Diagonale kreuzenden Vertikalen bedeutet,

$$\lambda = \sqrt{40^2 + (h_{m+1} + h_{m-1})^2}.$$

Hiernach ergeben sich die folgenden Resultate:

m	λ	f_1	m	λ	f_1
1	4,72	6,6	10	18,46	25,7
2	9,59	13,3	11	18,16	25,2
3	11,74	16,3	12	16,82	23,8
4	13,92	19,3	13	15,71	21,8
5	15,71	21,8	14	13,92	19,3
6	16,82	23,8	15	11,74	16,3
7	18,16	25,2	16	9,59	13,3
8	18,46	25,7	17	4,72	6,6
9	18,99	26,4			

Meter Centim. Meter Centim.

3. Vertikalen. a) Einfluss des Eigengewichtes. Die am Obergurte in den Knotenpunkten 1 bis 6 und 12 bis 17 wirkende Last ist $\frac{1}{2}(1,7 - 0,4) + 0,4 = 1,05$ Ton. pro lauf. Met. Sonach ist nach Formel 48 die Spannung der Vertikalen 1 bis 6: $V = -\frac{1}{2}(2 \cdot 1,05 - 1,7) \frac{10}{3}$, d. i.

$$V = -0,667 \text{ Ton.}$$

Bei den Vertikalen 7, 8, 9, 10, 11 wirkt am Obergurte $\frac{1}{2}(1,7 - 0,4) = 0,65$ Ton. pro lauf. Met., am Untergurte ebenfalls 0,15 Ton. pro lauf. Meter. Sonach wird nach Formel 48 die Spannung im oberen Theile $V_1 = -\frac{1}{2}(2 \cdot 0,65 - 1,7) \frac{10}{3}$, die Spannung im unteren Theile $V_2 = +\frac{1}{2}(2 \cdot 0,65 - 1,7) \frac{10}{3}$, d. i.

$$V_1 = +0,667 \text{ Ton.}, V_2 = -0,667 \text{ Ton.}$$

b) Einfluss der zufälligen Last. Einen Zug kann die zufällige Last nur im oberen Theile der Vertikalen 7 bis 11 hervorbringen. Derselbe ist nach Formel 48: $V_1 = \frac{1}{2} 2,5 \cdot \frac{10}{3}$, d. i.

$$V_1 = +4,167 \text{ Tonnen.}$$

Der grösste Druck entsteht durch partielle Belastung. Nach den Formeln 80 wird für die Vertikalen 1 bis 6, 12 bis 17 und den unteren Theil der Vertikalen 7 bis 11

$$V = -\frac{1}{2} \frac{2,5 m (18 - m + 2)}{2 \cdot 18} \frac{10}{3} = \frac{25 m (20 - m)}{216},$$

und nach denselben Formeln für den oberen Theil der Vertikalen 7 bis 11

$$V = -\frac{1}{2} \frac{2,5 m (18 - 2 m - 1)}{2 \cdot 18} \frac{10}{3} = \frac{25 m (16 - m)}{216}.$$

Vereinigen wir die Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung und bestimmen wir die Querschnittsfläche durch Division mit 0,75, so ergibt sich als Querschnittsfläche f für die Vertikalen 1 bis 6, 12 bis 17, welche einen Zug überhaupt nicht aufzunehmen haben,

$$f_2 = \frac{8}{9} + \frac{25 m (20 - m)}{162} \square \text{ Centim.}$$

Für den unteren Theil der Vertikalen 7 bis 11 gilt dieselbe Formel, während für den oberen Theil derselben der Zug $0,667 + 4,167$, der Druck $+0,667 - \frac{25 m (26 - m)}{216}$, also die Querschnittsfläche

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Zug: } f_2 = \frac{58}{9} = 7,22 \\ \text{für Druck: } f_2 = -\frac{8}{9} + \frac{25 m (16 - m)}{162} \end{array} \right\} \square \text{ Centim.}$$

wird. Für die Vertikalen 1 und 17 ist der hier stattfindenden Unregelmässigkeit wegen die Rechnung direkt durch Zerlegung in zwei eintheilige Systeme, etwa nach der vierten der Gleichungen 6 (Seite 100) durchzuführen. Die Resultate der Rechnung sind:

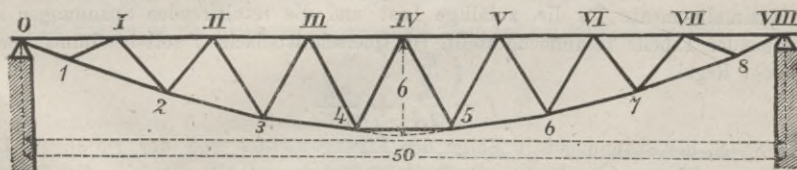
m	f ₂		m	f ₂		
	oben für Zug	unten für Druck		oben für Zug	unten für Druck	
1	—	8,4	10	7,2	8,4	16,3
2	—	6,4	11	7,2	7,6	16,2
3	—	8,8	12	—	—	18,7
4	—	10,8	13	—	—	14,9
5	—	12,5	14	—	—	13,9
6	—	13,9	15	—	—	12,5
7	7,2	8,8	16	—	—	10,8
8	7,2	9,0	17	—	—	9,2
9	7,2	8,8				

□ Centimeter

Da hierbei die rechts fallenden Diagonalen als gezogen angenommen wurden, während bei Umkehrung der Belastung die links fallenden Diagonalen gezogen werden, so ist von den Querschnitten je zweier symmetrisch liegender Vertikalen nur der grössere (in der Tabelle fett gedruckt) beizubehalten.

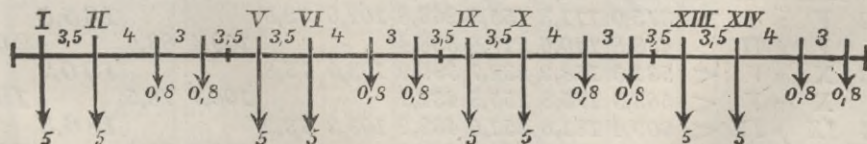
III. Beispiel. Strassenbrücke von 50 Meter Spannweite und Fischbauchträgern und eintheiligem Netzwerke (Fig. 102); die Höhe h_1 der Parabel in der Mitte

Fig. 102.



sei 6 Meter, die Horizontalentfernung der Knotenpunkte $\frac{50}{8} = 6,25$ Meter. Das Eigengewicht sei 2,0 Tonnen pro Meter, wovon 1,2 Tonnen auf die Bahn kommen, so dass an einem oberen Knotenpunkte $6,25 \left[\frac{1}{2}(2,0 - 1,2) + 1,2 \right] = 10,0$ Ton., an einem unteren Knotenpunkte $6,25 \cdot \frac{1}{2}(2,0 - 1,2) = 2,5$ Ton. wirken. Die zufällige Last sei hinsichtlich des Menschengedränges auf den Fusswegen 0,6 Ton. pro Meter und hinsichtlich der Belastung durch die Wagen durch Fig. 103 bestimmt.

Fig. 103.



Die Höhe h an einem Knotenpunkte des Untergurtes, welcher die Horizontalentfernung x vom linken Ende hat, ist $h = 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) h_1$, oder für $x = m e : h = 4 \frac{m}{8} \left(1 - \frac{m}{8} \right) 6$, d. i.

$$h = \frac{3}{8} m (8 - m).$$

Die Höhe h an einem Knotenpunkte des Obergurtes ist das arithmetische Mittel aus den Höhen an den benachbarten Knotenpunkten des Untergurtes, also, wenn der Knotenpunkt den Abstand me vom linken Ende hat, $h = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(8 - m + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(8 - m - \frac{1}{2} \right) \right]$, d. i.

$$h = \frac{2}{32} (32m - 4m^2 - 1).$$

Die hiernach berechneten Höhen, sowie die jetzt leicht zu bestimmenden Winkelfunktionen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Punkt		Höhe	Untergurt		Gitterstäbe	
oben	unten	h	$\tan \tau$	$\sec \tau$	$\cot \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
0		0				
	1	1,406	0,450	1,097		
I		2,531	0,360	1,063	0,450	1,097
	2	3,656			1,170	1,539
II		4,406	0,240	1,028	1,170	1,539
	3	5,156			1,650	1,930
III		5,531	0,120	1,007	1,650	1,930
	4	5,906			1,890	2,138
IV		5,906	0	1	1,890	2,138
Meter						

1. Gurte. Die Spannung des Ober- und Untergurtes ist bezüglich $\frac{M}{h}$ und $\frac{M}{h} \sec \tau$. Die in bekannter Weise bestimmten Momente für das Eigengewicht, sowie die Maximalmomente für die zufällige Last und die resultierenden Spannungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Querschnittsfläche f soll bestimmt werden nach der Regel

$$f = \frac{S_0}{1,4} + \frac{S_1}{0,65},$$

wenn S_0 , S_1 die Spannungen in Folge des Eigengewichtes und der zufälligen Last bezeichnen. Die so berechneten Querschnittsflächen enthält ebenfalls die folgende Tabelle.

Punkt	Gefährlichste Belastung		Moment				Spannung				Querschnittsfläche			
	oben	unten	Last bei Punkt	Richtung	Eigengewicht	Menschen- gedränge	Wagen	Summe für zuf. Last	Obergurt Eigengewicht	zufäll. Last	Untergurt Eigengewicht	zufäll. Last	Obergurt	Untergurt
0					0	0	0	0			109,7	78,8		199,6
I	1	XIII n VII	<		140,6	41,0	60,0	101,0	100,0	71,8			181,9	
		XIII n VII	>		273,4	82,0	119,9	201,9			114,8	84,8		212,5
II	2	V n I	>		375,0	111,3	155,5	266,8	102,6	72,9			185,5	
		V n II	>		468,8	140,6	217,8	358,4			109,4	83,6		206,7
III	3	X n V	<		531,3	158,2	232,7	390,9	103,0	75,8			190,2	
		X n V	<		585,9	175,8	255,3	431,1			106,7	78,5		197,0
IV	4	IX n IV	<		609,4	181,6	251,6	432,2	103,2	73,2			186,3	
		IX n IV	<		625,0	187,5	261,1	448,6			105,8	75,9		192,4
					Tonnenmeter				Tonnen				□ Centim.	

2. Gitterwerk. Die Berechnung des Werthes von ξ , welcher die Lage der gefährlichsten Belastung hinsichtlich der gleichmässig vertheilten Belastung (Menschen-
gedränge) bestimmt, nach Formel 10 und 11 (Seite 110), wobei c nach der Regel $c = h \cot \tau - x$ berechnet ist, ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

Punkt		x	c	k = $\frac{c \pm x}{c}$	$\xi_1 = \frac{l-a-x}{kl-a} a$	l-a -x + ξ_1
oben	unten					
I	1	0	+ 0,78	1,000		50,00
	2	6,25	+ 0,78	9,000	0,53	38,03
II	3	6,25	+ 5,86	2,067		39,91
	4	12,50	+ 5,86	3,133	1,29	32,54
III	5	12,50	+ 27,34	1,457		34,19
	6	18,75	+ 27,34	1,686	2,00	27,00
IV	7	18,75	∞	1,000		28,57
	8	25,00	∞	1,000	2,68	21,43
V	1	25,00	- 77,34	0,677		22,99
	2	31,25	- 77,34	0,576	3,46	15,96
VI	3	31,25	- 55,86	0,441		17,44
	4	37,50	- 55,86	0,328	3,85	10,10
VII	5	37,50	- 50,78	0,261		12,00
	6	43,75	- 50,78	0,138	0	0

Meter

Meter

Nach der Regel 12 (Seite 111) ergibt sich mit Hilfe dieser Tabelle leicht, dass bei Belastung des rechten Theiles oder für das positive Maximum von Y für die Stäbe 1 I und 7 VII die II Last, für alle übrigen Stäbe dagegen die I Last am rechten Ende des über dem fraglichen Stabe liegenden Faches liegen muss.

Die Spannung der Gitterstäbe bestimmt man am einfachsten nach der Regel

$$P = \pm \left(\frac{M_2}{h_2} - \frac{M_1}{h_1} \right) \operatorname{cosec} \alpha.$$

Die Rechnung ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

Punkt	$\frac{M}{h}$ für Eigen- gew.	M für Menschen- gedränge		M für Wagen		$\frac{M}{h}$ für zufäll. Last		Spannung												
		rechts fallend	links fallend	rechts fallend	links fallend	rechts fallend	links fallend	Eigen- gewicht	zufäll. Last	Eigen- gewicht	zufäll. Last									
I	1	100,0		41,5		68,5		78,2												
	2	108,0	54,3	82,5	90,4	137,1	57,2	86,8												
II	3	102,6	81,3	77,7	135,5	146,4	59,3	61,3	-8,3	+3,2										
	4	106,4	79,5	117,6	120,0	195,2	45,3	71,0												
III	5	103,0	96,9	106,3	150,0	150,0	47,9	49,7	-6,6	+5,0										
	6	105,9	81,9	128,8	132,7	180,0	38,8	55,8												
IV	7	103,2	95,0	105,1	154,8	154,8	42,3	44,0	-5,8	+8,3										
	8	105,8	69,0	118,4	107,6	176,9	29,9	50,0												
V	1	103,2	76,6	106,2	121,3	121,3	33,5	38,5	-5,6	+7,7										
	2	105,9	47,8	115,6	77,9	134,8	22,7	45,3												
VI	3	103,0	50,8	40,9	85,7	85,7	26,5	24,6	-5,6	+7,3										
	4	106,4	22,9	61,3	32,9	89,5	12,6	34,2												
VII	5	102,6	22,6	30,0	35,7	57,9	16,0	24,0	-5,9	+5,4										
	6	108,0	0	27,7	0	54,3	0	32,4												
8	100,0	0		0			0		-8,8	0										

Ton.

Tonnenmeter

Tonnen

Tonnen

Die Berechnung der Querschnittsfläche f_1 soll mit Rücksicht auf den Umstand, dass in allen Stäben der Druck gegen den Zug überwiegend ist, nach der Regel

$$f_1 = \frac{P_0}{1,4} + \frac{P_1}{0,65} + \frac{P_2}{1,4}$$

erfolgen, worin P_0 den durch das Eigengewicht entstehenden Druck, P_1 und P_2 den durch die zufällige Last entstehenden Druck und Zug bezeichnet. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Punkt		Spannung			Querschnittsfläche f_1	
oben	unten	P_0 Druck	P_1 Druck	P_2 Zug	rechts fallend	links fallend
I	1	8,8	9,5	0		20,9
	2	8,3	12,9	3,2	28,1	
II		5,9	14,9	5,4		31,0
	3	6,6	18,5	5,0	36,8	
III		5,6	13,2	7,3		29,5
	4	5,8	14,6	8,3	32,5	
IV		5,6	12,4	7,7		28,6
				Tonnen		□ Centim.

§. 61. **Volumen der Gurte des Parabelträgers.** Nehmen wir für Zug und Druck eine gleiche zulässige Inanspruchnahme K an, so ist die nöthige Querschnittsfläche des Ober- und Untergurtes an einer beliebigen Stelle, da annähernd $\frac{M}{h}$ konstant = $\frac{ql^2}{8h_1}$ ist, $\frac{ql^2}{8Kh_1} \sec \sigma$ und $\frac{ql^2}{8Kh_1} \sec \tau$. Sonach wird das Volumen v_1 pro Längeneinheit an einer beliebigen Stelle

$$v_1 = \frac{ql^2}{8Kh_1} (\sec^2 \sigma + \sec^2 \tau),$$

oder

$$v_1 = \frac{ql^2}{8Kh_1} (2 + \tan^2 \sigma + \tan^2 \tau).$$

Für den Bogensehnenträger ist $\tau = 0$, $\tan \sigma = \frac{dh}{dx} = \frac{4h_1}{l^2} (l - 2x)$, also

$$81. \quad v_1 = \frac{ql^2}{8Kh_1} \left[2 + \frac{16h_1^2}{l^4} (l - 2x)^2 \right].$$

Die Integration zwischen den Grenzen 0 und l gibt als Gesamtvolumen

$$82. \quad V_1 = \frac{ql^3}{4Kh_1} \left(1 + \frac{8h_1^2}{3l^2} \right).$$

Dasselbe ergibt sich auch für den Fischbauchträger.

Für den Fischträger wird $\tan \sigma = \tan \tau = \frac{1}{2} \frac{dh}{dx} = \frac{2h_1}{l^2} (l - 2x)$,
also

$$83. \quad v_1 = \frac{q l^2}{8 K h_1} \left[2 + \frac{8 h_1^2}{l^2} (l - 2x)^2 \right].$$

Die Integration zwischen den Grenzen 0 und l gibt

$$84. \quad V_1 = \frac{q l^2}{4 K h_1} \left(1 + \frac{4 h_1^2}{3 l^2} \right).$$

Für $\frac{h_1}{l} = 0,150 \ 0,125 \ 0,100$ ergibt sich der Werth der Parenthese für Bogensehnenträger bezüglich zu 1,060 1,042 1,027, für Fischträger bezüglich zu 1,030 1,021 1,014, durchschnittlich zu 1,032. Daher wird durchschnittlich

$$85. \quad V_1 = 0,258 \frac{q l^2}{K h_1},$$

wobei der Fehler höchstens 3 Prozent betragen kann.

Sind zwei verschiedene Koeffizienten K_1 und K_2 für beide Gurte anzuwenden, so ist sehr nahe $\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$ für $\frac{2}{K}$ zu setzen. Das Gewicht ergibt sich, wenn man $\frac{\gamma_1}{K_1} + \frac{\gamma_2}{K_2}$ für $\frac{2}{K}$ setzt, falls γ_1 und γ_2 die Gewichte der Volumeneinheit bezeichnen.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung ist $\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1}$ an Stelle von $\frac{q}{K}$ zu setzen.

§. 62. Volumen des Gitterwerkes der Parabelträger.

1. **Netzwerk.** Ganz entsprechend der für Parallelträger in §. 37 gemachten Untersuchung ergibt sich als Volumen des Gitterwerkes v_2 pro Längeneinheit unter Annahme einer gleichen zulässigen Inanspruchnahme K für beide Stablagen:

$$86. \quad v_2 = \frac{Y (\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta)}{K (\tan \alpha + \tan \beta)}.$$

Hiernach ergibt sich ganz entsprechend dem für Parallelträger gefundenen Resultate das (übrigens für jedwede Gurtform giltige) Resultat, dass v_2 zu einem Minimum wird für

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

und zwar wird für diesen Winkel

$$87. \quad v_2 = 2 \frac{Y}{K}.$$

Setzt man $Y = \frac{p x (l - x)}{2l}$, so ergibt sich als gesamtes Volumen $V_2 = \frac{p}{Kl} \int x (l - x) dx$, wobei die Integration zwischen $x = 0$ und $x = l$ auszudehnen ist, d. i.

$$88. V_2 = \frac{p l^2}{6 K} = 0,167 \frac{p l^2}{K}.$$

Wählt man die horizontale Entfernung der Knotenpunkte konstant und zwar die Horizontalprojektion eines Stabes = a , so ist $\tan \alpha = \tan \beta = \frac{a}{h}$, $\sec^2 \alpha = \sec^2 \beta = 1 + \frac{a^2}{h^2}$, mithin

$$v_2 = \frac{Y}{K} \frac{a^2 + h^2}{ah} = \frac{Y}{K} \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right).$$

Setzt man hierin $h = \frac{4h_1}{l^2} x(l-x)$, $Y = \frac{p x(l-x)}{2l}$, so wird

$$89. v_2 = \frac{p}{8 K h_1 a l^3} [a^2 l^4 + 16 h_1^2 x^2 (l-x)^2].$$

Hiernach ist V_2 an den Enden am kleinsten, in der Mitte am grössten; das v_2 an den Enden und in der Mitte verhält sich wie a^2 zu $a^2 + h_1^2$. Die Integration zwischen den Grenzen 0 und l ergibt als gesamntes Volumen V_2 :

$$90. V_2 = \frac{p l^2}{8 K} \left(\frac{a}{h_1} + \frac{8 h_1}{15 a} \right).$$

Hiernach wird V_2 zu einem Minimum für

$$91. \frac{h_1}{a} = \sqrt{\frac{15}{8}} = 1,369 \text{ oder } \frac{a}{h_1} = \sqrt{\frac{8}{15}} = 0,730.$$

Für dieses Verhältniss wird das Volumen:

$$92. V_2 = \frac{p l^2}{2 K} \sqrt{\frac{2}{15}} = 0,183 \frac{p l^2}{K},$$

d. i. um $9\frac{1}{2}$ Prozent grösser, als für $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung ist mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Spannung in Folge des Eigengewichtes nahezu = Null und die positive und negative Maximalspannung in Folge der zufälligen Last nahezu gleich gross wird, $\frac{p}{K_1} + \frac{p}{K_2}$ oder $p \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$, für $\frac{p}{K}$ zu setzen. Setzen wir entsprechend dem §. 37: $K_2 = 2,35 K_1$, so würde $1,43 \frac{p}{K_1}$ für $\frac{p}{K}$ zu setzen sein.

2. Doppelfachwerk. Hier müssen wir die Diagonalen und Vertikalen von einander trennen.

Diagonalen. Das Volumen v_2 der einen Schaar von Diagonalen pro Längeneinheit ergibt sich zu

$$v_2 = \frac{Y \sec^2 \alpha}{K \tan \alpha} = \frac{Y}{K} \frac{a^2 + h^2}{ah}.$$

Die Integration nach Einsetzung des Ausdrucks für Y gibt für das Gesamtvolumen einer Schaar der Diagonalen dasselbe Volumen, wie

für das gesammte Netzwerk nach Formel 90; sonach wird das gesammte Volumen V_2'' beider Schaaren der Diagonalen

$$V_2'' = \frac{p l^2}{4K} \left(\frac{a}{h_1} + \frac{8h_1}{15a} \right).$$

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) zur Querschnittsbestimmung ist hier, weil das Eigengewicht nahezu keine Spannung erzeugt und die untere Grenze der durch die zufällige Last erzeugten Spannung Null ist, $\frac{p}{K_1}$ für $\frac{p}{K}$ zu setzen.

Vertikalen. Wir setzen zunächst voraus, dass die Bahn über dem Obergurte liege; die Vertikalen werden alsdann nur auf Druck beansprucht, welcher bei einseitiger Belastung zum Maximum wird. Das Volumen v_2' pro Längeneinheit ergibt sich zu

$$v_2' = \frac{Y}{K \tan \alpha} = \frac{Yh}{Ka},$$

und wenn man die Ausdrücke für Y und h einsetzt,

$$v_2' = \frac{2p h_1 x^2 (l - x)^2}{K l^3 a}.$$

Die Integration zwischen den Grenzen 0 und l gibt als Volumen sämtlicher Vertikalen

$$V_2' = \frac{2p h_1 l^2}{15 K a}.$$

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) ist zu beachten, dass die untere Grenze der durch die zufällige Last erzeugten Spannung Null ist und dass der Druck in einer Vertikalen in Folge des Eigengewichtes bei Fischbauchträgern $g_1 a$, bei Fischträgern $\frac{1}{2}(g_1 - g_2) a$ ist, wenn g_1 und g_2 den auf den Ober- und Untergurt kommenden Theil des Eigengewichtes bezeichnet. Das entsprechende mittlere Volumen pro Längeneinheit ist $\frac{1}{K_0 a} \cdot g_1 a \cdot \frac{2}{3} h_1 = \frac{2}{3 K_0} g_1 h_1$ und $\frac{1}{K_0 a} \cdot \frac{1}{2}(g_1 - g_2) a \cdot \frac{2}{3} h_1 = \frac{1}{3 K_0} (g_1 - g_2) h_1$. Mithin wird

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fischbauchträger} \dots\dots\dots V_2' = \frac{2g_1 h_1 l}{3 K_0} + \frac{2p h_1 l^2}{15 K_1 a}, \\ \text{Fischträger} \dots\dots\dots V_2' = \frac{(g_1 - g_2) h_1 l}{3 K_0} + \frac{2p h_1 l^2}{15 K_1 a}. \end{array} \right.$$

Wenn aber die Bahn unter dem Untergurte liegt, so sind die Vertikalen bei der gewöhnlichen Auffassung auf Zug zu berechnen, welcher in einer Vertikale bei Bogensehnenträgern $= (g_2 + p) a$, bei Fischträgern $= \frac{1}{2}(g_2 - g_1 + p) a$ ist, wo g_1 und g_2 den auf den Ober- und Untergurt kommenden Theil des Eigengewichtes bezeichnet. Wie vorhin bestimmt sich hieraus das Volumen zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bogensehnensträger} \quad V_2' = \frac{2(g_2 + p)h_1 l}{3K}, \\ \text{Fischträger} \dots \dots \quad V_2' = \frac{(g_2 - g_1 + p)h_1 l}{3K}. \end{array} \right.$$

Bei Anwendung der Formel 7 (Seite 9) ist zu beachten, dass durch die zufällige Last in den Vertikalen ein Druck entstehen kann, welchem, entsprechend obiger Formel, das Volumen $\frac{2ph_1 l^2}{15K_2 a}$ entspricht. Das Volumen der Vertikalen ergibt sich hier zu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bogensehnensträger:} \quad V_2' = \frac{2h_1 l}{3} \left[\frac{g_2}{K_0} + \frac{p}{K_1} + \frac{pl}{5K_2 a} \right], \\ \text{Fischträger:} \dots \dots \quad V_2' = \frac{h_1 l}{3} \left[\frac{g_2 - g_1}{K_0} + \frac{p}{K_1} + \frac{2pl}{5K_2 a} \right]. \end{array} \right.$$

Das Gesamtvolumen $V_2 = V_2' + V_2''$ des Gitterwerkes ergibt sich nun nach der gewöhnlichen Auffassung zu:

$$93. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bahn oben:} \dots \dots \dots \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K} \left(\frac{a}{h_1} + \frac{16h_1}{15a} \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Bahn} \\ \text{unten} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bogensehnensträger:} \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{8h_1}{15a} + \frac{8h_1}{3l} \left(1 + \frac{g_2}{p} \right) \right], \\ \text{Fischträger:} \dots \dots \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{8h_1}{15a} + \frac{4h_1}{3l} \left(1 + \frac{g_2 - g_1}{p} \right) \right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

V_2 wird hiernach zum Minimum für:

$$94. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bahn oben:} \quad \frac{h_1}{a} = \sqrt{\frac{15}{16}} = 0,968, \quad \frac{a}{h_1} = \sqrt{\frac{16}{15}} = 1,033, \\ \text{Bahn unten:} \quad \frac{h_1}{a} = \sqrt{\frac{15}{8}} = 1,369, \quad \frac{a}{h_1} = \sqrt{\frac{8}{15}} = 0,730. \end{array} \right.$$

Nach der neueren Auffassung dagegen ergibt sich:

$$95. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bahn} \\ \text{oben} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fischbauchtr.:} \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K_1} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{16h_1}{15a} + \frac{8K_1 g_1 h_1}{3K_0 pl} \right], \\ \text{Fischträger:} \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K_1} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{16h_1}{15a} + \frac{4K_1 (g_1 - g_1) h_1}{3K_0 pl} \right], \\ \text{Bogensehnenstr.:} \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K_1} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{8h_1}{15a} + \frac{8h_1}{3l} \right. \\ \left. + \frac{8K_1 g_2 h_1}{3K_0 pl} + \frac{8K_1 h_1}{15K_2 a} \right], \\ \text{Bahn} \\ \text{unten} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fischträger:} \quad V_2 = \frac{pl^2}{4K_1} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{8h_1}{15a} + \frac{4h_1}{3l} \right. \\ \left. + \frac{4K_1 (g_2 - g_1) h_1}{3K_0 pl} + \frac{8K_1 h_1}{15K_2 a} \right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Liegt die Bahn in der Mitte der Höhe, so ist V_2 das arithmetische Mittel aus den Resultaten, welche man für Bahn oben und Bahn unten erhält.

§. 63. **Volumen des ganzen Parabelträgers.** Nach den aufgestellten Regeln lässt sich das Gesamtvolumen V des Parabelträgers, entsprechend der Formel 111 (Seite 95) für Parallelträger darstellen durch den Ausdruck:

$$96. \quad V = \left(A_0 \frac{l}{h_1} + B_0 \right) \frac{gl^2}{K_0} + \left(A_0 \frac{l}{h_1} + B_1 \right) \frac{pl^2}{K_1},$$

worin sich die Glieder A und B auf das Volumen der Gurte und des Gitterwerkes beziehen; die Glieder mit C in Formel 111 (S. 95) sind hier des Wegfalls der Endständer wegen, nicht vorhanden. Für die Koeffizienten A und B aber ergeben sich unter Benützung der Formel 95 folgende Werthe:

Gurte. $A_0 = A_1 = 0,253$ bis $0,265$, im Mittel $= 0,258$.

Gitterwerk. a. Netzwerk: $B_1 = 0$, $B_2 = 0,26$ bis $0,28$, im Mittel $0,27$.

b. Doppelfachwerk: Bahn oben, Fischbauchträger $B_0 = 0,05$ bis $0,09$, im Mittel $0,07$, $B_1 = 0,52$ bis $0,66$, im Mittel $0,58$; Bahn oben, Fischträger $B_0 = 0,01$ bis $0,04$, im Mittel $0,03$, $B_1 = 0,52$ bis $0,66$, im Mittel $0,58$; Bahn unten, Bogensehnenträger $B_0 = 0,05$ bis $0,09$ im Mittel $0,07$, $B_1 = 0,52$ bis $0,75$, im Mittel $0,63$; Bahn unten, Fischträger $B_0 = 0,01$ bis $0,04$, im Mittel $0,03$, $B_1 = 0,46$ bis $0,70$, im Mittel $0,58$.

Das Volumen des Gitterwerkes ist hauptsächlich nur durch die zufällige Last bedingt. Das Verhältniss des Volumens des Gitterwerkes zu dem der Gurte ist daher hier sehr variabel mit dem Verhältnisse der zufälligen Last zum Eigengewichte. Dieses Verhältniss kann für Netzwerk etwa zwischen $1:3$ und $1:19$, für Doppelfachwerk etwa zwischen $1:1,5$ und $1:9$ schwanken.

IX. Kapitel.

Pauli'sche Träger.

§. 64. **Prinzip.** Bei den Parabelträgern ist die Maximalspannung in den Gurten nahezu konstant. Es muss sich aber auch den Gurten eine solche Form geben lassen, bei welcher die Spannung in den Gurten wirklich konstant ist, was für die Ausführung offenbar einen praktischen Werth hätte. Da in der Mitte beide Gurte stets eine gleiche Spannung haben und sich die Spannung beider Gurte in einem beliebigen Querschnitte wie $\sec \sigma$ zu $\sec \tau$ verhält, so ist eine konstante Spannung in beiden Gurten natürlich nur möglich, wenn $\sigma = \tau$ ist,

d. i. bei einem gegen eine horizontale Axe symmetrisch geformten Träger. Diese Trägerform ist unter dem Namen Pauli'scher Träger vielfach zur Ausführung gelangt.

§. 65. Form der Gurte.

1. **Näherungsbestimmung.** Die Spannung S eines Gurtes in einem beliebigen Querschnitte ist

$$S = \frac{M}{h} \sec \sigma = \frac{qx(l-x)}{2h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2}.$$

In der Mitte wird $S = \frac{ql^2}{8h_1}$. Mithin ist die Differenzialgleichung für die Bogenform mit konstanter Gurtspannung

$$\frac{x(l-x)}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2} = \frac{l^2}{4h_1}.$$

Eine einfache Näherungsauflösung ergibt sich, wenn man für $\frac{dh}{dx}$ denjenigen Werth einsetzt, welcher dem Parabelträger entspricht. Da beim Parabelträger die Gurtspannung nahezu konstant und $\frac{dh}{dx}$ überhaupt nur klein ist, so kann der hierbei begangene Fehler nur sehr klein sein. Für Parabelträger aber ist $h = \frac{4h_1 x(l-x)}{l^2}$, $\frac{dh}{dx} = \frac{4h_1(l-2x)}{l^2}$; ferner ist sehr nahe $\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = 1 + 2 \frac{h_1^2(l-2x)^2}{l^4}$, mithin

$$\frac{x(l-x)}{h} \left[1 + 2 \frac{h_1^2(l-2x)^2}{l^4} \right] = \frac{l^2}{4h_1} \text{ oder}$$

$$97. \quad h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left[1 + 2 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Hiernach ergibt sich die Höhe bei gleicher Höhe h_1 in der Mitte ein wenig grösser, als beim Parabelträger.

2. **Genauere Bestimmung.** Bei einer genauen Bestimmung der Gurtform kommt das System des Gitterwerkes in Frage. Wir wollen hier nur das gewöhnlich für Pauli'sche Träger angewendete Doppelfachwerk in Frage ziehen. Bezeichnen wir die Momente der äusseren Kräfte, welche sich für zwei auf einander folgende Vertikalen BE und CF (Fig. 94, S. 134) ergeben, mit M' und M , die zugehörigen Höhen BE und CF mit h' und h , so ist nach §. 44 die Diagonale BF gezogen, wenn $\frac{M}{h} > \frac{M'}{h'}$ ist; alsdann ist die Spannung des Gurtstückes $BC = \frac{M}{h} \sec \sigma$, des Gurtstückes EF dagegen $= \frac{M'}{h'} \sec \sigma$. Ist umgekehrt $\frac{M}{h} < \frac{M'}{h'}$, so ist die Spannung des Gurtstückes $BC = \frac{M'}{h'} \sec \sigma$, des Gurtstückes $EF = \frac{M}{h} \sec \sigma$. Sonach können die

Maximalspannungen beider Gurte überhaupt nicht genau gleich sein. Am zweckmässigsten dürfte es daher sein, die mittlere Spannung $\frac{1}{2} \left(\frac{M}{h} + \frac{M'}{h'} \right) \sec \sigma$ als konstant anzunehmen. Da indess $\frac{M}{h}$ und $\frac{M'}{h'}$ nur sehr wenig von einander abweichen werden, so wird es auch genügen, $\frac{M}{h} \sec \sigma$ konstant anzunehmen, wodurch sich die Berechnung und Konstruktion wesentlich vereinfacht. Alsdann wird nämlich, wenn man das Moment und die Höhe in der Mitte mit M_1, h_1 bezeichnet, $\frac{M}{h} \sec \sigma = \frac{M_1}{h_1}$, oder, da $\sec \sigma = \frac{\sqrt{4a^2 + (h-h')^2}}{2a}$ ist,

$$\frac{M \sqrt{4a^2 + (h-h')^2}}{2ah} = \frac{M_1}{h_1}.$$

Hieraus folgt sofort

$$98. \quad h' = h - 2a \sqrt{\left(\frac{M_1 h}{M h_1} \right)^2 - 1}.$$

Hiernach ist h' bestimmt, wenn h gegeben ist, so dass sich mit Hilfe dieser Gleichung die Höhen allmählig berechnen lassen.

Indess scheint es uns als vollkommen hinreichend, die Berechnung der Höhen nach der Formel 97 vorzunehmen; natürlich wird sich die Spannung in den Gurten alsdann nicht ganz konstant ergeben; jedoch wird die Veränderlichkeit nur eine äusserst geringe sein.

§. 66. Näherungsbestimmung der Spannungen.

1. Gurte. Nach der im vorigen Paragrafe gegebenen Näherungsbestimmung der Gurtform ist die konstante Spannung der Gurte:

$$99. \quad -S_1 = +S_2 = \frac{q l^2}{8 h_1}.$$

2. Gitterwerk. Für das Eigengewicht ist $M = \frac{1}{2} g x (l-x)$, mithin $\frac{M}{h} = \frac{g l^2}{8 h_1} \left[1 - \frac{2 h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right]$, wenn man die Regel in Anwendung bringt, dass für ein kleines y annähernd $\frac{1}{1+y} = 1-y$ ist. Daher wird $\frac{dM}{dx} = \frac{g h_1 (l-2x)}{l^2}$, folglich nach Formel 34 (Seite 126):

$$Y = \frac{4 g h_1^2 x (l-x) (l-2x)}{l^4}.$$

Ferner ist $\frac{h}{l-x} = \frac{4 h_1 x}{l^2} \left[1 + 2 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right]$, also $\frac{d \frac{h}{l-x}}{dx} = \frac{4 h_1}{l^2} \left[1 + \frac{2 h_1^2}{l^2} \left(1 - 8 \frac{x}{l} + 12 \frac{x^2}{l^2} \right) \right]$. Daher wird für die zufällige Last nach der zweiten

der Formeln 36 (Seite 126): $\max(-Y) = -\frac{px(l-x)}{2l} \left[1 - 2\frac{h_1^2}{l^2} (1 - 2\frac{x}{l})^2 \right] \left[1 + \frac{2h_1^2}{l^2} (1 - 8\frac{x}{l} + 12\frac{x^2}{l^2}) \right]$, d. i. nach Ausführung der Multiplikation annähernd:

$$\max(-Y) = -\frac{px(l-x)}{2l} \left[1 - 8\frac{h_1^2}{l^2} \frac{x}{l} \left(1 - 2\frac{x}{l} \right) \right].$$

Das positive Maximum von Y findet man durch Vertauschung von x mit $l-x$ und Umkehrung des Vorzeichens.

Unter der Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last wird demnach:

$$100. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(+Y) = \frac{1}{2}g(l-2x) \cdot 8\frac{h_1^2}{l^2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ \quad + \frac{px(l-x)}{2l} \cdot \left[1 + 8\frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - 2\frac{x}{l} \right) \right], \\ \max(-Y) = \frac{1}{2}g(l-2x) \cdot 8\frac{h_1^2}{l^2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ \quad - \frac{px(l-x)}{2l} \cdot \left[1 - 8\frac{h_1^2}{l^2} \frac{x}{l} \left(1 - 2\frac{x}{l} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Die Spannungen P_1 und P_2 der Gitterstäbe sind nun durch die Formel 33 (Seite 126) bestimmt.

Die genaue Bestimmung der Spannungen durch Rechnung oder Konstruktion erfolgt am besten nach den aufgestellten allgemeinen Regeln.

§. 67. Volumen der Pauli'schen Träger.

1. Gurte. Nach Formel 99 ist der konstante Gurt-Querschnitt $\frac{ql^2}{8Kh_1}$, folglich das Volumen pro Längeneinheit

$$v_1 = \frac{ql^2}{4Kh_1} \sec \sigma.$$

Es genügt für den vorliegenden Zweck, $\frac{dh}{dx} = \frac{4h_1(l-2x)}{l^2}$, $\sec \sigma = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \sigma = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{2h_1^2(l-2x)^2}{l^4}$ zu setzen. Sonach wird das Gesamtvolumen V_1 der beiden Gurte

$$V_1 = \frac{ql^2}{4K} \int_0^l \left[1 + \frac{2h_1^2(l-2x)^2}{l^4} \right] dx, \text{ d. i.}$$

$$V_1 = \frac{ql^3}{4Kh_1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h_1^2}{l^2} \right).$$

Bezeichnet man das Volumen für den Parabel-Fischträger mit V_1' , so wird mit Rücksicht auf die Formel 84 (Seite 151) sehr nahe

$$101. \quad V_1 = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h_1^2}{l^2} \right) V_1'.$$

Wenn die Höhe $h_1 = \frac{1}{7}l, \frac{1}{8}l, \frac{1}{9}l$ gewählt wird, so bedürfen die Gurte im Pauli'schen Träger bezüglich 1,4, 1,1, 0,8 Prozent weniger Material. In Wirklichkeit ist die Ersparniss indess grösser, da man sich in der Ausführung dem konstanten Querschnitte besser anschmiegen kann, als dem etwas variablen Querschnitte des Parabelträgers.

2. Gitterwerk. Das Volumen des Gitterwerkes ist proportional dem Integrale $\int Y dx$. Für einen Parabelträger ergibt sich für die Ausdehnung des ganzen Trägers $\int Y dx = \frac{1}{12} p l^2$. Für den Pauli'schen Träger ergibt sich, wenn man für Y den ersten der Ausdrücke 100 setzt, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}l$ integrirt und das Resultat doppelt nimmt,

$$\int Y dx = \frac{1}{12} p l^2 \left[1 + \left(2,3 + 3 \frac{g}{p} \right) \frac{h_1^2}{l^2} \right].$$

Bezeichnet man das Volumen des Gitterwerkes im Pauli'schen Träger und Parabelträger bezüglich mit V_2, V_2' , so wird sonach bei oben liegender Bahn

$$102. V_2 = \left[1 + \left(2,3 + 3 \frac{g}{p} \right) \frac{h_1^2}{l^2} \right] V_2'.$$

Bei einer Spannweite von 20^m ist bei Eisenbahnbrücken ungefähr $\frac{g}{p} = 0,25$, daher ergibt sich für die Verhältnisse $h_1 = \frac{1}{7}l, \frac{1}{8}l, \frac{1}{9}l$ bezüglich $V_2 = 1,06V_2', 1,05V_2', 1,04V_2''$; bei einer Spannweite von 150^m dagegen wird ungefähr $\frac{g}{p} = 2,5$, daher ergibt sich für die genannten Verhältnisse bezüglich $V_2 = 1,20V_2', 1,16V_2', 1,12V_2'$. Hiernach würde das Gitterwerk 4 bis 20 Prozent mehr Material erfordern.

Für eine unten liegende Bahn, wo in den Vertikalen des Parabelträgers ein Zug entsteht, ist das in Formel 102 aufgestellte Verhältniss allerdings nicht ganz richtig. Hier ist der Mehrbedarf im Gitterwerke beim Pauli'schen Träger etwas geringer.

Der Minderbedarf in den Gurten und der Mehrbedarf im Gitterwerke gleichen sich nahezu aus, so dass der Pauli'sche und Parabelträger nahezu gleich viel Material erfordern, wenigstens theoretisch. In Wirklichkeit ist ein geringer Vortheil auf Seite des Pauli'schen Trägers.

X. Kapitel.

Halbparabelträger.

§. 68. Prinzip. Die Halbparabelträger oder abgestumpften Parabelträger haben parabolisch gekrümmte Gurte, welche sich aber nicht über den Lagern vereinigen, so dass die Trägerhöhe nach den

Enden zu nicht in Null übergeht (Fig. 83, 84 und 85). Der Zweck dieser Konstruktion ist hauptsächlich, die Vortheile der Parabelträger hinsichtlich der nöthigen Materialmenge möglichst auszunutzen, dabei aber auch den Vortheil zu gewinnen, bei unten liegender Bahn auch an den Enden obere Querverbindungen anbringen zu können. Ueber anderweite Vortheile verweisen wir auf das Heft über „eiserne Gitterträger“. Der Untergurt ist gewöhnlich gerade.

Wir bezeichnen die Trägerhöhe in der Mitte mit h_1 , an den Enden mit h_0 , im beliebigen Abstände x von einem Ende mit h und das Verhältniss $\frac{h_0}{h_1}$ mit ε . Nehmen wir an, dass die Knotenpunkte in Parabeln liegen, deren Scheitel sich in der Mitte befindet, so können wir für die Höhe an einem Knotenpunkte setzen:

$$103. \quad h = h_0 + 4(h_1 - h_0) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = h_1 \left[\varepsilon + 4(1 - \varepsilon) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right].$$

§. 69. **Näherungsbestimmungen der Spannungen** unter Anwendung der in §. 55 aufgestellten Näherungsregeln und unter der Annahme eines geraden Untergurtes. Nach der Formel 103 wird

$$h = h_1 \left[\varepsilon + 4(1 - \varepsilon) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right],$$

$$\tan \sigma = \frac{dh}{dx} = 4(1 - \varepsilon) \frac{h_1}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right).$$

1. Gurte. Die Spannungen der Gurte werden nun nach Formel 32 (Seite 126), wenn man $M = \frac{1}{2} qx(l - x)$ setzt,

$$104. \quad S_1 = - \frac{qx(l - x)}{2h} \sec \sigma, \quad S_2 = + \frac{qx(l - x)}{2h}.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet.

		$x =$							
		ε	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	l
- S_2	0	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	$\frac{ql^2}{h_1}$
	0,125	0	0,102	0,117	0,122	0,124	0,125		
	0,250	0	0,087	0,110	0,119	0,123	0,125		
	0,500	0	0,066	0,098	0,114	0,122	0,125		
	0,750	0	0,054	0,088	0,109	0,121	0,125		
	1	0	0,045	0,080	0,105	0,120	0,125		
+ S_1	0	0,146	0,139	0,133	0,129	0,126	0,125	$\frac{ql^2}{h_1}$	
	0,125	0	0,117	0,122	0,125	0,125	0,125		
	0,250	0	0,091	0,113	0,121	0,123	0,125		
	0,500	0	0,068	0,099	0,115	0,122	0,125		
	0,750	0	0,054	0,088	0,109	0,121	0,125		
	1	0	0,045	0,080	0,105	0,120	0,125		

Bei der Berechnung von $\sec \sigma$ wurde die mittlere Höhe h_1 zu $h_1 = \frac{3}{10(2 + \epsilon)} l$, d. i. $\frac{1}{7} l$ bis $\frac{1}{10} l$ angenommen. In Fig. 104 ist hier- nach S_1 und S_2 grafisch darge- stellt. Man sieht, dass für kleine Höhen an den Enden die Spannung der Gurte nahe konstant bleibt und nur in der Nähe der Enden sehr schnell bis zu Null abnimmt.

2. Gitterwerk. Es genügt, die positiven Werthe für Y zu bestim- men, da das positive und negative Maximum von Y in gleichen Abstän- den von beiden Enden dem abso- luten Werthe nach gleich gross sind.

Für das Eigengewicht wenden wir die Regel 35 (Seite 128), nämlich $Y = Q \left(1 - \frac{M}{Qh} \frac{dh}{dx} \right)$ an. Nun aber ist $M = \frac{1}{2} g x (l - x)$, $Q = \frac{1}{2} g (l - 2x)$, $\frac{dh}{dx} = \frac{4(h_1 - h_0)(l - 2x)}{l^2}$, also $1 - \frac{M}{Qh} \frac{dh}{dx} = 1 - \frac{4(h_1 - h_0)x(l - x)}{l^2 h} = \frac{h_0}{h}$, mithin $Q = Q \frac{h_0}{h} = \frac{1}{2} g (l - 2x) \frac{h_0}{h}$.

Für die zufällige Last wenden wir die erste der Formeln 36 (Seite 126) an. Es ist $\frac{x}{h} = \frac{l^2 x}{l^2 h_0 + 4(h_1 - h_0)x(l - x)}$, also $\frac{d^2 x}{dx^2} = \frac{l^2 h_0 + 4(h_1 - h_0)x^2}{h^2}$, daher wird $Y = \frac{p(l - x)^2}{2l} \frac{l^2 h_0 + 4(h_1 - h_0)x^2}{h}$. Somit wird nun für die gleichzeitige Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last:

$$105. Y = \frac{1}{2} g (l - 2x) \frac{h_0}{h} + \frac{1}{2} \frac{p(l - x)^2}{l} \frac{h_0 l^2 + 4(h_1 - h_0)x^2}{h l^2}.$$

In Fig. 105 sei $AA' = BB' = h_0$, $CC' = h_1$. Legt man durch A' und C' eine Pa- rabel $A'C'B''$ mit vertikaler Axe, deren Scheitel in A' liegt und entspricht der Abscisse $AE = x$ der Punkt E'' dieser Parabel, so ist $EE' = h$, $EE'' = h_0 + 4(h_1 - h_0) \frac{x^2}{l^2}$. Bezeichnen wir EE'' mit h'

und bezeichnen wir ferner die Transversalkräfte für das Eigengewicht und die zufällige Last mit Q_g und Q_p , so wird also nach der vorigen Formel

$$106. Y = Q_g \frac{h_0}{h} + Q_p \frac{h'}{h}.$$

Fig. 104.

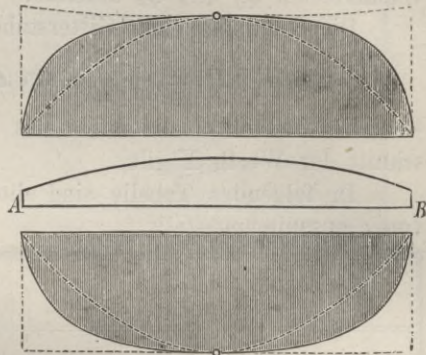
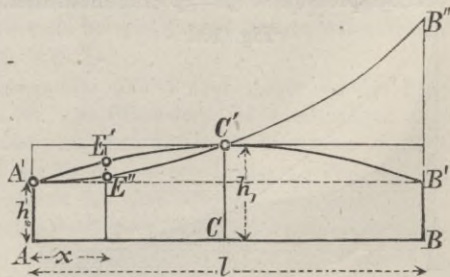


Fig. 105.



Hiernach wird das erste Glied stets kleiner als Q_g , das zweite dagegen auf der linken Hälfte kleiner, auf der rechten aber grösser als Q_p . Nach Formel 106 lässt sich Y auch leicht durch Konstruktion aus den Transversalkräften Q_g und Q_p ableiten.

Die Spannung eines Gitterstabes ist nun

$$107. P_1 = + \frac{1}{n} Y \sec \alpha, \quad P_2 = - \frac{1}{n} Y \sec \beta,$$

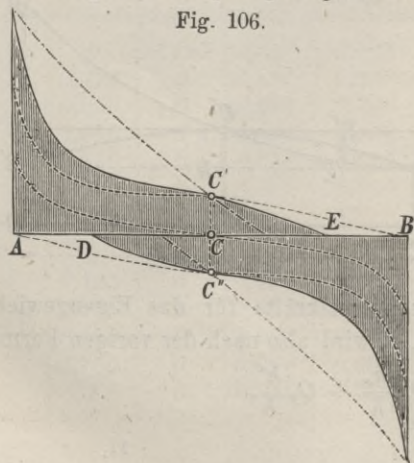
wenn für den durch die Mitte des fraglichen Stabes gelegten Vertikalschnitt der Werth Y gilt.

In folgender Tabelle sind die Werthe von Y für einige Werthe von ε zusammengestellt.

		$x =$													
ε		0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	. l	
Y für das Eigengewicht		0	+	+	+	+	+		-	-	-	-	0		
	0,125	0,5	0,194	0,114	0,055	0,029	0,013	0	0,013	0,029	0,055	0,114	0,5		
	0,250	0,5	0,287	0,192	0,103	0,057	0,026	0	0,026	0,057	0,103	0,192	0,5	. gl	
	0,500	0,5	0,378	0,294	0,183	0,109	0,051	0	0,051	0,109	0,183	0,294	0,5		
	0,750	0,5	0,423	0,357	0,247	0,156	0,076	0	0,076	0,156	0,247	0,357	0,5		
1	0,5	0,450	0,400	0,300	0,200	0,100	0	0,100	0,200	0,300	0,400	0,5			
Y für die zuzulässige Last		0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
	0,125	0,5	0,207	0,147	0,124	0,125	0,128	0,125	0,115	0,091	0,069	0,035	0		
	0,250	0,5	0,296	0,218	0,162	0,140	0,135	0,125	0,110	0,088	0,059	0,026	0	. pl	
	0,500	0,5	0,383	0,310	0,226	0,181	0,151	0,125	0,100	0,072	0,043	0,016	0		
	0,750	0,5	0,426	0,366	0,278	0,214	0,165	0,125	0,090	0,058	0,031	0,009	0		
1	0,5	0,451	0,405	0,320	0,245	0,180	0,125	0,080	0,049	0,020	0,005	0			

In Fig. 106 ist hiernach Y grafisch dargestellt und zwar ist hierbei beispielsweise $g = p$ angenommen. Hiernach besteht der Träger stets aus drei Theilen derart, dass

Fig. 106.



im ersten Y nur positiv, im letzten Y nur negativ ist, während im mittleren Y sowohl positiv als negativ werden kann. Die relative Länge dieser Theile hängt sowohl von dem Verhältnisse $\frac{h_0}{h_1}$, als von dem Verhältnisse $\frac{p}{g}$ ab. Der mittlere Theil ergibt sich um so kürzer, je grösser $\frac{h_0}{h_1}$ und je kleiner $\frac{p}{g}$ ist. Nach der Formel 106 würde sich für die Länge dieser Theile

eine Gleichung vierten Grades ergeben. In folgender Tabelle sind die Längen $a = AD = BE$ eines äusseren Theiles zusammengestellt:

$\frac{h_0}{h_1}$	$\frac{a}{l}$ für $\frac{q}{q} =$				
	0	0,25	0,5	0,75	1
0	0	0	0	0	0
0,125	0	0,105	0,180	0,300	0,5
0,250	0	0,155	0,258	0,378	0,5
0,500	0	0,228	0,342	0,428	0,5
0,750	0	0,285	0,390	0,450	0,5
1	0	0,327	0,414	0,464	0,5

Das absolute Maximum von Y ist eben so gross, wie beim Parallelträger, nämlich $= \frac{1}{2} q l$. Jedoch nimmt Y nach der Mitte hin schneller ab, als beim Parallelträger und zwar um so schneller, je mehr sich der Träger dem Parabelträger nähert. In der Mitte ist Y wiederum ebenso gross, wie beim Parallelträger. Bei gleicher Neigung der Gitterstäbe würden daher die Maximal- und Minimalquerschnitte dieselben sein müssen, wie beim Parallelträger.

§. 70. Genaue Bestimmung der Spannungen. Für den Halbparabelträger erscheint es am meisten gerathen, die im VI. und VIII. Kapitel entwickelten allgemeinen Regeln direkt in Anwendung zu bringen, da sich aus der speziellen Form der Gurte wesentliche Vereinfachungen nicht erzielen lassen. Das folgende Beispiel mag daher gleichzeitig auch zur weiteren Erläuterung der Anwendung der allgemeinen Regeln dienen.

Beispiel. Wir behandeln im Folgenden ein Beispiel für einen Halbparabelträger, welches indess gleichzeitig auch als ein Beispiel für die Träger mit gekrümmten Gurten im Allgemeinen dienen mag. (Taf. VI.)

Die Brücke habe 75 Meter Spannweite. Die Träger mögen an den Enden 5 Met., in der Mitte 10 Met. Höhe haben. Das Gitterwerk sei zweitheiliges Fachwerk mit 3,75 Met. entfernten Vertikalen, so dass durch die Vertikalen 20 Fache gebildet werden (Taf. VI). Das Gewicht der Brücke sei pro Träger 1,6 Ton. pro Met., wovon am Untergurte 1,0 Ton. am Obergurte 0,6 Ton. wirken; es kommt alsdann auf einen unteren Knotenpunkt die Last $10 \cdot 3,75 = 3,75$ Ton., auf einen oberen Knotenpunkt die Last $0,6 \cdot 3,75 = 2,25$ Ton. Die Belastung erfolge durch einen Zug von drei Lokomotiven und von schweren Lastwagen nach dem folgenden Schema:

Radstand 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 1,3 4 1,5 1,5 3 3 3 Met.
 Achsendr. 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 4 4 4 Ton.

Die zulässige Inanspruchnahme sei 0,75 Ton. pro \square^{cm} . Wir wollen hier nicht die genaue Vertheilung der zufälligen Belastung auf die beiden Elementarsysteme, in welche sich das gegebene System zerlegen lässt und welche nach §. 54 zu erfolgen hätte,

durchführen, sondern die in §. 17 (Seite 48) aufgestellten und auch hier gültigen Nährungsregeln in Anwendung bringen.

A. Berechnung. Die Höhe h_n im Abstände $x = 3,75 n$ vom linken Ende oder an der n ten Vertikalen ist nach Formel 103 $h_n = 5 + \frac{4n(20-n)}{20^2} 5$, d. i.

$$a. h_n = 5 + n - 0,05 n^2 \text{ Meter.}$$

Hiernach ergibt sich

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_n = 5,00$	$5,95$	$6,80$	$7,55$	$8,20$	$8,75$	$9,20$	$9,55$	$9,80$	$9,95$	$10,00 \text{ Met.}$

Wir zerlegen das System in [zwei eintheilige Systeme; das I. System enthalte die Diagonalen $O 2, II 4$ etc., das II. System die Diagonalen $O 1, I 3$ etc. Auf ein Elementarsystem denken wir uns die ganze Last, also hinsichtlich des Eigengewichtes in einem unteren Knotenpunkte die Last $1 \cdot 7,5 = 7,5 \text{ Ton.}$, an einem oberen Knotenpunkte die Last $0,6 \cdot 7,5 = 4,5 \text{ Ton.}$, an den beiden Enden einer Vertikalen also die Last $7,5 + 4,5 = 12 \text{ Ton.}$ wirkend.

1. Diagonalen. Für einen durch eine Diagonale, deren unteres Ende den Index n hat, oder durch die n te Diagonale gelegten Schnitt, ist für das Eigengewicht:

$$\text{I. System: } Q = \frac{12 \cdot 9}{2} - \frac{n-2}{2} 12, \quad M = \frac{12 \cdot 9}{2} n \cdot 3,75 - \frac{n-2}{2} 12 \cdot \frac{n}{2} \cdot 3,75,$$

$$\text{II. System: } Q = \frac{12 \cdot 10}{2} - \frac{n-1}{2} 12, \quad M = \frac{12 \cdot 10}{2} n \cdot 3,75 - \frac{n-1}{2} 12 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot 3,75,$$

d. i., wenn wir den Einfluss des Eigengewichtes durch den Index g anzeigen.

$$b. \begin{cases} \text{I. System: } Q_g = 66 - 6n, & M_g = 225n - 11,25n^2, \\ \text{II. System: } Q_g = 66 - 6n, & M_g = 225n - 11,25(n^2 - 1). \end{cases}$$

Hierbei bezieht sich das Moment M auf den unteren Endpunkt der Diagonale.

Für die zufällige Last ist die Transversalkraft Q_p nach dem I. Heft, §. 13 zu bestimmen. Wir haben hierbei die erste Achse in den durch die Mitte der fraglichen Diagonale gelegten Vertikalschnitt oder für den Stab mit dem unteren Punkte n in den Punkt $n-1$ zu legen. Das Moment M_p wird alsdann: $M_p = Q_p x = 3,75 Q_p n$.

Für die Diagonale, deren unterer Index n ist, ist $\tan \sigma = \frac{h_n - h_{n-2}}{7,5} = \frac{0,05 n(20-n) - 0,05(n-2)(20-n+2)}{7,5}$, d. i.

$$c. \tan \sigma = \frac{11-n}{37,5}.$$

Nun wird $Y = Q - \frac{M}{h} \tan \sigma$, d. i. für das Eigengewicht

$$d. \begin{cases} \text{I. System: } Y_g = \frac{150,0(11-n)}{25+5n-0,25n^2} = \frac{5,00 Q}{h}, \\ \text{II. System: } Y_g = \frac{148,5(11-n)}{25+5n-0,25n^2} = \frac{4,95 Q}{h} \end{cases}$$

und für die zufällige Last $Y_p = Q_p \left(1 - \frac{x \tan \sigma}{h}\right)$, d. i.

$$e. Y_p = Q_p \left[1 - \frac{2n(11-n)}{100+n(20-n)}\right] = \frac{100-2n+n^2}{100+20n-n^2} Q_p.$$

Für die Wirkung beider Theile der Belastungen, für welche wir den Index q gebrauchen, ist nun $Y_q = Y_g + Y_p$ und die Spannung P einer Diagonale mit Rücksicht auf den Umstand, dass das Gitterwerk ein zweitheiliges ist,

$$f. P = + \frac{1}{2} Y_q \sec \alpha.$$

Hierbei ist $\tan \alpha = \frac{7,5}{h_{n-2}}$, $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$.

Die Diagonalen sind so weit fortzusetzen, als sich noch eine positive Spannung derselben ergibt.

Hiernach ergeben sich die folgenden Resultate:

Bezeichnung der Diagonale	Q_p	$\frac{Y_p}{Q_p}$	Y_p	Y_g	Y_q	$\sec \alpha$	$P = \frac{1}{2} Y_q \sec \alpha$	Querschnitts- fläche $f = \frac{P}{0,75}$
0 1	86,6	0,832	72,1	+ 50,9	+ 12 30	1,249	76,8	102,4
0 2	79,4	0,735	58,4	+ 34,7	+ 98,1	1,803	88,4	117,9
I 3	72,4	0,682	47,8	+ 31,5	+ 79,7	1,610	64,2	85,6
II 4	65,7	0,659	43,3	+ 26,1	+ 69,4	1,489	51,6	68,8
III 5	59,2	0,657	38,9	+ 20,4	+ 59,3	1,410	41,8	55,7
IV 6	53,0	0,659	35,8	+ 16,3	+ 52,1	1,356	35,3	47,1
V 7	47,0	0,707	33,2	+ 12,5	+ 45,7	1,317	30,1	40,1
VI 8	41,3	0,755	31,1	+ 9,2	+ 40,4	1,293	26,1	34,8
VII 9	35,9	0,819	29,4	+ 6,0	+ 35,3	1,271	22,4	29,9
VIII 10	30,6	0,900	27,6	+ 3,0	+ 30,6	1,260	19,2	25,6
IX 11	25,7	1,000	25,7	0	+ 25,7	1,252	16,1	21,5
X 12	21,1	1,123	23,7	- 3,0	+ 20,7	1,250	12,9	17,2
XI 13	16,9	1,272	21,5	- 6,2	+ 15,3	1,252	9,6	12,8
XII 14	13,3	1,457	19,4	- 9,8	+ 9,6	1,260	6,0	8,0
XIII 15	10,1	1,686	17,1	- 13,6	+ 3,5	1,271	2,2	2,9
XIV 16	7,3	1,976	14,5	- 18,8	- 3,8	—	—	—
XV 17	4,9	2,351	11,5	- 23,6	- 12,1	—	—	—
	Ton.		Tonnen				Tonnen	Centim.

2. Vertikalen. Für einen durch die Mitte der n ten Vertikale in Richtung der die Vertikale kreuzenden Diagonale gelegten Schnitt ergibt sich:

$$\text{I. System: } Q = \frac{12 \cdot 9}{2} - \frac{n}{2} 7,5 - \left(\frac{n}{2} - 1\right) 4,5, \quad M = \frac{12 \cdot 9}{2} n \cdot 3,75 - \frac{n-2}{2} 12 \cdot \frac{n}{2} \cdot 3,75,$$

$$\text{II. System: } Q = \frac{12 \cdot 10}{2} - \frac{n+1}{2} 7,5 - \frac{n-1}{2} 4,5, \quad M = \frac{12 \cdot 10}{2} n \cdot 3,75 - \frac{n-1}{2} 12 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot 3,75,$$

d. i. nach durchgeführter Reduktion:

$$g. \quad \begin{cases} \text{I. System: } Q_g = 58,5 - 6n, & M_g = 225n - 11,25n^2, \\ \text{II. System: } Q_g = 58,5 - 6n, & M_g = 225n - 11,25(n^2 - 1). \end{cases}$$

Hierbei bezieht sich das Moment auf das untere Ende der Vertikale. Bei der zufälligen Last ist für die n te Vertikale die erste Achse in den Punkt $n+1$ zu legen und Q_p wie oben zu bestimmen. Hierbei ist Q_p für die n te Vertikale gleich dem Q_p für die $(n+2)$ te Diagonale. Das Moment M_p wird alsdann $M_p = Q_p x = 3,75 Q_p n$.

Für die n te Vertikale ist $\tan \sigma = \frac{h_n - h_{n-2}}{7,5}$, d. i. wie oben

$$h. \quad \tan \sigma = \frac{11 - n}{37,5}.$$

Nun wird $Y = Q - \frac{M}{h} \tan \sigma$, d. i. für das Eigengewicht

$$i. \begin{cases} \text{I. System: } Y = \frac{150,0(11-n)}{25+5n-0,25n^2} - 7,5 = \frac{5,00(Q+7,5)}{h} - 7,5, \\ \text{II. System: } Y_g = \frac{148,5(11-n)}{25+5n-0,25n^2} - 7,5 = \frac{4,95(Q+7,5)}{h} - 7,5. \end{cases}$$

Hiernach ist Y_g für die n te Vertikale gleich dem Y_g für die n te Diagonale weniger 7,5, wie auch sofort aus dem Gleichgewichte eines unteren Knotenpunktes folgt. Für die zufällige Last wird $Y_p = Q_p \left(1 - \frac{x \tan \sigma}{h}\right)$, d. i.

$$k. Y_p = \frac{100 - 2n + n^2}{100 + 20n - n^2} Q_p.$$

Die Spannung V der Vertikale ist nun

$$l. V = -\frac{1}{2} Y_g.$$

Der Maximalstützdruck ist hinsichtlich des Eigengewichtes $= \frac{1}{2} 12 \cdot 10 = 60,0$ Ton., hinsichtlich der zufälligen Last $= 86,6$ Ton., im Ganzen also $60,0 + 86,6 = 146,6$ Ton.; da am unteren Knotenpunkte O das Gewicht $\frac{1}{2} \cdot 3,75 = 1,9$ wirkt, so ist der Druck in einem Endpfosten $= \frac{1}{2}(146,6 - 1,9) = 72,4$ Tonnen.

Hiernach ergeben sich die folgenden Resultate:

Bezeichnung der Vertikale	Q_p	$\frac{Y_p}{Q_p}$	Y_p	Y_g	Y_g	$P = \frac{1}{2} Y_g$	Querschnittsfläche $f = \frac{V}{0,75}$
0 0	+	—	+	—	+	—	144,8
I 1	86,6	—	—	—	—	—	192,1
II 2	72,4	0,832	60,3	+ 43,4	103,7	51,8	69,1
III 3	65,7	0,735	48,3	+ 32,2	80,5	40,2	53,6
IV 4	59,2	0,682	40,4	+ 24,0	64,4	32,2	42,9
V 5	53,0	0,659	34,9	+ 18,6	53,5	26,8	35,7
VI 6	47,0	0,657	30,9	+ 12,9	43,8	21,9	29,2
VII 7	41,3	0,659	27,6	+ 8,8	36,4	18,2	24,2
VIII 8	35,9	0,707	25,4	+ 5,0	30,3	15,2	20,2
IX 9	30,6	0,755	23,1	+ 1,7	24,8	12,4	16,5
X 10	25,7	0,819	21,0	— 1,6	20,0	9,7	13,0
	21,1	0,900	19,0	— 4,5	14,5	7,3	9,7
	Tonnen			Tonnen		Tonnen	□ Centim.

3. Gurte. Für einen durch den n ten unteren oder oberen Knotenpunkt und das in Richtung der Maschendiagonale gegenüberliegende Gurtstück gelegten Schnitt ergibt sich für das Eigengewicht, wie oben:

$$m. \begin{cases} \text{I. System: } M_g = 225n - 11,25n^2 \\ \text{II. System: } M_g = 225n - 11,25(n^2 - 1), \end{cases}$$

wenn n den Index des betreffenden unteren Knotenpunktes bedeutet und wenn man auf jedes Elementarsystem die ganze Last wirkend denkt. Für die zufällige Last ist das Maximalmoment für jeden Knotenpunkt nach dem I. Hefte, §. 14 und 15 zu bestimmen.

Nun ist die Spannung des n ten oberen Gurtstückes

$$n. S_1 = - \frac{1}{2} \left(\frac{M_n}{h_n} + \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} \right) \sec \sigma,$$

wenn σ sich auf das fragliche Gurtstück bezieht, und die Spannung des n ten unteren Gurtstückes

$$o. S_2 = + \frac{1}{2} \left(\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} \right).$$

Hierbei ist $\tan \sigma = \frac{h_n - h_{n-1}}{3,75} = \frac{1,05 - 0,1n}{3,75} = \frac{21 - 2n}{75}$, $\sec \sigma = \sqrt{1 + \tan^2 \sigma}$.

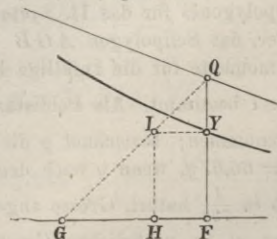
Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Index des unteren Knotenpunktes	Nr. der am Knotenp. liegenden Last	M_p	M_g	M_q	h	$\frac{M_q}{h}$	$\sec \sigma$	Spannung		Querschnitt	
								Oberg. S_1	Unterg. S_2	Obergurt	Untergurt
0	I	+	+	+	5,00	0		-	+		
1	II	299	225	524	5,95	88,0	1,032	118,2	0	157,5	0
2	III	554	405	959	6,80	141,0	1,025	165,1	44,0	220,1	58,7
3	IV	783	585	1368	7,55	181,1	1,020	197,0	114,5	262,7	152,7
4	V	963	720	1683	8,20	205,2	1,015	209,1	161,1	292,1	214,7
5	VII	1126	855	1981	8,75	226,4	1,011	235,7	198,2	314,3	257,5
6	VIII	1263	945	2208	9,20	240,0	1,007	247,1	205,8	329,5	287,7
7	IX	1360	1035	2395	9,55	250,8	1,005	255,7	233,2	340,2	310,9
8	X	1439	1080	2519	9,80	257,0	1,002	258,9	245,4	345,1	327,2
9	XI	1459	1125	2584	9,95	259,7	1,001	259,5	253,9	346,0	338,5
10	XIII	1463	1125	2588	10,00	258,8	1,000	259,2	258,4	345,7	344,5
		Tonnen			Meter	Ton.		Tonnen		□ Centim.	

B. Konstruktion. Auf Taf. VI ist die Konstruktion durchgeführt.

1. Diagonalen (Fig. 1 und 2). Zunächst wurden die Linien DE und CB , welche die Transversalkräfte für das Eigengewicht und die zufällige Last darstellen, konstruirt. Hierbei ist $AD = BE = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 75 = 60$ Ton., während auf der Vertikalen durch A die einzelnen Achsendrücke aufgetragen sind, als Kraftpolygon zur Konstruktion der Linie BC nach I. Heft, §. 13; BC ist hiernach ein Seilpolygon, für welches die erste Last in B liegt. Entspricht nun in Fig. 107 FQ der Transversalkraft für eine Diagonale, deren Mitte mit F korrespondirt, so macht man $FQ =$ der Höhe h , welche dem Fusspunkte der fraglichen Diagonale entspricht. Ferner macht man für das Eigengewicht, der Formel $d.$ entsprechend, für das I. System $GH = h_0 = 5^m$, für das II. System $GH = 4,95^m$ und führt die Fig. 107 angegebene Konstruktion aus. Für die zufällige Last zieht man zu der Sehne des Obergurtes, deren Enden mit den Enden der fraglichen Diagonale in derselben Vertikalen liegen, durch das Ende A (Fig. 1) eine Parallele bis zum Durchschnitte mit

Fig. 107.



der durch die Mitte der fraglichen Diagonale gehenden Vertikale; das auf derselben vom unteren Ende aus abgeschnittene Stück macht man in Fig. 107 = FH und führt die Fig. 107 angegebene Konstruktion aus. Hierdurch ergeben sich nun die Linien $D'E$ und $C'B$, welche dem Y für das Eigengewicht und die zufällige Last entsprechen. Durch Addition der entsprechenden Ordinaten ergibt sich die dem Maximum von Y für die Gesamtlast entsprechende Kurve EF . Für irgend eine Diagonale ist diejenige Ordinate massgebend, welche der Mitte der Diagonale entspricht. Zieht man durch die oberen Enden Parallelen zu der Diagonale (in der Figur sind Parallelen der grösseren Deutlichkeit wegen zu der entsprechenden links fallenden Diagonale gezogen), bis zum Durchschnitte mit der Axe AB , so entsprechen dieselben den zweifachen Spannungen. Für die Diagonale OI ist hierbei die Ordinate für $x = 0$ oder für den Punkt A massgebend.

Konstruiert man einen Masstab III, dessen Einheit = $2K = 2 \cdot 0,75 = 1,5\text{mal}$ so gross, als die Einheit des Kraftmasstabes II ist, so geben die Parallelen zu den Diagonalen, auf diesem Masstabe gemessen, die nöthigen nutzbaren Querschnittsflächen, welche in Fig. 5 eingeschrieben sind.

2. Vertikalen (Fig. 3). Hinsichtlich des Eigengewichtes ist das Y für eine beliebige Vertikale gleich dem Y für die Diagonale mit demselben Fusspunkte, weniger $7,5$ Tonnen. Man hat daher nur nöthig, von den Ordinaten der Kurve $D'E$ (Fig. 2) $7,5$ abziehen und den Rest, um den Abstand zweier Vertikalen nach rechts verrückt, in Fig. 3 aufzutragen. Hierdurch ist die Kurve $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ entstanden. Hinsichtlich der zufälligen Last ist das Q für eine beliebige Vertikale gleich dem Q für die Diagonale mit demselben oberen Ende; es ist daher nur nöthig, die Ordinaten der Linie CB in Fig. 2 um den Abstand zweier Vertikalen nach links verrückt, in Fig. 3 aufzutragen, um die Linie $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ der Transversalkräfte zu erhalten. Die weitere Konstruktion ist wie in Fig. 107; hierbei sind GF und FH eben so gross, wie für diejenige Diagonale, welche mit der Vertikale das untere Ende gemein hat. Durch Addition der Ordinaten entsteht die Linie $\mathfrak{F}\mathfrak{B}$, welche dem Maximum von Y für die Gesamtlast entspricht. Gleichzeitig ist Y gleich dem zweifachen Drucke in den Vertikalen. Die Ordinaten mit dem Masstabe III gemessen, geben die nöthigen Querschnittsflächen, welche in Fig. 5 eingeschrieben sind.

Der Druck in einem Endständer ist $AC + AD = 3,7$ (Fig. 2), da $3,7$ der am unteren Knotenpunkte O wirkende Theil des Eigengewichtes ist.

Für die Anwendung werden die Figuren 2 und 3 am besten vereinigt. Wir haben sie der grösseren Deutlichkeit wegen getrennt gezeichnet.

3. Gurte (Fig. 6 bis 9). In Fig 8 stellen die Ordinaten der Linie AGB die Momente für das Eigengewicht, der Linie AHB für die zufällige Last, der Linie AIB die Summe aus beiden dar. Hinsichtlich des Eigengewichtes liegen für das I. System mit den Knotenpunkten $0, 2, 4 \dots$ die Ecken des Seilpolygones auf den Seiten des Seilpolygones für das II. System mit den Knotenpunkten $0, 1, 3, 5 \dots$. Es genügt daher, das Seilpolygon AGB für dieses letztere System zu konstruieren. Die Maximalmomente für die zufällige Last sind in bekannter Weise mittels des Seilpolygones Fig. 7 bestimmt. Als Poldistanz H wurde $\frac{200}{3} = 66,67$ Ton. nach dem Masstabe II angenommen; bezeichnet y die Höhe des Seilpolygones, so ist alsdann das Moment $M = 66,67y$, wenn y nach dem Längenmasstabe I gemessen wird; da dieser Masstab in $\frac{1}{750}$ natürl. Grösse angenommen wurde, so ist $M = 66,67 \cdot 750y = 50000y$, wenn y in natürlicher Grösse gemessen wird; 1 Tonnenmeter wäre demnach $= 0,00002$ Meter $= 0,02$ Millimeter, 100 Tonnenmeter $= 2$ Millimeter (Masstab V). Macht man nun für einen beliebigen Knotenpunkt $K: KN = h, NP =$ der Pol-

distanz H , so wird $MO = \frac{Hy}{h} = \frac{M}{h}$. Der grösseren Genauigkeit wegen wurde KL nicht $= h$, sondern $= \frac{15}{4} h$ gemacht; alsdann musste NP nicht $= H$, sondern $= \frac{15}{4} H$, d. i. $\frac{15}{4} 66,67 = 250$ Tonnen (nach dem Masstabe VI) gemacht werden.

Die Spannungen der Gurtstücke erhält man nun einfach durch Addition derjenigen beiden Linien MO , welche den beiden Elementarsystemen entsprechen, welchen das Gurtstück angehört und Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ für den Untergurt, mit $\frac{1}{2} \sec \sigma$ für den Obergurt. So z. B. ist die Spannung des Gurtstückes 5 6 $= \frac{1}{2} (MO + M_1 O_1)$, die Spannung des Gurtstückes III IV $= \frac{1}{2} (MO + M_1 O_1) \sec \sigma$, wenn sich σ auf die Neigung des Gurtstückes III IV bezieht. Die Multiplikation mit $\sec \sigma$ ist in Fig. 9 ausgeführt. Die so gefundenen Linien sind als Ordinaten der Linien RT und ST aufgetragen und zwar entspricht die Spannung eines Gurtstückes der zur Mitte desselben gehörigen Ordinate.

Konstruiert man einen Masstab VII, dessen Einheit $= K \text{ mal} = 0,75 \text{ mal}$ so gross ist, als die Einheit des Masstabes VI, so geben die Ordinaten der Linien RT und ST nach diesem Masstabe die nöthigen Querschnittsflächen der Gurte. Diese Querschnittsflächen sind in Fig. 8 eingeschrieben.

In Fig. 4 ist zur Kontrolle die Konstruktion der Spannungen für das Eigengewicht nach der grafischen Polygonalmethode durchgeführt.

§. 71. **Volumen.** Die zur Berechnung der Querschnittsfläche einzuführende zulässige Inanspruchnahme sei für Zug und Druck gleich, nämlich $= K$.

1. **Gurte.** Das Volumen V_1' des geraden Untergurtes ist

$$V_1' = \frac{1}{K} \int_0^l \frac{M}{h} dx = \frac{ql^2}{2K} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{l^2 h_0 + 4(h_1 - h_0)x(l-x)}.$$

Setzen wir $x = \frac{1}{2} l - x_1$, so wird

$$\begin{aligned} V_1' &= \frac{ql^3}{8K} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{(l^2 - 4x_1^2) dx}{h^2 h_1 - 4(h_1 - h_0)x_1^2} \\ &= \frac{ql}{8K(h_1 - h_0)} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \left[1 - \frac{l^2 h_0}{l^2 h_1 - 4(h_1 - h_0)x_1^2} \right] dx. \end{aligned}$$

Nach den Integralformeln $\int dx = x$ und $\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \lognat \frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}$ ergibt sich

$$V_1' = \frac{ql^3}{8K(h_1 - h_0)} \left[1 - \frac{h_1}{2\sqrt{h_1}(h_1 - h_0)} \lognat \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_1 - h_0}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - h_0}} \right]$$

oder

$$108. \quad V_1' = \frac{1}{2} \alpha \frac{ql^3}{K h_1},$$

wenn man zur Abkürzung $h_0 = \varepsilon h_1$ und

$$108 a. \quad \kappa = \frac{1}{4(1-\varepsilon)} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon}} \operatorname{lognat} \frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon}}{1 - \sqrt{1-\varepsilon}} \right]$$

setzt. Hiernach ergibt sich:

$$\begin{array}{cccccc} \varepsilon = & 0 & 0,125 & 0,25 & 0,5 & 0,75 & 1 \\ \kappa = & 0,2500 & 0,2208 & 0,2066 & 0,1884 & 0,1761 & 0,1667 \end{array}$$

Schwieriger lässt sich das Volumen V_1'' des Obergurtes bestimmen. Es genügt indess der Kleinheit von σ wegen, wenn man für $\tan \sigma$ einen mittleren Werth einführt. In der Mitte ist $\tan \sigma = 0$; am Ende ist nach der zweiten Formel von §. 69 $\tan \sigma = \frac{4(1-\varepsilon)h}{l}$. Wir setzen daher konstant $\tan^2 \sigma = \frac{2(1-\varepsilon)h_1}{l}$, $\sec \sigma = 1 + \tan^2 \sigma = 1 + \frac{4(1-\varepsilon)^2 h_1^2}{l^2}$. Alsdann wird:

$$V_1'' = V_1' \left[1 + \frac{4(1-\varepsilon)^2 h_1^2}{l^2} \right]$$

und das Gesamtvolumen V_1 beider Gurte $V_1 = V_1' + V_1''$, d. i.

$$V_1 = 2V_1' \left[1 + \frac{2(1-\varepsilon)^2 h_1^2}{l^2} \right].$$

Für den Parabelträger ist leicht eine genauere Bestimmung möglich. Hier ergibt sich in der Parenthese $\frac{8}{3}$ statt 2. Wir können daher allgemein genauer:

$$V_1 = 2V_1' \left[1 + \frac{8(1-\varepsilon)^2 h_1^2}{3l^2} \right]$$

setzen, d. i. wenn man für V_1 den obigen Ausdruck setzt,

$$109. \quad V_1 = \kappa \frac{ql^3}{Kh_1} \left[1 + \frac{8(1-\varepsilon)^2 h_1^2}{3l^2} \right].$$

Der Werth in der Parenthese liegt zwischen den engen Grenzen 1 und 1,05. Für $l = 8h_1$ und sehr nahe auch allgemein ergibt sich

$$\begin{array}{cccccc} \varepsilon = & 0 & 0,125 & 0,25 & 0,5 & 0,75 & 1 \\ V_1 = & 0,260 & 0,228 & 0,211 & 0,190 & 0,177 & 0,157 \cdot \frac{ql^3}{Kh_1} \end{array}$$

Sehr nahe wird hiernach allgemein

$$110. \quad V_1 = (0,26 - 0,10\sqrt{\varepsilon}) \frac{ql^3}{Kh_1}.$$

Bei Anwendung der neueren Berechnungsweise ist nur $\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1}$ für $\frac{q}{K}$ zu setzen.

2. Gitterwerk. a) Netzwerk. Für eine beliebige, aber konstante Neigung der Gitterstäbe können wir entsprechend der Gleichung 83

(Seite 85) das Volumen v_2 pro Längengewicht $= C \frac{Y}{K}$ setzen. Daher ist das Gesamtvolumen V_2 des Gitterwerkes

$$V_2 = \frac{2C}{K} \int_0^{\frac{1}{2}l} Y dx.$$

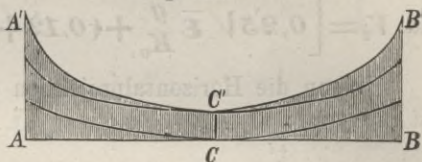
Das Integral ist die Fläche $ACC'A'$ der Y -Kurve (Fig. 108), welche man am besten für einzelne Werthe von ε mit Hilfe des Planimeters bestimmt, da eine direkte Integration zu komplizierte Ausdrücke liefert. Für eine Neigung der Gitterstäbe unter 45° ($\alpha = \beta = 45^\circ$) wird $C = 2$ und für diesen Fall ergibt sich durch die oben erwähnte Anwendung des Planimeters, dass man

$$110. \quad V_2 = (Ag + Bp) \frac{l^2}{K}$$

setzen kann, wobei A und B die folgenden Werthe haben:

ε	A	B	B_1
0	0	0,167	0,242
0,25	0,238	0,371	0,431
0,5	0,356	0,466	0,516
0,75	0,431	0,532	0,577
1	0,500	0,584	0,622

Fig. 108.



Allgemein ist $C = \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha$, so dass vorstehende Zahlen im Allgemeinen noch mit $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ oder mit $\frac{1}{2}(\tan \alpha + \cot \alpha)$ zu multiplizieren sein würden. Sehr nahe ergibt sich allgemein:

$$111. \quad V_2 = [0,25\sqrt{\bar{\varepsilon}}g + (0,08 + 0,21\sqrt{\bar{\varepsilon}})p](\tan \alpha + \cot \alpha) \frac{l^2}{K}.$$

Nach der neueren Berechnungsweise wird, wenn man den Werth von Y für das Eigengewicht, das positive und negative Maximum von Y für die zufällige Last, und zwar für eine Last $= 1$ pro Längeneinheit, bezüglich mit y_0, y_1, y_2 bezeichnet,

$$V_2 = 2C \left[\frac{g}{K_0} \int y_0 dx + \frac{p}{K_1} \int y_1 dx + \frac{p}{K_2} \int y_2 dx \right].$$

Nun aber ist $y_1 - y_2 = y_0, y_2 = y_1 - y_0$; ferner ist $2C \int y_0 dx = Al^2, \int y_1 dx = Bl^2$, also $2C \int y_2 dx = (B - A)l^2$. Demnach wird

$$V_2 = \left[A \frac{g}{K_0} + \left\{ B + (B - A) \frac{K_1}{K_2} \right\} \frac{p}{K_1} \right] l^2,$$

oder

$$109a. V_2 = \left(A \frac{g}{K_0} + B_1 \frac{p}{K_1} \right) l^2.$$

Der Werth von $B_1 = B + (B - A) \frac{K_1}{K_2}$ ist in der Tabelle mit angegeben und zwar für $K_1 = 0,43 K_2$. Sehr nahe wird hiernach

$$111a. V_2 = \left[0,25 \sqrt{\varepsilon} \frac{g}{K_0} + (0,12 + 0,19 \sqrt{\varepsilon}) \frac{p}{K_1} \right] (\tan \alpha + \cot \alpha) l^2.$$

Wenn die Horizontalprojektion a der Stäbe dagegen eine konstante ist, so wird:

$$V_2 = \frac{2}{K} \int_0^{\frac{1}{2}l} Y (\tan \alpha + \cot \alpha) dx = \frac{2}{K} \left[\frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{2}l} Y h dx + a \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{Y}{h} dx \right].$$

Das Integral von $Y h dx$ lässt sich leicht entwickeln; das Integral von $\frac{Y}{h} dx$ führt aber auf einen zu komplizirten Ausdruck, so dass man auch hier besser die Bestimmung des Integrales durch Planimetrierung anwendet. Hiernach lässt sich das Volumen ausdrücken durch

$$112. V_2 = \left[(\alpha_1 g + \alpha_2 p) \frac{h_1}{a} + (\beta_1 g + \beta_2 p) \frac{a}{h_1} \right] \frac{l^2}{K},$$

und zwar haben die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ folgende Werthe:

ε	α_1	β_1	β_1	β_2	α_2	β_2
0	0	0	0,067	0,125	0,097	0,181
0,250	0,063	0,255	0,123	0,333	0,150	0,368
0,500	0,125	0,250	0,179	0,301	0,203	0,324
0,750	0,188	0,250	0,235	0,292	0,256	0,311
1	0,250	0,250	0,292	0,286	0,311	0,302

Zum Minimum wird V_2 bei variablem a für

$$113. \frac{a}{h_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1 g + \alpha_2 p}{\beta_1 g + \beta_2 p}}.$$

Hiernach schwankt $\frac{a}{h_1}$, wenn man nur die üblichen Verhältnisse zwischen g und p berücksichtigt, nur zwischen engen Grenzen und kann im Mittel nach der folgenden Tabelle angenommen werden. Das Minimum von V_2 lässt sich hiernach für ein bestimmtes ε annähernd ausdrücken in der Form

$$114. \min V_2 = (A g + B p) \frac{l^2}{K},$$

worin A und B folgende Werthe haben:

ε	$\frac{a}{h_1}$	A	B	B_1
0	0,732	0	0,183	0,265
0,25	0,560	0,254	0,405	0,470
0,5	0,742	0,354	0,451	0,513
0,75	0,883	0,434	0,524	0,564
1	0,013	0,500	0,578	0,613

Sehr nahe wird hiernach

$$115. \min V_2 = [0,50 \sqrt{\varepsilon} g + (0,19 + 0,38 \sqrt{\varepsilon}) p] \frac{l^2}{K}$$

Nach der neueren Berechnungsweise ergibt sich ganz wie vorhin, dass in Formel 112 α_3 und β_3 statt α_2 und β_2 einzuführen ist, wenn man $\alpha_3 = \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{K_1}{K_2}$, $\beta_3 = \beta_2 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{K_1}{K_2}$ setzt. Auch in Formel 113 würde α_3 und β_3 für α_2 und β_2 zu setzen sein. In Formel 114 ist alsdann statt B ein anderer Koeffizient B_1 einzuführen. Die Werthe von α_3 , β_3 und B_1 enthalten die vorigen Tabellen. Annähernd ergibt sich

$$115a. \min V_2 = \left[0,50 \sqrt{\varepsilon} \frac{g}{K_0} + (0,26 + 0,37 \sqrt{\varepsilon}) \frac{p}{K_1} \right] l^2.$$

b. Fachwerk. Hier sind die Vertikalen und die Diagonalen von einander zu trennen. Nach dem in §. 38 Gesagten ist das Volumen V_2 des ganzen Gitterwerkes

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2}{K} \int_0^{\frac{1}{2}l} Y \cot \alpha \, dx + \frac{2}{K} \int_0^{\xi} \frac{Y dx}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{2}{K} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{Yh}{a} \, dx + \frac{2}{K} \int_0^{\xi} \frac{Y(a^2 + h^2)}{ah} \, dx, \end{aligned}$$

wenn ξ die Länge $AE = BD$ (Fig. 106) bezeichnet, bis zu welcher von einem Ende aus die Diagonalen reichen müssen und a die Horizontalprojektion der Diagonalen. Nehmen wir a konstant an, so wird

$$V_2 = \frac{2}{K} \left[\int_0^{\frac{1}{2}l} Yh \, dx + [a^2 \int_0^{\xi} \frac{Y}{h} \, dx + \int_0^{\xi} Yh \, dx] \right].$$

Das Integral von $Yh \, dx$ lässt sich entwickeln; das Integral von $\frac{Y}{h} \, dx$ wird man am besten wieder durch Auftragen einer Kurve mit den Ordinaten $\frac{Y}{h}$ und Planimetrierung bestimmen. Es lässt sich alsdann V_2 auch hier durch die Formel 112 darstellen. Die Koeffizienten erhalten hier annähernd die folgenden Werthe:

ε	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
0	0	0	0,200	0,250	0,285	0,357
0,25	0,122	0,228	0,248	0,339	0,302	0,387
0,50	0,248	0,230	0,361	0,322	0,410	0,362
0,75	0,372	0,240	0,474	0,307	0,517	0,335
1,00	0,500	0,250	0,584	0,292	0,620	0,310

Streng genommen ändern sich die Werthe der Koeffizienten bei demselben ε einigermaßen, wenn sich das Verhältniss von g zu p ändert.

Zum Minimum wird V_2 für den durch die Formel 113 ausgedrückten Werth von $\frac{a}{h_1}$. Hiernach variirt das Verhältniss $\frac{a}{h_1}$ nur wenig, wenn sich das Verhältniss von $g : p$ ändert; im Mittel kann dasselbe nach der folgenden Tabelle bestimmt werden. Das Minimum von V_2 ist alsdann wiederum annähernd bestimmt durch die Formel 114. Die Werthe von A und B gibt folgende Tabelle.

ε	$\frac{a}{h_1}$	A	B	B_1
0	0,89	0	0,447	0,633
0,25	0,81	0,335	0,580	0,686
0,5	1,04	0,477	0,681	0,771
0,75	1,24	0,599	0,765	0,832
1	1,41	0,706	0,826	0,891

Angenähert lässt sich hiernach setzen:

$$116. \min V_2 = [0,69 \sqrt{\varepsilon} g + (0,34 + 0,49 \sqrt{\varepsilon}) p] \frac{l^2}{K}.$$

Nach der neueren Berechnungsweise ergibt sich auch hier, dass statt α_2 und β_2 die Koeffizienten α_3 und β_3 und statt B ein Koeffizient B_1 einzuführen ist, wobei annähernd $\alpha_3 = \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{K_1}{K_2}$, $\beta_3 = \beta_2 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{K_1}{K_2}$ zu setzen ist. Die Werthe von α_3 , β_3 und B_1 enthalten die vorigen Tabellen. Annähernd wird

$$116a. \min V_2 = \left[0,69 \sqrt{\varepsilon} \frac{g}{K_0} + (0,45 + 0,46 \sqrt{\varepsilon}) \frac{p}{K_1} \right] l^2.$$

3. Endständer. Für das Volumen V_3 der Endständer gelten ganz die in §. 41 für den Parallelträger entwickelten Regeln, wenn man für h die Höhe h_0 der Endständer einführt; speziell sind die Formeln 105, 108, 109 und 110 anzuwenden.

Den Ausdruck für das Gesamtvolumen wollen wir nicht aufstellen. Wir bemerken nur, dass bei gegebener Höhe h_1 in der Mitte bei abnehmendem h_0 das Volumen der Gurte zu-, das des Gitterwerkes und der Endständer dagegen abnimmt; das kleinste Gesamtvolumen ergibt sich für $h_0 = h_1$, d. i. für den Parallelträger, wenn man den Fall $h_0 > h_1$ ausschliesst. Anders kann sich indess die Sache gestalten, wenn man, wie dies zweckmässig, die Höhe h_1 nicht konstant, sondern um so grösser annimmt, je kleiner die Höhe h_0 ist. Näher können wir hierauf aber erst im praktischen Theile des Brückenbaues eingehen.

XII. Kapitel.

Hyperbelträger.

§. 72. **Prinzip.** Bei den Parallelträgern mit einfachem Gitterwerke ist das Maximum und Minimum der Spannung eines Gitterstabes entweder nur positiv oder nur negativ, mit Ausnahme des mittleren Trägertheiles. Beim Parabelträger dagegen haben die beiden Grenzwerte der Spannung eines Stabes entgegengesetzten Sinn. Diese Grenzwerte der Spannung treten bei Belastung des rechten und linken Trägertheiles, von dem betreffenden Stabe aus gerechnet, ein. Es wird nun offenbar eine zwischen dem Parallel- und Parabelträger liegende Form geben, bei welcher die eine Grenze der Spannung Null ist, so dass der Stab nur in einem Sinne beansprucht wird. Diese Form wird, ohne den Uebelstand der Parabelträger, welcher in einer Beanspruchung in verschiedenem Sinne liegt, zu haben, sich dem Parabelträger möglichst nähern und somit die Vortheile des Parabelträgers, welche in einer möglichst konstanten Spannung der Gurte und einer möglichst geringen Beanspruchung des Gitterwerkes liegen, möglichst erreichen.

Die Bedingung für die Feststellung dieser Form ist, dass die Vertikalkraft Y für jeden Stab bei Belastung der einen Seite des Trägers Null wird.

Wenn man das Gitterwerk als Fachwerk mit steifen Vertikalen und schlaffen Diagonalen anordnet, so müssen beim Parabelträger bekanntlich doppelte Diagonalen angeordnet werden, bei dem Parallelträger in den Endtheilen dagegen nicht. Wenn man den Träger nach der eben aufgestellten Bedingung konstruirt, so genügt eben noch eine Diagonale, weil sich der grösste Zug bei der zweiten Diagonale gleich Null ergeben würde.

Diese Träger wurden zuerst von Schwedler in Berlin angewendet; man nennt sie daher gewöhnlich Schwedler'sche Träger. Da sich, wie wir sehen werden, eine hyperbolische Form der Gurte ergibt, so kann man sie im Gegensatze zu den Parabelträgern auch Hyperbelträger nennen.

Wählt man die Trägerform so, dass für rechte Belastung $Y = 0$ wird, so wird für linke Belastung Y negativ und es werden die nach links fallenden Stäbe gezogen; beim Fachwerke müssten also die nach links fallenden Diagonalen vorhanden sein. Wählt man dagegen die Trägerform so, dass für linke Belastung $Y = 0$ wird, so wird für rechte Belastung Y positiv und es werden die nach rechts fallenden Stäbe gezogen; beim Fachwerke müssten also die nach rechts fallenden Diagonalen vorhanden sein. Um eine symmetrische Trägerform zu erhalten, wird man von jeder dieser Formen nur die Hälfte beibehalten.

§. 73. Näherungsbestimmung der Gurtform. Wir wollen zunächst die Gurtform unter der Bedingung entwickeln, dass für linke Belastung $Y = 0$ wird. Bei Belastung des linken Theiles vom fraglichen Querschnitte bis zum rechten Ende aber ergibt sich leicht:

$$Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) - \frac{1}{2} p \frac{x^2}{l}, \quad M = \frac{1}{2l} (gl + px) x (l - x).$$

Hiernach ist $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{1}{2} p \frac{x}{l} (2l - 3x)$, daher $Q = \frac{dM}{dx} - \frac{px(l-x)}{l}$. Nach Formel 35 (Seite 126) ist $Y = Q - \frac{M}{dx} \frac{dh}{h}$; sonach wird $Y = 0$ für

$$\frac{dh}{h} = \frac{Q dx}{M} = \frac{dM}{M} - \frac{px(l-x) dx}{Ml},$$

oder, wenn man im zweiten Gliede der rechten Seite für M seinen Ausdruck einsetzt,

$$\frac{dh}{h} = \frac{dM}{M} - \frac{2p dx}{gl + px}.$$

Die Integration gibt $\lognat h = \lognat M - 2 \lognat (gl + px) + Const = \lognat A_1 \frac{M}{(gl + px)^2}$, wenn A_1 eine Konstante bezeichnet. Sonach ist

$$h = A_1 \frac{M}{(gl + px)^2}.$$

Setzt man den Ausdruck für M ein und bezeichnet die Konstante $\frac{A_1}{2l}$ mit A , so wird

$$117. \quad h = A \frac{x(l-x)}{gl + px}.$$

$$118. \quad \frac{dh}{dx} = A \frac{gl(l-2x) - px^2}{(gl + px)^2}.$$

Die Höhe h' in der Mitte wird hiernach

$$119. \quad h' = \frac{Al}{2(p+2g)}.$$

Nimmt man die Form des einen Gurtes an, so ist hiernach die Form des anderen Gurtes bestimmt. Stets ist indess der Untergurt gerade ausgeführt und wir wollen auch nur diese Form weiter in Betracht ziehen. Alsdann muss der Obergurt nach Gleichung 117 die Form einer Hyperbel erhalten.

Die grösste Höhe tritt nach Formel 118 ein für $gl(l-2x) = px^2$, d. i. wenn wir das betreffende x mit x_1 bezeichnen, und wenn $g = nq$, $p = (1-n)q$ gesetzt wird, für

$$120. \quad \frac{x_1}{l} = \frac{g}{p} \left(\sqrt{1 + \frac{g}{p}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}.$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck 117 für h , so findet man als grösste Höhe h_1 :

$$121. \quad h_1 = \frac{Agl}{p^2} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} - 1 \right)^2 = \frac{Ax_1^2}{gl}.$$

In der Regel wird h_1 gegeben sein; alsdann wird nach vorstehender Gleichung

$$122. \quad A = \frac{gh_1}{l} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right)^2 = (1+n+2\sqrt{n}) \frac{qh_1}{l}.$$

Dies in Formel 119 eingesetzt, gibt

$$123. \quad \frac{h'}{h_1} = \frac{g \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right)^2}{2(p+2g)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{1+n}.$$

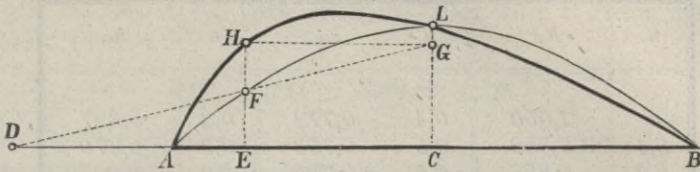
Für $p = 0$ wird $x_1 = \frac{1}{2}l$, $h' = h_1$ und der Träger geht hier in einen Parabelträger über. Für $g = 0$ wird $x_1 = 0$, $h' = \frac{1}{2}h_1$; $h = \frac{A}{p}(l-x)$; die Trägerform geht hiernach in ein Dreieck über.

Nach Formel 120 lässt sich x_1 leicht konstruiren. Man mache, wenn in Fig. 109 $AB = l$ ist, $AD = \frac{g}{p}l$, schlage über DB einen Halbkreis, errichte in A auf AB eine Senkrechte, welche den Halbkreis in F schneidet und mache $DG = DF$; alsdann ist $AG = x_1$.

Nimmt man h_1 an, so lässt sich nach Formel 123 h' leicht konstruiren. Man mache auf der mittleren Vertikalen $CR = h_1$, halbire CR in I , ziehe die Gerade ID , welche die durch G gehende Vertikale in K schneidet. Macht man jetzt $IL = GK$, so ist, wie sich leicht nachweisen lässt, $CL = h'$.

Es lässt sich ferner leicht nachweisen, dass von den beiden Asymptoten der Hyperbel die eine MD eine vertikale Lage hat. Die

Fig. 110.



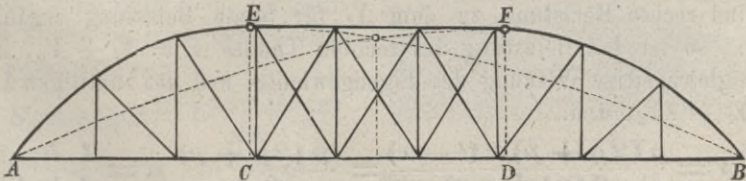
Bezeichnet man den Winkel, welchen die Tangenten an den Enden A und B mit der Horizontalen AB bilden, mit σ_0 und σ_1 , so folgt aus Formel 118, wenn man $x = 0$ und $= l$ setzt,

$$124. \begin{cases} \tan \sigma_0 = \frac{A}{g} = 2 \frac{h'}{l} \left(2 + \frac{p}{g} \right) = \frac{h_1}{l} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right)^2 = \frac{1+n+2\sqrt{n}}{n} \frac{h_1}{l}, \\ \tan \sigma_1 = -\frac{A}{g+p} = -2 \frac{h'}{l} \frac{p+2g}{p+g} = -2(1+n) \frac{h'}{l}. \end{cases}$$

Hiernach sind die Tangenten leicht zu konstruiren. Beide Tangenten schneiden die Gerade CM (einen Durchmesser der Hyperbel) in ein und demselben Punkte U , wobei U von AB einen Abstand hat, welcher $= AN = 2h'$ ist. Dies genügt zur Konstruktion. Man kann aber auch durch D und N eine Gerade legen, welche die mittlere Vertikale in Q schneidet; alsdann ist QA die eine Tangente.

Der rechte Theil dieser Trägerform ist unzweckmässig, einestheils der geringen Höhe, also grossen Gurtspannung wegen, andertheils des sehr spitzén Winkels wegen, unter welchem sich die Gurte vereinigen. Man behält daher nur den linken Theil bis zur grössten Höhe bei, gestaltet den rechten Theil dem linken symmetrisch und schaltet zwischen

Fig. 111.



beiden ein Stück eines Parallelträgers ein, so dass die in Fig. 111 dargestellte Form entsteht.

Die mittlere Höhe h_m des Trägers ist $h_m = \frac{1}{l} \int h dx = \frac{1}{l} \left[2 \int_0^{x_1} h dx + h_1 (l - 2x_1) \right]$. Führt man die Integration aus, so erhält man nach entsprechender Reduktion

$$125. \frac{h_m}{h_1} = \frac{1+n-2\sqrt{n}}{1-n} + 2 \frac{1+n+2\sqrt{n}}{(1-n)^3} \left[(1+n)\sqrt{n} - \frac{1}{2}(3+n)n + n \log \text{nat} \sqrt{n} \right]$$

Hiernach ergeben sich die folgenden Werthe für h_m :

n	h_m	n	h_m	n	h_m
0	1,000	0,4	0,772	0,8	0,697
0,1	0,888	0,5	0,753	0,9	0,670
0,2	0,838	0,6	0,729	1,0	0,667
0,3	0,802	0,7	0,708		
	$\cdot h_1$		$\cdot h_1$		$\cdot h_1$

§. 74. Näherungsbestimmung der Spannungen.

1. Gitterwerk. Für die totale Belastung mit der Last q pro Längeneinheit wird $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, also

$$\frac{M}{h} = \frac{q(gl + px)}{2A}, \quad d \frac{M}{h} = \frac{qp}{2A} dx.$$

Nach der Formel 34 (Seite 126) wird demnach

$$126. \quad Y = \frac{qpx(l-x)}{2(gl+px)}.$$

Die Beanspruchung Y_g durch das Eigengewicht erhält man hieraus, indem man q mit g vertauscht.

Die Beanspruchung durch eine totale zufällige Belastung erhält man hieraus, indem man p für q setzt. Bei Belastung des linken Theiles unter gleichzeitiger Wirkung des Eigengewichtes wird der Annahme zufolge $Y = 0$. Für die blosse Wirkung der zufälligen Last bei Belastung des linken Theiles ist demnach $Y = -Y_g$. Da sich nun die Y für linke und rechte Belastung zu dem Y_t für totale Belastung ergänzen müssen, so ist bei Belastung des rechten Theiles $Y = Y_t + Y_g$, also für die gleichzeitige Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last $Y = Y_t + 2Y_g$, d. i.

$$127. \quad Y = \frac{p(2g+p)x(l-x)}{2(gl+px)} = \frac{p(2g+p)}{2A} h = \frac{1}{4} \frac{h}{h'} pl.$$

Hiernach ist das Maximum von Y der Trägerhöhe proportional. Die Spannung der Gitterstäbe findet man nun nach Formel 33 (Seite 126) durch Multiplikation mit $\frac{1}{n} \sec \alpha$ und $\frac{1}{n} \sec \beta$. Die Maximalspannung der Gitterstäbe ist sonach ihrer Länge proportional. Diese Eigenschaft hat der Hyperbelträger mit dem Parabelträger gemein. Bei gleicher Länge des Stabes wird hier die Maximalspannung des Stabes doppelt so gross, als beim Parabelträger, vorausgesetzt, dass h' gleich der Höhe des Parabelträgers in der Mitte ist.

Dies gilt natürlich nur für die äusseren Theile; für den mittleren Theil gilt das Gesetz des Parallelträgers. Hier wird Y gleich der Transversalkraft Q , d. i.

$$128. Y = \frac{1}{2} g(l - 2x) + \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}$$

In Fig. 112 ist hiernach (beispielsweise für $p = 2g$) Y grafisch dargestellt; es sind gleichzeitig auch die Kurven der Y für den Parabel- und Parallelträger eingezeichnet. Hiernach wird das Y des Hyperbelträgers stets grösser, als das des Parabelträgers, mit Ausnahme der Mitte, in welcher Y für alle drei Systeme denselben Werth annimmt.

2. Gurte. Unter der Annahme eines geraden Untergurtes ist die Spannung der Gurte

$$S_1 = + \frac{M}{h}, \quad S_2 = - \frac{M}{h} \sec \sigma = - S_1 \sec \sigma.$$

Setzt man für totale Belastung $M = \frac{1}{2} (g + p) x (l - x)$ und $h = A \frac{x(l-x)}{gl + px}$, so ergibt sich

$$129. S_1 = \frac{(g+p)(gl+px)}{2A} = \frac{(g+p)l(gl+px)}{4(2g+p)h}, \quad S_2 = - S_1 \sec \sigma.$$

Hiernach lässt sich S_1 durch eine gerade Linie darstellen. Im mittleren Theile ist nach dem Gesetze des Parallelträgers

$$130. S_1 = - S_2 = \frac{(g+p)x(l-x)}{2h}$$

Hiernach ist in Fig. 113 (beispielsweise für $p = 2g$) die Spannung beider Gurte grafisch dargestellt; auch sind zum Vergleiche die Spannungen für den Parabel- und Parallelträger von gleicher Höhe in der Mitte durch punktirte Linien eingetragen.

Fig. 112.

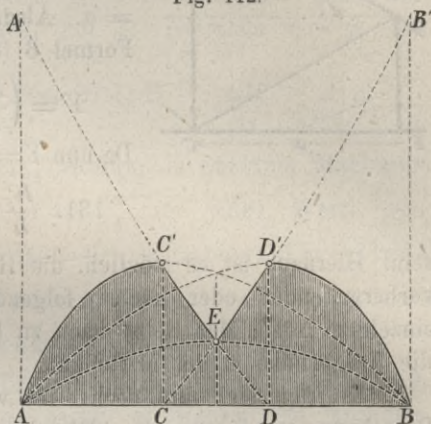
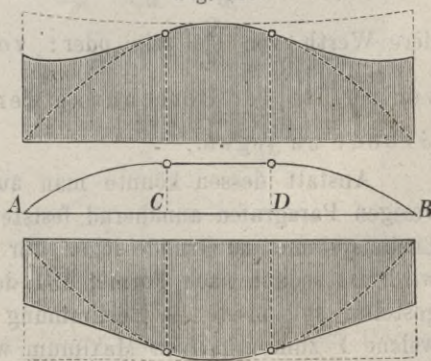


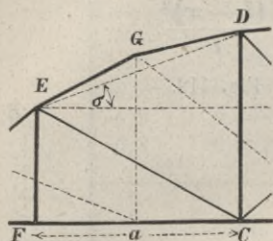
Fig. 113.



§. 75. **Genaue Berechnung der Gurtform.** Für die genaue Bestimmung der Gurtform wollen wir nur die Anwendung von Fachwerk mit steifen Vertikalen und schlaffen Diagonalen voraussetzen.

