

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

L. inw.

~~4854~~

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298959



~~Edward Paździora~~

18. maja 1905.

Wartosi 11 kor 50 hal
Zakupione 1/XII 08.

GRUNDRISS

der

Differential- und Integral-Rechnung.

II. Theil: Integral-Rechnung.

Von

Dr. Ludwig Kiepert,

Geheimer Regierungsrath,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Achte verbesserte und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. Dr. Max Stegemann.

620

Mit 143 Figuren im Texte.

ZARZĄD SZKOŁY GÓRNICZEJ
Dąbrowa (Śl. austr.)



Hannover 1903.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

211



~~II 4854~~



Alle Rechte vorbehalten.

II-351578

Vorrede zur ersten Auflage.

In ähnlicher Weise wie bei der Differential-Rechnung habe ich bei der Bearbeitung des vorliegenden, die Integral-Rechnung behandelnden Bandes die didaktische Seite besonders berücksichtigt. Ich bin deshalb bei der Anordnung des Stoffes zuweilen von dem gewöhnlichen Lehrgange abgewichen; so z. B. habe ich zu Anfang das Integral als eine reine Umkehrung des Differentials definirt und erst später den Begriff desselben erweitert.

Nach dieser höchst einfachen und leicht fasslichen Definition habe ich unmittelbar die Methoden vorgetragen, die zur Bestimmung des allgemeinen Integrals führen. Die zahlreichen Uebungs-Beispiele, welche hierbei eingeschaltet sind, dürften um so mehr am Platze sein, weil es erfahrungsmässig feststeht, dass zum weiteren Eindringen in diesen subtilen Theil der Mathematik grosse Gewandtheit in den arithmetischen Operationen und klare Uebersicht über dieselben durchaus nothwendig sind, und dass dem Anfänger an einem Beispiele oft Manches klar wird, was ihm in der allgemeinen Theorie nur halb verständlich geworden oder ganz unverständlich geblieben ist.

Es liegt in der Natur des Menschen, dass er nur selten eine allgemeine Theorie auf einmal erfasst; in der Regel steigt er von speciellen Fällen zur allgemeinen Theorie hinauf. Die Geschichte der Wissenschaft giebt hierfür viele Belege; so z. B. waren die Gesetze des freien Falles, des Pendels und der Planeten-Bewegungen schon lange bekannt, als sie in *ein* allgemeines Gesetz, das *Gravitations-Gesetz*, zusammengefasst wurden.

An die Behandlung des allgemeinen Integrals (Seite 1—134) hätte ich die Behandlung des bestimmten Integrals und der dahin gehörigen Untersuchungen (Seite 162—242) unmittelbar anreihen können. Ich habe jedoch das Capitel über die Quadratur der Curven (Seite 135—161) dazwischen eingeschaltet, theils um hieran die Bedeutung der Integrations-Constanten und die Ermittlung des Werthes derselben zu erläutern; besonders aber, um mir hierdurch ein ausgezeichnetes Mittel zur Behandlung der bestimmten Integrale, der Doppel-Integrale u.s.w. zu verschaffen. Diese Anordnung dürfte schon durch die Paragraphen 45—50 allein gerechtfertigt werden. Die Differential-Gleichungen sind nur soweit behandelt, als sie dem wissenschaftlichen Techniker unentbehrlich sind. Ich konnte mich zu dieser Einschränkung um so eher entschliessen, weil ich hoffe, dass den beiden erschienenen Bänden (welche übrigens für sich ein Ganzes bilden sollen), später noch zwei andere Bände über Differential- und Integral-Rechnung folgen werden.

Hannover, den 16. August 1863.

M. Stegemann.

Vorrede zur vierten Auflage.

Der ungewöhnlich starke Absatz, welchen die Integral-Rechnung von *Stegemann* gefunden hat, ist ein Zeichen dafür, dass die darin angewendete Methode für den Lernenden durchaus angemessen ist.

Daneben kann indessen nicht geleugnet werden, dass die drei bisherigen Auflagen eine grosse Zahl von Ungenauigkeiten und Druckfehlern enthielten, und dass ausserdem manche Untersuchungen und Sätze fehlten, welche auch für den Techniker unentbehrlich sind.

Deshalb erschien eine vollständige Umarbeitung und eine durchgreifende Ergänzung des Buches erforderlich. Dies ist nun in der vorliegenden Auflage geschehen; die zahlreich bemerkten Fehler sind verbessert, viele Beweise strenger gefasst und die wesentlichsten Lücken ausgefüllt worden. Trotzdem hat der Umfang des Buches nur eine Erweiterung von wenigen Bogen erfahren, da es möglich war, viele Entwicklungen kürzer zu fassen.

Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber die Anforderungen massgebend, welche von einem billig denkenden Examinator bei der ersten Staats-Prüfung (Bauführer-Prüfung) in Integral-Rechnung gestellt werden dürften.

Es soll jedoch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass das Buch auch für solche Leser geeignet ist, welche an der *Universität* Mathematik studiren.

Im Ganzen ist die von *Stegemann* gewählte Anordnung und Behandlung des Stoffes so viel wie möglich beibehalten. Besondere Sorgfalt ist darauf verwendet, das Buch durchweg leicht verständlich zu fassen, so dass es bei voller Berücksichtigung der wissenschaftlichen Strenge doch für den *Lernenden*, nicht für den *Gelehrten* berechnet ist.

Hinzugefügt ist auch eine *Tabelle* der hergeleiteten *Formeln*, welche einerseits die Anwendungen sehr erleichtert, andererseits aber ein erprobtes Hilfsmittel bei Repetitionen bietet.

Hannover, den 11. August 1885.

L. Kiepert.

Vorrede zur fünften Auflage.

Als es im Kreise meiner Fachgenossen bekannt wurde, dass ich eine neue Auflage der Differential- und Integral-Rechnung von *Stegemann* herausgegeben hätte, erhielt ich von hochgeschätzter Seite den dringenden Rath, doch lieber ein eigenes Lehrbuch zu schreiben. Dieser Aufforderung bin ich dadurch nachgekommen, dass ich die kürzlich erschienene 6^{te} Auflage der Differential-Rechnung und ebenso die hier vorliegende 5^{te} Auflage der Integral-Rechnung fast im vollen Umfange *neu abgefasst* habe. Von dem Texte des *Stegemann'schen* Leitfadens habe ich nur wenige Stellen und von den Aufgaben nur eine kleine Zahl beibehalten; dagegen habe ich mich in einem Punkte eng an das ursprüngliche Werk angeschlossen, nämlich in dem Bestreben, die Darstellung und Anordnung so zu wählen, dass der Anfänger dem Lehrgange ohne Schwierigkeit folgen kann. Ich habe deshalb eine möglichst elementare Fassung gewählt und zur Erläuterung zahlreiche Uebungs-Beispiele hinzugefügt. Die Reihenfolge ist so getroffen, dass das Neue an Bekanntes angeknüpft wird, damit der Lernende von leichten Aufgaben allmählich zu schwierigeren aufsteigt.

Aus diesem Grunde ist auch die Eintheilung des Stoffes in der Weise erfolgt, dass in dem ersten Theile von der Integration der gebrochenen rationalen, der irrationalen und der transcendenten Functionen nur die einfacheren Fälle behandelt sind, und dass dann sogleich die Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Quadratur und Rectification der Curven, auf die Kubatur der Rotationskörper und auf die Complanation der Rotationsflächen folgen. Wenn der Lernende möglichst früh erkennt, welche Vortheile die Integral-Rechnung bei den Anwendungen auf die Geometrie bietet, wird er mit grösserem Interesse und reiferem Verständnisse an die ausführliche Behandlung der Partialbruch-Zerlegung (und an die mühsameren Methoden, welche bei der Integration irrationaler und transcendenter Functionen zu erfassen sind, herantreten. Dagegen würde er leicht ermüden, wenn er die ganze Theorie *vor* den Anwendungen, welche ausserdem zur Einübung und Befestigung der bis dahin erklärten Formeln und Sätze dienen, durcharbeiten müsste.

Den theoretischen Erörterungen des zweiten Theiles sind gleichfalls zahlreiche Aufgaben aus der Geometrie beigelegt. Leider mussten die interessanten und äusserst lehrreichen Anwendungen auf die Mechanik ausgeschlossen werden, weil sonst der Umfang des Lehrbuches über Gebühr gewachsen wäre.

Ogleich die früheren Auflagen in erster Linie für die Studirenden an den technischen Hochschulen bestimmt waren, hat das Buch doch auch bei den Lehrern und Studirenden der Mathematik an den Universitäten freundliche Aufnahme und Verbreitung gefunden. Diesem höchst erfreulichen Umstande habe ich Rechnung getragen, indem ich die meisten Erklärungen und Beweise noch strenger gefasst und den Inhalt wesentlich bereichert habe. Freilich darf man in dieser Beziehung bei einem Buche, mit dessen Hülfe sich der Anfänger vor allen Dingen tüchtige Fertigkeit im Differentiiren und Integriren aneignen soll, nicht gar zu hohe Anforderungen stellen.

Die Citate aus der Differential-Rechnung beziehen sich auf die 6^{te} Auflage, welche im November 1892 erschienen, zur Zeit aber bereits vergriffen ist. In der alsbald folgenden 7^{ten} Auflage der Differential-Rechnung soll daher dieselbe Anordnung der

Abschnitte und Paragraphen beibehalten werden, damit die Citate auch dafür noch zutreffende sind.

Den Herren *Lampe*, *von Mangoldt*, *Franz Meyer*, *Runge* und *Voss*, die mir auch bei der Umarbeitung der Integral-Rechnung werthvolle Rathschläge ertheilt haben, bin ich zu aufrichtigem Danke verpflichtet; ganz besonders Herrn *Voss* für die ausführlichen Mittheilungen über kritische Stellen des Buches. Ausserdem muss ich mit dem besten Danke die freundliche Mitwirkung des Herrn *Petzold* beim Lesen der Correctur hervorheben.

Die Verlagsbuchhandlung ist allen meinen Wünschen auf das Bereitwilligste entgegengekommen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Han[n]over, den 23. April 1894.

L. Kiepert.

Vorrede zur sechsten Auflage.

Die vorliegende sechste Auflage unterscheidet sich weder dem Umfange noch dem Inhalte nach wesentlich von der fünften Auflage, seit deren Erscheinen ein so kurzer Zeitraum verstrichen ist, dass sich inzwischen nur an wenigen Stellen das Bedürfniss, Veränderungen vorzunehmen, ergeben hatte. Doch habe ich auch bei der Integral-Rechnung die Verbesserungsvorschläge, welche mir von befreundeter Seite zugegangen sind, und für die ich hierdurch meinen aufrichtigen Dank ausspreche, nach Möglichkeit berücksichtigt. Der mir mehrfach ertheilte Rath, die Differential-Rechnung und die Integral-Rechnung nicht getrennt zu behandeln, sondern mit der Integral-Rechnung zu beginnen, sobald die ersten Abschnitte der Differential-Rechnung erledigt sind, konnte aus rein äusserlichen Gründen nicht befolgt werden. Es bleibt aber jedem Leser überlassen, die Anordnung des Unterrichtsstoffes in dem angedeuteten Sinne zu ändern.

Davon mache ich auch in meinen eigenen Vorträgen, welche an der hiesigen technischen Hochschule im October eines jeden Jahres ihren Anfang nehmen, Gebrauch, um bis zu Weihnachten diejenigen Abschnitte durchzunehmen, welche in den zu Neujahr einsetzenden Vorträgen über Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Ich lasse deshalb den Abschnitten I bis IV, VIII bis XI der Differential-Rechnung unmittelbar den ganzen ersten Theil der Integral-Rechnung folgen und kehre erst dann wieder zur Differential-Rechnung zurück.

Wie schon in der Vorrede zur fünften Auflage hervorgehoben wurde, enthält der Leitfaden in seiner jetzigen Form nur wenig von dem *Stegemann'schen* Werke, so dass ich nunmehr selbst als Verfasser in der neuen Auflage aufgeführt bin.

Beim Lesen der Correctur hat mich Herr *Petzold* wieder in freundlicher Weise unterstützt und dadurch zu herzlichem Danke verpflichtet. Ebenso danke ich der Verlagsbuchhandlung bestens für die liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit der sie bei der Drucklegung allen meinen Wünschen entgegengekommen ist.

Hannover, den 12. September 1896.

L. Kiepert.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Da mir seit dem Erscheinen der sechsten Auflage nur wenige, sich auf Aenderungen beziehende Wünsche bekannt geworden sind, so unterscheidet sich die vorliegende siebente Auflage von der vorhergehenden nur in einigen Punkten, von denen ich den Abschnitt über *Gauss'sche* Quadratur hervorheben möchte. Ich werde aber Jedem, der mir für die späteren Auflagen nützliche Verbesserungs-Vorschläge macht, dankbar sein und rechne dabei insbesondere auf die Mitwirkung der Herren Techniker, die in den letzten Jahren so viel über die nothwendige Reform des mathematischen Unterrichts geschrieben haben, deren Aus-

führungen jedoch *wirklich verwendbare* Vorschläge, wie man es im Einzelnen besser machen kann, bisher nicht enthalten. Wenn ich auf das vorliegende weitverbreitete Lehrbuch Bezug nehmen darf, so verlange ich bestimmte Angaben über etwaige Abschnitte, Lehrsätze und Aufgaben, welche sich darin finden, für den Techniker aber entbehrlich sind; ferner bitte ich um Mittheilung von Untersuchungen und Aufgaben, welche in dem Lehrbuche fehlen. Auch Vorschläge über Aenderung des ganzen Lehrplanes werde ich mit Dank entgegen nehmen.

Ich hatte schon früher um derartige Mittheilungen gebeten und kann mit Genugthuung feststellen, dass mir von Seite der mathematischen Fachgenossen nützliche Winke in grosser Zahl zugegangen sind. Für die vorliegende Auflage haben mir besonders die Herren *Rodenberg* in Hannover und *Stückel* in Kiel gute Rathschläge ertheilt und mich dadurch zu bestem Danke verpflichtet. Von den Herren Technikern dagegen habe ich bisher *nur einen einzigen* Verbesserungs-Vorschlag erhalten, der sich auf die Aufnahme der hyperbolischen Functionen bezieht.

Die Forderung, der mathematische Unterricht an der technischen Hochschule müsse das, was die Techniker später wirklich brauchen, noch mehr, als bisher geschehen ist, berücksichtigen, erscheint mir durchaus berechtigt; dieses Ziel wird aber nicht durch kränkende Vorwürfe erreicht, sondern durch freundschaftliche, gemeinsame Arbeit. Die Kluft, welche zwischen Theorie und Praxis bestanden hat, wird durch die neuerdings beliebten Angriffe auf die Mathematik noch vergrössert; nur durch beiderseitiges Entgegenkommen kann sie überbrückt oder ganz ausgefüllt werden zum Heile der Wissenschaft und zur Förderung der technischen Anwendungen.

Den Fachgenossen, welche an den technischen Hochschulen und Universitäten Differential- und Integral-Rechnung vortragen und an ihre Zuhörer die angehängte Tabelle vertheilen wollen, stellt die Verlagsbuchhandlung eine grössere Anzahl von Separat-Abzügen *kostenfrei* zur Verfügung. Die Benutzung dieser Tabellen, von denen ich jedem meiner Zuhörer ein Exemplar zu überreichen pflege, hat mir bei meinen Vorträgen stets sehr gute Dienste geleistet; denn erstens brauche ich jede Formel nur

einmal herzuleiten und kann bei der späteren Anwendung auf die Tabelle verweisen. Sodann gewinnt der Lernende über das, was er wissen soll, durch die Tabelle einen besseren Ueberblick. Damit stelle ich jedoch gewiss nicht die Anforderung, dass Jemand die ganze Tabelle auswendig lernen soll. Im Gegentheil liegt der Hauptzweck der Tabelle in der Absicht, **das mechanische Auswendiglernen von Formeln möglichst einzuschränken**. Diejenigen Formeln, welche einen wichtigen Satz oder eine häufig verwendete Rechnungsmethode enthalten, muss man sich natürlich merken, aber **nicht durch Auswendiglernen, sondern durch den wiederholten Gebrauch**. Die übrigen Formeln würde man doch sehr bald wieder vergessen, auch wenn man sie noch so sorgfältig auswendig gelernt hätte. Man kann auch um so lieber auf das Auswendiglernen verzichten, wenn man eine Tabelle zur Hand hat, in welcher jede dieser Formeln leicht aufzufinden ist. Ich möchte deshalb ausdrücklich hervorheben, dass die Tabelle meinem Lehrbuche beigelegt ist, nicht um den Lernenden mit vielem Formelkram zu **belasten**, sondern um eine **Entlastung** herbeizuführen.

Herrn *Petzold* habe ich wieder für die freundliche Unterstützung beim Lesen der Correctur und der Verlagsbuchhandlung für die wohlwollende Berücksichtigung meiner Wünsche bei Ausführung des Druckes den verbindlichsten Dank abzustatten.

Hannover, den 3. September 1899.

L. Kiepert.

Vorrede zur achten Auflage.

In der vorliegenden achten Auflage sind einige nicht unwesentliche Aenderungen vorgenommen und einige neue Abschnitte hinzugefügt worden. Namentlich ist in dem ersten Theile die Anordnung so gewählt, dass die verschiedenen Methoden zur Ermittlung der Integrale (Integration durch Substitution, Integration durch Zerlegung und partielle Integration) sich noch schärfer von einander abheben.

Von den *hyperbolischen* Functionen, welche bereits in der neunten Auflage der Differential-Rechnung benutzt worden sind, ist hier ebenfalls zur Vereinfachung zahlreicher Integrationen Gebrauch gemacht, und zwar mit besonderer Rücksicht auf die Gegenüberstellung solcher Integrale mit den verwandten Integralen, welche auf *cyklometrische* Functionen führen.

Hinzugefügt sind noch etliche Untersuchungen aus der Theorie der Differential-Gleichungen, insbesondere auch ein Abschnitt über die Behandlung und Integration *simultaner* Differential-Gleichungen.

Am Schluss ist auch noch eine kurze Tabelle für die Werthe der elliptischen Normal-Integrale erster und zweiter Gattung aufgestellt, in der Ueberzeugung, dass die Anwendung dieser Integrale, die sich in der Technik und in der mathematischen Physik häufig genug einstellen, denen aber die Herren Techniker bisher in der Regel sorgfältig ausgewichen sind, erst dann möglich ist, wenn eine leicht zugängliche, handliche Tabelle vorliegt. Eine solche Tabelle findet sich bereits in der Formel-

Sammlung von *Ligowski* (Taschenbuch der Mathematik, dritte vermehrte Auflage, Berlin 1893); es erschien aber erwünscht, die Zahl der berücksichtigten Werthe des Moduls und der Amplitude zu vergrössern und die Zahl der Decimalstellen von vier auf fünf zu erhöhen. Bei Aufstellung der Tafeln wurde das grosse Werk von *Legendre*, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, Paris 1826 benutzt, indem aus den dort angegebenen Logarithmen die Werthe der Integrale $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ selbst berechnet worden sind. Die Werthe von $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ auf Seite 623 und 624 sind den *Legendre'schen* Tafeln ohne Umrechnung, nur mit Einschränkung der Stellenzahl entnommen.

Den Fachgenossen, welche an den technischen Hochschulen und Universitäten Differential- und Integral-Rechnung vortragen und diese Tafel nebst der angehängten Formel-Tabelle vertheilen wollen, stellt die Verlagsbuchhandlung eine grössere Anzahl von Separatabzügen *kostenfrei* zur Verfügung.

Die Figuren, deren Anzahl ebenfalls vermehrt ist, sind sämtlich neu hergestellt.

Auch diesmal sind mir von verschiedenen Seiten Anregungen zu Verbesserungen und Ergänzungen zugegangen. In dieser Beziehung bin ich besonders den Herren *Stückel* in Kiel und *Prandtl* in Hannover zu Dank verpflichtet. Herr *Prandtl* hat mich namentlich auf einige Abschnitte aus der Theorie der Differential-Gleichungen aufmerksam gemacht, deren Behandlung für die Ingenieure von Bedeutung ist.

Den aufrichtigen Dank, den ich bei den früheren Auflagen der Verlagsbuchhandlung für die bereitwillige Gewährung meiner Wünsche und Herrn *Petzold* für die freundliche Mitwirkung beim Lesen der Correctur zu erstatten hatte, muss ich auch bei dieser Auflage auf's Wärmste wiederholen.

Hannover, den 17. Mai 1903.

L. Kiepert.

Inhalts-Verzeichniss.

Erster Theil.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

	Seite
§ 1. Begriff und geometrische Deutung des Integrals	1
§ 2. Einführung der Integrationsgrenzen	6
§ 3. Einige Hilfssätze für die Ausführung der Integration	16
§ 4. Unmittelbare Integration einiger Functionen.	18
§ 5. Uebungs-Aufgaben	22
§ 6. Allgemeine Bemerkungen	25

II. Abschnitt.

Integration durch Substitution.

§ 7. Erklärung der Substitutions-Methode	26
§ 8. Beispiele für die Substitutions-Methode	27
§ 9. Integration von einigen irrationalen Functionen durch Substitution	30
§ 10. Integrale von der Form $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$	34
§ 11. Integrale von der Form $\int F'(t)dt$, wenn $t=f(x)$ irgend eine transcendente Function von x ist	38
§ 12. Integration durch Einführung trigonometrischer oder hyperbolischer Functionen	51

III. Abschnitt.

Integration durch Zerlegung.

§ 13. Integration von einigen gebrochenen rationalen Functionen durch Zerlegung \	57
---	----

- § 14. Integration von einigen transcendenten Functionen durch Zerlegung. Anwendung der *Moire'schen* Formeln 69

IV. Abschnitt.

Partielle Integration.

- § 15. Erklärung der partiellen Integration 74
 § 16. Beispiele für die partielle Integration 75
 § 17. Integration von einigen trigonometrischen Functionen durch partielle Integration. 78
 § 18. Integration von einigen irrationalen Functionen durch partielle Integration 91

Anwendungen der Integral-Rechnung.

V. Abschnitt.

Quadratur der Curven.

- § 19. Quadratur der Curven bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten 103
 § 20. Quadratur der Curven bei Anwendung schiefwinkliger Coordinaten 119
 § 21. Quadratur von Figuren, welche oben und unten durch eine Curve begrenzt sind 122
 § 22. Quadratur der Curven bei Anwendung von Polarcoordinaten 130
 § 23. Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten 137

VI. Abschnitt.

Kubatur der Rotationskörper.

- § 24. Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers 143
 § 25. Uebungs-Aufgaben 146

VII. Abschnitt.

Rectification der ebenen Curven.

- § 26. Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen ist 161
 § 27. Uebungs-Aufgaben 163
 § 28. Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf Polarcoordinaten bezogen ist 172
 § 29. Uebungs-Aufgaben 173

VIII. Abschnitt.

Complanation der Rotationsflächen.

§ 30.	Berechnung des Flächenelementes bei einer Rotationsfläche	178
§ 31.	Uebungs-Aufgaben	179

IX. Abschnitt.

Rectification der Raumcurven.

§ 32.	Berechnung des Bogenelementes einer Raumcurve	190
§ 33.	Uebungs-Aufgaben	191

Zweiter Theil.

X. Abschnitt.

Integration der gebrochenen rationalen Functionen.

§ 34.	Aecht gebrochene und unächt gebrochene rationale Functionen	194
§ 35.	Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sämmtlich von einander verschieden sind	196
§ 36.	Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Gleichung $f(x)=0$ auch gleiche Wurzeln besitzt	212
§ 37.	Integration der Functionen $\frac{A}{x-a} dx$ und $\frac{A}{(x-a)^n} dx$. . .	222
§ 38.	Integration der Functionen $\frac{dx}{(x-g)^2+h^2}$ und $\frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$.	227
§ 39.	Integration der Functionen $\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2}$ und $\frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$.	230
§ 40.	Uebungs-Aufgaben	231

XI. Abschnitt.

Integration der irrationalen Functionen.

§ 41.	Allgemeine Bemerkungen	238
§ 42.	Integration rationaler Functionen der Argumente $x, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots$	238
§ 43.	Uebungs-Aufgaben	241

	Seite
§ 44. Zurückführung der Differential-Functi- on von der Form $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ auf Differential-Functi- on von der Form $f(y, \sqrt{y^2-a^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2+y^2})dy$, $f(y, \sqrt{a^2-y^2})dy$	245
§ 45. Uebungs-Aufgaben	247
§ 46. Integration der Differential-Functi- on $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn A positiv ist	250
§ 47. Integration der Differential-Functi- on $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn C positiv ist	258
§ 48. Integration der Differential-Functi- on $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn B^2-AC positiv ist	267
§ 49. Integration der Differential-Functi- on $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn die drei Grössen A , C und B^2-AC negativ sind . .	273
§ 50. Normalintegrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$. .	274

XII. Abschnitt.

Theorie der bestimmten Integrale.

§ 51. Integration bei unendlichen Grenzen	280
§ 52. Integration von Differential-Functi- on, die an den Grenzen des Integrals unstetig werden	284
§ 53. Integration von Differential-Functi- on, die zwischen den Integrations-Grenzen unendlich werden	288
§ 54. Näherungsmethoden durch Einführung einfacherer Functionen	292
§ 55. Mittelwerthsätze	294
§ 56. Neuer Beweis des <i>Taylor'schen</i> Lehrsatzes	297
§ 57. Gliedweise Integration unendlicher Reihen	299
§ 58. Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung	304
§ 59. Differentiation der Integrale	319
§ 60. Berechnung bestimmter Integrale durch Differentiation . .	322
§ 61. Berechnung der Werthe von einigen bestimmten Integralen	323
§ 62. Darstellung der Coefficienten einer trigonometrischen Reihe	328
§ 63. Berechnung bestimmter Integrale bei Anwendung mehr- deutiger Substitutionen	332
§ 64. Messungsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale .	339
§ 65. <i>Simpson'sche</i> Regel	343
§ 66. Uebungs-Beispiele	350
§ 67. <i>Gauss'sche</i> Quadratur	358

XIII. Abschnitt.

Kubatur der Körper und Complanation der krummen Ober-
flächen. Mehrfache Integrale.

§ 68. Kubatur der Körper durch Anwendung einfacher Integrale .	368
§ 69. Uebungs-Aufgaben	371

	Seite
§ 70. Einführung mehrfacher Integrale	374
§ 71. Theorie der mehrfachen Integrale	389
§ 72. Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen	393
§ 73. Complanation der Flächen	400
§ 74. Uebungs-Beispiele	403
§ 75. Einführung zweier variablen Parameter	413
§ 76. Einführung räumlicher Polarcoordinaten	415

XIV. Abschnitt.

**Integration der Differentiale der Functionen
von mehreren Veränderlichen.**

§ 77. Vollständige Differentiale der Functionen von zwei Veränderlichen	419
§ 78. Uebungs-Beispiele	422
§ 79. Vollständige Differentiale der Functionen von drei Veränderlichen	427
§ 80. Uebungs-Beispiele	432

XV. Abschnitt.

**Theorie der gewöhnlichen Differential-Gleichungen
erster Ordnung.**

§ 81. Begriff und Eintheilung der Differential-Gleichungen	436
§ 82. Auflösbarkeit der Differential-Gleichungen, Integrations-Constanten	438
§ 83. Untersuchung der Convergenz-Bedingungen	452
§ 84. Trennung der Variablen	464
§ 85. Integration der Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	472
§ 86. Einige weitere Fälle, in denen man die Trennung der Variablen ausführen kann	477
§ 87. Lineare Differential-Gleichungen erster Ordnung	482
§ 88. Gleichung von <i>Bernoulli</i>	492
§ 89. Erklärung des integrierenden Factors	495
§ 90. Beispiele zur Erläuterung	498
§ 91. Bestimmung des integrierenden Factors	500
§ 92. Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades	510
§ 93. Integration durch Differentiation	514
§ 94. Die singulären Auflösungen der Differential-Gleichungen erster Ordnung	523
§ 95. Uebungs-Beispiele	527
§ 96. Isogonale Trajectorien	533
§ 97. Uebungs-Aufgaben	535

XVI. Abschnitt.

Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

- § 98. Allgemeine Bemerkungen 551
- § 99. Integration der Differential-Gleichung $\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$ 551
- § 100. Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right) = 0$ 556
- § 101. Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0$ 560
- § 102. Fälle, in denen sich die Ordnung der Differential-Gleichung erniedrigen lässt. 564

XVII. Abschnitt.

Lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

- § 103. Allgemeine Bemerkungen 577
- § 104. Homogene lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung . 578
- § 105. Nicht homogene lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung 588
- § 106. Zurückführung der linearen Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung auf solche niedrigerer Ordnung, wenn particuläre Integrale bekannt sind 593
- § 107. Ein weiterer Fall, in dem sich die lineare Differential-Gleichung integrieren lässt 599

XVIII. Abschnitt.

Simultane Differential-Gleichungen.

- § 108. Zurückführung von simultanen Differential-Gleichungen zwischen einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen auf eine Differential-Gleichung höherer Ordnung zwischen *zwei* Veränderlichen 606
- § 109. Integration simultaner Differential-Gleichungen 611
- Anhang. Tafeln für die elliptischen Integrale 621
- Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung . . . 625



Erster Theil.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

§ 1.

Begriff und geometrische Deutung des Integrals.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 1 und 2.)*)

Die Aufgabe der Integral-Rechnung besteht darin, *dass eine Function $F(x)$ gesucht wird, deren Ableitung*

$$(1.) \quad F'(x) = f(x)$$

gegeben ist.

Da das Differential einer Function $F(x)$ gleich ist ihrer Ableitung $F'(x)$, multiplicirt mit dem Differential von x , da also

$$(2.) \quad dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

so kann man die gestellte Aufgabe auch so fassen: „*Von einer Function ist das Differential gegeben, man soll die Function selbst aufsuchen.*“

Die Operation, durch welche dies geschieht, nennt man die „*Integration des vorliegenden Differentials*“ und die Wissenschaft, welche von den Integrationen handelt, nennt man „*Integral-Rechnung*“. Das Operationszeichen für das Integral von $F'(x)dx$ ist \int (ein langgezogenes S),***) also

*) Die wichtigsten Formeln sind im Anhange zu einer Tabelle zusammengestellt.

**) Es wird später gezeigt werden, dass man jedes (bestimmte) Integral auch als den Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen auffassen kann. Dieser Auffassung entspricht das Operationszeichen \int (erster Buchstabe des Wortes Summa), das von *Leibniz* eingeführt ist.

$$(3.) \quad \int F'(x)dx = F(x).$$

In dieser Hauptformel ist somit ausgesprochen, was man unter dem Integral einer gegebenen Differential-Function

$$F'(x)dx = f(x)dx$$

versteht.

Beispiele.

1) Ist

$$F(x) = x^3,$$

so wird

$$F'(x) = 3x^2, \quad \text{also} \quad \int 3x^2 dx = x^3.$$

2) Ist

$$F(x) = \sin x,$$

so wird

$$F'(x) = \cos x, \quad \text{also} \quad \int \cos x dx = \sin x.$$

3) Ist

$$F(x) = \arctg x,$$

so wird

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{also} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x.$$

Aus der vorstehenden Erklärung folgt, dass *Integration und Differentiation entgegengesetzte Operationen sind, die sich gegenseitig aufheben*. Setzt man nämlich aus Gleichung (2.) den Werth von $F'(x)dx$ in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

$$(4.) \quad \int dF(x) = F(x);$$

und wenn man beide Seiten der Gleichung (3.) differentiirt,

$$(5.) \quad d \int F'(x)dx = dF(x) = F'(x)dx.$$

Darin liegt ein Mittel, um das durch die Integration sich ergebende Resultat zu prüfen. Differentiirt man nämlich dieses Resultat, so muss man den Ausdruck erhalten, der unter dem Integralzeichen steht.

Weil $F'(x)dx$ nicht nur das Differential von $F(x)$, sondern auch das Differential von $F(x) + C$ ist, wo C eine beliebige Constante bedeutet, so wird ganz allgemein

$$(6.) \quad \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Das Integral von $F'(x)dx$ hat daher unendlich viele Werthe. Dabei nennt man die Grösse C die „*Integrations-Constante*“.

Dies ist aber die *einzig*e Willkür, welche bei der Bestimmung des Integrals auftritt, denn es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist die Ableitung einer stetigen Function $\varphi(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b gleich 0, so ist der Werth von $\varphi(x)$ in diesem Intervalle constant.*

Beweis. Nach dem *Taylor'schen* Lehrsatz (D.-R*), Formel Nr. 85 der Tabelle) ist

$$(7.) \quad \varphi(a+h) = \varphi(a) + h \cdot \varphi'(a + \Theta h),$$

wo Θ zwischen 0 und 1 liegt. Nach Voraussetzung ist $\varphi'(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b gleich 0, folglich wird

$$\varphi'(a + \Theta h) = 0,$$

so lange $a+h = x$ in dem angegebenen Intervalle bleibt. Da nun h eine endliche Grösse ist, so wird

$$(8.) \quad \varphi(a+h) = \varphi(a), \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = \varphi(a),$$

d. h. $\varphi(x)$ behält den constanten Werth $\varphi(a)$.

Hieraus folgt

Satz 2. *Haben die beiden stetigen Functionen $F(x)$ und $G(x)$ in dem betrachteten Intervalle dieselbe Ableitung, so unterscheiden sie sich von einander nur durch eine Constante.*

Beweis. Setzt man

$$(9.) \quad \varphi(x) = G(x) - F(x),$$

so ist die Ableitung von $\varphi(x)$ in dem Intervalle beständig gleich Null, also ist $\varphi(x)$ nach Satz 1 eine Constante C . Dies giebt

$$(10.) \quad G(x) = F(x) + C.$$

Satz 3. *Sind die beiden Functionen $F(x)$ und $G(x)$ Integrale derselben Function $f(x)$, so können sie sich nur durch eine Constante von einander unterscheiden.*

Beweis. Nach der Erklärung des Integrals muss

$$(11.) \quad F'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad G'(x) = f(x)$$

sein, d. h. es muss

*) Die Citate, welche sich auf die neunte Auflage der Differentialrechnung beziehen, sollen durch die vorgesetzten Buchstaben: „D.-R.“ hervorgehoben werden.

$$(12.) \quad F'(x) = G'(x)$$

sein, folglich ist nach dem vorigen Satze

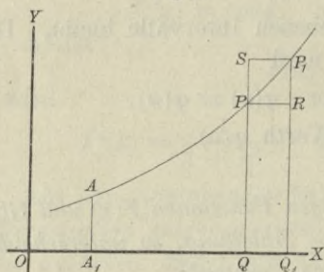
$$(13.) \quad G(x) = F(x) + C.$$

Satz 4. *Zu jeder stetigen Function $y = f(x)$, die sich durch eine Curve geometrisch darstellen lässt, giebt es ein Integral, (während es nicht zu jeder stetigen Function eine Ableitung giebt).*

Beweis. Es möge zunächst die Voraussetzung gemacht werden, dass die Curven, so weit ihr Bogen hier in Betracht kommt, *oberhalb* der X-Axe liegen. Ist AP ein solcher Curvenbogen (Fig. 1) mit der Gleichung

$$(14.) \quad y = f(x),$$

Fig. 1.



so ist der Flächeninhalt F der Figur A_1QPA eine Function $F(x)$ von x , denn er ändert sich zugleich mit x . Es ist also

$$(15.) \quad F = A_1QPA = F(x),$$

und wenn man QQ_1 mit Δx , $Q_1P_1 = f(x + \Delta x)$ mit y_1 bezeichnet,

$$(16.) \quad A_1Q_1P_1A = F(x + \Delta x) = F + \Delta F,$$

folglich wird

$$(17.) \quad QQ_1P_1P = \Delta F = \Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Legt man durch P die Gerade PR parallel zur X-Axe, so wird unter der Voraussetzung, dass die Curve von P bis P_1 steigt,

$$(18.) \quad QQ_1RP = y \cdot \Delta x < \Delta F(x) = QQ_1P_1P;$$

und legt man durch P_1 die Gerade P_1S parallel zur X-Axe, so wird

$$(19.) \quad QQ_1P_1P = \Delta F(x) < QQ_1P_1S = y_1 \cdot \Delta x.$$

Dies giebt

$$(20.) \quad y \leq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leq y_1,$$

oder, weil $\lim y_1 = y$ für $\lim \Delta x = 0$ wird,

$$(21.) \quad y = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad f(x) = F'(x).$$

Deshalb erhält man

$$(22.) \quad F = F(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx,$$

oder

$$(22a.) \quad F = \int y dx.$$

Dieselben Schlüsse gelten auch noch, wenn die Curve vom Punkte P bis zum Punkte P_1 fällt (vergl. Fig. 2), nur erhalten dann die Ungleichheitszeichen die entgegengesetzte Richtung. Es wird nämlich in diesem Falle

$$F = A_1 Q P A = F(x);$$

$$A_1 Q_1 P_1 A = F(x + \Delta x) = F + \Delta F,$$

$$Q Q_1 P_1 P = \Delta F = \Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

$$Q Q_1 R P \geq \Delta F(x) \geq Q Q_1 P_1 S,$$

oder

$$(23.) \quad y \cdot \Delta x \geq \Delta F(x) \geq y_1 \cdot \Delta x,$$

$$(24.) \quad y \geq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \geq y_1,$$

also, da auch hier $\lim y_1 = y$ wird für $\lim \Delta x = 0$,

$$(25.) \quad y = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad f(x) = F'(x).$$

Das Resultat bleibt sogar auch dann noch richtig, wenn die Curve zwischen P und P_1 abwechselnd steigt und fällt (Fig. 3). Man legt dann durch den höchsten Punkt H mit der Ordinate y' und durch den tiefsten Punkt T mit der Ordinate y'' Parallele GG_1 und KK_1 zu der X-Axe. Dadurch erhält man die beiden Rechtecke

Fig. 2.

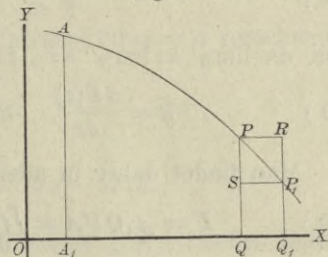
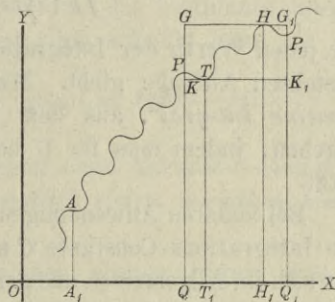


Fig. 3.



(26.) $QQ_1G_1G = y' \cdot \Delta x$ und $QQ_1K_1K = y'' \cdot \Delta x$,
und zwar wird

(27.) $y' \cdot \Delta x \cong QQ_1P_1P = \Delta F(x) \cong y'' \cdot \Delta x$,
oder

(28.) $y' \cong \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \cong y''$,

also, da $\lim y' = \lim y'' = y$ für $\lim \Delta x = 0$,

(29.) $y = \frac{dF(x)}{dx}$, oder $f(x) = F'(x)$.

Man findet daher in allen Fällen

(30.) $F = A_1QPA = \int f(x)dx + C = \int ydx + C$.

Bei dieser geometrischen Deutung des Integrals erkennt man auch, weshalb zu dem Integral noch eine willkürliche Integrations-Constante hinzutreten muss. Die Anfangs-Ordinate A_1A , durch welche die ebene Figur F auf der einen Seite begrenzt wird, ist noch beliebig. Einer Verschiebung dieser Anfangs-Ordinate entspricht eine Veränderung der Integrations-Constanten C .

§ 2.

Einführung der Integrationsgrenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 3 bis 6.)

Es giebt Anwendungen der Integral-Rechnung, bei denen die Gleichung

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

für jeden Werth der Integrations-Constanten C eine Lösung der gestellten Aufgabe giebt. Man nennt dann $F(x) + C$ das „*allgemeine Integral*“, aus dem sich die „*particulären Integrale*“ ergeben, indem man für C besondere (particuläre) Werthe einsetzt.

Bei anderen Anwendungen der Integral-Rechnung aber darf die Integrations-Constante C nur *einen* bestimmten Werth haben, der sich im Allgemeinen aus der Natur der Aufgabe ohne Weiteres ergibt. Gewöhnlich wird die Integrations-Constante C dadurch

ermittelt, dass man den Werth von x aufsucht, für welchen das Integral in der vorgelegten Aufgabe verschwindet.

Ist a dieser besondere Werth von x , so nennt man a „die untere Grenze“ des Integrals und schreibt

$$(1.) \quad F = \int_a F'(x) dx = F(x) + C.$$

Da nach Voraussetzung das Integral für $x = a$ verschwindet, so findet man hieraus

$$(2.) \quad 0 = F(a) + C, \quad \text{oder} \quad C = -F(a),$$

also

$$(3.) \quad F = \int_a F'(x) dx = F(x) - F(a).$$

Dieses Verfahren kommt auch bei der geometrischen Deutung des Integrals in Betracht. In den Figuren 1, 2 und 3 z. B. verschwindet der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1QPA , wenn die Ordinate QP mit der Anfangs-Ordinate A_1A zusammenfällt, wenn also

$$x = a = OA_1.$$

In vielen Fällen braucht man den Werth von F nur für einen bestimmten Werth von x , z. B. für $x = b$; man nennt dann b „die obere Grenze“ und schreibt

$$(4.) \quad F = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

F heisst in diesem Falle ein „bestimmtes Integral“, während man $F(x)$ das „unbestimmte Integral“ von $F'(x) dx$ nennt.

Um anzudeuten, in welcher Weise das bestimmte Integral aus dem unbestimmten hergeleitet wird, schreibt man

$$(5.) \quad F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Satz 1. *Das bestimmte Integral kann betrachtet werden als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen.*

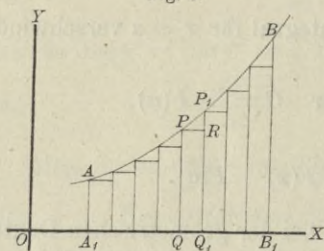
Beweis. Der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA (Fig. 4) war

$$(6.) \quad F = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

wenn diese Figur durch die Curve

$$y = F'(x), \quad \text{oder} \quad y = f(x)$$

Fig. 4.



begrenzt wird. Andererseits kann man aber auch den Flächeninhalt dieser Figur dadurch berechnen, dass man sie durch Parallele zur Y -Axe in n Streifen zerlegt, die alle verschwindend klein werden, wenn n in's Unbegrenzte wächst. Ist nun QQ_1P_1P einer der Streifen, und zieht man durch P eine Parallele PR zur X -Axe, so wird dieser Streifen zerlegt in ein Rechteck QQ_1RP mit dem Flächeninhalte $y \cdot \Delta x$ und in das Dreieck PRP_1 , wobei mit Δx die Breite des Streifens bezeichnet ist. Die Summe der Rechtecke QQ_1RP ist daher

$$(7.) \quad F_1 = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} y \cdot \Delta x = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x) \cdot \Delta x = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} F'(x) \cdot \Delta x.$$

Wächst n in's Unbegrenzte, so wird Δx verschwindend klein, und man erhält

$$(8.) \quad \lim F_1 = \lim \sum F'(x) \cdot \Delta x = F,$$

weil die Dreiecke PRP_1 verschwindend kleine Grössen *höherer* Ordnung werden, die neben den verschwindend kleinen Grössen *erster* Ordnung vernachlässigt werden dürfen.

Von der Richtigkeit dieses Resultats kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Der Flächeninhalt des Dreiecks PRP_1 (Fig. 4) ist kleiner als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Grundlinie $PR = \Delta x$ und der Höhe $RP_1 = h_x$, also

$$\triangle PRP_1 < h_x \cdot \Delta x.$$

Dieselbe Ungleichung gilt für die sämtlichen Dreiecke, welche in Figur 4 von den Streifen abgeschnitten sind. Be-

zeichnet man also die Summe dieser Dreiecke mit $\sum PRP_1$ und die grösste unter den Höhen h_x mit h , so wird

$$\sum PRP_1 < \sum h_x \cdot \Delta x < h \sum \Delta x,$$

oder, da $\sum \Delta x$, d. h. die Summe aller Grundlinien gleich A_1B_1 ist,

$$\sum PRP_1 < h \cdot A_1B_1 = h(b - a).$$

Nach Voraussetzung ist die Function $f'(x)$ für die betrachteten Werthe von x stetig und endlich, deshalb werden die Grössen h_x , also auch h mit Δx zugleich verschwindend klein, folglich auch $\sum PRP_1$.

In Figur 4 steigt die Curve von A bis B . Das Rechteck QQ_1RP ist deshalb um das Dreieck PRP_1 kleiner als der

Fig. 5.

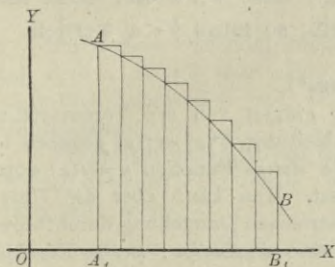
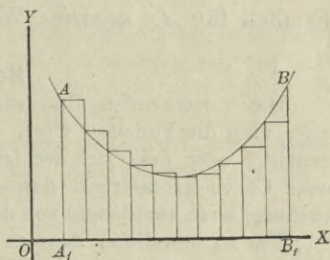


Fig. 6.



Streifen QQ_1P_1P . Dasselbe gilt für alle anderen Streifen, in welche die Figur zerlegt ist. Fällt dagegen die Curve von A bis B (vergl. Fig. 5), so sind die Rechtecke um die kleinen Dreiecke grösser als die Streifen der Figur. Es können auch (wie in Figur 6) die Rechtecke theilweise grösser und theilweise kleiner als die Streifen sein. Die in Gleichung (8.) ausgesprochene Schlussfolgerung bleibt aber auch dann noch richtig, weil die Summe der vernachlässigten oder hinzugefügten Dreiecke zugleich mit Δx verschwindend klein wird.

Statt $\lim \sum$ schreibt man S und fügt die Grenzen der Summation, nämlich a und $\lim(b - \Delta x) = b$ unten und oben dem Summenzeichen S , aus welchem das Zeichen \int entstanden ist, hinzu. Dadurch erhält die Gleichung (8.) die Form

$$(8a.) \quad F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

welche mit Gleichung (6.) übereinstimmt.

Bisher war die Voraussetzung festgehalten worden, dass der betrachtete Curvenbogen *oberhalb* der X-Axe liegt, d. h. es sollte $y = f(x) \geq 0$ sein für alle in Betracht kommenden Werthe von x . Die vorstehenden Schlüsse gelten aber in gleicher Weise auch dann noch, wenn der Bogen AB *unterhalb* der X-Axe liegt, wenn also $y = f(x) \leq 0$ ist für die betrachteten Werthe von x . In diesem Falle hat aber selbstverständlich

$f(x) \cdot \Delta x = F'(x) \cdot \Delta x$ und deshalb auch $\sum F'(x) \cdot \Delta x$ einen *negativen* Werth.

Es ist auch nicht nothwendig, dass $b > a$ ist; setzt man nämlich für Δx *negative* Werthe ein, so muss $b < a$ werden.

Bemerkung.*)

Die vorstehenden Untersuchungen gingen von der Voraussetzung aus, dass die Function $F(x)$, deren Ableitung $F'(x) = f(x)$ gegeben ist, existirt, oder dass sich wenigstens die *stetige* Function $y = f(x)$ durch eine Curve geometrisch darstellen lässt. Man kann aber die Untersuchung auch *unabhängig* von der geometrischen Darstellung durchführen.

Um zu beweisen, dass es immer eine *eindeutige*, *stetige* Function $F(x)$ giebt, deren Ableitung $F'(x)$ einer gegebenen *stetigen* Function $f(x)$ gleich ist, wobei $F(x)$ noch für $x = a$ einen beliebigen Werth $F(a)$ annehmen darf, beachte man die nach dem *Taylor'schen* Satze für jede stetige Function geltende Gleichung (D.-R., Formel Nr. 85 der Tabelle)

$$(9.) \quad F(x + h) - F(x) = h \cdot F'(x + \Theta h).$$

Da nun in dem vorliegenden Falle $F'(x) = f(x)$ sein soll, so würde die Gleichung (9.), nachdem man die Existenz der Function $F(x)$ nachgewiesen hat, übergehen in

$$(9a.) \quad F(x + h) - F(x) = h \cdot f(x + \Theta h).$$

Theilt man das Intervall von a bis b in n gleiche Theile und nennt die Theilwerthe

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b,$$

so würde man aus Gleichung (9a.) das folgende System von Gleichungen erhalten

*) Der Anfänger darf diese Bemerkung, wenn ihr Inhalt für ihn zu schwer verständlich sein sollte, übergehen.

oder, wenn man der Kürze wegen $\sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) K_\alpha$ mit S bezeichnet und die Ungleichung (15.) beachtet,

$$(17.) \quad S \leq F(b) - F(a) \leq S + (b - a)\delta.$$

Da aber $b - a$ eine endliche Grösse ist, und δ beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n , so nähert sich $F(b) - F(a)$ dem Grenzwert

$$\lim S = \lim_{\alpha=n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) K_\alpha.$$

Diese Summe hat auch, weil $f(x)$ in dem Intervall von a bis b stetig ist, einen endlichen Werth. Bezeichnet man nämlich mit G die grösste unter den Grössen G_1, G_2, \dots, G_n und mit K die kleinste unter den Grössen K_1, K_2, \dots, K_n , so wird

$$\begin{aligned} \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) K_\alpha &> \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) K = (b - a) K, \\ \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) G_\alpha &< \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) G = (b - a) G. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (16.) wird also noch verstärkt, indem man schreibt

$$(18.) \quad (b - a) K < F(b) - F(a) < (b - a) G.$$

Da $(b - a)K$ und $(b - a)G$ endliche Grössen sind, so ist auch $F(b) - F(a)$ eine endliche Grösse.

In gleicher Weise wie die Ungleichungen (16.) und (17.) kann man auch die Ungleichungen

$$(19.) \quad \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) K_\alpha \leq \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f(x_{\alpha-1}) \leq \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) G_\alpha$$

und

$$(20.) \quad S \leq \sum (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f(x_{\alpha-1}) \leq S + (b - a)\delta$$

ableiten und daraus schliessen, dass

$$(21.) \quad F(b) - F(a) = \lim_{\alpha=n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f(x_{\alpha-1})$$

ist. Vertauscht man noch der Kürze wegen x_α mit x und die verschwindend kleine Differenz $x_\alpha - x_{\alpha-1}$ mit dx , bezeichnet man ferner die Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen nicht mehr mit $\lim \Sigma$ sondern mit \int , so geht die Gleichung (21.) über in

$$(22.) \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

wobei die beiden Grenzen a und b bei dem Summenzeichen \int angeben, dass x alle Werthe von a bis b durchlaufen soll.

Bisher war b unveränderlich gedacht, man darf aber für b auch die Veränderliche x setzen und erhält dadurch

$$(23.) \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

Um nun noch zu zeigen, dass die Ableitung von $F(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt, beachte man Gleichung (11a.), nach welcher man

$$(24.) \quad F(x_n) - F(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})]$$

erhält. Ebenso ist

$$(25.) \quad F(x_{n-1}) - F(a) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} (x_\alpha - x_{\alpha-1}) f[x_{\alpha-1} + \Theta_\alpha(x_\alpha - x_{\alpha-1})],$$

folglich wird

$$(26.) \quad F(x_n) - F(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \Theta_n(x_n - x_{n-1})],$$

oder

$$(27.) \quad \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f[x_{n-1} + \Theta_n(x_n - x_{n-1})]$$

und für $\lim x_n = \lim x_{n-1} = x$

$$(28.) \quad F'(x) = f(x).$$

Aus den Gleichungen

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{und} \quad \int_b^a F'(x) dx = F(a) - F(b)$$

folgt

$$(29.) \quad \int_a^b F'(x) dx = - \int_b^a F'(x) dx,$$

oder in Worten:

Satz 2. *Man darf die obere und die untere Grenze eines bestimmten Integrals mit einander vertauschen, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen des Integrals umkehrt.*

Hierbei ist in dem einen Integral die untere Grenze grösser als die obere und in Folge dessen dx negativ.

Aus den Gleichungen

$$\int_a^c F'(x) dx = F(c) - F(a) \quad \text{und} \quad \int_c^b F'(x) dx = F(b) - F(c)$$

folgt

$$(30.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^b F'(x) dx,$$

oder in Worten:

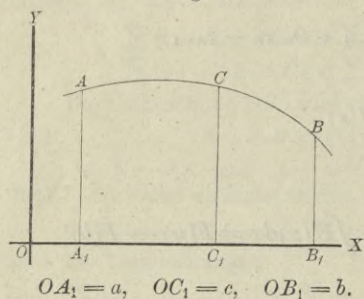
Satz 3. *Man kann ein bestimmtes Integral in zwei andere zerlegen, indem man zwischen den Grenzen a und b eine beliebige Grösse c einschaltet und das erste Integral zwischen den Grenzen a und c , das zweite Integral zwischen den Grenzen c und b berechnet.*

Am anschaulichsten wird der Sinn des Satzes durch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals. Ist nämlich

$$y = f(x) = F'(x)$$

die Gleichung einer Curve, so wird

Fig. 7.



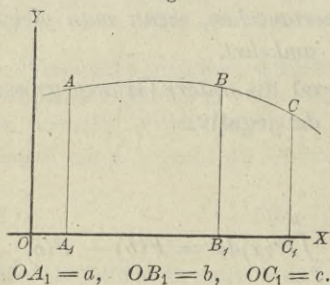
$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA . Liegt nun c zwischen a und b , so wird die Figur durch die Gerade C_1C , welche im Abstände c parallel zur Y -Axe gezogen ist (vergl. Fig. 7), in zwei Theile zerlegt, nämlich in

$$A_1C_1CA = \int_a^c F'(x) dx \quad \text{und} \quad C_1B_1BC = \int_c^b F'(x) dx.$$

Der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn c nicht

Fig. 8.



zwischen a und b liegt. Es sei zunächst (vergl. Fig. 8) $a < b < c$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

$$A_1C_1CA = \int_a^c F'(x) dx,$$

$$B_1C_1CB = \int_b^c F'(x) dx,$$

also

$$A_1B_1BA = A_1C_1CA - B_1C_1CB = \int_a^c F'(x) dx - \int_b^c F'(x) dx,$$

oder nach Satz 2

$$A_1B_1BA = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^b F'(x) dx.$$

Ist endlich (vergl. Fig. 9)
 $c < a < b$, so ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

$$C_1B_1BC = \int_c^b F'(x) dx,$$

$$C_1A_1AC = \int_c^a F'(x) dx,$$

also

$$A_1B_1BA = C_1B_1BC - C_1A_1AC = \int_c^b F'(x) dx - \int_c^a F'(x) dx,$$

oder mit Rücksicht auf Satz 2

$$\int_a^b F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^b F'(x) dx.$$

Der Satz lässt sich noch in der Weise verallgemeinern, dass man zwischen den Grenzen a und b nicht *eine*, sondern *beliebig viele* Grenzen einschaltet. Dadurch erhält man z. B.

$$(31.) \int_a^b F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^d F'(x) dx + \int_d^e F'(x) dx + \int_e^b F'(x) dx,$$

wobei c , d und e ganz beliebige Zahlen sind.

Voraussetzung ist dabei, dass die Function $F'(x)$ in den einzelnen Intervallen a bis c , c bis d , d bis e , e bis b eindeutig und stetig ist.

Bei der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals war bisher vorausgesetzt worden, dass der Bogen AB der Curve, welche der Gleichung $y = F'(x)$, oder $y = f(x)$ entspricht, entweder seiner ganzen Länge nach *oberhalb*, oder seiner ganzen Länge nach *unterhalb* der X -Axe liegt. Jetzt kann man aber die geometrische Deutung auch auf den Fall übertragen, wo der

Fig. 9.

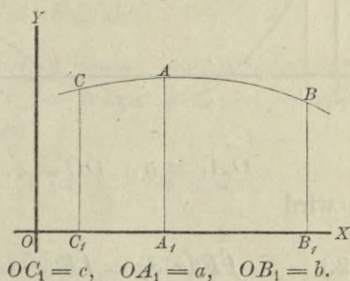
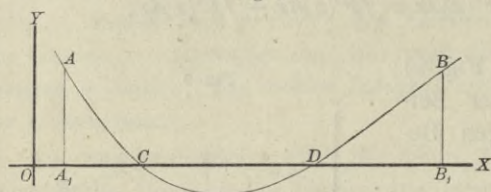


Fig. 10.



Bogen AB theilweise *über*, theilweise *unter* der X -Axe liegt. Schneidet der Bogen die X -Axe z. B. in den Punkten C und D (Fig. 10), und setzt man

$$OA_1 = a, \quad OC = c, \quad OD = d, \quad OB_1 = b,$$

so wird

$$(32.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^d F'(x) dx + \int_d^b F'(x) dx,$$

wobei für die einzelnen Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung die frühere Voraussetzung gilt, so dass man für das erste und dritte Integral einen *positiven* Werth, für das zweite Integral dagegen einen *negativen* Werth erhält.

§ 3.

Einige Hilfssätze für die Ausführung der Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 7 und 8.)

Satz 1. *Ist die Differential-Function unter dem Integralzeichen mit einem constanten Factor multiplicirt, so darf man diesen constanten Factor vor das Integralzeichen setzen, d. h. es ist*

$$\int AF'(x) dx = A \int F'(x) dx.$$

Beweis. Es ist

$$(1.) \quad d[AF(x) + C] = AF'(x) dx,$$

hieraus folgt

$$(2.) \quad \int AF'(x) dx = AF(x) + C.$$

Ferner ist

$$(3.) \quad \int F'(x) dx = F(x) + C_1,$$

also

$$(4.) \quad A \int F'(x) dx = AF(x) + A \cdot C_1.$$

Da nun die Werthe der Integrations-Constanten ganz beliebig sind, so darf man $A \cdot C_1 = C$ setzen und erhält demnach aus den Gleichungen (2.) und (4.)

$$(5.) \quad \int A F'(x) dx = A \int F'(x) dx.$$

Satz 2. *Das Integral einer Summe von Differential-Functionen ist gleich der Summe der Integrale dieser einzelnen Differential-Functionen; es ist also*

$$\int [F'(x) dx + G'(x) dx] = \int F'(x) dx + \int G'(x) dx.$$

Beweis. Weil

$$(6.) \quad d[F(x) + G(x) + C] = F'(x) dx + G'(x) dx,$$

so ist

$$(7.) \quad \int [F'(x) dx + G'(x) dx] = F(x) + G(x) + C.$$

Ferner ist

$$(8.) \quad \int F'(x) dx = F(x) + C_1,$$

$$(9.) \quad \int G'(x) dx = G(x) + C_2.$$

Durch Addition der Gleichungen (8.) und (9.) erhält man

$$(10.) \quad \int F'(x) dx + \int G'(x) dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2.$$

Die Integrations-Constanten C , C_1 , C_2 haben auch hier ganz beliebige Werthe, so dass man $C_1 + C_2 = C$ setzen darf. Man erhält demnach aus den Gleichungen (7.) und (10.)

$$(11.) \quad \begin{aligned} \int [F'(x) dx + G'(x) dx] &= \int [F'(x) + G'(x)] dx \\ &= \int F'(x) dx + \int G'(x) dx. \end{aligned}$$

Dieser Satz lässt sich unmittelbar erweitern auf Summen von beliebig vielen Gliedern, so dass man erhält

$$(12.) \quad \begin{aligned} \int [F'(x) + G'(x) + H'(x) + \dots] dx \\ = \int F'(x) dx + \int G'(x) dx + \int H'(x) dx + \dots; \end{aligned}$$

sodann lässt er sich auch übertragen auf das Integral einer Differenz, so dass man erhält

$$(13.) \quad \int [F'(x) - G'(x)] dx = \int F'(x) dx - \int G'(x) dx.$$

§ 4.

Unmittelbare Integration einiger Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 9 bis 25 a.)

Aus der Erklärung des Integrals, nämlich aus der Formel

$$(1.) \quad \int F'(x) = F(x) + C$$

ergibt sich ganz von selbst, wie man eine grosse Anzahl von Differential-Functionen integrieren kann. Denn, nimmt man die Function $F(x)$ beliebig an und bildet $F'(x)$, so erhält man durch Einsetzen in Gleichung (1.) sofort $\int F'(x)dx$.

Indem man für $F(x)$ besonders oft vorkommende Functionen einsetzt, findet man ohne Weiteres die folgenden Formeln:

$$(2.) \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Hierbei darf m jeden beliebigen *positiven* oder *negativen*, *ganzzahligen* oder *gebrochenen* Werth haben. Eine *scheinbare* Ausnahme bildet nur der Werth $m = -1$, von welchem nachher noch ausführlich die Rede sein wird.

Besonders hervorgehoben sei noch der Fall $m = 0$, nämlich

$$(2a.) \quad \int dx = x + C,$$

ein Resultat, das sich auch aus Formel Nr. 1 der Tabelle ergibt.

Mit Hülfe von Gleichung (2.) ist jetzt die Integration *jeder ganzen rationalen* Function ausführbar, denn nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen wird

$$\begin{aligned} & \int (ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n)dx \\ &= a \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + a_2 \int x^{n-2} dx + \dots + a_{n-1} \int x dx + a_n \int dx \\ &= a \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + a_2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n x + C. \end{aligned}$$

$$(3.) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$(3a.) \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$(4.) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Diese Formel bildet die *scheinbare* Ausnahme von Gleichung (2.), aus der man für $m = -1$

$$(5.) \quad \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C,$$

oder

$$(6.) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C = \infty + C$$

erhält. Das Integral selbst braucht deshalb aber nicht unendlich gross zu werden, weil man die Integrations-Constante gleich $-\infty$ setzen kann. Dadurch bringt man das Integral auf die unbestimmte Form $\infty - \infty$, zu deren Ermittlung man in Gleichung (2.)

$$(7.) \quad C = -\frac{1}{m+1} + C'$$

setzen kann. Dadurch erhält man

$$(8.) \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + C'.$$

Für $\lim m = -1$ wird

$$(9.) \quad \lim \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{0}{0},$$

und wenn man Zähler und Nenner einzeln nach m differentiirt (vergl. D.-R. § 65),

$$(10.) \quad \lim \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} = \lim \frac{x^{m+1} \ln x}{1} = \ln x,$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichung (4.)

$$(11.) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C'.$$

$$(12.) \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$(13.) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$(14.) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$(15.) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$(16.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

$$(17.) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C'.$$

$$(18.) \quad \int \operatorname{Cof} x \, dx = \operatorname{Sin} x + C.$$

$$(19.) \quad \int \operatorname{Sin} x \, dx = \operatorname{Cof} x + C.$$

$$(20.) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Cof}^2 x} = \operatorname{Tg} x + C.$$

$$(21.) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x + C.$$

$$(22.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$(23.) \quad \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C.$$

$$(24.) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C.$$

$$(25.) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x + C' = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C'.$$

Es erscheint auffallend, dass man für $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zwei Werthe, nämlich

$$\arcsin x + C \quad \text{und} \quad -\arccos x + C'$$

findet. Die Richtigkeit beider Resultate kann man zunächst durch Differentiation prüfen, wobei sich

$$d(\arcsin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$d(-\arccos x + C') = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ergiebt. Nach Satz 3 in § 1 können sich daher die Functionen

$\arcsin x$ und $-\arccos x$ nur durch eine Constante von einander unterscheiden. In der That, ist in einem Kreise mit dem Halbmesser 1

$$OF = ED = x$$

(vergl. Fig. 11), so wird

$$(26.) \quad CD = \arcsin x, \quad DA = \arccos x,$$

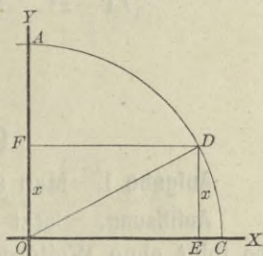
also

$$(27.) \quad \arcsin x + \arccos x = CD + DA = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$(28.) \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Fig. 11.



Dies kann man auch unabhängig von der Figur zeigen, indem man

$$(29.) \quad \arcsin x = t, \quad \text{also} \quad x = \sin t$$

setzt; dann wird

$$(30.) \quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad \text{oder} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - t,$$

folglich ist

$$(31.) \quad t = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Ebenso findet man

$$(32.) \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x,$$

wodurch man erkennt, dass Gleichung (17.) richtig ist.

Schliesslich erkennt man aus den Gleichungen

$$(33.) \quad \operatorname{Ar} \mathfrak{T} g x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$(34.) \quad \operatorname{Ar} \mathfrak{C} t g x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \ln(-1) \right],$$

dass

$$(35.) \quad \operatorname{Ar} \mathfrak{T} g x = \operatorname{Ar} \mathfrak{C} t g x + \frac{1}{2} \ln(-1)$$

wird, dass also die Gleichungen (24.) und (25.) richtig sind. Beschränkt man aber die Untersuchung auf reelle Grössen, so muss man schreiben

$$(36.) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \text{Ar} \text{Tg} x + C, \quad \text{wenn } |x| < +1,$$

$$(37.) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \text{Ar} \text{Ctg} x + C', \quad \text{wenn } |x| > +1.$$

§ 5.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll $x^3 dx$ integrieren.

Auflösung. Setzt man in Formel Nr. 9 der Tabelle $m = 3$, so folgt ohne Weiteres

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

Aufgabe 2. Man soll $7x^3 dx$ integrieren.

Auflösung. Nach Formel Nr. 7 und 9 der Tabelle erhält man

$$\int 7x^3 dx = 7 \int x^3 dx = 7 \frac{x^4}{4} + C.$$

Aufgabe 3. Man soll $\sqrt[3]{x} dx$ integrieren.

Auflösung. Es ist

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}};$$

hieraus ergibt sich, dass

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C,$$

oder

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C.$$

Aufgabe 4. Man soll folgende Differential-Functionen integrieren.

$$\frac{dx}{x^3}, \quad \sqrt[3]{x^5} dx, \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}, \quad 4 \sqrt[3]{x} dx, \quad \frac{4 dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Auflösung. Es wird

$$\text{I.} \quad \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$\text{II.} \quad \int \sqrt[3]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} + C.$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int x^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + C = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C,$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

$$\text{IV.} \quad \int 4\sqrt[3]{x} dx = 4 \int \sqrt[3]{x} dx = 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx = 4 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C,$$

$$\int 4\sqrt[3]{x} dx = 4 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x^4} + C.$$

$$\text{V.} \quad \int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx = 4 \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 4 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = 4 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C,$$

$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx = 4 \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C = 6\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Function

$$\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right) dx$$

integriren.

Auflösung. Nach Formel Nr. 8 der Tabelle ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int \left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right) dx \\ &= \int x^4 dx + \int 7\sqrt[2]{x} dx - \int \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \int \frac{5}{x^6} dx \\ &= \int x^4 dx + 7 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 11 \int x^{-\frac{5}{3}} dx + 5 \int x^{-6} dx. \end{aligned}$$

Wenn man die Integrationen, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutet sind, nach Formel Nr. 9 der Tabelle ausführt und dabei die vier auftretenden Integrations-Constanten in eine einzige Constante zusammenfasst, so findet man

$$\begin{aligned}
& \int \left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right) dx \\
&= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 7 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 11 \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + 5 \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C \\
&= \frac{x^5}{5} + 7 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 11 \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 5 \frac{x^{-5}}{-5} + C \\
&= \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3} \sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Man soll den Ausdruck

$$\int \left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2} \right) dx$$

berechnen.

Auflösung. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int x^3 dx - 7 \int x^{\frac{9}{5}} dx + \frac{4}{7} \int x^4 dx - \frac{4}{3} \int x^{-2} dx \\
&= \frac{1}{4} \frac{x^{3+1}}{3+1} - 7 \frac{x^{\frac{9}{5}+1}}{\frac{9}{5}+1} + \frac{4}{7} \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{4}{3} \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C.
\end{aligned}$$

Dies giebt

$$\int \left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2} \right) dx = \frac{x^4}{16} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^{14}} + \frac{4}{35}x^5 + \frac{4}{3x} + C.$$

Aufgabe 7. Man soll den Ausdruck

$$\int (a \sin x + b \cos x + ce^x) dx$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 13 und 14 der Tabelle erhält man

$$\int (a \sin x + b \cos x + ce^x) dx = -a \cos x + b \sin x + ce^x + C.$$

Aufgabe 8. Man soll den Ausdruck

$$\int \left(m a^x dx + n \frac{dx}{x} + p \frac{dx}{\cos^2 x} \right)$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 11, 12 und 15 der Tabelle erhält man

$$\int \left(m a^x dx + n \frac{dx}{x} + p \frac{dx}{\cos^2 x} \right) = m \frac{a^x}{\ln a} + n \ln x + p \operatorname{tg} x + C.$$

Aufgabe 9. Man soll den Ausdruck

$$\int \left(\frac{dx}{1+x^2} + a \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

berechnen.

Auflösung. Durch Anwendung der Formeln Nr. 16, 22 und 18 der Tabelle erhält man

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{dx}{1+x^2} + a \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) &= \operatorname{arctg} x - a \operatorname{Ctg} x + \operatorname{arcsin} x + C \\ &= -\operatorname{arctg} x - a \operatorname{Ctg} x - \operatorname{arc} \cos x + C'. \end{aligned}$$

§ 6.

Allgemeine Bemerkungen.

Im Allgemeinen wird bei Anwendung der Hauptformel

$$(1.) \quad \int F'(x) dx = F(x) + C$$

nicht die Function $F(x)$ gegeben sein, sondern nur ihre Ableitung

$$(2.) \quad F'(x) = f(x).$$

Dann wird man in den meisten Fällen $F(x)$ nicht unmittelbar angeben können; man wird vielmehr zur Ermittlung von $F(x)$ Kunstgriffe anwenden, von denen zunächst die folgenden erläutert werden mögen:

- 1.) *Integration durch Substitution,*
- 2.) *Integration durch Zerlegung,*
- 3.) *partielle Integration.*

II. Abschnitt.

Integration durch Substitution.

§ 7.

Erklärung der Substitutions-Methode.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 26.)

Häufig kann man das vorgelegte Integral auf ein bekanntes zurückführen, indem man statt der ursprünglichen Integrations-Veränderlichen x durch die Gleichungen

$$(1.) \quad x = \psi(t), \quad dx = \psi'(t)dt$$

eine andere Veränderliche t als *neue Integrations-Veränderliche* einführt. Die gesuchte Function $F(x)$ geht dadurch über in

$$(2.) \quad F(x) = F[\psi(t)] = G(t),$$

d. h. in eine *Function von einer Function*, für welche nach D.-R. Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(3.) \quad \frac{dG(t)}{dt} = G'(t) = \frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F'(x) \psi'(t),$$

oder

$$(4.) \quad dG(t) = G'(t)dt = F'(x)dx = F'[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt \\ = f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt$$

wird. Deshalb findet man die gesuchte Function $G(t)$ aus der Gleichung

$$(5.) \quad \int f(x)dx = G(t) = \int G'(t)dt = \int f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt.$$

In vielen Fällen wird man die Function $\psi(t)$ passend so wählen können, dass sich die Function $G(t)$ leichter ermitteln

lässt als die Function $F(x)$. Drückt man dann in dem gefundenen Resultate die Grösse t , der Gleichung (1.) entsprechend, durch x aus, so ist die Integration vollzogen.

Dieses Verfahren, welches man „Integration durch Substitution“ nennt, wird am besten durch Beispiele erläutert.

§ 8.

Beispiele für die Substitutions-Methode.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 27 bis 30.)

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{x+a} = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $x + a = t$, also $x = t - a$, $dx = dt$,

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

(2.) $\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x+a).$ *

In ähnlicher Weise findet man

(3.) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a).$

Aufgabe 2. $\int \cos(x+a) dx = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei Aufgabe 1 findet man nach Formel Nr. 13 der Tabelle

(4.) $\int \cos(x+a) dx = \sin(x+a).$

Aufgabe 3. $\int \sin(a+bx) dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(5.) $a + bx = t$, also $x = \frac{t-a}{b}$, $dx = \frac{dt}{b}$,

so erhält man nach Formel N. 14 der Tabelle

(6.) $\int \sin(a+bx) dx = \frac{1}{b} \int \sin t dt = -\frac{1}{b} \cos t = -\frac{1}{b} \cos(a+bx).$

*) Die Integrations-Constante möge hier und bei den folgenden Aufgaben der Kürze wegen fortgelassen werden.

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{\cos^2(4 - 3x)} = ?$

Auflösung. Indem man

(7.) $4 - 3x = t, \text{ also } -3 dx = dt$

setzt, erhält man nach Formel Nr. 15 der Tabelle

(8.) $\int \frac{dx}{\cos^2(4 - 3x)} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3} \operatorname{tg} t = -\frac{1}{3} \operatorname{tg}(4 - 3x).$

Aufgabe 5. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = ?$

Auflösung. Indem man

(9.) $x = 2t, \text{ also } dx = 2 dt$

setzt, erhält man

(10.) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int \cos t dt = 2 \sin t = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right).$

In ähnlicher Weise gelangt man zu den folgenden Resultaten:

(11.) $\int e^{a+bx} dx = \frac{1}{b} e^{a+bx} \cdot d(a+bx) = \frac{1}{b} e^{a+bx}.$

(12.) $\int e^{\frac{x}{a}} dx = a \int e^{\frac{x}{a}} d\left(\frac{x}{a}\right) = a e^{\frac{x}{a}}.$

(13.) $\int e^{-\frac{x}{a}} dx = -a \int e^{-\frac{x}{a}} d\left(-\frac{x}{a}\right) = -a e^{-\frac{x}{a}}.$

(14.) $\int \cos\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \sin\left(\frac{x}{a}\right).$

(15.) $\int \sin\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \cos\left(\frac{x}{a}\right).$

(16.) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = n \int \frac{d\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)} = -n \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{n}\right).$

(17.) $\int \frac{dx}{1+(a+bx)^2} = \frac{1}{b} \int \frac{d(a+bx)}{1+(a+bx)^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg}(a+bx).$

$$(18.) \int (a + bx)^3 dx = \frac{1}{b} \int (a + bx)^3 d(a + bx) = \frac{(a + bx)^4}{4b}.$$

$$(19.) \int \sqrt[5]{(a + bx)^3} dx = \frac{1}{b} \int (a + bx)^{\frac{3}{5}} d(a + bx) = \frac{5 \sqrt[5]{(a + bx)^8}}{8b}.$$

$$(20.) \int \frac{dx}{\sqrt[7]{(a + bx)^4}} = \frac{1}{b} \int (a + bx)^{-\frac{4}{7}} d(a + bx) = \frac{7 \sqrt[7]{(a + bx)^3}}{3b}.$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(21.) \quad x = at, \quad \text{also} \quad dx = a dt, \quad t = \frac{x}{a},$$

so erhält man nach Formel Nr. 18 der Tabelle

$$(22.) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a dt}{a^2 + a^2 t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 25 und 25a der Tabelle

$$(23.) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} t \\ = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a - x}{a + x} \right), \quad \text{wenn} \quad |x| < a,$$

oder

$$(24.) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} t \\ = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right), \quad \text{wenn} \quad |x| > a > 0.$$

Aufgabe 8. $\int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(25.) \quad a^2 + x^2 = t, \quad \text{also} \quad 2x dx = dt,$$

so findet man

$$(26.) \quad \int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ erhält man aus Gleichung (26.)

$$(27.) \quad \int \frac{x dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - a^2).$$

§ 9.

Integration von einigen irrationalen Functionen durch Substitution.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 31 bis 42.)

Aufgabe 1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(1.) \quad \sqrt{a^2 - x^2} = t, \quad \text{also} \quad a^2 - x^2 = t^2,$$

so wird

$$-x dx = t dt,$$

und

$$(2.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{-t dt}{t} = -\int dt = -t = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aufgabe 2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(3.) \quad \sqrt{a^2 + x^2} = t, \quad \text{also} \quad a^2 + x^2 = t^2,$$

so wird

$$x dx = t dt$$

und

$$(4.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t = +\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ findet man aus Gleichung (4.)

$$(5.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Die in den Gleichungen (2.), (4.) und (5.) enthaltenen Resultate hätte man auch leicht durch *unmittelbare* Integration finden können, wenn man von den Formeln Nr. 30 bis 32 der Tabelle für die Differential-Rechnung ausgegangen wäre.

Aufgabe 3.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$$

Auflösung. Setzt man

(6.) $x = at, \text{ also } dx = a dt, \quad t = \frac{x}{a},$

so erhält man nach Formel Nr. 17 der Tabelle

(7.)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right).$$

Aufgabe 4.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier mit Rücksicht auf Formel Nr. 23 der Tabelle

(8.)
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \text{Ar} \text{ Sin} t = \text{Ar} \text{ Sin} \left(\frac{x}{a} \right) \\ &= \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

Ebenso findet man mit Rücksicht auf Formel Nr. 24 der Tabelle

(9.)
$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Ar} \text{ Cos} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right).$$

Aufgabe 5.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = ?$$

Auflösung. Setzt man

(10.) $x = \frac{a}{t}, \text{ also } dx = -\frac{adt}{t^2},$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t} \sqrt{t^2 - 1}, \quad t = \frac{a}{x},$$

dann wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{-adt \cdot t \cdot t}{t^2 \cdot a \cdot a\sqrt{t^2-1}} = -\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

dies giebt nach Formel Nr. 24 der Tabelle

$$(11.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} t = -\frac{1}{a} \ln(t + \sqrt{t^2-1}),$$

oder

$$(12.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(13.) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{-adt \cdot t^2 \cdot t}{t^2 \cdot a^2 \cdot a\sqrt{t^2-1}} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}},$$

also nach Gleichung (5.)

$$(14.) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a^2} \sqrt{t^2-1} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man wieder

$$(15.) \quad x = \frac{a}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t} \sqrt{t^2+1}, \quad t = \frac{a}{x},$$

so wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{-adt \cdot t \cdot t}{t^2 \cdot a \cdot a\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}};$$

dies giebt nach Formel Nr. 23 der Tabelle

$$(16.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} t = -\frac{1}{a} \ln(t + \sqrt{t^2+1}),$$

oder

$$(17.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cot} \left(\frac{a}{x} \right) = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x} \right).$$

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(18.) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{-adt \cdot t \cdot t}{t^2 \cdot a^2 \cdot a\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}},$$

also nach Gleichung (4.)

$$(19.) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2} \sqrt{t^2+1} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$$

Aufgabe 9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man wieder

$$(20.) \quad x = \frac{a}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{adt}{t^2},$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2} = \frac{a}{t} \sqrt{1-t^2}, \quad t = \frac{a}{x},$$

so wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-adt \cdot t \cdot t}{t^2 \cdot a \cdot a\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

dies giebt nach Formel Nr. 17 der Tabelle

$$(21.) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsin} t = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \left(\frac{a}{x} \right).$$

Aufgabe 10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

§ 10. Integrale von der Form $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.

$$(22.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{-adt \cdot t^2 \cdot t}{t^2 \cdot a^2 \cdot a \sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

also nach Gleichung (2.)

$$(23.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{1}{a^2} \sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}.$$

§ 10.

Integrale von der Form $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 43 bis 52.)

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{x \ln x} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(1.) \quad t = \ln x, \quad \text{also} \quad dt = \frac{dx}{x},$$

so erhält man

$$(2.) \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln x).$$

Aufgabe 2. $\int \frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+11} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(3.) \quad 4x^2 - 7x + 11 = t, \quad \text{also} \quad (8x-7)dx = dt,$$

so erhält man

$$(4.) \quad \int \frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+11} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(4x^2 - 7x + 11).$$

Aufgabe 3. $\int \frac{(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(5.) \quad 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7 = t,$$

also

$$(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx = dt,$$

so erhält man

$$(6.) \int \frac{(12x^3 + 15x^2 - 4x + 8)dx}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7} = \int \frac{dt}{t} = \ln t \\ = \ln(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 7).$$

Die in den letzten Aufgaben angewendete Methode bestand darin, dass man das Integral auf die Form $\int \frac{dt}{t}$ brachte. Dieses Verfahren ist immer anwendbar, wenn unter dem Integralzeichen ein Bruch steht, dessen Zähler das Differential des Nenners ist. Setzt man nämlich

$$(7.) \quad f(x) = t, \quad \text{also} \quad f'(x)dx = dt,$$

so erhält man

$$(8.) \quad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln[f(x)]$$

und damit den

Satz. *Steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners.*

Bei den Anwendungen dieses Satzes wird man allerdings häufig mit der Function unter dem Integralzeichen erst eine Umformung vornehmen müssen, um sie auf die beschriebene Form zu bringen, wie man aus den hier folgenden Aufgaben ersehen kann.

Aufgabe 4. $\int \operatorname{tg} x dx = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so dass man erhält

$$(9.) \quad \int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{\sin x dx}{\cos x}.$$

Jetzt steht unter dem Integralzeichen ein Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, folglich ist das Integral der natürliche Logarithmus des Nenners, und man erhält

$$(10.) \quad \int \operatorname{tg} x dx = - \ln(\cos x).$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(11.) \quad \int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \ln(\sin x).$$

Aufgabe 5. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = ?$

Auflösung. Dividirt man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\cos^2 x$, so erhält man

$$(12.) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x},$$

folglich wird

$$(13.) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln(\operatorname{tg} x) = -\ln(\operatorname{ctg} x).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Auflösung. Diese Aufgabe lässt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen, indem man

$$(14.) \quad x = 2t$$

setzt und die bekannte Formel

$$\sin x = \sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

beachtet. Dadurch erhält man

$$(15.) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \ln(\operatorname{tg} t) = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right] = -\ln \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$

Auflösung. Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man

$$(16.) \quad x = \frac{\pi}{2} - t, \quad \text{also} \quad \cos x = \sin t, \quad dx = -dt$$

setzt; dann erhält man

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right],$$

oder

$$(17.) \int \frac{dx}{\cos x} = -\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] = +\ln \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right].$$

Durch die Substitution

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

gehen die trigonometrischen Functionen

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$$

bezw. in die complementären Functionen von t über, nämlich in

$$\cos t, \sin t, \operatorname{ctg} t, \operatorname{tg} t.$$

Bezeichnet man irgend eine Function von $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ mit $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, so wird

$$(18.) \int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx = -\int f(\cos t, \sin t, \operatorname{ctg} t, \operatorname{tg} t) dt.$$

Hat man also das eine von diesen beiden Integralen gefunden, so ist damit auch das andere ermittelt. Hieraus erkennt man, dass gerade die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - t$ sehr häufig mit gutem Erfolge verwendet werden kann.

Aufgabe 8. $\int \mathfrak{C}g x dx = ?$

Auflösung. Hier ist

$$(19.) \int \mathfrak{C}g x dx = \int \frac{\mathfrak{S}in x dx}{\mathfrak{C}o|x} = \int \frac{d(\mathfrak{C}o|x)}{\mathfrak{C}o|x} = \ln(\mathfrak{C}o|x).$$

Aufgabe 9. $\int \mathfrak{C}tg x dx = ?$

Auflösung. Hier ist

$$(20.) \int \mathfrak{C}tg x dx = \int \frac{\mathfrak{C}o|x dx}{\mathfrak{S}in x} = \int \frac{d(\mathfrak{S}in x)}{\mathfrak{S}in x} = \ln(\mathfrak{S}in x).$$

Aufgabe 10. $\int \frac{dx}{\mathfrak{S}in x \mathfrak{C}o|x} = ?$

Auflösung. Dividirt man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\mathfrak{C}o|x^2$, so erhält man

$$(21.) \int \frac{dx}{\mathfrak{S}in x \mathfrak{C}o|x} = \int \frac{dx}{\mathfrak{C}o|x^2 \mathfrak{T}g x} = \int \frac{d(\mathfrak{T}g x)}{\mathfrak{T}g x} = \ln(\mathfrak{T}g x) = -\ln(\mathfrak{C}tg x).$$

Aufgabe 11. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Auflösung. Setzt man

(22.) $x = 2t$, also $dx = 2dt$,

so wird nach D.-R., Formel Nr. 51 der Tabelle

(23.) $\sin x = \sin(2t) = 2 \sin t \cos t$,

also mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

(24.)
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{2 \sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$$

$$= \ln(\operatorname{Tg} t) = \ln\left[\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\ln\left[\operatorname{Ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Aufgabe 12. $\int \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx = ?$

Auflösung. Multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen mit e^x , so wird der Zähler, nämlich $(e^x + 1)dx$, das Differential des Nenners $e^x + x$, folglich wird das Integral gleich dem Logarithmus des Nenners; d. h. es wird

(25.)
$$\int \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}} dx = \int \frac{(e^x + 1)dx}{e^x + x} = \ln(e^x + x).$$

§ 11.

Integrale von der Form $F'(t)dt$,

wenn $t = f(x)$ irgend eine transcendente Function von x ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 53 bis 82a.)

Aufgabe 1. $\int (\sin^4 x - 3 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 11 \sin x) \cos x dx = ?$

Auflösung. Setzt man

(1.) $\sin x = t$, also $\cos x dx = dt$,

so erhält man

(2.)
$$\int (\sin^4 x - 3 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 11 \sin x) \cos x dx =$$

$$\int (t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 11t) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{3}{4} t^4 + \frac{4}{3} t^3 + \frac{11}{2} t^2 =$$

$$\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{3}{4} \sin^4 x + \frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{11}{2} \sin^2 x.$$

Man erkennt sofort, dass diese Substitution immer eine Vereinfachung herbeiführt, wenn unter dem Integralzeichen eine Function $F'(\sin x)$ von $\sin x$ steht, welche mit $\cos x dx$ multiplicirt ist; denn man erhält dann

$$(3.) \quad \int F'(\sin x) \cos x dx = \int F'(t) dt = F(\sin x).$$

Aufgabe 2.
$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = ?$$

Auflösung. Indem man die soeben angegebene Substitution benutzt, findet man

$$(4.) \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \int -t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

Steht unter dem Integralzeichen eine Function von $\cos x$, multiplicirt mit $\sin x dx$, so wird man durch die Substitution

$$(5.) \quad \cos x = t, \quad \text{also} \quad -\sin x dx = dt$$

eine Vereinfachung herbeiführen; denn es wird

$$(6.) \quad \int F'(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int F'(t) dt = -F(\cos x).$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres die Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe 3.
$$\int (\cos^3 x - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 4) \sin x dx =$$

$$-\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos^2 x + 4 \cos x.$$

Aufgabe 4.
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = + \frac{1}{3 \cos^3 x}.$$

Häufig wird man die Function unter dem Integralzeichen erst umformen müssen, ehe man die in den Gleichungen (3.) und (6.) angedeuteten Substitutionen anwenden kann. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 5.
$$\int \cos^3 x dx = ?$$

Auflösung. Durch Anwendung der bekannten Formel

$$(7.) \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

erhält man

$$(8.) \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\ = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

Aufgabe 6. $\int \sin^5 x dx = ?$

Auflösung. Durch Anwendung der bekannten Formel

$$(9.) \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

erhält man

$$(10.) \int \sin^5 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) \\ = -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5\right) \\ = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x.$$

Aufgabe 7. $\int \cos^{2n+1} x dx = ?$

Auflösung. In gleicher Weise wie bei Aufgabe 5 findet man hier

$$(11.) \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cdot d(\sin x).$$

Durch den Factor $d(\sin x)$ soll angedeutet werden, dass $\sin x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(12.) \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - t^2)^n dt \\ = \int \left[1 - \binom{n}{1} t^2 + \binom{n}{2} t^4 - \binom{n}{3} t^6 + \dots \right. \\ \left. \pm \binom{n}{1} t^{2n-2} \mp t^{2n} \right] dt \\ = t - \binom{n}{1} \frac{t^3}{3} + \binom{n}{2} \frac{t^5}{5} - \binom{n}{3} \frac{t^7}{7} + \dots \\ \pm \binom{n}{1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Aufgabe 8. $\int \sin^{2n+1} x dx = ?$

Auflösung. In gleicher Weise wie bei Aufgabe 6 findet man hier

$$(13.) \int \sin^{2n+1}x dx = \int (1 - \cos^2x)^n \cdot \sin x dx = -\int (1 - \cos^2x)^n \cdot d(\cos x).$$

Auch hier soll durch den Factor $d(\cos x)$ angedeutet werden, dass $\cos x$ zur neuen Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Dadurch erhält man

$$(14.) \int \sin^{2n+1}x dx = -\int (1 - t^2)^n dt,$$

also, abgesehen vom Vorzeichen und von der Bedeutung der Veränderlichen t , dasselbe Integral wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 9. $\int \sin^m x \cos^{2n+1}x dx = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 7 findet man hier

$$(15.) \int \sin^m x \cos^{2n+1}x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2x)^n \cdot d(\sin x),$$

wo durch den Factor $d(\sin x)$ angedeutet werden soll, dass $\sin x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$(16.) \frac{\int \cos^3x dx}{\sin^4x} = \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^4} = \int (t^{-4} - t^{-2}) dt \\ = -\frac{t^{-3}}{3} + \frac{t^{-1}}{1} = -\frac{1}{3 \sin^3x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Aufgabe 10. $\int \cos^m x \sin^{2n+1}x dx = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 8 findet man hier

$$(17.) \int \cos^m x \sin^{2n+1}x dx = -\int \cos^m x (1 - \cos^2x)^n d(\cos x),$$

wo durch den Factor $d(\cos x)$ angedeutet werden soll, dass $\cos x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird. Hierdurch erhält man z. B.

$$(18.) \int \cos^2x \sin^3x dx = -\int t^2(1 - t^2) dt = -\int (t^2 - t^4) dt \\ = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^3x}{3} + \frac{\cos^5x}{5}.$$

Aufgabe 11. $\int (\operatorname{tg}^3 x - 8 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 7) \frac{dx}{\cos^2 x} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(19.) \quad \operatorname{tg} x = t, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt,$$

so erhält man

$$(20.) \quad \int (\operatorname{tg}^3 x - 8 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 7) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (t^3 - 8t^2 + 5t - 7) dt \\ = \frac{t^4}{4} - \frac{8t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 7t = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{8 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{5 \operatorname{tg}^2 x}{2} - 7 \operatorname{tg} x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{tg} x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\cos^2 x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

$$(21.) \quad \int F'(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int F'(\operatorname{tg} x) \cdot d(\operatorname{tg} x) = F(\operatorname{tg} x),$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{tg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{tg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Aufgabe 12. $\int (\operatorname{ctg}^4 x - 3 \operatorname{ctg}^2 x + 5) \frac{dx}{\sin^2 x} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(22.) \quad \operatorname{ctg} x = t, \quad \text{also} \quad -\frac{dx}{\sin^2 x} = dt,$$

so erhält man

$$(23.) \quad \int (\operatorname{ctg}^4 x - 3 \operatorname{ctg}^2 x + 5) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (t^4 - 3t^2 + 5) dt \\ = -\frac{t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 5t = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \operatorname{ctg}^3 x - 5 \operatorname{ctg} x.$$

Dieselbe Substitution kann man immer anwenden, wenn unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{ctg} x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\sin^2 x}$, steht, d. h. es wird ganz allgemein

$$(24.) \quad \int F'(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int F'(\operatorname{ctg} x) \cdot d(\operatorname{ctg} x) = -F(\operatorname{ctg} x),$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{ctg}x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{ctg}x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Häufig wird man erst eine Umformung vornehmen müssen, ehe man auf die in den Aufgaben 11 und 12 vorausgesetzte Form der Differential-Functionen geführt wird. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 13. $\int(\operatorname{tg}^3x - 7\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x + 9)dx = ?$

Auflösung. Damit die Function unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{tg}x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\cos^2x}$, wird, muss man sie durch \cos^2x dividiren und deshalb auch mit

$$(25.) \quad \cos^2x = \frac{\cos^2x}{\cos^2x + \sin^2x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2x}$$

multipliciren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (19.)

$$(26.) \quad \begin{aligned} \int(\operatorname{tg}^3x - 7\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x + 9)dx \\ &= \int \frac{\operatorname{tg}^3x - 7\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x + 9}{\operatorname{tg}^2x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2x} \\ &= \int \frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$(27.) \quad t^3 - 7t^2 + 2t + 9 = (t^2 + 1)(t - 7) + t + 16,$$

folglich wird mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 9, 30 und 18 der Tabelle

$$(28.) \quad \begin{aligned} \int \frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1} dt &= \int (t - 7)dt + \int \frac{tdt}{t^2 + 1} + 16 \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{t^2}{2} - 7t + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + 16 \operatorname{arctg}t, \end{aligned}$$

oder, wenn man beachtet, dass

$$(29.) \quad t = \operatorname{tg}x, \quad 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2x}, \quad x = \operatorname{arctg}t$$

ist,

$$(30.) \int (\operatorname{tg}^3 x - 7 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 9) dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - 7 \operatorname{tg} x - \ln(\cos x) + 16 x.$$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(31.) \int f(\operatorname{tg} x) \cdot dx = \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \int \cdot d(\operatorname{tg} x).$$

Aufgabe 14. $\int \operatorname{tg}^n x \cdot dx = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (31.) erhält man, indem man $\operatorname{tg} x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit t bezeichnet,

$$(32.) \int \operatorname{tg}^n x dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{t^n dt}{t^2 + 1}.$$

Bei der weiteren Behandlung des Integrals muss man zwei Fälle unterscheiden, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

I. Fall. $n = 2m$.

$$(33.) \int \operatorname{tg}^{2m} x \cdot dx = \int \frac{t^{2m}}{t^2 + 1} dt = \int (t^{2m-2} - t^{2m-4} + \dots \pm 1 \mp \frac{1}{1+t^2}) dt$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2m-1} x}{2m-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2m-3} x}{2m-3} + \dots \pm \operatorname{tg} x \mp x.$$

Es ist z. B.

$$(34.) \int \operatorname{tg}^6 x dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x.$$

II. Fall. $n = 2m + 1$.

$$(35.) \int \operatorname{tg}^{2m+1} x \cdot dx = \int \frac{t^{2m+1}}{t^2 + 1} dt$$

$$= \int (t^{2m-1} - t^{2m-3} + \dots \pm t \mp \frac{t}{t^2 + 1}) dt$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2m} x}{2m} - \frac{\operatorname{tg}^{2m-2} x}{2m-2} + \dots \pm \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \mp \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

wobei man noch

$$\frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -\ln(\cos x)$$

setzen darf. Es ist z. B.

$$(36.) \quad \int \operatorname{tg}^7 x \cdot dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x).$$

Aufgabe 15. $\int (\operatorname{ctg}^4 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x - 7) dx = ?$

Auflösung. Damit die Function unter dem Integralzeichen eine Function von $\operatorname{ctg} x$, multiplicirt mit $\frac{dx}{\sin^2 x}$, wird, muss man sie durch $\sin^2 x$ dividiren und deshalb auch mit

$$(37.) \quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$$

multipliciren. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (22.)

$$(38.) \quad \begin{aligned} \int (\operatorname{ctg}^4 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x - 7) dx &= - \int \frac{t^4 + 3t^2 - 7}{t^2 + 1} dt \\ &= - \int \left(t^2 + 2 - \frac{9}{1 + t^2} \right) dt = - \left(\frac{t^3}{3} + 2t + 9 \operatorname{arctg} t \right), \end{aligned}$$

oder, da $\operatorname{ctg} x = t$ und $\operatorname{arctg} t = x$ ist,

$$(39.) \quad \int (\operatorname{ctg}^4 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x - 7) dx = - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - 2 \operatorname{ctg} x - 9x.$$

Dieses Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(40.) \quad \int f(\operatorname{ctg} x) \cdot dx = - \int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x).$$

Aufgabe 16. $\int \operatorname{ctg}^n x \cdot dx = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (40.) erhält man, indem man $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen macht und mit t bezeichnet,

$$(41.) \quad \int \operatorname{ctg}^n x \cdot dx = - \int \frac{t^n dt}{t^2 + 1}.$$

Die weitere Behandlung dieser Aufgabe ergibt sich sodann aus Aufgabe 14.

Aufgabe 17. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist

$$(42.) \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),$$

folglich wird

$$(43.) \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) \\ = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}.$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(44.) \quad \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{tg} x),$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{tg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{tg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Aufgabe 18. $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = ?$

Auflösung. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x),$$

folglich wird

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 d(\operatorname{ctg} x) \\ = - \operatorname{ctg} x - \frac{2 \operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}.$$

Dasselbe Verfahren führt zu der allgemeinen Formel

$$(45.) \quad \int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{ctg} x),$$

wo durch den Factor $d(\operatorname{ctg} x)$ angedeutet werden soll, dass $\operatorname{ctg} x$ zur Integrations-Veränderlichen gewählt wird.

Was in den vorstehenden Aufgaben für die trigonometrischen Functionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ gezeigt worden ist, kann in gleicher Weise auch für die hyperbolischen Functionen $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Tg} x$, $\operatorname{Ctg} x$ ausgeführt werden. Dadurch findet man die folgenden Formeln:

$$(46.) \int F'(\sin x) \cos x dx = \int F'(\sin x) \cdot d(\sin x) = F(\sin x).$$

$$(47.) \int F'(\cos x) \sin x dx = \int F'(\cos x) \cdot d(\cos x) = F(\cos x).$$

$$(48.) \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 + \sin^2 x)^n \cdot d(\sin x).$$

$$(49.) \int \sin^{2n+1} x dx = \int (\cos^2 x - 1)^n \cdot d(\cos x).$$

$$(50.) \int F'(\operatorname{Tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int F'(\operatorname{Tg} x) \cdot d(\operatorname{Tg} x) = F(\operatorname{Tg} x).$$

$$(51.) \int F'(\operatorname{Ctg} x) \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int F'(\operatorname{Ctg} x) \cdot d(\operatorname{Ctg} x) = - F(\operatorname{Ctg} x).$$

$$(52.) \int f(\operatorname{Tg} x) dx = \int \frac{f(\operatorname{Tg} x)}{1 - \operatorname{Tg}^2 x} \cdot d(\operatorname{Tg} x).$$

$$(53.) \int f(\operatorname{Ctg} x) dx = \int \frac{f(\operatorname{Ctg} x)}{1 - \operatorname{Ctg}^2 x} \cdot d(\operatorname{Ctg} x).$$

$$(54.) \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 - \operatorname{Tg}^2 x)^{m-1} \cdot d(\operatorname{Tg} x).$$

$$(55.) \int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = - \int (\operatorname{Ctg}^2 x - 1)^{m-1} \cdot d(\operatorname{Ctg} x).$$

In ähnlicher Weise kann man durch Substitution ganz allgemein eine Vereinfachung des Integrals herbeiführen, wenn unter dem Integralzeichen das Product einer Function $F'[f(x)]$ der transcendenten Function $f(x)$ und des Differential's von $f(x)$ steht. Dann findet man, indem man

$$t = f(x)$$

zur neuen Integrations-Veränderlichen macht,

$$(56.) \int F'[f(x)] \cdot f'(x) dx = \int F'(t) dt = F(t) = F[f(x)].$$

Dies giebt ohne Weiteres die folgenden Formeln:

$$(57.) \int F'(a^x) \cdot a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int F'(a^x) \cdot d(a^x) = \frac{1}{\ln a} F(a^x),$$

$$(58.) \int F'(e^x) \cdot e^x dx = \int F'(e^x) \cdot d(e^x) = F(e^x),$$

$$(59.) \int F'(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \int F'(\ln x) \cdot d(\ln x) = F(\ln x),$$

$$(60.) \int F'(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int F'(\arcsin x) \cdot d(\arcsin x) \\ = F(\arcsin x),$$

$$(61.) \int F'(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int F'(\arccos x) \cdot d(\arccos x) \\ = -F(\arccos x),$$

$$(62.) \int F'(\arctg x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int F'(\arctg x) \cdot d(\arctg x) = F(\arctg x),$$

$$(63.) \int F'(\operatorname{arcc}tg x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = -\int F'(\operatorname{arcc}tg x) \cdot d(\operatorname{arcc}tg x) \\ = -F(\operatorname{arcc}tg x).$$

Hierbei soll durch die Factoren $d(a^x)$, $d(e^x)$, $d(\ln x)$, $d(\arcsin x)$, $d(\arccos x)$, $d(\arctg x)$, $d(\operatorname{arcc}tg x)$ angedeutet werden, dass bezw. die Grössen a^x , e^x , $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcc}tg x$ zu Integrations-Veränderlichen gewählt werden.

Zur Einübung dieser Formeln mögen die folgenden Aufgaben gelöst werden.

Aufgabe 19. $\int (a^{2x} + 3a^x - 7)dx = ?$

Auflösung. Bezeichnet man a^x mit t , so wird

$$(64.) \int (a^{2x} + 3a^x - 7)dx = \int (a^x + 3 - 7a^{-x}) \cdot a^x dx \\ = \frac{1}{\ln a} \int (t + 3 - 7t^{-1})dt = \frac{1}{\ln a} \left(\frac{t^2}{2} + 3t - 7 \ln t \right) \\ = \frac{1}{\ln a} \left(\frac{1}{2} a^{2x} + 3a^x - 7x \ln a \right).$$

Aufgabe 20. $\int \frac{\cos(\ln x) \cdot dx}{x} = ?$

Auflösung. Bezeichnet man $\ln x$ mit t , so wird

$$(65.) \int \frac{\cos(\ln x) \cdot dx}{x} = \int \cos t dt = \sin t = \sin(\ln x).$$

Aufgabe 21. $\int \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Bezeichnet man $\arcsin x$ mit t , so wird

$$(66.) \int \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \arcsin^2 x.$$

Aufgabe 22. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = ?$

Auflösung. Bezeichnet man $\operatorname{arctg} x$ mit t , so wird

$$(67.) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\operatorname{arctg} x).$$

Steht unter dem Integralzeichen irgend eine rationale Function von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, so kann man diese transcendenten Functionen durch die Substitution

$$(68.) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

fortschaffen, so dass man unter dem Integralzeichen nur noch eine *rationale* Function von t behält. Es folgt nämlich aus Gleichung (68.)

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner dieser Brüche durch $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ dividirt,

$$(69.) \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$(70.) \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$(71.) \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Aus Gleichung (68.) findet man sodann noch

$$(72.) \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

und erhält dadurch die Formel

$$(73.) \quad \int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx = \\ \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man z. B. die folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 23. $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)} = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (73.) wird

$$\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)} = \int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \\ = \int \frac{(1+t^2+2t) dt}{t(1+t^2+1-t^2)} = \frac{1}{2} \int (t+2+t^{-1}) dt,$$

also

$$(74.) \quad \int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln t\right) \\ = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln \left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Ist $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ eine *rationale* Function der vier Functionen $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, so erreicht man durch die in Gleichung (73.) angegebene Substitution, dass unter dem Integralzeichen eine *rationale* Function der einzigen Veränderlichen t steht. Wie aber die Integration rationaler Functionen auszuführen ist, wird an einer späteren Stelle gezeigt werden.

Steht unter dem Integralzeichen eine *rationale* Function der vier *hyperbolischen* Functionen $\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Tg} x, \operatorname{Ctg} x$, so beachte man, dass diese Functionen selbst wieder *rationale* Functionen von e^x sind. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), & \operatorname{Cos} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \operatorname{Tg} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{Stg} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.\end{aligned}$$

Deshalb erreicht man es auch in diesem Falle durch die Substitution

$$(75.) \quad e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t},$$

dass unter dem Integralzeichen eine *rationale* Function von t steht, die nach den später folgenden Regeln integrirt werden kann.

Man kann in diesem Falle die Function unter dem Integralzeichen auch dadurch rational machen, dass man

$$(76.) \quad \operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

als neue Integrations-Veränderliche einführt, denn es wird dann nach D.-R., Formel Nr. 55, 56 und 77 der Tabelle

$$(77.) \quad \operatorname{Sin} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{Cos} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$(78.) \quad \operatorname{Tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{Stg} x = \frac{1+t^2}{2t},$$

$$(79.) \quad x = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1-t^2},$$

also

$$(80.) \quad \int f(\operatorname{Sin} x, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Tg} x, \operatorname{Stg} x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2 dt}{1-t^2}.$$

§ 12.

Integration durch Einführung trigonometrischer oder hyperbolischer Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 83 bis 85.)

Während in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, wie man die Function unter dem Integralzeichen, wenn sie

trigonometrische oder andere transcendente Functionen enthält, durch Substitution so umzuformen sucht, dass sie diese transcendenten Functionen nicht mehr enthält, so giebt es auch Fälle, wo die Integration dadurch erleichtert wird, dass man für die Integrations-Veränderliche x eine trigonometrische oder hyperbolische Function der neuen Integrations-Veränderlichen t einführt. Man wendet eine solche Substitution namentlich dann mit gutem Erfolge an, wenn unter dem Integralzeichen eine der Irrationalitäten $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ auftritt.

So werden Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

häufig durch die Substitution

$$(1.) \quad x = a \sin t$$

auf einfachere zurückgeführt. Es wird dann nämlich

$$(2.) \quad dx = a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t,$$

also

$$(3.) \quad \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int f(a \sin t, a \cos t) \cdot a \cos t dt,$$

wobei

$$(4.) \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Uebungs-Beispiele.

$$1) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2} \operatorname{ctg} t = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$$

(Vergl. Formel Nr. 38 der Tabelle.)

$$2) \quad \int \frac{dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$3) \quad \int \frac{(a^2 - 2x^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int (1 - 2 \sin^2 t) dt = a^2 \int \cos(2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int \cos(2t) \cdot d(2t) = \frac{a^2}{2} \sin(2t)$$

$$= a^2 \sin t \cos t = x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

kann man häufig die Substitution

$$(5.) \quad x = a \operatorname{tg} t$$

mit gutem Erfolge anwenden. Man erhält dabei

$$(6.) \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t},$$

also

$$(7.) \quad \int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \int f\left(a \operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t}\right) \cdot \frac{a dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$(8.) \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{x}{a},$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}.$$

Uebungs-Beispiele.

$$1) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a^3 \sin^3 t \cdot a dt \cdot \cos t}{\cos^3 t \cdot \cos^2 t \cdot a} = a^3 \int \frac{\sin^3 t dt}{\cos^4 t},$$

oder, wenn man

$$(9.) \quad \cos t = z, \quad \text{also} \quad \sin t dt = -dz$$

setzt,

$$(10.) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -a^3 \int \frac{(1 - z^2) dz}{z^4} = -a^3 \int (z^{-4} - z^{-2}) dz$$

$$= -a^3 \left(\frac{z^{-3}}{-3} - \frac{z^{-1}}{-1} \right) = \frac{a^3}{3} \left(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z} \right).$$

Indem man schliesslich noch

$$z = \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

einsetzt, findet man

$$(11.) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^3}{3} \left(\frac{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}{a^3} - \frac{3\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + x^2} (x^2 - 2a^2).$$

$$2) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^4} \int \frac{a dt \cdot \cos^4 t \cdot \cos t}{\cos^2 t \cdot \sin^4 t \cdot a} = \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt$$

$$= \frac{1}{a^4} \int \left(\frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{\sin^2 t} \right) d(\sin t) = \frac{1}{a^4} \left(-\frac{1}{3 \sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} \right).$$

Nun ist

$$(12.) \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x},$$

folglich wird

$$(13.) \quad \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^4} \left(-\frac{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}{3x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{3a^4 x^3} (2x^2 - a^2).$$

$$3) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a dt \cdot \cos^3 t}{\cos^2 t \cdot a^3} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt$$

$$= \frac{\sin t}{a^2} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Bei Integralen von der Form

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

kann man häufig die Substitution

$$(14.) \quad x = \frac{a}{\cos t}$$

mit gutem Erfolge anwenden. Dabei wird

$$(15.) \quad dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \operatorname{tg} t,$$

also

$$(16.) \quad \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t}, a \operatorname{tg} t\right) \cdot \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$(17.) \quad \begin{cases} \sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, & \cos t = \frac{a}{x}, \\ \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}, & \operatorname{ctg} t = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \end{cases}$$

Uebungs - Beispiele.

$$1) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sin t dt \cos^4 t \cdot \cos t}{\cos^2 t \cdot a^4 \cdot a \sin t} = \frac{1}{a^4} \int \cos^3 t dt$$

$$= \frac{1}{a^4} \int (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \frac{1}{a^4} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right),$$

also

$$(18.) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{3a^4} \left(\frac{3\sqrt{x^2 - a^2}}{x} - \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^3}{x^3} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{3a^4 x^3} (2x^2 + a^2).$$

$$2) \int \frac{dx}{(x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^3} = \int \frac{a \sin t dt \cdot \cos^3 t}{\cos^2 t \cdot a^3 \sin^3 t}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2 \sin t},$$

also

$$(19.) \int \frac{dx}{(x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sin t dt \cdot \cos t}{\cos^2 t \left(\frac{a^2}{\cos^2 t} + a^2 \right) \cdot a \sin t}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{1 + \cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{d(\sin t)}{2 - \sin^2 t}.$$

Setzt man

$$(20.) \quad \sin t = z,$$

so kann man zur Berechnung dieses Integrals Formel Nr. 29 der Tabelle anwenden und findet

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{z^2 - 2} = -\frac{1}{2a^2 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - z}{\sqrt{2} + z} \right)$$

$$= -\frac{1}{2a^2 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - \sin t}{\sqrt{2} + \sin t} \right) = \frac{1}{2a^2 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2 - a^2}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - a^2}} \right).$$

Man beachte, dass in den drei hier behandelten Fällen die trigonometrische Function, welche für x substituirt wird, jedes-

mal so zu wählen ist, dass unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat steht, dass sich also die Wurzel ausziehen lässt.

Für $x = a \sin t$ wird nämlich

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a \cos t,$$

für $x = a \operatorname{tg} t$ wird $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)} = \frac{a}{\cos t},$

„ $x = \frac{a}{\cos t}$ „ $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t}} = a \operatorname{tg} t.$

Gleichzeitig erkennt man daraus, dass man in ähnlicher Weise eine Vereinfachung durch Einführung *hyperbolischer* Functionen erhalten könnte, denn

für $x = a \operatorname{Sh} t$ wird $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{Sh}^2 t)} = \frac{a}{\operatorname{Cof} t},$

„ $x = a \operatorname{Sin} t$ „ $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{Sin}^2 t)} = a \operatorname{Cof} t,$

„ $x = a \operatorname{Cof} t$ „ $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\operatorname{Cof}^2 t - 1)} = a \operatorname{Sin} t.$

Uebrigens ergibt sich diese Einführung der hyperbolischen Functionen ohne Weiteres aus dem, was über die Beziehung zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Functionen in § 30 der Differential-Rechnung gesagt ist. (Vergl. auch daselbst Formel Nr. 79 der Tabelle.)

Bei der Integration durch Substitution ist die neue Integrations-Veränderliche t im Allgemeinen so zu wählen, dass jedem Werthe von x innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Werth von t zugeordnet ist; und umgekehrt darf jedem Werthe von t innerhalb der Integrationsgrenzen nur *ein* Werth von x entsprechen. Wenn diese Regel nicht beachtet wird, so können leicht Fehler entstehen. In einem späteren Abschnitte soll dieser Fall noch besonders untersucht werden.

III. Abschnitt.

Integration durch Zerlegung.

§ 13.

Integration von einigen gebrochenen rationalen Functionen durch Zerlegung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 29a, 86 bis 91.)

In vielen Fällen kann man die Differential-Function $f(x)dx$ unter dem Integralzeichen in zwei oder mehrere Summanden zerlegen, die dann einzeln sehr leicht integrirt werden können. Wie dies namentlich bei gebrochenen rationalen Functionen geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = ?$$

Auflösung. Die Aufgabe ist schon in § 8 (Aufgabe 7) behandelt worden; dabei ergab sich

$$(1.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right) = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \left(\frac{x}{a} \right).$$

(Vergl. Formel Nr. 29a der Tabelle.)

Dasselbe Resultat findet man auch durch folgende Ueberlegung. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, dass

$$(2.) \quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

wird. In der That, schafft man in Gleichung (2.) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

multipliziert, so erhält man

$$(3.) \quad 1 = A(x + a) + B(x - a).$$

Diese Gleichung soll für alle Werthe von x gelten, folglich auch für $x = +a$ und für $x = -a$. Für $x = +a$ findet man aber

$$(4.) \quad 1 = 2Aa, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2a},$$

und für $x = -a$

$$(5.) \quad 1 = -2Ba, \quad \text{oder} \quad B = -\frac{1}{2a}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (2.) ein, so erhält man

$$(6.) \quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right).$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich überzeugen, indem man die beiden Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt. Aus Gleichung (6.) folgt dann ohne Weiteres nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(7.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx \\ = \frac{1}{2a} [\ln(x - a) - \ln(x + a)] = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right).$$

Aufgabe 2. $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 16} = ?$

Auflösung. Diese Aufgabe kann man auf die vorhergehende zurückführen. Ergänzt man nämlich die beiden ersten Glieder des Nenners zu einem vollständigen Quadrate, indem man 25 addirt und dann wieder subtrahirt, so erhält man

$$(8.) \quad x^2 + 10x + 16 = (x^2 + 10x + 25) + (16 - 25) = (x + 5)^2 - 9.$$

Indem man jetzt noch

$$(9.) \quad x + 5 = t, \quad \text{also} \quad dx = dt$$

setzt, wird

$$(10.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 16} = \int \frac{dx}{(x + 5)^2 - 9} = \int \frac{dt}{t^2 - 3^2},$$

oder nach Gleichung (7.), wenn man x mit t und a mit 3 vertauscht,

$$(11.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 16} = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{t-3}{t+3}\right) = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{x+2}{x+8}\right).$$

Aufgabe 3. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe wird man hier den Nenner auf die Form

$$(12.) \quad x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) + (13 - 9) = (x + 3)^2 + 4$$

bringen und

$$(13.) \quad x + 3 = t, \quad \text{also} \quad dx = dt$$

setzen; dadurch erhält man

$$(14.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2}.$$

Wollte man jetzt die Integration nach der in Aufgabe 1 gefundenen Formel ausführen, so müsste man

$$a^2 = -4, \quad \text{also} \quad a = 2\sqrt{-1} = 2i$$

setzen, so dass man für das Resultat eine *complexe Form* erhalten würde. Dies kann man vermeiden, indem man Formel Nr. 28 der Tabelle, nämlich

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)$$

für $a = 2$ anwendet. Dadurch findet man

$$(15.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = ?$

Auflösung. Wie man schon aus den beiden vorhergehenden Aufgaben erkennt, muss man bei dieser Aufgabe drei Fälle unterscheiden, jenachdem $b^2 - c$ positiv, negativ oder gleich Null ist.