Die Momente hinsichtlich des Eigengewichtes und der noch näher zu bestimmenden Belastung des linken Theiles seien die Momente für einen durch eine Diagonale CE (Fig. 114) gelegten Schnitt in Beziehung auf die Vertikalen CD und FE bezüglich M und M' , die Höhen dieser Vertikalen h und h' , ihr Abstand $= a$. Alsdann ist für die Diagonale CE nach Formel 6 (Seite 100):

Fig. 114.



$$Y = \left(\frac{M}{h} - \frac{M'}{h'} \right) \frac{h'}{a} = \frac{1}{a} \left(M \frac{h'}{h} - M' \right).$$

Da nun $Y = 0$ sein soll, so muss $Mh' = M'h$ oder

$$131. \quad \frac{h'}{h} = \frac{M'}{M}$$

sein. Hiernach ist es möglich, die Höhe einer Vertikalen aus der nächst vorhergehenden oder nächst folgenden zu bestimmen und somit die einzelnen Höhen der Reihe nach zu berechnen. Am besten nimmt man die Trägerhöhe in der Mitte an.

Es fragt sich nun noch, für welche Lage des Lastensystemes die Berechnung zu führen ist. Für diese Lage des Systemes seien die Momente für die beiden Vertikalen M, M' , für eine andere Lage des Lastensystemes seien die Momente M_1, M_1' . Für die letztere Lage des Lastensystemes wird mit Rücksicht auf die Formel 131:

$$Y = \frac{1}{a} \left(M_1 \frac{h'}{h} - M_1' \right) = \frac{1}{a} \left(M_1 \frac{M'}{M} - M_1' \right) = \frac{M_1 M' - M M_1'}{M a}.$$

Da nun aber für jede andere Lage Y positiv sein soll, so muss $M_1 M' > M M_1'$ oder $\frac{M'}{M} > \frac{M_1'}{M_1}$ sein. Es muss also $\frac{M'}{M}$ grösser, als jeder andere Werth von $\frac{M_1'}{M_1}$ sein oder: von allen möglichen Werthen von $\frac{M_1'}{M_1}$ ist der Berechnung der Höhen der Maximalwerth zu Grunde zu legen.

Anstatt dessen könnte man auch zunächst die Höhen nach dem vorigen Paragraphen annähernd feststellen und alsdann diejenige Lage des Lastensystemes zu Grunde legen, für welche Y zum negativen Maximum wird. Ist sodann nach Formel 131 der genauere Werth der Höhen festgestellt, so müsste die Bestimmung der Lage des Lastensystemes, für welche Y zum negativen Maximum wird, noch einmal erfolgen.

Wir wollen nun noch einzelne spezielle Fälle behandeln.

a. Eintheiliges System. Bezeichnen wir die Resultante aller Einzellasten mit R , ihren Abstand von der linken Stütze A mit ξ_1 , ferner die Resultante der im fraglichen Felde CF (Fig. 115) liegenden Lasten mit G , ihren Abstand von F mit ξ und die Momente hinsichtlich des

Eigengewichtes für die Punkte C und F mit M_0 und M_0' ; die Längen AC , AF mit x und x' und den Abstand der Resultanten R und G mit e , so wird

$$m = \frac{M'}{M} = \frac{M_0'l + R(x' + \xi - e)(l - x') - Gl\xi}{M_0'l + R(x' + \xi - e)(l - x)} = \frac{A' + B'\xi}{A + B\xi}$$

Variabel ist in diesem Ausdrucke, so lange keine Einzellast einen der Knotenpunkte C und F überschreitet, nur ξ . Hiernach wird m zum Maximum für

$$0 = \frac{dm}{d\xi} = \frac{(A + B\xi)B' - (A' + B'\xi)B}{(A + B\xi)^2} = \frac{AB' - A'B}{(A + B\xi)^2}$$

Da $A + B\xi$ nicht $= \infty$ werden kann, so kann m nur zum Maximum werden für $AB' = A'B$. Alsdann aber ist $\frac{dm}{d\xi}$ für jeden Werth von $\xi = 0$, also m konstant. Hiernach lässt sich behaupten: Im Allgemeinen kann $\frac{M'}{M}$ nur zum Maximum werden, wenn eine Einzellast an einem der Knotenpunkte C und F liegt.

Für eine beliebige Lage des Lastensystemes wird dasselbe nach rechts oder links zu schieben sein, damit m wachse, je nachdem $AB' - A'B$ positiv oder negativ ist. Es ist aber

$$AB' - A'B = [M_0'l + R(x' - e)(l - x)][R(l - x') - Gl] - [M_0'l + R(x' - e)(l - x)]R(l - x)$$

oder

$$132. \frac{AB' - A'B}{l} = R[M_0(l - x') - M_0'(l - x)] - G[M_0'l - R(x' - e)(l - x)].$$

Man kommt aber wohl meist ebenso schnell zum Ziele, wenn man $\frac{M'}{M}$ für verschiedene Lagen des Lastensystemes, wobei eine Einzellast bei C oder F liegt, wirklich berechnet.

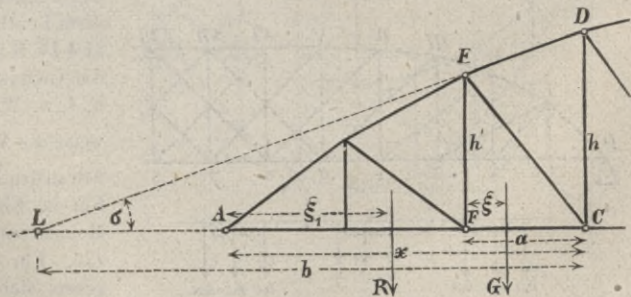


Fig. 115.

Will man nach vorausgehender Näherungsberechnung der Höhen das oben erwähnte Verfahren anwenden, so ist

$$Y = \left[\frac{M_0'l + R(x' + \xi - e)(l - x)}{h} - \frac{M_0'l + R(x' + \xi - e)(l - x) - Gl\xi}{h'} \right] \frac{h'}{la}$$

zu setzen. Ändert sich Y bei der Verschiebung des Lastensystemes um $A\xi$ nach rechts um AY , so ist

$$\frac{AY}{A\xi} = \frac{R(l-x)}{h} - \frac{R(l-x')}{h'} + \frac{Gl}{h'}$$

Hiernach ist das System nach rechts oder links zu schieben, je nachdem

$$133. \quad \frac{G}{R} \geq \frac{h'}{l} \left(\frac{l-x'}{h'} - \frac{l-x}{h} \right)$$

ist.

b. Mehrtheiliges System. In dem Falle, wo man die Last pro Knotenpunkt konstant annimmt, ergibt sich für ein n theiliges System, wenn man den Abstand der Punkte C und F (Fig. 114) vom linken Ende mit x und x' bezeichnet, leicht

$$M = \frac{1}{2n} g x (l-x) + \frac{p x x' (l-x)}{2nl},$$

$$M' = \frac{1}{2n} g x' (l-x') + \frac{p x x' (l-x')}{2nl}.$$

Dies in die Gleichung 131 eingesetzt, gibt

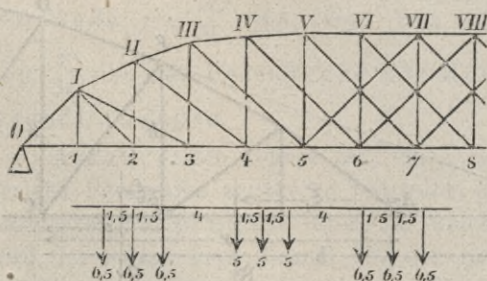
$$134. \quad \frac{h'}{h} = \frac{(gl + px) x' (l-x')}{(gl + px') x (l-x)}$$

Annähernd kann diese Gleichung auch für ein eintheiliges System angewendet werden.

Bei einem Systeme von Einzellasten wird man die richtige Lage desselben durch Probiren zu bestimmen haben. Annähernd kann man die Bestimmung unter der Annahme durchführen, dass jedes der Elementarsysteme nur allein vorhanden sei.

Beispiel. Brücke von 48^m Spannweite, 6^m Höhe in der Mitte, mit zweitheiligem Fachwerke nach Fig. 116. Eigengewicht = 3 Ton. pro Vertikale; zufällige

Fig. 116.



Last nach Fig. 116. Wir zerlegen den Träger in zwei Systeme; System I enthalte die Gitterstäbe I 2 II 4 IV 6 VI u. s. w., System II die Gitterstäbe 1 I 3 III 5 V 7 u. s. w. Wir bestimmen beispielsweise das Verhältniss $\frac{h_1}{h_6}$ der Höhen an den Knotenpunkten 4 und 6. Für das Eigengewicht werden die Momente an diesen Punkten = 108, 135. Für die zufällige Last ergeben sich die Momente, wenn die erste Last über 4 liegt, 106,6

88,5, wenn die zweite Last über 4 liegt, 154,4 128,7, wenn die erste Last über 5 liegt, 128,9 107,4. Daher wird für diese drei Lagen $\frac{M_1}{M_6} = \frac{108 + 106,6}{135 + 88,5} = 0,960,$

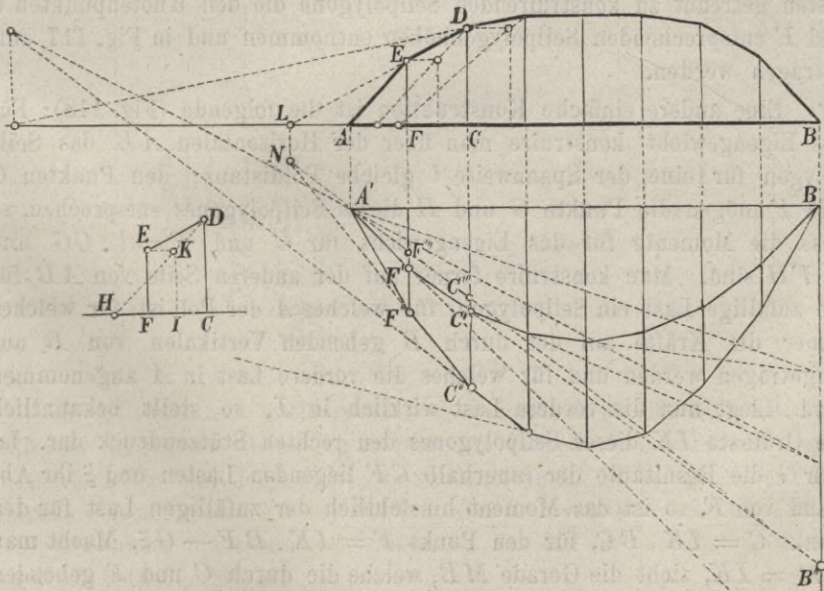
$\frac{108 + 154,4}{135 + 128,7} = 0,995, \frac{108 + 128,9}{135 + 107,4} = 0,978.$ Sonach würde $\frac{h_1}{h_6} = 0,995$ zu setzen

sein. In gleicher Weise ergibt sich nun für das System I: $\frac{h_6}{h_8} > 1$, dafür $1, \frac{h_1}{h_6} = 0,995,$

$h_2 = 0,789$, $h_1 = 0,500$ und für das System II: $\frac{h_3}{h_2} > 1$, dafür $1, \frac{h_3}{h_5} = 0,919$, $\frac{h_1}{h_3} = 0,597$. Hiernach ergibt sich für das System I: $h_8 = 6$, $h_6 = 6$, $h_4 = 5,97$, $h_2 = 4,71$, $h_1 = 2,36$ und für das System II: $h_7 = 6$, $h_5 = 6$, $h_2 = 5,51$, $h_1 = 3,29$. Von den beiden für h_1 erhaltenen Werthen ist der grössere beizubehalten; alsdann ist die untere Grenze der Spannung der Diagonale I 2 nicht = 0, sondern ein kleiner Zug. Würde man k_1 kleiner wählen, so könnte die Diagonale I 3 einen Druck aufzunehmen haben. Sonach würde also zu setzen sein: $h_1 = 3,29$, $h_2 = 4,71$, $h_3 = 5,51$, $h_4 = 5,97$, $h_5 = h_6 = h_7 = h_8 = 6,00$.

§. 76. Konstruktion der Gurtform. Wir betrachten zunächst den hinsichtlich der Konstruktion einfachsten Fall, in welchem man die an den Knotenpunkten wirkenden Lasten als konstant ansehen kann. Die einfachste Konstruktion ergibt sich hier durch den Umstand, dass nach der ersten der Formeln 6 (Seite 100) $Y=0$ wird, wenn $c=0$ wird, d. h., wenn der Angriffspunkt der Transversalkraft durch den Durchschnittspunkt L der Verlängerungen der Gurtstücke geht. Hierzu konstruiert man zunächst die Seilpolygone für das Eigengewicht, für die zufällige Last und für die Summe aus beiden. Verlängert man die Seite $C'F'$ (Fig. 117) des der zufälligen Last entsprechenden Seilpolygones, welche

Fig. 117.



dem fraglichen Felde zugehört, bis zum Durchschnitte B'' mit der rechten Stützenvertikalen, zieht die Gerade $A'B''$ und bestimmt den Durchschnittspunkt N der Verlängerung dieser Geraden mit der Verlängerung der betreffenden Seite $C''F''$ des der Gesamtlast entsprechenden Seilpolygones, so geht nach §. 45 die Transversalkraft für die Belastung

des linken Theiles, einschliesslich des Knotenpunktes F , durch den Punkt N . Der Punkt L , in welchem sich die Verlängerungen des Ober- und Untergurtes schneiden, liegt also in der durch N gehenden Vertikalen. Man kann in dieser Weise leicht die einzelnen Ecken des Obergurtes, von der grössten Höhe ausgehend, der Reihe nach konstruiren.

Diese Konstruktion kann nur den Mangel haben, dass sie in zu kleinem Masstabe durchgeführt werden muss, damit die Punkte N und L auf das Papier fallen. Indess lässt sich hieraus leicht eine Konstruktion ableiten, welche diesen Mangel nicht hat. Es verhält sich nämlich $FE : CD = LF : LC = NF'' : NC'' = F''F''' : C''C'''$. Hieraus aber ergibt sich die folgende einfache Konstruktion: Man mache $CH = C''C'''$, $HI = F''F'''$, ziehe HD und durch I eine Vertikale, welche HD in K schneidet. Alsdann liegt E in der durch K gehenden Horizontalen. Bei dieser Konstruktion ist eine Verlängerung der Seiten der Seilpolygone nach beiden Richtungen nicht erforderlich.

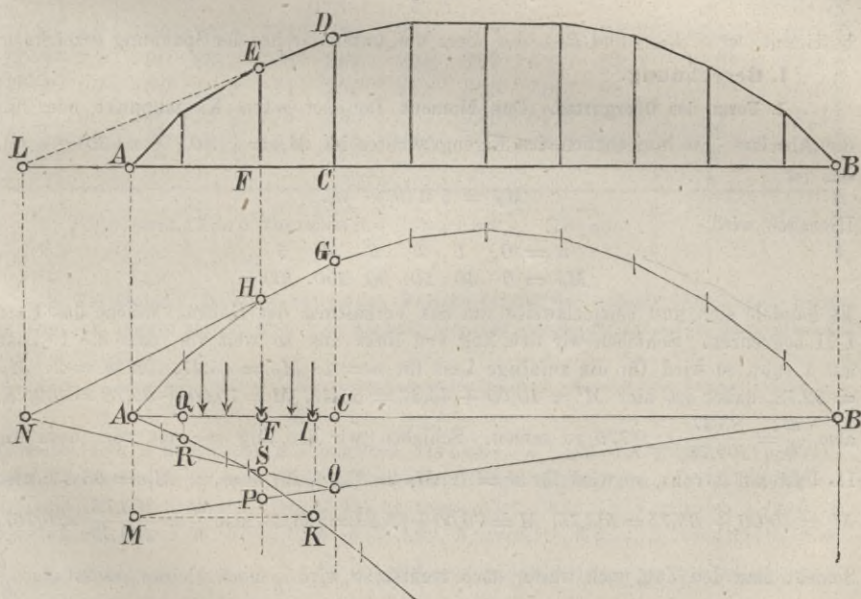
Handelt es sich aber um ein System von Einzellasten, so lassen sich diese Konstruktionen nicht ohne Weiteres anwenden. Es muss vielmehr für jedes einzelne Feld zunächst die Belastungsweise angenommen werden und für diese Belastungsweise müssen aus einem für die Einzellasten getrennt zu konstruirenden Seilpolygone die den Knotenpunkten C und F entsprechenden Seilpolygonhöhen entnommen und in Fig. 117 aufgetragen werden.

Eine andere einfache Konstruktion ist die folgende (Fig. 118): Für das Eigengewicht konstruire man über der Horizontalen AB das Seilpolygon für eine der Spannweite l gleiche Poldistanz; den Punkten C und F mögen die Punkte G und H dieses Seilpolygons entsprechen, so dass die Momente für das Eigengewicht für C und $F = l \cdot CG$ und $l \cdot FH$ sind. Man konstruire ferner auf der anderen Seite von AB für die zufällige Last ein Seilpolygon, für welches A der Pol ist, für welches ferner die Kräfte auf der durch B gehenden Vertikalen von B aus aufgetragen werden und für welches die vordere Last in A angenommen wird. Liegt nun die vordere Last wirklich in I , so stellt bekanntlich die Ordinate IK dieses Seilpolygons den rechten Stützendruck dar. Ist nun G die Resultante der innerhalb CF liegenden Lasten und ξ ihr Abstand von F , so ist das Moment hinsichtlich der zufälligen Last für den Punkt $C = IK \cdot BC$, für den Punkt $F = IK \cdot BF - G\xi$. Macht man $AM = IK$, zieht die Gerade MB , welche die durch C und F gehenden Vertikalen in O und P schneidet, macht ferner $PS = \frac{G\xi}{l}$, so ist $CO = IK \cdot \frac{BC}{l}$, $FP = IK \cdot \frac{BF}{l}$, $FS = IK \cdot \frac{BF}{l} - \frac{G\xi}{l}$; mithin sind die Momente hinsichtlich der zufälligen Last für die Punkte C und $F = l \cdot CO$ und $l \cdot FS$. Macht man $AQ = FI$ und entspricht dem Punkte

Q der Punkt R des Seilpolygons, so ist $G\xi = l \cdot QR$, also $\frac{G\xi}{l} = QR$, so dass einfach $PS = QR$ zu machen ist, um den Punkt S zu finden.

Die Momente hinsichtlich der Gesamtlast für die Punkte C und F sind nun $= l \cdot GO$ und $l \cdot HS$. Zieht man daher die Geraden GH und OS , deren Verlängerungen sich in N schneiden, so liegt N in der durch den Durchschnittspunkt L der entsprechenden Gurtstücke gehenden Vertikalen. Sollten N und L nicht auf das Papier fallen, so kann die schon in der vorigen Lösung angegebene Hilfskonstruktion angewendet werden, indem man in Fig. 117 CH und HI bezüglich $= GO$ und HS (Fig. 118) macht. Liegen innerhalb CF keine Lasten, so ist $SP = 0$, also N der Durchschnittspunkt der Verlängerungen von GH und BM .

Fig. 118.



Es ist wohl am rathsamsten, die Konstruktion für einzelne verschiedene Lagen der Belastung (wobei eine Einzellast in C oder F liegt) zu wiederholen und denjenigen Durchschnittspunkt N beizubehalten, für welchen FE am grössten wird, welcher also am weitesten nach links fällt.

Bei einem mehrtheiligen System ist das im vorigen Paragraphen Gesagte zu berücksichtigen.

§. 77. Genaue Bestimmung der Spannungen. Die genaue Bestimmung der Spannungen hat nach den aufgestellten allgemeinen Regeln zu erfolgen, da sich im vorliegenden Falle keine Vereinfachungen erzielen lassen. Wir geben indess zur weiteren Orientirung im Folgenden ein Beispiel.

I. Beispiel. Wir wählen als Beispiel eine Brücke von 30 Meter Spannweite und 4 Meter Trägerhöhe in der Mitte. Das Gitterwerk sei ein einheitliches Fachwerk, dessen Vertikalen den Abstand $\frac{10}{3} = 3,333$ Meter haben. Das Eigengewicht sei 0,9 Tonnen pro lauf. Meter; hiervon kommen 0,2 Ton. auf den Obergurt, 0,7 Ton. auf den Untergurt; auf einen Knotenpunkt kommt hiernach am Obergurte $0,7 \cdot \frac{10}{3} = 0,67$ Ton., am Untergurte $0,7 \cdot \frac{10}{3} = 2,33$ Ton.; an einer Vertikalen wirkt sonach $0,67 + 2,33 = 3$ Ton. Die zufällige Last bestehe aus einem Zuge von drei Locomotiven nach folgender Lastvertheilung:

Radstand: 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 1,3 4 1,5 1,5 4,4 1,3 1,3 Meter
 Achsendruck: 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 6,5 6,5 4,5 4,5 4,5 6,5 6,5 6,5 Ton.

Für die Berechnung der Querschnitte sei die zufällige Last mit 1,3 zu multiplizieren, es ist also $6,5 \cdot 1,3 = 8,4$ statt 6,5 und $4,5 \cdot 1,3 = 5,8$ statt 4,5 einzuführen. Ferner sei alsdann die Querschnittsfläche f durch die Formel

$$a. f = \frac{R_{max}}{0,75} - \frac{R_{min}}{1,70}$$

bestimmt, wenn R_{max} und R_{min} die obere und untere Grenze der Spannung bezeichnen.

I. Berechnung.

1. Form des Obergurtes. Das Moment für den n ten Knotenpunkt oder für die Abscisse $\frac{10}{3}n$ hinsichtlich des Eigengewichtes ist $M_g = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \frac{10}{3} n (30 - \frac{10}{3}n)$, das ist

$$M_g = 5n(9 - n).$$

Hiernach wird

$$\begin{array}{cccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ M_g = & 0 & 40 & 70 & 90 & 100 & 100. \end{array}$$

Es handele sich nun beispielsweise um das Verhältniss der Höhen, welche das Fach I II begrenzen. Schieben wir den Zug von links aus so weit vor, dass die I. Last auf 1 ruht, so wird für die zufällige Last für $n = 1$: $M_p = 45,47$, für $n = 2$: $M_p = 39,78$, daher ist hier $M' = 40,00 + 45,47 = 85,47$, $M = 70,00 + 39,78 = 109,78$, also $\frac{h'}{h} = \frac{85,47}{109,78} = 0,779$ zu setzen. Schieben wir den Zug so weit vor, dass die

II. Last auf 1 ruht, so wird für $n = 1$: $M_p = 63,75$, für $n = 2$: $M_p = 65,33$, also $M' = 40,00 + 63,75 = 103,75$, $M = 70,00 + 65,33 = 135,33$, also $\frac{h'}{h} = \frac{103,75}{135,33} = 0,767$.

Schiebt man den Zug noch weiter nach rechts, so wird $\frac{h'}{h}$ noch kleiner, es ist also $\frac{h'}{h} = 0,779$ zu setzen. In gleicher Weise ergibt sich:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV. Fach} \\ h' = & 0 & 0,779 & 0,973 & 1,076 \text{ daf. } 1 \cdot h. \end{array}$$

Bezeichnen wir die einzelnen Höhen mit h_0, h_1, h_2, \dots , so wird mithin $h_3 = 4$, $h_2 = 0,973 \cdot 4 = 3,89$, $h_1 = 0,779 \cdot 3,89 = 3,03$, $h_0 = 0$, also

$$h_0 = 0, h_1 = 3,03, h_2 = 3,89, h_3 = 4,00, h_4 = 4,00.$$

2. Diagonalen. Für eine beliebige Diagonale ist nach der zweiten der Formeln 9 (Seite 109) der Zug von rechts nach links über den Fusspunkt der Diagonale so weit vorzuschieben, dass möglichst

$$\frac{R}{R'} = \frac{ah - x(h - h')}{lh'}$$

ist, wobei sich x und h auf den Fusspunkt der Diagonale, h' auf den vorigen Knotenpunkt beziehen. Für das II., III. und IV. Fach muss hiernach bezüglich

$\frac{R}{R'}$ möglichst = 0,079, = 0,105, = 0,111 sein. Rückt man die erste Last über den Fusspunkt der Diagonale vor, so ergibt sich $\frac{R}{R'} = 0,098, 0,114, 0,124$. Sonach darf keine Last über den Fusspunkt der Diagonale vorgerückt werden; vielmehr muss die I. Last am Fusspunkte der Diagonale liegen.

Die Berechnung der Maximalspannungen wird am besten nach Formel 5 (Seite 100) erfolgen. Da die untere Spannungsgrenze hier Null ist, so wird die Querschnittsfläche nach Formel a: $f = \frac{P_{max}}{0,75} = \frac{4}{3} P_{max}$. Die Rechnungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Diagonale	M_g		Q_p	M_p		M_q		$\frac{M_q}{h}$		cosec α	P_{max}	f
	links	rechts		links	rechts	links	rechts	links	rechts			
I 2	40	70	35,1	117	234	157	304	51,8	78,2	1,35	35,6	47,5
II 3	70	90	26,7	178	267	248	357	63,8	89,3	1,54	39,3	52,4
III 4	90	100	19,2	192	255	282	355	70,5	88,8	1,56	28,5	38,0
IV 5	100	100	13,0	176	220	276	320	69,0	80,0	1,56	17,2	22,9
V 6	100	90	8,5	141	169	241	251	60,3	64,8	1,56	7,0	9,3
	Tonnenmet.		Ton.	Tonnenmet.		Tonnenmet.		Tonnen			Ton. □ Cent.	

3. Vertikalen. In einer beliebigen Vertikale tritt der grösste Druck ein, wenn der Zug von rechts soweit über den nächstfolgenden Knotenpunkt vorgeschoben wird, dass möglichst

$$\frac{R}{R'} = \frac{ah - x(h_1' - h)}{lh}$$

ist, wobei sich x und h auf die fragliche Vertikale, h_1' auf die folgende Vertikale bezieht, wobei aber h_1' vom Untergurte bis zur Verlängerung des vor der fraglichen Vertikale liegenden oberen Gurtstückes zu messen ist. Für die Vertikalen 1, 2, 3, 4 ist bezüglich $h = 3,06$, $h_1' = 6,06$; $h = 3,89$, $h_1' = 4,75$; $h = 4$, $h_1' = 4,11$; $h = 4$, $h_1' = 4$. Hiernach ergibt sich $\frac{R}{R'}$ möglichst = 0,062 0,102 0,111. Schiebt man

die erste Last über den nächsten Knotenpunkt, so wird $\frac{R}{R'} = 0,197 0,114 0,120 0,164$.

Es darf daher die erste Last nicht über diesen Knotenpunkt vorgeschoben werden, es muss vielmehr die erste Last an dem der Vertikale folgenden Knotenpunkte liegen. Der Druck V in der Vertikale wird

$$b. V = - \left(\frac{M'}{h_1'} - \frac{M}{h} \right) \frac{h_1'}{a},$$

wobei sich M , h auf die fragliche, M' , h_1' auf die nächstfolgende Vertikale beziehen; M und M' sind für den durch die fragliche Vertikale gelegten schiefen Schnitt zu nehmen, bei M' ist also für den linken Theil des Trägers die am oberen Ende der Vertikale wirkende Last von 0,67 Ton. nicht mit zu rechnen. Die Rechnungsergebnisse gibt folgende Tabelle:

Vertikale	<i>h</i>	<i>h</i> '	$\frac{h_1'}{a}$	<i>M_g</i>		<i>M_p</i>		<i>M_q</i>		$\frac{M_q}{h}$		<i>V</i>
				links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	
1 I	3,03	6,06	1,82	40	72	117	234	157	306	51,8	50,5	+ 2,3
2 II	3,89	4,75	1,43	70	92	179	269	249	361	64,0	76,0	-17,1
3 III	4	4,11	1,23	90	102	192	256	282	358	70,5	87,1	-20,4
4 IV	4	4	1,20	100	102	173	217	273	319	68,3	79,8	-13,8
	Meter			Tonnenmeter						Tonnen		

Hinsichtlich der Vertikale 1 I kann man einfacher verfahren; dieselbe hat die im Punkte 1 wirkende Last direkt als Zug aufzunehmen. Statt des Maximaldruckes kommt also hier der Minimalzug in Betracht, welcher entsteht, wenn der Punkt 1 gar nicht belastet ist; alsdann aber ist *V* gleich der unteren Knotenlast von 2,3 Ton.

In einer Vertikalen des Theiles mit polygonalem Obergurt tritt die untere Grenze des Druckes ein, wenn man den Zug von der linken Seite über die fragliche Vertikale soweit vorschiebt, dass möglichst

$$\frac{R}{R'} = \frac{ah + (1-x)(h_1' - h)}{lh_1'}$$

ist. Dies gibt für die Vertikale 1 I und 2 II $\frac{R}{R'}$ möglichst = 0,500 0,232. Schiebt man die erste Last über die Vertikale hinaus, so wird $\frac{R}{R'} = 0,333$ 0,270; für die Vertikale 1 I muss daher in der That die erste Last vorgeschoben werden, so dass die zweite Last über 1 liegt; für die Vertikale 2 II dagegen muss die erste Last über 2 liegen. Die Berechnung der Spannung nach Formel *b* gibt folgende Tabelle:

Vertikale	<i>h</i>	<i>h</i> '	$\frac{h_1'}{a}$	<i>M_g</i>		<i>M_p</i>		<i>M_q</i>		$\frac{M_q}{h}$		<i>V</i>
				links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	
1 I	3,03	6,06	1,82	40	72	64	66	104	138	34,3	22,8	+21,0
2 II	3,89	4,75	1,43	70	92	107	91	177	183	45,4	38,6	+ 9,7
	Meter			Tonnenmeter						Tonnen		

Die Vertikalen 3 III und 4 IV bedürfen einer besonderen Behandlung. Wenn der Zug von links bis zum Punkte 3 vorgerückt ist, so werden die Diagonalen 3 II und 3 IV gezogen, während die Diagonale III 4 ausser Wirksamkeit tritt. Aus dem Gleichgewichte des Knotenpunktes III folgt, dass *V* gleich der negativen Vertikal-komponente der Spannung von II III ist, weniger der in III wirkenden Last, d. i. $= \frac{90 + 169}{4} \cdot \frac{0,11}{3,33} - 0,67 = 1,47$. Ist die Last von links bis zum Punkte 4 vorgerückt, so werden die Diagonalen 4 III und 4 V gezogen, während IV 3 und IV 5 ausser Wirksamkeit treten; dasselbe ist, auch bei unbelastetem Zustande der Fall. Aus

dem Gleichgewichte des Knotenpunktes IV folgt, dass alsdann die Spannung der Vertikale 4 IV gleich der negativen, in IV wirkenden Last ist, d. i. = - 0,67.

Die sich hieraus ergebende Berechnung der Querschnitte der Vertikalen ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

Vertikale	Spannungsgrenzen	Querschnittsfläche
1 I	+ 21,0 + 2,3	26,6
2 II	- 16,9 + 9,7	28,2
3 III	- 20,4 + 1,5	28,1
4 IV	- 13,8 - 0,7	18,0
	Tonnen	□ Centim.

4. Gurte. Die Spannung S_1 des n ten oberen Gurtstückes und die Spannung S_2 des n ten unteren Gurtstückes ist

$$S_1 = - \frac{M_n}{h_n} \sec \sigma_n, \quad S_2 = + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}},$$

wobei der Index von M und h den Knotenpunkt angibt, für welchen das Moment zu nehmen ist. Von den Momenten für die beiden das fragliche Gurtstück begrenzenden Vertikalen ist für den Obergurt das grössere, für den Untergurt dagegen das kleinere zu nehmen. Für das Eigengewicht ist das Moment durch die Formel α . bestimmt; für die zufällige Last ist die gefährlichste Belastungsweise und das entsprechende Moment nach dem ersten Hefte §. 14, 15 und 26 zu bestimmen. Hiernach ergeben sich folgende Resultate:

Punkt	M_g	M_p	M_q	$\frac{M_q}{h}$	$\frac{M_g}{h}$	$\sec \sigma$
0	0	0	0	61,4	13,2	1,351
1	40	146	186	61,4	13,2	1,033
2	70	250	320	82,3	18,0	1,001
3	90	320	410	102,5	22,5	1
4	100	348	448	112,0	25,0	1
5	100	348	448	112,0	25,0	
	Tonnenmeter			Tonnen		

Punkt	S_1		S_2		Querschnittsfläche	
	belastet	unbelastet	belastet	unbelastet	Obergurt	Untergurt
0	-	-	+	+		
1	83,0	17,8	61,4	13,2	100,2	74,2
2	85,0	18,6	61,4	13,2	102,3	74,2
3	102,6	22,5	82,3	18,0	123,6	99,1
4	112,0	25,0	102,5	22,5	134,6	123,5
5	112,0	25,0	112,0	25,0	134,6	134,6
	Tonnen				□ Centimeter	

II. Konstruktion (Taf. VII).

1. **Form des Obergurtes.** Die Konstruktion des Obergurtes ist nach §. 76, Fig. 118 in Fig. 1 und 2 erfolgt und zwar hinsichtlich des Gurtstückes II III durch die Hilfskonstruktion, hinsichtlich des Gurtstückes I II direkt. Die Einheit des Kraftmassstabes ($t = 5mm$) ist 5mal so gross, als im Masstabe II gewählt; die Poldistanz ist gleich der Spannweite, d. i. = 2 Tonnen gewählt.

2. **Diagonalen,** Fig. 2. Hinsichtlich des Eigengewichtes ist zunächst das Q und hieraus das Y konstruirt und zwar nach §. 45, Fig. 65 mit Benützung der Regel $Y = Q - \frac{M}{h} \tan \sigma$. Bei Konstruktion von $\frac{M}{h}$ sind die Höhen h doppelt aufgetragen. Damit $\frac{M}{h}$ mit Benützung des vorhin zur Konstruktion des Obergurtes verwendeten Seilpolygones in dem Masstabe II ($t = 10mm$) erhalten wird, muss die Poldistanz H nur in $\frac{2}{5} = \frac{1}{2,5}$ ihrer Grösse, also = 40 Tonnen nach dem Masstabe II aufgetragen werden. Hinsichtlich der zufälligen Belastung ist zunächst die gefährlichste Belastungsweise bestimmt. Nach §. 46, Fig. 73 ist in Fig. 1 die Influenzlinie für die Stäbe I 2, II 3, III 4 konstruirt. Es ist nämlich die gesammte auf den Träger wirkende Last R' durch Konstruktion eines dem Träger $R' O' D''$ (Fig. 73) ähnlichen Dreiecks über dem Kraftpolygon, welcher in Fig. 2 in der linken Stützenvertikalen aufgetragen ist, in dem Verhältnisse von $O' D'$ zu $D' B'$ (Fig. 73) getheilt, woraus hervorgeht, dass die l. Last am Fusse der fraglichen Diagonalen liegen muss. Es ist nun zunächst für diese Belastung das Q konstruirt und daraus nach §. 48, Fig. 75 das Y abgeleitet. Y ist hierbei in der dem Fusse der fraglichen Diagonalen entsprechenden Vertikalen aufgetragen. Die Werthe von Y für das Eigengewicht und die zufällige Last sind sodann addirt und durch eine Parallele zur fraglichen Diagonale die Spannung $P = Y \sec \alpha$ konstruirt. Konstruirt man jetzt einen Masstab III, dessen Einheit = 0,75 der Einheit des Masstabes II ist, so geben die Spannungen P , auf diesem Masstabe gemessen, direkt die Querschnittsflächen, welche in Fig. 8 eingeschrieben sind.

3. **Vertikalen,** Fig. 3. Die Konstruktion von Y ist in gleicher Weise erfolgt, wie für die Diagonalen. Auch die gefährlichste Belastungsweise ist wie für die Diagonalen konstruirt. In Fig. 1 beziehen sich die gestrichelten Influenzlinien auf Diagonalen und Vertikalen, die punktirten auf die Diagonalen, die strichpunktirten auf die Vertikalen. Der Maximalzug von der Vertikalen I 1 ist konstruirt, indem man die auf den Knotenpunkt 1 wirkenden Komponenten der innerhalb 0 2 liegenden drei Lasten konstruirt hat. Die untere Grenze des Druckes in III 3 ist gleich der negativen Vertikalkomponente der Spannung des Gurtstückes II III, wenn der Zug von links aus bis zum Punkte 3 vorgerückt ist, weniger der in III wirkenden Knotenlast von 0,67 Ton. Die der ersten Vertikalkomponente ergibt sich in der Linie cd , wobei die Höhe des Seilpolygones für das Eigengewicht = ab , für die zufällige Last = $bc = 2 \cdot ef$ (Fig. 9) ist; es ist ef doppelt zu nehmen, weil sich die Höhen des Seilpolygones in Fig. 2 doppelt so gross ergeben, als in Fig. 5, da die Krafteinheit 10 mal, die Poldistanz 5 mal so gross ist. Die untere Grenze des Druckes in der Vertikale IV 4 ist gleich der in IV wirkenden Knotenlast von 0,67 Tonnen.

Zieht man von der oberen Grenze der Spannung $\frac{0,75}{1,70} = 0,44$ der unteren Grenze ab, was mit Hilfe des Proportionalwinkels Fig. 3a geschehen ist, so gibt der Rest, auf dem Masstabe III gemessen, die Querschnittsflächen, welche in Fig. 8 eingeschrieben sind.

In der Anwendung scheint es rathsam, die Figuren 2 und 3 zu vereinigen.

4. Gurte. Die Querschnittsflächen der Gurte sind in Fig. 6 konstruirt. Die Maximalmomente für die zufällige Last sind in bekannter Weise in Fig. 5 konstruirt. Von den Seilpolygonhöhen für die totale Belastung (stark ausgezogen) ist $\frac{0,75}{1,70} = 0,44$ der Seilpolygonhöhen für das Eigengewicht abgezogen und alsdann nach §. 45, Fig. 63 die Spannung konstruirt, welche der Differenz als Seilpolygonhöhe entsprechen würde. Konstruirt man einen Masstab V, dessen Einheit = 0,75 der Einheit des Kraftmasstabes IV ist, so geben die Spannungen, auf diesem Masstabe gemessen, direkt die Querschnittsflächen, welche in Fig. 8 eingeschrieben sind. Für das Eigengewicht sind die Poldistanz mn und auch die Lasten doppelt so gross angenommen, als für die zufällige Last in Fig. 5. Um das 0,44 fache der Seilpolygonhöhen für das Eigengewicht zu erhalten, hat man nur nöthig, ein Seilpolygon (punktirt) für die $\frac{1}{0,44} = 2,27$ fache Poldistanz mo zu konstruiren.

Die Spannungen für das Eigengewicht sind in Fig. 7 noch besonders nach der Polygonmethode konstruirt. Die Einheit des Kraftmasstabes ist hierbei doppelt so gross als beim Masstabe II oder 4 mal so gross als beim Masstabe IV angenommen.

§. 78. Volumen. Wir wählen eine gleiche zulässige Inanspruchnahme K für Zug und Druck.

1. Gurte. Das Volumen pro Längeneinheit im ersten Theile ist $v_1' = \frac{S_1}{K} \sec \sigma + \frac{S_2}{K} = \frac{M}{Kh} (1 + \sec^2 \sigma) = \frac{M}{Kh} (2 + \tan^2 \sigma)$, d. i.

$$v_1' = \frac{(g+p)(gl+px)}{2AK} (2 + \tan^2 \sigma).$$

Setzt man für $\tan \sigma$ den Ausdruck 118 ein, so ergibt sich ein für die Integration zu komplizirter Ausdruck. Da indess $\tan^2 \sigma$ nur klein und der Querschnitt der Gurte wenig variabel ist, so wird es genügen, für $\tan \sigma$ einen Mittelwerth einzusetzen, und zwar $\tan \sigma = \frac{1}{2} \tan \sigma_0$, d. i. nach Formel 117: $\tan \sigma = \frac{A}{2g}$, also

$$v_1' = \frac{(g+p)(gl+px)}{2AK} \left(2 + \frac{A^2}{4g^2} \right).$$

Das Gesamtvolumen V_1' der beiden äusseren Theile ergibt sich nun:

$$V_1' = 2 \int_0^{x_1} v_1' dx = \frac{(g+p)x_1(2gl+px_1)}{2AK} \left(2 + \frac{A^2}{4g^2} \right).$$

Setzt man für x_1 den Ausdruck 120 ein, so erhält man $x_1(2gl+px_1) = \frac{g^2 l^2}{p} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{p}{g}} + 1 \right) = gl^2$; mithin wird

$$133. V_1' = \frac{g(g+p)l^2}{AK} \left(1 + \frac{A^2}{8g^2} \right) = \frac{gl^2}{K} \left(\alpha_1' \frac{l}{h_1} + \beta_1' \frac{h_1}{l} \right),$$

wenn man zur Abkürzung $A = x \frac{qh_1}{l}$ und

$$133a. \alpha_1' = \frac{g}{q} \frac{1}{x}, \quad \beta_1' = \frac{1}{8} \frac{q}{g} x$$

setzt.

Das Volumen v_1'' pro Längeneinheit im mittleren Theile ist $v_1'' = 2 \frac{M}{Kh_1} = \frac{px(l-x)}{Kh_1}$, also das Gesamt-Volumen des mittleren Theiles

$$V_1'' = 2 \int_{x_1}^{\frac{l}{2}} v_1'' dx = \frac{q}{6Kh_1} (l^3 - 6lx_1^2 + 4x_1^3),$$

oder

$$134. V_1'' = \alpha_1'' \frac{l}{h_1} \frac{ql^2}{K},$$

wenn man zur Abkürzung

$$134a. \alpha_1'' = \frac{1}{6} \left(1 - 6 \frac{x_1^2}{l^2} + 4 \frac{x_1^3}{l^3} \right)$$

setzt; x_1 ist hierin durch Formel 120 bestimmt.

In folgender Tabelle sind die Werthe von z , α_1' , β_1' , sowie von x_1 und α_1'' zusammengestellt:

$\frac{g}{q}$	z	α_1'	β_1'	$\frac{x_1}{l}$	α_1''
0	1	0	∞	0	0,1667
0,1	1,7325	0,0577	2,1656	0,2403	0,1182
0,2	2,0944	0,0957	1,3090	0,3090	0,0909
0,3	2,3954	0,1242	0,9981	0,3539	0,0710
0,4	2,6650	0,1501	0,8315	0,3874	0,0553
0,5	2,9142	0,1716	0,7285	0,4142	0,0424
0,6	3,1492	0,1905	0,6561	0,4365	0,0316
0,7	3,3733	0,2075	0,6024	0,4555	0,0223
0,8	3,5888	0,2229	0,5608	0,4720	0,0140
0,9	3,7974	0,2370	0,5274	0,4869	0,0065
1	4	0,2500	0,5000	0,5000	0

Das Gesamtvolumen V_1 der Gurte ergibt sich nun zu

$$135. V_1 = \frac{ql^2}{K} \left(\alpha_1 \frac{l}{h_1} + \beta_1 \frac{h_1}{l} \right),$$

wenn man $\alpha_1 = \alpha_1' + \alpha_1''$, $\beta_1 = \beta_1'$ setzt. Die Werthe für α_1 und β_1 sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\frac{g}{q}$	α_1	β_1	$\frac{g}{q}$	α_1	β_1
			0,6	0,2211	0,6561
0,1	0,1759	2,1656	0,7	0,2298	0,6024
0,2	0,1866	1,3090	0,8	0,2369	0,5608
0,3	0,1952	0,9981	0,9	0,2435	0,5274
0,4	0,2054	0,8315	1	0,2500	0,5000
0,5	0,2140	0,7285			

Man kann hiernach annähernd

$$\alpha_1 = 0,17 + 0,084 \frac{g}{q}, \quad \beta_1 = 0,28 + 0,220 \frac{g}{q}$$

setzen. Mit noch geringerer Annäherung wird

$$136. \quad V_1 = 0,23 \frac{q l^3}{K h_1}.$$

Nach der neueren Berechnungsweise wird

$$137. \quad V_1 = \left(\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1} \right) \left(\alpha_1 \frac{l}{h_1} + \beta_1 \frac{h_1}{l} \right) l^2.$$

Hierbei aber ist bei der Bestimmung von α und β $(1+m)p$ für p zu setzen, wenn man annimmt, dass die Wirkung der zufälligen Last durch die Erschütterungen etc. um das m fache vermehrt wird. Ist z. B.

$\frac{g}{q} = \frac{g}{g+p} = 0,4$, so wird für $m=0,3$: $\frac{g}{g+(1+m)p} = \frac{0,4}{0,4+1,3 \cdot 0,6} = 0,34$, daher durch Interpolation $\alpha_1 = 0,199$, $\beta_1 = 0,932$. Es ergibt sich also dann für $m = 0,2$ (Strassenbrücken) und $m = 0,3$ (Eisenbahnbrücken) die folgende Tabelle:

$\frac{g}{q}$	$m = 0,2$			$m = 0,3$		
	$\frac{x_1}{l}$	α_1	β_1	$\frac{x_1}{l}$	α_1	β_1
0,1	0,227	0,174	2,294	0,219	0,174	2,346
0,2	0,294	0,183	1,549	0,287	0,182	1,652
0,3	0,347	0,192	1,113	0,332	0,191	1,154
0,4	0,374	0,201	0,903	0,368	0,199	0,933
0,5	0,402	0,210	0,780	0,397	0,208	0,796
0,6	0,427	0,218	0,688	0,423	0,217	0,702
0,7	0,448	0,226	0,624	0,445	0,225	0,634
0,8	0,467	0,235	0,573	0,465	0,234	0,580
0,9	0,484	0,242	0,533	0,483	0,242	0,536
1,0	0,500	0,250	0,500	0,500	0,250	0,500

2. Gitterwerk. Wir wollen nur das bei den Schwedler'schen Trägern stets in Anwendung gekommene Fachwerk in Betracht ziehen.

a. Aeusserer Theil. Das Volumen auf die Länge a der Horizontalprojektion einer Diagonale ist $\frac{Y}{K} \cdot h + \frac{Y \sec \alpha}{K} \cdot h \sec \alpha = \frac{Yh}{K} (1 + \sec^2 \alpha)$.

Da aber $a = h \tan \alpha$ ist, so wird das Volumen v_2' pro Längeneinheit

$$v_2' = \frac{Y}{K} \frac{1 + \sec^2 \alpha}{\tan \alpha} = \frac{Y}{K} \frac{2 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} = \frac{Y}{K} \left(\frac{a}{h} + 2 \frac{h}{a} \right).$$

Setzen wir für Y den Ausdruck 126, so wird

$$v_2' = \frac{p(2g+p)}{2AK} \cdot \frac{a^2 + 2h^2}{a}.$$

Sonach wird das ganze Volumen V_2' der beiden äusseren Theile

$$V_2' = \frac{p(2g+p)}{AK} \left[ax_1 + \frac{2}{a} \int_0^{x_1} h^2 dx \right].$$

Hiernach lässt sich V_2' darstellen in der Form

$$138. \quad V_2' = \frac{ql^2}{K} \left(\alpha_2' \frac{a}{h_1} + \beta_2' \frac{h_1}{a} \right),$$

wenn man zur Abkürzung $A = x \frac{qh_1}{l}$ und

$$\alpha_2' = \frac{1}{x} \frac{p}{q} \left(2 \frac{g}{q} + \frac{p}{q} \right) \frac{x_1}{l}, \quad \beta_2' = \frac{2}{x} \frac{p}{q} \left(2 \frac{g}{q} + \frac{p}{q} \right) \frac{1}{h_1^2 l} \int_0^{x_1} h^2 dx.$$

setzt.

b. Mittlerer Theil. Das Volumen v der Vertikalen pro Längeneinheit ist $\frac{Qh_1}{Ka}$, d. i.

$$v = \frac{h_1}{2Ka} \left[g(l-2x) + \frac{p(l-x)^2}{l} \right].$$

Das Gesamtvolumen der Vertikalen im mittleren Theile wird sonach

$$= 2 \int_{x_1}^{\frac{1}{2}l} v dx = \frac{h_1}{Ka} \left[g \left(\frac{1}{4}l^2 - lx_1 + x_1^2 \right) + \frac{p}{l} \left(\frac{7}{24}l^3 - l^2x_1 + lx_1^2 - \frac{1}{3}x_1^3 \right) \right].$$

Das Volumen v der Diagonalen pro Längeneinheit ist $\frac{Qh_1}{Ka} \sec^2 \alpha$
 $= \frac{Qh_1}{Ka} (1 + \tan^2 \alpha)$ oder

$$v = \frac{Q}{K} \left(\frac{a}{h_1} + \frac{h_1}{a} \right) = \frac{1}{2K} \left[g(l-2x) + \frac{p(l-x)^2}{l} \right] \left(\frac{a}{h_1} + \frac{h_1}{a} \right).$$

Das Gesamtvolumen der Diagonalen im mittleren Theile wird sonach

$$= 2 \int_{x_1}^{l-x_1} v dx = \frac{p[(l-x_1)^3 - x_1^3]}{3Kl} \left(\frac{a}{h_1} + \frac{h_1}{a} \right).$$

Das gesammte Volumen V_2'' des Gitterwerkes im mittleren Theile ist hiernach

$$139. \quad V_2'' = \frac{gl^2}{K} \left(\alpha_2'' \frac{a}{h_1} + \beta_2'' \frac{h_1}{a} \right),$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\alpha_2'' = \frac{p}{3q} \left[\left(1 - \frac{x_1}{l} \right)^3 - \frac{x_1^3}{l^3} \right],$$

$$\beta_2'' = \frac{g}{lq} \left(\frac{1}{4} - \frac{x_1}{l} + \frac{x_1^2}{l^2} \right) + \frac{p}{q} \left(\frac{5}{8} - 2 \frac{x_1}{l} + 2 \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{x_1^3}{l^3} \right).$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{g}{q}$	$\int_0^{x_1} h^2 dx$		α_2'	β_2'	α_2''	β_2''
0	0	—	0	0	0,3333	0,6250
0,1	0,1591	0,6624	0,1372	0,1818	0,1215	0,2224
0,2	0,1918	0,6206	0,1417	0,1758	0,0801	0,1429
0,3	0,2113	0,5971	0,1345	0,1606	0,0571	0,0972
0,5	0,2253	0,5815	0,1221	0,1488	0,0344	0,0605
0,6	0,2363	0,5705	0,1066	0,1215	0,0216	0,0380
0,6	0,2443	0,5597	0,0887	0,0993	0,0128	0,0224
0,7	0,2512	0,5515	0,0689	0,0760	0,0067	0,0118
0,8	0,2570	0,5444	0,0473	0,0515	0,0028	0,0050
0,9	0,2643	0,5428	0,0244	0,0265	0,0007	0,0012
1	0,2667	0,5333	0	0	0	0
	$\cdot l h_1^2$	$\cdot x_1 h_1^2$				

Das gesammte Volumen des Gitterwerkes lässt sich nun darstellen durch den Ausdruck

$$140. V_2 = \frac{y l^2}{K} \left(\alpha_2 \frac{a}{h_1} + \beta_2 \frac{h_1}{a} \right),$$

worin $\alpha_2 = \alpha_2' + \alpha_2''$, $\beta_2 = \beta_2' + \beta_2''$ zu setzen ist. Zum Minimum wird V_2 für

$$141. \frac{a}{h_1} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

und zwar ist

$$142. \min V_2 = 2 \sqrt{\alpha_2 \beta_2} \frac{q l^2}{K}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von α_2 , β_2 , $\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}$ und $\min V_2$ zusammengestellt:

$\frac{g}{q}$	α_2	β_2	$\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}$	$2 \sqrt{\alpha_2 \beta_2}$
0,1	0,2587	0,4042	1,25	0,647
0,2	0,2218	0,3187	1,20	0,532
0,3	0,1916	0,2578	1,16	0,445
0,4	0,1565	0,2093	1,14	0,362
0,5	0,1282	0,1595	1,12	0,286
0,6	0,1015	0,1217	1,10	0,222
0,7	0,0756	0,0878	1,08	0,163
0,8	0,0501	0,0565	1,06	0,106
0,9	0,0251	0,0277	1,05	0,053

Annähernd ist, aber mit nur geringer Annäherung, $\alpha_2 = 0,26 \frac{p}{q}$,
 $\beta_2 = 0,36 \frac{p}{q}$, $\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = 1,18$, $\min V_2 = 0,612 \frac{p l^2}{K}$.

Nach der neueren Berechnungsweise muss man hier von der dieser Berechnungsweise zu Grunde liegenden Grundformel¹⁾ $f = \frac{P_{max}}{(1+m)K_1} - \frac{P_{min}}{(1+m)K_2}$, [anstatt von der Formel 7 (S. 9) ausgehen, wenn P_{max} und P_{min} die obere und untere Grenze der Spannung bedeuten. Da hier nun $P_{min} = 0$ ist, so wird $f = \frac{P_{max}}{(1+m)K_1}$, während nach der gewöhnlichen Berechnungsweise $f = \frac{P_{max}}{K}$ gesetzt wird. Dem entsprechend, hat man zu setzen :

$$143. \quad V_2 = \frac{g + (1+m)p}{(1+m)K_1} \left(\alpha_2 \frac{a}{h_1} + \beta_2 \frac{h_1}{a} \right),$$

$$= \left[\frac{g}{(1+m)K_1} + \frac{p}{K_1} \right] \left(\alpha_2 \frac{a}{h_1} + \beta_2 \frac{h_1}{a} \right).$$

Hierbei ist für die Bestimmung der Koeffizienten α_2 und β_2 das oben für die Bestimmung der Koeffizienten α_1 und β_1 Gesagte ebenfalls zu berücksichtigen. Hiernach ergeben sich die folgenden Werthe:

$\frac{g}{q}$	$m = 0,2$			$m = 0,3$			$\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}$
	α_2	β_2	$2\sqrt{\alpha_2\beta_2}$	α_2	β_2	$2\sqrt{\alpha_2\beta_2}$	
0,1	0,253	0,391	0,630	0,251	0,386	0,623	1,24
0,2	0,232	0,343	0,564	0,236	0,352	0,577	1,21
0,3	0,203	0,280	0,477	0,207	0,289	0,490	1,17
0,4	0,172	0,230	0,397	0,178	0,239	0,412	1,16
0,5	0,141	0,182	0,320	0,147	0,192	0,336	1,14
0,6	0,113	0,138	0,250	0,127	0,158	0,284	1,11
0,7	0,086	0,101	0,187	0,090	0,106	0,196	1,09
0,8	0,058	0,066	0,123	0,062	0,071	0,132	1,07
0,9	0,030	0,033	0,062	0,032	0,035	0,067	1,05

¹⁾ Winkler. Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenkonstruktionen mit Rücksicht auf die Wöhler'schen Festigkeitsversuche bei wiederholter Beanspruchung, Wien, 1877.

XII. Kapitel.

Verschiedene Trägerformen.

§. 79. **Trägerform mit der kleinsten Materialmenge.** Wir wissen, dass sich der Querschnitt der Gurte um so grösser ergibt, je höher der Träger gewählt wird, dass aber das Volumen des Gitterwerkes von der Höhe unabhängig ist, falls man die gedrückten Stäbe nur auf Druckfestigkeit, nicht aber auf Knickfestigkeit berechnet; das nur kleine Volumen der Endständer und ein kleiner Theil des Volumens der Gurte nimmt dagegen mit zunehmender Höhe zu. Sonach würde eine ungemein grosse Höhe theoretisch als die zweckmässigste erscheinen. So z. B. ergibt sich als zweckmässigste Höhe nach der entsprechenden Formel Seite 96 für einfache Parallelträger:

$$\text{Netzwerk: } h = 0,58 l, \quad \text{Fachwerk: } h = 0,41 l;$$

für kontinuierliche Träger:

$$\text{Netzwerk: } h = 0,49 l, \quad \text{Fachwerk: } h = 0,34 l;$$

für Bogensehnenträger nach Formel 82 (Seite 150):

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} l = 0,61 l$$

und für Fischträger nach Formel 84 (Seite 151):

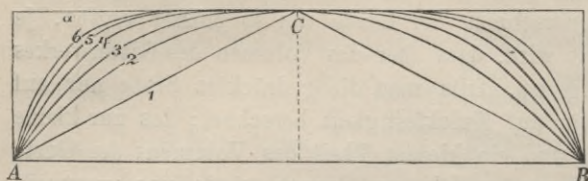
$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3} l = 0,87 l.$$

Praktisch indess ergibt sich eine wesentlich kleinere Höhe als zweckmässig, insbesondere 1. weil sich bei zu grosser Höhe die Gurtquerschnitte so klein ergeben, dass sie praktisch nicht durchführbar sind; 2. weil bei zu grosser Höhe die gedrückten Gitterstäbe einen grösseren Querschnitt erhalten müssen, als ihn die blosse Rücksicht auf Druckfestigkeit fordert; 3. weil die praktische Herstellung so langer Gitterstäbe auf Schwierigkeiten stösst; 4. weil die Sicherung der Stabilität der Träger gegen Umkanten bei zu grosser Höhe zu starke Konstruktionen erfordern würde. Die Bestimmung der zweckmässigsten Höhe bei gegebenem Gurtsystem, also z. B. eines Parallelträgers oder eines Parabelträgers, mit Berücksichtigung der genannten Umstände, ist ohne Eingehen auf die praktische Konstruktion nicht möglich; dieselbe ist ziemlich schwierig und noch keineswegs allgemein gelöst. Noch schwieriger aber wird die Bestimmung der zweckmässigsten Höhe in verschiedenen Querschnitten mit Rücksicht auf die oben erwähnten praktischen Gesichtspunkte, also die Bestimmung der zweckmässigsten Form der Gurte.

Wir wollen hier nur die Bestimmung der zweckmässigsten Form unter der Annahme einer durch praktische Rücksich-

ten gegebenen Maximalhöhe versuchen. Die Lösung der Aufgabe, diejenige Form zu bestimmen, bei welcher das Gesamtvolumen unter der soeben gemachten Annahme ein Minimum wird, gehört der Variationsrechnung an; allein es bieten sich der Anwendung derselben Schwierigkeiten, weshalb wir die Lösung in einer anderen Form versuchen wollen.

Fig. 119.



Wir wählen den Untergurt gerade, den Obergurt nach einer Parabel n ten Grades gekrümmt (Fig. 119) und zwar setzen wir die Höhe h , wenn die Höhe in der Mitte h_1 ,

die halbe Spannweite $= a$ und der Abstand des Querschnittes von der Mitte $= x$ ist,

$$h = \left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right) h_1.$$

Unter dieser Annahme ergibt sich das Gesamtvolumen V_1 der Gurte in gleicher Weise wie im §. 61:

$$144. \quad V_1 = \frac{q a^2}{K h_1} \int_0^a \frac{(a^2 - x^2) x^{n-2}}{a^n - x^n} \left(1 + \frac{n^2 x^{2n-2} h_1^2}{4 a^{2n}}\right) dx.$$

Wählt man zunächst für das Gitterwerk Netzwerk mit der zweckmässigsten Lage der Stäbe, nämlich mit $\alpha = \beta = 45^\circ$, so wird das Volumen des Gitterwerkes, entsprechend der Formel 87 (Seite 151):

$$145. \quad V_2 = \frac{4}{K} \int_0^a Y dx = \frac{4 g a}{K} \int_0^a \left[\frac{x}{a} - \frac{n (a^2 - x^2) x^{n-1}}{2 a (a^n - x^n)} \right] dx \\ + \frac{p a}{K} \int_0^a \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 \left[1 - \frac{n (a - x) x^{n-1}}{a^n - x^n}\right] dx.$$

Wählt man einfaches Fachwerk mit $\alpha = 0$, $\beta = 45^\circ$, so wird das Volumen des Gitterwerkes bei steifen Diagonalen $1,5$ mal so gross.

Bestimmt man die hierin vorkommenden Integrale durch Auftragen der Variablen als Ordinaten und Planimetrierung der entstehenden Flächen, so erhält man die folgenden Resultate:

n	Volumen V_1 der Gurte		Volumen V_2 des Gitterwerkes			
			Netzwerk		Fachwerk	
		+		+		+
1	3,0000	1,500	1,000	1,000	1,500	1,500
2	2,0000	1,333	0	0,667	0	1,000
3	1,7044	1,295	0,477	1,017	0,716	1,526
4	1,5707	1,304	0,674	1,244	1,011	1,866
5	1,4995	1,309	0,995	1,402	1,493	2,103
6	1,4563	1,323	1,288	1,519	1,432	2,279
∞	1,3333	2,000	2,000	2,333	3,000	3,500
	$\frac{qa^3}{Kh_1}$	$\frac{qah_1}{K}$	$\frac{ga^2}{K}$	$\frac{pa^2}{K}$	$\frac{ga^2}{K}$	$\frac{pa^2}{K}$

Der Werth $n = \infty$ entspricht dem Parallelträger. Die dritte Rubrik enthält für denselben das Volumen der Endständer für Netz- und Fachwerk. Hieraus ergeben sich nun für das Gesamtvolumen (für $h_1 = \frac{1}{4}a$) folgende Resultate:

n	Gesamtvolumen V			
	für Netzwerk		für Fachwerk	
	für $p = 0$	für $g = 0$	für $p = 0$	für $g = 0$
1	3,344	3,344	3,469	2,469
2	2,083	2,250	2,083	2,333
3	1,904	2,039	1,964	2,167
4	1,846	1,963	1,943	2,119
5	1,830	1,932	1,955	2,107
6	1,861	1,919	2,022	2,109
∞	1,896	1,980	2,208	2,333
	$\frac{qa^3}{Kh_1}$		$\frac{qa^3}{Kh_1}$	

Hieraus ersieht man deutlich, dass weder dem Parallelträger, noch dem Parabelträger das kleinste Volumen entspricht, dass vielmehr das kleinste Volumen etwa für $n = 4$ bis 6 eintritt. Wir haben hier nur die theoretischen Volumina berücksichtigt; das wirkliche Volumen wird bei einem noch etwas kleineren Werthe von n zum Minimum, weil das Volumen des Gitterwerkes in einem grösseren Verhältnisse zu vermehren ist, als das der Gurte. Der Obergurt dieser Form schliesst sich dem Obergurte des Parallelträgers nahezu an und krümmt sich nur an den Enden scharf nach abwärts. Im theoretischen Volumen ergibt sich gegen-

über dem Parallelträger nur eine Ersparniss von 4 bis 12 Prozent; in Wirklichkeit ist dieselbe aber grösser, weil der nöthige Zuschlag zum theoretischen Volumen beim Parallelträger in der Nähe der Enden grösser ist.

Setzt man

$$146. \quad V = \alpha (g + p) \frac{a^3}{K h_1} + A \frac{g a^2}{K} + B \frac{p a^3}{K},$$

wobei α , A , B die aus der ersten Tabelle zu entnehmenden Koeffizienten bedeuten, so wird nach der neueren Berechnungsweise:

$$147. \quad V = \alpha \frac{g a^3}{K_0 h_1} + \alpha \frac{p a^3}{K_1 h_1} + A \frac{g a^2}{K_0} + B \frac{p a^2}{K_1} + (B - A) \frac{p a^2}{K_2} \\ = \frac{1}{K_1} \left[\left(\alpha \frac{K_1}{K_0} g + \alpha p \right) \frac{a^3}{h_1} + \left\{ A \frac{K_1}{K_0} g + B p + (B - A) \frac{K_1}{K_0} p \right\} a^2 \right].$$

Setzen wir hierin $\frac{K_1}{K_0} = 0,44$, $\frac{K_2}{K_0} = 0,45$, so ergibt sich statt der letzten Tabelle die folgende:

u	Gesamtvolumen V			
	für Netzwerk		für Fachwerk	
	für p=0	für g=0	für p=0	für g=0
1	1,471	3,344	1,526	3,469
2	0,917	2,325	0,917	2,445
3	0,839	2,100	0,865	2,258
4	0,801	2,027	0,838	2,190
5	0,805	1,977	0,860	2,175
6	0,819	1,951	0,890	2,156
∞	0,862	2,079	0,972	2,389
	$\frac{q a^3}{K_1 h_1}$		$\frac{q a^3}{K_1 h_1}$	

Hiernach ergibt sich der Werth von n , welchem das Minimum von V entspricht, etwas kleiner als vorhin.

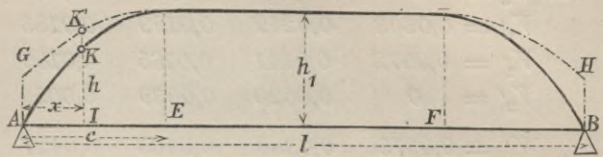
Zwischen $n = 4$ und $n = 6$ ändert sich der Werth von V nur wenig, wenn sich n ändert, so dass es auf eine sehr genaue Bestimmung desjenigen n , für welches V zum Minimum wird, nicht ankommt.

§. 80. Parallelträger mit parabolischen Enden. Man erhält nach dem Vorigen offenbar eine Näherungsform für den Träger der kleinsten Materialmenge bei gegebener Maximalhöhe, wenn man den mittleren Theil als Parallelträger konstruirt und die Gurte nur an den Enden parabolisch krümmt. Wir nehmen den Untergurt wieder als gerade an und haben nun zunächst zu untersuchen, ob der Obergurt bis zur Ver-

einigung mit dem Untergurte hinabzuführen ist (Form $ACDB$, Fig. 120) oder ob an den Enden eine gewisse Höhe AG und BH vorhanden sein muss. Bezeichnen wir

Fig. 120.

die Höhe in der Mitte mit h_1 , die Höhe an den Enden mit h_0 , eine beliebige Höhe IK' im Abstände x vom Ende mit h und die Länge $AE = BF$ der parabolischen Stücke mit c , so ist



$$148. \quad \begin{cases} h = h_1 - (h_1 - h_0) \left(1 - \frac{x}{c}\right)^2, \\ \frac{dh}{dx} = \frac{2(c-x)}{c^2} (h_1 - h_0). \end{cases}$$

Das Volumen V_1 der Gurte eines parabolischen Endes ergibt sich zu

$$V_1' = \frac{1}{K} \int_0^c \frac{M}{h} (1 + \sec^2 \sigma) dx = \frac{1}{K} \int_0^c \frac{M}{h} (2 + \tan^2 \sigma) dx, \text{ d. i., da}$$

$$M = \frac{1}{2} q x (l - x) \text{ zu setzen ist,}$$

$$149. \quad V_1' = \frac{q}{K} \int_0^c \frac{x(l-x) dx}{h_1 - (h_1 - h_0) \left(1 - \frac{x}{c}\right)^2} \left[1 + \frac{2(c-x)^2}{c^4} (h_1 - h_0)^2\right].$$

Das Volumen V_2' des Gitterwerkes eines parabolischen Endes ergibt

$$\text{sich zu } V_2 = \frac{C}{K} \int_0^c Y dx, \text{ wobei } C \text{ von der Konstruktion des Gitterwerkes}$$

abhängt und bei einer Neigung der Stäbe von 45° für Netzwerk = 2, für Fachwerk = 3 zu setzen ist. Nun aber ist $Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{p(l-x)^2}{2l}$, $M = \frac{1}{2} (gl + pl - px) \frac{x(l-x)}{l}$. Daher wird, wenn man $Y = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}$ setzt,

$$150. \quad V_2' = \frac{C}{2K} \left[g c (l - c) + \frac{p c (3 l^2 - 3 l c + c^2)}{3 l} \right] - \frac{C (h_1 - h_0)}{K c^2} \int_0^c \frac{(gl + pl - px) x (l - x) (c - x) dx}{h_1 - (h_1 - h_0) \left(1 - \frac{x}{c}\right)^2}.$$

Das Volumen V_3' eines Endständers ist $V_2' = \frac{4lh_0}{2K}$.

Das Gesamtvolumen V' eines parabolischen Endes ist nun $= V_1 + V_2' + V_3'$. Die Integrale erhält man am einfachsten durch Bestimmung des Flächeninhaltes der betreffenden Kurven mittels des Planimeters oder durch Rechnung.

Beispielsweise ergibt sich für $c = 0,2l$, für $h = \frac{1}{8}l$ und für Netzwerk ($C = 2$):

für $h_0 =$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$\cdot h_1$.	
$V_1' =$	$0,0303$	$0,0219$	$0,0199$	$0,0183$	$0,0173$	$0,0173$	}
$V_2' =$	$0,0072$	$0,0141$	$0,0165$	$0,0185$	$0,0203$	$0,0203$	
$V_3' =$	0	$0,0020$	$0,0039$	$0,0059$	$0,0078$	$0,0078$	
$V' =$	$0,0375$	$0,0380$	$0,0403$	$0,0427$	$0,0454$	$0,0454$	$\cdot \frac{ql^3}{Kh_1}$.

Hiernach ergibt sich das kleinste Volumen für $h_0 = 0$, wenn also die beiden Gurte direkt vereinigt werden. Ganz dasselbe ergibt sich auch für andere kleine Werthe von c , sowie für Fachwerk. Nur für grössere Werthe von c ergibt sich das kleinste Volumen für einen zwischen 0 und h_1 gelegenen Werth von h_0 .

Den Fall $h_0 = 0$ wollen wir nun noch etwas spezieller behandeln. Für diesen Fall wird

$$151. \quad h = h_1 \frac{x}{c} \left(2 - \frac{x}{c} \right), \quad \frac{dh}{dx} = \frac{2(c-x)h_1}{c^2}.$$

Ferner wird

$$152. \quad V_1' = \frac{qc^2}{Kh_1} \int_0^c \frac{(l-x) dx}{2c-x} \left[1 + \frac{2(c-x)^2 h_1^2}{c^4} \right];$$

$$153. \quad V_2' = \frac{C}{2K} \left[gc(l-c) + \frac{pc(3l^2 - 3lc + c^2)}{3l} \right] \\ - \frac{C}{K} \int_0^c \frac{(gl + pl - px)(l-x)(c-x)}{2c-x} dx.$$

Die Volumina V_1'' der Gurte und V_2'' des Gitterwerkes des mittleren Theiles mit geraden Gurten werden $V_1'' = \frac{1}{Kh_1} \int_c^l M dx$ und $V_2'' = \frac{2C}{K} \int_c^l Q dx$, das ist

$$154. \quad V_1'' = \frac{q}{6Kh_1} (l^3 - 6lc^2 + 4c^3),$$

$$155. \quad V_2'' = \frac{C}{4K} \left[g(l^2 - 4lc + 4c^2) + \frac{p}{6l} (7l^3 - 24l^2c + 24lc^2 - 8c^3) \right].$$

Man kann hiernach setzen:

$$156. \quad \begin{cases} V_1' = \frac{ql^2}{K} \left(\alpha' \frac{l}{h_1} + \beta' \frac{h_1}{l} \right), & V_2' = \frac{Cl^2}{K} (A'g + B'p); \\ V_1'' = \frac{ql^2}{K} \alpha'' \frac{l}{h_1}, & V_2'' = \frac{Cl^2}{K} (A''g + B''p). \end{cases}$$

Die Werthe der Koeffizienten α , β , A und B sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\frac{c}{l}$	α'	β'	A	B	α''	A''	B''
0	0	0,5000	0	0	0,16667	0,25	0,29167
0,1	0,00656	0,3758	0,01546	0,01686	0,15733	0,16	0,20133
0,2	0,02467	0,3667	0,02319	0,02859	0,13200	0,09	0,12900
0,3	0,05195	0,3545	0,02319	0,03608	0,09467	0,04	0,07267
0,4	0,08619	0,3440	0,01546	0,04044	0,04933	0,01	0,03033
0,5	0,12500	0,3333	0	0,04167	0	0	0

Hiernach kann man nun das Gesamtvolumen des Trägers durch die Formel

$$157. V = \frac{gl^2}{K} \left(\alpha \frac{l}{h_1} + \beta \frac{h_1}{l} \right) + \frac{Cl^2}{K} (Ag + Bp)$$

ausdrücken, wenn man $\alpha = 2\alpha' + \alpha''$, $\beta = 2\beta'$, $A = 2A' + A''$, $B = 2B' + B''$ setzt. Die Werthe für α , β , A und B sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\frac{c}{l}$	α	β	A	B
0	0,1667	1,000	0,2500	0,2917
0,1	0,1705	0,752	0,1909	0,2351
0,2	0,1813	0,733	0,1364	0,1862
0,3	0,1986	0,709	0,0864	0,1448
0,4	0,2217	0,688	0,0409	0,1112
0,5	0,2500	0,667	0	0,0833

Die Werthe A und B sind nur für Netzwerk und einfaches Fachwerk, nicht für Doppelfachwerk richtig; indess haben sie auch für letzteres nahezu Giltigkeit, da bei kleinem c Doppelfachwerk nur auf eine kurze Länge und in sehr schwachen Dimensionen nöthig wird, während bei grösserem c das Gitterwerk überhaupt nur einen kleinen Theil des Ganzen ausmacht.

Hiernach ergibt sich als Gesamtvolumen für Netzwerk ($C = 2$) und Fachwerk ($C = 3$), wenn wir z. B. $h_1 = \frac{1}{8} l$ setzen.

$\frac{c}{l}$	V für Netzwerk		V für Fachwerk	
	Einfl. von g	Einfl. von p	Einfl. von g	Einfl. von p
0	1,958	2,042	2,208	2,333
0,1	1,840	1,928	2,031	2,163
0,2	1,815	1,914	1,951	2,101
0,3	1,850	1,967	1,937	2,112
0,4	1,941	2,082	1,982	2,193
0,5	2,083	2,250	2,083	2,333
	$\frac{gl^2}{K}$	$\frac{pl^2}{K}$	$\frac{gl^2}{K}$	$\frac{pl^2}{K}$

Sonach ergibt sich das kleinste Volumen beim Netzwerke für $c = 0,17l$ bis $0,19l$, beim Fachwerke für $c = 0,23l$ bis $0,27l$. Allgemein ergibt sich das kleinste Volumen nahezu bei folgendem Werthe von c :

$$158. \begin{cases} \text{Netzwerk: } c = 0,03l + 1,12h, \\ \text{Fachwerk: } c = 0,02l + 1,76h. \end{cases}$$

Die Ersparniss bei der Wahl dieser Form beträgt gegen den Parallelträger 5 bis 15 Prozent, gegen den Parabelträger 7 bis 18 Prozent. Von den angewendeten Formen nähert sich der Hyperbelträger dieser Trägerform am meisten.

Bei Anwendung der neueren Berechnungsweise ist ganz entsprechend dem vorigen Paragrafe in Formel 157 zu setzen: $\alpha \left(\frac{g}{K_0} + \frac{p}{K_1} \right)$ statt $\frac{\alpha}{K}$, $\beta \left(\frac{g}{K_n} + \frac{p}{K_1} \right)$ statt $\frac{\beta}{K}$, $\frac{A}{K_0}$ statt $\frac{A}{K}$, $\left[B + (B - A) \frac{K_1}{K_0} \right] \frac{1}{K_1}$ statt $\frac{B}{K}$. Als Näherungsregeln für den dem kleinsten Volumen entsprechenden Werth von c ergibt sich alsdann:

$$159. \begin{cases} \text{Netzwerk: } c = 1,40h, \\ \text{Fachwerk: } c = 0,03l + 1,72h. \end{cases}$$

Auf eine Bestimmung der Spannungen wollen wir nicht eingehen, da sich hier gegen die allgemeinen Regeln keine wesentlichen Vereinfachungen erzielen lassen.

§. 81. Trapezträger. Eine zweite Näherungsform der Träger mit der kleinsten Materialmenge bei gegebener Maximalhöhe entsteht, wenn wir die Träger aus drei Theilen zusammensetzen, von denen der mittlere eine rechteckige, die Endtheile eine trapezförmige oder dreieieckige Form

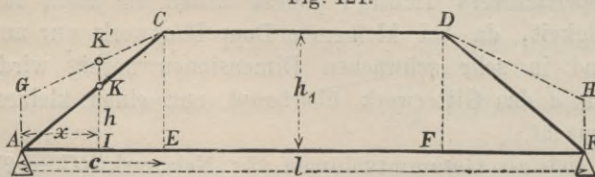


Fig. 121.

haben, eine Form, welche zuerst durch die Herren Köstlin und Battig in Anwendung gebracht wurde (Fig. 121).

Wir wollen diese Träger Trapezträger nennen.

Die im vorigen Paragrafe angewendeten Bezeichnungen behalten wir auch hier bei. Alsdann ist die Höhe h im ersten Theile im Abstände x von der linken Stütze:

$$160. \quad h = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{c} x.$$

1. Gurte. Das Volumen V_1' der beiden Gurte im ersten Theile ist, da $M = \frac{1}{2} qx(l - x)$, $\sec^2 \sigma = 2 + \tan^2 \sigma = 2 + \left(\frac{h_1 - h_0}{c} \right)^2$ ist,

$$V_1' = \frac{1}{K} \int_0^c \frac{M}{h} (1 + \sec^2 \sigma) dx = \frac{qc}{K} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(h_1 - h_0)^2}{c^2} \right) \int_0^c \frac{x(l - x) dx}{h_0 c + (h_1 - h_0)x},$$

d. i. unter Anwendung der Integralformeln $\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \lognat(a+bx)$

und $\int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{x(bx-2a)}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2} \lognat(a+bx)$:

$$161. V_1' = \frac{ql^2}{K} \left(\alpha' \frac{l}{h_1} + \beta' \frac{h_1}{l} \right),$$

wenn man zur Abkürzung $h_0 = \varepsilon h_1$, $c = ml$ und

$$161 a. \begin{cases} \alpha' = \frac{m^2}{2(1-\varepsilon)^2} \left[(2-m) - (2-3m)\varepsilon - \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon+m\varepsilon)}{1-\varepsilon} \lognat \frac{1}{\varepsilon} \right]. \\ \beta' = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2m^2} \alpha'. \end{cases}$$

Das Volumen V_1'' der Gurte des mittleren Theiles ist durch die Formel 154 bestimmt. Setzt man dasselbe

$V_1'' = \alpha'' \frac{ql^2}{K} \frac{l}{h_1}$, so kann man das Gesamtvolumen V_1 der Gurte durch

$$162. V_1 = \frac{ql^2}{K} \left(\alpha \frac{l}{h_1} + \beta \frac{h_1}{l} \right)$$

ausdrücken, worin $\alpha = 2\alpha' + \alpha''$, $\beta = 2\beta''$ zu setzen ist.

Für den Trapezträger ohne Endhöhe, d. i. für $h_0 = 0$, wird $h = \frac{x}{c} h_1$, daher die Spannungen S_1 und S_2 der Gurte

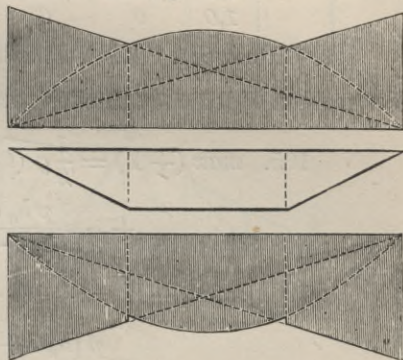
$$163. S_1 = + \frac{qc(l-x)}{h_1}, \quad S_2 = - S_1 \sqrt{1 + \frac{h_1^2}{c^2}}.$$

Hiernach ist in Fig. 122 die Spannung beider Gurte grafisch dargestellt. Für diesen Fall ergibt sich einfacher:

$$164. \alpha' = \frac{1}{2} m^2 (2-m), \quad \beta' = \frac{1}{4} (2-m).$$

Die Werthe für α und β für einige Werthe von m und ε sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Fig. 122.



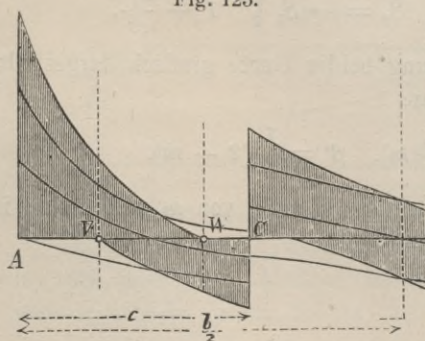
	$m =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
α	$\varepsilon =$						
	0	0,1667	0,1763	0,2040	0,2477	0,3053	0,3750
	0,2	0,1667	0,1714	0,1848	0,2055	0,2323	0,2640
	0,4	0,1667	0,1695	0,1775	0,1898	0,2056	0,2240
	0,6	0,1667	0,1683	0,1728	0,1797	0,1885	0,1988
	0,8	0,1667	0,1674	0,1694	0,1724	0,1763	0,1808
	1,0	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
β	0	1,0000	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500
	0,2	0,4781	0,4401	0,4220	0,3940	0,3660	0,3379
	0,4	0,2335	0,2190	0,2046	0,1902	0,1757	0,1613
	0,6	0,0935	0,0875	0,0816	0,0756	0,0696	0,0636
	0,8	0,0215	0,0201	0,0187	0,0173	0,0159	0,0145
	1,0	0	0	0	0	0	0

2. Gitterwerk. Als Vertikalkraft Y ergibt sich für die Belastung des rechten oder linken Theiles nach der Formel $Y = Q - \frac{M}{h} \tan \sigma$ leicht:

$$165. \max(+Y) = \frac{1}{2} g (l - 2x) - \frac{g(l_1 - h_0)x(l-x)}{2[h_0c + (h_1 - h_0)x]} + \frac{p h_0 c (l-x)^2}{2l[h_0c + (h_1 - h_0)x]}$$

$$166. \max(-Y) = \frac{1}{2} g (l - 2x) - \frac{g(h_1 - h_0)x(l-x)}{2[h_0c + (h_1 - h_0)x]} - \frac{p[h_0c + (h_1 - h_0)l]x^2}{2l[h_0c + (h_1 - h_0)x]}$$

Fig. 123.



In Fig. 123 ist Y grafisch dargestellt. Hiernach zerlegt sich im Allgemeinen der linke Theil in drei Theile, in deren erstem Y nur positiv, in deren zweitem Y positiv und negativ und deren drittem Y nur negativ ist. Der letztere Theil kommt in Wegfall, wenn für $x = c$ $\max(+Y)$ positiv oder > 0 wird, d. i. wenn

$$167. \frac{h_0}{h_1} > \frac{g l c}{[g l + p(l - c)](l - c)}$$

Auch der zweite Theil kommt in Wegfall, d. h. Y kann im linken Theile nur positiv sein, wenn sich $\max(-Y)$ für $x = c$ positiv oder > 0 ergibt, d. i. wenn

$$168. \frac{h_0}{h_1} = \frac{(g + p) c l}{(g l + p c)(l - c)}$$

ist. Wenn $\frac{c}{l} > \sqrt{\frac{g}{p} \left(1 + \frac{g}{p}\right)} - \frac{g}{p}$ ist, so würde sich hiernach $h_0 > h_1$ er-

geben, was nicht zulässig ist, so dass in diesem Falle bei jedwedem Verhältnisse von h_0 zu h_1 das Y positiv und negativ werden kann.

Beim Trapezträger ohne Endhöhe oder für $h_0 = 0$ kann Y im linken Theile bei keiner Belastungsweise positiv werden (Fig. 124). Es wird hier sehr einfach:

$$169. \max(-Y) = -\frac{1}{2}(g+p)x.$$

Bei Belastung des rechten Theiles wird $Y = 0$; bei Belastung des linken Theiles nimmt daher Y denselben Werth an, als für totale Belastung. Bei Anwendung von Fachwerk mit schlaffen Diagonalen müssen hier die Diagonalen in den Endtheilen die entgegengesetzte Lage erhalten, wie bei Parallelträgern (Fig. 125).

Fig. 124.

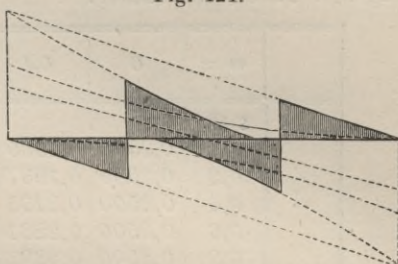
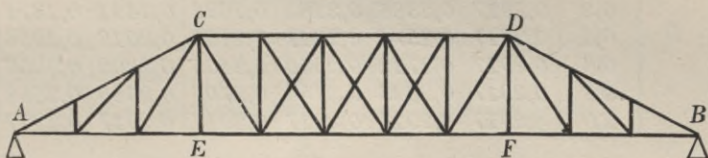


Fig. 125.



Des Volumen V_2 des Gitterwerkes im linken Theile wird unter der Voraussetzung, dass Y in diesem Theile nur positiv werden kann,

$$V_2' = \frac{C}{K} \int_0^c Y dx, \text{ d. i.}$$

$$V_2' = \frac{C}{2K} \left[g c (l-c) - \frac{g (h_1 - h_0)}{c} \int_0^c \frac{x(l-x)}{h} dx + \frac{p h_0}{l} \int_0^c \frac{(l-x)^2}{h} dx \right].$$

Hiernach lässt sich V_2' ausdrücken durch

$$170. V_2' = \frac{C l^2}{K} (A' g + B' p),$$

wenn man zur Abkürzung

$$171. \left\{ \begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} m (1-m) - \frac{\alpha' (1-\varepsilon)}{2m}, & B' &= \frac{m \varepsilon}{2(1-\varepsilon)^3} \left[(1-\varepsilon + m \varepsilon)^2 \log \frac{1}{\varepsilon} \right. \\ & & & \left. - \frac{1}{2} (1-\varepsilon) m [(\varepsilon - m) - \varepsilon (\varepsilon - 3m)] \right] \end{aligned} \right.$$

setzt. Das Volumen V_2'' des Gitterwerkes des mittleren Theiles ist durch die Formel 155 bestimmt. Setzt man dasselbe $V_2'' = \frac{C l^2}{K} (A'' g$

+ $B'' p$), so lässt sich das Gesamtvolumen des Gitterwerkes ausdrücken durch

$$172. \quad V_g = \frac{CV^2}{K} (A g + B p),$$

worin $A = 2A' + A''$, $B = 2B' + B''$ zu setzen ist. Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

	$m =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
A	$\varepsilon =$						
	0	0,2500	0,1650	0,1100	0,0850	0,0900	0,1250
	0,2	0,2500	0,1937	0,1445	0,1023	0,0670	0,0388
	0,4	0,2500	0,2135	0,1818	0,1549	0,1328	0,1256
	0,6	0,2500	0,2281	0,2092	0,1933	0,1804	0,1705
	0,8	0,2500	0,2382	0,2313	0,2241	0,2183	0,2139
	1,0	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
B	0	0,2917	0,2063	0,1490	0,1177	0,1103	0,1250
	0,2	0,2917	0,2386	0,2182	0,1694	0,1491	0,1374
	0,4	0,2917	0,2574	0,2317	0,2136	0,2019	0,1958
	0,6	0,2917	0,2712	0,2560	0,2455	0,2390	0,2358
	0,8	0,2917	0,2823	0,2754	0,2707	0,2680	0,2668
	1,0	0,2917	0,2917	0,2917	0,2917	0,2917	0,2917

Mit Hilfe der für α , β , A , B aufgestellten Zahlenwerthe ist es leicht, für eine spezielle Konstruktion die günstigen Verhältnisse, d. h. diejenigen Werthe von h_0 und c zu bestimmen, für welche das Volumen ein Minimum wird. Ungefähr ergeben sich hinsichtlich des theoretischen Volumens die folgenden Werthe von h_0 und c als die günstigsten:

$$173. \quad \begin{cases} \text{Netzwerk: } c = 0,06 l + 0,6 h_1, & h_0 = 0,22 h_1 \text{ bis } 0,31 h_1, \\ \text{Fachwerk: } c = 0,04 l + 1,1 h_1, & h_0 = 0,13 h_1 \text{ bis } 0,25 h_1. \end{cases}$$

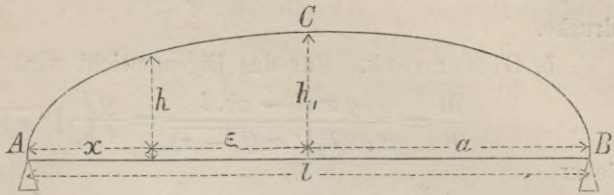
Die Materialersparniss gegen den Parallelträger von gleicher Höhe beträgt hierbei 3 bis 8 Prozent.

Bei Anwendung der neueren Berechnungsweise tritt genau dieselbe Aenderung ein, wie im vorigen Paragraph.

§. 82. **Ellipsenträger.** Eine weitere Näherungsform an den Träger der kleinsten Materialmenge bei gegebener Maximalhöhe ist der Ellipsenträger, bei welchem der Untergurt gerade und der Obergurt elliptisch gekrümmt ist, oder umgekehrt, oder bei welchem beide Gurte eine geschlossene Ellipse bilden. Die erste Form ist einige Male in Anwendung gekommen und auch wir wollen diese Form allein in Betracht ziehen. Auch der abgestumpfte Ellipsenträger, der sich indess nur wenig vom abgestumpften Parallelträger unterscheidet, ist in Anwendung gekommen; wir verzichten indess auf ein näheres Eingehen auf diese Form.

Wir bezeichnen für den Ellipsenträger mit geradem Untergurte (Fig. 126) die halbe Spannweite mit a , den Abstand eines Querschnittes vom

Fig. 126.



Ende mit x , von der Mitte mit ξ . Alsdann ist $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{h^2}{h_1^2} = 1$, also

$$173. \quad h = h_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2} = \frac{2 h_1}{l} \sqrt{x(l-x)}.$$

Hieraus folgt

$$\tan \sigma = \frac{dh}{dx} = \frac{h_1^2 \xi}{a^2 h} = \frac{h_1 \xi}{a \sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{h_1 (l - 2x)}{l \sqrt{x(l-x)}}.$$

$$\sec \sigma = \sqrt{1 + \tan^2 \sigma} = \sqrt{1 + \frac{h_1^4 \xi^2}{a^4 h^2}} = \sqrt{1 + \frac{h_1^2 (l - 2x)^2}{l^2 x(l-x)}}.$$

1. Spannungen. Wir wollen nur Näherungsgleichungen für die Spannungen aufstellen.

a. Gurte. Die Spannung S_2 des Untergurtes ist

$$S_2 = \frac{M}{h} = \frac{q x (l-x) \cdot l}{2 \cdot 2 h_1 \sqrt{x(l-x)}}, \text{ d. i.}$$

$$174. \quad S_2 = \frac{q l}{4 h_1} \sqrt{x(l-x)} = \frac{q l^2}{8 h_1^2} h.$$

Hiernach ist die Spannung S_2 der Trägerhöhe h proportional. Die Spannung lässt sich also durch eine Ellipse darstellen (Fig. 127).

Die Spannung S_1 des Obergurtes wird nun $S_1 = -S_2 \sec \sigma$, d. i.

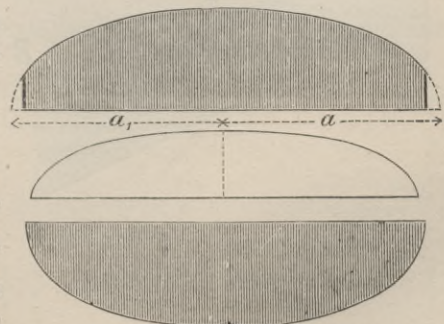
$$175. \quad S_1 = -\frac{q}{4 h_1} \sqrt{4 a^4 - 2 (2 a^2 - h_1^2) \xi^2} \\ = -\frac{q}{4 h_1} \sqrt{l^2 x(l-x) + h_1^2 (l - 2x)^2}$$

Hiernach lässt sich auch die Spannung des Obergurtes durch eine Ellipse darstellen, deren horizontale Halbhaxe

$$176. \quad a_1 = a \sqrt{\frac{2 a^2}{2 a^2 - h_1^2}}$$

ist (Fig. 127). Für $h_1 = \frac{1}{10} l, \frac{1}{8} l, \frac{1}{6} l$ wird bezüglich $a_1 = 1,010 a, 1,016 a, 1,029 a$, so dass sich a_1 nur wenig grösser, als a ergibt,

Fig. 127.



Für $\xi = a$ oder $x = 0$ wird $S_1 = -\frac{1}{4} q l$, d. i. gleich dem halben Stützen-
drucke.

b. Gitterwerk. Für das Eigengewicht wird

$$\frac{M}{h} = \frac{g x (l - x) \cdot l}{2 \cdot 2 h_1 \sqrt{x (l - x)}} = \frac{g l}{4 h_1} \sqrt{x (l - x)}.$$

daher

$$Y = \frac{d}{d x} \frac{M}{h} h = \frac{g l (l - 2 x)}{8 h_1 \sqrt{x (l - x)}} \cdot \frac{2 h_1}{l} \sqrt{x (l - x)}, \text{ d. i.}$$

$$177. \quad Y = \frac{1}{4} g (l - 2 x) = \frac{1}{2} g \xi.$$

Hiernach lässt sich Y durch eine Gerade darstellen, wie beim Parallel-
träger und zwar ist Y genau halb so gross, wie für den Parallelträger
(Fig. 128).

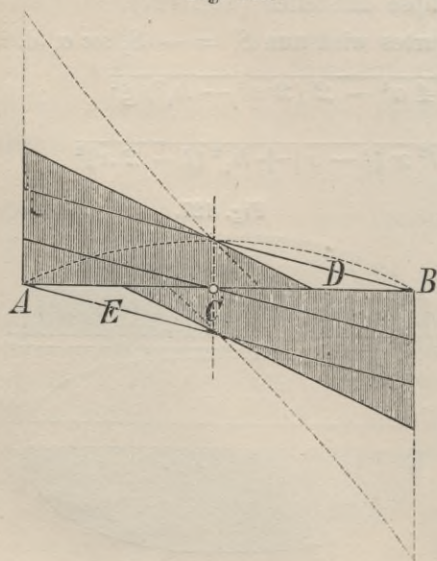
Für die zufällige Last wird

$$\begin{aligned} \max (+ Y) = Q + \frac{M M}{h d x} &= \frac{p (l - x)^2}{2 l} \\ &- \frac{p x (l - x)^2}{2 l} \cdot \frac{l}{2 h_1 \sqrt{x (l - x)}} \cdot \frac{h_1 (l - 2 x)}{l \sqrt{x (l - x)}}, \end{aligned}$$

d. i. ausserordentlich einfach $\max (+ Y) = \frac{1}{4} p (l - x)$.

Da bei totaler Belastung nach Formel 177 $Y = \frac{1}{4} p (l - 2 x)$
wird, so wird $\max (- Y) = \frac{1}{4} p (l - 2 x) - \frac{1}{4} p (l - x) = -\frac{1}{4} p x$, also

Fig. 128.



$$178. \quad \begin{cases} \max(+Y) = +\frac{1}{4} p (l - x), \\ \max(-Y) = -\frac{1}{4} p x. \end{cases}$$

Sonach lässt sich auch für
die zufällige Last $\max Y$ durch
zwei gerade Linien darstellen (Fig.
128). In Fig. 128 sind zum Ver-
gleich noch $\max Y$ für den Parallel-
- und Parabelträger dar-
gestellt.

Die Spannungen der Gitter-
stäbe sind nun durch die For-
meln 33 (Seite 126) bestimmt.

2. Volumen. Das Volumen
 V_1 der Gurte pro Längeneinheit
wird bei gleicher Inanspruchnahme
für Zug und Druck:

$$v_1 = \frac{S_2}{K} + \frac{-S_1}{K} \sec \sigma = \frac{S_2}{K} (1 + \sec^2 \sigma), \text{ d. i.}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{q l}{4 K h_1} \sqrt{a^2 - \xi^2} \left[2 + \frac{h_1^2 \xi^2}{a^2 (a^2 - \xi^2)} \right] \\ &= \frac{q l}{4 K h_1} \left[\frac{2 a^2}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} - \frac{(2 a^2 - h_1^2) \xi^2}{a^2 \sqrt{a^2 - \xi^2}} \right]. \end{aligned}$$

Das Gesamtvolumen der Gurte ist nun $V_1 = 2 \int_0^a v_1 dx$, d. i.

$$179. \quad V_1 = \frac{\pi q a (2 a^2 + h_1^2)}{4 K h_1} = \frac{\pi q l (l^2 + 2 h_1^2)}{16 K h_1}$$

Die Volumina der Gurte eines Parallel-, Ellipsen- und Parabelträgers von gleicher Höhe verhalten sich sonach nahezu wie $\frac{1}{6} : \frac{\pi}{16} : \frac{1}{4} = 0,167 : 0,196 : 0,250 = 0,667 : 0,785 : 1$.

Das Volumen v_1 des Gitterwerkes ist $v_2 = \frac{C Y}{K}$, wobei C durch §. 37 bestimmt ist, also das Gesamtvolumen des Gitterwerkes bei konstantem C : $V_2 = 2 \frac{C}{K} \int_0^a Y dx$, d. i. $V_2 = \frac{2C}{K} \frac{l}{4} \left[\frac{1}{4} (g + p) l + \frac{1}{8} p l \right]$
oder

$$180. \quad V_2 = \frac{C}{16 K} (2g + 3p) l^2.$$

Das Gesamtvolumen des Trägers ergibt sich hiernach 0 bis 9 Prozent kleiner, als beim Parallelträger mit gleicher Höhe, aber 1,5 bis 7 Prozent grösser, als beim Träger der kleinsten Materialmenge.

Nimmt man die Horizontalentfernung der Knotenpunkte konstant an, so wird C variabel. Hier wird, wenn e die horizontale Projektion der geneigten Stäbe bedeutet,

$$v_2 = \frac{1}{4 K} \left[2g\xi + p(a + \xi) \right] \left[\frac{e a}{h_1 \sqrt{a^2 - \xi^2}} + \frac{n h_1 \sqrt{a^2 - \xi^2}}{2 a} \right],$$

worin für Netzwerk $n = 1$, für Fachwerk $n = 2$ zu setzen ist. Das ganze Volumen des Gitterwerkes ist nun $V_2 = 2 \int_0^a v_2 dx$. Die Integration gibt

$$\begin{aligned} 181. \quad V_2 &= \frac{l^2}{96 K} \left[6 \{ 4g + (\pi + 2) p \} \frac{e}{h_1} + \{ 8g + (3\pi + 4) p \} \frac{n h_1}{e} \right] \\ &= \frac{l^2}{K} \left[(0,2500 g + 0,3213 p) \frac{e}{h_1} + (0,0833 g + 0,1398 p) \frac{n h_1}{e} \right]. \end{aligned}$$

Angenähert wird V_2 zum Minimum und das Minimum von V_2 selbst:

Netzwerk:

$$182. \quad \begin{cases} \frac{e}{h_1} = 0,577 \frac{g}{q} + 0,660 \frac{p}{q}. \\ \min V_2 = (0,289 g + 0,426 p) \frac{l^2}{K}. \end{cases}$$

Fachwerk:

$$183. \quad \begin{cases} \frac{e}{h_1} = 0,817 \frac{g}{q} + 0,933 \frac{p}{q}; \\ \min V_2 = (0,408 g + 0,603 p) \frac{l^2}{K}. \end{cases}$$

Hiernach wird $\min V_2$ um 13,6 bis 15,5 durchschnittlich um 14 Prozent grösser, als bei konstanter Neigung der Stäbe.

Hierbei ist einfaches Gitterwerk vorausgesetzt. Werden beim Fachwerke schlaife Diagonalen angewendet, so müssen dieselben im mittleren Theile DE (Fig. 128) doppelt angeordnet werden. Hier kommt zu dem vorigen Volumen noch das Volumen V_2' hinzu, welches bestimmt ist durch

$$V_2' = \frac{1}{2K} \int_c^0 \left[2g\xi + p(a + \xi) \right] \left[\frac{h_1 \sqrt{a^2 - \xi^2}}{ae} + \frac{ae}{h_1 \sqrt{a^2 - \xi^2}} \right] d\xi,$$

wenn c die Länge $CD = CE$ (Fig. 128) bezeichnet und zwar ist $c = \frac{p}{2g+p} a$. Die Ausführung der Integration gibt:

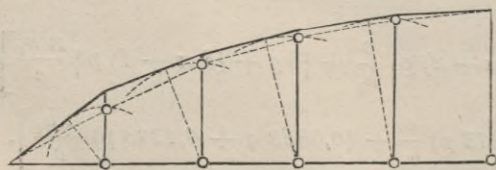
$$184. \quad V_2' = \frac{a^2}{2K} \left[\frac{p h_1}{2e} \left\{ \text{Arcsin} \frac{c}{a} - \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right\} + \frac{p e}{h_1} \text{Arcsin} \frac{c}{a} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} (2g+p) \frac{h_1}{e} \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^3} \right\} - (2g+p) \frac{e}{h_1} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right\} \right].$$

Annähernd erhält man hiernach das Gesamt-Minimalvolumen des Gitterwerkes, wenn man in den Formeln 183 0,925 statt 0,933 und 0,727 statt 0,603 setzt. Hiernach wird das Volumen um 0 bis 20 Prozent grösser, als bei einfachen Diagonalen.

Bei Anwendung der neueren Berechnungsweise treten dieselben Aenderungen ein, wie in §. 80.

§. 83. Bogensehenträger mit konstanter Spannung des Obergurtes. Die Spannung des Obergurtes ist, wenn z den normalen

Fig. 129.



Abstand des Gurtstückes vom entsprechenden Knotenpunkte des Untergurtes bedeutet, $S_1 = -\frac{M}{z}$, also bei gleichmässiger Belastung $S_1 = -\frac{q x (l-x)}{2z}$.

Soll nun die Spannung des Obergurtes konstant sein, so muss $\frac{q x (l-x)}{2 z}$
 $= \frac{q l^2}{8 h_1}$ werden, also

$$z = 4 h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

d. h. es muss z gleich der vertikalen Höhe eines Parabelträgers sein. Schlägt man mit den einzelnen Werthen von z als Radien Kreise aus den betreffenden unteren Knotenpunkten, so werden diese Kreise von den Gurstücken des Trägers tangirt (Fig. 129).

Eine Näherungsgleichung des Obergurtes erhält man in ganz gleicher Weise, wie beim Pauli'schen Träger in §. 65. Der Unterschied besteht nur darin, dass hier unter dem Wurzelzeichen $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2$ statt $\frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2$ zu setzen ist. Statt der Formel 97 (S. 156) erhält man alsdann

$$185. \quad h = 4 h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[1 + 8 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Hiernach unterscheidet sich diese Form noch merklicher vom Parabelträger, als der Pauli'sche Träger.

Die Spannung S_2 des Untergurtes wird $S_2 = \frac{M}{p} = \frac{q x (l-x)}{2 h}$. Führt man den Ausdruck für h ein und setzt dabei für den Ausdruck in der grossen Parenthese annähernd $\frac{1}{1+y} = 1 - y$, so erhält man

$$186. \quad S_2 = \frac{q l^2}{8 h_1} \left[1 - 8 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Sonach nimmt die Spannung von der Mitte aus nach den Enden zu ab.

Die Spannungen im Gitterwerke sind wie in §. 66 zu bestimmen. Die Formeln 100 (S. 158) können hier ohne Weiteres zur Anwendung kommen, wenn man 32 statt 8 setzt.

Die Materialmenge in den Gurten pro Längeneinheit ist $\frac{1}{K} (-S_1 \sec \sigma + S_2)$. Setzen wir annähernd $\sec \sigma = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \sigma = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = 1 + 8 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2$, so wird $-S_1 \sec \sigma + S_2 = \frac{q l^2}{4 h_1}$, also die gesammte Materialmenge V_1 der Gurte sehr einfach

$$187. \quad V_1 = \frac{q l^3}{4 K h_1}.$$

Bei den Verhältnissen $\frac{h_1}{l} = \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ ist der Minderbedarf an Material in den Gurten gegen den Pauli'schen Träger 1,4 1,0 0,8 Prozent, gegen den Parabelträger 5,4 4,2 3,3 Prozent.

Die Materialmenge im Gitterwerke bestimmt sich, wie in §. 67. Statt der Formel 102 (S. 159) ergibt sich

$$188. \quad V_2 = \left[1 + \left(9,2 + 12 \frac{g}{p} \right) \frac{h_1^2}{l^2} \right] V_2'.$$

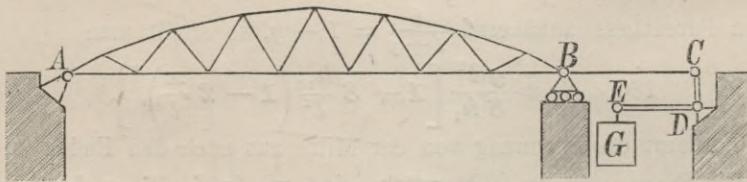
Bei Spannweiten von 20, 50, 100, 150 Meter oder für die Verhältnisse $\frac{g}{p} = 0,24, 0,50, 0,93, 1,40$ ergibt sich für Eisenbahnbrücken der Mehrbedarf an Material gegen den Parabelträger für $h_1 = \frac{1}{7} l$ bezüglich 25, 31, 42, 53 Prozent, für $h_1 = \frac{1}{8} l$ bezüglich 19, 24, 32, 41 Prozent, für $h_1 = \frac{1}{9} l$ bezüglich 15, 19, 25, 32 Prozent.

Die gesammte theoretische Materialmenge ergibt sich fast genau ebenso gross, wie beim Parabelträger, höchstens bis zu 1 Prozent verschieden.

Diese Trägerform wurde zuerst von Herrn Haberkalt in Wien (Wochenschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines, 1878) angegeben.

§. 84. Träger mit künstlich gedrücktem Untergurte. Wenn man auf die Enden des Untergurtes eines beliebigen Trägers einen künstlichen Druck ausübt, so wird dadurch der durch die Belastung entstehende Zug im Untergurte, also auch das nöthige Volumen des Untergurtes, vermindert. Der Druck im Obergurte wird durch den künstlichen Druck

Fig. 130.



auf den Untergurt vermehrt, wenn der Untergurt nach unten gekrümmt ist, dagegen nicht verändert, wenn der Untergurt gerade ist, so dass sich also diese Anordnung nur bei geradem Untergurte empfiehlt, falls man von einem nach oben gekrümmten Untergurte absieht. Bei geradem Untergurte entsteht auch keine Veränderung in den Spannungen der Gitterstäbe, weil sich die Verlängerungen der Gurtstücke des Ober- und Untergurtes in der Richtung des künstlichen Druckes schneiden.

Diese Konstruktion wurde zuerst von Köpeke im Jahre 1865 (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover) vorgeschlagen und von ihm im Jahre 1878 bei der Risaer Elbebrücke in Anwendung gebracht. Die Erzeugung des künstlichen Druckes kann in verschiedener Weise erfolgen; bei der Risaer Elbebrücke wurde die in Fig. 130 schematisch dargestellte Umsetzung des Gewichtes G durch einen Winkelhebel angewendet.

Was nun die anzuwendende Grösse des künstlichen Druckes anlangt, so kommt dabei die Form des Obergurtes und die Konstruktionsweise

des Untergurtes in Betracht. Bei schlaff konstruirtem Untergurte kann der künstliche Druck höchstens gleich dem kleinsten im Untergurte auftretenden Zuge sein, damit der Untergurt keinen Druck aufzunehmen habe. Am meisten bietet diese Konstruktion beim Parabelträger Vortheil, weil hier die Spannung des Untergurtes konstant ist, so dass die ganze, durch das Eigengewicht erzeugte Spannung aufgehoben werden kann, wie dies auch bei der Risaer Elbebrücke geschehen ist. Das in §. 61 und 62 ermittelte Volumen des Parabelträgers wird hierdurch um

$$189. V' = \frac{g l^3}{8 K h_1},$$

bei Anwendung der neueren Berechnungsweise um

$$189a. V' = \frac{g l^3}{8 K_0 h_1}$$

vermindert.

Die Ersparniss in den Hauptträgern beträgt für Eisenbahnbrücken nach der gewöhnlichen Berechnungsweise bei Spannweiten von 50, 100, 150, 200, 250 Meter bezüglich ungefähr 14, 20, 26, 29, 33 Prozent. Nach der neueren Berechnungsweise wird der Gewinn wesentlich geringer, weil hier das Eigengewicht auf die Querschnittsfläche und das Volumen einen geringeren Einfluss übt, als die zufällige Last; die Ersparniss beträgt hier nämlich bei 50, 100, 150, 200, 250 Meter Spannweite nur ungefähr 8, 12, 17, 20, 24 Prozent.

Wenn man den Untergurt steif konstruirt, so dass er fähig ist, einen Druck aufzunehmen, so würde es am zweckmässigsten sein, durch den künstlichen Druck die ganze Spannung in Folge des Eigengewichtes und ausserdem die halbe Maximalspannung in Folge der zufälligen Last aufzuheben. Würde man den künstlichen Druck noch grösser nehmen, so würde der Druck bei unbelasteter Brücke grösser sein, als der bei der eben gemachten Annahme entstehende Maximalzug. Die Ersparniss am Volumen ist in diesem Falle

$$190. V' = \frac{(2g + p) l^3}{16 K h_1};$$

und bei Anwendung der neueren Berechnungsweise

$$190a. V' = \left(\frac{2g}{K_0} + \frac{p}{K_1} - \frac{p}{K_2} \right) \frac{l^3}{16 h_1} = \frac{(2g + p) l^3}{16 K_0 h_1}.$$

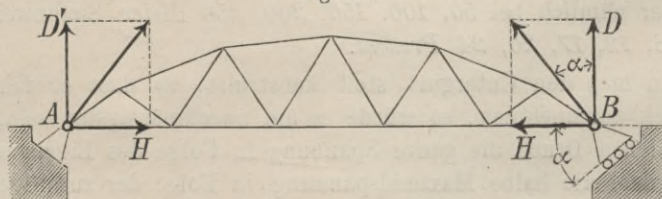
Die Ersparniss beträgt hier für Eisenbahnbrücken bei einer Spannweite von 50, 100, 150, 200, 250 Meter nach der gewöhnlichen Berechnungsweise ungefähr 28, 32, 35, 37, 39 Prozent, nach der neueren Berechnungsweise ungefähr 15, 19, 22, 26, 28 Prozent.

Dieser Ersparniss steht natürlich der Mehrbedarf an Kosten für die zur Erzeugung des Druckes nöthige Konstruktion und für die stärkeren Widerlager entgegen, so dass nach den aufgestellten Zahlen von einer

wirklichen Ersparniss nur bei grösseren Spannweiten unter besonderen Umständen die Rede sein kann, namentlich, wenn mehrere Oeffnungen vorhanden sind, weil sich hier der künstliche Druck von einer Oeffnung auf die andere direkt übertragen lässt. Da sich bei grösseren Spannweiten die Ersparniss nach der zweiten Annahme, wo auch die Hälfte der von der zufälligen Last erzeugten Spannung aufgehoben wird, nur wenig grösser ergibt, als nach der ersten Annahme, wo nur die vom Eigengewichte erzeugte Spannung aufgehoben wird, während die zweite Annahme einen steifen Untergurt, ein grösseres Gewicht und stärkere Widerlager erfordert, so ist die erste Annahme jedenfalls die rationellere.

§. 85. **Träger mit geneigter Auflagerung.** Wenn man das eine Lager B (Fig. 131) des Trägers geneigt anordnet und die Reibung durch Walzen etc. aufhebt, so wirkt der Stützendruck in B senkrecht auf das Lager, es wird also auch hier in B ausser dem Vertikaldrucke ein Horizontaldruck erzeugt. Der Unterschied gegen die vorige Anordnung liegt darin, dass hier der Horizontaldruck durch das Gewicht der Brücke und ihre Belastung selbst erzeugt wird. Diese Anordnung wurde im Jahre 1878 von Foepl (die neuen Trägersysteme für eiserne Brücken, Leipzig 1878) in Vorschlag gebracht.

Fig. 131.



Ist der rechte Vertikaldruck $= D$, der Neigungswinkel des Lagers gegen die Horizontale $= \alpha$, so ist der Horizontaldruck $H = D \tan \alpha$.

Wir haben nun zunächst die gefährlichste Belastungsweise hinsichtlich des Untergurtes zu bestimmen. Eine Einzellast G im Abstände ξ vom linken Ende erzeugt den rechten Vertikaldruck $D = G \frac{\xi}{l}$, also den Horizontaldruck $H = G \frac{\xi}{l} \tan \alpha$. Für ein Gurtstück, welches auf der linken Seite der Last liegt, ist die Spannung bei der Trägerhöhe h und wenn der entsprechende Knotenpunkt des Obergurtes vom linken Ende den Abstand x hat,

$$S_2 = \frac{D(l-x) - G(\xi-x) - Hh}{h} = \frac{G}{lh} [lx - \xi(x + h \tan \alpha)].$$

Für $\xi = \xi_0$ werde $S_2 = 0$; alsdann ist

$$191. \quad \xi_0 = \frac{lx}{x + h \tan \alpha}.$$

Ist $\xi < \xi_0$, so wird S_2 positiv; ist $\xi > \xi_0$, so wird S_2 negativ.

Für ein Gurtstück, welches auf der rechten Seite der Last liegt, ist

$$S_2 = \frac{D(l-x) - Hh}{h} = \frac{G\xi}{lh} (l-x-h \tan \alpha).$$

Demnach ist S_2 stets positiv, vorausgesetzt, dass $\tan \alpha < \frac{l-x}{h}$.

Hiernach ist die gefährlichste Belastung für den Untergurt die Belastung des Trägers vom linken Ende bis zu $x = \xi_0$.

Für das Eigengewicht wird $D = \frac{1}{2}gl$, $H = \frac{1}{2}gl \tan \alpha$, also

$$192. S_2 = \frac{gx(l-x)}{2h} - \frac{1}{2}gl \tan \alpha.$$

Für die gefährlichste zufällige Belastung wird $D = \frac{px_0^2}{2l}$, $H = \frac{px_0^2}{2l} \tan \alpha$ und hiernach

$$\max(+S_2) = \frac{p}{2lh} [x_0^2(l-x) - l(x_0-x)^2] - \frac{px_0^2}{2l} \tan \alpha.$$

Setzt man obigen Ausdruck für x_0 ein, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$193. \max(+S_2) = + \frac{px^2(l-x-h \tan \alpha)}{2h(x+h \tan \alpha)}.$$

Für die totale Belastung ergibt sich S_2 nach Formel 192, wenn man p für g setzt. Zieht man hiervon $\max(+S_2)$ ab, so erhält man

$$193a. \max(-S_2) = - \frac{plh \tan^2 \alpha}{2(x+h \tan \alpha)}.$$

Für den Parabelträger wird $h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}$, daher mit gleichzeitiger Berücksichtigung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung

$$194. \begin{cases} \max(+S_2) = \frac{gl(l-4h_1 \tan \alpha)}{8h_1} + \frac{pl^2(l^2-4h_1x \tan \alpha)}{8h_1[l^2+4h_1(l-x) \tan \alpha]}, \\ \max(-S_2) = \frac{gl(l-4h_1 \tan \alpha)}{8h_1} - \frac{2pl(l-x)h_1 \tan^2 \alpha}{l^2+4h_1(l-x) \tan \alpha}. \end{cases}$$

Am grössten wird $\max(-S_2)$ für $x=0$. Das absolute Maximum des Druckes im Untergurte ist daher

$$\text{Max}(-S_2) = \frac{gl(l-4h_1 \tan \alpha)}{8h_1} - \frac{2plh_1 \tan^2 \alpha}{l+4h_1 \tan \alpha}.$$

Soll Druck überhaupt nicht entstehen, so muss hiernach

$$195. \tan \alpha \leq \frac{l}{4h_1} \sqrt{\frac{g}{g+p}}$$

sein.

Das Volumen des Untergurtes wird $V = \frac{1}{K} \int_0^l \max(+S_2) dx$;

d. i. mit Anwendung der Integralformeln $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \lognat(a+lx)$

und $\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \lognat(a+bx)$:

$$196. V = \frac{l^2}{8Kh_1} \left[g(l - 4h_1 \tan \alpha) + pl \left\{ 1 - \lognat \left(1 + 4 \frac{h_1}{l} \tan \alpha \right) \right\} \right].$$

Nach der neueren Berechnungsweise ergibt sich

$$196a. V = \frac{l^2}{8h_1} \left[\frac{g}{K_0} (l - 4h_1 \tan \alpha) + \frac{pl}{K_1} \left\{ 1 - \lognat \left(1 + 4 \frac{h_1}{l} \tan \alpha \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{pl}{K_2} \left\{ 4 \frac{h_1}{l} \tan \alpha - \lognat \left(1 + 4 \frac{h_1}{l} \tan \alpha \right) \right\} \right].$$

Hiernach wird das Volumen um so kleiner, je grösser man $\tan \alpha$ macht; sobald man aber $\tan \alpha > \frac{l}{4h_1}$ macht, also im Untergurte Druck zulässt, tritt das Minimum des Volumens ein, wenn $\tan \alpha$ einen gewissen Werth annimmt, der $> \frac{l}{4h_1}$ ist. Das letztere wird indess auch hier nicht zweckmässig sein. Hebt man auch hier die durch das Eigengewicht erzeugte Spannung vollständig auf, macht also $\tan \alpha = \frac{l}{4h_1}$ oder stellt das Lager senkrecht auf die Endtangente des Obergurtes, so wird

$$197. \max(+S_2) = \max(-S_2) = \pm \frac{pl^2(l-x)}{8h_1(2l-x)}.$$

Hiernach nimmt die Spannung vom linken nach dem rechten Ende allmähig ab; grafisch lässt sich die Spannung durch eine Hyperbel darstellen. Die Maximalspannung ist $\frac{pl^2}{16h_1}$, d. i. halb so gross, als bei horizontalem Lager. Das Volumen des Untergurtes wird hier

$$138. V = 0,0384 \frac{pl^3}{Kh_1}$$

oder nach der neueren Berechnungsweise

$$198a. V = 0,0384 \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \frac{pl^3}{h_1},$$

d. i. im ersten Falle 0,307, im zweiten (für $K_1 = 0,45 K_2$) 0,445 mal so gross, als bei der Köpcke'schen Anordnung.

Nimmt man $\tan \alpha$ nach Formel 195 so gross, als es zulässig ist, ohne dass ein Druck eintritt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 g &= 0 \quad 0,125 \quad 0,250 \quad 0,500 \quad 0,750 \quad 1 \cdot q, \\
 \tan \alpha &= 0 \quad 0,304 \quad 0,500 \quad 0,700 \quad 0,866 \quad 1 \cdot \frac{l}{4 h_1}, \\
 V &= 1 \quad 0,733 \quad 0,572 \quad 0,379 \quad 0,194 \quad 0 \cdot \frac{q l^3}{8 K h_1}, \\
 V &= 1,45 \quad 0,872 \quad 0,532 \quad 0,333 \quad 0,163 \quad 0 \cdot \frac{q l^3}{8 K_1 h_1},
 \end{aligned}$$

wobei sich der erste Werth von V auf die gewöhnliche, der zweite auf die neuere Berechnungsweise bezieht. Hiernach würde das Volumen des Untergurtes bezüglich gleich dem $1,00 \ 0,84 \ 0,76 \ 0,76 \ 0,78 \ 1,00$, nach der neueren Berechnungsweise gleich dem $1,45 \ 1,00 \ 0,71 \ 0,67 \ 0,65 \ 1,00$ fachen vom Volumen des Untergurtes des Köpcke'schen Trägers sein. Auf einen Vergleich dieser beiden Konstruktionen in anderer Beziehung wollen wir hier nicht eingehen.

XIII. Kapitel.

Kontinuierliche Träger mit gekrümmten Gurten.

§ 86. **Einleitung.** Wir haben bisher nur die sogenannten einfachen Träger mit gekrümmten Gurten behandelt. Es erübrigt nun noch, die kontinuierlichen Träger, einschliesslich die kontinuierlichen Gelenkträger mit gekrümmten Gurten, zu behandeln. Die im VI. und VII. Kapitel aufgestellten allgemeinen Regeln für die Spannungen behalten natürlich auch hier ihre Giltigkeit. Die daselbst aufgestellten Regeln hinsichtlich der gefährlichsten Belastung, welche einfache Träger voraussetzen, lassen sich aber hier im Allgemeinen nicht mehr verwenden.

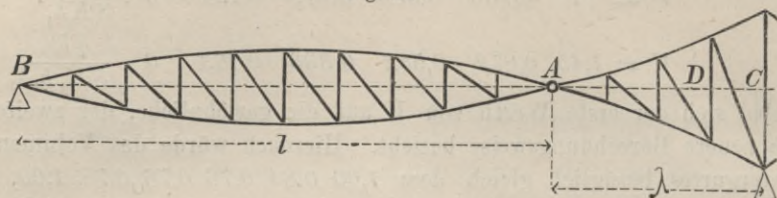
Wir werden die im Folgenden aufzustellenden Regeln möglichst allgemein halten; für die spezielle Anwendung aber werden wir nur kontinuierliche Gelenk-Parabelträger voraussetzen, bei denen die Höhe in einem beliebigen Querschnitte proportional dem in demselben herrschenden Maximalmomente ist. Für die genauen Regeln werden wir nur eintheiliges Gitterwerk voraussetzen; aus dem Früheren ergeben sich indess leicht die für mehrtheiliges Gitterwerk nöthigen Abänderungen.

I. Feld mit Gelenken.

§ 87. **Gefährlichste Belastungsweise.** Wir setzen zunächst ein Feld voraus, in welchem sich ein Gelenk befindet, wenn es ein Endfeld ist, oder zwei Gelenke, wenn es ein Mittelfeld ist. Beide Fälle

laufen auf dasselbe hinaus, da man im ersten Falle die Endstütze als ein Gelenk ansehen kann. Der Theil AB (Fig. 132) zwischen den Gelenken verhält sich vollständig wie ein einfacher Träger und ist daher

Fig. 132.



hier nicht weiter zu berücksichtigen. Wir wollen daher nur den rechten, ausserhalb AB gelegenen Theil AD in Betracht ziehen. Die Länge von AD sei im Folgenden stets $= \lambda$.

1. Gurte. Das Moment in einem beliebigen Querschnitte kann nur negativ sein; das Moment und mit ihm die Spannung der Gurte wird zum Maximum bei totaler Belastung des Theiles AD und des zwischen A und dem fraglichen Querschnitte liegenden Theile AD (Fig. 132). Die Belastung des rechts von D liegenden Theiles hat auf das Moment keinen Einfluss.

Es erübrigt nur noch, für ein System von Einzellasten die Lage desselben zu präzisiren. Wir setzen sogleich voraus, dass die Uebertragung der Last nur mittels Querträger an den Knotenpunkten erfolgen könne. Es bezeichne R die Resultante aller zwischen A und B liegenden Lasten, ξ ihren Abstand von A , R_1 die Resultante der zwischen A und dem linken der beiden Querträger, innerhalb welcher der fragliche Schnitt liegt, liegenden Lasten, ξ_1 ihren Abstand von A , G die Resultante der zwischen beiden Querträgern liegenden Lasten, ξ' ihren Abstand vom linken Querträger, x den Horizontalabstand des Momentenpunktes von A , c den Horizontalabstand des linken Querträgers vom Momentenpunkte und endlich e den Abstand beider Querträger. Alsdann ergibt sich leicht als Ausdruck für das Moment M :

$$199. \quad M = -R \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) x - R_1 (x - \xi_1) - G \left(1 - \frac{\xi'}{e}\right) c.$$

Rückt das System der Einzellasten um $\Delta \xi$ nach rechts, so ist die Veränderung ΔM von M :

$$\Delta M = - \left(\frac{R x}{l} - R_1 - G \frac{c}{e} \right) \Delta \xi.$$

Hiernach muss, damit M möglichst gross werde, das System der Lasten so lange nach rechts geschoben werden, als noch

$$200. \quad R_1 + G \frac{c}{e} < R \frac{x}{l}$$

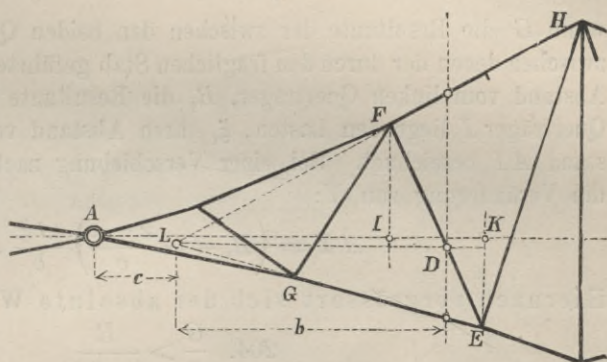
ist. Aus dem Ausdrucke für ΔM folgt ferner, dass eine der Einzellasten am Gelenke A oder an einem der beiden Querträger liegen müsse. Da der Einfluss einer Einzellast nach Formel 199 um so grösser ist, je näher sie dem Gelenke liegt, möge sie nun rechts oder links von demselben liegen, so sollen die schwersten Lasten in der Nähe des Gelenkes konzentriert sein.

2. Gitterwerk. Es handle sich um einen Gitterstab EF (Fig. 133); die Vertikalkomponente der Spannung P desselben ist die von uns mit Y bezeichnete Vertikalkraft. Die Verlängerung der Gurtstücke EG und FH , welche von einem durch EI gelegten Schnitt getroffen werden, mögen sich im Punkte L schneiden. Liegt eine Last innerhalb AB , so wird von dieser

Fig. 133.

in A eine vertikal abwärts wirkende Kraft erzeugt, welche in Beziehung auf L links dreht (vorausgesetzt, dass L stets rechts von A liegt), also ein positives Y erzeugt.

Liegt eine Last rechts von A , so wird sie in Beziehung auf L nach links oder rechts drehen, also ein positives oder negatives Y erzeugen; je nachdem sie auf der linken oder rechten Seite von L liegt. Hieraus folgt sofort:



Die Vertikalkraft Y wird zum positiven Maximum, wenn der Theil AB ganz und ausserdem der Theil AL belastet, zum negativen Maximum, wenn der Theil AB gar nicht, wohl aber der Theil LD belastet ist.

Handelt es sich um ein System von Einzellasten, so ergibt sich, wenn wir die obigen Bezeichnungen beibehalten und ausserdem noch die Längen LD und LA mit b und c bezeichnen, für die Belastung der Theile AB und AL nach Formel 6 (Seite 100):

$$201. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \frac{c}{b} + R_1 \frac{c - \xi_1}{b}.$$

Verschiebt sich das System um $\Delta \xi$ nach rechts, so wird die Veränderung ΔY von Y :

$$\Delta Y = \left(R \frac{c}{l} - R_1\right) \frac{\Delta \xi}{b}.$$

Hiernach vergrössert sich Y , wenn $R_1 < R \frac{c}{l}$ oder wenn

$$202. \quad \frac{R_1}{c} < \frac{R}{l}$$

ist. Das durch die Gleichung 201 ausgedrückte Gesetz wird nur geändert, wenn eine Last das Gelenk A überschreitet; da ausserdem Y in Beziehung von ξ und ξ_1 vom ersten Grade ist und der Einfluss einer Last um so grösser ist, je kleiner ξ und ξ_1 ist, so soll eine der Einzelasten am Gelenke A liegen und die schwersten Lasten sollen in der Nähe dieses Gelenkes konzentriert sein.

Für die Belastung des Theiles LD dagegen wird

$$203. \quad Y = -R_1 \frac{\xi_1 - c}{b} - G \frac{e - \xi'}{c} \frac{x - c}{b},$$

wenn G die Resultante der zwischen den beiden Querträgern I und K , zwischen denen der durch den fraglichen Stab geführte Schnitt liegt, ξ' ihren Abstand vom linken Querträger, R_1 die Resultante der links vom linken Querträger I liegenden Lasten, ξ_1 ihren Abstand von A und x den Abstand AI bezeichnet. Bei einer Verschiebung nach links um $\Delta \xi$ wird die Veränderung von Y :

$$\Delta Y = \left(R_1 - G \frac{x - c}{e} \right) \frac{\Delta \xi}{b}.$$

Hiernach vergrössert sich der absolute Werth von Y , wenn

$$204. \quad \frac{G}{e} > \frac{R}{x - c}$$

ist. Ausserdem folgt aus der Gleichung 203, dass eine Last an einem der beiden Querträger liegen muss und dass die schwersten Lasten in der Nähe des fraglichen Stabes konzentriert sein müssen.

§. 88. Bestimmung der Spannungen.

1. **Gurte.** Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich, da der in A wirkende Druck $= \frac{1}{2} q l$, die auf AD wirkende Last $= q x$ ist, $M = -\frac{1}{2} q l \cdot x - q x \cdot \frac{x}{2}$, d. i.

$$205. \quad M = -\frac{1}{2} q x (l + x).$$

Für ein System von Einzellasten kann man die Berechnung von M nach der Gleichung 199 des vorigen Paragraphes vornehmen, indem man dieselbe für jede einzelne Last anwendet. Grafisch kann man das Moment in derselben Weise bestimmen, wie für einen einfachen Träger und ist hier nur die Schlusslinie über ihr rechtes Ende hinaus zu verlängern. Die früher (§. 45 und 48) gezeigte Konstruktion für die Bestimmung der Gurtspannungen bleibt hier natürlich gültig.

2. Gitterwerk. Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich bei totaler Belastung

$$206. \quad Q = -\frac{1}{2} q (l + 2x), \quad M = -\frac{1}{2} q x (l + x).$$

Der Einfluss des Eigengewichtes ergibt sich hieraus, indem man g für q setzt. Hinsichtlich der zufälligen Last wird für das negative Maximum von M_1 , d. i. bei Belastung der Strecke LD :

$$207. \quad Q = -p (x - c), \quad M = -\frac{1}{2} p (x - c)^2.$$

Für das positive Maximum, d. i. für die Belastung der Strecken AB und AL , ergibt sich Q und M durch Subtraktion der oben aufgestellten Werthe von den für totale Belastung giltigen Werthen, d. i.

$$208. \quad Q = -\frac{1}{2} p (l + c), \quad M = -\frac{1}{2} p (lx + 2cx - c^2).$$

Für ein System von Einzellasten kann die Berechnung nach den Formeln 201 und 203 erfolgen. Auch die grafische Bestimmung von Y ist mit Hilfe des Seilpolygones leicht durchzuführen. Entsprechen für die ungünstigste Lage des Lastensystemes bezüglich des positiven Maximums von Y die

Fig. 134.

Horizontalprojektionen von $A'B'$ und $A'L'$ (Fig. 134) den Längen AB und AL , so ist das

Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf den Punkt $L = L'L'' \cdot H$, wenn H die Poldistanz bedeutet, also:

$$\max(+Y) = \frac{L'L'' \cdot H}{b}.$$

Macht man daher die Horizontalprojektion von $L'D$ und $L'E$ bezüglich $= b$ und H und zieht EY parallel zu DL'' , so ist $DY = Y$.

Es entspreche ferner für die ungünstigste Lage des Lastensystemes hinsichtlich des negativen Maximums von Y die Lage der Punkte L' (Fig. 135) des Seilpolygones dem Punkte L . Liegen zwischen den beiden Querträgern, innerhalb welcher der durch den fraglichen Stab geführte Schnitt liegt, keine Lasten, so verlängere man diejenige Polygonseite, welche von diesem Schnitte getroffen wird, bis zum Durchschnittspunkte L''' mit der durch L' gehenden Vertikalen. Alsdann ist das

Fig. 135.

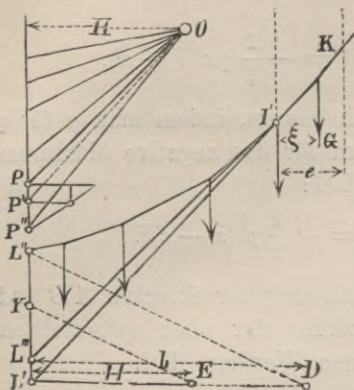
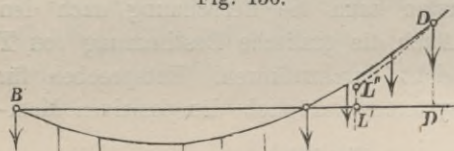


Fig. 136.



schnittspunkte L'' (Fig. 136) der durch L gehenden Vertikalen. Alsdann ist $L'L'' \cdot H$ das Moment in Beziehung auf den Punkt L , also $Y = L'L'' \cdot \frac{H}{b}$, so dass sich Y aus $L'L''$ leicht in der oben angewendeten Weise konstruieren lässt.

§. 89. Näherungsbestimmung der Spannungen für den Parabelträger. Für den Parabelträger wird nach Formel 205 und wenn man berücksichtigt, dass das grösste Moment für den zwischen den Gelenken liegenden Theil $AB = \frac{1}{8} q l^2$ ist, $h : h_1 = \frac{1}{2} q x (l + x) : \frac{1}{8} q l^2$, wenn h_1 die Maximalhöhe des Theiles AB bezeichnet. Demnach wird:

$$209. \quad h = 4 \frac{x}{l} \left(1 + \frac{x}{l} \right) h_1,$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4(l + 2x) h_1}{l^2}.$$

1. Gurte. Für die Gurte ergibt sich dieselbe Regel, wie für den einfachen Parabelträger, nämlich:

$$210. \quad S_1 = + \frac{q l^2}{8 h_1} \sec \sigma, \quad S_2 = - \frac{q l^2}{8 h_1} \sec \tau.$$

Moment in Beziehung auf $L = L'L'' \cdot H$. Liegt eine Last $G = PP''$ innerhalb der beiden Querträger, so mache man im Kraftpolygone $PP' = G \left(1 - \frac{\xi}{e} \right)$, was durch Konstruktion leicht erfolgen kann und ziehe $I'L'$ nicht parallel OP , wie vorhin, sondern parallel OP' ; alsdann ist das Moment in Beziehung auf $L = L'L'' \cdot H$. Eine entsprechende Konstruktion ergibt sich, wenn mehrere Lasten zwischen beiden Querträgern liegen. Macht man $L'D' = b$, $L'E = H$ und zieht EY parallel $D'L''$, so ist $L'Y = Y$.

Hinsichtlich des Eigengewichtes verlängert man diejenige Seite des Seilpolygones, welche von dem durch den fraglichen Stab gelegten Schnitt getroffen wird, bis zum Durch-

Nur ist hier der Obergurt gezogen, während dort das Umgekehrte stattfindet. In Fig. 137 ist die Spannung, beispielsweise die Spannung eines geraden Untergrundes, grafisch dargestellt.

2. Gitterwerk. Da für eine totale Belastung $\frac{M}{h}$ konstant ist, so wird für diese $Y=0$. Dem Eigengewichte entspricht also ebenfalls der Werth $Y=0$. Das negative

Maximum von Y , welches für die Belastung von LD eintritt, wird nach der Regel $Y=Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}$ unter Berücksichtigung der Ausdrücke 207:

$$\max(-Y) = -p(x-c) + \frac{1}{2} p(x-c)^2 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx}.$$

Da bei totaler Belastung $Y=0$ ist, so wird $\max(+Y) = -\max(-Y)$. Nun aber ist $\frac{h}{x-c} = \frac{dx}{dh}$ oder $\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{x-c}$, mithin wird

$$\max(+Y) = \pm \frac{1}{2} p(x-c),$$

oder, da $x-c = h \frac{dx}{dh} = \frac{x(l+x)}{l+2x}$ ist,

$$211. \max(+Y) = \pm \frac{px(l+x)}{2(l+2x)}.$$

Hiernach lässt sich Y durch eine Hyperbel (Fig. 138) darstellen, welche sich leicht aus der Fortsetzung der Parabel, die das Y für den Theil AB darstellt, ableiten lässt.

Auf eine genaue Bestimmung der Spannungen, welche konform dem §. 59 durchzuführen wäre, wollen wir nicht eingehen.

Fig. 137.

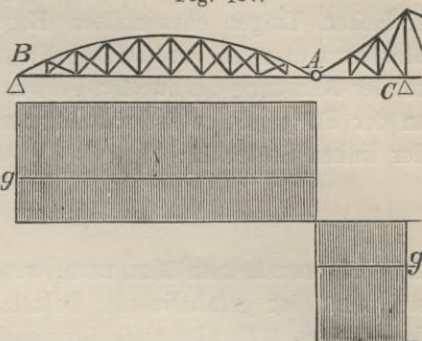
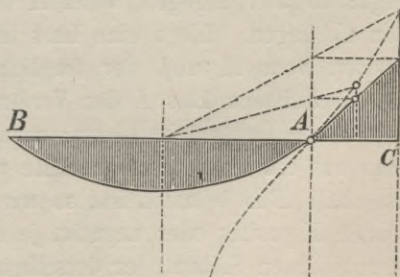


Fig. 138.



II. Endfeld ohne Gelenk.

§. 90. **Gefährlichste Belastungsweise.** Wir setzen jetzt ein Endfeld und zwar das erste Feld voraus (Fig. 139). Die Länge desselben sei l_1 .

1. Gurte. Das Moment M wird in einem beliebigen Querschnitte zum positiven Maximum bei totaler Belastung des ersten Feldes und bei

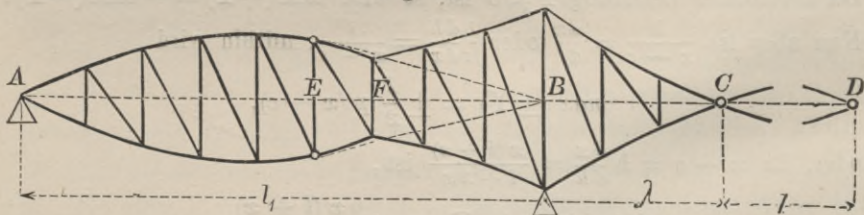
Nichtbelastung des zweiten Feldes, so dass hier sämmtliche für einen einfachen Träger entwickelten Regeln gültig bleiben. Zum negativen Maximum dagegen wird M bei Nichtbelastung des ersten Feldes und bei totaler Belastung des zweiten Feldes. Bezeichnet man mit M_1 das Moment an der Stütze B , so ist das Moment M im beliebigen Abstände x von der linken Stütze A :

$$M = M_1 \frac{x}{l_1}.$$

M wird sonach zum Maximum, wenn M_1 zum Maximum wird; die Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise für ein beliebiges Moment des Theiles BC , also auch für das Moment M_1 , erfolgte bereits in §. 87.

2. Gitterwerk. Die Vertikalkraft Y wird positiv, wenn ein nach rechts fallender Stab gezogen ist. Liegt eine Last rechts vom fraglichen Stabe, so wird hiernach Y positiv, wenn die linke Stütze A und der fragliche Stab auf derselben Seite des Durchschnittspunktes L der Ver-

Fig. 139.



längerungen der vom fraglichen Querschnitte getroffenen Gurtstücke liegt; negativ dagegen, wenn A und der Stab auf verschiedenen Seiten von L liegen. Liegt eine Last links vom fraglichen Stabe, so wird Y positiv, wenn A und der fragliche Stab auf verschiedenen Seiten des Durchschnittspunktes L der Verlängerungen der vom fraglichen Schnitte getroffenen Gurtstücke liegen; negativ dagegen, wenn B und der fragliche Stab auf ein und derselben Seite von L liegen. Wenn das zweite Feld innerhalb BD belastet ist, so wird der Stützendruck in A negativ und sonach Y positiv oder negativ, je nachdem A und der fragliche Stab auf verschiedenen Seiten oder derselben Seite von L liegen.

Hiernach muss man zur speziellen Feststellung der gefährlichsten Belastungsweise das Feld in drei Theile theilen; im I. Theile AE schneiden sich die Verlängerungen der Gurte ausserhalb AB ; im II. Theile konvergiren die Verlängerungen der Gurte nach rechts und schneiden sich innerhalb AB , und im III. Theile FB konvergiren die Verlängerungen der Gurte nach links und schneiden sich ebenfalls innerhalb AB . Nach dem vorhin Gesagten stellt sich nun die gefährlichste Belastung für die einzelnen Theile folgendermassen heraus:

Theil	Positives Maximum von Y			Negatives Maximum von Y		
	linker Theil	rechter Theil	II. Feld	linker Theil	rechter Theil	II. Feld
I. Theil	leer	belastet	leer	belastet	leer	belastet
II. Theil	belastet	belastet	leer	leer	leer	belastet
III. Theil	leer	leer	belastet	belastet	belastet	leer

Wir haben aber nun noch die genaue Lage eines Systemes von Einzellasten zu präzisiren.

I. Theil. Für den Fall des positiven Maximums von Y bezeichne R die Resultante aller Lasten, ξ ihren Abstand von der Stütze A , G die Resultante der zwischen den beiden Querträgern, zwischen denen der fragliche Schnitt liegt, liegenden Lasten, ξ' ihren Abstand vom linken Querträger, x den Abstand des linken Querträgers von A , c den Abstand des Durchschnittspunktes der verlängerten Gurtstücke von A . Nach Formel 6 (Seite 100) ergibt sich, wenn b die dortige Bedeutung behält,

$$212. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi}{l_1} \right) \frac{c}{b} - G \left(1 - \frac{\xi'}{e} \right) \frac{c+x}{b}.$$

In der früheren Weise folgt hieraus, dass das System soweit nach links zu schieben ist, als noch

$$213. \quad \frac{G}{R} < \frac{ce}{l_1(c+x)}$$

ist. Dieselbe Regel gilt für das negative Maximum von Y , wenn man die beiden Stützpunkte A und B mit einander vertauscht; hier muss aber ausserdem das zweite Feld derart belastet sein, dass das Moment M_1 an der Stütze B zum Maximum wird. Im ersten Felde müssen in beiden Fällen die schwersten Lasten in der Nähe des fraglichen Schnittes konzentriert sein.

II. Theil. Für das positive Maximum von Y ist das ganze Feld belastet anzunehmen. Bezeichnen wir die Resultante aller Lasten mit R , ihren Abstand von A mit ξ , die Resultante aller links vom linken Querträger liegenden Lasten mit R_1 , ihren Abstand von A mit ξ_1 , während G , ξ' , x , c , e die vorige Bedeutung beibehalten, so wird

$$214. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi}{l_1} \right) \frac{c}{b} - R_1 \frac{c - \xi_1}{b} - G \left(1 - \frac{\xi'}{e} \right) \frac{c - x}{b}.$$

Hiernach ist das System soweit nach links zu schieben, als noch

$$215. \quad R_1 + G \frac{c - x}{e} < R \frac{c}{l_1}$$

ist. Die schwersten Lasten sind in der Nähe des fraglichen Schnittes zu konzentriren.

Für das negative Maximum von Y ist nur das zweite Feld derart zu belasten, dass das Moment M_1 an der Stütze B zum Maximum wird.

III. Theil. Für das positive Maximum von Y ist nur das zweite Feld so zu belasten, dass das Moment M_1 an der Stütze B zum Maximum wird. Für das negative Maximum ist das ganze erste Feld zu belasten; behalten wir die für den II. Theil gebrauchten Bezeichnungen bei, so wird

$$216. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi}{l_1}\right) \frac{c}{b} + R_1 \frac{c - \xi}{b} - G \left(1 - \frac{\xi}{e}\right) \frac{c - x}{b}.$$

Hiernach ist das Lastensystem soweit nach links zu schieben, als noch

$$217. \quad R \frac{c}{l_1} + G \frac{c - x}{e} < R_1$$

ist. Die schwersten Lasten sind in der Nähe des fraglichen Schnittes zu konzentriren.

§. 91. Bestimmung der Spannungen.

1. Gurte. Für die im vorigen Paragrafe angegebene Belastungsweise ergibt sich für eine gleichmässige Belastung

$$218. \quad \begin{cases} \max (+ M) = \frac{1}{2} g x (l_1 - c_1 - x) + \frac{1}{2} p x (l_1 - x), \\ \max (- M) = \frac{1}{2} g x (l_1 - c_1 - x) - \frac{1}{2} p c_1 x, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\lambda (l + \lambda)}{l_1} = c_1$$

setzt, worin λ die Länge des Theiles BC (Fig. 139) bedeutet. Für ein System von Einzellasten ist die Bestimmung von $\max (+ M)$ dieselbe, wie für einen einfachen Träger. Für $\max (- M)$ ist nur das Maximum des Momentes M_1 an der Stütze B zu bestimmen; alsdann ist $\max (- Y) = \frac{x}{l_1} M_1$.

2. Gitterwerk. Wir nehmen zunächst eine gleichmässige Belastung an. Für das Eigengewicht ergibt sich

$$219. \quad \begin{cases} Q = \frac{1}{2} g (l_1 - c_1 - 2x), \\ M = \frac{1}{2} g x (l_1 - c_1 - x). \end{cases}$$

Für die zufällige Last ergeben sich unter Berücksichtigung der im vorigen Paragrafe bestimmten Belastungsweise folgende Regeln:

1. Theil. Für $\max (+ Y)$ wird

$$220. \quad Q = \frac{p (l_1 - x)^2}{2 l_1}, \quad M = \frac{p x (l_1 - x)^2}{2 l_1};$$

für $\max(-Y)$ dagegen

$$221. \quad Q = -\frac{p(l_1 c_1 + x^2)}{2l_1}, \quad M = -\frac{p(l_1 c_1 - l_1 x + x^2)}{2l_1}.$$

II. Theil. Für $\max(+Y)$ wird

$$222. \quad Q = \frac{1}{2} p(l_1 - 2x), \quad M = \frac{1}{2} p x(l_1 - x);$$

für $\max(-Y)$ dagegen

$$223. \quad Q = -\frac{1}{2} p c_1, \quad M = -\frac{1}{2} p c_1 x.$$

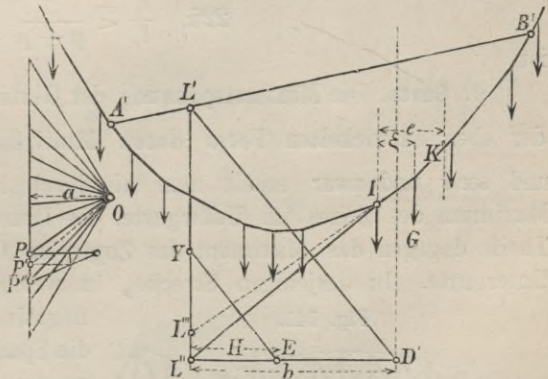
III. Theil. Für $\max(+Y)$ gelten dieselben Ausdrücke für Q und M , als für $\max(-Y)$ im II. Theile und umgekehrt.

Ist ein System von Einzellasten gegeben, so können zur Berechnung die Formeln 212, 214 und 216 angewendet werden. Die grafische Bestimmung bleibt hinsichtlich des I. Theiles dieselbe, wie für den einfachen Träger; nur kommt für $\max(-Y)$ noch die Bestimmung des Maximums von M_1 nach §. 88 hinzu.

Für den II. und III. Theil lässt sich bei totaler Belastung grafisch leicht das Moment in Beziehung auf den Punkt L bestimmen. Entsprechen nämlich die Punkte A', B'

Fig. 140.

des Seilpolygones (Fig. 140) den Stützen A, B für die nach dem vorigen Paragraphen zu bestimmende gefährlichste Belastungsweise, L' dem Durchschnittspunkte L der Verlängerungen der geschnittenen Gurtstücke, so verlängere man für den Fall, dass sich zwischen den beiden Querträgern,



zwischen denen der fragliche Schnitt liegt, keine Last befindet, diejenige Polygonseite, welche von dem fraglichen Schnitte getroffen wird, bis zum Durchschnitte L'' mit der durch L' gehenden Vertikalen. Alsdann ist das Moment in Beziehung auf den Punkt $L = L'L'' \cdot H$. Liegt dagegen zwischen den beiden Querträgern eine Last $G = PP''$, so mache man im Kraftpolygone $PP' = G \left(1 - \frac{\xi}{e}\right)$ und lege durch Y eine Parallele zu OP' , welche die durch L' gehende Vertikale in L'' schneidet; alsdann ist das Moment in Beziehung auf $L = L'L'' \cdot H$, also $Y = \frac{H}{b} L'L''$.

Für die Belastung des zweiten Feldes ist, wenn M_1 das nach §. 88 zu konstruierende Maximalmoment an der Stütze B bezeichnet, $Y = \frac{M_1 c}{l_1 b}$: dieser Ausdruck lässt sich ebenfalls leicht konstruieren.

§. 92. Näherungsbestimmungen für den Parabelträger.

Nimmt man die Höhe h proportional dem Maximalmomente an, so wird für den I. und II. Theil

$$224. \quad h = 4 h_1 \frac{x}{l^2} \left[\frac{g}{q} (l_1 - c_1 - x) + \frac{p}{q} (l_1 - x) \right],$$

$$\frac{dh}{dx} = 4 \frac{h_1}{l^2} \left[\frac{g}{q} (l_1 - c_1 - 2x) + \frac{p}{q} (l_1 - 2x) \right]$$

und für den III. Theil

$$224a. \quad h = 4 h_1 \frac{x}{l^2} \left[-\frac{g}{q} (l_1 - c_1 - x) + \frac{p}{q} c_1 \right],$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{4 h_1}{l^2} \left[-\frac{g}{q} (l_1 - c_1 - 2x) + \frac{p}{q} c_1 \right],$$

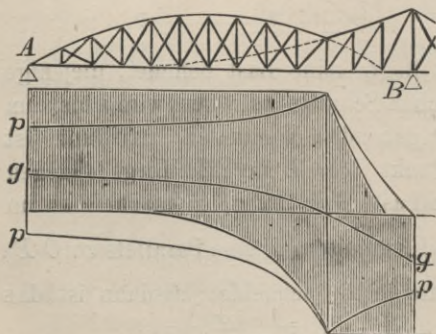
wenn h_1 die Höhe des zwischen den beiden Gelenken liegenden Parabelträgers bezeichnet. Für $x = l_1 - c_1$ ergibt sich die Höhe nach beiden Formeln gleich. Es ergibt sich ferner leicht, dass der II. Theil ganz in Wegfall kommt, wenn

$$225. \quad \frac{c_1}{l_1} \leq \frac{g}{g+p}$$

ist.

1. Gurte. Die Maximalspannung der Gurte erhält man bei der Wahl der eben entwickelten Form durch Multiplikation von $\frac{q l^2}{8 h_1}$ mit $\sec \sigma$ und $\sec \tau$ und zwar erhält man hierdurch im I. und II. Theile das Maximum des Zuges im Untergurte, des Druckes im Obergurte, im III. Theile dagegen das Maximum des Zuges im Obergurte, des Druckes im Untergurte. In derjenigen Strecke, in welcher M sowohl positiv als negativ werden kann, können aber die Spannungen auch das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Man kann diese Spannungen leicht durch die allgemeinen Regeln $S = -\frac{M}{h} \sec \sigma$, $S = +\frac{M}{h} \sec \tau$ bestimmen. In Fig. 141 sind die Spannungen eines geraden Untergurtes grafisch dargestellt.

Fig. 141.



2. Gitterwerk. Hier erscheint eine Trennung in den Einfluss

des Eigengewichtes und der zufälligen Last rathsam.

a. Eigengewicht. I. und II. Theil. Substituirt man die Ausdrücke 219 und 224 in den Ausdruck $Y = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}$, so ergibt sich

$$226. \quad Y = - \frac{g p c_1 x}{2 [g (l_1 - c_1 - x) + p (l_1 - x)]} = - \frac{2 g p c_1 h_1 x^2}{q l^2 h}.$$

Für $x = 0$ wird $Y = 0$; für $x = l_1 - c_1$, d. i. am Uebergange in den III. Theil, wird $Y = -\frac{1}{2} g (l_1 - c_1)$.

III. Theil. Ebenso ergibt sich für den III. Theil

$$227. \quad Y = - \frac{g p c_1 x}{2 [-g (l_1 - c - x) + p c_1]} = - \frac{2 g p c_1 h_1 x^2}{q l^2 h}.$$

b. Zufällige Last. I. Theil. Es ergibt sich

$$234. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max (+Y) = + \frac{p q x (l_1 - x)^2}{2 l_1 [g (l_1 - c_1 - x) + p (l_1 - x)]} \\ \quad \quad \quad = + \frac{2 p h_1 x^2 (l_1 - x)^2}{l^2 h}, \\ \max (-Y) = - \frac{p x [p l_1 c_1 + q (l_1 - x)^2]}{2 l_1 [g (l_1 - c_1 - x) + p (l_1 - x)]} \\ \quad \quad \quad = - \frac{2 p h_1 x [p l_1 c_1 + q (l_1 - x)^2]}{q l^2 h}. \end{array} \right.$$

II. Theil. Hier wird

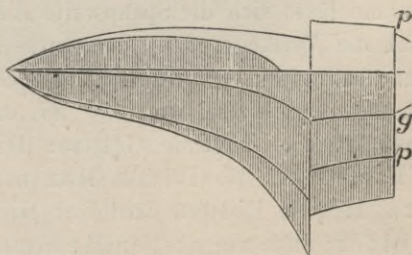
$$228. \quad \max (+Y) = + \frac{2 g p c_1 h_1 x^2}{q l^2 h}, \quad \max (-Y) = - \frac{2 p c_1 h_1 x^2}{l^2 h}.$$

III. Theil. Hier wird

$$229. \quad \max (+Y) = + \frac{2 g p c_1 h_1 x^2}{q l^2 h}, \quad \max (-Y) = - \frac{2 p c_1 h_1 x^2}{l^2 h}.$$

Sonach verhalten sich im II. und III. Theile das Y für das Eigengewicht, das positive und negative Maximum von Y für die zufällige Last wie $-g : +g : -(g + p)$. Für die Wirkung beider Lasten muss sonach $\max (+Y) = 0$ sein, welche Eigenschaft dieser Theil des Trägers mit dem Hyperbelträger gemein hat.

Fig. 142.



In Fig. 142 ist hiernach Y grafisch dargestellt und zwar für einen Träger (Fig. 141), bei welchem der II. Theil fehlt.

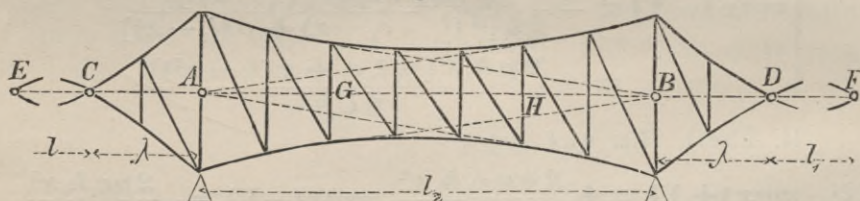
III. Mittelfeld ohne Gelenk.

§. 93. **Gefährlichste Belastungsweise.** Wir setzen schliesslich ein Mittelfeld eines Gelenkträgers, welches kein Gelenk enthält, voraus. Die Länge dieses Feldes sei l_2 .

1. **Gurte.** Das Moment wird zum positiven Maximum, wenn das Feld belastet ist, die anstossenden Felder unbelastet sind; zum negativen Maximum dagegen, wenn das fragliche Feld gar nicht, die anstossenden Felder total belastet sind. Im ersten Falle behalten hinsichtlich eines Systemes von Einzellasten die für den einfachen Träger entwickelten Regeln ihre Giltigkeit. Für den zweiten Fall ist die Belastung der anstossenden Felder nach §. 87 so vorzunehmen, dass die Momente an den beiden Stützen des fraglichen Feldes zum Maximum werden.

2. **Gitterwerk.** Die Gurte können hier aus zwei konkaven Theilen und einem konvexen Theile bestehen; in der Regel aber wird man durch

Fig. 143.



eine entsprechende Wahl des Verhältnisses der Spannweiten den konkaven Theil zu beseitigen suchen, so dass wir nur das Vorhandensein konkaver Gurte (Fig. 143) voraussetzen wollen, obwohl eine allgemeine Behandlung auf keine Schwierigkeiten stossen würde. Unter dieser Annahme lässt sich die Spannweite AB in drei Theile zerlegen, derart, dass sich die Verlängerungen der Gurte im I. und III. Theile AG und BH innerhalb AB ; im mittleren Theile GH dagegen ausserhalb AB schneiden. In derselben Weise, wie in §. 87, ergeben sich für die ungünstigste Belastungsweise folgende Gesetze: Die Vertikalkraft Y wird im I. Theile zum positiven Maximum bei totaler Belastung des fraglichen Feldes und bei Nichtbelastung der anstossenden Felder; zum negativen Maximum dagegen bei Nichtbelastung des fraglichen Feldes und bei totaler Belastung der angrenzenden Felder.

Im mittleren Theile wird Y zum positiven Maximum bei Belastung des rechten Theiles des fraglichen Feldes (vom fraglichen Querschnitte aus), bei totaler Belastung des linken und bei Nichtbelastung des rechten angrenzenden

Feldes; zum negativen Maximum bei der entgegengesetzten Belastung.

Wir haben nun aber noch die bestimmte Lage eines Systemes von Einzellasten festzustellen.

I. Theil. Es bezeichne G die Resultante der zwischen den beiden Querträgern, zwischen denen der fragliche Schnitt liegt, liegenden Lasten, ξ' ihren Abstand vom linken Querträger, R die Resultante sämtlicher im fraglichen Felde liegenden Lasten, ξ ihren Abstand von der linken Stütze A , R_1 die Resultante aller links vom linken Querträger liegenden Lasten, ξ_1 ihren Abstand von der linken Stütze A , endlich c den Abstand des Durchschnittspunktes der Verlängerungen der geschnittenen Gurtstücke von A . Alsdann ergibt sich

$$230. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi'}{l}\right) \frac{c}{b} - R_1 \frac{c - \xi}{b} - G \left(1 - \frac{\xi'}{e}\right) \frac{c - x}{b}.$$

Hieraus ergibt sich in der bekannten Weise, dass Y beim Verschieben des Lastensystemes nach links wächst, so lange

$$231. \quad R_1 + G \frac{c - x}{c} < R \frac{c}{l}$$

ist und dass die schwersten Lasten in der Nähe des fraglichen Stabes zu konzentriren sind.

Das negative Maximum von Y tritt ein, wenn die Nachbarfelder so belastet sind, dass die Momente an den Stützen A und B zum negativen Maximum werden.

Mittlerer Theil. Behalten wir diese Bezeichnungen bei, so wird für die Belastung des rechten Theiles des fraglichen Feldes

$$232. \quad Y = R \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \frac{c}{b} + G \left(1 - \frac{\xi}{e}\right) \frac{c - x}{b}.$$

Hieraus folgt, dass das positive Y beim Verschieben des Lastensystemes nach links wächst, so lange

$$233. \quad G \frac{c - x}{e} < R \frac{c}{l}$$

ist und dass die schwersten Lasten in der Nähe des fraglichen Stabes liegen sollen. Ausserdem ist das linke Nachbarfeld so zu belasten, dass das Moment an der Stütze A zum negativen Maximum wird.

Der symmetrischen Anordnung wegen ist es nicht nöthig, auch noch auf die gefährlichste Belastungsweise hinsichtlich der negativen Vertikalskraft einzugehen.

§. 94. Bestimmung der Spannungen.

1. Gurte. Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich unter Berücksichtigung der im vorigen Paragrafe festgestellten Belastungsweise:

$$234. \begin{cases} \max(+M) = -\frac{1}{2}g[l_2c_2 - x(l_2 - x)] + \frac{1}{2}p x(l_2 - x), \\ \max(-M) = -\frac{1}{2}g[l_2c_2 - x(l_2 - x)] + \frac{1}{2}p l_2c_2, \end{cases}$$

worin $\lambda(l + \lambda) = l_2c_2$ gesetzt ist.

Handelt es sich um ein System von Einzellasten, so bleiben hinsichtlich des positiven Momentes die für den einfachen Träger aufgestellten Regeln gültig. Hinsichtlich des negativen Momentes ist für eine totale Belastung der benachbarten Felder das Moment M_1 an jeder der beiden Stützen A und B zu bestimmen; das Moment an einem beliebigen Querschnitte des fraglichen Feldes ist alsdann konstant $= M_1$.

2. Gitterwerk. Unter Annahme einer gleichmässigen Belastung ergibt sich zunächst für das Eigengewicht:

$$235. \begin{cases} Q = \frac{1}{2}g(l_2 - 2x), \\ M = \frac{1}{2}g[l_1c_2 - (l_2 - x)]. \end{cases}$$

Hinsichtlich der zufälligen Last haben wir die im vorigen Paragrafe charakterisirten Theile zu unterscheiden.

I. Theil. Für das positive Maximum von Y ergibt sich

$$236. Q = \frac{1}{2}p(l_2 - 2x), \quad M = \frac{1}{2}p x(l_2 - x);$$

für das negative Maximum von Y dagegen

$$237. Q = 0, \quad M = -\frac{1}{2}p l_2c_2.$$

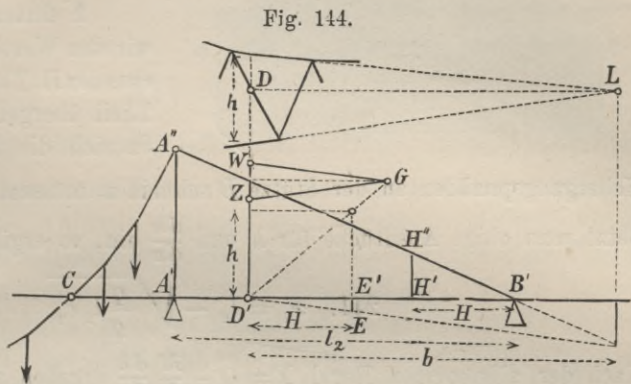
II. Theil. Für das positive Maximum von Y ergibt sich:

$$238. \begin{cases} Q = \frac{p}{2l_2} [l_2 - x]^2 + l_2c_2, \\ M = \frac{p}{2l_2} (l_2 - x) [x(l_2 - x) - l_2c_2]. \end{cases}$$

Hinsichtlich des negativen Maximums ist x mit $l_2 - x$, $+Q$ mit $-Q$ zu vertauschen.

Handelt es sich um ein System von Einzellasten, so können zur Berechnung die Formeln 230 und 232 benützt werden. Was in diesem Falle die grafische Methode anlangt, so kann für den ersten Theil

bei totaler Belastung des fraglichen Feldes das in §. 91 (Fig. 140) gezeigte Verfahren ohne Weiteres in Anwendung kommen; bei Nichtbelastung der fraglichen und totalen Belastung der benachbarten Felder ist $Y = -\frac{M_1}{b}$, wenn M_1 das Maximalmoment an den Stützen bezeichnet; dieser Ausdruck aber ist leicht zu konstruieren. Für den mittleren Theil könnte diese Methode zwar auch in Anwendung kommen; indess kann hier der Durchschnittspunkt L in eine so grosse Entfernung fallen, dass die in §. 45 gezeigten Methoden zweckmässiger erscheinen. Hinsichtlich des Einflusses der Belastung eines Nachbarfeldes ist hier nur zu berücksichtigen, dass das Seilpolygon aus zwei Geraden $B'A$ und $B'A''$ (Fig. 144) besteht; unter Anwendung der in §. 91 gezeigten Methode erscheint Y als die Gerade EE' , unter Anwendung der in §. 45 gezeigten Methode dagegen als die Differenz von $H'H''$ und WZ , wobei GW und GZ den geschnittenen Gurtstücken parallel sind.



§. 95. Näherungsbestimmung für den Parabelträger. Nimmt man die Höhe h proportional dem Maximalmomente an, so wird

$$239. \quad h = \frac{4 h_1}{l^2} \left[l_2 c_2 - \frac{g}{q} x (l_2 - x) \right],$$

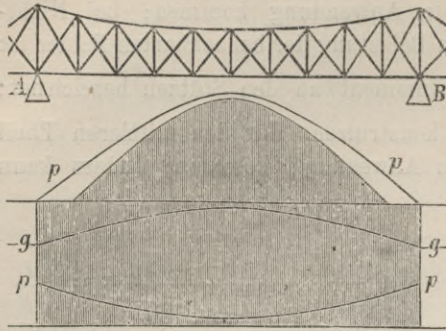
$$\frac{d h}{d x} = - \frac{4 g}{q} \frac{l_2 - 2 x}{l^2} h_1,$$

wenn wiederum h_1 die Maximalhöhe eines zwischen zwei Gelenken liegenden Theiles, welcher das Moment $\frac{1}{8} q l^2$ entspricht, bedeutet.

1. Gurte. Der Maximalzug im Obergurte ist $+\frac{q l^2}{8 h_1} \sec \sigma$, der Maximaldruck im Untergurte $-\frac{q l^2}{8 h_1} \sec \tau$. Der Maximaldruck im Obergurte ist

$$240. \quad \max (-S) = -\frac{q l^2}{8 h_1} \frac{g l_2 c_2 - q x (l_2 - x)}{q l_2 c_2 - g x (l_2 - x)} \sec \sigma.$$

Fig. 145.



Für den Maximalzug im Untergurte ist $\sec \sigma$ mit $\sec \tau$ zu vertauschen. In Fig. 145 ist die Spannung eines geraden Untergurtes grafisch dargestellt; die Kurve für $\max(+S)$ entspricht einer Hyperbel.

2. Gitterwerk. Bezeichnen wir den Werth von x , für welches der II. Theil in den mittleren Theil übergeht, mit x_2 , so ist, da sich die Tangenten an den

Uebergangspunkten an der Stütze B schneiden müssen, $(l_2 - x) \frac{dh}{dx} = h$. Setzt man obige Ausdrücke für h und $\frac{dh}{dx}$ ein, so ergibt sich

$$241. \quad x_2 = l_2 - \sqrt{\frac{q}{g} l_2 c_2}.$$

Nach der allgemeinen Regel $Y = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}$ ergeben sich nun unter Benützung der Ausdrücke 235 bis 239 folgende Regeln:

a. Eigengewicht. Für die blosse Wirkung des Eigengewichtes wird

$$242. \quad Y = + \frac{g p l_2 c_2 (l_2 - 2x)}{2 [q l_2 c_2 - g x (l_2 - x)]} \\ = + \frac{2 g p l_2 c_2 (l_2 - 2x) h_1}{q h l^2}.$$

b. Zufällige Last. Für die blosse Wirkung der zufälligen Last wird im I. Theile

$$243. \quad \begin{cases} \max(+Y) = + \frac{2 p l_2 c_2 (l_2 - 2x) h_1}{h l^2}, \\ \max(-Y) = - \frac{2 g p l_2 c_2 (l_2 - 2x) h_1}{q h l^2}. \end{cases}$$

Hiernach verhält sich (entsprechend dem §. 92) das Y für das Eigengewicht, sowie das positive und negative Maximum für die zufällige Last bezüglich wie $+g : +(g+p) : -g$. Für die gleichzeitige Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last wird demnach $\max(-Y) = 0$.

Für den mittleren Theil ergibt sich ein weniger einfacher Ausdruck; es wird nämlich

$$244. \quad \max(+Y) = + \frac{p q l_2^2 c_2^2 + (l_2 - x)^2 [p l_2 c_2 - g x^2]}{2 l_2 q l_2 c_2 - g x (l_2 - x)}.$$

Der Ausdruck für $\max(-Y)$ ergibt sich hieraus durch Vertauschung von x mit $l_2 - x$ und Wechsel des Vorzeichens.

In Fig. 146 ist die Vertikalkraft Y für die in Fig. 145 gezeichnete Trägerform ($\lambda=0,3l$, $l_2=1,2l$, $c_2=\frac{0,3 \cdot 1,3}{1,2}l=0,325l$), sowie für das Verhältniss $g:p=1:2$ grafisch dargestellt.

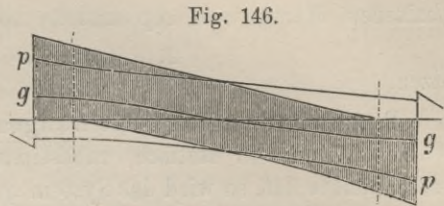


Fig. 146.

XIV. Kapitel.

Theorie der statisch unbestimmten Stabsysteme.

§. 96. Allgemeine Behandlung der statisch unbestimmten Systeme. Wir entwickeln zunächst eine allgemeine Methode zur Behandlung statisch unbestimmter Systeme, indem wir uns hierbei an die zuerst von Mohr angewendete Methode anschliessen.

1. Formänderung eines statisch bestimmten Systemes. Bringt man als äussere Kräfte an zwei beliebigen Knotenpunkten A und B zwei in der Richtung der Geraden AB im entgegengesetzten Sinne wirkende, gleich grosse Kräfte P an, so erzeugen dieselben im Allgemeinen Auflagerreaktionen und in allen Theilen Spannungen. Die Spannung eines beliebigen Theiles CD sei S . Wir denken uns nun den Stab CD beseitigt und statt dessen an den Knotenpunkten C und D die in der Richtung von CD im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte S angebracht. Denkt man sich alle noch vorhandenen Stäbe als absolut starr, so sind die Kräfte P und S die einzigen, welche bei einer Formänderung des Systemes eine mechanische Arbeit verrichten und zwar ist nach dem Principe der Arbeit, wenn man mit dp und ds die bei unendlich kleiner Formänderung entstehenden Längenänderungen der Geraden AB und CD bezeichnet, $Pdp + Sds = 0$ oder $Pdp = -Sds$. Für endliche Formänderungen ist diese Beziehung vollkommen richtig; setzt man an Stelle von dp und ds sehr kleine endliche Längenänderungen Δp und Δs , so entsteht die zwar nicht vollkommen, aber doch hinreichend genaue Beziehung $P\Delta p = -S\Delta s$. Hierbei kann P beliebig gewählt werden; S ist alsdann durch die blossen Gesetze der Statik bestimmt; wie gross man auch P wählen möge, so bleibt doch das Verhältniss $\frac{S}{P}$ konstant; dasselbe sei u . Aldann wird

$$1. \quad \Delta p = -u\Delta s.$$

Diese Beziehung lehrt die Längenänderung Δp einer beliebigen Geraden AB des Systemes kennen, wenn die Längenänderung Δs eines beliebigen Stabes CD bestimmt ist. Aendert sich nicht nur die Länge eines Stabes, sondern ändern sich die Längen sämtlicher Stäbe, so ist Δp für die Längenänderung jedes einzelnen Stabes zu bestimmen und die so

erhaltenen Werthe von Δp sind zu addiren, wir können also hier

$$2. \Delta p = -\Sigma(u \Delta s)$$

setzen.

2. Anwendung auf die Längenänderung der überzähligen Stäbe. Wenn ein statisch unbestimmtes Stabsystem n Stäbe und m Knotenpunkte hat, so wird das System durch Weglassung von $n - 2m + 3$ im Allgemeinen beliebiger Stäbe statisch bestimmt; wir nennen mit Mohr diese Stäbe die überzähligen, die Stäbe des verbleibenden statisch bestimmten Systemes die nothwendigen Stäbe. Wir denken uns nun am statisch bestimmten System statt des einen beliebigen überzähligen Stabes AB mit der Länge s an den Knotenpunkten A und B in der Richtung von AB zwei im entgegengesetzten Sinne wirkende Kräfte $= 1$ (als Zugspannung) angebracht. Hierdurch mögen in den nothwendigen Stäben mit den Längen s_1, s_2, s_3, \dots die Spannungen u_1', u_2', u_3', \dots und die Längenänderungen $\Delta s_1', \Delta s_2', \Delta s_3', \dots$ entstehen. Alsdann ist die Längenänderung Δs des Stabes AB nach Formel 2: $\Delta s = -u_1' \Delta s_1' - u_2' \Delta s_2' - \dots$ oder

$$3. \Delta s = -\Sigma(u' \Delta s').$$

3. Bestimmung der Spannungen. Es bezeichne nun $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \dots$ die Spannungen der nothwendigen Stäbe, welche durch die vorhandenen äusseren Kräfte, auf das statisch bestimmte System wirkend gedacht, hervorbringen und welche auf rein statischem Wege zu bestimmen sind; ferner S_1, S_2, S_3, \dots die wirklichen Spannungen dieser Stäbe als Theile des statisch unbestimmten Systemes; $u_1', u_2', u_3', \dots, u_1'', u_2'', u_3'', \dots$ die Spannungen dieser Stücke, welche entstehen, wenn man statt der überzähligen Stäbe der Reihe nach die Kräfte 1 anbringt, S', S'', S''', \dots die wirklichen Spannungen der überzähligen Stäbe. Alsdann ist offenbar

$$4. \begin{cases} S_1 = \mathfrak{S}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + u_1''' S''' + \dots \\ S_2 = \mathfrak{S}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + u_2''' S''' + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Wir bezeichnen nun ferner die Querschnittsflächen der nothwendigen Stäbe mit f_1, f_2, f_3, \dots die Querschnittsflächen der überzähligen Stäbe mit f', f'', f''', \dots , die entsprechenden Elastizitätskoeffizienten mit $E_1, E_2, E_3, \dots, E', E'', E''', \dots$ und setzen zur Abkürzung $\frac{s'}{E_1 f_1} = k_1, \dots, \frac{s'}{E' f'} = k', \dots$; alsdann ist $\Delta s_1 = k_1 S_1, \dots, \Delta s' = k' S', \dots$, also nach den Gleichungen 3:

$$k' S' = -u_1' k_1 S_1 - u_2' k_2 S_2 - u_3' k_3 S_3 - \dots$$

$$k'' S'' = -u_1'' k_1 S_1 - u_2'' k_2 S_2 - u_3'' k_3 S_3 - \dots$$

Substituirt man für S_1, S_2, \dots die Ausdrücke 4, so ergibt sich:

$$k' S' = - u_1' k_1 (\mathfrak{S}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + \dots) \\ - u_2' k_2 (\mathfrak{S}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + \dots) - \dots \\ k'' S'' = - u_1'' k_1 (\mathfrak{S}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + \dots) \\ - u_2'' k_2 (\mathfrak{S}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + \dots) - \dots$$

oder auch, wenn man nach den Grössen S', S'', \dots ordnet,

$$5. \begin{cases} S' (k' + k_1 u_1' u_1' + k_2 u_2' u_2' + \dots) + S'' (k_1 u_1' u_1'' \\ + k_2 u_2' u_2'' + \dots) + \dots + k_1 u_1' \mathfrak{S}_1 + k_2 u_2' \mathfrak{S}_2 + \dots = 0, \\ S' u_1 (k_1 u_1' + k_2 u_2' u_2'' + \dots) + S'' (k'' + k_1 u_1'' u_1'' \\ + k_2 u_2'' u_2'' + \dots) + \dots + k_1 u_1'' \mathfrak{S}_1 + k_2 u_2'' \mathfrak{S}_2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Dies sind $n - 2m + 3$ Gleichungen mit den $n - 2m + 3$ Unbekannten $S', S'', S'''\dots$ Nach Bestimmung derselben sind die Spannungen S_1, S_2, S_3, \dots durch die Gleichungen 4 gegeben.

Statt der Elastizitätskoeffizienten und Querschnittsflächen oder statt der Zahlen k kann man auch andere, diesen proportionale Zahlen einführen, da nur das gegenseitige Verhältniss dieser Werthe in Frage kommt; hierdurch kann es möglich werden, geeignetere, z. B. kleinere oder ganze Zahlen, einzuführen.

Wir wollen nun noch die Anwendung an einem allgemeinen Beispiele zeigen.

Beispiel. Der Träger habe die in Fig. 147 dargestellte Form; das Material sei für alle Theile dasselbe; die Längen- und Querschnittsflächen sind in Fig. 147 eingeschrieben. Im Punkte

A wirke eine Last 1. Da das System 10 Knotenpunkte und 20 Stäbe hat, so sind $2 \cdot 10 - 20 + 3 = 3$ überzählige Stäbe vorhanden; als solche seien die in Fig. 148 punktiert angegebenen Stäbe gewählt. Die Spannungen seien durch S mit dem in Fig. 148 angegebenen Index bezeichnet (wobei die arabische Ziffer den unteren, die römische Ziffer den oberen Index bezeichnet). Die Werthe für k_1, k_2, \dots sind hier des gleichen Elastizitätskoeffizienten halber

die Längen, dividirt durch die Querschnittsflächen; dieselben sind in die folgende Tabelle eingetragen. Die Spannungen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$, welche sich bei Weglassung der

Fig. 147.

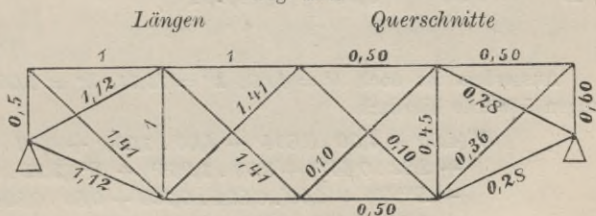
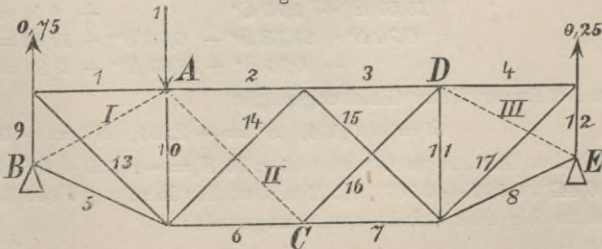


Fig. 148.



überzähligen Stäbe ergeben und die sich leicht durch Rechnung oder Konstruktion bestimmen lassen, enthält ebenfalls die folgende Tabelle. Nimmt man in den Punkten A und B zwei in der Richtung von AB und BA wirkende Kräfte $= 1$ an, so ergeben sich als Spannungen u_1', u_2', u_3', \dots der notwendigen Stäbe durch Rechnung oder Konstruktion bezüglich $-0,814, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -0,894, -0,447, 0, 0, +1,265, 0, 0, 0, 0$. Ebenso ergeben sich bei Annahme von Kräften $= 1$ in der Richtung von AC, CA , sowie von DE, ED die Spannungen $u_1'', u_2'', \dots, u_1''', u_2''', \dots$. Diese Zahlen sind gleichfalls in die folgende Tabelle eingetragen.

Nummer des nothw. Stabes	f	k	Σ	u'	u''	u'''
1	0,25	4,00	- 0,750	- 0,894	0	0
2	0,50	2,00	- 0,750	0	- 0,707	0
3	0,50	2,00	- 0,250	0	0	0
4	0,25	4,00	- 0,250	0	0	- 0,894
5	0,28	4,00	0	- 1,000	0	0
6	0,50	2,00	+ 0,500	0	- 0,707	0
7	0,50	2,00	+ 0,500	0	+ 0,707	0
8	0,28	4,00	0	0	0	- 1,000
9	0,60	0,83	- 0,750	- 0,894	0	0
10	0,45	2,22	- 1,000	- 0,447	- 0,707	0
11	0,45	2,22	0	0	+ 0,707	- 0,447
12	0,60	0,83	- 0,250	0	0	- 0,894
13	0,36	3,93	+ 1,061	+ 1,265	0	0
14	0,10	14,14	+ 0,354	0	+ 1,000	0
15	0,10	14,14	- 0,354	0	- 1,000	0
16	0,10	14,14	0	0	- 1,000	0
17	0,36	3,93	+ 0,354	0	0	+ 1,265

Ausserdem ist noch $k' = 4,00$, $k'' = 14,14$, $k''' = 4,00$. Die erste der Gleichungen 5 würde hiernach

$$\begin{aligned}
 S' (4,00 + 4,00 \cdot 0,894^2 + 4,00 \cdot 1,000^2 + 0,83 \cdot 0,894^2 \\
 + 2,22 \cdot 0,447^2 + 3,93 \cdot 1,265^2) + S'' (2,22 \cdot 0,447 \cdot 0,707) \\
 + S''' (0) + 4,00 \cdot 0,894 \cdot 0,750 + 0,83 \cdot 0,894 \cdot 0,750 \\
 + 2,22 \cdot 0,447 \cdot 1,000 + 3,93 \cdot 1,265 \cdot 1,061 = 0.
 \end{aligned}$$

Bildet man in gleicher Weise die zweite und dritte Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned}
 18,59 S' + 0,70 S'' &+ 9,51 = 0, \\
 0,70 S' + 61,78 S'' - 0,70 S''' + 12,64 &= 0, \\
 - 0,70 S'' + 18,59 S''' + 2,84 &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$S' = -0,504, \quad S'' = -0,201, \quad S''' = -0,160.$$

Nach den Gleichungen 4 wird nun z. B. $S_1 = -0,750 + 0,894 \cdot 0,504$, $S_{10} = -1,000 + 0,447 \cdot 0,504 + 0,707 \cdot 0,201$ u. s. w. Die in dieser Weise berechneten Spannungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Bezeichnung	genau	angenähert	Bezeichnung	genau	angenähert
S'	- 0,504	- 0,419	S_8	+ 0,160	+ 0,140
S''	- 0,201	- 0,177	S_9	- 0,299	- 0,375
S'''	- 0,160	- 0,140	S_{10}	- 0,634	- 0,688
S_1	- 0,299	- 0,375	S_{11}	- 0,069	- 0,063
S_2	- 0,609	- 0,625	S_{12}	- 0,107	- 0,125
S_3	- 0,250	- 0,375	S_{13}	+ 0,424	+ 0,530
S_4	- 0,107	- 0,125	S_{14}	+ 0,153	+ 0,177
S_5	+ 0,504	+ 0,419	S_{15}	- 0,153	- 0,177
S_6	+ 0,559	+ 0,625	S_{16}	+ 0,201	+ 0,177
S_7	+ 0,359	+ 0,375	S_{17}	+ 0,152	+ 0,177

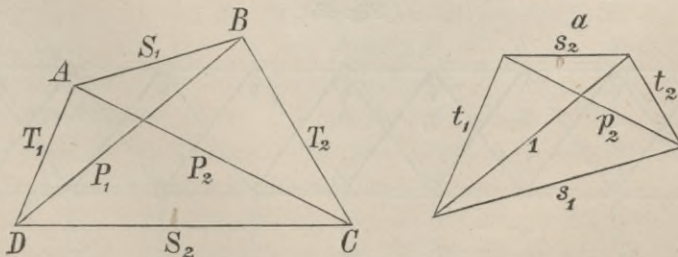
In diese Tabelle sind unter der Rubrik „angenähert“ auch diejenigen Zahlen aufgenommen, welche sich als Spannungen durch die Zerlegung in zwei statisch bestimmte Stabsysteme ergeben, wobei jedes Gurtstück und jede Vertikale in beiden Systemen, jede Diagonale aber nur in einem System vorkommt.

§. 97. **Das Viereck mit beiden Diagonalen.** Bei den statisch unbestimmten Konstruktionen treten häufig Vierecke mit beiden Diagonalen auf. Nach dem vorigen Paragrafe ist es leicht möglich, eine Beziehung zwischen den Spannungen der sechs Theile dieser Konstruktion aufzustellen.

Wir bezeichnen die Spannung der oberen und unteren Seite mit S_1, S_2 , die der linken und rechten Seite mit T_1, T_2 , die der beiden Diagonalen mit P_1, P_2 ; ferner die Querschnitte bezüglich mit q_1, q_2 , ψ_1, ψ_2 , f_1, f_2 , die Längen bezüglich mit $l_1, l_2, \mu_1, \mu_2, l_1, l_2$. Die Elastizitätskoeffizienten seien gleich, nämlich $= E$.

Denken wir uns statt des Stabes BD (Fig. 149) in B und D die Kraft I in Richtung von BD und DB angebracht, so entstehen in den übrigen Theilen Spannungen, welche sich leicht bestimmen lassen, am

Fig. 149.



einfachsten nach der grafischen Polygonalmethode (Fig. 149 a). Diese Spannungen seien bezüglich $s_1, s_2, t_1, t_2, 1, p_2$. Da die Längenänderungen

der Stäbe bezüglich $\frac{S_1 \lambda_1}{E \varphi_1}, \frac{S_2 \lambda_2}{E \varphi_2}, \dots$ sind, so ist nach dem Prinzip der Arbeit:

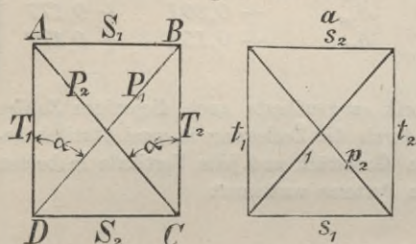
$$6. \left(-\frac{P_1 l_1}{E f_1} \right) = s_1 \frac{S_1 \lambda_1}{E \varphi_1} + s_2 \frac{S_2 \lambda_2}{E \varphi_2} + t_1 \frac{T_1 \mu_1}{E \psi_1} + t_2 \frac{T_2 \mu_2}{E \psi_2} + p_2 \frac{P_2 l_2}{E f_2},$$

oder, wenn wir mit E multiplizieren:

$$7. \frac{s_1 S_1 \lambda_1}{\varphi_1} + \frac{s_2 S_2 \lambda_2}{\varphi_2} + \frac{t_1 T_1 \mu_1}{\psi_1} + \frac{t_2 T_2 \mu_2}{\psi_2} + \frac{P_1 l_1}{f_1} + \frac{p_2 P_2 l_2}{f_2} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen den sechs Spannungen.

Fig. 150.



Wir wollen speziell noch ein Rechteck voraussetzen. Die Diagonalen mögen mit den Seiten mit den Spannungen T_1, T_2 den Winkel α einschließen (Fig. 150). Als dann ergibt sich (Fig. 150 a): $s_1 = s_2 = -\sin \alpha, t_1 = t_2 = -\cos \alpha, p_2 = 1$. Da ferner $l_1 = l_2 = l, \lambda_1 = \lambda_2 = l \sin \alpha, \mu_1 = \mu_2 = l \cos \alpha$

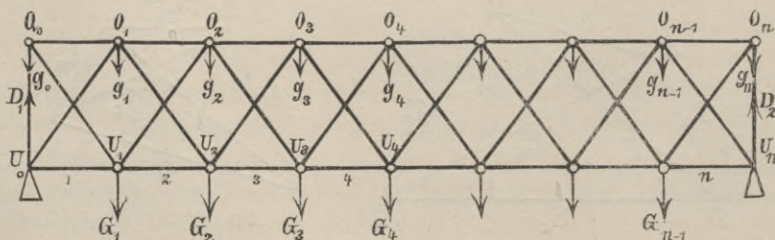
ist, so geht die Gleichung 7 jetzt über in:

$$8. \left(\frac{S_1}{\varphi_1} + \frac{S_2}{\varphi_2} \right) \sin^2 \alpha + \left(\frac{T_1}{\psi_1} + \frac{T_2}{\psi_2} \right) \cos^2 \alpha = \frac{P_1}{f_1} + \frac{P_2}{f_2}.$$

Sind die Elastizitätskoeffizienten verschieden, so sind die Querschnittsflächen noch mit den betreffenden Elastizitätskoeffizienten zu multiplizieren.

§. 98. Parallelträger mit zweitheiligem Netzwerke. Ein Parallelträger mit zwei Endpfosten und zweitheiligem Netzwerke (Fig. 151) ist statisch unbestimmt und zwar fehlt der statischen Behandlung eine Gleichung. Die genaue Behandlung kann nun nach §. 96 erfolgen, wobei man etwa den einen Endpfosten als überzähligen Stab ansehen kann. Man kann aber auch die Bedingung 8 für das Rechteck mit beiden Diagonalen anwenden.

Fig. 151.



Wir setzen voraus, dass an den oberen Knotenpunkten die Lasten $g_0, g_1, g_2, \dots, g_n$, an den unteren Knotenpunkten die Stützdrukke D_1, D_2

und die Lasten $G_1, G_2, G_3, \dots, G_{n-1}$ wirken. Die Spannung der Endständer sei V_1, V_2 , die Spannung der nach rechts fallenden Stäbe P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , die Spannung der nach links fallenden Stäbe $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_{n-1}$, die Spannungen im Obergurte S_1, S_2, \dots, S_{n-1} , im Untergurte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_{n-1}$. Die Knotenpunkte am Obergurte seien $O_0, O_1, O_2, \dots, O_n$, am Untergurte $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$.

1. **Spannungen der Gitterwerke.** Stellen wir die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschiebung im vertikalen Sinne für die Knotenpunkte $U_0, O_1, U_2, O_3, U_4, \dots$ auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} - V_1 - D_1 + \mathfrak{P}_1 \cos \alpha &= 0, \\ + (\mathfrak{P}_1 + P_2) \cos \alpha + g_1 &= 0, \\ - (P_2 + \mathfrak{P}_3) \cos \alpha + G_2 &= 0, \\ - (\mathfrak{P}_3 + P_4) \cos \alpha + g_3 &= 0. \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Addirt man eine bestimmte Anzahl dieser Gleichungen, so heben sich die einzelnen P und \mathfrak{P} bis auf das letzte und es ergibt sich in dieser Weise, wenn m eine gerade Zahl, μ eine ungerade Zahl bedeutet:

$$9. \quad \begin{cases} P_m = + (D_1 + V_1) \sec \alpha - (g_1 + G_2 + g_3 + G_4 \dots + G_{m-1}) \sec \alpha, \\ \mathfrak{P}_\mu = - (D_1 + V_1) \sec \alpha + (g_1 + G_2 + g_3 - G_4 + \dots + G_{\mu-1}) \sec \alpha. \end{cases}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die übrigen Knotenpunkte $O_0, U_1, O_2, U_3, \dots$ sind

$$\begin{aligned} V_1 + P_1 \cos \alpha + g_0 &= 0, \\ - (P_1 + \mathfrak{P}_2) \cos \alpha + G_1 &= 0, \\ + (\mathfrak{P}_2 + P_3) \cos \alpha + g_2 &= 0, \\ - (P_3 + \mathfrak{P}_4) \cos \alpha + G_3 &= 0. \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in der vorigen Weise

$$10. \quad \begin{cases} P_\mu = - V_1 \sec \alpha - (g_0 + G_1 + g_2 + G_3 + \dots + g_{\mu-1}) \sec \alpha, \\ \mathfrak{P}_m = + V_1 \sec \alpha + (g_0 + G_1 + g_2 + G_3 + \dots + G_{m-1}) \sec \alpha. \end{cases}$$

Zerlegen wir das zweitheilige System in zwei eintheilige Systeme und bezeichnen für ein solches die Transversalkraft für einen durch einen beliebigen Stab gelegten Schnitt mit Q' , den sich ergebenden Näherungswerth der Spannung mit P', \mathfrak{P}' , den linken Stützendruck für das System $U_0 O_1 U_2 O_3 \dots$ mit D_1' , für das System $O_0 U_1 O_2 U_3 \dots$ mit D_1'' , so ist $D_1 = D_1' + D_1''$ für das erstere System $Q' = D_1' - (g_1 + G_2 + g_3 \dots)$ und für das letztere $Q' = D_1'' - (g_0 + G_1 + g_2 + G_3 \dots)$, ferner $P' = Q' \sec \alpha, \mathfrak{P}' = Q' \sec \alpha$. Demnach lassen sich die für P, \mathfrak{P} gewonnenen Ausdrücke auch schreiben:

$$11. \quad \begin{cases} P_m = P'_m + \Delta, & P_\mu = P'_\mu - \Delta, \\ \mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}'_m + \Delta, & \mathfrak{P}_\mu = \mathfrak{P}'_\mu - \Delta, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$12. \quad (D_1'' + V_1) \sec \alpha = \Delta$$

setzt. Wir ersehen hieraus, dass man bei Anwendung einer Zerlegung in zwei eintheilige Systeme einen Fehler begeht, welcher dem absoluten Werthe nach konstant, nämlich $= (D_1'' + V_1) \sec \alpha$, dem Vorzeichen nach aber für die Stäbe mit geradem und ungeradem Index entgegengesetzt ist.

Bezeichnet man die Spannung der Endständer nach der Näherungstheorie mit V_1', V_2' , so ist $V_1' = -D_1''$, also auch $\Delta = (V_1 - V_1') \sec \alpha$ oder

$$13. \quad V_1' = V_1' + \Delta \cos \alpha.$$

Die Spannung des rechten Endständers ist $V_2 = -\mathfrak{P}_n \cos \alpha - g_n$; da $V_2' = -\mathfrak{P}_n' \cos \alpha - g_n$ ist, so wird $V_2 - V_2' = -(\mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n') \cos \alpha$; ist n eine gerade Zahl, so ist $\mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n' = +\Delta$, also $V_2 = V_2' - \Delta \cos \alpha$; ist n eine ungerade Zahl, so ist $\mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n' = -\Delta$, also $V_2 = V_2' + \Delta \cos \alpha$, mithin wird

$$13a. \quad V_2 = V_2' \mp \Delta \cos \alpha.$$

2. Spannungen der Gurte. Legen wir durch die Mitten des m -ten oberen oder unteren Gurtstückes einen vertikalen Schnitt, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung um einen der Durchschnittspunkte des Schnittes mit den Gurten, wenn man das Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf den Schnitt mit M bezeichnet,

$$S_m + \frac{1}{2} (P_m + \mathfrak{P}_m) h \sin \alpha + M = 0,$$

$$\mathfrak{S}_m + \frac{1}{2} (P_m + \mathfrak{P}_m) h \sin \alpha - M = 0.$$

Nun aber ist $P_m = P_m' + \Delta$, $\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}_m' + \Delta$, also

$$S_m = -\frac{M}{h} - \frac{1}{2} (P_m' + \mathfrak{P}_m') \sin \alpha - \Delta \sin \alpha,$$

$$\mathfrak{S}_m = +\frac{M}{h} - \frac{1}{2} (P_m' + \mathfrak{P}_m') \sin \alpha - \Delta \sin \alpha,$$

oder, wenn man die Gurtspannungen, welche sich durch die Zerlegung in zwei eintheilige Systeme ergeben, mit S', \mathfrak{S}' bezeichnet, $S_m = \mathfrak{S}_m' - \Delta \sin \alpha$, $\mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}_m' - \Delta \sin \alpha$. Lässt man an Stelle der geraden Zahl m die ungerade Zahl μ treten, so ist nach den Gleichungen 3 - Δ für Δ zu setzen; sonach haben wir

$$14. \quad \begin{cases} S_m = S_m' - \Delta \sin \alpha, & S_\mu = S_\mu' + \Delta \sin \alpha, \\ \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}_m' - \Delta \sin \alpha, & \mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\mu' + \Delta \sin \alpha. \end{cases}$$

Sonach ergibt sich auch in den Gurtspannungen bei Anwendung einer Zerlegung in zwei eintheilige Systeme ein dem absoluten Werthe nach konstanter, aber abwechselnd positiver und negativer Fehler $\Delta \sin \alpha$.

3. Elasticitätsgleichung. Es erübrigt nun noch, den Fehler Δ zu bestimmen. Wir wollen der Einfachheit wegen für alle Theile einen konstanten Elasticitätscoefficienten E voraussetzen. Die Querschnittsflächen

der einzelnen Theile mögen mit denselben Buchstaben des kleinen Alphabetes bezeichnet werden, wie ihre Spannungen. Ferner seien die Aenderungen der Abstände der Gurte in den Knotenpunkten bezüglich $\Delta_1 h, \Delta_2 h, \dots$. Die bereits citirte Gleichung 8 gibt alsdann in ihrer Anwendung auf die einzelnen vollständigen Vierecke des Gittersystemes, wenn wir für $\frac{S}{E\psi}$ die Höhenänderung $\frac{\Delta h}{h}$ setzen,

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{P}_1}{p_1} &= \left(\frac{S_1}{s_1} + \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{s}_1} \right) \sin^2 \alpha + E \frac{\Delta_1 h}{h} \cos^2 \alpha + \frac{V_1}{v_1} \cos^2 \alpha, \\ - \frac{P_2}{p_2} - \frac{\mathfrak{P}_2}{p_2} &= - \left(\frac{S_2}{s_2} + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{s}_2} \right) \sin^2 \alpha - E \left(\frac{\Delta_1 h}{h} + \frac{\Delta_2 h}{h} \right) \cos^2 \alpha, \\ \frac{P_3}{p_3} + \frac{\mathfrak{P}_3}{p_3} &= \left(\frac{S_3}{s_3} + \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{s}_3} \right) \sin^2 \alpha + E \left(\frac{\Delta_2 h}{h} + \frac{\Delta_3 h}{h} \right) \cos^2 \alpha. \\ &\dots \end{aligned}$$

Addirt man sämmtliche Gleichungen, so erhält man

$$15. \left\{ \begin{aligned} &\frac{P_1}{p_1} - \frac{P_2}{p_2} + \frac{P_3}{p_3} - \frac{P_4}{p_4} + \dots + \frac{\mathfrak{P}_1}{p_1} - \frac{\mathfrak{P}_2}{p_2} + \frac{\mathfrak{P}_3}{p_3} - \frac{\mathfrak{P}_4}{p_4} + \dots \\ &= \left(\frac{S_1}{s_1} - \frac{S_2}{s_2} + \frac{S_3}{s_3} - \frac{S_4}{s_4} + \dots + \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{s}_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{s}_2} + \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{s}_3} - \frac{\mathfrak{S}_4}{\mathfrak{s}_4} + \dots \right) \sin^2 \alpha \\ &\quad + \left(\frac{V_1}{v_1} \pm \frac{V_2}{v_2} \right) \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right.$$

Im letzten Gliede ist + oder - zu setzen, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Substituirt man nun für die Spannungen die Ausdrücke 3, 13, 13a und 14, so erscheint der Fehler Δ als einzige Unbekannte. Es ergibt sich nämlich

$$16. \quad C \Delta = \frac{P_1'}{p_1} - \frac{P_2'}{p_2} + \frac{P_3'}{p_2} - \dots + \frac{\mathfrak{P}_1'}{p_1} - \frac{\mathfrak{P}_2'}{p_2} + \frac{\mathfrak{P}_3'}{p_3} - \dots \\ - \left(\frac{S_1'}{s_1} - \frac{S_2'}{s_2} + \frac{S_3'}{s_3} - \dots + \frac{\mathfrak{S}_1'}{\mathfrak{s}_1} - \frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{s}_2} + \frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{s}_3} - \dots \right) \sin^2 \alpha \\ - \left(\frac{V_1'}{v_1} \pm \frac{V_2'}{v_2} \right) \cos^2 \alpha,$$

wenn man zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots \\ + \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots + \frac{1}{\mathfrak{s}_1} + \frac{1}{\mathfrak{s}_2} + \dots \right) \sin^3 \alpha + \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \cos^3 \alpha$$

setzt. Man ersieht hieraus, dass bei Bestimmung des Fehlers Δ sämmtliche Spannungen und Querschnittsflächen in Frage kommen.

Ist n eine gerade Zahl, so heben sich bei symmetrischer Anordnung des Trägers und der Last die einzelnen Glieder gegenseitig und es ergibt sich $\Delta = 0$. Aber auch, wenn n eine ungerade Zahl ist, ergibt

sich bei symmetrischer Lastvertheilung Δ gegen die Spannungen ausserordentlich klein. Hinsichtlich des Einflusses des Eigengewichtes und einer totalen Belastung, also hinsichtlich der Maximalspannungen der Gurte und der Ständer, wird daher die Zerlegung in eintheilige Systeme stets ziemlich genaue Resultate geben. Grösser ist der Fehler in der Bestimmung der Spannung der Gitterstäbe, welcher eine einseitige Belastung zu Grunde zu legen ist. Aber auch hier zeigt die Anwendung auf specielle Beispiele, dass der Fehler ein so geringer ist, dass man für die praktische Anwendung eine Zerlegung in eintheilige Systeme ohne Anstand zulassen kann.

Beispiel. Wir wählen als Beispiel einen schmiedeeisernen Träger von 40^m Spannweite mit 5^m Trägerhöhe und 8 Feldern. Die Querschnitte und reciproken Werthe derselben seien durch folgende Tabelle gegeben:

m	$s_m = \varepsilon_m$	$p_m = \nu_m$	$\frac{1}{s_m} = \frac{1}{\varepsilon_m}$	$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{\nu_m}$
1	0,94	0,54	1,06	1,84
2	1,27	0,40	0,79	2,50
3	1,78	0,30	0,56	3,33
4	2,07	0,26	0,48	3,85
5	2,07	0,26	0,48	3,85
6	1,78	0,30	0,56	3,33
7	1,27	0,40	0,79	2,50
8	0,94	0,54	1,06	1,84

□ Decimeter

Ausserdem sei $V_1 = V_2 = 0,65$, $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = 1,54$. Hiernach wird nun

$$C = 46,08 + 11,56 \cdot 0,3535 + 3,08 \cdot 0,3535 = 51,25.$$

Sonach wird

$$\begin{aligned} \Delta = & 0,0359 (P_1' + \mathfrak{P}_1' - P_8' - \mathfrak{P}_8') - 0,0488 (P_2' + \mathfrak{P}_2' - P_7' - \mathfrak{P}_7') \\ & + 0,0649 (P_3' + \mathfrak{P}_3' - P_6' - \mathfrak{P}_6') - 0,0751 (P_4' + \mathfrak{P}_4' - P_5' - \mathfrak{P}_5') \\ & - 0,0103 (S_1' + \mathfrak{S}_1' - S_8' - \mathfrak{S}_8') + 0,0077 (S_2' + \mathfrak{S}_2' - S_7' - \mathfrak{S}_7') \\ & - 0,0055 (S_3' + \mathfrak{S}_3' - S_6' - \mathfrak{S}_6') + 0,0047 (S_4' + \mathfrak{S}_4' - S_5' - \mathfrak{S}_5') \\ & - 0,0064 (V_1' - V_2'). \end{aligned}$$

Bei symmetrischer Belastung, also auch unter dem Einflusse des Eigengewichtes, wird $\Delta = 0$. Wir wollen nun aber Einzellasten an einzelnen Knotenpunkten des Untergurtes voraussetzen. Nehmen wir beispielsweise eine Einzellast 1 am Knotenpunkte U_2 an, so ergeben sich als Spannungen durch die Zerlegung in zwei Einzelsysteme:

$$\begin{array}{llllll} P_1' = & 0 & \mathfrak{P}_1' = & -1,061 & S_1' = & 0 & \mathfrak{S}_1' = & +0,75 & V_1' = & 0. \\ P_2' = & +1,061 & \mathfrak{P}_2' = & 0 & S_2' = & -1,50 & \mathfrak{S}_2' = & +0,75 & V_2' = & 0. \\ P_3' = & 0 & \mathfrak{P}_3' = & +0,354 & S_3' = & -1,50 & \mathfrak{S}_3' = & +1,25 & & \\ P_4' = & -0,354 & \mathfrak{P}_4' = & 0 & S_4' = & -1,00 & \mathfrak{S}_4' = & +1,25 & & \\ P_5' = & 0 & \mathfrak{P}_5' = & +0,354 & S_5' = & -1,00 & \mathfrak{S}_5' = & +0,75 & & \\ P_6' = & -0,354 & \mathfrak{P}_6' = & 0 & S_6' = & -0,50 & \mathfrak{S}_6' = & +0,75 & & \\ P_7' = & 0 & \mathfrak{P}_7' = & +0,354 & S_7' = & -0,50 & \mathfrak{S}_7' = & +0,25 & & \\ P_8' = & -0,354 & \mathfrak{P}_8' = & 0 & S_8' = & 0 & \mathfrak{S}_8' = & +0,25 & & \end{array}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für A ein, so ergibt sich

$$A = + 0,0352.$$

Sonach ist der Fehler in den Spannungen der Gitterstäbe $= \pm 0,0352$, in denen der Endständer $= \pm 0,0352 \cdot \cos \alpha = \pm 0,0249$, in denen der Gurte $= \pm 0,0352 \cdot \sin \alpha = \pm 0,0249$.

In folgender Tabelle sind die in dieser Weise bestimmten Spannungen der nach rechts fallenden Gitterstäbe für den Fall der Belastung eines unteren Knotenpunktes mit der Last 1 zusammengestellt; die obere Zahl gibt die durch Zerlegung in zwei Einzelsysteme, die untere Zahl den hierbei begangenen Fehler an.

Belasteter Punkt	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
U_1	+ 1,237 + 0,021	0 - 0,021	- 0,177 + 0,021	0 - 0,021	- 0,177 + 0,021	0 - 0,021	- 0,177 + 0,021	0 - 0,021
U_2	0 - 0,035	+ 1,061 + 0,035	0 - 0,035	- 0,354 + 0,035	0 - 0,035	- 0,354 + 0,035	0 - 0,035	- 0,354 + 0,035
U_3	+ 0,884 + 0,022	0 - 0,022	+ 0,884 + 0,022	0 - 0,022	- 0,530 + 0,022	0 - 0,022	- 0,530 + 0,022	0 - 0,022
U_4	0 0	+ 0,707 0	0 0	+ 0,707 0	0 0	- 0,707 0	0 0	- 0,707 0
U_5	+ 0,530 - 0,022	0 + 0,022	+ 0,530 - 0,022	0 + 0,022	+ 0,530 - 0,022	0 + 0,022	- 0,884 - 0,022	0 + 0,022
U_6	0 + 0,035	+ 0,354 - 0,035	0 + 0,035	+ 0,354 - 0,035	0 + 0,035	+ 0,354 - 0,035	0 + 0,035	- 1,065 - 0,035
U_7	+ 0,177 - 0,021	0 + 0,021	+ 0,177 - 0,021	0 + 0,021	+ 0,177 - 0,021	0 + 0,021	+ 0,177 - 0,021	0 + 0,021

Durch blosse Addition lassen sich hiernach die Maxima der Spannungen berechnen, indem man nur die Belastung derjenigen Knotenpunkte berücksichtigt, welchen ein und dasselbe Vorzeichen der Spannung entspricht. Hiernach ergibt sich als grösster Zug in jedem Stabe:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= + 2,828 & P_2 &= + 2,122 & P_3 &= + 1,591 & P_4 &= + 1,061 \\
 &+ 0 & &+ 0,021 & &+ 0,014 & &+ 0,008 \\
 P_5 &= + 0,707 & P_6 &= + 0,354 & P_7 &= + 0,177 & P_8 &= 0 \\
 &- 0,008 & &- 0,014 & &- 0,021 & &+ 0,021
 \end{aligned}$$

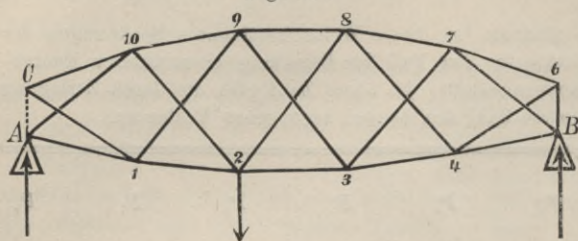
Der bei Anwendung einer Zerlegung in zwei eintheilige Systeme begangene Fehler beträgt hiernach bei denjenigen Spannungen, welche bei der Berechnung der Querschnittsflächen in Frage kommen, nämlich bei den Spannungen P_1, P_2, P_3, P_4 , nur 0 bis 1 Prozent.

§ 99. Träger mit polygonalen Gurten und zweitheiligem Netzwerke.

1. Träger mit Endständern und zweitheiligem Netzwerke. Hier ist ein überzähliger Stab vorhanden; als solchen nimmt man am besten den einen Endständer AB an. Die Spannungen der

übrigen Stäbe lassen sich nach Ausschaltung des Stabes AC leicht bestimmen. Bei Anwendung der Rechnung wird man am besten zur Bestimmung der Spannungen der einen Stabschaar schiefe Schnitte legen,

Fig. 152.



wobei der erste eine Diagonale, sämtliche übrige Schnitte zwei Diagonalen schneiden; für jeden Schnitt stellt man die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung um den Durchschnittpunkt der Ver-

längerungen der geschnittenen Gurtstücke auf. Bezeichnen wir die Spannungen mit P_1, P_2, \dots , die entsprechenden Hebelsarme für den ersten Schnitt mit a_1 , für den zweiten mit b_1, a_2 , für den dritten mit b_2, a_3 , u. s. w.; ferner die Momente der äusseren Kräfte für die einzelnen Schnitte in Beziehung auf den Durchschnittpunkt der geschnittenen Gurtstücke mit M_1, M_2, \dots , so ist

$$17. \quad \begin{cases} a_1 P_1 = M_1, \\ b_1 P_1 + a_2 P_2 = M_2, \\ b_2 P_2 + a_3 P_3 = M_3, \\ \dots \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man, mit der ersten beginnend, P_1, P_2, \dots allmählig bestimmen. Als allgemeiner Ausdruck für P_n ergibt sich

$$18. \quad P_n = \frac{M_n}{a_n} - \frac{M_{n-1} b_{n-1}}{a_n a_{n-1}} + \frac{M_{n-2} b_{n-1} b_{n-2}}{a_n a_{n-1} a_{n-2}} - \dots \pm \frac{M_1 b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1}{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}$$

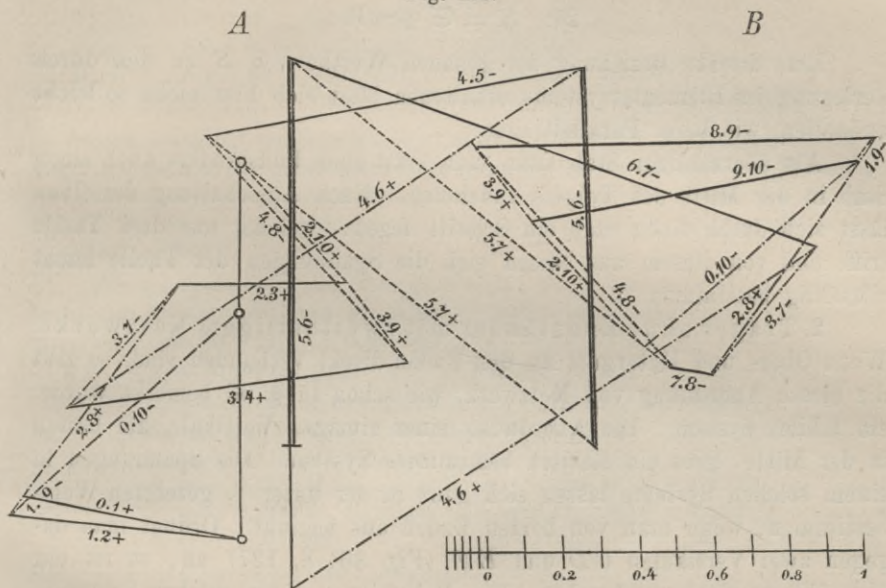
Kennt man die Spannungen sämtlicher Diagonalen, so legt man durch jeden Knotenpunkt einen Schnitt, welcher ein Gurtstück und eine Diagonale schneidet. Indem man für jeden Schnitt die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung um den im Schnitte liegenden Knotenpunkt aufstellt, findet man die Spannungen der Gurte. Die Spannungen der Stütze AC findet man dann aus der Gleichgewichtsbedingung für den Punkt A oder den Punkt C .

Dasselbe Prinzip würde bei Anwendung der grafischen Schnittmethode zu befolgen sein. Bei Anwendung der grafischen Polygonalmethode ist es nicht möglich, durch eine einzige dem gegebenen Stabsysteme reciproke Figur sämtliche Spannungen zu bestimmen; man muss vielmehr gleichzeitig zwei Figuren konstruieren; bei der einen denkt man sich die Spannungen der einen Stabschaar, bei der zweiten die Spannungen der anderen Stabschaar als äussere Kräfte. Fig. 153 zeigt die Konstruktion; hierin beziehen sich die ausgezogenen starken Linien auf den Obergurt, die ausgezogenen schwachen Linien auf den Untergurt,

die strichpunktirten Linien auf die rechts fallenden, die punktirten Linien auf die links fallenden Diagonalen, die Doppellinien auf die Vertikalen.

Man bestimmt sodann die Spannungen sämtlicher Theile für den Fall, dass in A und C in der Richtung von AC und CA die Kräfte 1

Fig. 153.



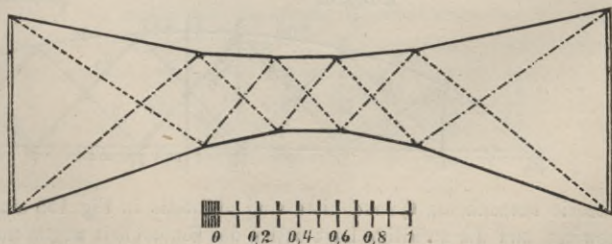
wirken, und zwar ganz in der soeben angegebenen Weise. An Stelle der Formel 18 kommt hier die Formel

$$19. P_n = \pm \frac{M_1 b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1}{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}$$

Bei Anwendung der grafischen Polygonalmethode kommt man hier mit einem einzigen Kräfteplane aus (Fig. 154), welcher allerdings dem gegebenen Stabsysteme nicht reciprok ist.

Fig. 154.

Bezeichnen wir nun die wirkliche Spannung eines Stabes mit S , die Spannung desselben Stabes in Folge der äusseren Kräfte nach



Ausschaltung des Ständers AC mit S , die Spannung desselben Stabes, wenn in A und C die Kräfte 1 wirken, mit u , die wirkliche Spannung

des Ständers AC mit V , endlich die Grösse $\frac{l}{Ef}$ für den beliebigen Stab mit k , für den Ständer AC mit k_0 , so ist, entsprechend dem §. 97: $[k_0 + \Sigma(u^2 k)] V + \Sigma(u k \mathfrak{S}) = 0$, also

$$20. \quad V = - \frac{\Sigma(u k \mathfrak{S})}{k_0 + \Sigma(u^2 k)},$$

$$21. \quad S = \mathfrak{S} + uV.$$

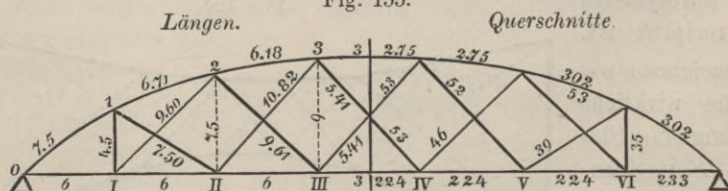
Eine direkte Beziehung der genauen Werthe von S zu den durch Zerlegung im Elementarsysteme erhaltenen lässt sich hier nicht so leicht aufstellen, wie beim Parallelträger.

Als überzähligen Stab kann man statt eines Endständers auch einen Stab in der Mitte des Trägers annehmen. Nach Ausschaltung desselben lässt sich durch einen Stab ein Schnitt legen, welcher nur drei Theile trifft und von diesem aus lassen sich die Spannungen der Theile leicht allmählig bestimmen.

2. Träger ohne Endstände mit zweitheiligem Netzwerke. Wenn Ober- und Untergurt an den Enden direkt verbunden sind, so gibt die blosse Anordnung von Netzwerk, wie schon in §. 56 bemerkt wurde, ein labiles System. Die Anordnung einer einzigen Vertikale, am besten in der Mitte, gibt ein statisch bestimmtes System. Die Spannungen in einem solchen Systeme lassen sich ganz in der unter 1. gezeigten Weise bestimmen, wenn man von beiden Enden aus beginnt. Ordnet man dagegen zwei Vertikalen CD und EF (Fig. 86, S. 127) an, so ist ein überzähliger Stab vorhanden. Die Behandlung eines solchen Systemes kann ganz in der unter 1. angegebenen Weise erfolgen, indem man die beiden Vertikalen für die Endstände setzt. Die Spannung in den Endstücken beider Gurte ist durch das Gleichgewicht der Endknotenpunkte A und B vollkommen bestimmt.

Beispiel. Wir untersuchen einen Bogensehenträger von 42^m Spannweite mit den in Fig. 155 eingeschriebenen Dimensionen, einem Eigengewichte von $1,6$ Ton. pro Met. und einer zufälligen Last von $4,2$ Ton. pro Met. Die nach der Näherungs-

Fig. 155.



theorie berechneten Querschnitte sind ebenfalls in Fig. 155 eingeschrieben. Das Eigengewicht und die zufällige Last sollen der Einfachheit wegen nur in den Knotenpunkten des Untergurtes wirkend gedacht werden.

Nach Ausschaltung der Vertikale I ergibt sich in der oben angegebenen Weise für die Spannung der rechts fallenden Stäbe:

$$P_2 = + 0,1111 M_1$$

$$P_3 = - 0,07114 M_1 + 0,03557 M_2$$

$$P_4 = + 0,06676 M_1 - 0,03338 M_2 + 1,2016 Q_3$$

$$P_5 = - 0,08011 M_1 + 0,04005 M_2 - 1,4419 Q_3 + 0,04005 M_4$$

$$P_6 = + 0,14229 M_1 - 0,07114 M_2 + 2,5611 Q_3 - 0,07114 M_4 + 0,14229 M_5$$

und für die Spannungen der links fallenden Stäbe:

$$\mathfrak{P}_2 = + 0,21343 M_1$$

$$\mathfrak{P}_3 = - 0,12017 M_1 + 0,08011 M_2$$

$$\mathfrak{P}_4 = + 0,10014 M_1 - 0,06676 M_2 + 0,03338 M_3$$

$$\mathfrak{P}_5 = - 0,10668 M_1 + 0,07114 M_2 - 0,03557 M_3 + 1,2806 Q_1$$

$$\mathfrak{P}_6 = + 0,16667 M_1 - 0,11111 M_2 + 0,05556 M_3 - 2,0000 Q_1 + 0,05556 M_5$$

Im dritten, bezüglich vierten Schnitte ist statt des Momentes die Transversalbract Q eingeführt, da hier die beiden geschnittenen Gurtstücke parallel sind. Die Momentenpunkte haben von der linken Stütze bei den rechts fallenden Stäben den Abstand $+ 3, + 18, \infty, - 58, - 43$, bei den links fallenden Stäben den Abstand $0, + 3 + 18, \infty, - 58$.