I. Fall. $b^2 - c > 0$.

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

$$(16.) \quad b^2 - c = + a^2, \quad \text{also} \quad \sqrt{b^2 - c} = + a,$$

so wird a eine reelle Grösse, und man erhält

$$(17.) \quad x^2 + 2bx + c = (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2) \\ = (x + b)^2 - a^2.$$

Dies giebt, wenn man $x + b$ mit t bezeichnet, nach Aufgabe 1

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{t - a}{t + a} \right),$$

oder

$$(18.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln \left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}} \right).$$

Man erkennt ohne Weiteres den Zusammenhang dieses Verfahrens mit der Auflösung der quadratischen Gleichungen. Um nämlich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

aufzulösen, bringt man die Gleichung auf die Form

$$x^2 + 2bx + b^2 = b^2 - c$$

und zieht dann auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung die Quadratwurzel aus. Dadurch erhält man

$$x + b = \pm \sqrt{b^2 - c},$$

oder

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c},$$

$$x_1 + x_2 = -2b, \quad x_1 \cdot x_2 = c, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c},$$

$$x^2 + 2bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2),$$

wo x_1 und x_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (18.) ein, so nimmt dieselbe die Form an

$$(18a.) \quad \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left(\frac{x - x_1}{x - x_2} \right).$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich in folgender Weise überzeugen. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, dass

$$(19.) \quad \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

wird. In der That, schafft man in Gleichung (19.) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit $(x-x_1)(x-x_2)$ multiplicirt, so erhält man

$$(20.) \quad 1 = A(x-x_2) + B(x-x_1).$$

Diese Gleichung soll für alle Werthe von x gelten, folglich gilt sie auch für $x = x_1$ und für $x = x_2$. Für $x = x_1$ findet man aber

$$(21.) \quad 1 = A(x_1 - x_2), \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{x_1 - x_2},$$

und für $x = x_2$

$$(22.) \quad 1 = B(x_2 - x_1), \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (19.) ein, so erhält man

$$(23.) \quad \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2} \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right).$$

Dass die rechte Seite dieser Gleichung der linken wirklich gleich ist, ergibt sich ohne Weiteres, indem man die Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt.

Aus Gleichung (23.) folgt dann in Uebereinstimmung mit Gleichung (18a.)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} &= \frac{1}{x_1-x_2} \int \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{x_1-x_2} [\ln(x-x_1) - \ln(x-x_2)] = \frac{1}{x_1-x_2} \ln \left(\frac{x-x_1}{x-x_2} \right). \end{aligned}$$

II. Fall. $b^2 - c < 0.$

Setzt man in diesem Falle der Kürze wegen

$$(24.) \quad b^2 - c = -a^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{c-b^2} = a,$$

so wird a eine reelle Grösse, und man erhält

$$x^2 + 2bx + c = (x^2 + 2bx + b^2) + (c - b^2) = (x + b)^2 + a^2.$$

Dies giebt, wenn man wieder $x + b$ mit t bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \int \frac{dx}{(x + b)^2 + a^2} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a} \right),$$

also

$$(25.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}} \right).$$

Es ist noch hervorzuheben, dass die Gleichungen (18.) und (25.) richtig bleiben, gleichviel ob $b^2 - c$ positiv oder negativ ist, die rechte Seite von Gleichung (18.) erhält aber eine complexe Form, wenn $b^2 - c < 0$ ist, und auf der rechten Seite von Gleichung (25.) wird die Grösse $\sqrt{c - b^2}$ imaginär, wenn $b^2 - c > 0$ ist. Der Zusammenhang beider Gleichungen ergibt sich aus D.-R., Formel Nr. 182 der Tabelle, nämlich aus

$$(26.) \quad \ln \left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i} \right) = 2i \operatorname{arctg} \varphi.$$

Setzt man nämlich

$$\varphi = \frac{x}{a},$$

so folgt aus Gleichung (26.)

$$\ln \left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i} \right) = \ln \left(\frac{a + xi}{a - xi} \right) = 2i \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right),$$

oder

$$\ln \left(\frac{-i(a + xi)}{(-1)i(a - xi)} \right) = \ln \left(\frac{x - ai}{x + ai} \right) - \ln(-1) = 2i \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Dies giebt, wenn man beide Seiten der Gleichung durch $2ai$ dividirt und beachtet, dass nach D.-R., Formel Nr. 181 der Tabelle $\ln(-1)$ den Werth $(2h + 1)\pi i$ hat,

$$(27.) \quad \frac{1}{2ai} \ln \left(\frac{x - ai}{x + ai} \right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2a},$$

wobei h noch eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl ist.

Vertauscht man also in der Formel

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right)$$

die Grösse a mit ai , so erhält man

$$(28.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2a}.$$

Setzt man noch

$$a = \sqrt{c - b^2}, \quad \text{also} \quad ai = i\sqrt{c - b^2} = \sqrt{b^2 - c}$$

und vertauscht x mit $x + b$, so geht Gleichung (27.) über in

$$(29.) \quad \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln \left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}} \right) + \frac{(2h + 1)\pi}{2\sqrt{c - b^2}};$$

die beiden Werthe, welche man in den Gleichungen (18.) und

(25.) für $\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}$ gefunden hat, unterscheiden sich also

von einander nur durch die Constante $\frac{(2h + 1)\pi}{2\sqrt{c - b^2}}$.

III. Fall. $b^2 - c = 0$, oder $c = b^2$.

Hier wird, wenn man wieder $x + b$ mit t bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2b^2 + c} = \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x + b)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t},$$

oder

$$(30.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = -\frac{1}{x + b}.$$

Beispiele.

I. Fall. $\int \frac{dx}{(x + 3)(x + 4)} = \ln \left(\frac{x + 3}{x + 4} \right);$

II. Fall. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 20} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + 2}{4} \right);$

III. Fall. $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16} = -\frac{1}{x + 4}.$

Aufgabe 5. $\int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = ?$

Auflösung. Wäre bei dem Bruche unter dem Integralzeichen der Zähler dem Differential des Nenners proportional, so könnte die Integration nach Formel Nr. 43 der Tabelle ausgeführt werden, nämlich nach der Formel

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln[f(x)].$$

In dem vorliegenden Falle ist

$$f'(x) = 2x + 2b,$$

deshalb nimmt man mit dem gesuchten Integrale die folgende Umformung vor. Es ist

$$Px + Q = (Px + Pb) + (Q - Pb) = \frac{P}{2}(2x + 2b) + (Q - Pb),$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} &= \int \frac{\frac{1}{2}P(2x + 2b) + (Q - Pb)}{x^2 + 2bx + c} dx \\ &= \frac{P}{2} \int \frac{(2x + 2b)dx}{x^2 + 2bx + c} + (Q - Pb) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}, \end{aligned}$$

also

$$(31.) \int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{P}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + (Q - Pb) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}.$$

Das Integral, welches auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen geblieben ist, findet man nach Aufgabe 4. So ist z. B. für $b^2 - c > 0$

$$(31 a.) \int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{P}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + \frac{Q - Pb}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right),$$

oder, da $x_1 + x_2 = -2b$ und $x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}$ ist,

$$\begin{aligned} &\int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} \\ &= \frac{P}{2} \ln[(x - x_1)(x - x_2)] + \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)} \ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right). \end{aligned}$$

Aus den bekannten Formeln

$$\ln[(x - x_1)(x - x_2)] = \ln(x - x_1) + \ln(x - x_2),$$

$$\ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right) = \ln(x - x_1) - \ln(x - x_2)$$

ergiebt sich daher

$$\int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \left(\frac{P}{2} + \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\right) \ln(x - x_1) \\ + \left(\frac{P}{2} - \frac{2Q + P(x_1 + x_2)}{2(x_1 - x_2)}\right) \ln(x - x_2),$$

oder

$$(32.) \int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \\ \frac{1}{x_1 - x_2} [(Px_1 + Q) \ln(x - x_1) - (Px_2 + Q) \ln(x - x_2)].$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man in folgender Weise bestätigen. Die beiden Unbekannten A und B lassen sich immer so bestimmen, dass

$$(33.) \frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

wird. Schafft man nämlich in Gleichung (33) die Nenner fort, indem man beide Seiten mit $(x - x_1)(x - x_2)$ multiplicirt, so erhält man

$$(34.) \quad Px + Q = A(x - x_2) + B(x - x_1).$$

Diese Gleichung soll für alle Werthe von x gelten, folglich gilt sie auch für $x = x_1$ und für $x = x_2$. Für $x = x_1$ findet man aber

$$(35.) \quad Px_1 + Q = A(x_1 - x_2), \quad \text{oder} \quad A = \frac{Px_1 + Q}{x_1 - x_2},$$

und für $x = x_2$

$$(36.) \quad Px_2 + Q = B(x_2 - x_1), \quad \text{oder} \quad B = \frac{Px_2 + Q}{x_2 - x_1}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (33.) ein, so erhält man

$$(37.) \quad \frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{Px_1 + Q}{x - x_1} - \frac{Px_2 + Q}{x - x_2} \right).$$

Dass die rechte Seite dieser Gleichung der linken wirklich gleich ist, ergibt sich ohne Weiteres, indem man die beiden Glieder in der Klammer auf gleichen Nenner bringt.

Aus Gleichung (37.) folgt dann in Uebereinstimmung mit Gleichung (32.)

$$(38.) \int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \int \left(\frac{Px_1 + Q}{x - x_1} - \frac{Px_2 + Q}{x - x_2} \right) dx \\ = \frac{1}{x_1 - x_2} [(Px_1 + Q)\ln(x - x_1) - (Px_2 + Q)\ln(x - x_2)].$$

Beispiele.

$$\text{I. } \int \frac{(2x + 43)dx}{x^2 + x - 12} = \int \frac{(2x + 1)dx}{x^2 + x - 12} + 42 \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} \\ = \ln(x^2 + x - 12) + 6 \ln\left(\frac{x - 3}{x + 4}\right) \\ = 7 \ln(x - 3) - 5 \ln(x + 4).$$

Dasselbe Resultat findet man aus Gleichung (32.), denn es ist in diesem Falle

$$x_1 = +3, \quad x_2 = -4, \quad x_1 - x_2 = 7,$$

$$P = 2, \quad Q = 43, \quad Px_1 + Q = 49, \quad Px_2 + Q = 35.$$

$$\text{II. } \int \frac{(4x - 5)dx}{x^2 - 4x + 20} = \int \frac{2(2x - 4)dx}{x^2 - 4x + 20} + 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 4^2} \\ = 2 \ln(x^2 - 4x + 20) + \frac{3}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 2}{4}\right).$$

$$\text{III. } \int \frac{(4x - 7)dx}{x^2 + 6x + 9} = \int \frac{(4x + 12) - 19}{(x + 3)^2} dx = 4 \int \frac{dx}{x + 3} - 19 \int \frac{dx}{(x + 3)^2} \\ = 4 \ln(x + 3) + \frac{19}{x + 3}.$$

Die vorhergehenden Aufgaben behandeln nur die einfachsten Fälle der *Zerlegung in Partialbrüche*. In einem späteren Abschnitte wird gezeigt werden, wie man *jede gebrochene rationale Function* durch Zerlegung in Partialbrüche integriren kann.

Auf die Integration von gebrochenen rationalen Functionen führen häufig die im vorigen Abschnitte behandelten Substitutionen, wie die beiden folgenden Aufgaben zeigen mögen.

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = ?$

Auflösung. Zunächst wird man hier die in Formel Nr. 82 der Tabelle angegebene Substitution benutzen und

$$(39.) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t, & \text{also } dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

setzen, dann erhält man

$$(40.) \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \int \frac{2dt}{2at + b(1-t^2) + c(1+t^2)} \\ = \int \frac{2dt}{(c-b)t^2 + 2at + (b+c)},$$

oder, wenn man die Grössen b_1 und c_1 durch die Gleichungen

$$(41.) \quad a = b_1(c-b), \quad b+c = c_1(c-b)$$

erklärt,

$$(42.) \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{c-b} \int \frac{dt}{t^2 + 2b_1t + c_1}.$$

Für $b_1^2 - c_1 > 0$ erhält man daher nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 86 der Tabelle)

$$(43.) \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{c-b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b_1^2 - c_1}} \ln \left(\frac{t + b_1 - \sqrt{b_1^2 - c_1}}{t + b_1 + \sqrt{b_1^2 - c_1}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \ln \left(\frac{t(c-b) + a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{t(c-b) + a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \right),$$

und für $b_1^2 - c_1 < 0$ erhält man nach Aufgabe 4 (Formel Nr. 88 der Tabelle)

$$(44.) \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{c-b} \frac{1}{\sqrt{c_1 - b_1^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t + b_1}{\sqrt{c_1 - b_1^2}} \right) \\ = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t(c-b) + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \right).$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man nach Formel Nr. 84 der Tabelle

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t},$$

so erhält man

$$(45.) \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a dt \cdot \cos t}{\cos^2 t (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t) \cdot a} \\ = \int \frac{\cos t dt}{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t},$$

oder, wenn man

$$(46.) \quad \sin t = z = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

setzt und die Grösse $\pm c^2$ durch die Gleichung

$$(47.) \quad b^2 = \pm (a^2 - b^2) c^2$$

erklärt,

$$(48.) \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{dz}{b^2 + (a^2 - b^2) z^2} = \frac{1}{a^2 - b^2} \int \frac{dz}{z^2 \pm c^2}.$$

Gilt das obere Zeichen, ist also $a^2 > b^2$, so findet man hieraus nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(49.) \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{c} \right) \\ = \frac{1}{b\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + x^2}} \right).$$

Gilt das untere Zeichen, ist also $a^2 < b^2$, so erhält man nach Formel Nr. 29 der Tabelle

$$(50.) \int \frac{dx}{(b^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2c} \ln \left(\frac{c - z}{c + z} \right) \\ = - \frac{1}{2b\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left(\frac{b\sqrt{a^2 + x^2} - x\sqrt{b^2 - a^2}}{b\sqrt{a^2 + x^2} + x\sqrt{b^2 - a^2}} \right).$$

§ 14.

Integration von einigen transcendenten Functionen durch Zerlegung. Anwendung der *Moirre'schen* Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 92 bis 96.)

Aufgabe 1.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = ?$$

Auflösung. Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

erhält man

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x},$$

folglich wird nach Formel Nr. 15 und 16 der Tabelle

$$(1.) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\ = -\frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = -2 \operatorname{ctg}(2x).$$

Aufgabe 2.
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = ?$$

Auflösung. Dieses Integral ist bereits durch Formel Nr. 46 der Tabelle berechnet. Damals wurde die Function unter dem Integralzeichen so umgeformt, dass der Zähler des Bruches das Differential des Nenners wurde. Man kann aber die Integration auch durch Zerlegung ausführen. Mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 44 und 45 der Tabelle erhält man nämlich

$$(2.) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \\ = \ln(\sin x) - \ln(\cos x) = \ln(\operatorname{tg} x).$$

Aufgabe 3.
$$\int \cos^m x dx = ?$$

Auflösung. In dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, wendet man am besten Formel Nr. 55 der Tabelle an, nach welcher

$$(3.) \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n d(\sin x)$$

wird. Ist aber m eine *gerade* Zahl, so kann man die Integration mit Hülfe der *Moirre'schen* Formeln ausführen. Nach D.-R., Formel Nr. 176 der Tabelle ist

$$(4.) \quad 2^{2n}(\cos x)^{2n} = 2 \cos(2nx) + \binom{2n}{1} 2 \cos(2n-2)x \\ + \binom{2n}{2} 2 \cos(2n-4)x + \dots + \binom{2n}{n-1} 2 \cos(2x) + \binom{2n}{2};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(5.) \quad 2^{2n} \int \cos^{2n} x dx = \frac{2}{2n} \sin(2nx) + \binom{2n}{1} \frac{2}{2n-2} \sin(2n-2)x \\ + \binom{2n}{2} \frac{2}{2n-4} \sin(2n-4)x + \dots + \binom{2n}{n-1} \sin(2x) + \binom{2n}{n} x.$$

Beispiel.

$$(6.) \quad 64 \int \cos^6 x dx = \frac{1}{3} \sin(6x) + 3 \sin(4x) + 15 \sin(2x) + 20x.$$

Auch in dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, kommt man mit Hülfe der *Moirre'schen* Formeln zum Ziele, wenn auch nicht ganz so leicht wie durch Gleichung (3.). Nach D.-R., Formel Nr. 177 der Tabelle ist nämlich

$$(7.) \quad 2^{2n+1}(\cos x)^{2n+1} = 2 \cos(2n+1)x + \binom{2n+1}{1} 2 \cos(2n-1)x \\ + \binom{2n+1}{2} 2 \cos(2n-3)x + \dots + \binom{2n+1}{n-1} 2 \cos(3x) \\ + \binom{2n+1}{n} 2 \cos x;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(8.) \quad 2^{2n+1} \int \cos^{2n+1} x dx = \frac{2}{2n+1} \sin(2n+1)x \\ + \binom{2n+1}{1} \frac{2}{2n-1} \sin(2n-1)x \\ + \binom{2n+1}{2} \frac{2}{2n-3} \sin(2n-3)x + \dots \\ + \binom{2n+1}{n-1} \frac{2}{3} \sin(3x) + \binom{2n+1}{n} 2 \sin x.$$

Beispiel.

$$(9.) \quad 128 \int \cos^7 x \, dx = \frac{2}{7} \sin(7x) + \frac{14}{5} \sin(5x) + 14 \sin(3x) + 70 \sin x.$$

Aufgabe 4. $\int \sin^m x \, dx = ?$

Auflösung. In dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, wendet man am besten Formel Nr. 56 der Tabelle an, nach welcher

$$(10.) \quad \int \sin^{2n+1} x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x)$$

wird. Ist aber m eine *gerade* Zahl, so kann man die Integration mit Hülfe der *Moirre'schen* Formeln ausführen. Nach D.-R., Formel Nr. 178 der Tabelle ist

$$(11.) \quad (-1)^n 2^{2n} (\sin x)^{2n} = 2 \cos(2nx) - \binom{2n}{1} 2 \cos(2n-2)x \\ + \binom{2n}{2} 2 \cos(2n-4)x - + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} 2 \cos(2x) \\ + (-1)^n \binom{2n}{n};$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(12.) \quad (-1)^n 2^{2n} \int \sin^{2n} x \, dx = \frac{2}{2n} \sin(2nx) \\ - \binom{2n}{1} \frac{2}{2n-2} \sin(2n-2)x \\ + \binom{2n}{2} \frac{2}{2n-4} \sin(2n-4)x - \\ + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \sin(2x) \\ + (-1)^n \binom{2n}{n} x.$$

Beispiel.

$$(13.) \quad - 64 \int \sin^6 x \, dx = \frac{1}{3} \sin(6x) - 3 \sin(4x) + 15 \sin(2x) - 20x.$$

Auch in dem Falle, wo m eine *ungerade* Zahl ist, kommt man mit Hülfe der *Moivre'schen* Formeln zum Ziele, wenn auch nicht ganz so leicht wie durch Gleichung (10.). Nach D.-R., Formel Nr. 179 der Tabelle ist nämlich

$$(14.) \quad (-1)^n 2^{2n+1} (\sin x)^{2n+1} = 2 \sin(2n+1)x - \binom{2n+1}{1} 2 \sin(2n-1)x \\ + \binom{2n+1}{2} 2 \sin(2n-3)x - + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{n-1} 2 \sin(3x) \\ + (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2 \sin x;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multiplicirt und dann integrirt, erhält man

$$(15.) \quad (-1)^n 2^{2n+1} \int \sin^{2n+1} x dx = -\frac{2}{2n+1} \cos(2n+1)x \\ + \binom{2n+1}{1} \frac{2}{2n-1} \cos(2n-1)x \\ - \binom{2n+1}{2} \frac{2}{2n-3} \cos(2n-3)x + \dots \\ - (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{n-1} \frac{2}{3} \cos(3x) - (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2 \cos x.$$

Beispiel.

$$(16.) \quad 128 \int \sin^7 x dx = \frac{2}{7} \cos(7x) - \frac{14}{5} \cos(5x) + 14 \cos(3x) - 70 \cos x.$$

In ähnlicher Weise kann man auch $\int \sin^m x \cos^n x dx$ berechnen, wenn man die Formeln

$$(17.) \quad 2i \sin x = e^{xi} - e^{-xi}, \quad 2 \cos x = e^{xi} + e^{-xi}$$

anwendet. Es ist z. B. nach den Gleichungen (17.), wenn man

$$(18.) \quad e^{xi} = \cos x + i \sin x = s, \quad e^{-xi} = \cos x - i \sin x = t$$

setzt und beachtet, dass $st = 1$ wird,

$$\begin{aligned}
 (19.) \quad -64 \sin^2 x \cos^4 x &= (e^{xi} - e^{-xi})^2 (e^{xi} + e^{-xi})^4 \\
 &= (s - t)^2 (s + t)^4 \\
 &= s^6 + 2s^5t - s^4t^2 - 4s^3t^3 - s^2t^4 + 2st^5 + t^6 \\
 &= (s^6 + t^6) + 2(s^4 + t^4) - (s^2 + t^2) - 4 \\
 &= 2 \cos(6x) + 4 \cos(4x) - 2 \cos(2x) - 4,
 \end{aligned}$$

also

$$(20.) \quad -64 \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{3} \sin(6x) + \sin(4x) - \sin(2x) - 4x.$$

ZARZĄD SZKOŁY GÓRNICZEJ
Dąbrowa (Śl. austr.)

IV. Abschnitt.

Partielle Integration.

§ 15.

Erklärung der partiellen Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 97.)

Sind u und v zwei beliebige Functionen von x , welche eine Ableitung besitzen, so ist bekanntlich (vergl. D.-R., Formel Nr. 28 der Tabelle)

$$(1.) \quad d(uv) = vdu + udv,$$

oder

$$(1a.) \quad udv = d(uv) - vdu,$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Gleichung integrirt,

$$(2.) \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Mit Hülfe dieser Formel ist die Integration der Differential-Function $u dv$ zurückgeführt auf die Integration von $v du$, wobei es durch passende Wahl der Factoren u und dv häufig erreicht werden kann, dass $\int v du$ leichter zu ermitteln ist als $\int u dv$.

Wie dieses Verfahren, welches man „*partielle Integration*“ nennt*), angewendet wird, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

*) Die häufig gebrauchte Bezeichnung „*theilweise Integration*“ ist sprachlich nicht zulässig.

§ 16.

Beispiele für die partielle Integration.**Aufgabe 1.** $\int \ln x \cdot dx = ?$ **Auflösung.** Setzt man

(1.) $u = \ln x, \text{ also } dv = dx,$

so wird

(2.) $du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$

folglich erhält man nach Formel Nr. 97 der Tabelle

$$\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx,$$

oder

(3.) $\int \ln x \cdot dx = x(\ln x - 1).$

Aufgabe 2. $\int x^m \ln x \cdot dx = ?$ **Auflösung.** Setzt man wieder

(4.) $u = \ln x, \text{ also } dv = x^m dx,$

so wird

(5.) $du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$

folglich erhält man nach Formel Nr. 97 der Tabelle

(6.)
$$\begin{aligned} \int x^m \ln x \cdot dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right). \end{aligned}$$

Für $m = 0$ geht diese Aufgabe in die vorhergehende über.**Aufgabe 3.** $\int x \cdot e^{mx} \cdot dx = ?$ **Auflösung.** Setzt man

(7.) $u = x, \text{ also } dv = e^{mx} \cdot dx,$

so wird

(8.) $du = dx, \quad v = \frac{1}{m} \cdot e^{mx},$

$$(9.) \quad \int x \cdot e^{mx} \cdot dx = \frac{x}{m} \cdot e^{mx} - \frac{1}{m} \int e^{mx} \cdot dx \\ = \frac{1}{m^2} \cdot e^{mx}(mx - 1).$$

Aufgabe 4. $\int x \sin x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(10.) \quad u = x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \cdot dx,$$

so wird

$$(11.) \quad du = dx \quad v = -\cos x,$$

$$(12.) \quad \int x \sin x \cdot dx = -x \cos x + \int \cos x \cdot dx \\ = -x \cos x + \sin x.$$

Aufgabe 5. $\int x^2 \cos x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(13.) \quad u = x^2, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \cdot dx,$$

so wird

$$(14.) \quad du = 2x dx, \quad v = \sin x,$$

$$(15.) \quad \int x^2 \cos x \cdot dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \cdot dx,$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (12.)

$$(16.) \quad \int x^2 \cos x \cdot dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

Aufgabe 6. $\int \arcsin x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(17.) \quad u = \arcsin x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

$$(18.) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x,$$

$$\int \arcsin x \cdot dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich erhält man aus Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(19.) \quad \int \arcsin x \cdot dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Aufgabe 7. $\int \arctg x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(20.) \quad u = \arctg x, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

$$(21.) \quad du = \frac{dx}{1 + x^2}, \quad v = x,$$

$$\int \arctg x \cdot dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1 + x^2},$$

folglich erhält man nach Formel Nr. 30 der Tabelle

$$(22.) \quad \int \arctg x \cdot dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Aufgabe 8. $\int (\ln x)^m \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(23.) \quad u = (\ln x)^m, \quad \text{also} \quad dv = dx,$$

so wird

$$(24.) \quad du = m(\ln x)^{m-1} \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

$$(25.) \quad \int (\ln x)^m \cdot dx = x(\ln x)^m - m \int (\ln x)^{m-1} \cdot dx.$$

Das gesuchte Integral ist durch diese Gleichung auf ein ähnliches zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man m mit $m - 1$ vertauscht, und das deshalb einfacher ist. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (25.) findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von m das gesuchte Integral. Ist z. B. $m = 4$, so erhält man

$$(26.) \quad \int (\ln x)^4 \cdot dx = x(\ln x)^4 - 4 \int (\ln x)^3 \cdot dx,$$

$$(27.) \quad \int (\ln x)^3 \cdot dx = x(\ln x)^3 - 3 \int (\ln x)^2 \cdot dx,$$

$$(28.) \quad \int (\ln x)^2 \cdot dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \cdot dx,$$

$$(29.) \quad \int \ln x \cdot dx = x \ln x - x.$$

Indem man Gleichung (27.) mit -4 , Gleichung (28.) mit $+4 \cdot 3$, Gleichung (29.) mit $-4 \cdot 3 \cdot 2$ multiplicirt und sodann die Gleichungen (26.) bis (29.) addirt, erhält man

$$(30.) \quad \int (\ln x)^4 \cdot dx = x [(\ln x)^4 - 4(\ln x)^3 + 4 \cdot 3(\ln x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2(\ln x) + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1].$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(31.) \quad \int (\ln x)^m \cdot dx = x [(\ln x)^m - m(\ln x)^{m-1} + m(m-1)(\ln x)^{m-2} - + \dots \pm m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot \ln x \mp m!].$$

Aufgabe 9. $\int e^x \cdot x^m \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(32.) \quad u = x^m, \quad \text{also} \quad dv = e^x \cdot dx,$$

so wird

$$(33.) \quad du = mx^{m-1} \cdot dx, \quad v = e^x,$$

$$(34.) \quad \int e^x \cdot x^m dx = x^m \cdot e^x - m \int e^x \cdot x^{m-1} \cdot dx.$$

Auch hier ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt, das aus dem gesuchten hervorgeht, indem man m mit $m-1$ vertauscht. Deshalb findet man durch das gleiche Verfahren wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$(35.) \quad \int e^x \cdot x^m dx = e^x [x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - + \dots \pm m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot x \mp m!].$$

§ 17.

Integration von einigen trigonometrischen Functionen durch partielle Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 98 bis 113.)

Aufgabe 1. $\int \cos^2 x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(1.) \quad u = \cos x, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \cdot dx,$$

so wird

$$(2.) \quad du = -\sin x \cdot dx, \quad v = \sin x,$$

$$(3.) \quad \int \cos^2 x \cdot dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

ist, so geht Gleichung (3.) über in

$$\int \cos^2 x \cdot dx = \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x \cdot dx.$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt,

$$(4.) \quad \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

Aufgabe 2. $\int \sin^2 x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(5.) \quad u = \sin x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \cdot dx$$

so wird

$$(6.) \quad du = \cos x \cdot dx, \quad v = -\cos x,$$

$$(7.) \quad \int \sin^2 x \cdot dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \cdot dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

ist, so geht Gleichung (7.) über in

$$\int \sin^2 x \cdot dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \cdot dx.$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt,

$$(8.) \quad \int \sin^2 x \cdot dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

Man erkennt ohne Weiteres den Zusammenhang zwischen den beiden letzten Aufgaben. Die Gleichungen (3.) und (7.)

stimmen mit einander überein, und durch Addition der Gleichungen (4.) und (8.) erhält man

$$(9.) \int \cos^2 x \cdot dx + \int \sin^2 x \cdot dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int dx = x.$$

Ausserdem wird auch noch die Lösung der einen Aufgabe durch die Substitution

$$(10.) \quad x = \frac{\pi}{2} - t$$

in die Lösung der anderen Aufgabe übergeführt. So wird durch diese Substitution z. B.

$$\int \sin^2 x dx = -\int \cos^2 t dt.$$

Aehnliches gilt auch für die hier noch folgenden Aufgaben; d. h. die Aufgaben lassen sich einander paarweise so zuordnen, dass die Lösung der einen Aufgabe sich unmittelbar aus der Lösung der anderen durch Anwendung dieser Substitution ergibt.

Die Aufgaben 1 und 2 lassen eine wichtige Verallgemeinerung zu, die in den Aufgaben 3 und 5 untersucht werden soll.

Aufgabe 3. $\int \cos^m x \cdot dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(11.) \quad u = \cos^{m-1} x, \quad \text{also} \quad dv = \cos x \cdot dx,$$

so wird

$$(12.) \quad du = -(m-1) \cos^{m-2} x \sin x dx, \quad v = \sin x,$$

$$(13.) \quad \int \cos^m x \cdot dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$(14.) \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \text{also} \quad \cos^{m-2} x \sin^2 x = \cos^{m-2} x - \cos^m x$$

ist, so erhält man

$$(15.) \quad \int \cos^m x \cdot dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \cdot dx \\ - (m-1) \int \cos^m x \cdot dx,$$

oder, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist,

auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch m dividirt,

$$(16.) \int \cos^m x \cdot dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \cdot dx.$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (4.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (16.) geht aus dem gesuchten Integral hervor, indem man m mit $m - 2$ vertauscht, und wird daher einfacher, wenn $m \geq 2$ ist. Es sei z. B. $m = 8$, dann wird

$$(17.) \int \cos^8 x \cdot dx = \frac{1}{8} \cos^7 x \sin x + \frac{7}{8} \int \cos^6 x \cdot dx,$$

$$(18.) \int \cos^6 x \cdot dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x \cdot dx,$$

$$(19.) \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \cdot dx,$$

$$(20.) \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2}.$$

Indem man Gleichung (18.) mit $\frac{7}{8}$, Gleichung (19.) mit $\frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6}$, Gleichung (20.) mit $\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4}$ multiplicirt und sodann die Gleichungen (17.) bis (20.) addirt, erhält man

$$(21.) \int \cos^8 x \cdot dx = \sin x \left(\frac{1}{8} \cos^7 x + \frac{7}{8 \cdot 6} \cos^5 x + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \cos^3 x + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cos x \right) + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} x.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(22.) \int \cos^7 x \cdot dx = \sin x \left(\frac{1}{7} \cos^6 x + \frac{6}{7 \cdot 5} \cos^4 x + \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 3} \cos^2 x + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine ungerade Zahl ist, $\int \cos^m x dx$ lieber mit Hülfe von Formel Nr. 55 der Tabelle, nämlich mit Hülfe der Formel

$$\int \cos^{2n+1} x \cdot dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cdot d(\sin x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

$$(23.) \int \cos^7 x \cdot dx = \int (1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x) \\ = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x.$$

Man kann die Uebereinstimmung der beiden Resultate in Gleichung (22.) und (23.) leicht nachweisen.

Ist dagegen m eine *gerade* Zahl und positiv, so ist man, wenn man nicht die *Moirre'schen* Formeln anwenden will (vergl. Formel Nr. 93 der Tabelle), auf die in Gleichung (16.) enthaltene Recursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (21.)

$$(24.) \int \cos^{2n} x \cdot dx = \sin x \left[\frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \cos^{2n-3} x \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n \cdot (2n-2)(2n-4)} \cos^{2n-5} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2} \cos x \right] \\ + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2} x.$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man mit Rücksicht auf Gleichung (16.) durch den Schluss von n auf $n+1$ beweisen.

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = ?$

Auflösung. Die Gleichung (16.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht die Gleichung (16.) über in

$$(25.) \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} = \frac{\sin x}{-(n-2) \cos^{n-1} x} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)} \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

In diesem Falle ist aber das Integral auf der *linken* Seite der Gleichung einfacher als das auf der *rechten* Seite. Deshalb bringt man die Gleichung (25.) auf die Form

$$\frac{n-1}{n-2} \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-2) \cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},$$

oder

$$(26.) \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 48 der Tabelle

$$(27.) \quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$(28.) \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$(29.) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = -\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right],$$

also, wenn man Gleichung (28.) mit $\frac{3}{4}$, Gleichung (29.) mit $\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}$ multiplicirt und die Gleichungen (27.) bis (29.) addirt,

$$(30.) \quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{4 \cdot 2 \cos^2 x} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right].$$

Für $n = 4$ erhält man

$$(31.) \quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Man wird aber, wenn n eine *gerade* Zahl ist, zur Berechnung von $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ zweckmässiger die Formel Nr. 63 der Tabelle anwenden, nach welcher

$$(32.) \quad \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} \cdot d(\operatorname{tg} x)$$

wird. In dem vorliegenden Falle ist z. B.

$$(33.) \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x.$$

Aufgabe 5. $\int \sin^m x \cdot dx = ?$

Auflösung. Durch die Substitution

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

kann diese Aufgabe, wie schon erwähnt, auf die Aufgabe 3 zurückgeführt werden; hier möge jedoch, davon unabhängig, die partielle Integration angewendet werden. Setzt man

$$(34.) \quad u = \sin^{m-1} x, \quad \text{also} \quad dv = \sin x \cdot dx,$$

so wird

$$(35.) \quad du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x,$$

$$(36.) \quad \int \sin^m x \cdot dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$(37.) \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \text{also} \quad \sin^{m-2} x \cos^2 x = \sin^{m-2} x - \sin^m x$$

ist, so geht Gleichung (36.) über in

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot dx &= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cdot dx \\ &\quad - (m-1) \int \sin^m x \cdot dx. \end{aligned}$$

Dies giebt, wenn man das zweite Integral auf der rechten Seite, welches mit dem gesuchten Integral identisch ist, auf die linke Seite bringt und die ganze Gleichung durch m dividirt,

$$(38.) \quad \int \sin^m x \cdot dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \cdot dx.$$

Für $m = 2$ geht diese Gleichung in Gleichung (8.) über.

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (38.) geht aus dem gesuchten hervor, indem man m mit $m-2$ vertauscht, und wird daher einfacher für $m \geq 2$. Es sei z. B. $m = 8$, dann erhält man

$$(39.) \quad \int \sin^8 x \cdot dx = -\frac{1}{8} \sin^7 x \cos x + \frac{7}{8} \int \sin^6 x \cdot dx,$$

$$(40.) \quad \int \sin^6 x \cdot dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \cdot dx,$$

$$(41.) \quad \int \sin^4 x \cdot dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \cdot dx,$$

$$(42.) \quad \int \sin^2 x \cdot dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

Dies giebt ähnlich wie bei $\int \cos^8 x \cdot dx$

$$(43.) \quad \int \sin^8 x \cdot dx = -\cos x \left(\frac{1}{8} \sin^7 x + \frac{7}{8 \cdot 6} \sin^5 x + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \sin^3 x \right. \\ \left. + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \sin x \right) + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} x.$$

In ähnlicher Weise findet man für $m = 7$

$$(44.) \quad \int \sin^7 x \cdot dx = -\cos x \left(\frac{1}{7} \sin^6 x + \frac{6}{7 \cdot 5} \sin^4 x + \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 3} \sin^2 x \right. \\ \left. + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right).$$

Man wird jedoch in allen Fällen, wo $m = 2n + 1$ eine ungerade Zahl ist, $\int \sin^m x \cdot dx$ lieber mit Hülfe von Formel Nr. 56 der Tabelle, nämlich mit Hülfe der Formel

$$\int \sin^{2n+1} x \cdot dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x)$$

berechnen. Für $m = 7$ findet man dann z. B.

$$(45.) \quad \int \sin^7 x \cdot dx = -\int (1 - 3 \cos^2 x + 3 \cos^4 x - \cos^6 x) d(\cos x) \\ = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x.$$

Ist dagegen m eine gerade Zahl, und will man nicht die *Moirre'schen* Formeln anwenden (vergl. Formel Nr. 95 der Tabelle), so ist man auf die in Gleichung (38.) enthaltene Recursionsformel angewiesen. Dabei findet man ähnlich wie in Gleichung (43.)

$$(46.) \int \sin^{2n} x \cdot dx = -\cos x \left[\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \sin^{2n-3} x \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-5} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2} \sin x \right] \\ + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2} x.$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = ?$

Auflösung. Auch Gleichung (38.) bleibt noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man daher wieder

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (38.) über in

$$(47.) \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} = -\frac{\cos x}{(n-2)\sin^{n-1} x} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)} \int \frac{dx}{\sin^n x}.$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(48.) \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$$

Es ist z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 47 der Tabelle

$$(49.) \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sin^3 x},$$

$$(50.) \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x},$$

$$(51.) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right],$$

also

$$(52.) \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin x} - \frac{3 \cos x}{4 \cdot 2 \sin^2 x} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

Ist n eine *gerade* Zahl, so wird $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ zweckmässiger durch die Formel Nr. 64 der Tabelle, nämlich durch die Formel

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m}x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2x)^{m-1} \cdot d(\operatorname{ctg}x)$$

ermittelt. Es ist z. B.

$$(53.) \int \frac{dx}{\sin^4x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2x) d(\operatorname{ctg}x) = -\operatorname{ctg}x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3x.$$

Aufgabe 7. $\int \sin^m x \cos^n x dx = ?$

Auflösung. Ist n eine *ungerade* Zahl, so findet man die einfachste Lösung der Aufgabe mit Hülfe von Formel Nr. 57 der Tabelle; und ist m eine *ungerade* Zahl, so kann man Formel Nr. 58 der Tabelle mit gutem Erfolge anwenden. Sind aber m und n beide *gerade* Zahlen, so kommt man durch *partielle* Integration zum Ziele. Setzt man nämlich

$$(54.) \quad u = \sin^{m-1}x, \quad dv = \cos^n x \sin x dx,$$

und deshalb

$$(55.) \quad du = (m-1) \sin^{m-2}x \cos x dx, \quad v = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1},$$

so erhält man

$$(56.) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2}x \cos^{n+2}x dx.$$

Ist m positiv und n negativ, so ist diese Formel sehr brauchbar. Ist z. B.

$$n = -m,$$

so geht Gleichung (56.) über in

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx = -\frac{\sin^{m-1}x}{(-m+1) \cos^{m-1}x} + \frac{m-1}{-m+1} \int \frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{m-2}x} dx,$$

oder

$$(57.) \quad \int \operatorname{tg}^m x dx = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1}x - \int \operatorname{tg}^{m-2}x dx.$$

Ist aber n gleichfalls positiv, so benutze man die Beziehungen

$$\cos^2x = 1 - \sin^2x,$$

$$\sin^{m-2}x \cos^{n+2}x = \sin^{m-2}x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (56.) über in

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx \\ - \frac{m-1}{n+1} \int \sin^m x \cos^n x dx,$$

oder

$$\frac{m+n}{n+1} \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} \\ + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Daraus folgt

$$(58.) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} \\ + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten von $\sin x$ reduciren. Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man für $n=0$, dann geht nämlich Gleichung (58.) in Gleichung (38.) über.

Vertauscht man in Gleichung (58.) m mit $-m+2$, also $m-1$ mit $-m+1$ und $m-2$ mit $-m$, so erhält man

$$\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2} x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(n-m+2) \sin^{m-1} x} - \frac{m-1}{n-m+2} \int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x},$$

oder

$$(59.) \int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2} x}.$$

Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man wieder für $n=0$, dann geht nämlich Gleichung (59.) in Gleichung (48.) über.

In ähnlicher Weise kann man den Exponenten von $\cos x$ reduciren. Setzt man nämlich

$$(60.) \quad u = \cos^{n-1} x, \quad dv = \sin^m x \cos x dx,$$

also

$$(61.) \quad du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx, \quad v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1},$$

so wird

$$(62.) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Ist n positiv und m negativ, so ist diese Formel sehr brauchbar; ist z. B.

$$m = -n,$$

so geht Gleichung (62.) über in

$$(63.) \quad \int \operatorname{ctg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx.$$

Ist aber m gleichfalls positiv, so benutze man die Beziehungen

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \\ \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x.$$

Dadurch geht Gleichung (62.) über in

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx \\ - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

oder

$$\frac{m+n}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx;$$

daraus folgt

$$(64.) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Durch diese Formel kann man den Exponenten von $\cos x$ reduciren. Einen besonderen Fall dieser Formel erhält man für

$m = 0$, dann geht nämlich Gleichung (64.) in Gleichung (16.) über.

Vertauscht man in Gleichung (64.) n mit $-n + 2$, also $n - 1$ mit $-n + 1$, $n - 2$ mit $-n$, so erhält man

$$\int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(m - n + 2) \cos^{n-1} x} + \frac{-n + 1}{m - n + 2} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^n x},$$

oder

$$(65.) \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n - 1) \cos^{n-1} x} - \frac{m - n + 2}{n - 1} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Einen besonderen Fall dieser Formel enthält bereits Gleichung (26.).

Die hergeleiteten Formeln bleiben richtig, gleichviel, ob die Zahlen m und n gerade oder ungerade sind.

Was in den vorstehenden Aufgaben für die *trigonometrischen* Functionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ gezeigt worden ist, könnte in entsprechender Weise auch für die *hyperbolischen* Functionen $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Tg} x$, $\operatorname{Ctg} x$ ausgeführt werden; um Raum zu sparen, möge von dieser Ausführung Abstand genommen werden.

Aufgabe 8. $\int e^{ax} \cos(bx) dx = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(66.) \quad u = e^{ax}, \quad dv = \cos(bx) dx,$$

also

$$(67.) \quad du = ae^{ax} dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin(bx),$$

so erhält man

$$(68.) \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx.$$

Setzt man dagegen

$$(69.) \quad u = e^{ax}, \quad dv = \sin(bx) dx,$$

also

$$(70.) \quad du = ae^{ax}dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos(bx),$$

so erhält man

$$(71.) \quad \int e^{ax} \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx) dx.$$

Dies giebt, wenn man Gleichung (71.) mit $-\frac{a}{b}$ multiplicirt, zu Gleichung (68.) addirt und das Resultat durch $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$ dividirt,

$$(72.) \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2}.$$

Multiplicirt man dagegen Gleichung (68.) mit $\frac{a}{b}$, addirt dann Gleichung (71.) und dividirt durch $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$, so erhält man

$$(73.) \quad \int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}.$$

Noch einfacher findet man diese Gleichungen (72.) und (73.) durch Anwendung der *Moirre'schen* Formeln.

§ 18.

Integration von einigen irrationalen Functionen durch partielle Integration.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 114 bis 126a.)

Aufgabe 1. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Auflösung. Die Aufgabe ist mit Aufgabe 5 im vorhergehenden Paragraphen nahe verwandt, denn, setzt man

$$x = a \sin t, \quad \text{also} \quad dx = a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t,$$

so wird

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^m \sin^m t \cdot a \cos t dt}{a \cos t} = a^m \int \sin^m t dt.$$

Die folgenden Umformungen entsprechen deshalb Zeile für Zeile denen in jener Aufgabe. Hier setzt man

$$(1.) \quad u = x^{m-1}, \quad \text{also} \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

dann wird nach Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(2.) \quad du = (m-1)x^{m-2}dx, \quad v = -\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(3.) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^{m-1} \sqrt{a^2 - x^2} + (m-1) \int x^{m-2} dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{also dass} \quad x^{m-2} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 x^{m-2} - x^m}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (3.) über in

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^{m-1} \sqrt{a^2 - x^2} + (m-1) \int \frac{(a^2 x^{m-2} - x^m) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -x^{m-1} \sqrt{a^2 - x^2} + (m-1) a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad - (m-1) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist mit dem gesuchten Integrale identisch. Bringt man dasselbe auf die linke Seite und dividirt die ganze Gleichung durch m , so findet man

$$(4.) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

In dieser Formel geht das Integral auf der rechten Seite der Gleichung aus dem gesuchten Integral hervor, indem man m mit $m-2$ vertauscht. Es ist daher, wenn die ganze Zahl $m \geq 2$ ist, einfacher als das gesuchte Integral.

Für $m = 6$ erhält man z. B. mit Rücksicht auf Formel Nr. 34 der Tabelle

$$(5.) \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^5}{6} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{5a^2}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(6.) \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^3}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^2}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(7.) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(8.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Indem man Gleichung (6.) mit $\frac{5a^2}{6}$, Gleichung (7.) mit $\frac{5 \cdot 3a^4}{6 \cdot 4}$, Gleichung (8.) mit $\frac{5 \cdot 3 \cdot 1 a^6}{6 \cdot 4 \cdot 2}$ multiplicirt und die Gleichungen (5.) bis (8.) addirt, erhält man

$$(9.) \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{x^5}{6} + \frac{5a^2 x^3}{6 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3a^4 x}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} a^6 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

In ähnlicher Weise findet man für $m = 7$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(10.) \quad \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{x^6}{7} + \frac{6a^2 x^4}{7 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 4a^4 x^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2a^6}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right).$$

Man wird aber die in Gleichung (4.) enthaltene Recursionsformel nur anwenden, wenn m eine *gerade* Zahl ist. Für *ungerades* m , also für $m = 2n + 1$ führt die Substitution

$$(11.) \quad \sqrt{a^2 - x^2} = t$$

schneller zum Ziele. Es wird dann nämlich

$$a^2 - x^2 = t^2, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad x dx = -t dt,$$

also

$$(12.) \quad \int \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{(a^2 - t^2)^n t dt}{t} = -\int (a^2 - t^2)^n dt,$$

so dass man nur eine ganze rationale Function zu integriren hat. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= - \int (a^6 - 3a^4 t^2 + 3a^2 t^4 - t^6) dt \\ &= - \left(a^6 t - a^4 t^3 + \frac{3}{5} a^2 t^5 - \frac{1}{7} t^7 \right) \\ &= - t \left(a^6 - a^4 t^2 + \frac{3}{5} a^2 t^4 - \frac{1}{7} t^6 \right), \end{aligned}$$

oder, wenn man für t den Werth aus Gleichung (11.) einsetzt,

$$(13.) \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{x^6}{7} + \frac{6a^2 x^4}{7 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 4 a^4 x^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 a^6}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right).$$

Das in Gleichung (9.) enthaltene Resultat kann man sogleich verallgemeinern. Setzt man nämlich

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad c_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots$$

allgemein

$$(14.) c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}, \quad c_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+2)},$$

so wird

$$(15.) \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{c_3}{c_2} = \frac{5}{6}, \dots \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Setzt man ferner

$$G_1(x) = \frac{x}{2} = c_1 x,$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3a^2 x}{2 \cdot 4} = \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{a^2 x}{2} \right) = \frac{c_2}{c_1} \left[\frac{x^3}{3} + a^2 G_1(x) \right],$$

$$\begin{aligned} G_3(x) &= \frac{x^5}{6} + \frac{5a^2 x^3}{4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 a^4 x}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{c_3}{c_2} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{a^2 x^3}{4} + \frac{3a^4 x}{2 \cdot 4} \right] \\ &= \frac{c_3}{c_2} \left[\frac{x^5}{5} + a^2 G_2(x) \right], \end{aligned}$$

allgemein

$$(16.) \quad G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)a^2x^{2n-3}}{(2n-2)2n} \\ + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)a^{2n-2}x}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)2n},$$

$$(17.) \quad G_{n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(2n+1)a^2x^{2n-1}}{2n(2n+2)} \\ + \frac{(2n-1)(2n+1)a^4x^{2n-3}}{(2n-2)(2n)(2n+2)} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)a^{2n}x}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)2n(2n+2)} \\ = \frac{c_{n+1}}{c_n} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{a^2x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)a^4x^{2n-3}}{(2n-2)2n} + \dots \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)a^{2n}x}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)2n} \right],$$

so wird

$$(18.) \quad G_{n+1}(x) = \frac{c_{n+1}}{c_n} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + a^2 G_n(x) \right].$$

Nach Einführung dieser Bezeichnungen erhält man

$$(19.) \quad \int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = c_n \cdot a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} \cdot G_n(x).$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man durch den Schluss von n auf $n+1$ beweisen. Es ist nämlich nach Gleichung (4.) für $m = 2n+2$

$$\int \frac{x^{2n+2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2} \int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder, wenn man voraussetzt, dass Gleichung (19.) richtig ist,

$$\int \frac{x^{2n+2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{2n+1}}{2n+2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2} c_n a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \\ - \frac{(2n+1)a^2}{2n+2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot G_n(x),$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.) und (18.)

$$(20.) \quad \int \frac{x^{2n+2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = c_{n+1} a^{2n+2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} \cdot G_{n+1}(x).$$

Ist also die Gleichung (19.) richtig, so bleibt sie auch richtig, wenn man n mit $n + 1$ vertauscht. Aus den Gleichungen (5.) bis (9.) erkennt man, dass die Gleichung (19.) für $n = 1, 2$ und 3 richtig ist, folglich bleibt sie auch richtig für $n = 4, 5, 6, \dots$, d. h. für *alle* ganzzahligen, positiven Werthe von n .

Aufgabe 2. $\int x^m dx \sqrt{a^2 - x^2} = ?$

Auflösung. Es ist

$$(21.) \quad x^m \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 x^m - x^{m+2}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

folglich wird

$$(22.) \quad \int x^m dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Nun erhält man aus Gleichung (4.) durch Vertauschung von m mit $m + 2$

$$(23.) \quad \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m+1)a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so ergibt sich

$$(24.) \quad \int x^m dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (4.) enthaltene Recursionsformel reduciren. Man findet z. B. für $m = 0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 34 der Tabelle

$$(25.) \quad \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

und für $m = 1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 31 der Tabelle

$$(26.) \quad \int x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{3} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{3} \sqrt{a^2 - x^2} \\ = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Auch hier wird in dem Falle, wo der Exponent m eine *ungerade* Zahl ist, die Substitution

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t, \quad x^2 = a^2 - t^2, \quad x dx = -t dt$$

schneller zum Ziele führen. So ist z. B.

$$\int x dx \sqrt{a^2 - x^2} = - \int t^2 dt = - \frac{t^3}{3},$$

woraus sich wieder das in Gleichung (26.) gefundene Resultat ergibt.

Aufgabe 3.
$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}} = ?$$

Auflösung. Gleichung (4.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$\begin{aligned} \text{also} \quad m &= -(n - 2) = -n + 2, \\ m - 1 &= -n + 1 = -(n - 1), \quad m - 2 = -n, \end{aligned}$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{-(n-1)a^2}{-(n-2)} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

In dieser Gleichung ist das Integral auf der *linken* Seite einfacher als das auf der *rechten*. Deshalb vertauscht man beide Seiten der Gleichung und findet durch Multiplication mit dem Factor $\frac{n-2}{(n-1)a^2}$

$$(27.) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Es ist z. B. für $n = 2$ in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 38 der Tabelle

$$(28.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$$

Auf dieses Integral kann man $\int \frac{dx}{x^{2m} \sqrt{a^2 - x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der gefundenen Recursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man für *ungerade* Werthe von n zu

$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$, auf welches die in Gleichung (27.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $\infty - \infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 37 der Tabelle

$$(29.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cot} \left(\frac{a}{x} \right) = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Setzt man

$$(30.) \quad u = x^{m-1}, \quad \text{also} \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

so erhält man

$$(31.) \quad du = (m-1)x^{m-2} dx, \quad v = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$(32.) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x^{m-1} \sqrt{a^2 + x^2} - (m-1) \int x^{m-2} dx \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist *nicht* einfacher als das gesuchte Integral; beachtet man aber, dass

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad x^{m-2} \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a^2 x^{m-2} + x^m}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ist, so geht Gleichung (32.) über in

$$(33.) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x^{m-1} \sqrt{a^2 + x^2} - (m-1) a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ - (m-1) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Bringt man das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, da es mit dem gesuchten identisch ist, auf die linke Seite und dividirt die ganze Gleichung durch m , so erhält man

$$(34.) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Es ist z. B. für $m = 6$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(35.) \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^5}{6} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{5a^2}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$(36.) \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^3}{4} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{3a^2}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$(37.) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$(38.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Ar Sin} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right).$$

Dies giebt

$$(39.) \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5a^2 x^3}{6 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3a^4 x}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \\ - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} a^6 \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right).$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(40.) \quad \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} \left(\frac{x^6}{7} - \frac{6a^2 x^4}{7 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 4a^4 x^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{6 \cdot 4 \cdot 2a^6}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \right);$$

man wird aber, wenn m eine *gerade* Zahl ist, schneller zum Ziele kommen, indem man die Substitution

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t, \quad x^2 = t^2 - a^2, \quad \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = dt$$

anwendet. So findet man z. B.

$$(41.) \quad \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int x^6 dt = \int (t^6 - 3a^2 t^4 + 3a^4 t^2 - a^6) dt \\ = \frac{t^7}{7} - \frac{3a^2 t^5}{5} + a^4 t^3 - a^6 t.$$

Die vorstehenden Formeln bleiben sämtlich noch richtig, wenn man $+a^2$ mit $-a^2$ vertauscht. Dadurch findet man z. B. aus Gleichung (34.)

$$(42.) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

und aus den Gleichungen (37.) und (38.)

$$(43.) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)^*.$$

Aufgabe 5. $\int x^m dx \sqrt{a^2 + x^2} = ?$

Auflösung. Es ist

$$(44.) \quad x^m \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a^2 x^m + x^{m+2}}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

folglich wird

$$(45.) \quad \int x^m dx \sqrt{a^2 + x^2} = a^2 \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Nun erhält man aus Gleichung (34.) durch Vertauschung von m mit $m + 2$

$$(46.) \quad \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{(m+1)a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen, so ergibt sich

$$(47.) \quad \int x^m dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man dann weiter durch die in Gleichung (34.) enthaltene Recursionsformel reduciren. Man findet z. B. für $m = 0$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(48.) \quad \int dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right).$$

und für $m = 1$ mit Rücksicht auf Formel Nr. 32 der Tabelle

$$(49.) \quad \int x dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^2}{3} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{3} \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{1}{3} (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Auch hier wird man in dem Falle, wo der Exponent m eine ungerade Zahl ist, besser die Substitution

*) Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ geht allerdings

$$\ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \ln a$$

über in

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln(a\sqrt{-1}) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) - \ln(\sqrt{-1}).$$

Hierbei darf aber die Integrations-Constante $-\ln(\sqrt{-1})$ fortgelassen werden.

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t$$

benutzen.

Durch Vertauschung von $+a^2$ mit $-a^2$ gehen die Gleichungen (47.) bis (49.) über in

$$(50.) \quad \int x^m dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$(51.) \quad \int dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right), \quad *)$$

$$(52.) \quad \int x dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{3} (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} = ?$

Auflösung. Gleichung (34.) bleibt auch dann noch richtig, wenn m eine *negative* Zahl ist. Setzt man z. B.

$$m = -(n-2) = -n+2,$$

also

$$m-1 = -n+1 = -(n-1), \quad m-2 = -n,$$

so geht Gleichung (34.) über in

$$(53.) \quad \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{(n-1)a^2}{n-2} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Vertauscht man beide Seiten dieser Gleichung mit einander und multiplicirt mit dem Factor $-\frac{n-2}{(n-1)a^2}$, so erhält man

$$(54.) \quad \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Es ist z. B. für $n=2$ in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 40 der Tabelle

$$(55.) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x}.$$

Auf dieses Integral kann $\int \frac{dx}{x^{2m} \sqrt{a^2 + x^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (54.) enthaltenen Recursionsformel immer zurückgeführt werden. Dagegen gelangt man in dem Falle,

*) Vergl. die Anmerkung auf voriger Seite.

wo n eine *ungerade* Zahl ist, zu $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, auf welches die in Gleichung (54.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $-\infty + \infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 39 der Tabelle

$$(56.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin}\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$$

Vertauscht man $+a^2$ mit $-a^2$, so gehen die Gleichungen (54.) und (55.) über in

$$(57.) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2-a^2}} = + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{x^2-a^2}},$$

$$(58.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-a^2}} = + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x}. \quad (\text{Vergl. Formel Nr. 42 der Tabelle.})$$

Auf dieses Integral lässt sich $\int \frac{dx}{x^{2m} \sqrt{x^2-a^2}}$ durch wiederholte Anwendung der in Gleichung (57.) enthaltenen Recursionsformel immer zurückführen. Dagegen gelangt man in dem Falle, wo n eine *ungerade* Zahl ist, zu $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, auf welches die in Gleichung (57.) enthaltene Formel nicht mehr anwendbar ist, weil die rechte Seite die Form $\infty - \infty$ annimmt. Man erhält aber nach Formel Nr. 41 der Tabelle

$$(59.) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsin}\left(\frac{a}{x}\right).$$

Anwendungen der Integral-Rechnung.

V. Abschnitt.

Quadratur der Curven.

§ 19.

Quadratur der Curven bei Anwendung rechtwinkliger Coordinationen.

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle ist der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

- 1) von der Curve $y = f(x)$,
- 2) von der X-Axe,
- 3) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

gleich

$$(1.) \quad F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

wobei $F'(x) = f(x)$ sein soll.

Die Berechnung des Flächeninhaltes von solchen ebenen Figuren nennt man: „*Quadratur der Curven*“. Man kann die dafür angegebene Formel sofort zur Lösung der folgenden Aufgaben benutzen.

Aufgabe 1. Es sei eine Curve durch die Gleichung

$$(2.) \quad 8y = x^2$$

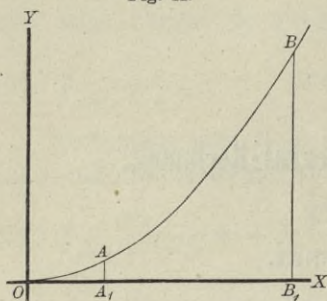
gegeben (Fig. 12); man soll die Fläche A_1B_1BA berechnen, welche durch die beiden Ordinaten

$$x = a = 2 \quad \text{und} \quad x = b = 7$$

begrenzt wird.

Auflösung. Nach Gleichung (1.) wird

Fig. 12.



$$(3.) \quad F = \frac{1}{8} \int_2^7 x^2 dx = \frac{1}{24} [x^3]_2^7 \\ = \frac{1}{24} (7^3 - 2^3) \\ = \frac{343 - 8}{24} = \frac{335}{24}.$$

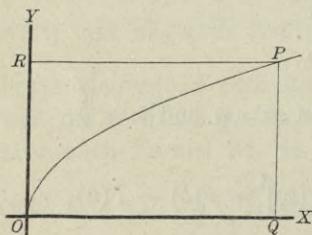
Aufgabe 2. Die Gleichung einer *Parabel* OP (Fig. 13) sei

$$(4.) \quad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2px};$$

man soll den Flächeninhalt der Figur OQP berechnen.

Auflösung. Da in diesem Falle der Punkt O die Abscisse 0 und der Punkt P die Abscisse OQ gleich x hat, so erhält man nach Gleichung (1.)

Fig. 13.



$$(5.) \quad F = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2px} \cdot dx \\ = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx \\ = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \frac{2x}{3} \sqrt{2px},$$

oder

$$(6.) \quad F = \frac{2xy}{3}.$$

In diesem Resultate ist der Satz enthalten:

Die von der *Parabel* OP , der X -*Axe* und einer beliebigen *Ordinate* QP begrenzte ebene Figur verhält sich zur Fläche des *Rechtecks* $OQPR$ mit den Seiten $OQ = x$ und $QP = y$ wie 2 : 3.

Aufgabe 3. Die Gleichung einer *Parabel* (Fig. 14) sei

$$(7.) \quad y^2 = 9x, \quad \text{oder} \quad y = 3\sqrt{x};$$

man soll die Fläche A_1B_1BA berechnen, wenn

$$OA_1 = 4, \quad OB_1 = 25$$

ist.

Auflösung. Nach Gleichung (1.) wird in diesem Falle

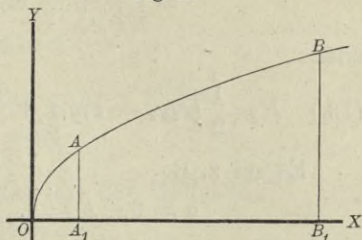
$$(8.) \quad F = \int_4^{25} y dx = 3 \int_4^{25} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_4^{25} = 2 \left[x \sqrt{x} \right]_4^{25},$$

also

$$(9.) \quad F = 2(125 - 8) = 234.$$

Fig. 14.



Aufgabe 4. In einer *Ellipse* mit der Gleichung

$$(10.) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

oder

$$(10 a.) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

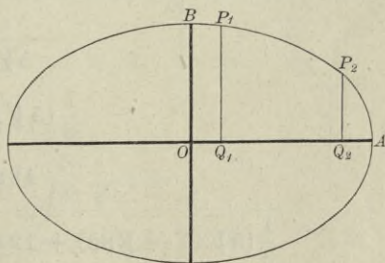
sind die Ordinaten $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$ gezogen (Fig. 15); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1 Q_2 P_2 P_1$ berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (10 a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu beachten braucht,

$$(11.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

$$= \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2} dx, *$$

Fig. 15.



folglich wird nach Formel Nr. 118 der Tabelle und mit Rücksicht auf Gleichung (10 a.)

*) In gleicher Weise wie bei den geometrischen Anwendungen der Differential-Rechnung sollen auch hier die Coordinaten eines Curvenpunktes P immer x und y , die eines Curvenpunktes P_1 immer x_1 und y_1 , allgemein die eines Curvenpunktes P_n immer x_n und y_n heissen.

$$(12.) \quad F = \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \left[\frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2},$$

oder

$$(13.) \quad F = \frac{1}{2} (x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{ab}{2} \left[\arcsin \left(\frac{x_2}{a} \right) - \arcsin \left(\frac{x_1}{a} \right) \right].$$

Es sei z. B.

$$a = 6, \quad b = 4, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 5,$$

also

$$y_1 = \frac{4}{6} \sqrt{36 - 1} = \frac{2}{3} \sqrt{35}, \quad y_2 = \frac{4}{6} \sqrt{36 - 25} = \frac{2}{3} \sqrt{11};$$

dann wird

$$F = \frac{1}{3} (5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12 \left[\arcsin \left(\frac{5}{6} \right) - \arcsin \left(\frac{1}{6} \right) \right].$$

Nun ist

$$\begin{array}{r} 5\sqrt{11} = \sqrt{275} = 16,583\ 123 \\ \quad \quad \quad \sqrt{35} = 5,916\ 080 \\ \hline 5\sqrt{11} - \sqrt{35} = 10,667\ 043, \\ \frac{1}{3} (5\sqrt{11} - \sqrt{35}) = 3,555\ 681 \\ \quad \quad \quad 12 \arcsin \left(\frac{5}{6} \right) = 11,821\ 327 \\ \hline \frac{1}{3} (5\sqrt{11} - \sqrt{35}) + 12 \arcsin \left(\frac{5}{6} \right) = 15,377\ 008 \\ \quad \quad \quad 12 \arcsin \left(\frac{1}{6} \right) = 2,009\ 377 \\ \hline F = 13,367\ 631. \end{array}$$

Aufgabe 4a. Man soll die ganze Fläche der *Ellipse* mit den Halbaxen a und b berechnen (Fig. 15).

Auflösung. Man erhält den Quadranten der Ellipse, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = a,$$

also

$$y_1 = b \quad \text{und} \quad y_2 = 0$$

setzt. Dies giebt

$$(14.) \quad F = \frac{ab}{2} \arcsin 1 = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Ellipse

$$(15.) \quad E = 4F = ab\pi.$$

Aufgabe 5. In einer *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(16.) \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

oder

$$(16a.) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

sind die Ordinaten Q_1P_1 und Q_2P_2 gezogen (Fig. 16); man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (16a.) folgt, da man nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen braucht,

$$(17.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{x^2 - a^2}.$$

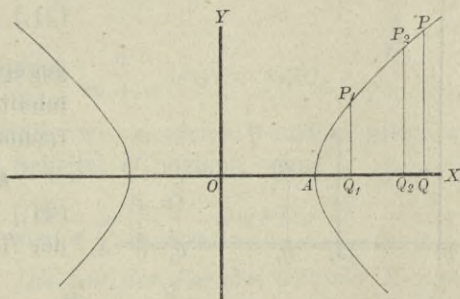
Deshalb wird nach Formel Nr. 124 a der Tabelle

$$(18.) \quad F = \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16 a.)

Fig. 16.



$$(19.) \quad F = \left[\frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2} (x_2 y_2 - x_1 y_1) - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1} \right).$$

Dabei ist $\ln \left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1} \right)$ aus $\ln \left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} \right) - \ln \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$ entstanden.

Für den besonderen Fall, wo x_1 gleich a und x_2 gleich x ist, wo also die gesuchte Fläche AQP im Scheitel der Hyperbel beginnt, wird

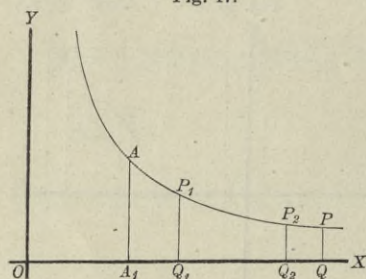
$$(20.) \quad F = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Aufgabe 6. Die *gleichseitige Hyperbel* ist durch die Gleichung

Fig. 17.

$$(21.) \quad xy = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1 Q_2 P_2 P_1$ berechnen (Fig. 17).



Auflösung. Aus Gleichung (21.) folgt nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{x_1}^{x_2},$$

also

$$(22.) \quad F = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

Setzt man x_1 gleich 1 und x_2 gleich x , so erhält man

$$(23.) \quad F = \ln x,$$

so dass der Flächeninhalt der ebenen Figur $A_1 Q P A$, in welcher OA_1 gleich 1 sein möge, die geometrische Deutung für die Function $\ln x$ giebt.

Aufgabe 7. Die *verallgemeinerte Parabel* ist durch die Gleichung

$$(24.) \quad y^n = 2px^m, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{\frac{m}{n}}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen (Fig. 18).

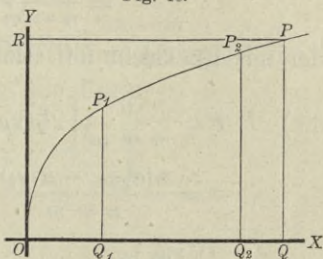
Auflösung. Aus Gleichung (24.) folgt nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(25.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \sqrt[n]{2p} \int_{x_1}^{x_2} x^{\frac{m}{n}} dx$$

$$= \sqrt[n]{2p} \left[\frac{nx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n}{m+n} \left[x \sqrt[n]{2p} \cdot x^{\frac{m}{n}} \right]_{x_1}^{x_2},$$

Fig. 18.



oder

$$(26.) \quad F = \frac{n}{m+n} [xy]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{m+n} (x_2y_2 - x_1y_1).$$

Für den besonderen Fall, wo x_1 gleich 0 und x_2 gleich x ist, wo also die Figur im Scheitel O beginnt, wird

$$(27.) \quad F = OQP = \frac{nxy}{m+n} = \frac{n}{m+n} OQPR.$$

Dies giebt den Satz: Die von der Parabel OP , der X -Achse und einer beliebigen Ordinate QP begrenzte Figur OQP verhält sich zu dem Rechtecke $OQPR$ mit den Seiten OQ gleich x und QP gleich y wie n zu $m+n$.

Aufgabe 8. Die verallgemeinerte Hyperbel ist durch die Gleichung

$$(28.) \quad x^m y^n = 2p, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{-\frac{m}{n}}$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 19 und 20) berechnen.

Auflösung. Es darf hier vorausgesetzt werden, dass die positiven ganzen Zahlen m und n von einander verschieden sind, weil der Fall, wo m gleich n , bereits durch Aufgabe 6

erledigt ist. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gleichung (28.) nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(29.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \sqrt[n]{2p} \int_{x_1}^{x_2} x^{-\frac{m}{n}} dx = \sqrt[n]{2p} \left[\frac{nx^{\frac{n-m}{n}}}{n-m} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n \sqrt[n]{2p}}{n-m} \left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}} \right),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (28.)

$$(30.) \quad F = \frac{n}{n-m} \left[x \sqrt[n]{2p} \cdot x^{-\frac{m}{n}} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{n}{n-m} [xy]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n(x_2 y_2 - x_1 y_1)}{n-m}.$$

Fig. 19.

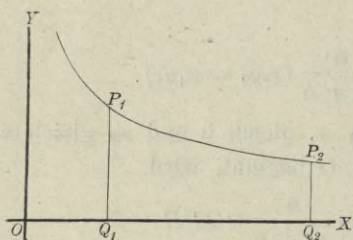
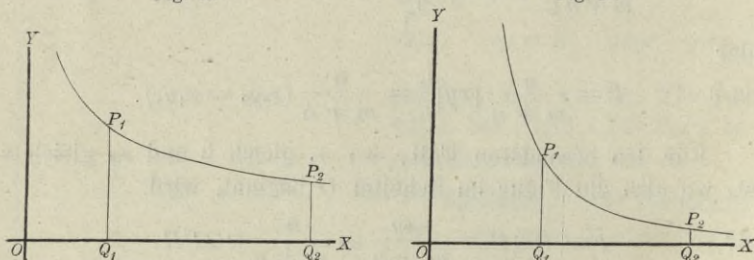


Fig. 20.



Bei dieser Aufgabe tritt ein bemerkenswerther Umstand ein, von dem später noch ausführlicher die Rede sein wird, wenn sich die Ordinate $Q_1 P_1$ der Y -Axe immer mehr nähert, wenn also

$$\lim x_1 = 0$$

wird. Die Y -Axe ist nämlich eine Asymptote der Curve, so dass sich in diesem Grenzfalle der Flächenstreifen in der Richtung der Y -Axe bis in's Unendliche erstreckt. Damit ist aber noch nicht gesagt, dass dann auch der Flächeninhalt der Figur unendlich gross wird; es wird sich vielmehr ergeben, dass derselbe einen *endlichen* Werth erhält, wenn $n > m$ ist (Fig. 19).

Dann wird nämlich in Gleichung (29.) der Exponent $\frac{n-m}{n}$ positiv, und deshalb

$$(31.) \quad \lim_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0,$$

so dass Gleichung (29.) in

$$(32.) \quad F = \frac{n \sqrt[n]{2p}}{n-m} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2 y_2}{n-m}$$

übergeht.

Ist dagegen $n < m$ (Fig. 20), so wird $\frac{n-m}{n}$ negativ, so dass man Gleichung (29.) besser auf die Form

$$(33.) \quad F = \frac{n \sqrt[n]{2p}}{m-n} \left(\frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} - \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}} \right)$$

bringen wird. Jetzt ist

$$(34.) \quad \lim_{x_1=0} x_1^{\frac{m-n}{n}} = 0,$$

also

$$(35.) \quad \lim_{x_1=0} F = \infty.$$

Eine ähnliche Betrachtung stellt sich ein, wenn man x_2 in's Unbegrenzte wachsen lässt. Dann erstreckt sich der Flächenstreifen in der Richtung der X-Axe bis in's Unendliche, und man erhält in dem ersten Falle, wo

$$n > m, \quad \frac{n-m}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \infty$$

ist, aus Gleichung (29.)

$$(36.) \quad \lim_{x_2=\infty} F = \infty.$$

In dem zweiten Falle dagegen, wo

$$n < m, \quad \frac{m-n}{n} > 0, \quad \lim_{x_2=\infty} \frac{1}{x_2^{\frac{m-n}{n}}} = 0$$

ist, findet man aus Gleichung (33.)

$$(37.) \quad \lim_{x_2=\infty} F = \frac{n \sqrt[n]{2p}}{m-n} \cdot \frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{nx_1 y_1}{m-n}.$$

Bei der in Aufgabe 6 behandelten gewöhnlichen gleichseitigen Hyperbel wird der Flächeninhalt der Figur unendlich gross, wenn die Ordinate Q_1P_1 mit der Y -Axe zusammenfällt, und ebenso auch, wenn die Ordinate Q_2P_2 in's Unendliche rückt, weil in Gleichung (22.)

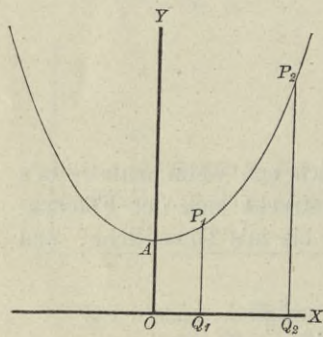
$$\lim_{x_1=0} \ln x_1 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x_2=\infty} \ln x_2 = \infty.$$

Aufgabe 9. Die *Kettenlinie* ist durch die Gleichung

$$(38.) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(\frac{x}{a} \right)$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 21) berechnen.

Fig. 21.



Auflösung. Aus Gleichung (38.) folgt nach Formel Nr. 11 oder Nr. 19 der Tabelle

$$(39.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx \\ = \frac{a}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(\frac{x}{a} \right) dx \\ = \frac{a^2}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right]_{x_1}^{x_2} = a^2 \left[\mathfrak{S} \mathfrak{in} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Nun ergibt sich aber, wie auf Seite 384 der D.-R. gezeigt wurde, aus Gleichung (38.)

$$(40.) \quad \pm \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \mathfrak{S} \mathfrak{in} \left(\frac{x}{a} \right),$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, jenachdem x positiv oder negativ ist. Sind also x_1 und x_2 beide positiv, so geht Gleichung (39.) über in

$$(41.) \quad F = a \left[\sqrt{y^2 - a^2} \right]_{x_1}^{x_2} = a \left(\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2} \right).$$

Wäre x_1 negativ, so würde man erhalten

$$(42.) \quad F = a \left(\sqrt{y_2^2 - a^2} + \sqrt{y_1^2 - a^2} \right).$$

Wird x_1 gleich 0 und x_2 gleich x (Fig. 22), so ist der Flächeninhalt der Figur $OQPA$ gleich

$$(43.) \quad F = a\sqrt{y^2 - a^2}$$

und lässt sich auch sehr leicht als Rechteck darstellen. Beschreibt man nämlich um den Punkt A mit dem Halbmesser y einen Kreisbogen, welcher die X -Axe im Punkte B schneidet, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz

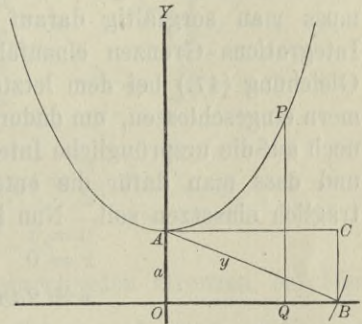
$$(44.) \quad OB = \sqrt{y^2 - a^2},$$

also Rechteck

$$OBCA = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

Daraus erkennt man auch, wie man die Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 21) in ein Rechteck verwandeln kann, bei dem wieder $OA = a$ die eine Seite und $\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}$ die andere Seite ist.

Fig. 22.

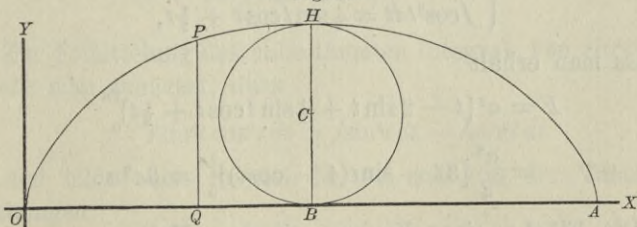


Aufgabe 10. Die *Cykloide* ist durch die Gleichungen

$$(45.) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche von einem ganzen Bogen OHA der *Cykloide* und von der X -Axe begrenzt wird (Fig. 23).

Fig. 23.



Auflösung. Sind x und y als Functionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so wird es bei der Quadratur der Curven (und ebenso bei den übrigen Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Geometrie) im Allgemeinen zweckmässig sein, diese

Grösse t als neue Integrations-Veränderliche einzuführen. In der vorliegenden Aufgabe bildet man daher zunächst

$$(46.) \quad dx = a(1 - \cos t)dt,$$

also, da OA gleich dem Umfange $2a\pi$ des rollenden Kreises ist,

$$(47.) \quad F = \int_0^{2a\pi} y dx = a^2 \int_{(0)}^{(2a\pi)} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt.$$

Bei Einführung einer neuen Integrations-Veränderlichen muss man sorgfältig darauf achten, dass dabei auch andere Integrations-Grenzen einzuführen sind. Deshalb sind auch in Gleichung (47.) bei dem letzten Integral die Grenzen in Klammern eingeschlossen, um dadurch anzudeuten, dass sich dieselben noch auf die ursprüngliche Integrations-Veränderliche x beziehen, und dass man dafür die entsprechenden Werthe von t nachträglich einsetzen soll. Nun ist

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{für} \quad t = 0, \\ x = 2a\pi & \quad \text{„} \quad t = 2\pi, \end{aligned}$$

folglich geht Gleichung (47.) über in

$$(48.) \quad F = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt.$$

Nach den Formeln Nr. 10, 13 und 98 der Tabelle ist

$$(49.) \quad \begin{cases} \int dt = t, & \int \cos t dt = \sin t, \\ \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t, \end{cases}$$

so dass man erhält

$$(50.) \quad \begin{aligned} F &= a^2 \left[t - 2 \sin t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2} [3t - \sin t(4 - \cos t)]_0^{2\pi} = 3a^2\pi. \end{aligned}$$

Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser a ist bekanntlich gleich $a^2\pi$, folglich ist nach Gleichung (50.) die von der Cykloide und der X-Axe begrenzte Fläche dreimal so gross wie die Fläche des erzeugenden Kreises (Fig. 23).

Aufgabe 11. Die *Astroide* sei durch die Gleichungen

$$(51.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

gegeben (Fig. 24); man soll die von ihr eingeschlossene Fläche berechnen.

Auflösung. Um zunächst den Flächeninhalt des Quadranten OAB zu berechnen, muss man in der allgemeinen Formel für x die Grenzen 0 und a einsetzen. Da nun

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \quad \text{„} \quad t = 0$$

wird, so sind $\frac{\pi}{2}$ und 0 die entsprechenden Grenzen bei Einführung der Integrations-Veränderlichen t . Deshalb erhält man

$$(52.) \quad dx = -3a \cos^2 t \sin t dt,$$

$$(53.) \quad \begin{aligned} F &= \int_0^a y dx = -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos^2 t \sin t dt \\ &= +3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung des unbestimmten Integrals von $\sin^4 t \cos^2 t dt$ beachte man zunächst, dass

$$(54.) \quad \int \sin^4 t \cos^2 t dt = \int \sin^4 t dt - \int \sin^6 t dt$$

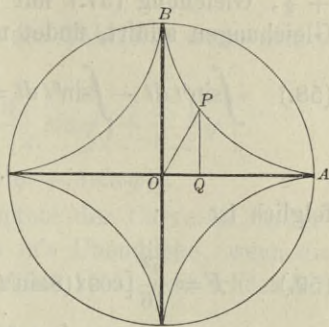
ist, und bilde nach Formel Nr. 99 und 103 der Tabelle die Gleichungen

$$(55.) \quad \int \sin^6 t dt = -\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t + \frac{5}{6} \int \sin^4 t dt,$$

$$(56.) \quad \int \sin^4 t dt = -\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t + \frac{3}{4} \int \sin^2 t dt,$$

$$(57.) \quad \int \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t.$$

Fig. 24.



Indem man Gleichung (55.) mit -1 , Gleichung (56.) mit $+\frac{1}{6}$, Gleichung (57.) mit $+\frac{1}{8}$ multiplicirt und dann alle drei Gleichungen addirt, findet man

$$(58.) \quad \int \sin^4 t \, dt - \int \sin^6 t \, dt = \frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \frac{1}{24} \sin^3 t \cos t \\ - \frac{1}{16} \sin t \cos t + \frac{1}{16} t;$$

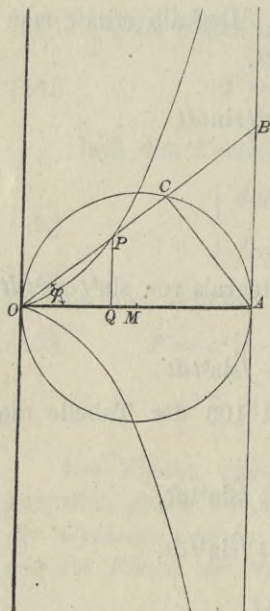
folglich ist

$$(59.) \quad F = \frac{a^2}{16} [\cos t (8 \sin^5 t - 2 \sin^3 t - 3 \sin t) + 3t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{a^2}{16} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Astroide ist daher

$$(60.) \quad 4F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Fig. 25.



Dies giebt den Satz: *Der Flächeninhalt der Astroide verhält sich zu dem Flächeninhalte des umschriebenen Kreises wie 3 zu 8.*

Aufgabe 12. Die *Cissoide des Diocles* ist durch die Gleichungen

$$(61.) \quad x = 2a \sin^2 \varphi, \quad y = 2a \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$$

gegeben (D.-R., Seite 555); man soll den Flächeninhalt der Figur OQP (Fig. 25) berechnen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (61.) folgt

$$x = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0, \\ x = 2a \quad \text{„} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$(62.) \quad dx = 4a \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi,$$

oder

$$(63.) \quad F = \int_0^x y dx = 8a^2 \int_0^{\varphi} \sin^4 \varphi d\varphi,$$

folglich wird nach Formel Nr. 104 der Tabelle, wenn man n gleich 2 setzt,

$$(64.) \quad F = 8a^2 \left[-\cos \varphi \left(\frac{1}{4} \sin^3 \varphi + \frac{3}{4 \cdot 2} \sin \varphi \right) + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \varphi \right]_0^{\varphi} \\ = a^2 [3\varphi - \cos \varphi (2\sin^3 \varphi + 3\sin \varphi)].$$

Da die Gerade AB eine Asymptote der Curve ist, so erstreckt sich der Flächenstreifen bis in's Unendliche, wenn die Ordinate QP der Asymptote immer näher rückt und schliesslich mit ihr zusammenfällt, wenn also

$$(65.) \quad \lim x = 2a, \quad \text{oder} \quad \lim \varphi = \frac{\pi}{2}$$

wird. Der Flächeninhalt der Figur bleibt aber endlich, da man aus Gleichung (64.)

$$(66.) \quad \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} F = \frac{3a^2\pi}{2}$$

erhält. Die Curve liegt zur X-Axe symmetrisch; deshalb wird der Flächeninhalt der Figur, welche von der ganzen Cissoide und der Asymptote begrenzt ist, gleich

$$3a^2\pi.$$

Aufgabe 13. Es ist die Gleichung

$$(67.) \quad y = \frac{1}{12}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

gegeben; man soll $\int_a^b y dx$ berechnen.

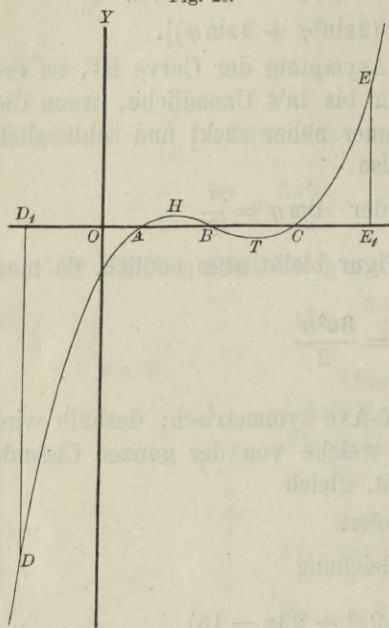
Auflösung. Nach Formel Nr. 9 der Tabelle wird

$$(68.) \quad F = \int_a^b y dx = \frac{1}{12} \int_a^b (x^3 - 9x^2 + 23x - 15) dx \\ = \frac{1}{12} \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 23 \frac{x^2}{2} - 15x \right]_a^b \\ = \frac{1}{48} (b^4 - 12b^3 + 46b^2 - 60b - a^4 + 12a^3 - 46a^2 + 60a).$$

Will man sich über die Bedeutung dieses Resultates Rechenschaft geben, so muss man beachten, dass die der Gleichung (67.), oder der Gleichung

$$(67 \text{ a.}) \quad y = \frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-5)$$

Fig. 26.



entsprechende Curve die X-Axe in den Punkten A, B, C mit den Abscissen

$$OA = 1, \quad OB = 3, \\ OC = 5$$

schneidet. Setzt man daher z. B.

$$a = -2, \quad b = +1,$$

so erhält man

$$(69.) \quad D_1AD = \int_{-2}^{+1} y dx \\ = \frac{1}{48}(-25 - 416) \\ = -\frac{147}{16}.$$

Der Ausdruck ist *negativ*, weil die Figur D_1AD *unterhalb* der X-Axe liegt. Ferner wird der Flächeninhalt der Figur

$$(70.) \quad ABH = \int_{+1}^{+3} y dx = \frac{1}{48}(-9 + 25) = \frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck *positiv*, weil die Figur ABH *oberhalb* der X-Axe liegt. Indem man a gleich 3 und b gleich 5 setzt, findet man den Flächeninhalt der Figur

$$(71.) \quad BCT = \int_3^5 y dx = \frac{1}{48}(-25 + 9) = -\frac{1}{3},$$

und zwar ist dieser Ausdruck wieder *negativ*, weil die Figur

unterhalb der X-Axe liegt. Endlich ist der Flächeninhalt der Figur

$$(72.) \quad CE_1E = \int_5^7 y dx = \frac{1}{48} (119 + 25) = + 3.$$

Dieser Ausdruck ist *positiv*, weil die Figur *oberhalb* der X-Axe liegt. Demnach ist

$$(73.) \quad \int_{-2}^{+7} y dx = \frac{1}{48} (119 - 416) = - \frac{99}{16}$$

und kann geometrisch gedeutet werden durch die Summe der Figuren

$$D_1AD, ABH, BCT \text{ und } CE_1E,$$

wobei aber die erste und dritte mit *negativem*, die zweite und vierte mit *positivem* Vorzeichen zu nehmen sind.

Dies giebt in Uebereinstimmung mit der auf Seite 16 ausgeführten Untersuchung den Satz: *Wenn man den Flächeninhalt einer ebenen Figur zwischen einer Curve $y = f(x)$, der Abscissen-Axe und zwei beliebigen Ordinaten durch Integration berechnet, so sind die Flächenstücke über der Abscissen-Axe mit positivem, und die Flächenstücke unter der Abscissen-Axe mit negativem Vorzeichen berücksichtigt.*

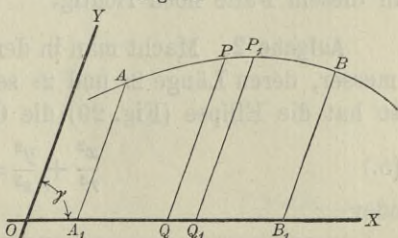
§ 20.

Quadratur der Curven bei Anwendung schiefwinkliger Coordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 127.)

Fig. 27.

Ist die Gleichung einer Curve für *schiefwinklige* Coordinaten gegeben, und bezeichnet man den Winkel, welchen die positiven Richtungen der Coordinaten-Axen mit einander bilden, durch γ ,



so wird der Flächeninhalt eines Streifens QQ_1P_1P (Fig. 27), wenn man ihn unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als Parallelogramm betrachtet,

$$(1.) \quad QQ_1P_1P = ydx \cdot \sin \gamma,$$

also

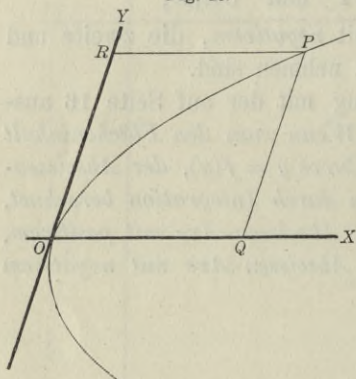
$$(2.) \quad A_1B_1BA = \sin \gamma \int_a^b y dx.$$

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$(3.) \quad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

Fig. 28.



stellt auch für schiefwinklige Coordinaten eine *Parabel* dar, wobei die *Y-Axe* eine beliebige Tangente ist, und die *X-Axe* durch den Berührungspunkt parallel zur *Axe* der Parabel läuft (Fig. 28); man soll den Flächeninhalt der Figur OQP berechnen.

Auflösung. Hier ist nach Gleichung (2.)

$$(4.) \quad F = \sin \gamma \cdot \int_0^x \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} dx = \sin \gamma \cdot \sqrt{2p} \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^x = \frac{2xy}{3} \sin \gamma.$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OQPR$ ist gleich $xy \sin \gamma$, folglich bleibt der auf Seite 104 angeführte Satz auch in diesem Falle noch richtig.

Aufgabe 2. Macht man in der Ellipse zwei conjugirte Durchmesser, deren Länge $2r$ und $2s$ sein möge, zu Coordinaten-Axen, so hat die Ellipse (Fig. 29) die Gleichung

$$(5.) \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1,$$

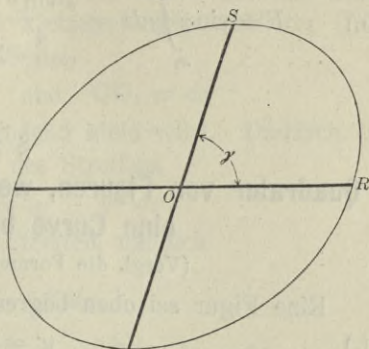
oder

$$y = \pm \frac{s}{r} \sqrt{r^2 - x^2};$$

man soll den Flächeninhalt der Ellipse berechnen.

Auflösung. Hier ist nach Gleichung (2.) mit Rücksicht auf Formel Nr. 118 der Tabelle

Fig. 29.



$$F = 4 \sin \gamma \int_0^r y dx = \frac{4s \cdot \sin \gamma}{r} \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{4s \cdot \sin \gamma}{r} \left[\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) \right]_0^r,$$

oder

$$(6.) \quad F = rs \pi \sin \gamma.$$

Da der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbaxen a und b , wie schon in Aufgabe 4a des vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, gleich $ab\pi$ ist, so folgt hieraus die wichtige Formel

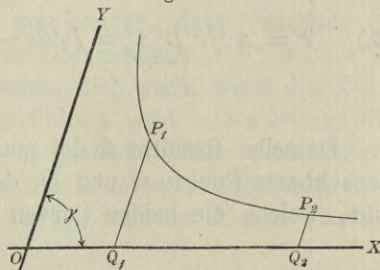
$$(7.) \quad rs \cdot \sin \gamma = ab.$$

Aufgabe 3. Die Gleichung einer Hyperbel ist, wenn man die Asymptoten zu Coordinaten-Axen macht,

$$(8.) \quad 4xy = e^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{e^2}{4} \cdot \frac{1}{x};$$

man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ (Fig. 30) berechnen.

Fig. 30.



Auflösung. Aus Gleichung (2.) folgt in diesem Falle mit Rücksicht auf Formel Nr. 12 der Tabelle

$$(9.) \quad F = \sin \gamma \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{e^2 \sin \gamma}{4} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \frac{e^2 \sin \gamma}{4} \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

§ 21.

Quadratur von Figuren, welche oben und unten durch eine Curve begrenzt sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 128.)

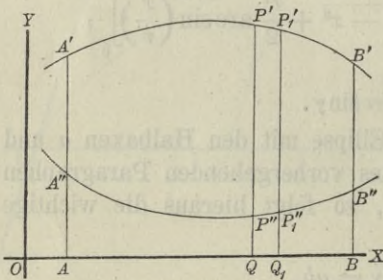
Eine Figur sei oben begrenzt durch die Curve (Fig. 31)

$$(1.) \quad y' = f(x),$$

unten durch die Curve

$$(2.) \quad y'' = g(x),$$

Fig. 31.



links und rechts durch die Ordinaten $A''A'$ und $B''B'$ mit den Gleichungen

$$(3.) \quad x = a \quad \text{und} \quad x = b.$$

Man kann dann den Flächeninhalt der Figur $A''B''B'A'$ berechnen, indem man zuerst den Flächeninhalt der Figur

$$(4.) \quad ABB'A' = \int_a^b y' dx$$

berechnet und davon den Flächeninhalt der Figur

$$(5.) \quad ABB''A'' = \int_a^b y'' dx$$

abzieht. Dadurch erhält man

$$(6.) \quad F = A''B''B'A' = \int_a^b y' dx - \int_a^b y'' dx = \int_a^b (y' - y'') dx.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man durch zwei benachbarte Punkte Q und Q_1 der X -Axe Parallele zur Y -Axe legt, welche die beiden Curven bezw. in den Punkten P', P_1'

und P'' , P''_1 treffen. Den Streifen $P''P'_1P'_1P'$ darf man unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als ein Rechteck mit den Seiten

$$P''P' = y' - y'' \quad \text{und} \quad QQ_1 = dx$$

betrachten, wenn QQ_1 verschwindend klein wird. Dadurch erhält man für den Flächeninhalt des Streifens

$$P''P''_1P'_1P' = (y' - y'')dx,$$

so dass die Summe aller dieser Streifen, nämlich

$$F = \int_a^b (y' - y'')dx,$$

den Flächeninhalt der ganzen Figur $A''B''B'A'$ giebt.

Dabei ist zunächst stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Curvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ beide über der X-Axe liegen. Das Resultat

bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Liegt z. B. der eine Bogen $A''B''$ unter der X-Axe (Fig. 32), so hat, wie schon früher hervor-

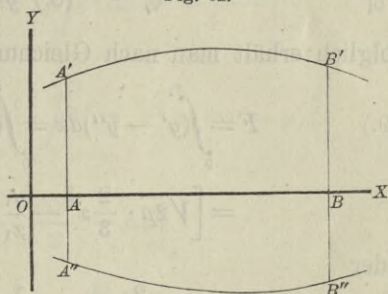
gehoben wurde, $\int_a^b y'' dx$ einen negativen Werth, so dass

$$\int_a^b y' dx - \int_a^b y'' dx = \int_a^b (y' - y'') dx$$

die Summe der beiden Flächenstücke $ABB'A'$ und $A''B''BA$ giebt.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass Gleichung (6.) noch richtig bleibt, wenn beide Curvenbögen $A'B'$ und $A''B''$ unter der X-Axe liegen, und schliesslich auch, wenn die X-Axe von den Begrenzungscurven geschnitten wird. Den letzten Fall kann man dadurch auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, dass man die Figur in mehrere Theile zerlegt, indem man durch die Schnittpunkte der beiden Curven mit der X-Axe Parallele

Fig. 32.



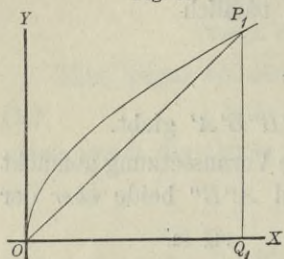
zu der Y -Axe zieht. Für jeden einzelnen Theil gelten dann die früheren Voraussetzungen.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Von einer Parabel mit der Gleichung

$$(7.) \quad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \pm \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

Fig. 33.



ist durch die Sehne OP_1 (Fig. 33) das Segment über OP_1 abgeschnitten; man soll den Flächeninhalt dieses Segmentes berechnen.

Auflösung. Die Gleichungen der beiden begrenzenden Curven sind in diesem Falle

$$(8.) \quad y' = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{y_1}{x_1} x,$$

folglich erhält man nach Gleichung (6.)

$$(9.) \quad F = \int_0^{x_1} (y' - y'') dx = \int_0^{x_1} \left(\sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{y_1}{x_1} x \right) dx$$

$$= \left[\sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{y_1}{x_1} \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_1},$$

oder

$$(10.) \quad F = \frac{2}{3} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_1 = \frac{x_1 y_1}{6}.$$

Das Segment über OP_1 ist also dreimal kleiner als das zugehörige Dreieck OQ_1P_1 .

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man von der Fläche OQ_1P_1 , deren Inhalt nach Aufgabe 2 in § 19 gleich $\frac{2}{3} x_1 y_1$ ist, den Flächeninhalt des Dreiecks OQ_1P_1 , nämlich $\frac{1}{2} x_1 y_1$, abzieht.

Aufgabe 2. Von der Parabel mit der Gleichung

$$(11.) \quad y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y' = \pm \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

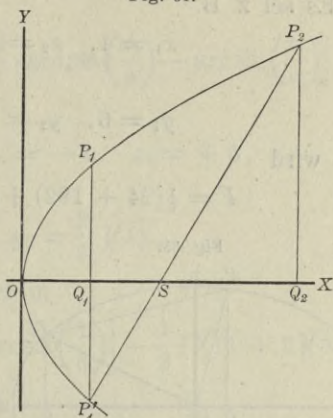
ist durch eine Gerade P'_1P_2 mit der Gleichung

$$(12.) \quad y'' = mx + \mu$$

ein Segment $P_1'OP_2$ abgeschnitten (Fig. 34); man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

Auflösung. In dem vorliegenden Falle, wo der Punkt P_1' unter der X-Axe liegen möge, muss man die Figur durch die Gerade $P_1'P_1$, welche der Y-Axe parallel ist, in zwei Theile zerlegen und erhält

Fig. 34.



$$(13.) \quad P_1'P_1O = \int_0^{x_1} 2y' dx = 2\sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4x_1 y_1}{3},$$

$$(14.) \quad P_1'P_2P_1 = \int_{x_1}^{x_2} (y' - y_1') dx = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} - mx - \mu) dx$$

$$= \left[\sqrt{2p} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{mx^2}{2} - \mu x \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{2}{3} (x_2 y_2 - x_1 y_1) - \frac{m}{2} (x_2^2 - x_1^2) - \mu (x_2 - x_1).$$

Dabei ist aber bekanntlich

$$(15.) \quad \begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1'}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}, \\ \mu = \frac{x_2 y_1' - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = -\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 - x_1}, \end{cases}$$

folglich wird, wenn man noch die Gleichungen (13.) und (14.) addirt,

$$(16.) \quad F = \frac{2}{3} (x_1 y_1 + x_2 y_2) - \frac{1}{2} (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$= \frac{1}{6} (x_1 y_1 + x_2 y_2) + \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Es sei z. B.

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 16, \quad 2p = 9,$$

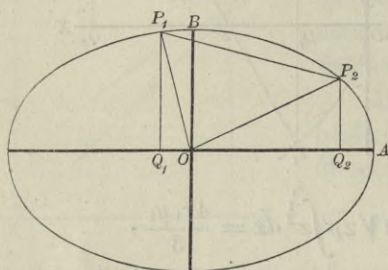
also

$$y_1 = 6, \quad y_2 = 12,$$

dann wird

$$(17.) \quad F = \frac{1}{6}(24 + 192) + \frac{1}{2}(48 + 96) = 108.$$

Fig. 35.



Aufgabe 3. Die Gerade

$$(18.) \quad y'' = mx + \mu$$

schneide von der Ellipse

$$(19.) \quad y' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ein Segment P_1P_2B (Fig. 35) ab; man soll den Flächeninhalt des Segmentes berechnen.

Auflösung. Nach Gleichung (6.) wird in diesem Falle

$$(20.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} (y' - y'') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - mx - \mu \right) dx$$

$$= \left[\frac{b}{a} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right\} - \frac{mx^2}{2} - \mu x \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[xy - mx^2 - 2\mu x + ab \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x_2 y_2 - x_1 y_1) - m(x_2^2 - x_1^2) - 2\mu(x_2 - x_1) + ab \arcsin \left(\frac{x_2}{a} \right) - ab \arcsin \left(\frac{x_1}{a} \right) \right].$$

Nun ist aber bekanntlich

$$(21.) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \mu = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

folglich wird

$$(22.) \quad m(x_2^2 - x_1^2) + 2\mu(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + 2(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

$$= (x_2 y_2 - x_1 y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Dies giebt

$$(23.) \quad F = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{ab}{2} \left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right) \right].$$

Es sei z. B.

$$(24.) \quad a = 6, \quad b = 4, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = +5,$$

also

$$(25.) \quad y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{35}, \quad y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{11},$$

dann geht Gleichung (23.) über in

$$(26.) \quad F = 12 \left[\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) \right] - \frac{1}{3}(\sqrt{11} + 5\sqrt{35}).$$

Dabei ist

$$12 \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11,821\,327, \quad \sqrt{11} = 3,327\,708,$$

$$12 \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2,009\,377, \quad 5\sqrt{35} = 29,580\,399,$$

also

$$(27.) \quad F = 13,830\,704 - \frac{1}{3} \cdot 32,908\,107 = 2,861\,335.$$

Verbindet man den Nullpunkt O mit den Punkten P_1 und P_2 (Fig. 35), so erhält man ein Dreieck OP_2P_1 mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$. Wenn man daher dieses Dreieck zu dem Segmente über der Sehne P_1P_2 hinzufügt, so ergibt sich nach Gleichung (23.) für den Sector P_1OP_2 der Flächeninhalt

$$(28.) \quad \text{Sector} = \frac{ab}{2} \left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right) \right].$$

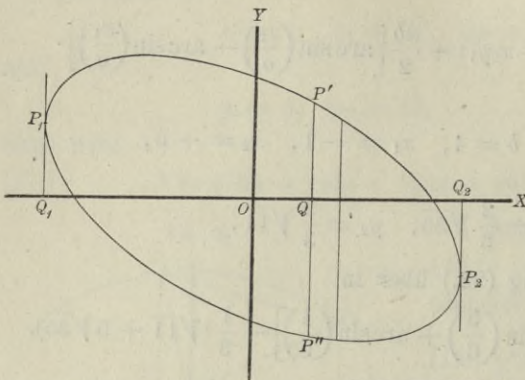
Aufgabe 4. Eine *Ellipse* sei durch die Gleichung

$$(29.) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

gegeben; man soll den Flächeninhalt derselben berechnen.

Auflösung. Der Anfangspunkt der Coordinaten liegt im Mittelpunkte der Curve, aber die Coordinaten-Axen fallen nicht mit den Axen der Ellipse zusammen (Fig. 36). Damit

Fig. 36.



die Gleichung eine reelle Ellipse darstellt, müssen die Ungleichungen

$$(30.) \begin{cases} a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ a_{22} a_{33} < 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Aus Gleichung (29.) folgt dann

$$a_{22}y' = -a_{12}x + \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$

$$a_{22}y'' = -a_{12}x - \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}},$$

also

$$(31.) \quad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}} \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 - a_{22}a_{33}}.$$

Nach den in den Ungleichungen (30.) ausgesprochenen Voraussetzungen kann man zwei reelle Grössen c und k durch die Gleichungen

$$(32.) \quad c = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad k = \sqrt{-\frac{a_{22}a_{33}}{c^2}}$$

erklären, so dass Gleichung (31.) übergeht in

$$(33.) \quad y' - y'' = \frac{2}{a_{22}} \sqrt{-c^2x^2 + k^2c^2} = \frac{2c}{a_{22}} \sqrt{k^2 - x^2};$$

folglich wird

$$(34.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} (y' - y'') dx = \frac{2c}{a_{22}} \int_{(x_1)}^{(x_2)} dx \sqrt{k^2 - x^2}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen beachte man, dass $(y' - y'')dx$ einer der Streifen ist, in welche man sich die ganze Fläche zerlegt denken muss. Die durch die Integration ausgeführte Summation aller dieser Streifen beginnt in demjenigen Punkte P_1 und endigt in demjenigen Punkte P_2 , in welchem der Punkt P' mit dem Punkte P'' zusammenfällt, so dass die Tangenten in den Punkten P_1 und P_2 zur Y -Axe parallel sind. Die Werthe von x_1 und x_2 findet man daher, indem man

$$y' - y'' = \frac{2c}{a_{22}} \sqrt{k^2 - x^2}$$

gleich 0 setzt. Daraus ergibt sich

$$(35.) \quad x_1 = -k \quad \text{und} \quad x_2 = +k,$$

$$(36.) \quad F = \frac{2c}{a_{22}} \int_{-k}^{+k} dx \sqrt{k^2 - x^2},$$

also nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$(37.) \quad F = \frac{2c}{a_{22}} \left[\frac{x}{2} \sqrt{k^2 - x^2} + \frac{k^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{k} \right) \right]_{-k}^{+k} \\ = \frac{k^2 c}{a_{22}} [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \frac{k^2 c \pi}{a_{22}},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (32.)

$$(38.) \quad F = - \frac{a_{22} a_{33} \pi}{a_{22} c} = - \frac{a_{33} \pi}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}.$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man die Halbaxen a und b bestimmt und in die Formel

$$F = ab\pi$$

einsetzt, denn es ist bekanntlich

$$(39.) \quad a = \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}}, \\ b = \sqrt{\frac{-2a_{33}}{a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}},$$

also

$$(40.) \quad ab = \frac{-2a_{33}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11} - a_{22})^2 - 4a_{12}^2}} \\ = \frac{-a_{33}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}.$$

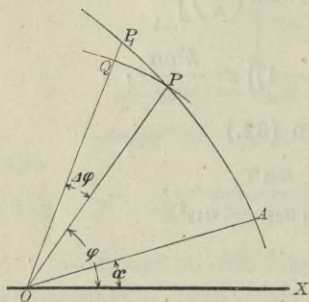
§ 22.

Quadratur der Curven bei Anwendung von Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 129.)

Bei Anwendung von Polarcoordinaten mögen die Coordinaten eines Punktes P immer mit r und φ , die eines Punktes P_1 mit r_1 und φ_1 , allgemein die eines Punktes P_n mit r_n und φ_n bezeichnet werden. Nennt man den Flächeninhalt einer Figur AOP , welche durch zwei beliebige Radii vectores OA , OP und durch den Curvenbogen AP begrenzt wird (Fig. 37), S (Sector), so ist S eine Function von φ . Den kleinen Zuwachs

Fig. 37.



$$(1.) \quad \Delta S = POP_1,$$

welchen diese Function erleidet, wenn der Winkel XOP gleich φ um die kleine Grösse POP_1 gleich $\Delta\varphi$ zunimmt, findet man, indem man den Bogen PP_1 durch die Gerade PP_1 ersetzt und zunächst den Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks POP_1 berechnet. Für diesen erhält man

$$(2.) \quad \Delta POP_1 = \frac{1}{2} OP \cdot OP_1 \sin(\Delta\varphi) = \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi} \Delta\varphi.$$

Der Unterschied zwischen dem Curvensector POP_1 und dem Dreieck POP_1 ist ein Segment über der Sehne PP_1 , das eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung wird und deshalb vernachlässigt werden darf, wenn $\Delta\varphi$ verschwindend klein wird. Dann gehen auch die Grössen QP_1 gleich Δr und ΔS bzw. in die verschwindend kleinen Grössen dr und dS über, und man erhält

$$(3.) \quad \lim_{\Delta\varphi=0} (r + \Delta r) = r, \quad \lim_{\Delta\varphi=0} \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi} = 1,$$

also

$$(4.) \quad dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

und

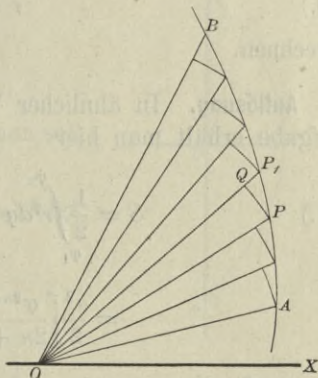
$$(5.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

wobei $\sphericalangle XO A = \alpha$ und $\sphericalangle XOP = \varphi$ gesetzt ist.

Gewöhnlich wird bei den Anwendungen auch die obere Grenze φ einen constanten Werth β haben, welcher dem *Radius vector* OB (Fig. 38) entspricht.

Auch dieses Integral kann als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen betrachtet werden. Theilt man nämlich den Winkel AOB in n (gleiche oder ungleiche) Theile, so wird auch der Sector AOB in n Theile zerlegt (Fig. 38), von denen man jeden einzelnen POP_1 unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung, nämlich unter Vernachlässigung der Dreiecke PQP_1 , als einen Kreissector mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ betrachten kann. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass die Anzahl n der Sektoren unendlich gross wird, und dass die einzelnen Sektoren gleichzeitig sämmtlich unendlich klein werden.

Fig. 38.



Durch Summirung aller dieser unendlich kleinen Sektoren findet man für den Flächeninhalt des ganzen Sectors

$$(6.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

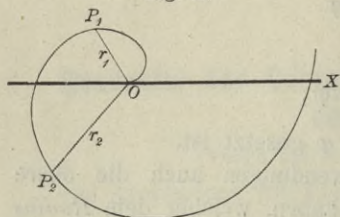
Uebungs - Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Flächeninhalt des Sectors P_1OP_2 bei der *Archimedischen Spirale*

$$(7.) \quad r = a\varphi$$

berechnen (Fig. 39).

Fig. 39.



Auflösung. Nach Gleichung (6.) ist in diesem Falle

$$(8.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi \\ = \frac{a^2}{6} [\varphi^3]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{6a} (a^3 \varphi_2^3 - a^3 \varphi_1^3),$$

also

$$(9.) \quad S = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}.$$

Aufgabe 2. Man soll den Flächeninhalt des Sectors P_1OP_2 bei der *allgemeinen Spirale*

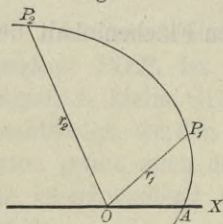
$$(10.) \quad r = a\varphi^n$$

berechnen.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe erhält man hier

$$(11.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^{2n} d\varphi \\ = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\varphi^{2n+1}}{2n+1} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2 (\varphi_2^{2n+1} - \varphi_1^{2n+1})}{2(2n+1)}.$$

Fig. 40.



Aufgabe 3. Man soll den Flächeninhalt des Sectors P_1OP_2 bei der *logarithmischen Spirale*

$$(12.) \quad r = e^{a\varphi}$$

berechnen (Fig. 40).

Auflösung. Aus Gleichung (6.) erhält man in diesem Falle

$$(13.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{4a} \int_{(\varphi_1)}^{(\varphi_2)} e^{2a\varphi} d(2a\varphi) = \frac{1}{4a} [e^{2a\varphi}]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

also

$$(14.) \quad S = \frac{1}{4a} (e^{2a\varphi_2} - e^{2a\varphi_1}) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}.$$

Aufgabe 4. Die Gleichung

$$(15.) \quad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$(15a.) \quad r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

stellt eine *Parabel* dar (Fig. 41); man soll das Segment *BCA* berechnen.**Auflösung.** Aus Gleichung (15a.) folgt in diesem Falle

$$(16.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

oder, wenn man

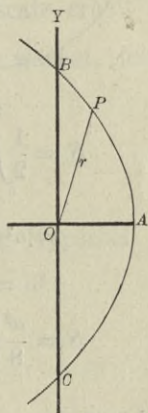
$$\varphi = 2t$$

setzt und Formel Nr. 63 der Tabelle berücksichtigt,

$$(17.) \quad S = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^4 t} = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg}^2 t) d(\operatorname{tg} t)$$

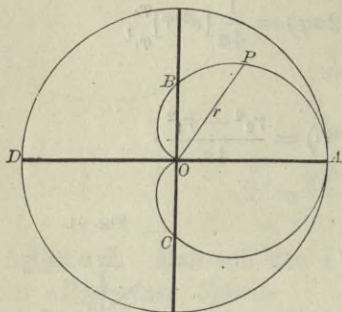
$$= a^2 \left[\operatorname{tg} t + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = a^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) = \frac{8a^2}{3}.$$

Fig. 41.



Aufgabe 5. Man soll den Flächeninhalt der *Cardioide* mit der Gleichung

Fig. 42.



$$(18.) \quad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

$$(18a.) \quad r = a \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

berechnen (Fig. 42).

Auflösung. Setzt man

$$\varphi = 2t,$$

so wird zunächst mit Rücksicht auf Formel Nr. 101 der Tabelle

$$(19.) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi} \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = a^2 \int_0^t \cos^4 t dt$$

$$= a^2 \left[\frac{1}{4} \cos^3 t \sin t + \frac{3}{8} \cos t \sin t + \frac{3}{8} t \right]_0^t,$$

also

$$(20.) \quad S = \frac{a^2}{8} \left[2 \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \frac{\varphi}{2} \right].$$

Lässt man φ bis π , also $\frac{\varphi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so wird

$$(21.) \quad S = \frac{3a^2\pi}{16}$$

die Hälfte des gesuchten Flächeninhalts, für welchen man daher

$$(22.) \quad F = \frac{3a^2\pi}{8}$$

erhält. Der Flächeninhalt der *Cardioide* verhält sich also zum Flächeninhalt des *Kreises* mit dem Halbmesser a wie 3 zu 8.

Aufgabe 6. Man soll den Flächeninhalt der *Lemniscate* berechnen (Fig. 43).

Auflösung. Die Gleichung der Lemniscate ist

$$(23.) \quad r^2 = a^2 \cos(2\varphi),$$

folglich wird

$$(24.) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi} \cos(2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{(0)}^{(\varphi)} \cos(2\varphi) d(2\varphi) \\ = \frac{a^2}{4} [\sin(2\varphi)]_0^{\varphi} = \frac{a^2}{4} \sin(2\varphi).$$

Den vierten Theil (Quadranten) der Lemniscate erhält man, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$, also 2φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, folglich wird der Flächeninhalt der ganzen Lemniscate

$$(25.) \quad F = a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2.$$

Aufgabe 7. Man soll den Sector AOP der Hyperbel

$$(26.) \quad x^2 - y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad r^2 \cos(2\varphi) = a^2$$

berechnen (Fig. 44).

Auflösung. In diesem Falle wird

$$(26a.) \quad r^2 = \frac{a^2}{\cos(2\varphi)},$$

also

$$(27.) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi \\ = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos(2\varphi)} \\ = \frac{a^2}{4} \int_{(0)}^{(\varphi)} \frac{d(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}.$$

Fig. 43.