Für die Spannungen des Obergurtes ergibt sich, wenn man die Momente für die unteren Knotenpunkte und die Schnitte, welche man durch diese Knotenpunkte legen kann, mit M_1', M_2', \dots bezeichnet,

$$S_1 = - 0,2778 M_1'$$

$$S_2 = - 6,1491 M_1' - 0,6988 \mathfrak{P}_2 = - 0,2471 M_1' - 0,8944 P_2,$$

$$S_3 = - 0,1146 M_3' - 0,5719 \mathfrak{P}_3 = - 0,1375 M_2' - 0,6441 P_3,$$

$$S_4 = - 0,1111 M_1' - 0,5547 \mathfrak{P}_4 = - 0,1111 M_3' - 0,5547 P_4,$$

$$S_5 = - 0,1375 M_5' - 0,6441 \mathfrak{P}_5 = - 0,1146 M_1' - 0,5719 P_5,$$

$$S_6 = - 0,2471 M_6' - 0,8944 \mathfrak{P}_6 = - 0,1490 M_5' - 0,6988 P_6,$$

$$S_7 = - 0,2778 M_6;$$

ferner sind die Spannungen des Untergurtes

$$\mathfrak{S}_1 = + 0,2222 M_1'$$

$$\mathfrak{S}_2 = + 0,1333 M_2' - 0,8000 P_2 = + 0,2222 M_1' - 0,6247 \mathfrak{P}_2$$

$$\mathfrak{S}_3 = + 0,1111 M_3' - 0,6247 P_3 = + 0,1333 M_2' - 0,5547 \mathfrak{P}_3$$

$$\mathfrak{S}_4 = + 0,1111 M_1' - 0,5547 P_4 = + 0,1111 M_3' - 0,5547 \mathfrak{P}_4$$

$$\mathfrak{S}_5 = + 0,1333 M_5' - 0,5547 P_5 = + 0,1111 M_1' - 0,6247 \mathfrak{P}_5$$

$$\mathfrak{S}_6 = + 0,2222 M_6' - 0,6247 P_6 = + 0,1333 M_5' - 0,8000 \mathfrak{P}_6$$

$$\mathfrak{S}_7 = + 0,2222 M_6.$$

Für die Spannung der Vertikale VI ergibt sich

$$V = - 0,7809 P_6 = + 0,4472 S_6 - 0,6 S_7 - 0,6 \mathfrak{P}_6.$$

Wenn man sich statt der Vertikale I in I und 1 in der Richtung von I 1 und 1 I die Kräfte 1 wirkend denkt, so ergibt sich durch das Gleichgewicht der Knotenpunkte 0, I und 1 zunächst $S_1 = 0, \mathfrak{S}_1 = 0, P_2 = - 1, \mathfrak{P}_2 = - 1,281$. Im Uebrigen gelten die eben aufgestellten Formeln, wenn man $M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0, Q_3 = Q_4 = 0, M_1' = M_2' = M_3' = \dots = 0$ und bei den rechts fallenden Stäben $M_1 = - 9$, bei den links fallenden $M_1 = - 6$ setzt. Hierdurch ergeben sich die oben mit u bezeichneten Spannungen, welche nebst den Werthen von λ, f, k, uk, u^2k in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

Theil	Nummer	Länge l	Querschnitt f	$k = \frac{l}{f}$	u	uk	u^2k
Obergurt	1	750	302	2,57	0	0	0
	2	671	302	2,22	+ 0,894	+ 1,98	1,775
	3	618	275	2,25	- 0,412	- 0,93	0,386
	4	600	275	2,25	+ 0,333	+ 0,75	0,250
	5	618	275	2,25	- 0,412	- 0,93	0,386
	6	671	302	2,22	+ 0,894	+ 1,98	1,775
	7	750	302	2,57	0	0	0
Untergurt	1	600	233	2,58	0	0	0
	2	600	224	2,68	+ 0,800	+ 2,14	1,715
	3	600	224	2,68	- 0,400	- 1,07	0,429
	4	600	224	2,68	+ 0,333	+ 0,89	0,298
	5	600	224	2,68	- 0,400	- 1,07	0,429
	6	600	224	2,68	+ 0,800	+ 2,14	1,715
	7	600	233	2,58	0	0	0
Rechts fallende Stäbe	2	750	53	19,23	- 1,000	- 19,23	19,23
	3	961	52	20,88	+ 0,640	+ 13,36	8,55
	4	1082	53	20,41	- 0,601	- 12,27	7,37
	5	1082	46	20,80	+ 0,721	+ 15,00	10,82
	6	961	39	18,12	- 1,281	- 23,21	29,73
	Links fallende Stäbe	2	961	39	18,12	- 1,281	- 23,21
3		1082	46	20,80	+ 0,721	+ 15,00	10,82
4		1082	53	20,41	- 0,601	- 12,27	7,37
5		961	52	20,88	+ 0,640	+ 13,36	8,55
6		750	53	19,23	- 1,000	- 19,23	19,23
Vertikalen		1	450	35	12,86	+ 1,000	+ 12,86
	6	450	35	12,86	+ 1,000	+ 12,86	12,86
		Centi- meter	<input type="checkbox"/> Centi- meter				173,42

Hiernach würde zu setzen sein:

$$V = - \frac{\Sigma(uk \mathcal{E})}{173,42} = - 0,000766 \Sigma(uk \mathcal{E}).$$

Um nun den Einfluss einer beliebigen Belastung leicht untersuchen zu können, nehmen wir zunächst eine Last = 1 der Reihe nach in den Knotenpunkten I bis VI an. Wir wollen nur beispielsweise die Belastung mit 1 im Knotenpunkte II durchführen. Hier wird für die rechts fallenden Stäbe: $M_1 = +\frac{15}{7}$, $M_2 = +\frac{90}{7}$, $Q_3 = -\frac{4}{7}$, $M_4 = -\frac{54}{7}$, $M_5 = -\frac{9}{7}$, für die links fallenden Stäbe $M_1 = 0$, $M_2 = +\frac{90}{7}$, $M_3 = +\frac{102}{7}$, $Q_4 = +\frac{2}{7}$, $M_5 = +\frac{36}{7}$; ferner $M_1' = M_2' = \dots = \frac{30}{7}, \frac{60}{7}, \frac{48}{7}, \frac{36}{7}, \frac{24}{7}, \frac{12}{7}$.

Die hiernach berechneten Werthe von \mathcal{S} , sowie von $uk\mathcal{S}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Theil	Nummer	Spannung \mathcal{S} (für $V=0$)	$uk\mathcal{S}$	uV	S	Näherungs- werth von S
Oberquert	1	- 1,190	0	0	- 1,190	- 1,190
	2	- 1,277	- 2,528	- 0,509	- 1,786	- 1,498
	3	- 1,375	+ 1,279	+ 0,234	- 1,141	- 1,309
	4	- 0,413	- 0,310	- 0,190	- 0,603	- 0,623
	5	- 0,903	+ 0,840	+ 0,234	- 0,669	- 0,643
	6	+ 0,258	+ 0,511	- 0,509	- 0,241	- 0,426
	7	- 0,476	0	0	- 0,476	- 0,476
Unterguert	1	+ 0,952	0	0	+ 0,952	+ 0,952
	2	+ 0,952	+ 2,037	- 0,455	+ 0,497	+ 0,952
	3	+ 0,571	- 0,611	+ 0,228	+ 0,799	+ 0,762
	4	+ 0,921	+ 0,820	- 0,190	+ 0,731	+ 0,762
	5	+ 0,152	- 0,163	+ 0,228	+ 0,380	+ 0,457
	6	+ 1,067	+ 2,283	- 0,455	+ 0,612	+ 0,457
	7	+ 0,381	0	0	+ 0,381	+ 0,381
Rechts fallende Stäbe	2	+ 0,238	- 4,577	+ 0,569	+ 0,807	+ 0,397
	3	+ 0,305	+ 4,075	- 0,364	- 0,059	0
	4	- 0,629	+ 7,718	+ 0,342	- 0,287	- 0,250
	5	+ 0,549	+ 8,235	- 0,410	+ 0,139	0
	6	- 1,098	+ 25,485	+ 0,729	- 0,369	- 0,122
Links fallende Stäbe	2	0	0	+ 0,729	+ 0,729	0
	3	+ 1,030	+ 15,450	- 0,410	+ 0,620	+ 0,916
	4	- 0,286	+ 3,509	+ 0,342	+ 0,056	0
	5	+ 0,671	+ 8,965	- 0,364	+ 0,307	+ 0,266
	6	- 0,762	+ 14,653	+ 0,569	- 0,193	0
Verti- kalen	1	0	0	- 0,569	- 0,569	0
	6	+ 0,857	+ 11,021	- 0,569	+ 0,288	+ 0,095
			+ 98,692			

Sonach wird

$$V = - 0,005766 \cdot 98,692 = - 0,569.$$

Die hiernach berechneten Werthe von uV und $S = \mathcal{S} + uV$ sind ebenfalls in der vorigen Tabelle zusammengestellt. In der letzten Rubrik sind noch die Näherungswerte von S enthalten, welche sich durch Zerlegung in zwei Elementarsysteme ergeben, von denen das eine die Stäbe I I 2 III 4 V 6, das andere die Stäbe 1 II 3 IV 5 VI 6 enthält.

Es genügt, wenn man in dieser Weise die Belastungen der Punkte I, II, III untersucht, da sich bei der Belastung von IV, V, VI dieselben Spannungen, nur in umgekehrter Reihenfolge ergeben, wie bei der Belastung von bezüglich III, II, I. Die Resultate enthält die folgende Tabelle:

Theil	Nummer	Spannung bei Belastung von					
		I	II	III	IV	V	VI
Obergurt	1	- 1,429	- 1,191	- 0,952	- 0,714	- 0,476	- 0,238
	2	- 1,004	- 1,786	- 0,442	- 1,122	- 0,241	- 0,240
	3	- 0,518	- 1,141	- 1,367	- 0,661	- 0,669	- 0,282
	4	- 0,343	- 0,603	- 1,181	- 1,181	- 0,603	- 0,343
Untergurt	1	+ 1,142	+ 0,952	+ 0,762	+ 0,572	+ 0,381	+ 0,190
	2	+ 0,814	+ 0,497	+ 1,281	+ 0,252	+ 0,612	+ 0,204
	3	+ 0,450	+ 0,799	+ 0,730	+ 0,902	+ 0,380	+ 0,241
	4	+ 0,323	+ 0,731	+ 0,819	+ 0,819	+ 0,731	+ 0,323
Rechts fallende Stäbe	2	- 0,303	+ 0,807	- 0,835	- 0,541	- 0,193	+ 0,030
	3	- 0,111	- 0,059	+ 0,659	+ 0,073	+ 0,307	+ 0,072
	4	- 0,068	- 0,287	+ 0,068	- 0,582	+ 0,056	+ 0,103
Links fallende Stäbe	2	+ 0,525	+ 0,729	- 0,835	+ 0,507	- 0,369	- 0,025
	3	+ 0,219	+ 0,620	+ 0,331	- 0,390	+ 0,139	- 0,025
	4	+ 0,103	+ 0,056	+ 0,582	+ 0,068	- 0,287	- 0,068
Vertikale	1	+ 0,589	- 0,569	+ 0,649	- 0,398	+ 0,288	- 0,017

Mit Hilfe dieser Zahlen ist es nun leicht, die Spannungen bei jeder beliebigen Belastung, also auch die Spannungsgrenzen, zu bestimmen. Dieselben sind in der Tabelle auf folgender Seite mit den durch Zerlegung in zwei Elementarsysteme erhaltenen Spannungsgrenzen zusammengestellt.

Man sieht hieraus, dass die Zerlegung in Elementarsysteme zwar hinsichtlich der Gurte ziemlich richtige Resultate, für die Gitterstäbe aber ziemlich falsche Resultate liefert.

Die Fehler, welche durch Anwendung der Zerlegung in Elementarsysteme entstehen, werden um so grösser, je mehr der Träger vom Parallelträger abweicht. Bei Träger ohne Endhöhe empfiehlt sich stets die Anwendung der genaueren Methode.

§. 100. Träger mit mehr als zweitheiligem Netzwerke.

a. Die Anordnung der Enden erfolge zunächst nach Fig. 43 (S. 49). Ist m die Anzahl der Theile eines Gurtes, so ist bei ungerader Theilungszahl n (Fig. 157) die Anzahl der Unbekannten $4m + 2n + 4$, die

Theil	Nummer	G e n a u			A n n ä h e r n d			
		Spannung durch das Eigengewicht	Spannungsgrenzen durch die zuf. Last		Spannung durch das Eigengewicht	Spannungsgrenzen durch die zuf. Last		
			Zug	Druck		Zug	Druck	
Oberquert	1	- 48,0	0	126,0	- 48,0	0	126,0	
	2	- 46,4	0	121,8	- 49,8	0	130,8	
	3	- 44,5	0	116,9	45,3	0	118,8	
	4	- 40,8	0	107,2	- 43,9	0	115,2	
Unterguert	1	+ 38,4	100,8	0	+ 38,4	100,8	0	
	2	+ 35,1	92,2	0	+ 35,1	92,2	0	
	3	+ 33,6	88,3	0	+ 36,9	97,0	0	
	4	+ 36,0	94,4	0	+ 36,6	96,0	0	
Rechts fallende Stäbe	2	+ 0,5	20,5	19,3	+ 6,9	18,0	0	
	3	+ 7,6	23,9	3,9	+ 5,3	20,1	6,3	
	4	+ 4,4	19,7	8,2	+ 6,6	23,6	6,3	
Links fallende Last	2	+ 5,1	32,8	19,3	+ 2,6	11,5	4,6	
	3	+ 8,6	29,2	6,6	+ 3,3	11,5	2,9	
	4	+ 4,4	19,7	8,3	+ 6,6	23,6	6,3	
Vertikale	1	+ 5,2	25,6	11,9	+ 5,5	14,4	0	
				Tonnen				
					Tonnen			

Anzahl der Knotenpunkte = $2m + n + 2$, somit ist hier kein überzähliger Stab vorhanden, das System ist also statisch bestimmt. Bei gerader Theilungszahl n (Fig. 156) ist die Anzahl der Unbekannten = $4m + 2n + 1$, die Anzahl der Knotenpunkte = $2m + n$, also die Anzahl der überzähligen Stäbe = $4m + 2n + 1 - 2(2m + n) = 1$.

Die Behandlung kann hier in folgender Weise erfolgen. Man führt die Spannungen der einzelnen Theile beider Endpfosten als Unbekannte ein; nur bei ungeradem n ist die Spannung eines Endstückes direkt gegeben. Man hat so bei ungerader Theilungszahl $n - 1$, bei gerader Theilungszahl n Unbekannte. Durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des linken Endpfostens erhält man die Ausdrücke für die Spannungen sämtlicher anschliessender Gitterstäbe. Indem man nun Schnitte in Richtung der einen und anderen Stabschaar legt und die Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehung um den Durch-

schnittpunkt der Verlängerungen der geschnittenen Gurte, bezüglich Pfostenstücke aufstellt, oder durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte erhält man allmählich die Ausdrücke für die Spannungen aller Gitterstäbe. Jetzt stellt man die Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des rechten Pfostens auf und zwar für die Endpunkte gegen vertikale Verschiebung, für die Zwischen-Knotenpunkte gegen vertikale und horizontale Verschiebung. Man erhält hierdurch n

Fig. 156.

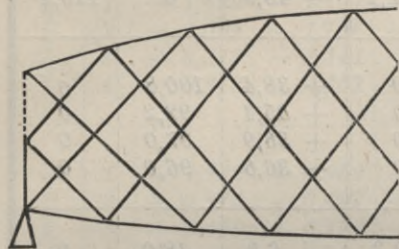
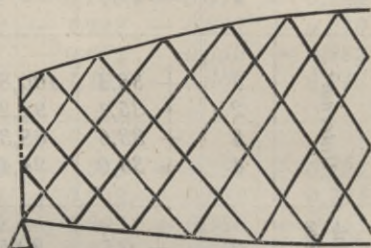


Fig. 157.



Gleichungen, in welche die Ausdrücke für die Stabspannungen einzusetzen sind. Eine dieser Gleichungen ist durch die übrigen bedingt, so dass nur $n - 1$ Gleichungen zu verwerthen sind. Bei ungerader Theilungszahl sind dieselben ausreichend, während bei gerader Theilungszahl eine Gleichung fehlt. Diese Gleichung ist nach §. 96 aufzustellen, wobei als überzähliger Stab irgend ein Theil eines Endpfostens angenommen werden kann.

Sind in dieser Weise die Spannungen der Gitterstäbe bestimmt, so ergeben sich die Gurtspannungen leicht durch beliebige Schnitte und Aufstellung des Gleichgewichtes gegen Drehung um den Schnitt mit dem einen Gurte.

Bei Parallelträgern ergibt sich der Fehler gegen die durch Zerlegung in Elementarsysteme erhaltenen Resultate bei Stäben ein- und desselben Systemes auch hier konstant.

b. Die Anordnung der Enden erfolge jetzt nach Fig. 44 (Seite 51). Ist die Theilungszahl n des Gitterwerkes gerade (Fig. 158), so ist die Anzahl der Unbekannten, einschliesslich der drei auf die äusseren Kräfte bezüglichen, $= 4m + n + 3$, die Anzahl der Knotenpunkte $2(m + 1)$, also die Anzahl der überzähligen Stücke $4m + n + 3 - 4(m + 1) = n - 1$. Bei ungerader Theilungszahl n (Fig. 159) habe der eine Gurt m , der andere $m + 1$ Theile; die Anzahl der Unbekannten ist hier $4m + n + 5$, die Anzahl der Knotenpunkte $2m + 3$, also die Anzahl der überzähligen Stücke $4m + n + 5 - 2(2m + 3)$, d. i. ebenfalls $= n - 1$. Bei 2-, 3-, 4-, 5-, 6-theiligem Netzwerke sind also bezüglich 1, 2, 3, 4, 5 überzählige Theile vorhanden.

Als überzählige Stäbe kann man hier die erste Vertikale, sowie die sämtlichen anschliessenden Diagonalen mit unregelmässiger Lage, das sind die in Fig. 158 und 159 punktirt angegebenen Stäbe, annehmen. Die weitere Behandlung kann alsdann ganz wie beim zweitheiligen Systeme erfolgen.

Fig. 158.

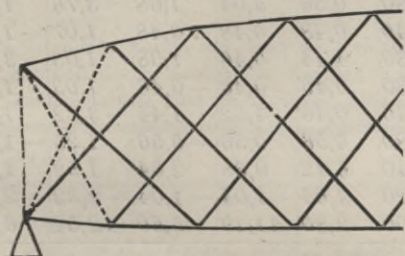
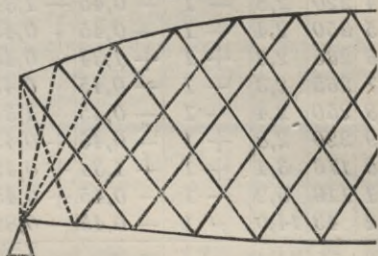


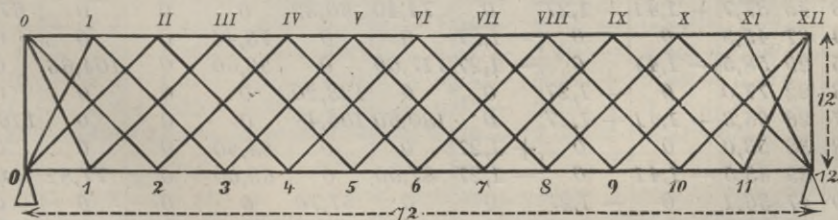
Fig. 159.



Man kann aber auch $n - 1$ beisammen liegende Stäbe ein und derselben Schaar oder beider Schaaren, etwa in der Mitte des Trägers, als überzählige Stäbe annehmen, so dass sich hier Schnitte legen lassen, welche 1, 2, 3... Stäbe treffen, wodurch die allmähliche Bestimmung der Spannungen möglich wird.

Beispiel. Parallelträger mit viertheiligem Netzwerke von 72^m Spannweite, 12^m Trägerhöhe und 6^m Knotenweite nach Fig. 160. Die Querschnittsflächen f , welche nach einer Näherungstheorie berechnet sind, sowie die entsprechenden Werthe von $k = \frac{\lambda}{f}$ enthält die folgende Tabelle. Als überzählige Stäbe sind die Stäbe $A' = 00$, $A'' = 0I$ und $A''' = 0I$ angenommen. Die für diese bestimmten Werthe von u'

Fig. 160.



u'' , u''' , ku'^2 , ku''^2 , ku'''^2 , $ku''u'''$, $ku'''u'$ und $ku'u''$ sind ebenfalls in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Für den Untergurt sind die Zahlen weggelassen, da die Zahlen für f , k , u' , ku'^2 , $ku''u'''$ dieselben bleiben, wie beim Obergurt, während sich u'' und u''' , ku''^2 und ku'''^2 , sowie $ku'''u'$ und $ku'u''$ gegenseitig vertauschen.

Theil	Nr.	f	k	u'	u''	u'''	ku ²	ku'' ²	ku''' ²	ku''u'''	ku'''u''	ku''u''
Obergurt	1	43	14,0	+ 1	0	+ 0,45	14,00	0	2,80	0	6,26	0
	2	116	5,2	+ 1	+ 1,34	+ 0,45	5,20	9,36	1,04	3,12	2,32	6,97
	3	176	3,4	- 1	- 0,45	+ 0,45	3,40	0,68	0,68	- 0,68	- 1,52	1,52
	4	220	2,8	- 1	- 0,45	- 1,34	2,80	0,56	5,04	1,68	3,76	1,25
	5	250	2,4	+ 1	- 0,45	+ 0,45	2,40	0,48	0,48	- 0,48	1,07	- 1,07
	6	265	2,3	+ 1	+ 1,34	+ 0,45	2,30	4,14	0,46	1,38	1,03	3,09
	7	265	2,3	- 1	- 0,45	+ 0,45	2,30	0,46	0,46	- 0,46	- 1,03	1,03
	8	250	2,4	- 1	- 0,45	- 1,34	2,40	0,48	4,32	1,44	3,22	1,07
	9	220	2,8	+ 1	- 0,45	+ 0,45	2,80	0,56	0,56	- 0,56	1,25	- 1,25
	10	176	3,4	+ 1	+ 1,34	+ 0,45	3,40	6,12	0,68	2,04	1,52	4,56
	11	116	5,2	- 1	- 0,45	+ 0,45	5,20	1,04	1,04	- 1,04	- 2,32	2,32
	12	43	14,0	- 1	- 0,45	- 0,89	14,00	2,80	11,19	5,60	12,52	6,26
Links fallende Stäbe	0	54	31,4		+ 1			31,40				
	1	55	30,9	- 1,41	- 1,27	0	61,80	49,44	0	0	0	55,28
	2	47	36,1	0	0	- 1,27	0	0	57,76	0	0	0
	3	39	43,5	+ 1,41	0	+ 1,27	87,00	0	49,60	0	77,82	0
	4	32	53,0	0	+ 1,27	0	0	84,80	0	0	0	0
	5	26	65,3	- 1,41	- 1,27	0	130,60	104,48	0	0	0	116,82
	6	22	77,0	0	0	- 1,27	0	0	123,20	0	0	0
	7	29	58,5	+ 1,41	0	+ 1,27	117,00	0	93,60	0	104,66	0
	8	37	45,9	0	+ 1,27	0	0	73,44	0	0	0	0
	9	45	37,7	- 1,41	- 1,27	0	74,40	60,32	0	0	0	67,45
	10	55	30,9	0	0	- 1,27	0	0	49,44	0	0	0
	11	65	26,1	+ 1,41	0	+ 1,27	52,20	0	41,76	0	46,69	0
12	61	27,8	0	+ 1	0	0	27,80	0	0	0	0	
Rechts fallende Stäbe	0	61	27,8			+ 1			27,80			
	1	65	26,1	- 1,41	0	- 1,27	52,20	0	41,76	0	46,69	0
	2	55	30,9	0	- 1,27	0	0	49,44	0	0	0	0
	3	45	37,7	+ 1,41	+ 1,27	0	74,40	60,32	0	0	0	67,45
	4	37	45,9	0	0	+ 1,27	0	0	73,44	0	0	0
	5	29	58,5	- 1,41	0	- 1,27	117,00	0	93,60	0	104,66	0
	6	22	77,0	0	- 1,27	0	0	123,20	0	0	0	0
	7	26	65,3	+ 1,41	+ 1,27	0	130,60	104,48	0	0	0	116,82
	8	32	53,0	0	0	+ 1,27	0	0	84,80	0	0	0
	9	39	43,5	- 1,41	0	- 1,27	87,00	0	69,60	0	77,82	0
	10	47	36,1	0	- 1,27	0	0	57,76	0	0	0	0
	11	55	30,9	+ 1,41	+ 1,27	0	61,80	49,40	0	0	0	55,28
12	54	31,4	0	0	+ 1	0	0	31,40	0	0	0	
Vertik.	0	87	13,8	+ 1			13,80					
	12	87	13,8	- 1	- 0,89	- 0,89	13,80	11,04	11,04	11,04	12,34	12,34
Summe für	Obergurt						60,2	26,7	28,7	12,0	28,1	25,7
	Untergurt						60,2	28,7	26,7	12,0	25,7	28,1
	Links fallende Stäbe ...						523,0	431,7	415,4	0	229,2	239,6
	Rechts fallende Stäbe ...						523,0	444,6	422,4	0	229,2	239,6
	Vertikalen						27,6	11,0	11,0	11,0	12,3	12,3
Totalsumme						1194,0	942,7	904,2	35,0	524,5	545,3	

Setzen wir nun zur Abkürzung $\Sigma(ku\mathcal{S}) = C', C'', C'''$, je nachdem sich u auf den Stab A', A'', A''' bezieht, so wird nach den Gleichungen 5:

$$1194,0 S' + 545,3 S'' + 524,5 S''' = - C',$$

$$545,3 S' + 942,8 S'' + 35,1 S''' = - C'',$$

$$524,5 S' + 35,1 S'' + 904,2 S''' = - C'''.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$a. \begin{cases} S' = - 0,001676 C' + 0,000935 C'' + 0,000936 C''', \\ S'' = + 0,000934 C' - 0,001583 C'' - 0,000480 C''', \\ S''' = + 0,000937 C' - 0,000482 C'' - 0,001632 C'''. \end{cases}$$

Wir wollen nur noch eine einzige Belastungsweise beispielsweise untersuchen, nämlich die Belastung des Punktes V des Untergurtes durch die Last 1. Die Rechnungsergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Theil	Nr.	ku'	ku''	ku'''	\mathcal{S}	$ku'\mathcal{S}$	$ku''\mathcal{S}$	$ku'''\mathcal{S}$	S	
									genau	annähernd
Obergurt	1	+14,0	0	+6,26	0	0	0	0	-0,288	-0,292
	2	+5,2	+6,97	+2,32	0	0	0	0	-0,272	-0,292
	3	-3,4	-1,52	+1,52	-1,167	+3,97	+1,77	-1,77	-0,244	-0,292
	4	-2,8	-1,25	-3,75	-1,167	+3,27	+1,46	+4,37	-1,526	-1,458
	5	+2,4	-1,08	+1,08	-1,167	-2,80	+1,26	-1,26	-1,460	-1,458
	6	+2,3	+3,08	+1,03	-1,167	-2,68	-3,59	-1,20	-1,439	-1,458
	7	-2,3	-1,03	+1,03	-2,333	+5,37	+2,40	-2,40	-1,410	-1,458
	8	-2,4	-1,08	-3,22	-0,333	+0,80	+0,36	+1,07	-0,792	-0,625
	9	+2,8	-1,25	+1,25	-0,333	-0,93	+0,42	-0,42	-0,626	-0,625
	10	+3,4	+4,56	+1,52	-0,333	-1,13	+1,52	-0,51	-0,605	-0,625
	11	-5,2	-2,34	+2,34	-1,500	+7,80	+3,51	-3,51	-0,577	-0,625
	12	-14,0	-6,26	+12,52	0	0	0	0	-0,038	0
Untergurt	1	+14,0	+6,26	0	+0,583	+8,16	+3,65	0	-0,020	0
	2	+5,2	+2,32	+6,97	+0,583	+3,03	+1,35	+4,06	+0,942	+0,875
	3	-3,4	+1,52	-1,52	+0,583	-1,98	+0,89	-0,89	+0,876	+0,875
	4	-2,8	-3,75	-1,25	+0,583	-1,63	-2,19	-0,73	+0,855	+0,875
	5	+2,4	+1,08	-1,08	+1,750	+4,20	+1,89	-1,89	+0,827	+0,875
	6	+2,3	+1,03	+3,08	+0,750	+1,72	+0,77	+2,31	+1,109	+1,042
	7	-2,3	+1,03	-1,03	+0,750	-1,72	+0,77	-0,77	+1,043	+1,042
	8	-2,4	-3,22	-1,08	+0,750	-1,80	-2,41	-0,81	+1,022	+1,042
	9	+2,8	+1,25	-1,25	+1,917	+5,37	+2,40	-2,40	+0,994	+1,042
	10	+3,4	+1,52	-4,56	-0,083	-0,28	-0,13	+6,38	+0,276	+0,208
	11	-5,2	+2,32	-2,32	-0,083	+0,43	-0,19	+0,19	+0,210	+0,208
	12	-14,0	+12,52	-6,26	-0,083	+1,16	-1,04	+0,52	+0,194	+0,208
Links fallende Stäbe	0		+31,4						+0,012	0
	1	-43,7	-39,1	0	-0,825	+36,05	+32,26	0	+0,020	0
	2	0	0	-45,8	0	0	0	0	-0,907	-0,825
	3	+61,3	0	+55,2	0	0	0	0	+0,047	0
	4	0	-67,0	0	0	0	0	0	+0,015	0
	5	-92,3	-82,6	0	-0,825	+76,15	+68,15	0	+0,020	0
	6	0	0	-97,8	+1,414	0	0	-138,29	+0,507	+0,589
	7	+82,7	0	+74,3	0	0	0	0	+0,047	0
	8	0	+58,1	0	0	0	0	0	+0,015	0
	9	-53,3	-47,7	0	-0,825	+44,07	+39,35	0	+0,020	0
	10	0	0	-39,2	+1,414	0	0	-55,43	+0,507	+0,589
	11	+36,8	0	+33,1	0	0	0	0	+0,047	0
12	0	+27,8	0	0	0	0	0	+0,012	0	
Seitenbetrag					+186,6	+154,6	-199,2			

den Einfluss einer ganz beliebigen Belastung durch blosse Addition abzuleiten, ist dies beim Fachwerke mit schlaffen Diagonalen nicht mehr möglich, weil die auf Zug beanspruchten Diagonalen für verschiedene Belastungen nicht dieselben sind. Hier bleibt nichts übrig, als sogleich eine der gefährlichsten Belastungsweise entsprechende Belastung sämtlicher Knotenpunkte vorauszusetzen. Bei Annahme einer gleichmässigen Belastung wird die anzunehmende Belastung für sämtliche Gurtstücke dieselbe, für jeden Gitterstab dagegen eine verschiedene sein. Welche Diagonalen gezogen sind, lässt sich nach §. 44 leicht bestimmen, wenn man für die einzelnen Vertikalen die Werthe von $\frac{M}{h}$ bestimmt.

Bei einem zweitheiligen Fachwerke zeigt sich an der Uebergangsstelle die in Fig. 161 dargestellte Anordnung. Wenn man einen der Stäbe AB und CD ausschaltet, so kann man durch zwei Stäbe Schnitte legen, welche nur drei Theile treffen, so dass sich die Spannungen allmählich bestimmen lassen. Hier ist also ein überzähliger Stab vorhanden, als welchen man am besten einen der Stäbe AB und CD annehmen wird.

Bei einem viertheiligen Fachwerke entsteht an der Uebergangsstelle die Anordnung Fig. 162.

Hier wird es erst nach Ausschaltung von drei Stäben möglich, Schnitte zu legen, welche nur drei Theile treffen, so dass hier drei überzählige Stäbe vorhanden sind, als welche man die drei letzten Stäbe der einen Schaar, oder die zwei letzten der einen und den letzten der anderen Schaar annehmen kann.

Die weitere Behandlung ist dieselbe, wie beim Netzwerke.

Beispiel. Parallelträger von 30^m Spannweite, 8^m Höhe mit zweitheiligem Fachwerke und unten liegender Bahn (Fig. 163). Das Eigengewicht, welches wir nur an den unteren Knotenpunkten wirkend denken wollen, sei pro Knotenpunkt = 1, die zufällige Last pro Knotenpunkt = 2, also die Gesamtlast = 3. Wir wollen die Maximalspannung der Diagonale III 5 und der Vertikale III 3 bestimmen, für welche Stäbe die Knotenpunkte 4 bis 9 mit der zufälligen Last belastet anzunehmen sind. Bei dieser Belastung ergeben sich als Momente:

Punkt	3	4	5	6	7	8
$M =$	69,3	86,4	94,5	93,6	83,7	64,8.

Hiernach sind in den Feldern 3 5, 4 6 die rechts fallenden, in den Feldern 5 7, 6 8 die links fallenden Diagonalen gezogen, so dass die in Wirksamkeit tretenden Stäbe

Fig. 161.

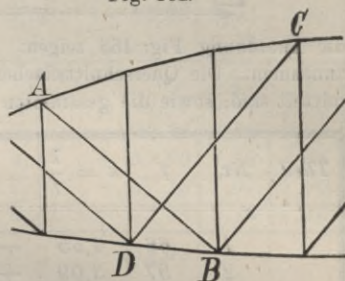


Fig. 162.

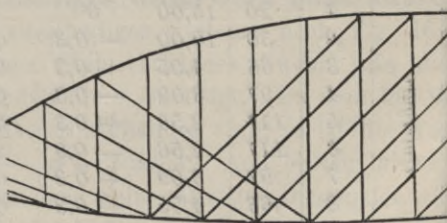
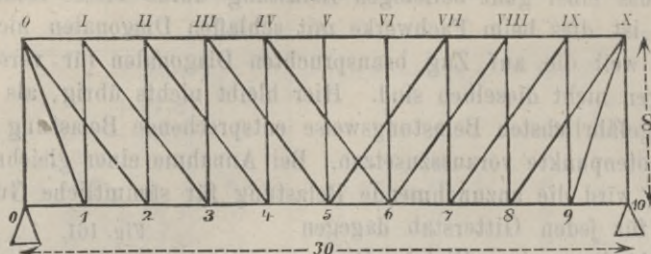


Fig. 163.



die Anordnung Fig. 163 zeigen. Den Stab IV 6 wollen wir als überzähligen Stab annehmen. Die Querschnittsflächen, welche durch Zerlegung in Elementarsysteme ermittelt sind, sowie die gesammten Rechnungsergebnisse gibt die folgende Tabelle:

Theil	Nr.	f	$k = \frac{\lambda}{f}$	u	$u^2 k$	Σ	$u k \Sigma$	S	
								genau	an-nähernd
Oberquert	1	66	4,55	- 0,3	0,41	4,76	+ 6,50	4,89	4,92
	2	97	3,09	+ 0,3	0,28	7,54	- 6,99	7,41	7,39
	3	117	2,56	- 0,3	0,23	9,79	+ 7,52	9,92	9,94
	4	128	2,34	+ 0,3	0,21	11,81	- 8,29	11,68	11,66
	5	130	2,31	- 0,3	0,21	11,81	+ 8,18	11,94	11,96
	6	130	2,31	- 0,3	0,21	11,81	+ 8,18	11,94	11,96
	7	128	2,34	- 0,3	0,21	11,81	+ 8,29	11,94	11,96
	8	117	2,56	+ 0,3	0,23	11,59	- 8,90	11,46	11,44
	9	97	3,09	- 0,3	0,28	9,34	+ 8,66	9,47	9,49
	10	66	4,55	+ 0,3	0,41	6,86	- 9,36	6,73	6,71
Unterquert	1	20	15,00	0	0	+	0	+	+
	2	30	10,00	- 0,3	0,90	1,76	- 5,18	1,63	1,62
	3	66	4,55	+ 0,3	0,41	4,76	+ 6,50	4,89	4,92
	4	97	3,09	- 0,3	0,28	7,54	- 6,99	7,41	7,39
	5	117	2,56	+ 0,3	0,23	9,79	+ 7,52	9,92	9,94
	6	117	2,56	- 0,9	2,07	11,59	- 26,70	11,20	11,14
	7	97	3,09	+ 0,3	0,28	9,34	+ 8,66	9,47	9,49
	8	66	4,55	- 0,3	0,41	6,86	- 9,36	6,73	6,71
	9	30	10,00	+ 0,3	0,90	2,36	+ 7,08	2,49	2,51
	10	20	15,00	0	0	0	0	0	0
Vertikalen	0	150	5,33	0	0	-	0	-	-
	1	50	16,00	+ 0,8	10,24	3,70	- 47,36	3,35	3,30
	2	40	20,00	- 0,8	12,80	3,00	+ 48,00	3,35	3,40
	3	32	25,00	+ 0,8	16,00	2,70	- 54,00	2,35	2,30
	4	32	25,00	- 0,8	16,00	0	0	0,35	0,40
	5	32	25,00	0	0	0	0	0	0
	6	32	25,00	0	0	0	0	0	0
	7	32	25,00	- 0,8	16,00	0,30	+ 6,00	0,65	0,70
	8	40	20,00	+ 0,8	12,80	3,00	- 48,00	2,65	2,60
	9	50	16,00	- 0,8	10,24	3,30	+ 42,24	3,65	3,70
10	150	5,33	0	0	12,30	0	14,30	12,30	
Seitenbetrag. ...					207,29		- 30,17		

Theil	Nr.	f	$k = \frac{\lambda}{f}$	u	$u^2 k$	\mathcal{E}	$u k \mathcal{E}$	S	
								genau	an-nähernd
Uebertrag					207,29		- 30,17		
Rechts fallende Diagonalen	0	80	10,68	- 0,85	7,79	5,02	- 45,79	4,65	4,59
	1	86	11,62	+ 1	11,62	5,00	+ 58,10	5,43	5,50
	2	69	14,50	- 1	14,50	4,63	- 67,14	4,20	4,13
	3	52	19,23	+ 1	19,23	3,75	+ 72,11	4,18	4,25
	4	36	27,78	- 1	27,78	3,38	- 93,90	2,95	2,88
	5	22	45,46	+ 1	45,46	-	-	0,43	0,50
Links fallende Diagonalen	8	36	27,78	+ 1	27,78	0,38	+ 10,56	0,81	0,88
	9	52	19,23	- 1	19,23	3,75	- 72,11	3,32	3,25
	10	69	14,50	+ 1	14,50	4,13	+ 59,89	4,56	4,63
	11	86	11,62	- 1	11,62	7,50	- 87,15	7,07	7,00
	12	80	10,68	+ 0,85	7,79	6,73	+ 61,38	7,10	7,16
	Summe					309,53		- 134,42	

Hiernach wird die Spannung S' des überzähligen Stabes IV 6

$$S' = + \frac{134,42}{309,53} = + 0,434,$$

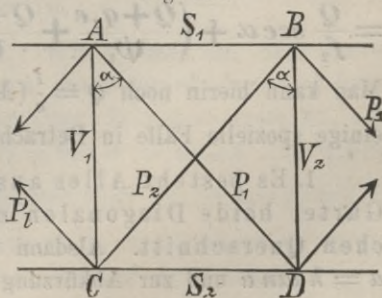
also die Spannung eines beliebigen Stabes $S = \mathcal{E} + 0,434u$.

Die Maximalspannung der Vertikale III 3 und der Diagonale III 5 ergibt sich bezüglich - 2,35 und + 2,90, durch Zerlegung in Elementarsysteme zu - 2,30 und + 2,88, also bezüglich um 2,1 und 0,7 Prozent zu klein.

§. 102. Kombiniertes zweitheiliges Gitterwerk ohne künstliche Anspannung. Bei einem zweitheiligen Systeme nach Fig. 164 ist, wie wir wissen, ein überzähliger Stab vorhanden, wenn man die Zwischenvertikalen, ausser den Endständern beseitigt. Da nun bei m Fächern noch $m - 1$ Zwischenvertikalen vorhanden sind, so ist die Anzahl der überzähligen Stäbe $= 1 + m - 1 = m$. Am besten nimmt man hier die sämtlichen nach derselben Seite fallenden Diagonalen als überzählige Stäbe an. Bringt man statt eines solchen die entsprechenden Spannungen an, so entstehen hierdurch nur Spannungen in den fünf Stäben des betreffenden Faches; für sämtliche übrige Theile wird $u = 0$.

Wir wollen speziell noch einen Parallelträger in Betracht ziehen. In einem beliebigen Fache seien die Spannungen, welche nach dem Auslösen der rechts fallenden Diagonalen durch die Belastung entstehen, für Ober- und Untergurt $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, für die linke und rechte Vertikale V_1, V_2 , für die links fallende Diagonale P_2 , die wirklichen Spannungen bezüglich S_1, S_2, V_1, V_2, P_2

Fig. 164.



(Fig. 164). Die Spannung P_1 der rechts fallenden Diagonale erzeugt in den Gurten die Spannung $-P_1 \sin \alpha$, in den Vertikalen die Spannung $-P_1 \cos \alpha$ und in der links fallenden Diagonale die Spannung $+P_1$. Bezeichnen wir nun noch die Spannungen der rechts fallenden Diagonalen im vorhergehenden und im folgenden Fache mit P_l, P_r , so entstehen durch diese in den Vertikalen die Spannungen $-P_l \cos \alpha$ und $-P_r \cos \alpha$. Die Gleichung 8 (S. 244) geht hierdurch über in:

$$\left(\frac{\mathfrak{E}_1 - P_1 \sin \alpha}{\varphi_1} + \frac{\mathfrak{E}_2 - P_1 \sin \alpha}{\varphi_2} \right) \sin^2 \alpha + \left[\frac{\mathfrak{B}_1 - (P_l + P_1) \cos \alpha}{\psi_1} + \frac{\mathfrak{B}_2 - (P_l + P_r) \cos \alpha}{\psi_2} \right] \cos^2 \alpha = \frac{P_1}{f_1} + \frac{\mathfrak{B}_2 + P_1}{f_1}$$

oder

$$22. \frac{P_l}{\psi_1} \cos^3 \alpha + P_1 \left\{ \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) + \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) \sin^3 \alpha + \left(\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2} \right) \cos^3 \alpha \right\} + \frac{P_r}{\psi_2} \cos^3 \alpha = \left(\frac{\mathfrak{E}_1}{\varphi_1} + \frac{\mathfrak{E}_2}{\varphi_2} \right) \sin^2 \alpha + \left(\frac{\mathfrak{B}_1}{\psi_1} + \frac{\mathfrak{B}_2}{\psi_2} \right) \cos^2 \alpha - \frac{\mathfrak{B}_2}{f_2}$$

Für jedes Fach ergibt sich eine solche Gleichung, so dass man m Gleichungen zur Bestimmung der m rechts fallenden Diagonalen erhält.

Hierbei ist für sämtliche Theile gleiches Material vorausgesetzt. Im Allgemeinen wird man aber den Querschnitt jedes Theiles noch mit dem entsprechenden Elastizitätskoeffizienten zu multiplizieren haben.

Annähernd wird man für die Mittelfächer $\frac{P_l}{\psi_1} + \frac{P_r}{\psi_2} = \frac{P_1}{\psi_1} + \frac{P_1}{\psi_2}$ setzen können. Bezeichnet man ausserdem noch die Transversalkraft für einen durch das Fach gelegten Schnitt mit Q , die Momente für die linke und rechte Vertikale mit M_1, M_2 , die Last pro Längeneinheit für Ober- und Untergurt mit q_1, q_2 , so ist $\mathfrak{E}_1 = -\frac{M_1}{h}$, $\mathfrak{E}_2 = +\frac{M_2}{h}$, $\mathfrak{B}_2 = -Q \sec \alpha$, $\mathfrak{B}_1 = Q + q_2 e$, $\mathfrak{B}_2 = Q - q_1 e$. Dies eingesetzt gibt:

$$23. P_1 \left[\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) + \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_1} \right) \sin^3 \alpha + 2 \left(\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2} \right) \cos^3 \alpha \right] = \frac{Q}{f_2} \sec \alpha + \left(\frac{Q + q_2 e}{\psi_1} + \frac{Q - q_1 e}{\psi_2} \right) \cos^2 \alpha - \frac{1}{h} \left(\frac{M_1}{\varphi_1} - \frac{M_2}{\varphi_2} \right) \sin^2 \alpha.$$

Man kann hierin noch $Q = \frac{1}{e} (M_2 - M_1)$ setzen. Wir wollen nun noch einige spezielle Fälle in Betracht ziehen.

1. Es besteht Alles aus demselben Materiale, die beiden Gurte, beide Diagonalen und beide Vertikalen haben gleichen Querschnitt. Alsdann wird, wenn man $M_1 - M_2 = -Q a$, $a = h \tan \alpha$ und zur Abkürzung:

$$24. \quad A = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \psi \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} \sin^3 \alpha + \frac{2}{\psi} \cos^3 \alpha \right)}$$

setzt, $P_1 = \frac{1}{2} Q \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e$. Da nun ferner $P_2 = -Q \sec \alpha + P_1$ ist, so wird

$$25. \quad P_1 = +\frac{1}{2} Q \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e, \quad P_2 = -\frac{1}{2} Q \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e.$$

Es ist nun ferner $P_l = \frac{1}{2} [Q + (q_1 + q_2) e] \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e$,
 $P_r = \frac{1}{2} [Q - (q_1 - q_2) e] \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e$, $V_1 = Q + q_2 e - (P_1 + P_l) \cos \alpha$,
 $V_2 = Q - q_1 e - (P_1 + P_r) \cos \alpha$, d. i.

$$26. \quad V_1 = V_2 = -\frac{1}{2} (q_1 - q_2) e (1 - 4 A \cos \alpha) \\ = -\frac{\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} \sin^3 \alpha}{\frac{2}{f} + \frac{2}{\varphi} \sin^3 \alpha + \frac{4}{\psi} \cos^3 \alpha} (q_1 - q_2) e.$$

Endlich wird $S_1 = -\frac{M_1}{h} - P_1 \sin \alpha = -\frac{M_1}{h} - \frac{1}{2} Q \tan \alpha + A (q_1 - q_2) e \sin \alpha$,
 $S_2 = +\frac{M_2}{h} - \frac{1}{2} Q \tan \alpha + A (q_1 - q_2) e \sin \alpha$.
 Bezeichnet man das Moment für einen durch den Kreuzungspunkt E (Fig. 164) gelegten Vertikalschnitt mit M' , so ist $M' = M_1 + \frac{1}{2} Q e = M_2 - \frac{1}{2} Q e$, mithin, da $\tan \alpha = \frac{e}{h}$ ist,

$$27. \quad S_1 = -\frac{M'}{h} + A (q_1 - q_2) e \sin \alpha, \quad S_2 = +\frac{M'}{h} + A (q_1 - q_2) e \sin \alpha.$$

Nach der in §. 27 entwickelten Näherungsregel ist nach Formel 50, in welcher $\gamma=0$, $n=2$, $a=2e$ zu setzen ist, wird $V = -\frac{1}{2} (q_1 - q_2) e$. Nach der genaueren Regel 26 aber ist stets $-V < \frac{1}{2} (q_1 - q_2) e$. Die Abweichung ist indess nicht sehr bedeutend; sie wird um so geringer, je grösser der Querschnitt ψ der Vertikalen ist.

2. Howe'sche Brücken in Holz. Wir nehmen an, dass Gurte und Diagonalen aus Holz, die Vertikalen aus Schmiedeeisen bestehen. Da der Elastizitätskoeffizient des letzteren etwa 17 mal so gross ist, als der des ersteren, so ist in Formel 23: 17ψ für ψ zu setzen. Der Querschnitt der Hauptstreben sei f , der der Gegenstreben $\frac{1}{2} f$, so dass $f_1 = \frac{1}{2} f$, $f_2 = f$ zu setzen ist. Ausserdem sei $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. Aus der Gleichung 23 folgt alsdann, wenn wir zur Abkürzung

$$28. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 \alpha}{4 \psi \left(\frac{12}{f} + \frac{8}{\varphi} \sin^3 \alpha + \frac{1,06}{\psi} \cos^3 \alpha \right)}, \\ B &= \frac{\frac{8}{f} + \frac{8}{\varphi} \sin^3 \alpha + \frac{1,06}{\psi} \cos^3 \alpha}{\frac{12}{f} + \frac{8}{\varphi} \sin^3 \alpha + \frac{1,06}{\psi} \cos^3 \alpha} \end{aligned} \right.$$

setzen,

$$29. \quad \left\{ \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} B Q \sec \alpha - A (q_1 - q_2) e, & P_2 &= -Q \sec \alpha + P_1, \\ V_1 &= Q + q_2 e - (P_1 + P_l) \cos \alpha, & V_2 &= Q - q_1 e - (P_1 + P_r) \cos \alpha, \\ S_1 &= -\frac{M_1}{h} - P_1 \sin \alpha, & S_2 &= +\frac{M_2}{h} - P_1 \sin \alpha. \end{aligned} \right.$$

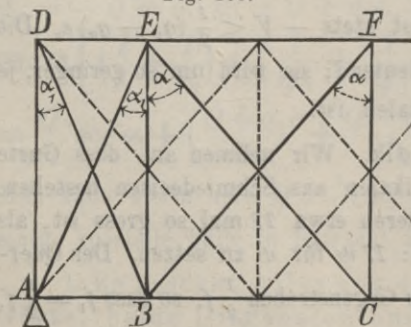
Hier gibt die im IV. Kapitel entwickelte Näherungstheorie weniger genaue Resultate, als im vorigen Falle.

Für die Endfächer darf die Gleichung 23 nicht verwendet werden, es muss vielmehr die ursprüngliche Gleichung 22 zur Anwendung kommen, wobei P_l oder $P_r = 0$ ist.

§. 103. Kombiniertes viertheiliges Gitterwerk ohne künstliche Anspannung. Bei dem viertheiligen Systeme mit der Anordnung nach Fig. 54 (S. 78) sind bei m Fächern $5m + 3$ Theile und $2(m + 1)$ Knotenpunkte vorhanden, also ist die Anzahl der überzähligen Stäbe $= 5m + 3 + 3 - 4(m + 1) = m + 2$. Als solche kann man z. B. sämtliche nach der einen Seite fallenden Diagonalen und eine nach der anderen Seite fallende Diagonale annehmen.

Für den Parallelträger bleiben hier, indem man ein aus zwei nebeneinanderliegenden Fächern bestehendes Fach mit zwei vollen Diagonalen in Betracht zieht, die im vorigen Paragrafe entwickelten Regeln giltig, wenn man $\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{S}_1}{q_1} + \frac{\mathcal{S}'_1}{q'_1} \right)$ statt $\frac{\mathcal{S}_1}{q_1}$ und $\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{S}_2}{q_2} + \frac{\mathcal{S}'_2}{q'_2} \right)$

Fig. 165.



statt $\frac{\mathcal{S}_2}{q_2}$ einführt, wobei $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ die Spannungen, q, q' die Querschnitte der den beiden Fächern angehörigen Gurtstücke bezeichnen. Für das Endfach $ADEB$ (Fig. 165) ist $P_1' = 0$, α_1 statt α und $P_1'' \cos \alpha \cos^2 \alpha_1$ statt $P_1'' \cos^3 \alpha$, für das zweite Fach $BEFC$ aber $P_1' \cos^2 \alpha \cos \alpha_1$ für $P_1' \cos^3 \alpha$ zu setzen.

Näherungsergebnisse erhält man, indem man den Träger in zwei Elementarsysteme mit zweitheiligem Gitterwerk zerlegt und jedes derselben nach dem vorigen Paragrafe behandelt.

§. 104. Kombiniertes zweitheiliges Gitterwerk mit künstlicher Anspannung.

1. Spannungen im unbelasteten Träger. Behalten wir die in §. 102 gebrauchten Bezeichnungen bei, bezeichnen dabei aber, entsprechend dem §. 29, die Spannungen im unbelasteten Zustande oder die künstlichen Spannungen mit einem Apostroph, so haben wir

$$30. \begin{cases} P_2' = P_1', & S_1' = S_2' = -P_1' \sin \alpha, \\ V_1' = -(P_1' + P_l') \cos \alpha, & V_2' = -(P_1' + P_r') \cos \alpha. \end{cases}$$

2. Spannungen im belasteten Zustande. Die Spannungen, welche die Belastung allein hervorruft, sind durch §. 102 bestimmt. Fügen wir die soeben bestimmten künstlichen Spannungen hinzu, so ergeben sich als Spannungen im belasteten Zustande

$$31. \begin{cases} P_1'' = P_1 + P_1', & P_2'' = \mathfrak{B}_2 + P_1 + P_1', \\ S_1'' = \mathfrak{S}_1 - (P_1 + P_1') \sin \alpha, & S_2'' = \mathfrak{S}_2 - (P_1 + P_1') \sin \alpha, \\ V_1'' = \mathfrak{V}_1 - (P_1 + P_l + P_1' + P_l') \cos \alpha, \\ V_2'' = \mathfrak{V}_2 - (P_1 + P_r + P_1' + P_r') \cos \alpha. \end{cases}$$

3. Howe'sches System. Nach §. 31 soll die Spannung P_1'' in den Gegenstreben im belasteten Zustande und zwar bei derjenigen partiellen Belastung, bei welcher in den Gegenstreben der grösste Zug eintreten würde, gleich Null sein. Setzen wir aber $P_1'' = 0$, so erhalten wir

$$32. P_1 = -P_1'.$$

Die Spannungen der übrigen Theile sind nun durch die Formeln 31 bestimmt.

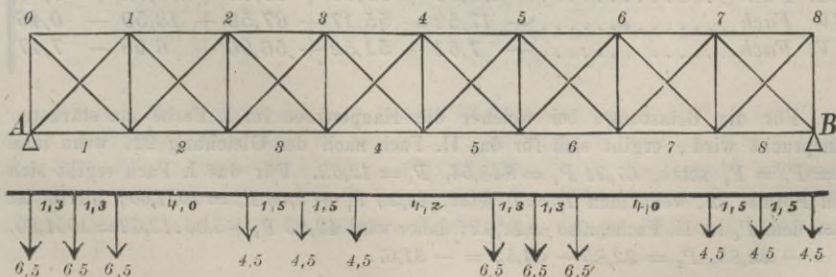
4. Rider'sches System. Hier soll die Spannung P_2'' in den Gegendiagonalen im belasteten Zustande bei derjenigen partiellen Belastung, bei welcher in denselben der grösste Druck eintreten werde, gleich Null sein. Sonach wird hier

$$33. P_1' = -\mathfrak{B}_2 - P_1.$$

Die Spannungen aller übrigen Theile sind nun auch hier durch die Formeln 31 bestimmt.

Beispiel. Howe'scher Träger von 24^m Spannweite, 3^m Höhe mit 8 Feldern und oben liegender Bahn (Fig. 166); Gurte und Diagonalen aus Holz, Vertikalen aus

Fig. 166.



Schmiedeeisen. Eigengewicht $0,6^t$ pro Met. für den Obergurt, $0,4^t$ pro Met. für den Untergurt; zufällige Belastung durch das in der Figur dargestellte System von Einzelasten.

Nach einer nach §. 31 durchgeführten Näherungsrechnung haben sich die folgenden Werthe ergeben:

	Fach.....	1	2	3	4	
Flächen	Ober- und Untergurt, $\varphi =$	0,150	0,150	0,150	0,150	Meter □
	Hauptstreben $f_2 =$	0,097	0,080	0,065	0,065	
	Gegenstreben $f_2 =$	0,048	0,040	0,032	0,032	
	Vertikalen, $\psi =$	0,144	0,070	0,048	0,031	
Reciproke Flächen	Ober- und Untergurt $\frac{1}{\varphi} =$	6,7	6,7	6,7	6,7	
	Hauptstreben $\frac{1}{f_2} =$	10,3	12,5	15,4	15,4	
	Gegenstreben $\frac{1}{f_1} =$	20,7	25,0	32,7	73,5	
	Vertikalen $\frac{1}{\psi} =$	6,9	14,3	21,0	32,7	73,5

Hierbei sind die wirklichen Querschnittsflächen der eisernen Vertikalen bereits mit 17 multipliziert. Der Endposten besteht aus zwei Hölzern von je $0,048 \square^m$ und zwei Zugstangen von je $0,0014 \square^m$, so dass der einzuführende Werth von $\psi = 2 \cdot 0,048 + 2 \cdot 17 \cdot 0,0014 = 0,144 \square^m$ sein würde, wie es auch in vorstehender Tabelle angegeben ist.

1. Haupt- und Gegenstreben. Die Maximalspannung in den Hauptstreben der linken Seite des Trägers, welche der Spannung 0 in den Gegenstreben entspricht, tritt ein, wenn die rechte Seite belastet ist und dabei die erste Last über der rechten Vertikalen des fraglichen Faches liegt. Für diese Belastung ergeben sich, wenn man sich die Gegenstreben ganz ausgelöst denkt, die folgenden Spannungen:

	\mathfrak{P}_2	\mathfrak{S}_1	\mathfrak{S}_2	\mathfrak{P}_1	\mathfrak{P}_3
I. Fach	- 54,52	0	+ 38,56	- 0,90	+ 25,71
Bei derselben Bel. II. Fach	- 34,66	- 38,56	+ 63,06	+ 25,71	+ 14,26
II. Fach	- 40,99	- 31,99	+ 60,98	+ 30,19	+ 16,14
III. Fach	- 28,05	- 50,38	+ 68,52	+ 21,04	+ 6,99
IV. Fach	- 17,52	- 55,17	+ 67,59	+ 13,59	- 0,46
V. Fach	- 7,61	- 51,52	+ 56,90	+ 6,58	- 7,47

Für die Belastung, bei welcher die Hauptstrebe im I. Fache am stärksten beansprucht wird, ergibt sich für das II. Fach nach der Gleichung 22, wenn man $P_1 = P_r = P_3$ setzt, $67,21 P_1 = 848,54$, $P_1 = 12,62$. Für das I. Fach ergibt sich nach Formel 22, wenn man $P_1 = 0$ setzt, $42,23 P_1 + 5,06 P_r = 1051,60$; hierin ist $P_r =$ dem P_1 im II. Fache, also $= 12,62$; daher wird $42,23 P_1 + 5,06 \cdot 12,62 = 1051,60$, $P_1 = + 22,85$, $P_2 = 22,85 - 54,52 = - 31,67$.

Für das II. Fach ergibt sich nach Gleichung 22, wenn man $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 0,5$, $\sin^3 \alpha = \cos^3 \alpha = 0,354$ setzt,

$$14,3 \cdot 0,354 P_1 + [12,5 + 25,0 + 2 \cdot 6,67 \cdot 0,354 + (14,3 + 21,0) \cdot 0,354] P_1 + 21,0 \cdot 0,354 P_r \\ = -6,67 \cdot 0,5 \cdot 31,99 + 6,67 \cdot 0,5 \cdot 60,98 + 14,3 \cdot 0,5 \cdot 30,19 \\ + 21,0 \cdot 0,5 \cdot 16,14 + 12,5 \cdot 40,99, \text{ d. i.}$$

$$5,06 P_1 + 54,32 P_1 + 7,43 P_r = 994,25.$$

Setzt man $P_2 = P_r = P_1$, so wird annähernd $67,21 P_2 = 994,25$, $P_1 = +14,80$, $P_2 = 14,80 - 40,99 = -26,19$. In gleicher Weise sind die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Spannungen in den übrigen Fächern berechnet. Diese Tabelle enthält gleichzeitig die hiernach bestimmten künstlichen Spannungen, sowie die aus der künstlichen Spannung und der Belastung resultierenden Spannungen:

Fach	I	II	III	IV	V
Hauptstreben					
Spannung durch die Belastung allein	- 31,67	- 26,19	- 18,76	- 11,28	- 5,58
Künstliche Spannung	- 22,85	- 14,80	- 9,29	- 6,24	- 2,03
Summe	- 54,52	- 40,99	- 28,05	- 17,52	- 7,61
Gegenstreben.					
Spannung durch die Belastung allein	+ 22,85	+ 14,80	+ 9,29	+ 6,24	+ 2,03
Künstliche Spannung	- 22,85	- 14,80	- 9,29	- 6,24	- 2,03
Summe	0	0	0	0	0

Hiernach ist die Maximalspannung der Hauptstreben 2,4 bis 3,0 mal so gross, wie die der Gegenstreben.

2. Vertikalen. Die Maximalspannung in den Vertikalen der linken Seite des Trägers tritt ein, wenn die rechte Seite belastet ist, derart, dass die erste Last über der rechts von der fraglichen Vertikalen liegenden Vertikalen ruht. Die bei dieser Belastung entstehenden Spannungen der Diagonalen in dem rechts neben der fraglichen Vertikalen liegenden Fache sind dieselben, wie sie unter 1. berechnet wurden. Für die links von der fraglichen Vertikalen liegenden Fächer ergeben sich nach dem Auslösen der Gegendiagonalen die folgenden Spannungen:

	\mathfrak{P}_2	\mathfrak{S}_1	\mathfrak{S}_2	\mathfrak{B}_1	\mathfrak{B}_2
Vertikale 1; I. Fach . . .	- 45,13	0	+ 31,99	- 0,9	+ 30,19
" 2; II. " . . .	- 33,30	- 25,84	+ 50,38	+ 24,04	+ 21,04
" 4; IV. " . . .	- 21,76	- 39,78	+ 55,17	+ 16,59	+ 13,59
" 5; V. " . . .	- 11,85	- 43,14	+ 51,52	+ 9,58	+ 6,58

Für das I. Fach ergibt sich nach Formel 22 die Gleichung $43,23 P_1 + 5,06 P_r = 785,16$. Hierbei ist $P_r =$ dem P_1 für das II. Fach unter 1., nämlich $P_r = +14,80$, daher $43,23 P_1 + 74,89 = 785,16$, $P_1 = +16,43$. Für das II. Fach ergibt sich nach Formel 22, wenn man $P_1 = P_r = P_1$ setzt, $67,21 P_1 = 880,79$, also $P_1 = +13,10$ u. s. w. Die so berechneten Spannungen für die links von der fraglichen Vertikalen liegenden Fächer sind:

$$P_1 = +10,43 \quad +13,10 \quad +8,78 \quad +6,28.$$

Die Spannung der Vertikale 0 wird nun, weil nach Auslösung der Gegendiagonalen die Spannung $-0,9$ eintritt und die Spannung der Gegenstrebe im I. Fache nach 1. $= +22,85$ ist, $= -0,9 - 22,85 \cdot \cos \alpha = -0,9 - 22,85 \cdot 0,707 = -17,05$. Die Spannung der Vertikale 2 wird, weil nach Auslösung der Gegendiagonalen nach 1. die Spannung $30,19$ eintritt und die durch die Belastung erzeugte Spannung der Gegendiagonalen im I. Felde $16,43$, im II. Felde nach 1. $= 14,80$ ist, $= 30,19 - (16,43 + 14,80) 0,707 = +8,11$ u. s. w. Die so berechneten Spannungen enthält die folgende Tabelle.

Die Spannung $-17,05$ der Endvertikale zerlegt sich in zwei Theile, welche auf das Eisen und das Holz kommen. Die Spannung der eisernen Endvertikalen ist nach Formel 67 (Seite 77):

$$= - \frac{2 \cdot 17 \cdot 0,0014}{2 \cdot 17 \cdot 0,0014 + 2 \cdot 0,048} 17,05 = - \frac{0,048}{0,144} 17,05 = -5,68.$$

Die künstlichen Spannungen der Vertikalen ergeben sich leicht aus denen der Streben. Die der Vertikale 0 ist: $22,85 \cdot \cos \alpha = 22,85 \cdot 0,707 = +16,15$, die der Vertikale 1: $(22,85 + 14,80) 0,707 = +26,62$ u. s. w. Die folgende Tabelle enthält auch die hiernach berechneten künstlichen Spannungen, sowie die aus der künstlichen Anspannung und der Belastung resultirenden Spannungen:

Vertikale.....	0	1	2	3	4
Spannung durch die Belastung allein	$-5,68$	$+8,11$	$+5,21$	$+2,87$	$+9,70$
Künstliche Spannung	$+16,15$	$+22,62$	$+17,03$	$+10,98$	$+5,85$
Summe	$+10,47$	$+30,73$	$+22,24$	$+13,95$	$+6,55$

Hiernach sind die Vertikalen, mit Ausnahme der Endvertikale, am stärksten im belasteten Zustande gespannt (nach der Näherungstheorie des §. 31 tritt dagegen die Maximalspannung der Vertikalen im unbelasteten Zustande ein).

3. Gurte. Die Belastung, bei welcher eine Gurtspannung zum Maximum wird, kann als dieselbe angenommen werden, wie sie bei nicht vorhandenen Gegendiagonalen anzunehmen wäre. Für diese Belastung ergeben sich nach Auslösung der Gegendiagonalen die folgenden Spannungen:

	Feld	Bei Vertikale	liegt Last	\mathfrak{P}_2	\mathfrak{S}_1	\mathfrak{S}_2	\mathfrak{B}_1	\mathfrak{B}_2
Obergurt	I.	0	I.	$-48,50$	0	$+34,30$	$-11,95$	$+22,85$
	II.	1	II.	$-29,78$	$-37,94$	$+59,02$	$+22,28$	$+15,39$
	III.	2	III.	$-15,24$	$-65,99$	$+79,22$	$+14,22$	$+7,67$
	IV.	3	IV.	$-5,43$	$-77,52$	$+81,29$	$+5,04$	$-6,41$
Untergurt	I.	1	II.	$-53,65$	0	$+37,94$	$-3,72$	$+22,28$
	II.	2	III.	$-38,56$	$-38,72$	$+65,99$	$+28,47$	$+14,42$
	III.	3	IV.	$-25,30$	$-59,63$	$+77,52$	$+19,09$	$+5,04$
	IV.	4	VIII.	$-12,08$	$-77,91$	$+83,12$	$+9,74$	$-6,32$

Die Spannungen P_1 der Gegendiagonalen lassen sich nun wie oben mittels der Gleichung 22 bestimmen. Beispielsweise ergibt sich für das III. Feld, wenn die Last III über der Vertikale 2 liegt, wenn man $P_1 = P_0 = P_1$ setzt, $89,08 P_1 = 555,74$, $P_1 = + 6,23$, $S_1 = \mathcal{S}_1 - P_1 \cos \alpha = - 65,99 - 6,23 \cdot 0,707 = - 70,39$. Für den unbelasteten Zustand ist im III. Felde $P_1' = - 9,29$, daher wird $S_1' = - P_1' \sin \alpha = 9,29 \cdot 0,707 = + 6,57$. Die Summe aus beiden Wirkungen ist $S_1'' = - 70,39 + 6,57 = - 63,83$. Die Resultate dieser Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Fach	I	II	III	IV
Obergurt.				
P_1	+ 16,00	+ 11,36	+ 6,23	+ 1,17
Spannung durch die Belastung allein	- 11,31	- 45,97	- 70,39	- 78,35
Künstliche Spannung	+ 16,15	+ 10,46	+ 6,57	+ 4,41
Summe	+ 4,84	- 35,51	- 63,82	- 73,94
Untergurt.				
P_1	+ 17,77	+ 13,80	+ 8,22	+ 2,51
Spannung durch die Belastung allein	+ 25,38	+ 35,23	+ 71,71	+ 81,35
Künstliche Spannung	+ 16,15	+ 10,46	+ 6,57	+ 4,41
Summe	+ 41,53	+ 45,69	+ 78,28	+ 85,76

Bei der Belastung, für welche die Gurtspannungen zum Maximum werden, ist die Spannung der Gegenstreben zwar nicht genau $= 0$, aber doch sehr klein, so dass man für die Praxis hinreichend genaue Werthe erhält, wenn man die Gurtspannungen unter der Voraussetzung berechnet, dass keine Gegenstreben vorhanden sind. Unter dieser Voraussetzung würde man für den Obergurt die Zahlen 0 37,94 65,99 77,52, für den Untergurt die Zahlen 37,94 65,99 77,52 83,21 erhalten.

§. 105. Kombinirtes vier- und mehrtheiliges Gitterwerk mit künstlicher Anspannung. Im Allgemeinen wird man zunächst die Spannungen, welche die Belastung erzeugt, also ohne Rücksicht auf die künstlichen Spannungen, nach §. 103 bestimmen. Da nun die Spannungen in den Gegendiagonalen bei entsprechender einseitiger Belastung gleich Null sein sollen, so muss die künstliche Spannung der Gegendiagonalen gleich und entgegengesetzt den Spannungen sein, welche die Belastung erzeugt. Da man somit die Spannungen der Gegendiagonalen im unbelasteten Zustande kennt, so kann man, indem man dieselben als äussere Kräfte betrachtet, nach §. 100 die künstlichen Spannungen der übrigen Theile bestimmen. Beim viertheiligen Systeme ist hierbei ein überzähliger Stab, beim sechstheiligen Systeme sind zwei überzählige Stäbe vorhanden. Da es indess beim kombinirten Systeme mit künstlicher Anspannung auf eine ganz exakte Bestimmung nicht ankommen kann, weil eine Herstellung ganz bestimmter künstlicher Spannungen nicht wohl möglich ist, so wird es genügen, wenn man zur Bestimmung der künstlichen Spannungen eine Zerlegung in Elementarsysteme vornimmt und hierbei die Formeln 30 des vorigen Paragraphes anwendet.

§. 106. Einfluss der Wärme. Bei einem kombinierten Systeme entstehen auch Spannungen durch Aenderung der Temperatur, wenn verschiedene Materialien zur Anwendung gebracht werden. Wir wollen uns jetzt den Träger unbelastet denken, um nur diejenigen Spannungen zu ermitteln, welche durch den Einfluss einer Temperaturänderung entstehen. Bei einer gewissen Temperatur t_0 seien alle Theile ohne Spannung. Bei einer Veränderung der Temperatur um t mögen in den Theilen eines Faches mit zweitheiligem Gitterwerke die Spannungen $S_1, S_2, P_1, P_2, V_1, V_2$ entstehen. Alsdann gelten zunächst dieselben Beziehungen 30, welche für die künstlichen Spannungen aufgestellt wurden, nämlich

$$34. \quad \begin{cases} P_2 = P_1, & S_1 = S_2 = -P_1 \sin \alpha, \\ V_1 = -(P_1 + P_r) \cos \alpha, & V_2 = (P_1 + P_r) \cos \alpha, \end{cases}$$

worin noch P_l und P_r die Spannungen der rechts fallenden Diagonalen im links und rechts neben dem fraglichen Fache liegenden Fache bezeichnen.

Bezeichnen wir den Elastizitäts- und Ausdehnungskoeffizienten, letzteren für ein Grad Temperaturänderung, für die Gurte mit $E_1, E_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, für die Diagonalen, gleiches Material derselben vorausgesetzt, mit E', ε' , für die Vertikalen mit E'', ε'' , so sind die relativen Längenänderungen $\varepsilon_1 t + \frac{S_1}{E_1 q_1}, \varepsilon_2 t + \frac{S_2}{E_2 q_2}, \varepsilon' t + \frac{P_1}{E' f_1}, \varepsilon' t + \frac{P_2}{E' f_2}, \varepsilon'' t + \frac{V_1}{E'' \psi_1}, \varepsilon'' t + \frac{V_2}{E'' \psi_2}$. Die Gleichung 8 (S. 244) lässt sich anwenden, wenn man statt $\frac{S_1}{q_1}, \frac{S_2}{q_2}$ u. s. w. die relativen Längenänderungen setzt. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) t + \frac{S_1}{E_1 q_1} + \frac{S_2}{E_2 q_2} \right] \sin^2 \alpha + \left[2E'' t + \frac{V_1}{E'' \psi_1} + \frac{V_2}{E'' \psi_2} \right] \cos^2 \alpha \\ = 2\varepsilon' t + \frac{P_1}{E' f_1} + \frac{P_2}{E' f_2}. \end{aligned}$$

Setzt man für S_1, S_2, V_1, V_2, P_2 die obigen Ausdrücke ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 35. \quad \frac{P_l}{E'' \psi_1} \cos^3 \alpha + P_1 \left[\frac{1}{E' f_1} + \frac{1}{E' f_2} + \left(\frac{1}{E_1 q_1} + \frac{1}{E_2 q_2} \right) \sin^3 \alpha \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{E'' \psi_1} + \frac{1}{E'' \psi_2} \right) \cos^3 \alpha \right] + \frac{P_r}{E'' \psi_2} \cos^3 \alpha \\ = t [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin^2 \alpha + 2\varepsilon'' \cos^2 \alpha - 2\varepsilon']. \end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Gleichung hat in gleicher Weise zu erfolgen, wie die der Gleichung 22 oder 23. Zur Näherungsberechnung wird man auch hier $\frac{P_l}{\psi_1} + \frac{P_r}{\psi_2} = \frac{P_1}{\psi_1} + \frac{P_2}{\psi_2}$ setzen können.

Wir wollen nur noch eine Anwendung auf Howe'sche Träger mit hölzernen Gurten, hölzernen Streben und eisernen Vertikalen machen. Hier können wir $E_1 = E_2 = E'$, $E'' = 17 E_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon'$, $\varepsilon'' = 3\varepsilon$ setzen. Setzen wir ausserdem annähernd $\frac{P_1}{\psi_1} + \frac{P_2}{\psi_2} = \frac{P_1}{\psi_1} + \frac{P_1}{\psi_2}$, so erhalten wir, wenn wir E für E_1 , ε für ε_1 und $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ setzen.

$$36. P_1 = \frac{4 E \varepsilon t \cos^2 \alpha}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2}\right) \sin^3 \alpha + \frac{2}{17} \left(\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2}\right) \cos^3 \alpha}$$

Setzen wir hierin noch $E = 120$ Tonnen pro \square^{cm} , $\varepsilon = 0,0000038$, $t = 30^0$ C., so wird $E \varepsilon t = 13,8$. Setzen wir ausserdem noch $\alpha = 45^0$, so wird:

$$37. P_1 = \frac{0,0276}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + 0,354 \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2}\right) + 0,042 \left(\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2}\right)}$$

Die Querschnittsflächen sind hierbei in \square Centimetern einzuführen.

Bei einem Systeme, dessen Theilungszahl grösser, als 2 ist, lassen sich die aufgestellten Gleichungen ebenfalls als Näherungsgleichungen anwenden.

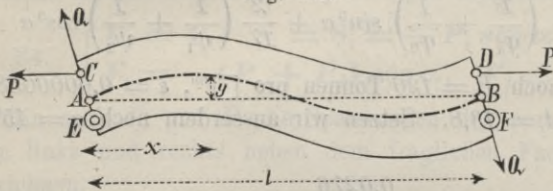
Beispiel. Für das in §. 104 durchgeführte Beispiel ergibt sich für die ersten vier Fächer $\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = 0,00134$, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0,00310$ $0,00375$ $0,00048$ $0,00089$, $\frac{1}{\psi_1} + \frac{1}{\psi_2} = 0,0360$ $0,0600$ $0,0910$ $0,1805$. Dies in die Formel 37 eingesetzt, gibt $P_1 = P_2 = + 5,4$ $4,1$ $3,0$ $1,6$ Tonnen. Nach den Formeln 34 wird ferner $S_1 = S_2 = - 3,8$ $2,9$ $2,1$ $1,1$ Tonnen, V für die Vertikalen 0 bis 4 = $3,8$ $6,7$ $5,0$ $3,2$ $2,2$ Tonnen. Von der Spannung $- 3,8$ der Endvertikale kommt nach der im Beispiele zu §. 104 angewendeten Bestimmung $- 1,3$ auf die eisernen, $- 2,5$ auf die hölzernen Vertikalen. Bei einer Temperaturerhöhung vermindert sich hiernach der Druck in den Streben und der Zug im Untergurte und in den Vertikalen. der Druck im Obergurte vermehrt sich, während bei einer Temperaturerniedrigung das Gegenheil eintritt. Die Vermehrung der Beanspruchung beträgt hiernach im Obergurte $2,3$ $8,2$ $3,3$ $1,5$, im Untergurte $9,1$ $6,3$ $2,7$ $1,3$, in den Hauptstreben 10 10 11 9 , in den Gegenstreben 24 28 32 20 , in den Vertikalen $8,0$ $2,2$ $2,2$ $2,3$ $3,3$ Prozent.

XV. Kapitel.

Einfluss fester Verbindungen.

§. 107. **Eingespannter Stab.** Auf den Stab AB (Fig. 167) mit gerader Axe und konstantem Querschnitt mit der Fläche F und dem Trägheitsmomente I (für eine zur Kraftebene senkrechte Schweraxe) wirke

Fig. 167.



im Abstände AC und BD von den Schwerpunkten A und B der Endflächen die Axialkräfte P , ferner in den Endflächen die

Transversalkräfte Q . Bezeichnen wir die Biegemomente für die Endquerschnitte hinsichtlich der Schweraxe mit M_1, M_2 , für einen beliebigen Querschnitt mit M , so ist, vorausgesetzt, dass man bei Bestimmung der Momente die Formänderung selbst vernachlässigen darf,

$$M = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l},$$

daher

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l},$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + \frac{1}{2} (M_2 - M_1) \frac{x^2}{l} + C,$$

$$EI y = \frac{1}{2} M_1 x^2 + \frac{1}{6} (M_2 - M_1) \frac{x^3}{l} + Cx,$$

wenn wir die Gerade AB als Axe der x annehmen. Für $x = l$ wird $y = 0$, daher $C = -\frac{1}{2} M_1 l - \frac{1}{6} (M_2 - M_1) l = -\frac{1}{6} (2M_1 + M_2) l$, also

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} (2M_1 + M_2) l + M_1 x + \frac{1}{2} (M_2 - M_1) \frac{x^2}{l}.$$

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Endtangente mit der Axe AP bilden, oder deren Tangente mit τ_1, τ_2 , so ist also

$$1. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI}, \\ \tau_2 = +\frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}. \end{cases}$$

In E und F mögen die Gelenke für die Befestigung der Gitterstäbe liegen; ihr Abstand von der Axe AB sei e_1 und e_2 . Die Längenänderung von EF sei Δl . Alsdann ist

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} - e_1 \tau_1 + e_2 \tau_2,$$

oder

$$2. \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} + \frac{(2M_1 + M_2)e_1}{6EI} + \frac{(M_1 + 2M_2)e_2}{6EI}.$$

Wir bezeichnen noch die Momente für die Endquerschnitte in Beziehung auf die Gelenke E und F mit m_1 und m_2 , die Abstände der in den Endquerschnitten wirkenden Kräfte P von E und F mit d_1 und d_2 . Alsdann ist $M_1 = +P(d_1 + e_1)$, $M_2 = +P(d_2 + e_2)$, $m_1 = +Pd_1$, $m_2 = +Pd_2$, mithin $M_1 = m_1 + Pe_1$, $M_2 = m_2 + Pe_2$. Demnach wird

$$3. \quad \begin{cases} EI \tau_1 = -\frac{1}{6}(2m_1 + m_2)l - \frac{1}{6}P(2e_1 + e_2)l, \\ EI \tau_2 = +\frac{1}{6}(m_1 + 2m_2)l + \frac{1}{6}P(e_1 + 2e_2)l \end{cases}$$

und

$$4. \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} + \frac{(2m_1 + m_2)e_1 + (m_1 + 2m_2)e_2}{6EI} + \frac{P[(2e_1 + e_2)e_1 + (e_1 + 2e_2)e_2]}{6EI}.$$

Bezeichnet man noch den Trägheitsradius des Querschnittes mit r , so ist $I = Fr^2$, folglich

$$5. \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} \left(1 + \frac{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2}{3r^2} \right) + \frac{m_1(2e_1 + e_2) + m_2(e_1 + 2e_2)}{6EFr^2}.$$

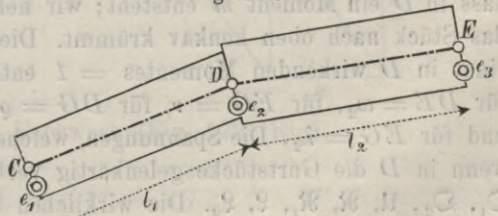
Ist $e_1 = e_2 = e$, so wird einfacher

$$6. \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{(m_1 + m_2)e}{2EFr^2}.$$

Wir wollen nun noch einen aus zwei geraden Theilen CD und DE (Fig. 168) zusammengesetzten Stab in Betracht ziehen; die Längen

Fig. 168.

der beiden Theile seien l_1 , l_2 , die Trägheitsmomente ihrer Querschnitte I_1 , I_2 , die entsprechenden Trägheitsradien r_1 , r_2 , die Momente in C , D , E bezüglich M_1 , M_2 , M_2' , M_3' . In D möge die Tangente an die deformirte Axe mit CD , DE auf der linken und rechten Seite die Winkel τ , τ' bilden. Alsdann ist nach Formel 1:



$$\tau = + \frac{M_1 + 2M_2}{6EI_1} l_1, \quad \tau' = - \frac{2M_2' + M_3'}{6EI_2} l_2.$$

Wenn sich der Winkel CDE nicht ändern würde, so müsste der festen Verbindung beider Stäbe wegen $\tau = \tau'$ sein. Nehmen wir nun aber an, dass sich der Winkel CDE um δ vergrößert, so ist $\tau' = \tau - \delta$ oder $\delta = \tau - \tau'$, d. i.

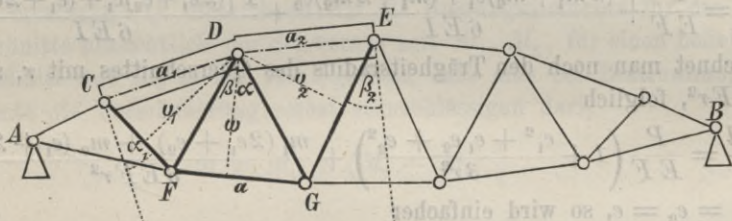
$$7. \delta = \frac{1}{6E} \left[\frac{M_1 l}{I} + 2 \frac{M_2 l}{I} + 2 \frac{M_2' l'}{I'} + \frac{M_3' l'}{I'} \right]$$

oder, wenn man, wie oben, $M_1 = m_1 + P e_1$, $M_2 = m_2 + P e_2$, $M_2' = m_2 + P' e_2'$, $M_3' = m_3 + P' e_3'$ setzt,

$$8. \delta = \frac{1}{6E} \left[m_1 \frac{l}{I} + 2 m_2 \left(\frac{l}{I} + \frac{l'}{I'} \right) + m_3 \frac{l'}{I'} + \frac{P l (e_1 + 2 e_2)}{I} + \frac{P' l' (2 e_2' + e_3')}{I'} \right].$$

§. 108. Einfluss der Kontinuität zweier Gurtstücke beim eintheiligen Gitterwerke. Wir setzen zunächst voraus, dass zwei an einander stossende Gurtstücke CD und DE (Fig. 169) aus einem Stücke bestehen. Der Einfluss der Kontinuität dieser beiden Gurtstücke wird

Fig. 169.



sich offenbar nur auf die Theile des Fünfecks $CDEGF$ erstrecken; die Spannungen der übrigen Theile des Trägers sind ebenso gross, als wenn die Gurte auch in D gelenkartig verbunden wären.

In Folge dieser Kontinuität muss sich das Stück CDE biegen, so dass in D ein Moment m entsteht; wir nehmen m als positiv, wenn sich das Stück nach oben konkav krümmt. Die Spannungen, welche in Folge eines in D wirkenden Momentes $= 1$ entstehen, seien für $CD = \omega_1$, für $DE = \omega_2$, für $FG = \nu$, für $DG = \varrho$, für $CF = \varrho_1$, für $DF = \lambda$ und für $EG = \lambda_2$. Die Spannungen, welche diese Theile erleiden würden, wenn in D die Gurtstücke gelenkartig verbunden wären, seien bezüglich $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{u}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}_2$. Die wirklichen Spannungen dagegen seien $O_1, O_2, U, R, R_1, L, L_2$. Alsdann ist offenbar

$$9. \begin{cases} O_1 = \mathfrak{D}_1 + \omega_1 m, & O_2 = \mathfrak{D}_2 + \omega_2 m, & U = \mathfrak{u} + \nu m, \\ R = \mathfrak{R} + \varrho m, & R_1 = \mathfrak{R}_1 + \varrho_1 m, & L = \mathfrak{L} + \lambda m, & L_2 = \mathfrak{L}_2 + \lambda_2 m. \end{cases}$$

Die Spannungen $\omega, \nu, \varrho, \lambda$ aber sind leicht zu bestimmen. Bezeichnen wir die normalen Abstände der Stäbe FG, CF und EG von D mit w, v_1, v_2 , so ergibt sich unmittelbar

$$10. \nu = -\frac{1}{w}, \quad \varrho_1 = -\frac{1}{v_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{v_2}.$$

Die Spannung λ ist die entgegengesetzte Resultante von ν und q_1 , ebenso ist q die entgegengesetzte Resultante von ν und λ_2 .

Die Spannungen q_1 und λ_2 zerlegen sich in eine in Richtung von CD und ED wirkende Komponente ω_1 und ω_2 und eine hierzu senkrecht wirkende Komponente z_1 und z_2 . Die letzteren Komponenten wirken als Transversalkraft auf das Stück CDE . Sämmtliche Kräfte lassen sich auch leicht grafisch bestimmen (Fig. 170).

Sind α_1, α die Winkel, welche CF und DG mit den Normalen zu CD und FG und β_2 und β die Winkel, welche EG und DF mit den Normalen zu DE und FG einschliessen, ferner a_1, a_2, a die Längen von CD, DE, FG , so wird

$$10 a. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = + \frac{\tan \alpha_1}{a_1}, \quad \omega_2 = + \frac{\tan \beta_2}{a_2}, \quad \nu = - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{a} \\ z_1 = \frac{1}{a_1}, \quad z_2 = \frac{1}{a_2}. \end{array} \right.$$

Beim Parallelträger mit Netzwerk (Fig. 171) wird

$$11 a. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = - \frac{1}{h}, \quad q_1 = \lambda_2 = - \frac{\sec \alpha}{a}, \quad r = \lambda = \frac{\sec \alpha}{a}, \\ \omega_1 = \omega_2 = + \frac{1}{2h}, \quad z_1 = z_2 = \frac{1}{a}. \end{array} \right.$$

Fig. 171.

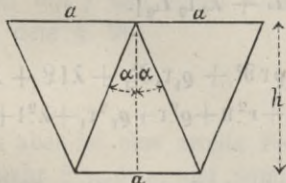
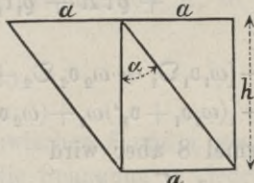


Fig. 172.

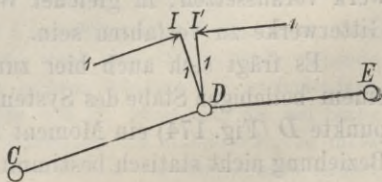


Beim Parallelträger mit Fachwerk (Fig. 172) wird

$$11 b. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = - \frac{1}{h}, \quad q_1 = - \frac{\sec \alpha}{a}, \quad q = + \frac{\sec \alpha}{a}, \quad \lambda = + \frac{1}{a}, \quad \lambda_2 = - \frac{1}{a}, \\ \omega_1 = + \frac{1}{h}, \quad \omega_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = \frac{1}{a}. \end{array} \right.$$

In Folge der Längenänderung der einzelnen Theile ändert sich der Winkel CDE ; die Änderung sei δ . Wir können dieselbe in folgender Weise bestimmen. Wir denken uns mit den Stäben DC und DE (Fig. 173) zwei parallele Stäbe DI und DP so verbunden, dass sich

Fig. 173.



der Winkel zwischen ihnen und den Stäben DC , DE nicht ändert; die Länge dieser Stäbe sei $= 1$. In I und I' mögen senkrecht zu DI die Kräfte 1 wirken. Wird hierdurch in irgend einem Stabe A von der Länge c die Spannung σ und die Längenänderung Δc hervorgebracht, während sich die Punkte I und I' um δ von einander entfernen, so ist nach dem Prinzip der Arbeit $1 \cdot \delta + \sigma \Delta c = 0$, also $\delta = -\sigma \Delta c$. Entstehen Spannungen in mehr als einem Stabe, so wird

$$12. \quad \delta = -\sum_i \sigma \Delta c.$$

Für die wirkliche Spannung S des Stabes A mit dem Querschnitte F und dem Elastizitätskoeffizienten E wird $\Delta c = \frac{Sc}{EF}$; wir setzen $\frac{c}{EF}$ für die Stäbe $FG = u$, für die Stäbe DG , $CF = r, r_1$, für die Stäbe DF , $EG = l_1, l_2$. Für die Stäbe CD , DE dagegen ist $\Delta c = v_1 O_1 + v_1' m, v_2 O_2 + v_2' m$ zu setzen, wobei nach Formel 6:

$$13. \quad \begin{cases} v_1 = \frac{a_1}{EF_1} \left[1 + \frac{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2}{3r_1^2} \right], & v_1' = -\frac{a_1(e_1 + 2e_2)}{6EF_1 r_1^2}, \\ v_2 = \frac{a_2}{EF_2} \left[1 + \frac{e_2^2 + e_2 e_3 + e_3^2}{3r_2^2} \right], & v_2' = -\frac{a_2(2e_2 + e_3)}{6EF_2 r_2^2}, \end{cases}$$

wenn F_1, F_2 die Querschnittsflächen, r_1, r_2 die Trägheitsradien beider Stäbe sind und e_1, e_2, e_3 die Abstände der Gelenke in C, D, E von der Schwerpunktsaxe des Gurtes bedeuten. Für $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ wird natürlich $v_1 = \frac{a_1}{EF_1}, v_2 = \frac{a_2}{EF_2}$. Demnach wird nun:

$$\delta = -[\omega_1 v_1 O_1 + \omega_2 v_2 O_2 + (\omega_1 v_1' + \omega_2 v_2') m + q r R + q_1 r_1 R_1 + \lambda l L + \lambda_2 l_2 L_2].$$

oder

$$14. \quad \delta = -[\omega_1 v_1 \mathfrak{D}_1 + \omega_2 v_2 \mathfrak{D}_2 + v u \mathfrak{U} + q r \mathfrak{R} + q_1 r_1 \mathfrak{R}_1 + \lambda l \mathfrak{L} + \lambda_2 l_2 \mathfrak{L}_2] - [(\omega_1 v_1 + v_1') \omega_1 + (\omega_2 v_2 + v_2') \omega_2 + v^2 u + q^2 r + q_1^2 r_1 + \lambda^2 l + \lambda_2^2 l_2] m.$$

Nach Formel 8 aber wird

$$15. \quad \delta = -\frac{1}{6E} \left[2m \left(\frac{a_1}{I_1} + \frac{a_2}{I_2} \right) + \frac{O_1 a_1 (e_1 + 2e_2)}{I_1} + \frac{O_2 a_2 (2e_2 + e_3)}{I_2} \right].$$

Setzt man die beiden letzten Ausdrücke für δ gleich, so erhält man eine Gleichung, in welcher jetzt nur noch m als Unbekannte vorkommt.

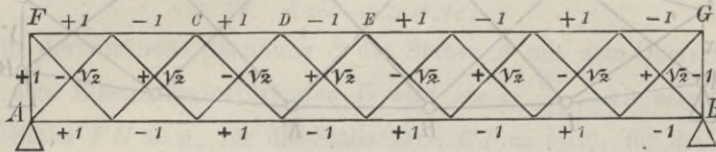
§. 109. Einfluss der Kontinuität zweier Gurtstücke beim mehrtheiligen Gitterwerke. Wir wollen speziell zweitheiliges Gitterwerk voraussetzen; in gleicher Weise wird aber auch beim mehrtheiligen Gitterwerke zu verfahren sein.

Es fragt sich auch hier zunächst, wie gross die Spannungen σ in einem beliebigen Stabe des Systems ist, wenn in einem beliebigen Knotenpunkte D (Fig. 174) ein Moment 1 entsteht. Das System ist aber in dieser Beziehung nicht statisch bestimmt, es hat vielmehr einen überzähligen Stab.

das Gleichgewicht von D : $\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \xi - \eta = 0$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta - \xi)$.

In C wirkt sonach normal zu DC : $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta - \xi) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$. Dasselbe ergibt sich für E . Somit ist, wenn in D das Moment 1 wirkt, da $CD = 5$ ist, $\frac{1}{2}(\xi + \eta)5 = 1$, also $\xi + \eta = 0,4$. Die Spannung von CD ist $-\xi +$

Fig. 175.



$\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta - \xi) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$; diejenige von ED ergibt sich zu $-\frac{1}{2}(\xi - \eta)$. Die weiteren Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Theil	Nr.	f	s	$\frac{sl}{f}$	σ	$\frac{\sigma sl}{f}$	σ
Obergurt	1	0,94	+ 1	+ 53	+ ξ	+ 53 ξ	+ 0,261
	2	1,27	- 1	- 40	+ ξ	+ 40 ξ	- 0,261
	3	1,78	+ 1	+ 28	+ 0,5 ξ - 0,5 η	+ 14 ξ - 14 η	+ 0,060
	4	2,07	- 1	- 24	- 0,5 ξ + 0,5 η	+ 12 ξ - 12 η	- 0,060
	5	2,07	+ 1	+ 24	- η	- 24 η	- 0,139
	6	1,78	- 1	- 28	+ η	- 28 η	+ 0,139
	7	1,27	+ 1	+ 40	- η	- 40 η	- 0,139
	8	0,94	- 1	- 53	+ η	- 53 η	+ 0,139
Untergurt	1	0,94	+ 1	+ 53	+ ξ	+ 53 ξ	+ 0,261
	2	1,27	- 1	- 40	+ ξ	+ 40 ξ	- 0,261
	3	1,78	+ 1	+ 28	+ ξ	+ 28 ξ	+ 0,261
	4	2,07	- 1	- 24	+ η	- 24 η	+ 0,139
	5	2,07	+ 1	+ 24	- η	- 24 η	- 0,139
	6	1,78	- 1	- 28	+ η	- 28 η	+ 0,139
	7	1,27	+ 1	+ 40	- η	- 40 η	- 0,139
	8	0,94	- 1	- 53	+ η	- 53 η	+ 0,139
Rechts fallende Stäbe	1	0,54	- 1,41	- 184	- 1,41 ξ	+ 260 ξ	- 0,368
	2	0,40	+ 1,41	+ 250	+ 1,41 ξ	+ 354 ξ	+ 0,368
	3	0,30	- 1,41	- 333	- 0,71 ξ + 0,71 η	+ 235 ξ - 235 η	- 0,086
	4	0,26	+ 1,41	+ 385	- 1,41 η	- 544 η	- 0,197
	5	0,26	- 1,41	- 385	+ 1,41 η	- 544 η	+ 0,197
	6	0,30	+ 1,41	+ 333	- 1,41 η	- 471 η	- 0,197
	7	0,40	- 1,41	- 250	+ 1,41 η	- 354 η	+ 0,197
	8	0,54	+ 1,41	+ 184	- 1,41 η	- 260 ξ	- 0,197

Theil	Nr.	f	s	$\frac{sl}{f}$	σ	$\frac{\sigma sl}{f}$	σ
Links fallende Stäbe	1	0,54	-1,41	-184	-1,41 ξ	+260 ξ	-0,368
	2	0,40	+1,41	+250	+1,41 ξ	+354 ξ	+0,368
	3	0,30	-1,41	-333	-1,41 ξ	+333 ξ	-0,368
	4	0,26	+1,41	+385	+0,71 ξ - 0,71 η	+280 ξ - 280 η	+0,086
	5	0,26	-1,41	-385	+1,41 η	-544 η	+0,197
	6	0,30	+1,41	+333	-1,41 η	-471 η	-0,197
	7	0,40	-1,41	-250	+1,41 η	-354 η	+0,197
	8	0,54	+1,41	+184	-1,41 η	-260 η	-0,197
Vertikale	1	0,65	+1	+77	+ ξ	+0,77 ξ	+0,261
	2	0,65	-1	-77	- η	+0,77 η	+0,139

Die Gleichung $\sum \frac{\sigma sl}{f} = 0$ gibt
 $2530 \xi - 4732 \eta = 0$.

Da ausserdem $\xi + \eta = 0,4$ ist, so erhält man

$$\xi = 0,261, \quad \eta = 0,139.$$

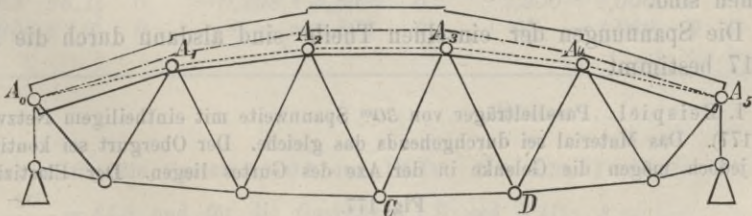
Hieraus ergeben sich nun die in der letzten Rubrik angeführten Werthe von σ .

Die weitere, entsprechend dem Beispiele zum nächsten Paragrafe zu haltende Durchführung übergehen wir.

§. 110. Einfluss der Continuität eines ganzen Gurtes. Wir

setzen zunächst wieder eintheiliges Gitterwerk voraus. An den Knotenpunkten A_1, A_2, \dots (Fig. 176) des kontinuierlichen Gurtes mögen die Momente m_1, m_2, \dots wirken. In einem beliebigen Stabe CD entstehe die Spannung s_n , wenn im Knotenpunkte A_n das Moment 1 wirkt. Die Werthe von

Fig. 176.



σ_n sind für die einzelnen Stäbe und Knotenpunkte nach dem vorigen Paragrafe leicht zu bestimmen. Für den Fall, dass der Gurt nicht kontinuierlich ist, mag im Stabe CD die Spannung \mathfrak{S} entstehen, während die wirkliche Spannung von $CD = S$ ist. Alsdann ist

$$17. \quad S = \mathfrak{S} + \sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2 + \sigma_3 m_3 + \dots = \mathfrak{S} + \sum (\sigma m).$$

Die Aenderung δ_n des Winkels der beiden Gurtstücke am Knotenpunkte A_n wird, wie in §. 108, wenn wir für den Stab CD die Grösse

$\frac{c}{EF} = x$ setzen, wenn wir ferner für die Knotenpunkte A_{n-1} und A_{n+1} das Moment mit m' , m'' , die Längen der Theile $A_{n-1}A_n$ und A_nA_{n+1} mit a' , a'' , ihre Querschnittsflächen mit F' , F'' , ihre Trägheitsradien mit r' , r'' , ihre Spannungen für das Moment 1 in A_n mit σ' , σ'' und die Exzentrizität für A_{n-1} , A_n , A_{n+1} mit e' , e , e'' bezeichnen, entsprechend der Formel 14:

$$18. \delta_n = -\Sigma(x\sigma\mathfrak{S}) - m\Sigma(x\sigma^2) \\ - \sigma' \frac{m'(2e' + e) + m(e' + 2e)}{6EI'} - \sigma'' \frac{m(2e + e'') + m''(e + 2e'')}{6EI''}$$

Für die Stücke $A_{n-1}A_n$ und A_nA_{n+1} des kontinuierlichen Gurtes wird hierbei aber nach Formel 5:

$$19. x' = \frac{a'}{EF'} \left(1 + \frac{e'^2 + e'e + e^2}{3r'^2}\right), \quad x_2 = \frac{a''}{EF''} \left(1 + \frac{e^2 + ee'' + e''^2}{3r''^2}\right).$$

Nach Formel 8 aber wird, wenn wir die wirklichen Spannungen der Gurtstücke $A_{n-1}A_n$ und A_nA_{n+1} mit O' und O'' bezeichnen,

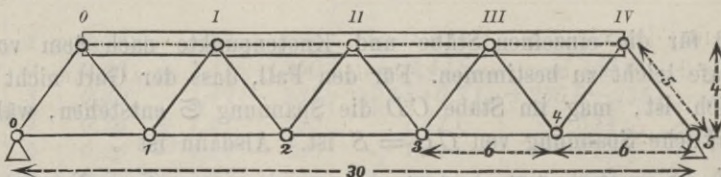
$$20. \delta_n = \frac{1}{6E} \left[m' \frac{a'}{I'} + 2m \left(\frac{a'}{I'} + \frac{a''}{I''} \right) + m'' \frac{a''}{I''} \right. \\ \left. + \frac{O'a'(e' + 2e)}{I'} + \frac{O''a''(2e + e'')}{I''} \right].$$

Sind \mathfrak{D}' und \mathfrak{D}'' die Spannungen der Gurtstücke $A_{n-1}A_n$ und A_nA_{n+1} bei nicht kontinuierlichem Obergurte, so lässt sich $O' = \mathfrak{D}' + (o_1m' + o_1m)$, $O'' = \mathfrak{D}'' + (o_2m + o_2m'')$ setzen. Setzt man alsdann die beiden Ausdrücke 18 und 20 für δ_n einander gleich, so erhält man eine Gleichung mit den drei Unbekannten m' , m und m'' . Stellt man diese Gleichung für jeden Knotenpunkt auf, so erhält man für die Momente m an den Knotenpunkten so viel Gleichungen, als unbekannte Momente zu bestimmen sind.

Die Spannungen der einzelnen Theile sind alsdann durch die Formel 17 bestimmt

I. Beispiel. Parallelträger von 30^m Spannweite mit eintheiligem Netzwerke (Fig. 177). Das Material sei durchgehends das gleiche. Der Obergurt sei kontinuierlich, jedoch mögen die Gelenke in der Axe des Gurtes liegen. Der Elastizitäts-

Fig. 177.



koeffizient sei für alle Theile konstant, so dass wir E überall $= 1$ setzen können. Die wirklichen Querschnittsflächen F und die Werthe von $x = \frac{c}{F}$ gibt folgende

Tabelle. Ausserdem sind in dieser Tabelle auch die nach Formel 10 berechneten Spannungen σ zusammengestellt, welche entstehen, wenn in einem Knotenpunkte das Moment I wirkt. Auch enthält die Tabelle die Werthe von $\alpha\sigma$. Die Längeneinheit ist durchgehends = 1 Decimeter.

Theil	Nummer	F	$\alpha = \frac{c}{F}$	10σ für Knotenpunkt			$\alpha\sigma$ für Knotenpunkt			$10\alpha\sigma^2$ für Knotenpunkt		
				I	II	III	I	II	III	I	II	III
Obergurt	1	1,10	54,5	+0,125	0	0	+0,681	0	0	0,085	0	0
	2	1,70	35,0	+0,125	+0,125	0	+0,437	+0,437	0	0,085	0,055	0
	3	1,70	35,0	0	+0,125	+0,125	0	+0,437	+0,437	0	0,055	0,055
	4	1,10	54,5	0	0	+0,125	0	0	+0,681	0	0	0,085
Untergurt	1	0,45	133,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1,10	54,5	-0,250	0	0	-1,363	0	0	0,341	0	0
	3	1,30	46,2	0	-0,250	0	0	-1,155	0	0	0,289	0
	4	1,10	54,5	0	0	-0,250	0	0	-1,363	0	0	0,341
	5	0,45	133,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rechts fallende Stäbe	1	0,82	61,0	-0,208	0	0	-1,269	0	0	0,264	0	0
	2	0,52	96,1	+0,208	-0,208	0	+2,000	-2,000	0	0,416	0,416	0
	3	0,60	83,3	0	+0,208	-0,208	0	+1,733	-1,733	0	0,360	0,360
	4	0,80	62,5	0	0	+0,208	0	0	+1,300	0	0	0,270
	5	1,00	50,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Links fallende Stäbe	1	1,00	50,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0,80	62,5	+0,208	0	0	+1,300	0	0	0,270	0	0
	3	0,60	83,3	-0,208	+0,208	0	-1,733	+1,733	0	0,360	0,360	0
	4	0,52	96,1	0	-0,208	+0,208	0	-2,200	+2,000	0	0,416	0,416
	5	0,80	61,0	0	0	-0,208	0	0	-1,269	0	0	0,264
Summe										1,791	1,951	1,791

Ferner ist für die Gurtstücke 0 I und III IV: $F = 1,10$, $I = 0,912$, $r = 0,91$
 $\alpha = \frac{60}{0,912} = 65,8$ und für die Gurtstücke I II und II III: $F = 1,70$, $I = 1,173$,
 $r = 0,83$, $\alpha = \frac{60}{1,173} = 51,2$.

Die folgende Tabelle gibt nun die in bekannter Weise berechneten Werthe der Spannungen σ , unter der Voraussetzung von vollständigen Gelenken im Obergurt und unter der Annahme, dass einer der Knotenpunkte 1 und 2 mit der Last 1 belastet ist. Ferner enthält die Tabelle die Werth von $\alpha\sigma$.

Theil	Nummer	Belastung von 1			Belastung von 2				
		$z\sigma\text{⊗}$ für Knotenpunkt			$z\sigma\text{⊗}$ für Knotenpunkt				
		I	II	III	I	II	III		
Obergurt	1	-1,20	-0,817	0	0	-0,90	-0,613	0	0
	2	-0,90	-0,393	-0,393	0	-1,80	-0,787	-0,787	0
	3	-0,60	0	-0,262	-0,262	-1,20	0	-0,524	-0,524
	4	-0,30	0	0	-0,204	-0,60	0	0	-0,409
Untergurt	1	+0,60	0	0	0	+0,45	0	0	0
	2	+1,05	-1,431	0	0	+1,35	-1,840	0	0
	3	+0,75	0	-0,866	0	+1,50	0	-1,733	0
	4	+0,45	0	0	-0,613	+0,90	0	0	-1,227
	5	+0,15	0	0	0	+0,30	0	0	0
Rechts fallende Stäbe	1	+1,00	-1,269	0	0	+0,75	-0,952	0	0
	2	-0,25	-0,500	+0,500	0	+0,75	+1,500	-1,500	0
	3	-0,25	0	-0,433	+0,433	-0,50	0	-0,867	+0,867
	4	-0,25	0	0	-0,325	-0,50	0	0	-0,650
	5	-0,25	0	0	0	-0,50	0	0	0
Links fallende Stäbe	1	-1,00	0	0	0	-0,75	0	0	0
	2	+0,25	+0,325	0	0	-0,75	-0,975	0	0
	3	+0,25	-0,433	+0,433	0	+0,50	-0,867	+0,867	0
	4	+0,25	0	-0,500	+0,500	+0,50	0	-1,000	+1,000
	5	+0,25	0	0	-0,317	+0,50	0	0	-0,634
Summe...			-4,513	-1,521	-0,788		-4,534	-5,544	-1,577

Sonach wird nun, wenn wir bei irgend einer Belastung für die Knotenpunkte I, II, III die Summen $\Sigma(z\sigma\text{⊗}) = -A_1, -A_2, -A_3$ setzen,

$$E\delta_1 = A_1 - 0,179m_1,$$

$$E\delta_2 = A_2 - 0,195m_2,$$

$$E\delta_3 = A_3 - 0,179m_3,$$

Nach der Gleichung 18 wird ferner $E\delta_1 = \frac{1}{6}[0 + 2m_1(65,8 + 51,2) + m_2 \cdot 51,2]$ u. s. w., oder

$$E\delta_1 = 39,00m_1 + 8,53m_2,$$

$$E\delta_2 = 8,53m_1 + 34,13m_2 + 8,53m_3,$$

$$E\delta_3 = 8,53m_2 + 39,00m_3.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke für $E\delta$ gibt

$$\begin{cases} 39,18m_1 + 8,53m_2 = A_2, \\ 8,53m_1 + 34,33m_2 + 8,53m_3 = A_1, \\ 8,53m_2 + 39,18m_3 = A_3. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$\begin{cases} m_1 = + 0,0271 A_1 - 0,0071 A_2 + 0,0015 A_3, \\ m_2 = - 0,0070 A_1 + 0,0325 A_2 - 0,0070 A_3, \\ m_3 = + 0,0015 A_1 - 0,0071 A_2 + 0,0271 A_3. \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich nun

$$\text{Belastung von 1: } m_1 = + 0,108, \quad m_2 = + 0,009, \quad m_3 = + 0,018.$$

$$\text{Belastung von 2: } m_1 = + 0,086, \quad m_2 = + 0,138, \quad m_3 = + 0,010.$$

Ist jeder der unteren Knotenpunkte mit der Last 1 belastet, so wird hiernach $m_1 = m_3 = 0,113 + 0,085 + 0,009 + 0,017$, $m_2 = 0,012 + 0,142 + 0,142 + 0,012$, d. i.

$$m_1 = 0,222, \quad m_2 = 0,294, \quad m_3 = 0,222.$$

Bei Belastung aller vier Knotenpunkte sind die Spannungen des Untergurtes bei nicht kontinuierlichem Obergurte $\mathcal{S} = + 1,50, + 3,75, + 4,50$, bei kontinuierlichem Obergurte aber $S = + 1,50, + 3,75 - 0,025 \cdot 0,222 = + 3,750 - 0,006, + 4,50 - 0,025 \cdot 0,294 = + 4,500 - 0,008$, also um 0, 0,15 und 0,17 Prozent kleiner. Die Spannungen des Obergurtes werden bei nicht kontinuierlichem Obergurte $\mathcal{S} = - 3,0, - 4,5$, bei kontinuierlichem Obergurte $S = - 3,0 + 0,0125 \cdot 0,222 = - 3,000 + 0,003 = - 2,997, - 4,5 + 0,0125 \cdot 0,222 + 0,0125 \cdot 0,294 = - 4,500 + 0,007 = - 4,493$, also um 0,10 und 0,15 Prozent kleiner. Ist \mathcal{N} , N die spezifische Maximalspannung bei nicht kontinuierlichem und kontinuierlichem Obergurte, M das auf das betreffende Gurtstück wirkende Maximalmoment, a der Abstand der gespanntesten Faser von der Schweraxe, so ist $\mathcal{N} = \frac{\mathcal{S}}{F}$, $N = \frac{S}{F} + \frac{Ma}{I}$, daher

$$a. \quad \frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{S}{\mathcal{S}} + \frac{Ma}{\mathcal{S}r^2}.$$

Dies gibt für $e = 1,25$ für das erste obere Gurtstück $\frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{2,997}{3} + \frac{0,222 \cdot 1,25}{3 \cdot 0,91^2} =$

$1,113$ und für das zweite $\frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{4,493}{4,5} + \frac{0,294 \cdot 1,25}{4,5 \cdot 0,86^2} = 1,114$, so dass durch die

Kontinuität die Spannung um ungefähr 11 Prozent vergrößert wird.

Beispielsweise wird ferner für den Stab I 2 bei Belastung aller Knotenpunkte $\mathcal{S} = + 1,25, S = + 1,25 + 0,0208 \cdot 0,222 - 0,0208 \cdot 0,294 = + 1,250 - 0,002$; bei Belastung der Knotenpunkte 2, 3, 4, bei welcher hinsichtlich der zufälligen Belastung das Maximum der Spannung eintritt, wird $m_1 = 0,086 + 0,010 + 0,018 = 0,114$, $m_2 = 0,138 + 0,138 + 0,009 = 0,285$, $m_3 = 0,010 + 0,086 + 0,108 = 0,204$, $\mathcal{S} = + 1,5, S = 1,5 + 0,0208 \cdot 0,114 - 0,0208 \cdot 0,285 = 1,5 - 0,004$.

In gleicher Weise ergibt sich bei Belastung aller Knotenpunkte (Eigengewicht) für die rechts fallenden Stäbe $S = + 2,500 - 0,005, + 1,250 - 0,002, 0 + 0,002$, für die links fallenden $S = - 2,500 + 0, - 1,250 + 0,005, 0 + 0,002$ und bei der ungünstigsten partiellen Belastung (zufällige Last) für die rechts fallenden Stäbe $S = + 2,500 - 0,005, + 1,500 - 0,004 + 0,750 - 0,003$, für die links fallenden $S = - 2,500 + 0, - 1,500 + 0,002, - 0,750 + 0,003$.

II. Beispiel. Dasselbe Beispiel, nur mit der Abänderung, dass die Schwerpunkte der Gurtquerschnitte in den Knotenpunkten I, II, III um $0,5 \text{ dm}$ über den Gelenken liegen. Alsdann wird nach Formel 19 für die Gurtstücke 0 I und III IV $z = 54,5 \left(1 + \frac{0,5}{3 \cdot 0,91^2} \right) = 65,5$ und für die Gurtstücke I II und II III: $z = 35,0 \left(1 + \frac{1,5}{3 \cdot 0,83^2} \right) = 61,6$. Die beiden Tabellen des vorigen Beispiels erleiden hiernach hinsichtlich des Obergurtes die folgenden Aenderungen:

Theil Nummer	F	z	10σ für Knotenpunkt			zσ für Knotenpunkt			10zσ² für Knotenpunkt		
			I	II	III	I	II	III	I	II	III
Obergurt 1	1,10	65,5	+ 0,125	0	0	0,819	0	0	0,102	0	0
2	1,70	61,6	+ 0,125	+ 0,125	0	0,769	0,769	0	0,096	0,096	0
3	1,70	64,6	0	+ 0,125	+ 0,125	0	0,769	0,769	0	0,096	0,096
4	1,10	65,5	0	0	+ 0,125	0	0	0,819	0	0	0,102
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
Summe									1,849	2,033	1,849

Theil Nummer	S	Belastung von 1			S	Belastung von 2		
		zσS für Knotenpunkt				zσS für Knotenpunkt		
		I	II	III		I	II	III
Obergurt 1	- 1,20	- 0,983	0	0	- 0,90	- 0,737	0	0
2	- 0,90	- 0,692	- 0,692	0	- 1,80	- 1,384	- 1,384	0
3	- 0,60	0	- 0,461	+ 0,461	- 1,20	0	- 0,923	- 0,923
4	- 0,30	0	0	+ 0,246	- 0,60	0	0	- 0,491
•	•	•	•	•	•	•	•	•
Summe		- 4,275	- 1,886	- 1,029		- 5,255	- 6,540	- 2,058

Nach der Formel 18 ergibt sich nun $E\delta_1 = A_1 - 0,185m_1 - 0,0125 \frac{m_1 \cdot I}{6 \cdot 0,912}$
 $- 0,0125 \frac{m_1 \cdot 1,5 + m_2 \cdot 1,5}{6 \cdot 1,173}$ u. s. w., d. i.

$$E\delta_1 = A_1 - 0,188m_1 - 0,003m_2,$$

$$E\delta_2 = A_2 - 0,003m_1 + 0,208m_2 - 0,003m_3,$$

$$E\delta_3 = A_3 - 0,003m_2 - 0,188m_3.$$

Es ist nun ferner nach den Formeln 9: $O_1 = \mathfrak{D}_1 + 0,0125m_1$, $O_2 = \mathfrak{D}_2 + 0,0125(m_1 + m_2)$,
 $O_3 = \mathfrak{D}_3 + 0,125(m_2 + m_3)$, $O_4 = \mathfrak{D}_4 + 0,125m_3$. Nach der Formel 18 wird daher
 $E\delta_1 = 39,00m_1 + 8,53m_2 + 21,93\mathfrak{D}_1 + 25,60\mathfrak{D}_2 + 0,274m_1 + 0,320(m_1 + m_2)$
u. s. w., oder

$$E\delta_1 = 10,9\mathfrak{D}_1 + 12,8\mathfrak{D}_2 + 39,297m_1 + 8,690m_2,$$

$$E\delta_2 = 12,8\mathfrak{D}_2 + 12,8\mathfrak{D}_3 + 8,690m_1 + 34,450m_2 + 8,690m_3,$$

$$E\delta_3 = 12,8\mathfrak{D}_3 + 10,9\mathfrak{D}_4 + 8,690m_2 + 39,297m_3.$$

Setzen wir zur Abkürzung $A_1 - 10,9\mathfrak{D}_1 - 12,8\mathfrak{D}_2 = B_1$, $A_2 - 12,8(\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3) = B_2$,
 $A_3 - 12,8\mathfrak{D}_3 - 10,9\mathfrak{D}_4 = B_3$, so gibt die Gleichsetzung beider Ausdrücke für $E\delta$
die Gleichungen:

$$\begin{cases} 39,49 m_1 + 8,69 m_2 = B_1 \\ 8,69 m_1 + 34,66 m_2 + 8,69 m_3 = B_2 \\ 8,69 m_2 + 39,49 m_3 = B_3. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$\begin{cases} m_1 = + 0,0267 B_1 - 0,0071 B_2 + 0,0015 B_3, \\ m_2 = + 0,0071 B_1 + 0,0328 B_2 - 0,0071 B_3, \\ m_3 = + 0,0015 B_1 - 0,0071 B_2 + 0,0267 B_3. \end{cases}$$

Für die Belastung von 1 wird $B_1 = 4,28 - 10,9 \cdot (-1,2) - 12,8 \cdot (-0,9)$ u. s. w. oder $B_1 = 28,94$, $B_2 = 21,08$, $B_3 = 11,99$ und somit:

$$m_1 = + 0,634, \quad m_2 = + 0,395, \quad m_3 = + 0,212.$$

Für die Belastung von 2 wird $B_1 = 71,77$, $B_2 = 84,34$, $B_3 = 46,40$ und dem entsprechend

$$m_1 = + 0,725, \quad m_2 = + 0,507, \quad m_3 = + 0,376.$$

Ist jeder der unteren Knotenpunkte mit der Last 1 belastet, so wird hiernach

$$m_1 = + 1,947, \quad m_2 = + 2,820, \quad m_3 = + 1,947.$$

Bei Belastung aller 4 Knotenpunkte sind die Spannungen des Untergurtes $S = + 1,50, + 3,75 - 0,025 \cdot 1,947 = + 3,750 - 0,048 = + 3,702, + 4,50 - 0,025 \cdot 2,82 = + 4,500 - 0,071 = + 4,429$, also um 1, 1,3 und 1,6 Prozent kleiner, als bei nicht kontinuierlichem Obergurte. Die Spannungen des Obergurtes $S = - 3,0 + 0,0125 \cdot 1,947 = - 3,000 + 0,024 = - 2,976, - 4,5 + 0,0125 (1,947 + 2,820) = - 4,500 + 0,060 = - 4,440$, also um 0,8 und 1,3 Prozent kleiner, als bei nicht kontinuierlichem Obergurte. Für das Gurtstück 0 I wird $M_1 = 0, M_2 = 1,947 - 2,976 \cdot 0,5 = + 0,459$, daher nach Formel a für das linke Ende $\frac{N}{R} = 1$,

für das rechte $\frac{N}{R} = \frac{2,976}{3} + \frac{0,459 \cdot 1,25}{3 \cdot 0,83} = 0,992 + 0,230 = 1,222$. Für das

Gurtstück I II wird $M_1 = 1,947 - 4,440 \cdot 0,5 = - 0,273, M_2 = 2,820 - 4,44 \cdot 0,5 = + 0,600$, daher für das linke Ende $\frac{N}{R} = \frac{4,44}{4,50} + \frac{0,273 \cdot 1,25}{4,5 \cdot 0,74} = 0,987 + 0,102$

$= 1,089$, für das rechte Ende $\frac{N}{R} = \frac{4,44}{4,50} + \frac{0,600 \cdot 1,25}{4,5 \cdot 0,74} = 0,987 + 0,225 = 1,212$.

Die spezifische Maximalspannung ist daher hier 11 und 10 Prozent grösser, als bei nicht kontinuierlichem Obergurte.

§. 111. Einfluss der Kontinuität beider Gurte. Die Formel 17 bleibt auch hier noch gültig; nur ist die Bildung der Summe $\Sigma(\sigma m)$ auf die Momente, welche an den Knotenpunkten beider Gurte entstehen, zu erstrecken.

Auch die Formel 18 bleibt für jeden der beiden Gurte gültig; nur ist für das dem fraglichen Knotenpunkte gegenüber liegende Gurtstück nicht $\alpha = \frac{a}{EF}$, sondern

$$21. \quad \alpha = \frac{a}{EF} \left(1 + \frac{e_1'^2 + e' e_1 + e_1^2}{3 r_1^2} \right)$$

zu setzen, wenn sich alle hierin vorkommenden Grössen auf dieses Gurtstück beziehen.

Ebenso bleibt auch die Formel 20 für jeden der beiden Gurte gültig. Indem man nun für jeden der beiden Gurte die Gleichsetzung der Werthe

für δ_n durchführt, erhält man für jeden Gurt die Gleichungen zur Bestimmung der an den Knotenpunkten dieses Gurtes wirkenden Momente. Die Spannungen der einzelnen Theile sind alsdann durch die Formel 17 bestimmt.

§. 112. Näherungstheorie des Einflusses der Kontinuität der Gurte. Zunächst kann man, der genaueren Theorie entsprechend, annähernd annehmen, dass die Spannungen S der einzelnen Theile dieselben sind, als wenn der Gurt nicht kontinuierlich wäre, so dass es sich nur noch um die Bestimmung der Biegungsspannungen in den kontinuierlichen Gurten handelt.

Der Formel 18 entsprechend wird, wenn wir das Glied mit m vernachlässigen, $\delta = -\Sigma(\kappa \sigma \mathfrak{S}) = -\Sigma(\kappa \sigma S)$. Für einen beliebigen Knotenpunkt des Obergurtes wird hiernach

$$\delta = -\frac{1}{E} \left[\omega_1 O_1 \frac{l_1}{F_1} \left(l + \frac{e_1^2}{r_1^2} \right) + \omega_2 O_2 \frac{l_2}{F_2} \left(1 + \frac{e_2^2}{r_2^2} \right) + \nu U \frac{l}{F} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} \right) + \Sigma \left(\sigma S \frac{a}{f} \right) \right].$$

Hierin ist für einen beliebigen der drei in Frage kommenden Gurtstäbe $e^2 = \frac{1}{3}(e'^2 + e'e'' + e''^2)$ gesetzt, wenn e' , e'' die Exzentrizität am linken und rechten Ende dieses Stabes bezeichnet. Ferner bezieht sich $\Sigma_1(\sigma S \frac{a}{f})$ nur auf die vier in Frage kommenden Gitterstäbe.

Setzen wir nun ferner in Gleichung 20 annähernd $m' \frac{a'}{I'} + m'' \frac{a''}{I''} = m \left(\frac{a'}{I'} + \frac{a''}{I''} \right)$ und nur für die den beiden Enden des Gurtes zunächst liegenden Knotenpunkte $m' = 0$, $m'' \frac{a''}{I''} = \frac{1}{2} m \left(\frac{a'}{I'} + \frac{a''}{I''} \right)$, setzen wir ferner $e' + 2e = 3e_1'$, $2e + e'' = 3e_2'$, so wird allgemein

$$\delta = \frac{1}{2E} \left[m \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + \frac{O_1 l_1 e_1'}{F_1 r_1^2} + \frac{O_2 l_2 e_2'}{F_2 r_2^2} \right].$$

Für einen Endknotenpunkt ist $\frac{5}{6} m$ für m zu setzen.

Die Gleichsetzung der Ausdrücke für δ gibt, wenn wir hierin $\omega_1 \frac{e_1^2}{r_1^2}$ und $\omega_2 \frac{e_2^2}{r_2^2}$ gegen $\frac{e'}{r_1^2}$ und $\frac{e_2'}{r_2^2}$, sowie $\frac{e^2}{r^2}$ gegen 1 vernachlässigen und wenn wir zur Abkürzung $A = -\Sigma \left(\sigma S \frac{a}{f} \right)$ setzen,

$$22. m \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) = -\frac{O_1 l_1}{F_1} \left(2\omega_1 + \frac{e_1'}{r_1^2} \right) - \frac{O_2 l_2}{F_2} \left(2\omega_2 + \frac{e_2'}{r_2^2} \right) - 2 \frac{Ul}{F} + 2A.$$

Bei einem Endknotenpunkte ist wieder $\frac{5}{6} m$ für m zu setzen. Hierdurch ist nun m bestimmt.

Setzen wir nach den Formeln 10a: $\omega_1 = \frac{\tan \alpha_1}{l_1}$, $\omega_2 = \frac{\tan \beta_1}{l_2}$,
 $\nu = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{l}$, ferner $O_1 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{y_1}$, $O_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{y_2}$, $U = +\frac{\mathfrak{M}}{y}$, wobei
 \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \mathfrak{M} die Momente der äusseren Kräfte für durch F , G , D
(Fig. 169) gelegten Schnitte in Beziehung auf die Punkte F , G , D be-
deuten, so wird

$$23. \quad m \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) = \frac{\mathfrak{M}_1}{F_1 y_1} \left(2 \tan \alpha_1 + \frac{l_1 e_1'}{r_1^2} \right) + \frac{\mathfrak{M}_2}{F_2 y_2} \left(2 \tan \beta_2 + \frac{l_2 e_2'}{r_2^2} \right) \\
+ 2 \frac{\mathfrak{M}}{F y} (\tan \alpha + \tan \beta) + 2A.$$

Die Momente M_1 , M_2 , welche den Gurt und zwar auf die auf der linken
und rechten Seite des fraglichen Knotenpunktes zu liegenden Schnitte in
Beziehung auf die Schweraxe wirken, sind nun

$$24. \quad M_1 = m + O_1 e, \quad M_2 = m + O_2 e.$$

Setzen wir noch annähernd $\tan \alpha_1 = \tan \alpha$, $\tan \beta_2 = \tan \beta$, $\mathfrak{M}_1 =$
 $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $l_1 = l_2 = l$, $y_1 = y_2 = y$, $r_1 = r_2 = r$, $e_1' = e_2' = e$, $F_1 =$
 $F_2 = F$, $y (\tan \alpha + \tan \beta) = l$, so wird

$$25. \quad m = \mathfrak{M} \left(\frac{2r^2}{y^2} + \frac{e}{y} \right) + \frac{F r^2}{l} A.$$

Setzen wir $O_1 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{y_1}$, $O_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{y_2}$, so wird

$$26. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{2\mathfrak{M} r^2}{y^2} + \frac{F r^2}{l} A + (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1) \frac{e}{y}, \\ M_2 = \frac{2\mathfrak{M} r^2}{y^2} + \frac{F r^2}{l} A - (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}) \frac{e}{y}. \end{cases}$$

Die spezifische Maximalspannung ist nun $N_1 = \frac{O_1}{F} + \frac{M_1 \cdot e}{F r^2}$ und
 $N_2 = \frac{O_2}{F} + \frac{M_2 \cdot e}{F r^2}$, wenn c den Abstand der gespanntesten Faser von der
Schweraxe bedeutet; d. i. nahezu:

$$27. \quad \begin{cases} N_1 = \frac{\mathfrak{M}_1 (y + 2c)}{F y^2} + A \frac{c}{l} + \left(\frac{\mathfrak{M}}{y} - \frac{\mathfrak{M}_1}{y_1} \right) \frac{e}{F d}, \\ N_2 = \frac{\mathfrak{M}_2 (y + 2c)}{F y^2} + A \frac{c}{l} - \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{y_2} - \frac{\mathfrak{M}}{y} \right) \frac{e}{F d}, \end{cases}$$

wenn $d = \frac{r^2}{c}$ den Abstand des betreffenden Kernpunktes des Querschnittes,
d. i. des betreffenden Punktes des Umfanges des sogenannten Central-
kernes, von der Schweraxe bezeichnet.

Das erste den grössten Theil bildende Glied ergibt sich sofort nach der
gewöhnlichen Biegungstheorie vollwandiger Stäbe; denn es ist $\frac{1}{2} y + c$
der Abstand der gespanntesten Faser von der Schweraxe, $\frac{1}{2} F y^2$ das
Trägheitsmoment des gespannten Querschnittes.

Der Einfluss der Kontinuität der Gurte ist so gross, dass eine annähernde Berücksichtigung der Kontinuität bei der Berechnung des Querschnittes rathsam erscheint. Aus der Gleichung 27 folgt, wenn wir N gleich der zulässigen Inanspruchnahme K setzen, für $e = 0$:

$$28. \quad F = \frac{\mathfrak{M} \left(1 + 2 \frac{c}{y} \right)}{yK \left(1 - \frac{cA}{lK} \right)},$$

oder, wenn man den ohne Rücksicht auf die Kontinuität berechneten Querschnitt $\frac{\mathfrak{M}}{yK}$ mit F_0 bezeichnet und für den Nenner die Näherungsregel $\frac{1}{1-x} = 1 + x$ bei kleinem x anwendet,

$$29. \quad F = F_0 \left(1 + 2 \frac{c}{y} + \frac{c}{l} \frac{A}{K} \right).$$

Da die Querschnitte der Gitterstäbe unabhängig von den Gurten berechnet werden können, so lässt sich der Werth von A vor der Berechnung der Gurte feststellen.

Beispiel. Wir wählen das Beispiel zu §. 110 (Fig. 177). Der Belastung sei für Eigengewicht und zufällige Last für einen oberen Knotenpunkt 1,8, für einen unteren Knotenpunkt 18,6 Tonnen. Wir nehmen beide Gurte als kontinuierlich und $e = 0$ an. Entsteht an einem oberen oder unteren Knotenpunkte das Moment 1, so wird die Spannung σ der 4 benachbarten Gitterstäbe $= \pm 0,00208$, die der übrigen Gitterstäbe $= 0$. Hiernach berechnet sich der Werth von A wie folgt:

Theil	Nummer	F	H = $\frac{c}{F}$	S	$\sigma z S$ für Knotenpunkt			$\sigma z S$ für Knotenpunkt			
					I	II	III	1	2	3	4
Rechts fallende Stäbe	1	82	6,10	+49,9	-0,633	0	0	-0,633	0	0	0
	2	52	9,61	+24,4	+0,488	-0,488	0	+0,488	-0,488	0	0
	3	60	8,33	-1,1	0	-0,019	+0,019	0	-0,019	+0,019	0
	4	80	6,25	-26,6	0	0	-0,346	0	0	-0,346	+0,346
	5	100	5,00	-52,1	0	0	0	0	0	0	-0,542
Links fallende Stäbe	1	100	5,00	-52,1	0	0	0	-0,542	0	0	0
	2	80	6,25	-26,6	-0,346	0	0	+0,346	-0,346	0	0
	3	60	8,33	-1,1	+0,019	-0,019	0	0	+0,019	-0,019	0
	4	52	9,61	+24,4	0	-0,488	+0,488	0	0	-0,488	+0,488
	5	80	6,10	+49,9	0	0	-0,633	0	0	0	-0,633
Summe					-0,470	-1,014	-0,470	-0,341	-0,834	-0,834	-0,341

Nehmen wir $c = 12,5$, $l = 600$, $y = 400$, $K = 0,75$ Tonnen pro \square^m an, so wird $2 \frac{c}{y} = \frac{2 \cdot 12,5}{400} = 0,0625$ und $\frac{c}{lK} = \frac{12,5}{600 \cdot 0,75} = \frac{1}{36}$, also

Knotenpunkt	I	II	III	1	2	3	4
$2 \frac{c}{y}$	$= 0,063$	$0,063$	$0,063$	$0,063$	$0,063$	$0,063$	$0,063$
$\frac{c}{l} \frac{A}{K}$	$= 0,013$	$0,028$	$0,013$	$0,009$	$0,023$	$0,023$	$0,009$
$2 \frac{c}{y} + \frac{c}{l} \frac{A}{K}$	$= 0,076$	$0,091$	$0,076$	$0,072$	$0,086$	$0,086$	$0,072$,

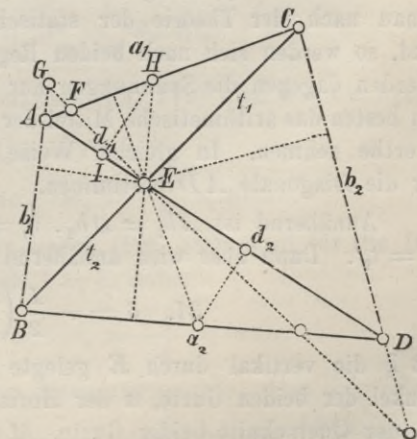
so dass die Querschnitte in Folge der Continuität der Gurte um 7 bis 9 Prozent vergrössert werden. Für die Berechnung des Querschnittes jedes Gurtstückes ist derjenige der beiden Knotenpunkte massgebend, für welche $2 \frac{c}{l} = \frac{cA}{lK}$ am grössten ist.

§. 113. Einfluss der Verbindung der sich kreuzenden Stäbe beim zweitheiligen Systeme. Wir wollen jetzt voraussetzen, dass in den Gurten vollständige Gelenkverbindungen angeordnet seien, dass aber die kreuzenden Stäbe mit einander gelenkartig verbunden sind. Ist hierbei jeder Stab in zwei Theile derart getrennt, dass an der Verbindungsstelle eine vollständige Gelenkverbindung entsteht, so müssen die Spannungen der beiden, einem Gitterstabe angehörigen Theile, vorausgesetzt, dass beide Theile eine gerade Linie bilden, gleich gross sein. Alsdann aber sind die Spannungen in den einzelnen Theilen genau dieselben, als wenn beide Gitterstäbe nicht verbunden wären.

Wenn nun aber ein Gitterstab kontinuierlich angeordnet wird und in Folge der hierdurch bedingten Biegung am Kreuzungspunkte ein Moment eintritt, so werden hierdurch auch die Spannungen der übrigen Stäbe geändert. Es hat nun zwar keine Schwierigkeit, die durch dieses Moment bedingten Spannungen, ähnlich wie in §. 109 zu bestimmen. Indess ist der Einfluss im Allgemeinen noch geringer, als der der Continuität der Gurte, so dass wir von Vornherein annehmen wollen, dass die Axialspannungen durch die Kreuzung der Gitterstäbe nicht geändert werden. Es bleibt dann nur übrig, die durch die Kreuzung entstehenden Biegungsspannungen zu bestimmen.

Wir bestimmen zunächst den Winkel δ , um welchen sich die Stabtheile BE und EC der Diagonale BC (Fig. 178) gegenseitig drehen. Wir denken uns hierzu das

Fig. 178.



Dreieck BAC nebst AE getrennt, da durch die Längenänderung dieser fünf Stäbe der Winkel δ bestimmt ist. Bezeichnen wir die Längen von AC , AB , AE , CE , BE bezüglich mit a_1 , h_1 , d_1 , t_1 , t_2 , die Längenänderungen dieser Stäbe durch ein vorgesetztes Δ , die Spannungen derselben, welche durch ein in E auf den Stab BC wirkendes Moment $= I$ entstehen, mit α_1 , η_1 , δ_1 , τ_1 , τ_2 , so wird, entsprechend dem §. 108:

$$\delta = - [\alpha_1 \Delta a_1 + \eta_1 \Delta h_1 + \delta_1 \Delta d_1 + \tau_1 \Delta t_1 + \tau_2 \Delta t_2].$$

Bezeichnet man die normalen Abstände des Punktes E von AC und AB mit α_1 , h_1 , so ist $\alpha_1 = +\frac{1}{a_1}$, $\eta_1 = +\frac{1}{h_1}$. Errichtet man auf BC in E eine Senkrechte, welche CA und BA in F und G schneidet und setzt man $EF = t_1$, $EG = t_2$, so ergibt sich leicht, dass $\tau_1 = -\frac{1}{t_1}$, $\tau_2 = -\frac{1}{t_2}$ ist. Legt man durch E eine Parallele zu BA , welche AC in H schneidet und ist δ_1 der normale Abstand des Punktes H von EA , so ergibt sich $\delta_1' = -\frac{1}{\delta_1'}$, mithin

$$30. \quad \delta = -\frac{\Delta a_1}{a_1} - \frac{\Delta h_1}{h_1} + \frac{\Delta d_1}{\delta_1} + \frac{\Delta t_1}{t_1'} + \frac{\Delta t_2}{t_2}.$$

In ganz gleicher Weise ergibt sich durch das Dreieck BCD mit DE der Ausdruck:

$$30a. \quad \delta = +\frac{\Delta a_2}{a_2} + \frac{\Delta h_2}{h_2} - \frac{\Delta d_2}{\delta_2} - \frac{\Delta t_1}{t_1} + \frac{\Delta t_2}{t_2}.$$

Sind die Geraden AB und CD nicht durch wirkliche Stäbe vertreten, wie beim kombinierten Gitterwerk, so müssen ihre Längenänderungen nach dem Prinzip der Arbeit oder durch allmälige Anwendung der Regel 7 (Seite 244) auf die einzelnen Vierecke besonders bestimmt werden.

Wenn die Spannungen und die entsprechenden Längenänderungen genau nach der Theorie der statisch unbestimmten Systeme bestimmt sind, so werden sich nach beiden Regeln für δ gleiche Werthe ergeben. Werden dagegen die Spannungen nur annähernd bestimmt, so wird man am besten das arithmetische Mittel der sich nach beiden Regeln ergebenden Werthe nehmen. In gleicher Weise lässt sich nun auch der Winkel δ für die Diagonale AD bestimmen.

Annähernd ist $\Delta h_1 = \Delta h_2$, $h_1 = h_2$, $\Delta d_1 = \Delta d_2$, $\delta_1 = \delta_2$, $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$. Dann aber wird annähernd für jede der beiden Diagonalen

$$31. \quad \delta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta a_1}{a_1} - \frac{\Delta a_2}{a_2} \right).$$

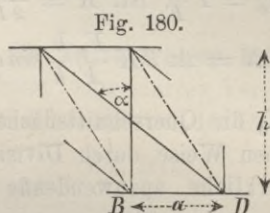
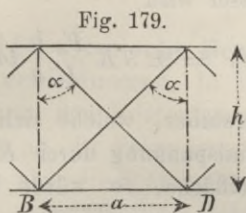
Ist h die vertikal durch E gelegte Trägerhöhe, σ_1 , σ_2 der Neigungswinkel der beiden Gurte, a der Horizontalabstand der Knotenpunkte, F_1 , F_2 der Querschnitt beider Gurte, M das Moment in Beziehung auf den

durch E gelegten Vertikalschnitt, so ist annähernd $a_1 = \frac{1}{2} h \cos \sigma_1$,
 $a_2 = \frac{1}{2} h \cos \sigma_2$, $\Delta a_1 = -\frac{M \sec \sigma}{Eh} \cdot \frac{a \sec \sigma}{F_1} = -\frac{M a \sec^2 \sigma}{E F_1 h}$, $\Delta a_2 = +\frac{M a \sec^2 \sigma}{E F_2 h}$,
 also:

$$32. \quad \delta = -\frac{M a}{E h^2} \left(\frac{\sec^3 \sigma_1}{F_1} + \frac{\sec^3 \sigma_2}{F_2} \right).$$

Für den Parallelträger mit Netzwerk (Fig. 179) oder Fachwerk (Fig. 180) wird genauer

$$33. \quad \delta = \frac{2 M a}{E h^2} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right),$$



Ist I das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes für die horizontale Schweraxe, so ergibt sich leicht

$$I = \frac{F_1 F_2 h^2}{F_1 + F_2}.$$

Der vorige Ausdruck lässt sich daher auch schreiben

$$33a. \quad \delta = \frac{M a}{E I}.$$

Ist nun m_1, m_2 das in der Diagonale AD und BC bei E entstehende Moment, i_1, i_2 das Trägheitsmoment des Querschnittes dieser Diagonalen, so wird nach Formel 7 (Seite 278), worin $M_1 = 0, M_3' = 0, M_2 = M_2' = m_1$ bezüglich m_2 und $I = I'$ zu setzen ist, $\delta = \frac{m_1 d}{3 E i_1}$,
 $\delta = \frac{m_2 t}{3 E i_2}$, also

$$34. \quad m_1 = \frac{3 E \delta i_1}{d}, \quad m_2 = \frac{3 E \delta i_2}{t}.$$

Für den Parallelträger mit Netzwerk (Fig. 179) wird $d = t = h \sec \alpha$,
 daher $m_1 = \frac{3 i_1}{h \sec \alpha} \cdot \frac{M a}{I}$, $m_2 = \frac{3 i_2}{h \sec \alpha} \cdot \frac{M a}{I}$, d. i.

$$35. \quad m_1 = \frac{3 M}{I} i_1 \sin \alpha, \quad m_2 = \frac{3 M}{I} i_2 \sin \alpha.$$

Für den Parallelträger mit Fachwerk (Fig. 180) wird für die Diagonale $\delta = h \sec \alpha$, für die Vertikale $t = h$, daher

$$36. \quad m_1 = \frac{3 M}{I} i_1 \sin \alpha, \quad m_2 = \frac{3 M}{I} i_2 \tan \alpha.$$

Die Krümmung des Gitterstabes am Kreuzungspunkte, d. i. $\frac{m_1}{i_1}, \frac{m_2}{i_2}$ ist hiernach das $3 \sin \alpha$, bezüglich $3 \tan \alpha$ fache der Krümmung $\frac{M}{I}$ der Gurte.

Ist N die durch die Biegung eines Gitterstabes veranlasste spezifische Maximalspannung, b die Breite des Stabes, so ist bei symmetrischem Querschnitte $N = \pm \frac{m_1 b}{2i_1}$, bezüglich $\pm \frac{m_2 b}{2i_1}$, d. i.

$$37. \quad N = \pm \frac{3}{2} \frac{M}{I} b \sin \alpha, \quad \text{bezüglich} \quad \pm \frac{3}{2} \frac{M}{I} b \tan \alpha.$$

Ist K die zulässige Inanspruchnahme, F_0 die theoretische Querschnittsfläche des Gurtes, F die wirkliche, I_0 und I das theoretische und wirkliche Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes, so ist $K = \frac{Mh}{2I_0}$ oder, da $I_0 = I \frac{F_0}{F}$ ist, $K = \frac{Mh}{2I} \cdot \frac{F}{F_0}$. Dieser wird

$$38. \quad N = \pm 3K \frac{F_0}{F} \frac{b}{h} \sin \alpha, \quad \text{bezüglich} \quad = \pm 3K \frac{F_0}{F} \frac{b}{h} \tan \alpha.$$

Ist f_0 die Querschnittsfläche des Gitterstabes, welche sich in der gewöhnlichen Weise durch Division der Axialspannung durch K ergibt, f' die wirkliche anzuwendende Querschnittsfläche, so würde hiernach annähernd

$$39. \quad \begin{cases} f = f_0 \left(1 + 3 \frac{F_0}{F} \frac{b}{h} \sin \alpha \right), & \text{bezüglich} \\ f = f_0 \left(1 + 3 \frac{F_0}{F} \frac{b}{h} \tan \alpha \right), \end{cases}$$

Hiernach erscheint es rathsam, die Breite b der Gitterstäbe in die Ebene der Gitterwand gemessen, nicht sehr gross zu wählen. Bei den ausgeführten Brücken treten nach dieser Untersuchung Vergrößerungen der Beanspruchung bis zu 20 Prozent ein.

Durch die Krümmung der Gitterstäbe entsteht auch eine ungleiche Spannung in den beiden Theilen eines Gitterstabes. Ist P_1, P_2 die Spannung in den beiden Theilen des Stabes BC (Fig. 178), γ der Winkel zwischen beiden Stäben, so wirkt in E auf den Stab AD die Normalkraft $(P_1 - P_2) \sin \gamma$, daher ist $m_2 = \frac{(P_1 - P_2) d_1 d_2 \sin \gamma}{d_1 + d_2}$, wodurch, da m_2 bekannt, $P_1 - P_2$ zu bestimmen ist. Indess ergibt sich die Vergrößerung in spezifischer Spannung durch diesen Spannungsunterschied wesentlich geringer als durch die Krümmung, so dass wir nicht näher darauf eingehen wollen.

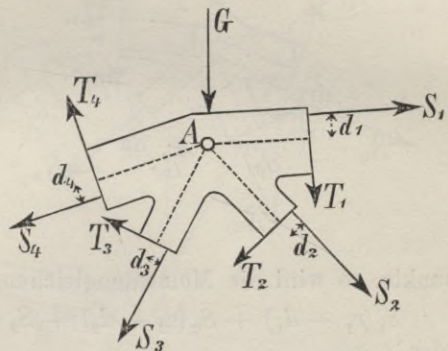
Anmerkung. Ist das Gitterwerk mehr als zweitheilig, so stösst man bei der Untersuchung des Einflusses der Verbindung der Stäbe auf grössere Schwierigkeiten. Ist die Theilungszahl sehr gross, so wird allerdings die Untersuchung wieder erleichtert, indem man hier einen stetigen Verlauf der Krümmung der Stäbe annehmen kann. Unter der Annahme, dass bei der Deformation die in einer Vertikalen liegenden Kreuzungspunkte in einer Geraden verbleiben und dass auch der Abstand dieser Kreuzungspunkte konstant bleibt, wurde der Einfluss der Kreuzungen zuerst von Scheffler (Theorie der Gewölbe u. s. w. 1857, Theorie der Festigkeit gegen das Zer-

knicken u. s. w. 1858), sodann vollständiger vom Verfasser (Förster's Bauzeitung, 1859) untersucht. Nach der letzten Untersuchung ist die Krümmung der Gitterstäbe beim Netzwerke das $\sin\alpha(1 + \cos^2\alpha)$ fache der Krümmung der Gurte, so dass hiernach der Einfluss geringer würde, als beim zweitheiligen Gitterwerke. Später ist der Einfluss vom Verfasser noch genauer untersucht worden, indem er die erste Annahme, dass die in einer Vertikalen liegenden Kreuzungspunkte auch bei der Deformation in einer Geraden bleiben, beibehielt, aber die zweite Annahme, dass die Entfernung der Kreuzungspunkte konstant bleibt, fallen liess. Hiernach ergab sich die Krümmung der Gitterstäbe im Maximum gleich der Krümmung der Gurte, also ebenfalls noch günstiger, als beim zweitheiligen Systeme. Wir wollen indess hier nicht näher auf diese Theorien eingehen, da sie eben nicht frei von Annahmen sind, deren Zulässigkeit fraglich erscheint.

§. 114. Statische Beziehungen für Gitterträger mit festen Knotenverbindungen.

In Folge der festen oder starren Verbindungen der Stäbe an den Knotenpunkten nehmen die Stäbe bei der Deformation Biegungen an. In Folge dessen vertheilen sich die Spannungen in einem Querschnitte nicht mehr gleichmässig über denselben. Die in einem Querschnitte wirkenden Spannungen lassen sich zusammensetzen zu einer in der Richtung der Axe excentrisch gegen dieselbe wirkenden Axialspannung P und eine in der Ebene des Querschnittes wirkende Schubspannung T . Zunächst mögen

Fig. 181.



sich die Axen aller Stäbe an einem Knotenpunkte in einem bestimmten Punkte A , dem Knotenschnittpunkte, schneiden; wir nennen in diesem Falle den Knoten einen centrischen. Schneiden wir in Fig. 181 die Stäbe in der unmittelbaren Nähe des Knotenpunktes, so mögen in den Schnitten die Axialspannungen S_1, S_2, S_3, S_4 im Abstände d_1, d_2, d_3, d_4 vom Knotenschnittpunkte A , sowie die Schubspannungen T_1, T_2, T_3, T_4 wirken. Während bei gelenkartigen Knotenverbindungen an jedem Knotenpunkte nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen sind, so sind hier drei derselben zu erfüllen. Es muss nämlich die Summe der Komponenten der Axial- und Transversalkräfte, sowie der im Knotenpunkte wirkenden Knotenlast nach zwei Richtungen hin gleich Null sein und es muss ausserdem die Summe der Momente für einen beliebigen Punkt (am besten wählt man den Punkt A) Null sein. In der letzten Momentengleichung können die Momente der Schubspannungen vernachlässigt werden, wenn man sich die Schnitte in der unmittelbaren Nähe des Knotenschnittpunktes gelegt denkt. Wir nehmen die Momente

als positiv an, wenn die von den Stäben auf den Knoten ausgeübten Reaktionen nach rechts drehen. Die zu erfüllende Momentengleichung ist alsdann

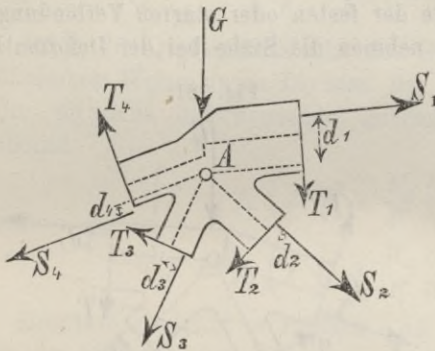
$$S_1 d_1 + S_2 d_2 + S_3 d_3 + S_4 d_4 = 0,$$

oder, wenn man die Momente der in den Endquerschnitten wirkenden Spannungen in Beziehung auf die Schweraxe der Querschnitte, die wir Endmomente nennen, mit m_1, m_2, m_3, m_4 bezeichnen,

$$40. \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Für den Fall, dass sich die Stabaxen nicht in einem einzigen Punkte schneiden (Fig. 182), in welchem Falle wir den Knoten excentrisch nennen, kann man

Fig. 182.



als Knotenpunkt einen beliebigen Punkt wählen. Unter der Voraussetzung, dass dieser Punkt ganz in der Nähe der Axen der Stäbe liegt, kann man auch hier die Momente der Schubspannungen vernachlässigen, da diese gegen die Axialspannungen nur klein sind. Sind e_1, e_2, e_3, e_4 die Abstände der Stabaxen vom gewählten Momenten-

punkte, so wird die Momentengleichung

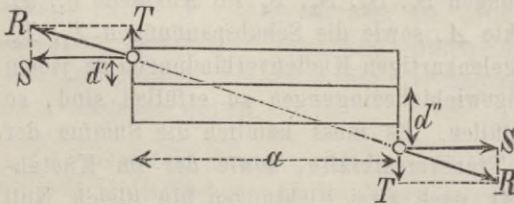
$$S_1(e_1 - d_1) + S_2(e_2 - d_2) + S_3(e_3 - d_3) + S_4(e_4 - d_4) = 0$$

oder

$$41. \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = S_1 e_1 + S_2 e_2 + S_3 e_3 + S_4 e_4.$$

Die Schubspannungen kann man durch die Endmomente ausdrücken. Sind m', m'' die Endmomente eines Stabes mit der Länge a , so ist

Fig. 183.



(Fig. 183) $Ta - Sd' - Sd'' = 0$ oder $Sa - m' - m'' = 0$, also

$$42. \quad T = \frac{m' + m''}{a},$$

wobei die Momente m' und m'' in demselben Sinne zu nehmen sind, wenn sie den

Stab nach derselben hin konkav oder konvex zu biegen streben.

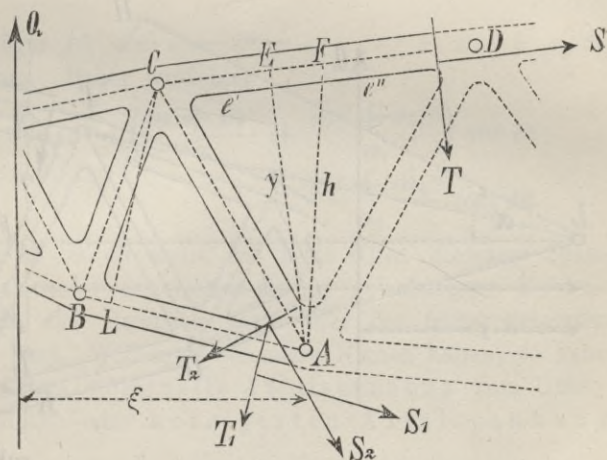
Stellt man für ein System aus n Stäben mit m Knotenpunkten für jeden der m Knotenpunkte die drei Gleichgewichtsbedingungen auf, so erhält man $3m$ Gleichungen. Bei einem Systeme, welches unter der Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte statisch bestimmt wäre, ist $m =$

$\frac{1}{2}(n+3)$, also die Anzahl der Gleichungen $= \frac{3}{2}(n+3)$, während n unbekannte Axialspannungen, $2n$ unbekannte Endmomente und 3 auf die äusseren Kräfte bezügliche unbekannte Grössen, also zusammen $3(n+1)$ Unbekannte vorhanden sind. Es fehlen zur Bestimmung also noch $\frac{3}{2}(n-1)$ Gleichungen.

Anstatt dieser der in §. 1 besprochenen analytischen Polygonalmethode entsprechenden Methode wird man indess auch hier entsprechend dem §. 3, 43 und 44 bequemer die Schnittmethode anwenden. Wir wollen im Folgenden für einen Träger mit eintheiligem Gitterwerke die bezüglichen Regeln entwickeln.

a. Gurte. Zur Bestimmung der Spannung S des Gurtstückes CD (Fig. 184) legen wir einen Schnitt durch den Stab CD unmittelbar bei D und durch die Stäbe CA und AB unmittelbar bei A ,

Fig. 184.



wobei jeder dieser drei Stäbe normal geschnitten werden möge. Auf den abgeschnittenen linken Theil des Trägers wirken alsdann die Transversalkraft Q im Abstände ξ von A , die Axialspannungen S, S_1, S_2 der Stäbe CD, AB, AC im Abstände d, d_1, d_2 von

D, A, A und endlich in den Schnittflächen selbst die Schubspannungen T, T_1, T_2 . Da wir uns die Schnitte unmittelbar neben den Schnittpunkten der Stabaxen denken, so haben T_1 und T_2 in Beziehung auf A keinen Hebelsarm. Ist AE senkrecht zu CD , $AE = y$, $CE = e'$, $DE = e''$, so ist demnach die Gleichgewichtsbedingung für Drehung um den Punkt A :

$$S(y-d) + T_1 e'' - S_1 d_1 - S_2 d_2 + Q\xi = 0.$$

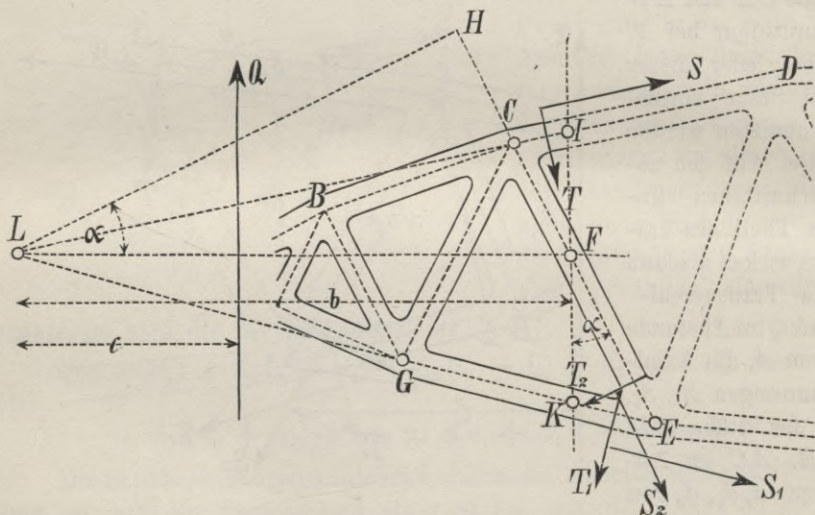
Sind m', m'' die Momente für die Enden C, D des Stabes CD , a die Länge von CD , so ist nach obiger Gleichung 42: $T = \frac{m' + m''}{a}$. Bezeichnen wir noch die Momente $S_1 d_1, S_2 d_2$ für das Ende A der Stäbe AB, AC mit m_1'', m_2'' , so haben wir $Sy - m'' + \frac{m' + m''}{a} e'' - m_1'' - m_2''$. Setzen wir $Q\xi = M$ und beachten, dass $a - e'' = e'$ ist, so erhalten wir die erste der Gleichungen:

$$43. \quad \begin{cases} S = -\frac{M}{y} + \frac{m''e' - m'e'' + (m_1'' + m_2'')a}{ay}, \\ S_1 = +\frac{M}{y} - \frac{m_1''e' - m_1'e'' - (m_1' + m_2')a}{ay}. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich ebenso für die Spannung des unteren Gurtstückes AB , wenn $CI = y$, $BI = e'$, $AI = e''$, $AB = a$ gesetzt das Moment M für den Knotenpunkt C genommen wird und m_1' , m_1'' die Endmomente für das Gurtstück AB in B und A , m_2' das Endmoment des Stabes AC in C bedeutet.

b. Gitterstäbe. Zur Bestimmung der Axialspannung S_2 des rechts fallenden Stabes CE (Fig. 185) legen wir einen Schnitt durch die Stäbe CE und GE unmittelbar rechts von E und durch den Stab

Fig. 185.



CD unmittelbar rechts von C und zwar schneiden wir wieder jeden Stab normal. Auf den linken Theil des Trägers wirken alsdann die Transversalkraft Q im Abstände c vom Durchschnittspunkte L der Axen der Stäbe EG und CD , die Axialspannungen S , S_1 , S_2 der geschnittenen Stäbe im Abstände d , d_1 , d_2 von C , E , E und die Schubspannungen T , T_1 , T_2 in den Schnittflächen. Bezeichnen wir den normalen Abstand LH des Punktes L von der Axe des Stabes CE mit z und setzen wir $LC = e'$, $LD = e''$, $LG = e_1'$, $LE = e_1''$, $HC = e_2'$, $HE = e_2''$, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung um den Punkt L :

$$Sd - S_1d_1 + S_2(z - d_2) + Te' + T_1e_1'' + T_2e_2'' - Qc = 0.$$

Wir bezeichnen die Momente für das linke und rechte Ende der Stäbe CD , GE und CE bezüglich mit m' , m'' , m_1' , m_1'' , m_2' , m_2'' und die

Längen dieser Stäbe mit a, a_1, a_2 . Alsdann wird $T = \frac{m' + m''}{a}$,
 $T_1 = \frac{m_1' + m_1''}{a_1}$, $T_2 = \frac{m_2' + m_2''}{a_2}$, $Sd = m'$, $S_1 d_1 = m_1''$, $S_2 d_2 = m_2''$,
 mithin

$$S_2 z + m' - m_1'' - m_2'' + \frac{m' + m''}{a} e' + \frac{m_1' + m_1''}{a_1} e_1'' + \frac{m_2' + m_2''}{a_2} e_2'' = Qc.$$

Da $e'' - e' = a$, $e_1'' - e_1' = a_1$, $e_2'' - e_2' = a_2$ ist, so erhält man

$$44. S_2 = \frac{Qc}{z} - \frac{m'e'' + m''e'}{az} - \frac{m_1'e_1'' + m_1''e_1'}{a_1 z} - \frac{m_2'e_2'' + m_2''e_2'}{a_2 z}.$$

Dieselbe Regel ergibt sich auch für die Spannung S_3 eines links fallenden Stabes CG , wenn man $-S_3$ für S_2 setzt und die drei letzten Glieder auf die Stäbe BC, EG und CG bezieht.

Für das Glied $Q \frac{c}{z}$ lassen sich nach §. 44 verschiedene andere Ausdrücke substituiren.

Beim Parallelträger ist $e = e' = e'' = e_1' = e_1'' = z \sec \alpha$, $e_2' = e_2'' = z \tan \alpha$ zu setzen. Daher wird hier

$$45. S_2 = Q \sec \alpha - \left(\frac{m' + m''}{a} + \frac{m_1' + m_1''}{a_1} \right) \sec \alpha - \frac{m_2' + m_2''}{a_2} \tan \alpha.$$

In den Formeln 43 bis 45 stellt das erste Glied diejenige Spannung dar, welche sich unter der Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte ergibt, welche sich demnach nach jeder der früher gezeigten Methoden bestimmen lässt. Will man besondere Namen haben, so kann man diese Spannung etwa nominelle Axialspannung zum Unterschiede von der wirklichen oder korrigirten Axialspannung nennen.

Die entwickelten Regeln 43 und 44 haben sowohl für centrische, als excentrische Knotenpunkte Giltigkeit. Kommen Stäbe mit centrischer Gelenkbefestigung vor, so sind für dieselben die Endmomente gleich Null zu setzen.

Die spezifische Normalspannung N einer Faser im Abstände v von der zur Kräfteebene senkrechten Schweraxe des Querschnittes ist

$$N = \frac{S}{F} + \frac{mv}{I},$$

wenn S die Axialspannung, m das auf den fraglichen Querschnitt bezügliche Moment, F die Querschnittsfläche, I das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung auf die genannte Schweraxe bezeichnet. Das Glied $\frac{S}{F}$, welches die durch gleichmässige Vertheilung der Axialspannung über den Querschnitt entstehende oder bei centrischer Wirkung der Axial-

spannung wirklich auftretende spezifische Spannung darstellt, kann man spezifische Primärspannung¹⁾, das zweite durch die excentrische Wirkung entstehende Glied die spezifische Biegungs- oder Secundärspannung nennen. Die erstere ist entweder nur Zug oder nur Druck; die letztere ist auf der einen Seite der Schweraxe Zug, auf der anderen Druck, so dass hierdurch auf einer Seite stets eine Vergrößerung der Primärspannung eintritt. Gewöhnlich kommen in einem Querschnitte nur die spezifischen Maximalspannungen in Frage, welche im grössten Abstände von der Schweraxe auftreten und die man mit Asimont spezifische Randspannungen nennen kann.

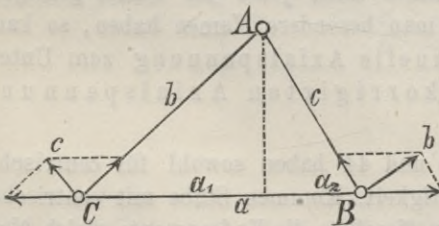
Ist e das Maximum von v auf derjenigen Seite, auf welcher die Biegungsspannung dasselbe Vorzeichen hat, wie die Primärspannung, d der Abstand der Axialspannung von dem in der Kräfteebene auf der anderen Seite der Schweraxe liegenden Kernpunkte der Querschnitte (Fig. 183), so lässt sich das Maximum von N auch ausdrücken durch die Regel

$$N = \frac{Sde}{I} = \frac{Sd}{W},$$

wenn noch W das sogenannte Widerstandsmoment $\frac{I}{c}$ des Querschnittes bezeichnet, so dass bei konstantem W die spezifischen Randspannungen dem Abstände d proportional sind.

§. 115. Formänderung der Dreiecke. Wir bestimmen zunächst die Aenderung v eines Winkels BAC (Fig. 186), welche eintritt, wenn

Fig. 186.



sich die Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ um Δa , Δb , Δc ändern. Wir denken uns hierzu in B und C senkrecht zu BA und CA Kräfte wirkend, welche $= b$ und c sind; diese Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn das Dreieck um A drehbar ist, denn

jede dieser Kräfte hat das Moment bc . Die Spannungen von BC , CA und BA ergeben sich durch Aehnlichkeit der Dreiecke leicht zu $+\frac{bc}{h}$, $-\frac{a_1c}{h}$, $-\frac{a_2b}{h}$, wenn h die Höhe AD , a_1 , a_2 die Strecken CD , BD bedeuten. Denken wir uns AB als unbeweglich, so ist bei der Deformation des Dreieckes die Bewegung des Punktes $C = bv$, also ist nach dem Principe der Arbeit $c \cdot bv = \frac{bc}{h} \cdot \Delta a - \frac{a_1c}{h} \cdot \Delta b - \frac{a_2b}{h} \cdot \Delta c$, also

$$v = \frac{1}{h} \left(\frac{\Delta a}{a} a - \frac{\Delta b}{b} a_1 - \frac{\Delta c}{c} a_2 \right).$$

¹⁾ Die von Asimont in der „Zeitschrift für Bankunde, Jahrgang 1880“ gebrauchte Bezeichnung Hauptspannung ist bereits in wesentlich anderer Bedeutung verwendet.

Sind S, S_1, S_2 die Axialspannungen der die Seiten des Dreieckes bildenden Stäbe, F, F_1, F_2 ihre Querschnittsflächen und E der Elastizitätskoeffizient, so ist $\frac{Aa}{a} = \frac{S}{EF}, \frac{Ab}{b} = \frac{S_1}{EF_1}, \frac{Ac}{c} = \frac{S_2}{EF_2}$, mithin

$$46. \nu = \left(\frac{S}{F} a - \frac{S_1}{F_2} a_1 - \frac{S_2}{F_2} a_2 \right) \frac{1}{Eh},$$

oder auch, wenn man die Winkel BAD und CAD bezüglich mit α_1, α_2 bezeichnet,

$$47. \nu = \frac{1}{E} \left[\frac{S}{F} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) - \frac{S_1}{F_1} \tan \alpha_1 - \frac{S_2}{F_2} \tan \alpha_2 \right].$$

Die Winkel, welche die Endtangente an die deformirte Axe eines Stabes AB (Fig. 187) mit der Sehne AB desselben, der Stabsehne, bildet, nennen wir die Ausschlagwinkel des Stabes. Sind τ', τ'' die beiden Ausschlagwinkel, m', m'' die beiden Endmomente, S die Axialspannung, I das Trägheitsmoment des

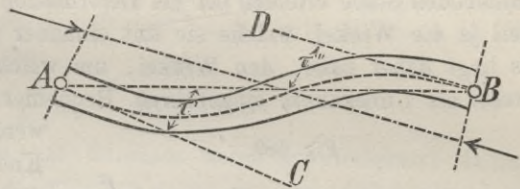


Fig. 187.

Querschnittes, so ist unter der Voraussetzung, dass der Einfluss der Formänderung auf die Momente vernachlässigt werden kann, nach Formel 1 (Seite 276):

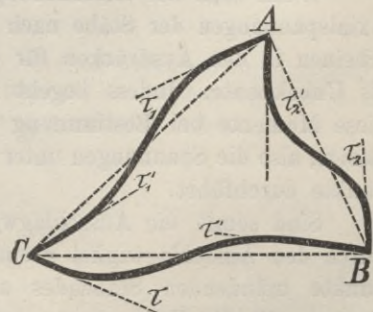
$$48. \tau' = -\frac{(2m' - m'')a}{6EI}, \quad \tau'' = -\frac{(2m'' - m')a}{6EI}$$

und umgekehrt

$$49. m' = -\frac{2EI}{a} (2\tau' + \tau''), \quad m'' = -\frac{2EI}{a} (2\tau'' + \tau').$$

Hierbei sind die Ausschlagwinkel an jedem Ende positiv genommen, wenn sie eine Drehung der Tangente nach rechts bedingen und die Endmomente sind, wie im vorigen Paragraphen, abweichend von der gewöhnlichen Regel, als positiv genommen, wenn die von dem Stabe ausgeübten Reaktionen nach rechts (wie der Zeiger einer Uhr) drehen.

Fig. 188.



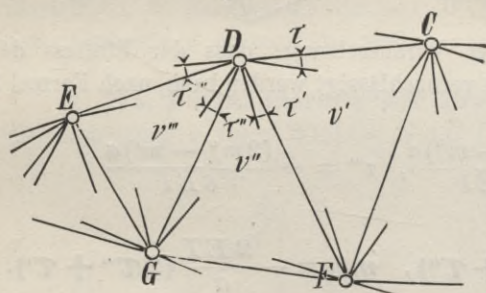
Ändern sich die Winkel eines Dreieckes ABC (Fig. 188) um ν', ν'', ν''' und sind für die drei Stäbe, welche die Seiten bilden, die Ausschlagwinkel $\tau, \tau_1, \tau', \tau_1', \tau'', \tau_1''$, so ist

$$\tau_1' - \tau'' = \nu, \quad \tau_1'' - \tau = \nu', \quad \tau_1 - \tau' = \nu''.$$

Setzt man in jedem Dreiecke der gegebenen Konstruktion für die Ausschlagwinkel die Ausdrücke 48 und für ν die Ausdrücke 46, so erhält man für jedes Dreieck drei Elastizitätsgleichungen. Da bei n Stäben $\frac{1}{2}(n-1)$ Dreiecke vorhanden sind, so erhält man $\frac{3}{2}(n-1)$ Elastizitätsgleichungen, welche mit den nach dem vorigen Paragrafe aufzustellenden $\frac{3}{2}(n+3)$ statischen Beziehungen zur Bestimmung der $3(n+1)$ Unbekannten genügen. Dieses Verfahren leidet jedoch an dem Mangel, dass eine sehr grosse Anzahl von Gleichungen aufzulösen ist. Indess bietet sich eine wesentliche Vereinfachung in der im folgenden Paragrafe zu zeigenden Weise.

§. 116. Gitterträger mit festen Knotenverbindungen und eintheiligem Gitterwerke. Die Enden aller an einem Knotenpunkte mündenden Stäbe erleiden bei der Deformation ein und dieselbe Drehung, weil ja die Winkel, welche sie mit einander bilden, unveränderlich sind. Es liegt daher nahe, den Winkel, um welchen sich jeder Knotenpunkt dreht, als Unbekannte einzuführen. Bequemer aber wird die Behandlung,

Fig. 189.



wenn man statt dessen für jeden Knotenpunkt als Unbekannte den Ausschlagwinkel eines am Knotenpunkte mündenden Stabendes einführt; beispielsweise also für den Knotenpunkt D (Fig. 189) den Ausschlagwinkel τ des Stabes DC . Bestimmt man nun nach Formel 47 die Winkel ν' , ν'' , ν''' , um welche sich die Dreieckswinkel CDF , FDG , GDE

ändern, so sind die Ausschlagwinkel τ' , τ'' , τ''' für die Stäbe DF , DG , DE im Punkte D offenbar

$$50. \quad \tau' = \tau - \nu', \quad \tau'' = \tau - \nu' - \nu'', \quad \tau''' = \tau - \tau' - \nu'' - \nu''''.$$

Wenn man zur Bestimmung der Winkeländerungen ν' , ν'' , ν''' die Axialspannungen der Stäbe nach Formel 43 und 44 bestimmt, so erscheinen in den Ausdrücken für τ' , τ'' , τ''' die Endmomente m der Stäbe als Unbekannte. Indess begeht man keinen grossen Fehler, wenn man diese Momente bei Bestimmung der Axialspannungen zunächst vernachlässigt, also die Spannungen unter der Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte durchführt.

Sind somit die Ausschlagwinkel τ' , τ'' , τ''' für jeden Knotenpunkt durch den Ausschlagwinkel τ eines bestimmten im betreffenden Knotenpunkte mündenden Stabendes ausgedrückt, so drückt man nach den Formeln 49 die Endmomente jedes einzelnen Stabes durch die beiden Ausschlagwinkel dieses Stabes und mit Hilfe der eben aufgestellten Beziehungen durch die als Unbekannte angenommenen Ausschlagwinkel aus.

In jedem Knotenpunkte muss nun die Summe der an demselben wirkenden Endmomente Null sein. Substituiert man für die Endmomente die eben gefundenen Ausdrücke, so erhält man für die als Unbekannte angenommenen Ausschlagwinkel, deren Anzahl gleich der der Knotenpunkte ist, ebenso viele Gleichungen.

Es hat nicht den mindesten Anstand, bereits bei der Bestimmung der Winkeländerungen ν' , ν'' , ν''' die Endmomente der Stäbe zu berücksichtigen und diese durch die als Unbekannte angenommenen Ausschlagwinkel auszudrücken; nur wird hierdurch die Rechnung etwas umständlicher.

Bei excentrischen Knoten ist zur Bestimmung der Aenderung der Dreieckswinkel nicht die Längenänderung der Axe der Gurte, sondern die Längenänderung des Abstandes der Schnittpunkte der Gitterstabaxen einzuführen. Sind τ' , τ'' die Ausschlagwinkel eines Gurtstückes, e' , e'' der Abstand der Axe von den Schnittpunkten der Gitterstäbe, so ist die Längenänderung Δa zu setzen:

$$\Delta a = \frac{S}{EF} a + e' \tau - e'' \tau''.$$

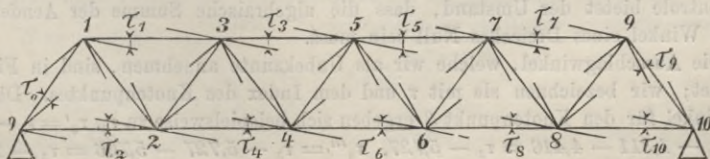
Die Einführung dieser Regel hat durchaus keine Schwierigkeit; indess ergibt sich $e' \tau - e'' \tau''$ im Allgemeinen gegen das erste Glied sehr klein, so dass die Vernachlässigung dieser Glieder als zulässig erscheint.

Dasselbe Verfahren lässt sich auch anwenden, wenn Stäbe vorhanden sind, welche eine gelenkartige Befestigung zeigen. Für diese Stäbe sind nur die Endmomente zu Null anzunehmen. Man kann also diese Behandlung auch an Stelle der in §. 110 und 111 gezeigten Behandlung von Trägern mit kontinuierlichen Gurten treten lassen.

Diese Methode, welche auf der Einführung der Ausschlagwinkel bestimmter Stabenden als Unbekannte beruht, ist zwar zur Behandlung einzelner Fälle schon mehrfach angewendet worden. Die methodische Anwendung zur Behandlung von Trägern mit starren Knotenverbindungen zeigte aber zuerst Manderla („Die Berechnung der Sekundärspannungen, welche im einfachen Fachwerke in Folge starrer Knotenverbindungen auftreten“ in Förster's Bauzeitung, 1880).

Beispiel. Wir wählen das bereits in §. 110 unter Voraussetzung eines kontinuierlichen Gurtes durchgeführte Beispiel (Fig. 190). In der folgenden Tabelle sind die notwendigen Daten hinsichtlich der Dimensionen zusammengestellt:

Fig. 190.



Theil	Stab	Länge a	Abstand der gespann- testen Faser c	Träg- heits- radius	Quer- schnitts- fläche F	Träg- heits- moment I	$\frac{a}{F}$	$\frac{2I}{a}$
Obergurt	1 3	60	1,25	0,91	1,10	0,912	54,5	0,0304
	3 5	60	1,25	0,85	1,70	1,224	35,0	0,0408
Untergurt	0 2	60	1,25	0,72	0,50	0,260	120,0	0,0087
	2 4	60	1,25	0,91	1,10	0,912	54,5	0,0304
	4 6	60	1,25	0,86	1,50	1,120	40,0	0,0373
Rechts fallende Stäbe	1 2	50	1,00	0,58	0,80	0,268	62,5	0,0106
	3 4	50	0,75	0,43	0,54	0,101	92,6	0,0040
Links fallende Stäbe	0 1	50	1,25	0,50	1,06	0,264	47,1	0,0106
	2 3	50	1,30	0,63	0,90	0,360	55,5	0,0144
	4 5	50	1,10	0,54	0,68	0,201	73,5	0,0080
			Decimeter	<input type="checkbox"/> Deci- meter	Deci- meter	Decimeter		

A. Centrische Knoten. 1. Totale Belastung. Wir wollen zunächst eine Belastung eines jeden der vier unteren Knotenpunkte durch die Last 1 voraussetzen. Die Axialspannungen S , welche sich unter der Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte ergeben, sind alsdann für die Hälfte des Trägers unter Anwendung eines wohl selbstverständlichen Schemas folgende:

$$a. S = \begin{array}{cccccc|c} & \mathbf{1} & -3,00 & \mathbf{3} & -4,50 & \mathbf{5} & -4,50 & \\ -2,50 & +2,50 & -1,25 & +1,25 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathbf{0} & +1,50 & \mathbf{2} & +3,75 & \mathbf{4} & +4,50 & \mathbf{6} & \end{array}$$

Die sich hieraus ergebenden Werthe für $\frac{S}{F}$ oder unter der Voraussetzung des Elastizitätskoeffizienten 1 die relativen Längenänderungen der Stäbe sind:

$$b. \frac{S}{F} = \begin{array}{cccccc|c} & \mathbf{1} & -2,727 & \mathbf{3} & -2,647 & \mathbf{5} & -2,647 & \\ -2,359 & +3,125 & -1,389 & +2,315 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathbf{0} & +3,000 & \mathbf{2} & +3,409 & \mathbf{4} & +3,000 & \mathbf{6} & \end{array}$$

Hieraus ergeben sich nun nach Formel 45 für $E=1$ die folgenden Aenderungen der Dreieckswinkel:

$$c. v = \begin{array}{cccccc|c} & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} & & \\ & -0,386 & +5,633 & +1,311 & +4,397 & +4,397 & & \\ +3,925 & & +4,416 & & +4,500 & & & \\ & -5,249 & & -5,706 & & -5,706 & & \\ +1,693 & -5,619 & +0,260 & -4,679 & -2,250 & -2,250 & -4,679 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{2} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & \end{array}$$

Eine Kontrolle bietet der Umstand, dass die algebraische Summe der Aenderungen der drei Winkel eines Dreieckes Null sein muss.

Die Ausschlagwinkel, welche wir als Unbekannte annehmen, sind in Fig. 190 bezeichnet; wir bezeichnen sie mit τ und dem Index des Knotenpunktes. Die Ausschlagwinkel für den Knotenpunkt 3 ergeben sich beispielsweise zu $\tau_3, \tau_3' = \tau_3 - 1,311, \tau_3'' = \tau_3 - 1,311 - 4,416 = \tau_3 - 5,727, \tau_3''' = \tau_3 - 5,727 - 5,706 = \tau_3 - 11,433$. Die in dieser Weise bestimmten Ausschlagwinkel gibt das folgende Schema:

$$d. \tau = \begin{cases} \mathbf{1} & \tau_1 & \tau_3 - 11,360 & \mathbf{3} & \tau_3 & \tau_5 - 13,294 & \mathbf{5} & \tau_5 \\ \tau_1 - 3,539 & \tau_1 + 0,386 & \tau_3 - 5,727 & \tau_3 - 1,311 & \tau_3 - 8,897 & \tau_3 - 4,397 \\ \tau_0 & \tau_2 + 5,619 & \tau_2 + 10,868 & \tau_4 + 4,679 & \tau_4 + 10,385 & \tau_6 + 2,250 \\ \mathbf{0} & \tau_0 - 1,693 & \tau_2 & \tau_2 + 10,608 & \tau_4 & \mathbf{4} & \tau_4 + 12,635 & \tau_6 & \mathbf{6} \end{cases}$$

Wir betrachten beispielsweise den Knotenpunkt 3. Nach Formel 47 ergeben sich, da die Werthe für $\frac{2EI}{a}$ (für $E = 1$) nach der obigen Tabelle für die 4 Stäbe bezüglich 0,0408, 0,0040, 0,0144 und 0,0304 sind, als Endmomente $m = 0,0408 [2\tau_3 + \tau_5 - 13,335]$, $m' = 0,0040 [2(\tau_3 - 1,311) + \tau_4 + 4,679]$, $m'' = 0,0144 [2(\tau_3 - 5,727) + \tau_2 + 10,868]$, $m''' = 0,0304 [2(\tau_3 - 11,360) + \tau_1]$. Setzen wir $m + m_1 + m_2 + m_3 = 0$, so erhalten wir die Gleichung:

$$0,0304\tau_1 + 0,0144\tau_2 + 0,1792\tau_3 + 0,0040\tau_4 + 0,0408\tau_5 = -1,235.$$

In gleicher Weise entstehen für die einzelnen Knotenpunkte die folgenden Gleichungen, wobei die Glieder derselben mit 10000 multipliziert sind:

$$e. \begin{cases} 385\tau_0 + 106\tau_1 + 87\tau_2 = + 669 \\ 106\tau_0 + 1032\tau_1 + 106\tau_2 + 304\tau_3 = + 3521 \\ 87\tau_0 + 106\tau_1 + 1282\tau_2 + 144\tau_3 + 304\tau_4 = - 9845 \\ 304\tau_1 + 144\tau_2 + 1792\tau_3 + 40\tau_4 + 408\tau_5 = + 12375 \\ 304\tau_2 + 40\tau_3 + 1596\tau_4 + 80\tau_5 + 373\tau_6 = - 14008 \end{cases}$$

Für den Punkt 5 braucht die Momentengleichung nicht aufgestellt zu werden, da hier der Symmetrie halber offenbar $\tau_5 - 13,294 = -\tau_5$ sein muss; es ist also

$$\tau_5 = + 6,647.$$

Ferner muss der Symmetrie halber $\tau_4 + 12,635 = -\tau_6$, also

$$\tau_6 = -\tau_4 - 12,635$$

sein. Hierdurch gehen die beiden letzten Gleichungen über in

$$e. \begin{cases} 304\tau_1 + 144\tau_2 + 1792\tau_3 + 40\tau_4 = + 9652 \\ 304\tau_2 + 40\tau_3 + 1223\tau_4 = - 9828. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man nun:

$$f. \begin{cases} \tau_0 = + 2,88 & \tau_3 = + 5,76 \\ \tau_1 = + 2,24 & \tau_4 = - 6,23 \\ \tau_2 = - 7,69 & \tau_5 = + 6,65. \end{cases}$$

Mit Hilfe des Schemas *d* erhält man nun die folgenden Ausschlagwinkel:

$$g. \tau = \begin{cases} \mathbf{1} & + 2,24 & - 5,61 & \mathbf{3} & + 5,76 & - 6,64 & \mathbf{5} & + 6,64 \\ - 1,30 & + 2,62 & + 0,03 & + 4,45 & - 2,25 & + 2,25 \\ + 2,88 & - 2,07 & + 3,18 & - 1,56 & + 4,15 & - 4,15 \\ \mathbf{0} & + 1,18 & - 7,69 & \mathbf{2} & + 2,92 & - 6,23 & \mathbf{4} & - 6,40 & - 6,40 & \mathbf{6} \end{cases}$$

Nach Formel 47 ergeben hiernach nun bei beliebigem Werthe von E die folgenden Endmomente

$$h. m = \begin{cases} \mathbf{1} & - 0,035 & - 0,273 & \mathbf{3} & + 0,199 & - 0,307 & \mathbf{5} & + 0,307 \\ - 0,003 & + 0,034 & + 0,047 & + 0,029 & - 0,003 & + 0,003 \\ + 0,047 & - 0,016 & + 0,092 & + 0,005 & + 0,048 & - 0,048 \\ \mathbf{0} & - 0,046 & - 0,123 & \mathbf{2} & + 0,012 & - 0,290 & \mathbf{4} & + 0,239 & - 0,239 & \mathbf{6} \end{cases}$$

Hiernach lassen sich nun zunächst mit Hilfe der Formeln 43 und 44a die Axialspannungen korrigiren. Beispielsweise ist die Spannung des Stabes 3 5:

$$S = - 4,500 + \frac{0,199 \cdot 30 + 0,307 \cdot 30 + (0,290 - 0,005) \cdot 60}{60 \cdot 40} \\ = - 4,500 + 0,013 = - 4,487.$$

Die Spannung des Stabes 3 4 wird:

$$S = + 1,250 + \frac{0,029 + 0,005}{50} \frac{3}{4} + \left(\frac{0,199 - 0,307}{60} + \frac{0,012 - 0,290}{60} \right) \frac{5}{4} \\ = + 1,250 - 0,007 = + 1,243.$$

Da die hiernach entstehenden Korrekturen nur sehr klein werden, wollen wir sie vernachlässigen.

Ferner lassen sich nun die Biegungsspannungen berechnen. Beispielsweise wird dieselbe für den Stab 3 5 auf der linken Seite = $\mp \frac{0,199 \cdot 1,25}{1,224} = \mp 0,203$, auf der rechten Seite = $\mp \frac{0,307 \cdot 1,25}{1,224} = \mp 0,313$, also die spezifische Maximalspannung dieses Stabes = $-2,647 - 0,313 = -2,960$. Das folgende Schema gibt die in dieser Weise für sämtliche Stabenden berechneten Biegungsspannungen:

$$i. \frac{mc}{I} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} & -0,046 & -0,399 & \mathbf{3} & +0,211 & -0,353 & \mathbf{5} & +0,353 \\ & +0,017 & +0,128 & & +0,189 & +0,220 & -0,015 & +0,015 \\ +0,223 & -0,014 & +0,270 & & +0,040 & +0,266 & & +0,266 \\ \mathbf{0} & -0,224 & -0,592 & \mathbf{2} & -0,017 & -0,401 & \mathbf{4} & +0,270 & -0,270 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen bedeutet den Sinn der Spannung auf der positiven Seite des betreffenden Stabendes.

Die Vermehrung der Beanspruchung durch die Biegungsspannungen beträgt hiernach im Obergurte 15, 13, im Untergurte 20, 12, 9, in den Zugstäben 2, 2, in den Druckstäben 4, 17, ∞ , durchschnittlich etwa 11 Prozent.

In Fig. 191 und 192 (linke Hälfte) ist das Verhalten des Trägers grafisch dargestellt; Fig. 191 gibt ein Bild der Formänderung, wobei die relativen Längenänderungen wesentlich vergrößert oder der Elastizitätskoeffizient wesentlich verkleinert angenommen ist. In Fig. 192 sind die spezifischen Spannungen dargestellt und hierbei die Primärspannungen durch lichte, die Sekundärspannungen durch dunkle Schraffurung dargestellt.

2. Partielle Belastung. Wir nehmen zunächst eine Belastung des Knotenpunktes 2 mit der Last 1 an. Wir übergehen die Angabe der Werthe für S und $\frac{S}{F}$. Die hiernach berechneten Werthe der Änderungen ν der Dreieckswinkel sind:

$$k. \nu = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} & & \mathbf{7} & & \mathbf{9} \\ & -0,74 & +2,04 & +0,91 & -0,19 & +0,85 & -0,25 & +0,61 & -0,18 \\ +1,57 & & +1,57 & & +0,75 & & +0,47 & & +0,39 \\ & -2,78 & & -0,72 & & -0,60 & & -0,44 \\ +0,68 & -2,25 & -1,28 & -0,29 & -0,86 & +0,11 & -0,73 & +0,26 & -0,56 & +0,17 \\ \mathbf{0} & & \mathbf{2} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{8} & & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

Hieraus ergeben sich nun die folgenden Ausschlagwinkel:

$$l. \tau = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \tau_1 & \tau_3 - 4,52 & \mathbf{3} & \tau_3 & \tau_5 - 1,41 & \mathbf{5} & \tau_5 & \tau_7 - 0,76 & \mathbf{7} & \tau_7 & \tau_9 - 0,22 & \mathbf{9} \\ \tau_1 - 2,31 & \tau_1 - 0,74 & \tau_3 - 2,48 & \tau_3 - 0,91 & \tau_5 - 1,60 & \tau_5 - 0,85 & \tau_7 - 1,01 & \tau_7 - 0,54 & \tau_9 - 0,39 & \tau_9 \\ \tau_0 & \tau_2 + 2,25 & \tau_2 + 5,03 & \tau_1 + 0,29 & +1,01 & \tau_6 - 0,11 & \tau_6 + 0,49 & \tau_8 - 0,26 & \tau_8 + 0,03 & \tau_{10} - 0,17 \\ \mathbf{0} & \tau_0 + 0,68 & \tau_2 & \mathbf{2} & \tau_2 + 6,31 & \tau_1 & \mathbf{4} & \tau_1 + 1,87 & \tau_6 & \mathbf{6} & \tau_6 + 1,22 & \tau_8 & \mathbf{8} & \tau_8 + 0,60 & \tau_{10} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

Hiernach lassen sich nun leicht die 11 Momentengleichungen mit den 11 Unbekannten $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{10}$ ansetzen. Etwas einfacher wird die Auflösung, wenn man zunächst den Fall behandelt, dass die symmetrisch liegenden Knotenpunkte 2 und 8 je mit der Last 1 belastet sind. Für diese Belastung erhält man die Winkeländerung ν einfach durch Addition der Werthe von ν der entsprechenden symmetrisch liegenden Winkel für die einseitige Belastung; so z. B. ist für den Winkel 2 3 4 nach dem Schema k : $\nu = +1,57 + 0,47 = +2,04$. Sonach ergeben sich die folgenden Winkeländerungen:

$$m. \nu = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cccccc} & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} \\ & + 0,569 & + 2,650 & + 0,662 & + 0,662 & + 0,662 \\ & + 1,962 & & + 2,046 & & + 1,500 \\ & & - 3,218 & & - 1,323 & & - 1,323 \\ \mathbf{0} & + 0,847 & - 2,809 & - 1,023 & - 1,023 & - 0,751 & - 0,751 \\ & & & \mathbf{2} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} \end{array} \right. \end{array}$$

Die hiernach ganz wie bei totaler Belastung berechneten Ausschlagwinkel sind die folgenden:

$$n. \left\{ \begin{array}{ll} \tau_0 = + 1,823 & \tau_3 = + 2,286 \\ \tau_1 = + 1,568 & \tau_4 = - 1,725 \\ \tau_2 = + 5,297 & \tau_5 = + 1,412. \end{array} \right.$$

Die hieraus sich ergebenden Ausschlagwinkel sämtlicher Stäbe sind:

$$o. \tau = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cccccc} & \mathbf{1} & + 1,568 & - 3,000 & \mathbf{3} & + 2,286 & - 1,412 & \mathbf{5} & + 1,412 \\ & - 0,962 & + 1,000 & - 0,422 & + 1,624 & - 0,750 & & + 0,750 \\ + & 1,823 & - 2,488 & + 0,585 & - 0,702 & + 0,621 & & - 0,621 \\ \mathbf{0} & + 0,976 & - 5,297 & \mathbf{2} & + 1,608 & - 1,725 & \mathbf{4} & + 1,372 & - 1,372 & \mathbf{6} \end{array} \right. \end{array}$$

Jetzt kann man zur blossen Belastung des Punktes 2 zurückgehen. Offenbar müssen sich die Ausschlagwinkel je zweier symmetrisch liegender Theile, den ersten negativ genommen, zu dem Ausschlagwinkel des entsprechenden linken Theiles für die Belastung der Punkte 2 und 8 ergänzen. So ist z. B. nach dem Schema *l* der Ausschlagwinkel für die Theile 2 3 und 7 8 bei 3 und 7 bezüglich $\tau_3 - 2,48$ und $\tau_7 - 0,61$, der Ausschlagwinkel des Theiles 2 3 bei 3 nach dem Schema *o* = $-0,42$; mithin muss $\tau_3 - 2,48 - \tau_7 + 0,54 = -0,42$ oder $\tau_7 = \tau_3 - 1,52$ sein. In dieser Weise ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$p. \left\{ \begin{array}{ll} \tau_6 = \tau_4 + 0,503 & \tau_9 = \tau_1 - 1,352 \\ \tau_7 = \tau_3 - 1,522 & \tau_{10} = \tau_0 - 1,653 \\ \tau_8 = \tau_2 + 4,702. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe des Schemas *l* ergeben sich nun, wie bei totaler Belastung, die folgenden Gleichungen:

$$q. \left\{ \begin{array}{l} 385 \tau_0 + 106 \tau_1 + 87 \tau_2 = - 363 \\ 106 \tau_0 + 1032 \tau_1 + 106 \tau_2 + 304 \tau_3 = - 1784 \\ 87 \tau_0 + 106 \tau_1 + 1282 \tau_2 + 144 \tau_3 + 304 \tau_4 = + 5266 \\ 304 \tau_2 + 144 \tau_2 + 1792 \tau_3 + 40 \tau_4 + 408 \tau_5 = - 3377 \\ 304 \tau_3 + 40 \tau_3 + 1596 \tau_4 + 80 \tau_5 + 373 \tau_6 = + 3337 \\ 408 \tau_3 + 80 \tau_4 + 1954 \tau_5 + 80 \tau_6 + 408 \tau_7 = - 1815. \end{array} \right.$$

Setzt man in die beiden letzten Gleichungen die Ausdrücke für τ_6 und τ_7 ein, so gehen diese Gleichungen über in

$$q. \left\{ \begin{array}{l} 304 \tau_3 + 40 \tau_3 + 1969 \tau_4 + 80 \tau_5 = + 3532 \\ 82 \tau_3 + 160 \tau_4 + 1954 \tau_5 = - 1234. \end{array} \right.$$

Die Auflösung dieser sechs Gleichungen gibt:

$$r. \left\{ \begin{array}{ll} \tau_0 = + 1,500, & \tau_3 = + 1,886, \\ \tau_1 = + 1,459, & \tau_4 = - 1,192, \\ \tau_2 = - 4,260, & \tau_5 = + 0,513. \end{array} \right.$$

Demnach wird nun ferner:

$$r. \left\{ \begin{array}{ll} \tau_6 = - 0,689, & \tau_9 = + 0,107, \\ \tau_7 = + 0,364, & \tau_{10} = - 0,153, \\ \tau_8 = + 0,442. \end{array} \right.$$

Hiernach ergeben sich mit Hilfe des Schemas *l* die folgenden Ausschlagwinkel:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{1} +1,45 \quad -2,64 \quad \mathbf{3} +1,89 \quad -0,89 \quad \mathbf{5} +0,51 \quad -0,40 \quad \mathbf{7} +0,36 \quad -0,11 \quad \mathbf{9} \\
 -0,85 +0,72 \quad -0,60 \quad +0,97 \quad -1,08 \quad -0,33 \quad -0,65 \quad -0,18 \quad -0,21 \quad +0,11 \\
 -1,50 \quad -2,01 +0,77 \quad -0,90 \quad -0,18 \quad -0,80 \quad -0,20 \quad -0,19 +0,48 \quad -0,32 \\
 \mathbf{0} +0,82 \quad -4,26 \quad \mathbf{2} +2,05 \quad -1,19 \quad \mathbf{4} +0,68 \quad -0,69 \quad \mathbf{6} +0,53 \quad +0,44 \quad \mathbf{8} +1,04 \quad -0,15 \quad \mathbf{10}
 \end{array} \right\} s.$$

In ganz gleicher Weise ergeben sich nun für die Belastung des Knotenpunktes 4 mit der Last 1 die folgenden Ausschlagwinkel:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{1} +0,50 \quad -1,98 \quad \mathbf{3} +2,53 \quad -2,92 \quad \mathbf{5} +2,31 \quad -1,04 \quad \mathbf{7} +0,63 \quad -0,17 \quad \mathbf{9} \\
 -0,15 +1,03 \quad -0,15 +1,28 \quad -0,89 +0,61 \quad -1,55 \quad -0,60 \quad -0,52 +0,27 \\
 +0,53 \quad +0,52 +1,82 \quad -1,57 +1,61 \quad -1,92 \quad -0,72 \quad -0,27 +0,10 \quad -0,52 \\
 \mathbf{0} +0,03 \quad -1,17 \quad \mathbf{2} +1,05 \quad -3,77 \quad \mathbf{4} +3,34 \quad -1,69 \quad \mathbf{6} +0,74 \quad -0,25 \quad \mathbf{8} +1,23 \quad -0,18 \quad \mathbf{10}
 \end{array} \right\} t.$$

Für die Belastung der Punkte 6 und 8 sind diese Schemata einfach umzukehren und die Vorzeichen zu ändern.

Hiernach lassen sich nun die Endmomente und sodann die Biegungsspannungen oder auch sogleich direkt die Biegungsspannungen bestimmen. Das Endmoment m' ist nach Formel 47: $m' = \frac{2EI}{a} (2r' + r'')$; die entsprechende spezifische Biegungsspannung ist $N = \frac{m'c}{I}$, d. i.:

$$N = \frac{2Ec}{a} (2r' + r'').$$

Die hiernach bestimmten spezifischen Biegungsspannungen sind nebst den spezifischen Primärspannungen je für die Belastung der Punkte 2, 4, 6, 8 in folgender Tabelle¹⁾ zusammengestellt.

Stab	Spezifische Primärspannung				Spezifische Biegungsspannung							
	Belastung von				Belast. von 2		Belast. von 4		Belast. von 6		Belast. von 8	
	2	4	6	8	links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts
1 3	-1,09	-0,82	-0,55	-0,27	+0,01	-0,16	-0,04	-0,17	-0,01	-0,05	-0,01	-0,03
3 5	-0,53	-1,06	-0,71	-0,35	+0,12	+0,00	+0,09	-0,14	-0,01	-0,15	-0,01	-0,07
0 2	+1,20	+0,90	+0,60	+0,30	-0,11	-0,32	-0,05	-0,09	-0,04	-0,10	-0,03	-0,08
2 4	+0,96	+1,23	+0,82	+0,41	+0,12	-0,01	-0,07	-0,27	-0,01	-0,05	-0,06	-0,06
4 6	+0,50	+1,00	+1,00	+0,50	+0,03	-0,03	+0,21	-0,00	+0,00	-0,21	+0,03	-0,03
1 2	+1,25	+0,94	+0,63	+0,31	-0,02	-0,13	+0,10	+0,08	+0,04	+0,01	+0,01	-0,02
3 4	-0,46	+1,39	+0,93	+0,46	+0,03	-0,02	+0,03	-0,06	+0,11	+0,09	+0,05	+0,03
0 1	-0,94	-0,71	-0,47	-0,24	+0,11	-0,01	+0,05	+0,01	+0,04	-0,00	+0,03	+0,01
2 3	+0,28	-0,83	-0,56	-0,28	-0,01	-0,05	+0,18	+0,08	+0,11	+0,15	-0,01	+0,01
4 5	+0,37	+0,74	-0,74	-0,37	-0,06	-0,10	+0,10	-0,01	+0,11	+0,03	+0,09	+0,06

Bei den Biegungsspannungen ist das Vorzeichen auf derjenigen Seite richtig, nach welcher hin der Ausschlagwinkel als positiv angenommen wurde; auf der anderen Seite ist das Vorzeichen entgegengesetzt.

Unter der Voraussetzung, dass jeder beliebige der Punkte 2, 4, 6, 8 mit der Last 1 belastet sein könne, lässt sich hiernach leicht die gefährlichste Belastung, sowie

¹⁾ Bei dieser Tabelle, sowie den Schematen *k*, *l*, *s* und *t* sind aus räumlichen Rücksichten nur zwei Dezimalen angegeben.

die entsprechende spezifische Spannung bestimmen. Beispielsweise handle es sich um den Stab 23. Durch Addition der spezifischen Primär- und Biegungsspannungen ergibt sich die spezifische Spannung links oben: $+0,29$, $-1,01$, $-0,67$, $-0,27$, links unten $+0,27$, $-0,65$, $-0,45$, $-0,29$, rechts oben: $+0,23$, $-0,75$, $-0,41$, $-0,27$, rechts unten $+0,33$, $-0,91$, $-0,71$, $-0,29$. Hiernach tritt an allen vier Stellen die grösste spezifische Spannung bei derselben Belastung ein, als wenn gelenkartige Knotenpunkte vorhanden wären, nämlich der grösste Zug bei Belastung von 2, der grösste Druck bei Belastung von 4, 6 und 8. Der grösste spezifische Zug, welcher rechts unten eintritt, ist $+0,33$, der grösste spezifische Druck, welcher links oben eintritt, ist $-1,98$. Die Vergrößerung des letzteren gegenüber dem Träger mit gelenkartigen Knotenpunkten beträgt 19 Prozent.

Man kann für alle Fälle annehmen, dass die spezifischen Spannungen bei derselben Belastung zum Maximum werden, als wenn gelenkartige Knotenpunkte vorhanden sind; wenigstens erhält man hiernach ziemliche richtige Näherungswerte. Eine genauere Bestimmung würde aber mit Hilfe der Methode der Influenzlinien ohne Schwierigkeit durchzuführen sein.

Die folgende Tabelle gibt die spezifischen Maximalspannungen.

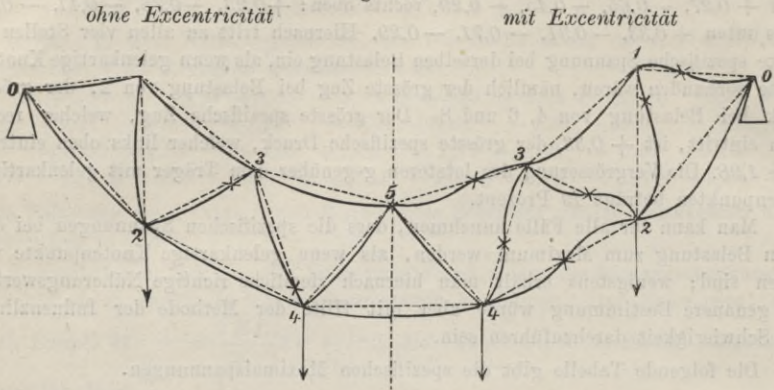
Theil	Stab	Spezifische Primärspannung		Spezifische Biegungsspannung				Grösste Vermehrung Prozent
		Zug	Druck	links		rechts		
				Zug	Druck	Zug	Druck	
Ober-gurt	1 3	0	2,727	0,058	0,046	0,399	0,390	15
	3 5	0	2,647	0,211	0,790	0,358	0,353	13
Untergurt	0 2	3,000	0	0,224	0,224	0,592	0,592	20
	2 4	3,409	0	0,017	0,139	0,401	0,401	12
	4 6	3,000	0	0,270	0,270	0,270	0,270	9
Rechts fallende Stäbe	1 2	3,136	0	0,128	0,150	0,014	0,132	4
	3 4	2,778	0,463	0,188	0,031	0,065	0,025	7
Links fallende Stäbe	0 1	0	2,359	0,223	0,223	0,025	0,014	10
	2 3	0,278	1,660	0,013	0,294	0,053	0,242	18
	4 5	1,100	1,100	0,039	0,228	0,111	0,096	21

Die Vermehrung der Beanspruchung durch die festen Verbindungen beträgt hiernach 4 bis 21, durchschnittlich etwa 14 Prozent.

B. Excentrische Knoten. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Schnittpunkte der Gitterstab-Axen bei den Knotenpunkten 2 bis 8 um e innerhalb der Axen beider Gurte liegen, dass aber, wie im Beispiele 2 zu §. 110 die Knotenpunkte 1, 2, 9, 10 centrisch angeordnet seien. Um vorläufig nur den Einfluss der Excentricität getrennt von dem der Längenänderung zu erhalten, denken wir uns die Querschnittsfläche F der Stäbe, nicht aber deren Trägheitsmoment I unendlich gross. Wir wollen die Untersuchung nur unter der Voraussetzung führen, dass jeder der Knotenpunkte 2, 4, 6, 8 mit der Last 1 belastet ist. Die Axialspannungen S sind dann annähernd durch das Schema a gegeben. Die in den Knotenpunkten 2, 3, 4 wirkenden Horizontalkräfte sind hiernach für 2: $2,50 \sin \alpha + 1,25 \sin \beta = (2,50 + 1,25) 0,6 = 2,25$, für 3: $1,25 \sin \alpha + 1,25 \sin \beta = (1,25 + 1,25) 0,6 = 1,50$, für 4: $1,25 \sin \alpha = 1,25 \cdot 0,6 = 0,75$, wobei sämtliche Kräfte um den Momentenpunkt, welchen wir in den Axen der Gurte annehmen, nach links drehen. Die Stellungswinkel sämtlicher an einem

Knotenpunkte mündenden Stäbe sind an diesem Knotenpunkte konstant, da sich der oben gemachten Voraussetzung halber die Dreieckswinkel nicht ändern. Sonach er-

Fig. 191.



geben sich für die Knotenpunkte 0 bis 4 die folgenden Momentengleichungen, wenn man sogleich berücksichtigt, dass der Symmetrie halber $\tau_5 = 0$ und $\tau_6 = -\tau_4$ sein muss:

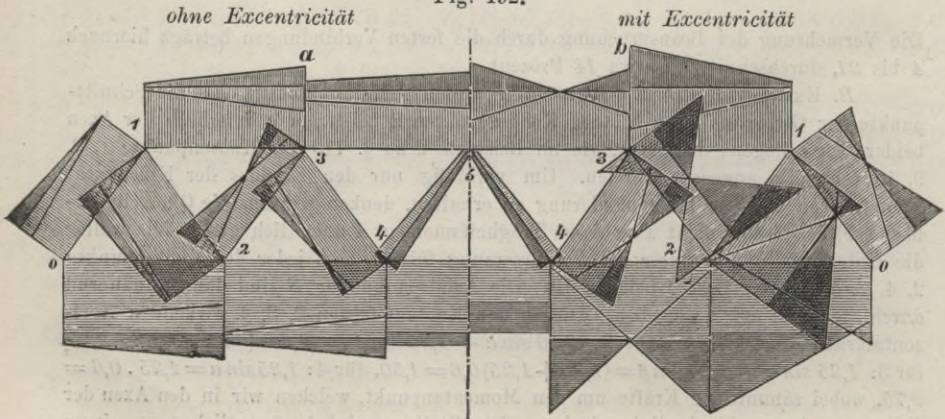
$$\left\{ \begin{array}{l} 385 \tau_0 + 106 \tau_1 + 87 \tau_2 = 0, \\ 106 \tau_0 + 1032 \tau_1 + 106 \tau_2 + 304 \tau_3 = 0, \\ 87 \tau_0 + 106 \tau_1 + 1282 \tau_2 + 144 \tau_3 + 304 \tau_4 + 22500 \frac{e}{E} = 0, \\ 304 \tau_1 + 144 \tau_2 + 1792 \tau_3 + 40 \tau_4 + 15000 \frac{e}{E} = 0, \\ 304 \tau_2 + 40 \tau_3 + 1596 \tau_4 + 7500 \frac{e}{E} = 0. \end{array} \right.$$

Die Auflösung gibt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = + 2,77 \frac{e}{E}, \quad \tau_1 = + 3,80 \frac{e}{E}, \quad \tau_2 = - 16,87 \frac{e}{E}, \\ \tau_3 = - 8,00 \frac{e}{E}, \quad \tau_4 = - 1,29 \frac{e}{E}, \quad \tau_5 = 0. \end{array} \right.$$

Die entsprechende Formänderung ist in Fig. 193 dargestellt.

Fig. 192.

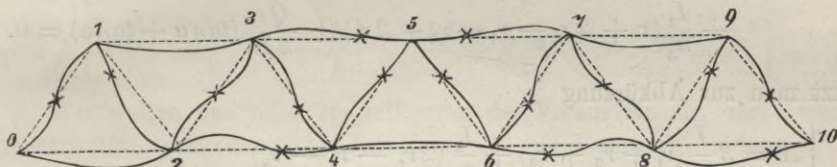


Beispielsweise sind nun für den Stab 34 die Ausschlagwinkel $-8,00 \frac{e}{E}$, $-1,29 \frac{e}{E}$, daher die Endmomente $-0,0040 E (2 \cdot 8,00 + 1,29) \frac{e}{E} = -0,069 e$ und $-0,0040 e (2 \cdot 1,29 + 8,00) \frac{e}{E} = -0,042 e$ und die Biegungsspannungen bezüglich $\frac{0,069 e \cdot 0,75}{0,101} = 0,51 e$ und $\frac{0,042 e \cdot 0,75}{0,101} = 0,31 e$. Für $e = 0,5^{dm}$ sind hiernach die folgenden Biegungsspannungen berechnet worden:

$$\frac{mc}{I} = \begin{cases} \mathbf{1} & -0,004 & -0,254 & \mathbf{3} & -0,333 & -0,166 & \mathbf{5} & +0,166 \\ & +0,259 & -0,185 & & -0,855 & -0,259 & & -0,028 \\ & +0,234 & -0,600 & -1,085 & & -0,159 & -0,057 & +0,057 \\ \mathbf{0} & -0,257 & -0,644 & \mathbf{2} & -0,728 & -0,404 & \mathbf{4} & -0,027 \\ & & & & & & & +0,027 & \mathbf{6} \end{cases}$$

Sowohl die so erhaltenen Werthe für die Ausschlagwinkel, als diejenigen für die Endmomente und Biegungsspannungen sind zu den früher unter der Voraussetzung centrischer Knoten erhaltenen Werthen zu addiren. Die entsprechenden grafischen Darstellungen geben Fig. 191 und 192 (rechte Hälfte). Es ergibt sich dann die Vergrößerung der spezifischen Spannung im Obergurte 24, 19, im Untergurte 41, 24, 8, in

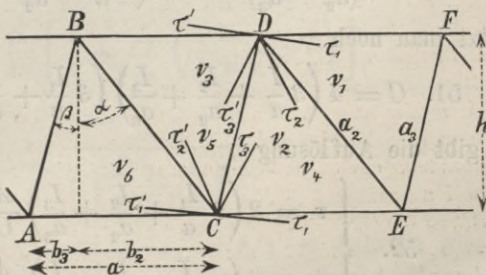
Fig. 193.



den Zugstäben 20, 5, in den Druckstäben 19, 59, ∞ , durchschnittlich etwa 20 Prozent, Lässt man e in $-e$ übergehen, d. h. legt man die Schnittpunkte der Gitterstabaxen auf die äussere Seite der Gurtaxen, so wird die Vergrößerung der spezifischen Spannung im Obergurte 6, 20, im Untergurte 2, 21, 10, in den Zugstäben 19, 19, in den Druckstäben 10, 97, ∞ , durchschnittlich etwa 19 Prozent.

§. 117. Näherungstheorie für Parallelträger. Wir wollen noch für Parallelträger Näherungsregeln unter der Voraussetzung entwickeln, dass der Ausschlagwinkel entsprechender Stabenden bei benachbarten Knotenpunkten als gleich angenommen werden kann. Wir bezeichnen das Trägheitsmoment des Querschnittes des Ober- und Untergurtes, sowie der Zug- und Druckstäbe bezüglich mit I, I_1, I_2, I_3 , die Längen dieser Stäbe mit a, a_1, a_2, a_3 , die Ausschlagwinkel dieser Stäbe für das linke Ende mit $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, für das rechte Ende mit $\tau', \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$, die Neigungswinkel der Zug- und Druckstäbe gegen die Vertikale mit α, β (Fig. 194), ferner die Aenderungen der drei Winkel am Obergurte mit ν_1, ν_2, ν_3 , am Untergurte mit ν_4, ν_5, ν_6 . Alsdann ist

Fig. 194.



$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau - \nu_1, & \tau_3' &= \tau - \nu_1 - \nu_2, & \tau' &= \tau - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3, \\ \tau_3 &= \tau_1 + \nu_4, & \tau_2' &= \tau_1 + \nu_4 + \nu_5, & \tau_1' &= \tau_1 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6. \end{aligned}$$

Die Axe jedes Gurtstückes möge um e ausserhalb der Kreuzungspunkte der Axen der Gitterstäbe liegen. Ist Q die Transversalkraft, so sind die Spannungen der Gitterstäbe $+Q \sec \alpha$, $-Q \sec \beta$, wobei wir als Näherung für beide Stäbe dasselbe Q einführen. Diese beiden Spannungen geben eine Horizontalkomponente $Q (\tan \alpha + \tan \beta)$. Als Momentengleichung für einen oberen und unteren Knotenpunkt ergibt sich nun leicht:

$$\begin{cases} 3 \frac{I}{a} (2\tau - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3) + \frac{I_2}{a_2} (2\tau + \tau_1 - 2\nu_1 + \nu_4 + \nu_5) \\ \quad + \frac{I_3}{a_3} (2\tau + \tau_1 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + \nu_4) + \frac{Qe}{2E} (\tan \alpha + \tan \beta) = 0, \\ 3 \frac{I_1}{a} (2\tau_1 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6) + \frac{I_2}{a_2} (\tau + 2\tau_1 - \nu_1 + 2\nu_4 + 2\nu_5) \\ \quad + \frac{I_3}{a_3} (\tau + 2\tau_1 - \nu_1 - \nu_2 + 2\nu_4) + \frac{Qe}{2E} (\tan \alpha + \tan \alpha) = 0. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$50. \quad \begin{cases} A = 3 \frac{I}{a} (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) + \frac{I_2}{a_2} (2\nu_1 - \nu_4 - \nu_5) \\ \quad + \frac{I_3}{a_3} (2\nu_1 + 2\nu_2 - \nu_4) - \frac{Qe}{2E} (\tan \alpha + \tan \beta), \\ A_1 = -3 \frac{I_1}{a} (\nu_4 + \nu_5 + \nu_6) + \frac{I_2}{a_2} (\nu_1 - 2\nu_4 - 2\nu_5) \\ \quad + \frac{I_3}{a_3} (\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_4) - \frac{Qe}{2E} (\tan \alpha + \tan \beta), \end{cases}$$

so gehen die vorigen Gleichungen über in

$$\begin{cases} 2 \left(3 \frac{I}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \tau + \left(\frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \tau_1 = A, \\ \left(\frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \tau + 2 \left(3 \frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \tau_1 = A_1. \end{cases}$$

Setzt man noch

$$51. \quad C = 4 \left(3 \frac{I}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \left(3 \frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) - \left(\frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right)^2,$$

so gibt die Auflösung

$$52. \quad \begin{cases} \tau = 2 \left(3 \frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \frac{A}{C} - \left(\frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \frac{A_1}{C}, \\ \tau_1 = 2 \left(3 \frac{I}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \frac{A_1}{C} - \left(\frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right) \frac{A}{C}. \end{cases}$$

Nimmt man die relative Längenänderung aller Stäbe als gleich an, nämlich $= \frac{K}{E}$, wenn K die konstante spezifische Primärspannung bezeichnet, so ergibt sich leicht als Änderung der Winkel, wenn man die Horizontalprojektion der Zug- und Druckstäbe mit b_2 und b_3 bezeichnet, wobei $b_2 + b_3 = a$ ist,

$$\begin{cases} \nu_1 = -2 \frac{K}{E} \cot(\alpha + \beta) = -2 \frac{K}{E} \frac{h^2 - b_2 b_3}{ha}, & \nu_2 = +2 \frac{K}{E} \frac{b_3}{h}, \\ \nu_3 = +2 \frac{K}{E} \frac{h^2 + b_2^2}{ha}, & \nu_4 = -\nu_1, \nu_5 = -2 \frac{K}{E} \frac{b_2}{h}, \nu_6 = -2 \frac{K}{E} \frac{h^2 + b_3^2}{ha}, \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = -(\nu_4 + \nu_5 + \nu_6) = +2 \frac{K}{E} (\tan \alpha + \tan \beta) = +2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \end{cases}$$

demnach ist also

$$53. \begin{cases} A = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I}{h} - 2 \frac{I_2}{a_2} \frac{3h^2 - 4b_2 b_3 - b_2^2}{ha} - 2 \frac{I_3}{a_3} \frac{3h^2 - 5b_2 b_3 - 2b_3^2}{ha} \right] - \frac{Qae}{2Eh}, \\ A_1 = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I_1}{h} - 2 \frac{I_2}{a_2} \frac{3h^2 - 5b_2 b_3 - 2b_2^2}{ha} - 2 \frac{I_3}{a_3} \frac{3h^2 - 4b_2 b_3 - b_3^2}{ha} \right] - \frac{Qae}{2Eh}. \end{cases}$$

Wir wollen nun noch speziell unter der Voraussetzung, dass keine Excentricität vorhanden ist, das Netzwerk und Fachwerk, sodann den Einfluss der Excentricität gesondert untersuchen.

a. Netzwerk. Für Netzwerk wird $\alpha = \beta$ oder $b_2 = b_3 = \frac{1}{2}a$, $a_2 = a_3$. Demnach wird

$$\nu_1 = -\frac{K}{E} \left(\frac{2h}{a} - \frac{a}{2h} \right), \quad \nu_2 = +\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \nu_3 = +\frac{K}{E} \left(\frac{2h}{a} + \frac{a}{2h} \right),$$

$$\nu_4 = -\nu_1, \quad \nu_5 = -\nu_2, \quad \nu_6 = -\nu_3,$$

$$54. \begin{cases} A = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I}{h} - \frac{I_2}{a_2} \frac{12h^2 - 5a^2}{2ha} - \frac{I_3}{a_2} \frac{12h^2 - 7a^2}{2ha} \right], \\ A_1 = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I_1}{h} - \frac{I_2}{a_2} \frac{12h^2 - 7a^2}{2ha} - \frac{I_3}{a_2} \frac{12h^2 - 5a^2}{2ha} \right]. \end{cases}$$

Wir wollen $I_1 = I$, $I_3 = I_2$ annehmen; alsdann aber wird

$$55. \quad A = A_1 = 6 \frac{K}{E} \left[\frac{I}{h} + \frac{I_2}{a_2} \left(+\frac{a}{h} - 2 \frac{h}{a} \right) \right].$$

Demnach wird

$$56. \quad \tau = \tau_1 = \frac{A}{6 \left(\frac{I}{a} + \frac{I_2}{a_2} \right)}.$$

Sonach wird nun $\tau_1' = \tau'$, $\tau_3 = \tau_2$, $\tau_3' = \tau_2'$; es nehmen also sowohl die beiden Gurte, als die beiden Gitterstäbe gleiche Krümmung an.