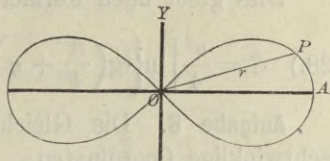
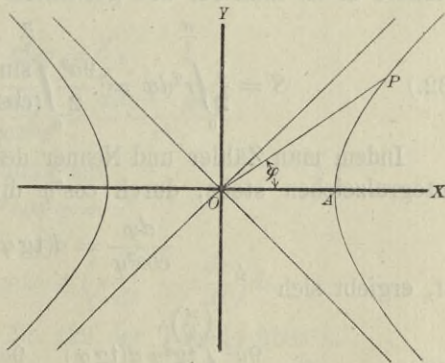


Fig. 44.



Dies giebt nach Formel Nr. 48 der Tabelle

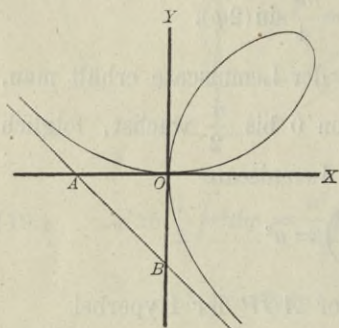
$$(28.) \quad S = \frac{a^2}{4} \left[\ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right\} \right]_0^\varphi = \frac{a^2}{4} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right].$$

Aufgabe 8. Die Gleichung des *Folium Cartesii* war für rechtwinklige Coordinaten

$$(29.) \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

man soll den Flächeninhalt der Schleife berechnen (Fig. 45).

Fig. 45.



Auflösung. Bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten müsste man die kubische Gleichung (29.) nach y auflösen und erhielte einen Ausdruck für $y' - y''$, dessen Integration grosse Schwierigkeiten bereiten würde. Führt man dagegen durch die Gleichungen

$$(30.) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Polarcoordinaten ein, so geht Gleichung (29.) über in

$$(31.) \quad r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi};$$

deshalb findet man für den gesuchten Flächeninhalt

$$(32.) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2}.$$

Indem man Zähler und Nenner des Bruches, der unter dem Integralzeichen steht, durch $\cos^6 \varphi$ dividirt und beachtet, dass

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = d(\operatorname{tg} \varphi)$$

ist, ergibt sich

$$(33.) \quad S = \frac{9a^2}{2} \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi d(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \frac{9a^2}{2} \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2},$$

wobei $\operatorname{tg} \varphi$ mit t bezeichnet ist. Setzt man noch

$$1 + t^3 = z, \text{ also } 3t^2 dt = dz,$$

so wird

$$(34.) \quad \int \frac{3t^2 dt}{(1 + t^3)^2} = \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2} dz = -\frac{1}{z},$$

folglich ist

$$(35.) \quad S = \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{z} \right]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

Der Flächeninhalt der Schleife ist daher dreimal so gross wie der Flächeninhalt des Dreiecks AOB.

§ 23.

Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 130.)

Ist eine Curve durch die Gleichungen

$$(1.) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, so führt man zur Berechnung des von ihr eingeschlossenen Flächeninhalts häufig mit gutem Erfolge Polarcoordinaten ein. Aus den Gleichungen

$$(2.) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

findet man nämlich

$$(3.) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

$$(4.) \quad \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{x dy - y dx}{x^2},$$

und wenn man diese Gleichung mit

$$r^2 \cos^2 \varphi = x^2$$

multiplicirt,

$$(5.) \quad r^2 d\varphi = x dy - y dx = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Dadurch geht Formel Nr. 129 der Tabelle über in

$$(6.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{(\alpha)}^{(\beta)} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{(\alpha)}^{(\beta)} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Sector AOP der Hyperbel mit den Gleichungen

$$(7.) \quad x = a \operatorname{Cof} u, \quad y = a \operatorname{Sin} u \quad (\text{also } x^2 - y^2 = a^2)$$

berechnen (Fig. 44).

Auflösung. Aus den Gleichungen (7.) folgt

$$(8.) \quad dx = a \operatorname{Sin} u \cdot du, \quad dy = a \operatorname{Cof} u \cdot du,$$

also

$$(9.) \quad xdy - ydx = a^2(\operatorname{Cof}^2 u - \operatorname{Sin}^2 u)du = a^2 du,$$

$$(10.) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^u (xdy - ydx) = \frac{a^2}{2} \int_0^u du = \frac{a^2 u}{2}.$$

Für a gleich 1 wird deshalb

$$(11.) \quad u = 2S,$$

d. h. u ist der doppelte Flächeninhalt des Sectors AOP , wie schon in § 28, Seite 128 der Differential-Rechnung hervorgehoben wurde.

Dieses Resultat stimmt auch mit dem in Aufgabe 7 des vorhergehenden Paragraphen gefundenen überein, denn aus den Gleichungen

$$(12.) \quad x = a \operatorname{Cof} u = r \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{Sin} u = r \sin \varphi$$

folgt

$$(13.) \quad \operatorname{Tg} u = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(14.) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + \operatorname{Tg} u}{1 - \operatorname{Tg} u} = \frac{\operatorname{Cof} u + \operatorname{Sin} u}{\operatorname{Cof} u - \operatorname{Sin} u}.$$

Nun ist aber nach D.-R. Formel Nr. 48 und 49 der Tabelle

$$(15.) \quad \operatorname{Cof} u + \operatorname{Sin} u = e^u, \quad \operatorname{Cof} u - \operatorname{Sin} u = e^{-u},$$

deshalb geht Gleichung (14.) über in

$$(16.) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) = e^{2u},$$

folglich wird

$$(17.) \quad \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right] = 2u$$

und

$$(18.) \quad S = \frac{a^2}{4} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right] = \frac{a^2 u}{2}.$$

Aufgabe 2. Man soll den Sector der *Kreisevolvente* mit den Gleichungen

$$(19.) \quad \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 46).

Auflösung. Aus den Gleichungen (19.) findet man

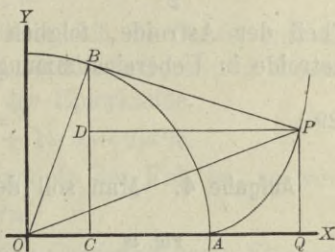
$$(20.) \quad \begin{cases} dx = a t \cos t dt, \\ dy = a t \sin t dt, \end{cases}$$

folglich wird

$$(21.) \quad x dy - y dx = a^2 t^2 dt,$$

$$(22.) \quad S = \frac{a^2}{2} \int_0^t t^2 dt = \frac{a^2 t^3}{6} = AOP.$$

Fig. 46.



Aufgabe 3. Man soll den Flächeninhalt der *Astroide* mit den Gleichungen

$$(23.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

berechnen (Fig. 47).

Auflösung. Aus den Gleichungen (11.) findet man

$$(24.) \quad \begin{cases} dx = -3a \cos^2 t \sin t dt, \\ dy = +3a \sin^2 t \cos t dt, \end{cases}$$

folglich wird

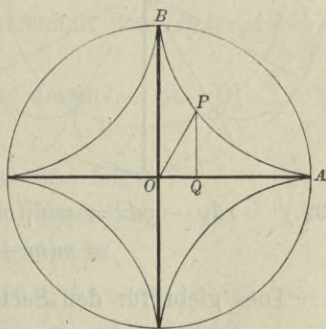
$$(25.) \quad x dy - y dx = 3a^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$(26.) \quad S = \frac{3a^2}{2} \int_0^t \sin^2 t \cos^2 t dt = AOP,$$

oder

$$(27.) \quad S = \frac{3a^2}{8} \int_0^t 4 \sin^2 t \cos^2 t \cdot dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{(t)} \sin^2(2t) d(2t).$$

Fig. 47.



Dies giebt nach Formel Nr. 99 der Tabelle

$$(28.) \quad S = \frac{3a^2}{16} \left[-\frac{1}{2} \sin(2t) \cos(2t) + t \right]_0^t = \frac{3a^2}{16} \left[t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right].$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Sector AOB , d. h. den vierten

Theil der Astroide, folglich ist der Flächeninhalt der ganzen Astroide in Uebereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 19

$$(29.) \quad F = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Aufgabe 4. Man soll den Flächeninhalt der *Epicykloiden* mit den Gleichungen

$$(30.) \quad \begin{cases} x = a[m \cos t - \cos(mt)], \\ y = a[m \sin t - \sin(mt)] \end{cases}$$

berechnen (Fig. 48).

Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(31.) \quad \begin{cases} dx = ma[-\sin t + \sin(mt)] dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)] dt, \end{cases}$$

also, wenn man beachtet, dass hier $m = n + 1$ zu setzen ist,

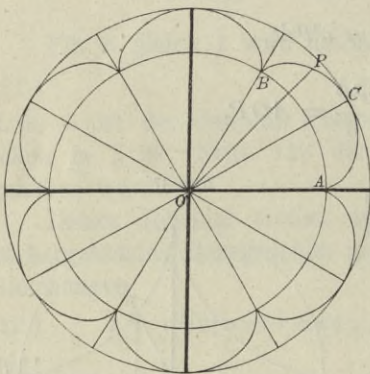
$$(32.) \quad \begin{aligned} xdy - ydx &= ma^2[(m+1) - (m+1)\cos(nt)] dt \\ &= m(m+1)a^2[1 - \cos(nt)] dt. \end{aligned}$$

Dies giebt für den Sector AOP

$$(33.) \quad \begin{aligned} S &= \frac{m(m+1)a^2}{2} \int_0^t [1 - \cos(nt)] dt \\ &= \frac{m(m+1)a^2}{2} \left[t - \frac{1}{n} \sin(nt) \right]. \end{aligned}$$

Wenn der Sector durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, wenn es sich also um den Sector $AOBC$ handelt, so hat man den Wälzungswinkel des rollenden Kreises

Fig. 48.



$$nt = 2\pi, \quad \text{also} \quad t = \frac{2\pi}{n}$$

zu setzen und erhält

$$(34.) \quad S = \frac{m(m+1)a^2\pi}{n} = \frac{(n+1)(n+2)a^2\pi}{n} = A O B C.$$

Ist n eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve, und die ganze Fläche besteht genau aus n solchen Sektoren; in diesem Falle wird also der Flächeninhalt der Epicycloide

$$(35.) \quad F = n \cdot A O B C = (n+1)(n+2)a^2\pi.$$

Ist z. B. $n = 6$, wie es in Figur 48 der Fall ist, so wird

$$(36.) \quad F = 56a^2\pi.$$

Für $n = 1$ ist die Epicycloide eine *Cardioide*, deren Flächeninhalt demnach

$$(37.) \quad F = 6a^2\pi$$

ist. Dieses Resultat stimmt mit dem in § 22 Aufgabe 5 gefundenen überein; nur war damals der Halbmesser a viermal grösser als in den hier benutzten Gleichungen.

Aufgabe 5. Man soll den Flächeninhalt der *Hypocykloiden* mit den Gleichungen

$$(38.) \quad x = a[m \cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m \sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 49).

Auflösung. Aus den Gleichungen (26.) folgt

$$(39.) \quad \begin{cases} dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt, \end{cases}$$

also, wenn man beachtet, dass hier $m = n - 1$ zu setzen ist,

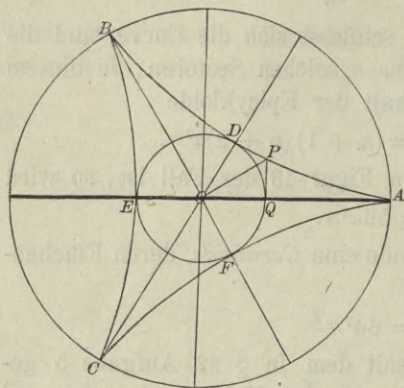
$$(40.) \quad \begin{aligned} xdy - ydx &= ma^2[(m-1) - (m-1)\cos(nt)]dt \\ &= m(m-1)a^2[1 - \cos(nt)]dt, \end{aligned}$$

folglich wird

$$(41.) \quad \begin{aligned} S &= \frac{m(m-1)a^2}{2} \int_0^t [1 - \cos(nt)]dt \\ &= \frac{m(m-1)a^2}{2} \left[t - \frac{1}{n} \sin(nt) \right] = A O P. \end{aligned}$$

Wenn der Sector durch einmaliges Abrollen des rollenden Kreises entstanden ist, so hat man den Wälzungswinkel dieses Kreises

Fig. 49.



$$nt = 2\pi, \text{ also } t = \frac{2\pi}{n}$$

zu setzen; dann wird

$$\begin{aligned} (42.) \quad S &= \frac{m(m-1)a^2\pi}{n} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)a^2\pi}{n} \\ &= AOBQ. \end{aligned}$$

Ist n eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve, und man erhält für den Flächeninhalt der ganzen Hypocykloide

$$(43.) \quad F = n \cdot AOBQ = (n-1)(n-2)a^2\pi.$$

Für den in Figur 49 berücksichtigten Fall ist

$$(44.) \quad n = 3 \quad \text{und} \quad F = 2a^2\pi,$$

also doppelt so gross wie der rollende Kreis, oder wie der durch die Punkte DEF gelegte Kreis.

Bei der *Astroide* hat man $n = 4$ zu setzen und erhält in Uebereinstimmung mit Aufgabe 11 in § 19 und Aufgabe 3 in diesem Paragraphen

$$(45.) \quad F = 6a^2\pi,$$

nur ist in der vorliegenden Darstellung der Werth von a viermal kleiner als dort.

VI. Abschnitt.

Kubatur der Rotationskörper.

§ 24.

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers.

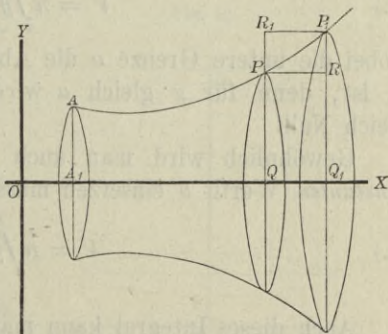
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 131 bis 133.)

Eine Curve (Fig. 50) mit der Gleichung

$$(1.) \quad y = f(x)$$

rotire um die X -Axe, dann beschreibt jeder Punkt der Curve einen Kreis. Um das Volumen V des Körpers zu berechnen, welcher bei der Rotation von der Figur A_1QPA beschrieben wird, beachte man zunächst, dass V eine Function von x ist. Wenn nämlich $OQ = x$ um die Grösse $QQ_1 = \Delta x$ wächst, so wächst auch V um den von dem Viereck QQ_1P_1P beschriebenen Rotationskörper ΔV . Dabei ist ΔV grösser als der

Fig. 50.



bei der Rotation beschriebene Cylinder $y^2\pi \cdot \Delta x$ und kleiner als der von dem Rechteck $QQ_1P_1R_1$ bei der Rotation beschriebene Cylinder $y_1^2\pi \cdot \Delta x$; es ist daher

$$(2.) \quad y^2\pi \cdot \Delta x \leq \Delta V \leq y_1^2\pi \cdot \Delta x.$$

Dies gilt nur, wenn die Curve (wie in Figur 50) vom Punkte P bis zum Punkte P_1 steigt; wenn sie dagegen in diesem Intervalle fällt, so wird

$$(3.) \quad y^2\pi \cdot \Delta x \geq \Delta V \geq y_1^2\pi \cdot \Delta x.$$

Steigt und fällt die Curve in dem Intervalle von P bis P_1 abwechselnd (vergl. Fig. 3), so sei y' die Ordinate des höchsten Punktes H und y'' die Ordinate des tiefsten Punktes T , dann wird

$$(4.) \quad y'^2\pi \cdot \Delta x \geq \Delta V \geq y''^2\pi \cdot \Delta x.$$

In dieser Ungleichung sind die beiden vorhergehenden Ungleichungen (2.) und (3.) als besondere Fälle inbegriffen. Indem man die Ungleichung (4.) durch Δx dividirt, erhält man

$$(5.) \quad y'^2\pi \geq \frac{\Delta V}{\Delta x} \geq y''^2\pi.$$

Da nun für $\lim \Delta x = 0$

$$\lim y' = \lim y'' = y$$

wird, so folgt hieraus

$$(6.) \quad \frac{dV}{dx} = y^2\pi, \quad \text{oder} \quad dV = y^2\pi dx;$$

dies giebt

$$(7.) \quad V = \pi \int_a^x y^2 dx,$$

wobei die untere Grenze a die Abscisse OA_1 des Curvenpunktes A ist, denn für x gleich a wird das Volumen des Körpers gleich Null.

Gewöhnlich wird man auch für die obere Grenze einen constanten Werth b einsetzen müssen, so dass man erhält

$$(8.) \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Auch dieses Integral kann man als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen ansehen. Zerlegt man nämlich die ebene Figur A_1B_1BA durch Parallele zur Y -Axe in n Streifen, die alle verschwindend klein werden, wenn n in's Unbegrenzte wächst (Fig. 51), so darf man diese Streifen als

Rechtecke betrachten, denn die kleinen Dreiecke PRP_1 , welche dabei vernachlässigt werden, beschreiben bei der Rotation ringförmige Körper, deren Volumina unendlich kleine Grössen *höherer Ordnung* sind.

Das Volumen des Cylinders, welcher bei der Rotation von dem Rechteck QQ_1RP beschrieben wird, ist aber

$$y^2\pi \cdot dx,$$

wenn man die Höhe dx des Cylinders sogleich verschwindend klein annimmt. Die Summe

aller dieser unendlich vielen, unendlich flachen Cylinder giebt dann das gesuchte Volumen des Rotationskörpers, nämlich in Uebereinstimmung mit Gleichung (8.)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

In ähnlicher Weise findet man auch das Volumen eines Rotationskörpers, bei welchem die Y -Axe die Rotationsaxe ist; nur muss man in diesem Falle x und y mit einander vertauschen, so dass man

$$(9.) \quad V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

erhält. Es ist dabei zu beachten, dass hier y die Integrations-Veränderliche ist, und dass man deshalb erst integrieren kann, nachdem man in Gleichung (9.) x^2 als Function von y dargestellt hat, während in Gleichung (8.) x die Integrations-Veränderliche war.

Um dies anzudeuten, mögen die Integrationsgrenzen a und b , da sie besondere Werthe von x sind, in Gleichung (8.) mit

Fig. 51.

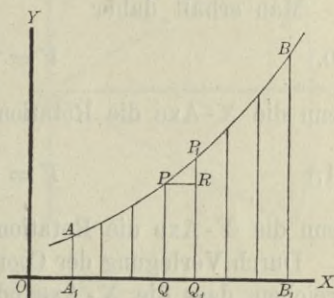
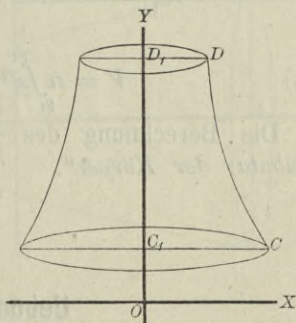


Fig. 52.



x_1 und x_2 bezeichnet werden; und ebenso mögen in Gleichung (9.) die Integrationsgrenzen c und d , da sie besondere Werthe von y sind, mit y_1 und y_2 bezeichnet werden.

Man erhält daher

$$(10.) \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

wenn die X -Axe die Rotations-Axe ist, und

$$(11.) \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy,$$

wenn die Y -Axe die Rotations-Axe ist.

Durch Verlegung der Coordinaten-Axen kann man es immer erreichen, dass die X -Axe oder die Y -Axe mit der Rotations-Axe zusammenfällt. Ist z. B.

in Figur 53 die Gerade C_1D_1 mit der Gleichung

$$x = a$$

Rotations-Axe, so verschiebe man die Y -Axe parallel mit sich um die Strecke OA gleich a , indem man

$x = x' + a$, oder $x' = x - a$ setzt, dann wird

$$(12.) \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x'^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x - a)^2 dy.$$

Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „Kubatur der Körper“.

§ 25.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein gerader *Kreiskegel*, dessen Grundkreis den Halbmesser a hat, und dessen Höhe gleich h ist, entsteht, indem ein rechtwinkliges Dreieck OCA (Fig. 54) um die X -Axe rotirt; man soll das Volumen des Kegels berechnen.

Auflösung. In dem rechtwinkligen Dreieck OCA ist die Kathete OC gleich h , und die andere Kathete CA gleich a , folglich hat die Hypotenuse OA die Gleichung

$$(1.) \quad y = \frac{ax}{h}.$$

Das Volumen des Kegels wird daher nach Formel Nr. 131 der Tabelle

$$(2.) \quad V = \pi \int_0^h y^2 dx = \frac{a^2 \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx,$$

also

$$(3.) \quad V = \frac{a^2 \pi}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{a^2 \pi h}{3}.$$

Aufgabe 2. Ein *abgestumpfter gerader Kreis* habe die Höhe h und sei begrenzt durch die beiden Kreise mit den Halbmessern a_1 und a_2 ; man soll das Volumen des Kegelstumpfes berechnen.

Auflösung. Der Kegelstumpf entsteht durch Rotation des Parallelogramms OA_1A_2A um die X -Axe (Fig. 55), wobei OA gleich h mit der X -Axe und OA_1 gleich a_1 mit der Y -Axe zusammenfällt. Die Gleichung der Geraden A_1A_2 ist daher

$$(4.) \quad y = \frac{a_2 - a_1}{h} x + a_1,$$

folglich wird

Fig. 54.

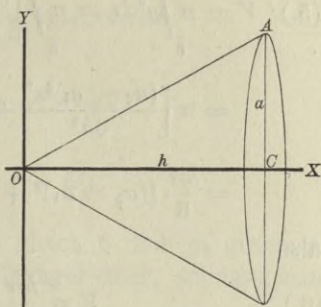
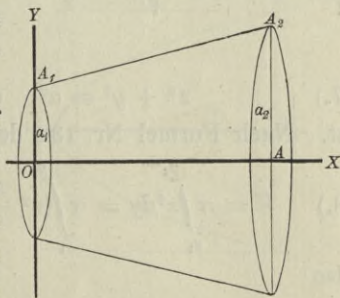


Fig. 55.



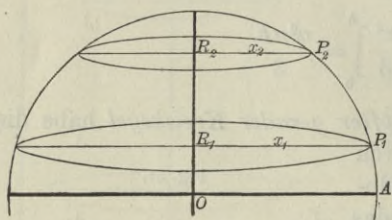
$$\begin{aligned}
 (5.) \quad V &= \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \left[\frac{(a_2 - a_1)^2 x^2}{h^2} + \frac{2(a_2 - a_1)a_1 x}{h} + a_1^2 \right] dx \\
 &= \pi \left[\frac{(a_2 - a_1)^2 x^3}{3h^2} + \frac{2(a_2 - a_1)a_1 x^2}{2h} + a_1^2 x \right]_0^h \\
 &= \frac{h\pi}{3} [(a_2 - a_1)^2 + 3(a_2 - a_1)a_1 + 3a_1^2],
 \end{aligned}$$

also

$$(6.) \quad V = \frac{h\pi}{3} (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2).$$

Aufgabe 3. Der Halbmesser einer *Kugel* sei a ; man soll das Volumen einer *Kugelschicht* berechnen, welche unten und oben von zwei Kreisen mit den Halbmessern x_1 und x_2 begrenzt ist und die Höhe h hat.

Fig. 56.



Auflösung. Die Kugelschicht entsteht (Fig. 56) durch Rotation der Figur $R_1 P_1 P_2 R_2$ um die Y -Axe, wobei $P_1 P_2$ der Bogen eines Kreises mit der Gleichung

$$(7.) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - y^2$$

ist. Nach Formel Nr. 132 der Tabelle erhält man daher

$$(8.) \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} (a^2 - y^2) dy = \pi \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y_1}^{y_2},$$

also

$$\begin{aligned}
 (9.) \quad V &= \frac{\pi}{3} [3a^2(y_2 - y_1) - (y_2^3 - y_1^3)] \\
 &= \frac{(y_2 - y_1)\pi}{3} [3a^2 - y_2^2 - y_1 y_2 - y_1^2] \\
 &= \frac{(y_2 - y_1)\pi}{6} [3(a^2 - y_2^2) + 3(a^2 - y_1^2) + (y_2^2 - 2y_1 y_2 + y_1^2)].
 \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(10.) \quad y_2 - y_1 = h, \quad y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = h^2,$$

und nach Gleichung (7.)

$$a^2 - y_1^2 = x_1^2, \quad a^2 - y_2^2 = x_2^2,$$

folglich wird

$$(11.) \quad V = \frac{h\pi}{6} (3x_1^2 + 3x_2^2 + h^2).$$

Setzt man in Gleichung (8.) y_1 gleich 0 und y_2 gleich a , so geht die Kugelschicht in die Halbkugel über, so dass man für das Volumen der ganzen Kugel

$$(12.) \quad V = 2\pi \left[a^2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{4a^3\pi}{3}$$

erhält.

Aufgabe 4. Die *Parabel* OP mit der Gleichung

$$(13.) \quad y^2 = 2px$$

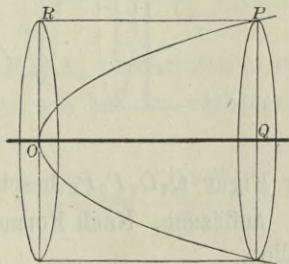
rotire um die X -Axe (Fig. 57); man soll das Volumen des von der Figur OQP beschriebenen *Rotations-Paraboloids* berechnen.

Auflösung. Nach Formel Nr.

Fig. 57.

131 der Tabelle ist

$$(14.) \quad V = \pi \int_0^x y^2 dx = 2p\pi \int_0^x x dx \\ = 2p\pi \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x \cdot 2px \cdot \pi}{2} \\ = \frac{xy^2\pi}{2}.$$

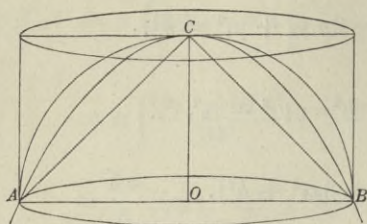


Dies giebt den Satz: *Das Volumen des Rotations-Paraboloids ist halb so gross wie der von dem entsprechenden Rechteck $OQPR$ mit den Seiten x und y bei der Rotation beschriebene Cylinder.*

Für x gleich y wird

$$(15.) \quad V = \frac{x^3\pi}{2}.$$

Fig. 58.



Beschreibt man über einem Kreise mit dem Halbmesser x einen Cylinder mit der Höhe x , eine *Halbkugel*, ein *Rotations-Paraboloid* und einen *Kegel* mit der Höhe x (Fig. 58), so sind die Volumina dieser vier Körper bezw.

$$x^3\pi, \quad \frac{2x^3\pi}{3}, \quad \frac{x^3\pi}{2}, \quad \frac{x^3\pi}{3}$$

und verhalten sich daher zu einander wie

$$6 : 4 : 3 : 2.$$

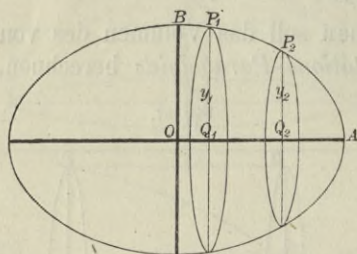
Aufgabe 5. Rotirt eine *Ellipse* mit der Gleichung

$$(16.) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(16a.) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Fig. 59.



um die grosse Axe (Fig. 59), so heisst der dabei beschriebene Rotationskörper „*längliches Rotations-Ellipsoid*“; man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation von

der Figur $Q_1Q_2P_2P_1$ beschrieben wird.

Auflösung. Nach Formel Nr. 131 der Tabelle wird in diesem Falle

$$\begin{aligned} (17.) \quad V &= \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \int_{x_1}^{x_2} (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{b^2\pi}{3a^2} [3a^2(x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3)] \\ &= \frac{b^2\pi(x_2 - x_1)}{3a^2} (3a^2 - x_2^2 - x_1x_2 - x_1^2), \end{aligned}$$

$$(17 a.) \quad V = \frac{\pi(x_2 - x_1)}{6} \left[\frac{3b^2}{a^2} (a^2 - x_2^2) + \frac{3b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) + \frac{b^2}{a^2} (x_2 - x_1)^2 \right],$$

oder, wenn man die Höhe $x_2 - x_1$ der Schicht wieder mit h bezeichnet und Gleichung (16a.) beachtet,

$$(18.) \quad V = \frac{h\pi}{6} \left(3y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{b^2 h^2}{a^2} \right).$$

Für y_1 gleich 0, y_2 gleich 0, h gleich $2a$ erhält man das Volumen des ganzen Rotations-Ellipsoids, nämlich

$$(19.) \quad V = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

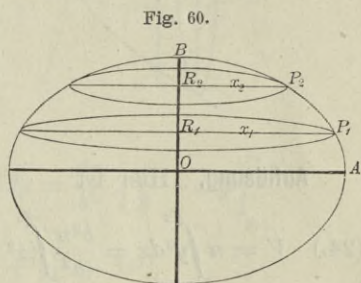
Aufgabe 6. Rotirt eine *Ellipse* mit der Gleichung

$$(20.) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(20 a.) \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)$$

um die *kleine Axe*, so heisst der dabei beschriebene Rotationskörper „*Sphäroid*“ (Fig. 60); man soll das Volumen der Schicht berechnen, welche bei der Rotation durch die Figur $R_1 P_1 P_2 R_2$ beschrieben wird.



Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(21.) \quad V = \frac{a^2\pi}{b^2} \int_{y_1}^{y_2} (b^2 - y^2) dy = \frac{a^2\pi}{b^2} \left[b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y_1}^{y_2} \\ = \frac{h\pi}{6} \left(3x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{a^2 h^2}{b^2} \right),$$

wobei die Höhe $y_2 - y_1$ mit h bezeichnet ist.

Für x_1 gleich 0, x_2 gleich 0, h gleich $2b$ erhält man das Volumen des ganzen Sphäroids, nämlich

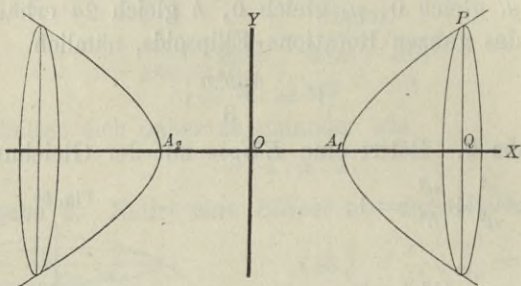
$$(22.) \quad V = \frac{4a^2 b\pi}{3}.$$

Aufgabe 7. Rotirt eine *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(23.) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

um die *X*-Axe, so entsteht das „*zweischalige Rotations-Hyperboloid*“ (Fig. 61); man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.

Fig. 61.



Auflösung. Hier ist

$$\begin{aligned}
 (24.) \quad V &= \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \frac{b^2 \pi}{a^2} \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - a^2) dx = \frac{b^2 \pi}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= \frac{b^2 \pi}{3a^2} [x_2^3 - x_1^3 - 3a^2(x_2 - x_1)] \\
 &= \frac{b^2 \pi (x_2 - x_1)}{3a^2} (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - 3a^2) \\
 &= \frac{\pi (x_2 - x_1)}{6} \left[\frac{3b^2}{a^2} (x_2^2 - a^2) + \frac{3b^2}{a^2} (x_1^2 - a^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b^2}{a^2} (x_2 - x_1)^2 \right],
 \end{aligned}$$

oder, wenn man $x_2 - x_1$ mit h bezeichnet und Gleichung (23.) berücksichtigt,

$$(25.) \quad V = \frac{h\pi}{6} \left(3y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{b^2 h^2}{a^2} \right).$$

Für

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = x, \quad y_2 = y; \quad h = x - a$$

erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation von der Figur A_1QP beschrieben wird, nämlich

$$(26.) \quad V = \frac{(x-a)\pi}{6} \left[3y^2 - \frac{b^2(x-a)^2}{a^2} \right] = \frac{b^2(x-a)^2\pi}{3a^2} (x+2a).$$

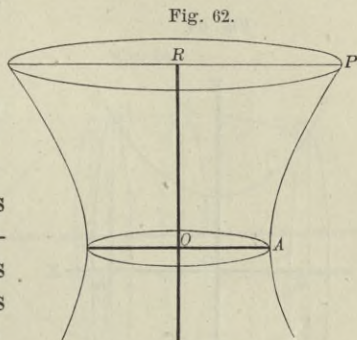
Aufgabe 8. Rotirt eine *Hyperbel* mit der Gleichung

$$(27.) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$(27a.) \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

um die Y -Axe, so entsteht das „*einschalige Rotations-Hyperboloid*“ (Fig. 62); man soll das Volumen einer Schicht dieses Körpers berechnen.



Auflösung. Hier ist

$$(28.) \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \frac{a^2\pi}{b^2} \int_{y_1}^{y_2} (y^2 + b^2) dy = \frac{a^2\pi}{b^2} \left[\frac{y^3}{3} + b^2y \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a^2\pi(y_2 - y_1)}{3b^2} (y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2 + 3b^2),$$

oder

$$(29.) \quad V = \frac{(y_2 - y_1)\pi}{6} \left[\frac{3a^2}{b^2}(y_2^2 + b^2) + \frac{3a^2}{b^2}(y_1^2 + b^2) - \frac{a^2}{b^2}(y_2 - y_1)^2 \right].$$

Bezeichnet man die Höhe $y_2 - y_1$ der Schicht wieder mit h , so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (27a.)

$$(30.) \quad V = \frac{h\pi}{6} \left(3x_1^2 + 3x_2^2 - \frac{a^2h^2}{b^2} \right).$$

Für

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = x, \quad y_2 = y, \quad h = y$$

erhält man das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Figur $OAPR$ um die Y -Axe beschrieben wird, nämlich

$$(31.) \quad V = \frac{y\pi}{6} \left(3a^2 + 3x^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} \right) = \frac{a^2y\pi}{3b^2} (y^2 + 3b^2).$$

Aufgabe 9. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* um die *X*-Axe entsteht (Fig. 63).

Auflösung. Die Gleichung der Kettenlinie ist

$$(32.) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \\ = a \operatorname{Cof} \left(\frac{x}{a} \right),$$

oder

$$\pm \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \\ = a \operatorname{Sin} \left(\frac{x}{a} \right),$$

folglich wird

$$(33.) \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \\ = \frac{a^2 \pi}{4} \int_{x_1}^{x_2} \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx \\ = \frac{a^2 \pi}{4} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

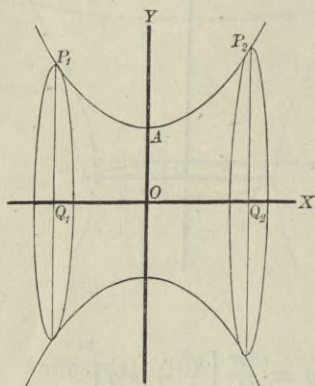
Unter der Voraussetzung, dass x_1 und x_2 beide positiv sind, erhält man

$$(34.) \quad V = \frac{a\pi}{2} \left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + ax \right]_{x_1}^{x_2} \\ = \frac{a\pi}{2} [y \sqrt{y^2 - a^2} + ax]_{x_1}^{x_2} \\ = \frac{a\pi}{2} [y_2 \sqrt{y_2^2 - a^2} - y_1 \sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)].$$

Wird dagegen x_1 negativ, wie es in Figur 63 der Fall ist, so wird

$$(34a.) \quad V = \frac{a\pi}{2} [y_2 \sqrt{y_2^2 - a^2} + y_1 \sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1)].$$

Fig. 63.



Für $x_1 = 0$, $y_1 = a$; $x_2 = x$, $y_2 = y$ erhält man

$$(35.) \quad V = \frac{a\pi}{2} (y\sqrt{y^2 - a^2} + ax).$$

Aufgabe 10. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cykloide* um die *X-Axe* entsteht (Fig. 64).

Auflösung. Die Gleichungen der *Cykloide* sind

$$(36.) \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

d. h. x und y sind beide als Functionen einer dritten Veränderlichen t dargestellt; deshalb wird es zweckmässig sein, t als

Integrations-Veränderliche einzuführen.

Dies giebt

$$(37.) \quad dx = a(1 - \cos t)dt,$$

also, wenn der Körper durch Rotation der Figur OQP entsteht,

$$(38.) \quad \begin{aligned} V &= \pi \int_0^x y^2 dx = a^3 \pi \int_0^t (1 - \cos t)^3 dt \\ &= a^3 \pi \int_0^t (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt, \end{aligned}$$

folglich wird nach den Formeln Nr. 10, 13, 98 und 55 der Tabelle

$$(39.) \quad \begin{aligned} V &= a^3 \pi (t - 3 \sin t + \frac{3}{2} \sin t \cos t + \frac{3}{2} t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t) \\ &= a^3 \pi [\frac{5}{2} t + \sin t (-4 + \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{3} \sin^2 t)]. \end{aligned}$$

Für $t = 2\pi$ erhält man das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der ganzen *Cykloide* OAH entsteht, nämlich

$$(40.) \quad V = 5a^3\pi^2.$$

Aufgabe 11. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide* um die *X-Axe* entsteht (Fig. 65).

Fig. 64.

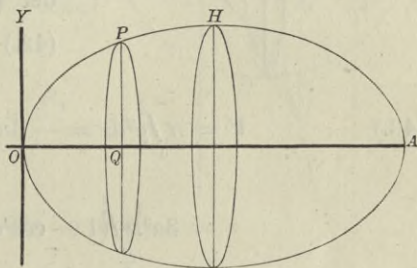
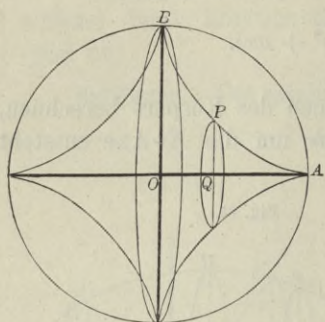


Fig. 65.



Auflösung. Die Gleichungen der Astroide sind

$$(41.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t,$$

folglich ist, wenn man wieder t zur Integrations-Veränderlichen macht und zunächst den Körper berechnet, welcher durch Rotation der Figur $OQPB$ entsteht,

$$(42.) \quad dx = -3a \cos^2 t \sin t dt,$$

$$(43.) \quad V = \pi \int_0^x y^2 dx = -3a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt$$

$$= 3a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^t (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \cdot d(\cos t).$$

Setzt man also

$$\cos t = z,$$

so wird, wenn man beachtet, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gleich 0 ist,

$$(44.) \quad V = 3a^3 \pi \int_0^z (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz$$

$$= 3a^3 \pi \left(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right)$$

$$= \frac{a^3 \pi}{105} (105 \cos^3 t - 189 \cos^5 t + 135 \cos^7 t - 35 \cos^9 t).$$

Für t gleich 0 erhält man das Volumen des Körpers, welcher bei der Rotation von dem Quadranten OAB beschrieben wird, folglich ist das Volumen des ganzen Rotationskörpers

$$(45.) \quad V = \frac{2a^3 \pi}{105} (105 - 189 + 135 - 35) = \frac{32a^3 \pi}{105}.$$

Aufgabe 12. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cissoide* um die X-Axe entsteht (Fig. 66).

Auflösung. Die Gleichungen der *Cissoide* sind

$$(46.) \quad x = 2a \sin^2 \varphi, \quad y = \frac{2a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi},$$

folglich wird

$$(47.) \quad dx = 4a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

$$(48.) \quad V = \pi \int_0^x y^2 dx = 16a^3 \pi \int_0^\varphi \frac{\sin^7 \varphi d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Setzt man also

$$(49.) \quad \cos \varphi = t, \quad \sin^2 \varphi = 1 - t^2, \\ \sin \varphi d\varphi = -dt,$$

so wird

$$t = 1 \quad \text{für} \quad \varphi = 0,$$

und man erhält

$$(50.) \quad V = -16a^3 \pi \int_1^t \frac{(1-t^2)^3 dt}{t} \\ = -16a^3 \pi \int_1^t \left(\frac{1}{t} - 3t + 3t^3 - t^5 \right) dt \\ = -16a^3 \pi \left[\ln t - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \right]_1^t \\ = \frac{4a^3 \pi}{3} (-12 \ln t + 18t^2 - 9t^4 + 2t^6 - 11) \\ = \frac{4a^3 \pi}{3} [-6 \ln(t^2) - 2(1-t^2)^3 - 3(1-t^2)^2 - 6(1-t^2)].$$

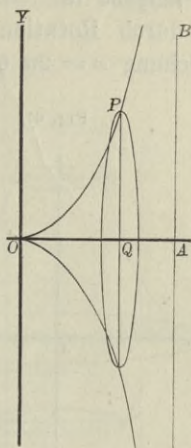
Nun ist

$$(51.) \quad t^2 = \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = \frac{2a-x}{2a}, \quad 1-t^2 = \frac{x}{2a},$$

folglich wird

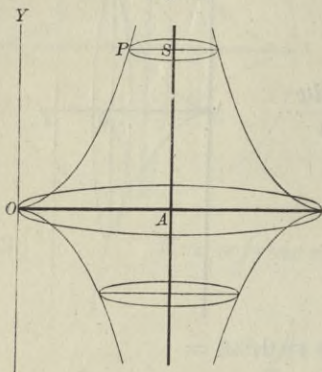
$$(52.) \quad V = \frac{\pi}{3} \left[24a^3 \ln \left(\frac{2a}{2a-x} \right) - x^3 - 3ax^2 - 12a^2 x \right].$$

Fig. 66.



Aufgabe 13. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, der durch Rotation der *Cissoide* um die Asymptote mit der Gleichung $x = 2a$ entsteht (Fig. 67).

Fig. 67.



Auflösung. Zunächst möge das Volumen des Körpers berechnet werden, welcher bei der Rotation von der Figur $OASP$ beschrieben wird. Nach Formel Nr. 133 der Tabelle findet man in diesem Falle

$$(53.) \quad V = \pi \int_0^y (x - 2a)^2 dy.$$

Dabei folgt aus den Gleichungen (46.)

$$(54.) \quad \begin{cases} x - 2a = -2a \cos^2 \varphi, \\ dy = \frac{2a}{\cos^2 \varphi} (3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi, \end{cases}$$

also

$$(55.) \quad V = 8a^3 \pi \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi.$$

Nun ist

$$(56.) \quad \begin{cases} 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \sin^2(2\varphi), \\ 3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cos^2 \varphi = 2 + \cos(2\varphi), \end{cases}$$

so dass man erhält

$$(57.) \quad V = a^3 \pi \int_{(0)}^{(\varphi)} \sin^2(2\varphi) [2 + \cos(2\varphi)] d(2\varphi).$$

Dies giebt nach Formel Nr. 99 und 53 der Tabelle

$$(58.) \quad V = a^3 \pi [-\sin(2\varphi) \cos(2\varphi) + 2\varphi + \frac{1}{3} \sin^3(2\varphi)].$$

Wenn φ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so wird y unendlich gross. Gleichzeitig erstreckt sich auch der Rotationskörper bis in's Unendliche; trotzdem bleibt aber sein Volumen endlich, denn man erhält

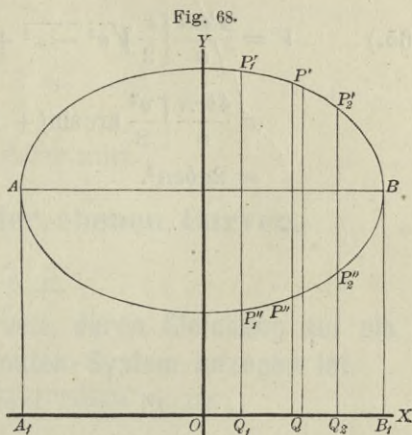
$$(59.) \quad \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} V = a^3 \pi^2.$$

Aufgabe 14. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Ellipse*

$$(60.) \quad y = c \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

um die X -Axe entsteht (Fig. 68), wenn c grösser als b ist.

Auflösung. Man kann das gesuchte Volumen V als die Differenz zweier Volumina V' und V'' betrachten, von denen V' bei der Rotation von der Figur $Q_1 Q_2 P_2' P_1'$ und V'' von der Figur $Q_1 Q_2 P_2'' P_1''$ beschrieben wird. Dabei ist



$$(61.) \quad V' = \pi \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx, \quad V'' = \pi \int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx,$$

also

$$(62.) \quad V = V' - V'' = \pi \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 - y''^2) dx.$$

Bei der vorliegenden Aufgabe ist

$$y' = c + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y'' = c - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$y' + y'' = 2c, \quad y' - y'' = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich wird

$$(63.) \quad (y' + y'')(y' - y'') = y'^2 - y''^2 = \frac{4bc}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(64.) \quad V = \frac{4bc\pi}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Will man das Volumen des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *ganzen* Ellipse entsteht, so hat man

$$x_1 = -a, \quad x_2 = +a$$

zu setzen und erhält nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$\begin{aligned}
 (65.) \quad V &= \frac{4bc\pi}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-a}^{+a} \\
 &= \frac{4bc\pi}{a} \left[\frac{a^2}{2} \arcsin(+1) - \frac{a^2}{2} \arcsin(-1) \right] \\
 &= 2abc\pi^2.
 \end{aligned}$$

VII. Abschnitt.

Rectification der ebenen Curven.

§ 26.

Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 134.)

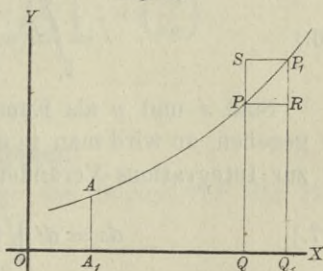
Ist

$$(1.) \quad y = f(x)$$

die Gleichung einer Curve (Fig. 69), so wird der Bogen AP gleich s ebenfalls eine Function von x .

Wächst nämlich x um die Grösse QQ_1 gleich Δx , so wächst auch der Bogen s um die Grösse \widehat{PP}_1 gleich Δs . Betrachtet man zunächst Δs als die Sehne \overline{PP}_1 , so ist Δs die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck PRP_1 , so dass man erhält

Fig. 69.



$$(2.) \quad \overline{PP}_1^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RP}_1^2, \quad \text{oder} \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

$$(2a.) \quad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Lässt man die beiden Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, so gehen Δx , Δy , Δs bzw. in die Differentiale dx , dy , ds über, und der unendlich kleine Bogen PP_1 fällt mit der unendlich kleinen Sehne PP_1 gleich ds zusammen. Deshalb erhält man für den unendlich kleinen Zuwachs ds des Bogens s aus Gleichung (2a.)

$$(3.) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Daraus folgt durch Integration für den Bogen AP selbst

$$(4.) \quad s = \int_a^x ds = \int_a^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Man wird hierbei die Integrationsgrenzen zweckmässiger Weise mit x_1 und x_2 bezeichnen, um anzudeuten, dass x die Integrations-Veränderliche ist. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$(4a.) \quad s = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Man kann nämlich auch y zur Integrations-Veränderlichen machen, denn aus Gleichung (3.) folgt

$$(5.) \quad ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

also

$$(6.) \quad s = \int_{y_1}^{y_2} ds = \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Sind x und y als Functionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so wird man in den meisten Fällen mit gutem Erfolge t zur Integrations-Veränderlichen machen und schreiben

$$(7.) \quad ds = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

$$(8.) \quad s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

In dieser Formel sind die Gleichungen (4a.) und (6.) als besondere Fälle enthalten, welche sich ergeben, wenn man

$$t = x \quad \text{bzw.} \quad t = y$$

setzt.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als den Grenzwert einer Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen

Größen betrachten. Zerlegt man nämlich den Abschnitt Q_1Q_2 auf der X-Axe (Fig. 70) in n (gleiche oder ungleiche) Theile und legt durch die Schnittpunkte Parallele zur Y-Axe, so wird auch der Bogen P_1P_2 gleich s in n Theile zerlegt.

Indem man die auf einander folgenden Schnittpunkte des Bogens durch gerade Linien mit einander verbindet, erhält man zwischen P_1 und P_2 ein Polygon von n Seiten. Wird nun n unendlich gross, und werden die einzelnen Seiten des Polygons unendlich klein, so fallen sie mit den Bögen, deren Sehnen ds sie sind, zusammen.

Der ganze Bogen P_1P_2 oder s wird daher die Summe von diesen unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen ds , so dass man wieder erhält

$$s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

§ 27.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens OP der *Parabel* mit der Gleichung

(1.) $y^2 = 2px$

berechnen (Fig. 71).

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $y dy = p dx$, oder $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$.

Man wird hier nämlich y zur Integrations-Veränderlichen machen, weil sich x und $\frac{dx}{dy}$ rational durch y

Fig. 70.

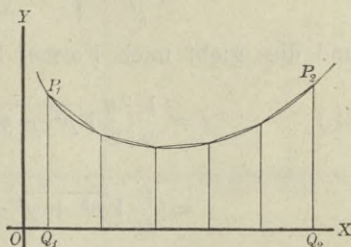
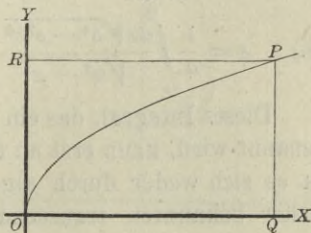


Fig. 71.



darstellen lassen. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 134 der Tabelle

$$(3.) \quad s = \int_0^y dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p} \int_0^y dy \sqrt{p^2 + y^2},$$

und dies giebt nach Formel Nr. 124 der Tabelle

$$(4.) \quad s = \frac{1}{p} \left[\frac{y}{2} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2} \ln \left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} \right) \right]_0^y \\ = \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \ln \left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} \right).$$

Aufgabe 2. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Ellipse* mit der Gleichung

$$(5.) \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

berechnen (Fig. 72).

Auflösung. Aus Gleichung (5.) folgt

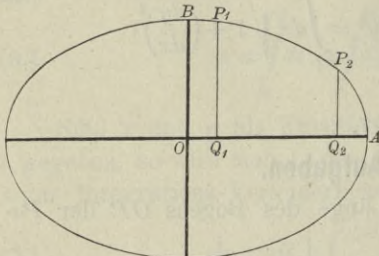


Fig. 72.

$$(6.) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(7.) \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

wobei

$$e^2 = a^2 - b^2$$

ist. Daraus ergibt sich

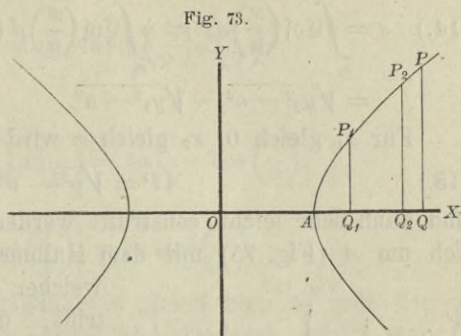
$$(8.) \quad s = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx \sqrt{a^4 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(a^4 - e^2x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}}.$$

Dieses Integral, das ein „*elliptisches Integral zweiter Gattung*“ genannt wird, kann erst an einer späteren Stelle ermittelt werden, da es sich weder durch algebraische Functionen noch durch die bisher bekannten transcendenten Functionen ausdrücken lässt.

Man erkennt daher aus dieser Aufgabe, wie die Anwendungen der Integral-Rechnung auf neue transcendente Functionen führen.

Aufgabe 3. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Hyperbel* mit der Gleichung (9.) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ berechnen (Fig. 73).

Auflösung. Man findet hier in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe



$$(10.) \quad s = -\frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(a^4 - e^2x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}} = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(e^2x^2 - a^4)dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}}$$

nur ist bei der Hyperbel e^2 gleich $a^2 + b^2$.

Aufgabe 4. Man soll die Länge des Bogens P_1P_2 der *Kettenlinie* mit der Gleichung

$$(11.) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{Cof} \left(\frac{x}{a} \right),$$

oder

$$(11a.) \quad \pm \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{Sin} \left(\frac{x}{a} \right)$$

berechnen (Fig. 74).

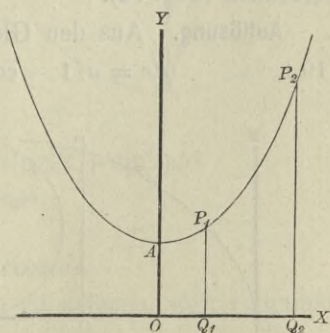
Auflösung. Aus den Gleichungen (11.) und (11a.) folgt

$$(12.) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{Sin} \left(\frac{x}{a} \right),$$

$$(13.) \quad \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{x}{a} \right) = \operatorname{Cof}^2 \left(\frac{x}{a} \right),$$

oder

Fig. 74.



$$(13a.) \quad \frac{ds}{dx} = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$(14.) \quad s = \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = a \left[\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{x_1}^{x_2} \\ = \sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}.$$

Für x_1 gleich 0, x_2 gleich x wird der Bogen

$$(15.) \quad AP = \sqrt{y^2 - a^2}$$

und kann sehr leicht construirt werden. Beschreibt man nämlich um A (Fig. 75) mit dem Halbmesser y einen Kreisbogen, welcher die X -Axe im Punkte B trifft, und vervollständigt das Rechteck $OBCA$, so ist

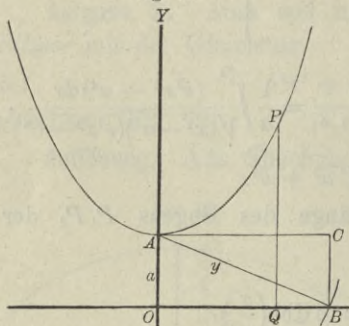
$$(16.) \quad AC = \sqrt{y^2 - a^2} = \widehat{AP}.$$

In ähnlicher Weise könnte man die Bögen AP_1 und AP_2 als gerade Linien AC_1 und AC_2 darstellen, deren Differenz

$$(17.) \quad AC_2 - AC_1 = C_1C_2 = \widehat{P_1P_2}$$

sein würde.

Fig. 75.



Aufgabe 5. Man soll die Länge des Bogens OP bei der *Cykloide* mit den Gleichungen

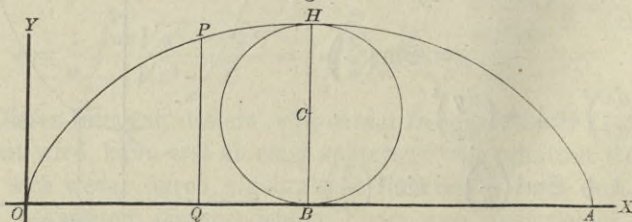
$$(18.) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

berechnen (Fig. 76).

Auflösung. Aus den Gleichungen (18.) folgt

$$(19.) \quad dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a \sin t dt,$$

Fig. 76.



$$(20.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)dt^2 \\ = 2a^2(1 - \cos t)dt^2 = 4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2.$$

$$(21.) \quad ds = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right),$$

folglich ist

$$(22.) \quad s = 4a \int_{(0)}^{(t)} \sin\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t \\ = 4a \left[1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 8a \sin^2\left(\frac{t}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel t gleich 2π , so rollt der die Curve erzeugende Kreis einmal ab. Dadurch erhält man für den Bogen der *ganzen* Cykloide

$$(23.) \quad s = 8a,$$

ein Resultat, das schon bei der Krümmung der Curven (D.-R., Seite 444) ermittelt wurde.

Aufgabe 6. Man soll die Länge des Bogens BP bei der *Astroide* mit den Gleichungen

$$(24.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

berechnen (Fig. 77).

Auflösung. Aus den Gleichungen (24.) folgt

$$(25.) \quad \begin{cases} dx = -3a \cos^2 t \sin t dt, \\ dy = +3a \sin^2 t \cos t dt, \end{cases}$$

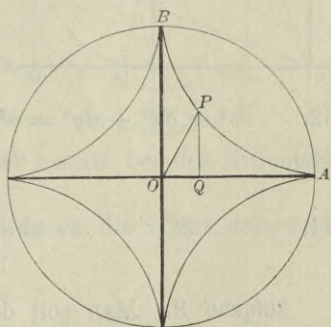
$$(26.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 \\ = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt^2 \\ = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt^2,$$

also

$$(27.) \quad ds = \pm 3a \sin t \cos t dt.$$

Hierbei ist das untere Zeichen zu nehmen, weil s zunimmt, wenn t abnimmt. Dies giebt

Fig. 77.



$$(28.) \quad s = -3a \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin t \cos t dt = -\frac{3a}{2} [\sin^2 t]_{\frac{\pi}{2}}^t$$

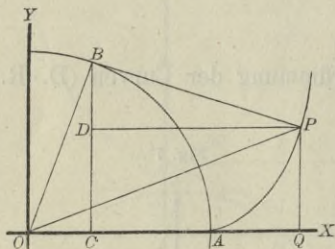
$$= \frac{3a}{2} (1 - \sin^2 t) = \frac{3a}{2} \cos^2 t.$$

Für t gleich 0 wird s dem Quadranten BA der Astroide gleich, nämlich

$$(29.) \quad s = \frac{3a}{2}.$$

Aufgabe 7. Man soll die Länge des Bogens AP der *Kreisvolvente* mit den Gleichungen

Fig. 78.



$$(30.) \quad \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

berechnen (Fig. 78).

Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(31.) \quad \begin{cases} dx = at \cos t dt, \\ dy = at \sin t dt, \end{cases}$$

$$(32.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt^2 = a^2 t^2 dt^2,$$

$$(33.) \quad ds = at dt,$$

$$(34.) \quad s = a \int_0^t t dt = \frac{at^2}{2}.$$

Aufgabe 8. Man soll die Länge des Bogens AP bei den *Epicykloiden* mit den Gleichungen

$$(35.) \quad x = a[m \cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m \sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 79).

Auflösung. Aus den Gleichungen (35.) folgt

$$(36.) \quad dx = ma[-\sin t + \sin(mt)] dt, \quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)] dt;$$

dies giebt, wenn man wieder $m - 1$ mit n bezeichnet,

$$(37.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2a^2 [1 - \cos(nt)] dt^2 \\ = 4m^2a^2 \sin^2\left(\frac{nt}{2}\right) dt^2,$$

$$(38.) \quad ds = 2ma \sin\left(\frac{nt}{2}\right) dt = \frac{4ma}{n} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$(39.) \quad s = \frac{4ma}{n} \int_{(0)}^{(t)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n} \left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t \\ = \frac{4ma}{n} \left[1 - \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n} \sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel nt des rollenden Kreises gleich 2π , so erhält man für den vollständigen Bogen ACB (Fig. 79)

$$(40.) \quad s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n+1)a}{n}.$$

Ist n eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve; ihr Umfang U besteht aus n solchen Bögen, so dass man erhält

$$(41.) \quad U = 8(n+1)a.$$

Auch dieses Resultat ergab sich bereits bei der Krümmung der Curven (D.-R., Seite 447).

Für den Fall $n = 6$, welcher durch die Figur dargestellt ist, erhält man also

$$(42.) \quad U = 56a.$$

In dem Falle, wo $n = 1$ ist, wird die Curve eine *Cardioide*, deren Umfang also

$$(43.) \quad U = 16a$$

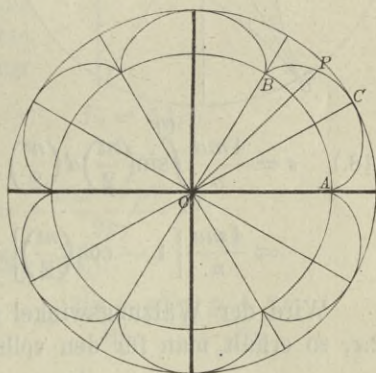
ist.

Aufgabe 9. Man soll die Länge des Bogens AP bei den *Hypocykloiden* mit den Gleichungen

$$(44.) \quad x = a[m \cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m \sin t - \sin(mt)]$$

berechnen (Fig. 80).

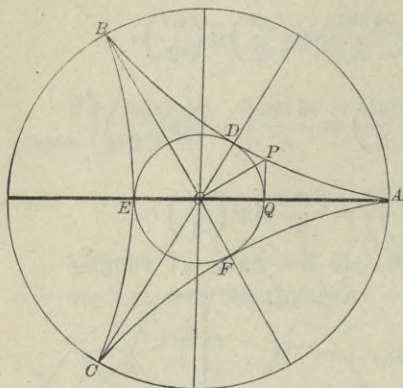
Fig. 79.



Auflösung. Aus den Gleichungen (44.) folgt

$$(45.) \quad dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt, \quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt;$$

Fig. 80.



dies giebt, wenn man (in Ueber-
einstimmung mit der früher
gebrauchten Bezeichnung) $m + 1$
gleich n setzt,

$$(46.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 \\ = 2m^2a^2[1 - \cos(nt)]dt^2 \\ = 4m^2a^2\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)dt^2,$$

$$(47.) \quad ds = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)dt \\ = \frac{4ma}{n}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$(48.) \quad s = \frac{4ma}{n} \int_{(0)}^{(t)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4ma}{n} \left[-\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]_0^t \\ = \frac{4ma}{n} \left[1 - \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] = \frac{8ma}{n} \sin^2\left(\frac{nt}{4}\right).$$

Wird der Wälzungswinkel nt des rollenden Kreises gleich 2π , so erhält man für den vollständigen Bogen ADB (Fig. 80)

$$(49.) \quad s = \frac{8ma}{n} = \frac{8(n-1)a}{n}.$$

Ist n eine ganze Zahl, so schliesst sich die Curve; ihr Umfang U besteht dann aus n solchen Bögen, so dass man erhält

$$(50.) \quad U = 8(n-1)a.$$

Für den in Figur 80 gewählten Fall, in welchem n gleich 3 ist, erhält man z. B.

$$(51.) \quad U = 16a.$$

Bei der *Astroide* hat man n gleich 4 zu setzen und erhält

$$(52.) \quad U = 24a.$$

Aufgabe 10. Man soll die Bogenlänge bei der *Neil'schen Parabel* berechnen (Fig. 81).

Auflösung. Die Evolute der Parabel

$$(53.) \quad y^2 = 2px$$

ist bekanntlich (vergl. D.-R., Seite 437)

$$(54.) \quad F(x, y) = 27py^2 - 8(x-p)^3 = 0,$$

eine Curve, welche man auch die „*Neil'sche Parabel*“ nennt. Zur Berechnung der Bogenlänge bei dieser Curve bilde man zunächst

$$(55.) \quad F_1 = -24(x-p)^2, \quad F_2 = 54py,$$

folglich wird

$$(56.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = +\frac{4(x-p)^2}{9py},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

$$(57.) \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{16(x-p)^4}{81p^2y^2} = 1 + \frac{2(x-p)}{3p} = \frac{p+2x}{3p},$$

$$(57a.) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{3p}}.$$

Setzt man daher

$$(58.) \quad \sqrt{p+2x} = t, \quad \text{also} \quad p+2x = t^2, \quad dx = t dt,$$

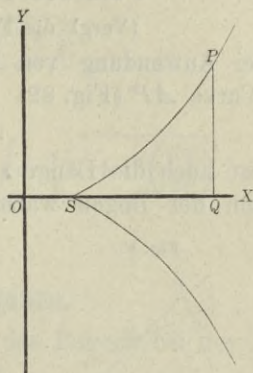
so erhält man

$$(59.) \quad s = \frac{1}{\sqrt{3p}} \int_p^x dx \sqrt{p+2x} = \frac{1}{\sqrt{3p}} \int_{(p)}^{(x)} t^2 dt = \frac{1}{3\sqrt{3p}} [t^3]_{(p)}^{(x)},$$

oder

$$(60.) \quad s = \frac{1}{3\sqrt{3p}} [(2x+p)\sqrt{2x+p} - 3p\sqrt{3p}].$$

Fig. 81.



§ 28.

Rectification ebener Curven, deren Gleichung auf Polarcordinaten bezogen ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 135.)

Bei Anwendung von Polarcordinaten sei die Gleichung einer Curve AP (Fig. 82)

$$(1.) \quad r = F(\varphi),$$

dann ist auch die Länge s des Bogens AP eine Function von φ , denn der Bogen wächst gleichzeitig mit dem Winkel φ .

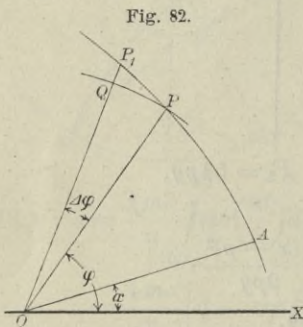


Fig. 82.

Nimmt man sogleich an, dass der Zuwachs POP_1 von φ verschwindend klein wird, und bezeichnet denselben dem entsprechend mit $d\varphi$, so wird auch der Zuwachs PP_1 oder ds des Bogens verschwindend klein. Beschreibt man daher um O mit dem Halbmesser OP gleich r einen Kreisbogen PQ , so kann man das rechtwinklige Dreieck PQP_1 als ein *geradliniges* Dreieck

betrachten und findet nach dem Pythagoräischen Lehrsatze, wie auch schon früher gezeigt wurde,

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{QP_1}^2 + \overline{PQ}^2,$$

oder (vergl. D.-R., Formel Nr. 148 der Tabelle)

$$(2.) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Dies giebt

$$(3.) \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2},$$

also, wenn man die Grenzen sogleich mit φ_1 und φ_2 bezeichnet,

$$(4.) \quad s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}.$$

Man kann natürlich statt φ auch andere Integrations-Veränderliche einführen. Sind z. B. r und φ beide Functionen von t , so folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.) \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

und für t gleich r

$$(6.) \quad ds = dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2};$$

dies giebt

$$(7.) \quad s = \int_{r_1}^{r_2} dt \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

§ 29.

Uebungs - Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens bei der *Archimedischen Spirale* mit der Gleichung

$$(1.) \quad r = a\varphi$$

berechnen (Fig. 83).

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$(2.) \quad dr = a d\varphi,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ = a^2(1 + \varphi^2) d\varphi^2,$$

folglich wird

$$(3.) \quad ds = a d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2},$$

$$(4.) \quad s = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}.$$

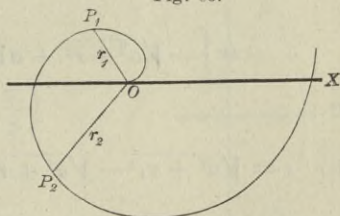
Dies giebt nach Formel Nr. 124 der Tabelle

$$(5.) \quad s = a \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

oder

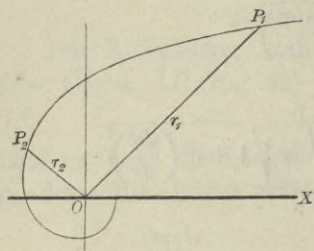
$$(5a.) \quad s = \frac{a}{2} \left[\varphi_2 \sqrt{1 + \varphi_2^2} - \varphi_1 \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \ln \left(\frac{\varphi_2 + \sqrt{1 + \varphi_2^2}}{\varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2}} \right) \right] \\ = \frac{r_2 \sqrt{a^2 + r_2^2} - r_1 \sqrt{a^2 + r_1^2}}{2a} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{r_2 + \sqrt{a^2 + r_2^2}}{r_1 + \sqrt{a^2 + r_1^2}} \right).$$

Fig. 83.



Aufgabe 2. Man soll die Länge des Bogens bei der *hyperbolischen Spirale* mit der Gleichung

Fig. 84.



(6.) $r\varphi = a$, oder $r = a\varphi^{-1}$,
berechnen (Fig. 84).

Auflösung. Aus Gleichung (6.)

folgt

(7.) $dr = -a\varphi^{-2}d\varphi$,

(8.) $ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2$
 $= a^2(\varphi^{-4} + \varphi^{-2})d\varphi^2$,

(9.) $ds = \frac{a}{\varphi^2} \sqrt{1 + \varphi^2} \cdot d\varphi$,

(10.) $s = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi^2} = a \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\varphi^2 \sqrt{1 + \varphi^2}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \right]$.

Dies giebt nach den Formeln Nr. 40 und 35 der Tabelle

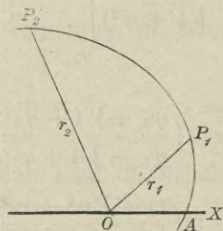
(11.) $s = a \left[-\frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$
 $= \left[-\sqrt{a^2 + r^2} + a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{r} \right) \right]_{r_1}^{r_2}$,

also

(12.) $s = \sqrt{a^2 + r_1^2} - \sqrt{a^2 + r_2^2} + a \ln \left(\frac{r_1(a + \sqrt{a^2 + r_2^2})}{r_2(a + \sqrt{a^2 + r_1^2})} \right)$.

Aufgabe 3. Man soll die Länge des Bogens bei der *logarithmischen Spirale* mit der Gleichung

Fig. 85.



(13.) $r = e^{a\varphi}$

berechnen (Fig. 85).

Auflösung. Aus Gleichung (13.)

folgt

(14.) $dr = e^{a\varphi} \cdot a d\varphi = ar d\varphi$,

oder

(14a.) $d\varphi = \frac{dr}{ar}$,

$$(15.) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right),$$

$$(16.) \quad ds = dr \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \frac{dr}{a} \sqrt{a^2 + 1};$$

dies giebt

$$(17.) \quad s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{r_2 - r_1}{a} \sqrt{a^2 + 1}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Länge des Bogens AP bei der *Parabel* mit der Gleichung

$$(18.) \quad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{oder} \quad r = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

berechnen (Fig. 86).

Auflösung. Aus Gleichung (18.) folgt

$$(19.) \quad dr = \frac{a \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$(20.) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\cos^6\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

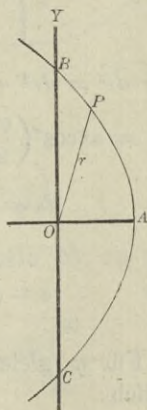
$$(21.) \quad ds = \frac{a d\varphi}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

also, wenn man $\varphi = 2t$ setzt und die Formeln Nr. 102 und 48 der Tabelle beachtet,

$$(22.) \quad s = 2a \int_0^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2a \int_0^t \frac{dt}{\cos^3 t}$$

$$= 2a \left[\frac{\sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right\} \right]_0^t,$$

Fig. 86.



oder

$$(23.) \quad s = \frac{a \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + a \ln \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) \right].$$

Aufgabe 5. Man soll die Länge des Bogens AP bei der *Cardioid*e mit der Gleichung

Fig. 87.

$$(24.) \quad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder

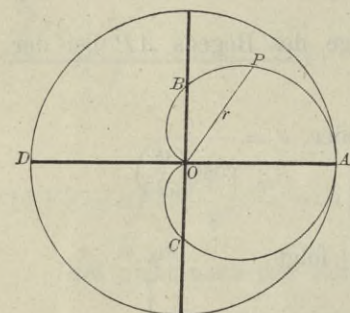
$$(24 \text{ a.}) \quad r = a \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

berechnen (Fig. 87).

Auflösung. Aus Gleichung

(24 a.) folgt

$$(25.) \quad dr = -a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$



$$(26.) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

$$= a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] d\varphi^2 = a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2,$$

$$(27.) \quad ds = a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$(28.) \quad s = 2a \int_0^{\varphi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2a \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für φ gleich π erhält man die Länge des Bogens APO , nämlich

$$(29.) \quad s = 2a,$$

d. h. der Bogen APO ist dem Durchmesser des in Figur 87 der *Cardioid*e umschriebenen *Kreises* gleich.

Aufgabe 6. Man soll die Länge des Bogens OP bei der *Cissoide* mit der Gleichung

$$(30.) \quad r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

berechnen (Fig. 88).

Auflösung. Aus Gleichung (30.) folgt

$$(31.) \quad dr = \frac{2a \sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi) d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$(32.) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{4a^2 \sin^2 \varphi (1 + 3 \cos^2 \varphi) d\varphi^2}{\cos^4 \varphi},$$

also

$$(33.) \quad ds = \frac{2a \sin \varphi d\varphi \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi}.$$

Setzt man

$$(34.) \quad \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = t,$$

also

$$-\sqrt{3} \sin \varphi d\varphi = dt,$$

so wird

$$(35.) \quad ds = -\frac{2a\sqrt{3} \cdot dt \sqrt{1+t^2}}{t^2},$$

$$(36.) \quad s = -2a\sqrt{3} \int_{(0)}^{(\varphi)} \frac{dt \sqrt{1+t^2}}{t^2}$$

$$= -2a\sqrt{3} \left(\int_{(0)}^{(\varphi)} \frac{dt}{t^2 \sqrt{1+t^2}} + \int_{(0)}^{(\varphi)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right),$$

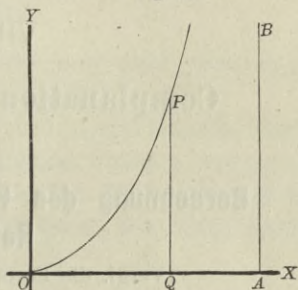
folglich erhält man mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 40 und 35 der Tabelle

$$(37.) \quad s = -2a\sqrt{3} \left[-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{(0)}^{(\varphi)},$$

oder

$$(38.) \quad s = 2a \left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} - 2 - \sqrt{3} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2 + \sqrt{3}} \right) \right].$$

Fig. 88.



VIII. Abschnitt.

Complanation der Rotationsflächen.

§ 30.

Berechnung des Flächen-Elementes bei einer Rotationsfläche.

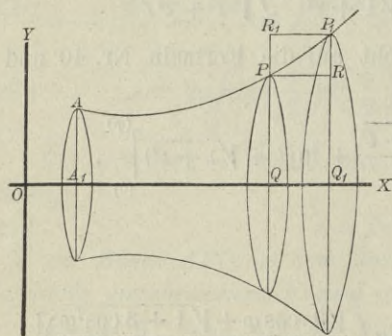
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 136 und 137.)

Rotirt eine Curve mit der Gleichung

$$(1.) \quad y = f(x)$$

um die X -Axe, so beschreibt der Bogen AP (Fig. 89) eine Rotationsfläche, deren Oberfläche O eine Function von x ist.

Fig. 89.



Wächst nämlich x um die Grösse QQ_1 gleich Δx , so wächst auch die Oberfläche um denjenigen Theil ΔO der Rotationsfläche, welcher bei der Rotation von dem Bogen PP_1 beschrieben wird.

Zur Berechnung von ΔO betrachte man zunächst den Mantel des Kegelstumpfes, welcher bei der Rotation von der Sehne PP_1 gleich Δs beschrieben wird. Der Mantel dieses Kegelstumpfes ist nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

$$(2.) \quad \begin{aligned} M &= \pi(QP + Q_1P_1) \cdot PP_1 \\ &= \pi(y + y_1) \cdot \Delta s. \end{aligned}$$

Rückt nun der Punkt P_1 dem Punkte P unendlich nahe, so fällt der Bogen PP_1 mit der Sehne PP_1 zusammen; dabei geht $\mathcal{A}s$ über in ds und $\lim y_1$ wird gleich y ; folglich findet man für das *Oberflächen-Element* dO aus Gleichung (2.)

$$(3.) \quad dO = 2\pi y ds.$$

Daraus ergibt sich durch Integration

$$(4.) \quad O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds,$$

wobei die Grenzen mit x_1 und x_2 bezeichnet sind, weil man x als die Integrations-Veränderliche betrachtet.

Auch hier kann man das bestimmte Integral als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen betrachten, und zwar sind die einzelnen Summanden Mäntel von Kegelstumpfen mit der Seitenkante ds , begrenzt von zwei Kreisen mit den Halbmessern y und $y + dy$.

Rotirt die Curve um die Y -Axe, so erhält man in ähnlicher Weise für den Flächeninhalt der Rotationsoberfläche durch Vertauschung von x mit y

$$(5.) \quad O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds.$$

Die auf diese Weise ausgeführte Berechnung der Oberfläche nennt man: „*Complonation der Rotationsflächen*“.

§ 31.

Uebungs-Aufgaben.

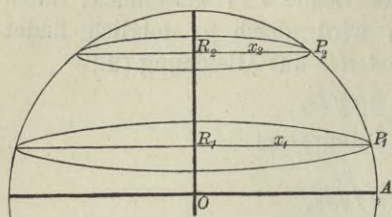
Aufgabe 1. Man soll den Flächeninhalt einer *Kugelzone* berechnen (Fig. 90).

Auflösung. Rotirt der Bogen P_1P_2 des Kreises mit der Gleichung

$$(1.) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

um die Y -Axe, so beschreibt er eine Kugelzone, deren Oberfläche nach Formel Nr. 137 der Tabelle

Fig. 90.



$$(2.) \quad O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds$$

wird. Dabei folgt aus Gleichung (1.)

$$(3.) \quad dx = -\frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$(4.) \quad ds^2 = \frac{(y^2 + a^2 - y^2) dy^2}{a^2 - y^2} = \frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2},$$

$$(5.) \quad ds = \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{a dy}{x},$$

$$(6.) \quad x ds = a dy,$$

$$(7.) \quad O = 2a\pi \int_{y_1}^{y_2} dy = 2a\pi(y_2 - y_1) = 2a\pi h,$$

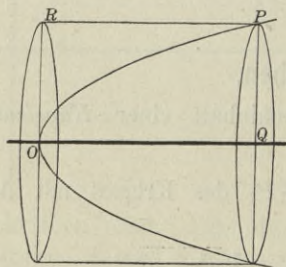
wenn man die Höhe $y_2 - y_1$ der Kugelzone wieder mit h bezeichnet.

Setzt man y_2 gleich $+a$, y_1 gleich $-a$, also h gleich $2a$, so erhält man für die Oberfläche der ganzen Kugel

$$(8.) \quad O = 4a^2\pi.$$

Aufgabe 2. Man soll die Oberfläche des *Rotationsparaboloids* berechnen (Fig. 91).

Fig. 91.



Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist

$$(9.) \quad y^2 = 2px;$$

daraus folgt

$$(10.) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

$$(11.) \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{p^2 + y^2}{y^2} = \frac{p^2 + 2px}{y^2},$$

$$(11a.) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{y} \sqrt{p^2 + 2px},$$

$$(12.) \quad y ds = dx \sqrt{p^2 + 2px}.$$

Setzt man

$$(13.) \quad \sqrt{p^2 + 2px} = t, \quad \text{also} \quad p^2 + 2px = t^2, \quad p dx = t dt,$$

so wird

$$(14.) \quad y ds = \frac{t^2 dt}{p},$$

also nach Formel Nr. 136 der Tabelle

$$(15.) \quad O = 2\pi \int_0^x y ds = \frac{2\pi}{p} \int_{(0)}^{(x)} t^2 dt = \frac{2\pi}{3p} [(\sqrt{p^2 + 2px})^3]_0^x.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (9.)

$$(16.) \quad O = \frac{2\pi}{3p} [(p^2 + y^2) \sqrt{p^2 + y^2} - p^3].$$

Aufgabe 3. Man soll die Oberfläche des *Rotationsellipsoids* berechnen (Fig. 92).

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist

$$(17.) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0;$$

daraus folgt

$$(18.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$(19.) \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2} \\ = \frac{b^2(a^4 - e^2 x^2)}{a^4 y^2},$$

$$(20.) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2 y} \sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

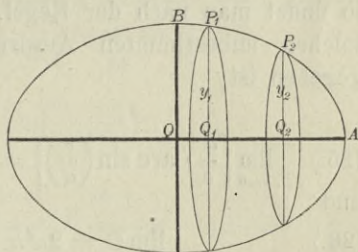
$$(21.) \quad y ds = \frac{b \cdot dx}{a^2} \sqrt{a^4 - e^2 x^2} = \frac{b \cdot d(ex)}{a^2 e} \sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

$$(22.) \quad O = \frac{2b\pi}{a^2 e} \int_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex) \sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 118 der Tabelle, wenn man a^2 mit a^4 und x mit ex vertauscht,

$$(23.) \quad O = \frac{2b\pi}{a^2 e} \left[\frac{ex}{2} \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \frac{a^4}{2} \arcsin \left(\frac{ex}{a^2} \right) \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Fig. 92.



Für x_2 gleich a wird

$$\sqrt{a^4 - e^2 x_2^2} = a \sqrt{a^2 - e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, indem man Gleichung (23.) mit 2 multiplicirt und x_1 gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$(24.) \quad O = \frac{2b\pi}{a^2 e} \left[a^2 b e + a^4 \arcsin \left(\frac{e}{a} \right) \right] \\ = 2b^2 \pi + \frac{2a^2 b \pi}{e} \arcsin \left(\frac{e}{a} \right).$$

Man kann sich davon überzeugen, dass der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotirende Ellipse in einen Kreis übergeht, wenn man also a gleich b und e gleich 0 macht. Allerdings nimmt dann das zweite Glied die Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Ausdrücken in D.-R., Seite 320 angegeben ist,

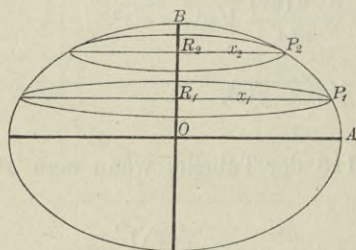
$$(25.) \quad \lim_{e=0} \left[\frac{a}{e} \cdot \arcsin \left(\frac{e}{a} \right) \right] = \lim_{z=0} \frac{\arcsin z}{z} = \lim_{z=0} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1$$

und

$$(26.) \quad \lim_{b=a} O = 2a^2 \pi + 2a^2 \pi = 4a^2 \pi.$$

Aufgabe 4. Man soll die Oberfläche des *Sphäroids* berechnen (Fig. 93).

Fig. 93.



Auflösung. Aus der Gleichung

(17.) der Ellipse folgt

$$(27.) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x},$$

$$(28.) \quad \left(\frac{ds}{dy} \right)^2 = 1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2} \\ = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{b^4 x^2} \\ = \frac{a^2 (b^4 + e^2 y^2)}{b^4 x^2},$$

$$(29.) \quad \frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2 x} \sqrt{b^4 + e^2 y^2},$$

$$(30.) \quad x ds = \frac{a \cdot dy}{b^2} \sqrt{b^4 + e^2 y^2} = \frac{a \cdot d(ey)}{b^2 e} \sqrt{b^4 + e^2 y^2},$$

$$(31.) \quad O = \frac{2a\pi}{b^2 e} \int_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey) \sqrt{b^4 + e^2 y^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 124 der Tabelle, wenn man a^2 mit b^4 und x mit ey vertauscht,

$$(32.) \quad O = \frac{2a\pi}{b^2 e} \left[\frac{ey}{2} \sqrt{b^4 + e^2 y^2} + \frac{b^4}{2} \ln \left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2 y^2}}{b^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}.$$

Für y_2 gleich b wird

$$\sqrt{b^4 + e^2 y_2^2} = b \sqrt{b^2 + e^2} = ab;$$

deshalb erhält man, indem man Gleichung (32.) mit 2 multiplicirt und y_1 gleich 0 setzt, für die ganze Oberfläche des Sphäroids

$$(33.) \quad O = \frac{2a\pi}{b^2 e} \left[ab^2 e + b^4 \ln \left(\frac{be + ab}{b^2} \right) \right] \\ = 2a^2 \pi + \frac{2ab^2 \pi}{e} \ln \left(\frac{a + e}{b} \right).$$

Nun ist

$$\frac{(a + e)^2}{b^2} = \frac{(a + e)^2}{a^2 - e^2} = \frac{a + e}{a - e},$$

folglich kann man den Ausdruck für O auch auf die Form bringen

$$(34.) \quad O = 2a^2 \pi + \frac{ab^2 \pi}{e} \ln \left(\frac{a + e}{a - e} \right).$$

Auch hier kann man sich davon überzeugen, dass der gefundene Ausdruck die Oberfläche der Kugel liefert, wenn die rotirende Ellipse in den Kreis übergeht, wenn man also a gleich b und e gleich 0 macht. Allerdings nimmt das zweite Glied wieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man aber

$$e = az,$$

so findet man nach der Regel, welche für die Berechnung von solchen unbestimmten Formen in D.-R., Seite 320 angegeben ist,

$$(35.) \lim_{e=0} \frac{a}{e} \ln \left(\frac{a+e}{a-e} \right) = \lim_{z=0} \frac{\ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)}{z} = \lim_{z=0} \frac{\ln(1+z) - \ln(1-z)}{z}$$

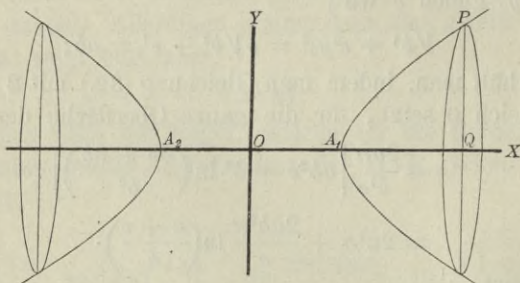
$$= \lim_{z=0} \frac{\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}}{1} = 2$$

und

$$(36.) \lim_{b=a} O = 2a^2\pi + a^2\pi \cdot 2 = 4a^2\pi.$$

Aufgabe 5. Man soll die Oberfläche des *zweischaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 94).

Fig. 94.



Auflösung. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$(37.) \quad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

daraus folgt

$$(38.) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

$$(39.) \quad \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(e^2x^2 - a^4)}{a^4y^2},$$

$$(40.) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2y} \sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(41.) \quad yds = \frac{b \cdot dx}{a^2} \sqrt{e^2x^2 - a^4} = \frac{b \cdot d(ex)}{a^2e} \sqrt{e^2x^2 - a^4},$$

$$(42.) \quad O = \frac{2b\pi}{a^2e} \int_{(x_1)}^{(x_2)} d(ex) \sqrt{e^2x^2 - a^4}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 124a der Tabelle, wenn man a^2 mit a^4 und x mit ex vertauscht,

$$(43.) \quad O = \frac{2b\pi}{a^2e} \left[\frac{ex}{2} \sqrt{e^2x^2 - a^4} - \frac{a^4}{2} \ln \left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a^2} \right) \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Setzt man x_1 gleich a und x_2 gleich x , so wird

$$\sqrt{e^2x_1^2 - a^4} = a\sqrt{e^2 - a^2} = ab,$$

und man erhält für die von dem Bogen AP bei der Rotation beschriebene Fläche

$$(44.) \quad O = \frac{bx\pi}{a^2} \sqrt{e^2x^2 - a^4} - b^2\pi - \frac{a^2b\pi}{e} \ln \left(\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^4}}{a(e+b)} \right).$$

Aufgabe 4. Man soll die Oberfläche des *einschaligen Rotationshyperboloids* berechnen (Fig. 95).

Auflösung. Aus der Gleichung

(37.) der Hyperbel folgt

$$(45.) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x},$$

$$(46.) \quad \left(\frac{ds}{dy} \right)^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{b^4x^2} \\ = \frac{a^2(b^4 + e^2y^2)}{b^4x^2},$$

$$(47.) \quad \frac{ds}{dy} = \frac{a}{b^2x} \sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

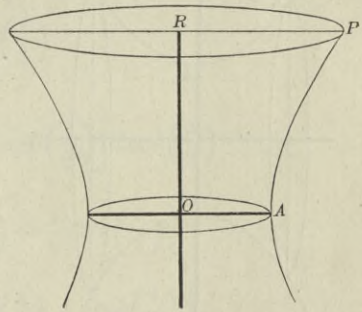
$$(48.) \quad xds = \frac{a \cdot dy}{b^2} \sqrt{b^4 + e^2y^2} = \frac{a \cdot d(ey)}{b^2e} \sqrt{b^4 + e^2y^2},$$

$$(49.) \quad O = \frac{2a\pi}{b^2e} \int_{(y_1)}^{(y_2)} d(ey) \sqrt{b^4 + e^2y^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 124 der Tabelle, wenn man a^2 mit b^4 und x mit ey vertauscht,

$$(50.) \quad O = \frac{2a\pi}{b^2e} \left[\frac{ey}{2} \sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{2} \ln \left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}.$$

Fig. 95.



Für y_1 gleich 0, y_2 gleich y erhält man daher

$$(51.) \quad O = \frac{ay\pi}{b^2} \sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{ab^2\pi}{e} \ln\left(\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right).$$

Aufgabe 7. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kettenlinie* mit der Gleichung

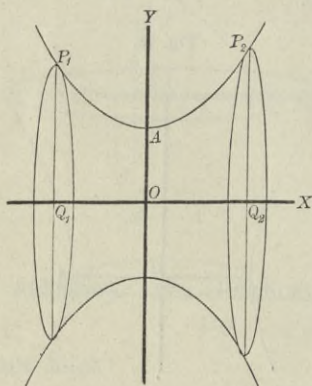
$$(52.) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \mathfrak{C}0\left(\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$(52a.) \quad \pm \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \mathfrak{S}in\left(\frac{x}{a}\right)$$

um die X -Axe entsteht (Fig. 96).

Fig. 96.



Auflösung. Aus Gleichung

(52.) folgt

$$(53.) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \mathfrak{C}0\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$(54.) \quad O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds$$

$$= \frac{a\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx$$

$$= \frac{a\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_{x_1}^{x_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (52.) und (52a.)

$$(55.) \quad O = \pi \left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + ax \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \pi \left[y \sqrt{y^2 - a^2} + ax \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \pi \left[y_2 \sqrt{y_2^2 - a^2} \mp y_1 \sqrt{y_1^2 - a^2} + a(x_2 - x_1) \right].$$

Hierbei gilt das obere oder das untere Vorzeichen, jenachdem x_1 positiv oder negativ ist.

Aufgabe 8. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Cykloide*

$$(56.) \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

um die *X*-Axe entsteht (Fig. 97).

Auflösung. Aus den Gleichungen (56.) folgt

$$(57.) \quad ds = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

$$(58.) \quad y ds = 2a^2(1 - \cos t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4a^2 \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Dies giebt

$$(59.) \quad \begin{aligned} O &= 16a^2\pi \int_0^t \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) d\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -16a^2\pi \int_{(0)}^{(t)} \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] d\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -16a^2\pi \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t \\ &= \frac{16a^2\pi}{3} \left[2 - 3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Für t gleich 2π erhält man die Oberfläche, welche bei der Rotation von dem ganzen Cykloidenbogen OHA beschrieben wird, nämlich

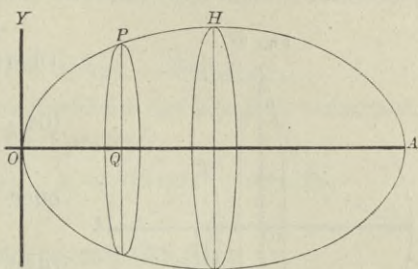
$$(60.) \quad O = \frac{16a^2\pi}{3} (2 + 3 - 1) = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Aufgabe 9. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Astroide*

$$(61.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

um die *X*-Axe entsteht (Fig. 98).

Fig. 97.

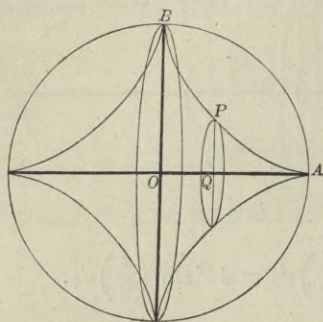


Auflösung. Aus den Gleichungen (61.) folgt

$$(62.) \quad ds = -3a \sin t \cos t dt,$$

$$(63.) \quad y ds = -3a^2 \sin^4 t \cos t dt.$$

Fig. 98.



Dies giebt für die ganze Oberfläche

$$(64.) \quad O = -12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt,$$

oder

$$(65.) \quad O = +12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot d(\sin t) \\ = \frac{12a^2\pi}{5} [\sin^5 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12a^2\pi}{5}.$$

Aufgabe 10. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch Rotation der *Kreisevolvente*

$$(66.) \quad x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

um die X-Axe entsteht.

Auflösung. Aus den Gleichungen (66.) folgt

$$(67.) \quad ds = a dt,$$

$$(68.) \quad y ds = a^2(t \sin t - t^2 \cos t) dt,$$

$$(69.) \quad O = 2a^2\pi \int_0^t (t \sin t - t^2 \cos t) dt.$$

Setzt man

(70.) $u = t^2, \quad dv = \cos t dt,$ also $du = 2t dt, \quad v = \sin t$
in die Formel Nr. 97 der Tabelle, nämlich in die Gleichung

$$(71.) \quad \int u dv = uv - \int v du$$

ein, so erhält man

$$(72.) \quad \int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt.$$

Setzt man dagegen

(73.) $u = t, \quad dv = \sin t dt,$ also $du = dt, \quad v = -\cos t$
in die Gleichung (71.) ein, so ergibt sich

$$(74.) \quad \int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t.$$

Indem man Gleichung (72.) mit -1 , Gleichung (74.) mit $+3$ multiplicirt und dann beide Gleichungen addirt, findet man

$$(75.) \quad \int t \sin t dt - \int t^2 \cos t dt = -t^2 \sin t - 3t \cos t + 3 \sin t.$$

Deshalb wird

$$(76.) \quad O = 2a^2\pi(3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t).$$

Aufgabe 11. Man soll die Oberfläche des Körpers berechnen, welcher durch die Rotation der *Cardioide*

$$(77.) \quad x = a[2 \cos t - \cos(2t)], \quad y = a[2 \sin t - \sin(2t)]$$

um die X-Axe entsteht.

Auflösung. Aus den Gleichungen (77.) folgt

$$(78.) \quad dx = 2a[-\sin t + \sin(2t)]dt = 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) dt,$$

$$(79.) \quad dy = 2a[\cos t - \cos(2t)]dt = 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt,$$

also

$$(80.) \quad ds^2 = 16a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt^2, \quad ds = 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

$$(81.) \quad yds = 4a^2[2 \sin t - \sin(2t)] \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ = 8a^2 \sin t (1 - \cos t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ = 32a^2 \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 64a^2 \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) d\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Dies giebt

$$(82.) \quad O = 128a^2\pi \int_0^{(\pi)} \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) d\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ = \frac{128a^2\pi}{5} \left[\sin^5\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^\pi = \frac{128a^2\pi}{5}.$$

IX. Abschnitt.

Rectification der Raumcurven.

§ 32.

Berechnung des Bogen-Elementes einer Raumcurve.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 138.)

Der Durchschnitt zweier krummen Flächen mit den Gleichungen

$$(1.) \quad F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

ist im Allgemeinen eine Raumcurve (vergl. § 143 der D.-R.). Indem man aus den beiden Gleichungen (1.) die Veränderliche z eliminirt, erhält man

$$(2.) \quad H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die XY -Ebene projicirt. Ebenso findet man durch Elimination der Veränderlichen y aus den Gleichungen (1.)

$$(3.) \quad K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die XZ -Ebene projicirt.

Setzt man noch für x irgend eine Function von einer vierten Veränderlichen t , so werden mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.) auch y und z Functionen von t , so dass man die Raumcurve auch durch die drei Gleichungen

$$(4.) \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

darstellen kann. Umgekehrt lassen sich drei solche Gleichungen auch immer als Raumcurve geometrisch deuten.

Um nun die Länge s des Curvenbogens AP zu bestimmen, nehme man auf der Curve zwei benachbarte Punkte P und P_1 an und lege durch dieselben Ebenen, parallel zu den Coordinaten-Ebenen (Fig. 99). Dann erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

und mit der Diagonale

$$(5.) \quad \overline{PP_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Rücken die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe, so fällt der Bogen PP_1 mit der Sehne PP_1 zusammen, die Grössen

$$PP_1, \quad x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

gehen bezw. über in

$$ds, \quad dx, \quad dy, \quad dz,$$

und aus der Gleichung (5.) ergibt sich

$$(6.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

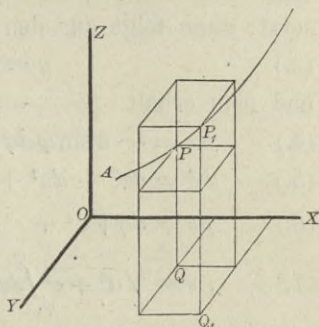
Daraus folgt für die Länge des Bogens AP

$$(7.) \quad s = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Für x gleich t wird z. B.

$$(8.) \quad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Fig. 99.



§ 33.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Bogenlänge bei der *cylindrischen Schraubenlinie* (vergl. D.-R., Seite 617 und 618)

$$(1.) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad y = x \operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right)$$

berechnen.

Auflösung. In dem vorliegenden Falle wird es zweckmässig sein, x , y und z als Functionen einer einzigen Veränderlichen φ auszudrücken, indem man

$$(2.) \quad x = a \cos \varphi$$

setzt; dann folgt aus den Gleichungen (1.)

$$(3.) \quad y = a \sin \varphi, \quad z = c\varphi,$$

und man erhält

$$(4.) \quad dx = -a \sin \varphi d\varphi, \quad dy = a \cos \varphi d\varphi, \quad dz = c d\varphi,$$

$$(5.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2,$$

$$(6.) \quad ds = d\varphi \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$(7.) \quad s = \sqrt{a^2 + c^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Dieses Resultat ergibt sich auch daraus, dass die Schraubenlinie entsteht, indem man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a\varphi$, $c\varphi$ und der Hypotenuse $\varphi \sqrt{a^2 + c^2}$ auf den Kreiscylinder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

so aufwickelt, dass die Kathete $a\varphi$ mit der Basiscurve (d. h. mit dem Kreise) zusammenfällt. Die Hypotenuse bildet dann die Schraubenlinie.

Aufgabe 2. Man soll die Bogenlänge bei der *conischen Spirale*

$$(8.) \quad x = e^{a\varphi} \cos \varphi, \quad y = e^{a\varphi} \sin \varphi, \quad z = ce^{a\varphi}$$

berechnen.

Auflösung. Die Projection der Curve in die XY -Ebene ist eine Curve, bei welcher φ der Winkel zwischen der X -Axe und dem Radius vector ist, denn aus den Gleichungen (8.) folgt

$$(9.) \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Projection hat daher die Gleichung

$$(10.) \quad x^2 + y^2 = r^2 = e^{2a\varphi}, \quad \text{oder} \quad r = e^{a\varphi},$$

d. h. die conische Spirale liegt auf einem Cylinder, welcher auf der XY -Ebene senkrecht steht und die *logarithmische Spirale* zur Basiscurve hat. Ausserdem folgt aus den Gleichungen (8.)

$$(11.) \quad x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

die conische Spirale liegt also auch auf einem Kreiskegel, dessen Spitze mit dem Anfangspunkt der Coordinaten, und dessen Axe mit der Z-Axe zusammenfällt.

Aus den Gleichungen (8.) findet man

$$(12.) \quad \begin{cases} dx = e^{a\varphi} (a \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi, \\ dy = e^{a\varphi} (a \sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi, \\ dz = e^{a\varphi} \cdot a c d\varphi. \end{cases}$$

Dies giebt

$$(13.) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2a\varphi} (a^2 + 1 + a^2 c^2) d\varphi^2,$$

$$(14.) \quad ds = e^{a\varphi} \cdot d\varphi \sqrt{1 + a^2 + a^2 c^2},$$

$$(15.) \quad s = \sqrt{1 + a^2 + a^2 c^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi} \cdot d\varphi = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 + a^2 c^2} (e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}),$$

oder

$$(16.) \quad s = \frac{z_2 - z_1}{ac} \sqrt{1 + a^2 + a^2 c^2}.$$

Für einen ganzen Umgang wird

$$(17.) \quad \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi, \quad z_2 = ce^{a(\varphi_1 + 2\pi)} = z_1 \cdot e^{2a\pi},$$

also

$$(18.) \quad s = \frac{z_1}{ac} (e^{2a\pi} - 1) \sqrt{1 + a^2 + a^2 c^2}.$$

Zweiter Theil.

X. Abschnitt.

Integration der gebrochenen rationalen Functionen.

§ 34.

Aecht gebrochene und unächt gebrochene rationale Functionen.

Wie schon in der Differential-Rechnung (Seite 15) gezeigt wurde, lässt sich jede *gebrochene* rationale Function als Quotient zweier *ganzen* rationalen Functionen darstellen, d. h. sie lässt sich auf die Form

$$(1.) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m}{ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}$$

bringen. Hierbei sind die Coefficienten $A, A_1, A_2, \dots, a, a_1, a_2, \dots$ beliebige constante Zahlen, und die Exponenten m und n sind beliebige *positive ganze* Zahlen. Den Coefficienten a der höchsten Potenz von x im Nenner kann man immer gleich 1 machen, weil man, wenn a von 1 verschieden ist, Zähler und Nenner des Bruches durch a dividiren kann. Der Nenner $f(x)$ soll daher in dem Folgenden immer die Form

$$(2.) \quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

haben.

Man theilt die gebrochenen rationalen Functionen in ächt *gebrochene* und *unächt gebrochene* rationale Functionen ein, und zwar *heisst eine gebrochene rationale Function* „*ächt gebrochen*“,

wenn der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners; sie heisst dagegen „unächt gebrochen“, wenn der Grad des Zählers grösser oder mindestens ebenso gross ist wie der Grad des Nenners.

Hiernach ist die durch Gleichung (1.) erklärte Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ ächt gebrochen, wenn $m < n$, und sie ist unächt gebrochen, wenn $m \geq n$ ist.

Satz 1. Jede unächt gebrochene rationale Function lässt sich als die Summe einer ganzen und einer ächt gebrochenen rationalen Function darstellen. Es ist also

$$(3.) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Function und der Grad von $\varphi(x)$ kleiner ist als der von $f(x)$.

Der Beweis des Satzes ergibt sich einfach durch Division. Ist nämlich bei der Division von $F(x)$ durch $f(x)$ der Quotient gleich $g(x)$ und der Rest gleich $\varphi(x)$, so ist

$$(4.) \quad F(x) = f(x)g(x) + \varphi(x),$$

wobei der Grad des Restes $\varphi(x)$ kleiner gemacht werden kann als der Grad des Divisors $f(x)$. Aus Gleichung (4.) ergibt sich sofort

$$(5.) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Am besten erkennt man das Verfahren aus einem Beispiele. Es sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3},$$

dann erhält man durch Division

$$x^3 + 9x^2 + 12x - 16 = (x^2 + 2x - 3)(x + 7) + (x + 5),$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline + 7x^2 + 15x - 16 \\ \hline + 7x^2 + 14x - 21 \\ \hline x + 5 \end{array}$$

oder

$$(6.) \quad \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3} = (x + 7) + \frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(7.) \quad \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 34x - 9}{x^2 - 3x + 4} = (2x^2 + 3x - 5) + \frac{7x + 11}{x^2 - 3x + 4}.$$

Sind $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ und $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$ zwei ächt gebrochene rationale Functionen, bei denen $f_1(x)$ den Grad n_1 und $f_2(x)$ den Grad n_2 haben möge, während der Grad von $\varphi_1(x)$ höchstens $n_1 - 1$ und der von $\varphi_2(x)$ höchstens $n_2 - 1$ sein kann, so ist

$$(8.) \quad \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x) \cdot f_2(x) + \varphi_2(x) \cdot f_1(x)}{f_1(x) \cdot f_2(x)}$$

wieder eine ächt gebrochene rationale Function, denn der Nenner hat den Grad $n_1 + n_2$, während $\varphi_1(x) \cdot f_2(x)$ und $\varphi_2(x) \cdot f_1(x)$ höchstens den Grad $n_1 + n_2 - 1$ haben. Dies giebt den Satz:

Satz 2. Die Summe zweier ächt gebrochenen rationalen Functionen ist wieder eine ächt gebrochene rationale Function.

Dieser Satz lässt sich unmittelbar auf die Summe von beliebig vielen ächt gebrochenen rationalen Functionen übertragen.

§ 35.

Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich von einander verschieden sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 139.)

Nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze kommt es bei der Integration der gebrochenen rationalen Functionen nur auf die Integration der ächt gebrochenen rationalen Functionen an; denn, wäre die vorgelegte Function unächt gebrochen, so könnte man sie in eine ganze und in eine ächt gebrochene rationale Function zerlegen. Die Integration der ganzen rationalen Functionen ist aber bereits auf Seite 18 in § 4 erledigt.

Die Integration der ächt gebrochenen rationalen Functionen kann man durch Zerlegung in Partialbrüche ausführen, wobei

der Generalnenner der einzelnen Partialbrüche $f(x)$ sein muss. Deshalb muss man hier die Zerlegung der ganzen rationalen Function $f(x)$ in lineare Factoren benutzen. In § 111 der Differential-Rechnung (Seite 498) war nämlich der Satz bewiesen worden: *Jede ganze rationale Function n^{ten} Grades lässt sich in n lineare Factoren zerlegen.* Es ist also

$$(1.) \quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

und $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2.) \quad f(x) = 0.$$

Für das Folgende muss man zwei Fälle unterscheiden, jenachdem diese Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sämmtlich von einander verschieden sind oder nicht.

Hier möge zunächst der *erste Fall* behandelt werden, wo die Wurzeln der Gleichung (2.) sämmtlich von einander verschieden sind. Um die vielen Indices zu vermeiden, mögen dabei diese Wurzeln mit a, b, c, \dots, k, l bezeichnet werden, so dass die Gleichung (1.) übergeht in

$$(3.) \quad f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k)(x - l).$$

Es soll dann gezeigt werden, dass die *ücht* gebrochene rationale Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ auf die Form

$$(4.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{K}{x - k} + \frac{L}{x - l}$$

gebracht werden kann, wobei die Zähler A, B, C, \dots, K, L der Partialbrüche constante Grössen sind.

Beweis. Es sei

$$(5.) \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{x - a} = (x - b)(x - c) \dots (x - k)(x - l),$$

dann ist $f_1(x)$ nur noch eine ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades; ferner sei

$$(6.) \quad A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}.$$

Nach diesen Festsetzungen wird

$$(7.) \quad \varphi(x) - Af_1(x) = \frac{\varphi(x)f_1(a) - \varphi(a)f_1(x)}{f_1(a)}.$$

gleich 0 für $x = a$, so dass nach Satz 2 in § 111 der D.-R. (Seite 497) $\varphi(x) - Af_1(x)$ durch $x - a$ theilbar sein muss. Man erhält also

$$(8.) \quad \varphi(x) - Af_1(x) = (x - a)\varphi_1(x),$$

oder

$$(8a.) \quad \varphi(x) = Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x),$$

wo $\varphi_1(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, deren Grad höchstens gleich $n - 2$ sein kann. Hieraus folgt

$$(9.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Af_1(x) + (x - a)\varphi_1(x)}{(x - a)f_1(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}.$$

Dabei ist $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ nach den gemachten Angaben wieder eine ächt gebrochene rationale Function, welche aber einfacher ist als $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, denn $f_1(x)$ ist nur noch vom Grade $n - 1$, und $\varphi_1(x)$ ist höchstens vom Grade $n - 2$.

In derselben Weise kann man jetzt zeigen, dass

$$(10.) \quad \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x - b} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)},$$

wo $f_2(x)$ vom Grade $n - 2$ und $\varphi_2(x)$ höchstens vom Grade $n - 3$ ist. So kann man fortfahren und findet die Gleichungen

$$(11.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C}{x - c} + \frac{\varphi_3(x)}{f_3(x)}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\varphi_{n-2}(x)}{f_{n-2}(x)} = \frac{K}{x - k} + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)}, \\ \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} = \frac{L}{x - l}. \end{array} \right.$$

Addirt man die Gleichungen (9.), (10.) und (11.) und lässt die Glieder fort, welche auf beiden Seiten der Gleichung stehen, so erhält man

$$(12.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{K}{x - k} + \frac{L}{x - l}.$$

Dieser Beweis liefert sogleich den Werth von A ; es ist nämlich

$$(13.) \quad A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\dots(a-k)(a-l)}.$$

In derselben Weise, wie A aus $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ berechnet ist, könnte man jetzt B aus $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$, C aus $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$, ... berechnen. Dazu würde aber erstens die Bildung von $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$, $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$, ... erforderlich sein, und zweitens könnte man leicht glauben, dass die durch Gleichung (12.) erfolgte Zerlegung in Partialbrüche verschiedene Resultate liefere, jenachdem man zuerst das Glied $\frac{A}{x-a}$ oder ein anderes absondert. Dies ist aber nicht der Fall, es gilt vielmehr der Satz: *Die Zerlegung in Partialbrüche ist eindeutig*; d. h. die Werthe von A, B, C, \dots, K, L sind unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie herleitet. Multiplicirt man nämlich Gleichung (12.) mit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l),$$

so erhält man

$$(14.) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= A(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l) \\ &+ B(x-a)(x-c)\dots(x-k)(x-l) \\ &+ C(x-a)(x-b)\dots(x-k)(x-l) \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ K(x-a)(x-b)\dots(x-i)(x-l) \\ &+ L(x-a)(x-b)\dots(x-i)(x-k). \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \dots, x = k, \quad x = l,$$

so wird

$$(15.) \quad \begin{cases} \varphi(a) = A(a-b)(a-c)\dots(a-k)(a-l), \\ \varphi(b) = B(b-a)(b-c)\dots(b-k)(b-l), \\ \varphi(c) = C(c-a)(c-b)\dots(c-k)(c-l), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(l) = L(l-a)(l-b)\dots(l-i)(l-k). \end{cases}$$

Dies giebt

$$(16.) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\dots(a-k)(a-l)}, \\ B = \frac{\varphi(b)}{(b-a)(b-c)\dots(b-k)(b-l)}, \\ C = \frac{\varphi(c)}{(c-a)(c-b)\dots(c-k)(c-l)}, \\ \dots\dots\dots \\ L = \frac{\varphi(l)}{(l-a)(l-b)\dots(l-i)(l-k)}. \end{array} \right.$$

Man erhält also für die Zähler der Partialbrüche genau dieselben Werthe, gleichviel ob man mit der Absonderung des betreffenden Partialbruches anfängt oder nicht.

Die Gleichungen (16.) lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Es war nämlich

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

wobei nach Gleichung (5.)

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-a},$$

oder, da $f'(a) = 0$ ist,

$$(17.) \quad f_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Hieraus folgt (vergl. D.-R., Formel Nr. 15 oder 120 der Tabelle)

$$f_1(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{1} = f'(a),$$

also

$$(18.) \quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}$$

und ebenso

$$(18a.) \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \quad \dots \quad K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)}, \quad L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

Hätten $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen gemeinsamen Theiler, z. B. den gemeinsamen Theiler $x-a$, so würde der erste Partialbruch

$\frac{A}{x-a}$ wegfallen, weil $\varphi(a)$ und deshalb auch A in diesem Falle gleich Null wären.

Für die Ausführung der numerischen Berechnung ist dasselbe Verfahren wie bei dem oben gegebenen Beweise am meisten geeignet; man schaffe also in Gleichung (12.) durch Multiplikation mit

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k)(x - l)$$

die Nenner fort, um die Gleichung (14.) zu erhalten, aus der sich dann die Werthe von $A, B, C, \dots K, L$ unmittelbar ergeben, indem man bezw.

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \dots x = k, \quad x = l$$

einsetzt.

Man kann allerdings zur Berechnung der Grössen $A, B, C, \dots K, L$ auch das folgende Verfahren anwenden, das später in dem allgemeineren Falle noch in Betracht kommen wird, wo die Wurzeln von $f(x)$ nicht alle von einander verschieden sind.

In Gleichung (14.) ist die linke Seite höchstens vom Grade $n - 1$; ebenso ist die rechte Seite eine Function von Grade $n - 1$, die man sich nach Potenzen von x geordnet denken kann. Da die Gleichung für alle Werthe von x gilt, so müssen die einzelnen Coefficienten der linken Seite gleich sein den gleichstelligen Coefficienten auf der rechten Seite, welche lineare Functionen (d. h. Functionen ersten Grades) der gesuchten Grössen $A, B, C, \dots K, L$ sind. Nun hat aber eine Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades im Ganzen n Coefficienten. Man erhält also n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, welche sich in diesem Falle stets auflösen lassen.

Am besten wird man dieses Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

Aufgabe 1. Man soll den Bruch $\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Man setzt den Nenner gleich Null und erhält dadurch die Gleichung

$$(19.) \quad x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf, so ergeben sich folgende Wurzeln

$$(20.) \quad a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2,$$

deshalb wird

$$(21.) \quad x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x + 3)(x - 2).$$

Hieraus folgt

$$(22.) \quad \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{15x^2 - 70x - 95}{(x - 7)(x + 3)(x - 2)} \\ = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 2}.$$

Um die Werthe von A , B und C zu ermitteln, schaffe man die Nenner fort, indem man Gleichung (22.) mit

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x + 3)(x - 2)$$

multiplicirt. Dadurch erhält man

$$(23.) \quad 15x^2 - 70x - 95 = A(x + 3)(x - 2) \\ + B(x - 7)(x - 2) + C(x - 7)(x + 3).$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von x gilt, so findet man daraus für $x = 7$

$$150 = 50A, \quad \text{oder} \quad A = 3,$$

für $x = -3$

$$250 = 50B, \quad \text{oder} \quad B = 5,$$

und für $x = 2$

$$-175 = -25C, \quad \text{oder} \quad C = 7,$$

folglich wird

$$(24.) \quad \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x - 7} + \frac{5}{x + 3} + \frac{7}{x - 2}.$$

Man kann auch die rechte Seite von Gleichung (23.) nach fallenden Potenzen von x ordnen und erhält dann

$$(25.) \quad 15x^2 - 70x - 95 \\ = x^2(A + B + C) + x(A - 9B - 4C) + (-6A + 14B - 21C).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x , folglich müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein, d. h. es muss

$$(26.) \quad A + B + C = 15,$$

$$(27.) \quad A - 9B - 4C = -70,$$

$$(28.) \quad -6A + 14B - 21C = -95$$

sein. Löst man diese Gleichungen zwischen A , B und C auf, so ergibt sich wieder

$$(29.) \quad A = 3, \quad B = 5, \quad C = 7.$$

Zu demselben Resultate kommt man natürlich auch durch Anwendung der Gleichungen (18.) und (18a.), indem man

$$(30.) \quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}$$

setzt. In dem vorliegenden Falle ist

$$(31.) \quad a = 7, \quad b = -3, \quad c = 2$$

und

$$(32.) \quad f'(x) = 3x^2 - 12x - 13;$$

dies giebt

$$(33.) \quad \begin{cases} A = \frac{\varphi(7)}{f'(7)} = \frac{15 \cdot 49 - 70 \cdot 7 - 95}{3 \cdot 49 - 12 \cdot 7 - 13} = \frac{150}{50} = 3, \\ B = \frac{\varphi(-3)}{f'(-3)} = \frac{15 \cdot 9 + 70 \cdot 3 - 95}{3 \cdot 9 + 12 \cdot 3 - 13} = \frac{250}{50} = 5, \\ C = \frac{\varphi(2)}{f'(2)} = \frac{15 \cdot 4 - 70 \cdot 2 - 95}{3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 13} = \frac{-175}{-25} = 7. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier ist

$$(34.) \quad f(x) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1),$$

also

$$(35.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

Um die Grössen A , B , C zu bestimmen, multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (35.) mit $x^3 - x$ und erhält

$$(36.) \quad x^2 + 1 = A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werthe von x , deshalb findet man für $x = 0$

$$(37.) \quad 1 = -A, \quad \text{oder} \quad A = -1,$$

für $x = 1$

$$(38.) \quad 2 = 2B, \quad \text{oder} \quad B = +1$$

und für $x = -1$

$$(39.) \quad 2 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = +1;$$

folglich wird

$$(40.) \quad \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Ordnet man die rechte Seite von Gleichung (36.) nach fallenden Potenzen von x , so erhält man

$$(36 a.) \quad x^2 + 1 = x^2(A + B + C) + x(B - C) - A.$$

Da die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so zerfällt die Gleichung (36 a.) in die Gleichungen

$$(41.) \quad \begin{cases} A + B + C = 1, \\ B - C = 0, \\ -A = 1. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt wieder

$$(42.) \quad A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, indem man

$$(43.) \quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)},$$

$$(44.) \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1,$$

$$(45.) \quad f'(x) = 3x^2 - 1, \quad \varphi(x) = x^2 + 1$$

setzt, denn es wird

$$(46.) \quad \begin{cases} A = \frac{\varphi(0)}{f'(0)} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1, \\ B = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} = \frac{1 + 1}{3 - 1} = +1, \\ C = \frac{\varphi(-1)}{f'(-1)} = \frac{1 + 1}{3 - 1} = +1. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Man soll die ächt gebrochene rationale Function

$$\frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad \text{in Partialbrüche zerlegen.}$$

Auflösung. Hier ist

$$(47.) \quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

multipliziert,

$$(48.) \quad 4x^2 - 15x + 19 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Dies giebt für $x = 1$

$$8 = 2A, \quad \text{oder} \quad A = 4,$$

für $x = 2$

$$5 = -B, \quad \text{oder} \quad B = -5$$

und für $x = 3$

$$10 = 2C, \quad \text{oder} \quad C = 5,$$

also

$$(49.) \quad \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

Aufgabe 4. Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{1}{1+x-x^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier muss man erst Zähler und Nenner des Bruches mit -1 multipliciren, damit der Coefficient von x^2 im Nenner gleich $+1$ wird. Dadurch erhält man

$$(50.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2 - x - 1}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(51.) \quad f(x) = x^2 - x - 1 = 0$$

sind

$$(52.) \quad a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Deshalb ist

$$(53.) \quad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})},$$

oder

$$(54.) \quad \frac{-1}{x^2 - x - 1} = \frac{2A}{2x - 1 - \sqrt{5}} + \frac{2B}{2x - 1 + \sqrt{5}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$(2x - 1 - \sqrt{5})(2x - 1 + \sqrt{5}) = 4(x^2 - x - 1),$$

so erhält man

$$-4 = 2A(2x - 1 + \sqrt{5}) + 2B(2x - 1 - \sqrt{5}),$$

oder

$$(55.) \quad -2 = 2x(A + B) + A(-1 + \sqrt{5}) + B(-1 - \sqrt{5});$$

daraus folgt

$$(56.) \quad \begin{cases} A + B = 0, \\ A(1 - \sqrt{5}) + B(1 + \sqrt{5}) = 2, \end{cases}$$

oder

$$(57.) \quad A = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = +\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dies giebt

$$(58.) \quad \frac{1}{1 + x - x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2x - 1 + \sqrt{5}} - \frac{1}{2x - 1 - \sqrt{5}} \right).$$

Aufgabe 5. Man soll die gebrochene rationale Function $\frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Die vorgelegte Function ist eine *unächt gebrochene*; deshalb muss man sie zunächst durch Division in eine *ganze* und eine *ächt gebrochene* rationale Function zerlegen. Dadurch erhält man

$$(59.) \quad \frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} = 2x + 5 + \frac{10x - 27}{x^2 - 6x + 7}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 = 0$$

sind

$$(60.) \quad a = 3 + \sqrt{2}, \quad b = 3 - \sqrt{2},$$

folglich wird

$$(61.) \quad f(x) = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}),$$

$$(62.) \quad \frac{10x - 27}{x^2 - 6x + 7} = \frac{A}{x - 3 - \sqrt{2}} + \frac{B}{x - 3 + \sqrt{2}},$$

$$(63.) \quad 10x - 27 = A(x - 3 + \sqrt{2}) + B(x - 3 - \sqrt{2}).$$

Für $x = 3 + \sqrt{2}$ erhält man daher

$$(64.) \quad 3 + 10\sqrt{2} = 2A\sqrt{2}, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3 + 10\sqrt{2}),$$

und für $x = 3 - \sqrt{2}$

$$(65.) \quad 3 - 10\sqrt{2} = -2B\sqrt{2}, \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3 + 10\sqrt{2}),$$

also

$$(66.) \quad \frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} = 2x + 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 - \sqrt{2}} + \frac{-3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}} \right).$$

Die angegebene Methode für die Zerlegung in Partialbrüche bleibt richtig, gleichviel ob die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reelle oder complexe Grössen*) sind.

Im letzteren Falle werden aber die Partialbrüche selbst eine complexe Form annehmen, die man vermeiden kann, wenn die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $f(x)$ reell sind.

Wie dies geschieht, möge zunächst die folgende Aufgabe lehren.

Aufgabe 6. Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner gleich Null setzt, erhält man die Gleichung

$$(67.) \quad x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = 0$$

mit den Wurzeln

$$(68.) \quad a = 5, \quad b = 3 + 2\sqrt{-1}, \quad c = 3 - 2\sqrt{-1},$$

oder, wenn man $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet,

$$(68 a.) \quad a = 5, \quad b = 3 + 2i, \quad c = 3 - 2i.$$

Demnach ist der Nenner der gebrochenen Function

$$(69.) \quad x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x - 5)(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i).$$

*) Vergl. D.-R., § 102—110.

Dies giebt

$$(70.) \quad \frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 3 - 2i} + \frac{C}{x - 3 + 2i},$$

und wenn man diese Gleichung mit $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$ multiplicirt,

$$(71.) \quad \begin{aligned} 13x^2 - 68x + 95 &= A(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i) \\ &\quad + B(x - 5)(x - 3 + 2i) \\ &\quad + C(x - 5)(x - 3 - 2i). \end{aligned}$$

Dies giebt für $x = 5$

$$(72.) \quad 80 = A(2 - 2i)(2 + 2i) = 8A, \quad \text{oder } A = 10,$$

für $x = 3 + 2i$

$$(73.) \quad -44 + 20i = (-2 + 2i)4i \cdot B, \quad \text{oder } B = \frac{3 - 8i}{2}$$

und für $x = 3 - 2i$

$$(74.) \quad -44 - 20i = -(-2 - 2i)4i \cdot C, \quad \text{oder } C = \frac{3 + 8i}{2},$$

folglich ist

$$(75.) \quad \frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3 - 8i}{2(x - 3 - 2i)} + \frac{3 + 8i}{2(x - 3 + 2i)}.$$

Da die beiden letzten Glieder conjugirt complexe Grössen sind, so muss ihre Summe reell sein*). In der That, es ist

$$\frac{3 - 8i}{2(x - 3 - 2i)} + \frac{3 + 8i}{2(x - 3 + 2i)} = \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13},$$

also

$$(76.) \quad \frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}.$$

Ganz allgemein gilt nun Folgendes. Sind in $f(x)$ die Coefficienten reell, so treten die complexen Wurzeln in $f(x) = 0$ bekanntlich paarweise auf**). Ist z. B. b gleich $g + hi$, so ist eine andere Wurzel, sie heisse c , gleich $g - hi$, also

$$(77.) \quad b = g + hi, \quad c = g - hi.$$

*) Vergl. D.-R., Seite 470, Satz 1.

***) Vergl. D.-R., § 113.

Sind nun auch in $\varphi(x)$ die Coefficienten reell, so wird

$$(78.) \quad \begin{cases} B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(g + hi)}{f'(g + hi)} = G + Hi, \\ C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{\varphi(g - hi)}{f'(g - hi)} = G - Hi, \end{cases}$$

folglich erhält man

$$(79.) \quad \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{G + Hi}{x-g-hi} + \frac{G - Hi}{x-g+hi} = \frac{2G(x-g) - 2Hi}{(x-g)^2 + h^2},$$

oder

$$(80.) \quad \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px + Q}{(x-g)^2 + h^2},$$

wo

$$(81.) \quad P = 2G, \quad Q = -2Gg - 2Hh$$

reelle Grössen sind.

Durch Anwendung der Gleichung (80.) kann man also bei der Partialbruch-Zerlegung die complexen Grössen ganz vermeiden.

In Aufgabe 6 hätte man z. B. setzen können

$$(82.) \quad \frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x-5} + \frac{Px + Q}{x^2 - 6x + 13}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x-5)(x^2 - 6x + 13),$$

so erhält man

$$(83.) \quad 13x^2 - 68x + 95 = A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x-5) \\ = x^2(A+P) + x(-6A-5P+Q) + (13A-5Q).$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$(84.) \quad \begin{cases} A + P = +13, \\ -6A - 5P + Q = -68, \\ 13A - 5Q = +95. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

$$(85.) \quad A = 10, \quad P = 3, \quad Q = 7,$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (82.) einsetzt,

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}.$$

Dieses Resultat stimmt natürlich mit dem früheren überein.

Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung durch die folgenden Ueberlegungen. Aus Gleichung (83.), nämlich aus der Gleichung

$$13x^2 - 68x + 95 = A(x^2 - 6x + 13) + P(x^2 - 5x) + Q(x - 5)$$

ergiebt sich für $x = 5$

$$80 = 8A, \text{ oder } A = 10,$$

und für

$$(86.) \quad x^2 - 6x + 13 = 0, \text{ oder } x^2 = 6x - 13$$

$$(87.) \quad 10x - 74 = (P + Q)x - 13P - 5Q.$$

Da Gleichung (86.) für *zwei* Werthe von x befriedigt wird, nämlich für

$$x = 3 + 2i \quad \text{und} \quad x = 3 - 2i,$$

so wird auch Gleichung (87.) für diese beiden Werthe von x befriedigt. Nun ist aber Gleichung (87.) nur vom *ersten* Grade, folglich müssen (nach D.-R., § 112, Satz 5a auf Seite 499) die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein, d. h. es wird

$$(88.) \quad P + Q = 10, \quad 13P + 5Q = 74, \quad \text{also} \quad P = 3, \quad Q = 7.$$

Wie sich dieses Verfahren allgemein durchführen lässt, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 7. Man soll die ächt gebrochene rationale Function

$$\frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60}$$

in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner

$$(89.) \quad x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = 0$$

setzt, erhält man für die Wurzeln dieser Gleichung

$$(90.) \quad a = 3, \quad b = 2 + 4i, \quad c = 2 - 4i.$$

Deshalb ist

$$(91.) \quad x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = (x - 3)(x - 2 - 4i)(x - 2 + 4i) \\ = (x - 3)(x^2 - 4x + 20),$$

$$(92.) \quad \frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 20}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $(x - 3)$ mal $(x^2 - 4x + 20)$, so ergibt sich

$$(93.) \quad 6x^2 - 25x + 89 = A(x^2 - 4x + 20) + P(x^2 - 3x) + Q(x - 3).$$

Daraus folgt für $x = 3$

$$(94.) \quad 68 = 17A, \quad \text{oder} \quad A = 4,$$

und für

$$(95.) \quad x^2 - 4x + 20 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 4x - 20$$

$$(96.) \quad -x - 31 = (P + Q)x - 20P - 3Q.$$

Indem man die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleichsetzt, findet man

$$(97.) \quad P + Q = -1, \quad 20P + 3Q = 31,$$

$$(98.) \quad P = 2, \quad Q = -3;$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (92.) einsetzt,

$$(99.) \quad \frac{6x^2 - 25x + 89}{x^3 - 7x^2 + 32x - 60} = \frac{4}{x - 3} + \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 20}.$$

Aufgabe 8. Man soll die ächt gebrochene rationale Function $\frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Indem man den Nenner

$$(100.) \quad f(x) = (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5) = 0$$

setzt, erhält man die vier complexen Wurzeln

$$(101.) \quad a = 2 + 3i, \quad b = 2 - 3i, \quad c = -1 + 2i, \quad d = -1 - 2i,$$

deshalb wird man den vorgelegten Bruch auf die Form

$$(102.) \quad \frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 13} + \frac{Rx + S}{x^2 + 2x + 5}$$

bringen. Hieraus erhält man durch Fortschaffung der Nenner

$$(103.) \quad 7x^3 - 6x^2 + 9x + 108 = (Px + Q)(x^2 + 2x + 5) \\ + (Rx + S)(x^2 - 4x + 13).$$

Dies giebt für

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 4x - 13, \quad x^3 = 3x - 52$$

$$(104.) \quad 6x - 178 = P(16x - 78) + Q(6x - 8).$$

Da die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich sein müssen, so gelten die Gleichungen

$$(105.) \quad 8P + 3Q = 3, \quad 39P + 4Q = 89,$$

folglich wird

$$(106.) \quad P = 3, \quad Q = -7.$$

Setzt man in Gleichung (103.)

$x^2 + 2x + 5 = 0$, oder $x^2 = -2x - 5$, $x^3 = -x + 10$,
so findet man in ähnlicher Weise die Gleichungen

$$(107.) \quad 14x + 208 = R(20x + 30) + S(-6x + 8),$$

$$(108.) \quad 10R - 3S = 7, \quad 15R + 4S = 104,$$

$$(109.) \quad R = 4, \quad S = 11,$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (102.) einsetzt,

$$(110.) \quad \frac{7x^3 - 6x^2 + 9x + 108}{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 13} + \frac{4x + 11}{x^2 + 2x + 5}$$

§ 36.

Zerlegung der ächt gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln besitzt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 140.)

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so kann man diese gleichen Wurzeln zusammenfassen und $f(x)$ auf die Form

$$(1.) \quad f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma \dots (x - k)^\kappa (x - l)^\lambda$$

bringen, wobei die Grössen a, b, c, \dots, k, l sämmtlich von einander verschieden sind, und

$$(2.) \quad \alpha + \beta + \gamma + \dots + \kappa + \lambda = n$$

ist. Auch möge vorausgesetzt werden, dass $\varphi(x)$ keinen Theiler mit $f(x)$ gemein habe, dass also $\varphi(x)$ für x gleich a, b, c, \dots, k oder l von Null verschieden sei. Man erkennt sogleich, dass in diesem Falle die Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{K}{x - k} + \frac{L}{x - l}$$

nicht mehr bestehen kann, weil der Generalnenner auf der rechten Seite nicht mehr gleich $f(x)$ ist.

Hier sei

$$(3.) \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-h)^\zeta (x-l)^\lambda$$

und

$$(4.) \quad A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)},$$

dann wird die ganze rationale Function

$$(5.) \quad \varphi(x) - A_1 f_1(x) = \frac{\varphi(x) f_1(a) - \varphi(a) f_1(x)}{f_1(a)}$$

gleich 0 für $x = a$, folglich ist sie theilbar durch $x - a$. Man erhält also

$$(6.) \quad \varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-a) \varphi_1(x),$$

oder

$$(6a.) \quad \varphi(x) = A_1 f_1(x) + (x-a) \varphi_1(x).$$

Da die ganze rationale Function $\varphi(x) - A_1 f_1(x)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, so kann $\varphi_1(x)$ höchstens eine ganze rationale Function vom Grade $n-2$ sein.

Nach diesen Angaben wird also

$$(7.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 f_1(x) + (x-a) \varphi_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

Man hat also von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ein Glied $\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}$ abgesondert, so dass nur noch eine ächt gebrochene Function $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$ übrig bleibt, bei welcher der Grad des Nenners nicht mehr n , sondern nur noch $n-1$ ist.

Ist $\alpha > 1$, so kann man dieses Verfahren wiederholen und erhält ebenso

$$(8.) \quad \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

also

$$(9.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

wo jetzt in der ächt gebrochenen Function $\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}$ der Grad des Nenners wieder um 1 kleiner ist.

Wendet man dieses Verfahren α -mal an, so ergibt sich

$$(10.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet schliesslich die Gleichung

$$(11.) \quad \begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ & + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_\lambda}{x-l}. \end{aligned}$$

Die Zähler $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, \dots, L_1, L_2, \dots, L_\lambda$ dieser Partialbrüche berechnet man, indem man beide Seiten der Gleichung (11.) mit dem Generalnenner $f(x)$ multiplicirt, nach Potenzen von x ordnet und die gleichstelligen Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Dies giebt dann, wie man leicht bestätigen kann, n lineare Gleichungen mit den n Unbekannten

$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, \dots, L_1, L_2, \dots, L_\lambda,$$

und zwar sind diese Gleichungen immer lösbar.

Aus dem Umstande, dass diese n linearen Gleichungen mit n Unbekannten nur *eine* Lösung besitzen, kann man wieder schliessen, dass auch in diesem Falle die Partialbruch-Zerlegung nur auf *eine* Weise geschehen kann, d. h. dass man dasselbe Resultat erhält, gleichviel ob man zuerst die Partialbrüche

$$\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$

absondert, oder ob man mit der Absonderung der Partialbrüche in einer späteren Zeile von Gleichung (11.) anfängt.

Die Rechnung wird ziemlich umständlich, wenn n eine grosse Zahl ist; dann kommt man schneller zum Ziele, indem man, der Gleichung (4.) entsprechend, zunächst

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}$$

berechnet und das gleiche Verfahren auf die Ermittlung von $B_1, C_1, \dots, K_1, L_1$ anwendet. Dies geschieht am einfachsten, indem man in Gleichung (11.) durch Multiplication mit

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma \dots (x - k)^\alpha (x - l)^2$$

die Nenner fortschafft und dann der Reihe nach

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \dots, x = k, \quad x = l$$

setzt. Die Berechnung der übrigen Zähler der Partialbrüche geschieht dann nach dem zuerst beschriebenen Verfahren, ist aber viel leichter geworden, weil man nur noch $n - m$ lineare Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten hat, wobei m die Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln a, b, c, \dots, k, l der Gleichung $f(x) = 0$ ist.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dieser Angaben dienen.

Aufgabe 1. Man soll die gebrochene rationale Function $\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x - 7)(x - 5)^3}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. In diesem Falle muss man

$$(12.) \quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x - 7)(x - 5)^3} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B_1}{(x - 5)^3} + \frac{B_2}{(x - 5)^2} + \frac{B_3}{x - 5}$$

setzen. Dies giebt, wenn man mit $(x - 7)(x - 5)^3$ multiplicirt,

$$(13.) \quad 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619 = A(x - 5)^3 + B_1(x - 7) + B_2(x - 7)(x - 5) + B_3(x - 7)(x - 5)^2,$$

oder

$$(14.) \quad \begin{aligned} 4x^3 - 63x^2 + 338x - 619 &= x^3(A + B_3) \\ &+ x^2(-15A + B_2 - 17B_3) + x(75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3) \\ &+ (-125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3). \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$(15.) \quad \left\{ \begin{aligned} A + B_3 &= 4, \\ -15A + B_2 - 17B_3 &= -63, \\ 75A + B_1 - 12B_2 + 95B_3 &= 338, \\ -125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 &= -619. \end{aligned} \right.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

$$(16.) \quad A = 4, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -3, \quad B_3 = 0,$$

so dass man erhält

$$(17.) \quad \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{4}{x-7} + \frac{2}{(x-5)^3} - \frac{3}{(x-5)^2}.$$

Wendet man das andere Verfahren an, indem man in Gleichung (13.) zuerst $x = 7$ setzt, so findet man

$$(18.) \quad 32 = 8A, \quad \text{oder} \quad A = 4;$$

und für $x = 5$ findet man aus Gleichung (13.)

$$(19.) \quad -4 = -2B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2.$$

Zur Ermittlung von B_2 und B_3 braucht man jetzt nur noch *zwei* Gleichungen. Deshalb wählt man von den *vier* Gleichungen (15.), welche zur Verfügung stehen, diejenigen aus, welche sich am leichtesten herleiten lassen; d. h. man braucht jetzt gar nicht mehr die Gleichung (14.) vollständig zu bilden, sondern berechnet von der rechten Seite dieser Gleichung nur den Coefficienten von x^3 und das constante Glied. Daraus ergeben sich in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (15.) die Gleichungen

$$(20.) \quad A + B_3 = 4,$$

$$(21.) \quad -125A - 7B_1 + 35B_2 - 175B_3 = -619,$$

die sich aber mit Hülfe der Gleichungen (18.) und (19.) auf

$$(20a.) \quad B_3 = 0,$$

$$(21a.) \quad 35B_2 - 175B_3 = -105, \quad \text{oder} \quad B_2 = -3$$

reduciren. Auf diese Weise wird man wieder zu dem in Gleichung (17.) angegebenen Resultate geführt.

Aufgabe 2. Man soll den Bruch $\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier muss man

$$(22.) \quad \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}$$

setzen und erhält durch Multiplication mit

$$(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$$

$$(23.) \quad 3x^3 + 10x^2 - x = A_1(x + 1)^2 + A_2(x + 1)^2(x - 1) \\ + B_1(x - 1)^2 + B_2(x + 1)(x - 1)^2.$$

Hieraus ergibt sich für $x = 1$

$$(24.) \quad 12 = 4A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 3,$$

und für $x = -1$

$$(25.) \quad 8 = 4B_1, \quad \text{oder} \quad B_1 = 2.$$

Zur Ermittlung von A_2 und B_2 suche man auf der rechten Seite von Gleichung (23.) den Coefficienten von x^3 und das constante Glied auf und setze die gefundenen Grössen den gleichstelligen Coefficienten auf der linken Seite gleich. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen

$$(26.) \quad A_2 + B_2 = 3,$$

$$(27.) \quad A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (24.) und (25.)

$$(27a.) \quad -A_2 + B_2 = -5,$$

also

$$(28.) \quad A_2 = 4, \quad B_2 = -1,$$

so dass Gleichung (22.) übergeht in

$$(29.) \quad \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{4}{x - 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1}.$$

Dieses Verfahren gilt auch hier noch, wenn die Wurzeln $a, b, c, \dots k, l$ sämmtlich oder theilweise complex sind. Man kann aber, wenn in $f(x)$ und $g(x)$ die Coefficienten sämmtlich reell sind, das Resultat gleichfalls auf eine reelle Form bringen. Ist z. B. b gleich $g + hi$, so wird eine andere Wurzel, sie heisse c , gleich $g - hi$, und es wird β gleich γ sein, wie in der Algebra bewiesen wird (Vergl. D.-R., § 113). Nun folgt aber aus der Bildung der Grössen $B_1, B_2, \dots B_\beta$ und $C_1, C_2, \dots C_\gamma$, dass man die letzteren durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ aus den ersteren erhält. Ist also

$$(30.) \quad B_1 = G_1 + H_1i, \quad B_2 = G_2 + H_2i, \dots B_\beta = G_\beta + H_\beta i,$$

so wird

$$(31.) \quad C_1 = G_1 - H_1i, \quad C_2 = G_2 - H_2i, \dots C_\gamma = C_\beta = G_\beta - H_\beta i.$$

Deshalb werden die Summen

$$(32.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{C_1}{(x-c)^\beta}, \\ \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{C_\beta}{x-c} \end{array} \right.$$

sämmtlich reell.

Man kann auch hier in der Zwischenrechnung die complexen Grössen ganz vermeiden. Wenn man nämlich die Ausdrücke (32.) auf gleichen Nenner bringt und addirt, so erhält man

man $\frac{F(x)}{[(x-g)^2+h^2]^\beta}$, wo der Nenner vom Grade 2β , der Zähler aber höchstens vom Grade $2\beta-1$ ist. (Vergl. Satz 2 in § 34.) Jetzt findet man durch Division

$$(33.) \quad F(x) = [(x-g)^2+h^2] F_1(x) + P_1x + Q_1,$$

also

$$(34.) \quad \frac{F(x)}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} = \frac{P_1x + Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}}.$$

Ebenso findet man durch Division

$$(35.) \quad \frac{F_1(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} = \frac{P_2x + Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \frac{F_2(x)}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-2}}.$$

In derselben Weise kann man fortfahren und erhält schliesslich

$$(36.) \quad \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \dots + \frac{C_\beta}{x-c} \\ = \frac{P_1x + Q_1}{[(x-g)^2+h^2]^\beta} + \frac{P_2x + Q_2}{[(x-g)^2+h^2]^{\beta-1}} + \dots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x-g)^2+h^2}.$$

Die Berechnung der Grössen $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_\beta, Q_\beta$ erfolgt jetzt wieder wie früher, indem man den Ausdruck, welcher sich für $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch Partialbruch-Zerlegung ergibt, vorläufig aber noch die unbestimmten Grössen $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_\beta, Q_\beta$ u. s. w., enthält, mit $f(x)$ multiplicirt, nach Potenzen

von x ordnet und die einzelnen Coefficienten den gleichstelligen Coefficienten von $\varphi(x)$ gleichsetzt. Dadurch erhält man n lineare Gleichungen mit n Unbekannten, deren Auflösung nach diesen Unbekannten immer möglich ist.

Man kann aber auch hier die Rechnung wesentlich abkürzen, indem man

$$(x - g)^2 + h^2 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 = 2gx - g^2 - h^2$$

setzt. Dadurch kann man die eben beschriebene Gleichung auf den ersten Grad bringen und durch Gleichsetzung der gleichstelligen Coefficienten die beiden darin verbliebenen Unbekannten P_1 und Q_1 berechnen.

Am besten wird dieses Verfahren durch Beispiele erläutert.

Aufgabe 3. Man soll die ächt gebrochene rationale Function

$$\frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} \text{ in Partialbrüche zerlegen.}$$

Auflösung. Nach dem Gesagten muss man hier

$$(37.) \quad \frac{x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{P_2x + Q_2}{x^2 + 1}$$

setzen. Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit $(x - 1)$ mal $(x^2 + 1)^2$ multiplicirt, erhält man

$$(38.) \quad x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + (P_1x + Q_1)(x - 1) + (P_2x + Q_2)(x - 1)(x^2 + 1),$$

oder, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von x ordnet,

$$(39.) \quad x + 1 = x^4(A + P_2) + x^3(-P_2 + Q_2) + x^2(2A + P_1 + P_2 - Q_2) + x(-P_1 + Q_1 - P_2 + Q_2) + (A - Q_1 - Q_2).$$

Durch Gleichsetzung der gleichstelligen Coefficienten ergibt sich hieraus

$$(40.) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + P_2 = 0, \\ -P_2 + Q_2 = 0, \\ 2A + P_1 + P_2 - Q_2 = 0, \\ -P_1 + Q_1 - P_2 + Q_2 = 1, \\ A - Q_1 - Q_2 = 1. \end{array} \right.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so findet man

$$(41.) \quad A = \frac{1}{2}, \quad P_1 = -1, \quad Q_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{1}{2}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2},$$

also

$$(42.) \quad \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1} \right).$$

Die Rechnung wird wesentlich abgekürzt, wenn man in Gleichung (38.) zunächst $x = 1$ setzt. Dadurch erhält man

$$(43.) \quad 2 = 4A, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Für $x^2 = -1$ geht sodann Gleichung (38.) über in

$$(44.) \quad x+1 = (P_1x + Q_1)(x-1) = (-P_1 + Q_1)x - P_1 - Q_1,$$

und daraus folgt

$$(45.) \quad -P_1 + Q_1 = 1, \quad -P_1 - Q_1 = 1,$$

$$(46.) \quad P_1 = -1, \quad Q_1 = 0.$$

Um noch die beiden Grössen P_2 und Q_2 zu finden, braucht man auf der rechten Seite von Gleichung (38.) nur diejenigen beiden Coefficienten zu berechnen, welche sich am leichtesten ermitteln lassen, nämlich die Coefficienten von x^4 und x^0 . Wenn man diese Grössen den gleichstelligen Coefficienten auf der linken Seite von Gleichung (38.) gleichsetzt, erhält man

$$(47.) \quad A + P_2 = 0, \quad A - Q_1 - Q_2 = 1,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (43.) und (46.)

$$(48.) \quad P_2 = -\frac{1}{2}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich wieder Gleichung (42.).

Aufgabe 4. Man soll die ächt gebrochene rationale Function

$$\frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}$$

in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Hier ist zu setzen

$$(49.) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{P_2x + Q_2}{x^2+2x+2},$$

folglich wird

$$(50.) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8 \\ &= A_1(x^2+2x+2)^2 + A_2(x-2)(x^2+2x+2)^2 \\ &\quad + (P_1x+Q_1)(x-2)^2 + (P_2x+Q_2)(x-2)^2(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

Dies giebt für $x = 2$

$$(51.) \quad 100 = 100A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 1$$

und für $x^2 + 2x + 2 = 0$, oder $x^2 = -2x - 2$

$$10x + 30 = (P_1x + Q_1)(-6x + 2) = (14P_1 - 6Q_1)x + (12P_1 + 2Q_1),$$

also

$$(52.) \quad 7P_1 - 3Q_1 = 5, \quad 6P_1 + Q_1 = 15,$$

$$(53.) \quad P_1 = 2, \quad Q_1 = 3.$$

Setzt man jetzt noch die Coefficienten von x^5 , x^4 und x^0 auf beiden Seiten von Gleichung (50.) einander gleich, so erhält man

$$A_2 + P_2 = 3, \quad A_1 + 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 2,$$

$$4A_1 - 8A_2 + 4Q_1 + 8Q_2 = -8,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (51.) und (53.)

$$(54.) \quad A_2 + P_2 = 3, \quad 2A_2 - 2P_2 + Q_2 = 1, \quad A_2 - Q_2 = 3,$$

also

$$(55.) \quad A_2 = 2, \quad P_2 = 1, \quad Q_2 = -1.$$

Indem man diese Werthe in die Gleichung (49.) einsetzt, erhält man

$$(56.) \quad \frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} =$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche ist vorausgesetzt, dass man die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ermittelt hat.

Weitere Uebungs-Aufgaben kann sich der Anfänger sehr leicht selbst stellen, indem er beliebig gewählte Partialbrüche auf den gemeinsamen Generalnenner bringt und dadurch die

Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ bildet.

§ 37.

Integration der Functionen $\frac{A}{x-a} dx$ und $\frac{A}{(x-a)^n} dx$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 27, 29, 29a, 86, 87, 89, 91 und 141.)

Die Zerlegung in Partialbrüche macht es möglich, jede gebrochene rationale Function zu integriren, denn man kann sie nach den Ausführungen der vorhergehenden Paragraphen stets (nöthigenfalls nach Absonderung einer ganzen rationalen Function) in eine Summe verwandeln, deren einzelne Glieder entweder die Form $\frac{A}{x-a}$ oder $\frac{A}{(x-a)^n}$ haben. Diese Ausdrücke kann man aber sehr leicht integriren.

Setzt man nämlich

(1.)
$$x - a = t, \quad \text{also} \quad dx = dt,$$

so wird nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dt}{t} = A \ln t,$$

oder in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 27 der Tabelle

(2.)
$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(x-a).$$

Ferner wird, wenn n von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 9 der Tabelle, indem man $m = -n$ setzt,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{dt}{t^n} = A \int t^{-n} dt = A \frac{t^{-n+1}}{-n+1},$$

oder

(3.)
$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich hieraus Formel Nr. 89 der Tabelle, nämlich

(3a.)
$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b}.$$

Wendet man dies auf die in § 35 und 36 behandelten Beispiele an, so findet man ohne Weiteres die Lösung der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1.
$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 1 in § 35 ist

$$\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx &= \int \frac{3}{x-7} dx + \int \frac{5}{x+3} dx + \int \frac{7}{x-2} dx \\ &= 3 \ln(x-7) + 5 \ln(x+3) + 7 \ln(x-2) \\ &= \ln[(x-7)^3(x+3)^5(x-2)^7]. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.
$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 2 in § 35 ist

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1) \\ &= \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
$$\int \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = ?$$

Auflösung. Nach Aufgabe 3 in § 35 ist

$$\frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 15x + 19}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= 4 \int \frac{dx}{x-1} - 5 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x-3} \\ &= 4 \ln(x-1) - 5 \ln(x-2) + 5 \ln(x-3). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 4 in § 35 ist

$$\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{2x-1+\sqrt{5}} - \frac{2}{2x-1-\sqrt{5}} \right),$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\int \frac{2dx}{2x-1+\sqrt{5}} - \int \frac{2dx}{2x-1-\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\ln(2x-1+\sqrt{5}) - \ln(2x-1-\sqrt{5})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. $\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 5 in § 35 ist

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} = 2x + 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 - \sqrt{2}} + \frac{-3 + 10\sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}} \right),$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 7x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 7} dx &= 2 \int x dx + 5 \int dx \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\int \frac{(3 + 10\sqrt{2})dx}{x - 3 - \sqrt{2}} + \int \frac{(-3 + 10\sqrt{2})dx}{x - 3 + \sqrt{2}} \right] \\ &= x^2 + 5x + \frac{1}{2\sqrt{2}} [(3 + 10\sqrt{2}) \ln(x - 3 - \sqrt{2}) \\ &\quad + (-3 + 10\sqrt{2}) \ln(x - 3 + \sqrt{2})] \\ &= x^2 + 5x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[3 \ln \left(\frac{x - 3 - \sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}} \right) + 10\sqrt{2} \ln(x^2 - 6x + 7) \right] \\ &= x^2 + 5x + \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - 3 - \sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}} \right) + 5 \ln(x^2 - 6x + 7). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. $\int \frac{(13x^2 - 68x + 95)dx}{(x-5)(x^2 - 6x + 13)} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 6 in § 35 ist

$$\frac{13x^2 - 68x + 95}{(x-5)(x^2 - 6x + 13)} = \frac{10}{x-5} + \frac{3-8i}{2(x-3-2i)} + \frac{3+8i}{2(x-3+2i)},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{(13x^2 - 68x + 95)dx}{(x-5)(x^2 - 6x + 13)} &= 10 \int \frac{dx}{x-5} + \frac{3-8i}{2} \int \frac{dx}{x-3-2i} \\ &\quad + \frac{3+8i}{2} \int \frac{dx}{x-3+2i} \\ &= 10 \ln(x-5) + \frac{3-8i}{2} \ln(x-3-2i) \\ &\quad + \frac{3+8i}{2} \ln(x-3+2i). \end{aligned}$$

Dieses Resultat befriedigt deshalb nicht, weil es complexe Grössen enthält, obgleich man es, wie später gezeigt werden soll, auf eine reelle Form bringen kann.

Aufgabe 7. $\int \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 1 in § 36 ist

$$\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} = \frac{4}{x-7} + \frac{2}{(x-5)^3} - \frac{3}{(x-5)^2},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3} dx &= 4 \int \frac{dx}{x-7} + 2 \int \frac{dx}{(x-5)^3} \\ &\quad - 3 \int \frac{dx}{(x-5)^2} \\ &= 4 \ln(x-7) - \frac{1}{(x-5)^2} + \frac{3}{x-5} \\ &= 4 \ln(x-7) + \frac{3x-16}{(x-5)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. $\int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2-1)^2} dx = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 2 in § 36 ist

$$\frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx &= 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 4 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &\quad - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{-3}{x-1} + 4 \ln(x-1) - \frac{2}{x+1} - \ln(x+1) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)^4}{x+1}\right) - \frac{5x+1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Die einfachsten Fälle der Partialbruch-Zerlegung sind schon im ersten Theile (§ 13) berücksichtigt worden. So ergibt sich z. B. Formel Nr. 29a der Tabelle, nämlich

$$(4.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right),$$

ohne Weiteres durch Partialbruch-Zerlegung.

In gleicher Weise ergab sich auch Formel Nr. 87 der Tabelle, nämlich

$$(5.) \quad \int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)$$

durch Partialbruch-Zerlegung.

Daraus findet man dann auch Formel Nr. 86 der Tabelle, denn bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung

$$(6.) \quad x^2 + 2bx + c = 0$$

mit x_1 und x_2 , so wird

$$(7.) \quad \begin{cases} x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, & x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \\ x_1 - x_2 = 2\sqrt{b^2 - c}, \end{cases}$$

$$(8.) \quad (x-x_1)(x-x_2) = x^2 + 2bx + c,$$

so dass Gleichung (5.) übergeht in

$$(9.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right).$$

Ebenso erhielt man auch Formel Nr. 91 der Tabelle, nämlich

$$(10.) \quad \int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} [(Px_1 + Q) \ln(x - x_1) - (Px_2 + Q) \ln(x - x_2)]$$

durch Partialbruch-Zerlegung.

§ 38.

Integration der Functionen

$$\frac{dx}{(x-g)^2+h^2} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 88, 142 bis 145.)

Nach Formel Nr. 28 der Tabelle war

$$(1.) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Auf den Zusammenhang dieser Formel mit Nr. 29 und 29a der Tabelle, nämlich mit

$$(2.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right)$$

oder

$$(2a.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right),$$

ist bereits auf Seite 62 hingewiesen worden.

Aus Formel Nr. 28 der Tabelle ergibt sich Formel Nr. 88, nämlich

$$(3.) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \right),$$

indem man das Integral auf die Form

$$\int \frac{d(x+b)}{(x+b)^2 + c - b^2}$$

bringt und $c - b^2$ gleich a^2 setzt. Dieses Integral geht in

$$(4.) \int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{d(x-g)}{(x-g)^2+h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-g}{h} \right)$$

über, wenn man

$$(5.) \quad b = -g, \quad c - b^2 = h^2$$

setzt. Noch unmittelbarer erhält man dieses Resultat durch die Substitution

$$(6.) \quad x - g = ht, \quad dx = hdt,$$

dann wird nämlich in Uebereinstimmung mit Gleichung (4.)

$$(7.) \int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2} = \int \frac{hdt}{h^2(t^2+1)} = \frac{1}{h} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} t \\ = \frac{1}{h} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x-g}{h} \right).$$

Dieselbe Substitution kann man anwenden, um $\int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ zu berechnen für den Fall, wo $n > 1$ ist; dann erhält man nämlich

$$(8.) \int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} = \int \frac{hdt}{h^{2n}(1+t^2)^n} = \frac{1}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Nun ist

$$(9.) \frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^n},$$

folglich wird

$$(10.) \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}.$$

Setzt man jetzt in Formel Nr. 97 der Tabelle, nämlich in

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

$$u = \frac{t}{2}, \quad dv = \frac{2t dt}{(1+t^2)^n} = \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n},$$

also

$$du = \frac{1}{2} dt, \quad v = \frac{-1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}},$$

so erhält man

$$(11.) \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},$$

und wenn man diese Gleichung von Gleichung (10.) subtrahirt,

$$(12.) \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = + \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Durch diese Formel ist das gesuchte Integral auf ein einfacheres zurückgeführt. Durch wiederholte Anwendung der Formel kommt man schliesslich auf

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t.$$

Beispiel für $n = 3$.

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t,$$

also

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)^3} &= \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t \\ &= \frac{t(3t^2+5)}{8(t^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

Man kann das gesuchte Integral auch auf Formel Nr. 101 der Tabelle zurückführen, indem man

$$(13.) \quad t = \operatorname{tg} z, \quad \text{also} \quad z = \operatorname{arctg} t, \quad dz = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$(14.) \quad 1+t^2 = 1+\operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \frac{1}{1+t^2} = \cos^2 z, \quad \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} = \cos^{2n-2} z$$

setzt, dann wird mit Rücksicht auf Formel Nr. 101 der Tabelle

$$\begin{aligned} (15.) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \int \cos^{2n-2} z dz \\ &= \sin z \left[\frac{1}{2n-2} \cos^{2n-3} z + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \cos^{2n-5} z \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cos z \right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} z. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(16.) \cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z \cos z = \frac{t}{1+t^2}.$$

Für $n = 3$ erhält man z. B. wieder

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)^3} &= \sin z \left(\frac{1}{4} \cos^3 z + \frac{3}{4 \cdot 2} \cos z \right) + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} z \\ &= \frac{t}{1+t^2} \left(\frac{1}{4(1+t^2)} + \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

§ 39.

Integration der Functionen

$$\frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2} \quad \text{und} \quad \frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}.$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 146 und 147.)

Setzt man in Formel Nr. 90 der Tabelle, nämlich in

$$\int \frac{(Px+Q)dx}{x^2+2bx+c} = \frac{P}{2} \ln(x^2+2bx+c) + (Q-Pb) \int \frac{dx}{x^2+2bx+c},$$

$$(1.) \quad b = -g, \quad c - b^2 = h^2,$$

so geht sie über in

$$(2.) \int \frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2} = \frac{P}{2} \ln[(x-g)^2+h^2] + (Pg+Q) \int \frac{dx}{(x-g)^2+h^2};$$

dies giebt nach Formel Nr. 142 der Tabelle

$$(3.) \int \frac{(Px+Q)dx}{(x-g)^2+h^2} = \frac{P}{2} \ln[(x-g)^2+h^2] + \frac{Pg+Q}{h} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-g}{h} \right).$$

In ähnlicher Weise kann man $\int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}$ auffinden, wenn $n > 1$ vorausgesetzt wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} (4.) \int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} &= \int \frac{P(x-g) + Pg + Q}{[(x-g)^2+h^2]^n} dx \\ &= \frac{P}{2} \int \frac{2(x-g)dx}{[(x-g)^2+h^2]^n} + (Pg+Q) \int \frac{dx}{[(x-g)^2+h^2]^n}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$(5.) \quad (x - g)^2 + h^2 = y, \quad \text{also} \quad 2(x - g)dx = dy,$$

und

$$(6.) \quad x - g = ht, \quad \text{also} \quad dx = hdt,$$

so geht Gleichung (4.) über in

$$\int \frac{(Px + Q)dx}{[(x - g)^2 + h^2]^n} = \frac{P}{2} \int \frac{dy}{y^n} + \frac{Pg + Q}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n};$$

dies giebt

$$(7.) \quad \int \frac{(Px + Q)dx}{[(x - g)^2 + h^2]^n} = -\frac{P}{(2n - 2)[(x - g)^2 + h^2]^{n-1}} \\ + \frac{Pg + Q}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n},$$

wobei das Integral auf der rechten Seite nach Formel Nr. 144 oder 145 der Tabelle berechnet werden kann.

§ 40.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. $\int \frac{(13x^2 - 68x + 95)dx}{(x - 5)(x^2 - 6x + 13)} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 6 in § 35 ist

$$(1.) \quad \frac{13x^2 - 68x + 95}{(x - 5)(x^2 - 6x + 13)} = \frac{10}{x - 5} + \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 13}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(2.) \quad \int \frac{10dx}{x - 5} = 10 \ln(x - 5)$$

und nach Formel Nr. 146 der Tabelle

$$(3.) \quad \int \frac{(3x + 7)dx}{x^2 - 6x + 13} = \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 6)dx}{x^2 - 6x + 13} + 16 \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 2^2} \\ = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 8 \operatorname{arctg}\left(\frac{x - 3}{2}\right),$$

folglich wird

$$(4.) \int \frac{(13x^2 - 68x + 95)dx}{(x-5)(x^2 - 6x + 13)} = 10 \ln(x-5) + \frac{3}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 8 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Aufgabe 2. $\int \frac{(6x^2 - 25x + 89)dx}{(x-3)(x^2 - 4x + 20)} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 7 in § 35 ist

$$(5.) \frac{6x^2 - 25x + 89}{(x-3)(x^2 - 4x + 20)} = \frac{4}{x-3} + \frac{2x-3}{x^2 - 4x + 20}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(6.) \int \frac{4dx}{x-3} = 4 \ln(x-3)$$

und nach Formel Nr. 146 der Tabelle

$$(7.) \int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - 4x + 20} = \int \frac{(2x-4)dx}{x^2 - 4x + 20} + \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4^2} \\ = \ln(x^2 - 4x + 20) + \frac{1}{4} \operatorname{arc tg}\left(\frac{x-2}{4}\right),$$

folglich wird

$$(8.) \int \frac{(6x^2 - 25x + 89)dx}{(x-3)(x^2 - 4x + 20)} = 4 \int \ln(x-3) + \ln(x^2 - 4x + 20) \\ + \frac{1}{4} \operatorname{arc tg}\left(\frac{x-2}{4}\right).$$

Aufgabe 3. $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 3 in § 36 ist

$$(9.) \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1} \right).$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(10.) \int \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1),$$

nach Formel Nr. 147 der Tabelle ist

$$(11.) \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

und nach Formel Nr. 146 der Tabelle ist

$$(12.) \quad \int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Dieses letzte Resultat hätte man auch mit Hülfe der Formeln Nr. 30 und 18 der Tabelle finden können. Aus den Gleichungen (9.) bis (12.) ergibt sich daher

$$(13.) \quad \int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\ln(x-1) + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x \right] \\ = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \right) + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Aufgabe 4. $\int \frac{(3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = ?$

Auflösung. Nach Aufgabe 4 in § 36 ist

$$(14.) \quad \frac{3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} \\ + \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Nun ist nach den Formeln Nr. 141, 27, 146 und 147 der Tabelle

$$(15.) \quad \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}, \quad \int \frac{2dx}{x-2} = 2 \ln(x-2),$$

$$(16.) \quad \int \frac{(x-1)dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{arctg}(x+1),$$

$$(17.) \quad \int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2} \\ = -\frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei $x+1$ gleich t gesetzt ist. Dies gibt nach Formel Nr. 144 der Tabelle

$$\begin{aligned}
 (18.) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \\
 &= \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1),
 \end{aligned}$$

folglich wird

$$\begin{aligned}
 (19.) \quad \int \frac{(3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 12x - 8)dx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} &= \\
 &= -\frac{1}{x-2} + 2\ln(x-2) + \frac{x-1}{2(x^2+2x+2)} \\
 &+ \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5. $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2} = ?$

Auflösung. Da in diesem Falle

$$(20.) \quad x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

ist, so erhält man nach Formel Nr. 147 der Tabelle, indem man

$$(21.) \quad P = 1, \quad Q = 3, \quad g = -\frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad n = 2$$

setzt,

$$(22.) \quad \int \frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{20}{3\sqrt{3}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

wobei

$$(23.) \quad 2x + 1 = t\sqrt{3}$$

gesetzt ist. Dies gibt nach Formel Nr. 144 der Tabelle

$$\begin{aligned}
 (24.) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \\
 &= \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{8(x^2+x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),
 \end{aligned}$$

also

$$(25.) \quad \int \frac{(x+3)dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{5x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{(5x^2 - 8x - 4)dx}{x^3 + 1} = ?$

Auflösung. Hier ist

$$(26.) \quad \frac{5x^2 - 8x - 4}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Px + Q}{x^2 - x + 1},$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $(x+1)(x^2-x+1)$ multiplicirt,

$$(27.) \quad 5x^2 - 8x - 4 = A(x^2 - x + 1) + (Px + Q)(x + 1).$$

Dies giebt für $x = -1$

$$(28.) \quad 9 = 3A, \quad \text{oder} \quad A = 3$$

und für $x^2 - x + 1 = 0$, oder $x^2 = x - 1$,

$$-3x - 9 = (2P + Q)x + (-P + Q),$$

also

$$(29.) \quad 2P + Q = -3, \quad -P + Q = -9,$$

$$(30.) \quad P = 2, \quad Q = -7,$$

$$(31.) \quad \frac{5x^2 - 8x - 4}{x^3 + 1} = \frac{3}{x + 1} + \frac{2x - 7}{x^2 - x + 1}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 27 der Tabelle

$$(32.) \quad 3 \int \frac{dx}{x + 1} = 3 \ln(x + 1)$$

und nach Formel Nr. 146 der Tabelle

$$(33.) \quad \int \frac{(2x - 7)dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} - 6 \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ = \ln(x^2 - x + 1) - 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right),$$

folglich findet man

$$(34.) \quad \int \frac{(5x^2 - 8x - 4)dx}{x^3 + 1} \\ = 3 \ln(x + 1) + \ln(x^2 - x + 1) - 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right).$$

Dem Anfänger wird die Prüfung der vorstehenden Auflösungen durch Differentiation empfohlen.

In manchen Fällen, wo die Integration durch Partialbruch-Zerlegung sehr umständlich oder in Folge von algebraischen Schwierigkeiten gar nicht durchführbar sein würde, gelingt die

Integration durch zweckmässige Umformungen und Substitutionen, wie durch einige Beispiele zur Erläuterung gezeigt werden möge.

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{x(x^3+1)} = ?$

Auflösung. Setzt man in diesem Falle

$$(35.) \quad x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

so wird

$$(36.) \quad \int \frac{dx}{x(x^3+1)} = -\int \frac{t^2 dt}{t^3+1} = -\frac{1}{3} \ln(t^3+1),$$

oder

$$(37.) \quad \int \frac{dx}{x(x^3+1)} = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{x^3}+1\right) = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right) \\ = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right).$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender Weise finden.

Es ist

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{(x^3+1) - x^3}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^3+1},$$

also

$$\int \frac{dx}{x(x^3+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^2 dx}{x^3+1} \\ = \ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3+1) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\right).$$

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = ?$

Auflösung. Setzt man in diesem Falle wieder

$$(38.) \quad x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

so wird

$$(39.) \quad \int \frac{dx}{x(x^4+1)} = -\int \frac{t^3 dt}{t^4+1} = -\frac{1}{4} \ln(t^4+1),$$

oder

$$(40.) \quad \int \frac{dx}{x(x^4 + 1)} = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{x^4} + 1 \right) = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^4 + 1}{x^4} \right) \\ = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^4}{x^4 + 1} \right) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}} \right).$$

Auch hier findet man dasselbe Resultat aus der Gleichung

$$\frac{1}{x(x^4 + 1)} = \frac{(x^4 + 1) - x^4}{x(x^4 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4 + 1},$$

aus der dann unmittelbar folgt

$$\int \frac{dx}{x(x^4 + 1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1} = \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}} \right).$$

XI. Abschnitt.

Integration der irrationalen Functionen.

§ 41.

Allgemeine Bemerkungen.

Im ersten Theile der Integral-Rechnung sind bereits irrationale Differential-Functionen in grösserer Anzahl integrirt und in die Formel-Tabelle aufgenommen worden. (Man vergleiche Nr. 17, 23, 24, 31 bis 42, 83 bis 85, 114 bis 126 a der Formel-Tabelle.)

In Betreff der übrigen irrationalen Differential-Functionen ist zu bemerken, dass es verhältnissmässig nur wenige Fälle giebt, bei denen sich die Integration durch Anwendung algebraischer Functionen oder der bisher bekannten transcendenten Functionen ausführen lässt. In den meisten Fällen werden durch die Integrale algebraischer Differential-Functionen *neue* (d. h. bisher noch unbekannte) transcendente Functionen erklärt.

Hier mögen zunächst solche *irrationale* Differential-Functionen in Betracht gezogen werden, welche sich durch eine Substitution auf Functionen zurückführen lassen, deren Integral bereits bekannt ist, oder in *rationale* Differential-Functionen umgewandelt werden können, und zwar sollen nur die einfacheren Fälle berücksichtigt werden.

§ 42.

Integration rationaler Functionen der Argumente

$$x, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 148 und 149.)

Kommen in der Function unter dem Integralzeichen keine anderen Irrationalitäten vor als Wurzeln aus x selbst, so lässt sich die Differential-Function durch die Substitution

$$(1.) \quad x = t^z$$

sehr leicht *rational* machen, wenn man den Exponenten z so wählt, dass z durch alle auftretenden Wurzel-Exponenten theilbar ist.

Wie dies gemeint ist, möge zunächst ein Beispiel zeigen.

$$\text{Aufgabe 1.} \quad \int \frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = ?$$

Auflösung. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzel-Exponenten 2, 3, 4 und 6 ist 12, folglich muss man

$$(2.) \quad x = t^{12}, \quad \text{oder} \quad \sqrt[12]{x} = t$$

setzen und erhält

$$(3.) \quad \sqrt[4]{x^3} = t^9, \quad \sqrt[3]{x^2} = t^8, \quad \sqrt{x} = t^6, \quad \sqrt[3]{x} = t^4, \quad \sqrt[6]{x} = t^2.$$

Dies giebt

$$(4.) \quad \int \frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12 \int \frac{(t^9 - 7t^8 + 12t^6)t^{11}dt}{t^{12}(t^4 - t^2)} \\ = 12 \int \frac{(t^6 - 7t^5 + 12t^3)dt}{t^2 - 1}.$$

Nun ist

$$(5.) \quad t^6 - 7t^5 + 12t^3 = (t^2 - 1)(t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1) + 5t + 1,$$

also

$$(6.) \quad \frac{t^6 - 7t^5 + 12t^3}{t^2 - 1} = t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{5t + 1}{t^2 - 1} \\ = t^4 - 7t^3 + t^2 + 5t + 1 + \frac{3}{t - 1} + \frac{2}{t + 1},$$

folglich ist

$$(7.) \quad \int \frac{(\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x})dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} = 12 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{7t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + t \right. \\ \left. + 3 \ln(t - 1) + 2 \ln(t + 1) \right],$$

wobei nach Gleichung (2.)

$$t = \sqrt[12]{x}$$

ist.

Daraus erkennt man schon, dass die oben angegebene Regel ganz allgemein anwendbar ist, denn bezeichnet man mit α das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n, q, \dots , die in den Exponenten von x als Nenner auftreten, und setzt man in Uebereinstimmung mit Gleichung (1.)

$$(1a.) \quad x = t^\alpha, \quad \text{also} \quad t = \sqrt[\alpha]{x}, \quad dx = \alpha t^{\alpha-1} dt,$$

so erhält man

$$(8.) \quad \int f\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots\right) dx = \int f\left(t^\alpha, t^{\frac{\alpha m}{n}}, t^{\frac{\alpha p}{q}}, \dots\right) \alpha t^{\alpha-1} dt,$$

wobei die Exponenten $\frac{\alpha m}{n}, \frac{\alpha p}{q}, \dots$ sämtlich ganze Zahlen werden.

Auf diesen Fall kann man den allgemeineren zurückführen, wo unter dem Integralzeichen eine rationale Function der Argumente

$$x, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots$$

steht. Setzt man nämlich

$$(9.) \quad \frac{a + bx}{A + Bx} = y,$$

so wird

$$(10.) \quad x = \frac{Ay - a}{b - By}, \quad dx = \frac{(Ab - Ba)dy}{(b - By)^2},$$

so dass man erhält

$$(11.) \quad \int f\left[x, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots\right] dx = \int f\left(\frac{Ay - a}{b - By}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}}, \dots\right) \cdot \frac{(Ab - Ba)dy}{(b - By)^2}.$$

Ist jetzt α das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzel-exponenten n, q, \dots , so wird die Differential-Function *rational* durch die Substitution

$$(12.) \quad y = t^\alpha.$$

§ 43.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = ?$

Auflösung. Um die vorliegende Differential-Function rational zu machen, muss man

(1.) $\sqrt{x} = t, \text{ also } x = t^2, dx = 2tdt$

setzen und erhält

(2.) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = \int \frac{t \cdot 2tdt}{t^2-1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 2 \int \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1},$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 29 a der Tabelle

(3.) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = 2t + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$
 $= 2\sqrt{x} + \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$

Aufgabe 2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} dx = ?$

Auflösung. In diesem Falle muss man

(4.) $\sqrt[3]{x} = t, x = t^3, dx = 3t^2 dt$

setzen und erhält

(5.) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} dx = \int \frac{t \cdot 3t^2 dt}{t^3-1} = 3 \int \frac{t^3 dt}{t^3-1} = 3 \int \frac{(t^3-1+1)dt}{t^3-1}$
 $= 3 \int \left(1 + \frac{1}{t^3-1}\right) dt = 3t + 3 \int \frac{dt}{t^3-1}.$

Um $3 \int \frac{dt}{t^3-1}$ zu ermitteln, wende man Partialbruch-Zerlegung an und setze

(6.) $\frac{3}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Pt+Q}{t^2+t+1};$

dies giebt durch Fortschaffung der Nenner

$$(7.) \quad 3 = A(t^2 + t + 1) + (Pt + Q)(t - 1),$$

also für $t = 1$

$$(8.) \quad 3 = 3A, \text{ oder } A = 1$$

und für $t^2 + t + 1 = 0$

$$(9.) \quad 3 = (-2P + Q)t + (-P - Q),$$

also

$$(10.) \quad -2P + Q = 0, \quad P + Q = -3, \text{ oder } P = -1, \quad Q = -2.$$

Dadurch erhält man nach Formel Nr. 27 und 146 der Tabelle

$$(11.) \quad 3 \int \frac{dt}{t^3 - 1} = \int \frac{dt}{t - 1} - \int \frac{(t + 2)dt}{t^2 + t + 1} \\ = \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \right),$$

also

$$(12.) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x - 1} dx = 3\sqrt[3]{x} + \ln(\sqrt[3]{x} - 1) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) \\ - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

Aufgabe 3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x} - 1} = ?$

Auflösung. Setzt man hier

$$(13.) \quad \sqrt{x} = t, \text{ also } x = t^2, \quad dx = 2t dt,$$

so wird

$$(14.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x} - 1} = \int \frac{2t^3 dt}{t - 1} = 2 \int \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt \\ = 2 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln(t - 1) \right] \\ = \frac{1}{3} \left[2x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6\ln(\sqrt{x} - 1) \right].$$

Aufgabe 4. $\int x dx \sqrt{a + x} = ?$

Auflösung. Hier ist zu setzen

$$(15.) \quad \sqrt{a + x} = t, \text{ also } a + x = t^2, \quad x = t^2 - a, \quad dx = 2t dt,$$

dann wird

$$(16.) \int x dx \sqrt{a+x} = \int 2(t^2 - a)t^2 dt \\ = 2 \int t^4 dt - 2a \int t^2 dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2at^3}{3},$$

oder

$$(17.) \int x dx \sqrt{a+x} = \frac{2}{15} t^3 (3t^2 - 5a) = \frac{2}{15} (a+x) \sqrt{a+x} (3x - 2a).$$

Man hätte auch die Integration in folgender Weise ausführen können. Man setze

$$(18.) x \sqrt{a+x} = (a+x-a) \sqrt{a+x} = (a+x)^{\frac{3}{2}} - a(a+x)^{\frac{1}{2}},$$

also nach Formel Nr. 9 der Tabelle

$$(19.) \int x dx \sqrt{a+x} = \int (a+x)^{\frac{3}{2}} d(a+x) - a \int (a+x)^{\frac{1}{2}} d(a+x) \\ = \frac{2}{5} (a+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} a (a+x)^{\frac{3}{2}} \\ = \frac{2}{15} (a+x) \sqrt{a+x} (3x - 2a).$$

Aufgabe 5. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x+a}} = ?$

Auflösung. Es sei wieder

$$(20.) \sqrt{x+a} = t, \text{ also } x+a = t^2, x = t^2 - a, dx = 2t dt,$$

dann wird

$$(21.) \int \frac{dx}{x \sqrt{x+a}} = \int \frac{2t dt}{(t^2 - a)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - a}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(22.) \int \frac{dx}{x \sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{a})^2}{x} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{x + 2a - 2\sqrt{a(a+x)}}{x} \right).$$

Aufgabe 6. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = ?$

Auflösung. Es sei

$$(23.) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t, \text{ also } \frac{a+x}{a-x} = t^2, x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$(24.) \quad dx = \frac{4atdt}{(t^2 + 1)^2},$$

dann wird

$$(25.) \quad \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 4a \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^2} = 4a \int \frac{(t^2 + 1 - 1) dt}{(t^2 + 1)^2} \\ = 4a \left[\int \frac{dt}{t^2 + 1} - \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} \right].$$

Nun ist nach Formel Nr. 18 und 144 der Tabelle

$$(26.) \quad \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t,$$

$$(27.) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t,$$

folglich wird

$$(28.) \quad \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 4a \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(1+t^2)} \right],$$

oder, da

$$1+t^2 = 1 + \frac{a+x}{a-x} = \frac{2a}{a-x}, \quad \frac{t}{1+t^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$$

ist,

$$(29.) \quad \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 2a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2}.$$

Einfacher kann man in diesem Falle die Integration ausführen, indem man

$$(30.) \quad \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2}{(a-x)(a+x)}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

setzt; dadurch erhält man nach Formel Nr. 34 und 31 der Tabelle

$$(31.) \quad \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ = a \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{a} \right) - \sqrt{a^2-x^2}.$$

Dieses Resultat weicht allerdings in der Form von dem in Gleichung (29.) enthaltenen ab; setzt man aber

$$(32.) \quad \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = z, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} z = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

so ist

$$\operatorname{tg}^2 z = \frac{a+x}{a-x}, \quad \text{also} \quad x = a \frac{\operatorname{tg}^2 z - 1}{\operatorname{tg}^2 z + 1},$$

oder

$$(33.) \quad x = a \frac{\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = -a(\cos^2 z - \sin^2 z) = -a \cos(2z) \\ = a \sin\left(2z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deshalb wird

$$(34.) \quad \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = 2z - \frac{\pi}{2} = \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \frac{\pi}{2},$$

so dass die beiden in den Gleichungen (29.) und (31.) angegebenen Resultate sich nur durch eine Integrations-Constante von einander unterscheiden.

§ 44.

Zurückführung der Differential-Functionen von der Form

$F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx$ auf Differential-Functionen

von der Form $f(y, \sqrt{y^2 - a^2}) dy$, $f(y, \sqrt{a^2 + y^2}) dy$,

$f(y, \sqrt{a^2 - y^2}) dy$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 150 und 151.)

Es sei $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine rationale Function von x und $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, dann mögen zwei Fälle unterschieden werden.

I. Fall. $A > 0$.

Setzt man

$$(1.) \quad y = \frac{Ax + B}{\sqrt{A}}, \quad \text{also} \quad y^2 = Ax^2 + 2Bx + \frac{B^2}{A},$$

so wird

$$(2.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = y^2 - \frac{B^2 - AC}{A}.$$

Hierbei wird $\frac{B^2 - AC}{A}$ positiv oder negativ, jenachdem die „Discriminante“ $B^2 - AC$ positiv oder negativ ist. Um diese beiden Fälle zusammenzufassen, setze man

$$(3.) \quad \frac{B^2 - AC}{A} = \pm a^2;$$

dann wird

$$(4.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = y^2 \mp a^2.$$

Aus Gleichung (1.) findet man noch

$$(5.) \quad x = \frac{y\sqrt{A} - B}{A}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{A}},$$

folglich wird

$$(6.) \quad \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx = \int F\left(\frac{y\sqrt{A} - B}{A}, \sqrt{y^2 \mp a^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{A}}.$$

II. Fall. $A < 0$.

Setzt man

$$(7.) \quad y = \frac{Ax + B}{\sqrt{-A}}, \quad \text{also} \quad -y^2 = Ax^2 + 2Bx + \frac{B^2}{A},$$

so wird

$$(8.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = \frac{AC - B^2}{A} - y^2.$$

Hierbei wird $\frac{AC - B^2}{A}$ positiv oder negativ, jenachdem die „Discriminante“ $B^2 - AC$ positiv oder negativ ist. Um diese beiden Fälle zusammenzufassen, setze man

$$(9.) \quad \frac{AC - B^2}{A} = \frac{B^2 - AC}{-A} = \pm a^2,$$

dann wird

$$(10.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = \pm a^2 - y^2.$$

Aus Gleichung (7.) findet man noch

$$(11.) \quad x = \frac{y\sqrt{-A} - B}{A}, \quad dx = -\frac{dy}{\sqrt{-A}},$$

folglich wird

$$(12.) \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx = - \int F\left(\frac{y\sqrt{-A} - B}{A}, \sqrt{\pm a^2 - y^2}\right) \frac{dy}{\sqrt{-A}}.$$

Gilt in Gleichung (12.) das untere Zeichen, so wird

(13.) $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{-a^2 - y^2} = i\sqrt{a^2 + y^2}$
für alle Werthe von x imaginär, so dass in diesem Falle $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine *complexe* Grösse ist. Deshalb lassen sich auch bei Ermittlung des gesuchten Integrals *complexe* Grössen nicht vermeiden. Man kann in diesem Falle auch

$$(14.) \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = i\sqrt{-(Ax^2 + 2Bx + C)}$$

setzen und erhält dadurch eine Wurzelgrösse, auf welche die im Falle I gemachten Voraussetzungen zutreffen.

§ 45.

Uebungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 152 und 153.)

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = ?$

Auflösung. Im Falle I erhält man nach den Formeln Nr. 150, (35.) und (36.) der Tabelle

$$(1.) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \frac{dy}{\sqrt{A}\sqrt{y^2 \mp a^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 \mp a^2}}{a}\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} [\ln(y + \sqrt{y^2 \mp a^2}) - \ln a],$$

oder, wenn man die Integrations-Constante $-\frac{\ln a}{\sqrt{A}}$ fortlässt,

$$(1a.) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln(y + \sqrt{y^2 \mp a^2}) \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln\left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right).$$

Beispiel 1. $A = 4, B = 2, C = -3, B^2 - AC = 16.$

$$(2.) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}} = \frac{1}{2} \ln(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 3}).$$

Beispiel 2. $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $B^2 - AC = -\frac{3}{4}$.

$$(3.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln \left(\frac{2x + 1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right).$$

Im Falle II erhält man nach Formel Nr. 151 der Tabelle

$$(4.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = - \int \frac{dy}{\sqrt{-A} \sqrt{\pm a^2 - y^2}}.$$

Beschränkt man die Lösung auf den Fall, wo das obere Vorzeichen gilt, so erhält man

$$(4a.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = - \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = - \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left(\frac{y}{a} \right) \\ = - \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left(\frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left(- \frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} \right).$$

Beispiel 3. $A = -1$, $B = \frac{r}{2}$, $C = 0$, $B^2 - AC = \frac{r^2}{4}$.

$$(5.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{rx - x^2}} = \arcsin \left(\frac{2x - r}{r} \right).$$

Gilt das untere Vorzeichen, so wird die Aufgabe auf Fall I zurückgeführt, indem man

$$(6.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{i} \int \frac{dx}{\sqrt{A_1x^2 + 2B_1x + C_1}} \\ = \frac{1}{i\sqrt{A_1}} \ln \left(\frac{A_1x + B_1}{\sqrt{A_1}} + \sqrt{A_1x^2 + 2B_1x + C_1} \right)$$

setzt. Dabei ist

$$(7.) \quad A_1 = -A, \quad B_1 = -B, \quad C_1 = -C.$$

Aufgabe 2. $\int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = ?$

Auflösung. Im Falle I, nämlich in dem Falle, wo $A > 0$ ist, erhält man nach der Formel Nr. 150 der Tabelle

$$(8.) \quad \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int dy \sqrt{y^2 \mp a^2},$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 124 und 124a der Tabelle

$$(9.) \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\frac{y}{2} \sqrt{y^2 \mp a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 \mp a^2}}{a} \right) \right],$$

also, wenn man die Integrations-Constante $\frac{\pm a^2 \ln a}{2\sqrt{A}}$ fortlässt,

$$(9a.) \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left[\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + \frac{AC - B^2}{A} \ln \left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right) \right].$$

Beispiel 1. $A = 4, B = 2, C = -3, B^2 - AC = 16.$

$$(10.) \int dx \sqrt{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} [(2x + 1) \sqrt{4x^2 + 4x - 3} - 4 \ln(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 3})].$$

Beispiel 2. $A = 1, B = \frac{1}{2}, C = 1, B^2 - AC = -\frac{3}{4}.$

$$(11.) \int dx \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x + 1}{2} \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{4} \ln \left(\frac{2x + 1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \right].$$

Im Falle II, nämlich in dem Falle, wo $A < 0$ ist, wird nach Formel Nr. 151 der Tabelle

$$(12.) \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = -\frac{1}{\sqrt{-A}} \int dy \sqrt{\pm a^2 - y^2}.$$

Beschränkt man die Lösung auf den Fall, wo das obere Vorzeichen gilt, so findet man nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$(13.) \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \left[\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{y}{a} \right) \right] \\ = \frac{1}{2\sqrt{-A}} \left[-\frac{Ax + B}{\sqrt{-A}} \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + \frac{B^2 - AC}{-A} \arcsin \left(-\frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} \right) \right].$$

Beispiel 3. $A = -1, B = \frac{r}{2}, C = 0, B^2 - AC = \frac{r^2}{4}.$

$$\int dx \sqrt{rx - x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x - r}{2} \sqrt{rx - x^2} + \frac{r^2}{4} \arcsin \left(\frac{2x - r}{r} \right) \right].$$

Diese Beispiele mögen zeigen, wie durch das in § 44 angegebene Verfahren Integrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ mitunter auf bereits bekannte Integrale zurückgeführt werden können.

§ 46.

Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn A positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 154 und 155.)

Aufgabe 1. $\int f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})dy = ?$

Auflösung. Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

$$(1.) \quad \sqrt{y^2 \pm a^2} = t - y, \quad \text{oder} \quad t = y + \sqrt{y^2 \pm a^2},$$

also

$$(2.) \quad y^2 \pm a^2 = t^2 - 2ty + y^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{t^2 \mp a^2}{2t},$$

$$(3.) \quad \sqrt{y^2 \pm a^2} = t - \frac{t^2 \mp a^2}{2t} = \frac{t^2 \pm a^2}{2t},$$

$$(4.) \quad dy = \frac{(t^2 \pm a^2)dt}{2t^2},$$

folglich wird

$$(5.) \quad \int f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})dy = \int f\left(\frac{t^2 \mp a^2}{2t}, \frac{t^2 \pm a^2}{2t}\right) \cdot \frac{(t^2 \pm a^2)dt}{2t^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})$ eine rationale Function von y und $\sqrt{y^2 \pm a^2}$ ist, so hat man es durch die angegebene Substitution erreicht, dass die Function unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Function der einzigen Veränderlichen t geworden ist. Diese Substitution wurde bereits zur Herleitung der Formeln Nr. 35 und 36 der Tabelle benutzt.

Nach Gleichung (5.) wird nämlich

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm a^2}} = \int \frac{(t^2 \pm a^2)dt \cdot 2t}{2t^2(t^2 \pm a^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(y + \sqrt{y^2 \pm a^2}).$$

Aufgabe 2. $\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = ?$

Auflösung. In § 44 wurde gezeigt, wie man das gesuchte Integral in dem Falle, wo $A > 0$ ist, auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{y^2 \pm a^2})dy$ zurückführen kann (vgl. Formel Nr. 150 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Function in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$(6.) \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = t - x\sqrt{A}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$(7.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = t^2 - 2tx\sqrt{A} + Ax^2,$$

oder
$$2x(t\sqrt{A} + B) = t^2 - C,$$

$$(8.) \quad x = \frac{t^2 - C}{2(t\sqrt{A} + B)}, \quad dx = \frac{(t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A} + B)^2},$$

$$(9.) \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = t - \frac{(t^2 - C)\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A} + B)} = \frac{t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A} + B)}.$$

Dies giebt

$$(10.) \quad \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = \int F\left(\frac{t^2 - C}{2(t\sqrt{A} + B)}, \frac{t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A} + B)}\right) \cdot \frac{(t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A})dt}{2(t\sqrt{A} + B)^2},$$

wobei nach Gleichung (6.)

$$(11.) \quad t = x\sqrt{A} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine rationale Function von x und $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (10.) jetzt nur noch eine *rationale* Function von t , welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integrirt werden kann.

Man erkennt, dass die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, welchen man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit y bezeichnet und

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = \pm a^2$$

setzt.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 3. $\int dy \sqrt{y^2 \pm a^2} = ?$ **Auflösung.** Nach Gleichung (5.) erhält man

$$\begin{aligned}
 (12.) \int dy \sqrt{y^2 \pm a^2} &= \int \frac{(t^2 \pm a^2) dt}{2t^2} \cdot \frac{t^2 \pm a^2}{2t} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 \pm a^2)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4} \int (t \pm 2a^2 t^{-1} + a^4 t^{-3}) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} \pm 2a^2 \ln t - \frac{a^4}{2t^2} \right) = \frac{t^4 - a^4}{8t^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln t.
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$y = \frac{t^2 \mp a^2}{2t}, \quad \sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{t^2 \pm a^2}{2t},$$

also

$$(13.) \quad y \sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{t^4 - a^4}{4t^2},$$

folglich erhält man bis auf eine Integrations-Constante in Uebereinstimmung mit den Formeln Nr. 124 und 124a der Tabelle

$$(14.) \int dy \sqrt{y^2 \pm a^2} = \frac{y}{2} \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 \pm a^2}).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$ **Auflösung.** In diesem Falle ist

$$A = 1, \quad \sqrt{A} = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1,$$

also

$$(15.) \quad \begin{cases} t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}, & x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \\ dx = \frac{2(t^2 + t + 1) dt}{(2t + 1)^2}, & \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}, \end{cases}$$

$$(16.) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2(t^2 - 1)(t^2 + t + 1) dt}{(2t + 1)^2 (t^2 + t + 1)} = 2 \int \frac{(t^2 - 1) dt}{(2t + 1)^2}.$$

Nun ist, wie man durch Division findet,

$$2t^2 - 2 = (2t + 1)\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(2t + 1)^2 - (2t + 1) - \frac{3}{2},$$

also

$$(17.) \quad \frac{2t^2 - 2}{(2t + 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(2t + 1)^2},$$

folglich wird

$$(18.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \ln(2t + 1) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2t + 1}$$

$$= \frac{4t^2 + 2t + 3}{4(2t + 1)} - \frac{1}{2} \ln(2t + 1)$$

$$= \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2t + 1).$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (15.)

$$(19.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}).$$

Bedeutend leichter findet man dieses Resultat durch Anwendung von Formel Nr. 150 der Tabelle, indem man

$$(20.) \quad x = \frac{2y - 1}{2}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{y^2 + a^2}, \quad dx = dy, \quad a^2 = \frac{3}{4}$$

setzt; dann wird

$$(21.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{(2y - 1) dy}{2\sqrt{a^2 + y^2}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}},$$

also nach den Formeln Nr. 32 und 35 der Tabelle

$$(22.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \sqrt{a^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y + \sqrt{a^2 + y^2}}{a} \right)$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{3}} \right).$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem vorhin gefundenen nur durch eine Integrations-Constante.

Aufgabe 5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$\begin{aligned}
 (23.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= 2 \int \frac{(t^2-1)^2 dt}{(2t+1)^3} \\
 &= \frac{1}{8} \int \left[2t-3 - \frac{2}{2t+1} + \frac{12}{(2t+1)^2} + \frac{9}{(2t+1)^3} \right] dt, \\
 &= \frac{1}{8} \left[t^2 - 3t - \frac{7}{4} - \ln(2t+1) - \frac{6}{2t+1} - \frac{9}{4(2t+1)^2} \right],
 \end{aligned}$$

wobei die Integrations-Constante $-\frac{7}{32}$ so gewählt ist, dass das Endresultat einfacher wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 t^2 - 3t - \frac{7}{4} - \frac{6}{2t+1} - \frac{9}{4(2t+1)^2} &= \frac{4t^4 - 8t^3 - 18t^2 - 22t - 10}{(2t+1)^2} \\
 &= \frac{4t^2 - 12t - 10}{2t+1} \cdot \frac{t^2 + t + 1}{2t+1} \\
 &= \left(\frac{4(t^2-1)}{2t+1} - 6 \right) \frac{t^2 + t + 1}{2t+1} \\
 &= (4x - 6) \sqrt{x^2 + x + 1}.
 \end{aligned}$$

Deshalb wird

$$\begin{aligned}
 (24.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{2x-3}{4} \sqrt{x^2+x+1} \\
 &\quad - \frac{1}{8} \ln(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1}).
 \end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich das Resultat leichter durch Anwendung der in den Gleichungen (20.) angegebenen Substitution; dann wird

$$(25.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{4} \int \frac{(4y^2 - 4y + 1) dy}{\sqrt{a^2 + y^2}},$$

also nach Formel Nr. 122, 32 und 35 der Tabelle

$$\begin{aligned}
 (26.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{y-2}{2} \sqrt{a^2+y^2} - \frac{1}{8} \left[\ln \left(\frac{y + \sqrt{a^2+y^2}}{a} \right) \right] \\
 &= \frac{2x-3}{4} \sqrt{x^2+x+1} \\
 &\quad - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} \right).
 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man die Aufgaben

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = ? \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = ? \quad \dots \quad \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$$

behandeln.

Aufgabe 6.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$$

Auflösung. Aus den Gleichungen (15.) ergibt sich hier

$$(27.) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1},$$

also nach Formel Nr. 29 a der Tabelle

$$(28.) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x+1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}\right) \\ = \ln\left(\frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (x+2)}{x}\right).$$

Aufgabe 7.
$$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ?$$

Auflösung. Aus Gleichung (5.) findet man

$$(29.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2 \pm a^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2kt \mp a^2}.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 86 der Tabelle, indem man

$$b = -k, \quad c = \mp a^2$$

setzt,

$$(30.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 \pm a^2}} \ln\left(\frac{t-k-\sqrt{k^2 \pm a^2}}{t-k+\sqrt{k^2 \pm a^2}}\right).$$

Gilt das untere Zeichen, und ist $a^2 > k^2$, so erhält der gefundene Ausdruck imaginäre Form, dann wird nach Formel Nr. 88 der Tabelle

$$(31.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - k^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t-k}{\sqrt{a^2 - k^2}}\right).$$

Zum Schluss muss man noch

$$t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

einsetzen.

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (5.) ist in diesem Falle

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad dx = \frac{(t^2 + 1)dt}{2t^2},$$

$$1-x^2 = (1+x)(1-x) = \frac{t^2+2t-1}{2t} \cdot \frac{-t^2+2t+1}{2t} = -\frac{t^4-6t^2+1}{4t^2},$$

also

$$(32.) \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -4 \int \frac{tdt}{t^4-6t^2+1} = -2 \int \frac{du}{u^2-6u+1},$$

wenn man t^2 mit u bezeichnet. Nun ist nach Formel Nr. 87 der Tabelle

$$(33.) \int \frac{du}{u^2-6u+1} = \int \frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{1}{u_1-u_2} \ln \left(\frac{u-u_1}{u-u_2} \right),$$

wobei

$$u_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad u_2 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad u_1 - u_2 = 4\sqrt{2}$$

ist. Dies giebt

$$(34.) \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u-3-2\sqrt{2}}{u-3+2\sqrt{2}} \right) \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{t^2-3+2\sqrt{2}}{t^2-3-2\sqrt{2}} \right).$$

Um das Endresultat als Function von x darzustellen, beachte man, dass

$$\frac{t^2-1}{2t} = x, \quad \frac{-2+2\sqrt{2}}{2t} = \frac{-1+\sqrt{2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = (-1+\sqrt{2})(\sqrt{1+x^2}-x),$$

also

$$(35.) \quad \frac{t^2 - 3 + 2\sqrt{2}}{2t} = (2 - \sqrt{2})x + (-1 + \sqrt{2})\sqrt{1+x^2}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2})$$

ist. Ebenso findet man

$$(36.) \quad \frac{t^2 - 3 - 2\sqrt{2}}{2t} = (-\sqrt{2} - 1)(\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}),$$

folglich wird

$$(37.) \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2})}{(-\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2})} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left[\frac{(\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2})^2}{x^2 - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}} \right) + \ln(\sqrt{2}-1) \right].$$

Schneller kommt man zum Ziele durch Anwendung von Formel Nr. 84 der Tabelle, indem man

$$(38.) \quad x = \operatorname{tg} t, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$(39.) \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - 2\sin^2 t},$$

oder, wenn man

$$\sqrt{2}\sin t = z, \quad \text{also} \quad \sqrt{2}\cos t dt = dz$$

setzt und Formel Nr. 29 a der Tabelle beachtet,

$$(40.) \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{z-1}{z+1} \right);$$

dabei ist

$$z = \sqrt{2}\sin t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich wird

$$(41.) \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x\sqrt{2} + \sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}} \right).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von der Integrations-Constanten, mit dem früher gefundenen überein.

§ 47.

Integration der Differential-Function

$F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx$, wenn C positiv ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 156 und 157.)

Aufgabe 1. $\int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = ?$

Auflösung. Wenn das gesuchte Integral mit keinem bisher entwickelten übereinstimmt, so setze man

$$(1.) \quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = ty - a, \quad \text{oder} \quad t = \frac{a + \sqrt{a^2 \pm y^2}}{y},$$

also

$$(2.) \quad a^2 \pm y^2 = t^2 y^2 - 2aty + a^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{2at}{t^2 \mp 1},$$

$$(3.) \quad \sqrt{a^2 \pm y^2} = \frac{2at^2}{t^2 \mp 1} - a = \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1},$$

$$(4.) \quad dy = -\frac{2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2},$$

folglich wird

$$(5.) \quad \int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right) \cdot \frac{-2a(t^2 \pm 1)dt}{(t^2 \mp 1)^2}.$$

Wenn $f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})$ eine rationale Function von y und $\sqrt{a^2 \pm y^2}$ ist, so hat man es durch die angegebene Substitution erreicht, dass die Function unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (5.) eine *rationale* Function der einzigen Veränderlichen t geworden ist. Hiernach wird z. B.

$$(6.) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{a} \ln t = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right),$$

ein Resultat, welches mit Formel Nr. 37 der Tabelle übereinstimmt.

Aufgabe 2. $\int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = ?$

Auflösung. In § 44 wurde bereits gezeigt, wie man das gesuchte Integral auf ein Integral von der Form $\int f(y, \sqrt{a^2 \pm y^2})dy$ zurückführen kann (vergl. Formel Nr. 150 und 151 der Tabelle). Ist diese Umformung erfolgt, so gelangt man durch die in Aufgabe 1 angegebene Substitution zum Ziele. Man kann aber auch die Umwandlung der vorgelegten *irrationalen* Differential-Function in eine *rationale* unmittelbar ausführen, indem man

$$(7.) \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = tx - \sqrt{C}$$

setzt. Dadurch erhält man

$$Ax^2 + 2Bx + C = t^2x^2 - 2tx\sqrt{C} + C,$$

oder

$$(8.) \quad Ax + 2B = t^2x - 2t\sqrt{C},$$

also

$$(9.) \quad x = \frac{2(t\sqrt{C} + B)}{t^2 - A}, \quad dx = -\frac{2(t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C})dt}{(t^2 - A)^2},$$

$$(10.) \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C}}{t^2 - A}.$$

Dies giebt

$$(11.) \quad \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx = \int F\left(\frac{2(t\sqrt{C} + B)}{t^2 - A}, \frac{t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C}}{t^2 - A}\right) \cdot \frac{-2(t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C})dt}{(t^2 - A)^2},$$

wobei

$$(12.) \quad t = \frac{1}{x} (\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$$

ist. Wenn $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})$ eine rationale Function von x und $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$ ist, so steht unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite von Gleichung (11.) jetzt nur noch eine *rationale* Function von t , welche nach den Regeln des vorhergehenden Abschnittes integrirt werden kann.

Man erkennt, dass auch hier die Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall der Aufgabe 2 ist, den man erhält, indem man die Integrations-Veränderliche mit y bezeichnet und

$$A = \pm 1, \quad B = 0, \quad C = + a^2$$

setzt.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = ?$

Auflösung. Nach Gleichung (11.) erhält man

$$(13.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = -2 \int \frac{dt}{t^2 - A}.$$

Ist A positiv, so folgt hieraus nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(14.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{t - \sqrt{A}}{t + \sqrt{A}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + x\sqrt{A}}{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} - x\sqrt{A}} \right).$$

Dieses Resultat stimmt, abgesehen von einer Integrations-Constanten, mit dem in § 45, Gleichung (1.) gegebenen (vergl. Formel Nr. 152 der Tabelle) überein, denn es ist

$$(\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} - x\sqrt{A})(Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) \\ = (B + \sqrt{AC})(\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + x\sqrt{A}),$$

folglich wird

$$(15.) \quad \frac{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + x\sqrt{A}}{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} - x\sqrt{A}} \\ = \frac{Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}{B + \sqrt{AC}},$$

also

$$(16.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right) - \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{B + \sqrt{AC}}{\sqrt{A}} \right).$$

Ist A negativ, so erhält man aus Gleichung (13.) nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(17.) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = -\frac{2}{\sqrt{-A}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right) \\ = -\frac{2}{\sqrt{-A}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}{x\sqrt{-A}}\right)$$

Auch in diesem Falle kann man die Uebereinstimmung mit dem in § 45 Gleichung (4.) gefundenen Resultate (vergl. Formel Nr. 152 der Tabelle) nachweisen. Setzt man nämlich

$$(18.) \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{-A}}\right), \text{ also } \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{-A}},$$

so wird

$$(19.) \quad \sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{-A}}{t^2 - A},$$

$$(20.) \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = -\frac{t^2 + A}{t^2 - A}.$$

Ist der Bogen α erklärt durch die Gleichungen

$$(21.) \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2 - AC}}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{-AC}}{\sqrt{B^2 - AC}},$$

so erhält man

$$(22.) \quad \sin(\alpha - \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \\ = \frac{-B(t^2 + A)}{(t^2 - A)\sqrt{B^2 - AC}} + \frac{\sqrt{-AC} \cdot 2t\sqrt{-A}}{(t^2 - A)\sqrt{B^2 - AC}} \\ = \frac{-2A(t\sqrt{C} + B)}{(t^2 - A)\sqrt{B^2 - AC}} - \frac{B}{\sqrt{B^2 - AC}} \\ = -\frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}}.$$

Fügt man also in Gleichung (17.) die Integrations-Constante $\frac{\alpha}{\sqrt{-A}}$ hinzu, so erhält man in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 152 der Tabelle

$$(23.) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{\alpha - \varphi}{\sqrt{-A}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin\left(-\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

Aufgabe 4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = ?$

Auflösung. Hier ist

$$(24.) \quad A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1,$$

also

$$(25.) \quad \begin{cases} x = \frac{2t+1}{t^2-1}, & dx = -\frac{2(t^2+t+1)dt}{(t^2-1)^2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{1+x+x^2}}{x}, & \sqrt{1+x+x^2} = \frac{t^2+t+1}{t-1}. \end{cases}$$

Dies giebt in Uebereinstimmung mit Aufgabe 4 in § 46, wenn man die Integrations-Constante $1 - \frac{1}{2}\ln 3$ hinzufügt,

$$(26.) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = -2 \int \frac{(2t+1)dt}{(t^2-1)^2} \\ = \frac{1}{2} \int \left[-\frac{3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} \right] dt \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} + 2 + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \ln 3 \right] \\ = \frac{t^2+t+1}{t^2-1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^2-1}\right) \\ = \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2} \ln(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}).$$

Aufgabe 5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

Auflösung. Hier ist

$$(27.) \quad A = -1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 1,$$

also

$$(28.) \quad \begin{cases} x = \frac{2t+1}{t^2+1}, & dx = -\frac{2(t^2+t-1)dt}{(t^2+1)^2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}, & \sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}, \end{cases}$$

$$(29.) \quad \begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} &= -2 \int \frac{(2t+1)dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Nun wird nach Formel Nr. 144 der Tabelle

$$(30.) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t,$$

folglich ist, wenn man die Integrations-Constante gleich -1 setzt,

$$(31.) \quad \begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} &= \frac{2}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} - 1 - \operatorname{arctg} t \\ &= -\frac{t^2+t-1}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t \\ &= -\sqrt{1+x-x^2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right). \end{aligned}$$

Bedeutend leichter wird die Lösung durch Anwendung der Formel Nr. 151 der Tabelle, indem man

$$(32.) \quad \begin{cases} 2x = -2y + 1, & \text{also } dx = -dy, \\ \sqrt{1+x-x^2} = \sqrt{a^2-y^2}, & 2a = \sqrt{5} \end{cases}$$

setzt; dann erhält man nach Formel Nr. 31 und 34 der Tabelle

$$(33.) \quad \begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} &= \int \frac{(2y-1)dy}{2\sqrt{a^2-y^2}} \\ &= -\sqrt{a^2-y^2} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{y}{a} \right) \\ &= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

Um die Uebereinstimmung dieses Resultates mit dem früheren nachzuweisen, setze man

264 § 47. Integration von $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn $C > 0$.

$$(34.) \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{1+x-x^2}}{x} \right), \text{ also } \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{1+x-x^2}}{x},$$

dann wird

$$(35.) \quad \sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2(2x - 1 + \sqrt{1+x-x^2})}{5},$$

$$(36.) \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2x - 1 - 4\sqrt{1+x-x^2}}{5}.$$

Erklärt man sodann den Bogen α durch die Gleichungen

$$(37.) \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

so wird

$$(38.) \quad \sin(\alpha - \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = \frac{2x - 1}{\sqrt{5}}.$$

Fügt man also in Gleichung (31.) die Integrations-Constante $\frac{\alpha}{2}$ hinzu, so erhält man

$$(39.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{\alpha - \varphi}{2} \\ = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}} \right).$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (28.), erhält man

$$(40.) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -2 \int \frac{dt}{2t+1} = -\ln(2t+1) \\ = -\ln \left(\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right).$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Hier ist

(41.) $a = 1, A = -1, B = 0, C = 1,$

folglich erhält man nach Formel Nr. 156 oder 157 der Tabelle

(42.) $x = \frac{2t}{t^2 + 1}, \sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, dx = -\frac{2(t^2 - 1)dt}{(t^2 + 1)^2},$

(43.) $\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = 2 \int \frac{dt}{kt^2 - 2t + k},$

oder, wenn man k mit $\frac{1}{r}$ bezeichnet und die Formeln Nr. 86 und 87 der Tabelle berücksichtigt,

(44.) $\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = 2r \int \frac{dt}{t^2 - 2rt + 1}$
 $= \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \ln \left(\frac{t - r - \sqrt{r^2 - 1}}{t - r + \sqrt{r^2 - 1}} \right),$

wenn $r^2 > 1$ ist, und nach Formel Nr. 88 der Tabelle

(45.) $\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-r}{\sqrt{1-r^2}} \right),$

wenn $r^2 < 1$ ist. Zum Schluss muss man noch

(46.) $t = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{k}$

einsetzen.

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (42.), erhält man

(47.) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -2 \int \frac{(t^2 + 1)dt}{t^4 + 6t^2 + 1}.$

Da die quadratische Gleichung

(48.) $t^4 + 6t^2 + 1 = 0$

die beiden Wurzeln

$$(49.) \quad \begin{cases} t_1^2 = -3 + 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 1)^2, \\ t_2^2 = -3 - 2\sqrt{2} = -(\sqrt{2} + 1)^2 \end{cases}$$

hat, so findet man durch Partialbruch-Zerlegung

$$(50.) \quad \frac{-2t^2 - 2}{t^4 + 6t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{t^2 + a^2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{t^2 + b^2} \right),$$

wobei

$$(51.) \quad a = \sqrt{2} - 1, \quad b = \sqrt{2} + 1$$

gesetzt ist. Dies giebt nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(52.) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{b} \right) \right].$$

Setzt man noch

$$(53.) \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a} \right) = \varphi, \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{b} \right) = \psi,$$

so wird

$$(54.) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{t}{a} = \frac{t}{\sqrt{2} - 1}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{t}{b} = \frac{t}{\sqrt{2} + 1},$$

also

$$(55.) \quad \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} = \frac{2t\sqrt{2}}{1 - t^2} = -\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich wird

$$(56.) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi + \psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Einfacher findet man dieses Resultat durch Einführung trigonometrischer Functionen, also durch die Substitution

$$(57.) \quad x = \sin t, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

Vergl. § 12, Gleichung (7.).

§ 48.

**Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})dx$,
wenn $B^2 - AC$ positiv ist.**

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 158.)

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(1.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

sind bekanntlich

$$(2.) \quad x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $B^2 - AC > 0$ ist, werden beide Wurzeln x_1 und x_2 *reell*. Setzt man in diesem Falle

$$(3.) \quad x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad \alpha\gamma = A$$

sein möge, so wird

$$(4.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2) \\ = \alpha\gamma \left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right) = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta).$$

Jetzt möge die neue Integrations-Veränderliche t durch die Gleichung

$$(5.) \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = t(\alpha x + \beta)$$

eingeführt werden. Dadurch erhält man

$$Ax^2 + 2Bx + C = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) = t^2(\alpha x + \beta)^2,$$

oder

$$(6.) \quad \gamma x + \delta = t^2(\alpha x + \beta),$$

$$(7.) \quad x = \frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \quad dx = \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)t dt}{(\gamma - \alpha t^2)^2},$$

$$(8.) \quad t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}.$$

Dies giebt

$$(9.) \quad \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx = \\ \int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right) \cdot \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)t dt}{(\gamma - \alpha t^2)^2}.$$

wobei

$$(10.) \quad t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}.$$

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}} = ?$

Auflösung. Aus Gleichung (9.) folgt

$$(11.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}} = 2 \int \frac{dt}{\gamma - \alpha t^2}.$$

Setzt man hierbei $\frac{\gamma}{\alpha} = \pm k^2$, jenachdem $\frac{\gamma}{\alpha}$ positiv oder negativ ist, so erhält man für das obere Vorzeichen nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(12.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}} = -\frac{2}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2 - k^2} = -\frac{1}{\alpha k} \ln \left(\frac{t - k}{t + k} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha \gamma}} \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha(\gamma x + \delta)} + \sqrt{\gamma(\alpha x + \beta)}}{\sqrt{\alpha(\gamma x + \delta)} - \sqrt{\gamma(\alpha x + \beta)}} \right).$$

Für das untere Vorzeichen wird nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(13.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}} = -\frac{2}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2 + k^2} = -\frac{2}{\alpha k} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{k} \right) \\ = -\frac{2}{\sqrt{-\alpha \gamma}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-\alpha(\gamma x + \delta)}{\gamma(\alpha x + \beta)}}.$$

Aufgabe 2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{rx - x^2}} = ?$

Auflösung. In diesem Falle kann man setzen

$$(14.) \quad \alpha x + \beta = x, \quad \gamma x + \delta = r - x,$$

also

$$(15.) \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1, \quad \delta = r, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = -r,$$

$$(16.) \quad \begin{cases} x = \frac{r}{t^2 + 1}, & \sqrt{rx - x^2} = \frac{rt}{t^2 + 1}, \\ dx = -\frac{2rt dt}{(t^2 + 1)^2}, & t = \sqrt{\frac{r-x}{x}}, \end{cases}$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 144 der Tabelle

$$(17.) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{rx - x^2}} = -2r \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = -2r \left[\frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right] \\ = -\sqrt{rx - x^2} - r \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r-x}{x}}.$$

In ähnlicher Weise kann man $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{rx - x^2}}$, $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{rx - x^2}}$, ... berechnen.

Aufgabe 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{rx - x^2}} = ?$

Auflösung. Durch dieselbe Substitution wie bei der vorhergehenden Aufgabe, also durch die Gleichungen (16.), erhält man hier

$$(18.) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{rx - x^2}} = -\frac{2}{r} \int \frac{dt}{t} = -\frac{2t}{r} \\ = -\frac{2}{r} \sqrt{\frac{r-x}{x}} = -\frac{2\sqrt{rx - x^2}}{rx}.$$

Aufgabe 4. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Hier sei

$$(19.) \quad \alpha x + \beta = 1 + x, \quad \text{also} \quad \gamma x + \delta = 1 - x,$$

$$(20.) \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = -2,$$

$$(21.) \quad x = -\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sqrt{1 - x^2} = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad dx = -\frac{4t dt}{(t^2 + 1)^2},$$

$$(22.) \quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x + 1 = \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Dies giebt

$$(23.) \quad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\int dt = -t = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Aufgabe 5. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = ?$

In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(24.) \quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Aufgabe 6. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = ?$

Auflösung. Hier sei

$$\alpha x + \beta = x + 1, \quad \text{also} \quad \gamma x + \delta = x - 1,$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 2,$$

$$(25.) \quad x = \frac{t^2 + 1}{1 - t^2}, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{4t dt}{(1 - t^2)^2}.$$

$$(26.) \quad t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x+1 = \frac{2}{1-t^2}.$$

Dies giebt

$$(27.) \quad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int dt = t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Aufgabe 7. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = ?$

In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$(28.) \quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Aufgabe 8. $\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = ?$

Auflösung. Auch hier findet die durch die Gleichungen (16.) angegebene Substitution Anwendung, und zwar erhält man, wenn man

$$(29.) \quad r = kg$$

setzt,

$$(30.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = -2 \int \frac{dt}{r-k(t^2+1)} = -2 \int \frac{dt}{kg-k(t^2+1)} \\ = \frac{2}{k} \int \frac{dt}{t^2-g+1}.$$

Dies giebt für $g > 1$ nach Formel Nr. 29a der Tabelle

$$(31.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{1}{k\sqrt{g-1}} \ln \left(\frac{t-\sqrt{g-1}}{t+\sqrt{g-1}} \right).$$

Dieses Resultat kann man noch auf die Form

$$(32.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{k(r-k)}} \ln \left(\frac{\sqrt{k(r-x)} - \sqrt{x(r-k)}}{\sqrt{k(r-x)} + \sqrt{x(r-k)}} \right)$$

bringen. Ist $g < 1$, so findet man nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(33.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{2}{k\sqrt{1-g}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{1-g}} \right),$$

also

$$(34.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{rx-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{k(k-r)}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{k(r-x)}}{\sqrt{x(k-r)}} \right).$$

Aufgabe 9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = ?$

Auflösung. Hier sei

$$(35.) \quad \alpha x + \beta = 1 - x, \quad \gamma x + \delta = 1 + x,$$

also

$$(36.) \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 1, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 2,$$

$$(37.) \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad dx = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2},$$

$$(38.) \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad 1+x^2 = \frac{2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Daraus folgt

$$(39.) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(t^2+1)dt}{t^4+1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$(40.) \quad t^4 + 1 = (t^2 - i)(t^2 + i) = 0,$$

nämlich

$$(41.) \quad t_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad t_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad t_3 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad t_4 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

sind sämmtlich complex. Indem man je zwei conjugirt complexe Factoren von $t^4 + 1$ mit einander multiplicirt, erhält man die reellen Producte

$$(42.) \quad (t - t_1)(t - t_2) = t^2 - t\sqrt{2} + 1,$$

$$(43.) \quad (t - t_3)(t - t_4) = t^2 + t\sqrt{2} + 1$$

und die Partialbruch-Zerlegung

$$(44.) \quad \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} = \frac{Pt + Q}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{Rt + S}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right).$$

Deshalb findet man nach Formel Nr. 88 der Tabelle

$$(45.) \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)].$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch wesentlich vereinfachen. Setzt man nämlich

$$(46.) \quad \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) = \xi, \quad \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1) = \eta,$$

so wird

$$(47.) \quad \operatorname{tg} \xi = t\sqrt{2}-1, \quad \operatorname{tg} \eta = t\sqrt{2}+1,$$

$$(48.) \quad \operatorname{tg}(\xi + \eta) = \frac{\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \eta} = \frac{2t\sqrt{2}}{2-2t^2} = -\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (37.) und (38.)

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \text{also} \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2t}{t^2-1},$$

folglich wird

$$(49.) \quad \operatorname{tg}(\xi + \eta) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}, \quad \xi + \eta = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right),$$

§ 49. $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn $A < 0$, $C < 0$, $B^2 - AC < 0$. 273

$$(50.) \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}} \right).$$

In § 47, Aufgabe 8, hatte sich ergeben

$$(51.) \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Die Uebereinstimmung dieser beiden Resultate findet man leicht, indem man

$$(52.) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}} \right) = \varphi, \text{ also } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$$

setzt; dann wird

$$(53.) \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Fügt man also in Gleichung (50.) die Integrations-Constante $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hinzu, so erhält man in Uebereinstimmung mit Gleichung (51.)

$$(54.) \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}} \right) \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Es war schon damals hervorgehoben worden, dass eine einfachere Lösung dieser Aufgabe durch die in § 12 angegebene Methode, nämlich durch Einführung trigonometrischer Functionen, gefunden wird.

§ 49.

Integration der Differential-Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$, wenn die drei Grössen A , C und $B^2 - AC$ negativ sind.

Es sei jetzt

$$(1.) \quad B^2 - AC < 0, \text{ also } AC > B^2 > 0;$$

die beiden Grössen A und C haben daher dasselbe Vorzeichen, so dass die Voraussetzung

274 § 50. Normalintegrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$.

$$(2.) \quad A < 0$$

die andere

$$(3.) \quad C < 0$$

nothwendiger Weise herbeiführt. Nun wird

$$(4.) \quad Ax^2 + 2Bx + C = \frac{1}{A} [A^2x^2 + 2ABx + B^2 + AC - B^2] \\ = \frac{1}{A} [(Ax + B)^2 + (AC - B^2)];$$

folglich ist in diesem Falle der Ausdruck in der eckigen Klammer *beständig positiv*, was auch x sein mag, also $Ax^2+2Bx+C$ *beständig negativ*, denn A ist negativ. Deshalb wird die Function $F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ selbst eine *complexe* Grösse, wenn die Ungleichungen (1.), (2.) und (3.) gelten, weil $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ stets *imaginär* sein muss. Es ist daher nicht möglich, $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$ in *reeller* Form darzustellen. Unter diesen Umständen wird man, wie schon in § 44 hervorgehoben wurde, am besten

$$(5.) \quad \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx = \int F(x, i\sqrt{A_1x^2+2B_1x+C_1})dx$$

setzen, wobei

$$(6.) \quad A_1 = -A, \quad B_1 = -B, \quad C_1 = -C$$

ist. Man kann dann das in § 46 und § 47 angegebene Verfahren benutzen.

§ 50.

Normalintegrale von der Form $\int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})dx$.*

Ist $F(x, \sqrt{X})$ eine (ganze oder gebrochene) rationale Function von x und \sqrt{X} , wobei man der Kürze wegen $Ax^2+2Bx+C$ mit X bezeichnet hat, so kann man $F(x, \sqrt{X})$ immer auf die Form

$$(1.) \quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{g(x) + h(x) \cdot \sqrt{X}}{\varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{X}}$$

*) Der Anfänger darf die Ausführungen dieses Paragraphen übergehen.

bringen, so dass $g(x)$, $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ganze rationale Functionen von x sind. Daraus folgt

$$(2.) \quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{[g(x) + h(x) \cdot \sqrt{X}] \cdot [\varphi(x) - \psi(x) \cdot \sqrt{X}]}{[\varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{X}] \cdot [\varphi(x) - \psi(x) \cdot \sqrt{X}]} \\ = \frac{G(x) + H(x) \cdot \sqrt{X}}{\varphi(x)^2 - \psi(x)^2 \cdot X},$$

wenn man

$$(3.) \quad \begin{cases} g(x)\varphi(x) - h(x)\psi(x) \cdot X = G(x), \\ h(x)\varphi(x) - g(x)\psi(x) = H(x) \end{cases}$$

setzt. Bezeichnet man noch den Nenner $\varphi(x)^2 - \psi(x)^2 \cdot X$ mit $N(x)$, so ergibt sich

$$(4.) \quad F(x, \sqrt{X}) = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)}{N(x)} \cdot \sqrt{X} = \frac{G(x)}{N(x)} + \frac{H(x)X}{N(x) \cdot \sqrt{X}}.$$

Die gebrochene rationale Function $\frac{G(x)}{N(x)}$ kann man nach den Angaben des vorhergehenden Abschnittes durch Partialbruchzerlegung integrieren. Ebenso kann man $\frac{H(x) \cdot X}{N(x)}$ (nöthigenfalls nach Absonderung einer ganzen rationalen Function) in Partialbrüche von der Form

$$\frac{K}{(x - k)^n} \quad \text{und} \quad \frac{Px + Q}{[(x - g)^2 + h^2]^n}$$

zerlegen. Deshalb kommt es im Wesentlichen nur auf die Berechnung der folgenden vier *Normalintegrale* an:

$$(5.) \quad \begin{cases} J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, & J_2 = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}, & J_3 = \int \frac{dx}{(x - k)^n \sqrt{X}}, \\ J_4 = \int \frac{(Px + Q) dx}{[(x - g)^2 + h^2]^n \sqrt{X}}. \end{cases}$$

Diese Betrachtung bleibt auch noch richtig, wenn X eine ganze rationale Function beliebig hohen Grades ist. Bezeichnet man mit X eine ganze rationale Function zweiten Grades, so wird es im Allgemeinen zweckmässig sein, die in § 44 angegebene Umformung vorzunehmen, so dass es bei dem Normalintegral J_1 nur auf die in den Formeln Nr. 34, 35 und 36 der Tabelle berechneten Integrale

$$(6.) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \text{ und } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{a}\right)$$

ankommt. In gleicher Weise geben nach dieser Umformung die Formeln Nr. 31, 32, 33, 114, 121 und 121a der Tabelle an, wie das Normalintegral J_2 , nämlich

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ und } \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

berechnet wird. Auch J_3 kann man in dem Falle, wo $k = 0$ ist, mit Anwendung der Formeln Nr. 37 bis 42, 120, 126 und 126a der Tabelle berechnen. Ist aber $k \geq 0$, so setze man zur

Berechnung von $\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2 + x^2}}$

$$(7.) \quad x = \frac{kz + a^2}{z - k}, \text{ also } x - k = \frac{k^2 + a^2}{z - k},$$

$$(8.) \quad dx = -\frac{(k^2 + a^2)dz}{(z - k)^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{\sqrt{(k^2 + a^2)(a^2 + z^2)}}{z - k},$$

$$(9.) \quad z = \frac{kx + a^2}{x - k}, \quad \sqrt{a^2 + z^2} = \frac{\sqrt{(k^2 + a^2)(a^2 + x^2)}}{x - k}.$$

Dies giebt

$$(10.) \quad \int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{(k^2 + a^2)^{n-1} \sqrt{k^2 + a^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1} dz}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Das Normalintegral J_3 ist also auf die Normalintegrale J_1 und J_2 zurückgeführt.

In ähnlicher Weise setze man zur Berechnung von

$$\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(11.) \quad x = \frac{kz - a^2}{z - k}, \text{ also } x - k = \frac{k^2 - a^2}{z - k},$$

$$(12.) \quad dx = -\frac{(k^2 - a^2)dz}{(z - k)^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{\sqrt{(k^2 - a^2)(z^2 - a^2)}}{z - k},$$

$$(13.) \quad z = \frac{kx - a^2}{x - k}, \quad \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{\sqrt{(k^2 - a^2)(x^2 - a^2)}}{x - k},$$

Ist $k^2 > a^2$, so wird daher

$$(14.) \int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{x^2 - a^2}} = - \frac{1}{(k^2 - a^2)^{n-1} \sqrt{k^2 - a^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1} dz}{\sqrt{z^2 - a^2}},$$

und für $k^2 < a^2$ wird

$$(15.) \int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{x^2 - a^2}} = - \frac{1}{(k^2 - a^2)^{n-1} \sqrt{a^2 - k^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1} dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Die in den Gleichungen (11.), (12.) und (13.) angegebene Substitution führt auch zur Umformung von $\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2 - x^2}}$; es wird nämlich

$$(16.) \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{(k^2 - a^2)(a^2 - z^2)}}{z - k}, \\ \sqrt{a^2 - z^2} = \frac{\sqrt{(k^2 - a^2)(a^2 - x^2)}}{x - k}, \end{cases}$$

also für $k^2 > a^2$

$$(17.) \int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{1}{(k^2 - a^2)^{n-1} \sqrt{k^2 - a^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1} dz}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

und für $k^2 < a^2$

$$(18.) \int \frac{x dx}{(x-k)^n \sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{1}{(k^2 - a^2)^{n-1} \sqrt{a^2 - k^2}} \int \frac{(z-k)^{n-1} dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Das Normalintegral J_4 kann bei Anwendung complexer Grössen durch Integrale von der Form J_3 dargestellt werden. Will man aber complexe Grössen ganz vermeiden, so wird man entweder die in § 46, 47 und 48 angegebenen Methoden anwenden, oder man wird im Allgemeinen noch zweckmässiger nach den Angaben in § 12. (vergl. Formel Nr. 83, 84 und 85 der Tabelle) trigonometrische Functionen einführen, nachdem man durch die lineare Substitution

$$(19.) \quad x = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1}$$

und durch passende Bestimmung der Grössen α und β das Integral auf Integrale von der Form

$$\int \frac{(Pz + Q) dz}{(z^2 + p^2)^n \sqrt{Z}}$$

zurückgeführt hat, wobei Z einen der drei Werthe $a^2 + z^2$, $z^2 - a^2$ oder $a^2 - z^2$ haben soll. Durch die Substitution

$$(20.) \quad z = a \operatorname{tg} t, \quad dz = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{a^2 + z^2} = \frac{a}{\cos t}$$

erhält man dann

$$(21.) \quad \int \frac{(Pz + Q) dz}{(z^2 + p^2)^n \sqrt{a^2 + z^2}} = \int \frac{(Pa \sin t + Q \cos t) \cos^{2n-2} t \cdot dt}{(a^2 \sin^2 t + p^2 \cos^2 t)^n} \\ = -Pa \int \frac{\cos^{2n-2} t d(\cos t)}{[a^2 + (p^2 - a^2) \cos^2 t]^n} \\ + Q \int \frac{(1 - \sin^2 t)^{n-1} d(\sin t)}{[(a^2 - p^2) \sin^2 t + p^2]^n}.$$

Durch die Substitution

$$(22.) \quad z = \frac{a}{\cos t}, \quad dz = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{z^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t$$

erhält man

$$(23.) \quad \int \frac{(Pz + Q) dz}{(z^2 + p^2)^n \sqrt{z^2 - a^2}} = \int \frac{(Pa + Q \cos t) \cos^{2n-2} t \cdot dt}{(a^2 + p^2 \cos^2 t)^n} \\ = Pa \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{[(a^2 + p^2) + a^2 \operatorname{tg}^2 t]^n} \\ + Q \int \frac{(1 - \sin^2 t)^{n-1} \cdot d(\sin t)}{[(a^2 + p^2) - p^2 \sin^2 t]^n}.$$

Durch die Substitution

$$(24.) \quad z = a \sin t, \quad dz = a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - z^2} = a \cos t$$

findet man

$$(25.) \quad \int \frac{(Pz + Q) dz}{(z^2 + p^2)^n \sqrt{a^2 - z^2}} = \int \frac{(Pa \sin t + Q) dt}{(a^2 \sin^2 t + p^2)^n} \\ = -Pa \int \frac{d(\cos t)}{[(a^2 + p^2) - a^2 \cos^2 t]^n} + Q \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^{n-1} d(\operatorname{tg} t)}{[(a^2 + p^2) \operatorname{tg}^2 t + p^2]^n}.$$

Ausserdem kann man auch Recursionsformeln herleiten von der Form

$$(26.) \int \frac{(Pz + Q)dz}{(z^2 + p^2)^n \sqrt{Z}}$$

$$= \frac{(Rz + S)\sqrt{Z}}{(z^2 + p^2)^{n-1}} + \int \frac{(P_1z + Q_1)dz}{(z^2 + p^2)^{n-1} \sqrt{Z}} + \int \frac{(P_2z + Q_2)dz}{(z^2 + p^2)^{n-2} \sqrt{Z}},$$

wobei man die unbestimmten Coefficienten R, S, P_1, Q_1, P_2, Q_2 durch Differentiation von $\frac{(Rz + S)\sqrt{Z}}{(z^2 + p^2)^{n-1}}$ findet.

XII. Abschnitt.

Theorie der bestimmten Integrale.

§ 51.

Integration bei unendlichen Grenzen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 159 und 160.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.) \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

war bisher vorausgesetzt worden, dass die Grenzen a und b endliche, constante Grössen seien. Jetzt kann man sich aber vorstellen, dass die obere Grenze b nicht mehr eine constante, sondern eine veränderliche Grösse sei, welche schliesslich bis in's Unbegrenzte wächst. Demgemäss würde $\int_a^\infty F'(x) dx$ durch die Gleichung

$$(2.) \quad \int_a^\infty F'(x) dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b F'(x) dx = \lim_{b=\infty} F(b) - F(a)$$

erklärt werden.

Auch die geometrische Deutung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt einer ebenen Figur bleibt in diesem Grenzfall noch bestehen, die ebene Figur aber, deren Flächeninhalt durch das Integral ausgedrückt wird, erstreckt sich längs der X-Axe bis in's Unendliche. Es war schon früher (§ 19, Aufgabe 8) gezeigt worden, dass der Flächeninhalt der Figur trotzdem einen endlichen Werth haben kann.

In gleicher Weise kann auch die untere Grenze a sich ändern und bis in's Unbegrenzte abnehmen. Dann möge

$\int_{-\infty}^b F'(x) dx$ durch die Gleichung

$$(3.) \quad \int_{-\infty}^b F'(x) dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b F'(x) dx = F(b) - \lim_{a=-\infty} F(a)$$

erklärt werden.

Aus den folgenden Beispielen kann man ersehen, dass hierbei drei Fälle zu unterscheiden sind:

- I. Das Integral mit unendlichen Grenzen wird selbst *unendlich gross*;
- II. das Integral behält einen *endlichen* Werth;
- III. das Integral wird *unbestimmt*.