$\frac{I}{a} \frac{a_2}{I_2}$	Gurte			Gitterstäbe		
	$N = N_1 \text{ für } \frac{a}{h} =$			$N_2 = N_3 \text{ für } \frac{a}{h} =$		
	1	1,5	2	1	1,5	2
0	14,0	7,3	5,0	0,9	1,2	1,4
0,5	10,0	5,6	4,0	4,5	2,3	2,8
1,0	8,0	4,7	3,5	6,3	4,4	3,5
2,0	6,0	3,8	3,0	8,1	5,5	4,2
10,0	3,1	2,5	2,3	10,6	7,0	5,3
∞	2,0	2,0	2,0	11,6	7,6	5,7
	$\cdot \frac{c}{h} K$			$\cdot \frac{c_2}{h} K$		

Der Werth von $\frac{I}{a} \frac{a_2}{I_2}$ kann vom Ende des Trägers bis zur Mitte etwa von 1 bis 10 variiren. Hiernach beträgt die grösste spezifische Biegungsspannung in den Gurten etwa $2,3 \frac{c}{h} K$ bis $7 \frac{c}{h} K$, in den Gitterstäben etwa $3 \frac{c_2}{h} K$ bis $11 \frac{c_2}{h} K$.

b. Fachwerk. Beim Fachwerke wird $\beta = 0$, $b_3 = 0$, $b_2 = a$, $a_2 = h \sec \alpha$, $a_3 = h$. Demnach wird

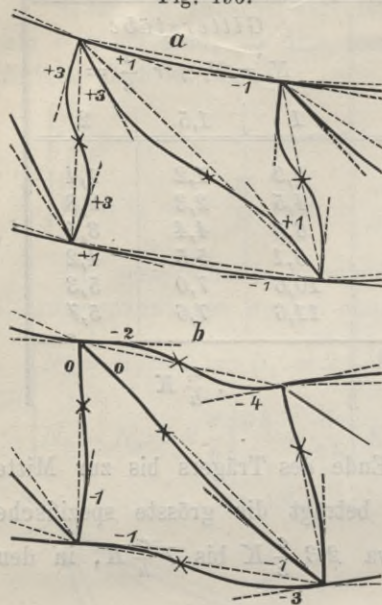
$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = -2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}, \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = +2 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \nu_4 = +2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}, \quad \nu_5 = -2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \nu_6 = -2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}. \end{array} \right.$$

$$61. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I}{h} - 2 \frac{I_2}{a_2} \left(3 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) - 6 \frac{I_3}{a_3} \frac{h}{a} \right], \\ A_1 = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I_1}{h} - 2 \frac{I_2}{a_2} \left(3 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right) - 6 \frac{I_3}{a_3} \frac{h}{a} \right]. \end{array} \right.$$

Sind die Gitterstäbe wieder gegen Biegung sehr schwach, so dass wir $I_2 = I_3 = 0$ annehmen können, so wird $A = A_1 = 6 \frac{K}{E} \frac{I}{h}$ und demnach

$$62. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_1 = + \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau' = \tau_1' = - \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \\ \tau_2 = + \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \quad \tau_2' = + \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), \\ \tau_3 = \tau_3' = + \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right). \end{array} \right.$$

Fig. 196.



Diesem entspricht die in Fig. 196 a dargestellte Formänderung. Die entsprechenden spezifischen Biegungsspannungen werden:

$$63. \begin{cases} N = N' = N_1 = N_1' = 2 \frac{c}{h} K, \\ N_2 = 2 \frac{c_2}{h} \left(6 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) K \cos \alpha, \\ N_2' = 2 \frac{c_2}{h} \left(6 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) K \cos \alpha, \\ N_3 = N_3' = 6 \frac{c_3}{h} \left(2 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) K. \end{cases}$$

Wenn dagegen die Gurte gegen Biegung sehr schwach sind, so dass wir $I = I_1 = 0$ setzen können, so wird für $\frac{I_3}{a_3} = \frac{I_2}{a_2}$:

$$A = -2 \frac{K}{E} \frac{I_2}{a_2} \left(6 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), \quad A_1 = -2 \frac{K}{E} \frac{I_2}{a_2} \left(6 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right)$$

und hiernach:

$$64. \begin{cases} \tau = -2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}, & \tau' = -2 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \tau_1 = -\frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), & \tau_1' = -\frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \tau_2 = 0, & \tau_2' = -\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau_3 = +\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau_3' = 0. \end{cases}$$

Fig. 196 b zeigt die entsprechende Formänderung. Hiernach wird nun

$$65. \begin{cases} N = 4 \frac{c}{h} \frac{h}{a} \left(3 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) K, & N' = 4 \frac{c}{h} \frac{h}{a} \left(3 \frac{h}{a} + 2 \frac{a}{h} \right) K, \\ N_1 = 2 \frac{c}{h} \frac{h}{a} \left(6 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) K, & N_1' = 2 \frac{c}{h} \frac{h}{a} \left(6 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) K, \\ N_2 = 2 \frac{c_2}{h} \frac{a}{h} K \cos \alpha, & N_2' = 2 N_2, \quad N_3 = 4 \frac{c_3}{h} \frac{a}{h} K, \quad N_3' = \frac{1}{2} N_3. \end{cases}$$

Für einige Verhältnisse sind die spezifischen Biegungsspannungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$\frac{I a_2}{I_2 a}$	Obergurt			Untergurt			Diagonalen			Vertikalen		
	N für $\frac{a}{h} =$			N_1 für $\frac{a}{h} =$			N_2 für $\frac{a}{h} =$			N_3 für $\frac{a}{h} =$		
	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25
0	29,3	20,0	15,7	23,3	14,0	9,7	1,7	2,8	3,1	3,0	4,0	5,0
0,5	19,7	13,5	10,6	16,7	10,5	8,2	4,9	3,9	3,2	8,7	8,5	8,8
1,0	14,9	10,3	8,1	13,4	8,8	7,4	6,5	4,4	3,2	11,5	10,8	10,7
2,0	10,6	7,5	6,1	9,6	6,5	5,6	9,0	6,2	4,6	14,5	13,2	12,8
10,0	4,0	3,5	3,1	4,1	3,2	1,9	12,6	8,9	6,8	18,9	16,7	15,9
∞	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	14,0	9,9	7,6	20,5	18,0	17,1
	$\cdot \frac{c}{h} K$			$\cdot \frac{c_1}{h} K$			$\cdot \frac{c_2}{h} K$			$\cdot \frac{c_3}{h} K$		

Hiernach beträgt die grösste spezifische Biegungsspannung ungefähr in den Gurten $3 \frac{c}{h} K$ bis $15 \frac{c}{h} K$, in den Diagonalen $3 \frac{c_2}{h} K$ bis $13 \frac{c_2}{h} K$, in den Vertikalen $10 \frac{c_3}{h} K$ bis $19 \frac{c_3}{h} K$. Im Allgemeinen sind hiernach die Biegungsspannungen beim Fachwerke grösser, als beim Netzwerke.

e. Excentricität. Der Einfluss der Excentricität lässt sich gesondert untersuchen, wenn man sich die Stäbe zwar biegsam, aber die Querschnittsfläche F so gross denkt, dass keine Längenänderungen entstehen, so dass auch die Aenderungen ν der Winkel Null werden. Es ergibt sich dann leicht aus dem Obigen unter der Voraussetzung, dass $I_1 = I$ ist,

$$66. \quad \tau = \tau_1 = - \frac{Q a e}{6 E h \left(2 \frac{I}{a} + \frac{I_2}{a_2} + \frac{I_3}{a_3} \right)}$$

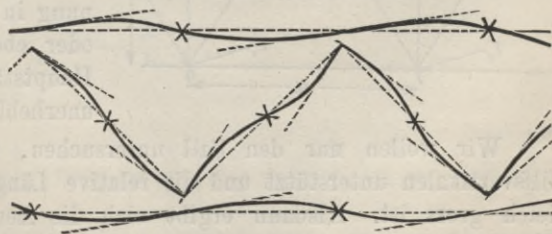
Die Ausschlagwinkel sämtlicher Stäbe sind nun $= \tau$. Die entsprechende Formänderung zeigt Fig. 197. Sind F_2 , F_3 die Querschnittsflächen der Gitterstäbe und setzen wir

$$F_2 = \frac{Q}{K} \sec \alpha = \frac{Q a_2}{K h},$$

$F_3 = \frac{Q}{K} \sec \beta = \frac{Q a_3}{K h}$, setzen wir ferner $I = F r^2$, $I_2 = F_2 r_2^2$, $I_3 = F_3 r_3^2$, so erhält man als grösste spezifische Biegungsspannung in den Gurten

$$67. \quad N = \frac{\left(\frac{F_2}{a_2} + \frac{F_3}{a_3} \right) e c}{2 \left(2 \frac{F r^2}{a} + \frac{F_2 r_2^2}{a_2} + \frac{F_3 r_3^2}{a_3} \right)} K.$$

Fig. 197.



Die Biegungsspannung in den Gitterstäben ist bezüglich das $\frac{a}{h} \cos \alpha$, $\frac{a}{h} \cos \beta$ fache hiervon. Unter der Voraussetzung, dass $\frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3}$, $r_2 = r_3$ ist, ergibt sich beispielsweise

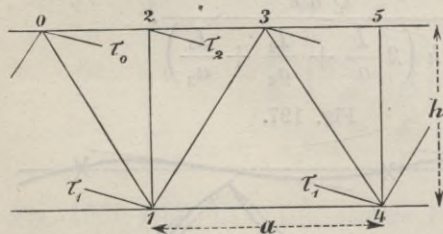
$$\frac{F_2 r_2^2}{a_2} = 0 \quad 0,1 \quad 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad \infty \cdot \frac{F r^2}{a},$$

$$N = 0 \quad \frac{1}{22} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{e c}{r^2} K.$$

Der Einfluss der Excentricität nimmt hiernach von der Mitte des Trägers nach den Enden hin zu; an den Enden kann derselbe ungefähr bis zu $\frac{1}{4} \frac{e c}{r^2} K$ gehen; diese Spannung wird beispielsweise beim rechteckigen Querschnitt $= \frac{3}{4} \frac{e}{c} K$, beim kreuzförmigen Querschnitt mit gleich breiten und dicken Schenkeln $= \frac{3}{2} \frac{e}{c} K$, beim Querschnitt, welcher aus zwei niederen Gurten mit dem Abstände $2c$ besteht, $= \frac{1}{4} \frac{e}{c} K$.

§. 118. Einfluss von Hilfsvertikalen. Beim Netzwerke werden zuweilen Hilfsvertikalen angewendet, welche den Obergurt oder den Untergurt oder beide in der Mitte unterstützen (Fig. 198). Wenn diese Vertikalen ohne oder fast ohne Spannung sind, wenn also diese Vertikalen übermässig stark konstruirt oder nicht, oder schwach belastet sind, so tritt gegen das System ohne Vertikalen nur eine unwesentliche Aenderung ein. Ist aber die spezifische Primärspannung in den Hilfsvertikalen nahe oder ebenso gross, wie in den Hauptstäben, so kann eine nicht unerhebliche Aenderung eintreten.

Fig. 198.



Wir wollen nur den Fall untersuchen, wo der Obergurt durch Hilfsvertikalen unterstützt und die relative Längenänderung aller Theile gleich gross ist. Alsdann ergibt sich die Aenderung der Winkel im Dreiecke 0 1 2 (Fig. 198) leicht zu:

$$\nu_0 = -4 \frac{K}{E} \frac{h}{a}, \quad \nu_1 = -\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \nu_2 = +\frac{K}{E} \left(4 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right);$$

ferner die Aenderung der Winkel des Dreieckes 1 3 4:

$$\nu_1 = +\frac{K}{2E} \left(4 \frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), \quad \nu_3 = +\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \nu_4 = -\frac{K}{2E} \left(4 \frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right).$$

Die Winkel des Dreieckes 1 2 3 ändern sich gar nicht, weil sich alle Seiten relativ um gleich viel verkürzen. Wenn wir nun die Ausschlagwinkel der Stäbe 0 2, 1 4, 2 3 bei 0, 4 und 2 mit τ_0, τ_1, τ_2 , das Trägheitsmoment der Querschnitte des Ober- und Untergurtes mit I, I_1 , der rechts und links fallenden Stäbe mit I_2, I_3 , das der Vertikalen mit I_4 bezeichnen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$68. \left\{ \begin{aligned} & 2\tau_0 \left(\frac{4I}{a} + \frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{d} \right) + \tau_1 \left(\frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{d} \right) + 4\tau_2 \frac{I}{a} \\ & = -\frac{K}{E} \left[2\frac{I}{a} \left(4\frac{h}{a} - 3\frac{a}{h} \right) + \frac{I_2}{d} \left(6\frac{h}{a} + \frac{a}{2h} \right) + \frac{I_3}{d} \left(10\frac{h}{a} - \frac{a}{2h} \right) \right], \\ & 4\tau_0 \frac{I}{a} + \tau_1 \frac{I_4}{a} + 2\tau_2 \left(\frac{4I}{a} + \frac{I_4}{h} \right) \\ & = \frac{K}{E} \left[2\frac{I}{a} \left(4\frac{h}{a} + 3\frac{a}{h} \right) - \frac{I_4}{h} \left(2\frac{h}{a} + \frac{3a}{2h} \right) \right], \\ & \tau_0 \left(\frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{d} \right) + 2\tau_1 \left(6\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{d} + \frac{I_4}{h} \right) + \tau_2 \frac{I_4}{h} \\ & = -\frac{K}{E} \left[12\frac{I_1}{a} \frac{a}{h} + \frac{I_2}{d} \left(6\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) + 2\frac{I_3}{d} \left(4\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) - \frac{I_4}{h} \left(4\frac{h}{a} + 3\frac{a}{h} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir beispielsweise $I_2 = I_3 = I_4 = 0, I = I_1$ an, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} & 4\tau_0 + 2\tau_2 = -\frac{K}{E} \left(4\frac{h}{a} - 3\frac{a}{h} \right), \\ & 2\tau_0 + 4\tau_2 = +\frac{K}{E} \left(4\frac{h}{a} + 3\frac{a}{h} \right), \\ & \tau_1 = -\frac{K}{E} \frac{a}{h}. \end{aligned} \right.$$

Die Auflösung gibt:

$$69. \tau_0 = -\frac{K}{E} \left(2\frac{h}{a} - \frac{a}{2h} \right), \quad \tau_2 = +\frac{K}{E} \left(2\frac{h}{a} + \frac{a}{2h} \right), \quad \tau_1 = -\frac{K}{E} \frac{a}{h}.$$

Die entsprechende Formänderung (beispielsweise für $a = 2h$) zeigt Fig. 199. Die maximalen Biegungsspannungen werden:

$$70. \left\{ \begin{aligned} & N = \frac{4c}{a} \left(6\frac{h}{a} + \frac{a}{2h} \right) K, \quad N_2 = \frac{2c_2}{d} \left(6\frac{h}{a} + \frac{a}{2h} \right) K, \\ & N_3 = \frac{2c}{d} \left(6\frac{h}{a} + \frac{a}{2h} \right) K, \quad N_4 = \frac{2c_4}{h} \left(6\frac{h}{a} + \frac{3a}{2h} \right) K. \end{aligned} \right.$$

und HCD bei C bestimmen; die Aenderung des Winkels FCH ist dann gleich den Aenderungen der Winkel FCG und GCH . Indess kann man die Aenderung des Winkels FCH auch aus dem Dreiecke FCH bestimmen, indem man die Längenänderung der Seite FH gleich der Summe der Längenänderungen der Stäbe FG und GH setzt. Beim viertheiligen Systeme (Fig. 202 und 203) kann man die Aenderung der

Fig. 202.

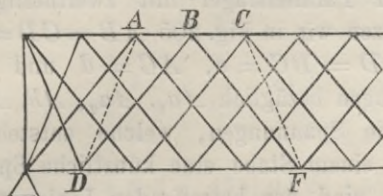
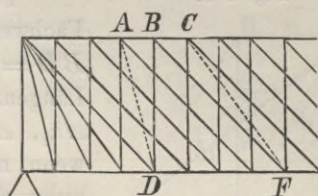


Fig. 203.



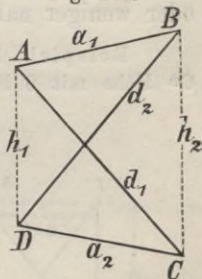
Winkel ABD und CBF aus den Dreiecken DAB und FBC bestimmen, nachdem man die Längenänderung der Geraden AD und CF bestimmt hat; die Aenderung des Winkels DBF kann auch hier mittels des Dreieckes BFD bestimmt werden, indem man die Längenänderung von DF gleich der Summe der Längenänderungen der zwischen D und F liegenden vier Gurtstücke setzt.

Ganz allgemein kann man die Aenderung Δl der Entfernung $AD = l$ zweier beliebiger Knotenpunkte A und D in folgender Weise bestimmen. Man denkt sich in A und D in der Richtung AD , und DA die Kräfte 1 wirkend und bestimmt die entsprechenden Spannungen s jedes Stabes; ist nun Δl die Längenänderung eines beliebigen Stabes in Folge der Belastung, so ist entsprechend dem §. 96

$$\Delta l = - \sum s \Delta l.$$

Beim zweitheiligen Systeme kann man die Gleichungen aufstellen, welche den Beziehungen der Längenänderungen der sechs Linien der Vierecke $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ u. s. w. (Fig. 200 und 201) entsprechen und zwar entsprechend der Gleichung 7 (Seite 244). Wenn zwei Seiten AD , BC (Fig. 204) des Viereckes parallel sind, so wird diese Gleichung sehr einfach. Wir setzen $AD = h_1$, $BC = h_2$, $AB = a_1$, $DC = a_2$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ und die Aenderungen dieser Geraden $= \Delta h_1$, Δh_2 u. s. w. Es ergibt sich sehr leicht, dass wenn man in BC eine Spannung anbringt, welche $= +h_2$ ist, die Spannungen in den übrigen Stäben die folgenden sind: in $AD = +h_2$, in $AB = +a_1$, in $DC = +a_2$, in $AC = -d_1$, in $BD = -d_2$. Demnach wird im Sinne des §. 96 und 97:

Fig. 204.



$$a_1 \Delta a_1 + a_2 \Delta a_2 + h_2 \Delta h_1 + h_1 \Delta h_2 = d_1 \Delta d_1 + d_2 \Delta d_2$$

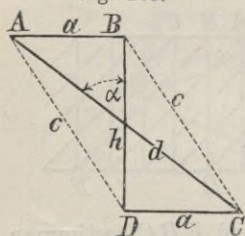
oder, wenn wir die relativen Längenänderungen einführen:

$$71. a_1^2 \frac{\Delta a_1}{a_1} + a_2^2 \frac{\Delta a_2}{a_2} + h_1 h_2 \left(\frac{\Delta h_1}{h_1} + \frac{\Delta h_2}{h_2} \right) = d_1^2 \frac{\Delta d_1}{d_1} + d_2^2 \frac{\Delta d_2}{d_2}.$$

Beim Parallelträger würde demnach entsprechend der Gleichung 8 (Seite 244):

$$72. a^2 \left(\frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} \right) + h^2 \left(\frac{\Delta h_1}{h} + \frac{\Delta h_2}{h} \right) = d^2 \left(\frac{\Delta d_1}{d} + \frac{\Delta d_2}{d} \right).$$

Fig. 205.



Für den Parallelträger mit zweitheiligem Fachwerke setzen wir in Fig. 205 $AB = CD = a$, $BD = h$, $AD = BC = c$, $AC = d$ und die Längenänderungen bezüglich Δa_1 , Δa_2 , Δh , Δc_1 , Δc_2 , Δd . Die Spannungen, welche entstehen, wenn man in einem Stabe eine künstliche Spannung erzeugt, sind den betreffenden Linien proportional; demnach wird

$$a (\Delta a_1 + \Delta a_2) + c (\Delta c_1 + \Delta c_2) = h \Delta h + d \Delta d$$

oder

$$73. a^2 \left(\frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} \right) + c^2 \left(\frac{\Delta c_1}{c} + \frac{\Delta c_2}{c} \right) = h^2 \frac{\Delta h}{h} + d^2 \frac{\Delta d}{d},$$

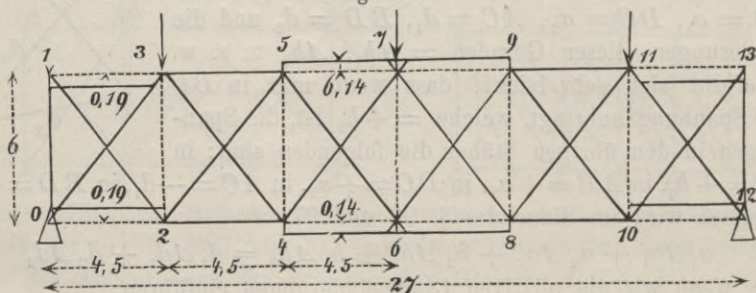
oder auch

$$75. \left(\frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} \right) \tan^2 \alpha + \left(\frac{\Delta c_1}{c} + \frac{\Delta c_2}{c} \right) (4 + \tan^2 \alpha) = \frac{\Delta h}{h} + 4 \frac{\Delta d}{d} \sec^2 \alpha.$$

Die mehrtheiligen Systeme stellen sich hinsichtlich der Biegungsspannungen sehr ungünstig. Nimmt man beispielsweise nur die Knotenpunkte des einen Systemes belastet an, so sind die Senkungen der Knotenpunkte dieses Systemes viel grösser, als die der unbelasteten Systeme; in Folge dessen sind die Krümmungen der Gurte sehr bedeutende. Wenn nun auch in Wirklichkeit die blosse Belastung der Knotenpunkte eines Systemes nicht vorkommt, so sind doch Radstände denkbar, welche eine Belastung herbeiführen, die dieser ungünstigsten Belastungsweise mehr oder weniger nahe kommen.

Beispiel. Parallelträger mit zweitheiligem Netzwerke von 27^m Spannweite, 6^m Höhe mit 6 Feldern von je 4,5^m. Die beiden Gurte haben T-förmigen Quer-

Fig. 206.



schnitt, welcher aus einem Stehbleche, zwei Winkelleisen und 0, 1 oder 2 Lamellen besteht; die Axen der Gitterstäbe schneiden sich in zwei Geraden, welche dem Schwerpunkte des Querschnittes mit einer Lamelle entspricht; in den äusseren und mittleren Feldern entsteht dann natürlich eine Excentricität von bezüglich 0,19 und 0,14^{dec}m. Die Querschnitte der Gitterstäbe und Endständer sind symmetrisch. Die folgende Tabelle gibt die nöthigen Daten:

Theil	Stab	Länge a	Abstand der Randfasern		Quer- schnitts- fläche F	Trägheits- moment I	$\frac{2I}{I}$	$\frac{2c}{a}$	
			ausssen	innen				ausssen	innen
Obergurt	1 3	45	0,72	1,58	0,60	0,28	0,0124	0,032	0,070
	3 5	45	0,53	1,87	0,80	0,37	0,0164	0,024	0,083
	5 7	45	0,39	2,11	1,00	0,45	0,0200	0,017	0,094
Untergurt	0 2	45	0,72	1,58	0,60	0,28	0,0124	0,032	0,070
	2 4	45	0,53	1,87	0,80	0,37	0,0164	0,024	0,083
	4 6	45	0,39	2,11	1,00	0,45	0,0200	0,017	0,094
Rechts fallende Stäbe	1 2	75	1,30		0,36	0,21	0,0056	0,035	
	3 4	75	1,00		0,28	0,09	0,0024	0,027	
	5 6	75	0,70		0,43	0,04	0,0011	0,020	
Links fallende Stäbe	0 3	75	1,20		1,06	0,25	0,0067	0,032	
	2 5	75	1,00		0,96	0,17	0,0045	0,027	
	4 7	75	0,90		0,80	0,11	0,0030	0,024	
Endständer	0 1	60	0,80		0,96	0,14	0,0048	0,024	
			Decimeter		□ Dec.	Decim.	Decimeter		

Wir nehmen hier lediglich die Knotenpunkte 3, 7 und 11 des oberen Gurtes mit der Last 1 (1 Tonne) belastet an, wählen also den für die Biegungsspannungen ungünstigsten Belastungsfall. Nach §. 98 ergibt sich hier $\Delta = 0$, d. h. es ergeben sich für die Spannungen durch Zerlegung in zwei Systeme richtige Werthe. Diese Spannungen gibt das folgende Schema:

$$a. \quad S = \begin{cases} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{3} & -1,500 & \mathbf{5} & -1,500 & \mathbf{7} & -1,500 \\ & 0 & -1,875 & +0,625 & 0 & 0 & -0,625 & -0,625 \\ 0 & & & & & & & \\ & -1,875 & 0 & 0 & +0,625 & -0,625 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & +1,125 & \mathbf{2} & +1,125 & \mathbf{4} & +1,875 & \mathbf{6} & +1,875 \end{cases}$$

Die Spannungen der Gitterstäbe sind hierin doppelt eingetragen. Die entsprechenden Werthe für $\frac{S}{F}$ sind:

$$b. \quad \frac{S}{F} = \begin{cases} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{3} & -1,88 & \mathbf{5} & -1,50 & \mathbf{7} & -1,50 \\ & 0 & -1,77 & +2,23 & 0 & 0 & -0,78 & -0,78 \\ 0 & & & & & & & \\ & -1,77 & +2,23 & 0 & +2,23 & -0,78 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & +1,88 & \mathbf{2} & +1,41 & \mathbf{4} & +1,88 & \mathbf{6} & +1,88 \end{cases}$$

Dies sind gleichzeitig die relativen Längenänderungen, wenn man den Elastizitätskoeffizienten $E=1$ setzt. Die Gleichung 72 geht hier über in

$$9 \left(\frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} \right) + 16 \left(\frac{\Delta h_1}{h} + \frac{\Delta h_2}{h} \right) = 25 \left(\frac{\Delta d_1}{d} + \frac{\Delta d_2}{d} \right).$$

Für das Viereck 0 1 3 2 erhält man also $9 \cdot 1,88 + 16 \cdot \frac{\Delta h_2}{h} = -25 \cdot 1,77$, woraus $\frac{\Delta h_2}{h} = -3,82$ folgt. Aus dem Vierecke 2 3 5 4 folgt sodann $\frac{\Delta h_4}{h} = +7,57$ und alsdann aus dem Vierecke 4 5 7 6 $\frac{\Delta h_6}{h} = -9,00$.

Beispielsweise folgt nun aus dem Dreiecke 2 5 4 die Aenderung des Winkels 2 5 4 nach Formel 46: $= (1,406 \cdot 4,5 - 0,45 - 7,57 \cdot 0) \frac{1}{6} = +1,054$; aus dem Dreiecke 4 5 6 folgt ebenso die Aenderung des Winkels 4 5 6: $(1,875 \cdot 4,5 - 0,45 - 7,57 \cdot 0) \frac{1}{6} = +1,407$. Die Aenderung des Winkels 2 5 6 ist demnach $1,054 + 1,407 = +2,461$. Die so bestimmten Winkeländerungen gibt das folgende Schema:

$$c. \quad v = \begin{array}{cccccccc} & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} & & \mathbf{7} \\ & -5,09 & +2,36 & +7,12 & -5,09 & -12,00 & +11,13 & +11,13 \\ + & 1,41 & & +2,12 & & +2,46 & & +3,98 \\ + & 1,33 & & -1,41 & & -3,62 & & -2,25 \\ - & 2,73 & 0 & +10,09 & -8,07 & -10,96 & +10,09 & +10,09 \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{2} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} \end{array}$$

Hieraus ergeben sich nun in bekannter Weise die folgenden Stellungswinkel:

$$d. \quad \tau = \begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{1} & \tau_1 & & \tau_3 - 11,60 & \mathbf{3} & \tau_3 & \tau_5 + 14,63 & \mathbf{5} & \tau_5 & \tau_7 - 26,25 & \mathbf{7} & \tau_7 \\ \tau_1 + 3,69 & \tau_1 + 5,09 & \tau_3 - 9,24 & \tau_3 - 7,12 & \tau_5 - 9,54 & \tau_5 + 12,00 & \tau_7 - 15,12 & \tau_5 - 11,13 \\ \tau^0 & \tau_0 - 1,33 & \tau_2 & \tau_2 + 1,41 & \tau_1 + 8,07 & \tau_1 + 11,69 & \tau_6 - 10,09 & \tau_6 - 7,84 \\ \mathbf{0} & \tau_0 + 1,41 & \tau_2 & \mathbf{2} & \tau_2 - 8,69 & \tau_4 & \mathbf{4} & \tau_4 + 22,65 & \tau_6 & \mathbf{6} & \tau_6 - 17,94 \end{array}$$

Der Symmetrie halber wird $-\tau_6 = \tau_6 - 17,94$, also $\tau_6 = +8,97$; ferner $\tau_7 - 26,25 = -\tau_7$, also $\tau_7 = +13,12$. Die Gleichungen, welche sich nun dem entsprechend nach §. 116 aufstellen lassen, sind:

$$e. \quad \begin{array}{l} 478 \tau_0 + 48 \tau_1 + 124 \tau_2 + 67 \tau_3 = +271 + 2138 \\ 48 \tau_0 + 456 \tau_1 + 56 \tau_2 + 124 \tau_3 = +514 + 0 \\ 124 \tau_0 + 56 \tau_1 + 778 \tau_2 + 164 \tau_4 + 45 \tau_5 = +1834 - 2138 \\ 67 \tau_0 + 124 \tau_1 + 758 \tau_3 + 24 \tau_4 + 164 \tau_5 = +1951 + 0 \\ 164 \tau_2 + 24 \tau_3 + 836 \tau_4 = -10286 - 2625 \\ 45 \tau_2 + 164 \tau_8 + 840 \tau_5 = +3348 - 2100 \end{array}$$

Auf der rechten Seite bezieht sich die zweite Zahl lediglich auf die Excentricität; diese Zahlen sind gesondert, um den Einfluss der Excentricität beurtheilen zu können. Aus der I, V. und VI. Gleichung folgt:

$$\begin{array}{l} \tau_0 = -0,100 \tau_1 - 0,259 \tau_2 - 0,140 \tau_3 + 0,567 + 4,472, \\ \tau_4 = -0,196 \tau_2 - 0,029 \tau_3 - 12,304 - 3,140, \\ \tau_5 = -0,054 \tau_2 - 0,195 \tau_3 - 3,986 - 2,500. \end{array}$$

Die Substitution in die übrigen Gleichungen gibt:

$$\begin{array}{l} 451 \tau_1 + 44 \tau_2 + 117 \tau_3 = +486 - 215, \\ 44 \tau_1 + 711 \tau_2 - 31 \tau_3 = +3960 - 2065, \\ 117 \tau_1 - 31 \tau_2 + 716 \tau_3 = +2862 + 186. \end{array}$$

Die Auflösung gibt:

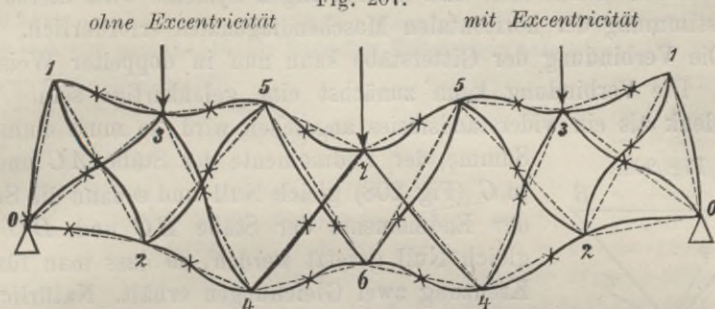
$$f. \quad \begin{array}{l} \tau_0 = -1,484 + 5,218 = +3,734 \quad \tau_1 = -13,565 - 2,581 = -16,146 \\ \tau_1 = -0,617 - 0,240 = -0,857 \quad \tau_5 = -5,147 - 2,378 = -7,525 \\ \tau_2 = +5,795 - 2,880 = +2,915 \quad \tau_6 = +8,968 \\ \tau_3 = +4,352 + 0,175 = +4,527 \quad \tau_7 = +13,124 \end{array}$$

Die hiernach bestimmten Ausschlagwinkel gibt das folgende Schema:

$$g. \tau = \begin{cases} \mathbf{1} & -0,86 & -7,07 & \mathbf{3} & +4,53 & +7,11 & \mathbf{5} & -7,53 & -13,12 & \mathbf{7} & +13,12 \\ +2,83 & +4,24 & -4,71 & & -2,59 & +2,01 & & +4,48 & -1,99 & & +1,99 \\ +3,74 & +2,41 & +2,92 & & +4,32 & -8,08 & & -4,46 & -1,13 & & +1,13 \\ \mathbf{0} & +5,14 & +2,92 & \mathbf{2} & -5,77 & -16,15 & \mathbf{4} & +6,50 & +8,97 & \mathbf{6} & -8,97 \end{cases}$$

In Fig. 207 ist hiernach die Deformation konstruiert (und zwar für $E = 33,3$ Tonnen pro \square Decim.), in der linken und rechten Hälfte bezüglich unter der Voraussetzung centrischer und excentrischer Knoten.

Fig. 207.



Die hiernach ferner berechneten spezifischen Biegungsspannungen sind im folgenden Schema zusammengestellt:

$$h. N = \begin{cases} \mathbf{1} & +0,28 & -0,48 & \mathbf{3} & -0,39 & +0,45 & \mathbf{5} & +0,48 & -0,87 & \mathbf{7} & -0,87 \\ & -0,62 & +1,05 & & +1,34 & -1,56 & & -2,65 & +3,17 & & +3,17 \\ \pm 0,23 & \pm 0,40 & \pm 0,22 & & \pm 0,36 & \pm 0,23 & & \pm 0,16 & \pm 0,20 & & \pm 0,20 \\ \pm 0,25 & 0 & \pm 0,35 & & \pm 0,29 & \pm 0,51 & & \pm 0,26 & \pm 0,04 & & \pm 0,04 \\ \mathbf{0} & -0,92 & +0,77 & \mathbf{2} & +2,30 & -3,16 & \mathbf{4} & -2,07 & +2,39 & \mathbf{6} & +2,39 \\ & +0,42 & -0,35 & & -0,66 & +0,91 & & +0,37 & -0,43 & & -0,43 \end{cases}$$

Die maximalen spezifischen Primärspannungen unter der Voraussetzung der für diese ungünstigsten Belastung der Knotenpunkte des Obergurtes mit der Knotenlast 1 werden für den Obergurt $-1,25, -2,81, -3,00$, für den Untergurt $+1,88, +3,28, +3,38$, für die rechts fallenden Stäbe $+3,47, +2,23, +0,97$, für die links fallenden $-1,83, -1,30, -1,04$, für den Endständer $-1,04$. Die Vermehrung der spezifischen Spannung durch die Biegungsspannungen in Prozenten gibt das folgende Schema:

$$i. \begin{cases} \mathbf{1} & 50 & \mathbf{3} & 56 & \mathbf{5} & 88 & \mathbf{7} & 88 \\ & 12 & 12 & 23 & 22 & 17 & 25 & 25 \\ & 24 & & & & & & \\ & 12 & 12 & 22 & 23 & 25 & 17 & 17 \\ \mathbf{0} & 41 & \mathbf{2} & 70 & \mathbf{4} & 71 & \mathbf{6} & 71 \end{cases}$$

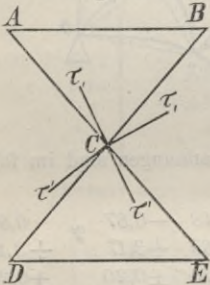
Hiernach ist die Erhöhung der Beanspruchung in den Gurten 41 bis 88, durchschnittlich 68, im Gitterwerke nur 12 bis 25, durchschnittlich 18 Prozent; im Ganzen ist dieselbe durchschnittlich ungefähr 45 Prozent. Bei gleicher Belastung aller Knotenpunkte wird die durchschnittliche Erhöhung der spezifischen Spannung ungefähr nur 12 Prozent.

§. 120. Gitterträger mit festen Knotenverbindungen und mehrtheiligem Gitterwerke bei verbundenen Gitterstäben. Wenn die Gitterstäbe unter sich verbunden sind, so behält das im vorigen Paragrafe gezeigte Verfahren im Allgemeinen auch hier seine Giltig-

keit. Nur kommt zunächst noch die Bestimmung der Winkel der Stabsehnen an den Kreuzungspunkten der Gitterstäbe hinzu. Man bestimmt diese Winkel leicht mit Hilfe der an die Gurte anschliessenden Dreiecke AIB , EBF u. s. w. (Fig. 200 und 201), sowie der Dreiecke FIB , FIK u. s. w., in welche die viereckigen Maschen durch die Diagonalen BF , CG u. s. w. getheilt werden. Die Längenänderungen der letzteren bestimmt man wie im vorigen Paragrafe, allmählig vom Auflager an fortschreitend. Beim drei- und mehrtheiligen Systeme wird hierzu auch die Bestimmung der horizontalen Maschendiagonalen erforderlich.

Die Verbindung der Gitterstäbe kann nun in doppelter Weise erfolgen. Die Verbindung kann zunächst eine gelenkartige sein. Wenn das Gelenk als ein widerstandsfreies angesehen wird, so muss einmal die Summe der Endmomente der Stäbe AC und EC in C (Fig. 208) gleich Null und sodann die Summe der Endmomente der Stäbe BC und DC in C gleich Null gesetzt werden, so dass man für jede Kreuzung zwei Gleichungen erhält. Natürlich hat man auch zwei Ausschlagwinkel, etwa die Ausschlagwinkel τ und τ_1 der Stäbe AC und BC als Unbekannte einzuführen. Sind die Stäbe dagegen unter sich starr verbunden, so ist die Gleichung für die Kreuzung ebenso anzusetzen, wie für jeden andern Knotenpunkt, so dass hier für jede Kreuzung nur eine Gleichung entsteht.

Fig. 208.



Hinsichtlich der Biegungsspannungen in den Gitterstäben stellt sich diese Anordnung ungünstiger, als die im vorigen Paragrafe behandelte.

Beispiel. Wir wählen dasselbe Beispiel, wie im vorigen Paragrafe mit dem einzigen Unterschiede, dass wir annehmen, die Gitterstäbe seien unter sich starr verbunden.

Die Schemata a und b behalten hier (abgesehen von der veränderten, nach Fig. 209 durchgeführten Numerirung) ihre Gültigkeit. Die Längenänderung der der Abstände 2 3, 4 5, 6 7, hier 3 4, 6 7, 9 10 ergibt sich hier wie dort zu bezüglich $-3,82$, $+7,57$, $-9,00$. Beispielsweise ist nun die Aenderung des Winkels 2 4 3 aus dem Dreiecke 2 3 4, $E = 1$ gesetzt, $\frac{1}{2,4} [0.2,5 + 1,77(-0,7) + 3,82.3,2] = +4,58$; die Aenderung des Winkels 3 4 5 aus dem Dreiecke 3 4 5: $= \frac{1}{2,4} [0.2,5 - 2,23(-0,7) + 3,82.3,2] = +5,74$; also ist die Aenderung des Winkels 2 4 5 $= 4,58 + 5,74 = +10,32$. Die so bestimmten Winkeländerungen gibt das folgende Schema:

$$a. v = \begin{matrix} & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{7} & & \mathbf{10} \\ \left. \begin{matrix} -1,84 & -1,84 & +0,52 & +10,32 & +0,76 & +3,73 & -18,67 & +0,31 & +1,35 & +11,77 & +1,35 \\ & & +1,33 & & & -4,49 & & -1,66 & & & \\ & +2,36 & \mathbf{2} & -7,83 & & -13,16 & \mathbf{5} & +17,21 & & +21,23 & \mathbf{8} & -22,96 \\ -0,52 & & +4,14 & & & +0,44 & & & +3,40 & & & \\ \mathbf{0} & -0,89 & & -3,25 & +10,67 & & +1,27 & -1,70 & & -19,76 & & +3,40 \\ & & & & & & & & & -1,18 & -2,22 & +11,19 & -2,22 \end{matrix} \right\} & & & \mathbf{3} & & \mathbf{6} & & \mathbf{9} \end{matrix}$$

Hieraus ergeben sich nun die folgenden Stellungswinkel:

$$b. \tau \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} \quad \tau_1 \quad \tau_4 - 11,60 \quad \mathbf{4} \quad \tau_4 \quad \tau_7 + 14,60 \quad \mathbf{7} \quad \tau_7 \quad \tau_{10} - 26,24 \quad \mathbf{10} \quad \tau_{10} \\ \tau_1 + 3,68 \quad \tau_1 + 1,84 \quad \tau_1 - 11,08 \quad \tau_4 - 0,76 \quad \tau_7 + 18,36 \quad \tau_7 - 0,31 \quad \tau_{10} - 24,89 \quad \tau_{10} - 1,35 \\ \tau_2 - 1,33 \quad \tau_5 + 4,49 \quad \tau_8 + 1,66 \\ \mathbf{2} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{8} \\ \tau_2 + 2,36 \quad \tau_2 + 6,50 \quad \tau_5 - 13,16 \quad \tau_8 - 12,72 \quad \tau_8 + 21,23 \quad \tau_7 + 24,62 \\ \tau_0 \quad \tau_0 + 0,52 \quad \tau_3 + 3,25 \quad \tau_3 - 7,42 \quad \tau_6 - 1,70 \quad \tau_6 + 21,46 \quad \tau_9 + 2,22 \quad \tau_9 - 20,60 \\ \mathbf{0} \quad \tau_0 + 1,41 \quad \tau_3 \quad \mathbf{3} \quad \tau_3 - 8,69 \quad \tau_6 \quad \mathbf{6} \quad \tau_6 + 22,64 \quad \tau_9 \quad \mathbf{9} \quad \tau_9 - 17,94 \end{array} \right.$$

Der Symmetrie halber wird $\tau_9 = -\tau_9 + 17,94$, also $\tau_9 = +8,97$ und $\tau_{10} - 26,24 = -\tau_{10}$, also $\tau_{10} = +13,12$. Wenn man diese Werthe berücksichtigt so lassen sich nun nach §. 116 die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$c. \left\{ \begin{array}{l} 612\tau_0 + 48\tau_1 + 134\tau_2 + 124\tau_3 \quad \quad \quad = -982 + 2138 \\ 48\tau_0 + 284\tau_1 + 112\tau_2 \quad \quad + 124\tau_4 \quad \quad \quad = +673 \\ 134\tau_0 + 112\tau_1 + 984\tau_2 + 112\tau_3 + 134\tau_4 \quad \quad \quad = -887 \\ 124\tau_0 \quad \quad + 112\tau_2 + 980\tau_3 \quad \quad + 90\tau_5 + 164\tau_6 \quad \quad \quad = +3740 - 2138 \\ \quad \quad 124\tau_1 + 134\tau_2 \quad \quad + 940\tau_4 + 48\tau_5 \quad \quad + 164\tau_7 \quad \quad \quad = +3698 \\ \quad \quad \quad + 90\tau_3 + 48\tau_4 + 552\tau_5 + 48\tau_6 + 90\tau_7 \quad \quad \quad = +1752 \\ \quad \quad \quad + 164\tau_3 \quad \quad + 48\tau_5 + 944\tau_6 \quad \quad + 60\tau_8 = -12826 - 2625 \\ \quad \quad \quad + 164\tau_4 + 90\tau_5 \quad \quad + 952\tau_7 + 22\tau_8 = -5870 - 2100 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 60\tau_6 + 22\tau_7 + 328\tau_8 = -4651 \end{array} \right.$$

Die Auflösung gibt:

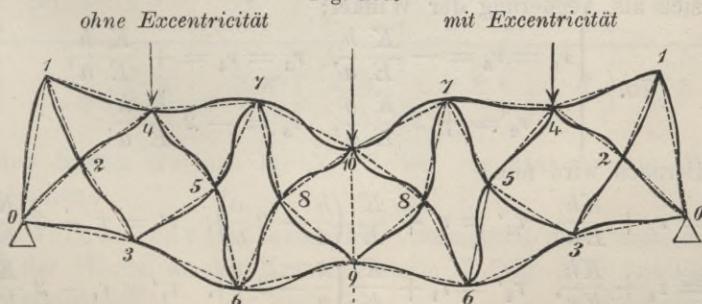
$$d. \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = -2,50 + 3,21 = +0,71 \quad \quad \tau_6 = -14,34 - 3,28 = -17,62 \\ \tau_1 = +1,34 - 0,53 = +0,81 \quad \quad \tau_7 = -8,96 - 2,54 = -11,50 \\ \tau_2 = -2,20 - 0,73 = -2,93 \quad \quad \tau_8 = -10,96 + 0,77 = -10,19 \\ \tau_3 = +6,39 + 2,39 = +8,78 \quad \quad \tau_9 = +8,97 \\ \tau_4 = +5,46 + 0,61 = +6,07 \quad \quad \tau_{10} = +13,12 \\ \tau_5 = +4,07 + 0,23 = +4,30 \end{array} \right.$$

Hiernach ergeben sich nun die folgenden Ausschlagwinkel:

$$e. \tau = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} \quad +0,81 \quad -5,53 \quad \mathbf{4} \quad +6,07 \quad +3,13 \quad \mathbf{7} \quad -11,50 \quad -13,12 \quad \mathbf{10} \quad +13,12 \\ +4,49 \quad +2,65 \quad -5,01 \quad +5,31 \quad +6,86 \quad -11,81 \quad -11,79 \quad +11,79 \\ \quad \quad -2,93 \quad -4,26 \quad +4,30 \quad +8,79 \quad -10,19 \quad -8,53 \\ \mathbf{2} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{8} \\ +0,71 \quad -0,87 \quad +3,57 \quad -8,86 \quad -8,42 \quad +11,04 \quad +14,43 \\ \quad \quad +1,23 \quad +12,03 \quad -1,36 \quad -15,92 \quad +3,84 \quad +11,19 \quad -11,19 \\ \mathbf{0} \quad +2,12 \quad +8,78 \quad \mathbf{3} \quad +0,09 \quad -17,62 \quad \mathbf{6} \quad +5,02 \quad +8,97 \quad \mathbf{9} \quad -8,97 \end{array} \right.$$

Fig. 209 zeigt die hiernach dargestellte Deformation (für $E = 33,3$ Tonnen pro □Decimeter) und zwar links für centrische, rechts für excentrische Knoten.

Fig. 209.



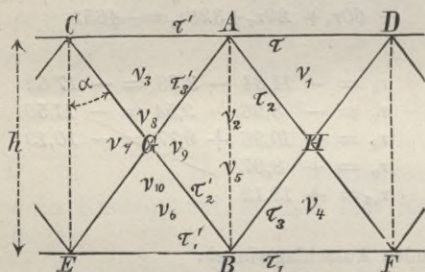
Die maximalen spezifischen Biegungsspannungen lassen sich hiernach leicht in bekannter Weise bestimmen. Wir geben im folgenden Schema nur die Prozentsätze. Die Verhältnisse gegen die unter der Voraussetzung der ungünstigsten Belastung bestimmten spezifischen Primärspannungen sind in Prozenten:

$$f. \begin{cases} 1 & 27 & 4 & 36 & 7 & 113 & 10 \\ & 3 & 25 & 18 & 51 & 68 & 75 \\ 23 & 2 & & 5 & & 8 & \\ & 28 & 28 & 34 & 56 & 60 & 90 \\ 0 & 73 & 3 & 44 & 6 & 64 & 9 \end{cases}$$

Hiernach ist die Erhöhung der Beanspruchung in den Gurten 27 bis 113, durchschnittlich 65, in den Gitterstäben 3 bis 90, durchschnittlich 36, im Ganzen durchschnittlich 51 Prozent. In den Gurten ist demnach die Erhöhung der Beanspruchung durchschnittlich ein wenig kleiner, in den Gitterstäben ist sie durchschnittlich doppelt so gross, als bei nicht verbundenen Stäben.

§. 121. Näherungsbestimmung für Parallelträger mit zweitheiligem Netzwerke. Wir wollen nur eine Näherungstheorie unter der

Fig. 210.



Voraussetzung geben, dass die relative Längenänderung aller Theile dem absoluten Werthe nach gleich ist. Wir führen hierbei die bereits in §. 14 angewendete Bezeichnung ein. Bezeichnen wir noch die relative Längenänderung der Höhen AB und CE mit σ und σ' , so folgt aus der Formel 8 (Seite 244), wenn wir $\frac{S_1}{\varphi_1} = +\frac{K}{E}$, $\frac{S_2}{\varphi_2} = -\frac{K}{E}$,

$$\frac{T_1}{\psi_2} = \sigma, \quad \frac{T_2}{\psi_2} = \sigma_1, \quad \frac{P_1}{L_1} = +\frac{K}{E}, \quad \frac{P_2}{L_2} = -\frac{K}{E} \text{ setzen:}$$

$$\sigma + \sigma_1 = 0.$$

Hiernach müssen die relativen Längenänderungen der Höhen abwechselnd positiv und negativ, dem absoluten Werthe nach aber gleich sein. Nehmen wir starke Endständer an, so können wir daher für alle Vertikalen $\sigma = 0$ setzen.

1. Nicht verbundene Gitterstäbe. In der bekannten Weise ergibt sich als Aenderung der Winkel:

$$75. \begin{cases} v_1 = v_6 = -\frac{K}{E} \frac{h}{a}, & v_3 = v_4 = +\frac{K}{E} \frac{h}{a}, \\ v_2 = +2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}, & v_5 = -2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}. \end{cases}$$

Hiernach wird nun

$$\begin{cases} \tau_2 = \tau + \frac{Kh}{Ea}, & \tau_3' = \tau + \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right), & \tau' = \tau - 2 \frac{Ka}{Eh}, \\ \tau_3 = \tau_1 + \frac{Kh}{Ea}, & \tau_2' = \tau_1 + \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right), & \tau_1' = \tau_1 - 2 \frac{Ka}{Eh}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich nun die Momentengleichungen

$$76. \begin{cases} 2\tau \left(3 \frac{I}{a} + \frac{I_2 + I_3}{d} \right) + \tau_1 \frac{I_2 + I_3}{d} \\ \quad = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I}{a} \frac{a}{h} - \frac{I_2}{d} \left(3 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right) - \frac{I_3}{d} \left(3 \frac{h}{a} - 4 \frac{a}{h} \right) \right], \\ 2\tau_1 \left(3 \frac{I_1}{a} + \frac{I_2 + I_3}{d} \right) + \tau \frac{I_2 + I_3}{d} \\ \quad = \frac{K}{E} \left[6 \frac{I_1}{a} \frac{a}{h} - \frac{I_3}{d} \left(3 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right) - \frac{I_2}{d} \left(3 \frac{h}{a} - 4 \frac{a}{h} \right) \right]. \end{cases}$$

Nimmt man $I = I_1$ und $I_2 = I_3$ an, so wird $\tau = \tau_1$ und zwar

$$77. \tau = + \frac{K}{E} \frac{\frac{I}{a} \frac{a}{h} - \frac{I_2}{d} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right)}{\frac{I}{a} + \frac{I_2}{d}}$$

Als spezifische Biegungsspannungen in den Gurten und den Diagonalen ergibt sich hiernach

$$78. \begin{cases} N = \frac{2c}{a} \left[3E\tau - 2K \frac{a}{h} \right] \text{ oder } = \frac{2c}{a} \left[3E\tau - 4K \frac{a}{h} \right], \\ N_2 = \frac{2c_2}{d} \left[3E\tau + K \left(3 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right) \right] \text{ oder} \\ \quad = \frac{2c_2}{d} \left[3E\tau + K \left(3 \frac{h}{a} - 4 \frac{a}{h} \right) \right]. \end{cases}$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{I}{a} \frac{d}{I_2}$	$\frac{a}{h} = 0,75$		$\frac{a}{h} = 1,00$		$\frac{a}{h} = 1,25$	
	N	N_2	N	N_2	N	N_2
0	12,7	1,2	8,0	1,4	5,8	1,6
1	7,3	4,4	5,0	3,5	3,9	3,1
10	2,9	7,0	2,6	5,3	2,4	4,3
∞	2,0	7,6	2,0	5,7	2,0	4,6
	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$

Von den beiden Werthen für N , N_2 ist nur das absolute Maximum aufgenommen.

2. Verbundene Gitterstäbe. Bezeichnet man noch die Aenderung der Winkel an der Kreuzungsstelle G (Fig. 210) mit ν_7 , ν_8 , ν_9 , ν_{10} , so ergibt sich

$$79. \begin{cases} \nu_1 = -\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), & \nu_3 = +\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \nu_4 = +\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), & \nu_6 = +\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \nu_5 = -2\frac{K}{E} \frac{a}{h}, & \nu_{10} = +2\frac{K}{E} \frac{a}{h}, & \nu_2 = \nu_5 = \nu_7 = \nu_9 = 0. \end{cases}$$

Die Winkel des Parallelogrammes $AHBG$ ändern sich somit nicht. Die Ausschlagwinkel bei A und B werden nun

$$\begin{cases} \tau_2 = \tau_3' = \tau + \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), & \tau' = \tau - 2\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \\ \tau_3 = \tau_2' = \tau_1 + \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right), & \tau_1' = \tau_1 - 2\frac{K}{E} \frac{a}{h}. \end{cases}$$

Hinsichtlich der Verbindungsweise der Gitterstäbe unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:

a. Die Gitterstäbe sind gelenkartig mit einander verbunden. Bezeichnen wir den Ausschlagwinkel der Stäbe GC , GE , GB , GA bei G bezüglich mit τ_4 , τ_5 , τ_4' , τ_5' , so ist

$$\tau_4' = \tau_4 + 2\frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau_5' = \tau_5 + 2\frac{K}{E} \frac{a}{h}.$$

Als Momentengleichungen ergeben sich hiernach

$$80. \begin{cases} \tau \left(6\frac{I}{a} - 4\frac{I_2 + I_3}{d} \right) + 2\tau_4 \frac{I_2}{d} + 2\tau_5 \frac{I_3}{d} \\ \quad = \frac{K}{E} \left[6\frac{I}{a} \frac{a}{h} - 4\frac{I_2}{d} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) - 4\frac{I_3}{d} \frac{h}{a} \right], \\ \tau_1 \left(6\frac{I_1}{a} - 4\frac{I_2 + I_3}{d} \right) + 2\tau_4 \frac{I_2}{d} + 2\tau_5 \frac{I_3}{d} \\ \quad = \frac{K}{E} \left[6\frac{I_1}{a} \frac{a}{h} - 4\frac{I_2}{a} \frac{h}{a} - 4\frac{I_3}{d} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right) \right], \\ \tau + \tau_1 + 4\tau_4 = -2\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right), \\ \tau + \tau_1 + 4\tau_5 = -2\frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right). \end{cases}$$

Nach den beiden letzten Gleichungen ist $\tau_4 = \tau_5$. Ist $I = I_1$, $I_2 = I_3$, so wird nach den beiden ersten Gleichungen auch $\tau = \tau_1$ und zwar ergibt sich in diesem Falle:

$$81. \begin{cases} \tau = +\frac{K}{E} \frac{\frac{I}{a} \frac{a}{h} - \frac{I_2}{d} \left(\frac{h}{a} - \frac{a}{h} \right)}{\frac{I}{a} + \frac{I_2}{d}}, \\ \tau_4 = -\frac{K}{E} \frac{\frac{I}{a} \left(\frac{h}{a} + 2\frac{a}{h} \right) + 2\frac{I_2}{d} \frac{a}{h}}{\frac{I}{a} + \frac{I_2}{d}}. \end{cases}$$

In Fig. 211 ist hiernach die Deformation für die beiden extremen Fälle: $I_2 = 0$ (Fig. 211 a) und $I = 0$ (Fig. 211 b) dargestellt.

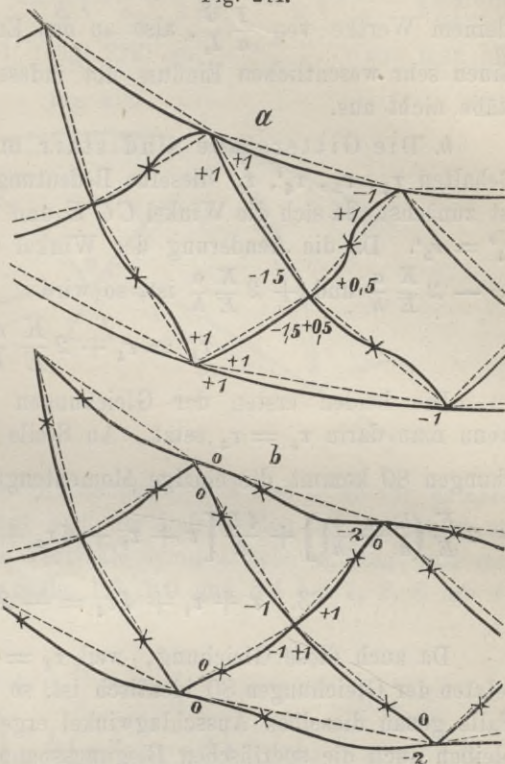
Für die spezifische Biegungsspannung in den Gurten bleibt die erste der Formeln 78 gültig. Die grösste spezifische Biegungsspannung in den Gitterstäben tritt in der Regel an der Kreuzungsstelle, nur bei kleinem Werthe von $\frac{a}{h}$ und grossem Werthe von $\frac{I d}{a I_2}$ in den Zugstäben am unteren, in den Druckstäben am oberen Ende ein. Dementsprechend wird, wenn wir die spezifische Biegungsspannung am Kreuzungspunkte mit N_2 , am Stabende mit N_2' bezeichnen,

$$82. \quad \begin{cases} N_2 = 8 \frac{c}{d} \frac{a}{h} K. \\ N_2' = \frac{4c}{d} \frac{I d}{I d + I_2 a} \frac{h}{a} K. \end{cases}$$

Die spezifische Biegungsspannung am Kreuzungspunkte der Diagonalen ist demnach von dem gegenseitigen Verhältnisse der Stücke der Gurte und Gitterstäbe unabhängig. Für einzelne Verhältnisse ergeben sich die folgenden Werthe:

$\frac{I d}{a I_2}$	$\frac{a}{h} = 0,75$			$\frac{a}{h} = 1,00$			$\frac{a}{h} = 1,25$		
	N	N_2	N_2'	N	N_2	N_2'	N	N_2	N_2'
0	12,7	4,8	0	8,0	5,7	0	5,8	6,3	0
1	7,3	4,8	2,1	5,0	5,7	1,4	3,9	6,3	1,0
10	3,0	4,8	3,9	2,5	5,7	2,6	2,3	6,3	1,8
∞	2,0	4,8	4,3	2,0	5,7	2,8	2,0	6,3	2,0
	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$	$\cdot \frac{c_2}{h} K$

Fig. 211.



Hiernach ist die spezifische Spannung an den Gurten dieselbe, wie bei nicht verbundenen Stäben, während sie in den Gitterstäben bei kleinem Werthe von $\frac{I}{a} \frac{d}{I_2}$, also an den Enden der Träger, grösser ist. Einen sehr wesentlichen Einfluss übt indess die Verbindung der Gitterstäbe nicht aus.

b. Die Gitterstäbe sind starr mit einander verbunden. Behalten $\tau_4, \tau_5, \tau_4', \tau_5'$ dieselbe Bedeutung, wie im vorigen Falle, so ist zunächst, da sich die Winkel CGE und AGB nicht ändern, $\nu_4 = \nu_5, \nu_4' = \nu_5'$. Da die Aenderung der Winkel CGA und EGB bezüglich $= -2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$ und $+2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$ ist, so wird

$$\tau_4' = \tau_4 + 2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}.$$

Die beiden ersten der Gleichungen 80 behalten ihre Giltigkeit, wenn man darin $\tau_5 = \tau_4$ setzt. An Stelle der beiden letzten der Gleichungen 80 kommt die einzige Momentengleichung: $\frac{4I_2}{d} \left[\tau + \tau_1 + 4\tau_4 + 2 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) \right] + \frac{4I_3}{d} \left[\tau + \tau_1 + 4\tau_4 + 2 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right) \right] = 0$, d. i.

$$83. \quad \tau + \tau_1 + 4\tau_4 = -2 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right).$$

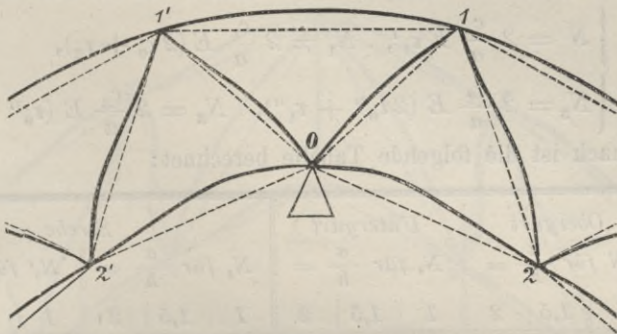
Da auch diese Gleichung, weil $\tau_4 = \tau_5$ ist, mit jeder der beiden letzten der Gleichungen 80 identisch ist, so müssen sich im vorliegenden Falle genau dieselben Ausschlagwinkel ergeben, wie im vorigen. Sonach bleiben auch die spezifischen Biegungsspannungen ganz dieselben.

Das Fachwerk lässt sich näherungsweise schwieriger behandeln, weil hier die Längenänderung der den idealen Vertikalen des Netzwerkes entsprechenden idealen Diagonalen sich nicht gleich Null und auch nicht einmal konstant ergeben.

§. 122. **Kontinuierliche Träger.** An den Mittelstützen der kontinuierlichen Träger geht bei jeder Schaar der Gitterstäbe der Zug in Druck über; dies hat eine plötzliche Aenderung der Lage der Tangente der beiden Gurte und in Folge dessen eine Vergrösserung der Krümmung, also eine Erhöhung der Beanspruchung der Gurte zur Folge. In einem gegebenen Falle ist die Behandlung nach dem Mitgetheilten zu führen; wir wollen aber hier unter der Voraussetzung von Parallelträgern mit eintheiligem Gitterwerke und einer in allen Stäben gleichen relativen Längenänderung noch Näherungsregeln entwickeln. Wir bezeichnen hierbei das Trägheitsmoment des Querschnittes des Ober- und Untergurtes mit I, I_1 , das der gezogenen und gedrückten Gitterstäbe mit I_2, I_3 , die Längen der Gurtstücke mit a , die Längen der geneigten Gitterstäbe mit d , die Trägerhöhe mit h , die konstante spezifische Spannung mit K .

1. Netzwerk. Die Aenderungen der Winkel der Dreiecke ergeben sich bezüglich zu $\pm \frac{K}{E} \frac{a}{h}$, $\pm \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right)$, $\pm \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right)$, die Aenderung des Winkels 1 0 1' (Fig. 212) zu $+ 2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$. Wenn man nun

Fig. 212.



die Ausschlagwinkel von den Knotenpunkten 2 und 3 an für entsprechende Stabenden als konstant und die Deformation in Beziehung auf die durch die Stütze gehende Vertikale symmetrisch annimmt und man noch die Ausschlagwinkel der Stäbe 13, 20 und 34 bei 1, 2, 3 mit τ_1 , τ_2 , τ_3 bezeichnet, so wird

$$84. \begin{cases} \tau_1 \left(3 \frac{I}{a} + 2 \frac{I_2}{d} + 2 \frac{I_3}{d} \right) + \tau_2 \frac{I_2}{d} + \tau_3 \frac{I}{a} \\ \quad + \frac{K}{E} \left[\frac{I}{a} \left(2 \frac{h}{a} + 4,5 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_2}{d} \left(6 \frac{h}{a} + 0,5 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_3}{d} \left(4 \frac{h}{a} + 2 \frac{a}{h} \right) \right] = 0, \\ \tau_1 \frac{I_2}{d} + \tau_2 \left(5 \frac{I_1}{a} + 2 \frac{I_2}{d} + 2 \frac{I_3}{d} \right) + \tau_3 \frac{I_3}{d} \\ \quad + \frac{K}{E} \left[-\frac{I_1}{a} \left(2 \frac{h}{a} + 5,5 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_2}{d} \left(6 \frac{h}{a} - 0,5 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_3}{d} \left(6 \frac{h}{a} - 1,5 \frac{a}{h} \right) \right] = 0, \\ \tau_1 \frac{I}{a} + \tau_2 \left(\frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{d} \right) + \tau_3 \left(5 \frac{I}{a} + 2 \frac{I_2}{d} + 2 \frac{I_3}{d} \right) \\ \quad + \frac{K}{E} \left[6 \frac{I}{a} \frac{a}{h} + \frac{I_2}{d} \left(6 \frac{h}{a} + 0,5 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_3}{d} \left(6 \frac{h}{a} + 1,5 \frac{a}{h} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Die Ausschlagwinkel τ_0' , τ_0'' des Stabes 02 und 01 bei 0 ergeben sich gleich der Aenderung der Winkel 2 0 2', 1 0 1', nämlich

$$85. \quad \tau_0' = -\frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + 1,5 \frac{a}{h} \right), \quad \tau_0'' = -\frac{K}{E} \frac{h}{a}.$$

Bezeichnen wir noch den Ausschlagwinkel der Stäbe 11 und 10 bei 1 mit τ_1' , τ_1'' , so ist

$$86. \quad \tau_1' = \tau_1 + \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + 2,5 \frac{a}{h} \right), \quad \tau_1'' = \tau_1 + \frac{K}{E} \left(2 \frac{h}{a} + 1,5 \frac{a}{h} \right).$$

In Fig. 212 sind die Verhältnisse $\frac{a}{h} = 1,5$ und $\frac{Id}{I_1 a} = 2$ vorausgesetzt.

Sind nun N, N_1, N_3, N_3' die spezifischen Spannungen des Obergurtes, Untergurtes und der Strebe 01 bezüglich bei 1, 0, 0 und 1, c_1, c_3 die bezüglichen Abstände der Randfasern von der Schweraxe, so ist

$$38. \quad \begin{cases} N = 2 \frac{c}{a} E \tau_1', & N_1 = 2 \frac{c_1}{a} E (2\tau_0 + \tau_2), \\ N_3 = 2 \frac{c_2}{a} E (2\tau_0'' + \tau_1''), & N_3' = 2 \frac{c_3}{a} E (\tau_0'' + 2\tau_1''). \end{cases}$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{I}{a} \frac{a_2}{I_2}$	Obergurt			Untergurt			Strebe					
	N für $\frac{a}{h} =$			N_1 für $\frac{a}{h} =$			N_3 für $\frac{a}{h} =$			N_3' für $\frac{a}{h} =$		
	1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2
0	3,3	3,3	3,3	16,7	9,4	7,1	3,1	0,8	1,1	0,6	0,7	0,8
1	4,1	3,5	3,3	15,6	8,2	6,3	2,2	3,2	3,9	2,4	1,2	0,7
2	4,4	3,6	3,3	12,7	7,8	6,1	1,8	3,0	3,9	3,2	1,4	0,8
∞	5,1	4,0	3,6	11,0	7,0	5,6	0,9	1,4	2,7	6,3	3,1	1,2
	$\cdot \frac{c}{h} K$			$\cdot \frac{c_1}{h} K$			$\cdot \frac{c_3}{h} K$			$\cdot \frac{c_3}{h} K$		

Die Aenderung des Winkels $202'$ ist $\frac{K}{E} \left(4 \frac{h}{a} + 6 \frac{a}{h} \right)$, die Aenderung des Gurtwinkels an einem anderen Knotenpunkte ist $2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$, so dass die Winkeländerung an der Stütze 3,5 bis 5,0 mal so gross ist, als an einem anderen Knotenpunkte. Hiernach kann die Biegungsspannung, namentlich im Untergurte sehr gross werden; sie kann hier anderen Stellen des Trägers gegenüber bis über das Doppelte steigen.

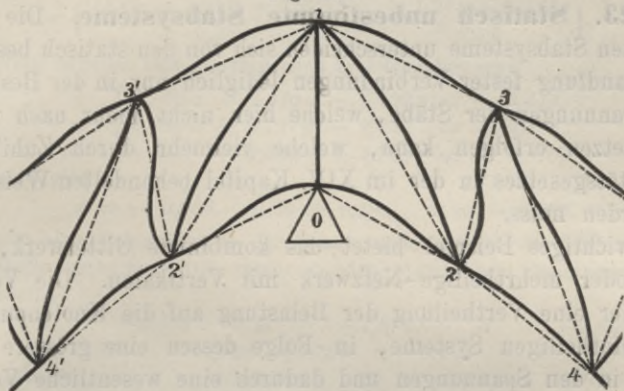
2. Fachwerk. Die Aenderungen der Winkel ergeben sich hier zu $\pm 2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$, $\pm 2 \frac{K}{E} \frac{d^2}{ah}$ und 0. Wenn wir die Ausschlagwinkel entsprechender Stabenden von den Knotenpunkten 2 und 3 an (Fig. 213) als konstant annehmen und wenn wir die Ausschlagwinkel der Stäbe 35 und 02 bei 3 und 2 mit τ_3, τ_2 bezeichnen, so ergeben sich die Gleichungen

$$88. \quad \begin{cases} \tau_3 \left(5 \frac{I}{a} + 2 \frac{I_2}{d} + 2 \frac{I_3}{h} \right) + \tau_2 \left(\frac{I_2}{d} + \frac{I_3}{h} \right) \\ \quad + \frac{K}{E} \left[\frac{I}{a} \left(-2 \frac{h}{a} + 4 \frac{a}{h} \right) + 6 \frac{I_2}{d} \frac{h}{a} + \frac{I_3}{h} \left(6 \frac{h}{a} + 4 \frac{a}{h} \right) \right] = 0, \\ \tau_3 \frac{I_3}{d} + \tau_2 \left(5 \frac{I_1}{d} + 2 \frac{I_2}{d} + 2 \frac{I_3}{h} \right) \\ \quad + \frac{K}{E} \left[-\frac{I}{a} \left(2 \frac{h}{a} + 6 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_2}{d} \left(4 \frac{h}{a} - 2 \frac{a}{h} \right) + \frac{I_3}{h} \left(6 \frac{h}{a} + 2 \frac{a}{h} \right) \right] = 0, \end{cases}$$

Bezeichnen wir noch die Ausschlagwinkel der Stäbe 13 und 02 bei 1 und 0 bezüglich mit τ_1 und τ_0' , so ist τ_1 gleich der Aenderung des Winkels 013, τ_0' gleich der Aenderung des Winkels 102, d. i.

$$89. \tau_1 = \tau_0' = -2 \frac{K}{E} \frac{d^2}{a h}.$$

Fig. 213.



Ist noch τ_3' der Ausschlagwinkel des Stabes 13 bei 3, τ_1'' , τ_2'' der Ausschlagwinkel des Stabes 12 bei 1 und 2, so wird

$$90. \tau_3' = \tau_3 + 2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau_1'' = -2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}, \quad \tau_2'' = \tau_2 + 2 \frac{K}{E} \frac{h}{a}.$$

Fig. 213 entspricht den Verhältnissen $\frac{a}{h} = 1$ und $\frac{I d}{I_2 a} = 2$.

Sind nun N , N_1 , N_2 , N_2' die Biegungsspannungen des Ober- und Untergurtes und der Diagonale 12 bezüglich bei 1, 0, 1, 2, so wird

$$91. N = 2 \frac{c}{a} E (2\tau_1 + \tau_3'), \quad N_1 = 2 \frac{c_1}{a} E (2\tau_0' + \tau_2),$$

$$N_2 = 2 \frac{c_2}{d} E (2\tau_1'' + \tau_2''), \quad N_2' = 2 \frac{c_2}{d} E (\tau_1'' + 2\tau_2'').$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{I d}{a I_2}$	Obergurt			Untergurt			Diagonale					
	N für $\frac{a}{h} =$			N_1 für $\frac{a}{h} =$			N_2 für $\frac{a}{h} =$			N_2' für $\frac{a}{h} =$		
	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25	0,75	1	1,25
0	24,5	15,1	10,8	28,8	19,4	15,1	4,3	5,3	5,8	1,7	2,0	2,1
1	23,6	16,0	12,5	23,5	16,0	12,6	1,2	2,8	3,8	4,5	2,8	1,9
2	22,0	15,0	11,8	21,8	14,9	11,8	0,2	2,1	3,2	6,5	4,4	3,0
∞	18,4	12,8	10,2	18,4	12,8	10,2	1,7	0,6	2,8	6,3	4,5	3,4
	$\cdot \frac{c}{h} K$			$\cdot \frac{c_1}{h} K$			$\cdot \frac{c_2}{h} K$			$\cdot \frac{c_2}{h} K$		

Hier haben Ober- und Untergurt nahezu gleich grosse Biegungsspannungen; dieselben sind wesentlich grösser, als im übrigen Theile des Trägers.

Die Aenderung des Winkels $313'$ und $212'$ ist $4 \frac{K}{E} \left(\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \right)$, die der Gurtwinkel an den übrigen Knotenpunkten ist $= 2 \frac{K}{E} \frac{a}{h}$; die Aenderung des Winkels an der Stütze wird daher 3,6 bis 5,5mal so gross, als an den übrigen Knotenpunkten.

§. 123. Statisch unbestimmte Stabsysteme. Die statisch unbestimmten Stabsysteme unterscheiden sich von den statisch bestimmten in der Behandlung fester Verbindungen lediglich nur in der Bestimmung der Axialspannungen der Stäbe, welche hier nicht mehr nach rein statischen Gesetzen erfolgen kann, welche vielmehr durch Zuhilfenahme des Elastizitätsgesetzes in der im XIV. Kapitel behandelten Weise durchgeführt werden muss.

Ein wichtiges Beispiel bietet das kombinirte Gitterwerk, speziell das zwei- oder mehrtheilige Netzwerk mit Vertikalen. Die Vertikalen bewirken hier eine Vertheilung der Belastung auf die Knotenpunkte der einzelnen eintheiligen Systeme, in Folge dessen eine grössere Gleichmässigkeit in den Spannungen und dadurch eine wesentliche Verminderung der Biegungsspannungen.

Beispiel. Wir wählen hier das bereits in §. 119 behandelte Beispiel und fügen nur noch Vertikalen von $0,28 \square^{dm}$ Querschnittsfläche hinzu.

1. Bestimmung der Primärspannungen. Wir nehmen wiederum nur die Knotenpunkte 3, 7 und 9 je mit der Last 1 belastet an. Wir denken uns zunächst die Vertikalen mit Ausnahme der Endständer beseitigt und bringen dafür in den Knotenpunkten die entsprechenden Kräfte an, welche wir für die Vertikalen 23 und 79 mit x , für die Vertikalen 45 und 78 mit y und für die Vertikale 67 mit z bezeichnen. Durch Zerlegung in zwei eintheilige Systeme, die hier streng zulässig ist, ergeben sich die folgenden Spannungen:

Theil	Nr.	Spannung in Folge der				Spannung
		Belastung	Kräfte x	Kräfte y	Kraft z	
Obergurt	1 3	0	+ 0,750 x	- 0,750 y	+ 0,375 z	- 0,281
	3 5	- 1,500	0	+ 0,750 y	- 0,375 z	- 1,257
	5 7	- 1,500	0	0	+ 0,375 z	- 1,605
Untergurt	0 2	+ 1,125	+ 0,750 x	- 0,750 y	+ 0,375 z	+ 0,844
	2 4	+ 1,125	0	+ 0,750 y	- 0,375 z	+ 1,368
	4 6	+ 1,875	0	0	+ 0,375 z	+ 1,770
Rechts fallende Stäbe	1 2	0	- 1,250 x	+ 1,250 y	- 0,625 z	+ 0,467
	3 4	+ 0,625	0	- 1,250 y	+ 0,625 z	+ 0,219
	5 6	0	0	0	- 0,625 z	+ 0,174
Links fallende Stäbe	0 3	- 1,875	- 1,250 x	+ 1,250 y	- 0,625 z	- 1,408
	2 5	0	0	- 1,250 y	+ 0,625 z	- 0,406
	4 7	- 0,625	0	0	- 0,625 z	- 0,451
Vertikalen	0 1	0	+ 1,000 x	- 1,060 y	+ 0,500 z	- 0,374
	2 3	0	+ 1,000 x	0	0	- 0,050
	4 5	0	0	+ 1,060 y	0	+ 0,185
	5 6	0	0	0	+ 1,000 z	- 0,279

Zur Bestimmung von x, y, z wollen wir hier die Gleichung 8 (S. 244) anwenden. Es wird hier $\sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,36$, $\cos^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,64$. Die Querschnittsflächen gibt die Tabelle auf Seite 325. Hiernach würde beispielsweise für das Rechteck 2 3 5 4:

$$0,36 \left(\frac{-1,5 + 0,75y - 0,375z}{0,8} + \frac{1,125 + 0,75y - 0,375z}{0,8} \right) + 0,64 \left(\frac{x}{0,28} + \frac{y}{0,28} \right) \\ = \left(\frac{0,625 - 1,25y + 0,625z}{0,28} + \frac{-1,25y + 0,625z}{0,96} \right).$$

In dieser Weise ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$a. \begin{cases} 8,504x - 6,218y + 3,109z = -2,444, \\ 2,286x + 8,727y - 3,221z = +2,454, \\ \quad \quad \quad + 2,285y + 4,789z = -0,916. \end{cases}$$

Die Auflösung gibt

$$x = -0,050, \quad y = +0,185, \quad z = -0,279.$$

Die hiernach berechneten Werthe der Spannungen sind in der letzten Rubrik der vorigen Tabelle enthalten. Die entsprechenden spezifischen Spannungen gibt das folgende Schema:

$$q. \frac{S}{F} = \begin{cases} \mathbf{1} & -0,468 & \mathbf{3} & -1,571 & \mathbf{5} & -1,605 & \mathbf{7} \\ & +1,297 & & -1,328 & +0,780 & -0,423 & +0,405 & -0,564 \\ -0,390 & & & -0,180 & & +0,661 & & -0,996 \\ & -1,328 & & +1,297 & -0,433 & +0,780 & -0,564 & +0,405 \\ \mathbf{0} & +1,407 & \mathbf{2} & +1,710 & \mathbf{4} & +1,770 & \mathbf{6} \end{cases}$$

2. Bestimmung der Ausschlagwinkel. Die in bekannter Weise bestimmten Aenderungen der Winkel zwischen den Stabsehnern gibt das folgende Schema:

$$c. \nu = \begin{cases} \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} & & \mathbf{7} \\ & -1,968 & +1,251 & & -0,159 & +0,324 & & -1,868 & +1,633 \\ +0,083 & & +2,051 & +0,698 & & +1,600 & +1,024 & & +1,751 \\ +0,645 & & -1,324 & -0,861 & & -1,763 & -0,781 & & -1,508 \\ & +1,531 & -2,249 & & +1,445 & -1,280 & & -0,576 & +0,341 \\ \mathbf{0} & & \mathbf{2} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} \end{cases}$$

Die hieraus folgenden Ausschlagwinkel gibt das folgende Schema:

$$d. \tau = \begin{cases} \mathbf{1} & \tau_1 & \tau_3 - 3,841 & \mathbf{3} & \tau_3 & \tau_4 - 1,080 & \mathbf{5} & \tau_5 & \tau_7 - 6,768 & \mathbf{7} & \tau_7 \\ & \tau_1 + 1,968 & \tau_3 - 2,590 & \tau_3 + 0,159 & \tau_5 - 0,756 & \tau_5 + 1,868 & \tau_7 - 5,135 & \tau_7 - 1,633 \\ \tau_1 + 1,885 & & \tau_3 - 0,539 & & \tau_5 + 0,844 & & \tau_7 - 3,384 \\ & \tau_0 & \tau_2 + 3,573 & & \tau_4 + 3,043 & & \tau_6 + 1,167 \\ \tau_0 - 0,645 & \tau_2 + 2,249 & \tau_2 + 4,434 & \tau_1 + 1,280 & \tau_1 + 3,824 & \tau_6 - 0,341 & \tau_6 + 2,675 \\ \mathbf{0} & \tau_0 - 2,176 & \tau_2 & \mathbf{2} & \tau_2 + 2,989 & \tau_4 & \mathbf{4} & \tau_4 + 4,400 & \tau_6 & \mathbf{6} & \tau_6 + 2,334 \end{cases}$$

Die hiernach aufzustellenden Momentengleichungen sind:

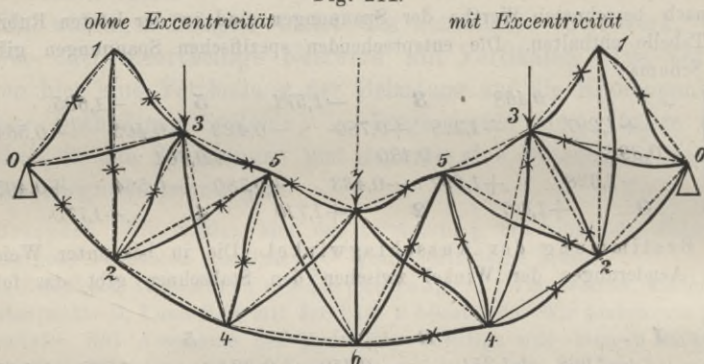
$$e. \begin{cases} 478\tau_0 + 48\tau_1 + 124\tau_2 + 67\tau_3 & = +709 + 1604 \\ 48\tau_0 + 456\tau_1 + 56\tau_2 + 124\tau_3 & = -51 + 534 \\ 124\tau_0 + 56\tau_1 + 802\tau_2 + 12\tau_3 + 164\tau_4 + 45\tau_5 & = -1517 - 1604 \\ 67\tau_0 + 124\tau_1 + 12\tau_2 + 782\tau_3 + 24\tau_4 + 164\tau_5 & = +1452 - 534 \\ & + 164\tau_2 + 24\tau_3 + 860\tau_4 + 12\tau_5 + 200\tau_6 + 30\tau_7 = -2474 - 2478 \\ & 45\tau_2 + 164\tau_3 + 12\tau_4 + 904\tau_5 + 11\tau_6 + 200\tau_7 = +1482 - 2247 \end{cases}$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist wiederum das der Excentricität entsprechende. Der Symmetrie wegen ist $\tau_6 = -\tau_6 - 2,334$ und $\tau_7 - 6,768 = -\tau_7$, woraus zunächst $\tau_6 = -1,167$, $\tau_7 = +3,384$ folgt. Durch Auflösung vorstehender Gleichungen erhält man

$$f. \begin{cases} r_0 = + 1,732 + 3,854 = + 5,586 \\ r_1 = - 0,563 + 1,188 = + 0,625 \\ r_2 = - 1,684 - 2,045 = - 3,729 \\ r_3 = + 1,751 - 0,625 = + 1,126 \\ r_4 = - 2,460 - 2,442 = - 4,902 \\ r_5 = + 0,703 - 2,239 = - 1,536 \\ r_6 = - 1,267 \\ r_7 = + 3,384. \end{cases}$$

Die entsprechende Deformation ist in Fig. 214 dargestellt und zwar links für centrische, rechts für excentrische Knoten und für $\frac{K}{E} = 0,10$. Der Vergleich mit der entsprechenden Fig. 207, welche für $\frac{K}{E} = 0,03$ konstruiert ist, zeigt hier wesentlich kleinere Verbiegungen.

Fig. 214.



Die spezifischen Primärspannungen ergeben sich für die ungünstigste Belastungsweise in den Gurten 1,56 3,05 3,19, in den rechts fallenden Diagonalen 4,33 3,72 1,45, in den links fallenden Diagonalen 1,47 1,09 0,78 und in den Vertikalen 1,82 1,80 1,80 1,80. Die spezifischen Biegungsspannungen ergeben sich in Prozenten dieser spezifischen Primärspannungen:

		Centrische Knoten						Excentrische Knoten							
g.	{	1	15	3	2	5	3	7	1	11	3	10	5	19	7
		3	3	2	14	5	7	3	14	5	10	4	14		
		11		8		5		0	30		2		7		0
		3	3	14	2	7	5	14	3	10	5	14	4		
		0	12	2	13	4	1	6	0	9	2	17	4	7	6

Durchschnittlich beträgt die Erhöhung der Beanspruchung durch die starren Verbindungen bei centrischen Knoten 5, bei excentrischen Knoten 13 Prozent, also bedeutend weniger, als nach §. 119 bei Weglassung der Vertikalen.

§. 124. Belastung der Stäbe. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Lasten in den Knotenpunkten wirken, dass also die einzelnen Stäbe selbst nicht belastet sind. Die aufgestellte Theorie lässt sich indess ohne Weiteres auch auf den Fall ausdehnen, dass die Stäbe belastet sind; der einzige Unterschied besteht darin, dass an Stelle der Formeln 49, Seite 303 die Formeln

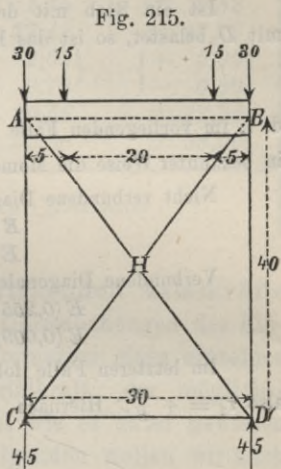
$$92. m' = m_0' + \frac{2EI}{a} (2\tau' + \tau''), \quad m'' = m_0'' + \frac{2EI}{a} (2\tau'' + \tau')$$

zu setzen sind und hierin bedeuten m_0' , m_0'' diejenigen Momente, welche an den Enden entstehen, wenn der Stab an den Enden ohne Ausschlagwinkel eingespannt ist. Auf die Bestimmung dieser Momente wollen wir hier nicht eingehen (siehe beispielsweise Theorie der Brücken, I. Heft, §. 34 und 35; Lehre von der Elastizität und Festigkeit, XII. Kapitel). Wir bemerken nur, dass die Bedingungen zur Bestimmung dieser Momente sind:

$$\int_0^a m dx = 0, \quad \int_0^a m x dx = 0,$$

wenn m das Moment an einem beliebigen Querschnitte im Abstände x von einem beliebigen Punkte der Axe bedeutet; bei symmetrischer Belastung ist die zweite Bedingung von selbst erfüllt.

Beispiel. Wir betrachten eine Quer Verbindung eines Gitterträgers (Fig. 215), bestehend aus dem Querträger AB , welcher in zwei Punkten mit 15 Tonnen belastet ist, den Vertikalen AC , BD , der Horizontalen CD und den Diagonalen AD , BC . In A und B mögen je 30 Tonnen nach abwärts, in C und D je 45 Ton. nach aufwärts wirken. Die folgende Tabelle gibt die Dimensionen:



Theil	Länge l	Querschnittsfläche F	Trägheitsmoment I	Abstand der Randfaser c	$\frac{2I}{a}$	$\frac{2c}{a}$	Spannung S	$\frac{S}{F}$
Querträger	30	1,44	3,500	2,50	0,2333	0,167	+ 4,83	+ 3,35
Horizontale	30	0,22	0,012	{0,27} {0,10}	0,0008	{0,018} {0,007}	+ 4,83	+ 21,94
Vertikale	40	0,60	0,180	1,05	0,0090	0,053	- 38,56	- 64,27
Diagonale	50	0,22	0,023	0,75	0,0009	0,030	- 8,05	- 36,58
	Decim.	<input type="checkbox"/> Dec.	Decimeter				Ton.	Ton. pro <input type="checkbox"/> Dec.

Bezeichnen wir die Spannung einer Diagonale mit x , den Winkel zwischen den Diagonalen und Vertikalen mit α , so ist die Spannung des Querträgers und der Horizontalen $= -x \sin \alpha = -0,6x$, die einer Vertikalen $= -x \cos \alpha - 45 = -0,8x - 45$. Die Gleichung 8 (Seite 244) gibt: $-\left(\frac{0,6x}{1,44} + \frac{0,6x}{0,22}\right) 0,36 - \frac{90 + 1,6x}{0,60} 0,64 = \frac{2x}{0,22}$ oder $11,93x = -96$, $x = -8,05$. Die hiernach bestimmten Spannungen S der einzelnen Theile, sowie die spezifischen Primärspannungen $\frac{S}{F}$ sind in der vorigen Tabelle mit enthalten.

Sind hiernach in bekannter Weise die Aenderungen der Winkel bestimmt, so ergeben sich unter zwei Voraussetzungen, nämlich für nicht verbundene und starr verbundene Diagonalen die folgenden Ausschlagwinkel (für $E = 1$):

a. Nicht verbundene Diagonalen.

b. Verbundene Diagonalen.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \tau & -\tau & \mathbf{B} \\
 & \tau + 37 & -\tau - 37 & \\
 \tau - 7 & & & \tau + 7 \\
 & \mathbf{H} & & \\
 \tau_1 - 7 & & -\tau_1 + 7 & \\
 & \tau_1 - 37 & -\tau_1 + 37 & \\
 \mathbf{C} & \tau_1 & -\tau_1 & \mathbf{D}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \tau & -\tau & \mathbf{B} \\
 & \tau + 30 & -\tau - 30 & \\
 \tau - 7 & & & -\tau + 7 \\
 & \tau_2 & \tau_2 - 60 & \\
 & \tau_2 - 74 & \tau_2 + 14 & \\
 \tau_1 - 7 & & & -\tau_1 + 7 \\
 & \tau_1 - 44 & -\tau_1 + 44 & \\
 \mathbf{C} & \tau_1 & -\tau_1 & \mathbf{D}
 \end{array}$$

Ist ein Stab mit der Länge l in den gleichen Abständen a von den Enden mit D belastet, so ist das Endmoment m_0 bei horizontaler Einspannung

$$m_0 = -Da \left(1 - \frac{a}{l}\right),$$

d. i. im vorliegenden Falle $= -15 \cdot 5 \left(1 - \frac{5}{30}\right) = +62,5$. Hiernach ergeben sich in bekannter Weise die Momentengleichungen:

Nicht verbundene Diagonalen:

$$E(0,243\tau + 0,008\tau_1) = +62,59,$$

$$E(0,008\tau + 0,021\tau_1) = -0,29.$$

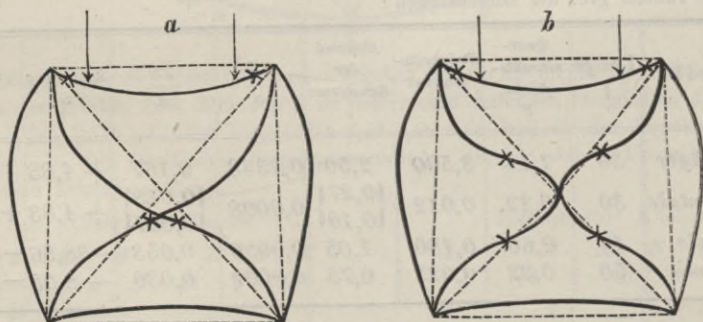
Verbundene Diagonalen:

$$E(0,255\tau + 0,009\tau_1 + 0,0018\tau_2) = +60,47,$$

$$E(0,009\tau + 0,022\tau_1 + 0,0019\tau_2) = -0,37.$$

Im letzteren Falle folgt ausserdem aus der Symmetrie $E\tau_2 = -E\tau_2 + 60$, also $\tau_2 = +\frac{30}{E}$. Hiernach ergibt sich bei nicht verbundenen Stäben $E\tau = +261$

Fig. 216.



$E\tau_1 = -113$, bei verbundenen Stäben $E\tau = +233$, $E\tau_1 = -114$, $E\tau_2 = +30$. Die entsprechenden Ausschlagwinkel (für $E = 1$) gibt das folgende Schema:

a. Nicht verbundene Diagonalen.

b. Verbundene Diagonalen.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & +261 & -261 & \mathbf{B} \\
 & +298 & -298 & \\
 +254 & & & -254 \\
 & \mathbf{H} & & \\
 -120 & & +120 & \\
 & -150 & +150 & \\
 \mathbf{C} & -113 & +113 & \mathbf{D}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & +233 & -233 & \mathbf{B} \\
 & +260 & -260 & \\
 +226 & & & -226 \\
 & +30 & -30 & \\
 & \mathbf{H} & & \\
 & -44 & +44 & \\
 -121 & & & +121 \\
 & -158 & +158 & \\
 \mathbf{C} & -114 & +114 & \mathbf{D}
 \end{array}$$

Die entsprechende Deformation ist in Fig. 216 dargestellt. Die in bekannter Weise berechneten maximalen spezifischen Biegungsspannungen gibt die folgende Tabelle; zum Vergleiche sind die spezifischen Primärspannungen nochmals mit angegeben:

T h e i l	Spezifische Primärspannung	Spezifische Biegungsspannung	
		a	b
Querträger, Ende	+ 3,35	± 1,15	± 5,82
" Mitte	+ 3,35	∓ 52,42	∓ 47,76
Horizontale	+ 21,94	{ + 2,03 } { - 0,79 }	{ + 2,05 } { - 0,80 }
Vertikalen	- 64,27	± 20,56	± 17,54
Diagonalen	- 36,58	± 22,38	± 33,00

Tonnen pro □Decimeter

§. 125. Einfluss der in den Stäben wirkenden Axialkräfte auf deren Deformation. Wir haben in den Untersuchungen des Einflusses starrer Verbindungen hinsichtlich der Deformation eines einzelnen Stabes den Einfluss der im Stabe wirkenden Axialkraft, der möglichst weit gehenden Einfachheit halber, vernachlässigt, wie es unter gewissen Voraussetzungen auch zulässig erscheint. Im Folgenden wollen wir auch noch diesen Einfluss näher untersuchen.

Der Stab sei an den Enden A und B (Fig. 187, S. 303) so eingespannt, dass die Tangenten in A und B mit der Geraden AB die Winkel τ_1 und τ_2 bilden. An den Enden A und B mögen die Momente m_1 und m_2 wirken. Wirkt im Stabe in der Richtung von AB die Axialkraft P , so ist bei der Länge l des Stabes für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A das Moment m :

$$\begin{aligned} m &= m_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + m_2 \frac{x}{l} \pm Py, \\ &= m_1 - (m_1 - m_2) \frac{x}{l} \pm Py, \end{aligned}$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem P einen Zug oder Druck bedeutet. Nun aber ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{EI},$$

daher, wenn man $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ setzt,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[m_1 - (m_1 - m_2) \frac{x}{l} \right] \pm k^2 y.$$

Die noch zweimalige Differenziation gibt $\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm k^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$, oder wenn man

$$93. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = z, \quad m = EI z$$

setzt,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \pm k^2 z.$$

Die Integration gibt

$$\begin{cases} \text{Zug:} & z = Ak^2 e^{+kx} + Bk^2 e^{-kx}, \\ \text{Druck:} & z = Ak^2 \sin kx + Bk^2 \cos kx, \end{cases}$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen, A und B Konstante bezeichnen. Setzt man hierin $z = \frac{1}{EI} \left[m_1 + (m_1 - m_2) \frac{x}{l} \right] \pm k^2 y$ und reduziert auf y , so erhält man

$$94. \quad \begin{cases} \text{Zug:} & y = Ae^{+kx} + Be^{-kx} - \frac{1}{P} \left[m_1 - (m_1 - m_2) \frac{x}{l} \right], \\ \text{Druck:} & y = -A \sin kx - B \cos kx + \frac{1}{P} \left[m_1 - (m_1 - m_2) \frac{x}{l} \right]. \end{cases}$$

Die einmalige Differenziation gibt, wenn man $\frac{dy}{dx} = \tau$ setzt,

$$95. \quad \begin{cases} \text{Zug:} & \tau = Ak e^{kx} - Bk e^{-kx} + \frac{m_1 - m_2}{Pl}, \\ \text{Druck:} & \tau = -Ak \cos kx + Bk \sin kx - \frac{m_1 - m_2}{Pl}. \end{cases}$$

Nun aber sind an den Stabenden die folgenden vier Bedingungen zu erfüllen: Für $x=0$ ist $y=0$ und $\tau = \tau_1$; für $x=l$ ist $y=0$ und $\tau = \tau_2$. Durch diese vier Bedingungen sind die Konstanten A , B , m_1 und m_2 bestimmt. Es ergibt sich, entsprechend der Formel 49, Seite 303:

$$96. \quad m_1 = + \frac{2EI}{l} (k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2), \quad m_2 = - \frac{2EI}{l} (k_2 \tau_1 + k_1 \tau_2),$$

wenn die Koeffizienten k_1 und k_2 die folgende Bedeutung haben:

Für Zug:

$$97. \quad \begin{cases} k_1 = \frac{n(e^n + e^{-n}) - (e^n - e^{-n})}{4 - 2(e^n + e^{-n}) + n(e^n - e^{-n})} n = \frac{1}{4} \left(\frac{n}{n\chi - 2} + \chi \right) n, \\ k_2 = - \frac{2n - (e^n - e^{-n})}{4 - 2(e^n + e^{-n}) + n(e^n - e^{-n})} n = \frac{1}{4} \left(\frac{n}{n\chi - 2} + \chi \right) n. \end{cases}$$

Für Druck:

$$98. \quad \begin{cases} k_1 = - \frac{1}{2} \frac{n \cos n - \sin n}{2(1 - \cos n) - n \sin n} n = \frac{1}{4} \left(\frac{n}{2 - n\chi} + \chi \right) n, \\ k_2 = + \frac{1}{2} \frac{n - \sin n}{2(1 - \cos n) - n \sin n} n = \frac{1}{4} \left(\frac{n}{2 - n\chi} - \chi \right) n. \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung $n = kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$ gesetzt und ausserdem:

$$99. \text{ für Zug: } \chi = \frac{e^{\frac{1}{2}n} + e^{-\frac{1}{2}n}}{e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n}}, \quad \text{für Druck: } \chi = \cot \frac{1}{2} n.$$

Die Reihenverwandlung gibt, wenn das obere und untere Zeichen bezüglich für Zug und Druck gilt

$$100. \begin{cases} k_1 = 2 \pm \frac{1}{15} n^2 - \frac{11}{12600} n^4 \pm \dots, \\ k_2 = 1 \mp \frac{1}{60} n^2 + \frac{13}{25200} n^4 \mp \dots \end{cases}$$

Für sehr grosse n kann man für Zug setzen (etwa $n > 6$):

$$101. \quad k_1 = \frac{n(n-1)}{2(n-2)}, \quad k_2 = \frac{n}{2(n-2)},$$

wonach sich mit wachsendem n die Koeffizienten k_1 und k_2 den Grenzen ∞ und $0,5$ nähern.

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

n	Z u g		D r u c k		n	Z u g	
	k_1	k_2	k_1	k_2		k_1	k_2
0,2	2,00	1,00	2,00	1,00	3,2	2,61	0,87
0,4	2,01	1,00	1,99	1,00	3,4	2,67	0,86
0,6	2,02	0,99	1,98	1,01	3,6	2,75	0,85
0,8	2,04	0,99	1,96	1,01	3,8	2,83	0,84
1,0	2,07	0,98	1,93	1,02	4,0	2,90	0,82
1,2	2,09	0,98	1,90	1,03	4,2	2,97	0,81
1,4	2,13	0,97	1,87	1,03	4,4	3,05	0,80
1,6	2,16	0,96	1,82	1,05	4,6	3,14	0,79
1,8	2,21	0,95	1,77	1,06	4,8	3,22	0,78
2,0	2,25	0,94	1,72	1,08	5,0	3,31	0,77
2,2	2,30	0,93	1,65	1,10	5,2	3,39	0,76
2,4	2,36	0,92	1,58	1,12	5,4	3,48	0,75
2,6	2,42	0,91	1,44	1,14	5,6	3,57	0,74
2,8	2,48	0,90	1,41	1,17	5,8	3,65	0,73
3,0	2,54	0,88	1,31	1,20	6,0	3,74	0,72

In den gezogenen Stäben kann n etwa zwischen 0 und 10 liegen, jedoch geht n selten über 4 hinaus; bei gedrückten Stäben dagegen kann der Sicherheit gegen Einknicken halber n nicht über etwa 2,4 hinausgehen. Bei sehr grossem n wird für gezogene Stäbe nahezu $k_1 = \frac{1}{2} n$ und k_2 gegen k_1 sehr klein, daher

$$102. \quad m_1 = \frac{EI}{l} n \tau_1 = \tau_1 \sqrt{PEI}.$$

Die Berücksichtigung der durch die Axialkraft hervorgerufenen Deformation wird also den Erfolg haben, dass in §. 115 statt der Formeln 49 die Formeln 96 einzuführen oder statt der Koeffizienten 2 und 1 die Koeffizienten k_1 und k_2 einzuführen sind.

Durch die Werthe und Vorzeichen von τ_1 und τ_2 sind auch die Vorzeichen von m_1 und m_2 bestimmt. Liegt die deformirte Axe auf ein und derselben Seite der Sehne (Fig. 217 *a* und Fig. 218 *a* und *b*), so haben τ_1 und τ_2 entgegengesetzte Vorzeichen; ist τ_1 positiv, τ_2 negativ, so wird hierbei m_1 positiv, wenn $-k_2\tau_2 < k_1\tau_1$, m_2 positiv, wenn $-k_1\tau_2 > k_2\tau_1$ ist (Fig. 217 *a* und 218 *a*). Ist dagegen $-k_1\tau_2 < k_2\tau_1$ (Fig. 217 *b* und 218 *b*), so wird m_2 negativ, die deformirte Axe hat also einen Wendepunkt. Liegt die deformirte Axe auf verschiedenen Seiten der Sehne (Fig. 217 *c* und 218 *c*), so haben τ_1 und τ_2 gleiches Vorzeichen; sind τ_1 und τ_2 positiv, so wird m_1 positiv, m_2 negativ, die deformirte Axe hat also auch hier einen Wendepunkt.

Fig. 217.

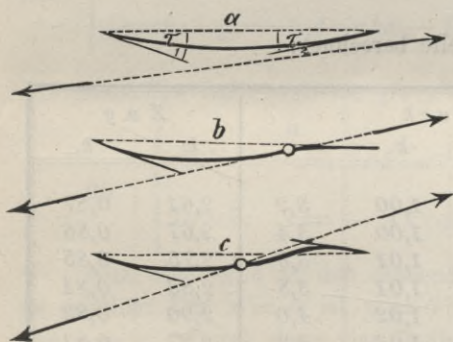
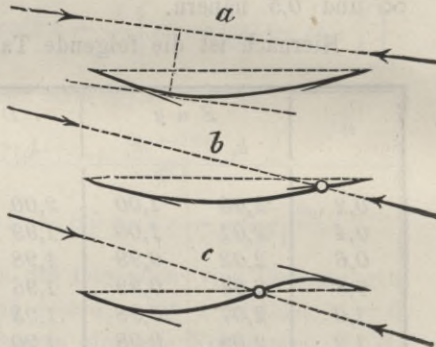


Fig. 218.



Es erübrigt nun noch, das Maximalmoment zu bestimmen.

a. Zug. Da die Fasern auf derjenigen Seite der Axe, auf welcher die auf den Stab wirkende Kraft liegt, mehr verlängert werden, als auf der anderen, so muss die Stabaxe durchgehend der Kraft die konvexe Seite zukehren (Fig. 217). Der Abstand der deformirten Axe von der Kraft muss daher an den Stabenden am grössten werden; m_1 und m_2 sind daher zugleich die Maxima von m .

b. Druck. Hier ist umgekehrt die deformirte Axe der Kraft mit ihrer konkaven Seite zugekehrt. Hier kann daher der grösste Abstand der deformirten Axe von der Kraft zwischen beiden Enden liegen. Nach Formel 93 ist m proportional dem z ; z aber wird zum Maximum oder $\frac{dz}{dx} = 0$ für $Ak^2 \cos kx - Bk^2 \sin kx = 0$ oder

$$103. \quad \tan kx = \frac{A}{B}.$$

Setzt man die Werthe für A und B , welche sich aus den oben genannten vier Bedingungen für die Enden ergeben, ein, so erhält man

$$104. \tan kx = -\frac{(n \sin n - 1 + \cos n) \tau_1 + (1 - \cos n) \tau_2}{(\sin n - n \cos n) \tau_1 + (n - \sin n) \tau_2} = -\frac{m_1 - m_2 - Pl \tau_1}{M_1 n},$$

wodurch x bestimmt ist. Das Maximalmoment selbst bestimmt sich aus den beiden Gleichungen $m = P(A \sin kx + B \cos kx)$ und $A \cos kx = B \sin kx$ zu

$$105. \max m = \frac{PB}{\cos kx} = \frac{m_1}{\cos kx}.$$

Indess ist der Fall möglich, dass der Querschnitt, für welchen m zum Maximum wird, nicht zwischen den beiden Enden des Stabes liegt, also ohne Bedeutung ist. Um dies zu untersuchen, bezeichnen wir den Winkel, welchen die Richtung der Kraft mit der Sehne AB bildet, mit φ . Alsdann ist $\tan \varphi = \varphi = \left(\frac{m_1}{P} - \frac{m_2}{P} \right) \frac{1}{l}$, d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 96

$$106. \varphi = \frac{2}{n^2} (k_1 + k_2) (\tau_1 + \tau_2).$$

Hiernach ergeben sich für einzelne Werthe von n die folgenden Werthe für φ :

$$\begin{array}{ccccccccc} n = & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 & 2,3 & 2,5 & 3 \\ \varphi = & 23,84 & 5,90 & 2,57 & 1,40 & 1,00 & 0,85 & 0,56 \cdot (\tau_1 + \tau_2). \end{array}$$

Es liege nun die deformirte Axe durchgehends auf ein und derselben Seite der Sehne AB und es sei τ_1 positiv, τ_2 negativ und $\tau_1 > -\tau_2$. Alsdann ist φ positiv. Ein Maximum des Momentes, für welches die Tangente an die deformirte Axe der Kraft parallel ist, kann dann nur entstehen, wenn $\tau_1 > \varphi$ ist (Fig. 218 a), also $\tau_1 > \frac{2}{n^2} (k_1 + k_2) [\tau_1 - (-\tau_2)]$ oder

$$107. (-\tau_2) > \left[1 - \frac{n^2}{2(k_1 + k_2)} \right] \tau_1.$$

Dies gibt:

$$\begin{array}{ccccccccc} n = & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 & 2,3 & 2,5 & 3 \\ (-\tau_2) & > 0,96 & 0,83 & 0,61 & 0,29 & 0 & -0,18 & -0,79 \cdot \tau_1. \end{array}$$

Liegt die deformirte Axe auf verschiedenen Seiten der Sehne AB (Fig. 218 c), so wird ein Maximum des Momentes zwischen den Enden nur eintreten können, wenn $\varphi < \tau_1$ oder $\varphi < \tau_2$ ist. Da aber für gedrückte Stäbe $n < 2,4$ ist, so ist nach den obigen Zahlen $\varphi > (\tau_1 + \tau_2)$, also auch $\varphi > \tau_1$ und $\varphi > \tau_2$. Hier wird also ein Maximum des Momentes zwischen den Stabenden nicht eintreten können.

Bei Anwendung dieser genaueren Theorie ergeben sich gegenüber der in den früheren Paragraphen angewendeten Näherungstheorie keine sehr wesentlichen Unterschiede; bei Anwendung in speziellen Fällen ist indess die Anwendung der genaueren Theorie zu empfehlen, da dieselbe ohne grössere Schwierigkeiten durchzuführen ist.

XVI. Kapitel.

Formänderung der Träger.

§. 126. **Allgemeines.** Bei der Theorie statisch unbestimmter Systeme und des Einflusses fester Verbindungen waren wir bereits genöthigt, auf die Formänderung der Träger einzugehen. Hier soll es insbesondere auf die Bestimmung der Verschiebung der Punkte der Träger in Folge der Belastung ankommen, deren Kenntniss hauptsächlich nöthig wird, um eine Grundlage für die Beurtheilung der sogenannten Brückenproben zu gewinnen.

Die Formänderung setzt sich aus zwei Theilen zusammen, der elastischen und der bleibenden Formänderung. Die von dem Nachgeben der Verbindungen, dem Geradestrecken schwach gekrümmter Stäbe u. s. w., überhaupt von Mängeln, welche der Ausführung anhaften, herrührende bleibende Formänderung entzieht sich einer genauen theoretischen Behandlung. Wir wollen daher hier nur auf die von der elastischen Längenänderung der Stäbe herrührende elastische Formänderung näher eingehen.

Zur annähernden Bestimmung der Formänderung wird gewöhnlich die auf der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

beruhenden Theorie der elastischen Linie vollwandiger Körper angewendet. In dieser Beziehung verweisen wir auf die Theorie über Biegungsfestigkeit.

Zur genauen Bestimmung der Formänderung eines Stabsystemes kann man zwei Methoden befolgen, von denen die eine auf dem bereits in §. 96 angewendeten Prinzipie der Arbeit, die andere auf der Bestimmung der Aenderung der Winkel zwischen den einzelnen Stäben oder der Dreieckswinkel beruht.

§. 127. **Bestimmung der Formänderung nach dem Prinzipie der Arbeit bei statisch bestimmten Systemen.** Um die Verschiebung Δz eines Knotenpunktes C nach einer bestimmten Richtung CN zu bestimmen, denkt man sich in C in Richtung von CN die Kraft 1 wirkend. Erzeugt diese Kraft 1 im beliebigen Stabe DE die Spannung u und ist $\Delta \lambda$ die wirkliche Längenänderung dieses Stabes in Folge der Belastung, so ist nach dem Prinzipie der Arbeit $1 \cdot \Delta z - u \cdot \Delta \lambda = 0$, also $\Delta z = u \Delta \lambda$, falls nur der Stab DE eine Längenänderung annimmt. Nehmen alle Stäbe eine Längenänderung an, so wird

$$1. \quad \Delta z = \sum u \Delta \lambda.$$

Ist S die Spannung dieses Stabes, λ seine Länge, F seine Querschnittsfläche, E der Elastizitätskoeffizient, so ist $\Delta\lambda = \frac{S\lambda}{EF}$, also

$$2. \Delta z = \Sigma \frac{u S \lambda}{EF}.$$

Handelt es sich um die Verschiebung Δy des Punktes A in vertikaler Richtung, so ist zur Bestimmung der Werthe u in C eine vertikal wirkende Kraft 1 anzunehmen.

Ist nicht nur die Senkung eines einzigen Knotenpunktes, sondern die Senkung mehrerer oder aller Knotenpunkte zu bestimmen, so müsste hiernach für die Senkung jedes Punktes die Bestimmung der Spannungen u besonders durchgeführt werden. Diese umständliche Rechnung lässt sich indess in folgender Weise umgehen. Setzen wir voraus, dass der Träger auf zwei Stützen mit dem Horizontalabstande l ruht, welche durch C in die Längen x und $l - x$ getheilt wird, so ist der linke und rechte Stützendruck $1 - \frac{x}{l}$ und $\frac{x}{l}$. Bezeichnet man nun die Spannung, welche ein linker Stützendruck $= 1$ im Stabe DE erzeugt, falls dieser Stab auf der linken Seite von C liegt, mit u' und die Spannung, welche ein rechter Stützendruck $= 1$ im Stabe DE erzeugt, wenn dieser Stab auf der rechten Seite von C liegt, mit u'' , so ist offenbar

$$u = u' \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ und } u = u'' \frac{x}{l},$$

je nachdem der Stab auf der linken oder rechten Seite von C liegt. Demnach wird

$$3. \Delta y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \Sigma u' \Delta \lambda + \frac{x}{l} \Sigma u'' \Delta \lambda.$$

Hierbei bezieht sich also das erste Glied auf alle links, das zweite auf alle rechts von C liegenden Stäbe. Der Stab ist nach links oder rechts zu rechnen, je nachdem die in C wirkende Last 1 auf den rechten oder linken derjenigen Theile wirkt, in welche der Träger durch den zur Bestimmung der fraglichen Spannung nöthigen Schnitt zerlegt wird. Es kann allerdings vorkommen, dass ein von C selbst ausgehender Stab weder zum linken noch zum rechten Theile zu rechnen ist; alsdann ist dieser Stab gesondert zu behandeln, also in Formel 3 noch das auf diesen Stab bezügliche Glied $u \Delta \lambda$ hinzuzufügen.

Ist hinsichtlich des Trägers und der Belastung Symmetrie vorhanden, so denkt man sich am besten zwei Lasten, jede $= 1$ im Abstände x von jeder Stütze. Bedeutet u''' die Spannung, welche ein Kräftepaar mit dem Momente $1 \cdot l = l$ erzeugt und bezieht sich $\Sigma u''' \Delta \lambda$ auf die Hälfte des mittleren Theiles, so wird

$$4. \Delta y = \Sigma u' \Delta \lambda + \frac{x}{l} \Sigma u''' \Delta \lambda.$$

Theil	Nummer	Länge λ	Fläche F	Spannung S	Längen- änderung $\Delta\lambda = \frac{S\lambda}{EF}$	w	w''	$w'\Delta\lambda$	$w''\Delta\lambda$	$\Sigma w'\Delta\lambda$	$\Sigma w''\Delta\lambda$
Oberquert	0 1	37,8	1,60	- 59,0	- 0,697	- 2,13	- 17,01	+ 1,485	+ 11,856	+ 1,48	+ 25,79
	1 2	35,9	1,50	- 56,0	- 0,670	- 2,12	- 16,16	+ 1,420	+ 10,827	+ 2,90	+ 14,97
	2 3	34,5	1,40	- 52,6	- 0,648	- 2,22	- 7,76	+ 1,439	+ 5,028	+ 4,34	+ 9,94
	3 4	33,5	1,40	- 49,1	- 0,587	- 3,02	- 3,78	+ 1,773	+ 2,219	+ 6,12	+ 7,72
	4 5	33,3	1,40	- 49,4	- 0,588	- 3,75	- 3,00	+ 2,205	+ 1,764	+ 8,32	+ 5,96
	5 6	33,5	1,40	- 49,8	- 0,596	- 3,78	- 3,02	+ 2,253	+ 1,800	+ 10,58	+ 4,16
	6 7	34,5	1,40	- 51,2	- 0,631	- 7,76	- 2,22	+ 4,897	+ 1,401	+ 15,47	+ 2,75
	7 8	35,9	1,50	- 53,2	- 0,637	- 8,08	- 2,16	+ 5,147	+ 1,376	+ 20,62	+ 1,38
	8 9	37,8	1,60	- 54,8	- 0,647	- 17,01	- 2,13	+ 11,005	+ 1,378		
Unterquert	0										
	I	33,3	1,40	+ 52,0	+ 0,619	+ 1,88	+ 15,00	+ 1,163	+ 9,285	+ 1,16	+ 17,36
	II	33,3	1,40	+ 50,8	+ 0,605	+ 2,14	+ 7,50	+ 1,295	+ 4,538	+ 2,46	+ 12,82
	III	33,3	1,40	+ 46,9	+ 0,558	+ 2,50	+ 5,00	+ 1,395	+ 2,790	+ 3,85	+ 10,03
	IV	33,3	1,40	+ 46,9	+ 0,558	+ 2,50	+ 5,00	+ 1,395	+ 2,790	+ 5,25	+ 7,24
	V	33,3	1,40	+ 48,7	+ 0,580	+ 3,00	+ 3,75	+ 1,740	+ 2,175	+ 6,99	+ 5,06
	VI	33,3	1,40	+ 48,8	+ 0,580	+ 5,00	+ 2,50	+ 2,900	+ 1,450	+ 9,89	+ 3,61
	VII	33,3	1,40	+ 48,8	+ 0,580	+ 5,00	+ 2,50	+ 2,900	+ 1,450	+ 12,79	+ 2,16
	VIII	33,3	1,40	+ 48,3	+ 0,575	+ 15,00	+ 1,88	+ 8,625	+ 1,081	+ 21,41	+ 1,08
IX	33,3	1,40	+ 48,3	+ 0,575	+ 15,00	+ 1,88	+ 8,625	+ 1,081			

	Decim.	□ Dec.	Tonnen	Millimeter	Millimeter	Millimeter					
Vertikalen	I	17,9	0,48	+ 6,9	+ 0,129	+ 0,25	- 7,00	+ 0,032	- 0,903	0	- 0,84
	II	31,1	0,48	+ 3,8	+ 0,123	+ 0,43	- 3,00	+ 0,053	- 0,369	+ 0,03	+ 0,07
	III	40,0	0,56	+ 5,1	+ 0,182	0	0	0	0	+ 0,09	+ 0,43
	IV	44,4	0,67	+ 5,3	+ 0,176	- 0,60	+ 1,50	- 0,106	+ 0,264	+ 0,09	+ 0,43
	V	44,4	0,67	+ 8,2	+ 0,272	+ 0,50	+ 0,40	+ 0,136	+ 0,109	- 0,02	+ 0,17
	VI	40,0	0,56	+ 5,1	+ 0,182	0	0	0	0	+ 0,12	+ 0,06
	VII	31,1	0,48	+ 6,5	+ 0,211	+ 1,00	+ 0,29	+ 0,211	+ 0,061	+ 0,12	+ 0,06
	VIII	17,9	0,48	+ 5,4	+ 0,101	0	0	0	0	+ 0,33	0
Diagonalen	I	45,6	0,15	+ 1,6	+ 0,243	- 0,37	+ 10,27	- 0,090	+ 2,496	0	+ 4,70
	II	52,0	0,20	+ 6,1	+ 0,793	- 0,56	+ 3,90	- 0,444	+ 3,093	- 0,09	+ 2,20
	III	52,0	0,25	+ 2,8	+ 0,271	+ 0,78	- 1,95	+ 0,211	- 0,528	- 0,53	- 0,89
	IV	55,6	0,25	+ 2,8	+ 0,311	+ 1,25	- 1,25	+ 0,389	- 0,389	- 0,32	- 0,37
	V	52,0	0,25	+ 1,0	+ 0,104	- 1,95	+ 0,78	+ 0,203	+ 0,081	+ 0,07	+ 0,02
	VI	52,0	0,20	+ 1,1	+ 0,143	+ 3,90	- 0,56	+ 0,558	- 0,080	+ 0,27	- 0,06
	VII	37,8	0,30	+ 1,2	+ 0,076	- 8,50	+ 0,30	- 0,646	+ 0,023	+ 0,83	+ 0,02
	VIII									+ 0,18	0

Handelt es sich ferner um die Horizontalverschiebung Δx des Punktes C , so ist bei Bestimmung der Werthe u in C eine Horizontalkraft $= 1$ anzunehmen. Ist y der Vertikalabstand von der durch die Stützen A und B gehenden Horizontalen, so sind die in A und B wirkenden Stützendrücke $+\frac{y}{l}$ und $-\frac{y}{l}$. Ist das Lager B fest, das Lager A beweglich (ohne Widerstand), so ist in B noch die Horizontalkraft 1 anzunehmen. Bezeichnen wir nun noch die Spannung, welche die in B wirkende Horizontalreaktion $= 1$ in einem rechts von C liegenden Stabe erzeugt, mit u''' , so wird

$$5. \Delta x = \frac{y}{l} [\Sigma u' \Delta \lambda - \Sigma u'' \Delta \lambda] + \Sigma u''' \Delta \lambda,$$

wobei $\Sigma u' \Delta \lambda$ und $\Sigma u'' \Delta \lambda$ ganz denselben Werth haben, wie in Formel 3. Handelt es sich um Horizontalverschiebungen eines geraden Untergurtes, so wird $y = 0$, also $\Delta x = \Sigma u''' \Delta \lambda$; die Summirung ist hier nur über die Theile des Untergurtes zu erstrecken, weil für alle übrigen Theile $u''' = 0$ wird; für den Untergurt aber ist u''' konstant $= 1$, also $\Delta x = \Sigma \Delta \lambda$.

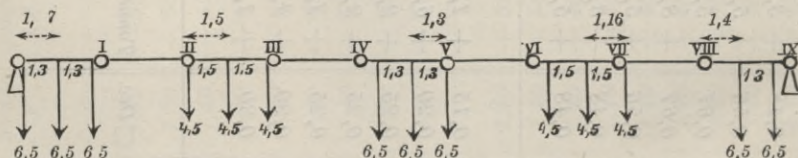
Die Werthe für u' , u'' , u''' lassen sich leicht durch Berechnung oder Konstruktion bestimmen, im letzteren Falle am besten mit Hilfe der Polygonalmethode (vergl. §. 99).

Beispiel. Wir wählen das in §. 60 unter I. behandelte Beispiel (Fig. 100) eines Bogensehenträgers mit Doppelfachwerk. Die Längen und Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe gibt die vorstehende Tabelle (Seite 350 und 351).

Wir nehmen ferner die in Fig. 219 angegebene Belastung durch den bei der Berechnung der Spannungen in §. 60 vorausgesetzten Eisenbahnzug an. Die auf die einzelnen Knotenpunkte des Untergurtes entfallenden Lasten ergeben sich hierbei zu:

Knotenpunkt	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Last	8,01	8,41	5,09	5,27	8,23	5,09	7,96	5,44.

Fig. 219.



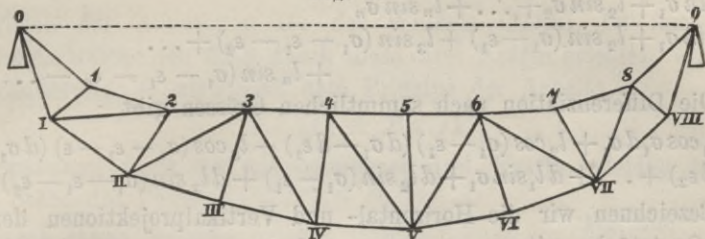
Der linke und rechte Stützendruck werden bezüglich 27,72 und 25,78. Für diese Belastung ergeben sich die folgenden Werthe für M und $\frac{M}{h}$:

Knotenpunkt	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$M =$	27,7	47,4	58,7	64,9	65,8	58,5	46,1	25,8
$\frac{M}{h} =$	52,0	50,8	46,9	48,7	49,4	48,8	49,4	48,3.

Nach dem in §. 44 aufgestellten Kennzeichen sind hiernach die in Fig. 220 angegebenen Diagonalen gezogen; die übrigen Diagonalen sind als nicht vorhanden

anzusehen. Die von dem Eigengewichte herrührenden Werthe von $\frac{M}{h}$ kommen hierbei nicht in Betracht, weil dieselben konstant sind.

Fig. 220.



Die durch Rechnung nach §. 43 und 44 bestimmten Werthe u' , u'' , sowie die entsprechenden Werthe für $u'\Delta\lambda$, $u''\Delta\lambda$ sind in der Tabelle angegeben. In den letzten Rubriken ist die durch allmähliche Addition gefundene Summe $\Sigma u'\Delta\lambda$ und $\Sigma u''\Delta\lambda$ angegeben und zwar zunächst getrennt für Obergurt, Untergurt, Vertikalen und Diagonalen; bei den Vertikalen ist hierbei die Vertikale des unteren Knotenpunktes, bis zu welcher die Summirung durchgeführt ist, ausgeschlossen. Für die Vertikalen ergibt sich leicht, wenn an der betreffenden Vertikale die Last l liegt:

Vertikale	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$u =$	$+0,22$	$+0,33$	$+1$	$+0,67$	$+0,22$	1	$+0,22$	1
$u\Delta\lambda =$	$+0,03$	$+0,04$	$+0,18$	$+0,12$	$+0,06$	$+0,18$	$+0,05$	$+0,10$

Beispielsweise ist für den Punkt III, der Tabelle entsprechend, $\Sigma u'\Delta\lambda = 4,34 + 3,85 + 0,09 - 0,53 = 7,75$, $\Sigma u''\Delta\lambda = 9,94 + 10,03 + 0,43 - 0,89 = 19,51$, also nach Formel 3:

$$\Delta y = \frac{6}{9} 7,75 + \frac{3}{9} 19,51 + 0,18 = 11,85.$$

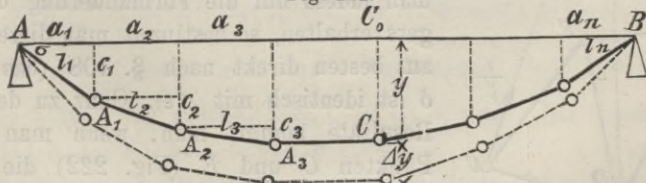
In gleicher Weise ergibt sich:

Knotenpunkt	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\Delta y =$	7,60	10,82	11,85	12,98	13,11	12,31	10,42	7,01 Mill.

Für die Tabelle wurde zunächst $\Delta\lambda = \frac{S\lambda}{EF}$, sodann erst $u'\Delta\lambda$, $u''\Delta\lambda$ berechnet. In dem Falle, wo man Δy für verschiedene Belastungsweisen berechnen will, ist es bequemer, zuerst die Werthe von $\frac{\lambda}{EF}$, sodann die Werthe von $u' \frac{\lambda}{EF}$, $u'' \frac{\lambda}{EF}$ zu berechnen, weil diese Werthe für verschiedene Belastungen konstant bleiben.

§. 128. Bestimmung der Formänderung aus der Aenderung der Dreieckswinkel. Bezeichnen wir die Länge der einzelnen

Fig. 221.



Stücke des fraglichen Gurtes (Fig. 221) mit l_1, l_2, l_3, \dots , die Neigungswinkel derselben gegen die Horizontale mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ die spitzen

Winkel zwischen den auf einander folgenden Gurtstücken mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, so ist der Abstand y des n^{ten} Knotenpunktes C von der durch die Stützen gehenden Horizontalen AB :

$$y = l_1 \sin \sigma_1 + l_2 \sin \sigma_2 + \dots + l_n \sin \sigma_n \\ = l_1 \sin \sigma_1 + l_2 \sin (\sigma_1 - \varepsilon_1) + l_3 \sin (\sigma_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots \\ + l_n \sin (\sigma_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_{n-1}).$$

Die Differenziation nach sämtlichen Grössen gibt

$$dy = l_1 \cos \sigma_1 d\sigma_1 + l_2 \cos (\sigma_1 - \varepsilon_1) (d\sigma_1 - d\varepsilon_1) - l_3 \cos (\sigma_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) (d\sigma_1 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + \dots + dl_1 \sin \sigma_1 + dl_2 \sin (\sigma_1 - \varepsilon_1) + dl_3 \sin (\sigma_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots$$

Bezeichnen wir die Horizontal- und Vertikalprojektionen der einzelnen Gurtstücke mit a_1, a_2, a_3, \dots und c_1, c_2, c_3, \dots , so ist hiernach

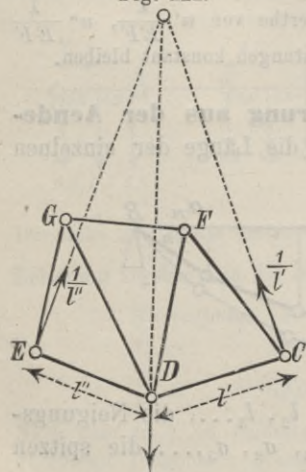
$$dy = a_1 d\sigma_1 + a_2 (d\sigma_1 - d\varepsilon_1) + a_3 (d\sigma_1 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + \dots \\ + c_1 \frac{dl_1}{l_1} + c_2 \frac{dl_2}{l_2} + c_3 \frac{dl_3}{l_3} + \dots$$

Setzen wir an Stelle der Differenziale $dy, d\sigma_1, dl_1, \dots$ die Differenzen $\Delta y, \Delta \sigma_1, \Delta l_1, \dots$, ferner an Stelle von $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \dots$ die negativen Aenderungen $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \dots$ der Gurtwinkel $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$ und die Horizontalprojektion $\Delta A_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ des Gurtes von A bis zum fraglichen Punkte $C = x$, so wird

$$6. \Delta y = x \Delta \sigma_1 + a_2 \Delta \varepsilon_1 + a_3 (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \dots + a_n (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \dots + \Delta \varepsilon_{n-1}) + c_1 \frac{\Delta l_1}{l_1} + c_2 \frac{\Delta l_2}{l_2} + c_3 \frac{\Delta l_3}{l_3} + \dots + c_n \frac{\Delta l_m}{l_m}.$$

Die Aenderung $\Delta \sigma_1$ findet man dadurch, dass man diese Formel für den Punkt B anwendet; für diesen wird $x = l, \Delta y = 0$. Der zweite, die Längenänderungen der Gurtstücke enthaltende Theil ist im Allgemeinen gegen den ersten Theil nur klein; bei geradem Gurte verschwindet er ganz.

Fig. 222.



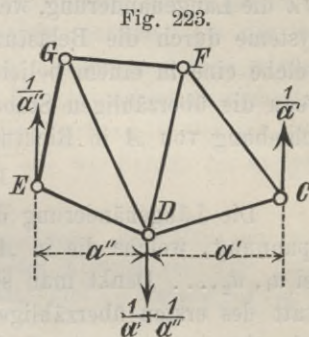
Die Aenderung $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \dots$ der Gurtwinkel bestimmt man am besten durch Addition der Aenderungen der entsprechenden Dreieckswinkel, welche nach §. 115 zu ermitteln sind, falls man ausserdem auch die Sekundärspannungen bestimmen will. Will man indess nur die Formänderung des Trägers erhalten, so bestimmt man diese Winkel am besten direkt nach §. 108 (das dortige δ ist identisch mit $\Delta \varepsilon$). Ganz zu demselben Resultate kommt man, wenn man in den Punkten C und E (Fig. 222) die Kräfte $\frac{1}{l'}$ und $\frac{1}{l''}$ senkrecht zu $DC = l', DE = l''$ und in D die diesen beiden Kräften das

Gleichgewicht haltende Kraft anbringt. Nimmt man den Punkt D als fest an und drehen sich DC und DE um die Winkel $\Delta'\varepsilon$, $\Delta''\varepsilon$, so ist die Arbeit der äusseren Kräfte $= \frac{1}{l'} \cdot l' \Delta'\varepsilon + \frac{1}{l''} \cdot l'' \Delta''\varepsilon = \Delta'\varepsilon + \Delta''\varepsilon$, d. i. gleich der Aenderung $\Delta\varepsilon$ des Winkels CDE . Ist nun u die Spannung, welche ein Stab durch diese drei Kräfte erleidet, $\Delta\lambda$ seine Längenänderung, so wird nach dem Principe der Arbeit:

$$7. \Delta\varepsilon = \Sigma u \Delta\lambda.$$

Eine Spannung durch die angenommenen drei Kräfte erleiden nur die sieben Stäbe des Fünfecks $CD'EGF$.

Noch etwas einfacher gelangt man indess zum Ziele, wenn man in C , E , D (Fig. 223) die drei im Gleichwichte befindlichen Kräfte $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$ und $-\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{a''}\right)$ annimmt, wenn a' , a'' die Horizontalprojektionen von CD , ED bedeuten. Bezeichnet man die vertikalen Senkungen der Punkte C , E , D mit y' , y'' , y , so ist nach dem Principe der Arbeit



$$8. \frac{1}{a'} y' - \left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{a''}\right) y + \frac{1}{a''} y'' = C,$$

wenn C die unter Wirkung der drei vorausgesetzten Kräfte entstehende Summe $\Sigma u \Delta\lambda$ bedeutet. Wendet man diese Gleichung für jede Kombination von drei aufeinander folgenden Knotenpunkten an und addirt die ersten $m - 1$ Gleichungen, so erhält man

$$- \frac{1}{a_1} y_1 + \frac{1}{a_m} (y_m - y_{m-1}) = C_1 + C_2 + \dots + C_{m-1}$$

oder

$$9. y_m - y_{m-1} = \frac{a_m}{a_1} y_1 + a_m (C_1 + C_2 + \dots + C_{m-1}).$$

Wendet man diese Gleichung abermals für die sämtlichen Kombinationen je zweier aufeinander folgender Knotenpunkte an und addirt die ersten m Gleichungen, so erhält man

$$10. y_m = x \frac{y_1}{a_1} + a_2 C_1 + a_3 (C_1 + C_2) + \dots + a_m (C_1 + C_2 + \dots + C_{m-1}).$$

Den Werth von $\frac{y_1}{a_1}$ erhält man durch Anwendung dieser Gleichung auf die rechte Stütze, für welche $x = l$, $y_m = 0$ wird. Bei einem geraden Gurte werden die Formeln 5 und 9 identisch.

Die im vorigen Paragraphen gezeigte Methode führt schneller zum Ziele, wenn nicht die Winkeländerungen ohnehin zu anderem Zwecke berechnet werden müssen.

§. 129. **Statisch unbestimmte Systeme.** Die Bestimmung der Spannung in statisch unbestimmten Systemen wurde im XIV. Kapitel gezeigt. Unter der Voraussetzung der Längenänderungen der Stäbe, welche diese Spannungen erzeugen, sind die Verschiebungen der Knotenpunkte offenbar dieselben, als wenn die überzähligen Stäbe gar nicht vorhanden wären, so dass sich also die gezeigten Methoden der Bestimmung der Verschiebung der Knotenpunkte statisch bestimmter Systeme unmittelbar anwenden lassen.

Indessen lässt sich noch eine andere Methode befolgen. Es bezeichne $\Delta\lambda$ die Längenänderung, welche ein nothwendiger Stab BC im gegebenen Systeme durch die Belastung erleidet, u die Spannung dieses Stabes, welche eine in einem beliebigen Knotenpunkte A wirkende Kraft erzeugt, wenn die überzähligen Stäbe ausgeschaltet werden, y die wirkliche Verschiebung von A in Richtung dieser Kraft. Alsdann ist

$$11. \quad y = \Sigma u \Delta\lambda.$$

Die Längenänderung der überzähligen Stäbe sei $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots$, die Spannung, welche die in A wirkende Kraft 1 in diesen Stäben erzeugt, sei u_1, u_2, \dots . Denkt man sich nach Ausschaltung der überzähligen Stäbe statt des ersten überzähligen Stabes die entsprechende Spannung u_1 angebracht, so möge im Stabe BC die Spannung u' entstehen. Alsdann ist nach §. 96:

$$u_1 \Delta\lambda_1 + \Sigma u' \Delta\lambda = 0.$$

Denkt man sich ebenso nach Ausschaltung der überzähligen Stäbe statt des zweiten überzähligen Stabes die entsprechenden Spannungen u_2 als Kräfte angebracht, so möge im Stabe BC die Spannung u'' entstehen; alsdann ist wiederum

$$u_2 \Delta\lambda_2 + \Sigma u'' \Delta\lambda = 0.$$

Die Summirung aller so entstandenen Gleichungen gibt:

$$u_1 \Delta\lambda_1 + u_2 \Delta\lambda_2 + \dots + \Sigma (u' + u'' + \dots) \Delta\lambda = 0.$$

Die Summe $u' + u'' + \dots$ ist die Spannung, welche im Stabe BC entsteht, wenn die Spannungen u_1, u_2, \dots gleichzeitig als Kräfte angebracht werden. Die Addition zur Gleichung 11 gibt

$$y = u_1 \Delta\lambda_1 + u_2 \Delta\lambda_2 + \dots + \Sigma (u + u_1 + u_2 + \dots) \Delta\lambda.$$

Nun aber ist $u + u_1 + u_2 + \dots$ die Spannung, welche die in A wirkende Kraft 1 im Stabe BC erzeugt; sonach ist, ganz identisch mit der Gleichung 11

$$12. \quad y = \Sigma u \Delta\lambda,$$

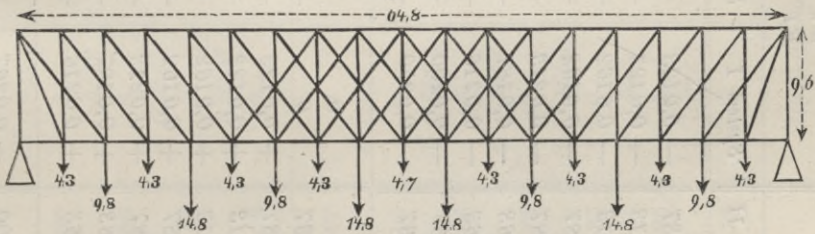
wenn u die Spannung bedeutet, welche die in A wirkende Kraft 1 in jedem Stabe des gegebenen statisch unbestimmten Systemes erzeugt. Diese zunächst nur für statisch bestimmte Systeme nachgewiesene Regel gilt nunmehr auch für statisch unbestimmte Systeme.

§. 130. **Mehrtheilige Gittersysteme.** Die mehrtheiligen Gittersysteme sind im Allgemeinen nach dem im vorigen Paragrafe Gesagten als statisch unbestimmte Systeme zu behandeln. Angenähert wird man die Formänderung ebenso wie die Spannungen nach dem VII. Kapitel, durch Zerlegung in Elementarsysteme bestimmen können. Nach dieser Methode würden hierbei sowohl die Spannungen der einzelnen Theile in Folge der Belastung, als auch die Werthe von u zu bestimmen sein.

Sind bei einem mehrtheiligen Systeme nur die Knotenpunkte des einen Elementarsystemes abwechselnd belastet, so sind die Gitterstäbe des Systemes mit den nicht belasteten Knotenpunkten ohne Spannung. Diese Knotenpunkte werden sich daher weniger senken, als die des Systemes mit den belasteten Knotenpunkten. In Folge dessen werden die Gurtwinkel bei den auf einander folgenden Knotenpunkten abwechselnd vergrößert und vermindert. Bei kontinuierlichen Gurten hat dies das Entstehen starker Sekundärspannungen zur Folge, wie wir bereits im vorigen Kapitel gesehen haben.

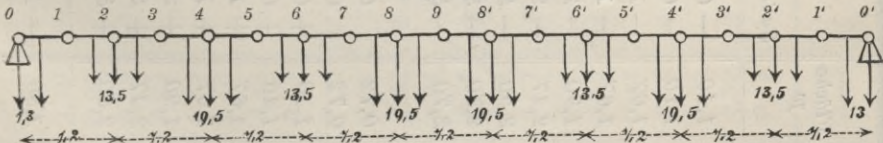
Beispiel. Parallelgitterträger mit $64,8^m$ Spannweite, $9,6^m$ Höhe mit zweitheiligem Fachwerke, deren Vertikalen den konstanten Abstand von $3,6^m$ haben (Fig. 224). Die Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe gibt die Tabelle auf folgender Seite.

Fig. 224.



Die Belastung durch vier Lokomotiven, von denen die beiden mittleren Brust an Brust stehen, zeigt Fig. 225. Diese Belastung ist, um das Beispiel einer sehr ungünstigen Belastung vorzuführen, so angenommen, dass die abwechselnden Knotenpunkte immer direkt mit der Mittelaxe der Lokomotive und des Tenders belastet

Fig. 225.



sind. Durch Reduktion auf die Knotenpunkte erhält man die in Fig. 224 eingeschriebenen Knotenlasten. Für diese Belastung ergeben sich die in folgender Tabelle in der 9. Rubrik enthaltenen Spannungen S . Die durch die linke Reaktion 1 entstehenden Spannungen u' , welche die 5. und 6. Rubrik enthält, sind für jedes der beiden Elementarsysteme besonders zu bestimmen (System I enthält die Knotenpunkte 0, 2, 4, 6, 8, System II enthält die Knotenpunkte 0, 1, 3, 5, 7, 9). Die entstehenden Werthe für $\frac{u'\lambda}{EF}$ ($E = 200000$ Ton. pro \square^{dm}) enthält die 7. und 8. Rubrik, die entsprechenden Werthe für $\frac{Su'\lambda}{EF} = u'\lambda$ enthält die 11. und 12. Rubrik.

Theil	Nummer	Länge λ	Fläche F	w'		$w' \lambda$		Spannung S	$\Delta \lambda = \frac{S \lambda}{EF}$	$w' \Delta \lambda = \frac{S \lambda}{EF}$	
				System I	System II	System I	System II			System I	System II
Oberquert	1	36	1,10	- 0,75	- 0,37	- 0,0123	- 0,0061	- 44,2	- 0,72	+ 0,54	+ 0,27
	2	36	1,10	- 0,75	- 1,13	- 0,0123	- 0,0184	- 55,7	- 0,91	+ 0,68	+ 1,05
	3	36	1,67	- 1,50	- 1,13	- 0,0162	- 0,0121	- 85,2	- 0,92	+ 1,38	+ 1,03
	4	36	1,67	- 1,50	- 1,87	- 0,0162	- 0,0202	- 93,4	- 1,01	+ 1,51	+ 1,89
	5	36	1,90	- 2,25	- 1,87	- 0,0213	- 0,0178	- 111,9	- 1,06	+ 2,38	+ 1,99
	6	36	2,17	- 2,25	- 2,63	- 0,0187	- 0,0218	- 116,9	- 0,92	+ 2,19	+ 2,55
	7	36	2,50	- 3,00	- 2,63	- 0,0216	- 0,0189	- 128,0	- 0,81	+ 2,76	+ 2,42
	8	36	2,70	- 3,00	- 3,37	- 0,0200	- 0,0225	- 129,7	- 0,87	+ 2,59	+ 2,92
	9	36	2,70	- 3,75	- 3,37	- 0,0250	- 0,0225	- 129,7	- 0,87	+ 3,24	+ 2,92
Unterguert	1	36	0,72	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	36	0,72	0	+ 0,37	0	+ 0,0094	+ 7,3	+ 0,18	0	0,07
	3	36	1,10	+ 0,75	+ 0,37	+ 0,0123	+ 0,0061	+ 44,2	+ 0,73	+ 0,54	+ 0,27
	4	36	1,10	+ 0,75	+ 1,13	+ 0,0123	+ 0,0184	+ 55,7	+ 0,91	+ 0,68	+ 1,05
	5	36	1,67	+ 1,50	+ 1,13	+ 0,0162	+ 0,0121	+ 85,2	+ 0,92	+ 1,38	+ 1,03
	6	36	1,67	+ 1,50	+ 1,87	+ 0,0162	+ 0,0202	+ 93,4	+ 1,01	+ 1,51	+ 1,89
	7	36	1,90	+ 2,25	+ 1,87	+ 0,0213	+ 0,0178	+ 111,9	+ 1,06	+ 2,38	+ 1,99
	8	36	2,17	+ 2,25	+ 2,63	+ 0,0187	+ 0,0218	+ 116,9	+ 0,97	+ 2,19	+ 2,55
	9	36	2,50	+ 3,00	+ 2,63	+ 0,0216	+ 0,0189	+ 128,0	+ 0,92	+ 2,76	+ 2,42
End- ständer	-	96	1,80	- 1,00	- 1,00	- 0,0267	- 0,0267	- 68,8	- 1,84	1,84	1,84

Theil	Nummer	Länge λ	Fläche F	Decim	□ Decimeter	Millimeter pro Tonne		Tonnen	Millimeter	
						System I	System II		System I	System II
Vertikalen	1	96	1,10	0	1,00	0	- 0,0436	- 15,2	- 0,66	0,66
	2	96	1,10	- 1,00	0	- 0,0436	0	- 39,4	- 1,72	1,72
	3	96	0,92	0	- 1,00	0	- 0,0522	- 10,9	- 0,57	0,57
	4	96	0,92	- 1,00	0	- 0,0522	0	- 24,6	- 1,28	1,28
	5	96	0,92	0	- 1,00	0	- 0,0522	- 6,7	- 0,35	0,35
	6	96	0,85	- 1,00	0	- 0,0565	0	- 14,8	- 0,84	0,84
	7	96	0,80	0	- 1,00	0	- 0,0600	- 2,3	- 0,14	0,14
	8	96	0,68	- 1,00	0	- 0,0706	0	0	0	0
	9	96	0,58	0	- 1,00	0	- 0,0828	0	0	0
Diagonalen	1	102	1,03	0	1,07	0	+ 0,0530	+ 20,9	+ 1,04	1,11
	2	120	1,03	+ 1,25	0	+ 0,0727	0	+ 61,5	+ 3,58	4,27
	3	120	0,94	0	1,25	0	+ 0,0798	+ 19,0	+ 1,21	1,52
	4	120	0,84	+ 1,25	0	+ 0,0892	0	+ 49,3	+ 3,52	4,40
	5	120	0,76	0	1,25	0	+ 0,0988	+ 13,7	+ 1,08	1,35
	6	120	0,71	+ 1,25	0	+ 0,1056	0	+ 30,7	+ 2,59	3,24
	7	120	0,59	0	1,25	0	+ 0,1271	+ 8,3	+ 0,84	1,05
	8	120	0,50	+ 1,25	0	+ 0,1500	0	+ 18,5	+ 2,22	2,77
	9	120	0,42	0	1,25	0	+ 0,1786	+ 2,9	+ 0,41	0,52
	10	120	0,34	+ 1,25	0	+ 0,2206	0	0	0	0
	11	120	0,26	0	1,25	0	+ 0,2885	0	0	0
	12	120	0,20	+ 1,25	0	+ 0,3750	0	0	0	0
	13	120	0,13	0	1,25	0	+ 0,5769	0	0	0

Es sei nun beispielsweise die von der zufälligen Belastung herrührende vertikale Senkung Δy des Knotenpunktes 5 zu bestimmen; 5 gehört dem Systeme II an. Es wird $\Sigma u' \Delta l$ für den Obergurt $0,27 + 1,05 + 1,03 + 1,89 + 1,99 = 6,23$, für den Untergurt $0 + 0,07 + 0,27 + 1,05 + 1,03 = 2,42$, für den linken Endständer $1,84$, für die Vertikalen $0,66 + 0,57 = 1,23$, für die Diagonalen $1,11 + 1,52 + 1,35 = 3,98$, zusammen also $\Sigma u' \Delta l = 6,23 + 2,42 + 1,84 + 1,23 + 3,98 = 15,7$. Die durch das Kräftepaar mit dem Momente $l = 648$ hervorgerufenen Spannungen u''' werden in den Gurten $= \mp \frac{l}{h} = \mp \frac{648}{96} = \mp \frac{27}{4}$, in den Gitterstäben aber $= 0$. Daher ist in Formel 4 zu setzen: $\Sigma \Delta l$ für den Obergurt $-(1,07 + 0,92 + 0,87 + 0,87) = -3,73$, für den Untergurt $+(1,01 + 1,06 + 0,97 + 0,92) = +3,96$, also $\Sigma u''' \Delta l = \frac{21}{4} (3,73 + 3,96) = 51,94$. Sonach wird

$$\Delta y = 15,7 + \frac{5}{18} 51,94 = 15,7 + 14,4 = 30,1.$$

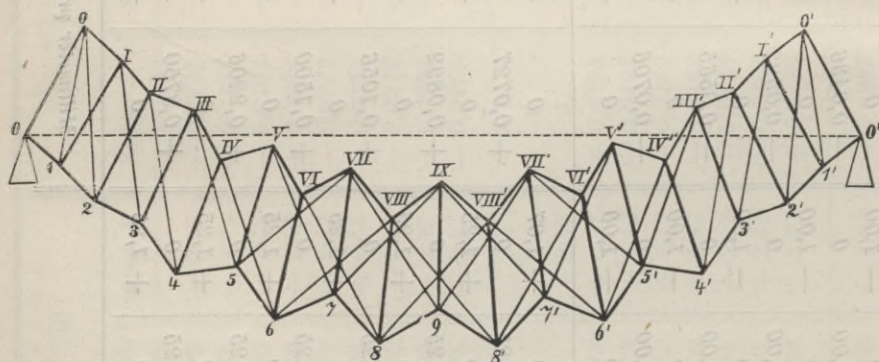
In gleicher Weise ergibt sich für die einzelnen Knotenpunkte des Untergurtes:

Punkt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δy	= 0	8,6	17,3	20,9	32,1	30,1	42,2	35,5	48,5	37,4

Millim.

Die Senkungen des Obergurtes erhält man, indem man hierzu noch die Zusammendrückung der Vertikalen hinzufügt. Für die Vertikale 5 ist $\Delta l = -\frac{6,7 \cdot 96}{200000 \cdot 0,92} 100$ Millim. $= 0,35$, also für den Knotenpunkt V: $\Delta y = 30,1 + 0,4 = 30,5$ Millim.

Fig. 226.



Die horizontale Verschiebung der Knotenpunkte ist, wenn man die Mitte als fest annimmt, gleich der Längenänderung des Gurtes von der Mitte bis zum fraglichen Punkte, so z. B. für den Punkt 5:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{36}{200000} \left(\frac{128,0}{2,50} + \frac{116,9}{2,17} + \frac{111,9}{1,90} + \frac{93,4}{1,67} \right) 100 \text{ Millim.} \\ &= \frac{36 \cdot 220 \cdot 100}{200000} = 0,40 \text{ Millim.} \end{aligned}$$

Die entsprechende Formänderung zeigt Fig. 226. Die Verschiebungen sind in dieser Figur in halber natürlicher Grösse (Längen in $\frac{1}{650}$ nat. Gr.) aufgetragen.

§. 131. Maximalverschiebung eines Punktes. Handelt es sich um die Maximalverschiebung eines Knotenpunktes in bestimmter Rich-

tung, welche unter der Wirkung eines verschiebbaren Systemes von Einzellasten eintreten kann, so wendet man hierzu am besten das Prinzip der Influenzlinien an.

Bezeichnet man die Werthe von $\frac{u\lambda}{EF}$ für die einzelnen Stäbe unter der Wirkung der in einem Knotenpunkte in der fraglichen Richtung wirkenden Kraft I mit k_1, k_2, k_3, \dots , die Spannungen in Folge einer beliebigen Belastung mit S_1, S_2, S_3, \dots , so ist die Verschiebung von A :

$$13. \Delta z = k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 + \dots$$

Denkt man sich nun eine Einzellast G über den Träger rollend, so ändern sich sämmtliche Spannungen, so lange die Last innerhalb zweier benachbarten Querträger bleibt, nach dem Gesetze der geraden Linie. Die Influenzlinie für die Verschiebung Δz wird also eine gebrochene Linie sein, deren Ecken den Querträgern entsprechen.

Die Benützung dieser Influenzlinie zur Bestimmung des Maximums der Verschiebung erfolgt nun in ganz gleicher Weise, wie hinsichtlich der Bestimmung der Maximalspannungen nach §. 17 und 54.

Hinsichtlich der vertikalen Verschiebung haben die Ordinaten der Influenzlinie durchgehends dasselbe Vorzeichen. Dementsprechend erfolgt bei einer gleichmässigen Belastung die grösste Verschiebung bei totaler Belastung. Auch bei einem Systeme von Einzellasten ist totale Belastung anzunehmen; nur kommt es hier noch auf die Bestimmung der Lagen der Einzellasten an.

Die Durchbiegung eines Trägers ist für seine Güte ohne wesentlichen Einfluss. Man benützt die berechnete Durchbiegung vorzugsweise zur Beurtheilung der bei der Probe des Trägers gemessenen Durchbiegung. Hierzu aber ist keineswegs die streng bestimmte Maximaldurchbiegung erforderlich. Es genügt vielmehr, wenn man irgend eine totale Belastung des Trägers durch die schwersten Lasten annimmt und für die genau präcisirte und bei der Probe genau einzuhaltende Stellung des Lastensystemes die Durchbiegung der einzelnen Knotenpunkte berechnet. Bei bewegten Lastensystemen pflegt man allerdings entweder nur das Maximum der Durchbiegung eines bestimmten Knotenpunktes oder mittels automatischer Aufzeichnung auf einem bewegten Papierstreifen die Durchbiegung bei jeder Lage des Lastensystemes zu bestimmen. Hier würde allerdings zur Beurtheilung die theoretische Bestimmung der Maximaldurchbiegung erforderlich werden.

§. 132. Näherungsregeln für Parallelträger. Wir wollen hier die zulässige Inanspruchnahme und den Elastizitätskoeffizienten für Zug und Druck gleich gross annehmen.

1. **Einfluss der Gurte.** Die im Gurte im Abstände ξ von der linken Stütze durch eine linke Reaktion $= I$ hervorgerufene Spannung ist, wenn h die Trägerhöhe bedeutet, $u = \frac{\xi I}{h}$. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

a. Konstante spezifische Spannung. Bei der konstanten spezifischen Spannung K ist die relative Längenänderung $= \frac{K}{E}$, also die Längenänderung Δl eines unendlich kleinen Gurtstückes $\frac{K}{E} d\xi$; demnach wird nach Formel 3:

$$\Delta y = \frac{2K}{E l h} \left[(l-x) \int_0^x \xi d\xi + x \int_0^{l-x} \xi d\xi \right],$$

d. i.

$$14. \Delta y = \frac{K l^2}{E h} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Ist f die Querschnittsfläche eines Gurtes in der Mitte, so ist $f = \frac{q l^2}{8 K h}$ oder $K = \frac{q l^2}{8 f h}$. Die Durchbiegung $\Delta_1 y$ in der Mitte ist nun

$$15. \Delta_1 y = \frac{K l^2}{4 E h} = \frac{q l^4}{32 E f h^2}.$$

Ist V_1 das Volumen beider Gurte, so ist $V_1 = \frac{4}{3} f l = \frac{q l^3}{6 K h}$, $\frac{l^2}{h} = \frac{6 K V_1}{q l}$; der erste der vorigen Ausdrücke geht hierdurch über in:

$$16. \Delta_1 y = \frac{3}{2} \frac{K^2 V_1}{E q l}.$$

b. Konstanter Querschnitt. Bei totaler Belastung mit der Last q pro Längeneinheit ist die relative Längenänderung $= \frac{q \xi (l - \xi)}{2 E f h}$, daher

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{q}{E f l h^2} \left[(l-x) \int_0^x \xi^2 (l - \xi) d\xi + x \int_0^{l-x} \xi^2 (l - \xi) d\xi \right] \\ &= \frac{q}{E f l h^2} \left[(l-x) \cdot \frac{1}{6} x^2 (3l - 2x) + x \cdot \frac{1}{6} (l-x)^2 (l + 2x) \right] \end{aligned}$$

oder

$$17. \Delta y = \frac{q}{12 E f h^2} x (l-x) (l^2 + lx - x^2).$$

Für $x = \frac{1}{2} l$ wird die Durchbiegung

$$18. \Delta_1 y = \frac{5 q l^4}{192 E f h^2} = \frac{5 K l^2}{24 E h}.$$

Das Volumen ist $V_1 = 2 f h = \frac{q l^3}{4 K h}$, mithin $\frac{l^2}{h} = \frac{4 K V_1}{q l}$, daher

$$19. \Delta_1 y = \frac{5}{6} \frac{K^2 V_1}{q l}.$$

c. Praktische Form. Während im Ausdrucke für $\Delta_1 y$ der Faktor von $\frac{q l^4}{E f h^2}$ im Falle a. $= \frac{1}{32} = \frac{6}{192} = 0,0313$ ist, ist derselbe im

Falle $b. = \frac{5}{192} = 0,0261$. In Wirklichkeit liegt $\Delta_1 y$ zwischen beiden Werthen und lässt sich ungefähr

$$20. \quad \Delta_1 y = 0,03 \frac{ql^4}{Efh^2}$$

setzen; bei sehr kleinen Spannweiten wird $\Delta_1 y$ noch ein wenig kleiner.

Ferner wird im Ausdrucke für $\Delta_1 y$ der Faktor von $\frac{Kl^2}{Eh}$ im Falle $a. = \frac{1}{4} = \frac{6}{24} = 0,250$, im Falle $b. = \frac{5}{24} = 0,208$. Nach der Formel 20 würde dieser Faktor $= 8 \cdot 0,03 = 0,24$ werden. Bedeutet nun K die bei der Berechnung der Querschnitte angenommene zulässige Inanspruchnahme für Zug, so ist zu beachten, dass f in Wirklichkeit etwas grösser genommen werden muss, als der theoretische Querschnitt $\frac{ql^2}{8Kh}$; der Faktor von $\frac{Kl^2}{Eh}$ ist daher noch etwas kleiner als $0,24$. Man kann ungefähr setzen:

$$21. \quad \Delta_1 y = 0,21 \frac{Kl^2}{Eh}$$

Endlich wird im Ausdrucke für $\Delta_1 y$ der Faktor von $\frac{K^2 V_1}{Eq l}$ im Falle $a. = \frac{3}{2} = 1,500$, im Falle $b. = \frac{5}{6} = 0,833$. Wenn K die der Berechnung der Querschnitte zu Grunde gelegte zulässige Inanspruchnahme bedeutet, so kann man in Wirklichkeit ungefähr

$$22. \quad \Delta_1 y = 0,9 \frac{K^2 V_1}{Eq l}$$

setzen; jedoch ist diese Formel am wenigsten genau.

2. Einfluss des Gitterwerkes. Die in einem Stabe des Systemes, welchem der Punkt, dessen Verschiebung gesucht wird, angehört mit der Neigung α und β gegen die Vertikale durch eine linke Reaktion 1 hervorgerufene Spannung ist $+ \sec \alpha$ und $- \sec \beta$, während in den Stäben der anderen Systeme keine Spannung entsteht. Die Spannung der Stäbe bei totaler Belastung, welche die Transversalkraft Q erzeugt, ist $\frac{1}{n} Q \sec \alpha$ und $-\frac{1}{n} Q \sec \beta$, wenn n die Theilungszahl des Gitterwerkes bedeutet. Da die Längen der Stäbe $h \sec \alpha$, $h \sec \beta$ sind und auf die Länge $h (\tan \alpha + \tan \beta)$ ein Stab jeder Schaar in Frage kommt, so wird der Werth δ von $E u \Delta l$ pro Längeneinheit, wenn f' , f'' die Querschnittsflächen der Stäbe bezeichnen,

$$23. \quad \delta = \frac{Q}{n E (\tan \alpha + \tan \beta)} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{f'} + \frac{\sec^3 \beta}{f''} \right).$$

Ist Q_m die Maximal-Transversalkraft für einen Stab, so ist $f' = \frac{Q_m \sec \alpha}{K n}$,

$f'' = \frac{Q_m \sec \beta}{K n}$, daher

$$24. \quad \delta = \frac{K Q}{E Q_m} \frac{\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = C \frac{K Q}{E Q_m},$$

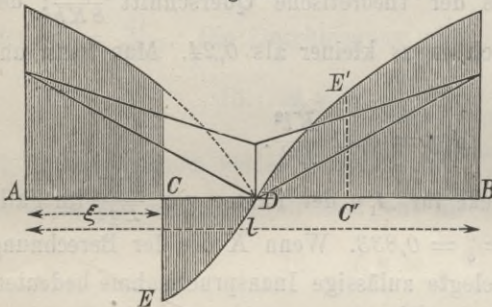
wenn C einen von der Neigung der Gitterstäbe abhängigen Koeffizienten bezeichnet.

Die Transversalkraft Q ist $= \frac{1}{2} q(l - 2\xi)$; wir können annähernd annehmen, dass auch Q_m in Beziehung auf ξ linear sei. Wenn wir die Querschnittsflächen der Stäbe an den Enden und in der Mitte mit f_0 und f_1 bezeichnen und $\frac{f_1}{f_0} = m$ setzen, so wird

$$z = \frac{Q}{Q_m} = \frac{l - 2\xi}{l - 2(1 - m)\xi}.$$

In Fig. 227 ist der Werth von z als Ordinate aufgetragen. Wenn C der fragliche Punkt und C' der hierzu symmetrisch liegende Punkt ist,

Fig. 227.



so entsprechen sich innerhalb der Strecke CC' stets zwei gleiche Ordinaten mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil in zwei symmetrisch liegenden Stäben die Belastung gleiche Spannung mit gleichen Vorzeichen, der rechte Stützendruck aber gleiche Spannung mit entgegengesetzten

Vorzeichen erzeugt. Die Flächen CDE , $C'DE'$ heben sich daher auf.

Sonach ist $\int_0^{l-x} z d\xi = \int_0^x z d\xi$ und $\Delta y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \int_0^x \delta d\xi + \frac{x}{l} \int_0^x \delta d\xi$, d. i.

$$25. \Delta y = \int_0^x \delta d\xi.$$

Setzt man den Ausdruck für δ ein, so erhält man

$$26. \Delta y = \frac{CK}{E} \int_0^x \frac{l - 2\xi}{l - 2(1 - m)\xi} d\xi.$$

Mit Hilfe der Integralformel

$$\int \frac{a + bx}{c + dx} dx = \frac{b}{d} x + \frac{ad - bc}{d^2} \lognat(c + dx) + Const$$

erhält man

$$27. \Delta y = \frac{CK}{E(1 - m)} \left[x + \frac{ml}{2(1 - m)} \lognat \left\{ 1 - 2(1 - m) \frac{x}{l} \right\} \right].$$

Für die Mitte wird hiernach:

$$28. \Delta_1 y = \frac{CKl}{2E(1 - m)} \left[1 + \frac{m}{1 - m} \lognat m \right].$$

Sonach kann man auch setzen:

$$29. \quad \frac{\Delta y}{\Delta_1 y} = \frac{2(1-m) \frac{x}{l} + m \operatorname{lognat} \left\{ 1 - 2(1-m) \frac{x}{l} \right\}}{(1-m) + m \operatorname{lognat} m}.$$

Für $m = 0$ wird sehr einfach

$$30. \quad \frac{\Delta y}{\Delta_1 y} = 2 \frac{x}{l}.$$

Für $m = 1$ nimmt $\frac{\Delta y}{\Delta_1 y}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. In bekannter Weise ergibt sich aber

$$31. \quad \frac{\Delta y}{\Delta_1 y} = 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$m =$	$\frac{\Delta y}{\Delta_1 y}$ für $\frac{x}{l}$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0,200	0,400	0,600	0,800	1
0,25	0	0,271	0,547	0,745	0,919	1
0,50	0	0,308	0,576	0,793	0,943	1
0,75	0	0,336	0,611	0,822	0,955	1
0	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1

Wir wollen nun speziell noch die Senkung $\Delta_1 y$ in der Mitte in Betracht ziehen. Nach der Formel 28 ergibt sich:

$$m = 0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1$$

$$\Delta_1 y = 0,500 \quad 0,413 \quad 0,373 \quad 0,346 \quad 0,324 \quad 0,307 \quad 0,292 \quad 0,280 \quad 0,268 \quad 0,257 \quad 0,250 \quad \frac{CKl}{E},$$

wobei C zwischen 2 und 3 liegt. Wenn K die bei Bestimmung der Querschnitte angenommene zulässige Inanspruchnahme bezeichnet, so ist $\Delta_1 y$ der nöthigen Verstärkung der Querschnitte wegen kleiner. Mit geringer Annäherung lässt sich etwa setzen:

$$32. \quad \Delta_1 y = 0,27 \frac{CK}{E} l.$$

Die Senkung ist hiernach das $2,7 \frac{h}{l}$ bis $4,1 \frac{h}{l}$ oder das 0,25 bis 0,50fache der von den Gurten herrührenden Senkung.

Die mittlere Maximal-Transversalkraft ist $= \frac{1}{2}(1+m) Q_m$; sind daher f' , f'' mittlere Querschnitte, so ist $f' = \frac{1+m}{2Kn} Q_m \sec \alpha$, $f'' = \frac{1+m}{2Kn} Q_m \sec \beta$. Setzen wir noch $h(\tan \alpha + \tan \beta) = a$, so wird

$$\frac{h}{a} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{f'} + \frac{\sec^3 \beta}{f''} \right) = \frac{2Kn}{(1+m) Q_m} = \frac{\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{4Kn}{(1+m) ql} C.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{1}{2(1-m)} \left[1 + \frac{m}{1-m} \log \operatorname{nat} m \right] = x$, so ist

$$33. \quad \Delta_1 y = x \frac{CKl}{E} = \frac{(1+m)x}{4} \frac{ql^2}{E} \frac{h}{a} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{nf'} + \frac{\sec^3 \beta}{nf''} \right).$$

Für $m = 0, 0,1, 0,2, \dots, 1,0$ ergibt sich bezüglich $\frac{1}{4}(1+m)x = 0,125, 0,114, 0,112, 0,112, 0,113, 0,115, 0,117, 0,119, 0,120, 0,122, 0,125$, so dass $\frac{1}{4}(1+m)x$ nahezu konstant ist. Wir können daher allgemein annähernd etwa

$$34. \quad \Delta_1 y = 0,112 \frac{ql^2}{E} \frac{h}{a} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{nf'} + \frac{\sec^3 \beta}{nf''} \right)$$

setzen.

Bezeichnen wir das wirkliche Volumen des gesammten Gitterwerkes mit V_2 , so ist nach der Formel 86 (Seite 86) $V_2 = 1,7 \frac{Cl^2}{4K} (g + \frac{7}{6}p)$. Der Werth von $g + \frac{7}{6}p$ schwankt zwischen $1,06q$ und $1,14q$ und lässt sich durchschnittlich zu $1,08q$ annehmen. Sonach lässt sich setzen:

$$V_2 = 0,46 \frac{Cql}{K}.$$

Die Formel 32 geht hierdurch über in

$$35. \quad \Delta_1 y = 0,60 \frac{K^2 V_2}{Eql}.$$

Die gesammte Senkung in der Mitte ergibt sich nun nach den Formeln 20 und 34:

$$33. \quad \Delta_1 y = \left[0,03 \frac{l}{fh^2} + 0,112 \frac{h}{a} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{nf'} + \frac{\sec^3 \beta}{nf''} \right) \right] \frac{ql^2}{E}.$$

Ferner wird nach Formel 21 und 32:

$$37. \quad \Delta_1 y = \left(0,21 \frac{l}{h} + 0,27 C \right) \frac{Kl}{E}.$$

Für $K = 0,70$, $E = 2000$ Ton. pro \square^{cm} wird

$$37a. \quad \Delta_1 y = \left(0,0735 \frac{l}{h} + 0,10 C \right) l \text{ Millim.},$$

wobei l in Metern zu nehmen ist. Da $\frac{l}{h}$ zwischen 8 und 11, C zwischen 2 und 3 liegt, so wird $\Delta_1 y = 0,79l$ bis $1,11l$ Millimeter. Endlich wird nach Formel 22 und 35:

$$38. \quad \Delta_1 y = (0,9V_1 + 0,6V_2) \frac{K^2}{Eql}$$

Die genauesten Werthe liefert die Formel 36, während die Formel 38 im Allgemeinen am wenigsten genaue Resultate gibt.

Wir haben nur diejenige Senkung bestimmt, welche von der gleichzeitigen Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last erzeugt

wird. Die Senkung, welche durch die zufällige Last allein erzeugt wird, findet man einfach durch Multiplikation mit dem Verhältnisse $\frac{p}{q}$ der zufälligen Last p zur Gesamtlast q .

3. Mittlere Senkung. Wir bezeichnen die mittlere Senkung, d. i. das arithmetische Mittel aller Senkungen mit $\Delta_m y$. Wir betrachten zunächst den Einfluss der Gurte. Nach der Formel 14 ist die elastische Linie eine Parabel und hiernach $\Delta_m y = \frac{2}{3} \Delta_1 y = 0,667 \Delta_1 y$. Nach der Formel 17 wird

$$\frac{\Delta_m y}{\Delta_1 y} = \frac{16}{5l^5} \int_0^l x(l-x)(l^2 + lx - x^2) dx = \frac{16}{25} = 0,640,$$

so dass man annähernd allgemein

$$39. \Delta_m y = 0,65 \Delta_1 y$$

setzen kann. Für den Einfluss des Gitterwerkes allein ergibt sich nach Formel 27 und 28 leicht

$$40. \frac{\Delta_m y}{\Delta_1 y} = \frac{(1-m)(1-3m) - 2m^2 \operatorname{lognat} m}{2(1-m)(1-m + m \operatorname{lognat} m)}.$$

Hiernach ergibt sich für $m = 0 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{4} 1$ bezüglich $\Delta_m y = 0,500 \ 0,596 \ 0,629 \ 0,653 \ 0,667 \cdot \Delta_1 y$. Ungefähr wird hiernach allgemein

$$41. \Delta_m y = 0,60 \Delta_1 y.$$

Für die gesammte Durchbiegung kann man hiernach ungefähr

$$42. \Delta_m y = 0,64 \Delta_1 y$$

annehmen.

§. 133. Näherungsregeln für Parabelträger. Wenn wir nur den Einfluss einer totalen gleichmässigen Belastung untersuchen, so ist das Gitterwerk nahezu ohne Spannung, also auch nahezu ohne Einfluss auf die Formänderung. Die relative Längenänderung der Gurte ist, wenn man den Querschnitt proportional der Maximalspannung wählt, konstant und zwar $= \frac{K}{E}$. Handelt es sich nun [um die Senkung Δy eines beliebigen Punktes im Abstände x von der linken Stütze, so in Formel 3, wenn wir die Neigung des Ober- und Untergurtes gegen die Horizontale mit σ_1, σ_2 und die Höhe in der Mitte mit h_1 bezeichnen, $\Delta h = \frac{K}{E} dx \sec \sigma_1$ und $= \frac{K}{E} dx \sec \sigma_2$, $u = \frac{\xi}{h} \sec \sigma_1 = \frac{l^2 \sec \sigma_1}{4 h_1 (l - \xi)}$ und $= \frac{\xi}{h} \sec \sigma_2 = \frac{l^2 \sec \sigma_2}{4 h_1 (l - \xi)}$, mithin

$$\Delta y = \frac{Kl}{4Eh_1} \left[(l-x) \int \frac{\sec^2 \sigma_1 + \sec^2 \sigma_2}{l - \xi} d\xi + x \int_0^{l-x} \frac{\sec^2 \sigma_1 + \sec^2 \sigma_2}{l - \xi} d\xi \right].$$

Der Werth von $\sec^2 \sigma_1 + \sec^2 \sigma_2$ ist wenig variabel; er ist beim Bogen-
sehnen- und Fischbauchträger = 2 bis 2,32, im Mittel 2,16, beim Fisch-
träger = 2 bis 2,16, im Mittel 2,08. Nehmen wir $\sec^2 \sigma_1 + \sec^2 \sigma_2$ kon-
stant gleich den angegebenen Mittelwerthen an und beachten wir, dass
 $\int \frac{d\xi}{l-\xi} = -\lognat(l-\xi) + Const$ ist, so wird für Bogensehnen- und
Fischträger

$$43. \Delta y = 0,54 \frac{Kl^2}{Eh_1} \left[\frac{x}{l} \lognat \frac{l}{x} + \frac{l-x}{l} \lognat \frac{l}{l-x} \right].$$

Beim Fischträger ist 0,52 statt 0,54 zu setzen. Hiernach ergibt sich für

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bogens.- u. Fischb.-Tr. } \Delta y = 0 \quad 0,176 \quad 0,270 \quad 0,330 \quad 0,363 \quad 0,374 \\ \text{Fischträger} \dots\dots\dots \Delta y = 0 \quad 0,169 \quad 0,260 \quad 0,318 \quad 0,350 \quad 0,360 \end{array} \right\} \frac{Kl^2}{Eh_1} \cdot l$$

Die Senkung in der Mitte würde hiernach $\Delta_1 y = 0,374$ bezüglich
 $0,360 \frac{Kl^2}{Eh_1}$ sein. Der nöthigen Verstärkung der Gurte wegen ist $\Delta_1 y$
etwa nur 0,85 mal so gross, also:

$$44. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bogensehnen- und Fischbauchträger } \Delta_1 y = 0,318 \\ \text{Fischträger} \dots\dots\dots \Delta_1 y = 0,306 \end{array} \right\} \cdot \frac{Kl^2}{Eh_1}$$

Für $K = 0,7$, $E = 2000$ Ton. pro \square^{cm} wird ungefähr

$$44a. \Delta_1 y = 0,109 \frac{l^2}{h_1} \text{ Millimeter,}$$

wobei l und h_1 in Metern zu nehmen sind.

Setzen wir die mittlere Querschnittsfläche der Gurte $f = \frac{ql^2}{8Kh_1}$,
so erhält man

$$45. \left\{ \begin{array}{l} \text{Bogensehnen- und Fischbauchträger } \Delta_1 y = 0,040 \\ \text{Fischträger} \dots\dots\dots \Delta_1 y = 0,038 \end{array} \right\} \cdot \frac{ql^4}{Efh_1^2}$$

Diese Formel gibt im Allgemeinen die genauesten Werthe.

Ist V_1 das wirkliche Volumen der Gurte, so ist ungefähr $V_1 =$
 $1,35 \cdot 0,258 \frac{ql^3}{Kh_1} = 0,348 \frac{ql^3}{Kh_1}$, $\frac{l^3}{h_1} = 2,87 \frac{KV_1}{ql}$. Daher wird nach For-
mel 44 annähernd

$$46. \Delta_1 y = 0,90 \frac{K^2 V_1}{Eql}$$

Die Senkung, welche die zufällige Last allein erzeugt, findet man
wie im vorigen Paragrafe durch Multiplikation der im Vorstehenden
bestimmten Senkung für die Gesamtlast durch Multiplikation mit $\frac{p}{q}$.

Die mittlere Senkung $\Delta_m y$ ergibt sich hier zu

$$47. \Delta_m y = 0,788 \Delta_1 y,$$

§. 134. **Mittlere Senkung bei beliebigen Trägerformen.** Ist
 $\Delta_m y$ die mittlere Senkung oder das arithmetische Mittel der Senkungen

aller Punkte eines Gurtcs, so ist $\Delta_m y \cdot l = \Delta_m y$ die Arbeit einer über die ganze Spannweite gleichmässig vertheilten Last l , demnach ist

$$\Delta_m y = \Sigma u \Delta \lambda,$$

wenn u die in jedem Stabe AB von dieser Last erzeugte Spannung bedeutet. Ist nun G die wirkliche Gesamtlast, S die im Stabe AB von dieser Last erzeugte Spannung, so verhält sich offenbar $u : S = 1 : G$, also ist $u = \frac{S}{G}$. Ferner ist $\Delta \lambda = \frac{S \lambda}{E f}$, mithin

$$\Delta_m y = \frac{1}{E G} \Sigma \frac{S^2 \lambda}{f}.$$

Wir nehmen nun an, die Querschnitte f seien für die totale Belastung mit der Last G berechnet, so dass also $S = K f$ ist; alsdann wird

$$\Delta_m y = \frac{K^2}{E G} \Sigma f \lambda.$$

Hierin ist aber $\Sigma f \lambda$ das ganze Volumen V des Trägers. Sonach ist die mittlere Senkung

$$48. \quad \Delta_m y = \frac{K^2 V}{E G},$$

Ist γ das Gewicht der Volumeneinheit, G' das Gesamtgewicht des Trägers, so ist $G' = V \gamma$, also

$$48a. \quad \Delta_m y = \frac{K^2}{E \gamma} \frac{G'}{G}.$$

Hiernach wäre also bei einem Träger von konstanter Festigkeit bei gleichbleibender Gesamtbelastung die mittlere Senkung dem Volumen oder Gewichte des Trägers proportional. Ändert sich G' , so ändert sich allerdings auch G , obwohl in geringerem Maasse; bezeichnen wir die bei gegebener Spannweite für verschiedene Trägerformen gleichbleibende Summe aus dem Gewichte der zufälligen Belastung und der Querkonstruktionen mit G_0 , so ist $G = G_0 + G'$, mithin

$$49. \quad \Delta_m y = \frac{K^2}{E \gamma} \cdot \frac{G'}{G_0 + G'},$$

so dass sich also $\Delta_m y$ in geringerem Masse ändert als G' . Indess ist der Unterschied bei kleinen Spannweiten nur gering; so ändert sich z. B. y_m bei Eisenbahnbrücken mit Spannweiten von 20, 50, 100, 150 Metern um bezüglich 9,0, 8,0, 6,4, 5,0 Prozent, wenn sich G' um 10 Prozent ändert.

Obwohl der hier vorausgesetzte Träger ein idealer ist, da hinsichtlich der Querschnitte des Gitterwerkes nicht die gefährlichste, sondern eine totale Belastung vorausgesetzt wurde, so geht doch aus der Untersuchung hervor, dass sich durch die Verminderung des Volumens oder

Gewichtes in Folge einer veränderten Form des Trägers auch die mittlere Senkung vermindert.

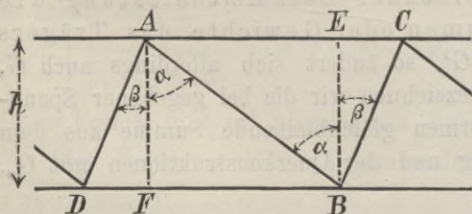
Für die Maximalsenkung $\Delta_1 y$, welche in der Mitte eintritt, lässt sich eine so einfache Regel allerdings nicht aufstellen. Indessen stehen $\Delta_m y$ und $\Delta_1 y$ in einem wenig veränderlichen Verhältnisse; so ist für einen Parallelträger nach Formel 42 $\Delta_1 y = 1,56 \Delta_m y$, bei einem Parabelträger nach Formel 47 $\Delta_1 y = 1,29 \Delta_m y$; sonach wird sich auch $\Delta_1 y$ vermindern, wenn sich das Trägergewicht vermindert.

Die hier gefundenen Regeln lassen sich auch zur angenäherten Berechnung der Durchbiegung $\Delta_m y$ und $\Delta_1 y$ für wirkliche Träger benutzen, wenn man Korrektionskoeffizienten anbringt; so findet man die mittlere Senkung $\Delta_m y$, wenn man $\frac{K^2 V}{EG}$ mit 0,58 bis 0,64, die Senkung $\Delta_1 y$ in der Mitte, wenn man, entsprechend den Formeln 38 und 46, $\frac{K^2 V}{EG}$ mit 0,8 bis 1,0 multipliziert, wobei die Form der Träger, ob Parallel-, Trapez-, Parabel-, Halbparabel-, Hyperbel-, Ellipsenträger u. s. w. gleichgiltig ist.

§. 135. Elastische Linie. Wir wollen jetzt noch die Formänderung eines Parallelträgers unter der Voraussetzung einer stetigen Veränderung untersuchen.

a. Die Gleitung. Wir bezeichnen die relative Längenänderung des Ober- und Untergurtes mit σ_1, σ_2 , die der Gitterstäbe, welche unter

Fig. 228.



dem Winkel α und β gegen die Vertikale geneigt sind, bezüglich mit σ', σ'' . Es sei ferner BE (Fig. 228) senkrecht auf AC , σ_0 die relative Längenänderung von BE und δ', δ'' die Winkel, welche BE und AF nach der Formänderung mit der Normalen zu AC und BD bildet. Alsdann ergibt sich leicht nach Formel 46, S. 303 aus dem Dreiecke ABE und CBE :

$$+ \delta' = \frac{\sigma'}{\sin \alpha \cos \alpha} - \sigma_1 \tan \alpha - \sigma_0 \cot \alpha,$$

$$- \delta' = \frac{\sigma''}{\sin \beta \cos \beta} - \sigma_1 \tan \beta - \sigma_0 \cot \beta.$$

Multipliziert man mit $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ und subtrahirt sodann beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\delta' (\tan \alpha + \tan \beta) = \sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta - \sigma_1 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta).$$

oder, da $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{a}{h}$ ist,

$$\delta' = \frac{h}{a} [\sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta - \sigma_1 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)].$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\delta'' = \frac{h}{a} [\sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta - \sigma_2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)].$$

Ist nun δ der Winkel, welchen durchschnittlich eine Normale zu den Gurten nach der Formänderung mit dem Krümmungsradius bildet, so ist $\delta = \frac{1}{2}(\delta' + \delta'')$ zu setzen. Beim Netzwerke ist $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = 0$, daher $\delta = \frac{h}{a} (\sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta)$. Beim Fachwerke ist $\tan \beta = 0$, daher $\delta = \frac{h}{a} [\sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tan^2 \alpha]$. Da aber nahezu $\sigma_2 = -\sigma_1$ ist, so können wir annähernd das letzte Glied in der Parenthese weglassen. Sonach können wir allgemein setzen:

$$50. \quad \delta = \frac{h}{a} (\sigma' \sec^2 \alpha - \sigma'' \sec^2 \beta).$$

Sind f' , f'' die Querschnitte der Gitterstäbe, so ist $\sigma' = + \frac{Q \sec \alpha}{E f'}$, $\sigma'' = - \frac{Q \sec \beta}{E f''}$, mithin

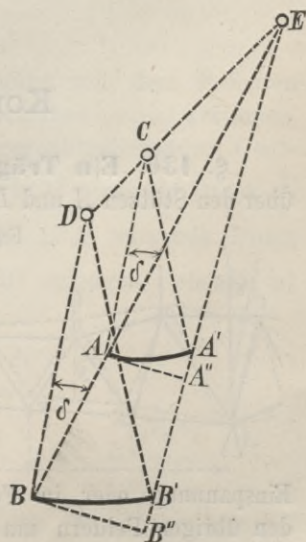
$$51. \quad \delta = \frac{Qh}{Ea} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{f'} + \frac{\sec^3 \beta}{f''} \right).$$

Hiernach ist auch die Bedeutung von dem hiermit identischen δ in §. 132 gegeben.

b. Krümmung der elastischen Linie. Es sei r_1 der Krümmungsradius $CA = CA'$ (Fig. 229) des Obergurtes, r_2 der Krümmungsradius $DB = DB'$ des Untergurtes, $AA' = dx + \mathcal{A}_1 dx$, $BB' = dx + \mathcal{A}_2 dx$, $\angle BEB' = d\gamma$. Ferner ist $\angle CAE = \angle DBE = \delta$, $\angle CA'E = \angle DB'E = \delta + d\delta$. Es ergibt sich nun sofort $\angle ACA' = \angle BDB' = d\gamma + d\delta$. Daher ist $r_1(d\gamma + d\delta) = dx + \mathcal{A}_1 dx$, $r_2(d\gamma + d\delta) = dx + \mathcal{A}_2 dx$. Ist r der mittlere Krümmungsradius $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, so wird hiernach $r(d\gamma + d\delta) = dx + \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 dx + \mathcal{A}_2 dx) = dx + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) dx$. Setzen wir, wie oben, $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$, so wird

$$\frac{1}{r} = \frac{d\gamma + d\delta}{dx}.$$

Fällen wir von A und B auf EB' die Senkrechten AA'' und BB'' , so ist $AA'' = (dx + \mathcal{A}_1 dx) \cos \delta$, $BB'' = (dx + \mathcal{A}_2 dx) \cos \delta$, $BB'' - AA'' = AB \cdot d\gamma = h d\gamma$, d. i.



$(A_2 dx - A_1 dx) \cos \delta = h d\gamma$ oder $(\sigma_2 - \sigma_1) dx \cos \delta = h d\gamma$. Der Kleinheit von δ wegen können wir $\cos \delta = 1$, mithin $(\sigma_2 - \sigma_1) dx = h d\gamma$ setzen. Sonach wird

$$52. \quad \frac{1}{r} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{h} + \frac{d\delta}{dx}.$$

Sind f_1, f_2 die Querschnittsflächen des Ober- und Untergurtes, so ist $\sigma_1 = -\frac{M}{Ehf_1}$, $\sigma_2 = +\frac{M}{Ehf_2}$, mithin

$$53. \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{Eh^2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) + \frac{d\delta}{dx}.$$

Ist I das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, so ist $\frac{1}{I} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)$, mithin

$$53a. \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} + \frac{d\delta}{dx},$$

wobei δ durch die Formeln 50 und 51 bestimmt ist. Setzen wir $\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2}$ und integrieren einmal, so erhalten wir

$$54. \quad E \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{I} dx + Q \frac{h}{a} \left(\frac{\sec^3 \alpha}{f'} + \frac{\sec^3 \beta}{f''} \right).$$

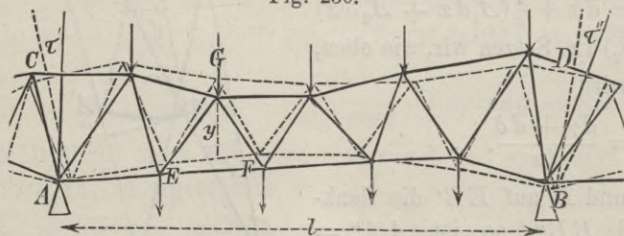
Auch mit Benützung dieser Gleichung lassen sich leicht die bereits in §. 132 entwickelten Resultate erhalten. Auch bietet die Gleichung eine Grundlage zur geometrischen Konstruktion der elastischen Linie. Jedoch wollen wir hier nicht näher darauf eingehen.

XVII. Kapitel.

Kontinuierliche Träger.

§. 136. Ein Trägerfeld mit beliebiger Belastung. Von den über den Stützen A und B (Fig. 230) liegenden Knotenpunkten fallen wir

Fig. 230.



Senkrechte AC, BD auf die gegenüberliegenden Gurtstücke. Wir setzen nun voraus, dass sich die Geraden AC, BD in Folge schiefer

Einspannung oder in Folge der Deformation im Zusammenhange mit den übrigen Feldern um die kleinen Winkel τ', τ'' nach rechts gedreht

haben. Sind y' , y'' die Längen der Normalen AC , BD , so sind also $y_1 \tau_1$, $y_2 \tau_2$ die Verschiebungen der Punkte C und D unter der Voraussetzung, dass bezüglich A und B festgehalten werden.

Wir bringen in den in C und D durchschnittenen Gurten in der Richtung der Gurtstücke als Drücke wirkende Kräfte an, welche gleich $\frac{1}{y'}$ und $\frac{1}{y''}$ sind, so dass die Momente in Beziehung auf A und B $= \frac{1}{y'} y' = 1$, $\frac{1}{y''} y'' = 1$ sind. Diese Kräfte mögen mit Rücksicht auf die von ihnen bewirkten Stützenreaktionen, wobei wir bezüglich den Punkt A und B als fest annehmen, in einem beliebigen Stabe EF bezüglich die Spannungen u' , u'' bewirken. Ist $\Delta \lambda$ die Längenänderung dieses Stabes, so ist nach dem Prinzip der Arbeit $\frac{1}{y'} \cdot y' \tau' - \Sigma u' \Delta \lambda = 0$, $-\frac{1}{y''} \cdot y'' \tau_2 - \Sigma u'' \Delta \lambda = 0$ oder

$$1. \quad \tau' = + \Sigma u' \Delta \lambda, \quad \tau'' = - \Sigma u'' \Delta \lambda$$

oder auch, wenn S die durch die Belastung erzeugte Spannung des Stabes EF , f die Querschnittsfläche, λ die Länge desselben ist,

$$2. \quad \tau' = + \Sigma \frac{u' S \lambda}{E f}, \quad \tau'' = - \Sigma \frac{u'' S \lambda}{E f}.$$

Die Spannung S lässt sich aus drei Theilen zusammensetzen, nämlich aus der Spannung S_0 , welche im Stabe entstehen würde, wenn der Träger als ein in A und B frei aufliegender Träger wirkt, welche sich also in bekannter Weise bestimmen lässt und den Spannungen S' und S'' , welche die in A und B wirkenden Biegemomente M_1 und M_2 oder die in den A und B gegenüberliegenden Gurtstücken wirkenden Spannungen erzeugen, so dass wir

$$S = S_0 + S' + S''$$

setzen können. Wir nehmen in Uebereinstimmung mit dem Früheren die Biegemomente als positiv an, wenn sie nach oben konkav krümmen. Diese Momente erzeugen in den A und B gegenüberliegenden Gurtstücken die Spannungen $-\frac{M'}{y'}$, $-\frac{M''}{y''}$. Da der in C wirkende Druck $\frac{1}{y'}$ in EF die Spannung u' erzeugt, so wird der in C wirkende Druck $\frac{M'}{y'}$ offenbar in EF die Spannung $S' = u' M'$ erzeugen; ebenso ist $S'' = u'' M''$, sonach

$$3. \quad S = S_0 + u' M' + u'' M''.$$

folglich nach den Gleichungen 2:

$$4. \quad \begin{cases} + \tau' = \Sigma \frac{u' S_0 \lambda}{E f} + M' \Sigma \frac{(u')^2 \lambda}{E f} + M'' \Sigma \frac{u' u'' \lambda}{E f}, \\ - \tau'' = \Sigma \frac{u'' S_0 \lambda}{E f} + M' \Sigma \frac{u' u'' \lambda}{E f} + M'' \Sigma \frac{(u'')^2 \lambda}{E f}. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung bei der Spannweite l :

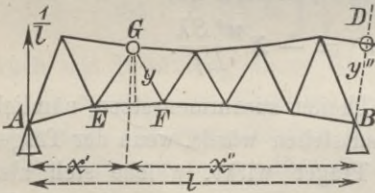
$$\begin{aligned} \Sigma \frac{u' S_0 \lambda}{E f l} &= \mathfrak{N}', & \Sigma \frac{u'' S_0 \lambda}{E f l} &= \mathfrak{N}'', \\ \Sigma \frac{(u')^2 \lambda}{2 E f l} &= \alpha, & \Sigma \frac{(u'')^2 \lambda}{2 E f l} &= \beta, & \Sigma \frac{u' u'' \lambda}{E f l} &= \gamma, \end{aligned}$$

so wird

$$5. \quad \begin{cases} +\tau' = (\mathfrak{N}' + 2\alpha M' + \gamma M'') l, \\ -\tau'' = (\mathfrak{N}'' + \gamma M' + 2\beta M'') l. \end{cases}$$

Die Werthe von u' und u'' lassen sich leicht durch Konstruktion bestimmen. Das in A wirkende Moment l erzeugt bei der Spannweite l in B eine vertikale Reaktion $= \frac{l}{l}$; ebenso erzeugt das in B wirkende Moment l in A eine vertikale Reaktion $\frac{l}{l}$. Die Spannungen u_1, u_2 , welche von diesen Reaktionen erzeugt werden, lassen sich leicht grafisch bestimmen, am besten mittels der Polygonalmethode. Will man die Rechnung anwenden, so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

Fig. 231.



$$6. \quad u' = \frac{x''}{ly}, \quad u'' = \frac{x'}{ly},$$

wenn x', x'' die Horizontalabstände des dem fraglichen Stabe EF (Fig. 231) konjugirten Punktes G , d. i. desjenigen, in welchem sich die beiden vom

Schnitte getroffenen anderen Stäbe schneiden, von A und B bedeuten und y der normale Abstand des Punktes G von EF ist.

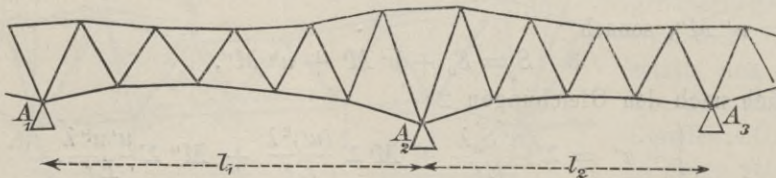
Sind die Enden des Trägers fest eingespannt, ohne dass durch die Einspannung selbst eine Deformation bewirkt ist, so wird $\tau' = \tau'' = 0$. Die Momente M' und M'' werden alsdann

$$7. \quad M' = -\frac{2\beta\mathfrak{N}' - \gamma\mathfrak{N}''}{4\alpha\beta - \gamma^2}, \quad M'' = -\frac{2\alpha\mathfrak{N}'' - \gamma\mathfrak{N}'}{4\alpha\beta - \gamma^2}.$$

§. 137. Kontinuierlicher Träger mit beliebiger Belastung.

Wir betrachten zunächst zwei anstossende Felder (Fig. 232) mit den Längen l_1, l_2 . Die Momente über den Stützen oder die Normalmomente

Fig. 232.



seien M_1, M_2, M_3 . Die Werthe von $\mathfrak{N}', \mathfrak{N}''$ für beide Felder seien $\mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2, \mathfrak{N}''_1, \mathfrak{N}''_2$ und die Werthe von α, β, γ bezüglich $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Für die Verdrehung der Normale über der Mittelstütze in beiden Feldern wird alsdann nach Formel 5:

$$\begin{aligned} -\tau_1'' &= (\mathfrak{N}_1'' + \gamma_1 M_1 + 2\beta_1 M_2) l_1, \\ +\tau_2' &= (\mathfrak{N}_2' + 2\alpha_2 M_2 + \gamma_2 M_3) l_2. \end{aligned}$$

Wenn die Stützen so angeordnet sind, dass der auf dieselben gelagerte Träger ganz ohne Spannung ist, wenn jegliche Belastung, auch die durch das Eigengewicht, fehlt, so ist offenbar $\tau_1'' = \tau_2'$. Die Addition der beiden vorigen Gleichungen gibt alsdann

$$8. \quad \gamma_1 l_1 M_1 + 2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_2 + \gamma_2 l_2 M_3 = - (l_1 \mathfrak{N}_1'' + l_2 \mathfrak{N}_2').$$

Sind aber die Stützen gegen die soeben vorausgesetzte Lage um bezüglich s_1, s_2, s_3 verschoben, so wird der Winkel ABC zwischen den Verbindungsgeraden AB, BC der Stützen um $\frac{s_2 - s_1}{l_1} + \frac{s_2 - s_3}{l_2}$ verkleinert.

Es muss daher $\tau_2' - \tau_1'' = \frac{s_2 - s_1}{l_1} + \frac{s_2 - s_3}{l_2}$ sein; daher wird

$$9. \quad \gamma_1 l_1 M_1 + 2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_2 + \gamma_2 l_2 M_3 = - (l_1 \mathfrak{N}_1'' + l_2 \mathfrak{N}_2') + \frac{s_1 - s_2}{l_1} - \frac{s_2 - s_3}{l_2}.$$

Diese Gleichung ist der Form nach in Uebereinstimmung mit den im I. Hefte der Theorie der Brücken für Stäbe mit vollem Querschnitte aufgestellten Gleichungen 20 (Seite 50), 176 (Seite 160) und 206 (Seite 177), so dass auch die weitere Behandlung ganz wie dort erfolgen kann.

Die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \mathfrak{N}', \mathfrak{N}''$ sind nicht identisch mit den dortigen Grössen gleicher Bezeichnung; sie werden vielmehr aus den dortigen Werthen durch Division mit $6EI_0$ erhalten, wenn I_0 das mittlere Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes bezeichnet.

Eine rein grafische Behandlung ist hier wohl möglich, indessen in der Ausführung weniger einfach als die Rechnung; wir wollen daher auf die rein grafische Behandlung nicht eingehen.

Das im I. Hefte der Theorie der Brücken über die Fixpunkte Gesagte gilt auch hier; die Lage derselben lässt sich ganz nach §. 94 daselbst bestimmen. Ueberhaupt gelten alle dort aufgestellten Regeln, in denen für die Normalmomente oder für die Abstände der Fixpunkte von den Stützen nicht bestimmte Werthe eingesetzt sind.

§. 138. Einfluss des Gitterwerkes. Wir betrachten zunächst einen Parallel-Gitterträger. Nehmen wir an, dass ein Feld gegen seine Mitte symmetrisch konstruirt und belastet ist, so haben je zwei symmetrisch liegende Gitterstäbe dieselbe Spannung S_0 . Die Werthe von u für diese beiden Stäbe werden aber gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, so dass sich die Werthe von $\frac{u S_0 \lambda}{E f l}$ für diese beiden Stäbe gegenseitig aufheben. Auf den Werth von $\mathfrak{N}', \mathfrak{N}''$ würde daher hier das Gitterwerk gar keinen Einfluss üben. Bei nicht symmetrischer An-

ordnung und Belastung ist der Einfluss des Gitterwerkes zwar vorhanden; er ist aber nur sehr gering. Da ferner $(u')^2$ und $(u'')^2$ stets positiv sind, so wird das Gitterwerk die Werthe von α und β nicht unwesentlich, (bis zu etwa 15 Prozent) vermehren. Die Werthe von u' , u'' haben für jedes Gurtstück gleiche, für jeden Gitterstab dagegen ungleiche Vorzeichen, $u'u''$ ist daher für die Gurte positiv, dagegen für alle Gitterstäbe negativ; der Werth von γ wird daher durch das Gitterwerk (bis zu etwa 15 Prozent) vermindert. Hierdurch ergibt sich im Allgemeinen eine Verminderung der Normalmomente (bei 2 Feldern bis zu etwa 13 Prozent, bei 3 Feldern bis zu etwa 9 Prozent, bei 5 Feldern bis zu etwa 10 Prozent für die äusseren, bis zu etwa 3 Prozent für die mittleren Mittelstützen; bei 4 Feldern kann in der mittleren Stütze eine geringe Vergrößerung eintreten).

Auch bei Trägern mit gekrümmten Gurten ergeben sich bei Berücksichtigung des Gitterwerkes die Normalmomente im Allgemeinen etwas kleiner, als bei Vernachlässigung des Gitterwerkes.

Bei Parallelträgern erhält man bei Annahme eines konstanten Querschnittes und Vernachlässigung des Gitterwerkes im Allgemeinen etwas genauere Werthe, als bei Annahme eines variablen Querschnittes und Vernachlässigung des Gitterwerkes.

§. 139. Bestimmung der Spannungen. 1. Bei Anwendung der Rechnung erscheint es angemessen, bei einer gegebenen Belastung die Spannungen S nach der Formel 3 zu bestimmen, da man die Werthe von S_0 , u' , u'' ohnehin zur Bestimmung der Normalmomente M' , M'' nöthig hat.

2. Handelt es sich um die Bestimmung der Maximalspannungen oder der Spannungsgrenzen, so erscheint die Anwendung der Influenzlinien als rationell. Man bestimmt zunächst die Normalmomente für den Fall, dass eine Einzellast $= 1$ oder gleich einem der gegebenen Radrücke an den einzelnen Knotenpunkten liegt, durch Rechnung; für jede dieser Lagen bestimmt man sodann, wie vorhin angegeben, sämtliche Spannungen. Man kann alsdann die Influenzlinien für die Spannung jedes einzelnen Stabes auftragen. Im Uebrigen wird man dann nach §. 17 verfahren.

3. Zweckmässig erscheint beim eintheiligen Gitterwerke auch die Anwendung einer Kombination der Rechnung mit der grafischen Lösung, indem man nur die Normalmomente durch Rechnung, alles Uebrige durch Konstruktion bestimmt. Wir wollen hierauf noch etwas näher eingehen.

Für das Eigengewicht tritt gegenüber dem einfachen Träger nur eine Verschiebung der Schlusslinie im Seilpolygone ein, die durch die

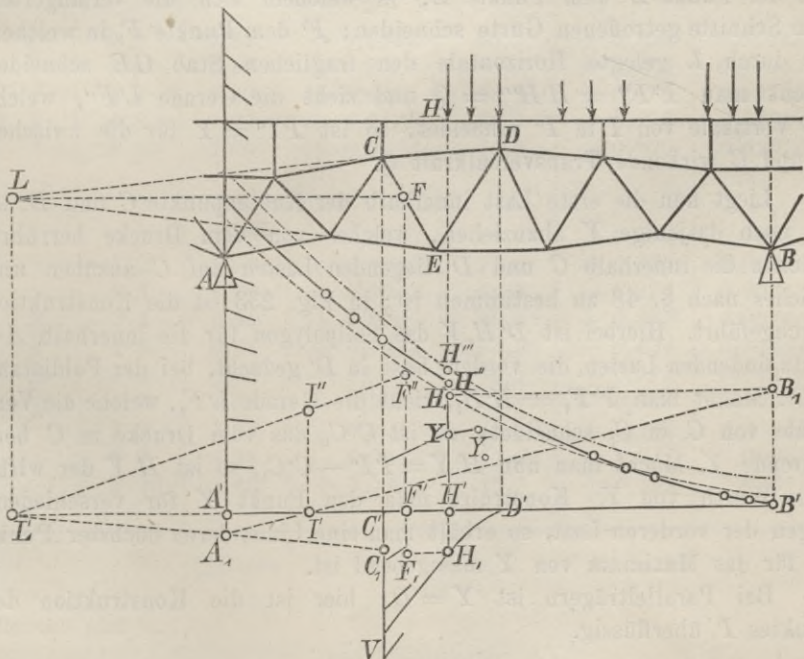
berechneten Normalmomente gegeben ist. Für die zufällige Last unterscheiden wir Gurte und Gitterwerk.

a. Gurte. Die gefährlichste Belastungsweise, also diejenige, bei welcher das Moment für einen bestimmten Knotenpunkt zum Maximum wird, lässt sich für gleichmässige Belastung nach dem im I. Hefte der Theorie der Brücken (§. 49 und 99) Gesagten bestimmen. Für ein System von Einzellasten ist diese Belastungsweise für die rohe Einstellung des Zuges ebenfalls massgebend; die genauere Lage lässt sich leicht durch Probiren finden.

Die Maximalmomente bestimmt man am besten in bekannter Weise durch das Seilpolygon. Die hierzu nöthigen Normalmomente wird man für ein System von Einzellasten am besten dadurch finden, dass man für die Normalmomente die Influenzlinien aufträgt und mit Hilfe eines verschiebbaren Papierstreifens die Addition der betreffenden Ordinaten vornimmt. Die Bestimmung der Gurtspannungen selbst kann dann nach §. 45 (vorlieg. Heft) erfolgen.

b. Gitterstäbe. Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich die gefährlichste Belastung ebenso, wie für den kontinuierlichen Gelenk-

Fig. 233.



träger nach §. 90 und 93 (vorlieg. Heft). Diese Regeln gelten auch zur rohen Einstellung des Zuges von Einzellasten; die genaue Lage findet man auch hier leicht durch Probiren.

Wir wollen nun noch die Veränderungen angeben, welche die in §. 48 (Fig. 75) gezeigte Konstruktion hier zu erfahren hat. Bezüglich des Stabes CE (Fig. 233) liege die vordere Last in H und der Zug rechts von H ; $H'H''$ sei alsdann die in bekannter Weise zu konstruierende Transversalkraft für den einfachen Träger. Man macht nun $H'H = \frac{M''}{l}$, $H''H''' = \frac{M' - M''}{l}$, also $HH''' = \frac{M'}{l}$, wenn M' , M'' die beiden Normalmomente bedeuten, wobei von H'' aus nach unten oder oben aufzutragen ist, je nachdem M'' , bezüglich $M' - M''$ negativ oder positiv ist. M' und M'' wird man am besten wieder mit Hilfe der Influenzlinie für M' und M'' bestimmen. Alsdann ist $H'H'''$ die zwischen A und C wirkende Transversalkraft Q für den kontinuierlichen Träger. Ist I der Angriffspunkt der Transversalkraft Q und $A'I = a$ (a von A' aus nach rechts, als positiv), so ist $M' = -Qa$, also $a = -\frac{M'}{Q}$. Hierzu mache man $A'A_1 = HH''' = \frac{M'}{l}$ (nach unten, wenn M' negativ ist), $B'B_1 = H'H$ und ziehe die Gerade A_1B_1 , welche $A'B'$ in I' schneidet, denn es ist $A'I' = A'B' \frac{A'A_1}{A'A_1 + B'B_1} = l \frac{A'A_1}{H'H'''} = l \frac{-M'}{l \cdot Q} = -\frac{M'}{Q}$. Es entspreche nun der Punkt L' dem Punkte L , in welchem sich die verlängerten, vom Schnitte getroffenen Gurte schneiden; F' dem Punkte F , in welchem die durch L gelegte Horizontale den fraglichen Stab CE schneidet. Macht man $F'F'' = H'H''' = Q$ und zieht die Gerade $L'F''$, welche die Vertikale von I in I'' schneidet, so ist $I'I'' = Y$ für die zwischen A und C wirkende Transversalkraft Q .

Liegt nun die erste Last innerhalb der Knotenpunkte C und D , so ist noch dasjenige Y abzuziehen, welches von dem Drucke herrührt, welchen die innerhalb C und D liegenden Lasten auf C ausüben und welches nach §. 48 zu bestimmen ist; in Fig. 233 ist die Konstruktion durchgeführt. Hierbei ist $D'H_1V$ das Seilpolygon für die innerhalb AC Platz findenden Lasten, die vordere Last in D' gedacht, bei der Poldistanz $C'D'$. Macht man $F'F_1 = H'H_1$, zieht die Gerade $L'F_1$, welche die Vertikale von C in C_1 schneidet, so ist $C'C_1$ das vom Drucke in C herrührende Y . Macht man nun $H'Y = I'I'' - C'C_1$, so ist $H'Y$ der wirkliche Werth von Y . Konstruirt man den Punkt Y für verschiedene Lagen der vorderen Last, so erhält man eine Linie, deren höchster Punkt Y_0 für das Maximum von Y massgebend ist.

Bei Parallelträgern ist $Y = Q$; hier ist die Konstruktion des Punktes I' überflüssig.

Beispiel. Kontinuierlicher Parallelträger mit zwei Feldern von je 30 Meter Spannweite mit eintheiligem Netzwerke (Taf. VIII) bei oben liegender Bahn. Das Eigengewicht sei 0,9 Ton. pro lauf. Met., wovon 0,67 am Obergurte, 0,23 am Untergurte wirkt; das Knotengewicht für einen oberen und unteren Knotenpunkt ist dem-

entsprechend $6 \cdot 0,67 = 4,0$ und $6 \cdot 0,23 = 1,4$ Ton. Die zufällige Last sei durch Fig. 6 (Taf. VIII) gegeben. Die wirklichen Querschnittsflächen, welche nach der ersten Näherungsberechnung bestimmt worden sind, gibt die folgende Tabelle. Dieselbe enthält gleichzeitig die Werthe u , d. i. der Spannungen, welche entstehen, wenn an der Mittelstütze das Moment 1 wirkt, sowie von $\frac{\lambda}{f}$, $u \frac{\lambda}{f}$ und $u^2 \frac{\lambda}{f}$. Wirkt über der Mittelstütze das Moment $+1$, so wirkt an der linken Stütze die nach unten gerichtete Reaktion $\frac{1}{l} = \frac{1}{300}$; die Spannung eines Gurtstückes, dessen gegenüberliegender Knotenpunkt von der linken Stütze den Abstand x hat, ist demnach $\frac{x}{300 \cdot 40} = \frac{x}{12000}$; die Spannungen der Gitterstäbe werden $\pm \frac{1}{300} \cdot \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{240}$.

Theil	Nummer	f	u	$\frac{\lambda}{f}$	$u \frac{\lambda}{f}$	$u^2 \frac{\lambda}{f}$
Obergurt	1 3	1,30	- 0,0050	46,1	- 0,231	0,00116
	3 5	1,60	- 0,0100	37,5	- 0,375	0,00375
	5 7	1,50	- 0,0150	40,0	- 0,600	0,00900
	7 9	1,20	- 0,0200	50,0	- 1,000	0,02000
	9 9'	1,50	- 0,0250	20,0	- 0,500	0,01250
Untergurt	0 2	0,95	+ 0,0025	63,2	+ 0,158	0,00040
	2 4	1,20	+ 0,0075	50,0	+ 0,375	0,00281
	4 6	1,30	+ 0,0125	46,1	+ 0,576	0,00720
	6 8	1,20	+ 0,0175	50,0	+ 0,875	0,01531
	8 10	1,50	+ 0,0225	40,0	+ 0,900	0,02025
Gitterstäbe	0 1	1,02	- 0,0042	49,0	- 0,204	0,00085
	1 2	0,66	+ 0,0042	75,8	+ 0,316	0,00132
	2 3	0,76	- 0,0042	65,8	- 0,274	0,00114
	3 4	0,56	+ 0,0042	89,3	+ 0,372	0,00155
	4 5	0,48	- 0,0042	104,2	- 0,434	0,00181
	5 6	0,76	+ 0,0042	65,8	+ 0,274	0,00114
	6 7	0,66	- 0,0042	75,8	- 0,316	0,00132
	7 8	1,02	+ 0,0042	49,0	+ 0,204	0,00085
	8 9	0,98	- 0,0042	51,0	- 0,213	0,00089
9 10	1,40	+ 0,0042	35,7	+ 0,149	0,00062	
		<input type="checkbox"/> Decim.	Decimeter			

Hiernach wird

$$\Sigma u^2 \frac{\lambda}{f} = 0,1039.$$

1. Einfluss des Eigengewichtes. Die in bekannter Weise bestimmten Spannungen S_0 , welche entstehen, wenn der Träger über der Mittelstütze getrennt ist, sowie die Werthe von $\frac{u S_0 \lambda}{f}$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Theil	Nummer	S_0	$\frac{u S_0 \lambda}{f}$	$u M_1$	S	S nach der gewöhnlichen Theorie
Obergurt	1 3	- 16,20	+ 3,742	+ 4,77	- 11,43	- 11,14
	3 5	- 24,30	+ 9,113	+ 9,54	- 14,76	- 13,18
	5 7	- 24,30	+ 14,580	+ 14,31	- 9,99	- 9,12
	7 8	- 16,20	+ 16,200	+ 19,08	+ 2,88	+ 4,04
	9 9'	0	0	+ 23,85	+ 23,85	+ 25,30
Untergurt	0 2	+ 9,60	+ 1,517	- 2,39	+ 7,21	+ 7,07
	2 4	+ 21,75	+ 8,156	- 7,16	+ 14,59	+ 14,16
	4 6	+ 25,80	+ 14,861	- 11,93	+ 13,87	+ 13,15
	6 8	+ 21,75	+ 19,031	- 16,70	+ 5,05	+ 4,04
	8 10	+ 9,60	+ 8,645	- 21,47	+ 11,87	- 13,17
Gitterwerk	0 1	- 16,00	+ 3,264	+ 3,98	- 12,02	- 11,78
	1 2	+ 11,00	+ 3,476	- 3,98	+ 7,02	+ 6,78
	2 3	- 9,25	+ 2,535	+ 3,98	- 5,27	- 5,03
	3 4	+ 4,25	+ 1,581	- 3,98	+ 0,27	+ 0,03
	4 5	- 2,50	+ 1,085	+ 3,98	+ 1,48	+ 1,72
	5 6	- 2,50	- 0,685	- 3,98	- 6,48	- 6,72
	6 7	+ 4,25	- 1,343	+ 3,98	+ 8,23	+ 8,47
	7 8	- 9,25	- 1,885	- 3,98	- 13,23	- 13,47
	8 9	+ 11,00	- 2,343	+ 3,98	+ 14,98	+ 15,22
	9 10	- 16,00	- 2,384	- 3,98	+ 19,98	- 20,22
		Tonnen		Tonnen		Tonnen

Hiernach wird $\sum \frac{u S_0 \lambda}{f} = + 99,146$, also $99,146 + 0,1039 M_1 = 0$,
 $M_1 = - 954$ Tonnendecimeter.

Vernachlässigt man das Gitterwerk, so wird $95,845 + 0,0924 M_1 = 0$, $M_1 = - 1037$. Nach der gewöhnlichen Theorie, unter Voraussetzung eines konstanten Querschnittes wird $M_1 = - 0,125 \cdot 0,09 \cdot 300^2 = - 1012$.

Die für $M_1 = - 954$ berechneten Werthe von $u M_1$, d. s. die Spannungen, welche durch die Wirkung des Momentes M_1 allein entstehen, sowie die wirklichen Spannungen $S = S_0 + u M_1$ der Stäbe, endlich die nach der gewöhnlichen Theorie unter der Voraussetzung eines konstanten Trägheitsmomentes ($M_1 = - 1012$) berechneten Spannungen gibt die vorige Tabelle.

2. Einfluss der zufälligen Last. Wir nehmen zunächst an, dass eine Einzellast 1 an einem beliebigen der oberen Knotenpunkte liege. Wir bestimmen zunächst die Spannungen S' , S'' unter der blossen Voraussetzung eines linken, bezüglich rechten Stützendruckes 1 , sowie die Werthe von $\frac{u S' \lambda}{f}$, $\frac{u S'' \lambda}{f}$. Die Resultate gibt die folgende Tabelle:

Theil	Nummer	S'	S''	$\frac{u S' \lambda}{f}$	$\frac{u S'' \lambda}{f}$	Theil	Nummer	S'	S''	$\frac{u S' \lambda}{f}$	$\frac{u S'' \lambda}{f}$
Obergurt	1 3	-1,50	-6,00	-0,347	-1,386	Gitterstäbe	0 1	-1,25	+1,25	-0,255	+0,255
	3 5	-3,00	-4,50	-1,125	-1,688		1 2	+1,25	-1,25	-0,395	+0,395
	5 7	-4,50	-3,00	-2,700	-1,800		2 3	-1,25	+1,25	-0,343	+0,343
	7 9	-6,00	-1,50	-6,000	-1,500		3 4	+1,25	-1,25	-0,465	+0,465
	9 9'	-7,50	0	-3,750	0		4 5	-1,25	+1,25	-0,543	+0,543
Untergurt	0 2	+0,75	+6,75	-0,119	-1,066		5 6	+1,25	-1,25	-0,343	+0,343
	2 4	+2,25	+5,25	-0,844	-1,969		6 7	-1,25	+1,25	-0,395	+0,395
	4 6	+3,75	+3,75	-2,160	-2,160		7 8	+1,25	-1,25	-0,255	+0,255
	6 8	+5,25	+2,25	-4,594	-1,969		8 9	-1,25	+1,25	-0,266	+0,266
	8 10	+6,75	+0,75	-6,075	-0,675		9 10	+1,25	-1,25	-0,186	+0,186

Beispielsweise liege nun die Last im Punkte 3; alsdann ist die Summe der $\frac{u S' \lambda}{f}$ auf der linken Seite der Last = $-0,347 - 0,963 - 0,993 = -2,303$ (wenn man den Stab 24 mit zur linken Seite rechnet), die Summe der $\frac{u S'' \lambda}{f}$ auf der rechten Seite der Last = $-4,988 - 4,804 + 2,453 = -7,339$. Demnach ist, wenn eine Last 1 im Punkte 3 liegt, $\Sigma \frac{u S_0 \lambda}{f} = -0,7 \cdot 2,303 - 0,3 \cdot 7,339 = -3,814$. Folglich wird $-3,814 + 0,1039 M_1 + 0,1039 M_1 = 0$, $M_1 = + \frac{3,814}{0,2078} = +18,35$. In ganz gleicher Weise ergeben sich die folgenden Resultate:

	Die Last liegt in	1	3	5	7	9
- M_1 genau		6,41	18,35	26,70	26,06	12,30
- M_1 bei Vernachlässigung des Gitterwerkes		7,69	20,91	28,52	27,54	12,97
- M_1 nach der gewöhnlichen Theorie.....		7,43	20,48	28,13	26,78	12,83

Wir wollen nun beispielsweise die Bestimmung der Spannungen des Gurtstückes 3 5 durchführen. Wenn die Last im linken Felde im Abstände $n l$ von der linken Stütze liegt, so ist bei dem linken Auflagerdruck D : $M_1 = D l - G (l - n l)$, also $D = \frac{M_1}{l} + G (1 - n)$. Liegt die Last links von 3 oder in 3, so ist für den Punkt 4: $M = D \cdot 0,4 l - G (0,4 - n) l = 0,4 M_1 + 0,6 n G l$, $S = - \frac{M}{40}$, d. i. für $G = 1$, $l = 300$

$$S = -0,01 M_1 - 4,5 n.$$

Liegt die Last auf der rechten Seite von 5 oder in 5, so ist für den Punkt 4: $M = D \cdot 0,4 l = 0,4 M_1 + 0,4 (1 - n) G l$, $S = \frac{M}{40}$, d. i. für $G = 1$, $l = 300$

$$S = -0,01 M_1 - 3,0 (1 - n).$$

Liegt die Last im rechten Felde, so ist $D = \frac{M_1}{l}$, $M = D \cdot 0,4 l = 0,4 M_1$, also

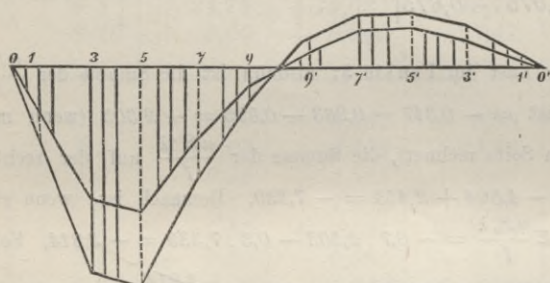
$$S = -0,01 M_1.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

Last liegt in	S für G =			Last liegt in	S für G =		
	1	6	4		1	6	4
1	- 0,386	- 2,32	- 1,54	9'	+ 0,123	+ 0,74	+ 0,49
3	- 1,167	- 7,00	- 4,67	7'	+ 0,261	+ 1,57	+ 1,04
5	- 1,233	- 7,40	- 4,93	5'	+ 0,267	+ 1,60	+ 1,07
7	- 0,639	- 3,83	- 2,56	3'	+ 0,184	+ 1,10	+ 0,74
9	- 0,177	- 1,06	- 0,71	1'	+ 0,064	+ 0,38	+ 0,26

In Fig. 234 sind hiernach die Influenzlinien für $G=6$ und 4 Ton. aufgetragen, indem man nun für verschiedene Laststellungen durch Addition der bezüglichen

Fig. 234.