Beispiele.

$$1.) \quad \int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{b=\infty} [e^x]_0^b = \lim_{b=\infty} e^b - 1 = \infty.$$

Dagegen wird

$$1 a.) \quad \int_{-\infty}^b e^x dx = \lim_{a=-\infty} [e^x]_a^b = e^b - \lim_{a=-\infty} e^a = e^b.$$

Man kann diese Resultate auch geometrisch deuten als Flächeninhalt der ebenen Figur, welche oben durch die *Exponentiallinie* mit der Gleichung

$$y = e^x$$

(vergl. D.-R., Seite 383, Fig. 78) und unten durch die X-Axe begrenzt wird.

$$2.) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = - \lim_{b=\infty} [e^{-x}]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty} \left(\frac{1}{e^b} \right) = 1.$$

$$3.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \lim_{b=\infty} \left[\arctg \left(\frac{x}{a} \right) \right]_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b=\infty} \arctg \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{\pi}{2a}.$$

$$\begin{aligned}
 4.) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \lim_{\substack{c=+\infty \\ b=-\infty}} \int_b^c \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \lim_{\substack{c=+\infty \\ b=-\infty}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_b^c \\
 &= \frac{1}{a} \left[\lim_{c=+\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{a} \right) - \lim_{b=-\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a}.
 \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiele sieht man, dass auch gleichzeitig beide Grenzen unendlich werden können. Im Uebrigen kann man die letzte Aufgabe auch durch Zerlegung des Integrals auf die vorhergehende Aufgabe zurückführen. Es ist nämlich, wenn man $y = -x$ setzt,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{a^2 + x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} \\
 &= - \int_{+\infty}^0 \frac{dy}{a^2 + y^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}.
 \end{aligned}$$

$$5.) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b=\infty} [2\sqrt{x}]_1^b = 2 \lim_{b=\infty} \sqrt{b} - 2 = \infty.$$

$$6.) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2 \lim_{b=\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^b = 2 - 2 \lim_{b=\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right) = 2.$$

$$7.) \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b=\infty} [\ln x]_a^b = \lim_{b=\infty} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \infty.$$

$$8.) \quad \int_0^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{b=\infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b=\infty} \sin b.$$

Dieser Ausdruck nähert sich keiner bestimmten Grenze; in diesem Falle wird also das Integral *unbestimmt*, wenn man die obere (oder untere) Grenze unendlich gross werden lässt.

$$9.) \quad \int_0^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{b=\infty} [-\cos x]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty} \cos b.$$

Dieser Ausdruck wird ebenfalls unbestimmt. Davon kann man sich auch durch die geometrische Deutung überzeugen, denn das $\int_0^b \sin x \, dx$ stellt den Flächeninhalt der ebenen Figur dar, welche von der *Sinuslinie* mit der Gleichung

$$y = \sin x$$

(vergl. D.-R., Seite 382, Figur 77) und der *X*-Axe begrenzt wird. Dabei sind die Theile *über* der *X*-Axe mit *positivem* und die *unter* der *X*-Axe mit *negativem* Zeichen in Rechnung zu ziehen.

Auch bei der Kubatur der Rotationskörper war ein derartiges Integral bereits aufgetreten. In § 25, Aufgabe 13, erhielt man für das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der *Cissoide* um die Asymptote $x = 2a$ entsteht, einen Werth, der auch dann noch endlich bleibt, wenn y unendlich gross wird. Es war nämlich

$$x = 2a \sin^2 \varphi, \quad y = 2a \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}, \quad x - 2a = -2a \cos^2 \varphi,$$

$$V = \pi \int_0^y (x - 2a)^2 dy = a^3 \pi [-\sin(2\varphi) \cos(2\varphi) + 2\varphi + \frac{1}{3} \sin^3(2\varphi)].$$

Für $\lim y = \infty$ wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also

$$V = \pi \int_0^{\infty} (x - 2a)^2 dy = a^3 \pi^2.$$

§ 52.

Integration von Differential-Funktionen, die an den Grenzen des Integrals unstetig werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 161 bis 163.)

Bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Formel Nr. 4 der Tabelle, nämlich durch die Gleichung

$$(1.) \quad \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

war bisher auch die Voraussetzung gemacht worden, dass $F'(x)$ in dem Intervalle von a bis b stetig sei. Jetzt möge aber $F'(x)$ stetig sein nur für

$$a \leq x < b,$$

während

$$(2.) \quad F'(b) = \pm \infty$$

ist. Bezeichnet man dann mit β eine beliebig kleine positive Grösse, so gilt für

$$\int_a^{b-\beta} F'(x) dx = F(b - \beta) - F(a)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein β auch sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b F'(x) dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(3.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \lim_{\beta=0} \int_a^{b-\beta} F'(x) dx = \lim_{\beta=0} F(b - \beta) - F(a).$$

Es sei z. B.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{b-x}}, \quad \text{also} \quad F'(b) = \pm \infty,$$

dann wird

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) dx &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = -2 \lim_{\beta=0} [\sqrt{b-x}]_a^{b-\beta} \\ &= -2 \left(\lim_{\beta=0} \sqrt{\beta} - \sqrt{b-a} \right) = 2\sqrt{b-a}. \end{aligned}$$

Bleibt $F'(x)$ stetig für

$$a < x \leq b,$$

während

$$(4.) \quad F'(a) = \pm \infty$$

ist, so bezeichne man mit α eine beliebig kleine positive Grösse, dann gilt für

$$\int_{a+\alpha}^b F'(x) dx = F(b) - F(a + \alpha)$$

noch die frühere Erklärung des bestimmten Integrals, wie klein auch α sein mag. Dem entsprechend möge $\int_a^b F'(x) dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(5.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \lim_{\alpha=0} \int_{a+\alpha}^b F'(x) dx = F(b) - \lim_{\alpha=0} F(a + \alpha).$$

Es kann auch vorkommen, dass beide Fälle vereinigt sind, dass also

$$(6.) \quad F'(a) = \pm \infty \quad \text{und} \quad F'(b) = \pm \infty,$$

dass $F'(x)$ aber stetig ist für

$$a < x < b;$$

dann wird $\int_a^b F'(x) dx$ erklärt durch die Gleichung

$$(7.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \lim_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} F'(x) dx = \lim_{\beta=0} F(b-\beta) - \lim_{\alpha=0} F(a+\alpha).$$

Beispiele von derartigen Integralen waren bei der Quadratur der Curven mehrfach aufgetreten. So ergab sich bei Aufgabe 8 in § 19 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche oben von der *verallgemeinerten Hyperbel*

$$y = \sqrt[n]{2p} \cdot x^{-\frac{m}{n}}$$

begrenzt wird,

$$(8.) \quad F = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m} \left(x_2^{\frac{n-m}{n}} - x_1^{\frac{n-m}{n}} \right).$$

Ist $n > m$, so wird $\lim_{x_1=0} x_1^{\frac{n-m}{n}} = 0$, und man erhält für

$$(9.) \quad F = \int_0^{x_2} y dx = \frac{n\sqrt[n]{2p}}{n-m} x_2^{\frac{n-m}{n}} = \frac{nx_2 y_2}{n-m}$$

einen endlichen Werth, obgleich y unendlich gross wird für $x = 0$, so dass sich der Flächenstreifen längs der Y -Axe in's Unendliche erstreckt.

Ferner fand man bei Aufgabe 12 in § 19 für den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche von der *Cissoide* mit den Gleichungen

$$(10.) \quad x = 2a \sin^2 \varphi, \quad y = 2a \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$$

begrenzt wird,

$$(11.) \quad F = \int_0^x y dx = 8a^2 \int_0^\varphi \sin^4 \varphi d\varphi \\ = a^2 [3\varphi - \cos \varphi (2\sin^3 \varphi + 3\sin \varphi)].$$

Für $x = 2a$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird y unendlich gross, so dass sich der Flächenstreifen längs der Asymptote $x = 2a$ in's Unendliche erstreckt. Trotzdem bleibt

$$(12.) \quad F = \int_0^{2a} y dx = a^2 \lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}} [3\varphi - \cos \varphi (2\sin^3 \varphi + 3\sin \varphi)] = \frac{3a^2 \pi}{2}$$

endlich.

Man erkennt aus den angeführten Beispielen, dass bei dieser Erklärung das bestimmte Integral auch dann noch als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann, wenn die Function unter dem Integralzeichen an den Grenzen unendlich gross wird.

Uebungs-Beispiele.

$$1.) \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \lim_{\alpha=0} \int_{\alpha+\alpha}^b (x-a)^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \lim_{\alpha=0} [\sqrt[3]{x-a}]_{\alpha+\alpha}^b \\ = 3 \sqrt[3]{b-a} - 3 \lim_{\alpha=0} \sqrt[3]{\alpha} = 3 \sqrt[3]{b-a}.$$

$$\begin{aligned}
 2.) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{\substack{\alpha=0 \\ a+\alpha}} \int_{a+\alpha}^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{\alpha=0} \left[\ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right]_{a+\alpha}^b \\
 &= \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right) - \lim_{\alpha=0} \ln \left(\frac{a + \alpha + \sqrt{2a\alpha + \alpha^2}}{a} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right).
 \end{aligned}$$

$$3.) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0 \\ a+\alpha}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-ab + (a+b)x - x^2}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab - \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)x + x^2\right]}},
 \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$x - \frac{a+b}{2} = t, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = c^2,$$

also

$$dx = dt, \quad 2c = b - a$$

setzt,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = \arcsin \left(\frac{t}{c} \right) \\
 &= \arcsin \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right).
 \end{aligned}$$

Deshalb wird

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \lim_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} \left[\arcsin \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right) \right]_{a+\alpha}^{b-\beta} \\
 &= \lim_{\beta=0} \arcsin \left(\frac{b - 2\beta - a}{b - a} \right) - \lim_{\alpha=0} \arcsin \left(\frac{a + 2\alpha - b}{b - a} \right) \\
 &= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = 2 \arcsin 1 = \pi.
 \end{aligned}$$

$$4.) \int_a^b \frac{dx}{x^2 - b^2} = \lim_{\beta=0} \left[\frac{1}{2b} \ln \left(\frac{b-x}{b+x} \right) \right]_0^{b-\beta} = \frac{1}{2b} \lim_{\beta=0} \ln \left(\frac{\beta}{2b - \beta} \right) = -\infty.$$

§ 53.

Integration von Differential-Funktionen, die zwischen den Integrations-Grenzen unendlich werden.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 164.)

Wird die Function $F'(x)$ für $x = c$ unendlich gross, wobei c zwischen den Integrations-Grenzen a und b liegen möge, während $F'(x)$ stetig bleibt für

$$a \leq x < c \quad \text{und für} \quad c < x \leq b,$$

dann soll $\int_a^b F'(x) dx$ erklärt werden durch die Gleichung

$$(1.) \quad \int_a^b F'(x) dx = \lim_{\gamma=0} \int_a^{c-\gamma} F'(x) dx + \lim_{\delta=0} \int_{c+\delta}^b F'(x) dx$$

$$= F(b) - F(a) + \lim_{\gamma=0} F(c - \gamma) - \lim_{\delta=0} F(c + \delta),$$

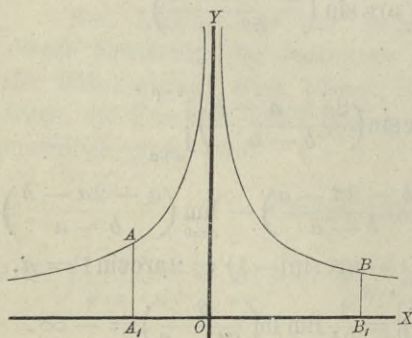
wobei γ und δ beliebig kleine positive Grössen sind.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Der Gleichung

$$(2.) \quad x^2 y^3 = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Fig. 100.



entspricht eine Curve (Fig. 100), welche die Y-Axe zur Asymptote und ausserdem zur Symmetrie-Axe hat; man soll den Flächeninhalt der Figur berechnen, welche oben durch diese Curve, unten durch die X-Axe, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

Auflösung. Längs der Y -Axe erstreckt sich die Figur in's Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich ist in diesem Falle

$$\begin{aligned}
 (3.) \quad F &= \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} y dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} y dx \\
 &= \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} x^{-\frac{2}{3}} dx \\
 &= 3 \lim_{\gamma=0} [\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\gamma} + 3 \lim_{\delta=0} [\sqrt[3]{x}]_{+\delta}^{+2},
 \end{aligned}$$

also

$$(4.) \quad F = 3[1 - \lim_{\gamma=0} \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{2} - \lim_{\delta=0} \sqrt[3]{\delta}] = 3(1 + \sqrt[3]{2}).$$

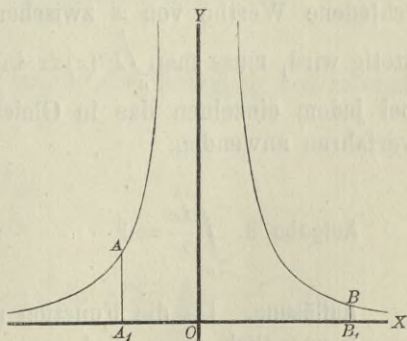
Man erhält also für den Flächeninhalt der Figur, die sich längs der Y -Axe bis in's Unendliche erstreckt, einen endlichen Werth.

Aufgabe 2. Der Gleichung

$$(5.) \quad x^2 y = 1, \text{ oder } y = \frac{1}{x^2}$$

entspricht eine Curve (Fig. 101), welche gleichfalls die Y -Axe zur Asymptote und zur Symmetrie-Axe hat; man soll den Flächeninhalt der ebenen Figur berechnen, welche oben durch diese Curve, unten durch die X -Axe, links durch die Ordinate $x = -1$ und rechts durch die Ordinate $x = +2$ begrenzt wird.

Fig. 101.



Auflösung. Längs der Y -Axe erstreckt sich die Figur bis in's Unendliche, denn für $x = 0$ wird $y = \infty$, folglich wird auch in diesem Falle

$$\begin{aligned}
 (6.) \quad F &= \lim_{\gamma=0} \int_{-1}^{-\gamma} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+2} \frac{dx}{x^2} \\
 &= \lim_{\gamma=0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\gamma} + \lim_{\delta=0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{+\delta}^{+2} \\
 &= \lim_{\gamma=0} \frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{1}{2} + \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} = \infty.
 \end{aligned}$$

Man hätte einen *Fehler* gemacht, wenn man geschrieben hätte

$$F = \int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{+2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Man sieht, dass die geometrische Deutung des bestimmten Integrals, wie sie früher unter Ausschluss von Unstetigkeiten gegeben wurde, bei der Erklärung des bestimmten Integrals durch Gleichung (1.) auch dann noch bestehen bleibt, wenn $F'(x)$ für einzelne Werthe von x zwischen den Grenzen a und b unstetig wird. In dem Falle nämlich, wo $F'(x)$ für n verschiedene Werthe von x zwischen den Grenzen a und b unstetig wird, muss man $\int_a^b F'(x) dx$ in $n+1$ Integrale zerlegen und bei jedem einzelnen das in Gleichung (1.) angedeutete Grenzverfahren anwenden.

Aufgabe 3. $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = ?$

Auflösung. Da die Function unter dem Integralzeichen für $x = 0$ unendlich gross wird, so muss man das Integral wieder in zwei andere zerlegen. Man setzt also

$$\begin{aligned}
 (7.) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} &= \lim_{\gamma=0} \int_{-a}^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta=0} \int_{+\delta}^{+b} \frac{dx}{x} \\
 &= \lim_{\gamma=0} \ln\left(\frac{\gamma}{a}\right) + \lim_{\delta=0} \ln\left(\frac{b}{\delta}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \lim \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).
 \end{aligned}$$

In diesem Falle hängt der Werth des bestimmten Integrals von dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\delta}$ ab. Da dieses Verhältniss unendlich viele Werthe haben darf, so hat auch das Integral unendlich viele Werthe. Für $\gamma = \delta$ wird

$$(8.) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln 1 = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dieser Werth heisst nach *Cauchy* „der Hauptwerth“ des bestimmten Integrals.

Aufgabe 4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} = ?$ wenn $a < c < b$.

Auflösung. Indem man wieder die Zerlegung des Integrals ausführt, findet man

$$\begin{aligned}
 (9.) \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-c)^4}} &= \int_a^b (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx \\
 &= \lim_{\gamma=0} \int_a^{c-\gamma} (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx + \lim_{\delta=0} \int_{c+\delta}^b (x-c)^{-\frac{4}{5}} dx \\
 &= 5 \lim_{\gamma=0} [\sqrt[5]{x-c}]_a^{c-\gamma} + 5 \lim_{\delta=0} [\sqrt[5]{x-c}]_{c+\delta}^b \\
 &= 5 \left[\lim_{\gamma=0} \sqrt[5]{-\gamma} - \sqrt[5]{a-c} + \sqrt[5]{b-c} - \lim_{\delta=0} \sqrt[5]{\delta} \right] \\
 &= 5 \left(\sqrt[5]{b-c} + \sqrt[5]{c-a} \right).
 \end{aligned}$$

§ 54.

Näherungsmethoden durch Einführung einfacherer Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 165.)

In vielen Fällen, wo das *unbestimmte* Integral einer Differential-Function schwer zu ermitteln ist, kann man den Werth des *bestimmten* Integrals durch andere Hilfsmittel genau, oder doch mit grosser Annäherung berechnen.

Von diesen Hilfsmitteln sollen hier einige angeführt werden.

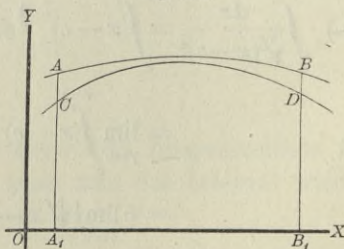
Aus der geometrischen Deutung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ als Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben begrenzt ist durch die Curve $y = f(x)$, rechts und links durch die Ordinaten $x = b$, bezw. $x = a$ und unten durch die X-Axe (vergl. Formel Nr. 4 der Tabelle), ergibt sich sofort der folgende

Satz 1. Sind $y_1 = \varphi(x)$ und $y = f(x)$ zwei Functionen, welche zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ sich durch Curven geometrisch darstellen lassen, und bleibt in diesem Intervalle $\varphi(x)$ beständig gleich oder kleiner als $f(x)$, so ist auch

$$(1.) \quad \int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx;$$

denn, wie man aus Fig. 102 ersieht, hat die von der Curve $y = f(x)$ begrenzte Figur A_1B_1BA einen grösseren Flächeninhalt als die von der anderen Curve $y_1 = \varphi(x)$ begrenzte Figur A_1B_1DC . Dabei ist zunächst vorausgesetzt, dass die Curven beide über der X-Axe liegen; der Satz bleibt aber auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzung *nicht* erfüllt ist.

Fig. 102.



Man kann den Beweis auch unabhängig von der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals führen, indem man dasselbe als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\varphi(x)dx$, bezw. $f(x)dx$ betrachtet. Aus

$$(2.) \quad \varphi(x)dx \leq f(x)dx$$

folgt dann auch die Ungleichheit der Summen, also

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx.$$

Satz 2. *Liegt die Function $f(x)$ für alle Werthe von x innerhalb des Intervalles von a bis b der Grösse nach beständig zwischen den Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also*

$$(3.) \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

so ist auch

$$(4.) \quad \int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx.$$

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 1.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = ?$

Auflösung. Da x beständig ein positiver ächter Bruch ist, so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$0 \leq x < 1,$$

$$0 \leq x^3 \leq x^2,$$

$$1 \geq 1 - x^3 \geq 1 - x^2,$$

$$1 \geq \sqrt{1 - x^3} \geq \sqrt{1 - x^2},$$

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

folglich wird auch

$$(5.) \quad \int_0^{0,5} dx < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder

$$(6.) \quad 0,5 < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0,5235988.$$

§ 55.

Mittelwerthsätze.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 166, 166a und 167.)

Es sei jetzt

$$(1.) \quad f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

wobei die stetige Function $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b zunächst *beständig positiv*, oder doch wenigstens *nicht negativ* sein möge; es sei also $h(x) \geq 0$. Ferner erreiche die in diesem Intervalle stetige Function $g(x)$ ihren *kleinsten* Werth K für $x = x_1$ und ihren *grössten* Werth G für $x = x_2$, wobei x_1 und x_2 noch zwischen den Grenzen a und b liegen oder mit diesen Grenzen zusammenfallen sollen; es sei also

$$(2.) \quad g(x_1) = K \quad \text{und} \quad g(x_2) = G,$$

dann wird

$$(3.) \quad K \leq g(x) \leq G,$$

und deshalb auch

$$(4.) \quad K \cdot \int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = \int_a^b f(x) dx \leq G \cdot \int_a^b h(x) dx;$$

folglich wird nach Satz 2 in § 54

$$(5.) \quad K \int_a^b h(x) dx < \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx < G \int_a^b h(x) dx.$$

Erklärt man also die Grösse M durch die Gleichung

$$(6.) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = M \int_a^b h(x) dx,$$

so folgt aus Ungleichung (5.)

$$(7.) \quad K \leq M \leq G,$$

oder

$$(7a.) \quad g(x_1) \leq M \leq g(x_2).$$

Nach einem bekannten Satze über stetige Functionen muss es daher zwischen x_1 und x_2 einen Werth von x geben — er heisse ξ —, für welchen

$$(8.) \quad M = g(\xi)$$

wird. Da ξ zwischen x_1 und x_2 liegt, so muss ξ auch zwischen a und b liegen; es ist also

$$(9.) \quad a \leq \xi \leq b.$$

Erklärt man also eine Grösse Θ durch die Gleichung

$$(10.) \quad \Theta = \frac{\xi - a}{b - a},$$

so liegt Θ zwischen 0 und 1, und man erhält

$$(11.) \quad \xi = a + \Theta(b - a), \quad M = g[a + \Theta(b - a)].$$

Deshalb geht Gleichung (6.) über in

$$(12.) \quad \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = g[a + \Theta(b - a)] \int_a^b h(x) dx.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit -1 multiplicirt, folgt

$$(12a.) \quad -\int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = \int_a^b g(x) [-h(x)] dx = g[a + \Theta(b - a)] \int_a^b [-h(x)] dx,$$

oder mit anderen Worten, die Gleichung (12.) bleibt auch dann noch richtig, wenn die stetige Function $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b *niemals positiv* wird, wenn also $h(x) \leq 0$ ist. Es genügt also für die Gültigkeit des in Gleichung (12.) enthaltenen Satzes, welcher „*der erste Mittelwerthsatz*“*) genannt wird, die Voraussetzung, dass $h(x)$ zwischen den Grenzen a und b das Vorzeichen nicht wechselt.

Aus Gleichung (12.) folgen noch unmittelbar die Formeln

$$(13.) \quad \int_0^x g(x) \cdot h(x) dx = g(\Theta x) \int_0^x h(x) dx,$$

$$(14.) \quad \int_a^{a+c} g(x) \cdot h(x) dx = g(a + \Theta c) \int_a^{a+c} h(x) dx.$$

*) Der *zweite* Mittelwerthsatz möge hier übergangen werden.

Setzt man

$$h(x) = 1, \text{ also } \int_a^b h(x) dx = \int_a^b dx = b - a,$$

so geht Gleichung (12.) über in

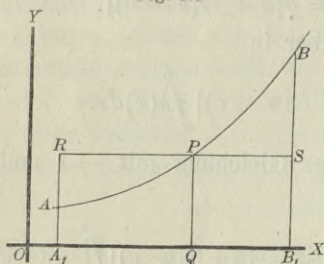
$$(15.) \quad \int_a^b g(x) dx = (b - a)g[a + \Theta(b - a)],$$

oder

$$(15 a.) \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a)f[a + \Theta(b - a)].$$

Für diesen besonderen Fall des ersten Mittelwerthsatzes ergibt sich unmittelbar die folgende geometrische Deutung.

Fig. 103.



Der Gleichung $y = f(x)$ entspreche die Curve AB , dann ist der Flächeninhalt der ebenen Figur

$$(16.) \quad A_1B_1BA = \int_a^b f(x) dx.$$

Da nun der Curvenbogen AB stetig ist, so giebt es zwischen A und B *mindestens einen* Punkt P , welcher die Eigenschaft besitzt, dass die Gerade RS , welche durch P zur X -Axe parallel gezogen ist, ein Rechteck A_1B_1SR bestimmt, welches mit A_1B_1BA gleichen Flächeninhalt besitzt. Macht man nämlich

$$OQ = a + \Theta(b - a),$$

so wird in diesem Rechteck

$$A_1B_1 = b - a, \quad QP = f[a + \Theta(b - a)],$$

also

$$(17.) \quad A_1B_1BA = \int_a^b f(x) dx = A_1B_1SR = (b - a)f[a + \Theta(b - a)].$$

§ 56.

Neuer Beweis des *Taylor'schen* Lehrsatzes.

Aus den Sätzen, welche in den vorhergehenden Paragraphen hergeleitet worden sind, ergibt sich ein äusserst einfacher Beweis des *Taylor'schen* Lehrsatzes.

Die Function $f(x)$ sei mit ihren $n + 1$ ersten Ableitungen stetig für alle Werthe von x zwischen a und $a + h$, dann findet man durch partielle Integration, nämlich nach der Formel

$$(1.) \quad \int u dv = uv - \int v du,$$

indem man

$$u = f'(a + h - t), \quad dv = dt,$$

also

$$du = -f''(a + h - t)dt, \quad v = t$$

setzt,

$$(2.) \quad \int_0^t f'(a + h - t)dt = t f'(a + h - t) + \int_0^t f''(a + h - t)t dt.$$

Für

$$u = f''(a + h - t), \quad dv = t dt$$

erhält man

$$du = -f'''(a + h - t)dt, \quad v = \frac{t^2}{2!},$$

$$(3.) \quad \int_0^t f''(a + h - t)t dt = \frac{t^2}{2!} f''(a + h - t) + \int_0^t f'''(a + h - t) \frac{t^2}{2!} dt.$$

Wenn man in dieser Weise fortfährt, findet man die Gleichungen

$$(4.) \quad \int_0^t f'''(a + h - t) \frac{t^2}{2!} dt = \frac{t^3}{3!} f'''(a + h - t) + \int_0^t f^{(4)}(a + h - t) \frac{t^3}{3!} dt,$$

.....

$$(5.) \quad \int_0^t f^{(n)}(a + h - t) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(a + h - t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a + h - t) \frac{t^n}{n!} dt.$$

Durch Addition der Gleichungen (2.) bis (5.) ergibt sich daher

$$(6.) \int_0^t f'(a+h-t) dt = \frac{t}{1!} f'(a+h-t) + \frac{t^2}{2!} f''(a+h-t) + \frac{t^3}{3!} f'''(a+h-t) + \dots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(a+h-t) + \int_0^t f^{(n+1)}(a+h-t) \frac{t^n}{n!} dt.$$

Beachtet man, dass

$$(7.) \int_0^t f'(a+h-t) dt = -f(a+h-t) + f(a+h)$$

ist, so geht Gleichung (6.) für $t = h$ über in

$$(8.) f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + R,$$

wobei

$$(9.) R = \int_0^h f^{(n+1)}(a+h-t) \frac{t^n}{n!} dt$$

ist. Nach dem Mittelwerthsatz (Formel Nr. 166 a der Tabelle) ist daher, wenn man $1 - \Theta$ mit Θ_1 bezeichnet,

$$(10.) R = f^{(n+1)}(a+h-\Theta h) \int_0^h \frac{t^n}{n!} dt = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta_1 h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Da Θ zwischen 0 und 1 liegt, muss in diesem Ausdrucke auch Θ_1 zwischen 0 und 1 liegen. Setzt man zum Schlusse noch $a = x$ und schreibt Θ statt Θ_1 , so erhält Gleichung (8.) die Form

$$(11.) f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n + R,$$

wo

$$(12.) \quad R = \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

ist. Dieses Resultat stimmt genau mit D.-R., Formel Nr. 87 der Tabelle überein.

§ 57.

Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 168.)

Sind in der unendlichen Reihe

$$(1.) \quad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

die einzelnen Glieder

$$(2.) \quad u_0 = f_0(x), \quad u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \quad u_3 = f_3(x), \dots$$

stetige Functionen von x , so war in § 56 der Differential-Rechnung (Seite 259) der Begriff der *gleichmässigen Convergenz* folgendermassen erklärt werden:

„Die Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

heisst in dem Intervalle von a bis b *gleichmässig convergent*, wenn zu jeder beliebig kleinen Grösse ε eine ganze Zahl m so bestimmt werden kann, dass für $n \geq m$ der absolute Betrag von $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ und deshalb auch der absolute Betrag von $R_n(x)$ kleiner bleiben als ε , welchen Werth x auch in dem Intervalle von a bis b haben mag.“

Dabei ist

$$(3.) \quad R_n(x) = f(x) - [f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{n-1}(x)],$$

oder

$$(4.) \quad f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Daraus folgt

$$(5.) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_0(x) dx + \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_{n-1}(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx.$$

Da sich aus Gleichung (3.) ergibt, dass auch $R_n(x)$ für die betrachteten Werthe von x eine stetige Function ist, so kann man für die Berechnung von $\int_a^b R_n(x) dx$ den in Formel Nr. 167 der Tabelle ausgesprochenen Mittelwerthsatz anwenden, nach welchem

$$(6.) \quad \int_a^b R_n(x) dx = (b - a) R_n[a + \Theta(b - a)]$$

ist. Macht man die Voraussetzung, dass die vorgelegte Reihe in dem Intervalle von a bis b gleichmässig convergent ist, so wird $R_n(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b beliebig klein, wenn n (gleich oder) grösser als m ist, folglich wird auch $R_n[a + \Theta(b - a)]$, und da $b - a$ eine endliche Grösse ist, auch $\int_a^b R_n(x) dx$ beliebig klein. Man findet also $\int_a^b f(x) dx$, indem man die einzelnen Glieder der Reihe $u_0 = f_0(x)$, $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, ... integrirt, denn der Rest $\int_a^b R_n(x) dx$, welchen man bei Berücksichtigung von n Gliedern vernachlässigt, wird für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein. Dadurch erhält man den folgenden

Satz. Sind die Functionen $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ für alle Werthe von x zwischen a und b stetig, und ist die Reihe

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

in dem betrachteten Intervalle gleichmässig convergent, so ist auch die Reihe

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots$$

in diesem Intervalle gleichmässig convergent, und ihre Summe ist gleich $\int_a^b f(x) dx$.

Dabei darf man noch die obere Grenze mit x bezeichnen, so dass sich ergibt

$$(7.) \quad \int_a^x f(x) dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \dots$$

Dieser Satz hat schon in der Differential-Rechnung bei der Methode der unbestimmten Coefficienten Anwendung gefunden (D.-R., § 47).

Damals setzte man

$$(8.) \quad f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n + R,$$

also

$$(9.) \quad f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \dots + nA_nx^{n-1} + \frac{dR}{dx}.$$

Wie die Gleichung (9.) aus Gleichung (8.) hervorgeht durch *Differentiation* der einzelnen Glieder, so findet man umgekehrt die Gleichung (8.) aus Gleichung (9.) durch *Integration* der einzelnen Glieder zwischen den Grenzen 0 und x , und zwar erhält man dadurch $f(x) - f(0)$, woraus sich für A der Werth $f(0)$ ergibt. Dabei erhielt man den Satz: *Ist für hinreichend grosse Werthe von n die Grösse $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein, so gilt dasselbe auch von R .*

Man erkennt, dass dieser Satz nur ein besonderer Fall des eben bewiesenen Satzes ist, denn, während es sich damals nur um Potenzreihen von x handelte, sind jetzt u_0, u_1, u_2, \dots beliebige stetige Functionen von x .

Die Beispiele, welche bei der Methode der unbestimmten Coefficienten in der Differential-Rechnung gegeben wurden, nämlich die Entwicklung von

$$(10.) \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{für } -1 < x \leq +1,$$

$$(11.) \quad \arctg x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{für } -1 \leq x \leq +1,$$

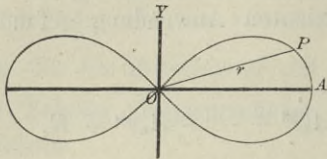
$$(12.) \quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

für $-1 \leq x \leq +1$

nach steigenden Potenzen von x , eignen sich daher auch als Beispiele für den vorliegenden Satz.

Aufgabe 1. Man soll die Länge des Bogens bei der *Lemniscate*

Fig. 104.



$$(13.) \quad r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$$

berechnen (Fig. 104).

Auflösung. Aus Gleichung

(13.) folgt

$$r dr = -a^2 \sin(2\varphi) d\varphi,$$

oder

$$(14.) \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{r}{a^2 \sin(2\varphi)},$$

$$(15.) \quad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 1 + \frac{r^4}{a^4 \sin^2(2\varphi)} = 1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4} = \frac{a^4}{a^4 - r^4},$$

$$(16.) \quad ds = \frac{a^2 dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}, \quad s = a^2 \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Setzt man

$$r = at, \quad \text{also} \quad dr = a dt,$$

so wird

$$(17.) \quad s = a \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Da $t^4 \leq 1$ ist, so wird nach dem binomischen Lehrsatz

$$(18.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}} = (1 - t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^{12} + \dots,$$

also

$$(19.) \quad s = a \left(\frac{t}{1} + \frac{1}{2} \frac{t^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{t^9}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{t^{13}}{13} + \dots \right) \\ = a \left(\frac{r}{a} + \frac{1}{2} \frac{r^5}{5a^5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{r^9}{9a^9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^{13}}{13a^{13}} + \dots \right).$$

Aufgabe 2. $\int_{0,5}^4 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = ?$

Auflösung. Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$(20.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} = (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^9 + \dots,$$

so lange $-1 < x < +1$ ist. Deshalb kann man diese Entwicklung nur benutzen, um

$$\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\gamma=0} \int_{0,5}^{1-\gamma} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

zu berechnen; dabei findet man aus Gleichung (20.)

$$(21.) \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\gamma=0} \left[\frac{x}{1} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^7}{7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^{10}}{10} + \dots \right]_{0,5}^{1-\gamma}.$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch für $x=1$ convergent bleibt, so erhält man

$$(22.) \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10} + \dots \\ - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 2^{10}} - + \dots$$

Die Entwicklung in Gleichung (20.) gilt nicht mehr, wenn $x > 1$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatz wird aber, wenn $|b| > |a|$ ist,

$$(23.) (a+b)^m = b^m + \binom{m}{1} a b^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 b^{m-2} + \binom{m}{3} a^3 b^{m-3} + \dots$$

Setzt man also in dem Falle, wo $x > 1$ ist,

$$(24.) \quad a = 1, \quad b = x^3,$$

so wird die Bedingung, dass $|b| > |a|$ sein soll, erfüllt, und man erhält

$$(25.) (1+x^3)^m = x^{3m} + \binom{m}{1} x^{3m-3} + \binom{m}{2} x^{3m-6} + \binom{m}{3} x^{3m-9} + \dots,$$

also für $m = -\frac{1}{2}$

$$(26.) \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^9}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{\sqrt{x^{21}}} + \dots$$

Dies giebt

$$(27.) \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\delta=0} \left[\int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2} \int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^9}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{15}}} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \int_{1+\delta}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^{21}}} + \dots \right],$$

oder

$$(28.) \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{\delta=0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \frac{2}{7\sqrt{x^7}} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{2}{13\sqrt{x^{13}}} \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{2}{19\sqrt{x^{19}}} - \dots \right]_{1+\delta}^4.$$

Da die Reihe in der eckigen Klammer auch noch für $x=1$ convergent bleibt, so erhält man

$$(29.) \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{7 \cdot 4^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{13 \cdot 4^6} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{19 \cdot 4^9} + \dots \right) \\ + 2 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 13} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 19} + \dots \right).$$

Durch Addition der Gleichungen (22.) und (29.) erhält man schliesslich das gesuchte Integral

$$(30.) \int_{0,5}^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

§ 58.

Berechnung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 169 bis 176.)

Das in dem vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren kann man auch zur Berechnung der *elliptischen Normal-*

integrale erster und zweiter Gattung benutzen. Das elliptische Normalintegral *erster Gattung*, auf welches sehr viele Aufgaben der Geometrie, Physik und Mechanik führen, hat die Form

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei $k^2 < 1$ und $x \leq 1$ sein mögen. Dann erhält man zunächst nach dem binomischen Lehrsatz

$$(1.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6x^6 + \dots,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(2.) \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad \dots \quad c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$$

setzt,

$$(3.) \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + c_1k^2x^2 + c_2k^4x^4 + c_3k^6x^6 + \dots.$$

Nach Satz 6 in § 57 der Differential-Rechnung ist diese Potenzreihe *gleichmässig convergent* für $-1 \leq x \leq +1$, folglich ist auch die Reihe

$$(4.) \quad \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + c_2k^4 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6 \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

in demselben Intervalle *gleichmässig convergent*. Deshalb wird

$$(5.) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_1k^2 \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_2k^4 \int_0^x \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_3k^6 \int_0^x \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} \int_0^x \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 116 der Tabelle

$$(6.) \quad \int_0^x \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_n \arcsin x - G_n(x) \cdot \sqrt{1-x^2},$$

wobei

$$G_1(x) = \frac{x}{2} = c_1 x,$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3 \cdot x}{4 \cdot 2} = c_2 \left(\frac{1}{c_1} \frac{x^3}{3} + \frac{x}{1} \right),$$

$$G_3(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{5 \cdot x^3}{6 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3 \cdot x}{6 \cdot 4 \cdot 2} = c_3 \left(\frac{1}{c_2} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{c_1} \frac{x^3}{3} + \frac{x}{1} \right),$$

allgemein

$$(7.) \quad G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot x}{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2}$$

$$= c_n \left(\frac{1}{c_{n-1}} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}} \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \dots + \frac{1}{c_1} \frac{x^3}{3} + \frac{x}{1} \right).$$

Deshalb erhält man

$$(8.) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n} \right) \arcsin x$$

$$- \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x).$$

Von besonderem Interesse ist der Werth dieses Integrals, den man für $x = 1$ erhält und mit K bezeichnet. Es wird nämlich

$$(9.) \quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{\beta=0} \int_0^{1-\beta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n} \right),$$

oder

$$(10.) \quad K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right].$$

Noch häufiger wird man durch Aufgaben aus der Geometrie, Physik und Mechanik auf elliptische Integrale *zweiter* Gattung geführt, die man auf die Normalform

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

bringen kann. Hier wird nach dem binomischen Lehrsatz

$$(11.) \sqrt{1 - k^2 x^2} = 1 - \frac{1}{2} k^2 x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 x^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 x^6 - \dots$$

$$= 1 - c_1 \frac{k^2 x^2}{1} - c_2 \frac{k^4 x^4}{3} - c_3 \frac{k^6 x^6}{5} - \dots,$$

oder

$$(12.) \sqrt{1 - k^2 x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \frac{k^{2n} x^{2n}}{2n-1},$$

also

$$(13.) \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da diese Reihe zwischen den Grenzen 0 und x *gleichmässig convergent* ist, so erhält man

$$(14.) \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} \int_0^x \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

also nach Formel Nr. 116 der Tabelle, nämlich nach Gleichung (6.),

$$(15.) \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \left(1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} \right) \arcsin x$$

$$+ \sqrt{1 - x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} G_n(x).$$

Für $x = 1$ ergibt sich hieraus der Werth des Integrals, den man mit E bezeichnet, nämlich

$$(15a.) \quad E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1} \right) \\ = \frac{\pi}{2} \left(1 - c_1^2 k^2 - \frac{1}{3} c_2^2 k^4 - \frac{1}{5} c_3^2 k^6 - \dots \right).$$

Auf ein solches Integral wird man z. B. bei der Rectification der Ellipse

$$(16.) \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

geführt (vgl. Aufgabe 2 in § 27). Aus Gleichung (16.) folgt nämlich

$$(17.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

also

$$(18.) \quad s = \frac{1}{a} \int_0^x \frac{dx \sqrt{a^4 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzt man jetzt

$$(19.) \quad x = at, \quad e = ak,$$

so wird

$$(20.) \quad s = a \int_0^t \frac{dt \sqrt{1 - k^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}},$$

wobei die Bedingungen

$$(21.) \quad t \leq 1 \quad \text{und} \quad k < 1$$

wirklich erfüllt sind. Der Bogen s wird also, vom Factor a abgesehen, dem in Gleichung (15.) berechneten elliptischen Normalintegral zweiter Gattung gleich, nur muss man die Integrations-Veränderliche x mit $t = \frac{x}{a}$ vertauschen.

Die in den Gleichungen (8.), (10.), (15.) und (15a.) angegebenen Reihen convergiren nur langsam. Für die numerische Berechnung sind daher die folgenden Entwicklungen geeigneter. Setzt man

$$(22.) \quad x = \sin \varphi, \quad k = \sin \alpha,$$

also

$$(23.) \quad dx = \cos \varphi d\varphi, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos \varphi,$$

so wird

$$(24.) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$(25.) \quad \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2\varphi} \cdot d\varphi = E(k, \varphi).$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

also

$$\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,$$

oder

$$(26.) \quad \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{2\varphi i} \right] \cdot \left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2\varphi i} \right] \\ &= \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2\alpha (e^{2\varphi i} - 2 + e^{-2\varphi i}) = 1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi, \end{aligned}$$

oder

$$(27.) \quad 1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi = \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{2\varphi i} \right] \cdot \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2\varphi i} \right].$$

Wenn α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1$; ausserdem ist der absolute Betrag von

$$e^{\pm 2\varphi i} = \cos(2\varphi) \pm i \sin(2\varphi)$$

$\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi) = 1$, folglich kann man

$$\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{+2\varphi i}\right]^m \text{ und } \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2\varphi i}\right]^m$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und erhält, wenn man der Kürze wegen $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ mit ε bezeichnet,

$$(1 + \varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m = 1 + \binom{m}{1} \varepsilon^2 e^{2\varphi i} + \binom{m}{2} \varepsilon^4 e^{4\varphi i} + \binom{m}{3} \varepsilon^6 e^{6\varphi i} + \dots,$$

$$(1 + \varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m = 1 + \binom{m}{1} \varepsilon^2 e^{-2\varphi i} + \binom{m}{2} \varepsilon^4 e^{-4\varphi i} + \binom{m}{3} \varepsilon^6 e^{-6\varphi i} + \dots$$

Indem man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt und dabei die Regeln anwendet, welche (in D.-R., §§ 55 und 106, vergl. auch D.-R., Formel Nr. 114 der Tabelle) für die Multiplication zweier unbedingt convergenten Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \text{ und } v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

gegeben worden sind, so erhält man, weil

$$e^{\lambda\varphi i} + e^{-\lambda\varphi i} = 2 \cos(\lambda\varphi)$$

ist, die Gleichung

$$\begin{aligned} (28.) \quad & (1 + \varepsilon^2 e^{2\varphi i})^m (1 + \varepsilon^2 e^{-2\varphi i})^m = \\ & 1 + \binom{m}{1} \varepsilon^2 \cdot 2 \cos(2\varphi) + \varepsilon^4 \left[\binom{m}{2} 2 \cos(4\varphi) + \binom{m}{1}^2 \right] \\ & + \varepsilon^6 \left[\binom{m}{3} 2 \cos(6\varphi) + \binom{m}{1} \binom{m}{2} 2 \cos(2\varphi) \right] \\ & + \varepsilon^8 \left[\binom{m}{4} 2 \cos(8\varphi) + \binom{m}{1} \binom{m}{3} 2 \cos(4\varphi) + \binom{m}{2}^2 \right] \\ & + \varepsilon^{10} \left[\binom{m}{5} 2 \cos(10\varphi) + \binom{m}{1} \binom{m}{4} 2 \cos(6\varphi) + \binom{m}{2} \binom{m}{3} 2 \cos(2\varphi) \right] \\ & + \dots, \end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder vereinigt, welche mit $\cos(2\lambda\varphi)$ multiplicirt sind, und Gleichung (27.) beachtet,

$$(29.) \quad (1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi)^m = A_0 + 2A_1 \cos(2\varphi) + 2A_2 \cos(4\varphi) \\ + 2A_3 \cos(6\varphi) + \dots$$

Dabei wird, wenn man $\binom{m}{0} = 1$ setzt,

$$(30.) \quad A_0 = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[1 + \binom{m}{1} \varepsilon^4 + \binom{m}{2} \varepsilon^8 + \binom{m}{3} \varepsilon^{12} + \dots \right] \\ = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \varepsilon^{4n},$$

$$(31.) \quad A_1 = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[\binom{m}{1} \varepsilon^2 + \binom{m}{1} \binom{m}{2} \varepsilon^6 + \binom{m}{2} \binom{m}{3} \varepsilon^{10} + \dots \right] \\ = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \binom{m}{n+1} \varepsilon^{2+4n},$$

$$(32.) \quad A_2 = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[\binom{m}{2} \varepsilon^4 + \binom{m}{1} \binom{m}{3} \varepsilon^8 + \binom{m}{2} \binom{m}{4} \varepsilon^{12} + \dots \right] \\ = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \binom{m}{n+2} \varepsilon^{4+4n},$$

allgemein

$$(33.) \quad A_\nu = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[\binom{m}{\nu} \varepsilon^{2\nu} + \binom{m}{1} \binom{m}{\nu+1} \varepsilon^{2\nu+4} \right. \\ \left. + \binom{m}{2} \binom{m}{\nu+2} \varepsilon^{2\nu+8} + \dots \right] \\ = \cos^{4m} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \binom{m}{\nu+n} \varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Wenn $\varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ hinreichend klein ist, so sind die Grössen A durch stark convergente Reihen ausgedrückt.

Die durch Gleichung (29.) dargestellte [Reihe ist *gleichmässig convergent*, so dass man $\int_0^\varphi (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)^m d\varphi$ erhält, indem man die einzelnen Glieder der Reihe integrirt. Dies giebt

$$(34.) \quad \int_0^\varphi (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)^m d\varphi = \\ A_0 \varphi + \frac{A_1}{1} \sin(2\varphi) + \frac{A_2}{2} \sin(4\varphi) + \frac{A_3}{3} \sin(6\varphi) + \dots$$

In dieser Formel sind auch die „*elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung*“, nämlich die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi} = E(k, \varphi)$$

als besondere Fälle enthalten.

Zur Entwicklung des elliptischen Normalintegrals *erster* Gattung $F(k, \varphi)$ hat man daher in den Gleichungen (28.) bis (34.) $m = -\frac{1}{2}$ zu setzen und erhält

$$(35.) \quad \binom{m}{1} = -\frac{1}{2} = -c_1, \quad \binom{m}{2} = +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = +c_2, \dots$$

$$\binom{m}{n} = \pm \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} = \pm c_n.$$

Setzt man in diesem Falle

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = -a_1, \quad A_2 = +a_2, \quad \dots \quad A_n = (-1)^n a_n,$$

so geht Gleichung (34.) über in

$$(36.) \quad F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}$$

$$= a_0\varphi - \frac{a_1}{1} \sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2} \sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3} \sin(6\varphi) + \dots,$$

wobei nach Gleichung (30.) bis (33.), wenn man $c_0 = 1$ setzt,

$$(37.) \quad a_0 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (1 + c_1^2 \varepsilon^4 + c_2^2 \varepsilon^8 + c_3^2 \varepsilon^{12} + \dots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n^2 \varepsilon^{4n},$$

$$(38.) \quad a_1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (c_1 \varepsilon^2 + c_1 c_2 \varepsilon^6 + c_2 c_3 \varepsilon^{10} + \dots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+1} \varepsilon^{2+4n},$$

$$(39.) \quad a_2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (c_2 \varepsilon^4 + c_1 c_3 \varepsilon^8 + c_2 c_4 \varepsilon^{12} + \dots)$$

$$= (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+2} \varepsilon^{4+4n},$$

Allgemein ist

$$(40.) \quad a_\nu = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{n+\nu} \varepsilon^{2\nu+4n}.$$

Man braucht aber nur a_0 und a_1 durch diese Reihen zu berechnen, denn aus der Gleichung

$$(41.) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = a_0 - 2a_1 \cos(2\varphi) + 2a_2 \cos(4\varphi) - 2a_3 \cos(6\varphi) + \dots$$

folgt durch Differentiation

$$(42.) \quad \frac{\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)^3}} = 4a_1 \sin(2\varphi) - 8a_2 \sin(4\varphi) + 12a_3 \sin(6\varphi) - \dots$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$(43.) \quad \frac{2(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos(2\varphi)}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \cos(2\varphi)$$

multipliziert und der Kürze wegen

$$(44.) \quad \frac{2 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} = \zeta$$

setzt, so erhält man, weil $2\sin(2\lambda\varphi) \cos(2\varphi)$ bekanntlich gleich $\sin(2\lambda + 2)\varphi + \sin(2\lambda - 2)\varphi$ ist,

$$(45.) \quad \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = -(-4a_1 \zeta + 4a_2) \sin(2\varphi)$$

$$+ (2a_1 - 8a_2 \zeta + 6a_3) \sin(4\varphi)$$

$$- (4a_2 - 12a_3 \zeta + 8a_4) \sin(6\varphi)$$

$$+ (6a_3 - 16a_4 \zeta + 10a_5) \sin(8\varphi)$$

$$- + \dots$$

Andererseits ergibt sich, indem man beide Seiten der Gleichung (41.) mit $\sin(2\varphi)$ multiplicirt und die bekannte Formel

$$2 \sin(2\varphi) \cos(2\lambda\varphi) = \sin(2\lambda + 2)\varphi - \sin(2\lambda - 2)\varphi$$

anwendet,

$$(46.) \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}} = - (a_2 - a_0) \sin(2\varphi) + (a_3 - a_1) \sin(4\varphi) \\ - (a_4 - a_2) \sin(6\varphi) + (a_5 - a_3) \sin(8\varphi) - + \dots$$

Aus der Vergleichung der Coefficienten in diesen beiden Entwicklungen von $\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}$ findet man

$$\begin{aligned} a_2 - a_0 &= - 4a_1\zeta + 4a_2, \\ a_3 - a_1 &= 2a_1 - 8a_2\zeta + 6a_3, \\ a_4 - a_2 &= 4a_2 - 12a_3\zeta + 8a_4, \\ a_5 - a_3 &= 6a_3 - 16a_4\zeta + 10a_5, \\ &\dots \end{aligned}$$

folglich wird

$$(47.) \left\{ \begin{aligned} 3a_2 &= 4a_1\zeta - a_0, \\ 5a_3 &= 8a_2\zeta - 3a_1, \\ 7a_4 &= 12a_3\zeta - 5a_2, \\ 9a_5 &= 16a_4\zeta - 7a_3, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

allgemein erhält man also für $n \geq 2$

$$(48.) \quad (2n - 1)a_n = 4(n - 1)a_{n-1}\zeta - (2n - 3)a_{n-2}.$$

Zur Entwicklung des *elliptischen Normalintegrals zweiter Gattung* muss man, wie aus Gleichung (25.) hervorgeht, in den Gleichungen (28.) bis (34.) $m = +\frac{1}{2}$ setzen und erhält

$$(49.) \quad \binom{m}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{m}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 4} = -\frac{c_1}{4}, \quad \binom{m}{3} = +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = +\frac{c_2}{6}, \dots$$

allgemein

$$(50.) \quad \binom{m}{n} = (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{2n}.$$

Setzt man in diesem Falle

(51.) $A_0 = b_0, A_1 = +b_1, A_2 = -b_2, A_3 = +b_3, \dots, A_n = (-1)^{n-1}b_n,$
so gehen die Gleichungen (29.) und (34.) über in

$$(52.) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} = b_0 + 2b_1 \cos(2\varphi) - 2b_2 \cos(4\varphi) \\ + 2b_3 \cos(6\varphi) - + \dots,$$

$$(53.) E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \\ = b_0 \varphi + \frac{b_1}{1} \sin(2\varphi) - \frac{b_2}{2} \sin(4\varphi) + \frac{b_3}{3} \sin(6\varphi) - + \dots.$$

Dabei ist nach Gleichung (30.)

$$(54.) b_0 = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{2^2} + \frac{c_1^2}{4^2} \varepsilon^8 + \frac{c_2^2}{6^2} \varepsilon^{12} + \dots \right) \\ = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2 \varepsilon^{4n}}{(2n+2)^2} \right).$$

Man kann aber die Grösse b_0 auch durch a_0 und a_1 ausdrücken. Es ist nämlich nach den Gleichungen (37.) und (38.)

$$(37a.) a_0 = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^{4n} = (1 + \varepsilon^2) \left(1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}^2 \varepsilon^{4n} \right),$$

$$(38a.) a_1 = (1 + \varepsilon^2) \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1} \varepsilon^{4n};$$

ferner ist

$$(55.) k^2 = \sin^2 \alpha = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^2} = \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2},$$

$$(56.) 2 - k^2 = \frac{2(1 + \varepsilon^4)}{(1 + \varepsilon^2)^2}.$$

Daraus folgt

$$(57.) (2 - k^2)a_0 = \frac{2}{1 + \varepsilon^2} \left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1}^2 + c_n^2) \varepsilon^{4n} \right],$$

$$(58.) k^2 a_1 = \frac{2\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^2} \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n c_{n+1} \varepsilon^{4n},$$

also

$$(59.) (2 - k^2)a_0 - k^2 a_1 = \frac{2}{1 + \varepsilon^2} \left[1 + \varepsilon^4 \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1})^2 \varepsilon^{4n} \right].$$

Nun ist aber

$$(60.) \quad c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n, \quad \text{also} \quad c_n - c_{n+1} = \frac{c_n}{2n+2};$$

deshalb geht Gleichung (59.) über in

$$(61.) \quad (2 - k^2)a_0 - k^2 a_1 = \frac{2}{1 + \varepsilon^2} \left[1 + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{(2n+2)^2} \varepsilon^{4n} \right] = 2b_0.$$

Auch die anderen Coefficienten b_1, b_2, b_3, \dots kann man sehr einfach durch die Grössen a_0, a_1, a_2, \dots ausdrücken. Durch Differentiation der Gleichung (52.) findet man nämlich

$$(62.) \quad \frac{\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = -4b_1 \sin(2\varphi) + 8b_2 \sin(4\varphi) - 12b_3 \sin(6\varphi) + \dots;$$

ausserdem folgt aus Gleichung (46.)

$$(63.) \quad -\frac{\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = \frac{k^2}{2} [(a_2 - a_0) \sin(2\varphi) - (a_3 - a_1) \sin(4\varphi) + (a_4 - a_2) \sin(6\varphi) - + \dots],$$

folglich erhält man

$$8b_1 = k^2(a_0 - a_2), \quad 16b_2 = k^2(a_1 - a_3), \quad 24b_3 = k^2(a_2 - a_4), \dots,$$

allgemein

$$(64.) \quad 8nb_n = k^2(a_{n-1} - a_{n+1}).$$

Setzt man also

$$a_0 - a_2 = 2^2 \cdot B_1, \quad a_1 - a_3 = 4^2 \cdot B_2, \quad a_2 - a_4 = 6^2 \cdot B_3, \dots,$$

allgemein

$$(65.) \quad a_{n-1} - a_{n+1} = (2n)^2 B_n,$$

so wird

$$(66.) \quad b_1 = \frac{k^2}{2} \cdot B_1, \quad \frac{b_2}{2} = \frac{k^2}{2} \cdot B_2, \quad \frac{b_3}{3} = \frac{k^2}{2} \cdot B_3, \dots, \quad \frac{b_n}{n} = \frac{k^2}{2} \cdot B_n,$$

folglich geht Gleichung (53.) über in

$$(67.) \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \\ = b_0 \varphi + \frac{k^2}{2} [B_1 \sin(2\varphi) - B_2 \sin(4\varphi) + B_3 \sin(6\varphi) - + \dots].$$

Von besonderem Interesse sind die Werthe der beiden Integrale $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, die man bezw. mit K und E bezeichnet. Nach den Gleichungen (36.), (53.) und (61.) wird

$$(68.) \quad K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}} = \frac{a_0\pi}{2},$$

$$(69.) \quad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi} \cdot d\varphi = \frac{b_0\pi}{2} \\ = \frac{\pi}{4} [(2 - k^2)a_0 - k^2a_1].$$

Eine kurzgefasste Tabelle der Grössen K und E , $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ findet sich im Anhang dieses Bandes.

Beispiel.

Die angeführten Reihen convergiren um so schlechter, je mehr sich $k = \sin\alpha$ dem Werthe 1 nähert. Wenn also in dem folgenden Beispiele

$$(70.) \quad k = 0,8, \quad \varepsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k} = 0,5$$

gesetzt wird, so möge hervorgehoben werden, dass die Rechnung für kleinere Werthe von k noch einfacher wird. Hier erhält man

$$\begin{array}{ll} 1 + \varepsilon^2 = 1,25 & \varepsilon^{12} = 0,0002\ 4414 \\ (1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2 = 0,3125 & \varepsilon^{16} = 0,0000\ 1526 \\ \varepsilon^4 = 0,0625 & \varepsilon^{20} = 0,0000\ 0095 \\ \varepsilon^8 = 0,0039\ 0625 & \varepsilon^{24} = 0,0000\ 0006; \end{array}$$

ferner ist

$$\begin{array}{ll} c_1^2 = 0,25 & c_1c_2 = 0,1875 \\ c_2^2 = 0,1406\ 25 & c_2c_3 = 0,1171\ 875 \\ c_3^2 = 0,0976\ 5625 & c_3c_4 = 0,0854\ 4922 \\ c_4^2 = 0,0747\ 6807 & c_4c_5 = 0,0672\ 9126 \\ c_5^2 = 0,0605\ 6214 & c_5c_6 = 0,0555\ 1529 \\ & c_6c_7 = 0,0472\ 5409. \end{array}$$

Daraus folgt

$$(71.) \quad a_0 = (1 + \varepsilon^2)(1 + c_1^2 \varepsilon^4 + c_2^2 \varepsilon^8 + \dots) = 1,2702\ 4920,$$

$$(72.) \quad a_1 = (1 + \varepsilon^2)\varepsilon^2(c_1 + c_1 c_2^2 \varepsilon^4 + c_2 c_3 \varepsilon^8 + \dots) = 0,1600\ 6202.$$

Aus den Gleichungen (47.), nämlich aus den Formeln

$$(73.) \quad 3a_2 = 4a_1 \zeta - a_0, \quad 5a_3 = 8a_2 \zeta - 3a_1, \quad 7a_4 = 12a_3 \zeta - 5a_2, \dots,$$

wobei

$$(74.) \quad \zeta = \frac{2 - k^2}{k^2} = \frac{2 - 0,64}{0,64} = \frac{17}{8}$$

ist, findet man

$$(75.) \quad \begin{cases} a_2 = 0,0300\ 9265 & a_8 = 0,0000\ 0386 \\ a_3 = 0,0062\ 7780 & a_9 = 0,0000\ 0091 \\ a_4 = 0,0013\ 7439 & a_{10} = 0,0000\ 0021 \\ a_5 = 0,0003\ 0941 & a_{11} = 0,0000\ 0005 \\ a_6 = 0,0000\ 7093 & a_{12} = 0,0000\ 0001. \\ a_7 = 0,0000\ 1647 \end{cases}$$

Es darf nicht verschwiegen werden, dass man diese Werthe aus den Gleichungen (47.) nur dann findet, wenn man noch einige Decimalstellen mehr berücksichtigt. Bei derartigen recurrirenden Formeln werden nämlich die Fehler, welche durch die Vernachlässigung der folgenden Decimalstellen entstehen, im Allgemeinen bei jedem späteren Gliede grösser. Wenn z. B. die letzte Decimalstelle in a_0 und a_1 auch nur um 2 Einheiten unsicher ist, so wird in der Gleichung

$$3a_2 = 4a_1 \zeta - a_0$$

a_1 (und deshalb auch der Fehler von a_1) mit $4\zeta = 8,5$ multiplicirt, so dass $3a_2$ um 19 Einheiten, a_2 selbst um $\frac{19}{3}$ Einheiten in der letzten Decimalstelle unsicher ist. Die Grösse a_3 wird um etwa 23, a_4 um etwa 172 Einheiten unsicher. So steigert sich die Unsicherheit mit jedem späteren Gliede ausserordentlich schnell, weshalb die vorstehenden Resultate nach Gleichung (40.), nämlich nach der Formel

$$a_\nu = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n c_{\nu+n} \varepsilon^{2\nu+4n}$$

berechnet sind. Sodann findet man aus den Gleichungen

$$2b_0 = (2 - k^2)a_0 - k^2a_1 = 1,36 \cdot a_0 - 0,64a_1,$$

$$4B_1 = a_0 - a_2, \quad 16B_2 = a_1 - a_3, \quad 36B_3 = a_2 - a_4, \dots$$

$$(76.) \quad \begin{cases} b_0 = 0,8125 \ 4961 & B_5 = 0,0000 \ 1303 \\ B_1 = 0,3100 \ 3914 & B_6 = 0,0000 \ 0203 \\ B_2 = 0,0096 \ 1151 & B_7 = 0,0000 \ 0034 \\ B_3 = 0,0007 \ 9773 & B_8 = 0,0000 \ 0006 \\ B_4 = 0,0000 \ 9326 & B_9 = 0,0000 \ 0001. \end{cases}$$

Daraus folgt dann

$$(77.) \quad K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0\pi}{2} = 1,9953 \ 0278,$$

$$(78.) \quad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_0\pi}{2} = 1,2763 \ 4994.$$

Soll z. B. bei der Rectification der Ellipse mit den Halbachsen

$$a = 10, \quad b = 6$$

der Quadrant q berechnet werden, so erhält man $e = 8$, also

$k = \frac{e}{a} = 0,8$ und nach Gleichung (20.)

$$(79.) \quad q = a \int_0^1 \frac{dt \sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} = a E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 12,763 \ 4994.$$

Zur Prüfung dieses Resultates beachte man, dass der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser a gleich 15,7079 633, und der Quadrant des Kreises mit dem Halbmesser b gleich 9,4247 780 ist.

§ 59.

Differentiation der Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 177 bis 179.)

Nach Formel Nr. 4 der Tabelle war ein bestimmtes Integral durch die Gleichung

$$(1.) \quad J = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

erklärt worden. Man kann daher J als eine Function von a und b betrachten und erhält

$$(2.) \quad \frac{\partial J}{\partial a} = -F'(a), \quad \frac{\partial J}{\partial b} = F'(b),$$

also

$$(3.) \quad dJ = d \int_a^b F'(x) dx = -F'(a) da + F'(b) db,$$

oder, wenn man $F'(x)$ mit $f(x)$ bezeichnet,

$$(3a.) \quad dJ = d \int_a^b f(x) dx = -f(a) da + f(b) db.$$

Ist die Function unter dem Integralzeichen ausser von x noch abhängig von einem variablen Parameter t , ist also

$$(4.) \quad F'(x) = f(x, t), \quad J = \int_a^b f(x, t) dx,$$

so ist auch das bestimmte Integral J eine Function von t . Die Integrationsgrenzen a und b seien zunächst *unabhängig* von t , dann wird J übergehen in $J + \Delta J$, wenn t um Δt wächst, wobei

$$(5.) \quad J + \Delta J = \int_a^b f(x, t + \Delta t) dx$$

ist. Aus den Gleichungen (4.) und (5.) folgt daher

$$(6.) \quad \begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b f(x, t + \Delta t) dx - \int_a^b f(x, t) dx, \\ &= \int_a^b [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx, \end{aligned}$$

$$(7.) \quad \frac{\Delta J}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx;$$

folglich erhält man, wenn Δt verschwindend klein wird,

$$(8.) \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b gleichfalls Functionen von t , so wird nach D.-R., Formel Nr. 214 der Tabelle

$$(9.) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial J}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (4.)

$$(10.) \quad \begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx \\ &= -f(a, t) \cdot \frac{da}{dt} + f(b, t) \cdot \frac{db}{dt} + \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Ist J das *unbestimmte* Integral einer Differential-Function $f(x, t)dx$, welche noch einen variablen Parameter t enthält, so kann die Integrations-Constante C gleichfalls noch von dem Parameter t abhängig sein, so dass man erhält

$$(11.) \quad J = \int f(x, t) dx + \varphi(t),$$

wobei $\varphi(t)$ eine ganz beliebige Function von t ist. Wächst t um Δt , so geht J über in

$$(12.) \quad J + \Delta J = \int f(x, t + \Delta t) dx + \varphi(t + \Delta t);$$

folglich wird

$$(13.) \quad \Delta J = \int [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx + \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t),$$

also

$$(14.) \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta t} = \int \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \varphi'(t).$$

Da $\varphi(t)$ eine ganz beliebige Function von t ist, so gilt dasselbe von $\varphi'(t)$, d. h. $\varphi'(t)$ spielt auch in Gleichung (14.) die Rolle einer beliebigen Integrations-Constanten, so dass in Gleichung (14.) der Satz ausgesprochen ist: *Ein unbestimmtes Integral wird nach einem variablen Parameter differentiiert, indem man die Function unter dem Integralzeichen nach diesem Parameter differentiiert.*

§ 60.

Berechnung bestimmter Integrale durch Differentiation.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 180 und 181.)

Aus Formel Nr. 28 der Tabelle, nämlich aus

$$(1.) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right),$$

folgt durch Vertauschung von a^2 mit t

$$(2.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* t differentiirt und mit -1 multiplicirt, erhält man nach Formel Nr. 178 der Tabelle

$$(3.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + t)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t \sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung nochmals nach t differentiirt und durch -2 dividirt, so ergibt sich

$$(4.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + t)^3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{t^2 \sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man

$$(5.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + t)^4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{t^3 \sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

.....

$$(6.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + t)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n - 2)} \cdot \frac{1}{t^{n-1} \sqrt{t}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder

$$(6a.) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n - 2)} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aus

$$(7.) \quad \int e^{-tx} dx = -\frac{1}{t} \cdot e^{-tx} = -\frac{1}{t \cdot e^{tx}}$$

folgt für positive Werthe von t

$$(8.) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung nach dem *Parameter* t differentiirt und mit -1 multiplicirt, erhält man nach Formel Nr. 178 der Tabelle

$$(9.) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x dx = \frac{1}{t^2},$$

und wenn man dieses Verfahren wiederholt,

$$(10.) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x^2 dx = \frac{1 \cdot 2}{t^3},$$

$$(11.) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x^3 dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{t^4},$$

.....

$$(12.) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

§ 61.

Berechnung der Werthe von einigen bestimmten Integralen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 182 bis 184.)

Zur Berechnung eines *bestimmten* Integrals ist es nicht immer erforderlich, vorher das *unbestimmte* Integral zu ermitteln; es sind dabei vielmehr häufig Vereinfachungen möglich, wie man aus den folgenden Beispielen ersehen kann.

Nach Formel Nr. 101 der Tabelle ist

$$(1.) \int \cos^{2n} x dx = \sin x \left[\frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \cos^{2n-3} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cos x \right] + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} x;$$

da nun

$$(2.) \quad \sin 0 = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ist, so wird

$$(3.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Formel Nr. 104 der Tabelle, nämlich aus

$$(4.) \int \sin^{2n} x dx = -\cos x \left[\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \sin^{2n-3} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \sin x \right] + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} x,$$

das bestimmte Integral

$$(5.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Die Formeln Nr. 101 und 104 der Tabelle, deren Herleitung immerhin mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, braucht man aber gar nicht einmal zur Berechnung dieser bestimmten Integrale; man findet vielmehr weit einfacher aus Formel Nr. 100 der Tabelle, nämlich aus

$$(6.) \quad \int \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x \sin x + \frac{2n-1}{2n} \int \cos^{2n-2} x dx,$$

das bestimmte Integral

$$(7.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx,$$

weil das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (6.)

an der oberen und an der unteren Grenze verschwindet. Indem man n mit $n - 1$ vertauscht, geht Gleichung (7.) über in

$$(8.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} x dx.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, bis man endlich die Formeln

$$(9.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx, \quad (10.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

erhält. Aus diesen Gleichungen ergibt sich dann wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (3.)

Ebenso liefert die Formel Nr. 103 der Tabelle, nämlich

$$\int \sin^{2n} x dx = -\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x \cos x + \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} x dx,$$

die Gleichungen

$$(11.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx,$$

$$(12.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} x dx,$$

.....

$$(13.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx,$$

$$(14.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich wieder dasselbe Resultat wie in Gleichung (5.).

Setzt man in Formel Nr. 100 der Tabelle $m = 2n + 1$, so erhält man

$$(15.) \int \cos^{2n+1} x dx = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} x \sin x + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1} x dx,$$

also

$$(16.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx.$$

Ebenso wird

$$(17.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx = \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} x dx.$$

.....

$$(18.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{3} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3},$$

folglich wird

$$(19.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

Ebenso findet man aus Formel Nr. 103 der Tabelle

$$(20.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

In ähnlicher Weise liefern die Formeln Nr. 107 und 110 der Tabelle, nämlich die Gleichungen

$$(21.) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x \\ + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx,$$

$$(22.) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx,$$

ein einfaches Verfahren für die Berechnung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$.
 Aus Gleichung (21.) folgt nämlich, wenn $m > 1$ ist,

$$(23.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Jenachdem m gerade oder ungerade ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Vereinfachung das gesuchte Integral schliesslich entweder auf das bereits ermittelte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ oder auf

$$(24.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx = - \left[\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

zurückgeführt.

Aus Gleichung (22.) folgt, wenn $n > 1$ ist,

$$(25.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Jenachdem n gerade oder ungerade ist, wird durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das gesuchte Integral schliesslich entweder auf das bereits ermittelte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, oder auf

$$(26.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x dx = \left[\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m+1}$$

zurückgeführt.

Diese Resultate kann man auch zur Berechnung der Zahl π benutzen. Es ist nämlich für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$(27.) \quad \sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x,$$

also nach den in § 54 ausgeführten Sätzen

$$(28.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x \, dx,$$

oder

$$(29.) \quad \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$(30.) \quad \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3}$$

Daraus folgt

$$(31.) \quad \frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

und

$$(32.) \quad \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

Die rechten Seiten dieser beiden Ungleichungen unterscheiden sich von einander nur durch den Factor $\frac{2n}{2n+1}$, der sich für unbegrenzt wachsendes n der Grenze 1 nähert, folglich ist

$$(33.) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

Diese Formel rührt von *Wallis* her und ist bereits vor Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung gefunden worden.

§ 62.

Darstellung der Coefficienten einer trigonometrischen Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 185.)

Sind die beiden positiven ganzen Zahlen m und n von einander verschieden, so wird

$$(1.) \quad \int_0^{\pi} \cos(m - n)x \cdot dx = \frac{1}{m - n} [\sin(m - n)x]_0^{\pi} = 0,$$

$$(2.) \quad \int_0^{\pi} \cos(m + n)x \cdot dx = \frac{1}{m + n} [\sin(m + n)x]_0^{\pi} = 0.$$

Beachtet man die beiden bekannten Formeln

$$(3.) \quad \begin{cases} \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \end{cases}$$

so findet man durch Addition und Subtraction der Gleichungen

(1.) und (2.) für $m \geq n$

$$(4.) \quad \int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0,$$

$$(5.) \quad \int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0.$$

Dagegen geht Gleichung (1.) für $m = n$ über in

$$(1a.) \quad \int_0^{\pi} \cos(m - n)x \cdot dx = \int_0^{\pi} dx = \pi,$$

während Gleichung (2.) auch noch für $m = n$ richtig bleibt; folglich wird für $m = n > 1$

$$(6.) \quad \int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_0^{\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{\pi}{2},$$

$$(7.) \quad \int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Weiss man nun, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

$$(8.) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \dots + a_n \cos(nx) + \dots$$

entwickeln lässt, so lange x zwischen 0 und π liegt, so kann man die Coefficienten a_0, a_1, a_2, \dots in folgender Weise bestimmen.

Multipliziert man Gleichung (8.) mit dx und integrirt auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und π , so erhält man, da die Reihe gleichmäßig convergent ist und deshalb gliedweise integrirt werden darf,

$$(9.) \quad \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{\pi} dx = \frac{a_0 \pi}{2}, \quad \text{oder} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

denn $\int_0^{\pi} \cos(nx) dx$ verschwindet für $n > 0$. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (8.) mit $\cos(nx) dx$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π , so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.) und (6.)

$$(10.) \quad \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \int_0^{\pi} \cos^2(nx) dx = a_n \frac{\pi}{2},$$

oder

$$(10a.) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Hierbei ist $f(x)$ eine periodische *gerade* Function, die sich gar nicht ändert, wenn man x mit $-x$, oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

$$(11.) \quad f(2\pi - x) = f(-x) = f(x);$$

deshalb findet man aus Gleichung (9.) und (10a.), indem man die Integrations-Veränderliche y nennt und dann $y = 2\pi - x$ setzt,

$$(12.) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) dy = -\frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\pi} f(2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx,$$

$$(13.) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \cos(ny) dy = -\frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\pi} f(2\pi - x) \cos(nx) dx \\ = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx;$$

folglich ergibt sich durch Addition der Gleichungen (9.) und (12.), bez. der Gleichungen (10.a.) und (13.)

$$(14.) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Weiss man, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

$$(15.) \quad f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \dots + b_n \sin(nx) + \dots$$

entwickeln lässt, so lange x zwischen den Grenzen 0 und π liegt, so darf die Reihe gliedweise integrirt werden, und man erhält mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.) und (7.)

$$(16.) \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = b_n \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = b_n \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder

$$(16.a.) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

In diesem Falle ist $f(x)$ eine periodische *ungerade* Function, die nur ihr Zeichen wechselt, wenn man x mit $-x$, oder mit $2\pi - x$ vertauscht, d. h. es ist

$$(17.) \quad f(2\pi - x) = f(-x) = -f(x).$$

Deshalb findet man aus Gleichung (16.a.), indem man die Integrations-Veränderliche y nennt und dann $y = 2\pi - x$ setzt,

$$(18.) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny) dy = -\frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

also durch Addition zu Gleichung (16.a.)

$$(19.) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Weiss man endlich, dass sich $f(x)$ in eine gleichmässig convergente Reihe von der Form

$$(20.) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \dots$$

entwickeln lässt, so lange x zwischen den Grenzen 0 und 2π liegt, so wird mit Rücksicht darauf, dass

$$(21.) \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

ist, gleichviel ob m und n von einander verschieden sind oder nicht,

$$(22.) a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Dies giebt den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe*

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

welche in dem Intervalle von 0 bis 2π gleichmässig convergent ist, haben die Coefficienten a_n und b_n die Werthe

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

§ 63.

Berechnung bestimmter Integrale bei Anwendung mehrdeutiger Substitutionen.

Führt man in ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x) dx$ durch die Substitution

$$(1.) \quad y = \varphi(x)$$

eine neue Integrations-Veränderliche y ein, so muss man auch die Integrationsgrenzen ändern, und zwar ist in dem vorliegenden Falle die untere Grenze $\varphi(a)$ und die obere $\varphi(b)$. Bei der Ausrechnung ist aber noch besondere Vorsicht erforderlich, wenn die Gleichung (1.) in Bezug auf x mehrdeutig ist. Ein einfaches Beispiel möge zeigen, wie bei solchen mehrdeutigen Substitutionen leicht Fehler entstehen.

Es ist

$$(2.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 13x \right]_1^7 = 48.$$

Wendet man dagegen die Substitution

$$(3.) \quad y = x^2 - 6x + 13$$

an, so wird $y = 8$ für $x = 1$ und $y = 20$ für $x = 7$. Da nun

$$(4.) \quad x = 3 \pm \sqrt{y - 4}, \quad \text{also} \quad dx = \pm \frac{dy}{2\sqrt{y - 4}}$$

ist, so wird man geneigt sein, entweder

$$(5.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = + \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y - 4}},$$

oder

$$(6.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = - \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y - 4}}$$

zu setzen. Thatsächlich sind aber die Gleichungen (5.) und (6.) *beide unrichtig*, wie man schon daraus erkennt, dass

$$(7.) \quad \pm \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y - 4}} = \pm \frac{1}{3} [(y + 8)\sqrt{y - 4}]_8^{20} = \pm \frac{80}{3}$$

ist, während das gesuchte Integral nach Gleichung (2.) den Werth 48 hat.

Zur Lösung des Widerspruches beachte man, dass nach Gleichung (4.) zu jedem Werthe von y *zwei* Werthe von x gehören, von denen der eine, nämlich

$$(8.) \quad x = 3 + \sqrt{y - 4},$$

immer *grösser* als 3 ist, während der andere, nämlich

$$(9.) \quad x = 3 - \sqrt{y - 4},$$

immer *kleiner* als 3 ist. Diesen beiden verschiedenen Werthen von x , welche zu demselben Werthe von y gehören, entsprechen die beiden verschiedenen Werthe von dx , und zwar erkennt man aus den Gleichungen (4.), dass den Werthen von x , welche grösser als 3 sind,

$$(10.) \quad dx = + \frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

zugeordnet werden muss, während den Werthen von x , welche *kleiner* als 3 sind, der Werth

$$(11.) \quad dx = - \frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

entspricht. Dieses Verhalten muss bei der Umformung des gesuchten Integrals berücksichtigt werden, weil der Werth $x = 3$ *zwischen* den Grenzen 1 und 7 liegt. Es kommen deshalb bei der Berechnung des gesuchten Integrals Werthe von x vor, welche *kleiner* als 3 sind, und ausserdem auch solche, welche *grösser* als 3 sind, so dass man nicht *durchweg denselben* Werth von dx benutzen darf. Man muss vielmehr das gesuchte Integral in zwei andere Integrale zerlegen, indem man

$$(12.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \int_1^3 (x^2 - 6x + 13) dx + \int_3^7 (x^2 - 6x + 13) dx$$

setzt. Bei dem ersten Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $x \leq 3$, folglich muss man bei diesem

$$dx = - \frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

setzen. Bei dem zweiten Integrale ist $x \geq 3$, folglich muss man dabei

$$dx = + \frac{dy}{2\sqrt{y-4}}$$

setzen. Da nun noch $y = 4$ wird für $x = 3$, so erhält man

$$(13.) \quad \int_1^3 (x^2 - 6x + 13) dx = - \frac{1}{2} \int_8^4 \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{y dy}{\sqrt{y-4}},$$

$$(14.) \quad \int_3^7 (x^2 - 6x + 13) dx = + \frac{1}{2} \int_4^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$(15.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} + \frac{1}{2} \int_4^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}}.$$

Nun ist nach den Ausführungen in § 52

$$(16.) \quad \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha=0} \int_{4+\alpha}^8 \frac{y dy}{\sqrt{y-4}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\alpha=0} [(y+8)\sqrt{y-4}]_{4+\alpha}^8 = \frac{1}{3} [(y+8)\sqrt{y-4}]_4^8 = \frac{32}{3},$$

$$(17.) \quad \frac{1}{2} \int_4^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha=0} \int_{4+\alpha}^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\alpha=0} [(y+8)\sqrt{y-4}]_{4+\alpha}^{20} = \frac{1}{3} [(y+8)\sqrt{y-4}]_4^{20} = \frac{112}{3};$$

man erhält also in Uebereinstimmung mit Gleichung (2.)

$$(18.) \quad \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \frac{32}{3} + \frac{112}{3} = 48.$$

Um die vorstehende Untersuchung auf graphischem Wege zu veranschaulichen, sei in Figur 105 die Curve gezeichnet, welche der Substitutions-Gleichung

$$(19.) \quad y = x^2 - 6x + 13$$

entspricht. Für alle Werthe von x , welche kleiner als 3 sind, fällt die Curve, folglich ist

$\frac{dy}{dx}$ für diese Werthe von x

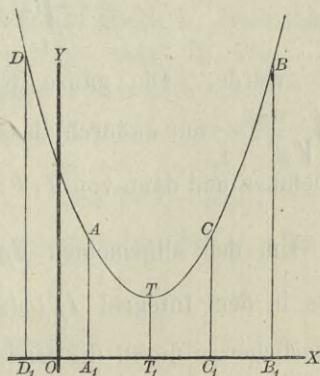
negativ. Für alle Werthe von

x dagegen, welche grösser als 3 sind, steigt die Curve, folglich ist

$\frac{dy}{dx}$ für diese Werthe

von x *positiv*. Deshalb darf man nicht in dem ganzen Intervalle von $x=1$ bis $x=7$ die Grösse

Fig. 105.*)



*) Um Platz zu sparen, sind in der Figur alle Ordinaten um die Hälfte verkürzt, d. h. die gezeichnete Curve entspricht der Gleichung

$$2y = x^2 - 6x + 13.$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt{y-4}$$

mit demselben Vorzeichen nehmen; es gilt vielmehr für alle Werthe von $x = 1$ bis $x = 3$ das *untere* Zeichen und für alle Werthe von $x = 3$ bis $x = 7$ das *obere* Zeichen.

Aus Figur 105 erkennt man auch leicht, weshalb die Gleichungen (5.) und (6.) fehlerhaft sind.

Das gesuchte Integral giebt nämlich den Flächeninhalt der Figur

$$(20.) \quad A_1B_1BA = \int_1^7 y dx = \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx,$$

während

$$(21.) \quad \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} = \int_5^7 y dx = \int_5^7 (x^2 - 6x + 13) dx = C_1B_1BC$$

und

$$(22.) \quad -\frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{y dy}{\sqrt{y-4}} = \int_1^{-1} y dx \\ = -\int_{-1}^{+1} (x^2 - 6x + 13) dx = -D_1A_1AD$$

sein würde. Die ganze Fläche A_1B_1BA erhält man aus $\frac{1}{2} \int \frac{y dy}{\sqrt{y-4}}$ nur dadurch, dass man y von $A_1A = 8$ bis $T_1T = 4$ abnehmen und dann von $T_1T = 4$ bis $B_1B = 20$ zunehmen lässt.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln, nehme man an, dass in dem Integral $\int_a^b f[\varphi(x)] dx$ statt der Integrations-Veränderlichen x durch die Gleichung

$$(23.) \quad y = \varphi(x)$$

die neue Integrations-Veränderliche y substituirt werde. Ist nun die Curve, welche der Gleichung (23.) entspricht, durch die

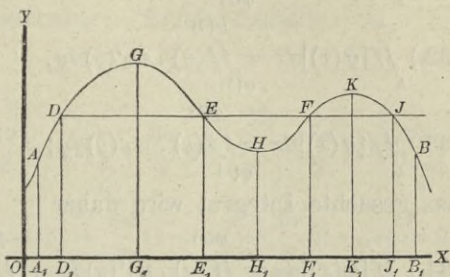
Figur 106 dargestellt, so hat y zwischen den Grenzen a und b für

$$(24.) \quad x = g = OG_1, \quad x = h = OH_1, \quad x = k = OK_1$$

Maxima bzw. Minima.

Es werden also zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ diejenigen Werthe von y , welche zwischen den Grenzen $x = a = OA_1$ und $x = g$ vorkommen, wenigstens theilweise wiederkehren. Ebenso werden zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = k$ diejenigen

Fig. 106.



Werthe, welche zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = k$ vorkommen, wenigstens theilweise wiederkehren. U. s. w. Es haben z. B. die 4 Punkte D, E, F und J , welche in den 4 von einander unterschiedenen Intervallen liegen, gleiche Ordinaten y , obgleich die zugehörigen Abscissen x von einander verschieden sind; d. h. die Gleichung (23.) hat, wenn man sie nach x auflöst, für die betrachteten Werthe von y mehrere Wurzeln. In Figur 106 ist z. B. die Zahl dieser Wurzeln gleich 4. Bezeichnet man diese Wurzeln mit $w_1(y), w_2(y), w_3(y), w_4(y)$, ist also

$$(25.) \quad x = w_1(y) \text{ zwischen den Grenzen } x = a \text{ und } x = g,$$

$$(26.) \quad x = w_2(y) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad x = g \quad \text{,,} \quad x = h,$$

$$(27.) \quad x = w_3(y) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad x = h \quad \text{,,} \quad x = k,$$

$$(28.) \quad x = w_4(y) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad x = k \quad \text{,,} \quad x = b,$$

so muss man dem entsprechend das gesuchte Integral in 4 Integrale zerlegen, indem man

$$(29.) \quad \int_a^b [\varphi(x)] dx = \int_a^g [\varphi(x)] dx + \int_g^h [\varphi(x)] dx + \int_h^k [\varphi(x)] dx + \int_k^b [\varphi(x)] dx$$

setzt. Dadurch erhält man nach Einführung der neuen Integrations-Veränderlichen y

$$(30.) \int_a^g f[\varphi(x)] dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(g)} f(y) \cdot w_1'(y) dy, \quad [\text{nach Gl. (25.)}]$$

$$(31.) \int_g^h f[\varphi(x)] dx = \int_{\varphi(g)}^{\varphi(h)} f(y) \cdot w_2'(y) dy, \quad [\text{nach Gl. (26.)}]$$

$$(32.) \int_h^k f[\varphi(x)] dx = \int_{\varphi(h)}^{\varphi(k)} f(y) \cdot w_3'(y) dy, \quad [\text{nach Gl. (27.)}]$$

$$(33.) \int_k^h f[\varphi(x)] dx = \int_{\varphi(k)}^{\varphi(h)} f(y) \cdot w_4'(y) dy; \quad [\text{nach Gl. (28.)}]$$

das gesuchte Integral wird daher

$$(34.) \int_a^h f[\varphi(x)] dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(g)} f(y) \cdot w_1'(y) dy + \int_{\varphi(g)}^{\varphi(h)} f(y) \cdot w_2'(y) dy \\ + \int_{\varphi(h)}^{\varphi(k)} f(y) \cdot w_3'(y) dy + \int_{\varphi(k)}^{\varphi(h)} f(y) \cdot w_4'(y) dy.$$

Beispiel. Macht man bei der Rectification der Astroide

$$(35.) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

(vergl. Fig. 77 bei Aufgabe 6 in § 27) den Punkt A mit den Coordinaten $x = a$, $y = 0$ zum Anfangspunkte des Bogens, so wächst der Bogen gleichzeitig mit t , und man erhält den ganzen Umfang der Astroide, wenn t alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft. Deshalb haben ds und dt in dem ganzen Intervall gleiches Zeichen. Aus den Gleichungen

$$(36.) \quad dx = -3a \cos^2 t \sin t dt, \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t dt,$$

$$(37.) \quad ds^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt^2$$

folgt daher

$$(38.) \quad ds = \pm 3a \sin t \cos t dt = \pm 3a \sin t d(\sin t),$$

wobei das Zeichen so zu wählen ist, dass $\frac{ds}{dt}$ positiv wird. Um den ganzen Umfang zu berechnen, muss man deshalb das Intervall von 0 bis 2π in vier gleiche Theile zerlegen und muss in jedem dieser Theile abwechselnd das positive und das negative Vorzeichen nehmen. Dadurch erhält man für den ganzen Umfang

$$(39.) \quad U = + 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt - 3a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \cos t dt \\ + 3a \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t \cos t dt - 3a \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin t \cos t dt,$$

oder

$$(40.) \quad U = \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ = \frac{3a}{2} (1 - 0) - \frac{3a}{2} (0 - 1) + \frac{3a}{2} (1 - 0) - \frac{3a}{2} (0 - 1) = 6a.$$

§ 64.

Messungsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 186 und 187.)

Soll der Flächeninhalt $F = A_1 B_1 B A$ einer ebenen Figur berechnet werden, welche oben wieder durch den Curvenbogen AB (Fig. 107) mit der Gleichung

(1.) $y = f(x),$

Fig. 107.

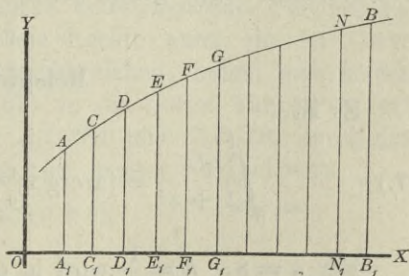
unten von der X-Axe, links und rechts von den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, so kann man

(2.) $F = A_1 B_1 B A = \int_a^b f(x) dx$

näherungsweise auch durch *lineare Messungen* finden. Man braucht dann die Function

(3.) $F(x) = \int f(x) dx$

gar nicht zu bestimmen, ja es braucht nicht einmal die Function $y = f(x)$ bekannt zu sein.



Theilt man nämlich die Strecke A_1B_1 in n gleiche Theile h und legt durch die Theilpunkte Parallele zur Y -Axe, so wird die Figur in n schmale Streifen zerlegt. Diese Streifen kann man näherungsweise als Paralleltrapeze betrachten, indem man die einzelnen Curvenbögen durch gerade Linien ersetzt. Dies giebt, wenn man

$$(4.) \quad f(a) = y_0, \quad f(a + h) = y_1, \quad f(a + 2h) = y_2, \dots \\ f(a + nh) = f(b) = y_n$$

setzt,

$$(5.) \quad A_1C_1CA = \frac{h}{2}(y_0 + y_1), \quad C_1D_1DC = \frac{h}{2}(y_1 + y_2), \\ D_1E_1ED = \frac{h}{2}(y_2 + y_3), \dots N_1B_1BN = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n),$$

also

$$(6.) \quad A_1B_1BA = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \\ = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-h) + f(b)].$$

Je grösser die Anzahl n der Streifen wird, um so genauer wird das Resultat; wächst n in's Unendliche, so wird der gefundene Ausdruck dem gesuchten Integral, bezw. dem gesuchten Flächeninhalt sogar genau gleich.

Beispiel.

Es ist

$$(7.) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Für $n = 8$, $h = \frac{1}{8}$ wird in diesem Falle

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{8}\right) + 2f\left(\frac{2}{8}\right) + \dots + 2f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1) \right],$$

oder, da $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist,

$$\pi = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{128}{65} + \frac{128}{68} + \frac{128}{73} + \frac{128}{80} + \frac{128}{89} + \frac{128}{100} + \frac{128}{113} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{32}{65} + \frac{8}{17} + \frac{32}{73} + \frac{2}{5} + \frac{32}{89} + \frac{8}{25} + \frac{32}{113} + \frac{1}{8}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1:4 &= 0,25 \\ 32:65 &= 0,4923\ 0769 \\ 8:17 &= 0,4705\ 8824 \\ 32:73 &= 0,4383\ 5616 \\ 2:5 &= 0,4 \\ 32:89 &= 0,3595\ 5056 \\ 8:25 &= 0,32 \\ 32:113 &= 0,2831\ 8584 \\ 1:8 &= 0,125; \end{aligned}$$

folglich erhält man *näherungsweise*

$$\pi = 3,1389\ 8849.$$

Der gefundene Werth ist also um 0,0026 0416 *kleiner* als der wahre Werth der Zahl

$$\pi = 3,1415\ 9265.$$

Bei dem angegebenen Verfahren ist an die Stelle des Curvenbogens AB ein der Curve *einbeschriebenes* Polygon getreten. Man kann mit gleichem Rechte auch ein der Curve *umschriebenes* Polygon in Betracht ziehen, indem man in den Punkten $C, E, G \dots$ (Fig. 107) an die Curve Tangenten legt und z. B. die beiden Streifen A_1C_1CA und C_1D_1DC durch das Parallelogramm $A_1D_1D'A'$ (Fig. 108) ersetzt. Dabei wird

$$(8.) \quad A_1A' + D_1D' = 2C_1C = 2f(a+h),$$

also

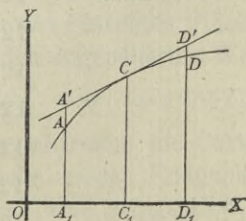
$$(9.) \quad A_1D_1D'A' = 2h \cdot f(a+h).$$

Ebenso findet man für die beiden folgenden Streifen den Näherungswerth

$$(10.) \quad 2h \cdot f(a+3h),$$

u. s. w.

Fig. 103.



Unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Streifen eine gerade ist — sie heisse jetzt $2n$ —, findet man daher für den Flächeninhalt der ganzen Figur den Näherungswerth

$$(11.) \quad F = 2h[f(a+h) + f(a+3h) + \dots + f(b-h)] \\ = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}),$$

wo wieder

$$f(a+h) = y_1, \quad f(a+3h) = y_3, \quad f(a+5h) = y_5, \dots$$

$$f[a + (2n-1)h] = f(b-h) = y_{2n-1}$$

gesetzt ist.

Zu bemerken ist dabei, dass die Tangenten in den Punkten C und E (Fig. 107) die Ordinate D_1D im Allgemeinen nicht genau in demselben Punkte D' treffen werden, so dass die Figur, deren Flächeninhalt durch Gleichung (11.) berechnet worden ist, von dem umschriebenen Polygon sich um eine kleine Grösse unterscheidet.

Beispiel.

Es möge auch diese letzte Formel auf die Berechnung der Zahl π angewendet werden, wenn man wieder von Gleichung (7.) ausgeht. In diesem Falle sei die Anzahl der Streifen

$$2n = 16, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{16},$$

dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8} \left[f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{15}{16}\right) \right],$$

$$\pi = \frac{128}{257} + \frac{128}{265} + \frac{128}{281} + \frac{128}{305} + \frac{128}{337} + \frac{128}{377} + \frac{128}{425} + \frac{128}{481}.$$

Nun ist

$$128 : 257 = 0,4980 \, 5447$$

$$128 : 265 = 0,4830 \, 1887$$

$$128 : 281 = 0,4555 \, 1601$$

$$128 : 305 = 0,4196 \, 7213$$

$$128 : 337 = 0,3798 \, 2196$$

$$128 : 377 = 0,3395 \, 2255$$

$$128 : 425 = 0,3011 \, 7647$$

$$128 : 481 = 0,2661 \, 1227;$$

folglich erhält man *näherungsweise*

$$\pi = 3,1428\ 9473.$$

Der gefundene Werth ist also um 0,0013 0208 *grösser* als der wahre Werth der Zahl

$$\pi = 3,1415\ 9265.$$

Der Fehler ist in diesem Falle etwa *halb so gross* wie bei der vorhergehenden Methode.

Diese zweite Methode wird auch bei anderen Anwendungen in der Regel genauere Resultate liefern als die erste, ohne dass man mehr einzelne Glieder zu berechnen braucht, weil sich im Allgemeinen die Tangenten einer Curve enger anschmiegen als die Sehnen. Von diesem Umstande wird in dem folgenden Paragraphen Vortheil gezogen werden.

§ 65.

Simpson'sche Regel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 188 und 189.)

Es möge wieder eine Figur begrenzt sein oben durch den Curvenbogen AB mit der Gleichung

$$(1.) \quad y = f(x),$$

unten durch die X-Axe, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$ (vergl. Figur 107); die Strecke A_1B_1 sei in $2n$ gleiche Theile von der Länge h , und die Figur selbst sei durch die Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2n-1}$ in $2n$ Streifen zerlegt. Vereinigt man zunächst je 2 benachbarte Streifen, so dass man thatsächlich nur noch n Doppelstreifen hat, und ersetzt die begrenzenden Curvenbögen durch die zugehörigen Sehnen, so findet man aus Formel Nr. 186 der Tabelle für den gesuchten Flächeninhalt, indem man h mit $2h$ vertauscht, den angenäherten Werth

$$(2.) \quad F_1 = h[f(a) + 2f(a+2h) + 2f(a+4h) + \dots + 2f(b-2h) + f(b)].$$

Ersetzt man dagegen bei den Doppelstreifen die Curvenbögen bezw. durch die Tangenten, welche in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, y_5, \dots, y_{2n-1}$ an die Curve gelegt sind, so

erhält man nach Formel Nr. 187 der Tabelle den angenäherten Werth

$$(3.) F_2 = 2h[f(a+h) + f(a+3h) + f(a+5h) + \dots + f(b-h)].$$

Ist der begrenzende Curvenbogen AB zwischen A und B nach oben convex, so ist F_1 kleiner als der gesuchte Flächeninhalt

$$(4.) F = \int_a^b f(x) dx,$$

und F_2 ist grösser als F ; es ist also

$$(5.) F_1 < F < F_2.$$

Ist dagegen der begrenzende Curvenbogen AB zwischen A und B nach oben concav, so wird

$$(6.) F_1 > F > F_2.$$

In beiden Fällen ist F ein Mittelwerth zwischen F_1 und F_2 , so dass die Grösse v , welche durch die Gleichung

$$(7.) \frac{F - F_1}{F_2 - F} = v$$

erklärt wird, immer positiv ist, und zwar wird v für hinreichend grosse Werthe von n in der Regel grösser als 1 sein, weil sich die Tangenten enger an die Curve anschmiegen als die Sehnen. Aus Gleichung (7.) ergibt sich sodann

$$(8.) F = \frac{F_1 + vF_2}{1 + v}.$$

Bei der angenäherten Berechnung der Zahl π im vorhergehenden Paragraphen war z. B. $F - F_1$ etwa doppelt so gross wie $F_2 - F$. Setzt man daher in den Gleichungen (7.) und (8.) $v = 2$, so erhält man durch die Formel

$$(9.) F = \frac{F_1 + vF_2}{1 + v} = \frac{F_1 + 2F_2}{3}$$

eine noch stärkere Annäherung an den wirklichen Werth des bestimmten Integrals. Dies giebt, wenn man die Werthe von F_1 und F_2 in Gleichung (9.) einsetzt,

$$(10.) F = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)],$$

oder

$$(11.) F = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Für die Zahl π erhält man daher unter Benutzung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate

$$\pi = \frac{1}{3} (3,1389\ 8849 + 6,2857\ 8946) = 3,1415\ 9265.$$

Der gefundene Werth stimmt also bis auf 8 Decimalstellen genau mit dem wahren Werthe von π überein.

Die in den Gleichungen (10.) und (11.) enthaltene Formel, welche unter dem Namen „Simpson'sche Regel“ bekannt ist, giebt nicht nur für die Berechnung der Zahl π sehr genaue Werthe, sondern auch für die Berechnung von anderen bestimmten Integralen, wenn man nur die Zahl n gross genug macht. Bei dem ersten, in § 64 angewendeten Näherungsverfahren wurde die begrenzende Curve durch *gerade Linien* mit der Gleichung

$$y = ax + b$$

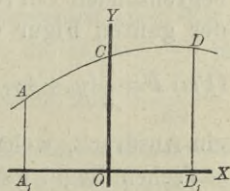
ersetzt, wobei die Constanten a und b so bestimmt werden können, dass jede dieser Geraden durch zwei benachbarte Punkte der Curve hindurchgeht. Auf die Simpson'sche Regel dagegen wird man geführt, indem man bei der Berechnung der Doppelstreifen die einzelnen Curvenbögen durch passend gewählte *Parabelbögen* ersetzt, welche sich der Curve sehr eng anschliessen. Dies geschieht in folgender Weise.

Die Gleichung

$$(12.) \quad y = ax^2 + bx + c$$

stellt, was auch die constanten Coefficienten a , b , c sein mögen, eine Parabel dar, deren Axe zur Y -Axe parallel ist. Ueber die Coefficienten a , b , c kann man nun so verfügen, dass die Parabel durch die drei

Fig. 109.



Punkte A, C, D (Fig. 109) mit den Coordinaten $(-h, y_0), (0, y_1), (+h, y_2)$ hindurchgeht, indem man die Gleichungen

$$(13.) \quad \begin{cases} y_0 = ah^2 - bh + c, \\ y_1 = c, \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

befriedigt. Daraus ergibt sich

$$(14.) \quad a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \quad b = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2), \quad c = y_1,$$

so dass Gleichung (12.) übergeht in

$$(15.) \quad y = \frac{1}{2h^2}[(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + h(-y_0 + y_2)x + 2h^2y_1].$$

Der Flächeninhalt der Figur A_1D_1DA wird daher

$$(16.) \quad \begin{aligned} A_1D_1DA &= \int_{-h}^{+h} y dx \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[(y_0 - 2y_1 + y_2) \frac{x^3}{3} + h(-y_0 + y_2) \frac{x^2}{2} + 2h^2y_1x \right]_{-h}^{+h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left[(y_0 - 2y_1 + y_2) \frac{h^3}{3} + 2h^2y_1h \right] = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Da bei einer beliebigen Parallelverschiebung der Y -Axe sich weder die Länge der Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ noch die Grösse h ändert, so kann man in ähnlicher Weise den Flächeninhalt der sämtlichen Doppelstreifen (in Figur 107) berechnen und findet dafür bezw.

$$\frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \quad \dots \quad \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n});$$

dabei hat man die einzelnen Curvenbögen durch Parabelbögen ersetzt, welche durch je 3 auf einander folgende Punkte der begrenzenden Curve AB hindurchgehen. Für den Flächeninhalt der ganzen Figur erhält man dann den angenäherten Werth

$$(17.) \quad F = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

ein Ausdruck, welcher mit Gleichung (11.), d. h. mit der Simpson'schen Regel genau übereinstimmt.

Um sich darüber Rechenschaft zu geben, wie genau die durch Anwendung der *Simpson'schen* Regel gefundenen Resultate sind, diene die folgende Betrachtung. Entwickelt man

$$(18.) \quad \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)]$$

nach steigenden Potenzen von h , so erhält man durch Anwendung der *Taylor'schen* Reihe

$$(19.) \quad \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = 2h \cdot f(a) + 2h^2 \cdot f'(a) + \frac{4h^3}{3} f''(a) + \\ \frac{2h^4}{3} f'''(a) + \frac{5h^5}{18} f^{(4)}(a) + \dots$$

Andererseits ist nach der *Taylor'schen* Reihe, wenn man die Function $F(x)$ durch die Gleichung

$$F'(x) = f(x)$$

erklärt,

$$(20.) \quad \int_a^{a+2h} f(x) dx = F(a+2h) - F(a) \\ = \frac{2h}{1!} f(a) + \frac{4h^2}{2!} f'(a) + \frac{8h^3}{3!} f''(a) + \frac{16h^4}{4!} f'''(a) \\ + \frac{32h^5}{5!} f^{(4)}(a) + \dots,$$

folglich wird

$$(21.) \quad \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) - \int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(a) + \dots$$

Man erkennt daraus, dass der Unterschied zwischen dem Näherungswerth, den die *Simpson'sche* Regel liefert, und dem wahren Werthe des Integrals mit h zugleich unendlich klein wird von der *fünften* Ordnung.

Für n Doppelstreifen ist daher der Unterschied etwa n -mal so gross, folglich wird der gesammte Fehler, da $2nh = b - a$ ist, gleich einem Mittelwerthe von $f^{(4)}(x)$, multiplicirt mit $\frac{(b-a)h^4}{180}$.

Es war bei Herleitung der Näherungsformeln in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen bisher die Voraussetzung ge-

Auch hier kann man sich über die Genauigkeit der gefundenen Resultate durch die Entwicklung nach der *Taylor'schen* Reihe Rechenschaft geben, denn es ist

$$\begin{aligned}
 (24.) \quad F_1 &= \frac{2h}{45} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) \\
 &= \frac{2h}{45} \left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h) \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + 32f(a+3h) + 7f(a+4h) \right] \\
 &= 4hf(a) + 8h^2f'(a) + \frac{32h^3}{3}f''(a) + \frac{32h^4}{3}f'''(a) \\
 &\quad + \frac{128h^5}{15}f^{(4)}(a) + \frac{256h^6}{45}f^{(5)}(a) + \frac{88h^7}{27}f^{(6)}(a) + \dots
 \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
 (25.) \quad \int_a^{a+4h} f(x) dx &= \int_a^{a+4h} F'(x) dx = F(a+4h) - F(a) \\
 &= 4hf(a) + 8h^2f'(a) + \frac{32h^3}{3}f''(a) + \frac{32h^4}{3}f'''(a) \\
 &\quad + \frac{128h^5}{15}f^{(4)}(a) + \frac{256h^6}{45}f^{(5)}(a) + \frac{1024h^7}{315}f^{(6)}(a) + \dots,
 \end{aligned}$$

folglich wird

$$(26.) \quad F_1 - \int_a^{a+4h} f(x) dx = \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(a) + \dots$$

Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe und dem wahren Werthe des Integrals wird also für je 4 Streifen von der Breite h mit h zugleich unendlich klein von der *siebenten* Ordnung.

Für alle $4n$ Streifen wird demnach der Unterschied etwa n -mal so gross. Der gesammte Fehler wird also, da

$$4nh = b - a$$

ist, gleich einem Mittelwerth von $f^{(6)}(x)$, multiplicirt mit

$$\frac{2(b-a)h^6}{945}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und die einzelnen Theile des Curvenbogens AB durch Curvenbögen mit der Gleichung

$$(27.) \quad y = ax^{2m} + a_1x^{2m-1} + a_2x^{2m-2} + \dots + a_{2m-1}x + a_{2m}$$

ersetzen, welche durch je $2m + 1$ auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve hindurchgehen.

Es ist dabei noch zu bemerken, dass die Genauigkeit im Allgemeinen keine wesentlich grössere wird, wenn man die Gleichung (27.) mit der Gleichung

$$(28.) \quad y = ax^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \dots + a_{2m}x + a_{2m+1}$$

vertauscht und die $2m + 2$ Coefficienten $a, a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}$ so bestimmt, dass die entsprechende Curve durch $2m + 2$ auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve hindurch geht. Der Grund dafür liegt darin, dass bei dem Integral

$$(29.) \quad \int_{-k}^{+k} y dx = \left[a \frac{x^{2m+2}}{2m+2} + a_1 \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \dots + a_{2m} \frac{x^2}{2} + a_{2m+1} x \right]_{-k}^{+k} \\ = 2 \left(a_1 \frac{k^{2m+1}}{2m+1} + a_3 \frac{k^{2m-1}}{2m-1} + \dots + a_{2m+1} k \right)$$

der Coefficient a von x^{2m+1} in dem Endresultat überhaupt nicht mehr vorkommt.

§ 66.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll mit Anwendung der *Simpson'schen Regel*

$$(1.) \quad \ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

berechnen.

Auflösung. Es sei $2n = 10$, also $h = \frac{1}{10}$, dann wird

$$(2.) \ln 2 = \frac{1}{30} [f(1) + 4f(1,1) + 2f(1,2) + \dots + 4f(1,9) + f(2)]$$

$$= \frac{1}{30} \left(1 + \frac{40}{11} + \frac{20}{12} + \frac{40}{13} + \frac{20}{14} + \frac{40}{15} + \frac{20}{16} + \frac{40}{17} + \frac{20}{18} + \frac{40}{19} + \frac{10}{20} \right).$$

Nun ist

$$1 : 30 = 0,0333 \ 3333$$

$$4 : 33 = 0,1212 \ 1212$$

$$2 : 36 = 0,0555 \ 5556$$

$$4 : 39 = 0,1025 \ 6410$$

$$2 : 42 = 0,0476 \ 1905$$

$$4 : 45 = 0,0888 \ 8889$$

$$2 : 48 = 0,0416 \ 6667$$

$$4 : 51 = 0,0784 \ 3137$$

$$2 : 54 = 0,0370 \ 3704$$

$$4 : 57 = 6,0701 \ 7544$$

$$1 : 60 = 0,0166 \ 6667;$$

folglich findet man für $\ln 2$ den Näherungswerth 0,6931 5024, der sich von dem wahren Werthe, nämlich von

$$\ln 2 = 0,6931 \ 4718$$

nur um 0,0000 0306 unterscheidet.

Berechnet man $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ nach der zweiten Methode, also

nach Formel Nr. 189 der Tabelle, indem man 12 Intervalle annimmt, so wird

$$(3.) \quad 4n = 12, \quad h = \frac{1}{12},$$

also

$$(4.) \quad F = \frac{2h}{45} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5$$

$$+ 12y_6 + 32y_7 + 14y_8 + 32y_9 + 12y_{10} + 32y_{11} + 7y_{12})$$

$$= \frac{1}{270} \left(7 + \frac{384}{13} + \frac{144}{14} + \frac{384}{15} + \frac{168}{16} + \frac{384}{17} + \frac{144}{18}$$

$$+ \frac{384}{19} + \frac{168}{20} + \frac{384}{21} + \frac{144}{22} + \frac{384}{23} + \frac{7}{2} \right).$$

Nun ist

$$7 = 7$$

$$384 : 13 = 29,538\ 461\ 538\ 5$$

$$144 : 14 = 10,285\ 714\ 285\ 7$$

$$384 : 15 = 25,6$$

$$168 : 16 = 10,5$$

$$384 : 17 = 22,588\ 235\ 294\ 1$$

$$144 : 18 = 8$$

$$384 : 19 = 20,210\ 526\ 315\ 8$$

$$168 : 20 = 8,4$$

$$384 : 21 = 18,285\ 714\ 285\ 7$$

$$144 : 22 = 6,545\ 454\ 545\ 5$$

$$384 : 23 = 16,695\ 652\ 173\ 9$$

$$7 : 2 = 3,5$$

folglich erhält man für $\ln 2$ den Näherungswerth

$$(5.) \quad \begin{aligned} F &= 187,149\ 758\ 439\ 2 : 270 \\ &= 0,693\ 147\ 253\ 5, \end{aligned}$$

der sich von

$$\ln 2 = 0,693\ 147\ 180\ 6$$

nur um

$$(6.) \quad F - \ln 2 = 0,000\ 000\ 072\ 9$$

unterscheidet.

Aufgabe 2. Man soll die Zahl π durch Anwendung der *Simpson'schen* Regel aus der Gleichung

$$(7.) \quad \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{0,5} = \frac{\pi}{6}$$

berechnen.

Auflösung. Für $2n = 8$, also $h = \frac{1}{16}$ erhält man

$$(8.) \quad \pi = \frac{6h}{3} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{16}\right) + \dots + 4f\left(\frac{7}{16}\right) + f\left(\frac{8}{16}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{64}{\sqrt{255}} + \frac{32}{\sqrt{252}} + \frac{64}{\sqrt{247}} + \frac{32}{\sqrt{240}} + \frac{64}{\sqrt{231}} + \frac{32}{\sqrt{220}} \right. \\ \left. + \frac{64}{\sqrt{207}} + \frac{16}{\sqrt{192}} \right),$$

oder

$$(9.) \quad \pi = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{16320}}{255} + \frac{\sqrt{28}}{21} + \frac{\sqrt{15808}}{247} + \frac{\sqrt{15}}{15} \\ + \frac{\sqrt{14784}}{231} + \frac{\sqrt{220}}{55} + \frac{\sqrt{1472}}{69} + \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Nun ist

$$1 : 8 = 0,125$$

$$\sqrt{16320} : 255 = 0,5009 \ 7943$$

$$\sqrt{28} : 21 = 0,2519 \ 7631$$

$$\sqrt{15808} : 247 = 0,5090 \ 2781$$

$$\sqrt{15} : 15 = 0,2581 \ 9889$$

$$\sqrt{14784} : 231 = 0,5263 \ 6135$$

$$\sqrt{220} : 55 = 0,2696 \ 7995$$

$$\sqrt{1472} : 69 = 0,5560 \ 3844$$

$$\sqrt{3} : 12 = 0,1443 \ 3757;$$

folglich erhält man für die Zahl π den Näherungswerth 3,1415 9975, der sich von dem wahren Werthe, nämlich von

$$\pi = 3,1415 \ 9265,$$

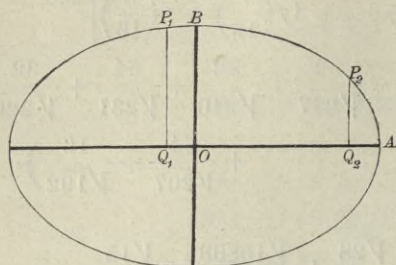
nur um die Grösse 0,0000 0710 unterscheidet.

Aufgabe 3. Von einer Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mit den Halbachsen $a = 6$, $b = 4$ soll man das Flächenstück $Q_1Q_2P_2P_1$ berechnen (Fig. 110), wenn $OQ_1 = -1$ und $OQ_2 = +5$ ist.

Auflösung. Aus der Gleichung der Ellipse folgt

$$(10.) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2}{3} \sqrt{36 - x^2},$$

Fig. 110.



so dass man für den gesuchten Flächeninhalt

$$(11.) \quad F = \frac{2}{3} \int_{-1}^{+5} dx \sqrt{36 - x^2}$$

erhält. Nach der *Simpson'schen* Regel wird daher für $2n = 12$, $h = \frac{1}{2}$

$$(12.) \quad F = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} (\sqrt{35} + 4\sqrt{35,75} + 2\sqrt{36} + 4\sqrt{35,75} \\ + 2\sqrt{35} + 4\sqrt{33,75} + 2\sqrt{32} + 4\sqrt{29,75} \\ + 2\sqrt{27} + 4\sqrt{23,75} + 2\sqrt{20} + 4\sqrt{15,75} + \sqrt{11}).$$

Nun ist

$$2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12,0000\ 000$$

$$8\sqrt{35,75} = \sqrt{2288} = 47,8330\ 430$$

$$3\sqrt{35} = \sqrt{315} = 17,7482\ 393$$

$$4\sqrt{33,75} = \sqrt{540} = 23,2379\ 001$$

$$2\sqrt{32} = \sqrt{128} = 11,3137\ 085$$

$$4\sqrt{29,75} = \sqrt{476} = 21,8174\ 242$$

$$2\sqrt{27} = \sqrt{108} = 10,3923\ 048$$

$$4\sqrt{23,75} = \sqrt{380} = 19,4935\ 887$$

$$2\sqrt{20} = \sqrt{80} = 8,9442\ 719$$

$$4\sqrt{15,75} = \sqrt{252} = 15,8745\ 079$$

$$\sqrt{11} = 3,3166\ 248;$$

man erhält daher für F den *Näherungswerth*

$$(13.) \quad 191,9716\ 132 : 9 = 21,3301\ 7924.$$

Den *wahren* Werth von F findet man aus

$$(14.) \quad F = \frac{2}{3} \int_{-1}^{+5} dx \sqrt{36 - x^2} = \frac{2}{3} \left[\frac{x}{2} \sqrt{36 - x^2} + 18 \arcsin\left(\frac{x}{6}\right) \right]_{-1}^{+5} \\ = \frac{1}{3} (5\sqrt{11} + \sqrt{35}) + 12 \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) - 12 \arcsin\left(-\frac{1}{6}\right).$$

Dabei ist (vergl. Aufgabe 4 in § 19)

$$\frac{5}{3} \sqrt{11} = 5,527\ 708$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{35} = 1,972\ 027$$

$$12 \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 11,821\ 327$$

$$12 \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 2,009\ 377,$$

also

$$(15.) \quad F = 21,330\ 439.$$

Der durch die Anwendung der *Simpson'schen Regel* gefundene Werth ist also um 0,000 260 zu klein.

Aufgabe 4. In einer Ellipse (Fig. 111) mit der Gleichung

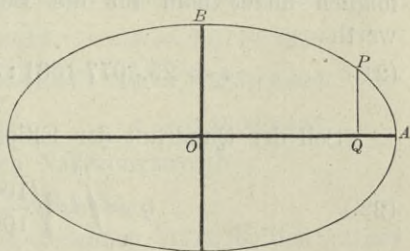
$$(16.) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

seien die beiden Halbaxen

$$(17.) \quad a = 10 \quad \text{und} \quad b = 6;$$

man soll die Länge des Bogens BP bestimmen, wenn OQ gleich 8 ist.

Fig. 111.