Ordinaten die Spannung bestimmt, so findet man, dass S zum negativen Maximum wird, wenn das erste Rad des nach rechts fahrenden Zuges am Punkte 9 und zum positiven Maximum, wenn das zweite Rad des nach links fahrenden Zuges beim Punkte 9' liegt und zwar ist

$$\max(-S) = -42,43,$$

$$\max(+S) = +10,49.$$

Wir bestimmen ferner beispielsweise die Spannung des Gitterstabes 6 7. Liegt die Last links von 5 oder in 5, so ist $Q = D - G = \frac{M_1}{l} + G(1-n) - G = \frac{M_1}{l} - nG$,
 $S = -Q \sec \alpha = -\frac{5}{4}Q$, d. i. für $G = 1$, $l = 300$:

$$S = -\frac{M_1}{240} + 1,25n.$$

Liegt die Last auf der rechten Seite von 7 oder in 7, so ist $Q = D = \frac{M_1}{l} + G(1-n)$,
 $S = -\frac{5}{4}Q$, d. i.

$$S = -\frac{M_1}{240} - 1,25(1-n).$$

Liegt die Last im rechten Felde, so wird $Q = D$, $S = -\frac{5}{4}Q$, d. i.

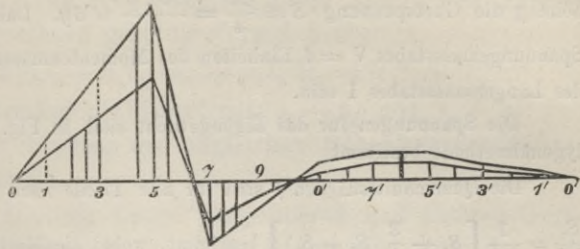
$$S = -\frac{M_1}{240}.$$

Die hiernach berechneten Werthe enthält die folgende Tabelle:

Last liegt in	S für G =			Last liegt in	S für G =		
	1	6	4		1	6	4
1	+ 0,152	+ 0,912	+ 0,608	9'	+ 0,051	+ 0,306	+ 0,204
3	+ 0,451	+ 2,706	+ 1,804	7'	+ 0,109	+ 0,654	+ 0,436
5	+ 0,736	+ 4,416	+ 2,944	5'	+ 0,111	+ 0,666	+ 0,444
7	- 0,266	- 1,596	- 1,064	3'	+ 0,076	+ 0,456	+ 0,304
9	- 0,074	- 0,444	- 0,296	1'	+ 0,027	+ 0,162	+ 0,108

Die entsprechenden Influenzlinien zeigt Fig. 235. Hierdurch findet sich, dass Q zum positiven Maximum wird, wenn im linken Felde die zweite Last des nach rechts fahrenden Zuges beim Punkte 5 liegt und wenn ausserdem das zweite Feld ebenso belastet ist, wie für $\max(M)$; dass ferner Q zum negativen Maximum wird, wenn nur eine Lokomotive nebst Tender von rechts so auf das linke Feld gefahren ist, dass die zweite Last beim Punkte 7 liegt. Es ergibt sich

Fig. 235.



$$\max(-S) = -18,36, \quad \max(+S) = +4,06.$$

Im ersten Falle entspricht der Belastung des linken Feldes $\max(-S) = -15,53$ der des rechten Feldes $\max(-S) = -2,83$.

Auf Taf. VIII ist die vollständige grafische Lösung durchgeführt, wobei nur die durch Rechnung bestimmten Normalmomente für das Eigengewicht und die Einzellasten von 6 und 4 Tonnen, welche an den oberen Knotenpunkten liegen, benützt sind. In Fig. 2 sind die entsprechenden Stützendrücke $D = \frac{M_1}{l}$ durch die Linien a dargestellt; die Ordinaten sind im 35,5fachen des Kraftmassstabes II aufgetragen; die Reduktion geschah mit Hilfe des Reduktionswinkels ABC , wobei $AC = \frac{BC}{35,5}$ ist. In Fig. 7 sind die Normalmomente M_1 selbst im 8fachen des Momentenmassstabes IV aufgetragen; zur Reduktion dient der Reduktionswinkel BAC , wobei $BC = \frac{AC}{8}$ ist.

In Fig. 2 ist die Bestimmung der Transversalkräfte ganz nach dem oben Gesagten durchgeführt. Bemerket sei nur, dass für die negativen Transversalkräfte das rechte Feld mit Wagen besetzt angenommen wurde; nur in der Nähe der linken Stütze wird $-Q$ grösser, wenn das zweite Feld mit Lokomotiven und der linke Theil des linken Feldes besetzt ist.

In Fig. 6 ist nach dem oben Gesagten die Bestimmung der Gurtspannungen für das rechte Feld durchgeführt. Für die positiven Momente ist das rechte Feld allein belastet angenommen. Für die negativen Momente wurde zunächst das linke Feld so mit Lokomotiven besetzt angenommen, dass das Normalmoment zum Maximum wird; es tritt dies ein, wenn das erste Rad des links fahrenden Zuges bei 1 liegt. Ist BD dieses Normalmoment, so werden die Momente für andere Punkte des rechten Feldes durch die Gerade AD dargestellt. Man kann nun durch Konstruktion leicht finden, dass für den Punkt $8'$ bei keiner Lage einer Last im rechten Felde das Moment negativ werden kann; für die Punkte $1'$ bis $8'$ gibt daher die Gerade AD die negativen Maximalmomente. Für den Punkt $9'$ dagegen kann das Moment bei Belastung des rechten Feldes negativ werden und zwar tritt das Maximum ein, wenn das erste Rad des nach links fahrenden Wagenzuges bei $6'$ liegt. Wenn das linke Feld mit Wagen, das rechte mit Lokomotiven besetzt ist, so ergibt sich hier das negative Maximalmoment ein wenig kleiner. Für das Moment bei 10 ist das rechte Feld total mit Wagen besetzt angenommen.

Für die Konstruktion der Seilpolygone ist die Poldistanz $= 20$ Tonnen gewählt und zwar für die zufällige Last (Pol O) nach dem Massstabe II, für das Eigen-

gewicht (Pol O_1) dreimal so gross. In dem Momentenmassstabe IV muss daher 20 Tonnenmeter = 1 Meter des Längenmassstabes I gemacht werden.

Da die Trägerhöhe = 4^m ist, so ist bei dem Momente M oder der Seilpolygonhöhe y die Gurtspannung $S = \frac{M}{4} = \frac{20 \cdot y}{4} = 5y$. Daher muss eine Einheit des Spannungsmassstabes V = 4 Einheiten des Momentenmassstabes IV oder = $\frac{1}{5}$ Einheit des Längenmassstabes I sein.

Die Spannungen für das Eigengewicht sind in Fig. 9 ausserdem nach der Polygonalmethode bestimmt.

Die Querschnittsflächen f sind für alle Theile nach der Regel $f = \frac{S_0}{1,4} + \frac{S_1}{0,6} + \frac{S_2}{1,4} = \frac{1}{0,6} \left[S_1 + \frac{3}{7} (S_0 + S_2) \right]$ bestimmt, wobei die Multiplikation mit $\frac{3}{7}$ mit Hilfe des Reduktionswinkels Fig. 3 erfolgt ist, in welchem sich $ab : bc = 7 : 3$ verhält.

In Fig. 2 und 7 sind die Maximalspannungen ($S_0 + S_1$) durch kleine Kreise mit angeschriebenen Zahlen, die Querschnittsfläche durch horizontale Gerade dargestellt.

Die Querschnittsflächen sind nochmals in Fig. 4 und 8 nach dem Massstabe VIII, ebenso auf Taf. I in Fig. 4 aufgetragen.

§. 140. Einfluss der Wärme. Wenn sich die einzelnen Theile eines einfachen Trägers mit eintheiligem Gitterwerke ungleich erwärmen, so entstehen hierdurch Formänderungen, welche aber keine Veränderung der Spannung der einzelnen Theile bedingen. Beim kontinuierlichen Träger aber entstehen durch die Deformationen Auflagerdrücke, welche wiederum Spannungen der einzelnen Theile hervorrufen. Wir wollen nur voraussetzen, dass sich der Ober- und Untergurt ungleich erwärmen. Die Aenderung der Temperatur gegen eine mittlere Temperatur bei welcher keine Spannungen vorhanden sind, seien für Ober- und Untergurt bezüglich t_1 , t_2 , für die Gitterstäbe durchschnittlich t_3 , wobei wir etwa $t_3 = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$ setzen können.

Ist ε der Ausdehnungskoeffizient für 1 Grad Temperaturänderung, so ist in den Formeln 1, wenn wir uns den Träger unbelastet denken, um lediglich den Einfluss der Wärme zu finden, $\Delta\lambda = \frac{S\lambda}{Ef} + \varepsilon t\lambda$ zu setzen und hierin ist nach Formel 3: $S = u' M' + u'' M''$. Die Formeln 1 gehen hierdurch über in

$$v' = \Sigma \frac{(u')^2 M' \lambda}{Ef} + \Sigma \frac{u' u'' M'' \lambda}{Ef} + \Sigma \varepsilon u' t \lambda$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + v' = M' \Sigma \frac{(u')^2 \lambda}{Ef} + M'' \Sigma \frac{u' u'' \lambda}{Ef} + \Sigma \varepsilon u' t \lambda, \\ - v'' = M' \Sigma \frac{u' u'' \lambda}{Ef} + M'' \Sigma \frac{(u'')^2 \lambda}{Ef} + \Sigma \varepsilon u'' t \lambda, \end{array} \right.$$

oder nach den in §. 136 eingeführten Abkürzungen und wenn man ausserdem noch $\Sigma \varepsilon u' t \lambda = T'$, $\Sigma \varepsilon u'' t \lambda = T''$ setzt,

$$10. \quad \begin{cases} +\tau' = T' + (2\alpha M' + \gamma M'')l, \\ -\tau'' = T'' + (\gamma M' + 2\beta M'')l. \end{cases}$$

In Formel 5 ist also $\mathfrak{X}'l$ und $\mathfrak{X}''l$ bezüglich durch $\Sigma \varepsilon u' t l$ und $\Sigma \varepsilon u'' t l$ zu ersetzen. Dementsprechend geht die Formel 8 über in

$$11. \quad \gamma_1 l_1 M_1 + 2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_2 + \gamma_2 l_2 M_3 = T_1'' + T_2''.$$

Die in Formel 9 auftretenden Glieder mit $s_1 - s_2$ und $s_2 - s_3$ sind wegzulassen, falls der Einfluss der ungleichen Höhenlage der Stützen gesondert untersucht wird.

Bezeichnen wir nun die Länge eines oberen und unteren Gurtstückes, sowie eines Gitterstabes mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so wird unter der Voraussetzung gleichen Materiales

$$12. \quad T = \varepsilon t_1 \Sigma u_1 \lambda_1 + \varepsilon t_2 \Sigma u_2 \lambda_2 + \varepsilon t_3 \Sigma u_3 \lambda_3.$$

Bei symmetrischer Anordnung wird das letzte Glied $= 0$, weil sich für zwei symmetrisch liegende Stäbe der Werth von u gleich, aber entgegengesetzt ergibt. Allgemein wird das letzte Glied sehr klein, so dass wir genau oder annähernd

$$13. \quad T = \varepsilon t_1 \Sigma u_1 \lambda_1 + \varepsilon t_2 \Sigma u_2 \lambda_2$$

setzen können. Beim Parallelträger wird $\Sigma u_2 \lambda_2 = -\Sigma u_1 \lambda_1$, daher

$$14. \quad T = \varepsilon (t_1 - t_2) \Sigma u \lambda.$$

Bei der Höhe h wird $u = \frac{l-x}{lh}$, daher $\Sigma u \lambda = \frac{1}{lh} \int_0^l (l-x) dx = \frac{l}{2h}$,

folglich

$$15. \quad T = \frac{1}{2} \varepsilon (t_1 - t_2) \frac{l}{h}.$$

Setzen wir bei Bestimmung der Werthe α, β, γ einen konstanten Querschnitt voraus, so wird $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{6EI_0} = \frac{1}{3Efh^2}$. Die Gleichung 11 geht daher über in

$$16. \quad M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{3}{2} E \varepsilon f h (t_1 - t_2) (l_1 + l_2).$$

Für Schmiedeeisen kann man $E = 2000$ Ton. pro \square^{cm} , $E = 0,0000118$, also $E \varepsilon = 0,024$ Ton. pro \square^{cm} setzen. Wie gross $t_1 - t_2$ unter verschiedenen Verhältnissen werden kann, ist zur Zeit noch nicht vollkommen festgestellt. Vorläufig wird man annehmen können, dass sich der Obergurt bis zu etwa 10^0 C. mehr erwärmen kann, als der Untergurt, so dass $t_1 - t_2 = 10^0$ und $E \varepsilon (t_1 - t_2) = 0,24$ Ton. pro \square^{cm} zu setzen wäre.

Bei einem Träger mit zwei gleich langen Feldern wird, wenn wir hier die Indices der drei Stützen 0, 1, 2 nennen und $M_0 = M_2 = 0$ setzen,

$$17. \quad M_1 = \frac{3}{4} E \varepsilon f h (t_1 - t_2).$$

Die durch dieses Moment in den Gurten an der Mittelstütze entstehende spezifische Spannung ist $K = \frac{M_1}{hf} = \frac{3}{4} E \varepsilon (t_1 - t_2) = 0,18$ Ton. pro \square^{cm} , so dass die Beanspruchung an der Mittelstütze um etwa 24 Prozent verändert werden kann und zwar wird sowohl der Zug im Obergurte, als der Druck im Untergurte vermindert. Dagegen wird im übrigen Theile der Druck im Obergurte und der Zug im Untergurte vergrößert.

Bei einem Träger mit drei Feldern mit den Längen l_1, l, l_1 und den Indices $0, 1, 2, 3$ der Stützen wird, da $M_0 = 0, M_1 = M_2$ zu setzen ist, $0 + 2M_1(l + l_1) + M_1l = \frac{3}{2} E \varepsilon f h (t_1 - t_2) (l + l_1)$, mithin

$$18. \quad M_1 = M_2 = \frac{3 E \varepsilon f h (t_1 - t_2) (l + l_1)}{2(3l + 2l_1)}.$$

Für $l = 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,3 \cdot l_1$ wird bezüglich $M_1 = M_2 = 0,606, 0,600, 0,594, 0,589, 0,585 E \varepsilon f h (t_1 - t_2)$.

Für einen Träger mit vier Feldern mit den Längen l_1, l, l, l_1 und den Indices $0, 1, 2, 3, 4$ der Stützen wird, da $M_0 = M_4 = 0, M_1 = M_3$ ist,

$$2 M_1 (l + l_1) + M_2 l = \frac{3}{2} E \varepsilon (t_1 - t_2) (l_1 + l),$$

$$2 M_1 l + 4 M_2 l = \frac{3}{2} E \varepsilon (t_1 - t_2) 2l.$$

Demnach wird

$$19. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{3}{2} E \varepsilon (t_1 - t_2) \frac{l + 2l_1}{3l + 4l_1}, \\ M_2 = \frac{3}{2} E \varepsilon (t_1 - t_2) \frac{l + l_1}{3l + 4l_1}. \end{cases}$$

Hiernach wird für $l = 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,3 \cdot l_1$ bezüglich $M_1 = 0,650, 0,643, 0,637, 0,632, 0,627$ und $M_2 = 0,426, 0,428, 0,432, 0,434, 0,437 \cdot E \varepsilon f h (t_1 - t_2)$.

Beispiel Wir wollen noch den Einfluss der Wärme bei dem im §. 139 behandelten Beispiele bestimmen. Hier ist in Formel 11 $\beta_1 = \alpha_2 = \frac{1}{El} \Sigma u^2 \frac{\lambda}{f}$, $T_1'' = T_2' = \varepsilon \Sigma u t \lambda$, $M_1 = 0, M_2 = M_1, M_3 = 0, l_1 = l_2 = l$ zu setzen, daher

$$2 M_1 \Sigma u^2 \frac{\lambda}{f} = E \varepsilon \Sigma u t \lambda.$$

Bereits früher wurde $\Sigma u^2 \frac{\lambda}{f} = 0,1039$ gefunden. Ferner wird für den Obergurt $\Sigma u t \lambda = + t_1 \cdot 60 (0,005 + 0,010 + 0,015 + 0,020 + 0,025) = + 4,50 t_1$, für den Untergurt $- t_2 \cdot 60 (0,0025 + 0,0075 + 0,0125 + 0,0175 + 0,0225) = - 3,75 t_2$, also $\Sigma u t \lambda = 4,50 t_1 - 3,75 t_2$. Setzen wir $t_2 = 30, t_1 = 40^\circ$, so wird $\Sigma u t \lambda = 67,5$. Setzen wir $E \varepsilon = 0,024$ Ton. pro $\square^{cm} = 2,4$ Ton. pro \square^{dcm} , so wird $E \varepsilon \Sigma u t \lambda = 2,4 \cdot 67,5 = 162$, also $2 \cdot 0,1039 M_1 = 162$, folglich

$$M_1 = 780 \text{ Tonnen-Decimeter.}$$

Nach der Näherungsregel 17 wird, wenn man $h = 40, t_1 - t_2 = 10, f$ im Mittel = $1,325 \square^{dcm}$ setzt, $M_1 = \frac{3}{4} 2,4 \cdot 1,325 \cdot 40 \cdot 10 = 954$ Ton.-Dec.

Die durch die Temperatur in irgend einem Theile erzeugte Spannung ist nun

$$S = u M_1 = 780 u.$$

Wir wollen nun noch die hieraus resultirende Vergrößerung der Querschnittsfläche bestimmen. Ist S_{max} und S_{min} das Maximum und Minimum der Spannung eines Stabes, so ist (siehe Winkler's Wahl der zulässigen Inanspruchnahme, 1877, §. 5)

$$f = \frac{S_{max}}{0,75} - \frac{S_{min}}{1,70}.$$

Ist nun S_0 , S_1 , S_2 die Spannung für das Eigengewicht, das positive und negative Maximum für die zufällige Last, S_t die Spannung in Folge der Wärme, so ist, wenn man S_1 , S_2 in Folge der Erschütterungen um 30 Prozent vergrößert, falls S_t eine Vergrößerung der Spannung bewirkt, $S_{max} = S_0 + 1,3 S_1 + S_t$, $S_{min} = S_0 - 1,3 S_2$ und falls S_t eine Verminderung bewirkt, $S_{max} = S_0 + 1,3 S_1$, $S_{min} = S_0 - 1,3 S_2 - S_t$. Dies eingesetzt, gibt im ersten Falle

$$f = \frac{S_0}{1,4} + \frac{S_1}{0,6} + \frac{S_2}{1,4} + \frac{S_t}{0,75},$$

und im zweiten Falle

$$f = \frac{S_0}{1,4} + \frac{S_1}{0,6} + \frac{S_2}{1,4} + \frac{S_t}{1,70},$$

so dass die Vergrößerung der Querschnittsfläche durch den Einfluss der Wärme bezüglich $\frac{S_t}{0,75}$ und $\frac{S_t}{1,70}$ beträgt.

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Veränderungen der Spannungen und Vergrößerungen der Querschnittsflächen zusammengestellt, wobei mit + und - eine Vergrößerung und Verminderung des absoluten Werthes der Spannung bezeichnet ist.

Theil	Nummer	Spannung	Vergrößerung der Fläche	Theil	Nummer	Spannung	Vergrößerung der Fläche
Obergurt	1 3	+ 3,9	5,2	Gitterstäbe	0 1	+ 3,3	4,4
	3 5	+ 7,8	10,4		1 2	+ 3,3	4,4
	5 7	+ 11,7	15,6		2 3	+ 3,3	4,4
	7 9	+ 15,6	20,8		3 4	+ 3,3	4,4
	9 9'	- 19,5	11,5		4 5	+ 3,3	4,4
Untergurt	0 2	+ 2,0	2,7		5 6	- 3,3	1,9
	2 4	+ 5,9	7,9		6 7	- 3,3	1,9
	4 6	+ 9,8	13,1		7 8	- 3,3	1,9
	6 8	+ 13,7	18,3		8 9	- 3,3	1,9
	8 10	- 17,6	10,4		9 10	- 3,3	1,9
			Tonnen	□Centim.			Tonnen

Die sich hieraus ergebende durchschnittliche Vergrößerung der Querschnittsfläche oder des Volumens beträgt 13 Prozent.

Wir schliessen hieran noch die Bestimmung der Formänderung in Folge der Wärme. Die wirkliche Längenänderung eines Stabes ist

$$\Delta l = \frac{S l}{E f} + \varepsilon (t_1 - t_2) l.$$

Die sich hiernach ergebenden Längenänderungen nebst den Spannungen u' und u'' , welche ein bezüglich linker und rechter Stützdruck $= 1$ erzeugt, wenn man das linke Feld des Trägers als einfachen Träger betrachtet, sowie endlich die Werthe von $u'\Delta l$ und $u''\Delta l$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Theil	Nr.	Δl	u'	u''	$u'\Delta l$	$u''\Delta l$	$\Sigma u'\Delta l$	$\Sigma u''\Delta l$
Oberquert		+						
	1 3	2,742	-1,50	-6,00	-4,11	-16,45	-4,11	-23,54
	3 5	2,686	-3,00	-4,50	-8,06	-12,09	-12,16	-11,45
	5 7	2,598	-4,50	-3,00	-11,69	-7,79	-23,86	-3,66
	7 9	2,442	-6,00	-1,50	-14,65	-3,66	-38,51	0
9 9'	2,442	-7,50	0	-18,32	0			
Untergurt	0 2	2,187	+0,75	+6,75	+1,64	+14,76		
	2 4	2,272	+2,25	+5,25	+5,11	+11,93	+1,64	+28,15
	4 6	2,350	+3,75	+3,75	+8,81	+8,81	+6,75	+16,22
	6 8	2,466	+5,25	+2,25	+12,85	+5,85	+15,56	+7,41
	8 10	2,476	+6,75	+0,75	+16,71	+1,86	+28,41	+1,86
Gitterstäbe	0 1	1,984	-1,25	+1,25	-2,48	+2,48		
	1 2	2,157	+1,25	-1,25	+2,70	-2,70		
	2 3	1,956	-1,25	+1,25	-2,44	+2,44	+0,22	-1,20
	3 4	2,212	+1,25	-1,25	+2,77	-2,77		
	4 5	1,827	-1,25	+1,25	-2,28	+2,28	+0,54	-0,88
	5 6	2,174	+1,25	-1,25	+2,72	-2,72		
	6 7	1,940	-1,25	+1,25	-2,42	+2,42	+0,98	-0,44
	7 8	2,146	+1,25	-1,25	+2,68	-2,68		
	8 9	1,981	-1,25	+1,25	-2,48	+2,48	+1,42	-0,18
	9 10	2,124	+1,25	-1,25	+2,66	-2,66		
		Millim.			Millimeter		Millimeter	

Hiernach wird z. B. für den Knotenpunkt 4: $\Sigma u'\Delta l = -12,16 + 6,75 + 0,54 = -4,87$, $\Sigma u''\Delta l = -11,45 + 16,22 - 0,88 = +3,89$, mithin $\Delta y = -0,6 \cdot 4,87 + 0,4 \cdot 3,89 = -2,92 + 1,56 = -1,37$. In gleicher Weise findet man für die Knotenpunkte 2, 4, 6, 8 bezüglich $\Delta y = -1,51, -1,37, -0,94, -0,39$ Millimeter.



Literatur.

Chronologisch geordnet.

I. Einzelne Werke.

1. Reech. Cours de mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps. Paris, 1852.
2. Laissle und Schübler. Der Bau der Brückenträger. Stuttgart. I. Aufl. 1857. IV. Aufl. (2 Bände) 1876.
3. Scheffler. Ueber Gitter- und Bogenträger und über die Festigkeit der Gefässwände etc. Braunschweig, 1862.
4. Lenz. Die Balkenbrücken von Schmiedeeisen. Berlin, 1865. II. unveränderte Aufl. 1874.
5. Ritter. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. Hannover, 1863. III. Aufl. 1873.
6. Culmann. Die grafische Statik. Zürich, 1864. II. Aufl. I. Bd. 1875.
7. Merrill. Iron truss bridges. Method of calculating strains. New-york, 1870.
8. Diedrichs. Theory of strains and construction of bridges. Baltimore, 1871.
9. Anderson. The strength of materials and structures. London, 1872.
10. Bow. Economics of construction in relation to framed structures. London, 1873.
11. Young. Simple pract. methods of calculating strains on girders etc. London, 1873.
12. Levy. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris, 1874.
13. Tetmayer. Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlkonstruktionen. Zürich, 1875.
14. Haupt. General theory of bridge construction; demonstrations of the principles of the art and their application to practice. New-york, 1875.
15. Jay du Bois. The elements of graphical statics and their application to framed structures. Newyork, 1875. II. ed. 1877.

16. Böhlk. Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Oeffnung. Hannover, 1877.
17. Holzhey. Vorträge über Baumechanik. Wien, 1879.
18. Krohn. Resultate aus der Theorie des Brückenbaues. I. Theil. Balkenbrücken. Aachen, 1879.
19. Foepppl. Theorie des Fachwerks. Leipzig, 1880.
20. Stelzel. Theorie einfacher, statisch bestimmter Brückenträger. Wien, 1880.
21. Burr. A cours on the stresses in the bridge and roof trusses, arched ribs and suspension bridges. Newyork, 1880.
22. Chalmers. Graphical determination of forces in engineering structures. London, 1881.
23. Müller-Breslau. Elemente der grafischen Statik der Baukonstruktionen für Architekten und Ingenieure. Berlin, 1881.
24. Schäffer und Sonne. Der Brückenbau. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Band. (Artikel: Konstruktion der eisernen Balkenbrücken von Steiner). Leipzig, 1881.

II. Artikel in Zeitschriften.

a. Allgemeine Theorie der Spannungen.

1. Schwedler. Theorie der Brückenbalkensysteme. Erbkam's Z. f. Bauw. 1851.
2. Wöhler. Theorie rechteckiger eiserner Brückenbalken mit Gitterwänden und Blechwänden. Erbkam's Z. f. Bauw. 1855.
3. Prüsmann. Ueber schmiedeeiserne Brücken. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1855.
4. Baensch. Zur Theorie der Brückenbalkensysteme. Erbkam's Z. f. Bauw. 1857.
5. Schwarz. Beitrag zur Theorie der Blech- und Gitterbalken. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1858.
6. Winkler. Theorie der eisernen Gitterträger. Förster's Bauz. 1859.
7. Schwedler. Elementare Theorie der gitterförmigen Trägerkonstruktionen. 1859. Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingen. 1859. — Civilingen. 1859.
8. Jourawski. Remarques sur le poutres en treillis et les poutres pleines en tôle. Ann. des ponts et chauss. 1860, 2.
9. Ritter. Ueber die Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1861.
10. Lippold. Beiträge zur Theorie der Fachwerksbrücken. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1863.
11. Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical magazine, 1864, 1.
12. Kayser. Theoretische Untersuchungen über Brückenträger nach dem Pauli'schen Systeme. Zeitschr. des deutschen Ing.-Ver. 1864.
13. Collignon. Théorie des fermes à poutres droites en treillis et des fermes américains. Ann. des ponts et chauss. 1864, 1.
14. Schäffer. Ueber Träger mit gekrümmten Rahmen. Erbkam's Z. f. Bauw. 1865.
15. Gerber. Ueber Berechnung der Brückenträger nach System Pauli. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1865.

16. Strains on wrought ironworks. Engineer 1866. 1867.
17. Hühn. Fachwerksträger. Deutsche Bauz. 1868.
18. Werner. Ueber Fachwerksträger mit besonderer Berücksichtigung des Pauli'schen Trägers. Deutsche Bauz. 1869.
19. Schäffer. Hilfssätze für die Berechnung der Fachwerksträger. Erbkam's Z. f. Bauw. 1870.
20. Reyman. Berechnung von mehrfachen Fachwerken. Deutsche Bauz. 1871.
21. Grüttefien. Beiträge zur Theorie der Fachwerksträger (zweckmässigste Form der Gitterträger). Deutsche Bauz. 1872.
22. Die Berechnung von Fachwerksträgern mit Hilfe arithmetischer Reihen. Deutsche Bauz. 1873.
23. Keck. Ungünstigste Belastungsart für Fachwerksträger, kontinuierliche Gelenkträger und für Bögen mit drei Gelenken. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1874.
24. Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1874. 1875.
25. Schäffer. Zur Berechnung von Fachwerksträgern auf zwei Stützpunkten. Deutsche Bauz. 1875.
26. Schäffer. Belastungsgesetz für den Balken auf zwei Stützpunkten. Erbkam's Z. f. Bauw. 1877.
27. Kayser. Ueber die Grundform des sogenannten Schwedler'schen Trägers. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1877.
28. Quitmeyer. Berechnung der Form und der Spannungen eines Brückenträgers von 72^m Stützweite mit zweifachem Fachwerk und bis zur Mitte nach der Grenzform der einfachen Zugdiagonalen durchgeführten Krümmung der oberen Gurtung. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ingen.-Ver. 1877.
29. Stelzel. Ueber gefährlichste Belastungen einfacher Träger. Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878.
30. Asimont. Hauptspannung und Sekundärspannung. Zeitschr. f. Baukunde. 1880.
31. Weyrauch. Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Fachwerke. Zeitschr. f. Baukunde. 1880.
32. Manderla. Die Berechnung der Sekundärspannungen, welche im einfachen Fachwerke in Folge starrer Knotenverbindungen auftreten. Förster's Bauz. 1880.
33. Winkler. Beitrag zur Werthschätzung der Träger mit statisch bestimmtem mehrtheiligem Gitterwerke. Wochenblatt für Architekten und Ingenieure. 1880.

b. Grafische Methoden.

1. Maxwell. On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosophical magazine, 1864, 1.
2. Maxwell. Theory of diagrams of forces as applied to roofs and bridges. Engineer. 1867, 2.
3. Maxwell. On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces. Engineer. 1867, 2.
4. Keck. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerksträgern mit Hilfe der grafischen Statik. Zeitschr. des hannoverischen Arch.- u. Ing.-Ver. 1870.
5. Cremona. Die reciproken Figuren der grafischen Statik. Aus dem Italienischen von Migotti. Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1873.
6. Heuser. Grafische Ermittlung der Ordinaten des Schwedler'schen Trägers. Erbkam's Z. f. Bauw. 1873.
7. Schäffer. Grafische Ermittlung der Ordinaten des Schwedler'schen Trägers. Erbkam's Z. f. Bauw. 1873. 1874.

8. Kresnick. Grafische Bestimmung des Schwedler'schen Trägers für eine zufällige centrirte Belastung. Förster's Bauz. 1874.
9. Favero. Intorno figure reciproche della statica grafica. Reale accademia dei lincei. Roma, 1875.
10. Stahl. Geometrische Theorie und Berechnung parabolischer Träger. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1876.
11. Stahl. Geometrische Theorie und Berechnung des Schwedler'schen (hyperbolischen) Trägers. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1876.
12. Fränkel. Ueber die ungünstigste Einstellung eines Systemes von Einzellasten auf Fachwerkträger mit Hilfe von Influenzkurven. Civilingen. 1876.
13. Clark. The graphic determination of stress in a bowstring girder. Engineer. 1877.
14. Engesser. Geometrische Bestimmung der in einem Fachwerkträger wirkenden inneren Kräfte. Zeitschr. f. Baukunde. 1878.
15. Favero. La determinazione grafica delle forze interne nelle trave reticolari. Reale accademia dei lincei. Roma, 1878.
16. Eddy. Researches in graphical statics. Van Nostrand's Engineering Magazin. New-York, 1878.
17. Engesser. Geometrische Bestimmung der in einem Fachwerkträger wirkenden inneren Kräfte. Zeitschr. f. Baukunde. 1878.
18. Tettmayer. Beitrag zur Bestimmung der Maximalspannungen der Füllungs-glieder einfacher Balkenfachwerke. Eisenbahn. 1878, II.
19. Melan. Beitrag zur grafischen Behandlung der Fachwerkträger mit Zugrundelegung des Prinzipes der Influenzkurven. Zeitschr. des hannoverschen Arch.- u. Ing.-Ver. 1880.

c. Formänderung, einschliesslich kontinuierliche Träger.

1. Schwedler. Ermittlung der Durchbiegungen einiger der gebräuchlichsten eisernen Brückenkonstruktionssysteme. Erbkam's Z. f. Bauw. 1862.
2. Stoney. On the relative deflection of lattice and plate girders. Engineer, 1864, 1.
3. Knoll. Allgemeine Theorie der Formänderungen des einfachen Fachwerkes mit Anwendung auf kontinuierliche Balken und auf Bogenfachwerke. Förster's Bauzeitung. 1875.
4. Fränkel. Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken. Theorie des Bogenfachwerkes mit zwei Gelenken. Civilingenieur. 1875.
5. Winkler. Die Durchbiegung der Gitterträger. Technische Blätter 1876.
6. Steiner. Ueber den Einfluss einer ungleichen Erwärmung der Gurte auf den kontinuierlichen Träger. Zeitschr. des österreich. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877. 1878.
7. Herzmansky. Die elastische Durchbiegung eiserner Fachwerke. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878.
8. Weyrauch. Temperatureinflüsse bei kontinuierlichen Trägern. Zeitschr. f. Baukunde. 1879.
9. Engesser. Ueber die Durchbiegung von Fachwerkträgern und die hierbei auftretenden zusätzlichen Spannungen. Zeitschr. f. Baukunde. 1879.
10. Krohn. Berechnung kontinuierlicher Fachwerkträger auf Grund der Deformationen der einzelnen Fachwerkstäbe. Civilingenieur 1880.

Bezeichnungen,

welche in der Regel gebraucht sind.

- A, B, C* Koeffizienten.
D Stützdruck (in §. 11 Spannung einer Hilfsvertikalen).
E Elastizitätskoeffizient.
F Querschnittsfläche.
G Einzellast.
H Horizontalkomponente der Spannung eines Gitterstabes (S. 50). — Poldistanz.
I Trägheitsmoment eines Querschnittes.
K Zulässige spezifische Spannung oder Inanspruchnahme.
L Spannung eines links fallenden Stabes in §. 108.
M Moment der äusseren Kräfte.
N Spezifische Normalspannung.
O Spannung des Obergurtes in §. 108, 110 und 112.
P Spannung der Gitterstäbe.
Q Transversalkraft.
R Resultante von Einzellasten. — Spannung eines rechts fallenden Stabes in §. 108.
S Spannung der Gurte (S_1 Obergurt, S_2 Untergurt).
U Spannung des Untergurtes in §. 108 und 112.
V Spannung einer Vertikalen. — Vertikalkomponente der Spannung eines Gitterstabes. (S. 50). — Volumen des Trägers oder eines Theiles desselben.
Y Vertikalkraft oder Summe der Vertikalkomponenten der von einem Schnitte getroffenen Gitterstäbe (S. 100).
- a* Stablänge. — Knotenweite. — Horizontalprojektion der Länge eines Gitterstabes. — Poldistanz.
b Horizontalabstand des Schnittpunktes der Gurte vom betreffenden Gitterstabe (S. 99).
c Abstand des Schnittpunktes der Gurte von der Transversalkraft (S. 99). — Länge eines Theiles des Trägers (S. 206). — Stablänge (S. 280). — Abstand der Randfasern eines Stabes von der Schweraxe.
d Länge einer Diagonale.
e Theil einer Knotenweite (e_1, e_2). — Excentricität (S. 276).
f Querschnittsfläche eines Stabes.
g Eigengewicht pro Längeneinheit.
h Trägerhöhe.
i Trägheitsmoment des Querschnittes eines Stabes.
k Koeffizient: $\left(= \frac{s}{Ef}, \text{ S. 240; } = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \text{ S. 343} \right)$.
l Spannweite. — (Stablänge in §. 107).

- m* Nummer eines Faches oder Stabes. — Theil eines Momentes. — Moment im Querschnitte eines Stabes.
- n* Anzahl der Fächer einer Spannweite. — Verhältnisszahl (S. 177).
- p* Zufällige Last pro Längeneinheit. — Preis in §. 39.
- q* Gesamtlast pro Längeneinheit = $g + p$.
- r* Trägheitsradius.
- s* Länge eines Stabes (S. 240).
- t* Temperatur (§. 106 und 169).
- u* Spannung eines Stabes, welche eine Kraft = 1 erzeugt.
- v* Volumen des Trägers oder eines Theiles desselben pro Längeneinheit.
- x* Abscisse. Entfernung eines Punktes oder Schnittes vom Auflager.
- y* Abstand eines Gurtstückes vom gegenüberliegenden Knotenpunkte. — Ordinate der elastischen Linie.
- ℥ Spannung eines links fallenden Stabes im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓜ Mittleres Moment.
- Ⓝ Spannung des Obergurtes im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓞ Spannung eines Gitterstabes im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓟ Mittlere Transversalkraft.
- Ⓠ Spannung eines rechts fallenden Stabes im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓡ Spannung eines beliebigen Stabes (oder eines Gurtes) im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓢ Spannung des Untergurtes im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Ⓣ Spannung einer Vertikalen im statisch bestimmten Systeme (§. 108).
- Δ Differenzzeichen. — Grösse der Verschiebung eines Systemes von Einzellasten. — $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ Verschiebung eines Punktes in horizontaler, vertikaler und beliebiger Richtung. — $\Delta s, \Delta l$ Längenänderung eines Stabes.
- Σ Summenzeichen.
- α, β Neigungswinkel eines Gitterstabes gegen die Vertikale (meist α rechts fallend, β links fallend). — Koeffizienten (§. 78, 136, 137 und 140).
- γ Neigungswinkel des dritten Stabes beim kombinierten Systeme gegen die Vertikale. (S. 70). — Koeffizient (§. 38, 136, 137 und 140).
- δ Aenderung der Winkel zwischen zwei Gurtstückchen (S. 283) — Koeffizient (§. 38).
- ϵ Koeffizient (§. 68). — Ausdehnungskoeffizient (S. 274 und 384). — Winkel zwischen den Gurtstückchen (§. 128).
- ζ Koeffizient (§. 40 und 71).
- λ Länge eines Stabes. — Spannung eines links fallenden Stabes in Folge des Momentes = 1 (S. 108).
- ν Aenderung [des Winkels zwischen zwei Stäben (S. 302). — Spannung des Untergurtes in Folge des Momentes = 1 (S. 108).
- ξ Hebelsarm von Einzellasten oder deren Resultanten, Abstand des Endes einer Belastung von einem Punkte.
- ϱ Spannung eines rechts fallenden Stabes in Folge eines Momentes = 1 (S. 108).
- σ Neigungswinkel der Gurte oder des Obergurtes. — Spannung in Folge einer Kraft = 1 (S. 283).
- τ Neigungswinkel des Untergurtes. — Ausschlagwinkel oder Winkel der Endtangentialen der elastischen Linie und der Axe. — Drehungen von Normalen in §. 136 u. 137.
- φ, ψ Querschnittsfläche eines Stabes.
- ω Spannung des Obergurtes in Folge eines Momentes = 1 (S. 108).

Berichtigungen.

- S. 12, Z. 4 v. unten: Hinter „Gurtes“ ist „pro Längeneinheit“ hinzuzufügen.
- S. 16, Z. 4 v. oben: „ e_1 zu e_2 “ statt „ e_1 und e_2 “.
- S. 19, Z. 3 v. unten: ξ und ξ' statt ξ und ξ_1 .
- S. 20, Z. 1 v. oben: §. 7 statt §. 8.
- S. 23, Fig. 20 und 21 stehen verkehrt.
- S. 24, Z. 4 v. unten: Hinter $\frac{1}{4}g_1a$ und $\frac{1}{4}g_2a$ ist *seca* einzuschalten.
- S. 60, Z. 11 v. oben: „Parabeln“ statt „Parallelen“.
- S. 86, Formel 87: $\frac{p}{K_1}$ statt $\frac{p}{K_0}$.
- S. 89, Z. 17 v. unten: Hinter „ $O_1, 2, 2'$ “ ist einzuschalten: „und $\frac{g}{K_0}, \frac{p}{K_1}$ für $\frac{g}{K}, \frac{p}{K}$ “.
- S. 89, Ueberschrift: II. statt B.
- S. 99, Fig. 62: S_1 statt S, S_2 statt S; σ statt β .
- S. 102, Z. 11 v. oben: Hinter „desselben“ ist einzuschalten: „mit der Richtung der Kraft Q “. — Z. 10, 8, 7 v. unten: a statt H .
- S. 104, Z. 2 v. oben: Y' statt Y, E' statt E.
- S. 105, Z. 3 v. unten: FQ statt FQ' .
- S. 108, Z. 14 v. oben: Fig. 72 statt Fig. 62. — Z. 20, 17, 16 und 14 v. unten: „von F “ statt „von L “.
- S. 110, Fig. 73: Der Punkt F'''' soll der Durchschnittspunkt der durch F gehenden Vertikalen und der Geraden $L'K$ sein.
- S. 111, Formel 12: ξ_1 statt ξ , $B'O'$ statt $B'D'$. — Z. 10 v. unten $B'O'$ statt $B'D'$.
- S. 113, Fig. 75: F' statt des oberen F' ; H'' statt des oberen F'' , H'''' statt H'' . — Z. 3 v. unten: $= H'H''''$ statt $H'H''$.
- S. 118, Fig. 77: σ statt δ .
- S. 126, Formel 36: $d \frac{h}{x}$ statt $d \frac{x}{h}$.
- S. 129, Z. 18 v. unten: 33 statt 27.
- S. 133, Z. 3 v. oben: $\frac{Hy}{h}$ statt $\frac{Hh}{h}$. — Z. 8 v. unten: $\frac{M''}{h_1'}$ statt $\frac{M''}{h_1''}$.
- S. 134, Z. 17 v. oben: $l - 2x - e$ statt $l - 2x - c$.
- S. 137, Fig. 99: Der Punkt G ist der Durchschnittspunkt der Geraden AE' und der durch D gehenden Vertikalen. Durch H ist eine Horizontale zu legen, welche die durch D gehende Vertikale in H' schneidet. GP und $H'P$ sind parallel zur fraglichen Diagonale und zum oberen Gurtsstücke zu ziehen.

S. 141, Z. 3 v. oben: $\frac{30}{9}$ statt $\frac{80}{9}$.

S. 144, Tabelle, 4. Columne: V_p statt V_q .

S. 153, Formeln Zeile 17, 8 und 7 v. unten: Im Zähler: ph_1l^2 statt $2ph_1l^2$.

S. 154, erste der Formeln 93, erste und zweite der Formeln 95: $\frac{4h_1}{5a}$ statt $\frac{16h_1}{15a}$.

S. 175, Ueberschrift: XI statt XII.

S. 192, Z. 16 v. unten: „in der Vertikalen“ statt „von der Vertikalen“. — Z. 9 v. unten: Fig. 5 statt Fig. 9.

S. 248, Z. 20 v. unten: $v_1 = v_2 =$ statt $V_1 = V_2 =$

S. 283, Z. 8 v. unten: σ_n statt s_n .

S. 303, Formel 47: $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2$ statt $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_1$.

S. 314, Z. 13 v. oben: $\tan \alpha + \tan \beta$ statt $\tan \alpha + \tan \alpha$.

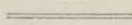
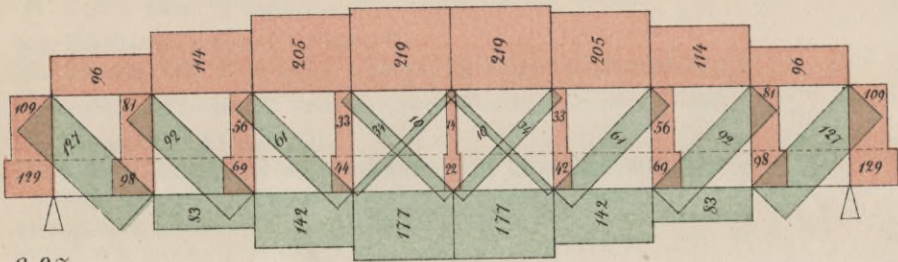
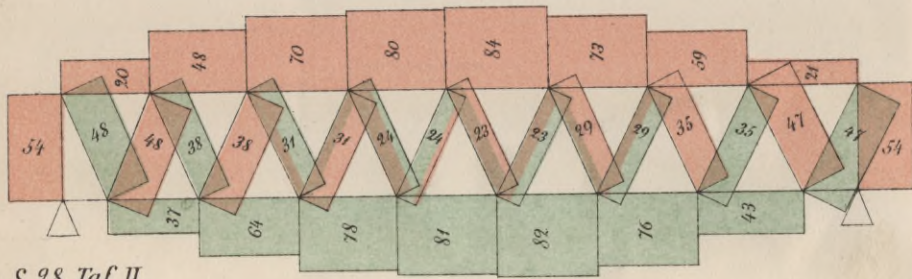


Fig. 1.



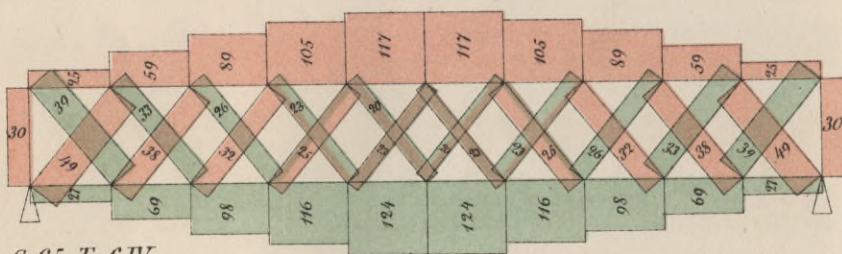
S. 27.

Fig. 2.



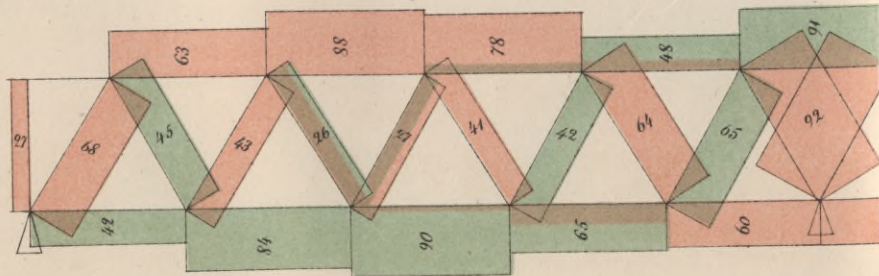
S. 28. Taf. II.

Fig. 3.



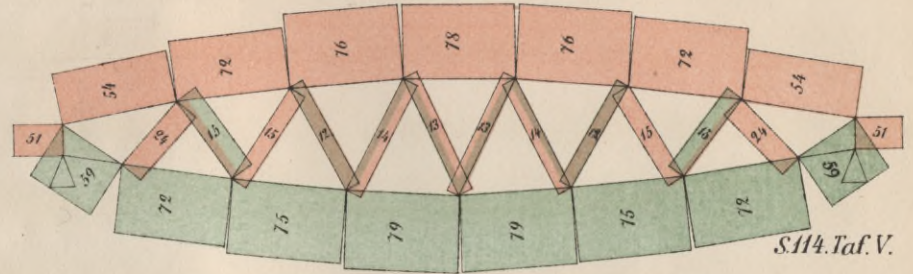
S. 65. Taf. IV.

Fig. 4.



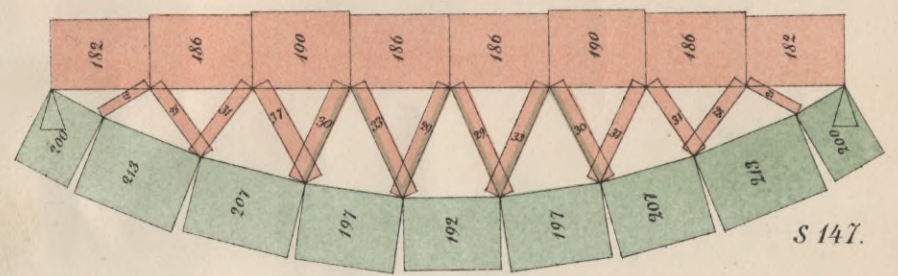
S. 318. Taf. VIII.

Fig. 5.



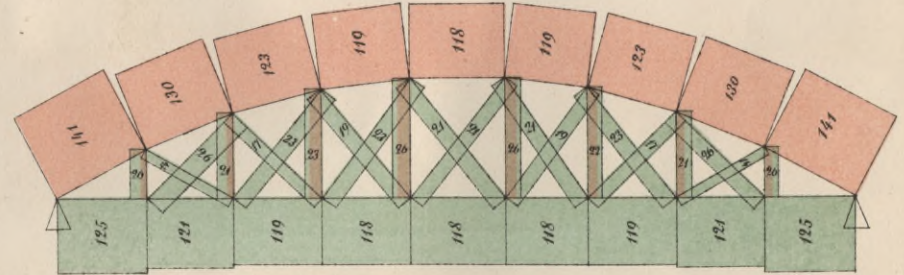
S. 114. Taf. V.

Fig. 6.



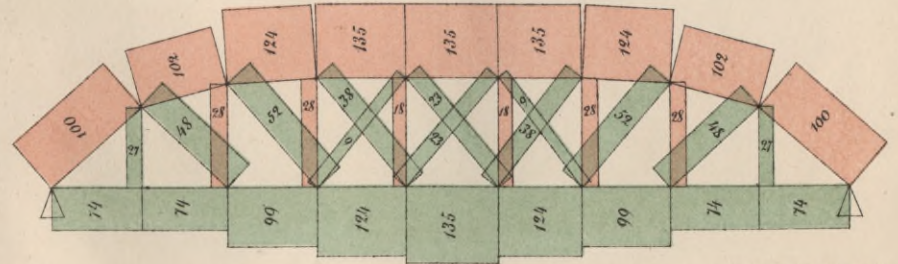
S. 147.

Fig. 7.



S. 141.

Fig. 8.



S. 188 Taf. VII.

Zug. Druck.

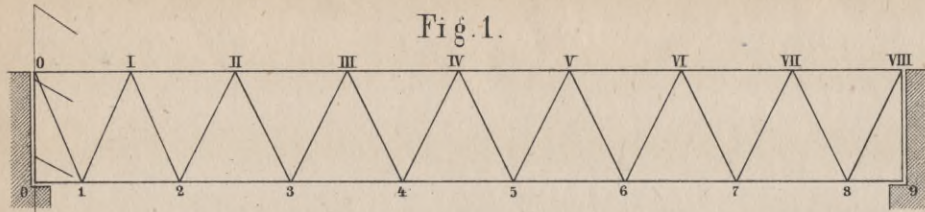


Fig. 1.

Bahn

I 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Meter.

II 10 5 0 10 20 30 Tonnen.

Spannweite = 19,5^m
 Trägerhöhe = 2,5^m
 Normale Knotenweite = 2,5^m
 Eigengewicht = 0,48 (am Ober-
 gurt 0,35, am Untergurt
 0,13) Tonnen pro Met.

Fig. 2.

Fig. 2 a.

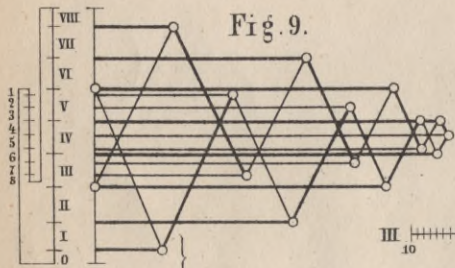


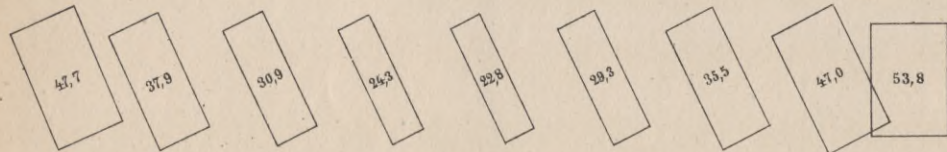
Fig. 9.

III 10 0 10 20 30 40 Cent.

VII 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Tonnen.

Querschnitt = $\frac{R_1}{1,2} + \frac{R_2}{0,6} + \frac{R_3}{1,3}$ cm.

Fig. 3.



Gitterstäbe.



IV 10 0 20 40 60 80 100 Cent.

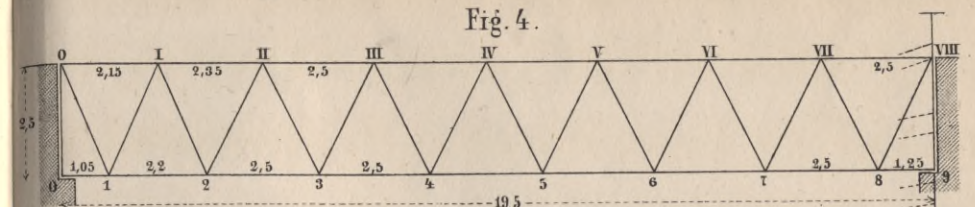


Fig. 4.

VI 10 0 10 20 30 40 50 60 70 Cent.

Fig. 7.

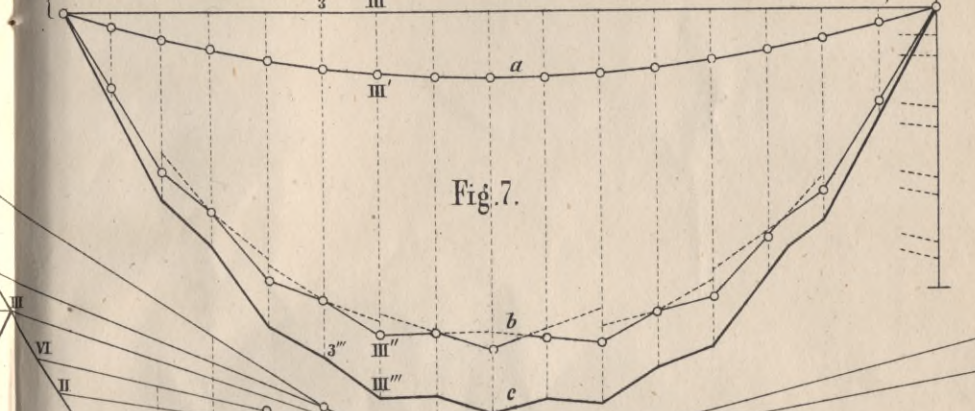


Fig. 5.

Fig. 6.

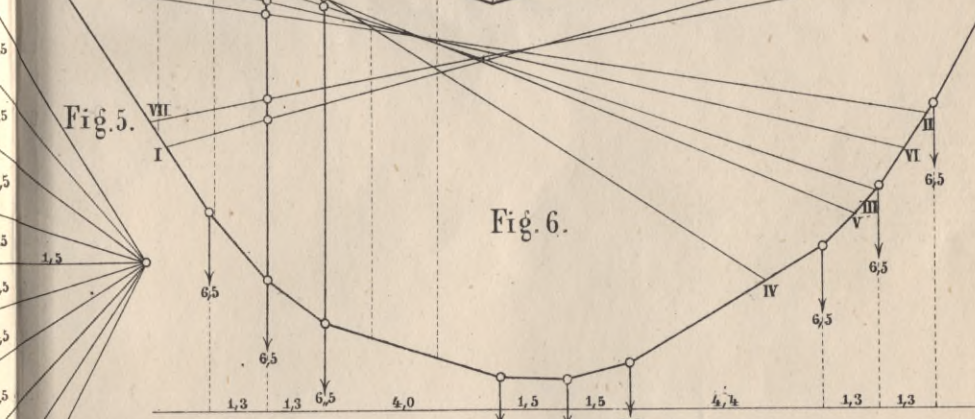
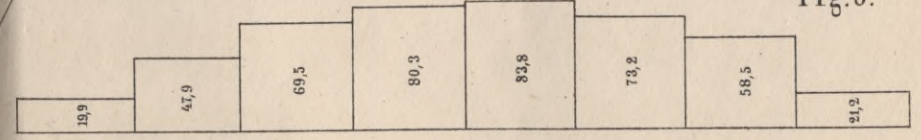


Fig. 8.



Gurte.

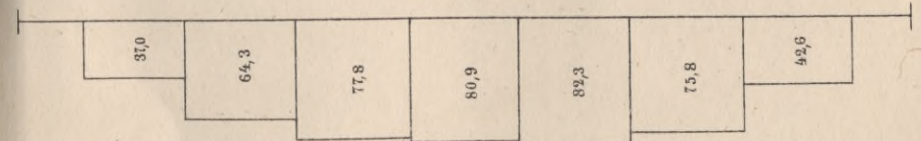
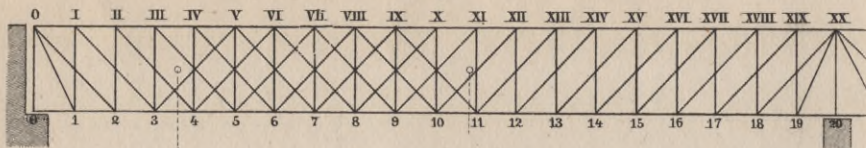


Fig. 1.



Kontinuierlicher Träger mit 2 Feldern

von je 50^m Spannweite; 2 Träger für 1 Geleis,
Bahnoben.

Gesamtlast $q = 3,85$ Ton. pro Meter, Eigengewicht
 $g = 1,1$ Ton. pro Meter $= 0,28q$; zufällige Last $p =$
 $2,75$ Ton. pro Meter $= 0,72q$.

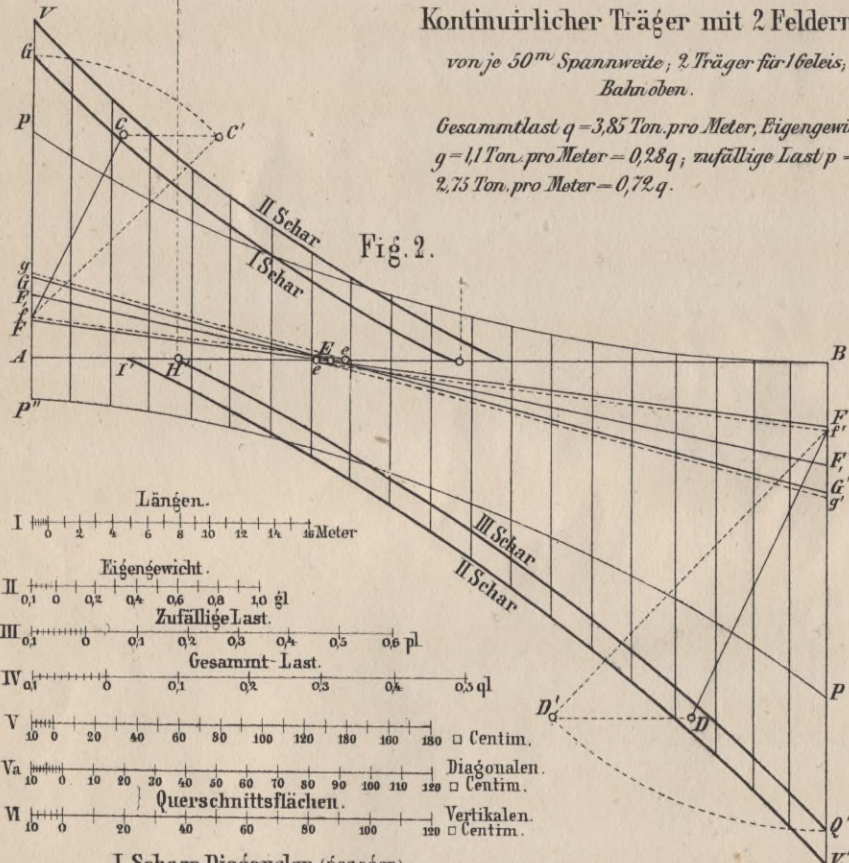
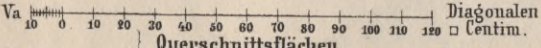
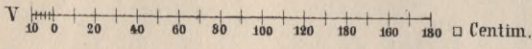
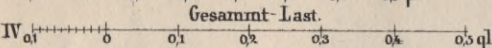
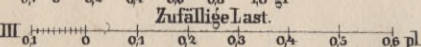
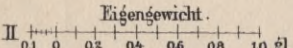
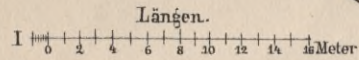


Fig. 2.



I. Schaar Diagonalen (gezogen).

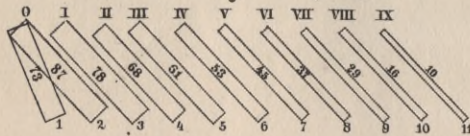
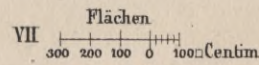
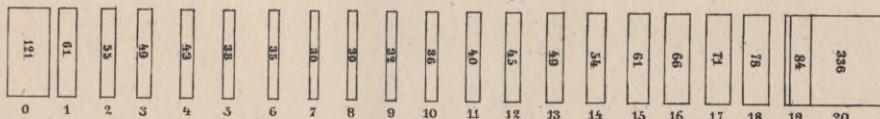


Fig. 3.



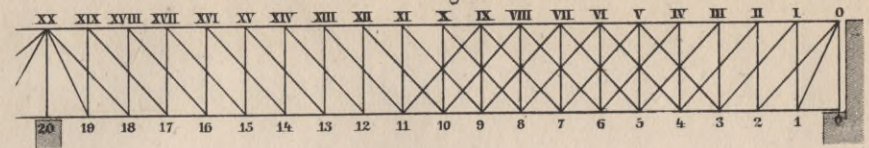
II. Schaar Vertikalen (gedrückt).



III. Schaar Diagonalen (gezogen).



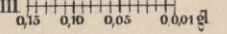
Fig. 4.



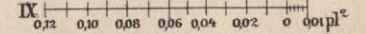
Trägerhöhe = 5 Meter. Gesamtlast q
 $= 3,6$ Ton. pro Met.; Eigengewicht $g =$
 $1,1$ Ton. pro Met. $= 0,31q$; zufällige Last
 $p = 2,5$ Ton. pro Meter $= 0,69q$.

Momente

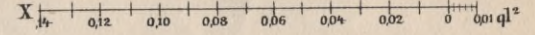
Eigengewicht



Zufällige Last.



Gesamtlast.



Querschnittsflächen.

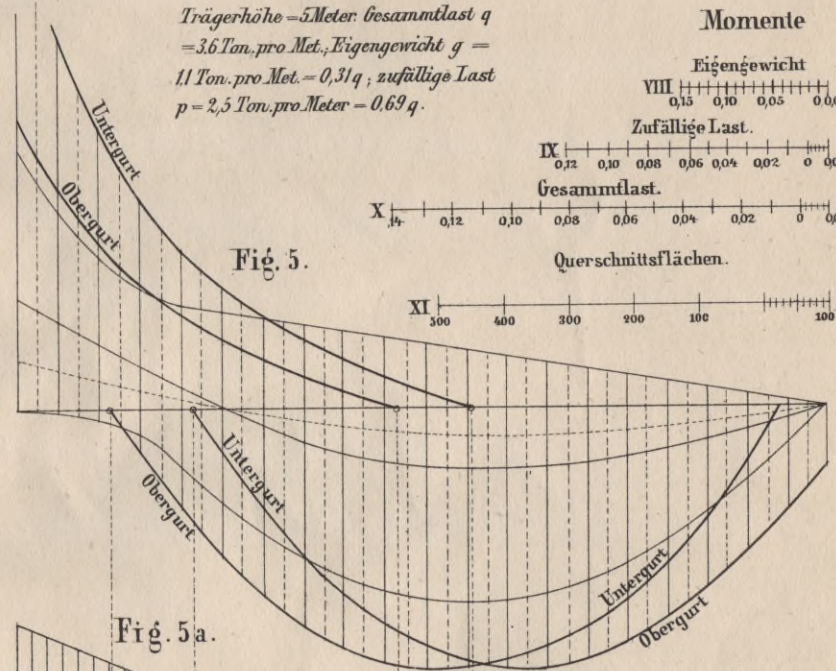
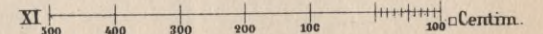


Fig. 5.

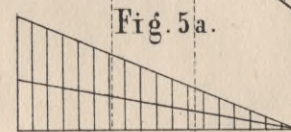
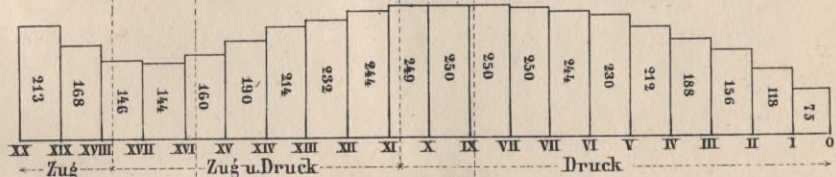


Fig. 5a.

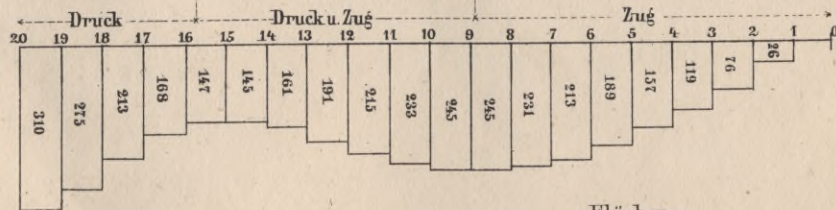
Fig. 6.

Querschnitt $= \frac{R_0}{1,4} + \frac{R_1}{0,6} + \frac{R_2}{1,3}$
nur für doppelte Diagonalen $= \frac{R_0}{0,77} + \frac{R_1}{0,66}$.

Obergrurt.



Untergrurt.



Flächen.

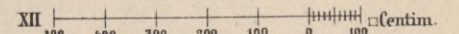


Fig. 1.

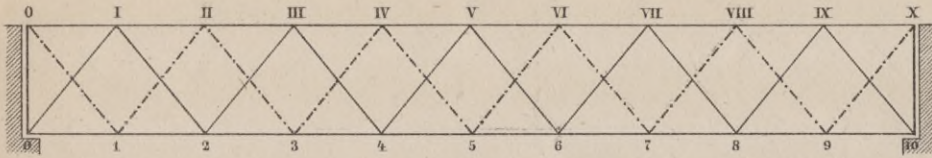


Fig. 10.

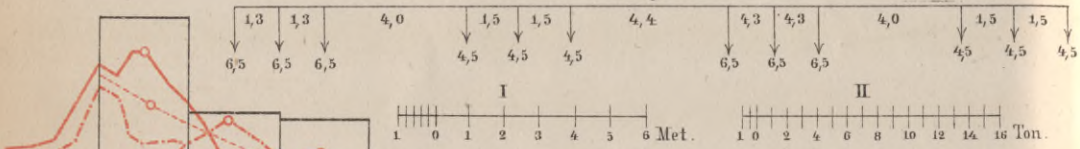


Fig. 2.

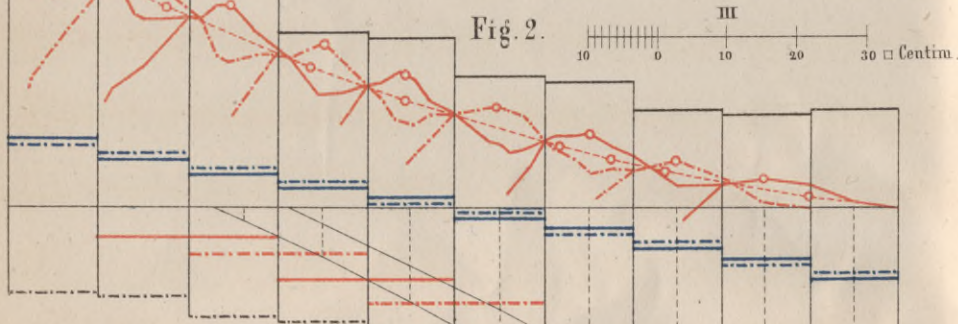


Fig. 9.

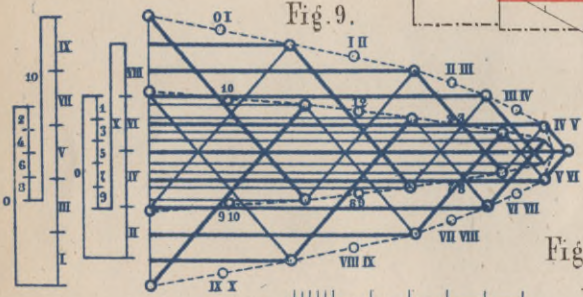


Fig. 2 a.

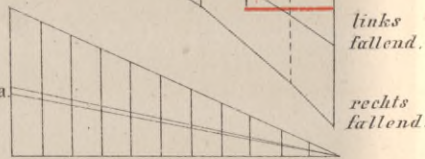


Fig. 3.



Fig. 4.

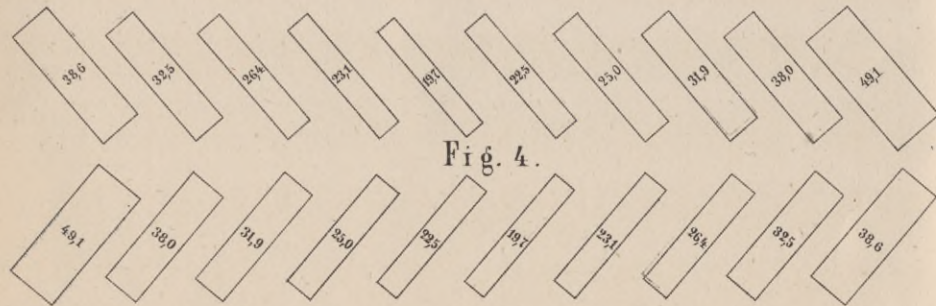


Fig. 5.

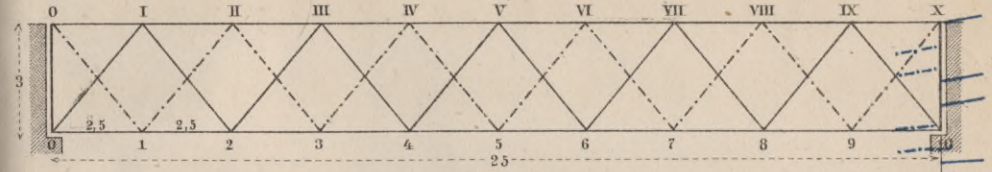


Fig. 6.

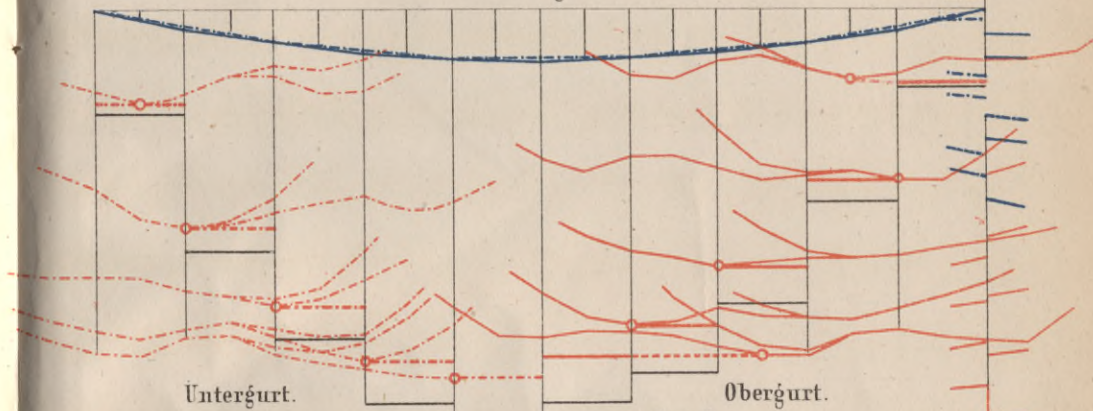


Fig. 7.

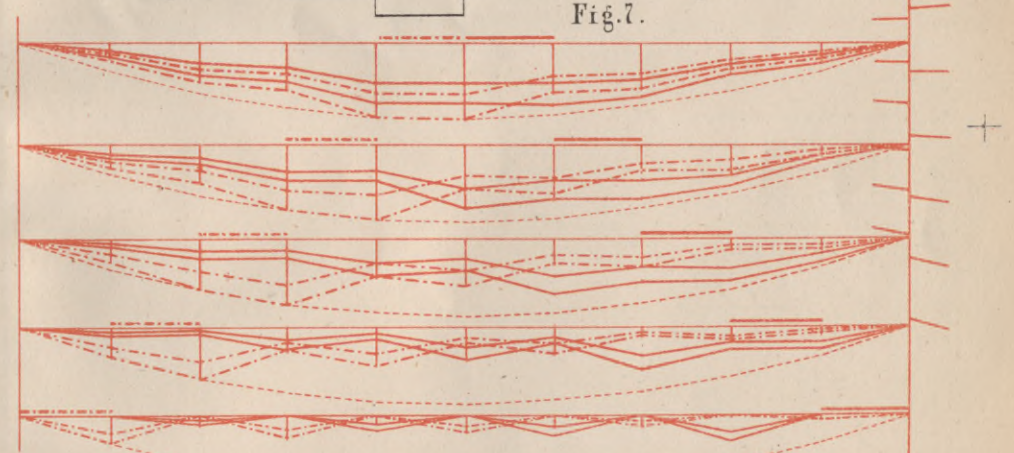
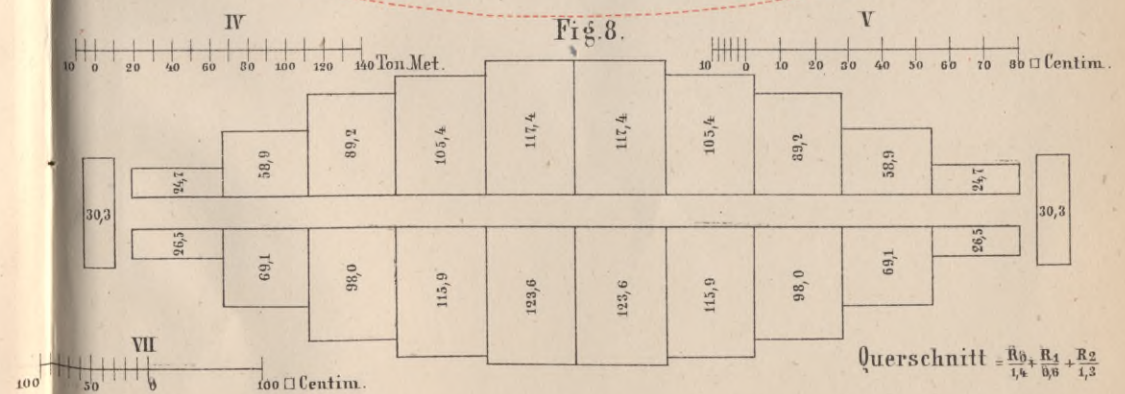


Fig. 8.



Querschnitt = $\frac{R_0}{1,4} + \frac{R_1}{0,6} + \frac{R_2}{1,3}$

Fig. 1.

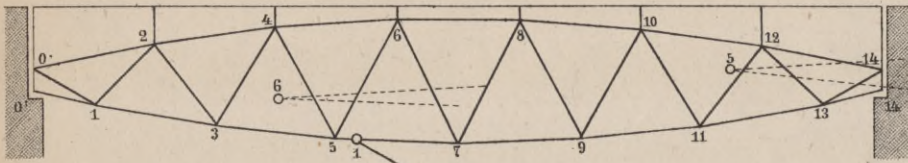
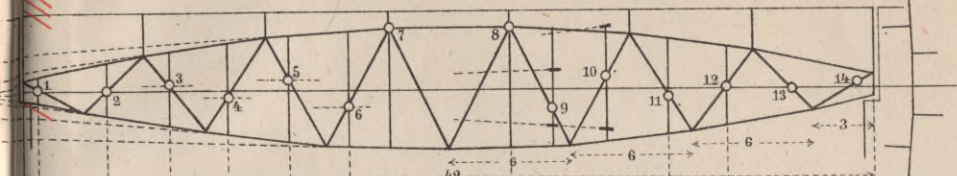


Fig. 5.



Kräfte.

III 10 0 10 20 30 40 50 Ton.

Fig. 3.

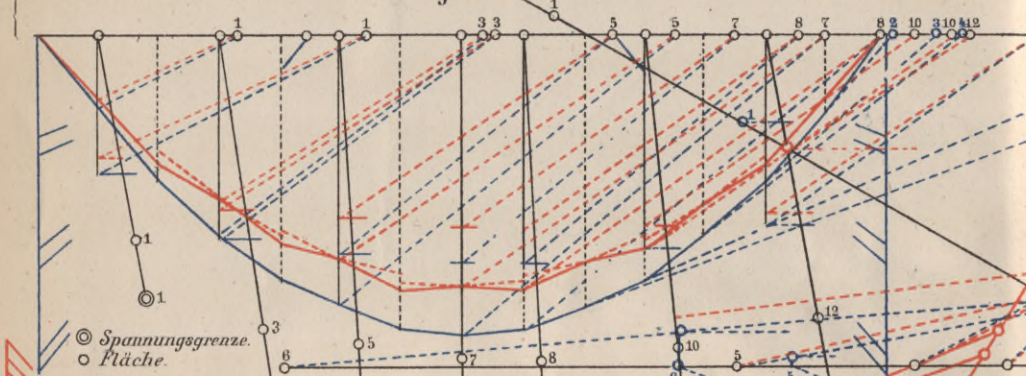
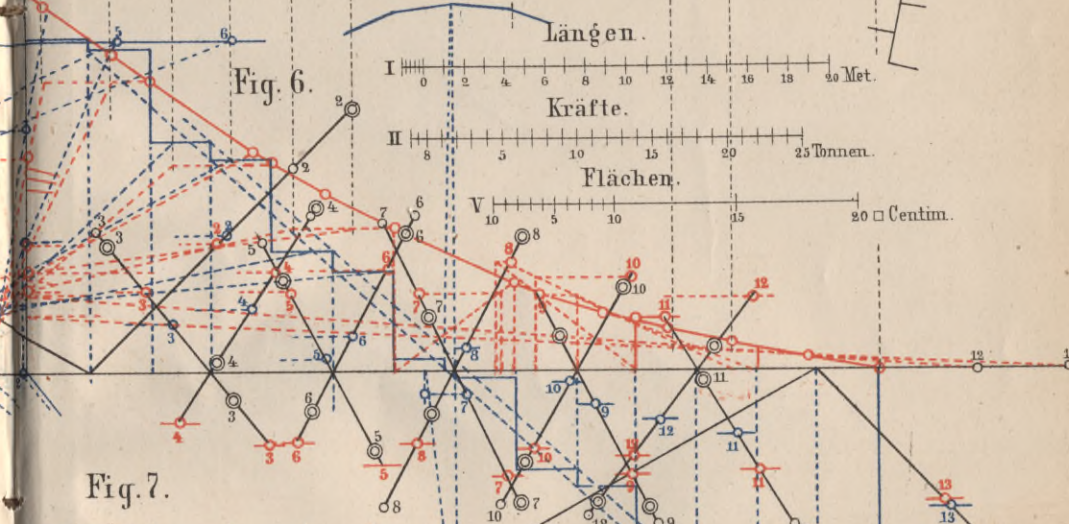


Fig. 6.



Flächen.

IV 10 0 20 40 60 □ Centim.

Fig. 2.

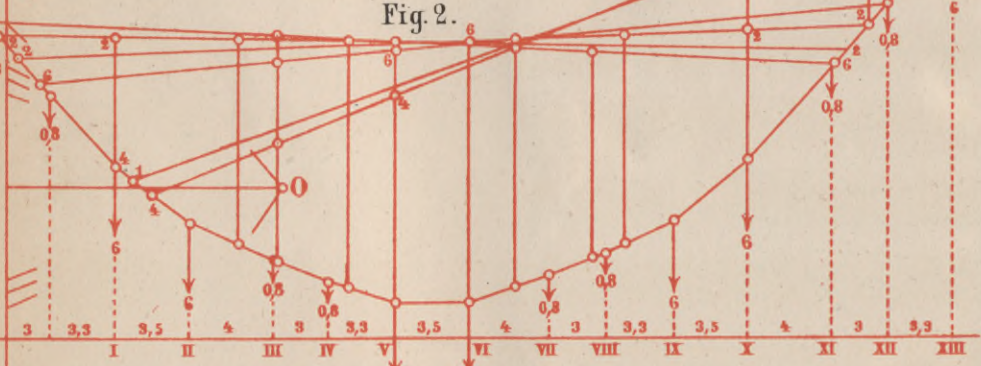


Fig. 7.

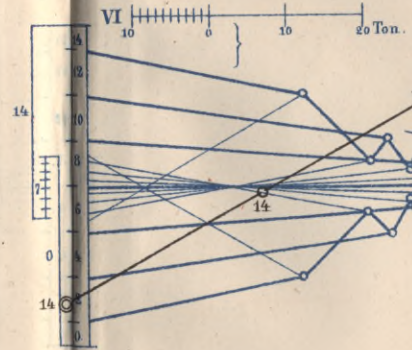


Fig. 9.

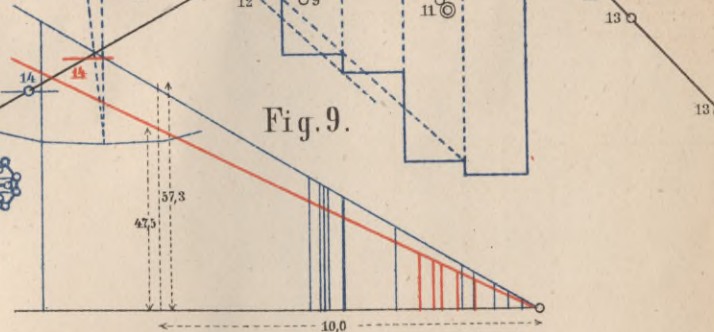
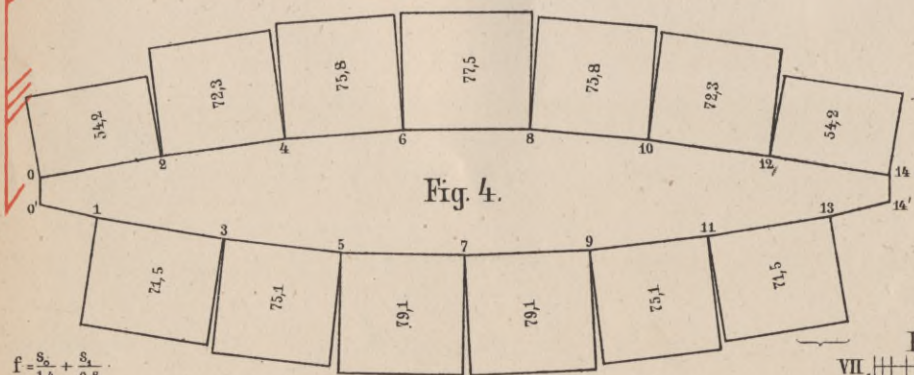


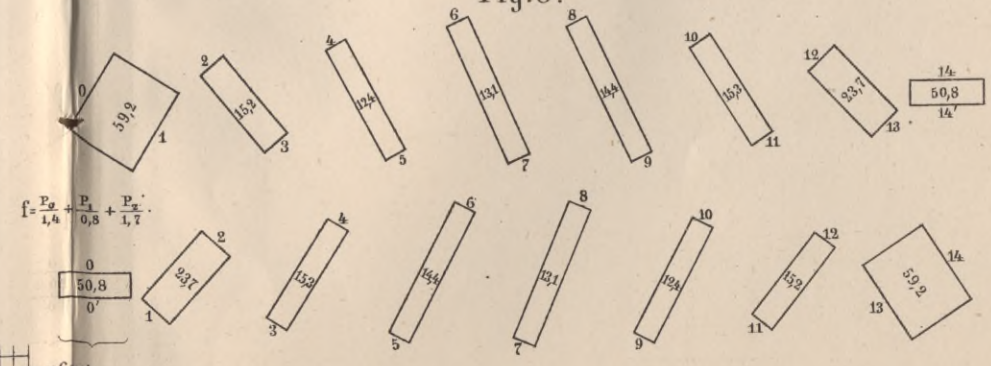
Fig. 4.



Flächen.

VII 10 0 20 40 60 80 100 □ Cent.

Fig. 8.



$$f = \frac{P_1}{1,4} + \frac{P_2}{0,8} + \frac{P_3}{1,7}$$

Halbparabelträger.

Spannweite = 75 Meter.

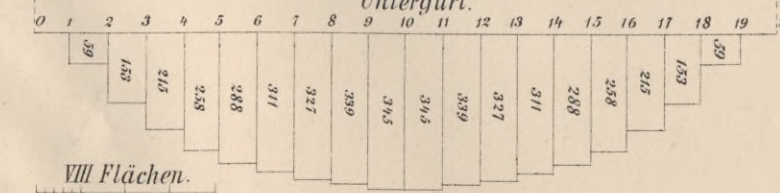
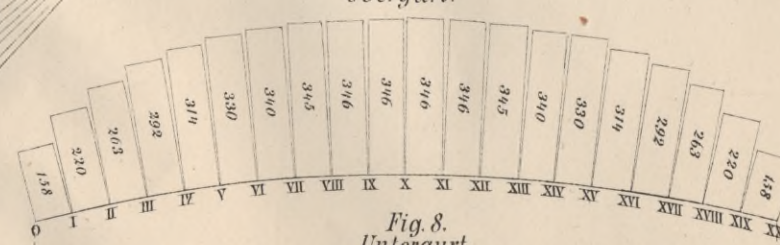
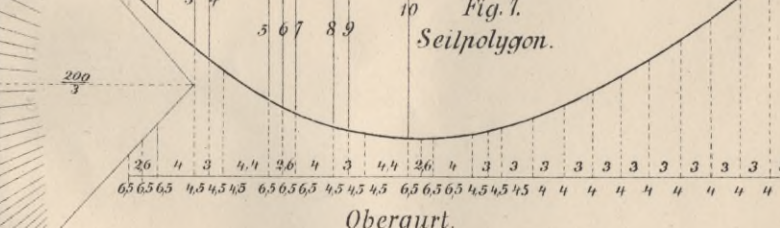
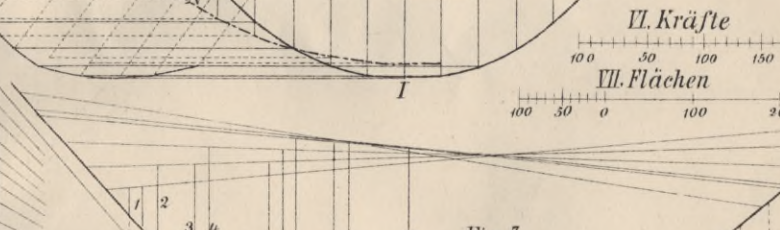
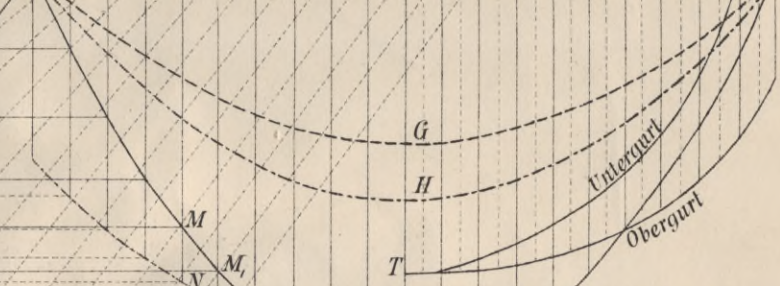
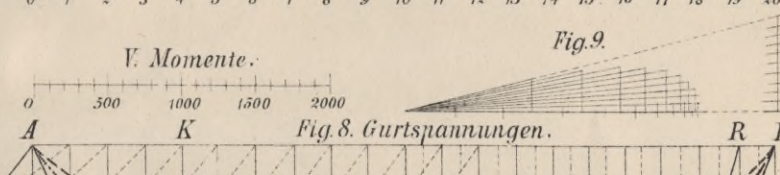
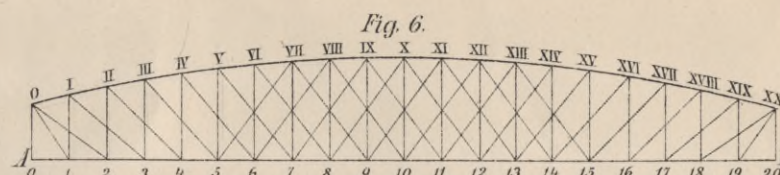
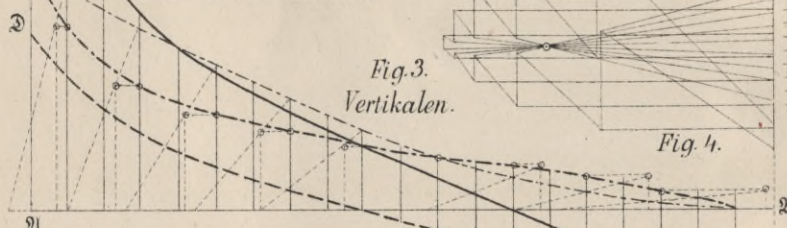
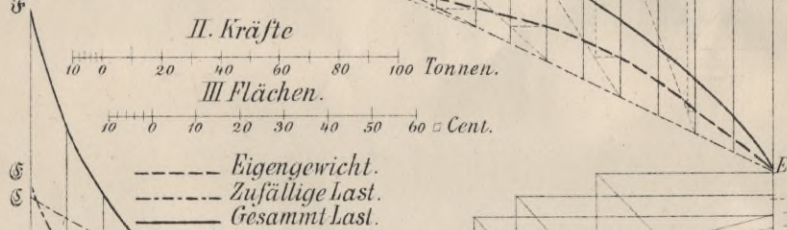
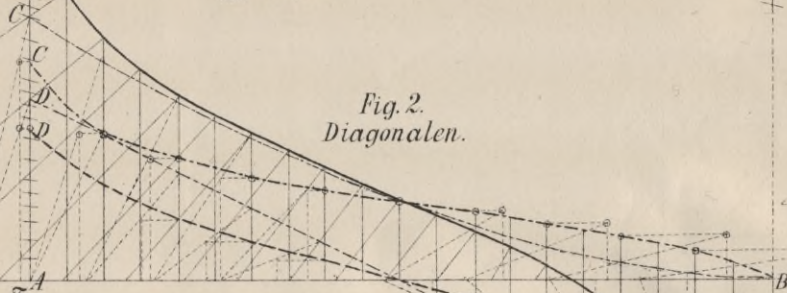
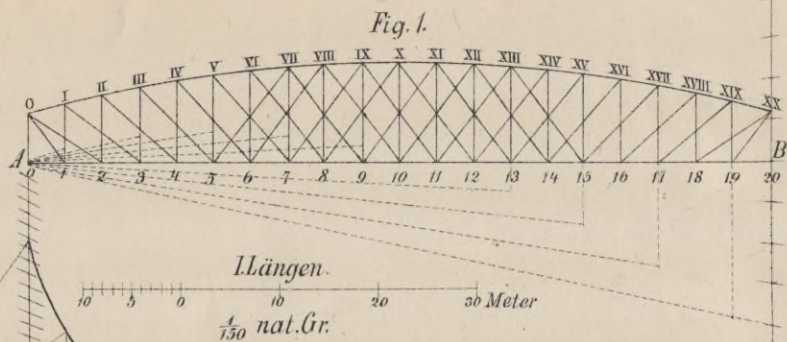


Fig. 1.

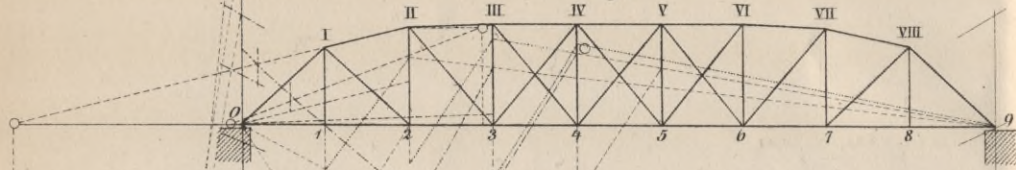


Fig. 2.

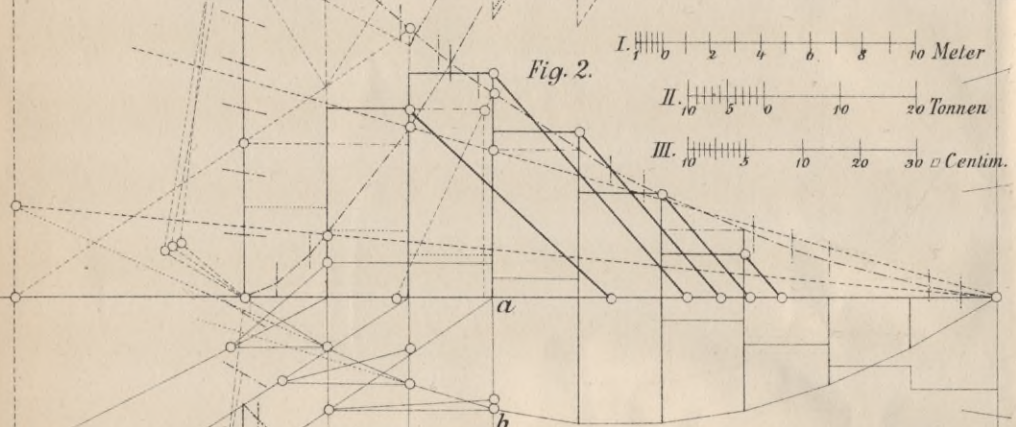
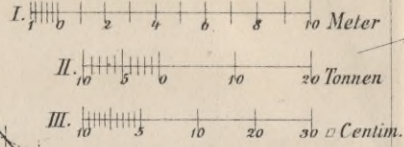


Fig. 7.

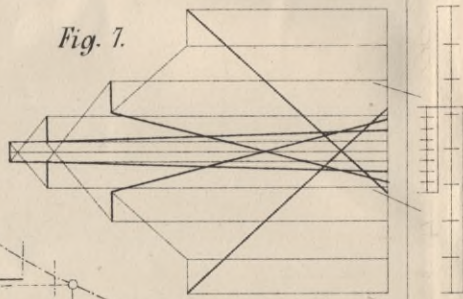


Fig. 3.

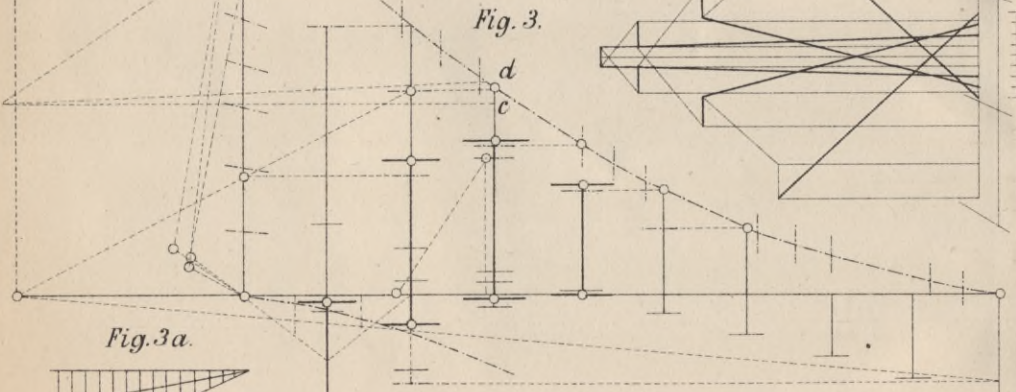


Fig. 3a.



Fig. 8.

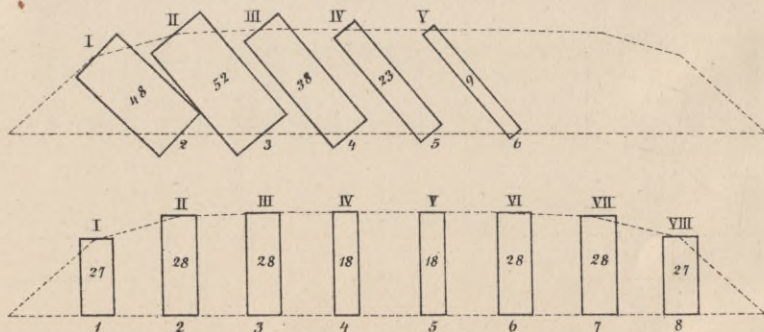


Fig. 4.

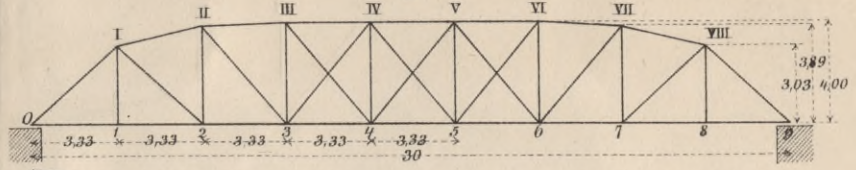


Fig. 6.

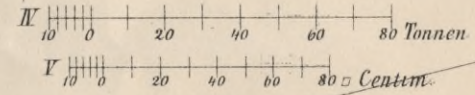
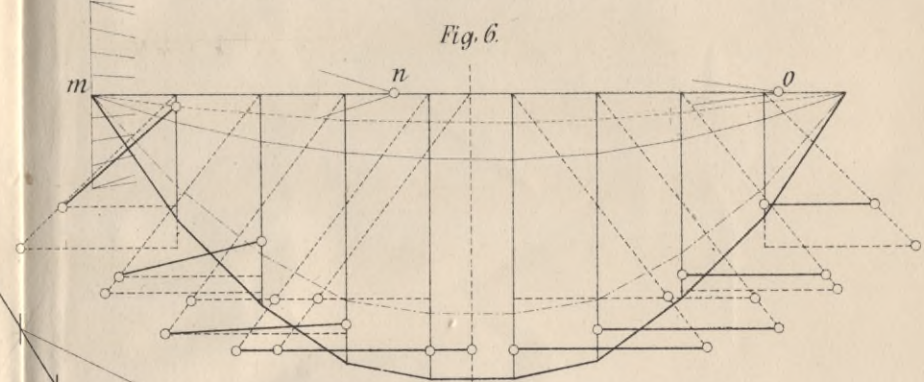


Fig. 5.

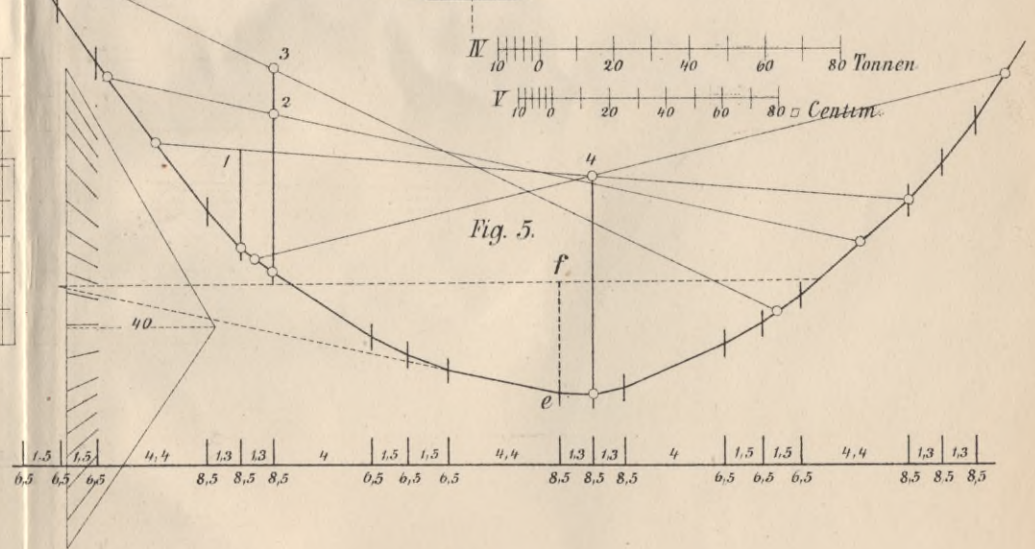
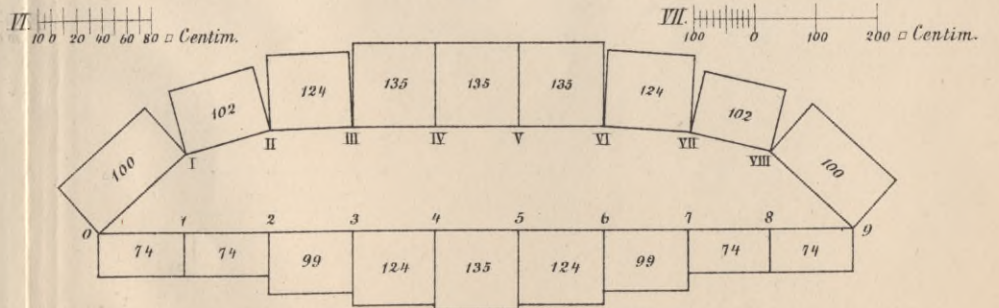
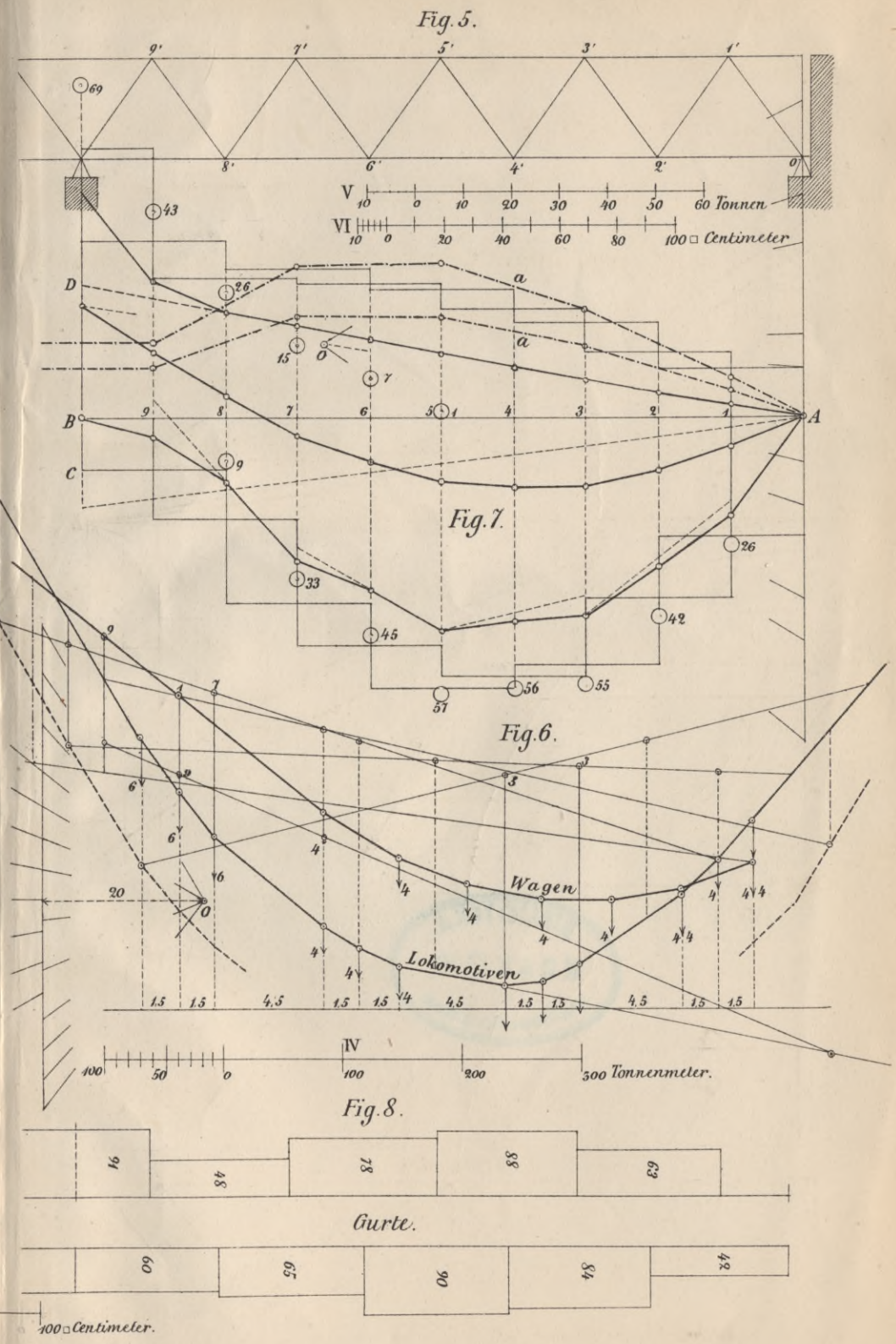
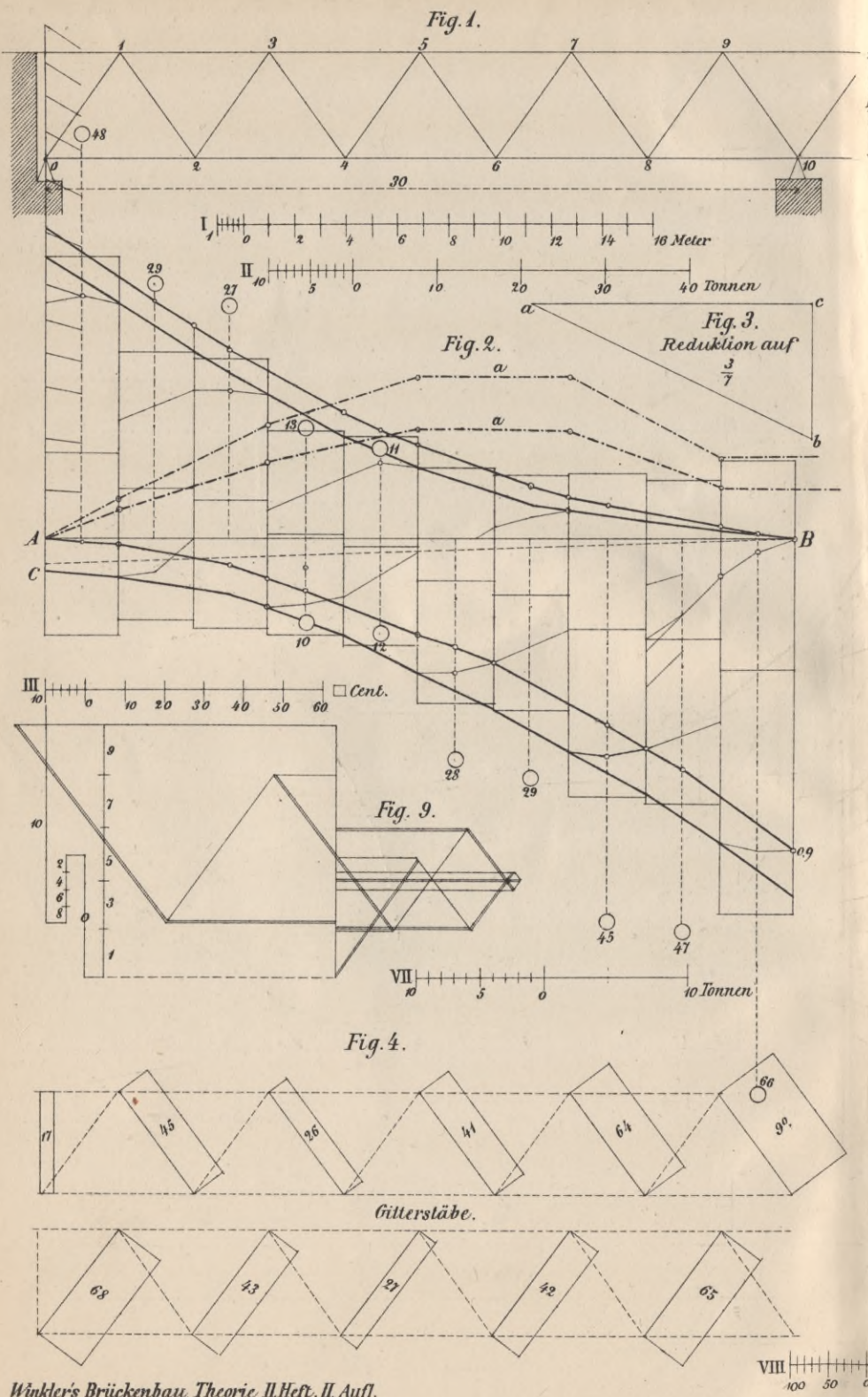


Fig. 9.







S. 61

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-351582

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299144