Auflösung. Aus Gleichung

(16.) folgt

$$(18.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}.$$

In dem vorliegenden Falle ist e gleich 8, also

$$(19.) \quad s = BP = \int_0^8 dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}.$$

Deshalb erhält man durch Anwendung der *Simpson'schen Regel* für $2n = 8$, $h = 1$

$$(20.) \quad s = \frac{1}{3} \left(1 + 4\sqrt{\frac{9936}{9900}} + 2\sqrt{\frac{9744}{9600}} + 4\sqrt{\frac{9424}{9100}} \right. \\ \left. + 2\sqrt{\frac{8976}{8400}} + 4\sqrt{\frac{8400}{7500}} + 2\sqrt{\frac{7696}{6400}} + 4\sqrt{\frac{6864}{5100}} + \sqrt{\frac{5904}{3600}} \right).$$

Nun ist

$$4\sqrt{9936} : \sqrt{9900} = \sqrt{48576} : 55 = 1,0000 \ 0000 \\ 4,0072 \ 6612$$

$$2\sqrt{9744} : \sqrt{9600} = \sqrt{406} : 10 = 2,0149 \ 4417$$

$$4\sqrt{9424} : \sqrt{9100} = \sqrt{3430336} : 455 = 4,0705 \ 8600$$

$$2\sqrt{8976} : \sqrt{8400} = \sqrt{20944} : 70 = 2,0674 \ 3457$$

$$4\sqrt{8400} : \sqrt{7500} = \sqrt{448} : 5 = 4,2332 \ 0210$$

$$2\sqrt{7696} : \sqrt{6400} = \sqrt{481} : 10 = 2,1931 \ 7122$$

$$4\sqrt{6864} : \sqrt{5100} = \sqrt{155584} : 85 = 4,6404 \ 8678$$

$$\sqrt{5904} : \sqrt{3600} = \sqrt{41} : 5 = 1,2806 \ 2485;$$

folglich findet man für die Bogenlänge BP den Näherungswert

$$(21.) \quad s = 25,5077 \ 1581 : 3 = 8,5025 \ 7194.$$

Soll der Quadrant der Ellipse, nämlich

$$(22.) \quad q = \int_0^{10} dx \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}$$

berechnet werden, so würde die Rechnung auf Schwierigkeiten stossen, weil

$$f(x) = \sqrt{\frac{10000 - 64x^2}{100(100 - x^2)}}$$

für $x = 10$ unendlich gross wird. Um auch in diesem Falle die angenäherte Berechnung von $\int_s^{10} f(x) dx$ auszuführen, mache man

y zur Integrations-Veränderlichen, indem man

$$(23.) \quad y = \frac{6}{10} \sqrt{100 - x^2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{10}{6} \sqrt{36 - y^2}$$

setzt. Dies giebt (Fig. 111)

$$(24.) \quad dx = -\frac{5ydy}{3\sqrt{36-y^2}}, \quad ds = -dy\sqrt{\frac{1296+64y^2}{36(36-y^2)}},$$

$$(25.) \quad PA = \int_8^{10} f(x)dx = -\int_{3,6}^0 dy\sqrt{\frac{324+16y^2}{9(36-y^2)}} \\ = +\int_0^{3,6} dy\sqrt{\frac{324+16y^2}{9(36-y^2)}}.$$

Wendet man auf die Berechnung dieses Integrals die *Simpson'sche* Regel an, indem man $2n = 4$, also $h = 0,9$ setzt, so erhält man

$$(26.) \quad PA = 0,3\left(1 + 4\sqrt{\frac{416}{391}} + 2\sqrt{\frac{116}{91}} + 4\sqrt{\frac{544}{319}} + \sqrt{\frac{41}{16}}\right),$$

Nun ist

$$0,3 = 0,3000\ 0000$$

$$1,2 \cdot \sqrt{416} : \sqrt{391} = \sqrt{234224,64} : 391 = 1,2377\ 6880$$

$$0,6 \cdot \sqrt{116} : \sqrt{91} = \sqrt{3800,16} : 91 = 0,6774\ 2239$$

$$1,2 \cdot \sqrt{544} : \sqrt{319} = \sqrt{249891,84} : 319 = 1,5670\ 5902$$

$$0,3 \cdot \sqrt{41} : \sqrt{16} = \sqrt{3,69} : 4 = 0,4802\ 3432;$$

folglich erhält man für PA den Näherungswerth

$$(27.) \quad PA = 4,2624\ 8453,$$

so dass man mit Rücksicht auf Gleichung (17.) für den ganzen Ellipsenquadranten

$$(28.) \quad BPA = q = 12,7650\ 5647$$

erhält. Durch wirkliche Berechnung des elliptischen Integrals hatte man auf Seite 319 in § 58 für denselben Ellipsenquadranten

$$(29.) \quad q = 12,763\ 4994$$

gefunden, so dass das durch Anwendung der *Simpson'schen* Regel berechnete Resultat um 0,0015 571, d. h. um 0,0001 2200 der Bogenlänge zu gross ist.

Wenn man für die Zahl n noch grössere Werthe wählt, so werden die Resultate natürlich genauer.

$$(6.) \quad F_1 = (c_1 + c_2)hf(c) + (-c_1\alpha + c_2\beta)\frac{h^2}{1!}f'(c) \\ + (c_1^2\alpha^2 + c_2^2\beta^2)\frac{h^3}{2!}f''(c) + (-c_1\alpha^3 + c_2\beta^3)\frac{h^4}{3!}f'''(c) \\ + (c_1\alpha^4 + c_2\beta^4)\frac{h^5}{4!}f^{(4)}(c) + \dots$$

möglichst viele Glieder mit der in Gleichung (4.) gegebenen Entwicklung übereinstimmen. Zunächst folgt aus den Gleichungen

$$(7.) \quad -c_1\alpha + c_2\beta = 0, \quad \text{oder} \quad c_1\alpha = c_2\beta$$

und

$$(8.) \quad -c_1\alpha^3 + c_2^2\beta^3 = 0, \quad \text{oder} \quad c_1\alpha^3 = c_2\beta^3,$$

dass

$$(9.) \quad \beta^2 = \alpha^2, \quad \text{oder} \quad \beta = \pm \alpha.$$

Wäre $\beta = -\alpha$, so würden die beiden Ordinaten $f(c - \alpha h)$ und $f(c + \beta h)$ zusammenfallen; damit man zwei verschiedene Ordinaten erhält, muss man also in Gleichung (9.) das obere Vorzeichen wählen. Daraus folgt dann

$$(10.) \quad c_1 = c_2,$$

so dass die Gleichungen (5.) und (6.) übergehen in

$$(11.) \quad F_1 = c_1 h [f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h)] \\ = 2 \left[c_1 h f(c) + c_1 \alpha^2 \frac{h^3}{2!} f''(c) + c_1 \alpha^4 \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(c) + \dots \right].$$

Jetzt sind nur noch die beiden Grössen c_1 und α so zu bestimmen, dass

$$(12.) \quad c_1 = 1, \quad 3c_1\alpha^2 = 1, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

wird. Dies giebt

$$(13.) \quad F_1 = h \left[f\left(c - \frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(c + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \right] \\ = 2 \left[hf(c) + \frac{h^3}{3 \cdot 2!} f''(c) + \frac{h^5}{9 \cdot 4!} f^{(4)}(c) + \dots \right].$$

Es ist daher

Aufgabe. Es soll wieder

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

berechnet werden unter Anwendung von 10 Ordinaten.

Auflösung. In diesem Falle ist $h = 0,1$ und

$$\begin{aligned} F = 0,1 \left[f\left(\frac{33 - \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{33 + \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{39 - \sqrt{3}}{30}\right) \right. \\ + f\left(\frac{39 + \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{45 - \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{45 + \sqrt{3}}{30}\right) \\ + f\left(\frac{51 - \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{51 + \sqrt{3}}{30}\right) + f\left(\frac{57 - \sqrt{3}}{30}\right) \\ \left. + f\left(\frac{57 + \sqrt{3}}{30}\right) \right], \end{aligned}$$

oder da $f(x) = \frac{1}{x}$ ist,

$$\begin{aligned} (16.) \quad F = 3 \left[\left(\frac{1}{33 - \sqrt{3}} + \frac{1}{33 + \sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{39 - \sqrt{3}} + \frac{1}{39 + \sqrt{3}} \right) \right. \\ + \left(\frac{1}{45 - \sqrt{3}} + \frac{1}{45 + \sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{51 - \sqrt{3}} + \frac{1}{51 + \sqrt{3}} \right) \\ \left. + \left(\frac{1}{57 - \sqrt{3}} + \frac{1}{57 + \sqrt{3}} \right) \right] \\ = \frac{33}{181} + \frac{39}{253} + \frac{45}{337} + \frac{51}{433} + \frac{57}{541}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$33 : 181 = 0,182 \, 320 \, 442 \, 0$$

$$39 : 253 = 0,154 \, 150 \, 197 \, 6$$

$$45 : 337 = 0,133 \, 531 \, 157 \, 3$$

$$51 : 433 = 0,117 \, 782 \, 909 \, 9$$

$$57 : 541 = 0,105 \, 360 \, 443 \, 6,$$

also

$$\begin{aligned} (17.) \quad F = 0,693 \, 145 \, 150 \, 4 \\ = \ln 2 - 0,000 \, 002 \, 030 \, 2. \end{aligned}$$

Der Fehler ist also kleiner als bei Anwendung der *Simpson'schen* Regel mit 11 Ordinaten.

Auch dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern, indem man

$$\begin{aligned}
 (18.) \quad F_2 &= hc_1[f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h)] + hc_2[f(c - \beta h) \\
 &\quad + f(c + \beta h)] \\
 &= 2[(c_1 + c_2)hf(c) + (c_1\alpha^2 + c_2\beta^2)\frac{h^3}{2!}f''(c) \\
 &\quad + (c_1\alpha^4 + c_2\beta^4)\frac{h^5}{4!}f^{(4)}(c) + (c_1\alpha^6 + c_2\beta^6)\frac{h^7}{6!}f^{(6)}(c) \\
 &\quad + (c_1\alpha^8 + c_2\beta^8)\frac{h^9}{8!}f^{(8)}(c) + \dots]
 \end{aligned}$$

setzt und die 4 Grössen c_1 , c_2 , α , β so bestimmt, dass möglichst viele Glieder dieser Entwicklung mit den entsprechenden Gliedern in der Entwicklung von

$$\begin{aligned}
 (19.) \quad \int_{c-2h}^{c+2h} f(x)dx &= \int_{c-2h}^{c+2h} F'(x)dx = F(c + 2h) - F(c - 2h) \\
 &= 2\left[\frac{2h}{1!}f(c) + \frac{8h^3}{3!}f''(c) + \frac{32h^5}{5!}f^{(4)}(c) + \frac{128h^7}{7!}f^{(6)}(c) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{512h^9}{9!}f^{(8)}(c) + \dots\right]
 \end{aligned}$$

übereinstimmen. Dies gibt die Gleichungen

$$(20.) \quad c_1 + c_2 = 2,$$

$$(21.) \quad c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 = \frac{8}{3},$$

$$(22.) \quad c_1\alpha^4 + c_2\beta^4 = \frac{32}{5},$$

$$(23.) \quad c_1\alpha^6 + c_2\beta^6 = \frac{128}{7}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (20.) und (21.), (21.) und (22.), (22.) und (23.) die Grösse c_1 , so erhält man

$$(24.) \quad c_2(\alpha^2 - \beta^2) = 2\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right),$$

$$(25.) \quad c_2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2) = 8\left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right) = 2\beta^2\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right),$$

$$(26.) \quad c_2\beta^4(\alpha^2 - \beta^2) = 32\left(\frac{\alpha^2}{5} - \frac{4}{7}\right) = 8\beta^2\left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right),$$

also

$$(27.) \quad \beta^2 = 4\left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{\alpha^2}{5} - \frac{4}{7}\right) : \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right).$$

Dies giebt

$$\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{\alpha^2}{5} - \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{4}{5}\right)^2,$$

oder

$$(28.) \quad 35\alpha^4 - 120\alpha^2 + 48 = 0,$$

$$(29.) \quad \alpha^2 = \frac{60 \pm \sqrt{1920}}{35} = \frac{12 \pm 1,6\sqrt{30}}{7}.$$

Da die Gleichungen (20.) bis (23.) sich nicht ändern, wenn man c_1 mit c_2 und α mit β vertauscht, so genügt β derselben Gleichung (28.) wie α ; es sei deshalb

$$(30.) \quad \alpha^2 = \frac{4}{7}(3 - 0,4\sqrt{30}), \quad \beta^2 = \frac{4}{7}(3 + 0,4\sqrt{30}).$$

Dann folgt aus Gleichung (24.)

$$(31.) \quad c_2 = \frac{2(3\alpha^2 - 4)}{3(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{8(9 - 1,2\sqrt{30} - 7)}{-3 \cdot 3,2\sqrt{30}} = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30},$$

$$(32.) \quad c_1^2 = \frac{2(3\beta^2 - 4)}{3(\beta^2 - \alpha^2)} = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}.$$

Es ist daher

$$(33.) \quad F_2 = \left(1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)h \left[f\left(c - \frac{2\sqrt{3-0,4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) \right. \\ \left. + f\left(c + \frac{2\sqrt{3-0,4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) \right] \\ + \left(1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}\right)h \left[f\left(c - \frac{2\sqrt{3+0,4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) \right. \\ \left. + f\left(c + \frac{2\sqrt{3+0,4\sqrt{30}}}{\sqrt{7}}h\right) \right].$$

Der Coefficient von $\frac{h^9}{8!}$ in der Entwicklung von F_2 wird dabei

$$2(c_1\alpha^8 + c_2\beta^8) = 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4 \left[\left(1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}\right) \left(3 - 0,4\sqrt{30}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}\right) \left(3 + 0,4\sqrt{30}\right)^4 \right] \\ = \frac{1024 \cdot 5,16}{49}.$$

Deshalb wird

$$(34.) \int_{c-2h}^{c+2h} f(x) dx - F_2 = \left(\frac{1024h^9}{9!} - \frac{1024 \cdot 5,16h^9}{8! \cdot 49} \right) f^{(8)}(c) + \dots \\ = \frac{20,48h^9}{138 \cdot 915} f^{(8)}(c) + \dots$$

Bezeichnet man

$$f[a + (4m - 2 - \alpha)h] \text{ mit } y_{m,1}, \\ f[a + (4m - 2 + \alpha)h] \text{ mit } y_{m,2}, \\ f[a + (4m - 2 - \beta)h] \text{ mit } y_{m,3}, \\ f[a + (4m - 2 + \beta)h] \text{ mit } y_{m,4},$$

so erhält man für das gesuchte Integral $\int_a^b f(x) dx$ den Näherungswert

$$(35.) F = hc_1[(y_{1,1} + y_{1,2}) + (y_{2,1} + y_{2,2}) + \dots + (y_{n,1} + y_{n,2})] \\ + hc_2[(y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,3} + y_{2,4}) + \dots + (y_{n,3} + y_{n,4})].$$

Da hierbei $4nh = b - a$ ist, so wird, wenn man mit Θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet, der Fehler

$$(36.) \int_a^b f(x) dx - F = \frac{5,12(b-a)h^8}{138 \cdot 915} f^{(8)}[a + \Theta(b-a)];$$

er wird also mit h zugleich unendlich klein von der achten Ordnung.

Die folgende Aufgabe möge zeigen, wie bei den Anwendungen häufig die in α , β , c_1 , c_2 enthaltenen Irrationalitäten vermieden werden können, weil in dem Endresultat nur die symmetrischen Functionen von α^2 und β^2 auftreten. Nach Gleichung (28.) wird aber

$$(37.) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{120}{35}, \quad \alpha^2\beta^2 = \frac{48}{35}.$$

Aufgabe. Man soll wieder $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ unter Benutzung von 12 Ordinaten berechnen.

Auflösung. Hier ist

$$h = \frac{1}{12}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

also, wenn man der Kürze wegen $12c$ mit k bezeichnet,

$$f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h) = \frac{12}{12c - \alpha} + \frac{12}{12c + \alpha} = \frac{24k}{k^2 - \alpha^2},$$

$$f(c - \beta h) + f(c + \beta h) = \frac{12}{12c - \beta} + \frac{12}{12c + \beta} = \frac{24k}{k^2 - \beta^2}.$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.) und (32.)

$$\begin{aligned} (38.) \quad & c_1[f(c - \alpha h) + f(c + \alpha h)] + c_2[f(c - \beta h) + f(c + \beta h)] \\ &= \frac{48k}{3(\alpha^2 - \beta^2)} \left(-\frac{3\beta^2 - 4}{k^2 - \alpha^2} + \frac{3\alpha^2 - 4}{k^2 - \beta^2} \right) \\ &= \frac{16k[-3(\alpha^4 - \beta^4) + (3k^2 + 4)(\alpha^2 - \beta^2)]}{(\alpha^2 - \beta^2)[k^4 - (\alpha^2 + \beta^2)k^2 + \alpha^2\beta^2]} \\ &= \frac{16k[-3(\alpha^2 + \beta^2) + 3k^2 + 4]}{k^4 - (\alpha^2 + \beta^2)k^2 + \alpha^2\beta^2} = \frac{16k(105k^2 - 220)}{35k^4 - 120k^2 + 48}. \end{aligned}$$

Wenn man in diesem Ausdruck für $k = 12c$ die drei Werthe

$12(1 + 2h) = 14$, $12(1 + 6h) = 18$, $12(1 + 10h) = 22$
einsetzt, so erhält man bezw.

$$(39.) \quad \begin{cases} c_1(y_{1,1} + y_{1,2}) + c_2(y_{1,3} + y_{1,4}) = \frac{35\ 630}{10\ 321}, \\ c_1(y_{2,1} + y_{2,2}) + c_2(y_{2,3} + y_{2,4}) = \frac{25\ 350}{9\ 467}, \\ c_1(y_{3,1} + y_{3,2}) + c_2(y_{3,3} + y_{3,4}) = \frac{139\ 150}{63\ 601}. \end{cases}$$

Indem man diese Werthe in Gleichung (35.) einsetzt, findet man

$$(40.) \quad F = \frac{1}{12} \left(\frac{35\ 630}{10\ 321} + \frac{25\ 350}{9\ 467} + \frac{139\ 150}{63\ 601} \right).$$

Nun ist

$$35\ 630 : 10\ 321 = 3,452\ 184\ 865\ 808$$

$$25\ 350 : 9\ 467 = 2,677\ 722\ 615\ 401$$

$$139\ 150 : 63\ 601 = 2,187\ 858\ 681\ 467,$$

folglich wird

$$(41.) \quad \begin{aligned} F &= 8,317\ 766\ 162\ 676 : 12 \\ &= 0,693\ 147\ 180\ 223 \\ &= \ln 2 - 0,000\ 000\ 000\ 337. \end{aligned}$$

Man erhält also durch dieses Verfahren eine ausserordentlich starke Annäherung.

Noch stärker wird die Annäherung, wenn man in den Gleichungen

$$(42.) \quad \int_{c-3h}^{c+3h} f(x) dx = \int_{c-3h}^{c+3h} F'(x) dx = F(c+3h) - F(c-3h)$$

und

$$(43.) \quad \begin{aligned} F_3 &= hc_1[f(c-\alpha h) + f(c+\alpha h)]f + hc_2[(c-\beta h) \\ &\quad + f(c+\beta h)] + hc_3[f(c-\gamma h) + f(c+\gamma h)] \end{aligned}$$

die rechten Seiten nach steigenden Potenzen von h entwickelt und die 6 Grössen $c_1, c_2, c_3, \alpha, \beta, \gamma$ so bestimmt, dass in beiden Entwicklungen die Coefficienten von $h, h^3, h^5, h^7, h^9, h^{11}$ mit einander übereinstimmen. Der Fehler wird dann mit h zugleich unendlich klein von der 13^{ten} Ordnung.

In dieser Weise kann man das Verfahren noch beliebig weiter fortsetzen.

XIII. Abschnitt.

Kubatur der Körper und Complanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale.

§ 68.

Kubatur der Körper durch Anwendung einfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 192.)

Es war bereits in Abschnitt VI gezeigt worden, wie man das Volumen eines Rotationskörpers berechnen kann. Es wurde damals der Körper durch Schnitte, senkrecht zur Rotations-Axe in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, die man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung als Kreiscylinder betrachten darf. Ist z. B. die den Körper begrenzende Fläche durch Rotation der Curve

$$(1.) \quad y = f(x)$$

um die X -Axe entstanden, so ist die Grundfläche eines solchen Cylinders ein Kreis mit dem Halbmesser y und dem Flächeninhalte $y^2\pi$. Da der Cylinder die Höhe dx hat, so wird das Volumen einer solchen unendlich dünnen Schicht

$$(2.) \quad dV = y^2\pi dx,$$

also das Volumen des ganzen Rotationskörpers

$$(3.) \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

wie bereits in Formel Nr. 131 der Tabelle angegeben ist.

Ein ähnliches Verfahren kann man auch für die Berechnung des Volumens bei anderen Körpern anwenden. Man theilt dieselben in unendlich viele, unendlich dünne Schichten durch Schnitte, welche zur X -Axe senkrecht stehen, und summirt die Volumina dieser einzelnen Schichten.

Zur Berechnung des Volumens der einzelnen Schichten muss zunächst der Flächeninhalt der einzelnen Schnitte als stetige Function von x bekannt sein, wobei $x = OQ$ der Abstand des betreffenden Schnittes von der YZ -Ebene ist (Fig. 112). Es sei also $F(x)$ der Flächeninhalt eines solchen Schnittes, welcher in $F(x + \Delta x)$ übergeht, wenn

x um $\Delta x = QQ_1$ wächst, d. h. wenn der Schnitt durch den Punkt Q_1 der X -Axe gelegt wird.

Legt man durch die Umgrenzungen der beiden Schnitte $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ Parallele zur X -Axe, so werden die beiden Umgrenzungscurven der Schnitte in die YZ -Ebene

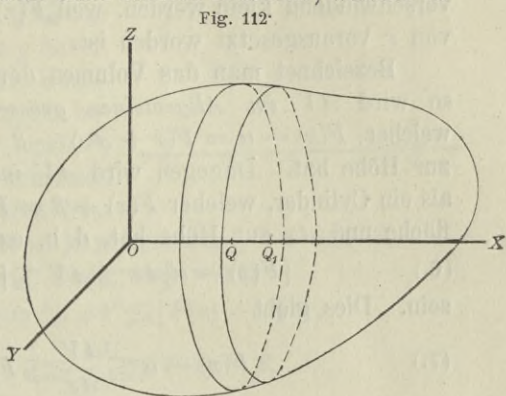
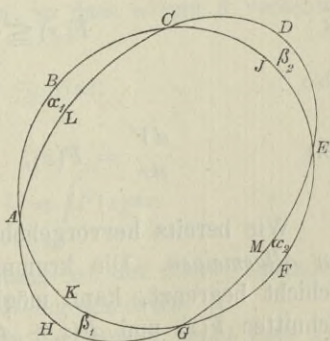


Fig. 112.

projicirt. In Figur 113 sei z. B. die Curve $ABCJEFHGK$ die Projection von $F(x)$, und die Curve $ALCDEMFGH$ die Projection von $F(x + \Delta x)$. Die beiden Figuren haben das Stück $ALCJEMGK$ gemeinschaftlich; dieses Stück muss man um

Fig. 113.



(4.) $\alpha_1 = ALCB$ und $\alpha_2 = GFEM$ vermehren, damit man $F(x)$ erhält, während man

(4 a.) $\beta_1 = AHGK$ und $\beta_2 = CJED$

hinzufügen muss, damit man $F(x + \Delta x)$ erhält.

Denselben Schluss wird man auch allgemein ausführen können. Die Projectionen der beiden Schnitte werden ein Flächenstück

$$(5.) \quad F(x) - \alpha = F(x + \Delta x) - \beta$$

gemeinschaftlich haben, wenn man mit α und β die Summe der

kleinen Flächenstücke bezeichnet, welche das gemeinsame Stück bezw. zu $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ ergänzen. In Figur 113 ist z. B.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Dabei sind α und β kleine Grössen, welche mit Δx zugleich verschwindend klein werden, weil $F(x)$ als eine stetige Function von x vorausgesetzt worden ist.

Bezeichnet man das Volumen der dünnen Schicht mit ΔV , so wird ΔV im Allgemeinen grösser sein als ein Cylinder, welcher $F(x) - \alpha = F(x + \Delta x) - \beta$ zur Grundfläche und Δx zur Höhe hat. Dagegen wird ΔV im Allgemeinen kleiner sein als ein Cylinder, welcher $F(x) + \beta = F(x + \Delta x) + \alpha$ zur Grundfläche und Δx zur Höhe hat, d. h. es wird im Allgemeinen

$$(6.) \quad [F(x) - \alpha] \Delta x \leq \Delta V \leq [F(x) + \beta] \Delta x$$

sein. Dies giebt

$$(7.) \quad F(x) - \alpha \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq F(x) + \beta,$$

oder, wenn man Δx verschwindend klein werden lässt,

$$(8.) \quad F(x) \leq \frac{dV}{dx} \leq F(x),$$

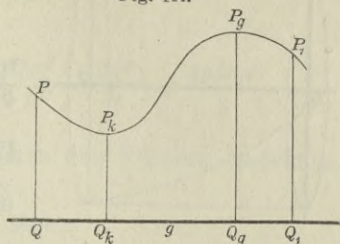
also

$$(9.) \quad \frac{dV}{dx} = F(x), \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

Wie bereits hervorgehoben wurde, gelten die Schlüsse *nur im Allgemeinen*. Die krumme Fläche, welche die betrachtete Schicht begrenzt, kann möglicher Weise zwischen den beiden Schnitten $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ solche Einbiegungen oder Ausbiegungen haben, dass der Cylinder mit der Grundfläche $F(x) - \alpha$ und der Höhe Δx nicht ganz *innerhalb* der Schicht ΔV liegt, oder dass der Cylinder mit der Grundfläche $F(x) + \beta$ und der Höhe Δx die Schicht ΔV nicht vollständig *einschliesst*. In diesem Falle lege man durch eine Gerade g , welche zur X -Axe parallel ist und die Schicht durchbohrt, eine beliebige Ebene QQ_1P_1P (Fig. 114). Diese Ebene sei auf der einen

Seite durch die Gerade g begrenzt und schneide die Figuren $F(x)$ und $F(x + \Delta x)$ bezw. in den Geraden QP und Q_1P_1 . Die begrenzende Fläche [schneide sie in den Curvenbogen PP_1 , welcher in den Punkten P_k und P_g bezw. den kleinsten und den grössten Abstand von der Geraden g haben möge. Dreht sich nun die Ebene QQ_1P_1P um die Gerade g , so beschreiben die Punkte P_k und P_g auf der begrenzenden krummen Fläche zwei Curven, deren Projectionen in die YZ -Ebene jetzt mit $F(x) - \alpha$ und $F(x) + \beta$ bezeichnet werden mögen. Dann wird wieder

Fig. 114.



$$[F(x) - \alpha] \Delta x \leq \Delta V \leq [F(x) + \beta] \Delta x,$$

$$F(x) - \alpha \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq F(x) + \beta,$$

also, weil für verschwindend kleine Werthe von Δx die Punkte P_k und P_g mit P zusammenfallen, so dass α und β verschwindend klein werden,

$$F(x) \leq \frac{dV}{dx} \leq F(x);$$

dies giebt wieder

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx.$$

In dieser strengeren Herleitung ist der zuerst behandelte, am häufigsten vorkommende Fall eingeschlossen.

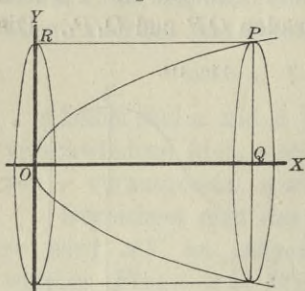
Die Berechnung des Volumens der Körper nennt man „*Kubatur der Körper*“.

§ 69.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von dem *elliptischen Paraboloid* mit der Gleichung

Fig. 115.



(1.) $y^2 + a^2 z^2 = 2px$
 und von der Ebene mit der Gleichung $x = c$ eingeschlossen ist (Fig. 115).

Auflösung. Jeder Schnitt senkrecht zur X-Axe schneidet aus der Fläche eine Ellipse mit der Gleichung

$$(2.) \quad \frac{y^2}{2px} + \frac{a^2 z^2}{2px} = 1$$

und mit den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{2px}, \quad b_1 = \frac{1}{a} \sqrt{2px}$$

aus. Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist bekanntlich

$$(3.) \quad F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{2px}{a} \pi,$$

folglich findet man für das Volumen des Körpers

$$(4.) \quad V = \int_0^c F(x) dx = \frac{2p\pi}{a} \int_0^c x dx = \frac{p\pi}{a} [x^2]_0^c = \frac{c^2 p \pi}{a}.$$

Aufgabe 2. Man soll das Volumen des dreiaxigen Ellipsoids

$$(5.) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

berechnen.

Auflösung. Auch hier ist jeder Schnitt, senkrecht zur X-Axe, eine Ellipse mit der Gleichung

$$(6.) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 y^2}{b^2(a^2 - x^2)} + \frac{a^2 z^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1$$

und mit den Halbachsen

$$(7.) \quad a_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad b_1 = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich ist der Flächeninhalt dieser Ellipse

$$(8.) \quad F(x) = a_1 b_1 \pi = \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) \pi.$$

Das Volumen des Ellipsoids wird daher

$$(9.) \quad V = \int_{-a}^{+a} F(x) dx = \frac{bc\pi}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx \\ = \frac{bc\pi}{a^2} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{bc\pi}{a^2} \left(\frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4abc\pi}{3}.$$

Aufgabe 3. Man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher von der Fläche 4^{ten} Grades

$$(10.) \quad a^2y^2 + x^2z^2 = b^2x^2$$

und den beiden Ebenen

$$(11.) \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a$$

eingeschlossen wird. Die durch Gleichung (10.) dargestellte Fläche heisst: „*Conocuneus* von *Wallis*“.

Auflösung. Die Schnitte, senkrecht zur X-Axe, sind wieder Ellipsen mit der Gleichung

$$(12.) \quad \frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und mit den Halbaxen

$$(13.) \quad a_1 = \frac{bx}{a}, \quad b_1 = b,$$

folglich wird der Flächeninhalt eines solchen Schnittes

$$(14.) \quad F(x) = a_1b_1\pi = \frac{b^2x\pi}{a}.$$

Das Volumen des oben beschriebenen Körpers wird daher

$$(15.) \quad V = \int_0^a F(x) dx = \frac{b^2\pi}{a} \int_0^a x dx = \frac{b^2\pi}{a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{ab^2\pi}{2}.$$

Gleichzeitig gewinnt man aus dieser Untersuchung Auskunft über die Gestalt der Fläche.

Aus Gleichung (10.) ergibt sich zunächst, dass die Coordinaten-Ebenen Symmetrie-Ebenen der Fläche sind, und aus Gleichung (12.) erkennt man, dass die Schnitte, senkrecht zur X-Axe, Ellipsen sind, welche alle dieselbe Halbaxe $b_1 = b$ haben,

während die andere Halbxaxe $a_1 = \frac{bx}{a}$ mit x proportional zunimmt. Die XY -Ebene (mit der Gleichung $z = 0$) schneidet die Fläche in zwei geraden Linien mit den Gleichungen

$$(16.) \quad ay = \pm bx,$$

und die ZX -Ebene (mit der Gleichung $y = 0$) schneidet die Fläche in der Doppelgeraden

$$(17.) \quad x = 0,$$

welche mit der Z -Axe zusammenfällt, und in den beiden Geraden

$$(18.) \quad z = +b, \quad z = -b.$$

§ 70.

Einführung mehrfacher Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 193.)

In den soeben behandelten Aufgaben war

$$V = \int F(x) dx,$$

wobei der Flächeninhalt der ebenen Figur $F(x)$ nach den Ausführungen in Abschnitt V selbst wieder durch Integration ermittelt wird, und zwar war in allen drei Aufgaben

$$(1.) \quad F(x) = a_1 b_1 \pi$$

der Flächeninhalt einer Ellipse

$$(2.) \quad b_1^2 y^2 + a_1^2 z^2 = a_1^2 b_1^2, \quad \text{oder} \quad z = \pm \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - y^2}.$$

Nach Formel Nr. 128 der Tabelle findet man daher $F(x)$ aus der Gleichung

$$(3.) \quad F(x) = \int_{-a_1}^{+a_1} (z' - z'') dy = \frac{2b_1}{a_1} \int_{-a_1}^{+a_1} dy \sqrt{a_1^2 - y^2} \\ = \frac{2b_1}{a_1} \left[\frac{y}{2} \sqrt{a_1^2 - y^2} + \frac{a_1^2}{2} \arcsin \left(\frac{y}{a_1} \right) \right]_{-a_1}^{+a_1} = a_1 b_1 \pi.$$

Dabei war in den Aufgaben 1, 2 und 3 bezw.

$$(4.) \quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{2px}, & b_1 = \frac{1}{a} \sqrt{2px}; \\ a_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, & b_1 = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \\ a_1 = \frac{bx}{a}, & b_1 = b_1. \end{cases}$$

Daraus erkennt man auch, dass in der Gleichung (3.) die Integrationsgrenzen $-a_1^w$ und $+a_1$ noch Functionen von x sind.

In ähnlicher Weise wird auch die Aufgabe, das Volumen eines Körpers zu berechnen, ganz *allgemein* zu behandeln sein. Den Schnitt, welcher senkrecht auf der X-Axe steht, und dessen Flächeninhalt mit $F(x)$ bezeichnet worden ist, erhält man, indem man in den Gleichungen der den Körper oben und unten begrenzenden Flächen

$$(5.) \quad z' = g(x, y) \quad \text{und} \quad z'' = h(x, y)$$

die Grösse x als *Constante* betrachtet. Setzt man

$$(6.) \quad z' - z'' = g(x, y) - h(x, y) = f(x, y),$$

so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

$$(7.) \quad F(x) = \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'') dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy,$$

wobei im Allgemeinen, je nach den Bedingungen der Aufgabe,

$$(8.) \quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x)$$

noch Functionen von x sein werden. Da nun nach Formel Nr. 192 der Tabelle das Volumen des Körpers

$$(9.) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$(10.) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'') dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx.$$

Besondere Aufmerksamkeit ist dabei auf die richtige Bestimmung der Grenzen $y_1 = \varphi(x)$ und $y_2 = \psi(x)$ zu verwenden.

Den Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (10.) nennt man „ein Doppelintegral“.

Am besten wird man das angedeutete Verfahren durch die Behandlung einiger Aufgaben verstehen.

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$(11.) \quad p(z - z_0) = xy$$

stellt ein *gleichseitiges hyperpolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben von dieser Fläche, unten von der XY -Ebene, vorn und rückwärts von den Ebenen $y = c$ und $y = d$, links und rechts von den Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Dabei ist z_0 so gross gewählt, dass das durch die angegebenen Grenzen eingeschlossene Stück der Fläche oberhalb der XY -Ebene liegt.

Auflösung. In diesem Falle ist

$$(12.) \quad z' = z_0 + \frac{xy}{p}, \quad z'' = 0;$$

die Grenzen der Integrations-Veränderlichen y sind constant, denn es ist

$$(13.) \quad y_1 = c, \quad y_2 = d.$$

Man erhält daher

$$(14.) \quad \begin{aligned} V &= \int_a^b dx \int_c^d (z' - z'') dy = \frac{1}{p} \int_a^b dx \int_c^d (pz_0 + xy) dy \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b dx \left[pz_0 y + \frac{xy^2}{2} \right]_c^d \\ &= \frac{1}{2p} \int_a^b dx [2pz_0(d - c) + (d^2 - c^2)x] \\ &= \frac{d - c}{2p} \left[2pz_0 x + (d + c) \frac{x^2}{2} \right]_a^b, \end{aligned}$$

also

$$(15.) \quad V = \frac{(h-a)(d-c)}{4p} [4pz_0 + (a+b)(c+d)].$$

Aufgabe 2. Die Gleichung

$$(16.) \quad 2p(z - z_0) = y^2 - m^2x^2$$

stellt ein *hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll das Volumen des Körpers berechnen, welcher oben durch diese Fläche, unten durch die XY -Ebene und seitlich durch den *Cylinder*

$$(17.) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird. Dabei sei z_0 wieder so gross gewählt, dass das von dem Cylinder eingeschlossene Stück des Paraboloids oberhalb der XY -Ebene liegt.

Auflösung. Eine Ebene, welche man durch den Punkt Q der X -Axe parallel zur YZ -Ebene legt, schneidet aus dem Körper eine Figur $F(x)$ aus, welche oben durch die Parabel

$$(18.) \quad z' = \frac{1}{2p} (2pz_0 + y^2 - m^2x^2),$$

unten durch die Gerade

$$(19.) \quad z'' = 0$$

und seitlich durch zwei Gerade W_1P_1 und W_2P_2 begrenzt wird, in denen der Cylinder von dieser Ebene geschnitten wird (Fig. 116). Dies giebt

$$(20.) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (2pz_0 + y^2 - m^2x^2) dy$$

$$= \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[2pz_0 y + \frac{y^3}{3} - m^2x^2 y \right]_{y_1}^{y_2}.$$

In diesem Falle sind aber y_1 und y_2 Functionen von x , denn der Schnitt, welchen man durch den Punkt Q der X -Axe parallel zur YZ -Ebene legt, schneidet den begrenzenden Cylinder

Fig. 116.

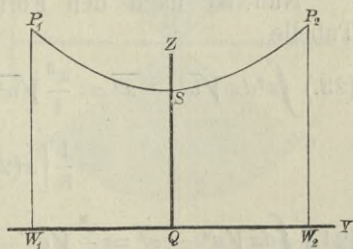
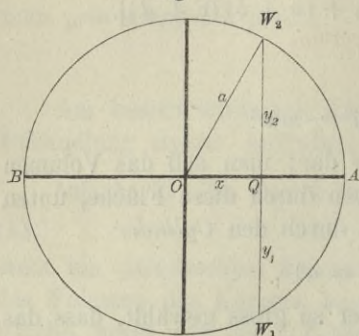


Fig. 117.



in zwei Geraden, welche auf der XY -Ebene in den Punkten W_1 und W_2 senkrecht stehen (Fig. 117). Deshalb wird

$$(21.) \quad \begin{cases} y_2 = +\sqrt{a^2 - x^2}, \\ y_1 = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

und

$$(22.) \quad V = \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} 2dx \sqrt{a^2 - x^2} [2pz_0 - m^2x^2 + \frac{1}{3}(a^2 - x^2)] \\ = \frac{6pz_0 + a^2}{3p} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{3m^2 + 1}{3p} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nun ist nach den Formeln Nr. 117¹, 115 und 118 der Tabelle

$$(23.) \quad \int x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^3}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ = \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right],$$

$$(24.) \quad \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dabei muss der Punkt Q den ganzen Kreisdurchmesser BA durchlaufen, d. h. x_1 ist gleich $-a$ und x_2 gleich $+a$. Dies giebt

$$(23 \text{ a.}) \quad \int_{-a}^{+a} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^4}{4} \arcsin 1 = \frac{a^4 \pi}{8},$$

$$(24 \text{ a.}) \quad \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \arcsin 1 = \frac{a^2 \pi}{2},$$

also

$$(25.) \quad V = \frac{(6pz_0 + a^2)a^2\pi}{6p} - \frac{(3m^2 + 1)a^4\pi}{24p}$$

$$= \frac{a^2\pi}{8p} [8pz_0 + (1 - m^2)a^2].$$

Aufgabe 3. Die Gleichung

$$(26.) \quad 2pz = y^2 - m^2x^2$$

stellt wieder ein *hyperbolisches Paraboloid* dar, welches die *XY*-Ebene in den beiden Geraden *AC* und *BD* mit den Gleichungen

$$(27.) \quad y = +mx \quad \text{und} \quad y = -mx$$

schneidet (Fig. 118); man soll das Volumen des Körpers berechnen, der oben von der Fläche, unten von der *XY*-Ebene und seitlich von dem Cylinder

$$(28.) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

begrenzt wird.

Auflösung. Wenn die Constante *p* positiv ist, so liegt nur derjenige Theil der Fläche über der *XY*-Ebene, für welchen $y^2 > m^2x^2$ ist; das Körperstück, welches berechnet werden soll, liegt also ausschliesslich über dem schraffirten Theile der Figur.

Da die *XZ*-Ebene und die *YZ*-Ebene Symmetrie-Ebenen sind, so genügt es, das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher über dem Kreissector *COE* liegt, wenn man das gefundene Resultat noch mit 4 multiplicirt. Es wird also

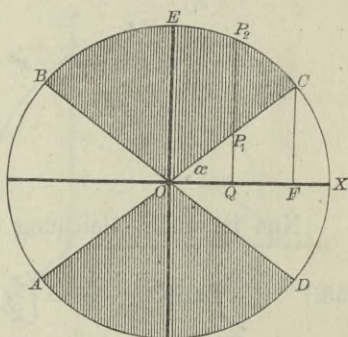
$$(29.) \quad V = 4 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy = \frac{2}{p} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (y^2 - m^2x^2) dy,$$

wobei

$$(30.) \quad y_1 = QP_1 = mx, \quad y_2 = QP_2 = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$(31.) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = OF = a \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Fig. 118.



ist, wenn man den Winkel XOC mit α bezeichnet. Es ist nämlich x_2 die Abscisse des Punktes C , für den die beiden Gleichungen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y = mx$$

gemeinschaftlich gelten, für den also

$$a^2 - x^2 = m^2 x^2, \quad \text{oder} \quad x^2(1 + m^2) = a^2$$

wird. Deshalb findet man aus Gleichung (29.)

$$\begin{aligned} (32.) \quad V &= \frac{2}{p} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{y^3}{3} - m^2 x^2 y \right]_{mx} \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= \frac{2}{3p} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\sqrt{a^2 - x^2} (a^2 - x^2 - 3m^2 x^2) + 2m^3 x^3 \right] \\ &= \frac{2}{3p} \left[a^2 \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{a^2 - x^2} - (1 + 3m^2) \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} \right. \\ &\quad \left. + 2m^3 \int_{x_1}^{x_2} x^3 dx \right]. \end{aligned}$$

Nun ist nach Gleichung (24.) und (31.)

$$\begin{aligned} (33.) \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{a^2 - x^2} &= \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^{a \cos \alpha} \\ &= \frac{a^2}{2} [\sin \alpha \cos \alpha + \arcsin(\cos \alpha)] \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{m}{1 + m^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right]; \end{aligned}$$

nach Gleichung (23.) ist ferner

$$\begin{aligned} (34.) \quad \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \sqrt{a^2 - x^2} &= \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + a^4 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^{a \cos \alpha} \\ &= \frac{a^4}{8} [\sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) + \arcsin(\cos \alpha)] \\ &= \frac{a^4}{8} \left[\frac{m(1 - m^2)}{(1 + m^2)^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right]; \end{aligned}$$

und endlich ist

$$(35.) \quad \int_{x_1}^{x_2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{a \cos \alpha} = \frac{a^4}{4} \cos^4 \alpha = \frac{a^4}{4(1+m^2)^2},$$

folglich wird nach Gleichung (32.)

$$V = \frac{2a^4}{3p} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{1+m^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{1+3m^2}{8} \left(\frac{m(1-m^2)}{(1+m^2)^2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{m^3}{2(1+m^2)^2} \right],$$

oder

$$(36.) \quad V = \frac{a^4}{8p} [2m + (1-m^2)(\pi - 2\alpha)].$$

Aufgabe 4. Aus einer Kugel mit der Gleichung

$$(37.) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

bohren die beiden Kreis-
cylinder mit den Gleichungen

$$(38.) \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

und

$$x^2 + y^2 + ax = 0$$

Oeffnungen heraus; wie gross ist das Volumen des übrig gebliebenen Theiles der Kugel (Fig. 119 und 120.)

Auflösung. Die XY -Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem Halbmesser a und die beiden Kreis-
cylinder in Kreisen mit den Halbmessern $\frac{a}{2}$ (Fig. 119 und 120). Legt man durch den Punkt Q der X -Axe einen Schnitt senkrecht zur X -Axe, so schneidet derselbe aus der Kugel einen Kreis mit dem Halbmesser

$$(39.) \quad QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und aus dem einen Cylinder die beiden Geraden $P_1'P_1$ und $P_2'P_2$, (Fig. 121) deren Abstand

Fig. 119.

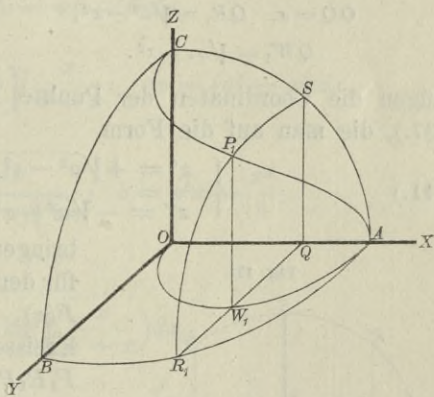
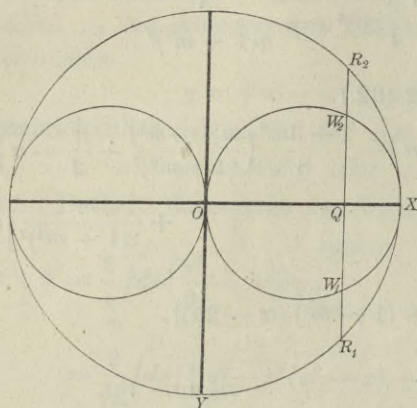


Fig. 120.



$$OQ = x, \quad QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \\ QW_1 = \sqrt{ax - x^2}.$$

$$QW_1 = \sqrt{ax - x^2}$$

vom Mittelpunkt Q des Kreises sich aus der Gleichung

$$(40.) \quad x^2 + y^2 - ax = 0, \\ \text{oder}$$

(40a.) $y = \sqrt{ax - x^2}$ ergibt. Der Durchschnitt des Cylinders über OW_1A mit der Kugelfläche ist in Figur 119 durch die Curve CP_1A dargestellt. Da der Kreis um Q auf der Kugelfläche liegt, so ge-

nügen die Coordinaten der Punkte P_1 und P_1' der Gleichung (37.), die man auf die Form

$$(41.) \quad \begin{cases} z' = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ z'' = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

bringen kann. Man erhält daher für den Flächeninhalt des Schnittes $F(x)$, welcher aus den beiden Kreissegmenten $P_2R_2P_2'$ und $P_1R_1P_1'$ besteht,

$$(42.) \quad F(x) = 2 \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'') dy \\ = 4 \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy,$$

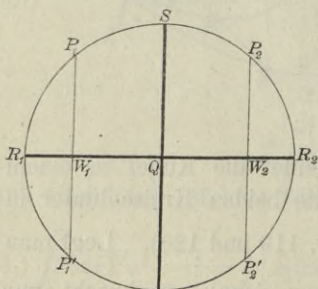
wobei

(43.) $y_1 = QW_1 = \sqrt{ax - x^2}$, $y_2 = QR_1 = \sqrt{a^2 - x^2} = c$ ist. Nun wird nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$(44.) \quad \int dy \sqrt{c^2 - y^2} = \frac{y}{2} \sqrt{c^2 - y^2} + \frac{c^2}{2} \arcsin\left(\frac{y}{c}\right),$$

folglich ist, wenn man $c^2 = a^2 - x^2$ setzt,

Fig. 121.



$$(45.) \quad F(x) = 4 \left[\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{a^2 - x^2}{2} \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \right]_{y_1}^{y_2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (43.)

$$F(x) = 2(a^2 - x^2) \left(\arcsin 1 - \arcsin \sqrt{\frac{ax - x^2}{a^2 - x^2}} \right) \\ - 2 \sqrt{ax - x^2} \sqrt{a^2 - ax},$$

also

$$(46.) \quad F(x) = 2(a^2 - x^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) - 2(a-x) \sqrt{ax}.$$

Setzt man in Formel Nr. 97 der Tabelle, nämlich in

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

$$(47.) \quad u = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}, \quad dv = (a^2 - x^2) dx,$$

also

$$(48.) \quad du = - \frac{a dx}{2(a+x) \sqrt{ax}}, \quad v = a^2 x - \frac{x^3}{3},$$

so wird

$$(49.) \quad \int_0^a (a^2 - x^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) dx \\ = \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^a + \frac{1}{6} \int_0^a \frac{a(3a^2 x - x^3)}{(a+x) \sqrt{ax}} dx \\ = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \frac{2a^3}{3} + \frac{1}{6} \int_0^a \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{ax}}{a+x} dx.$$

Setzt man noch

$$(50.) \quad x = at^2, \quad \text{also} \quad dx = 2at dt, \quad \sqrt{ax} = at,$$

so wird

$$\begin{aligned}
 (51.) \quad \int_0^a \frac{(3a^2 - x^2)\sqrt{ax}}{a+x} dx &= \int_0^1 \frac{a^2(3-t^4)at}{a(1+t^2)} \cdot 2at dt = 2a^3 \int_0^1 \frac{-t^6 + 3t^2}{t^2 + 1} dt \\
 &= 2a^3 \int_0^1 \left(-t^4 + t^2 + 2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\
 &= 2a^3 \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + 2t - 2 \operatorname{arctg} t \right]_0^1 = 2a^3 \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right),
 \end{aligned}$$

also, da $\arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist,

$$\begin{aligned}
 (52.) \quad \int_0^a (a^2 - x^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) dx \\
 = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{a^3}{3} \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{32a^3}{45}.
 \end{aligned}$$

Ausserdem ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (50.)

$$\begin{aligned}
 (53.) \quad \int_0^a (a-x)\sqrt{ax} \cdot dx &= a^3 \int_0^1 (1-t^2)t \cdot 2t dt = 2a^3 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt \\
 &= 2a^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 2a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4a^3}{15}.
 \end{aligned}$$

Deshalb wird

$$\begin{aligned}
 (54.) \quad V &= 2 \int_0^a F(x) dx \\
 &= 4 \int_0^a (a^2 - x^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) dx - 4 \int_0^a (a-x)\sqrt{ax} dx \\
 &= \frac{128a^3}{45} - \frac{16a^3}{15} = \frac{16a^3}{9}.
 \end{aligned}$$

Man hätte auch das Volumen V_1 der beiden Cylinder berechnen können, soweit sie in der Kugel liegen. Zieht man

dann das gefundene Resultat von dem Volumen der ganzen Kugel, nämlich von $\frac{4a^3\pi}{3}$, ab, so ist die Aufgabe gelöst. Nach Figur 119, 120 und 121 wird bei dieser Behandlung

$$(55.) \quad F_1(x) = 4 \int_0^{y_1} dy \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei wieder

$$(56.) \quad y_1 = QW_1 = \sqrt{ax - x^2}$$

ist. Dies giebt nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$(57.) \quad F_1(x) = 2 \left[y \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + (a^2 - x^2) \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \right]_0^{y_1}$$

$$= 2(a - x) \sqrt{ax} + 2(a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}},$$

folglich findet man

$$(58.) \quad V_1 = 2 \int_0^a F_1(x) dx = 4 \int_0^a (a - x) \sqrt{ax} \cdot dx$$

$$+ 4 \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}} dx.$$

Nach Gleichung (53.) ist

$$(59.) \quad \int_0^a (a - x) \sqrt{ax} \cdot dx = \frac{4a^3}{15}.$$

Setzt man hier

$$u = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}}, \quad dv = (a^2 - x^2) dx,$$

also

$$du = \frac{adx}{2(a + x)\sqrt{ax}}, \quad v = a^2x - \frac{x^3}{3},$$

so ergibt sich durch partielle Integration

$$(60.) \quad \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}} dx = \left[\left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}} \right]_0^a$$

$$- \frac{1}{6} \int_0^a \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{ax}}{a + x} dx.$$

Nun ist nach Gleichung (51.)

$$\int_0^a \frac{(3a^2 - x^2)\sqrt{ax}}{a+x} dx = 2a^3 \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right),$$

folglich wird

$$(61.) \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{a^3}{3} \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) \\ = \frac{a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{45},$$

also

$$(62.) V_1 = \frac{16a^3}{15} + \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{128a^3}{45} = \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{16a^3}{9}.$$

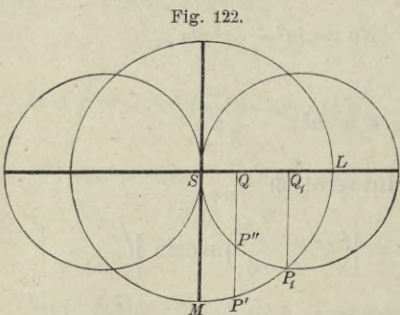
Deshalb findet man wieder

$$(63.) V = \frac{4a^3\pi}{3} - V_1 = \frac{16a^3}{9}.$$

Mit demselben Rechte, mit welchem man bisher die Schnitte senkrecht zur X -Axe legte, darf man natürlich auch zunächst Schnitte senkrecht zur Y -Axe oder senkrecht zur Z -Axe legen. Wenn man z. B. in der letzten Aufgabe den Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, durch Schnitte, senkrecht zur Z -Axe, in Schichten zerlegt, so stellt Figur 122 einen solchen Schnitt dar, wobei $OS = z$ der Abstand dieses Schnittes von der XY -Ebene ist. Die Kugel wird in einem Kreise mit dem Halbmesser

$$(64.) SL = \sqrt{a^2 - z^2},$$

und die beiden Cylinder werden in Kreisen mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ geschnitten. Da die Axen SL und SM die Figur in 4 symmetrische Theile zerlegen,



so ist der Flächeninhalt dieses Schnittes

$$(65.) \quad F(z) = 4 SP_1 M = 4 \int_0^{x_1} (y' - y'') dx,$$

wobei P' ein Punkt der Kugel und P'' ein Punkt des Cylinders ist, so dass

$$(66.) \quad y' = \sqrt{a^2 - z^2 - x^2}, \quad y'' = \sqrt{ax - x^2}$$

wird, folglich erhält man

$$(67.) \quad F(z) = 4 \int_0^{x_1} (\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} - \sqrt{ax - x^2}) dx.$$

Im Punkte P_1 werden y' und y'' einander gleich; man findet daher den Werth von x_1 , indem man

$$(68.) \quad y' = y'', \quad \text{oder} \quad a^2 - z^2 - x^2 = ax - x^2$$

setzt; dies giebt

$$(69.) \quad x_1 = \frac{a^2 - z^2}{a}.$$

Nun wird nach Formel Nr. 118 der Tabelle

$$(70.) \quad \int_0^{x_1} \sqrt{a^2 - z^2 - x^2} \cdot dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - z^2 - x^2} + \frac{a^2 - z^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right) \right]_0^{x_1},$$

oder, wenn man

$$(71.) \quad z = a \cos \varphi,$$

also

$$(72.) \quad a^2 - z^2 = a^2 \sin^2 \varphi, \quad x_1 = \frac{a^2 - z^2}{a} = a \sin^2 \varphi$$

setzt,

$$(73.) \quad \int_0^{x_1} \sqrt{a^2 - z^2 - x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2} + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a \sin \varphi} \right) \right]_0^{a \sin^2 \varphi} \\ = \frac{a^2}{2} \sin^2 \varphi (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi).$$

Ferner ist, wenn man

$$(74.) \quad x = a \sin^2 t,$$

also

(75.) $a - x = a \cos^2 t$, $\sqrt{ax - x^2} = a \sin t \cos t$, $dx = 2a \sin t \cos t dt$ setzt,

$$(76.) \int_0^{x_1} dx \sqrt{ax - x^2} = 2a^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 t \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\varphi} (\cos^2 t - \cos^4 t) dt$$

$$= 2a^2 \left[-\frac{1}{4} \cos^3 t \sin t + \frac{1}{8} \cos t \sin t + \frac{1}{8} t \right]_0^{\varphi}$$

$$= \frac{a^2}{4} [\sin \varphi \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \varphi].$$

Aus den Gleichungen (67.), (73.) und (76.) folgt daher

$$(77.) F(z) = 4 \int_0^{x_1} dx \sqrt{a^2 - z^2 - x^2} - 4 \int_0^{x_1} dx \sqrt{ax - x^2}$$

$$= 2a^2 \sin^2 \varphi (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) - a^2 [\sin \varphi \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \varphi]$$

$$= a^2 [\sin \varphi \cos \varphi + \varphi (2 \sin^2 \varphi - 1)].$$

Dies giebt nach Gleichung (71.)

$$(78.) V = 2 \int_0^a F(z) dz = 2a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin^2 \varphi \cos \varphi - 2\varphi \sin^3 \varphi + \varphi \sin \varphi) d\varphi$$

$$= 2a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi (\sin \varphi - 2 \sin^3 \varphi) d\varphi \right].$$

Dabei ist

$$(79.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} [\sin^3 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3};$$

sodann findet man durch partielle Integration

$$\int \varphi (\sin \varphi - 2 \sin^3 \varphi) d\varphi = \int \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi d\varphi$$

$$= \varphi \left(\cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right) - \int \left(\cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right) d\varphi$$

$$= \varphi \left(\cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right) - \int \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sin^2 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi$$

$$= \varphi \left(\cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right) - \frac{1}{3} \sin \varphi - \frac{2}{9} \sin^3 \varphi,$$

also

$$(80.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi (\sin \varphi - 2 \sin^3 \varphi) d\varphi = -\frac{5}{9}.$$

Deshalb wird nach den Gleichungen (78.) und (79.) wieder

$$(81.) \quad V = 2a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \right) = \frac{16a^3}{9}.$$

§ 71.

Theorie der mehrfachen Integrale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 194.)

Wie aus dem vorhergehenden Paragraphen zu ersehen ist, wird man durch die Kubatur der Körper auf *Doppelintegrale* geführt, und zwar in folgender Weise. Es war

$$(1.) \quad F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

wobei

$$(2.) \quad f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

und

$$(3.) \quad z' = g(x, y), \quad z'' = h(x, y)$$

die Gleichungen der beiden, den Körper oben und unten begrenzenden Flächen sind. Bei dem in Gleichung (1.) aufgestellten Integrale ist y die *Integrations-Veränderliche*, während x als *Constante* betrachtet werden muss. Deshalb dürfen auch die Grenzen

$$(4.) \quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x)$$

dieses Integrals noch Functionen von x sein, wobei die Gleichungen (4.) auf der XY -Ebene senkrecht stehende Cylinder darstellen, welche den Körper vorn und rückwärts begrenzen. Das Volumen des Körpers wird dann

$$(5.) \quad V = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Dabei kann der Fall eintreten, dass der Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, allseitig von krummen Flächen begrenzt wird, die weder Cylinderflächen noch Ebenen sind. Man denke z. B. an das Volumen des dreiaxigen Ellipsoids. Die vorstehende Untersuchung bleibt aber auch dann noch richtig; es schrumpfen aber die Cylinder

$$y_1 = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y_2 = \psi(x)$$

zu Curven und die begrenzenden ebenen Figuren in den Ebenen

$$x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

zu Punkten zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt gleichzeitig, dass auch umgekehrt ein solches Doppelintegral stets als das Volumen eines Körpers betrachtet werden kann, der oben von der Fläche

$$(6.) \quad z = f(x, y),$$

unten von der XY -Ebene, vorn und rückwärts durch die Cylinder

$$(7.) \quad y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

links und rechts von den Ebenen

$$(8.) \quad x_1 = a, \quad x_2 = b$$

begrenzt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus Figur 123; dabei entspricht der Gleichung (6.) die Fläche $CDFE$, den Gleichungen (7.) entsprechen die Cylinder CC_1E_1E und DD_1F_1F , und den Gleichungen (8.) entsprechen die Ebenen CC_1D_1D und EE_1F_1F .

Für einen constanten Werth von x , z. B. für $x = OR$ erhält

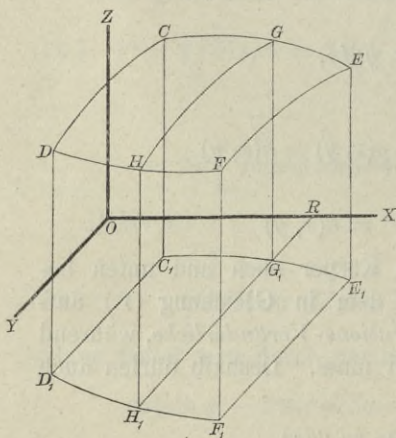
man eine Ebene, senkrecht zur X -Axe, welche aus dem Körper die ebene Figur

$$(9.) \quad GG_1H_1H = F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

ausschneidet.

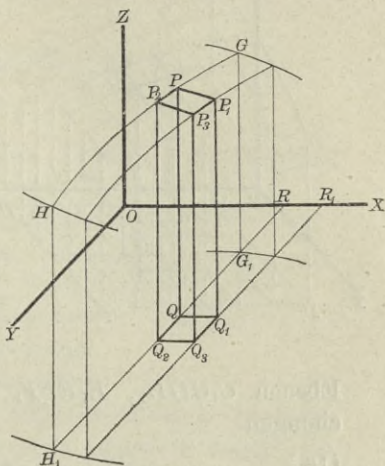
Aus dieser geometrischen Deutung des Doppelintegrals folgt auch, dass es als eine Summe von *zweifach* unendlich vielen,

Fig. 123.



unendlich kleinen Grössen aufgefasst werden kann. Der betrachtete Körper wird nämlich durch die Schnitte, senkrecht zur X -Axe, in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt, und jede solche Schicht wird wieder durch Schnitte, senkrecht zur Y -Axe, in unendlich viele, unendlich dünne Säulchen (Fig. 124) zerlegt, deren Höhe

Fig. 124.



(10.) $QP = z = f(x, y)$,
und deren Grundfläche ein unendlich kleines Rechteck $QQ_1Q_3Q_2$ mit den Seiten dx, dy und dem Flächeninhalte $dx dy$ ist.

Da bei der Integration in Bezug auf y die Grössen x und dx constant bleiben, so kann man natürlich die Gleichung (5.) auch in der Form

$$(11.) \quad V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy$$

schreiben, wobei

$$(12.) \quad \int f(x, y) dx dy = z dx dy$$

das Volumen eines solchen unendlich dünnen Säulchens $QQ_1Q_3Q_2 PP_1P_3P_2$ ist.

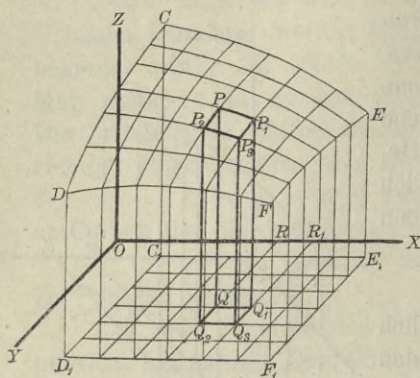
Auch die Ordnung der Integration darf man ändern, denn man kann die unendlich dünnen Säulchen, welche zu demselben Werthe von y gehören, durch Summation zu einer unendlich dünnen Schicht vereinigen, welche zur XZ -Ebene parallel ist, und dann durch Summation aller dieser Schichten den ganzen Körper erhalten. Zu beachten ist aber, dass hierbei im Allgemeinen auch eine *Änderung der Integrationsgrenzen* stattfindet.

Nur in dem Falle, wo die Integrationsgrenzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x unabhängig sind, werden die Cylinder

$$(13.) \quad y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

in Ebenen

Fig. 125.



(14.) $y = c$ und $y = d$
 übergehen (Fig. 125). Dann
 folgt aus der geometrischen
 Deutung des Doppelintegrals
 ohne Weiteres

$$(15.) \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

denn in diesem Falle ist der
 Körper begrenzt von der krum-
 men Fläche $z = f(x, y)$, von
 der XY -Ebene und den 4

Ebenen C_1CDD_1 , E_1EFF_1 , C_1CEE_1 , D_1DFF_1 mit den Gleichungen

$$(16.) \quad x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d.$$

Dies giebt den Satz:

Sind die Grenzen eines Doppelintegrals in Bezug auf x und y constante Grössen, so wird der Werth des Doppelintegrals nicht geändert, wenn man die Ordnung der Integration in Bezug auf die beiden Veränderlichen x und y umkehrt und die Integrationsgrenzen unverändert lässt.

Jetzt ergibt sich von selbst, was man unter einem *dreifachen Integrale*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{h(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z) dz$$

zu verstehen hat. In ähnlicher Weise kann man auch ein *n -faches Integral* erklären und als eine Summe von n -fach unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen deuten.

Es ist möglich, das Volumen eines Körpers auch als ein dreifaches Integral darzustellen, denn es ist

$$z' - z'' = \int_{z''}^{z'} \frac{g(x, y)}{h(x, y)} dz,$$

also

$$(17.) \quad V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{h(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y) dz = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy dz.$$

Hierbei ist $dx dy dz$ ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipeton (Fig. 126), welches das *Volumenelement* genannt wird. Die angegebenen Integrationsgrenzen deuten darauf hin, dass man zuerst in Bezug auf z , dann in Bezug auf y und zuletzt in Bezug auf x integrieren soll. Man darf aber auch die Reihenfolge der Integration ändern, nur muss man dabei beachten, dass sich dann im Allgemeinen auch die Integrationsgrenzen ändern. Wenn man z. B. zuerst in Bezug auf x integriert, so sind die Grenzen x_1 und x_2 im Allgemeinen noch Functionen von y und z , welche durch die Gleichungen der begrenzenden Flächen bestimmt sind.

Fig. 126.



§ 72.

Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 195—197.)

Wie man bei den einfachen Integralen durch Substitution eine neue Integrations-Veränderliche zur leichteren Ermittlung des gesuchten Integrals einführt, so kann man auch bei den n -fachen Integralen durch Substitution n neue Veränderliche einführen und dadurch möglicher Weise die Berechnung des mehrfachen Integrals wesentlich erleichtern. Bei einem Doppelintegrale

$$(1.) \quad V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy$$

setze man z. B.

$$(2.) \quad x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

ZARZĄD SZKOŁY GÓRNICZEJ
Ląbrowa (Ü. austr.)

und mache u und v zu *Integrations-Veränderlichen*. Während aber bei der Darstellung von V durch Gleichung (1.) constante Werthe von x Schnitte, senkrecht zur X -Axe, lieferten, erhält man für $u = c$ aus den Gleichungen (2.) die Gleichungen

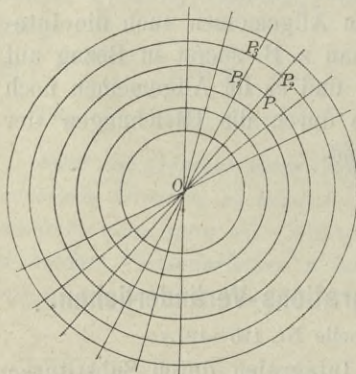
$$(3.) \quad x = f_1(c, v), \quad y = f_2(c, v),$$

welche für jeden Werth von c einer Curve in der XY -Ebene oder einer Cylinderfläche im Raume entsprechen. Ebenso erhält man für constante Werthe von v aus den Gleichungen (2.) wieder Cylinderflächen, welche auf der XY -Ebene senkrecht stehen. Setzt man z. B.

$$(4.) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

indem man die beiden neuen Integrations-Veränderlichen mit r und φ bezeichnet, so erhält man für constante Werthe von r

Fig. 127.



concentrische Kreise (Fig. 127), bzw. coaxiale Kreiscylinder, und für constante Werthe von φ gerade Linien durch den Nullpunkt, bzw. Ebenen durch die Z -Axe.

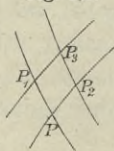
So lange x und y die Integrations-Veränderlichen waren, musste man sich den Körper in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen zerlegt denken, deren Höhe $z = f(x, y)$, und deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten dx, dy und dem Flächeninhalte $dx dy$ ist. Jetzt wird der

Körper auch in zweifach unendlich viele, unendlich dünne Säulchen mit der Höhe

$$(5.) \quad z = f(x, y) = f[f_1(u, v), f_2(u, v)]$$

zerlegt, aber die Grundflächen $PP_1P_3P_2$ (Fig. 128) sind nicht mehr Rechtecke mit dem Flächeninhalte $dx dy$, sondern kleine Vierecke mit den Ecken P, P_1, P_3, P_2 . Die Coordinaten dieser Punkte entsprechen nach den vorhergehenden Ausführungen bzw. den Werthen $(u, v), (u + du, v), (u + du, v + dv), (u, v + dv)$, d. h. es wird

Fig. 128.



$$(6.) \quad x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial u} du,$$

$$(7.) \quad x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$(8.) \quad x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad y_3 = y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Vierecks $PP_1P_3P_2$, da man die Seiten als gerade Linien betrachten kann,

$$(9.) \quad G = \frac{1}{2}[x(y_1 - y_2) + x_1(y_3 - y) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y - y_3)] \\ = \frac{1}{2}[(x_3 - x)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y)],$$

oder

$$(9a.) \quad 2G = \begin{vmatrix} x_3 - x, & x_2 - x_1 \\ y_3 - y, & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.) bis (8.)

$$2G = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, & \frac{\partial x}{\partial v} dv - \frac{\partial x}{\partial u} du \\ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, & \frac{\partial y}{\partial v} dv - \frac{\partial y}{\partial u} du \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Elemente der zweiten Colonne von denen der ersten Colonne subtrahirt,

$$(10.) \quad 2G = 2du \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} dv - \frac{\partial x}{\partial u} du \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} dv - \frac{\partial y}{\partial u} du \end{vmatrix} = 2dudv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

also

$$(10a.) \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv^*).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit v , so ändert sich das Vorzeichen von G . Da nun bei dieser Darstellung die Veränderlichen u und v gleich berechtigt sind, so ist

*) Die Rechnung ist auch sehr leicht ohne Anwendung der Determinanten auszuführen, indem man in Gleichung (9.) die Werthe von $x_3 - x$, $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$, $y_3 - y$ einsetzt.

$$(10\text{ b.}) \quad G = \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv,$$

und zwar ist das Vorzeichen immer so zu wählen, dass G positiv wird. Auch müssen die Grenzen von

u und v

so gewählt werden, dass der Ausdruck $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$ innerhalb dieser Grenzen das Vorzeichen nicht wechselt.

Deshalb ist das Volumen eines solchen Säulchens

$$(11.) \quad \pm f(x, y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv,$$

und das Volumen des ganzen Körpers

$$(12.) \quad V = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv,$$

wobei man für x und y noch die in Gleichung (2.) angegebenen Werthe einsetzen und die Integrationsgrenzen passend bestimmen muss.

Den Ausdruck

$$(13.) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nennt man „die *Functionaldeterminante*“.

Aus den Gleichungen (1.) und (12.) folgt ganz allgemein für die Doppelintegrale die Formel

$$(14.) \quad \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv.$$

Für den Fall, dass man durch die Gleichungen

$$(15.) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

ebene Polarcoordinaten einführt, wird z. B.

$$(16.) \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi,$$

$$(17.) \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = + r \cos \varphi;$$

die Functionaldeterminante ist daher

$$(18.) \quad \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

folglich geht, da r immer positiv ist, Gleichung (14.) über in

$$(19.) \quad \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\varphi dr.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass man zuerst in Bezug auf r und dann in Bezug auf φ integriert; man kann aber auch zuerst in Bezug auf φ und dann in Bezug auf r integrieren, nur muss man dann die Grenzen anders bestimmen.

Das in Gleichung (19.) enthaltene Resultat findet man noch leichter, wenn man beachtet, dass die Grundflächen $PP_1P_3P_2$ in diesem Falle kleine Rechtecke mit den Seiten $rd\varphi$ und dr sind (Fig. 127).

Wie nützlich die Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen mitunter bei der Ermittlung von Doppelintegralen ist, kann man z. B. aus den in § 70 behandelten Aufgaben ersehen. So war in Aufgabe 2

$$(20.) \quad V = \frac{1}{2p} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (2pz_0 + y^2 - m^2x^2) dx dy.$$

Führt man in diesem Falle für die rechtwinkligen Coordinaten x und y ebene Polarcoordinaten durch die Gleichungen (15.) ein, so erhält man nach Gleichung (19.)

$$(21.) \quad \begin{aligned} V &= \frac{1}{2p} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a [2pz_0 + r^2(\sin^2 \varphi - m^2 \cos^2 \varphi)] r dr \\ &= \frac{1}{2p} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[pz_0 r^2 + \frac{r^4}{4} (\sin^2 \varphi - m^2 \cos^2 \varphi) \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{8p} \int_0^{2\pi} d\varphi [4pz_0 + a^2(\sin^2 \varphi - m^2 \cos^2 \varphi)]. \end{aligned}$$

und dies giebt nach Formel Nr. 98 und 99 der Tabelle in Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Resultate

$$(22.) \quad V = \frac{a^2}{8p} \left[4pz_0\varphi - \frac{1+m^2}{2} a^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1-m^2}{2} a^2\varphi \right]_0^{2\pi} \\ = \frac{a^2\pi}{8p} [8pz_0 + (1-m^2)a^2].$$

In Aufgabe 3 (vergl. Fig. 118) sollte

$$(23.) \quad V = \frac{2}{p} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (y^2 - m^2x^2) dx dy$$

berechnet werden, wobei

$m = \operatorname{tg} \alpha$, $y_1 = mx$, $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = a \cos \alpha$ war. Durch Einführung von Polarcoordinaten wird nach Gleichung (19.)

$$(24.) \quad V = \frac{2}{p} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 (\sin^2\varphi - m^2 \cos^2\varphi) r dr \\ = \frac{a^4}{2p} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi - m^2 \cos^2\varphi) d\varphi,$$

also nach Formel Nr. 98 und 99 der Tabelle

$$(25.) \quad V = \frac{a^4}{4p} \left[-(1+m^2) \sin\varphi \cos\varphi + (1-m^2)\varphi \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{a^4}{4p} \left[(1-m^2) \frac{\pi}{2} + (1+m^2) \sin\alpha \cos\alpha - (1-m^2)\alpha \right]$$

oder, da $1+m^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ist,

$$(26.) \quad V = \frac{a^4}{8p} [2m + (1-m^2)(\pi - 2\alpha)].$$

Bei Aufgabe 4 war nach den Gleichungen (42.), (43.) und (54.) in § 70

$$(27.) \quad V = 8 \int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \cdot dx dy.$$

Durch Einführung von Polarcordinaten wird nach Gleichung (19.)

$$(28.) \quad V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^a r dr \sqrt{a^2 - r^2},$$

also nach Formel Nr. 119 der Tabelle

$$(29.) \quad \begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2} \right]_{a \cos \varphi}^a \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Dies giebt wieder

$$(30.) \quad V = -\frac{8a^3}{3} \left[\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^3}{9}.$$

Mitunter wird man sogar bei Anwendung derartiger Substitutionen *einfache* Integrale dadurch ermitteln, dass man sie auf *Doppelintegrale* zurückführt. Es sei z. B.

$$(31.) \quad J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

zu berechnen; dann ist auch, wenn man x mit y vertauscht,

$$(32.) \quad J = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

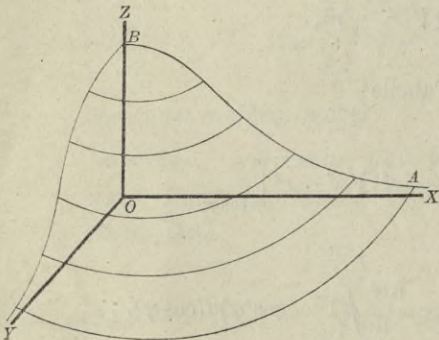
Indem man die Gleichungen (31.) und (32.) mit einander multiplicirt, erhält man

$$(33.) \quad J^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dieses Integral stellt das Volumen eines Körpers dar, welcher oben durch die Rotationsfläche

$$(34.) \quad z = e^{-(x^2+y^2)},$$

Fig. 129.



unten durch die XY -Ebene und seitlich durch die XZ -Ebene und die YZ -Ebene begrenzt wird (Fig. 129.)

Durch Einführung von Polarcordinaten findet man daher nach Gleichung (19.)

$$(35.) \quad J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r d\varphi dr.$$

Dies giebt, indem man

$$(36.) \quad r^2 = -t, \quad \text{also} \quad 2r dr = -dt$$

setzt,

$$(37.) \quad J^2 = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-\infty} e^t dt = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi [e^t]_0^{-\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

folglich wird

$$(38.) \quad J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Dieses Integral spielt eine wichtige Rolle in der höheren Vermessungskunde.

§ 73.

Complanation der Flächen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 198.)

Wie man sich den Bogen einer Curve zusammengesetzt denken kann aus unendlich vielen, unendlich kleinen Sehnen ds ,

d. h. wie man den Bogen einer Curve als ein *Polygon* mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachten kann, so kann man sich auch eine gekrümmte Fläche

$$(1.) \quad F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

aus zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen ebenen Stücken zusammengesetzt denken, man kann also die gekrümmte Fläche als ein *Polyeder* mit zweifach unendlich vielen, unendlich kleinen Seitenflächen betrachten.

Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt P der Fläche mit allen unendlich nahen Punkten durch gerade Linien, so sind diese geraden Linien Tangenten der Fläche im Punkte P und liegen im Allgemeinen sämmtlich in einer Ebene, welche die Tangentialebene der Fläche im Punkte P genannt wird und die Gleichung

$$(2.) \quad F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0,$$

oder

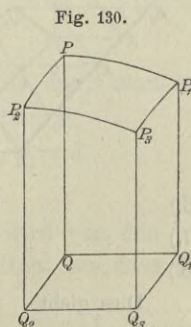
$$(2a.) \quad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x} (x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (y' - y)$$

hat. (Vergl. D.-R., Formel Nr. 224 der Tabelle.)

Legt man also wieder unendlich viele Schnitte, senkrecht zur X -Axe und senkrecht zur Y -Axe, so zertheilen diese die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke $PP_1P_3P_2$, deren Eckpunkte sämmtlich in der Tangentialebene des Punktes P liegen (Fig. 130). Man kann also das Viereck $PP_1P_3P_2$ als *eben* betrachten und findet den Flächeninhalt dO desselben aus der Gleichung

$$(3.) \quad PP_1P_3P_2 \cdot \cos \gamma = dO \cdot \cos \gamma \\ = QQ_1Q_3Q_2 = dx dy,$$

wobei $QQ_1Q_3Q_2$ die Projection von $PP_1P_3P_2$ auf die XY -Ebene und γ der Winkel ist, welchen die Tangentialebene des Punktes P mit der XY -Ebene bildet.*)



*) Der hierbei angewendete Satz ergibt sich unmittelbar aus Figur 131 auf der folgenden Seite.

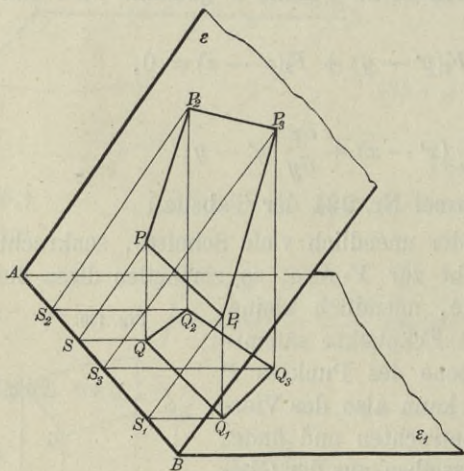
Dabei ist nach Gleichung (2.) und (2a.) in diesem Falle

$$(11.) \quad \cos \gamma = \frac{F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

folglich wird

Wird nämlich das beliebige Viereck $PP_1P_3P_2$ in der Ebene ε auf die Ebene ε_1 projicirt, so liegen die Lothe $QP, Q_1P_1, Q_3P_3, Q_2P_2$, welche man bezw. von den Punkten P, P_1, P_3, P_2 auf die Ebene ε_1 fällt, in den Ebenen $PSQ, P_1S_1Q_1, P_3S_3Q_3, P_2S_2Q_2$, welche durch die Eckpunkte des Vierecks $PP_1P_3P_2$ hindurchgehen und auf der Schnittlinie AB der Ebenen ε und ε_1 senkrecht stehen. Die Winkel $PSQ, P_1S_1Q_1, P_3S_3Q_3, P_2S_2Q_2$ sind alle dem Neigungswinkel γ gleich, so dass

Fig. 131.



$$(4.) \quad \begin{cases} SQ = SP \cdot \cos \gamma, \\ S_1 Q_1 = S_1 P_1 \cdot \cos \gamma, \\ S_3 Q_3 = S_3 P_3 \cdot \cos \gamma, \\ S_2 Q_2 = S_2 P_2 \cdot \cos \gamma \end{cases}$$

ist. Da nun das Parallelogramm

$$SQ Q_1 S_1 = \frac{1}{2} (SQ + S_1 Q_1) \cdot SS_1,$$

und das Parallelogramm

$$SPP_1 S_1 = \frac{1}{2} (SP + S_1 P_1) \cdot SS_1,$$

so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.), dass

$$(5.) \quad SQ Q_1 S_1 = SPP_1 S_1 \cdot \cos \gamma.$$

Ebenso findet man

$$(6.) \quad S_1 Q_1 Q_3 S_3 = S_1 P_1 P_3 S_3 \cdot \cos \gamma,$$

$$(7.) \quad S_3 Q_3 Q_2 S_2 = S_3 P_3 P_2 S_2 \cdot \cos \gamma,$$

$$(8.) \quad S_2 Q_2 QS = S_2 P_2 PS \cdot \cos \gamma.$$

Dies giebt

$$(9.) \quad \begin{aligned} QQ_1 Q_3 Q_2 &= S_1 Q_1 Q_3 S_3 + S_3 Q_3 Q_2 S_2 - S_2 Q_2 QS - SQ Q_1 S_1 \\ &= (S_1 P_1 P_3 S_3 + S_3 P_3 P_2 S_2 - S_2 P_2 PS - SPP_1 S_1) \cos \gamma \\ &= PP_1 P_3 P_2 \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass die Projection F_1 eines beliebigen Polygons F in der Ebene ε auf eine andere Ebene ε_1 gleich

$$(12.) \quad dO = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \frac{dx dy}{F_3} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2},$$

oder

$$(12a.) \quad dO = dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Integration dieses Ausdruckes in Bezug auf y bedeutet, dass man alle diese unendlich kleinen Vierecke summirt, welche zu demselben Werthe von x gehören. Die erste Integration giebt also einen unendlich dünnen Flächenstreifen.

Integrirt man dann noch in Bezug auf x , so erhält man die ganze Oberfläche

$$(13.) \quad O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Berechnung des Inhalts krummer Oberflächen nennt man: „*Complonation der Flächen*“.

§ 74.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$(1.) \quad pz = xy$$

stellt ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche zwischen den Ebenen

$$(2.) \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = b$$

berechnen.

Auflösung. Das hyperbolische Paraboloid wird von den begrenzenden Ebenen in geraden Linien geschnitten, so dass die

$F \cdot \cos \gamma$ wird, wenn γ der Neigungswinkel zwischen den beiden Ebenen ist. Da man eine krummlinig begrenzte Figur als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten betrachten kann, so gilt die Formel

$$(10.) \quad F_1 = F \cdot \cos \gamma$$

auch für jede beliebige ebene Figur F und deren Projection F_1 .

gesuchte Fläche die Seiten eines räumlichen Vierecks mit einander verbindet. Aus Gleichung (1.) folgt dabei

$$(3.) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{p},$$

$$(4.) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + x^2 + y^2};$$

deshalb wird

$$(5.) \quad O = \frac{1}{p} \int_0^a dx \int_0^b dy \sqrt{p^2 + x^2 + y^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 124 der Tabelle

$$(6.) \quad O = \frac{1}{2p} \int_0^a dx \left[y \sqrt{p^2 + x^2 + y^2} + (p^2 + x^2) \ln \left(\frac{y + \sqrt{p^2 + x^2 + y^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}} \right) \right]_0^b \\ = \frac{1}{2p} \int_0^a dx \left[b \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} + (p^2 + x^2) \ln \left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}} \right) \right].$$

Setzt man

$$(7.) \quad u = \ln \left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}} \right), \quad dv = (p^2 + x^2) dx,$$

so wird

$$(8.) \quad v = p^2 x + \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3} (3p^2 + x^2),$$

$$(9.) \quad du = \frac{xdx}{(b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} - \frac{xdx}{p^2 + x^2} \\ = \frac{(\sqrt{p^2 + b^2 + x^2} - b)xdx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} - \frac{xdx}{p^2 + x^2} \\ = - \frac{bx dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}},$$

folglich erhält man nach der Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

durch partielle Integration

$$(10.) \int (p^2 + x^2) \ln \left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}} \right) dx$$

$$= \frac{x}{3} (3p^2 + x^2) \ln \left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}} \right) + \frac{b}{3} \int \frac{(3p^2 x^2 + x^4) dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 122 und 35 der Tabelle

$$(11.) \int \frac{(x^4 + 3p^2 x^2) dx}{(x^2 + p^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}$$

$$= \int \frac{(x^2 + 2p^2) dx}{\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} - 2p^4 \int \frac{dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} + \frac{3p^2 - b^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}} \right)$$

$$- 2p^4 \int \frac{dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}.$$

Setzt man noch

$$(12.) \quad \sqrt{p^2 + b^2} = c \quad \text{und} \quad x = c \cdot \operatorname{tg} t,$$

so wird

$$(13.) \quad dx = \frac{c \cdot dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} = \frac{c}{\cos t}, \quad \frac{x}{\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} = \sin t,$$

also

$$(14.) \quad \int \frac{dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} = \int \frac{c \cdot dt \cdot \cos t}{(p^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t) \cdot c} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{p^2 + b^2 \sin^2 t}.$$

Wenn man ferner

$$(15.) \quad b \sin t = pw, \quad \text{also} \quad b \cos t \cdot dt = p dw$$

einführt, so findet man aus Gleichung (14.)

$$(16.) \quad \int \frac{dx}{(p^2 + x^2) \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} = \frac{1}{pb} \int \frac{dw}{1 + w^2} = \frac{1}{pb} \operatorname{arctg} \left(\frac{b \sin t}{p} \right)$$

$$= \frac{1}{pb} \operatorname{arctg} \left(\frac{bx}{p \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}} \right),$$

folglich geht Gleichung (11.) über in

$$(17.) \int \frac{(x^4 + 3p^2x^2)dx}{(p^2 + x^2)\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} + \frac{3p^2 - b^2}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right)$$

$$- \frac{2p^3}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}\right),$$

und Gleichung (10.) ergibt

$$(18.) \int (p^2 + x^2) \ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) dx$$

$$= \frac{x}{3} (3p^2 + x^2) \ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) + \frac{bx}{6} \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}$$

$$+ \frac{(3p^2 - b^2)b}{6} \ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right) - \frac{2}{3} p^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}\right).$$

Da nun noch nach Formel Nr. 124 der Tabelle

$$(19.) \int b dx \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} = \frac{bx}{2} \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}$$

$$+ \frac{(p^2 + b^2)b}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right)$$

ist, so folgt aus Gleichung (6.)

$$(20.) O = \frac{1}{2p} \left[\frac{2bx}{3} \sqrt{p^2 + b^2 + x^2} + \frac{(3p^2 + b^2)b}{3} \ln\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{(3p^2 + x^2)x}{3} \ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}{\sqrt{p^2 + x^2}}\right) - \frac{2p^3}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{p\sqrt{p^2 + b^2 + x^2}}\right) \right]_0^a,$$

also

$$(21.) O = \frac{ab}{3p} \sqrt{p^2 + a^2 + b^2} + \frac{(3p^2 + a^2)a}{6p} \ln\left(\frac{b + \sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{p^2 + a^2}}\right)$$

$$+ \frac{(3p^2 + b^2)b}{6p} \ln\left(\frac{a + \sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{p^2 + b^2}}\right) - \frac{p^2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{ab}{p\sqrt{p^2 + a^2 + b^2}}\right).$$

Da bei dieser Aufgabe die Integrationsgrenzen constant sind, so hätte man auch die Reihenfolge der Integrationen umkehren können, ohne die Grenzen zu ändern.

Aufgabe 2. Die Gleichung

$$(22.) \quad 2pz = x^2 - y^2$$

stellt wieder ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* dar; man soll den Inhalt der Oberfläche innerhalb des Cylinders

$$(23.) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (22.) folgt

$$(24.) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{p},$$

$$(25.) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + x^2 + y^2};$$

deshalb wird

$$(26.) \quad O = \frac{4}{p} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \sqrt{p^2 + x^2 + y^2}.$$

Durch Einführung von ebenen Polarcordinaten erhält man nach Formel Nr. 196 der Tabelle

$$(27.) \quad O = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r dr \sqrt{p^2 + r^2}$$

und daraus nach Formel Nr. 125 der Tabelle

$$(28.) \quad \begin{aligned} O &= \frac{4}{3p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[(p^2 + r^2) \sqrt{p^2 + r^2} \right]_0^a \\ &= \frac{4}{3p} \left[(p^2 + a^2) \sqrt{p^2 + a^2} - p^3 \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3p} \left[(p^2 + a^2) \sqrt{p^2 + a^2} - p^3 \right]. \end{aligned}$$

Auch hier hätte man die Reihenfolge bei den Integrationen ändern und die Gleichung (27.) auf die Form

$$(29.) \quad O = \frac{4}{p} \int_0^a r dr \sqrt{p^2 + r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2\pi}{p} \int_0^a r dr \sqrt{p^2 + r^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3p} \left[(p^2 + r^2) \sqrt{p^2 + r^2} \right]_0^a = \frac{2\pi}{3p} \left[(p^2 + a^2) \sqrt{p^2 + a^2} - p^3 \right]$$

bringen können.

Aufgabe 3. Man soll denjenigen Theil der Kugeloberfläche mit der Gleichung

$$(30.) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad \text{oder} \quad z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

berechnen, der von den beiden Cylindern

$$(31.) \quad x^2 + y^2 = ax \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = -ax$$

herausgebohrt wird.*) (Vergl. die Figuren 119 bis 122.)

Auflösung. Aus den Gleichungen (30.) folgt

$$(32.) \quad F_1 = 2x, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 2z,$$

$$(33.) \quad \frac{1}{F_3} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \frac{1}{z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Da die gesuchte Oberfläche durch die Coordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Theile zerlegt wird, so braucht man nur einen solchen Theil zu berechnen und mit 8 zu multipliciren. Dadurch erhält man nach den Formeln Nr. 198 und 34 der Tabelle

$$(34.) \quad O = 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= 8a \int_0^a dx \left[\arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \right]_0^{\sqrt{ax-x^2}},$$

also

$$(35.) \quad O = 8a \int_0^a dx \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

*) Diese Aufgabe ist schon von *Viviani* (*Acta Eruditorum* 1692) etwa in folgender Einkleidung gestellt worden: „Ein halbkugelförmiges Tempelgewölbe hat zwei gleiche Fenster von der Beschaffenheit, dass der Rest des Gewölbes eine quadrirbare Oberfläche hat. Welches ist die Gestalt der Fenster?“ (Vergl. *Joh. Bernoulli*, *Opera*, t. III, p. 212.)

Setzt man

$$(36.) \quad u = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}, \quad dv = dx,$$

also

$$(37.) \quad du = \frac{adx}{2(a+x)\sqrt{ax}}, \quad v = x,$$

so findet man durch partielle Integration

$$(38.) \quad \int_0^a dx \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} = \left[x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\sqrt{ax}}{a+x} dx,$$

oder, wenn man wieder

$$(39.) \quad x = at^2, \quad \text{also} \quad \sqrt{ax} = at, \quad dx = 2at dt$$

setzt,

$$(40.) \quad \int_0^a dx \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} = \frac{a\pi}{4} - a \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{a\pi}{4} - a \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \frac{a\pi}{4} - a [t - \arctg t]_0^1 = \frac{a\pi}{4} - a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a\pi}{2} - a;$$

folglich wird nach Gleichung (35.)

$$(41.) \quad O = 8a \int_0^a dx \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} = 4a^2\pi - 8a^2.$$

Da die ganze Kugel die Oberfläche

$$(42.) \quad K = 4a^2\pi$$

hat, so bleibt für den ausserhalb der beiden Cylinder liegenden Theil der Kugeloberfläche

$$(43.) \quad O_1 = 8a^2$$

übrig.

Die Lösung der Aufgabe wird bedeutend einfacher, wenn man ebene Polarcoordinaten einführt; dadurch geht nach Formel Nr. 196 der Tabelle Gleichung (34.) über in

$$\begin{aligned}
 (44.) \quad O &= 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \varphi} \\
 &= 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi [a - a \sin \varphi] = 8a^2 [\varphi + \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}},
 \end{aligned}$$

folglich erhält man wieder

$$(45.) \quad O = 4a^2\pi - 8a^2.$$

Aufgabe 4. Man soll die Oberfläche der beiden Kreiscylinder

$$(46.) \quad x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + ax = 0$$

berechnen, so weit dieselbe innerhalb der Kugel

$$(47.) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

liegt. (Vergl. die Figuren 119 bis 122.)

Auflösung. Die gesuchte Oberfläche wird durch die Coordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Theile zerlegt; man braucht daher wieder nur einen dieser Theile zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multipliciren. Die Gleichung der Fläche ist

$$(46 a.) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 - ax = 0$$

und enthält die Veränderliche z gar nicht. Damit die gegebene Methode anwendbar wird, muss man die Coordinaten in Formel Nr. 198 der Tabelle mit einander vertauschen. Indem man z. B. y als Function von x und z ansieht, geht diese Formel für die Berechnung der krummen Oberfläche über in

$$(48.) \quad O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dz}{F_2} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}.$$

Aus Gleichung (46 a.) findet man

$$(49.) \quad F_1 = 2x - a, \quad F_2 = 2y, \quad F_3 = 0,$$

$$(50.) \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (46 a.)

$$(51.) \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = a^2, \quad \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = a,$$

folglich wird

$$(52.) \quad O = 8a \int_0^a dx \int_0^{z_1} \frac{dz}{2y} = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \int_0^{z_1} dz.$$

Da z_1 , der Grenzwert von z , zu einem Punkte gehört, welcher auf der Kugel *und* auf dem Kreiscylinder liegt, so wird

$$z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

wobei aber noch nach Gleichung (46a.)

$$x^2 + y^2 = ax$$

ist, folglich erhält man

$$(53.) \quad z_1 = \sqrt{a^2 - ax}.$$

Dies giebt

$$(54.) \quad O = 4a \int_0^a dx \sqrt{\frac{a^2 - ax}{ax - x^2}} = 4a \sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8a \sqrt{a} [\sqrt{x}]_0^a,$$

also

$$(55.) \quad O = 8a^2.$$

Die Fläche der beiden Kreiscylinder¹, so weit sie von der Kugel eingeschlossen wird, ist also gerade so gross wie derjenige Theil der Kugeloberfläche, welcher ausserhalb der beiden Cylinder liegt.

Aufgabe 5. Aus der Schraubenfläche

$$(56.) \quad F(x, y, z) = y - x \operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{y}{x}$$

schneiden die beiden coaxialen Kreiscylinder,

$$(57.) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2$$

und die beiden Ebenen

$$(58.) \quad z = -\frac{c\pi}{2}, \quad z = +\frac{c\pi}{2}$$

einen Theil der Oberfläche heraus; man soll den Flächeninhalt dieses Theiles berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (56.) folgt

$$(59.) F_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = -\frac{y}{x}, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = -\frac{x}{c}\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right] \\ = -\frac{x^2 + y^2}{cx},$$

$$(60.) F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = \frac{c^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2}{c^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{c^2x^2}(c^2 + x^2 + y^2),$$

$$(61.) \frac{1}{F_3} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \pm \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}},$$

also, da hier nur das obere Zeichen in Betracht kommt,

$$(62.) O = \int dx \int dy \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}.$$

Die Bestimmung der Integrationsgrenzen ist unterblieben, weil durch die Gleichungen

$$(63.) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

neue Integrations-Veränderliche eingeführt werden sollen. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 196 der Tabelle

$$(64.) O = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^b r dr \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{r^2}} = \int_a^b dr \sqrt{c^2 + r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi \int_a^b dr \sqrt{c^2 + r^2}.$$

Die Grenzen $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ bestimmen sich daraus, dass nach Gleichung (56.)

$$(65.) \quad z = c\varphi$$

wird. Nach Formel Nr. 124 der Tabelle erhält man daher

$$(66.) O = \pi \int_a^b dr \sqrt{c^2 + r^2} = \frac{\pi}{2} \left[r \sqrt{c^2 + r^2} + c^2 \ln \left(\frac{r + \sqrt{c^2 + r^2}}{c} \right) \right]_a^b \\ = \frac{\pi}{2} \left[b \sqrt{b^2 + c^2} - a \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right) \right].$$

§ 75.

Einführung zweier variablen Parameter.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 199.)

Ist die Gleichung einer Fläche in der Form

(1.)
$$z = f(x, y)$$

gegeben, so kann man, wie es auch bereits in § 72 bei der Einführung von neuen Integrations-Veränderlichen geschehen war, x und y als Functionen von zwei neuen, von einander unabhängigen Veränderlichen u und v darstellen, indem man

(2.)
$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

setzt, wo $f_1(u, v)$ und $f_2(u, v)$ für den jedesmaligen Zweck passend gewählte Functionen sind. Trägt man diese Werthe von x und y in die Gleichung (1.) ein, so erhält man

(3.)
$$z = f[f_1(u, v), f_2(u, v)] = f_3(u, v).$$

Man kann also eine Fläche durch die drei Gleichungen

(4.)
$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

darstellen; und umgekehrt: Sind die drei Gleichungen (4.) beliebig gegeben, so stellen sie eine Fläche dar, deren Gleichung man durch Elimination von u und v aus den Gleichungen (4.) erhält.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt sodann

(5.)
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \end{cases}$$

also

(6.)
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u},$$

(7.)
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Setzt man also

(8.)
$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} = A, & \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = B, \\ & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = C, \end{cases}$$

so wird

$$(9.) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C},$$

$$(10.) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \pm \frac{1}{C} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Deshalb erhält man nach Formel Nr. 195 der Tabelle, da die Functionaldeterminante gleich $\pm C$ ist,

$$(11.) \quad O = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \pm \iint du dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wobei nur das obere Vorzeichen einen Sinn hat.

Wie diese Formel verwendet werden kann, möge das folgende Beispiel zeigen.

Aufgabe. Durch die Gleichungen

$$(12.) \quad x = u^3 - 3uv^2 - 3u, \quad y = 3u^2 - 3v^2, \quad z = v^3 - 3u^2v - 3v$$

wird eine Fläche dargestellt, auf welcher man für constante Werthe von u und v zwei Schaaren von ebenen Curven dritten Grades erhält, die einander rechtwinklig schneiden.*) Man soll auf der Fläche den Inhalt eines Vierecks berechnen, welches durch die Curven

$$(13.) \quad u = a, \quad u = b, \quad v = c, \quad v = d$$

begrenzt wird.

Auflösung. Aus den Gleichungen (12.) folgt

$$(14.) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = 3(u^2 - v^2 - 1), & \frac{\partial y}{\partial u} = 6u, & \frac{\partial z}{\partial u} = -6uv, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -6uv, & \frac{\partial y}{\partial v} = -6v, & \frac{\partial z}{\partial v} = 3(v^2 - u^2 - 1), \end{cases}$$

deshalb wird

*) Diese Linien sind die *Krümmungslinien* der Fläche, welche die „*Enneper'sche Minimalfläche*“ genannt wird. Davon soll aber bei dieser Aufgabe kein Gebrauch gemacht werden, weil in diesem Lehrbuche wegen der Beschränkung des Stoffes eine Erklärung der Krümmungslinien nicht gegeben werden konnte.

$$(15.) \quad \begin{cases} A = -18u(u^2 + v^2 + 1), \\ B = 9(u^2 + v^2 + 1)(u^2 + v^2 - 1), \\ C = +18v(u^2 + v^2 + 1), \end{cases}$$

$$(16.) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 81(u^2 + v^2 + 1)^4.$$

Dies giebt nach Gleichung (11.)

$$(17.) \quad \begin{aligned} O &= 9 \int_a^b du \int_c^d (u^2 + v^2 + 1)^2 dv \\ &= 9 \int_a^b du \int_c^d (u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 1) dv \\ &= 9 \int_a^b du [(u^4 + 2u^2 + 1)(d - c) + \frac{2}{3}(u^2 + 1)(d^3 - c^3) + \frac{1}{5}(d^5 - c^5)], \end{aligned}$$

also

$$(18.) \quad \begin{aligned} O &= 9 \left[\frac{1}{5}(b^5 - a^5)(d - c) + \frac{1}{5}(d^5 - c^5)(b - a) + \frac{2}{3}(b^3 - a^3)(d^3 - c^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}(b^3 - a^3)(d - c) + \frac{2}{3}(d^3 - c^3)(b - a) + (b - a)(d - c) \right]. \end{aligned}$$

§ 76.

Einführung räumlicher Polarcoordinaten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 200.)

Führt man räumliche Polarcoordinaten ein, indem man

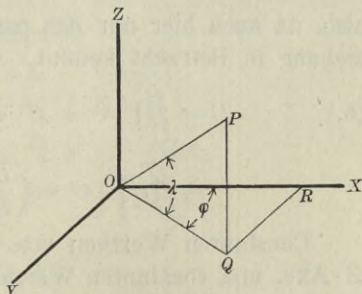
$$(1.) \quad x = r \cos \lambda \cos \varphi, \quad y = r \cos \lambda \sin \varphi, \quad z = r \sin \lambda$$

setzt, so ist (Fig. 132) OP gleich r der *Radius vector*, λ der Neigungswinkel QOP von OP gegen die XY -Ebene, und φ der Winkel XOQ , welchen die Projection OQ des Radius vectors OP auf die XY -Ebene mit der positiven Richtung der X -Axe bildet. Wenn man dabei λ und φ als die beiden unabhängigen Veränderlichen betrachtet, so wird r eine Function von λ und φ , also

$$r = F(\lambda, \varphi),$$

und man erhält

Fig. 132.



$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos \lambda \cos \varphi - r \sin \lambda \cos \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos \lambda \sin \varphi - r \sin \lambda \sin \varphi, \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda + r \cos \lambda, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \lambda \cos \varphi - r \cos \lambda \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \lambda \sin \varphi + r \cos \lambda \cos \varphi, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \lambda; \end{cases}$$

folglich wird, wenn man u mit λ und v mit φ vertauscht,

$$(3.) \quad \begin{cases} A = -r \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda \cos \lambda \cos \varphi - r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi - r^2 \cos^2 \lambda \cos \varphi, \\ B = -r \frac{\partial r}{\partial \lambda} \sin \lambda \cos \lambda \sin \varphi + r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \varphi - r^2 \cos^2 \lambda \sin \varphi, \\ C = +r \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda - r^2 \sin \lambda \cos \lambda, \end{cases}$$

$$(4.) \quad \begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)^2 \cos^2 \lambda + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 + r^4 \cos^2 \lambda \\ &= r^2 \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \cos^2 \lambda + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2, \end{aligned}$$

also, da auch hier nur das positive Zeichen bei der Wurzelauziehung in Betracht kommt,

$$(5.) \quad \begin{aligned} O &= \iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ &= \iint r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \cos^2 \lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} d\lambda d\varphi. \end{aligned}$$

Constanten Werthen von φ entsprechen Ebenen durch die Z-Axe, und constanten Werthen von λ Kegelflächen, welche die Z-Axe zur Axe haben. Durch diese Ebenen und Kegel wird die Fläche in unendlich viele, unendlich kleine Vierecke zerlegt. Indem man in Bezug auf φ integrirt, erhält man die Summe

von diesen Vierecken auf einem ringförmigen, unendlich schmalen Streifen zwischen zwei benachbarten Kegelflächen. Alle diese unendlich schmalen Streifen werden sodann durch Integration in Bezug auf λ summirt. Daraus ergibt sich für jeden einzelnen Fall die Bestimmung der Grenzen.

Wie dies geschieht, möge die folgende Aufgabe zeigen.

Aufgabe. Die gegebene Fläche habe die Gleichung

$$(6.) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

oder bei Einführung räumlicher Polarcoordinaten durch die Gleichungen (1.)

$$(7.) \quad r^2 = a^2 \cos^2 \lambda \cos(2\varphi);$$

man soll die gesammte Oberfläche berechnen.

Auflösung. Um sich eine Vorstellung von der Fläche zu machen, beachte man, dass $r \leq a$ sein muss, dass die Fläche also ganz innerhalb einer Kugel mit dem Halbmesser a liegt. Die XY -Ebene, in der λ gleich 0 ist, schneidet sie in einer *Lemniscate* mit der Gleichung

$$(8.) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{oder} \quad r^2 = a^2 \cos(2\varphi).$$

Giebt man φ einen constanten Werth und setzt

$$(9.) \quad a\sqrt{\cos(2\varphi)} = a_1,$$

so erhält man den Durchschnitt der Fläche mit einer Ebene, welche durch die Z -Axe hindurchgeht. Die Schnittcurve zerfällt in zwei Kreise mit den Gleichungen

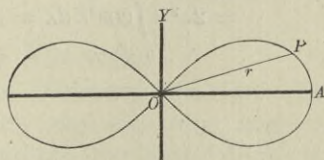
$$(10.) \quad r = + a_1 \cos \lambda \quad \text{und} \quad r = - a_1 \cos \lambda,$$

oder

$$(10a.) \quad x^2 + y^2 = + a_1 x \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = - a_1 x.$$

Die Fläche entsteht also aus der Lemniscate in der XY -Ebene (Fig. 133), indem man sämtliche Radii vectores OP zu Durchmessern von Kreisen macht, deren Ebenen auf der XY -Ebene senkrecht stehen.

Fig. 133.



Da die Coordinaten-Ebenen die Fläche in 8 symmetrische Theile zerlegen, so braucht man nur die Oberfläche eines solchen Theiles zu berechnen und das gefundene Resultat mit 8 zu multipliciren. Die Grenzen von φ sind dabei 0 und $\frac{\pi}{4}$, die von λ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Aus Gleichung (7.) folgt dann

$$(11.) \quad r \frac{\partial r}{\partial \lambda} = -a^2 \cos \lambda \sin \lambda \cos(2\varphi),$$

$$(12.) \quad r \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -a^2 \cos^2 \lambda \sin(2\varphi);$$

deshalb wird

$$(13.) \quad r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)^2 = a^4 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda \cos^2(2\varphi) = a^2 r^2 \sin^2 \lambda \cos(2\varphi),$$

$$(14.) \quad r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 = a^4 \cos^4 \lambda \sin^2(2\varphi) = a^2 r^2 \cos^2 \lambda \cdot \frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)},$$

$$(15.) \quad \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \cos^2 \lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 = a^2 \cos(2\varphi) \cos^2 \lambda \\ + a^2 \cos^2 \lambda \frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} \\ = \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{\cos(2\varphi)} = \frac{r^2}{\cos^2(2\varphi)}.$$

Dies giebt nach Gleichung (5.)

$$(16.) \quad O = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2 d\varphi}{\cos(2\varphi)} = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ = 2a^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \lambda d\lambda = a^2 \pi \left[\sin \lambda \cos \lambda + \lambda \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi^2}{2}.$$

XIV. Abschnitt.

Integration der Differentiale der Functionen von mehreren Veränderlichen.

§ 77.

Vollständige Differentiale der Functionen von zwei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 201.)

Ist

$$(1.) \quad u = f(x, y)$$

eine Function von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen, so ist nach D.-R., Formel Nr. 212 der Tabelle das *vollständige* oder *totale* Differential von u

$$(2.) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

wobei

$$(3.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

noch Functionen von x und y sind, so dass Gleichung (2.) übergeht in

$$(2a.) \quad du = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: „Man soll u als Function der beiden Veränderlichen x und y bestimmen, wenn du durch die Gleichungen (2a.)

gegeben ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind.“

Dabei erkennt man aber sogleich, dass die Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ nicht willkürlich gegeben sein dürfen; es müssen vielmehr M und N die partiellen Ableitungen ein und derselben Function $u = f(x, y)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, muss nach D.-R., Formel Nr. 215 der Tabelle

$$(4.) \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$(4a.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

sein. Diese Bedingung ist *nothwendig*, wenn

$$(5.) \quad du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ein *vollständiges Differential* sein soll; sie ist aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend* dafür, dass es eine Function

$$(6.) \quad u = f(x, y)$$

gibt, deren vollständiges Differential mit $Mdx + Ndy$ übereinstimmt.

Beweis. Wie die Gleichung

$$(7.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

aus Gleichung (6.) hervorgeht, indem man y als eine Constante betrachtet und die Function u nach x *differentiirt*, so wird Gleichung (6.) aus Gleichung (7.) hervorgehen, indem man y wieder als constant ansieht und die Function $M(x, y)$ in Bezug auf x *integrirt*. Dies giebt

$$(8.) \quad u = \int M(x, y)dx + Y.$$

Hierbei ist die Integrations-Constante mit Y bezeichnet worden, um anzudeuten, dass sie noch eine Function von y sein

darf, weil bei der in Gleichung (8.) angedeuteten Operation x als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

$$(9.) \quad \int M(x, y) dx = v,$$

so geht Gleichung (8.) über in

$$(10.) \quad u = v + Y.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$(11.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$

also

$$(12.) \quad \frac{dY}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite eine Function der einzigen Veränderlichen y . Damit die Aufgabe lösbar ist, muss auch die *rechte* Seite der Gleichung von x unabhängig sein. Das ist auch nach der in Gleichung (4a.) festgestellten Voraussetzung der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf Gleichung (9.)

$$(13.) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial y} \\ = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach Gleichung (4a.) gleich 0, folglich muss $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ von x unabhängig sein. Die Gleichung (12.) enthält also keinen Widerspruch, so dass man daraus ohne Weiteres durch Integration

$$(14.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + C$$

ermitteln kann. Setzt man diesen Werth von Y in die Gleichung (10.) ein, so findet man

$$(15.) \quad u = v + \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + C,$$

wobei

$$(16.) \quad v = \int M(x, y) dx$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn nach den Gleichungen (15.) und (16.) ist in der That

$$(17.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y),$$

$$(18.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = N(x, y).$$

Man nennt den Ausdruck

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

„ein vollständiges oder totales Differential“, wenn die Bedingung

$$(19.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

erfüllt ist. Man muss daher, wenn man sicher gehen will, ehe man integrirt, untersuchen, ob Gleichung (19.) befriedigt wird. Man kann aber auch mit der Berechnung von

$$(20.) \quad v = \int M(x, y)dx$$

beginnen und dann untersuchen, ob $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ unabhängig von x ist. Wenn dies zutrifft, so wird ja, wie schon in Gleichung (13.) gezeigt wurde,

$$(21.) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

d. h. die in Gleichung (19.) angegebene Bedingung wird befriedigt.

§ 78.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

$$(1.) \quad du = (3x^2 + 8xy)dx + (4x^2 + 3y^2)dy$$

gegeben ist.

Auflösung. Um zunächst zu untersuchen, ob die rechte Seite von Gleichung (1.) ein *vollständiges Differential* ist, bilde man

$$(2.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 8xy)}{\partial y} = 8x,$$

$$(3.) \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(4x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 8x.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) folgt, dass

$$(4.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

ist, dass also in diesem Falle $Mdx + Ndy$ ein *vollständiges Differential* ist. Man darf daher ohne Weiteres das in § 77 angegebene Integrations-Verfahren anwenden und erhält

$$(5.) \quad v = \int M(x, y)dx = \int(3x^2 + 8xy)dx = x^3 + 4x^2y.$$

Ferner wird

$$(6.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2 + 3y^2 - 4x^2 = 3y^2$$

und deshalb

$$(7.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int 3y^2 dy = y^3 + C.$$

Dies giebt

$$(8.) \quad u = v + Y = x^3 + 4x^2y + y^3 + C.$$

Die Richtigkeit dieses Resultates kann man sehr leicht durch Differentiation prüfen.

Man kann selbstverständlich die Aufgabe auch so lösen, dass man zunächst

$$(9.) \quad u = \int Ndy + X = w + X$$

bildet, wobei X eine Function der einzigen Veränderlichen x ist, und dass man dann X aus der Gleichung

$$(10.) \quad X = \int \left(M - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

berechnet.

Aufgabe 2. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

(11.) $du = (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (-7x^3 + 2x + 3)dy$
gegeben ist.

Auflösung. Man kann zunächst durch Bildung von $\frac{\partial M}{\partial y}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ zeigen, dass

$$(12.) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -21x^2 + 2$$

wird, und dass deshalb die rechte Seite in Gleichung (11.) ein *vollständiges Differential* ist. Dann erhält man

$$(13.) \quad v = \int M dx = \int (20x^3 - 21x^2y + 2y) dx \\ = 5x^4 - 7x^3y + 2xy,$$

$$(14.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = (-7x^3 + 2x + 3) - (-7x^3 + 2x) = 3,$$

$$(15.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int 3 dy = 3y + C.$$

Dies giebt

$$(16.) \quad u = v + Y = 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C.$$

Aufgabe 3. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

(17.) $du = (2ax + by + c)dx + (bx + 2my + n)dy$
gegeben ist.

Auflösung. Hier wird

$$(18.) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = b, \quad \text{also} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

folglich ist die rechte Seite von Gleichung (17.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher

$$(19.) \quad v = \int M dx = \int (2ax + by + c) dx = ax^2 + bxy + cx,$$

$$(20.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = (bx + 2my + n) - bx = 2my + n,$$

$$(21.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int (2my + n) dy \\ = my^2 + ny + C.$$

Dies giebt

$$(22.) \quad u = v + Y = ax^2 + bxy + cx + my^2 + ny + C.$$

Aufgabe 4. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

$$(23.) \quad du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

gegeben ist.

Auflösung. Die Gleichung (23.) kann man auch in der Form

$$(23 a.) \quad du = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2}$$

schreiben, aus der man leichter erkennt, dass

$$(24.) \quad M = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ist. Daraus folgt

$$(25.) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Da diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, so ist die rechte Seite von Gleichung (23.) ein *vollständiges Differential*; man erhält daher nach Formel Nr. 28 der Tabelle

$$(26.) \quad v = \int M dx = -y \int \frac{dx}{y^2 + x^2} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$(27.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$(28.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = C.$$

Dies giebt

$$(29.) \quad u = v + Y = C - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Aufgabe 5. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

$$(30.) \quad du = \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) dy$$

gegeben ist.

Auflösung. Den Nachweis, dass die rechte Seite von Gleichung (30.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man führen, indem man

$$(31.) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

bildet. Man darf aber auch ohne Weiteres

$$(32.) \quad v = \int M dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx \\ = \ln x + \frac{y^2}{x-y}$$

berechnen und erhält daraus, dass

$$(33.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right) - \frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} \\ = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

eine Function der einzigen Veränderlichen y ist, diesen Nachweis. Da nun noch

$$(34.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy = y - \ln y + C$$

ist, so ergibt sich

$$(35.) \quad u = v + Y = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y + C,$$

oder

$$(35 a.) \quad u = \ln \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{xy}{x-y} + C.$$

Aufgabe 6. Man soll u als Function von x und y bestimmen, wenn

$$(36.) \quad du = \left(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5 \right) dx + \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7 \right) dy$$

gegeben ist.

Auflösung. Den Nachweis, dass die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential* ist, kann man auch hier führen, indem man zeigt, dass

$$(37.) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{6x^4 y^2 + 2y^6}{(x^4 - y^4)^2} + 1$$

ist. Man kann sich aber diese etwas umständliche Differentiation auch ersparen und ohne Weiteres

$$v = \int M dx = \int \left(\frac{2y^3}{x^4 - y^4} + y - 5 \right) dx$$

berechnen. Dadurch erhält man

$$v = \int \frac{y dx}{x^2 - y^2} - \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} + xy - 5x,$$

oder nach den Formeln Nr. 29a und 28 der Tabelle

$$(38.) \quad v = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-y}{x+y} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + xy - 5x.$$

Daraus folgt

$$(39.) \quad N - \frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x - 2y - 7 \right) - \left(-\frac{2xy^2}{x^4 - y^4} + x \right) \\ = -2y - 7.$$

Da dieser Ausdruck von x unabhängig ist, so ist die rechte Seite von Gleichung (36.) ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(40.) \quad Y = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = -\int (2y + 7) dy = -y^2 - 7y + C,$$

$$(41.) \quad u = v + Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-y}{x+y} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + xy - 5x - y^2 - 7y + C.$$

§ 79.

Vollständige Differentiale der Functionen von drei Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 202.)

Ist

$$(1.) \quad u = f(x, y, z)$$

eine Function von drei von einander unabhängigen Veränderlichen, so wird nach D.-R., Formel Nr. 214 der Tabelle das *vollständige* oder *totale Differential* von u

$$(2.) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

wobei

$$(3.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z)$$

noch Functionen von x, y, z sind, so dass Gleichung (2.) übergeht in

$$(2a.) \quad du = Fdx + Gdy + Hdz,$$

wenn man bezw. F, G, H statt $F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)$ schreibt. Wie in dem Vorstehenden die Gleichung (2a.) aus Gleichung (1.) abgeleitet ist, so könnte man sich jetzt auch die Aufgabe stellen: „Man soll u als Function der drei Veränderlichen x, y, z bestimmen, wenn du durch die Gleichung (2a.) gegeben ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ durch die Gleichungen (3.) gegeben sind.“

Dabei erkennt man aber wieder sogleich, dass die drei Functionen F, G, H nicht willkürlich gegeben sein dürfen; sie müssen vielmehr die partiellen Ableitungen ein und derselben Function $u = f(x, y, z)$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ergibt sich aus D.-R., Formel Nr. 215 der Tabelle

$$(4.) \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$(4a.) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Diese Bedingungen sind *nothwendig*, wenn die rechte Seite von Gleichung (2a.) ein *vollständiges Differential* sein soll; sie sind aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend* dafür, dass es eine Function

$$(5.) \quad u = f(x, y, z)$$

gibt, deren vollständiges Differential mit

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

übereinstimmt.

Beweis. Wie die Gleichung

$$(6.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z)$$

aus Gleichung (5.) hervorgeht, indem man y und z als Constanten betrachtet und die Function u nach x *differentiirt*, so

wird Gleichung (5.) aus Gleichung (6.) hervorgehen, indem man y und z wieder als constant ansieht und die Function $F(x, y, z)$ in Bezug auf x *integrirt*. Dies giebt

$$(7.) \quad u = \int F(x, y, z) dx + \varphi(y, z).$$

Hierbei ist die Integrations-Constante mit $\varphi(y, z)$ bezeichnet worden, um anzudeuten, dass sie noch eine Function von y und z sein darf, weil bei der in Gleichung (7.) ausgeführten Integration x als die einzige Veränderliche angesehen wurde. Setzt man

$$(8.) \quad \int F(x, y, z) dx = v,$$

so geht Gleichung (7.) über in

$$(9.) \quad u = v + \varphi(y, z).$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.)

$$(10.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y},$$

$$(11.) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = H(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z},$$

oder

$$(12.) \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = G - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Hierbei sollen $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}$ von der Veränderlichen x unabhängig sein, folglich muss auch die rechte Seite dieser Gleichungen (12.) von x unabhängig sein, wenn die Aufgabe lösbar sein soll. Das ist auch nach den in den Gleichungen (4a.) aufgestellten Voraussetzungen der Fall, denn es ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) und (4a.)

$$(13.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$(14.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (12.) enthalten daher keinen Widerspruch, so dass man die Function $\varphi(y, z)$ aus der Gleichung

$$(15.) \quad d\varphi = \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz$$

bestimmen kann. Auch die Bedingung, dass hierbei der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (15.) ein *vollständiges Differential* ist, wird erfüllt denn man erhält nach den Gleichungen (4a.)

$$(16.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(H - \frac{\partial v}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Man kann daher die Gleichung (15.) nach dem in § 77 angegebenen Verfahren integrieren, wie folgt. Es sei

$$(17.) \quad w = \int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy,$$

dann ist mit Rücksicht auf Gleichung (15.)

$$(18.) \quad \varphi(y, z) = w + \psi(z),$$

$$(19.) \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = H - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d\psi(z)}{dz},$$

oder

$$(20.) \quad \frac{d\psi(z)}{dz} = H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Dass auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Function der einzigen Veränderlichen z steht, folgt schon aus den Erläuterungen in § 77, lässt sich aber auch zeigen, indem man den Ausdruck nach y differentiirt. Dann erhält man nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (17.) und (4a.)

$$(21.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(G - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (20.) folgt daher

$$(22.) \quad \psi(z) = \int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + C,$$

also nach den Gleichungen (9.) und (18.)

$$(23.) \quad u = v + w + \psi(z),$$

wobei sich die Werthe von v , w und $\psi(z)$ aus den Gleichungen (8.), (17.) und (22.) ergeben.

Man ist natürlich nicht an eine bestimmte Reihenfolge der Integrationen gebunden, d. h. man ist nicht gezwungen, zuerst $\int F(x, y, z) dx$, sodann $\int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$ und endlich $\int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz$ zu bilden, sondern man kann auch mit $\int G(x, y, z) dy$ oder $\int H(x, y, z) dz$ beginnen und dann die Rechnung in ähnlicher Weise fortsetzen wie bei dem angegebenen Verfahren.

Man erkennt auch, wie sich die angegebene Methode auf Functionen von n Veränderlichen übertragen lässt. Dabei kann die rechte Seite von der Gleichung

$$(24.) \quad du = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n$$

nur dann ein *vollständiges Differential* einer Function

$$(25.) \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sein, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$(26.) \quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial M_\beta}{\partial x_\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n, \\ \beta = 1, 2, 3, \dots, n$$

befriedigt sind. Indem man

$$(27.) \quad v = \int M_1 dx_1 \quad \text{und} \quad u = v + \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

setzt, hat man den vorliegenden Fall einer Function von n Veränderlichen auf den einfacheren Fall einer Function von $n-1$ Veränderlichen zurückgeführt, da dann noch die Function $\varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$ aus der Gleichung

$$(28.) \quad d\varphi = \left(M_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left(M_3 - \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) dx_3 + \dots \\ + \left(M_n - \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) dx_n$$

zu berechnen ist.

§ 80.

Uebungs - Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll u als Function von x, y, z bestimmen, wenn

$$(1.) \quad du = \frac{adx}{y} - \frac{ax + bz}{y^2} dy + \frac{bdz}{y}$$

gegeben ist.

Auflösung. In diesem Falle ist

$$(2.) \quad F = \frac{a}{y}, \quad G = -\frac{ax + bz}{y^2}, \quad H = \frac{b}{y},$$

also

$$(3.) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{a}{y^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{b}{y^2}. \end{cases}$$

Die rechte Seite von Gleichung (1.) ist daher ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(4.) \quad v = \int F dx = \int \frac{adx}{y} = \frac{ax}{y},$$

$$(5.) \quad G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ax + bz}{y^2} + \frac{ax}{y^2} = -\frac{bz}{y^2},$$

$$(6.) \quad w = \int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = -\int \frac{bz}{y^2} dy = \frac{bz}{y},$$

$$(7.) \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{b}{y}, \quad H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(8.) \quad \psi(z) = \int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = C,$$

folglich wird

$$(9.) \quad u = \frac{ax + bz}{y} + C.$$

Aufgabe 2. Man soll u als Function von x, y, z bestimmen, wenn

$$(10.) \quad du = (y^3 + yz^2)dx + (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z)dy + (4z^3 + 2xyz + y^3)dz$$

gegeben ist.

Auflösung. Hier ist

$$(11.) \quad F = y^3 + yz^2, \quad G = 3xy^2 + xz^2 + 3y^2z, \quad H = 4z^3 + 2xyz + y^3,$$

also

$$(12.) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} = 3y^2 + z^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} = 2yz, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y} = 2xz + 3y^2. \end{cases}$$

Die rechte Seite von Gleichung (10.) ist daher ein *vollständiges Differential*, und man erhält

$$(13.) \quad v = \int F dx = \int (y^3 + yz^2) dx = xy^3 + xyz^2,$$

$$(14.) \quad G - \frac{\partial v}{\partial y} = (3xy^2 + xz^2 + 3y^2z) - (3xy^2 + xz^2) = 3y^2z,$$

$$(15.) \quad w = \int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \int 3y^2z dy = y^3z,$$

$$(16.) \quad H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} = (4z^3 + 2xyz + y^3) - 2xyz - y^3 = 4z^3,$$

$$(17.) \quad \psi(z) = \int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int 4z^3 dz = z^4 + C,$$

folglich wird

$$(18.) \quad u = xy^3 + xyz^2 + y^3z + z^4 + C.$$

Aufgabe 3. Man soll u als Function von x , y und z bestimmen, wenn

$$(19.) \quad du = \left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{x}{z}} \right] dx \\ + \left[\frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \sin y \right] dy \\ + \left[\frac{1}{r} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2y^2}} - \frac{x}{z^2} e^{\frac{x}{z}} - \cos z \right] dz$$

gegeben ist, wobei

$$(20.) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sein soll.

Auflösung. Die Untersuchung, ob die rechte Seite von Gleichung (19.) ein vollständiges Differential ist, kann übergangen werden, da sich ergeben wird, dass $G - \frac{\partial v}{\partial y}$ von x unabhängig ist, und dass $H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}$ nur noch die einzige Veränderliche z enthält. Es wird nämlich, da $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ist,

$$(21.) \quad v = \int F dx = \int \left[\frac{x}{r(z+r)} - \frac{y}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}} + \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{x}{z}} \right] dx \\ = \ln(z+r) - \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{\frac{x}{z}},$$

$$(22.) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{r(z+r)} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2y^2}},$$

$$(23.) \quad G - \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y,$$

$$(24.) \quad w = \int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = -\int \sin y dy = \cos y,$$

$$(25.) \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z+r}{r(z+r)} + \frac{xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \frac{x}{z^2} e^{\frac{x}{z}}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(26.) \quad \psi(z) = \int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = - \int \cos z dz = - \sin z + C,$$

folglich wird

$$(27.) \quad u = \ln(z+r) - \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{\frac{x}{z}} + \cos y - \sin z + C.$$

Man theilt die gewöhnlichen Differential-Gleichungen in *verschiedene* Ordnungen ein nach der Ordnung des höchsten darin enthaltenen Differential, bezw. des höchsten Differential-Quotienten. Es giebt also Differential-Gleichungen *erster Ordnung*, *zweiter Ordnung* u. s. w., allgemein *n^{ter} Ordnung*. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, wo nur zwei Veränderliche x und y mit ihren Differentialen vorkommen, so sind z. B. die Gleichungen

$$(1.) \quad (3y^2 + 7x^2)dy + (12xy - 8x^2)dx = 0,$$

oder

$$(1a.) \quad (3y^2 + 7x^2) \frac{dy}{dx} + 12xy - 8x^2 = 0,$$

$$(2.) \quad y^2 - ax \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

$$(3.) \quad y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = a,$$

$$(4.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x)$$

Differential-Gleichungen erster Ordnung; die Gleichungen

$$(5.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{x}{a^2},$$

$$(6.) \quad F(x, y) \frac{d^2y}{dx^2} = G(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

$$(7.) \quad \frac{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = cy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

sind *Differential-Gleichungen zweiter Ordnung*, und die Gleichung

$$(8.) \quad F_0(x) \frac{d^ny}{dx^n} + F_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + F_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + F_n(x) \cdot y = \Phi(x)$$

ist eine *Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung*, und zwar heisst diese Gleichung eine *Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung und ersten Grades* oder eine *lineare Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung*, weil sie in Bezug auf die Grössen

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

vom ersten Grade ist.

§ 82.

Auflösbarkeit der Differential-Gleichungen. Integrations-Constanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 203 bis 206.)

Die einfachste Form einer gewöhnlichen Differential-Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y tritt bei der Ermittlung eines jeden Integrals auf, wo die Gleichung

$$(1.) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gegeben und die Gleichung

$$(2.) \quad y = f(x) + C$$

so zu bestimmen ist, dass Gleichung (1.) daraus durch Differentiation abgeleitet werden kann. Man nennt dann

$$(2a.) \quad y = \int f'(x) dx = f(x) + C$$

dass *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung. Dabei tritt noch eine beliebige *Integrations-Constante* C auf, welche man so bestimmen kann, dass y den Werth b annimmt, wenn x gleich a wird. Setzt man nämlich

$$C = b - f(a),$$

so wird

$$(2b.) \quad y = b + f(x) - f(a) = F(x, a, b).$$

Will man das angegebene Verfahren auf eine beliebige Differential-Gleichung erster Ordnung

$$(3.) \quad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

übertragen, so heisst auch dabei die gesuchte Function

$$(4.) \quad y = F(x, a, b),$$

welche für $x = a$ den Werth b annimmt, das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung, wenn Gleichung (3.) durch Einsetzen dieses Werthes von y befriedigt wird, wenn also

$$(5.) \quad G[x, F(x, a, b), F'(x, a, b)] = 0$$

wird, was auch x , a und b sein mögen.

Man kann sich zunächst durch ein *graphisches* Verfahren davon überzeugen, dass ein solches allgemeines Integral immer existirt, bei welchem man den Anfangswerth b von y noch beliebig annehmen darf.

Bringt man nämlich die Gleichung (3.) auf die Form

$$(6.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

und beachtet man, dass der gesuchten Gleichung

$$(7.) \quad y = F(x, a, b)$$

eine Curve in der XY -Ebene entspricht, so erkennt man aus der geometrischen Deutung des Differential-Quotienten (vergl. D.-R., Formel Nr. 16 der Tabelle), nämlich aus der Gleichung

$$(8.) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

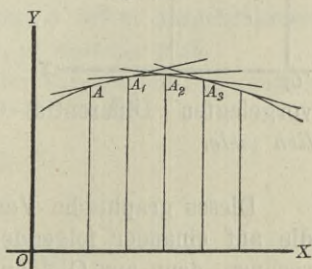
dass Gleichung (6.) für jeden Werth von x die Richtung der Curventangente angiebt; denn α ist in Gleichung (8.) der Winkel, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der X -Axe bildet. Bewegt sich also ein Punkt P , von einem beliebigen Anfangspunkte A ausgehend, so, dass er in jedem Punkte der durchlaufenen Curve die durch Gleichung (6.) gegebene Richtung hat, so nennt man diese Curve „eine *Integral-Curve*“ und die Gleichung zwischen x und y , der eine solche Integral-Curve genügt, „eine *Integral-Gleichung*“ der vorgelegten Differential-

Gleichung. Näherungsweise kann man sogar solche Integral-Curven construiren. Ist z. B. A der Anfangspunkt der Curve (Fig. 134) mit den Coordinaten a und b , so kann man die Tangente im Punkte A construiren, weil man aus der Gleichung

$$(9.) \quad \operatorname{tg} \alpha = \varphi(a, b)$$

den Winkel α berechnen kann.

Fig. 134.



Auf dieser Tangente liegt aber noch ein unendlich naher Curvenpunkt A_1 mit den Coordinaten a_1, b_1 . Auch für diesen Punkt findet man aus der Gleichung

$$(10.) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \varphi(a_1, b_1)$$

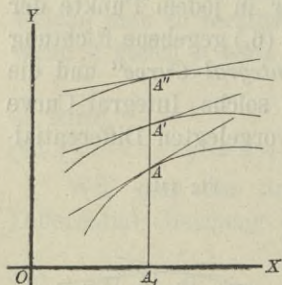
die Richtung der nächsten Tangente A_1A_2 , wobei der Punkt A_2 dem Punkte A_1 unendlich nahe liegen möge, so dass auch A_2 noch ein Punkt der Curve ist. Jetzt findet man aus der Gleichung

$$(11.) \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \varphi(a_2, b_2)$$

die Richtung der Tangente im Punkte A_2 . Indem man so weiter fortfährt, findet man beliebig viele Punkte und Tangenten der gesuchten Curve, welche der vorgelegten Differential-Gleichung genügt.

Da man in Wirklichkeit die Punkte $A, A_1, A_2 \dots$ einander nicht unendlich nahe legen kann, so liefert dieses Verfahren bei der praktischen Ausführung zwar nur eine grobe Annäherung; in der Vorstellung ist man aber dieser Beschränkung nicht unterworfen, so dass man damit bewiesen hat, dass die vorgelegte Differential-Gleichung immer eine Integral-Curve besitzt, bei welcher der Anfangspunkt A noch beliebig ist.

Fig. 135.



vorgelegten Differential-Gleichung genügt, sondern unendlich viele.

Gleichzeitig erkennt man aus diesem graphischen Verfahren, dass die Differential-Gleichung nicht ein Integral, sondern unendlich viele Integrale besitzt. Weil nämlich Gleichung (6.) nur die Richtung der Tangente angiebt, so kann man für die Abscisse $x = a$ die Ordinate $y = b$ noch beliebig wählen, d. h. es wird nicht eine Curve geben, welche der

Dieses graphische Verfahren kann man auch benutzen, um die auf einander folgenden Werthe $b, b_1, b_2 \dots$ von y zu berechnen, denn aus Gleichung (6.) findet man zunächst

$$(12.) \quad \frac{b_1 - b}{a_1 - a} = \varphi(a, b), \quad \text{oder} \quad b_1 = b + (a_1 - a)\varphi(a, b)$$

und ebenso

$$(13.) \quad b_2 = b_1 + (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1),$$

u. s. w. Dabei sind allerdings b_1, b_2, \dots nur *Näherungswerthe*, die um so weniger von den wahren Werthen abweichen, je kleiner man die Differenzen $a_1 - a, a_2 - a_1, \dots$ nimmt.

Wesentlich ist dabei die Erkenntniss, dass, so lange die Function $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von x und y eindeutig und stetig bleibt, einer stetigen Aufeinanderfolge der Werthe von x auch eine stetige Aufeinanderfolge der zugehörigen Werthe der y entspricht. Macht man daher die Voraussetzung, dass die Differential-Gleichung (6.) ein Integral von der Form

$$(14.) \quad y = F(x, a, b)$$

besitzt, so kann man diese *Integral-Function*, welche der Kürze wegen mit $f(x)$ bezeichnet werden möge, mit Hülfe des *Taylor'schen* Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln, wobei noch der Anfangswerth a ganz beliebig ist. Dies giebt (vergl. D.-R., Formel Nr. 86 der Tabelle)

$$(15.) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R.$$

Bezeichnet man den willkürlichen Werth von y , welcher dem Anfangswerthe $x = a$ zugeordnet ist, mit b , so wird

$$(16.) \quad b = f(a).$$

Nur diejenigen Werthe von a und b sollen ausgeschlossen werden, für welche die Function $\varphi(x, y)$ *unstetig* wird.

Aus Gleichung (6.), nämlich aus der vorgelegten Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

folgt dann zunächst

$$(17.) \quad f'(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \varphi(a, b).$$

Hierbei ist mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, welchen man erhält, wenn man $x = a$ und $y = b$ setzt. Ebenso möge

$$(18.) \quad f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=a}$$

aus $\frac{d^ny}{dx^n}$ hervorgehen, indem man $x = a$, $y = b$ setzt. Aus Gleichung (6.) folgt dann weiter (vergl. D.-R., Formel Nr. 126 der Tabelle)

$$(19.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi_1 + \varphi_2 \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$(20.) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2},$$

.....

Bezeichnet man der Kürze wegen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi'(x, y),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\varphi'(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi''(x, y),$$

.....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\varphi^{(n-2)}(x, y)}{dx} \quad \text{mit} \quad \varphi^{(n-1)}(x, y),$$

so gehen die Gleichungen (19.) und (20.) über in

$$(19 \text{ a.}) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y),$$

$$(20 \text{ a.}) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'_1(x, y) + \varphi'_2(x, y) \frac{dy}{dx} = \varphi''(x, y),$$

.....

Daraus findet man

$$(21.) \quad f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \dots,$$

d. h. man kann sämtliche Coefficienten auf der rechten Seite von Gleichung (15.) berechnen.

Die Bedingungen dafür, dass der Rest R für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein wird, sollen erst an einer späteren Stelle aufgesucht werden, erstens, damit die vorliegende Darstellung nicht unterbrochen wird, und zweitens, weil die Herleitung dieser Bedingungen für den Anfänger möglicher Weise noch zu schwer ist. Deshalb möge die Untersuchung der Convergenz in einem besonderen Paragraphen ausgeführt werden, den der Anfänger nöthigenfalls übergehen kann, ohne das Verständniss für das Folgende zu verlieren.

Es möge hier also vorausgesetzt werden, dass die durch das beschriebene Verfahren aufgefundenene unendliche Reihe

$$(22.) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

convergent sei, dann kann man auch beweisen, dass

$$(23.) \quad y = f(x)$$

das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung ist, wobei nach Gleichung (16.)

$$f(a) = b$$

sein soll. Setzt man nämlich den gefundenen Werth von y in die Function $\varphi(x, y)$ ein und entwickelt dieselbe nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$(24.) \quad \varphi(x, y) = \varphi(a, b) + \frac{\varphi'(a, b)}{1!}(x-a) + \frac{\varphi''(a, b)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Andererseits erhält man aus Gleichung (15.) unter der Voraussetzung, dass für hinreichend grosse Werthe von n der Rest R und die Ableitung des Restes $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein werden, indem man die einzelnen Glieder differentiirt,

$$(25.) \quad \frac{dy}{dx} = f'(a) + f''(a) \frac{x-a}{1!} + f'''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Nun ist aber nach den Gleichungen (21.)

$$f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \dots$$

d. h. die rechte Seite von Gleichung (25.) stimmt Glied für Glied mit der rechten Seite von Gleichung (24.) überein, folglich müssen auch die linken Seiten einander gleich sein; es ist also

$$(26.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

was zu beweisen war.

Man kann demnach

$$y = f(x) = F(x, a, b)$$

so als Function von x bestimmen, dass einem gegebenen Anfangswerthe $x = a$ ein beliebiger Anfangswerth $y = b$ zugeordnet ist, und dass diese Function der vorgelegten Differential-Gleichung genügt.

Das angegebene Verfahren kann in allen Fällen, wo $\varphi(x, y)$ eine eindeutige, stetige Function ist, angewendet werden und wird meist sehr brauchbare Resultate liefern. In vielen Fällen wird es aber möglich sein, das *allgemeine Integral* in *geschlossener* Form, d. h. *ohne* Reihen-Entwicklung durch eine Gleichung

$$(27.) \quad \Phi(x, y, C) = 0$$

darzustellen. Aus dieser *Integral-Gleichung* kann man im Allgemeinen die Integrations-Constante C so bestimmen, dass für $x = a$ die abhängige Veränderliche y gleich b wird; man braucht ja nur die Gleichung

$$(28.) \quad \Phi(a, b, C) = 0$$

nach C aufzulösen. Setzt man einen der gefundenen Werthe von C in die Gleichung (27.) ein und entwickelt wieder y nach steigenden Potenzen von $x - a$, so muss man genau dasselbe Resultat wie vorher erhalten, weil in beiden Entwicklungen das erste Glied gleich b wird, und weil sich die Coefficienten der folgenden Glieder schon aus der vorgelegten Differential-Gleichung

$$(29.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

ergeben, welche aus der Integral-Gleichung (27.) durch Differentiation hervorgeht. Löst man nämlich Gleichung (27.) nach y auf, berechnet sodann $\frac{dy}{dx}$ und setzt diese Grössen in Gleichung (29.) ein, so muss die Gleichung *identisch* befriedigt werden, d. h.

sie muss für *alle* Werthe von x und C gelten. Deshalb kann man auch die Differential-Gleichung (29.) aus den Gleichungen

$$(30.) \quad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

durch Elimination von C herleiten.

Wie man also auch die Integral-Gleichung aufgefunden haben mag, man erhält in allen Fällen dasselbe allgemeine Integral, so lange $\varphi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von x und y eine eindeutige, stetige Function ist.

Durch *eine* Gleichung zwischen x, y, z wird die veränderliche Grösse z als Function der *beiden* unabhängigen Veränderlichen x und y dargestellt. Will man die beiden Veränderlichen y und z als Functionen der *einzigsten* Veränderlichen x erklären, so braucht man dazu *zwei* Gleichungen zwischen x, y, z . (Vergl. D.-R., Seite 610—612.)

In gleicher Weise würde *eine* Gleichung zwischen x, y, z , $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ nicht ausreichen, um *zwei* veränderliche Grössen y und z als Functionen der unabhängigen Veränderlichen x zu erklären. Es müssen also mindestens *zwei* solche Gleichungen gegeben sein, die man „*ein System simultaner Differential-Gleichungen*“ nennt, weil sie *gleichzeitig* gelten. Der Einfachheit wegen kann man sich diese Gleichungen auf die Form

$$(31.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

gebracht denken.

Auch hier ergibt sich ohne Weiteres die geometrische Deutung und damit die Auflösbarkeit dieser Differential-Gleichungen. Beachtet man nämlich, dass zwei Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$ zwischen x, y, z im Allgemeinen einer *Raumcurve* entsprechen, und dass nach D.-R., Formel Nr. 221 der Tabelle die Tangente an die Raumcurve im Punkte P die Gleichungen

$$(32.) \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \quad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x)$$

hat, so erkennt man, dass die Gleichungen (31.) für jeden beliebigen Punkt der Raumcurve die Richtung der Tangente angeben. Den Anfangspunkt A mit den Coordinaten a, b, c kann man noch beliebig annehmen und findet dann aus den Gleichungen (32.) die Gleichungen

$$(33.) \quad b_1 - b = (a_1 - a)\varphi(a, b, c), \quad c_1 - c = (a_1 - a)\psi(a, b, c)$$

die Coordinaten a_1, b_1, c_1 eines benachbarten Punktes A_1 auf dieser Tangente, wobei man noch den Werth von a_1 so nahe an a annehmen darf, wie man will, damit der Punkt A_1 auch noch auf der Raumcurve liegt. Ebenso findet man aus den Gleichungen

$$(34.) \quad b_2 - b_1 = (a_2 - a_1)\varphi(a_1, b_1, c_1), \quad c_2 - c_1 = (a_2 - a_1)\psi(a_1, b_1, c_1)$$

die Coordinaten eines dritten Curvenpunktes A_2 und kann in dieser Weise beliebig fortfahren.

In Wirklichkeit kann man auch hier die Punkte A, A_1, A_2, \dots einander nicht unendlich nahe legen und erhält daher bei der praktischen Ausführung dieses Verfahrens nur ein *annäherndes Resultat*; in der Vorstellung ist man aber dieser Beschränkung nicht unterworfen.

Gleichzeitig erkennt man aus dieser Betrachtung, dass die Anfangswerthe b und c von y und z , welche dem Anfangswerthe $x = a$ entsprechen, noch ganz beliebig sind, so dass das System simultaner Differential-Gleichungen noch zweifach unendlich viele Lösungen besitzt.

Dieses Resultat ergibt sich auch aus der analytischen Behandlung der Aufgabe. Setzt man nämlich

$$(35.) \quad y = f(x) \quad \text{und} \quad z = g(x),$$

$$(36.) \quad f(a) = b \quad \text{und} \quad g(a) = c,$$

wobei die Anfangswerthe b und c noch ganz beliebig gewählt werden dürfen, so wird nach dem *Taylor'schen* Lehrsatz

$$(37.) \quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_1,$$

$$(38.) \quad z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!} (x - a) + \frac{g''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots \\ + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_2,$$

und man erhält nach den Gleichungen (31.)

$$(39.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = \varphi(a, b, c),$$

$$(40.) \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a} = g'(a) = \psi(a, b, c).$$

Ferner wird

$$(41.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z),$$

$$(42.) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = g''(x) = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z),$$

also

$$(43.) \quad f''(a) = \varphi'(a, b, c),$$

$$(44.) \quad g''(a) = \psi'(a, b, c).$$

In derselben Weise setze man

$$f'''(x) = \frac{d\varphi'(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \varphi''(x, y, z),$$

$$g'''(x) = \frac{d\psi'(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi'}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \psi''(x, y, z)$$

und fahre mit der Bildung der höheren Ableitungen fort bis

$$f^{(n)}(x) = \frac{d\varphi^{(n-2)}(x, y, z)}{dx} = \varphi^{(n-1)}(x, y, z),$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{d\psi^{(n-2)}(x, y, z)}{dx} = \psi^{(n-1)}(x, y, z);$$

dann findet man

$$(45.) \quad f^{(n)}(a) = \varphi^{(n-1)}(a, b, c),$$

$$(46.) \quad g^{(n)}(a) = \psi^{(n-1)}(a, b, c).$$

Wenn $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ und die partiellen Ableitungen dieser Functionen für die betrachteten Werthe von x, y, z stetig und eindeutig sind, so lässt sich wieder durch functionen-

theoretische Untersuchungen zeigen, dass die Restglieder R_1 und R_2 für hinreichend kleine Werthe von $|x - a|$ mit unbegrenzt wachsendem n verschwindend klein werden. Dann sind die Gleichungen (37.) und (38.) die *allgemeinen Integral-Gleichungen* der gegebenen Differential-Gleichungen, denn man kann zeigen, dass die gefundenen Werthe von y und z den Gleichungen (31.) genügen, wie man auch die Anfangswerthe b und c wählen mag. Setzt man nämlich die gefundenen Werthe von y und z in $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ ein und entwickelt diese Functionen nach steigenden Potenzen von $x - a$, so wird

$$(47.) \quad \varphi(x, y, z) = \varphi(a, b, c) + \frac{\varphi'(a, b, c)}{1!}(x - a) \\ + \frac{\varphi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \dots,$$

$$(48.) \quad \psi(x, y, z) = \psi(a, b, c) + \frac{\psi'(a, b, c)}{1!}(x - a) \\ + \frac{\psi''(a, b, c)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

Andererseits findet man unter der Voraussetzung, dass die Grössen R_1 und R_2 , $\frac{dR_1}{dx}$ und $\frac{dR_2}{dx}$ für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein werden, aus den Gleichungen (37.) und (38.) durch Differentiation

$$(49.) \quad \frac{dy}{dx} = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots,$$

$$(50.) \quad \frac{dz}{dx} = g'(a) + \frac{g''(a)}{1!}(x - a) + \frac{g'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

Aus den Gleichungen (43.) bis (46.) erkennt man aber, dass die rechten Seiten von Gleichung (47.) und (49.), desgleichen auch von Gleichung (48.) und (50.) Glied für Glied mit einander übereinstimmen, folglich sind auch die linken Seiten einander gleich, d. h. es wird

$$(51.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

$$(52.) \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z).$$

Besonders zu beachten ist dabei der Umstand, dass man über *zwei* willkürliche Integrations-Constante verfügt, indem man

die Anfangswerthe b und c von y und z noch beliebig wählen darf.

Man kann dieses Verfahren ohne Weiteres auf ein System von m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung mit m Functionen y_1, y_2, \dots, y_m der einzigen unabhängigen Veränderlichen x übertragen.

Denkt man sich nämlich die Gleichungen auf die Form

$$(53.) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x; y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x; y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_m}{dx} = \varphi_m(x; y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

gebracht, so kann man noch die dem Anfangswerthe $x = a$ zugeordneten Anfangswerthe b_1, b_2, \dots, b_m von y_1, y_2, \dots, y_m beliebig annehmen und dann diese Functionen y_1, y_2, \dots, y_m nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln. Dies giebt

$$(54.) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(a) + \frac{f_1'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f_1''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots, \\ y_2 = f_2(x) = f_2(a) + \frac{f_2'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f_2''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots, \\ \dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x) = f_m(a) + \frac{f_m'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f_m''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots, \end{cases}$$

wobei für $\alpha = 1, 2, \dots, m$

$$(55.) \quad f_\alpha(a) = b_\alpha, \quad f_\alpha'(a) = \left(\frac{dy_\alpha}{dx} \right)_{x=a} = \varphi_\alpha(a; b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$(56.) \quad f_\alpha''(a) = \left(\frac{d^2 y_\alpha}{dx^2} \right)_{x=a} = \left(\frac{d\varphi_\alpha}{dx} \right)_{x=a} = \varphi_\alpha'(a; b_1, b_2, \dots, b_m),$$

allgemein

$$(57.) \quad f^{(n)}_\alpha(a) = \left(\frac{d^n y_\alpha}{dx^n} \right)_{x=a} = \left(\frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} \right)_{x=a} = \varphi_\alpha^{(n-1)}(a; b_1, b_2, \dots, b_m);$$

c_2, \dots, c_m so zu bestimmen, dass y_1, y_2, \dots, y_m für $x = a$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerte b_1, b_2, \dots, b_m annehmen.

Auf den soeben erläuterten Fall lässt sich auch die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen. Ist z. B. die Gleichung

$$(62.) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

oder

$$(63.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

gegeben, so setze man

$$(64.) \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1}.$$

Dadurch kann man die gegebene Differential-Gleichung auf die Form

$$(65.) \quad \frac{dy_{m-1}}{dx} = \varphi(x; y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$$

bringen, d. h. man hat die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung durch ein System von m Differential-Gleichungen *erster* Ordnung ersetzt, welche durch die Gleichungen (64.) und (65.) gegeben sind.

Bei der Lösung kann man noch dem Anfangswerte $x = a$ die willkürlichen Anfangswerte $b, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ von $y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ zuordnen.

Daraus ergibt sich für y die Reihen-Entwicklung

$$(66.) \quad y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$

wobei

$$(67.) \quad f(a) = b, \quad f'(a) = b_1, \quad f''(a) = b_2, \dots, f^{(m-1)}(a) = b_{m-1}$$

ganz beliebige Grössen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$(68.) \quad \begin{cases} f^{(m)}(a) = \varphi(a, b, b_1, \dots, b_{m-1}), \\ f^{(m+1)}(a) = \varphi'(a, b, b_1, \dots, b_{m-1}), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Die hier angedeutete Methode hat den Nachtheil, dass sie die Integral-Gleichungen nicht in *endlicher, geschlossener* Form liefert, aber sie giebt den Nachweis, dass bei der Integration einer Differential-Gleichung *m^{ter}* Ordnung *m* beliebige Integrations-Constanten auftreten.

Die Anzahl der Fälle, wo man die Integral-Gleichungen in endlicher, geschlossener Form auffindet, ist verhältnissmässig klein; in den meisten Fällen führt die Integration der Differential-Gleichungen durch unendliche Reihen auf bisher unbekanntere Functionen.

In den späteren Paragraphen sollen nur einige Aufgaben hervorgehoben werden, bei denen die Lösung in endlicher Form möglich ist.

Zunächst aber soll noch die Untersuchung nachgeholt werden, unter welchen Bedingungen die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

durch eine *convergente* Reihe von der Form

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

möglich ist. Da aber die dazu erforderlichen Beweise etwas schwierig sind, so darf der Anfänger, wie schon oben bemerkt worden ist, den folgenden Paragraphen ohne Nachtheil für das Verständnis der späteren Paragraphen übergehen.

§ 83.

Untersuchung der Convergenz-Bedingungen.

Die Integration eines vollständigen Differentials von *zwei* unabhängigen Veränderlichen

$$(1.) \quad du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

kann noch in einer etwas anderen Form ausgeführt werden, als es in § 77 geschehen ist. Bezeichnet man nämlich die Function *u*, deren vollständiges Differential durch Gleichung (1.) gegeben ist, mit *f(x, y)*, so kann man noch die Integrations-Constante

$$C = -f(a, b)$$

hinzufügen und dadurch erreichen, dass

$$(2.) \quad u = f(x, y) - f(a, b)$$

für $x = a$ und $y = b$ verschwindet. Diese Function u erhält man, dem früheren Verfahren entsprechend, indem man zunächst

$$(3.) \quad u = \int_a^x M(x, y) dx + \varphi(y)$$

setzt, wobei $\varphi(y)$ noch eine passend zu bestimmende Function der einzigen Veränderlichen y ist.

Zur Ermittlung dieser Function beachte man zunächst, dass

$$(4.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

sein muss, damit du ein vollständiges Differential ist. Deshalb findet man, indem man die Gleichung (3.) partiell nach y differentiirt und dabei auf der rechten Seite die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt,

$$(5.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \int_a^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= N(x, y) = [N(x, y)]_a^x + \varphi'(y) \\ &= N(x, y) - N(a, y) + \varphi'(y), \end{aligned}$$

oder

$$(6.) \quad \varphi'(y) = N(a, y), \quad \varphi(y) = \int_b^y N(a, y) dy.$$

Dies giebt

$$(7.) \quad u = \int_a^x M(x, y) dx + \int_b^y N(a, y) dy.$$

Ebenso findet man

$$(8.) \quad u = \int_b^y N(x, y) dy + \int_a^x M(x, b) dx.$$

Indem man die beiden für u gefundenen Werthe einander gleichsetzt, erhält man

$$(9.) \int_a^x [M(x, y) - M(x, b)] dx = \int_b^y [N(x, y) - N(a, y)] dy.$$

Diese Gleichung gilt für zwei beliebige Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$, welche der einzigen durch die Gleichung (4.) aufgestellten Bedingung unterworfen sind.

Jetzt sei $f(z)$ eine Function, welche für die betrachteten Werthe der complexen Veränderlichen

$$(10.) \quad z = x + yi = r(\cos t + i \sin t) = r \cdot e^{ti*}$$

eindeutig und stetig sein und eine bestimmte, stetige Ableitung $f'(z)$ besitzen möge; dann wird

$$(11.) \quad dz = e^{ti} dr + ir \cdot e^{ti} dt,$$

$$(12.) \quad f(z) dz = M(r, t) dr + N(r, t) dt,$$

wobei

$$(13.) \quad M(r, t) = f(r \cdot e^{ti}) \cdot e^{ti},$$

$$(14.) \quad N(r, t) = f(r \cdot e^{ti}) \cdot ir \cdot e^{ti}.$$

Zunächst erkennt man, dass die rechte Seite von Gleichung (12.) ein vollständiges Differential ist, denn es wird

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial r} = ie^{ti} [f(r \cdot e^{ti}) + r \cdot e^{ti} f'(r \cdot e^{ti})].$$

Setzt man die Werthe von M und N aus den Gleichungen (13.) und (14.) in die Gleichung (9.) ein, indem man x mit r und y mit t vertauscht, so erhält man

$$(15.) \quad \int_a^r [M(r, t) - M(r, b)] dr = \int_b^t [N(r, t) - N(a, t)] dt.$$

Die Grenzen a und r , b und t sind noch ganz beliebig, man darf deshalb setzen

$a = 0$, $b = 0$, $t = 2\pi$, also $e^{bi} = e^0 = 1$, $e^{ti} = e^{2\pi i} = 1$, während r vorläufig noch einen beliebigen Werth haben soll.

*) Das Argument ist hier mit t und nicht, wie gewöhnlich, mit φ bezeichnet, damit der Buchstabe φ in dem Folgenden noch als Functionszeichen verwendet werden kann.

Da $f(z)$ für die betrachteten Werthe von z nach Voraussetzung *eindeutig* und *stetig* ist, so wird nach Gleichung (13.) für $t = 2\pi$

$$(16.) \quad M(r, t) - M(r, b) = f(r) - f(r) = 0,$$

und nach Gleichung (14.)

$$(17.) \quad N(r, t) - N(a, t) = ir \cdot e^{ti} \cdot f(r \cdot e^{ti}),$$

folglich geht Gleichung (15.) über in

$$\int_0^{2\pi} N(r, t) dt = i \int_0^{2\pi} r \cdot e^{ti} f(r \cdot e^{ti}) dt = 0,$$

oder

$$(18.) \quad \int_0^{2\pi} r \cdot e^{ti} f(r \cdot e^{ti}) dt = \int_0^{2\pi} z f(z) dz = 0,$$

wo bei der Integration r einen constanten Werth hat. Für

$$(19.) \quad f(z) = \frac{F(z) - F(a)}{z - a}$$

erhält man daher

$$\int_0^{2\pi} z \frac{F(z) - F(a)}{z - a} dt = 0,$$

oder

$$(20.) \quad \int_0^{2\pi} z F(z) dz = F(a) \int_0^{2\pi} z dz.$$

Nun wird, wenn $|a| < |z|$ ist, nach dem binomischen Lehrsatz

$$(21.) \quad \frac{z}{z - a} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots,$$

also

$$(22.) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{z dz}{z - a} &= \int_0^{2\pi} dz + \sum_{m=1}^{\infty} a^m \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z^m} \\ &= 2\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{r^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} dt \\ &= 2\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{r^m} \left[\frac{i}{m} e^{-mti} \right]_0^{2\pi} = 2\pi, \end{aligned}$$

folglich geht Gleichung (20.) über in

$$(23.) \quad \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{z - a} = 2\pi \cdot F(a),$$

oder

$$(24.) \quad F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{z - a}.$$

Diese wichtige Formel rührt von *Cauchy* her und kann noch in folgender Weise verallgemeinert werden. Differentiirt man beide Seiten der Gleichung (24.) nach a , so erhält man, indem man auf der rechten Seite die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt, der Reihe nach die Gleichungen

$$F'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{(z - a)^2},$$

$$F''(a) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{(z - a)^3},$$

$$F'''(a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{(z - a)^4},$$

.....

allgemein

$$(25.) \quad F^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z) dt}{(z - a)^{m+1}}.$$

Der absolute Betrag von z bleibt bei der Integration constant und möge deshalb mit R bezeichnet werden, so dass $z = R \cdot e^{ti}$ wird. Dadurch geht Gleichung (25.) für $a = 0$ über in

$$(26.) \quad F^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} F(R \cdot e^{ti}) dt.$$

Wenn man schliesslich noch

$$F(z) = \varphi(a + z)$$

setzt, so ergibt sich hieraus die Formel

$$(27.) \quad \varphi^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} \varphi(a + R \cdot e^{ti}) dt.$$

Da man ein bestimmtes Integral als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen auffassen kann, und da der absolute Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge (vergl. D.-R., § 105), so erhält man aus Gleichung (27.) die folgende Ungleichung

$$|\varphi^{(m)}(a)| \leq \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} |e^{-mti}| \cdot |\varphi(a + R \cdot e^{ti})| dt,$$

oder, da $|e^{-mti}| = 1$ ist,

$$(28.) \quad |\varphi^{(m)}(a)| \leq \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} |\varphi(a + R \cdot e^{ti})| dt.$$

Bezeichnet man nun mit G den grössten Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x)$, wenn r in $x = a + r \cdot e^{ti}$ alle Werthe von 0 bis R und t alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so ist auch

$$(29.) \quad |\varphi(a + R \cdot e^{ti})| \leq G,$$

und die Ungleichung (28.) wird noch verstärkt, wenn man $|\varphi(a + R \cdot e^{ti})|$ mit G vertauscht; folglich findet man

$$|\varphi^{(m)}(a)| \leq \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} G dt = \frac{m!G}{R^m}.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige Function der complexen Veränderlichen $x = a + r \cdot e^{ti}$, welche mit ihrer ersten Ableitung stetig ist, so lange $r \leq R$ bleibt, und ist G der grösste Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x)$, wenn r alle Werthe von 0 bis R und t alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so ist*

$$(30.) \quad |\varphi^{(m)}(a)| \leq \frac{m!G}{R^m}.$$

Diesen Satz kann man sogleich auf Functionen von zwei oder mehr Veränderlichen übertragen. Aus Gleichung (27.) folgt, wenn man y zunächst als Constante und $\varphi(x, y)$ als Function der einzigen Veränderlichen x betrachtet,

$$(31.) \quad \frac{\partial^m \varphi(a, y)}{\partial a^m} = \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} \varphi(a + R \cdot e^{ti}, y) dt^*,$$

wobei $\varphi(x, y)$ als Function von x denselben Bedingungen unterworfen ist wie vorher $\varphi(x)$. Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung n -mal partiell nach y , so geschieht das auf der rechten Seite der Gleichung wieder, indem man unter dem Integralzeichen differentiirt. Dadurch erhält man

$$(32.) \quad \frac{\partial^{m+n} \varphi(a, y)}{\partial a^m \partial y^n} = \frac{m!}{2\pi \cdot R^m} \int_0^{2\pi} e^{-mti} \frac{\partial^n \varphi(a + R \cdot e^{ti}, y)}{\partial y^n} dt.$$

Nun ist aber wieder nach Gleichung (27.), wenn man x mit y , a mit b , t mit u , m mit n und R mit S vertauscht,

$$(33.) \quad \frac{\partial^n \varphi(a + R \cdot e^{ti}, b)}{\partial b^n} = \frac{n!}{2\pi \cdot S^n} \int_0^{2\pi} e^{-nui} \varphi(a + R \cdot e^{ti}, b + S \cdot e^{ui}) du,$$

wobei man voraussetzt, dass die Function $\varphi(x, y)$ auch in Bezug auf y mit ihrer ersten Ableitung *eindeutig* und *stetig* ist, und wo y gleich $b + S \cdot e^{ui}$ gesetzt ist. Für y gleich b geht daher Gleichung (32.) über in

*) Hierbei ist der Werth von $\frac{\partial^m \varphi(x, y)}{\partial x^m}$ für $x = a$ der Kürze wegen mit $\frac{\partial^m \varphi(a, y)}{\partial a^m}$ bezeichnet. In ähnlicher Weise möge in dem Folgenden der Werth von $\frac{\partial^{m+n} \varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$ für $x = a$, $y = b$ der Kürze wegen mit $\frac{\partial^{m+n} \varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n}$ bezeichnet werden.

$$(34.) \quad \frac{\partial^{m+n} \varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} = \frac{m! n!}{4\pi^2 \cdot R^m \cdot S^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(mt+nu)i} \varphi(a + R \cdot e^{ti}, b + S \cdot e^{ui}) dt du.$$

Ist G der grösste Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x, y)$, wenn $r = |x|$ alle Werthe von 0 bis R , $s = |y|$ alle Werthe von 0 bis S , t und u alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen, und wendet man jetzt wieder den Satz an, dass der absolute Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge, so findet man aus der Gleichung (34.) die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial^{m+n} \varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right| \leq \frac{m! n!}{4\pi^2 \cdot R^m \cdot S^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(a + R \cdot e^{ti}, b + S \cdot e^{ui})| dt du \\ \leq \frac{m! n!}{4\pi^2 \cdot R^m \cdot S^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G dt du,$$

oder

$$(35.) \quad \left| \frac{\partial^{m+n} \varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right| \leq \frac{m! n! G}{R^m \cdot S^n}.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. Ist $\varphi(x, y)$ eine eindeutige Function der beiden complexen Veränderlichen

$$x = a + r \cdot e^{ti}, \quad y = b + s \cdot e^{ui},$$

welche mit den beiden ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$,

$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$ stetig ist, so lange $r \leq R$, $s \leq S$ bleibt, und ist G der

grösste Werth des absoluten Betrages von $\varphi(x, y)$, wenn r alle Werthe von 0 bis R , s alle Werthe von 0 bis S , t und u alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen, so ist der absolute Betrag

von $\frac{\partial^{m+n} \varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$ für $x = a$, $y = b$ kleiner als $\frac{m! n! G}{R^m \cdot S^n}$.

Diesem Satze kann man noch eine andere Fassung geben.

Es sei

$$(36.) \quad \Phi(x, y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)},$$

dann wird

$$(37.) \quad \frac{\partial^{m+n}\Phi(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{m! n! G}{R^m \cdot S^n \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)^{m+1} \left(1 - \frac{y-b}{S}\right)^{n+1}},$$

also für $x = a, y = b$

$$(38.) \quad \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} = \frac{m! n! G}{R^m S^n},$$

folglich geht Gleichung (35.) über in

$$(39.) \quad \left| \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right| \leq \left| \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right|.$$

Nun lässt sich die Differential-Gleichung

$$(40.) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{G}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)\left(1 - \frac{y-b}{S}\right)} = \Phi(x, y)$$

sehr leicht integrieren, wenn man Gleichung (40.) auf die Form

$$(41.) \quad \left(1 - \frac{y-b}{S}\right) dy = \frac{G dx}{1 - \frac{x-a}{R}}$$

bringt und beide Seiten der Gleichung integriert. Beachtet man dabei noch, dass $y = b$ sein soll für $x = a$, so findet man

$$(42.) \quad y - b - \frac{(y-b)^2}{2S} = -G \cdot R \cdot \ln \left(1 - \frac{x-a}{R}\right),$$

oder

$$y - b = S \pm \sqrt{S^2 + 2G \cdot R \cdot S \cdot \ln \left(1 - \frac{x-a}{R}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für $x = a$

$$y - b = S \pm S,$$

folglich muss man das untere Zeichen nehmen, damit $y = b$ wird für $x = a$; es ist also

$$(43.) \quad y = b + S - \sqrt{S^2 + 2G \cdot R \cdot S \cdot \ln\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)} = F(x).$$

Diese Function ist *eindeutig* und *stetig*, so lange

$$(44.) \quad \left| \ln\left(1 - \frac{x-a}{R}\right) \right| > -\frac{S}{2G \cdot R},$$

denn die Quadratwurzel wechselt nur dann ihr Vorzeichen, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen verschwindet, wenn also $\ln\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)$ gleich $-\frac{S}{2G \cdot R}$ wird; und auch der Werth von $\ln\left(1 - \frac{x-a}{R}\right)$ ist in diesem Falle eindeutig bestimmt, weil er für $x = a$ verschwinden soll. Setzt man

$$(45.) \quad R\left(1 - e^{-\frac{S}{2G \cdot R}}\right) = g$$

und beschränkt x auf solche Werthe, für welche

$$(46.) \quad |x - a| < g$$

ist, so wird mit Rücksicht darauf, dass der absolute Betrag einer Differenz (gleich oder) grösser ist als die Differenz der absoluten Beträge,

$$(47.) \quad \left| 1 - \frac{x-a}{R} \right| \geq 1 - \frac{|x-a|}{R} > 1 - \frac{g}{R} = e^{-\frac{S}{2G \cdot R}}$$

Nun ist der absolute Betrag des Logarithmus einer complexen Grösse $r \cdot e^{\varphi i}$ (gleich oder) grösser als der Logarithmus des absoluten Betrages dieser Grösse, denn es ist allgemein

$$|\ln(r \cdot e^{\varphi i})| = |\ln r + \varphi i| = \sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} \geq \ln r,$$

folglich ist auch

$$(48.) \quad \left| \ln\left(1 - \frac{x-a}{R}\right) \right| \geq \ln\left| 1 - \frac{x-a}{R} \right| > -\frac{S}{2G \cdot R}.$$

Wenn also die Ungleichung (46.) gilt, so gilt erst recht die Ungleichung (44.). Dann wird aber $y = F(x)$ eine *eindeutige*, *stetige* Function, die man mit Hülfe des *Taylor'schen* Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $x-a$ entwickeln kann; und zwar findet man die Coefficienten der Reihe

$$(49.) \quad y = b + \frac{F'(a)}{1}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

aus Gleichung (40.). Es ist nämlich

$$(50.) \quad \left\{ \begin{array}{l} F'(a) = \Phi(a, b) = G, \\ F''(a) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)_{x=a, y=b}, \\ F'''(a) = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=a, y=b}, \\ \dots \end{array} \right.$$

Die Bildung dieser Ausdrücke wird dadurch erleichtert, dass nach Gleichung (38.)

$$\left(\frac{\partial^{m+n} \Phi}{\partial x^m \partial y^n} \right)_{x=a, y=b} = \frac{m! n! G}{R^m \cdot S^n}$$

ist. Gleichzeitig erkennt man hieraus, dass die partiellen Ableitungen von $\Phi(x, y)$ für $x = a$, $x = b$ sämtlich *reell* und *positiv* sind. Deshalb sind auch die Grössen $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$, ... sämtlich *reell* und *positiv*.

Bezeichnet man mit A den grössten Werth des absoluten Betrages von y , wenn in

$$x = a + r \cdot e^{it}$$

r alle Werthe von 0 bis g und t alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so wird nach Ungleichung (30.)

$$(51.) \quad F^{(m)}(a) \leq \frac{m! A}{g^m},$$

folglich ist die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (49.) *convergent*, da die einzelnen Glieder derselben (gleich oder) kleiner sind als die Glieder der geometrischen Progression

$$(52.) \quad A + \frac{A(x-a)}{g} + \frac{A(x-a)^2}{g^2} + \frac{A(x-a)^3}{g^3} + \dots = \frac{Ag}{g-(x-a)}.$$

Vergleicht man nun mit der soeben gelösten Differential-Gleichung erster Ordnung die allgemeinere

$$(53.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

so ergibt sich Folgendes. Es sei wieder $\varphi(x, y)$ eine *eindeutige* Function der beiden complexen Veränderlichen

$$x = a + r \cdot e^{ti}, \quad y = b + s \cdot e^{ui},$$

welche den in Satz 2 angegebenen Bedingungen genügen möge, dann kann man jetzt beweisen, dass die schon in Gleichung (22.) des vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Reihe

$$(54.) \quad y = b + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

convergent ist für alle Werthe von x , bei denen der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als g ist.

Nach Ungleichung (39.) war nämlich

$$\left| \frac{\partial^{m+n}\varphi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n} \right| \leq \frac{\partial^{m+n}\Phi(a, b)}{\partial a^m \partial b^n},$$

folglich wird auch der absolute Betrag von

$$f^{(p)}(a) = \left(\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-1}} \right)_{x=a, y=b}$$

(gleich oder) kleiner als

$$F^{(p)}(a) = \left(\frac{d^{p-1}\Phi}{dx^{p-1}} \right)_{x=a, y=b},$$

wie aus der mehrfach erwähnten Bildung der Grössen $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ... und $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$... hervorgeht. Unter der Voraussetzung, dass die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (54.) *convergent* ist, war aber schon in dem vorhergehenden Paragraphen nachgewiesen worden, dass die Gleichung (54.) das *allgemeine Integral* der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Wenn $\varphi(x, y)$ eine eindeutige Function der beiden complexen Veränderlichen*

$$x = a + r \cdot e^{ti}, \quad y = b + s \cdot e^{ui}$$

ist und mit ihren beiden ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$,

$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$ stetig bleibt, so lange $r \leq R$, $s \leq S$ bleibt, so existirt eine (analytische) Function $y = f(x)$, welche eindeutig und stetig

ist, so lange der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als eine bestimmte reelle, positive Grösse g bleibt, für $x = a$ den Werth b annimmt und der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

genügt.

Die Grösse g ist dabei durch die Gleichung (45.) erklärt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Existenz allgemeiner Integral-Gleichungen nachweisen, wenn ein System von m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung, also m Gleichungen zwischen x, y_1, y_2, \dots, y_m , $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}$ gegeben sind.

Auf diesen Fall lässt sich dann auch, wie schon angedeutet wurde, die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnung zurückführen.

§ 84.

Trennung der Variabeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 207.)

Ist die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$(1.) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben, so löse man sie in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ auf, d. h. man bringe sie auf die Form

$$(2.) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

oder

$$(2a.) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Ist nun hierbei $M(x, y)$ eine Function X der einzigen Veränderlichen x und $N(x, y)$ eine Function Y der einzigen Veränderlichen y , ist also

$$(3.) \quad M(x, y) = X, \quad N(x, y) = Y,$$

so kann man sofort das *allgemeine Integral*

$$(4.) \quad \int X dx + \int Y dy = C$$

bilden. Hat die Differential-Gleichung diese Form noch nicht, so wird man sie auf diese Form zu bringen suchen. Das Verfahren, welches man dabei ausführt, nennt man „*Integration durch Trennung der Variablen*“. Ist z. B. die Differential-Gleichung

$$(5.) \quad X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0$$

gegeben, wo X_1 und X_2 Functionen der einzigen Veränderlichen x , Y_1 und Y_2 Functionen der einzigen Veränderlichen y sind, so dividirt man die linke Seite von Gleichung (5.) durch $X_2 Y_1$ und erhält

$$(6.) \quad \frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0,$$

also

$$(7.) \quad \int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy = C.$$

Da ein Integral von der Form $\int X dx$ als der Flächeninhalt einer ebenen Figur betrachtet werden kann (deren Begrenzung in Formel Nr. 4 der Tabelle angegeben ist), so nennt man hier, wo von der Integration der Differential-Gleichungen die Rede ist, die Ermittlung eines solchen Integrals eine „*Quadratur*“.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(8.) \quad y dx - x dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (8.) durch $-xy$ dividirt, erhält man

$$(9.) \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \ln y - \ln x = \ln C,$$

$$(10.) \quad y = Cx.$$

Die Integrations-Constante ist in diesem Falle mit $\ln C$ bezeichnet worden, damit der Uebergang von den Logarithmen zu den Numeri erleichtert wird.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.) \quad (x^2 - a^2)dy - ydx = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (11.) durch $(x^2 - a^2)y$ dividirt, erhält man

$$(12.) \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0,$$

also nach Formeln Nr. 29 a der Tabelle

$$2a \int \frac{dy}{y} - 2a \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = 2a \ln y - \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right) = \ln C,$$

$$(13.) \quad y^{2a} = C \frac{x - a}{x + a}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(14.) \quad x^2 dy + (y - a)dx = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (14.) durch $x^2(y - a)$ dividirt, erhält man

$$(15.) \quad \frac{dy}{y - a} + \frac{dx}{x^2} = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y - a} + \int \frac{dx}{x^2} = \ln(y - a) - \frac{1}{x} = \ln C,$$

$$\ln(y - a) = \ln C + \frac{1}{x} = \ln C + \ln(\sqrt{x/e}),$$

$$(16.) \quad y - a = C \cdot \sqrt{x/e}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(17.) \quad xydx - (a + x)(b + y)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (17.) durch $y(a + x)$ dividirt, erhält man

$$(18.) \quad \frac{x dx}{a+x} - \frac{(b+y)dy}{y} = \left(1 - \frac{a}{a+x}\right) dx - \left(1 + \frac{b}{y}\right) dy = 0,$$

$$\int \left(1 - \frac{a}{a+x}\right) dx - \int \left(1 + \frac{b}{y}\right) dy = x - a \ln(a+x) - y - b \ln y = C,$$

oder

$$(19.) \quad x - y = C + \ln[(a+x)^a \cdot y^b].$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(20.) \quad x^3 y dx + y dx + x y^2 dy - x dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Man kann die vorgelegte Differential-Gleichung zunächst auf die Form

$$(x^3 + 1)y dx + x(y^2 - 1)dy = 0$$

bringen und dann durch xy dividieren. Dadurch erhält man

$$(21.) \quad \frac{(x^3 + 1)dx}{x} + \frac{(y^2 - 1)dy}{y} = 0,$$

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx + \int \left(y - \frac{1}{y}\right) dy = C,$$

oder

$$(22.) \quad \frac{x^3}{3} + \ln x + \frac{y^2}{2} - \ln y = C.$$

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

$$(23.) \quad (1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0$$

integrieren.

Auflösung. Indem man die linke Seite von Gleichung (23.) durch $(1 + x^2)\sqrt{1 - y^2}$ dividirt, erhält man

$$(24.) \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{dx}{1 + x^2} = 0,$$

also

$$(25.) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \int \frac{dx}{1 + x^2} = \arcsin y - \operatorname{arctg} x = C.$$

Aufgabe 7. Man soll die Differential-Gleichung

$$(26.) \quad x dy - y dx = dy \sqrt{1 + x^2} + dx \sqrt{1 + y^2}$$

integrieren.

Auflösung. Man bringt die Differential-Gleichung zunächst auf die Form

$$(27.) \quad (x - \sqrt{1+x^2})dy - (y + \sqrt{1+y^2})dx = 0$$

und dividirt die linke Seite dieser Gleichung durch $(x - \sqrt{1+x^2})$ und durch $(y + \sqrt{1+y^2})$; dies giebt

$$(28.) \quad \frac{dy}{y + \sqrt{1+y^2}} - \frac{dx}{x - \sqrt{1+x^2}} = 0,$$

oder

$$(29.) \quad (\sqrt{1+y^2} - y)dy + (\sqrt{1+x^2} + x)dx = 0,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 124 der Tabelle

$$\begin{aligned} & \frac{y}{2} \sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - \frac{y^2}{2} \\ & + \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} C, \end{aligned}$$

oder

$$(30.) \quad x^2 - y^2 + x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} + \ln[(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2})] = C.$$

Aufgabe 8. Man soll die Differential-Gleichung

$$(31.) \quad \sin x \sin y dy = \cos x \cos y dx$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (31.) durch $-\sin x \cos y$ dividirt, erhält man

$$(32.) \quad \frac{\cos x dx}{\sin x} - \frac{\sin y dy}{\cos y} = 0,$$

also durch Integration

$$\ln(\sin x) + \ln(\cos y) = \ln C,$$

oder

$$(33.) \quad \sin x \cos y = C.$$

Aufgabe 9. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Subtangente die constante Länge a hat.

Auflösung. Da die Subtangente einer Curve $St = y \frac{dx}{dy}$ ist, so erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$(34.) \quad y \frac{dx}{dy} = a,$$

$$(35.) \quad dx = \frac{ady}{y},$$

$$(36.) \quad x - x_0 = a \ln y,$$

oder

$$(37.) \quad y = e^{\frac{x-x_0}{a}}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Linie*.

Aufgabe 10. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Subtangente n -mal so gross ist wie die zugehörige Abscisse.

Auflösung. Für die gesuchten Curven wird

$$(38.) \quad y \frac{dx}{dy} = nx,$$

$$(39.) \quad \frac{dx}{x} = \frac{ndy}{y},$$

$$(40.) \quad \ln x + \ln(2p) = n \ln y,$$

wobei man die Integrations-Constante mit $\ln(2p)$ bezeichnet hat. Dies giebt

$$(41.) \quad y^n = 2px,$$

also die Gleichung der *verallgemeinerten Parabel*.

Für $n = 2$ stellt die Gleichung die *gewöhnliche Parabel* dar, für welche die Subtangente doppelt so gross ist wie die Abscisse.

Aufgabe 11. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Polar-Subnormale die constante Länge a hat.

Auflösung. Die Polar-Subnormale ist $Sn = \frac{dr}{d\varphi}$, folglich wird für die gesuchten Curven

$$(42.) \quad \frac{dr}{d\varphi} = a, \quad \text{oder} \quad dr = a \cdot d\varphi,$$

$$(43.) \quad r = a(\varphi - \varphi_0).$$

Die gesuchten Curven sind also *Archimedische Spiralen*.

Aufgabe 12. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Polar-Subtangente die constante Länge a hat.

Auflösung. Die Polar-Subtangente ist $St = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$, folglich wird für die gesuchten Curven

$$(44.) \quad \frac{r^2 d\varphi}{dr} = a, \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{adr}{r^2},$$

$$(45.) \quad \varphi - \varphi_0 = -\frac{a}{r}, \quad \text{oder} \quad r(\varphi - \varphi_0) = -a.$$

Die gesuchten Curven sind also *hyperbolische Spiralen*.

Aufgabe 13. Man soll alle Curven bestimmen, welche mit der X-Axe, vom Nullpunkte an gerechnet, und mit der Ordinate QP ein Flächenstück OQP begrenzen, dessen Inhalt der n^{te} Theil des Rechtecks xy ist.

Auflösung. Da das von der Curve begrenzte Flächenstück den Inhalt

$$(46.) \quad F = \int_0^x y dx$$

hat, so erhält man für die gesuchten Curven die Gleichung

$$(47.) \quad xy = n \int_0^x y dx, \quad \text{oder} \quad xdy + ydx = nydx,$$

$$xdy = (n-1)ydx,$$

$$(48.) \quad \frac{dy}{y} = (n-1) \frac{dx}{x},$$

$$\ln y = (n-1) \ln x + \ln C = \ln(Cx^{n-1}),$$

$$(49.) \quad y = Cx^{n-1}.$$

Die gesuchten Curven sind wieder *verallgemeinerte Parabeln*.

Aufgabe 14. Man soll eine Curve bestimmen, deren Tangente die constante Länge a hat.

Auflösung. Die Tangente einer Curve ist $T = y \frac{ds}{dy}$, folglich erhält man

$$(50.) \quad y \frac{ds}{dy} = a, \quad \text{oder} \quad y^2(dx^2 + dy^2) = a^2 dy^2,$$

$$y^2 dx^2 = (a^2 - y^2) dy^2, \quad \pm y dx = \sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy,$$

$$(51.) \quad \pm dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \frac{a^2 dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung integriert, findet man nach den Formeln 37 und 31 der Tabelle

$$(52.) \quad \pm (x - x_0) = \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right).$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, wird „*Tractrix* von *Huyghens*“ genannt.

Aufgabe 15. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen der Flächeninhalt eines jeden Sectors zu der Differenz der Quadrate der den Sector begrenzenden Leitstrahlen proportional ist.

Auflösung. Nennt man die begrenzenden Leitstrahlen r_1 und r und die zugehörigen Argumente φ_1 und φ , so wird nach Formel Nr. 129 der Tabelle der Flächeninhalt des Sectors

$$(53.) \quad S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

so dass für die gesuchten Curven die Gleichung

$$(54.) \quad n(r^2 - r_1^2) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi$$

gilt. Betrachtet man dabei r und φ als veränderlich, während r_1 und φ_1 constant sind, so folgt aus Gleichung (54.) durch Differentiation

$$(55.) \quad 4nr dr = r^2 d\varphi,$$

$$(56.) \quad 4n \frac{dr}{r} = d\varphi,$$

$$4n \ln r = \varphi - \varphi_0,$$

$$(57.) \quad r^{4n} = e^{\varphi - \varphi_0}, \quad r = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{4n}},$$

oder, wenn man

$$(58.) \quad \frac{1}{4n} = a, \quad e^{-a\varphi_0} = C$$

setzt,

$$(59.) \quad r = e^{a(\varphi - \varphi_0)}, \quad \text{oder} \quad r = C \cdot e^{a\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Spirale*.

§ 85.

Integration der Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 208.)

In den meisten Fällen wird die Trennung der Variabeln bei der Differential-Gleichung

$$(1.) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

durch einfache Multiplication oder Division nicht möglich sein. Mitunter wird aber die Differential-Gleichung durch passende Substitution so umgeformt werden können, dass dann die Trennung der Variabeln durchführbar ist.

Sind z. B. $M(x, y)$ und $N(x, y)$ beide *homogene Functionen* m^{ten} Grades, wird also

$$(2.) \quad M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^m \cdot N(x, y),$$

so kann man die Trennung der Variabeln in folgender Weise ermöglichen.

Aus den Gleichungen (2.) findet man für $t = \frac{1}{x}$

$$(3.) \quad M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{M(x, y)}{x^m}, \quad N\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{N(x, y)}{x^m}.$$

Dividirt man also Gleichung (1.) durch x^m und bezeichnet

$$\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} \text{ mit } f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ so erhält man}$$

$$(4.) \quad M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

oder

$$(5.) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man jetzt

$$(6.) \quad \frac{y}{x} = z, \quad \text{also } y = xz,$$

so wird

$$(7.) \quad dy = zdx + xdz,$$

und Gleichung (5.) geht über in

$$(8.) \quad z + x \frac{dz}{dx} = f(z);$$

dies giebt

$$(9.) \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x};$$

die Trennung der Variabeln ist also durchgeführt.

Man hätte natürlich auch mit demselben Rechte $x = yz$ setzen können und dadurch eine Differential-Gleichung zwischen y und z erhalten, bei der sich ebenfalls die Trennung der Variabeln ohne Weiteres ausführen lässt.

Beispiele.

In den folgenden Aufgaben ist das angegebene Verfahren anwendbar, weil $M(x, y)$ und $N(x, y)$ jedes Mal *homogene* Functionen gleich hohen Grades sind.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(10.) \quad (x + y)dx + xdy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + x(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividirt und ordnet,

$$(11.) \quad (1 + 2z)dx + xdz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$(12.) \quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0$$

und durch Integration

$$2 \ln x + \ln(1 + 2z) = \ln C,$$

also

$$(13.) \quad x^2(1 + 2z) = C, \quad \text{oder} \quad x(x + 2y) = C.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(14.) \quad (x + y)dx + (y - x)dy = 0$$

integriren.

474 § 85. Integration der Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(x + xz)dx + (xz - x)(zdx + xdz) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividirt und ordnet,

$$(15.) \quad (1 + z^2)dx + (z - 1)x dz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variablen

$$(16.) \quad \frac{dx}{x} + \frac{(z - 1)dz}{1 + z^2} = 0$$

und durch Integration

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) - \operatorname{arctg} z = \ln C,$$

oder

$$(17.) \quad \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(18.) \quad xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$x(zdx + xdz) - xzdx = x^2dz = dx\sqrt{x^2 + x^2z^2},$$

oder, wenn man durch x dividirt,

$$(19.) \quad xdz = dx\sqrt{1 + z^2},$$

also durch Trennung der Variablen

$$(20.) \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

und durch Integration

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln x + \ln C,$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx,$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y.$$

Dies giebt

$$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2,$$

oder

$$(21.) \quad 1 + 2Cy - C^2x^2 = 0.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(22.) \quad (2x^3 - 135y^3)dx + 81xy^2dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, findet man

$$(2x^3 - 135x^3z^3)dx + 81x^2z^2(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch x^3 dividirt,

$$(2 - 135z^3)dx + 81z^2(xdz + zdx) = 0,$$

$$(23.) \quad (2 - 54z^3)dx + 81z^2xdz = 0.$$

Durch Trennung der Variablen erhält man daher

$$(24.) \quad \frac{2dx}{x} = \frac{81z^2dz}{27z^3 - 1}$$

und durch Integration

$$\ln(x^2) = \ln(27z^3 - 1) - \ln C,$$

also

$$(25.) \quad Cx^2 = 27z^3 - 1, \text{ oder } Cx^5 = 27y^3 - x^3.$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(26.) \quad (8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, erhält man

$$(8xz + 10x)dx + (5xz + 7x)(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividirt und ordnet,

$$(27.) \quad (5z^2 + 15z + 10)dx + (5z + 7)xdz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variablen

$$(28.) \quad \frac{5dx}{x} = -\frac{(5z + 7)dz}{z^2 + 3z + 2} = -\frac{2dz}{z + 1} - \frac{3dz}{z + 2}$$

und durch Integration

$$5 \ln x = \ln C - 2 \ln(z + 1) - 3 \ln(z + 2),$$

also

$$(29.) \quad x^5(z + 1)^2(z + 2)^3 = C, \text{ oder } (x + y)^2(2x + y)^3 = C.$$

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Gleichung

$$(30.) \quad (a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = xz$ setzt, erhält man

$$(a\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + x^2z^2} - cxz)(xdz + zdx) = 0,$$

oder, wenn man durch x dividirt und ordnet,

$$(31.) [(a + bz)\sqrt{1 + z^2} - c(1 + z^2)]dx + x(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$(32.) \frac{dx}{x} + \frac{(b\sqrt{1 + z^2} - cz)dz}{\sqrt{1 + z^2}(a + bz - c\sqrt{1 + z^2})} = 0,$$

oder

$$(32a.) \frac{dx}{x} + \frac{\left(b - \frac{cz}{\sqrt{1 + z^2}}\right) dz}{a + bz - c\sqrt{1 + z^2}} = 0.$$

Da in dem zweiten Gliede der Zähler gerade das Differential des Nenners ist, so erhält man durch Integration

$$\ln x + \ln(a + bz - c\sqrt{1 + z^2}) = \ln C,$$

also

$$x(a + bz - c\sqrt{1 + z^2}) = C,$$

oder

$$(33.) ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Weit leichter wird die Lösung dieser Aufgabe durch die Substitution

$$(34.) x^2 + y^2 = r^2, \quad xdx + ydy = rdr,$$

denn dadurch geht Gleichung (30.) über in

$$ardx + brdy - crdr = 0,$$

oder

$$(35.) adx + bdy - cdr = 0,$$

woraus man wieder in Uebereinstimmung mit Gleichung (33.)

$$ax + by - cr = C$$

findet.

Aufgabe 7. Man soll alle Curven bestimmen, bei denen die Summe der Abscisse x und des Radiusvector r gleich der Subtangente ist.

Auflösung. Die Subtangente einer Curve ist bekanntlich $y \frac{dx}{dy}$, folglich gilt für die gesuchten Curven die Differential-Gleichung

$$y \frac{dx}{dy} = x + r,$$

oder

$$(36.) \quad ydx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

Hier wird man zweckmässiger Weise $x = yz$ setzen, wodurch Gleichung (36.) übergeht in

$$y(ydz + zdy) = (yz + \sqrt{y^2z^2 + y^2})dy,$$

oder, wenn man durch y dividirt und ordnet,

$$(37.) \quad ydz = \sqrt{1 + z^2}dy.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$(38.) \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dy}{y}$$

und durch Integration

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln y - \ln a,$$

wobei die Integrations-Constante mit $\ln a$ bezeichnet ist. Daraus folgt

$$(39.) \quad a(z + \sqrt{1 + z^2}) = y, \quad \text{oder} \quad a(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = y^2,$$

$$a\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 - ax,$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = y^4 - 2axy^2 + a^2x^2,$$

$$(40.) \quad y^2 = 2ax + a^2.$$

Die gesuchten Curven sind also *Parabeln*, deren Brennpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt ist. Dabei wird

$$(41.) \quad r = x + a, \quad St = x + r = 2x + a.$$

§ 86.

Einige weitere Fälle, in denen man die Trennung der Variabeln ausführen kann.

Mitunter kann man die Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ in der Differential-Gleichung

$$(1.) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

auch wenn sie *nicht homogen* sind, durch eine Parallelverschiebung der Coordinaten, also indem man

$$(2.) \quad x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta$$

setzt und die Constanten ξ und η passend wählt, *homogen machen*. Wie dies geschieht, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(3.) \quad 2(x - 2y - 5)dx + (5x - y - 7)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Indem man die Werthe von x und y aus der Gleichung (2.) in die Gleichung (3.) einsetzt, erhält man

$$(4.) \quad 2(x' - 2y' + \xi - 2\eta - 5)dx' + (5x' - y' + 5\xi - \eta - 7)dy' = 0.$$

Damit die Factoren von dx' und dy' in dieser Gleichung homogene Functionen ersten Grades von x' und y' werden, muss man ξ und η so bestimmen, dass

$$(5.) \quad \xi - 2\eta - 5 = 0 \quad \text{und} \quad 5\xi - \eta - 7 = 0$$

wird. Dies giebt

$$(6.) \quad \xi = 1, \quad \eta = -2,$$

also

$$(7.) \quad x = x' + 1, \quad y = y' - 2.$$

Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$(8.) \quad 2(x' - 2y')dx' + (5x' - y')dy' = 0.$$

Indem man $y' = x'z$ setzt, erhält man

$$2(x' - 2x'z)dx' + (5x' - x'z)(x'dz + zdx') = 0,$$

oder, wenn man durch x' dividirt und ordnet,

$$(9.) \quad (2 + z - z^2)dx' + (5 - z)x'dz = 0.$$

Jetzt ergibt sich durch Trennung der Variabeln

$$(10.) \quad \frac{dx'}{x'} = \frac{(-z + 5)dz}{z^2 - z - 2} = -\frac{2dz}{z + 1} + \frac{dz}{z - 2}$$

und durch Integration

$$\ln x' = -2\ln(z + 1) + \ln(z - 2) + \ln C,$$

oder

$$(11.) \quad \begin{aligned} x'(z + 1)^2 &= C(z - 2), \\ (y' + x')^2 &= C(y' - 2x'). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (7.)

$$(12.) \quad (x + y + 1)^2 = C(y - 2x + 4).$$

In ähnlicher Weise kann man ganz allgemein die Differential-Gleichung

$$(13.) \quad (ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$$

integriren. Setzt man nämlich wieder

$$(14.) \quad x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta,$$

so geht Gleichung (13.) über in

$$(15.) \quad (ax' + by' + a\xi + b\eta + c)dx' + (a_1x' + b_1y' + a_1\xi + b_1\eta + c_1)dy' = 0.$$

Jetzt kann man die Constanten ξ und η so bestimmen, dass

$$(16.) \quad a\xi + b\eta + c = 0 \quad \text{und} \quad a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

wird, indem man

$$(17.) \quad \xi = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \eta = \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

setzt. Dadurch werden in Gleichung (15.) die Factoren von dx' und dy' , nämlich

$$(18.) \quad M(x', y') = ax' + by' \quad \text{und} \quad N(x', y') = a_1x' + b_1y'$$

homogene Functionen, und die Differential-Gleichung erhält die Gestalt

$$(19.) \quad (ax' + by')dx' + (a_1x' + b_1y')dy' = 0,$$

so dass man sofort das im vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren anwenden kann.

Bei dieser Umformung ist allerdings stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Determinante $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist. Wenn

$$(20.) \quad ab_1 - a_1b = 0, \quad \text{oder} \quad a : a_1 = b : b_1 = m$$

ist, so wird

$$(21.) \quad ax + by = m(a_1x + b_1y).$$

Das weist darauf hin, dass man hier

$$(22.) \quad a_1x + b_1y = z, \quad \text{also} \quad a_1dx + b_1dy = dz$$

setzt; dann geht die gegebene Differential-Gleichung (13.) über in

$$(mz + c)dx + (z + c_1)dy = 0,$$

oder

$$b_1(mz + c)dx + (z + c_1)(dz - a_1dx) = 0,$$

$$[(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)]dx + (z + c_1)dz = 0,$$

$$(23.) \quad dx = - \frac{(z + c_1)dz}{(b_1m - a_1)z + (b_1c - a_1c_1)}.$$

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(24.) \quad (x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. In diesem Falle ist also

$z = -3x + 6y$, $m = -\frac{1}{3}$, $b_1m - a_1 = 1$, $b_1c - a_1c_1 = -3$,
folglich wird nach Gleichung (23.)

$$(25.) \quad dx = - \frac{(z - 19)dz}{z - 3} = - dz + 16 \frac{dz}{z - 3},$$

also

$$x = -z + 16 \ln(z - 3) + 2C,$$

oder

$$(26.) \quad x - 3y + 8 \ln(6y - 3x - 3) + C = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass $ab_1 - a_1b$ von Null verschieden ist, kann man die Differential-Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + b_1y + c_1)dy = 0$$

auch dadurch integrieren, dass man

$$(27.) \quad M(x, y) = ax + by + c = u, \quad N(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = v$$

setzt und die Grössen u und v zu Integrations-Veränderlichen macht; dann wird

$$(28.) \quad du = adx + bdy, \quad dv = a_1dx + b_1dy,$$

also

$$(29.) \quad \begin{cases} (ab_1 - a_1b)dx = b_1du - bdv, \\ (ab_1 - a_1b)dy = -a_1du + adv. \end{cases}$$

Deshalb geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$u(b_1 du - b dv) + v(-a_1 du + a dv) = 0, \quad (30)$$

oder

$$(30.) \quad (b_1 u - a_1 v) du + (-b u + a v) dv = 0. \quad (31)$$

In dieser Gleichung sind die Factoren von du und dv *homogene* Functionen ersten Grades von u und v .

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(31.) \quad (3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier setze man

$$(32.) \quad 3y - 7x + 7 = u, \quad 7y - 3x + 3 = v,$$

dann wird

$$3dy - 7dx = du, \quad 7dy - 3dx = dv,$$

$$(33.) \quad 40dx = -7du + 3dv, \quad 40dy = -3du + 7dv,$$

folglich geht Gleichung (31.) über in

$$u(-7du + 3dv) + v(-3du + 7dv) = 0,$$

oder

$$(34.) \quad (7u + 3v)du + (-3u - 7v)dv = 0.$$

Für $v = uz$ erhält man hieraus

$$(7u + 3uz)du + (-3u - 7uz)(udz + zdu) = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch u dividirt und ordnet,

$$(35.) \quad 7(1 - z^2)du = (3 + 7z)udz,$$

$$(36.) \quad \frac{7du}{u} = \frac{(3 + 7z)dz}{1 - z^2} = -\left(\frac{5}{z-1} + \frac{2}{z+1}\right)dz,$$

$$(37.) \quad 7 \ln u + 5 \ln(z-1) + 2 \ln(z+1) = \ln C,$$

oder

$$(38.) \quad u^7(z-1)^5(z+1)^2 = C.$$

Dies giebt

$$(v-u)^5(v+u)^2 = C,$$

oder

$$(39.) \quad \begin{aligned} &4^5(x + y - 1)^5 \cdot 10^2(x - y - 1)^2 = C, \\ &(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C_1, \end{aligned}$$

wobei

$$(40.) \quad C = 4^5 \cdot 10^2 \cdot C_1$$

gesetzt worden ist.

§ 87.

Lineare Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 209.)

Die Differential-Gleichungen erster Ordnung kann man weiter eintheilen nach dem Grade, den sie in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ und y haben. Demnach versteht man unter einer Differential-Gleichung *erster Ordnung* und *ersten Grades* eine Gleichung von der Form

$$(1.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x),$$

wobei $f(x)$ und $\varphi(x)$ noch beliebige stetige Functionen von x sind. Gewöhnlich nennt man eine solche Gleichung „eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung“ und kann zu ihrer Integration die folgenden Methoden anwenden.

1. Methode von Bernoulli. Man setze

$$(2.) \quad y = uz, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx},$$

dann geht Gleichung (1.) über in

$$(3.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left[\frac{du}{dx} + u \cdot f(x) \right] = \varphi(x).$$

Von den beiden Functionen u und z kann man die eine noch ganz beliebig annehmen; deshalb werde u so bestimmt, dass in Gleichung (3.) der Factor von z verschwindet, dass also

$$(4.) \quad \frac{du}{dx} + u \cdot f(x) = 0$$

wird. Dies giebt

$$(5.) \quad \frac{du}{u} = -f(x)dx,$$

also durch Integration

$$(6.) \quad \ln u = -\int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x)dx}.$$

Durch diese Bestimmung von u reducirt sich Gleichung (3.) auf

$$(7.) \quad u \frac{dz}{dx} = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad dz = \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx,$$

folglich wird

$$(8.) \quad z = \int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C,$$

also

$$(9.) \quad y = uz = e^{-\int f(x)dx} \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C \right].$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(10.) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (10.)

$$(11.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} \right) = (x+1)^3.$$

Damit der Factor von z in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man u so, dass

$$(12.) \quad \frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}$$

wird. Dies giebt

$$(13.) \quad \ln u = 2 \ln(x+1), \quad \text{oder} \quad u = (x+1)^2.$$

Für diesen Werth von u reducirt sich Gleichung (11.) auf

$$(14.) \quad u \frac{dz}{dx} = (x+1)^3, \quad \text{oder} \quad dz = (x+1)dx.$$

Hieraus findet man durch Integration

$$(15.) \quad 2z = (x+1)^2 + C,$$

$$(16.) \quad 2y = 2uz = (x + 1)^4 + C(x + 1)^2.$$

Da es bei der Bestimmung von u nur darauf ankommt, dass in Gleichung (3.) der Factor von z verschwindet, so braucht man in Gleichung (6.) keine Integrations-Constante hinzuzufügen.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(17.) \quad \frac{dy}{dx} - ay = x^4$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, findet man aus Gleichung (17.)

$$(18.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} - au \right) = x^4.$$

Damit der Factor von z in dieser Gleichung verschwindet, bestimmt man u so, dass

$$(19.) \quad \frac{du}{dx} - au = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = a dx$$

wird. Dies giebt

$$(20.) \quad \ln u = ax, \quad \text{oder} \quad u = e^{ax}.$$

Für diesen Werth von u reducirt sich Gleichung (18.) auf

$$(21.) \quad u \frac{dz}{dx} = x^4, \quad \text{oder} \quad dz = e^{-ax} \cdot x^4 dx.$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration

$$(22.) \quad z = -\frac{1}{a^5} \cdot e^{-ax}(a^4 x^4 + 4a^3 x^3 + 12a^2 x^2 + 24ax + 24) + C,$$

folglich wird

$$(23.) \quad a^5(Ce^{ax} - y) = a^4 x^4 + 4a^3 x^3 + 12a^2 x^2 + 24ax + 24.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(24.) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man der Reihe nach die folgenden Gleichungen

$$(25.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} \right) = a \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} = 0, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(26.) \quad \ln u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad u = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Deshalb geht Gleichung (25.) über in

$$u \frac{dz}{dx} = a \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}},$$

also

$$(27.) \quad dz = \frac{adx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z = a \cdot \arcsin x + C,$$

$$(28.) \quad y = uz = (x + \sqrt{1+x^2})(a \cdot \arcsin x + C).$$

2. Methode von Lagrange (Variation der Constanten).

Man ersetze zunächst die Differential-Gleichung

$$(29.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x)$$

durch die Gleichung

$$(30.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = 0,$$

welche in Bezug auf y und $\frac{dy}{dx}$ homogen ist, und bei der ohne Weiteres die Trennung der Variabeln ausgeführt werden kann. Dadurch erhält man

$$(31.) \quad \frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

und durch Integration

$$(32.) \quad \ln y = -\int f(x)dx + \ln c,$$

oder

$$(33.) \quad y = c \cdot e^{-\int f(x)dx}.$$

Versucht man jetzt, ob die Gleichung (33.) auch ein Integral der Gleichung (29.) ist, so erkennt man, dass dies nur möglich

ist, wenn man c nicht als eine *Constante*, sondern als eine Function von x betrachtet. Aus Gleichung (33.) oder (32.) findet man unter dieser Annahme durch Differentiation

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + f(x) = \frac{1}{c} \frac{dc}{dx},$$

oder

$$(34.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \frac{y}{c} \frac{dc}{dx},$$

folglich wird nach Gleichung (29.) und (33.)

$$\frac{y}{c} \frac{dc}{dx} = e^{-\int f(x) dx} \frac{dc}{dx} = \varphi(x),$$

$$(35.) \quad \frac{dc}{dx} = \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx},$$

oder

$$(36.) \quad c = \int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} \cdot dx + C,$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichung (9.)

$$(37.) \quad y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} \cdot dx + C \right].$$

Beispiele.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(38.) \quad \frac{dy}{dx} + ay = b \cdot e^{mx}$$

integriren.

Auflösung. Integriert man zunächst die lineare, *homogene* Differential-Gleichung

$$(39.) \quad \frac{dy}{dx} + ay = 0,$$

so findet man durch Trennung der Variabeln

$$(40.) \quad \frac{dy}{y} = -a dx, \quad \text{also} \quad \ln y = -ax + \ln c,$$

$$(41.) \quad y = c \cdot e^{-ax}.$$

Wenn man hierbei c als eine Function von x betrachtet, so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -a + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx},$$

oder

$$(42.) \quad \frac{dy}{dx} + ay = \frac{y}{c} \frac{dc}{dx}.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (38.) und (41.)

$$\frac{y}{c} \frac{dc}{dx} = b \cdot e^{mx}, \quad \text{oder} \quad e^{-ax} \frac{dc}{dx} = b \cdot e^{mx},$$

also

$$(43.) \quad \frac{dc}{dx} = b \cdot e^{(a+m)x},$$

$$(44.) \quad c = b \int e^{(a+m)x} \cdot dx = \frac{b}{a+m} [e^{(a+m)x} + C],$$

$$(45.) \quad y = \frac{b}{a+m} (e^{mx} + Ce^{-ax}).$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(46.) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a$$

integriren.

Auflösung. Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$(47.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

erhält man

$$(48.) \quad \ln y = \ln c - \ln x, \quad \text{oder} \quad xy = c.$$

Betrachtet man jetzt *c* als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$(49.) \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} - \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y}{c} \frac{dc}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dc}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (46.) über in

$$(50.) \quad \frac{1}{x} \frac{dc}{dx} = a, \quad \text{also} \quad dc = ax dx,$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (48.)

$$(51.) \quad 2c = ax^2 + C, \quad \text{also} \quad 2xy = ax^2 + C.$$

Aufgabe 6/ Man soll die Differential-Gleichung

$$(52.) \quad (1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = a$$

integriren.

Auflösung. Durch Integration der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$(53.) \quad (1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad \text{oder} \quad 2 \frac{dy}{y} = - \frac{2x dx}{1 - x^2}$$

erhält man

$$(54.) \quad \ln(y^2) = \ln(1 - x^2) + \ln c, \quad \text{oder} \quad y^2 = c(1 - x^2).$$

Betrachtet man jetzt c als *veränderlich*, so erhält man aus dieser Gleichung durch Differentiation

$$\frac{2}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx},$$

oder

$$(55.) \quad (1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = (1 - x^2) \frac{y}{2c} \cdot \frac{dc}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (52.) über in

$$(56.) \quad (1 - x^2) \frac{y}{2c} \cdot \frac{dc}{dx} = a;$$

dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (54.)

$$(57.) \quad \frac{(1 - x^2) \sqrt{1 - x^2}}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{dc}{dx} = a, \quad \text{oder} \quad c^{\frac{1}{2}} dc = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2a dx,$$

also für $x = \sin t$, $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$

$$2\sqrt{c} = 2a \int (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = 2a \int \frac{dt}{\cos^2 t} = 2a \operatorname{tg} t + 2C,$$

$$(58.) \quad \sqrt{c} = \frac{ax}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Deshalb findet man aus Gleichung (54.)

$$(59.) \quad y = ax + C\sqrt{1 - x^2}.$$

3. Methode des integrierenden Factors.

Man multiplicire die Differential-Gleichung

$$(60.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x)$$

mit dem Factor $\psi(x)dx$, man bilde also

$$(61.) \quad \psi(x)dy + \psi(x)[y \cdot f(x) - \varphi(x)]dx = 0$$

und bestimme die Function $\psi(x)$ so, dass die linke Seite von Gleichung (61.) ein *vollständiges Differential* wird, d. h. so, dass die Bedingung

$$(62.) \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

erfüllt wird, wobei in dem vorliegenden Falle

$$(63.) \quad M(x, y) = \psi(x)[y \cdot f(x) - \varphi(x)], \quad N(x, y) = \psi(x)$$

ist. Dies giebt also die Gleichung

$$(64.) \quad \psi(x) \cdot f(x) = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = f(x)dx,$$

$$(65.) \quad \ln[\psi(x)] = \int f(x)dx, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (61.) über in

$$(66.) \quad du = e^{\int f(x)dx} \cdot [y \cdot f(x) - \varphi(x)]dx + e^{\int f(x)dx} \cdot dy = 0,$$

folglich wird nach dem in § 77 und 78 angegebenen Verfahren

$$(67.) \quad u = \int N(x, y)dy + X = y \cdot e^{\int f(x)dx} + X,$$

wobei X nur noch eine Function der einzigen Veränderlichen x ist. Dabei wird mit Rücksicht auf Gleichung (66.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot e^{\int f(x)dx} f(x) + \frac{dX}{dx} = e^{\int f(x)dx} [y \cdot f(x) - \varphi(x)],$$

also

$$(68.) \quad \frac{dX}{dx} = -e^{\int f(x)dx} \cdot \varphi(x), \quad X = -\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx;$$

man findet daher in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (9.) und (37.)

$$(69.) \quad u = y \cdot e^{\int f(x)dx} - \int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx = C,$$

oder

$$(70.) \quad y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot dx + C \right].$$

Beispiele.**Aufgabe 7.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(71.) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

integriren.

Auflösung. Durch Multiplication mit $\psi(x)dx$ geht Gleichung (71.) über in

$$(72.) \quad \psi(x) \left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx + \psi(x) dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential wird, muss

$$(73.) \quad \frac{\psi(x)}{1+x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \frac{dx}{1+x^2}$$

sein. Daraus folgt, wenn man $\operatorname{arctg} x$ mit t bezeichnet,

$$(74.) \quad \ln[\psi(x)] = \operatorname{arctg} x = t, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = e^t.$$

Gleichung (72.) geht daher über in

$$(75.) \quad du = e^t(y-t) \frac{dx}{1+x^2} + e^t dy = 0,$$

oder

$$(75 \text{ a.}) \quad du = e^t(y-t) dt + e^t dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

$$(76.) \quad u = y \cdot e^t + X = C,$$

wobei X eine Function der einzigen Veränderlichen t ist,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = y \cdot e^t + \frac{dX}{dt} = y \cdot e^t - t \cdot e^t,$$

also

$$(77.) \quad dX = -t \cdot e^t dt, \quad X = -e^t(t-1),$$

$$(78.) \quad u = y \cdot e^t - e^t(t-1) = C,$$

$$(79.) \quad y = t - 1 + C \cdot e^{-t} = \operatorname{arctg} x - 1 + C e^{-\operatorname{arctg} x}.$$

Aufgabe 8. Man soll die Differential-Gleichung

$$(80.) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (80.) mit $\psi(x)dx$ multiplicirt, erhält man

$$(81.) \quad \psi(x) \left(\frac{xy}{1+x^2} - \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, muss

$$(82.) \quad \frac{x\psi(x)}{1+x^2} = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{x dx}{1+x^2}$$

sein. Daraus folgt

$$(83.) \quad \ln[\psi(x)] = \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Gleichung (81.) geht daher über in

$$(84.) \quad du = \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - \sin x \right) dx + \sqrt{1+x^2} \cdot dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

$$(85.) \quad u = y\sqrt{1+x^2} + X = C,$$

wobei X eine Function der einzigen Veränderlichen x ist, also mit Rücksicht auf Gleichung (84.)

$$(86.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dX}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - \sin x,$$

$$(87.) \quad dX = -\sin x dx, \quad X = \cos x,$$

$$(88.) \quad u = y\sqrt{1+x^2} + \cos x = C.$$

Aufgabe 9. Man soll die Differential-Gleichung

$$(89.) \quad \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (89.) mit $\psi(x)dx$ multiplicirt, erhält man

$$(90.) \quad \psi(x) (-y \operatorname{tg} x - 2 \cos^2 x) dx + \psi(x)dy = 0.$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist, muss

$$(91.) \quad -\psi(x) \operatorname{tg} x = \psi'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \frac{-\sin x dx}{\cos x}$$

sein. Daraus folgt

$$(92.) \quad \ln[\psi(x)] = \ln(\cos x), \quad \text{oder} \quad \psi(x) = \cos x.$$

Gleichung (90.) geht daher über in

$$(93.) \quad du = -(y \sin x + 2 \cos^3 x) dx + \cos x \cdot dy = 0.$$

Dies giebt durch Integration

$$(94.) \quad u = y \cos x + X = C,$$

wobei X eine Function der einzigen Veränderlichen x ist, also mit Rücksicht auf Gleichung (93.)

$$(95.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -y \sin x + \frac{dX}{dx} = -y \sin x - 2 \cos^3 x,$$

$$(96.) \quad dX = -2 \cos^3 x dx = -2(1 - \sin^2 x) \cos x dx, \\ X = -2(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x),$$

$$(97.) \quad 3u = 3y \cos x - 6 \sin x + 2 \sin^3 x = 3C.$$

§ 88.

Gleichung von *Bernoulli*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 210.)

In manchen Fällen lässt sich eine Differential-Gleichung erster Ordnung, welche *nicht* linear ist, durch eine passend gewählte Substitution zu einer linearen machen. Es sei z. B. nach *Bernoulli*

$$(1.) \quad y^\alpha \frac{dy}{dx} + y^{\alpha+1} \cdot f(x) = y^\beta \cdot \varphi(x),$$

wobei α und β beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen sind. Setzt man dann $\beta - \alpha = n$, so kann man die Gleichung auf die Form

$$(2.) \quad \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = y^n \cdot \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = \varphi(x)$$

bringen. Daraus ergibt sich durch die Substitution

$$(3.) \quad z = \frac{1}{y^{n-1}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{n-1}{y^n} \frac{dy}{dx}$$

die *lineare* Differential-Gleichung erster Ordnung

$$(4.) \quad \frac{dz}{dx} - (n-1)z \cdot f(x) = (n-1) \varphi(x).$$

Man kann auch die Differential-Gleichung (2.) unmittelbar integrieren, indem man wieder

$$(5.) \quad y = uz$$

setzt. Daraus ergibt sich

$$(6.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} + u \cdot f(x) \right) = u^n z^n \cdot \varphi(x).$$

Wenn man die Function u so bestimmt, dass der Factor von z verschwindet, erhält man

$$(7.) \quad \frac{du}{dx} + u \cdot f(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -f(x) dx,$$

$$(8.) \quad \ln u = -\int f(x) dx, \quad \text{oder} \quad u = e^{-\int f(x) dx}.$$

Dadurch geht Gleichung (6.) über in

$$(9.) \quad u \frac{dz}{dx} = u^n z^n \cdot \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = z^n \cdot e^{-(n-1)\int f(x) dx} \cdot \varphi(x),$$

$$(10.) \quad \frac{dz}{z^n} = e^{-(n-1)\int f(x) dx} \cdot \varphi(x) dx.$$

Macht man die Voraussetzung, dass $n \geq 1$ ist, so folgt aus Gleichung (10.)

$$(11.) \quad z^{1-n} = (1-n) \int e^{-(n-1)\int f(x) dx} \cdot \varphi(x) dx + C(1-n),$$

$$(12.) \quad y^{1-n} = (1-n) e^{(n-1)\int f(x) dx} \left[\int e^{-(n-1)\int f(x) dx} \cdot \varphi(x) dx + C \right].$$

Dagegen erhält man für $n = 1$ aus Gleichung (2.)

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = y \cdot \varphi(x),$$

oder

$$(13.) \quad \frac{dy}{y} = [\varphi(x) - f(x)] dx,$$

$$(14.) \quad \ln y = \int [\varphi(x) - f(x)] dx.$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(15.) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x$$

integrieren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (15.)

$$(16.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) = au^2 z^2 \ln x.$$

Damit in dieser Gleichung der Factor von z verschwindet, bestimmt man die Function u so, dass

$$(17.) \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

wird. Dies giebt durch Integration

$$(18.) \quad \ln u = -\ln x, \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{x}.$$

Hierdurch geht Gleichung (16.) über in

$$(19.) \quad \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{a}{x^2} z^2 \ln x, \quad \text{also} \quad \frac{dz}{z^2} = a \ln x \cdot \frac{dx}{x};$$

folglich wird durch Integration

$$(20.) \quad -\frac{1}{z} = \frac{a}{2} (\ln x)^2 + C, \quad \text{also} \quad -\frac{1}{y} = x \left[\frac{a}{2} (\ln x)^2 + C \right],$$

oder

$$(21.) \quad xy[a(\ln x)^2 + 2C] + 2 = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(22.) \quad \frac{dy}{dx} + 2y \operatorname{tg} x = ay^2 \operatorname{ctg} x$$

integriren.

Auflösung. Indem man $y = uz$ setzt, erhält man aus Gleichung (22.)

$$(23.) \quad u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} + 2u \operatorname{tg} x \right) = au^2 z^2 \operatorname{ctg} x.$$

Damit in dieser Gleichung der Factor von z verschwindet, bestimmt man die Function u so, dass

$$(24.) \quad \frac{du}{dx} + 2u \operatorname{tg} x = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -2 \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

wird. Dies giebt durch Integration

$$(25.) \quad \ln u = 2 \ln(\cos x), \quad \text{oder} \quad u = \cos^2 x.$$

Hierdurch geht Gleichung (23.) über in

$$\cos^2 x \cdot \frac{dz}{dx} = a \cos^4 x \cdot z^2 \operatorname{ctg} x,$$

oder

$$(26.) \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{a \cos^3 x dx}{\sin x} = a \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) d(\sin x),$$

folglich wird durch Integration

$$(27.) \quad -\frac{1}{z} = a [\ln(\sin x) - \frac{1}{2} \sin^2 x] + C = -\frac{u}{y},$$

oder

$$(28.) \quad ay[2 \ln(\sin x) - \sin^2 x] + 2Cy + 2 \cos^2 x = 0.$$

§ 89.

Erklärung des integrierenden Factors.

Es war schon früher gezeigt worden, dass jede Differentialgleichung erster Ordnung sich auf die Form

$$(1.) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

bringen lässt und ein allgemeines Integral

$$(2.) \quad F(x, y, C) = 0$$

besitzt. Löst man diese Gleichung (2.) nach der Constanten C auf, so erhält man

$$(3.) \quad C = f(x, y),$$

wobei $f(x, y)$ eine Function von x und y ist, die mit u bezeichnet werden möge. Dann folgt aus Gleichung (3.)

$$(4.) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$(5.) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}},$$

während sich aus Gleichung (1.)

$$(6.) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ergiebt. Da diese beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ mit einander übereinstimmen müssen, so wird

$$(7.) \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Bestimmt man daher eine Function v von x und y durch die Gleichung

$$(8.) \quad v = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x, y)},$$

so ergibt sich aus Gleichung (7.) und (8.)

$$(9.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = v \cdot M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v \cdot N(x, y).$$

Es wird deshalb mit Rücksicht auf Gleichung (4.)

$$(10.) \quad du = v \cdot M(x, y)dx + v \cdot N(x, y)dy.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Es giebt stets eine Function v von x und y , welche die Eigenschaft hat, dass*

$$v [M(x, y)dx + N(x, y)dy]$$

ein vollständiges Differential wird. Die Auflösung der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ist dann

$$(11.) \quad u = C.$$

Hierbei heisst die Function v „ein integrierender Factor“.

Bezeichnet man mit $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u , so kann man die Integral-Gleichung (11.) auch auf die Form

$$(11 a.) \quad \varphi(u) = C_1$$

bringen, wobei die Integrations-Constante C_1 gleich $\varphi(C)$ ist.

Die vorgelegte Differential-Gleichung besitzt *unendlich viele integrierende Factoren*. Multiplicirt man nämlich Gleichung (10.) mit der beliebigen Function $\varphi(u)$ von u , so erhält man

$$(12.) \quad \varphi(u)du = d\int\varphi(u)du = v \cdot \varphi(u)M(x, y)dx + v \cdot \varphi(u)N(x, y)dy.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ebenfalls ein vollständiges Differential, nämlich das vollständige Differential von $\int\varphi(u)du$. Dies giebt

Satz 2. *Ist v ein integrierender Factor der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

welcher das Integral $u = C$ liefert, so ist auch V gleich $v \cdot \varphi(u)$ ein integrierender Factor.

Damit sind aber alle integrierenden Factoren erschöpft, denn es gilt auch der folgende

Satz 3. *Sind V und v zwei integrierende Factoren der Differential-Gleichung*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

und ist der Quotient von V und v keine Constante, so ist

$$(13.) \quad \frac{V}{v} = \varphi(u) = C_1$$

ebenfalls ein allgemeines Integral der vorgelegten Differential-Gleichung, wobei C_1 eine willkürliche Constante bedeutet.

Beweis. Nach Voraussetzung sind

$$(14.) \quad du = v(Mdx + Ndy) \quad \text{und} \quad dU = V(Mdx + Ndy)$$

vollständige Differentiale, folglich wird

$$(15.) \quad dU = \frac{V}{v} du, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{V}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right),$$

also

$$(16.) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Da diese Gleichung für unendlich viele Werthe von dx und dy gelten soll, so muss

$$(17.) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial y}$$

sein. Setzt man nun

$$(18.) \quad u = g(x, y), \quad U = G(x, y),$$

so kann man y aus der ersten dieser beiden Gleichungen ausrechnen und in die zweite einsetzen. Dadurch erhält man

$$(19.) \quad y = \psi(x, u), \quad U = G[x, \psi(x, u)] = H(x, u).$$

Dies giebt

$$(20.) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(21.) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V}{v} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y},$$

folglich ist

$$(22.) \quad \frac{V}{v} = \frac{\partial H}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

d. h. $U = H(x, u)$ und deshalb auch $\frac{V}{v} = \frac{\partial H}{\partial u}$ sind Functionen der einzigen Veränderlichen u , so dass

$$(23.) \quad \frac{V}{v} = \varphi(u) = C_1$$

ein allgemeines Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

§ 90.

Beispiele zur Erläuterung.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(1.) \quad ydx - (x + y)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Da die vorgelegte Differential-Gleichung homogen ist, so setze man $y = xz$; dann ergibt sich

$$zdx - (1 + z)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$z^2 dx + (1 + z) x dz = 0, \quad \frac{dx}{x} + (z^{-1} + z^{-2}) dz = 0,$$

$$(2.) \quad \ln x + \ln z - \frac{1}{z} = C, \quad \text{oder} \quad \ln y - \frac{x}{y} = C.$$

In diesem Falle ist also

$$(3.) \quad u = \ln y - \frac{x}{y} = C,$$

$$(4.) \quad du = -\frac{dx}{y} + \frac{(x + y)dy}{y^2} = 0.$$

Damit Gleichung (1.) diese Form erhält, muss man sie mit $-\frac{1}{y^2}$ multipliciren. Der integrierende Factor ist daher in diesem Beispiele

$$(5.) \quad v = -\frac{1}{y^2}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(6.) \quad x dy - y dx = 0$$

integriren.

Auflösung. Durch Trennung der Variabeln findet man aus dieser Gleichung ohne Weiteres

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y - \ln x = \ln C,$$

oder

$$(7.) \quad \frac{y}{x} = C.$$

Bezeichnet man also die Function $\frac{y}{x}$ mit u , so wird

$$(8.) \quad du = \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0.$$

Damit Gleichung (6.) diese Form erhält, muss man sie mit dem integrierenden Factor

$$(9.) \quad v = \frac{1}{x^2}$$

multipliciren.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(10.) \quad [y(x-y)^2 - xy^3]dx + [x^3y - x(x-y)^2]dy = 0$$

integrieren.

Auflösung. Die vorgelegte Differential-Gleichung kann durch keine der bisher angegebenen Methoden integriert werden. Multipliziert man sie aber mit dem Factor

$$(11.) \quad v = \frac{1}{xy(x-y)^2},$$

so geht sie über in

$$(12.) \quad \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right] dy = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das vollständige Differential der Function

$$(13.) \quad u = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x-y} + C,$$

wie bereits in § 78, Aufgabe 5 ermittelt worden ist.

Weitere Beispiele für die Bestimmung des integrierenden Factors wurden bereits bei der Integration der linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung in § 87 (Aufgabe 7, 8 und 9) ausgeführt.

§ 91.

Bestimmung des integrierenden Factors.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 211 bis 216.)

Die Bedingung, dass $v(Mdx + Ndy)$ ein vollständiges Differential wird, ist nach Formel Nr. 201 der Tabelle

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x};$$

dies giebt

$$v \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial x},$$

oder

$$(1.) \quad M \frac{\partial v}{\partial y} - N \frac{\partial v}{\partial x} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Diese Bedingung ist *nothwendig*, aber auch *hinreichend* dafür, dass v ein *integrierender Factor* ist, und zwar ist Gleichung (1.) eine *partielle* Differential-Gleichung für v , denn sie enthält die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$. Man kann schon daraus entnehmen, dass die Integration dieser partiellen Differential-Gleichung im Allgemeinen schwieriger sein wird als die Integration der ursprünglich gegebenen Differential-Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Es giebt aber mehrere Fälle, wo die Bestimmung von v ausführbar ist. Von diesen Fällen sollen hier einige hervorgehoben werden.

I. Fall. *Der integrierende Factor v sei eine Function von x allein*, es sei also

$$(2.) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$-N \frac{dv}{dx} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

oder

$$(3.) \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach Voraussetzung eine Function der einzigen Veränderlichen x , folglich muss es auch die rechte Seite sein. Ist also der Ausdruck $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ von y unabhängig, so findet man einen integrierenden Factor v aus Gleichung (3.); es wird nämlich

$$(4.) \quad \ln v = -\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dx}{N}, \quad v = e^{-\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dx}{N}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(5.) \quad (x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(6.) \quad \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \frac{(1 + 3x^2) - (x^2 + 1)}{x + x^3} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

folglich wird nach Gleichung (3.)

$$(7.) \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2xdx}{1+x^2}, \quad \ln v = -\ln(1+x^2), \quad v = \frac{1}{1+x^2}.$$

Indem man Gleichung (5.) mit diesem integrierenden Factor v multiplicirt, erhält man

$$(8.) \quad du = \left(y + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + xdy = 0,$$

also

$$(9.) \quad u = \int xdy + \varphi(x) = xy + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen x ist, die man aus der Gleichung

$$(10.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{d\varphi(x)}{dx} = y + \frac{1}{1+x^2}$$

findet, und zwar wird

$$(11.) \quad d\varphi(x) = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \varphi(x) = \operatorname{arctg} x,$$

folglich ist

$$(12.) \quad u = xy + \operatorname{arctg} x = C.$$

II. Fall. Der integrierende Factor v sei eine Function von y allein, es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dy}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$M \frac{dv}{dy} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

oder

$$(13.) \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dy} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen y , folglich muss es auch die rechte sein.

Ist also der Ausdruck $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ von x unabhängig, so findet man einen integrierenden Factor v aus Gleichung (13.); es wird nämlich

$$(14.) \quad \ln v = \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dy}{M}, \quad v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dy}{M}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(15.) \quad (xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(16.) \quad \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{y^2(x - y)} = -\frac{2}{y},$$

folglich wird nach Gleichung (14.)

$$(17.) \quad \ln v = -2 \ln y, \quad v = \frac{1}{y^2}.$$

Indem man Gleichung (15.) mit diesem integrierenden Factor v multiplicirt, erhält man

$$(18.) \quad du = (x - y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x \right)dy = 0,$$

also

$$(19.) \quad u = \int (x - y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen y ist, die man aus der Gleichung

$$(20.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - x$$

findet, und zwar wird

$$(21.) \quad \varphi'(y)dy = \frac{dy}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y},$$

folglich ist

$$(22.) \quad u = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C,$$

oder

$$(22a.) \quad x^2y - 2xy^2 - 2Cy - 2 = 0.$$

III. Fall. Der integrierende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen $z = xy$; es sei also

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$(xM - yN) \frac{dv}{dz} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

oder

$$(23.) \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen z , folglich muss es auch die rechte Seite

sein. Ist also $\frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ nur abhängig von $xy = z$, so findet man einen integrierenden Factor v aus Gleichung (23.); es wird nämlich

$$(24.) \quad \ln v = \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{xM - yN},$$

$$(25.) \quad v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{xM - yN}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(26.) \quad (y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(27.) \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (1 - 2xy) - (1 + 2xy) = -4xy,$$

$$(28.) \quad xM - yN = (xy + x^2y^2) - (xy - x^2y^2) = 2x^2y^2,$$

folglich wird

$$(29.) \quad \frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z}$$

eine Function von $z = xy$ allein, so dass man aus den Gleichungen (24.) und (25.)

$$(30.) \quad \ln v = -2 \int \frac{dz}{z} = -2 \ln z, \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2 y^2}$$

findet. Multiplicirt man Gleichung (26.) mit diesem integrierenden Factor, so ergibt sich

$$(31.) \quad du = \left(\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0,$$

$$(32.) \quad u = \int \left(\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x} \right) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{xy} + \ln x + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen y ist, die man aus der Gleichung

$$(33.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}$$

findet; und zwar wird

$$(34.) \quad \varphi'(y) dy = -\frac{dy}{y}, \quad \varphi(y) = -\ln y,$$

folglich ist

$$u = \ln x - \ln y - \frac{1}{xy} = C,$$

oder

$$(35.) \quad \ln \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{1}{xy} = C.$$

IV. Fall. *Der integrierende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen $z = \frac{y}{x}$; es sei also*

$$(36.) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$\frac{xM + yN}{x^2} \frac{dv}{dz} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

oder

$$(37.) \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \frac{x^2}{xM + yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen z , folglich muss es auch die rechte sein.

Ist also $\frac{x^2}{xM + yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ nur abhängig von $\frac{y}{x} = z$, so findet man einen integrierenden Factor v aus Gleichung (37.); es wird nämlich

$$(38.) \quad \ln v = \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{x^2 dz}{xM + yN},$$

$$(39.) \quad v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{x^2 dz}{xM + yN}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(40.) \quad \left[3x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx - x \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Bezeichnet man $\frac{y}{x}$ mit z , so wird in diesem Falle

$$\frac{x^2}{xM + yN} = \frac{x^2}{(3x^2 \sin z + xy \cos z) - xy \cos z} = \frac{1}{3 \sin z},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = (-\cos z - z \sin z) - (3 \cos z + \cos z - z \sin z) = -5 \cos z,$$

also ist

$$(41.) \quad \frac{x^2}{xM + yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = -\frac{5 \cos z}{3 \sin z}$$

eine Function von $z = \frac{y}{x}$ allein, so dass man aus den Gleichungen (38.) und (39.)

$$(42.) \quad \ln v = -\frac{5}{3} \int \frac{\cos z dz}{\sin z} = -\frac{5}{3} \ln(\sin z), \quad v = \frac{1}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}}$$

findet. Multiplicirt man Gleichung (40.) mit diesem integrierenden Factor v , so ergibt sich

$$(43.) \quad du = \left[\frac{3x}{(\sin z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y \cos z}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} \right] dx - \frac{x \cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} = 0.$$

Daraus folgt

$$(44.) \quad u = - \int \frac{x \cos z dy}{(\sin z)^{\frac{5}{3}}} + \varphi(x) = -x^2 \int (\sin z)^{-\frac{5}{3}} \cos z dz + \varphi(x) \\ = + \frac{3x^2}{2} (\sin z)^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = \frac{3x^2}{2} \left[\sin \left(\frac{y}{x} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} + \varphi(x) = C,$$

wobei $\varphi(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen x ist, die man aus der Gleichung

$$(45.) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x (\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y (\sin z)^{-\frac{5}{3}} \cos z + \varphi'(x) \\ = 3x (\sin z)^{-\frac{2}{3}} + y (\sin z)^{-\frac{5}{3}} \cos z$$

findet. Es wird also

$$(46.) \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = c.$$

Dabei kann man die Integrations-Constante c gleich Null setzen, weil man auf der rechten Seite von Gleichung (44.) bereits eine Integrations-Constante C hinzugefügt hat. Man erhält daher

$$u = \frac{3x^2}{2} \left[\sin \left(\frac{y}{x} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} = C,$$

oder

$$(47.) \quad 3x^2 = 2C \left[\sin \left(\frac{y}{x} \right) \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man noch $8C^3 = 27C_1^2$, so kann man diese Gleichung auf die Form

$$(48.) \quad x^6 = C_1^2 \sin^2 \left(\frac{y}{x} \right), \quad \text{oder} \quad x^3 = \pm C_1 \sin \left(\frac{y}{x} \right)$$

bringen.

V. Fall. *Der integrierende Factor sei eine Function der einzigen Veränderlichen $z = x^2 + y^2$; es sei also*

$$(49.) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{dv}{dz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \frac{dv}{dz}.$$

Unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (1.) über in

$$2(yM - xN) \frac{dv}{dz} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

oder

$$(50.) \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \frac{1}{2(yM - xN)} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Function der einzigen Veränderlichen z , folglich muss es auch die rechte sein.

Ist also $\frac{1}{yM - xN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ nur abhängig von $x^2 + y^2 = z$, so findet man einen integrierenden Factor v aus Gleichung (50.); es wird nämlich

$$(51.) \quad \ln v = \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{2(yM - xN)},$$

$$(52.) \quad v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{2(yM - xN)}}.$$

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(53.) \quad (a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)dy = 0$$

integriren.

Auflösung. Bezeichnet man $x^2 + y^2$ mit z , so ist in diesem Falle

$$(54.) \quad yM - xN = (ay\sqrt{z} - cxy) - (bx\sqrt{z} - cxy) = (ay - bx)\sqrt{z},$$

$$(55.) \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{bx}{\sqrt{z}} - \frac{ay}{\sqrt{z}} = -\frac{ay - bx}{\sqrt{z}},$$

folglich ist

$$(56.) \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{1}{yM - xN} = -\frac{1}{z}$$

eine Function der einzigen Veränderlichen z . Deshalb findet man aus den Gleichungen (51.) und (52.)

$$(57.) \quad \ln v = -\frac{1}{2} \ln z, \quad v = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Multipliziert man Gleichung (53.) mit diesem integrierenden Factor v , so ergibt sich

$$(58.) \quad du = \left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \left(b - \frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0,$$

$$(59.) \quad u = \int \left(a - \frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \varphi(y) = ax - c\sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(y) = C,$$

wobei $\varphi(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen y ist, die man aus der Gleichung

$$(60.) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varphi'(y) = b - \frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

findet. Es wird also

$$(61.) \quad \varphi'(y) = b, \quad \varphi(y) = by,$$

$$(62.) \quad u = ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

In ähnlicher Weise kann man noch eine ganze Reihe von besonderen Fällen behandeln, bei denen der integrierende Factor eine Function einer einzigen Veränderlichen z ist, die selbst wieder eine passend gewählte Function von x und y sein darf. In allen diesen Fällen ist zuerst der Ausdruck

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

zu bilden. Ist dieser Ausdruck gleich Null, so ist schon

$$Mdx + Ndy$$

selbst ein *vollständiges Differential*, ist er aber von Null verschieden, so kann man der Reihe nach versuchen, ob

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \text{ eine Function von } x \text{ allein,} \\ \text{oder ob} & +\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad " \quad " \quad " \quad y \quad " \\ & \frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad " \quad " \quad " \quad xy \quad " \\ & \frac{x^2}{xM + yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad " \quad " \quad " \quad \frac{y}{x} \quad " \\ & \frac{1}{yM - xN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad " \quad " \quad " \quad x^2 + y^2 \quad " \end{aligned}$$

ist. Trifft einer dieser 5 Fälle ein, so kann man nach den angegebenen Regeln den integrierenden Factor leicht bestimmen.

Erwähnt möge noch werden, dass der häufig vorkommende Ausdruck $xdy - ydx$ die integrierenden Factoren

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}$$

besitzt. Es folgt dabei aus den Gleichungen

$$(63.) \quad du_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad du_2 = \frac{xdy - ydx}{y^2}, \quad du_3 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$(64.) \quad u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = -\frac{x}{y}, \quad u_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Der Ausdruck $xdx + ydy$ hat den integrierenden Factor $\frac{1}{x^2 + y^2}$, und zwar folgt aus

$$(65.) \quad du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

$$(66.) \quad u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

§ 92.

Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades.

Eine Differential-Gleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades hat die Form

$$(1.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f^1(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + f_{n-1}(x, y) \frac{dy}{dx} + f_n(x, y) = 0.$$

Hier bedeuten die Coefficienten $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_{n-1}(x, y), f_n(x, y)$ beliebige Functionen von x und y oder constante Grössen.

Denkt man sich nun Gleichung (1.) in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so erhält man n verschiedene Differential-Gleichungen erster Ordnung und ersten Grades, nämlich

$$(2.) \quad \frac{dy}{dx} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F_2(x, y), \quad \dots \quad \frac{dy}{dx} = F_n(x, y),$$

wobei $F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_n(x, y)$ Functionen von x und y oder constante Grössen sind.

Durch Integration der Gleichungen (2.) erhält man dann

$$(3.) \quad \varphi_1(x, y, c_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, c_2) = 0, \quad \dots \quad \varphi_n(x, y, c_n) = 0.$$

Jede dieser Gleichungen ist ein Integral der Differential-Gleichung (1.). Man kann alle diese Lösungen zusammenfassen, indem man die Gleichungen (3.) mit einander multiplicirt. Dies giebt

$$(4.) \quad \varphi_1(x, y, c_1) \cdot \varphi_2(x, y, c_2) \dots \varphi_n(x, y, c_n) = 0.$$

Da dieses Product gleich 0 wird, wenn man *einen* der Factoren gleich 0 setzt, so wird die Allgemeinheit der Lösung nicht beschränkt, wenn man die Integrations-Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ alle einander gleich setzt. Dadurch geht Gleichung (4.) über in

$$(4a.) \quad \varphi_1(x, y, c) \cdot \varphi_2(x, y, c) \dots \varphi_n(x, y, c) = 0.$$

Sind z. B. in Gleichung (1.) die Coefficienten $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots f_{n-1}(x, y), f_n(x, y)$ constante Grössen, die man deshalb mit $f_1, f_2, \dots f_{n-1}, f_n$ bezeichnen möge, so gehen die Gleichungen (1.) und (2.) über in

$$(1a.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + f_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + f_{n-1} \frac{dy}{dx} + f_n \\ = \left(\frac{dy}{dx} - a_1\right) \left(\frac{dy}{dx} - a_2\right) \dots \left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0.$$

Daraus folgen die n Differential-Gleichungen

$$(5.) \quad \frac{dy}{dx} = a_1, \quad \frac{dy}{dx} = a_2, \quad \dots \quad \frac{dy}{dx} = a_n,$$

wobei $a_1, a_2, \dots a_n$ auch constante Grössen sind. Deshalb wird in diesem Falle

$$(6.) \quad \varphi_1 = y - a_1 x + c = 0, \quad \varphi_2 = y - a_2 x + c = 0, \quad \dots \quad \varphi_n = y - a_n x + c = 0,$$

oder

$$(6a.) \quad \frac{y+c}{x} - a_1 = 0, \quad \frac{y+c}{x} - a_2 = 0, \quad \dots \quad \frac{y+c}{x} - a_n = 0.$$

Gleichung (4a.) geht daher in diesem Falle über in

$$(7.) \quad \left(\frac{y+c}{x} - a_1\right) \left(\frac{y+c}{x} - a_2\right) \dots \left(\frac{y+c}{x} - a_n\right) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1a.) in

$$(7a.) \quad \left(\frac{y+c}{x}\right)^n + f_1 \left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-1} + f_2 \left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-2} + \dots + f_{n-1} \frac{y+c}{x} + f_n = 0.$$

In diesem Falle ist also die Auflösung der Gleichung (1.) nach $\frac{dy}{dx}$, welche mitunter bedeutende algebraische Schwierigkeiten verursachen würde, nicht einmal erforderlich.

Beispiele.**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(8.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (8.) folgt zunächst

$$(9.) \quad \frac{dy}{dx} = +a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a$$

und daraus durch Integration

$$y + c = ax \quad \text{und} \quad y + c = -ax,$$

oder

$$(10.) \quad (y + c - ax)(y + c + ax) = (y + c)^2 - a^2x^2 = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 7\frac{dy}{dx} + 6 = 0$$

integrieren.

Auflösung. Gleichung (11.) lässt sich auf die Form

$$(11a.) \quad \left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right)\left(\frac{dy}{dx} + 3\right) = 0$$

bringen, folglich erhält man für das allgemeine Integral

$$(12.) \quad (y + c - x)(y + c - 2x)(y + c + 3x) = 0,$$

oder

$$(12a.) \quad (y + c)^3 - 7x^2(y + c) + 6x^3 = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(13.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ax$$

integrieren.

Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

$$(14.) \quad dy = +\sqrt{ax} dx \quad \text{und} \quad dy = -\sqrt{ax} dx$$

und durch Integration

$$(15.) \quad y + c - \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0 \quad \text{und} \quad y + c + \frac{2x}{3}\sqrt{ax} = 0.$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann als Integral der vorgelegten Differential-Gleichung angesehen werden. Indem man die beiden Gleichungen (15.) mit einander multiplicirt, vereinigt man beide Lösungen und erhält

$$[3(y + c) - 2x\sqrt{ax}][3(y + c) + 2x\sqrt{ax}] = 0,$$

oder

$$(16.) \quad 9(y + c)^2 - 4ax^3 = 0.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(17.) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

integriren.

Auflösung. Durch Auflösung von Gleichung (17.) nach $\frac{dy}{dx}$ findet man die beiden Werthe

$$(18.) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

oder

$$(19.) \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = + dx \quad \text{und} \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - dx,$$

also durch Integration

$$(20.) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = x + c \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = -x - c,$$

oder, wenn man beide Lösungen vereinigt,

$$(21.) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - x - c)(\sqrt{x^2 + y^2} + x + c) = y^2 - 2cx - c^2 = 0.$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(22.) \quad (a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + bx(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - bx = 0$$

integriren.

Auflösung. Durch Auflösung der Gleichung (22.) nach $\frac{dy}{dx}$ erhält man die drei Differential-Gleichungen

$$(23.) \quad \frac{dy}{dx} = -bx, \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und findet daraus durch Integration

$$(24.) \quad y + c = -\frac{bx^2}{2}, \quad y + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \quad y + c = -\arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Indem man diese drei Lösungen vereinigt, ergibt sich die Gleichung

$$\left(y + c + \frac{bx^2}{2}\right) \left[y + c - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] \left[y + c + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] = 0,$$

oder

$$(25.) \quad (y + c)^3 + \frac{bx^2}{2}(y + c)^2 - \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 (y + c) - \frac{bx^2}{2} \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 = 0.$$

§ 93.

Integration durch Differentiation.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 217 bis 220 a.)

Es war schon in dem vorhergehenden Paragraphen erwähnt worden, dass die Auflösung der Differential-Gleichungen erster Ordnung höheren Grades nach $\frac{dy}{dx}$ häufig auf grosse algebraische Schwierigkeiten stösst. Es sollen deshalb hier noch einige Fälle untersucht werden, bei denen man die Integration durch andere Mittel ausführen kann.

Der Kürze wegen möge hierbei

$$(1.) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = p dx$$

gesetzt werden.

I. Fall. Die Differential-Gleichung enthalte y gar nicht und sei auflösbar nach x ; die Gleichung habe also die Form

$$(2.) \quad x = \varphi(p);$$

dann findet man durch Differentiation

$$(3.) \quad dx = \varphi'(p) dp,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$(4.) \quad p dx = dy = \varphi'(p) \cdot p dp,$$

$$(5.) \quad y = \int \varphi'(p) \cdot p dp + C.$$

Indem man aus den Gleichungen (2.) und (5.) die Grösse p eliminirt, erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Beispiele.**Aufgabe 1.** Man soll die Differential-Gleichung

(6.)
$$x = 4p^3 - 6p^2 + 12p - 15$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (6.) differentiirt, erhält man die Gleichungen

(7.)
$$dx = (12p^2 - 12p + 12)dp,$$

(8.)
$$dy = (12p^3 - 12p^2 + 12p)dp,$$

also

(9.)
$$y = 3p^4 - 4p^3 + 6p^2 + C.$$

Durch Elimination der Grösse p aus den Gleichungen (6.) und (9.) findet man dann die gesuchte Gleichung zwischen x und y .**Aufgabe 2.** Man soll die Differential-Gleichung

(10.)
$$x = \arcsin p - \sqrt{1 - p^2}$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (10.) differentiirt, erhält man die Gleichungen

(11.)
$$dx = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} \right) dp,$$

(12.)
$$dy = \left(\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1 - p^2}} \right) dp,$$

also mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 31 und 115 der Tabelle

(13.)
$$y = -\sqrt{1 - p^2} - \frac{p}{2}\sqrt{1 - p^2} + \frac{1}{2}\arcsin p + C,$$

oder

(14.)
$$2y - x = 2C - (1 + p)\sqrt{1 - p^2}.$$

II. Fall. Die Differential-Gleichung enthalte x gar nicht und sei auflösbar nach y ; die Gleichung habe also die Form

(15.)
$$y = \varphi(p);$$

dann findet man durch Differentiation mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$(16.) \quad dy = p dx = \varphi'(p) dp,$$

$$(17.) \quad dx = \frac{\varphi'(p) dp}{p},$$

also

$$(18.) \quad x = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} + C.$$

Indem man aus den Gleichungen (15.) und (18.) die Grösse p eliminirt, findet man die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Beispiele.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(19.) \quad y = \frac{2a}{1+p^2}$$

integriren.

Auflösung. Durch Differentiation findet man aus Gleichung

(19.)

$$(20.) \quad dy = p dx = -\frac{4ap dp}{(1+p^2)^2},$$

$$(21.) \quad dx = -\frac{4a dp}{(1+p^2)^2}.$$

Dies giebt nach Formel Nr. 144 der Tabelle

$$(22.) \quad x = -4a \int \frac{dp}{(1+p^2)^2} = -2a \left(\frac{p}{1+p^2} + \operatorname{arctg} p \right) + C.$$

Setzt man

$$C - a\pi = x_0, \quad p = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - t}{2}\right),$$

also

$$\pi - t = 2 \operatorname{arctg} p, \quad \frac{2}{1+p^2} = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t, \quad \frac{2p}{1+p^2} = \sin t,$$

so gehen die Gleichungen (19.) und (22.) über in

$$(19 \text{ a.}) \quad \begin{aligned} y &= a(1 - \cos t), \\ x &= a(t - \pi - \sin t) + C, \end{aligned}$$

oder

$$(22 \text{ a.}) \quad x - x_0 = a(t - \sin t).$$

Das allgemeine Integral stellt also eine Schaar von *Cykloiden* dar.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(23.) \quad y = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{a^2 p}$$

integriren.

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (23.)

$$(24.) \quad dy = p dx = - \frac{dp}{p^2 \sqrt{a^2 - p^2}},$$

$$(25.) \quad dx = - \frac{dp}{p^3 \sqrt{a^2 - p^2}},$$

also nach Formel Nr. 120 und 37 der Tabelle

$$(26.) \quad x - x_0 = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2 p^2} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{dp}{p \sqrt{a^2 - p^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{2a^2 p^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - p^2}}{p} \right).$$

Da noch aus Gleichung (23.) folgt, dass

$$(27.) \quad p = \frac{a}{\sqrt{a^4 y^2 + 1}}, \quad \sqrt{a^2 - p^2} = \frac{a^3 y}{\sqrt{a^4 y^2 + 1}}$$

ist, so findet man aus Gleichung (26.)

$$(28.) \quad 2a^3(x - x_0) = a^2 y \sqrt{a^4 y^2 + 1} + \ln(a^2 y + \sqrt{a^4 y^2 + 1}).$$

III. Fall. Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Grössen x , y und p , sei aber nach x auflösbar; die Gleichung habe also die Form

$$(29.) \quad x = f(y, p).$$

Indem man diese Gleichung differentiirt und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp,$$

oder

$$(30.) \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy - \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen y und p , die in Bezug auf $\frac{dy}{dp}$ nur vom ersten Grade ist und

sich in vielen Fällen leichter integrieren lässt als die vorgelegte Differential-Gleichung (29.). Hat man die Integral-Gleichung

$$(31.) \quad \varphi(y, p, C) = 0$$

gefunden, so folgt durch Elimination von p aus den Gleichungen (29.) und (31.) die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(32.) \quad yp^2 - 2xp + y = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{y(1 + p^2)}{2p}$$

integrieren.

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (32.)

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{p(1 + p^2)dy - y(1 - p^2)dp}{2p^2},$$

oder

$$(33.) \quad p(1 - p^2)dy + y(1 - p^2)dp = (1 - p^2)(pdy + ydp) = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man *entweder*

$$(34.) \quad 1 - p^2 = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

oder

$$(35.) \quad pdy + ydp = 0$$

setzt. Aus Gleichung (34.) folgt durch Integration

$$(36.) \quad y = \pm x + C.$$

Hier darf aber die Integrations-Constante C nicht jeden beliebigen Werth haben, denn, wenn man $p = \pm 1$ in die Gleichung (32.) einsetzt, so erkennt man, dass in Gleichung (36.) der Werth der Integrations-Constanten C gleich 0 sein muss, dass also Gleichung (36.) in

$$(36 \text{ a.}) \quad y = \pm x$$

übergeht.

Aus Gleichung (35.) findet man dagegen durch Trennung der Variabeln

$$(37.) \quad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0,$$

$$(38.) \quad \ln y + \ln p = \ln C, \quad \text{oder} \quad py = C, \quad \text{also} \quad p = \frac{C}{y}.$$

Trägt man diesen Werth von p in Gleichung (32.) ein, so findet man

$$(39.) \quad y^2 - 2Cx + C^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung und stellt eine *Schaar von Parabeln* dar, welche sämmtlich die beiden durch Gleichung (36 a.) dargestellten geraden Linien in den Punkten mit den Coordinaten

$$x = C, \quad y = \pm C$$

berühren.

IV. Fall. Die Differential-Gleichung enthalte alle drei Grössen x , y und p , sei aber auflösbar nach y ; die Gleichung habe also die Form

$$(40.) \quad y = f(x, p).$$

Indem man diese Gleichung differentiirt und Gleichung (1.) beachtet, erhält man

$$dy = p dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp,$$

oder

$$(41.) \quad \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p \right) = 0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen x und p , die in Bezug auf $\frac{dp}{dx}$ nur vom ersten Grade ist und sich in vielen Fällen leichter integrieren lässt als die vorgelegte Differential-Gleichung (40.). Hat man die Integral-Gleichung

$$(42.) \quad \varphi(x, p, C) = 0$$

gefunden, so folgt durch Elimination von p aus den Gleichungen (40.) und (42.) die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Hat die Differential-Gleichung z. B. die Form

$$(43.) \quad y = x \cdot f(p) + \varphi(p),$$

so wird mit Rücksicht auf Gleichung (1.)

$$(44.) \quad \frac{dy}{dx} = p = f(p) + [x \cdot f'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

oder

$$(45.) \quad [p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \cdot f'(p) = \varphi'(p).$$

Dies ist aber eine *lineare Differential-Gleichung erster Ordnung*, die man nach den Angaben in § 87 integrieren kann. (Vergl. auch Formel Nr. 209 der Tabelle.)

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo in der vorhergehenden Entwicklung $f(p)$ gleich p ist, wo also die Differential-Gleichung die Form

$$(46.) \quad y = px + \varphi(p)$$

hat. Dann erhält man durch Differentiation

$$dy = p dx = p dx + x dp + \varphi'(p) dp,$$

oder

$$(47.) \quad [x + \varphi'(p)] dp = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man entweder

$$(48.) \quad dp = 0,$$

oder

$$(49.) \quad x + \varphi'(p) = 0$$

setzt. Aus Gleichung (48.) folgt durch Integration

$$(50.) \quad p = \frac{dy}{dx} = C, \quad \text{also} \quad y = Cx + C_1,$$

wobei die zweite Integrations-Constante ermittelt wird, indem man den gefundenen Werth von p in die Gleichung (46.) einsetzt. Dies giebt

$$(51.) \quad y = Cx + \varphi(C), \quad \text{also} \quad C_1 = \varphi(C).$$

Da hierbei die Integrations-Constante C unendlich viele Werthe hat, so ist Gleichung (51.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Ganz verschieden davon ist die Lösung, welche man findet, indem man aus den Gleichungen (46.) und (49.) die Grösse p eliminirt. Dass man auf diese Weise wirklich eine Lösung erhält, kann man in folgender Weise zeigen. Denkt man sich aus Gleichung (49.) p als Function von x ausgerechnet und in Gleichung (46.) eingesetzt, so findet man, indem man diese Gleichung nach x differentiirt,

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (49.)

$$(52.) \quad \frac{dy}{dx} = p.$$

Beispiel.

Aufgabe 6. Man soll eine Curve bestimmen, bei welcher der Abschnitt der Tangente zwischen den beiden Coordinaten-Axen eine constante Länge c hat.

Fig. 136.

Auflösung. Damit die Gerade AB (Fig. 136) eine Tangente der Curve im Punkte P ist, muss

$$(53.) \quad y' = \frac{dy}{dx} x' + \mu, \quad \text{oder} \quad y' = p x' + \mu$$

sein, wobei die *laufenden* Coordinaten der Geraden mit x' und y' bezeichnet worden sind. Die Abschnitte $OA = a$ und $OB = b$, welche diese Gerade auf den Coordinaten-Axen abschneidet, sind dann

$$(54.) \quad a = -\frac{\mu}{p}, \quad b = \mu.$$

Da nach der Forderung der Aufgabe

$$a^2 + b^2 = c^2$$

sein soll, so findet man

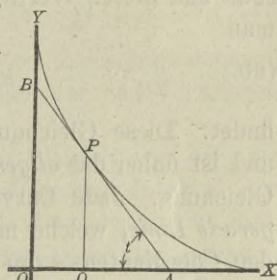
$$(55.) \quad \frac{\mu^2}{p^2} + \mu^2 = c^2, \quad \text{oder} \quad \mu = \pm \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Nimmt man hierbei zunächst das obere Zeichen, so geht Gleichung (53.) über in

$$(56.) \quad y' = p x' + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da die Gerade durch den Punkt P hindurchgehen soll, so erhält man die Differential-Gleichung

$$(57.) \quad y = px + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}.$$



Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiation

$$\left[\frac{dy}{dx} = p = p + \left(x + \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{dp}{dx} \right],$$

oder

$$(58.) \quad \left(x + \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt, indem man

$$(59.) \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C$$

setzt und diesen Werth von p in Gleichung (57.) einträgt, woraus man

$$(60.) \quad y = Cx + \frac{Cc}{\sqrt{1+C^2}}$$

findet. Diese Gleichung enthält die willkürliche Constante C und ist daher das *allgemeine* Integral der vorgelegte Differential-Gleichung. Jede Curve der gefundenen Curvenschaar ist eine *gerade Linie*, welche mit ihrer Tangente zusammenfällt und auf den Coordinaten-Axen die Abschnitte

$$(61.) \quad a = -\frac{c}{\sqrt{1+C^2}}, \quad b = +\frac{cC}{\sqrt{1+C^2}}$$

bestimmt. Da hieraus

$$a^2 + b^2 = c^2$$

folgt, so wird der Forderung der Aufgabe genügt.

Gleichung (58.) wird aber auch befriedigt, wenn man

$$(62.) \quad x + \frac{c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{-c}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}$$

setzt. Bezeichnet man den Winkel BAO mit t , so wird

$$(63.) \quad p = -\operatorname{tg} t, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = -\cos t, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = +\sin t;$$

dadurch gehen die Gleichungen (62.) und (57.) über in

$$(64.) \quad x = c \cos^3 t, \quad y = c \sin^3 t.$$

Durch Elimination von t findet man aus diesen Gleichungen

$$(65.) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die gesuchte Curve ist also eine *Astroide*. Für einen beliebigen Punkt P der Astroide wird

$$(66.) \quad p = -\operatorname{tg} t,$$

so dass man für die zugehörige Tangente die Gleichung

$$y' - y = p(x' - x),$$

oder

$$y' - c\sin^3 t = -\operatorname{tg} t(x' - c\cos^3 t),$$

$$(67.) \quad y' = -\operatorname{tg} t \cdot x' + c\sin t$$

findet. Deshalb sind die Abschnitte, welche diese Tangente auf den Coordinaten-Axen abschneidet,

$$(68.) \quad a = c\cos t, \quad b = c\sin t, \quad \text{also} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Hätte man in Gleichung (55.) das *untere* Zeichen genommen, so hätte sich in den folgenden Gleichungen nur das Vorzeichen von c geändert.

Setzt man in Gleichung (67.) $-\operatorname{tg} t$ gleich C , so geht sie in Gleichung (60.) über, welche das *allgemeine* Integral der Differential-Gleichung darstellte; d. h. die Astroide, welche man als eine *besondere* Lösung der Differential-Gleichung gefunden hat, berührt alle geraden Linien, die der *allgemeinen* Lösung entsprechen.

§ 94.

Die singulären Auflösungen der Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 221.)

Bei den Aufgaben 5 und 6 des vorhergehenden Paragraphen und ebenso bei der Differential-Gleichung

$$(1.) \quad y = px + \varphi(p)$$

find man *zwei* Lösungen, von denen die eine noch eine willkürliche Integrations-Constante enthält, die zweite aber nicht. Auch erkennt man bei diesen Aufgaben sofort, dass diese zweite Lösung, welche ohne Ausführung einer Integration gefunden werden konnte, kein *particuläres* Integral ist, d. h. die zweite Lösung geht nicht aus der ersten hervor, indem man der Integrations-Constanten einen besonderen Werth giebt.

Man nennt daher eine solche besondere Lösung „eine *singuläre Lösung der vorgelegten Differential-Gleichung*“.

Der Zusammenhang zwischen der *allgemeinen* und einer solchen *singulären* Lösung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Es sei

$$(2.) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder

$$(2a.) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

die gegebene Differential-Gleichung, und

$$(3.) \quad G(x, y, C) = 0$$

sei das allgemeine Integral. Die Gleichung (3.) stellt eine ganze Schaar von Curven dar, weil die Integrations-Constante C unendlich viele Werthe annehmen darf. C ist also in Gleichung (3.) ein *variabler Parameter*. Für die Coordinaten der Schnittpunkte zweier benachbarten Curven der Schaar, welche den variablen Parametern C und $C + \Delta C$ entsprechen, gelten die Gleichungen

$$(4.) \quad G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, C + \Delta C) = 0$$

gemeinschaftlich; deshalb gelten für die Coordinaten der Schnittpunkte auch die beiden Gleichungen

$$(5.) \quad G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{G(x, y, C + \Delta C) - G(x, y, C)}{\Delta C} = 0.$$

Wird ΔC verschwindend klein, so gehen diese Gleichungen über in

$$(6.) \quad G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen den variablen Parameter C eliminirt, so erhält man den geometrischen Ort aller dieser Schnittpunkte, d. h. die *Umhüllungscurve* der gegebenen Curvenschaar. (Vergl. D.-R., § 148 und Formel Nr. 225 der Tabelle.) Giebt es eine solche *Umhüllungscurve* oder *Envelope mit der Gleichung*

$$(7.) \quad S(x, y) = 0,$$

so ist diese Gleichung eine *singuläre Lösung* der gegebenen

Differential-Gleichung. Es galt nämlich der Satz: „Die Umhüllungscurve (Envelope) hat in den Punkten, welche sie mit einer der Curven der gegebenen Curvenschaar

$$G(x, y, C) = 0$$

gemein hat, auch die Tangente mit dieser Curve gemein“. (D.-R., § 148.) Im Punkte P mit den Coordinaten x und y hat daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

denselben Werth, gleichviel ob man annimmt, dass der Punkt P ein Punkt auf einer Curve der durch Gleichung (3.) dargestellten Curvenschaar ist, oder ob man den Punkt P als einen Punkt der Umhüllungscurve mit der Gleichung (7.) ansieht.

Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass zwischen der allgemeinen Lösung

$$(8.) \quad G(x, y, C) = 0$$

und der singulären Lösung

$$(9.) \quad S(x, y) = 0$$

einer Differential-Gleichung erster Ordnung immer dieser Zusammenhang besteht. Durch Differentiation der Gleichung (8.) erhält man nämlich

$$(10.) \quad \frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = G_1 + G_2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

also

$$(11.) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{G_1(x, y, C)}{G_2(x, y, C)}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung wird im Allgemeinen noch die Constante C enthalten. Damit dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen,

nämlich in $-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, übergeht, muss man also den Werth von C aus Gleichung (8.) ausrechnen und in Gleichung (11.) einsetzen. Bringt man z. B. Gleichung (8.) auf die Form

$$(8b.) \quad C = \varphi(x, y),$$

so geht Gleichung (11.) über in

$$(12.) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{G_1[x, y, \varphi(x, y)]}{G_2[x, y, \varphi(x, y)]} = - \frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Es ist nun die Frage, wie es möglich ist, dass man aus irgend einer anderen Gleichung

$$(13.) \quad S(x, y) = 0$$

denselben Werth von $\frac{dy}{dx}$ erhält?

Bestimmt man zur Beantwortung dieser Frage jetzt die Grösse C so, dass für *alle* Werthe von x und y

$$(14.) \quad G(x, y, C) = S(x, y)$$

wird, so ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(15.) \quad C = \psi(x, y).$$

Dabei sind die Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ möglicher Weise zunächst *von einander verschieden*; da aber nur solche Werthe von x und y in Betracht kommen, für welche $S(x, y)$ und deshalb nach Gleichung (14.) auch $G(x, y, C)$ verschwindet, so werden die Werthe von $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ für die betrachteten Werthe von x und y *einander gleich*, so dass man

$$C = \psi(x, y) = \varphi(x, y)$$

und

$$(16.) \quad G(x, y, C) = G[x, y, \varphi(x, y)] = 0$$

erhält. Durch Differentiation findet man hieraus, indem man y und C als Functionen von x betrachtet,

$$(17.) \quad \frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0.$$

Damit nun diese Gleichung denselben, durch Gleichung (2a.) vorgeschriebenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ liefert wie Gleichung (12.), muss

$$(18.) \quad \frac{\partial G}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0$$

sein. Dies ist aber nur möglich, wenn *entweder*

$$(19.) \quad \frac{dC}{dx} = 0$$

ist, wenn also C wirklich eine *Constante* ist, *oder* wenn

$$(20.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

wird. Gilt Gleichung (19.), so erhält man das *allgemeine* Integral, gilt dagegen Gleichung (20.), so braucht C keine Constante zu sein; man findet dann durch Elimination von C aus den Gleichungen (16.) und (20.) eine Gleichung, welche mit der Gleichung

$$S(x, y) = 0$$

gleichbedeutend ist, d. h. man findet die *singuläre Lösung*. Die *allgemeine* Lösung stellt daher immer eine Schaar von Curven dar, welche die der *singulären Lösung*

$$S(x, y) = 0$$

entsprechende Curve zur *Umhüllungcurve* haben.

§ 95.

Uebungs-Beispiele.

Schon in § 93 sind zwei Differential-Gleichungen integrirt worden, die eine singuläre Lösung zulassen. In Aufgabe 5 hatte man für die Differential-Gleichung

$$(1.) \quad yp^2 - 2xp + y = 0$$

das *allgemeine* Integral

$$(2.) \quad G(x, y, C) = y^2 - 2Cx + C^2 = 0$$

gefunden. Die Umhüllungcurve (Envelope) erhält man durch Elimination von C aus Gleichung (2.) und aus der Gleichung

$$(3.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2x + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = x.$$

Dies giebt

$$(4.) \quad y^2 - x^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pm x.$$

Die Gleichung der Enveloppe stimmt also überein mit der singulären Lösung der Differential-Gleichung.

In Aufgabe 6 hatte man für die Differential-Gleichung

$$(5.) \quad y = px + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}$$

das *allgemeine* Integral

$$(6.) \quad G(x, y, C) = y - Cx - \frac{cC}{\sqrt{1+C^2}} = 0$$

gefunden. Die Gleichung der Curve, welche von diesen geraden Linien eingehüllt wird, erhält man, indem man C aus der Gleichung (6.) und aus der Gleichung

$$(7.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -x - \frac{c}{(1+C^2)\sqrt{1+C^2}} = 0$$

eliminiert. Setzt man dabei wieder

$$(8.) \quad C = -\operatorname{tg} t, \quad \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} = -\cos t, \quad \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} = \sin t,$$

so folgt aus den Gleichungen (6.) und (7.)

$$(9.) \quad x = c \cos^3 t, \quad y = c \sin^3 t,$$

oder

$$(10.) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Enveloppe, welche in diesem Falle eine Astroide ist, giebt also die *singuläre* Lösung der Differential-Gleichung.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(11.) \quad y^2 - 2xyp + (1+x^2)p^2 = 1$$

integriren.

Auflösung. Indem man Gleichung (11.) nach y auflöst, erhält man

$$(12.) \quad y = xp \pm \sqrt{1-p^2},$$

daraus folgt durch Differentiation

$$(13.) \quad p = p + x \frac{dp}{dx} \mp \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \frac{dp}{dx},$$

oder

$$(13a.) \quad \left(x \mp \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man *entweder*

$$(14.) \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also } p = \frac{dy}{dx} = C,$$

oder

$$(15.) \quad x \mp \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} = 0, \quad \text{also} \quad \pm \sqrt{1-p^2} = \frac{p}{x}$$

setzt. Gleichung (14.) giebt das *allgemeine* Integral; indem man nämlich den gefundenen Werth von p in Gleichung (11.) einsetzt, erhält man

$$(16.) \quad G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2(1 + x^2) - 1 = 0,$$

oder

$$(16a.) \quad y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2},$$

also eine Schaar von geraden Linien.

Aus Gleichung (15.) dagegen ergibt sich die *singuläre* Lösung, und zwar erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (12.)

$$(17.) \quad y = xp + \frac{p}{x} = \frac{p}{x}(1 + x^2), \quad p = \frac{xy}{1 + x^2},$$

oder, wenn man diesen Werth von p in Gleichung (11.) einsetzt,

$$y^2 - \frac{2x^2y^2}{1 + x^2} + \frac{x^2y^2}{1 + x^2} = 1,$$

oder

$$(18.) \quad y^2 - x^2 = 1.$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne Weiteres erkennt, wenn man die Enveloppe der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (16.) dargestellten Curvenschaar bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von C aus Gleichung (16.) und aus

$$(19.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2xy + 2C(1 + x^2) = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{xy}{1 + x^2}.$$

Dieses Beispiel führte *Taylor* auf die Entdeckung der singulären Lösungen.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(20.) \quad ydx - xdy \pm a\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$$

integriren.

Auflösung. Die gegebene Differential-Gleichung kann man auf die Form

$$(21.) \quad y = px \mp a\sqrt{1 + p^2}$$

bringen, aus der durch Differentiation

$$p = p + x \frac{dp}{dx} \mp a \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx},$$

oder

$$(22.) \quad \left(x \mp \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{dp}{dx} = 0$$

folgt. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$(23.) \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad p = \frac{dy}{dx} = C$$

setzt. Trägt man diesen Werth von p in die Gleichung (21.) ein, so erhält man

$$y = Cx \mp a \sqrt{1+C^2},$$

oder

$$(24.) \quad G(x, y, C) = y^2 - 2Cxy + C^2x^2 - a^2(1+C^2) = 0.$$

Dies ist die *allgemeine* Lösung der gegebenen Differential-Gleichung. Die *singuläre* Lösung findet man aus Gleichung (22.), indem man

$$(25.) \quad x \mp \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm \sqrt{1+p^2} = \frac{ap}{x}$$

setzt. Dies giebt in Verbindung mit Gleichung (21.)

$$(26.) \quad y = px - \frac{a^2p}{x} = \frac{p}{x}(x^2 - a^2), \quad \text{oder} \quad p = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Bringt man Gleichung (21.) noch auf die Form

$$y^2 - 2xyp + x^2p^2 = a^2(1+p^2),$$

oder

$$(27.) \quad y^2 - 2xyp + (x^2 - a^2)p^2 - a^2 = 0$$

und setzt den eben gefundenen Werth von p ein, so erhält man

$$(28.) \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung findet man aber auch, wie man ohne Weiteres erkennt, wenn man die Enveloppe der durch die *allgemeine* Lösung in Gleichung (24.) dargestellten Schaar gerader Linien bestimmt. Dies geschieht durch Elimination von C aus Gleichung (24.) und aus

$$(29.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -2xy + 2C(x^2 - a^2) = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(30.) \quad (xp - y)(x - yp) = 2p$$

integriren.

Auflösung. Setzt man

$$(31.) \quad x = \sqrt{z + u}, \quad y = \sqrt{z - u}, \quad \text{also } 2z = x^2 + y^2, \quad 2u = x^2 - y^2,$$

so wird

$$(32.) \quad dx = \frac{dz + du}{2\sqrt{z + u}}, \quad dy = \frac{dz - du}{2\sqrt{z - u}}, \quad p = \frac{(dz - du)\sqrt{z + u}}{(dz + du)\sqrt{z - u}},$$

$$(33.) \quad xp - y = \frac{2(udz - zdu)}{(dz + du)\sqrt{z - u}}, \quad x - yp = \frac{2du\sqrt{z + u}}{dz + du}.$$

Trägt man diese Werthe in Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$\frac{4(udz - zdu)du\sqrt{z + u}}{(dz + du)^2\sqrt{z - u}} = \frac{2(dz - du)\sqrt{z + u}}{(dz + du)\sqrt{z - u}},$$

oder

$$(34.) \quad dz^2 - 2udzdu + (2z - 1)du^2 = 0.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\frac{dz}{du}$ mit p_1 , so erhält Gleichung (34.) die Form

$$(35.) \quad p_1^2 - 2up_1 + 2z - 1 = 0, \quad \text{oder } z = up_1 + \frac{1 - p_1^2}{2}.$$

Indem man diese Gleichung nach u differentiirt, findet man

$$p_1 = p_1 + u \frac{dp_1}{du} - p_1 \frac{dp_1}{du},$$

oder

$$(36.) \quad (u - p_1) \frac{dp_1}{du} = 0.$$

Hieraus folgt das *allgemeine* Integral, indem man

$$(37.) \quad \frac{dp_1}{du} = 0, \quad \text{also } p_1 = C$$

setzt und in die Gleichung (35.) einträgt. Dies giebt

$$(38.) \quad 2z - 2Cu = 1 - C^2,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

$$(39.) \quad G(x, y, C) = x^2 + y^2 - C(x^2 - y^2) - 1 + C^2 = 0,$$

oder

$$(40.) \quad \frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{1-C} = 1.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Schaar concentrischer Ellipsen und Hyperbeln.

Die *singuläre* Lösung findet man, wenn man in Gleichung (36.) den Factor

$$(41.) \quad u - p_1 = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = u$$

setzt und in Gleichung (35.) einträgt. Dies giebt

$$(42.) \quad u^2 - 2u^2 + 2z - 1 = 0,$$

oder

$$(43.) \quad u^2 - 2z + 1 = 0,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (31.)

$$(44.) \quad x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4 = 0,$$

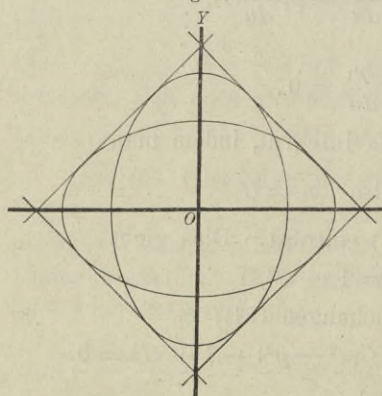
oder

$$(44a.) \quad (x + y + \sqrt{2})(x + y - \sqrt{2})(x - y + \sqrt{2})(x - y - \sqrt{2}) = 0.$$

Dieselbe Gleichung findet man, wenn man die Enveloppe der durch Gleichung (39.) dargestellten Curvenschaar bestimmt, indem man aus dieser Gleichung und aus

$$(45.) \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = -(x^2 - y^2) + 2C = 0, \quad \text{oder} \quad C = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

Fig. 137.



den variablen Parameter C eliminiert.

Der Gleichung (44.) oder (44a.) entspricht ein System von 4 geraden Linien (Fig. 137), die sämtliche Curven der durch Gleichung (40.) gegebenen Curvenschaar berühren. Gleichzeitig stellt jede dieser geraden Linien eine *singuläre* Lösung der vorgelegten Differentialgleichung dar. Setzt man z. B.

$$(46.) \quad x - y + \sqrt{2} = 0, \quad \text{oder} \quad y = x + \sqrt{2},$$

also

$$(47.) \quad p = 1,$$

und trägt diese Werthe in die Gleichung (30.) ein, so erhält man

$$(x - x - \sqrt{2})(x - x - \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$$

und erkennt, dass Gleichung (30.) durch diesen Werth von y befriedigt wird.

§ 96.

Isogonale Trajektorien.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 222 und 223.)

Wenn eine Schaar von Curven durch die Gleichung

$$(1.) \quad F(x, y, u) = 0$$

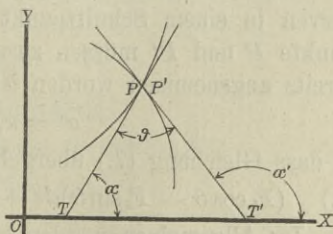
mit dem *variablen Parameter* u gegeben ist, und wenn die sämtlichen Curven dieser Curvenschaar von einer anderen Curve nach einem bestimmten Gesetze geschnitten werden, so nennt man diese schneidende Curve „eine *Trajectorie*“ der gegebenen Curvenschaar.

Unter den Trajektorien sind besonders bemerkenswerth die *isogonalen Trajektorien*, welche die sämtlichen Curven einer Curvenschaar unter einem gegebenen Winkel ϑ schneiden. Ist dieser Winkel ϑ ein *rechter Winkel*, so nennt man die schneidende Curve „eine *orthogonale Trajectorie*“.

Um die Differential-Gleichung zu finden, welcher die isogonalen Trajektorien genügen müssen, gebe man dem variablen Parameter u in Gleichung (1.)

zunächst einen bestimmten Werth, d. h. man greife aus der gegebenen Schaar eine bestimmte Curve heraus. Der Winkel, welchen die Tangente dieser Curve (Fig. 138) im Punkte P mit der positiven Richtung der X -Axe bildet, sei

Fig. 138.



α , dann ist nach D.-R., Formel Nr. 16 und 127 der Tabelle

$$(2.) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = - \frac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)},$$

wobei die partiellen Ableitungen von $F(x, y, u)$ nach x und y bezw. mit $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ bezeichnet worden sind. Nennt man nun die laufenden Coordinaten der isogonalen Trajectorie x', y' und den Winkel, welchen die Tangente dieser Trajectorie im Punkte P' mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, α' , so ist

$$(3.) \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy'}{dx'}.$$

Damit nun diese beiden Tangenten den Winkel ϑ mit einander bilden, muss

$$(4.) \quad \alpha' = \alpha + \vartheta$$

sein. Dies giebt

$$(5.) \quad \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \vartheta},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.)

$$(6.) \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{-\frac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)} + \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \frac{F_1(x, y, u)}{F_2(x, y, u)} \operatorname{tg} \vartheta} = \frac{F_2 \operatorname{tg} \vartheta - F_1}{F_2 + F_1 \operatorname{tg} \vartheta},$$

wobei der Kürze wegen F_1 und F_2 statt $F_1(x, y, u)$ und $F_2(x, y, u)$ gesetzt ist. Multiplicirt man auf der rechten Seite dieser Gleichung noch Zähler und Nenner mit $\cos \vartheta$, so erhält man

$$(7.) \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{F_2 \sin \vartheta - F_1 \cos \vartheta}{F_2 \cos \vartheta + F_1 \sin \vartheta}.$$

Jetzt wird aber verlangt, dass die Tangenten an die beiden Curven in einem Schnittpunkt derselben gelegt sind, 'd. h. die Punkte P und P' müssen zusammenfallen, wie es in Figur 138 bereits angenommen worden ist; es wird also

$$x' = x, \quad y' = y,$$

so dass Gleichung (7.) übergeht in die Gleichung

$$(8.) \quad (F_1 \cos \vartheta - F_2 \sin \vartheta) dx + (F_1 \sin \vartheta + F_2 \cos \vartheta) dy = 0.$$

Im Allgemeinen werden hierbei F_1 und F_2 noch Functionen von u sein, so dass die Curve, für welche die Differential-

Gleichung (8.) gilt, nur diese *eine*, dem bestimmten Werthe von u entsprechende Curve unter dem Winkel ϑ schneidet.

Damit *sämmtliche* Curven der gegebenen Curvenschaar unter dem Winkel ϑ geschnitten werden, muss man Gleichung (1.) in Bezug auf u auflösen und den gefundenen Werth von u in Gleichung (8.) einsetzen, oder man muss, was auf dasselbe hinauskommt, aus den Gleichungen (1.) und (8.) die Grösse u eliminiren. Dadurch erhält man eine Gleichung

$$(9.) \quad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Differential-Gleichung der gesuchten *isogonalen Trajectorie* ist.

Bei der Integration dieser Differential-Gleichung erster Ordnung tritt eine Integrations-Constante C auf, die man noch *willkürlich* bestimmen kann. Deshalb giebt es zu der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

eine *ganze Schaar* isogonaler Trajectorien.

Bei den *orthogonalen* Trajectorien ist ϑ ein rechter Winkel, dann wird also

$$(10.) \quad \sin \vartheta = 1, \quad \cos \vartheta = 0,$$

so dass Gleichung (8.) übergeht in

$$(11.) \quad -F_2 dx + F_1 dy = 0.$$

Die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien findet man also, indem man aus den Gleichungen (1.) und (11.) den variablen Parameter u eliminirt.

§ 97.

Uebungs-Aufgaben.

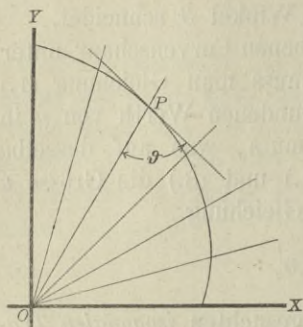
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 224 bis 228.)

Aufgabe 1. Durch die Gleichung

$$(1.) \quad F(x, y, u) = y - ux = 0$$

ist eine Schaar von geraden Linien gegeben, welche sämmtlich

Fig. 139.



durch den Nullpunkt hindurchgehen; man soll die Gleichung der Trajektorien aufsuchen, welche alle diese Geraden unter dem Winkel ϑ schneiden.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt durch partielle Differentiation

$$(2.) \quad F_1 = -u, \quad F_2 = 1,$$

deshalb findet man aus Formel Nr. 222 der Tabelle für die isogonalen Trajektorien die Differentialgleichung

$$(3.) \quad (-u \cos \vartheta - \sin \vartheta) dx + (-u \sin \vartheta + \cos \vartheta) dy = 0,$$

wobei aber noch nach Gleichung (1.)

$$(4.) \quad u = \frac{y}{x}$$

zu setzen ist. Dies giebt

$$(5.) \quad (-y \cos \vartheta - x \sin \vartheta) dx + (-y \sin \vartheta + x \cos \vartheta) dy = 0,$$

oder, wenn man durch $-\sin \vartheta$ dividirt,

$$(5a.) \quad (x dx + y dy) + \operatorname{ctg} \vartheta (y dx - x dy) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird ein vollständiges Differential, wie aus den Bemerkungen in § 91, Seite 509 und 510 hervorgeht, wenn man mit dem integrierenden Factor $\frac{1}{x^2 + y^2}$ multiplicirt, und zwar erhält man aus

$$(6.) \quad \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$$

nach den damals angegebenen Regeln

$$(7.) \quad \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln C.$$

Diese Gleichung wird noch wesentlich einfacher durch Einführung von Polarcoordinaten, indem man

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \text{also} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi$$

setzt und den constanten Factor $\operatorname{ctg} \vartheta$ mit a bezeichnet. Dadurch geht Gleichung (7.) über in

$$(8.) \quad \ln r = \ln C + a\varphi = \ln(C \cdot e^{a\varphi}),$$

oder

$$(9.) \quad r = C \cdot e^{a\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der *logarithmischen Spirale*, welche für die verschiedenen Werthe der Integrations-Constanten C verschiedene Lagen einnimmt.

In dem Falle, wo ϑ gleich 90° ist, wird $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$, so dass dann Gleichung (7.) übergeht in

$$(10.) \quad \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln C, \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Schaar *concentrischer Kreise*.

Aufgabe 2. Durch die Gleichung

$$(11.) \quad F(x, y, u) = x^2 - 2u(y - x\sqrt{3}) = 0$$

ist eine Schaar von Parabeln gegeben; man soll diejenigen Curven aufsuchen, welche alle diese Parabeln unter einem Winkel von $\pm 60^\circ$ schneiden.

Auflösung. Hier ist

$$(12.) \quad \vartheta = \pm 60^\circ, \quad \text{also} \quad \sin \vartheta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{2},$$

$$(13.) \quad F_1 = 2x + 2u\sqrt{3}, \quad F_2 = -2u,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 222 der Tabelle für die isogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$(14.) \quad (x + u\sqrt{3} \pm u\sqrt{3})dx + [\pm (x + u\sqrt{3})\sqrt{3} - u]dy = 0.$$

Für das *obere* Zeichen erhält man daher

$$(15.) \quad (x + 2u\sqrt{3})dx + (x\sqrt{3} + 2u)dy = 0,$$

wobei aber nach Gleichung (11.)

$$(16.) \quad 2u = \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}$$

einzusetzen ist. Dies giebt

$$\left(x + \frac{x^2\sqrt{3}}{y - x\sqrt{3}}\right)dx + \left(x\sqrt{3} + \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}\right)dy = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichungen mit $\frac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multiplicirt,

$$(17.) \quad ydx + (y\sqrt{3} - 2x)dy = 0.$$

Da in dieser Gleichung die Coefficienten von dx und dy homogene Functionen gleichen Grades sind, so setze man

$$(18.) \quad y = xz, \quad dy = xdz + zdx.$$

Dadurch erhält man, wenn man Gleichung (17.) noch durch x dividirt,

$$zdx + (z\sqrt{3} - 2)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$(19.) \quad (z^2\sqrt{3} - z)dx + (z\sqrt{3} - 2)xdz = 0,$$

$$(20.) \quad \frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 2)dz}{z(z\sqrt{3} - 1)} = -\frac{2dz}{z} + \frac{\sqrt{3}dz}{z\sqrt{3} - 1},$$

also

$$(21.) \quad \ln x = \ln(z\sqrt{3} - 1) - 2\ln z + \ln C,$$

oder

$$(22.) \quad xz^2 = C(z\sqrt{3} - 1).$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

$$(23.) \quad y^2 = C(y\sqrt{3} - x).$$

Diese Gleichung stellt ebenfalls eine *Schaar von Parabeln* dar, und zwar geht Gleichung (11.) in Gleichung (23.) über, wenn man x mit y und $2u$ mit $-C$ vertauscht.

Wenn man dagegen in Gleichung (14.) das *untere* Zeichen beachtet, so erhält man

$$(24.) \quad xdx - (x\sqrt{3} + 4u)dy = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (16.)

$$xdx - \left(x\sqrt{3} + \frac{2x^2}{y - x\sqrt{3}} \right) dy = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit $\frac{y - x\sqrt{3}}{x}$ multiplicirt,

$$(25.) \quad (y - x\sqrt{3})dx - (y\sqrt{3} - x)dy = 0.$$

Auch hier sind die Coefficienten von dx und dy homogene Functionen gleichen Grades, folglich wendet man wieder die in den Gleichungen (18.) angegebene Substitution an und erhält

$$(z - \sqrt{3})dx - (z\sqrt{3} - 1)(xdz + zdx) = 0,$$

oder

$$(26.) \quad (z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})dx + (z\sqrt{3} - 1)xdz = 0,$$

$$(27.) \quad \frac{dx}{x} = -\frac{(z\sqrt{3} - 1)dz}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \frac{d(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3})}{z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}};$$

folglich wird

$$\ln(x^2) + \ln(z^2\sqrt{3} - 2z + \sqrt{3}) = \ln C,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.)

$$(28.) \quad (x^2 + y^2)\sqrt{3} - 2xy = C.$$

Dies ist die Gleichung einer Schaar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen*, deren Axen die Winkel zwischen den Coordinaten-Axen halbiren.

Aufgabe 3. Durch die Gleichung

$$(29.) \quad F(x, y, u) = y^2 - ux = 0$$

ist eine Schaar von *Parabeln* mit gleichem Scheitel und gleicher Axe gegeben (Fig. 140); man soll die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajectorien ermitteln.

Auflösung. Hier ist

$$(30.) \quad F_1 = -u, \quad F_2 = 2y,$$

folglich findet man nach Formel Nr. 223 der Tabelle

$$(31.) \quad 2ydx + udy = 0,$$

wobei aber nach Gleichung (29.)

$$(32.) \quad u = \frac{y^2}{x}$$

zu setzen ist. Dies giebt

$$(33.) \quad 2ydx + \frac{y^2}{x} dy = 0, \quad \text{oder} \quad 2xdx + ydy = 0.$$

Daraus folgt durch Integration

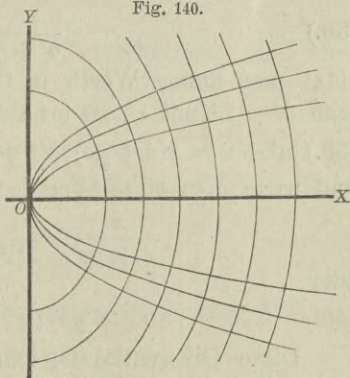
$$(34.) \quad 2x^2 + y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Schaar von *ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen*.

Aufgabe 4. Durch die Gleichung

$$(35.) \quad F(x, y, u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} - 1 = 0$$

Fig. 140.



ist eine Schaar *confocaler Ellipsen* gegeben, wobei der variable Parameter u alle Werthe von $-b^2$ bis $+\infty$ durchläuft. Wenn dagegen u alle Werthe von $-a^2$ bis $-b^2$ durchläuft, so stellt Gleichung (35.) eine Schaar *confocaler Hyperbeln* dar. Man soll für beide Fälle die rechtwinkligen (*orthogonalen*) Trajectorien bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$(36.) \quad F_1 = \frac{2x}{a^2 + u}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2 + u},$$

folglich findet man nach Formel Nr. 223 der Tabelle für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$(37.) \quad -\frac{ydx}{b^2 + u} + \frac{xdy}{a^2 + u} = 0,$$

wobei man noch den variablen Parameter u aus den Gleichungen (35.) und (37.) in folgender Weise eliminiren kann. Aus Gleichung (37.) findet man

$$(38.) \quad \frac{y^2}{b^2 + u} = \frac{xyp}{a^2 + u};$$

setzt man diesen Werth in Gleichung (35.) ein und bezeichnet man $a^2 - b^2$ mit e^2 , so erhält man

$$(39.) \quad a^2 + u = x(x + yp), \quad b^2 + u = a^2 + u - e^2 = x(x + yp) - e^2,$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (35.) einsetzt,

$$\frac{x}{x + yp} + \frac{y^2}{x(x + yp) - e^2} = 1,$$

oder

$$(40.) \quad (x + yp)(y - xp) = -e^2p.$$

Diese Differential-Gleichung für die orthogonalen Trajectorien lässt sich ähnlich behandeln wie die in § 95, Aufgabe 3. Man setze nämlich

$$(41.) \quad x^2 = z + t, \quad y^2 = z - t, \quad \text{also} \quad 2z = x^2 + y^2, \quad 2t = x^2 - y^2,$$

dann wird

$$(42.) \quad dz = (x + yp)dx, \quad dt = (x - yp)dx,$$

also, wenn man $\frac{dz}{dt}$ mit p_1 bezeichnet,

$$(43.) \quad \frac{dz}{dt} = p_1 = \frac{x + yp}{x - yp}, \quad p = \frac{x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)}.$$

$$(44.) \quad x + yp = \frac{2xp_1}{p_1 + 1}, \quad y - xp = \frac{2(z - tp_1)}{y(p_1 + 1)}.$$

Deshalb geht Gleichung (40.) über in

$$\frac{4xp_1(z - tp_1)}{y(p_1 + 1)^2} = -\frac{e^2x(p_1 - 1)}{y(p_1 + 1)},$$

oder

$$(45.) \quad 4p_1(z - tp_1) = -e^2(p_1^2 - 1).$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$(46.) \quad z = tp_1 - \frac{e^2(p_1^2 - 1)}{4p_1}$$

bringen und erhält daraus durch Differentiation nach t

$$(47.) \quad \left[t - \frac{e^2(p_1^2 + 1)}{4p_1^2} \right] \frac{dp_1}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$(48.) \quad \frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad p_1 = C$$

setzt. Indem man diesen Werth von p_1 in Gleichung (45.) einträgt, erhält man

$$4C(z - tC) = e^2(1 - C^2),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.)

$$2Cx^2(1 - C) + 2Cy^2(1 + C) = e^2(1 - C^2),$$

oder

$$(49.) \quad \frac{2Cx^2}{e^2(1 + C)} + \frac{2Cy^2}{e^2(1 - C)} = 1.$$

Führt man jetzt statt der Integrations-Constanten C einen variablen Parameter z ein, indem man

$$(50.) \quad C = \frac{e^2}{a^2 + b^2 + 2z},$$

also

$$\frac{e^2(1 + C)}{2C} = a^2 + z, \quad \frac{e^2(1 - C)}{2C} = b^2 + z$$

setzt, so geht Gleichung (49.) über in

$$(51.) \quad \frac{x^2}{a^2 + z} + \frac{y^2}{b^2 + z} = 1.$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Schaar *confocaler Ellipsen und Hyperbelen* dar, welche mit der gegebenen Curvenschaar

identisch ist. Dabei schneiden, wie bereits bekannt ist, in der That die sämtlichen Hyperbeln die sämtlichen Ellipsen *rechtwinklig*.

Hätte man in Gleichung (47.), um die *singuläre* Lösung zu erhalten, den Factor

$$(52.) \quad t - \frac{e^2(p_1^2 + 1)}{4p_1^2} = 0, \quad \text{oder} \quad p_1^2(4t - e^2) = e^2$$

gesetzt, so würde man mit Rücksicht darauf, dass nach Gleichung (46.)

$$(53.) \quad 4p_1z = p_1^2(4t - e^2) + e^2$$

ist, die Gleichungen

$$4p_1z = 2e^2, \quad \text{oder} \quad 4p_1^2z^2 = e^4, \quad \text{also} \quad 4z^2 = e^2(4t - e^2)$$

gefunden haben. Dies giebt, wenn man die Werthe von z und t aus den Gleichungen (41.) einsetzt,

$$(x^2 + y^2)^2 = e^2(2x^2 - 2y^2 - e^2),$$

oder

$$(54.) \quad (x^2 - e^2)^2 = -y^2(2x^2 + y^2 + 2e^2).$$

Die *singuläre* Lösung liefert also eine *imaginäre* Curve, denn Gleichung (54.) kann durch *reelle* Werthe von x und y nicht befriedigt werden.

Im Allgemeinen wird die Integration der für die orthogonalen Trajectorien gefundenen Differential-Gleichungen in geschlossener Form nicht ausführbar sein; deshalb ist es von Interesse, einige Fälle hervorzuheben, wo die Integration durch Trennung der Variabeln unmittelbar bewirkt werden kann. Die gegebene Curvenschaar habe die Gleichung

$$(55.) \quad F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0,$$

wobei $f(x)$ eine Function der einzigen Veränderlichen x und $g(y)$ eine Function der einzigen Veränderlichen y sein möge; dann wird

$$(56.) \quad F_1 = f'(x), \quad F_2 = g'(y),$$

so dass die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien (vergl. Formel Nr. 223 der Tabelle) in

$$-g'(y)dx + f'(x)dy = 0,$$

oder

$$(57.) \quad \frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)}$$

übergeht. Danach kann man ohne Weiteres die folgenden Aufgaben behandeln.

Aufgabe 5. Man soll die orthogonalen Trajektorien der Curven mit der Gleichung

$$(58.) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta - u = 0$$

bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$(59.) \quad f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha, \quad g(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^\beta,$$

also

$$(60.) \quad f'(x) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}, \quad g'(y) = \frac{\beta}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta-1},$$

folglich findet man nach Gleichung (57.) für die orthogonalen Trajektorien die Differential-Gleichung

$$(61.) \quad \frac{a^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \frac{b^\beta}{\beta} \cdot \frac{dy}{y^{\beta-1}}.$$

Die Fälle, wo $\alpha = 2$ oder $\beta = 2$ ist, muss man besonders untersuchen. Ist z. B. $\alpha = 2$ und $\beta = 2$, so geht Gleichung (61.) über in

$$(62.) \quad a^2 \cdot \frac{dx}{x} = b^2 \cdot \frac{dy}{y},$$

folglich wird

$$(63.) \quad b^2 \ln y = a^2 \ln x + \ln C, \quad \text{oder} \quad y^{b^2} = Cx^{a^2}.$$

Dagegen findet man unter der Voraussetzung, dass $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$, aus Gleichung (61.) durch Integration

$$(64.) \quad a^\alpha \beta (\beta - 2) x^{2-\alpha} = b^\beta \alpha (\alpha - 2) y^{2-\beta} + C.$$

Ist z. B.

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3},$$

und vertauscht man u mit $u^{\frac{2}{3}}$, so geht Gleichung (58.) über in

$$(65.) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = u^{\frac{2}{3}}.$$

d. h. die gegebene Curvenschaar ist eine Schaar *ähnlicher und ähnlich liegender Astroiden*.

Für die orthogonalen Trajectorien findet man dann aus Gleichung (64.), wenn man die Integrations-Constante $-\frac{9}{8}C$ mit $v^{\frac{4}{3}}$ bezeichnet,

$$(66.) \quad x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = v^{\frac{4}{3}}.$$

Man kann das angegebene Verfahren auch dann noch anwenden, wenn die Gleichung der angegebenen Curvenschaar die Form

$$(67.) \quad f(x) \cdot g(y) - u = 0$$

hat, weil man sie durch die Gleichung

$$(68.) \quad F(x, y, u) = \ln[f(x)] + \ln[g(y)] - \ln u = 0$$

ersetzen kann. Dann wird

$$(69.) \quad F_1 = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad F_2 = \frac{g'(y)}{g(y)},$$

so dass man aus Formel Nr. 223 der Tabelle für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$-\frac{g'(y)}{g(y)} dx + \frac{f'(x)}{f(x)} dy = 0,$$

oder

$$(70.) \quad \frac{f(x)}{f'(x)} dx = \frac{g(y)}{g'(y)} dy$$

erhält.

Aufgabe 6. Man soll die orthogonalen Trajectorien für die *verallgemeinerten gleichseitigen Hyperbeln* mit der Gleichung

$$(71.) \quad x^m y^n = u$$

bestimmen.

Auflösung. Hier ist

(72.) $f(x) = x^m$, $g(y) = y^n$, $f'(x) = mx^{m-1}$, $g'(y) = ny^{n-1}$,
folglich ergibt sich aus Gleichung (70.) für die orthogonalen Trajectorien die Differential-Gleichung

$$(73.) \quad 2mydy = 2nxdx;$$

die orthogonalen Trajektorien selbst haben daher die Gleichung

$$(74.) \quad my^2 = nx^2 + C.$$

Ist die Gleichung der gegebenen Curvenschaar in *Polar-coordinaten* ausgedrückt, geht man also von der Gleichung

$$(75.) \quad F(r, \varphi, u) = 0$$

aus, so ist der Winkel μ , welchen die Tangente im Curvenpunkte P mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, durch die Gleichung (vergl. D.-R., Formel Nr. 149 der Tabelle)

$$(76.) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{r d\varphi}{dr}$$

gegeben. Bezeichnet man vorläufig die Coordinaten einer orthogonalen Trajektorie mit r' , φ' und den Winkel, welchen die Tangente dieser Curve mit dem zugehörigen Radiusvector bildet, mit μ' , so ist

$$(77.) \quad \operatorname{tg} \mu' = \frac{r' d\varphi'}{dr'}$$

Nun soll $\mu' - \mu = 90^\circ$ sein, deshalb wird

$$(78.) \quad \operatorname{tg}(\mu' - \mu) = \frac{\operatorname{tg} \mu' - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \mu'} = \infty,$$

oder

$$(79.) \quad 1 + \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \mu' = 1 + \frac{r d\varphi}{dr} \cdot \frac{r' d\varphi'}{dr'} = 0.$$

Setzt man hierbei der Kürze wegen

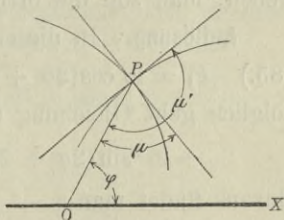
$$(80.) \quad \frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial r} = F_1, \quad \frac{\partial F(r, \varphi, u)}{\partial \varphi} = F_2,$$

so folgt aus Gleichung (75.)

$$(81.) \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{F_1(r, \varphi, u)}{F_2(r, \varphi, u)} = -\frac{F_1}{F_2},$$

folglich geht Gleichung (79.) über in

Fig. 141.



$$(82.) \quad 1 - \frac{rF_1}{F_2} \cdot \frac{r'd\varphi'}{dr'} = 0;$$

da aber die Berührungspunkte P und P' zusammenfallen müssen, so wird r' gleich r , φ' gleich φ , also

$$(83.) \quad F_2 - F_1 r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Im Allgemeinen werden hierbei F_1 und F_2 noch den Parameter u enthalten; indem man u aus den Gleichungen (75.) und (83.) eliminirt, erhält man die Differential-Gleichung der orthogonalen Trajectorien.

Aufgabe 7. Die Gleichung

$$(84.) \quad F(r, \varphi, u) = r^2 \cos(2\varphi + 2u) - a^2 \cos(2u) = 0$$

stellt eine Schaar von *gleichseitigen Hyperbeln* dar, welche den Nullpunkt zum gemeinsamen Mittelpunkte haben und sämtlich durch den Punkt A mit den Coordinaten $r = a$, $\varphi = 0$ hindurchgehen; man soll die orthogonalen Trajectorien bestimmen.

Auflösung. In diesem Falle ist

$$(85.) \quad F_1 = 2r \cos(2\varphi + 2u), \quad F_2 = -2r^2 \sin(2\varphi + 2u),$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

$$-2r^2 \sin(2\varphi + 2u) - 2r^3 \cos(2\varphi + 2u) \frac{d\varphi}{dr} = 0;$$

daraus findet man

$$(86.) \quad \operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = -r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Nun kann man Gleichung (84.) auf die Form

$$r^2 \cos(2\varphi) \cos(2u) - r^2 \sin(2\varphi) \sin(2u) - a^2 \cos(2u) = 0,$$

oder

$$(87.) \quad \operatorname{tg}(2u) = \frac{r^2 \cos(2\varphi) - a^2}{r^2 \sin(2\varphi)}$$

bringen, folglich wird

$$(88.) \quad \operatorname{tg}(2\varphi + 2u) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi) + \operatorname{tg}(2u)}{1 - \operatorname{tg}(2\varphi) \operatorname{tg}(2u)}$$

$$= \frac{r^2 \sin(2\varphi) \operatorname{tg}(2\varphi) + r^2 \cos(2\varphi) - a^2}{r^2 \sin(2\varphi) - \operatorname{tg}(2\varphi) [r^2 \cos(2\varphi) - a^2]}$$

$$= \frac{r^2 - a^2 \cos(2\varphi)}{a^2 \sin(2\varphi)}.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (86.)

$$(89.) \quad \frac{r^2 - a^2 \cos(2\varphi)}{a^2 \sin(2\varphi)} = - \frac{rd\varphi}{dr},$$

oder, wenn man

$$(90.) \quad a^2 \cos(2\varphi) = t, \quad \text{also} \quad -2a^2 \sin(2\varphi)d\varphi = dt$$

setzt,

$$(91.) \quad \frac{dt}{dr} + \frac{2t}{r} = 2r.$$

Weil dies eine *lineare Differential-Gleichung* erster Ordnung ist, setze man

$$(92.) \quad t = vz, \quad \text{also} \quad dt = vdz + zdv,$$

wodurch man

$$(93.) \quad v \frac{dz}{dr} + z \left(\frac{dv}{dr} + \frac{2v}{r} \right) = 2r$$

erhält. Indem man die Function v so bestimmt, dass in dieser Gleichung der Coefficient von z verschwindet, erhält man

$$(94.) \quad \frac{dv}{v} = - \frac{2dr}{r}, \quad \text{also} \quad \ln v = - \ln(r^2), \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{r^2};$$

deshalb geht Gleichung (93.) über in

$$(95.) \quad \frac{1}{r^2} \frac{dz}{dr} = 2r, \quad \text{oder} \quad dz = 2r^3 dr.$$

Dies giebt, wenn man die Integrations-Constante mit $\frac{1}{2}(a^4 - b^4)$ bezeichnet,

$$(96.) \quad 2z = r^4 + a^4 - b^4, \quad \text{also} \quad 2vz = r^2 + \frac{a^4 - b^4}{r^2} = 2t,$$

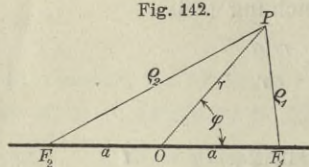
oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (90.)

$$(97.) \quad r^4 - 2a^2 r^2 \cos(2\varphi) + a^4 = b^4,$$

wobei b der variable Parameter ist.

Diese Gleichung stellt eine Schaar von Curven dar, welche unter dem Namen „*Cassini'sche Curven*“ bekannt sind und die Eigenschaft besitzen, dass das Product der Abstände eines jeden Curvenpunktes von zwei festen Punkten mit den Coordinaten $x = \pm a, y = 0$ den constanten Werth b^2 besitzt. Sind nämlich

Fig. 142.



F_1 und F_2 die beiden festen Punkte, die „*Brennpunkte*“ genannt werden, und ρ_1, ρ_2 die nach einem beliebigen Curvenpunkte P gezogenen „*Brennstrahlen*“, so wird nach dem Cosinussatze (vergl. Fig. 142)

$$(98.) \quad \rho_1^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi, \quad \rho_2^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \varphi,$$

also

$$(99.) \quad \rho_1^2 \rho_2^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \varphi = b^4,$$

woraus sich ohne Weiteres Gleichung (97.) ergibt.

Für $b = a$ reducirt sich die Gleichung der *Cassini'schen* Curve auf

$$(100.) \quad r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$$

und stellt eine *Lemniscate* dar.

Auch bei Anwendung von Polarcoordinaten kann man Fälle hervorheben, in denen die Integration durch Trennung der Variablen ohne Weiteres ausführbar ist. Hat nämlich die Gleichung der gegebenen Curvenschaar die Form

$$(101.) \quad F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0,$$

wobei $f(r)$ eine Function der einzigen Veränderlichen r und $g(\varphi)$ eine Function der einzigen Veränderlichen φ sein möge, so wird

$$(102.) \quad F_1 = f'(r), \quad F_2 = g'(\varphi),$$

so dass Gleichung (83.) übergeht in

$$(103.) \quad g'(\varphi) - f'(r) \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

oder

$$(103a.) \quad \frac{dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

Hat die Gleichung der gegebenen Curvenschaar die Form

$$(104.) \quad f(r) \cdot g(\varphi) = u,$$

oder, wenn man $\ln u$ mit u_1 bezeichnet,

$$(104a.) \quad F(r, \varphi, u_1) = \ln[f(r)] + \ln[g(\varphi)] - u_1 = 0,$$

so wird

$$F_1 = \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad F_2 = \frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)},$$

folglich geht Gleichung (83.) über in

$$(105.) \quad \frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)} - \frac{f'(r)}{f(r)} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dr} = 0;$$

daraus ergibt sich

$$(105a.) \quad \frac{f(r)dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

Beispiele.

Aufgabe 8. Durch die Gleichung

$$(106.) \quad r^n \cos(m\varphi) - u = 0$$

ist eine Curvenschaar gegeben; man soll die orthogonalen Trajectorien bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$(107.) \quad f(r) = r^n, \quad g(\varphi) = \cos(m\varphi),$$

also

$$f'(r) = nr^{n-1}, \quad g'(\varphi) = -m \sin(m\varphi),$$

folglich geht Gleichung (105a.) über in

$$\frac{dr}{nr} = - \frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{m \sin(m\varphi)};$$

daraus ergibt sich

$$(108.) \quad m^2 \frac{dr}{r} = - mn \frac{\cos(m\varphi)d\varphi}{\sin(m\varphi)},$$

also

$$m^2 \ln r = - n \ln[\sin(m\varphi)] + \ln C,$$

$$(109.) \quad r^{mm} \sin^n(m\varphi) = C.$$

Für $m = n$ wird die Gleichung der gegebenen Curvenschaar

$$(110.) \quad r^m \cos(m\varphi) = u$$

und die der orthogonalen Trajectorien, wenn man C gleich v^m setzt,

$$(111.) \quad r^m \sin(m\varphi) = v.$$

Man erkennt unmittelbar die Gleichartigkeit der beiden Curvenschaaren.

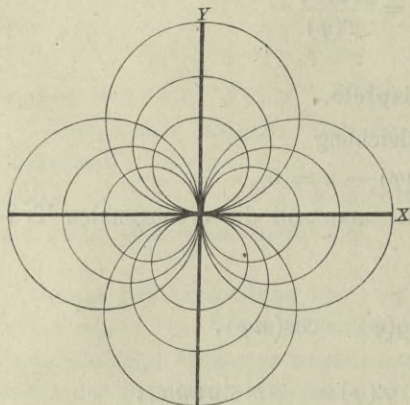
Für $n = -m$ wird die Gleichung der gegebenen Curvenschaar, wenn man $\frac{1}{u}$ mit u' bezeichnet,

$$(112.) \quad r^m = u' \cos(m\varphi)$$

und die der orthogonalen Trajektorien

$$(113.) \quad r^m = v \sin(m\varphi).$$

Fig. 143.



Für $m = 1$ geht z. B. die Gleichung (112.) über in

$$(114.) \quad r = u' \cos \varphi$$

und stellt eine Schaar von Kreisen dar, welche sämtlich durch den Nullpunkt hindurchgehen und ihren Mittelpunkt in der X-Axe haben, während der Durchmesser u' verschiedene Werthe annimmt (Fig. 143). Die orthogonalen Trajektorien haben dann die Gleichung

$$(115.) \quad r = v \sin \varphi$$

und sind Kreise mit dem veränderlichen Durchmesser v , die gleichfalls durch den Nullpunkt hindurchgehen, ihren Mittelpunkt aber in der Y-Axe haben.

XVI. Abschnitt.

Gewöhnliche Differential-Gleichungen höherer Ordnung.

§ 98.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Differential-Gleichungen höherer Ordnung bieten im Allgemeinen bei der Integration noch weit grössere Schwierigkeiten als die von der ersten Ordnung. Man kennt bisher nur eine geringe Anzahl von besonderen Fällen, in denen sich die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung in endlicher, geschlossener Form ausführen lässt. Einige von diesen Fällen mögen hier hervorgehoben werden.

§ 99.

Integration der Differential-Gleichung $\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 229.)

Ist die m^{te} Ableitung von y als Function von x gegeben, gilt also die Gleichung

$$(1.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ eine bekannte Function der einzigen Veränderlichen x sein möge, so kann man das allgemeine Integral sofort bestimmen. Es wird dann nämlich

$$(2.) \quad \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \int \varphi(x) dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1,$$

$$(3.) \quad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \varphi_1(x) dx + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$(4.) \quad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \int \varphi_2(x) dx + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3$$

$$= \varphi_3(x) + \frac{C_1 x^2}{2!} + \frac{C_2 x}{1!} + C_3,$$

.....

$$(5.) \quad y = \int \varphi_{m-1}(x) dx + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + \frac{C_{m-1} x}{1!} + C_m.$$

Die m Integrations-Constanten C_1, C_2, \dots, C_m kann man noch so bestimmen, dass die m Grössen

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \quad \dots, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y$$

für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Werthe

$$y_0^{(m-1)}, \quad y_0^{(m-2)} \dots y_0', \quad y_0$$

annehmen.

Dabei geht $\int \varphi_{m-1}(x) dx$ aus $\varphi(x)$ durch m -malige Integration hervor und ist deshalb ein m -faches Integral

$$(6.) \quad \varphi_m(x) = \int \varphi_{m-1}(x) dx = \int dx \int dx \dots \int \varphi(x) dx.$$

Diesen Ausdruck kann man aber noch vereinfachen durch partielle Integration, also durch die Formel

$$(7.) \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Bezeichnet man nämlich in den Gleichungen (2.) bis (5.) die Integrationsgrenzen mit x_0 und x , die Integrations-Veränderliche aber mit z , so wird

$$(8.) \quad \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz, \quad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^x \varphi_1(z) dz, \quad \varphi_3(x) = \int_{x_0}^x \varphi_2(z) dz, \dots$$

Setzt man jetzt

$$(9.) \quad u = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz, \quad dv = dx,$$

also mit Rücksicht auf Formel Nr. 177 der Tabelle

$$du = \varphi(x)dx, \quad v = x,$$

so erhält man nach Gleichung (7.), da $\varphi_1(x)$ für x gleich x_0 verschwindet,

$$(10.) \quad \begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_{x_0}^x \varphi_1(x) dx = x\varphi_1(x) - \int_{x_0}^x x\varphi(x) dx \\ &= x \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x z\varphi(z) dz, \end{aligned}$$

folglich wird

$$(11.) \quad \varphi_2(x) = \int_{x_0}^x (x - z) \varphi(z) dz.$$

Setzt man sodann wieder

$$(12.) \quad u = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz, \quad \text{aber} \quad dv = 2x dx,$$

also

$$(13.) \quad du = \varphi(x) dx, \quad v = x^2,$$

so findet man durch partielle Integration

$$(14.) \quad \begin{aligned} \int_{x_0}^x 2x dx \int_{x_0}^x \varphi(z) dz &= x^2 \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x x^2 \varphi(x) dx \\ &= x^2 \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Ferner setze man

$$(15.) \quad u = \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz, \quad dv = dx, \quad \text{also} \quad du = x \varphi(x) dx, \quad v = x,$$

dann ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz = x \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x x^2 \varphi(x) dx,$$

oder

$$(16.) \quad -2 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz = -2x \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + 2 \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz.$$

Indem man die Gleichungen (14.) und (16.) addirt und die Gleichung

$$(17.) \quad 2\varphi_3(x) = 2 \int_{x_0}^x \varphi_2(x) dx = \int_{x_0}^x 2x dx \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - 2 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz$$

berücksichtigt, findet man

$$(18.) \quad 1.2 \varphi_3(x) = x^2 \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - 2x \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz,$$

oder

$$(19.) \quad 1.2 \varphi_3(x) = \int_{x_0}^x (x - z)^2 \varphi(z) dz.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und zwar erhält man aus Gleichung (18.)

$$(20.) \quad 1.2.3 \varphi_4(x) = 1.2.3 \int_{x_0}^x \varphi_3(x) dx = 3 \int_{x_0}^x x^2 dx \int_{x_0}^x \varphi(z) dz \\ - 6 \int_{x_0}^x x dx \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + 3 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz.$$

Durch partielle Integration ergibt sich dann

$$(21.) \quad 3 \int_{x_0}^x x^2 dx \int_{x_0}^x \varphi(z) dz = x^3 \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x z^3 \varphi(z) dz,$$

$$(22.) \quad -6 \int_{x_0}^x x dx \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz = -3x^2 \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + 3 \int_{x_0}^x z^3 \varphi(z) dz,$$

$$(23.) \quad +3 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz = +3x \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz - 3 \int_{x_0}^x z^3 \varphi(z) dz;$$

folglich wird, wenn man die Gleichungen (21.), (22.) und (23.) addirt,

$$(24.) \quad 3! \varphi_4(x) = x^3 \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - 3x^2 \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + 3x \int_{x_0}^x z^2 \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x z^3 \varphi(z) dz \\ = \int_{x_0}^x (x - z)^3 \varphi(z) dz.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens findet man die allgemeine Formel

$$(25.) \quad (m - 1)! \varphi^m(x) = \int_{x_0}^x (x - z)^{m-1} \varphi(z) dz,$$

deren Richtigkeit man durch den Schluss von n auf $n + 1$ beweisen kann. Ist nämlich

$$(26.) \quad (n - 1)! \varphi_n(x) = \int_{x_0}^x (x - z)^{n-1} \varphi(z) dz,$$

oder

$$(26a.) \quad (n-1)! \varphi_n(x) = x^{n-1} \int_{x_0}^x \varphi(z) dz - \binom{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^x z \varphi(z) dz + \dots$$

$$+ (-1)^k \binom{n-1}{k} x^{n-k-1} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz + \dots \pm \int_{x_0}^x z^{n-1} \varphi(z) dz,$$

oder

$$(26b.) \quad (n-1)! \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} x^{n-k-1} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz,$$

so wird, weil $n \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} (n-k)$ ist,

$$(27.) \quad n! \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz.$$

Setzt man jetzt

$$(28.) \quad u = \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz, \quad dv = (n-k) x^{n-k-1} dx,$$

also

$$(29.) \quad du = x^k \varphi(x) dx, \quad v = x^{n-k},$$

so erhält man durch partielle Integration

$$(30.) \quad \int_{x_0}^x (n-k) x^{n-k-1} dx \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz = x^{n-k} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x x^n \varphi(x) dx$$

$$= x^{n-k} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz - \int_{x_0}^x z^n \varphi(z) dz.$$

Dies giebt

$$(31.) \quad n! \varphi_{n+1}(x) = n! \int_{x_0}^x \varphi_n(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz$$

$$- \int_{x_0}^x z^n \varphi(z) dz \cdot \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Da nun

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1}$$

$$= (1-1)^n - (-1)^n = -(-1)^n$$

ist, so geht Gleichung (31.) über in

$$(32.) \quad n! \varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} \int_{x_0}^x z^k \varphi(z) dz$$

$$= \int_{x_0}^x (x-z)^n \varphi(z) dz.$$

Dies ist aber eine Gleichung, welche aus Gleichung (26.) entsteht, indem man n mit $n+1$ vertauscht.

Man kann daher das allgemeine Integral von Gleichung (1.) auf die Form

$$(33.) \quad y = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} \varphi(z) dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} +$$

$$\dots + \frac{C_{m-1} x}{1!} + C_m$$

bringen.

§ 100.

Differential-Gleichungen von der Form

$$F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right) = 0.$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 230 und 231.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung zunächst die Form

$$(1.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

so bezeichne man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit p , also $\frac{d^2 y}{dx^2}$ mit $\frac{dp}{dx}$. Dadurch erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.) \quad \frac{dp}{dx} = f(p), \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

folglich ist

$$(3.) \quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1.$$

Ferner ist nach Gleichung (2.)

$$(4.) \quad dy = p dx = \frac{p dp}{f(p)},$$

also

$$(5.) \quad y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_2.$$

Durch die Gleichungen (3.) und (5.) sind x und y als Functionen von p dargestellt. Durch Elimination von p findet man daraus die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(6.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

integriren.

Auflösung. Aus Gleichung (6.) folgt

$$(7.) \quad \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad dy = \frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(8.) \quad x = \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + C_1,$$

$$(9.) \quad y = \int \frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \sqrt{1 + p^2} + C_2.$$

Dies gibt, wenn man die Integrations-Constanten C_1 und C_2 bezw. mit x_0 und y_0 bezeichnet,

$$(10.) \quad \sqrt{1 + p^2} = y - y_0, \quad p = \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1},$$

$$(11.) \quad x - x_0 = \ln[y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}],$$

also

$$(12.) \quad e^{x-x_0} = y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1},$$

$$(13.) \quad e^{-(x-x_0)} = \frac{1}{y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}} = y - y_0 \pm \sqrt{(y - y_0)^2 - 1}.$$

Indem man die Gleichungen (12.) und (13.) addirt, erhält man schliesslich

$$(14.) \quad 2(y - y_0) = e^{x-x_0} + e^{-(x-x_0)},$$

oder

$$y - y_0 = \text{Cof}(x - x_0).$$

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung derjenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser die constante Länge a hat.

Auflösung. Nach D.-R., Formel Nr. 145 der Tabelle ist

$$\rho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2 y}{dx^2}};$$

deshalb müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(15.) \quad \pm \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = a \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \text{oder} \quad \pm (\sqrt{1+p^2})^3 = a \frac{dp}{dx}$$

genügen. Daraus folgt

$$(16.) \quad dx = \pm \frac{a dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn man

$$(17.) \quad p = \operatorname{tg} t, \quad \text{also} \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

setzt,

$$(18.) \quad dx = \pm a \cos t \cdot dt, \quad dy = p dx = \pm a \sin t \cdot dt.$$

Dies giebt, wenn man die beiden Integrations-Constanten wieder mit x_0 und y_0 bezeichnet,

$$(19.) \quad x - x_0 = \pm a \sin t = \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$(20.) \quad y - y_0 = \mp a \cos t = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Indem man die Gleichungen (19.) und (20.) in's Quadrat erhebt und addirt, erhält man

$$(21.) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Die gesuchten Curven sind demnach Kreise mit dem Halbmesser a ; ihr Mittelpunkt hat die Coordinaten x_0, y_0 , die als *willkürliche Integrations-Constanten* eingeführt worden sind. Der *Kreis* ist daher die einzige Curve, deren Krümmungshalbmesser eine constante Länge hat.

Ist eine Gleichung zwischen

$$(22.) \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = q = \frac{dp}{dx}$$

gegeben, welche nicht nach q , sondern nur nach p auflösbar ist, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(23.) \quad p = \varphi(q),$$

so findet man durch Differentiation nach x

$$(24.) \quad q = \varphi'(q) \cdot \frac{dq}{dx},$$

also

$$(25.) \quad dx = \frac{\varphi'(q) dq}{q}, \quad dy = p dx = \frac{\varphi(q) \varphi'(q) dq}{q},$$

$$(26.) \quad x = \int \frac{\varphi'(q) dq}{q} + C_1, \quad y = \int \frac{\varphi(q) \varphi'(q) dq}{q} + C_2.$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse q eliminirt, ergibt sich die gesuchte Gleichung zwischen x und y .

Das angegebene Verfahren kann man auch auf die Integration von Differential-Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Es sei

$$(27.) \quad u = \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, \quad v = \frac{d^m y}{dx^m}, \quad \text{also} \quad \frac{du}{dx} = v,$$

und die gegebene Differential-Gleichung habe die Form

$$(28.) \quad v = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = f(u),$$

dann wird

$$(29.) \quad dx = \frac{du}{f(u)}, \quad x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1.$$

Lässt sich diese Gleichung in Bezug auf u auflösen, so findet man

$$(30.) \quad u = \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \varphi(x)$$

und kann das in § 99 angegebene Verfahren anwenden.

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

$$(31.) \quad u = \varphi(v),$$

so findet man durch Differentiation nach x

560 § 101. Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0$.

$$(32.) \quad v = \varphi'(v) \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{\varphi'(v) dv}{v},$$

$$(33.) \quad x = \int \frac{\varphi'(v) dv}{v} + C_1.$$

Lässt sich diese Gleichung in Bezug auf v auflösen, so kann man wieder das in § 99 angegebene Verfahren anwenden, nachdem man den gefundenen Werth von v in Gleichung (31.) eingesetzt hat.

§ 101.

Differential-Gleichungen von der Form

$$F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0.$$

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 232 bis 235.)

Hat die gegebene Differential-Gleichung die Form

$$(1.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(y),$$

so setze man wieder

$$(2.) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{p} = dx,$$

dann geht Gleichung (1.) über in

$$(3.) \quad \frac{dp}{dx} = f(y), \quad \text{oder} \quad dp = f(y) dx = \frac{f(y) dy}{p},$$

folglich wird

$$(4.) \quad 2p dp = 2f(y) dy,$$

$$(5.) \quad p^2 = 2 \int f(y) dy + C_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt dann

$$(6.) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 + 2 \int f(y) dy}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(y) dy}},$$

also

$$(7.) \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(y) dy}} + C_2.$$

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(8.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}$$

integriren.

Auflösung. Bringt man diese Gleichung auf die Form]

$$(9.) \quad dp = \frac{y dx}{a^2} = \frac{y dy}{a^2 p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2 p dp = 2y dy,$$

so erhält man durch Integration

$$(10.) \quad a^2 p^2 = y^2 + C_1,$$

oder

$$(11.) \quad a dy = \pm \sqrt{y^2 + C_1} \cdot dx,$$

$$(12.) \quad dx = \pm \frac{a dy}{\sqrt{y^2 + C_1}},$$

also nach Formel Nr. 35 der Tabelle

$$(13.) \quad x = \pm a \ln(y + \sqrt{y^2 + C_1}) + C_2.$$

Setzt man hierbei die Integrations-Constante

$$C_2 = \mp a \ln(2A),$$

so geht Gleichung (13.) über in

$$(14.) \quad \pm \frac{x}{a} = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + C_1}}{2A}\right),$$

oder

$$(15.) \quad 2A \cdot e^{\pm \frac{x}{a}} = y + \sqrt{y^2 + C_1}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $y - \sqrt{y^2 + C_1}$, so erhält man

$$(16.) \quad 2A \cdot e^{\pm \frac{x}{a}} (y - \sqrt{y^2 + C_1}) = -C_1,$$

und wenn man die Integrations-Constante C_1 gleich $-4AB$ setzt,

$$2A \cdot e^{\pm \frac{x}{a}} (y - \sqrt{y^2 + C_1}) = 4AB,$$

oder

$$(17.) \quad 2B \cdot e^{\mp \frac{x}{a}} = y - \sqrt{y^2 + C_1}.$$

Durch Addition der Gleichungen (15.) und (17.) ergibt sich schliesslich

$$(18.) \quad y = A \cdot e^{\pm \frac{x}{a}} + B \cdot e^{\mp \frac{x}{a}}.$$

Dabei sind A und B zwei beliebige Constanten, welche die Integrations-Constanten ersetzen.

Noch leichter findet man dieses Resultat durch Anwendung hyperbolischer Functionen. So folgt aus Gleichung (12.) oder (13.), wenn man z. B.

$$C_1 = c^2, \quad C_2 = x_0 \mp a \ln c$$

setzt,

$$(13a.) \quad x - x_0 = \pm a \operatorname{Ar} \operatorname{Sin}\left(\frac{y}{c}\right),$$

also

$$y = \pm c \operatorname{Sin}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) = \pm \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} - e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right),$$

oder, wenn man

$$\pm \frac{c}{2} e^{-\frac{x_0}{a}} = A, \quad \mp \frac{c}{2} e^{\frac{x_0}{a}} = B$$

setzt,

$$y = A \cdot e^{\frac{x}{a}} + B e^{-\frac{x}{a}}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(19.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

integriren.

Auflösung. Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$(20.) \quad dp = -\frac{y dx}{a^2} = -\frac{y dy}{a^2 p}, \quad \text{oder} \quad 2a^2 p dp = -2y dy,$$

so erhält man durch Integration

$$(21.) \quad a^2 p^2 = C_1 - y^2.$$

Da hierbei C_1 nur *positive* Werthe haben kann, möge C_1 mit c^2 vertauscht werden. Dadurch erhält man

$$(22.) \quad ap = a \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{c^2 - y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm \frac{dx}{a},$$

§ 101. Differential-Gleichungen von der Form $F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0$. 563

folglich findet man durch Integration nach Formel Nr. 34 der Tabelle

$$(23.) \quad \arcsin\left(\frac{y}{c}\right) = C_2 \pm \frac{x}{a},$$

oder

$$(24.) \quad y = c \sin\left(C_2 \pm \frac{x}{a}\right) = c \sin C_2 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \pm c \cos C_2 \sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Setzt man noch

$$(25.) \quad \pm c \cos C_2 = A, \quad c \sin C_2 = B,$$

so geht Gleichung (24.) über in

$$(26.) \quad y = A \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{x}{a}\right).$$

Dabei sind A und B wieder zwei beliebige Constanten, welche die Integrations-Constanten ersetzen.

Ist allgemein die Gleichung

$$(27.) \quad F\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

gegeben, so setze man

$$(28.) \quad \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} = u, \quad \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \frac{du}{dx} = v, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{dv}{dx} = w$$

und bringe die gegebene Differential-Gleichung durch Auflösung nach w auf die Form

$$(29.) \quad w = f(u), \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = f(u).$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $2v = 2 \frac{du}{dx}$ multiplicirt, erhält man

$$(30.) \quad 2v \frac{dv}{dx} = 2f(u) \frac{du}{dx}$$

und durch Integration

$$(31.) \quad v^2 = 2 \int f(u) du + C_1.$$

Dies giebt

$$(32.) \quad v = \frac{du}{dx} = \pm \sqrt{C_1 + 2 \int f(u) du}, \quad \text{oder} \quad dx = \pm \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(u) du}},$$

$$(33.) \quad x = \pm \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}} + C_2.$$

Lässt sich diese Gleichung nach u auflösen, so dass sie die Form

$$(34.) \quad u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \varphi(x)$$

erhält, so kann man zur Ausführung der weiteren Integration das in § 99 angegebene Verfahren anwenden.

Lässt sich aber u nicht explicite als Function von x darstellen, so folgt aus Gleichung (32.)

$$(35.) \quad u dx = d\left(\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}\right) = \pm \frac{u du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}},$$

also

$$(36.) \quad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = \pm \int \frac{u du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}} + C_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $dx = \pm \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}}$

und integrirt auf beiden Seiten, so erhält man

$$(37.) \quad \frac{d^{m-4}y}{dx^{m-4}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}} \left[\pm \int \frac{u du}{\sqrt{C_1 + 2ff(u)}} + C_3 \right] + C_4.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und schliesslich auch y als Function von u darstellen.

§ 102.

Fälle, in denen sich die Ordnung der Differential-Gleichung erniedrigen lässt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 236 bis 238.)

Ist $n < m$, und enthält die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung die Function y und die $n - 1$ ersten Ableitungen gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(1.) \quad F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man sie auf eine Differential-Gleichung $(m - n)^{\text{ter}}$ Ordnung reduciren, indem man

$$(2.) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = u, \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{du}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^{m-n} u}{dx^{m-n}}$$

einführt. Die vorgelegte Differential-Gleichung wird dadurch auf die Form

$$(3.) \quad F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-n} u}{dx^{m-n}}\right) = 0$$

gebracht.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse zu der zugehörigen Abscisse steht.

Auflösung. Bezeichnet man wieder $\frac{dy}{dx}$ mit p , so müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(4.) \quad \rho = \pm \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{a^2}{2x}, \quad \text{oder} \quad \pm (1 + p)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{2x} \cdot \frac{dp}{dx}$$

genügen. Daraus folgt, wenn man

$$(5.) \quad p = \operatorname{tg} t, \quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\cos t}$$

setzt,

$$(6.) \quad \pm 2x dx = \frac{a^2 dp}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} = a^2 \cos t \cdot dt,$$

also durch Integration

$$(7.) \quad \pm x^2 + C_1 = a^2 \sin t = \frac{a^2 p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder

$$(8.) \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{C_1 \pm x^2}{\sqrt{a^4 - (C_1 \pm x^2)^2}},$$

daraus folgt

$$(9.) \quad y = \pm \int \frac{(C_1 \pm x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (C_1 \pm x^2)^2}} + C_2.$$

Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, heisst „die *elastische Linie*“, weil ein elastischer Stab, der an dem einen Ende befestigt und an dem anderen Ende belastet ist, diese Form annimmt.

Enthält die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung die unabhängige Veränderliche x gar nicht, hat also die Differential-Gleichung die Form

$$(10.) \quad F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

so kann man die Ordnung wieder um eine Einheit herabdrücken, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und y als unabhängige Veränderliche einführt. Man erhält dann

$$(11.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$(12.) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p \frac{d^2p}{dy^2} \right] p,$$

Dadurch geht die vorgelegte Differential-Gleichung über in

$$(13.) \quad G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{m-1}p}{dy^{m-1}}\right) = 0.$$

Beispiele.

Aufgabe 2. Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale.

Auflösung. Nach D.-R., Formel Nr. 139 und 145 der Tabelle sind die Ausdrücke für die Normale und für den Krümmungshalbmesser

$$(14.) \quad N = y \frac{ds}{dx} \quad \text{und} \quad \rho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Die gesuchten Curven müssen daher der Differential-Gleichung

$$(15.) \quad \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y \frac{ds}{dx}, \quad \text{oder} \quad \pm \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = y \frac{d^2y}{dx^2}$$

genügen. Indem man

$$(16.) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

setzt, erhält man

$$(17.) \quad \pm (1 + p^2) = yp \cdot \frac{dp}{dy}, \quad \text{oder} \quad \pm \frac{2dy}{y} = \frac{2pdp}{1 + p^2}.$$

Daraus findet man durch Integration

$$(18.) \quad \pm [\ln(y^2) + \ln C_1] = \ln(1 + p^2).$$

Berücksichtigt man in Gleichung (18.) zuerst das *obere* Zeichen, so wird

$$(19.) \quad 1 + p^2 = C_1 y^2, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y^2 - 1}.$$

Da hierbei C_1 nur *positive* Werthe haben kann, so setze man

$$(20.) \quad C_1 = \frac{1}{a^2},$$

dann geht Gleichung (19.) über in

$$(21.) \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{y^2 - a^2}, \quad \text{oder} \quad \pm \frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Dies giebt durch Integration

$$(22.) \quad \pm \frac{x - x_0}{a} = \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \right) = \text{Ar Coj} \left(\frac{y}{a} \right),$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die Integrations-Constante $\mp \frac{x_0}{a}$ hinzugefügt ist. Daraus folgt

$$(23.) \quad y = a \text{Coj} \left(\frac{x - x_0}{a} \right),$$

oder

$$(24.) \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right).$$

Dies ist die Gleichung der *Kettenlinie*, bei der, wie schon in D.-R., § 95, Aufgabe 4 gezeigt wurde, der Krümmungshalbmesser ebenso lang ist wie die zugehörige Normale; der Krümmungshalbmesser hat dabei aber die entgegengesetzte Richtung wie die Normale. Die willkürlichen Integrations-Constanten sind in Gleichung (25.) durch die beliebigen Grössen a und x_0 vertreten.

Berücksichtigt man in Gleichung (18.) das *untere* Zeichen, so wird

$$(25.) \quad 1 + p^2 = \frac{1}{C_1 y^2}.$$

Hier möge wieder die Integrations-Constante C_1 , da sie nur positive Werthe haben kann, mit $\frac{1}{a^2}$ vertauscht werden. Dadurch erhält man

$$(26.) \quad 1 + p^2 = \frac{a^2}{y^2}, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$(27.) \quad \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm dx,$$

$$(28.) \quad \pm (x - x_0) = -\sqrt{a^2 - y^2}, \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 + y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Halbmesser a , dessen Mittelpunkt in der X -Axe liegt. Der Krümmungshalbmesser ist gleich a und hat dieselbe Länge und dieselbe Richtung wie die Normale. Auch hier vertreten die beliebigen Grössen a und x_0 die beiden Integrations-Constanten.

Die gestellte Aufgabe hat *zwei* verschiedene Lösungen, die man erhält, jenachdem der Krümmungshalbmesser *dieselbe* oder die *entgegengesetzte* Richtung hat wie die Normale.

Aufgabe 3. Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser doppelt so lang ist wie die zugehörige Normale.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.) müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(29.) \quad \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2y \frac{ds}{dx}, \quad \text{oder} \quad \pm \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 2y \frac{d^2y}{dx^2}$$

genügen. Indem man wieder

$$(30.) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

setzt, findet man

$$(31.) \quad \pm (1 + p^2) = 2yp \cdot \frac{dp}{dy}, \quad \text{oder} \quad \pm \frac{dy}{y} = \frac{2p dp}{1 + p^2}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(32.) \quad \pm \ln y + \ln C = \ln(1 + p^2).$$

Berücksichtigt man zunächst das *obere* Zeichen, so wird

$$(33.) \quad 1 + p^2 = Cy, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{Cy - 1},$$

$$(34.) \quad \pm dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy - 1}}, \quad \text{also} \quad \pm C(x - x_0) = \int \frac{d(Cy - 1)}{\sqrt{Cy - 1}} = 2\sqrt{Cy - 1},$$

$$C^2(x - x_0)^2 = 4Cy - 4,$$

oder, wenn man die Integrations-Constante C mit $\frac{2}{a}$ vertauscht,

$$(35.) \quad (x - x_0)^2 = 2ay - a^2.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel* mit dem willkürlichen Parameter a , deren Leitlinie zur X -Axe gemacht ist. Die Y -Axe liegt noch ganz beliebig, weil x_0 die zweite willkürliche Integrations-Constante ist.

Hierbei hat der Krümmungshalbmesser die entgegengesetzte Richtung wie die Normale.

Berücksichtigt man in Gleichung (32.) das *untere* Zeichen, so wird

$$(36.) \quad 1 + p^2 = \frac{C}{y}, \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{C - y}{y}} = \pm \sqrt{\frac{C}{y} - 1},$$

$$(37.) \quad \pm dx = dy \sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Da hierbei $\frac{C}{y} - 1 > 0$, oder $0 < \frac{y}{C} < 1$ sein muss, wenn die Wurzelgrösse *reell* sein soll, so setze man

$$(38.) \quad y = C \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{C}{2}(1 - \cos t),$$

also

$$(39.) \quad C - y = C \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{C}{2}(1 + \cos t),$$

$$(40.) \quad \sqrt{\frac{y}{C-y}} = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right), \quad dy = \frac{C}{2} \sin t \cdot dt = C \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

folglich wird

$$(41.) \quad \pm dx = C \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{C}{2}(1 - \cos t) dt,$$

$$(42.) \quad x - x_0 = \pm \frac{C}{2}(t - \sin t).$$

Vertauscht man t mit $-t$, so ändert sich Gleichung (38.) gar nicht, während in Gleichung (42.) sich nur das Vorzeichen der rechten Seite umkehrt. Man erhält daher dieselbe Curve, gleichviel ob man in den Gleichungen (36.), (37.) und (42.) das obere oder das untere Vorzeichen nimmt; deshalb kann man das doppelte Vorzeichen fortlassen. Indem man schliesslich noch C mit $2a$ vertauscht, gehen die Gleichungen (42.) und (38.) über in

$$(43.) \quad x - x_0 = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Dies sind die Gleichungen der *Cykloide*, für welche schon in D.-R., § 95, Aufgabe 5 gezeigt wurde, dass der Krümmungshalbmesser die doppelte Länge und dieselbe Richtung besitzt wie die Normale.

Auch diese Aufgabe hat zwei verschiedene Lösungen, die sich ergeben, jenachdem der Krümmungshalbmesser dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie die Normale.

Aufgabe 4. Man soll diejenigen Curven bestimmen, bei denen der Krümmungshalbmesser dem Quadrate der zugehörigen Ordinate proportional ist.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.) und (16.) müssen die gesuchten Curven der Differential-Gleichung

$$(44.) \quad \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{d^2y} = ay^2, \quad \text{oder} \quad \pm (\sqrt{1+p^2})^3 = ay^2 \cdot p \frac{dp}{dy}$$

genügen. Dies giebt

$$(45.) \quad \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{apdp}{(\sqrt{1+p^2})^3} = \pm \frac{a}{2} \frac{d(1+p^2)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also durch Integration

$$(46.) \quad -\frac{1}{y} = \mp \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C, \quad \text{oder} \quad \frac{Cy+1}{y} = \pm \frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich wird

$$(47.) \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - C^2)y^2 - 2Cy - 1}}{Cy + 1},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(48.) \quad a^2 - C^2 = \pm A^2, \quad \text{also} \quad C^2 \pm A^2 = a^2$$

setzt,

$$(49.) \quad \pm dx = \frac{(Cy+1)dy}{\sqrt{\pm A^2y^2 - 2Cy - 1}}.$$

Gilt in Gleichung (48.) das *obere* Zeichen, so setze man

$$(50.) \quad A^2y = t + C, \quad \text{also} \quad t = A^2y - C,$$

dann wird

$$(51.) \quad Cy+1 = \frac{Ct+a^2}{A^2}, \quad dy = \frac{dt}{A^2}, \quad \sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1} = \frac{1}{A} \sqrt{t^2 - a^2},$$

folglich geht Gleichung (49.) über in

$$(52.) \quad \pm dx = \frac{(Ct + a^2)dt}{A^3 \sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. 33 und 36 der Tabelle

$$(53.) \quad \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \sqrt{t^2 - a^2}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln\left(\frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a}\right),$$

deshalb findet man aus Gleichung (52.) durch Integration

$$(54.) \quad \pm A^3(x - C_2) = AC\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1} \\ + a^2 \ln(A^2y - C + A\sqrt{A^2y^2 - 2Cy - 1}),$$

wobei die Integrations-Constante $-a^2 \ln a$ auf der rechten Seite der Gleichung weggelassen ist, weil sie mit der Constanten $\mp A^3C_2$ auf der linken Seite der Gleichung vereinigt werden kann.

Eine besonders einfache Form erhält die Lösung, wenn man die Integrations-Constante

$$(55.) \quad C = 0, \quad \text{also} \quad A = a$$

setzt, dann geht Gleichung (54.) über in

$$\pm a(x - C_2) = \ln(a^2y + a\sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$(56.) \quad a(ay + \sqrt{a^2y^2 - 1}) = e^{\pm a(x - C_2)}.$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}$ multiplicirt, erhält man

$$a = e^{\pm a(x - C_2)} \cdot (ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}),$$

oder

$$(57.) \quad a(ay - \sqrt{a^2y^2 - 1}) = a^2 \cdot e^{\mp a(x - C_2)}.$$

Durch Addition der Gleichungen (56.) und (57.) erhält man

$$(58.) \quad 2a^2y = e^{\pm a(x - C_2)} + a^2 \cdot e^{\mp a(x - C_2)}.$$

Setzt man jetzt noch

$$aC_2 = ax_0 \mp \ln a,$$

so wird

$$(59.) \quad \begin{cases} e^{\pm a(x - C_2)} = e^{\pm a(x - x_0) + \ln a} = a \cdot e^{\pm a(x - x_0)}, \\ e^{\mp a(x - C_2)} = e^{\mp a(x - x_0) - \ln a} = \frac{1}{a} \cdot e^{\mp a(x - x_0)}, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (59.) über in

$$(60.) \quad 2ay = e^{\pm a(x - x_0)} + e^{\mp a(x - x_0)}.$$

Dies giebt, wenn man a mit $\frac{1}{c}$ vertauscht,

$$(61.) \quad y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{c}} + e^{-\frac{x-x_0}{c}} \right).$$

Das ist die Gleichung der *Kettenlinie*.

Wird die Integrations-Constante C so bestimmt, dass in Gleichung (48.) das *untere* Zeichen gilt, ist also

$$(62.) \quad a^2 - C^2 = -A^2, \quad \text{oder} \quad A = \sqrt{C^2 - a^2},$$

so setze man

$$(63.) \quad A^2 y = t - C, \quad \text{also} \quad t = A^2 y + C,$$

dann wird

$$(64.) \quad \begin{cases} Cy + 1 = \frac{Ct - a^2}{A^2}, & dy = \frac{dt}{A^2}, \\ \sqrt{-A^2 y^2 - 2Cy - 1} = \frac{1}{A} \sqrt{a^2 - t^2}, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (49.) über in

$$(65.) \quad \pm dx = \frac{(Ct - a^2) dt}{A^3 \sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Nun ist nach Formel Nr. (31.) und (34.) der Tabelle

$$(66.) \quad \int \frac{t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\sqrt{a^2 - t^2}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right),$$

deshalb findet man aus Gleichung (65.) durch Integration

$$(67.) \quad \pm A^3(x-x_0) = -AC\sqrt{-A^2 y^2 - 2Cy - 1} - a^2 \arcsin\left(\frac{A^2 y + C}{a}\right).$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(68.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

integriren.

Auflösung. Setzt man wieder

$$(69.) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

so erhält man aus Gleichung (68.)

$$(70.) \quad p \frac{dp}{dy} = f(y) \cdot p^2, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = f(y) dy.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(71.) \quad \ln p = \int f(y) dy + \ln C_1,$$

$$(72.) \quad p = \frac{dy}{dx} = C_1 \cdot e^{\int f(y) dy},$$

$$(73.) \quad C_1 dx = e^{-\int f(y) dy} \cdot dy,$$

also

$$(74.) \quad C_1 x = \int e^{-\int f(y) dy} \cdot dy + C_2.$$

Ist die vorgelegte Differential-Gleichung in Bezug auf die Grössen

$$(75.) \quad y, y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}$$

homogen von der n^{ten} Ordnung, hat sie also die Form

$$(76.) \quad F(x, y, y', y'', \dots y^{(m)}) = y^n F\left(x, \frac{y}{y}, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots \frac{y^{(m)}}{y}\right) = 0,$$

so führe man eine neue Function u durch die Gleichung

$$(77.) \quad y' = yu, \quad \text{oder} \quad \ln y = \int u dx, \quad y = e^{\int u dx}$$

ein, dann wird

$$(78.) \quad y'' = y'u + y \frac{du}{dx} = y \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right),$$

$$(79.) \quad y''' = y' \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right) + y \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2u \frac{du}{dx} \right) \\ = y \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u \frac{du}{dx} + u^3 \right),$$

.....

Setzt man diese Werthe in Gleichung (76.) ein, so erhält man eine Differential-Gleichung von der Form

$$(80.) \quad G\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

die nur noch von der $(m - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Beispiel.**Aufgabe 6.** Man soll die Differential-Gleichung

$$(81.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0$$

integrieren.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (77.) und (78.) kann man die vorgelegte Differential-Gleichung auf die Form

$$y \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right) + \frac{yu}{x} - \frac{y}{x^2} = 0,$$

oder

$$(82.) \quad (x^2u^2 + xu - 1)dx + x^2du = 0$$

bringen. Diese Differential-Gleichung ist nur noch von der *ersten* Ordnung und enthält u nur in der Verbindung xu ; deshalb setze man

$$(83.) \quad xu = z, \quad \text{oder} \quad u = \frac{z}{x}, \quad du = \frac{xdz - zdx}{x^2}.$$

Dadurch geht Gleichung (82.) über in

$$(z^2 + z - 1)dx + xdz - zdx = 0,$$

oder

$$(84.) \quad (z^2 - 1)dx + xdz = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z^2 - 1} = 0,$$

folglich erhält man durch Integration

$$(85.) \quad \ln(x^2) + \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \ln C,$$

$$(86.) \quad x^2(z-1) = C(z+1), \quad \text{oder} \quad x^2(xu-1) = C(xu+1).$$

Dies giebt

$$(87.) \quad u = \frac{y'}{y} = \frac{dy}{ydx} = \frac{x^2 + C}{x(x^2 - C)}.$$

Hieraus findet man durch Partialbruchzerlegung

$$(88.) \quad \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x - \sqrt{C}} + \frac{1}{x + \sqrt{C}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

und durch Integration

$$(89.) \quad \ln y = \ln(x^2 - C) - \ln x + \ln C_1,$$

$$(90.) \quad y = C_1 \frac{x^2 - C}{x}.$$

Setzt man hierbei noch

$$(91.) \quad C_1 = A, \quad -CC_1 = B,$$

so geht Gleichung (90.) über in

$$(92.) \quad y = Ax + Bx^{-1}.$$

XVII. Abschnitt.

Lineare Differential-Gleichungen m^{ter} Ordnung.

§ 103.

Allgemeine Bemerkungen.

Eine Differential-Gleichung von der Form

$$(1.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + f_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots \\ + f_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = \varphi(x),$$

in welcher $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ und $\varphi(x)$ gegebene Functionen von x sind, heisst „eine lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung“. Dabei soll es auch zulässig sein, dass sich die Functionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ auf Constante reduciren, die dann mit f_1, f_2, \dots, f_m bezeichnet werden mögen. In diesem Falle erhält Gleichung (1.) die Form

$$(2.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x).$$

Wird die Function $\varphi(x)$ identisch gleich Null, hat also die lineare Differential-Gleichung die Form

$$(3.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + f_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots \\ + f_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = 0,$$

so heisst sie „homogen“. Es wird später gezeigt werden, dass die Integration der *nicht homogenen* Differential-Gleichung (1.) immer zurückgeführt werden kann auf die Integration der *homogenen* linearen Differential-Gleichung (3.), welche aus Gleichung

denn nach Voraussetzung werden die Ausdrücke in den eckigen Klammern einzeln gleich Null.

Satz 2. *Kennt man m particuläre Integrale y_1, y_2, \dots, y_m und kann man in*

$$(5.) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

die Constanten C_1, C_2, \dots, C_m so bestimmen, dass

$$(6.) \quad y, y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, y^{(m-1)} = \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

für $x = x_0$ die beliebig vorgeschriebenen Anfangswerthe $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(m-1)}$ annehmen, so ist y das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Dass y ein Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist, folgt schon aus Satz 1, und da man die Anfangswerthe $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(m-1)}$, welche dem Werthe $x = x_0$ entsprechen, nach Voraussetzung noch beliebig annehmen kann, so ist y auch das allgemeine Integral.

Es ist nur noch zu erklären, weshalb diese Voraussetzung hinzugefügt werden muss, obwohl in Gleichung (5.) scheinbar bereits m willkürliche Constanten C_1, C_2, \dots, C_m enthalten sind. Die Grössen y_1, y_2, \dots, y_m sind möglicher Weise nicht von einander unabhängig, es kann z. B. zwischen y_1, y_2 und y_3 die lineare Gleichung

$$(7.) \quad y_3 = k y_1 + l y_2$$

bestehen. Dann ist aber Gleichung (5.), nämlich

$$(8.) \quad y = (C_1 + k C_3) y_1 + (C_2 + l C_3) y_2 + C_4 y_4 + \dots + C_m y_m,$$

kein allgemeines Integral, da in diesem Ausdrucke nur $m - 1$ willkürliche Constanten $C_1 + k C_3 = C_1', C_2 + l C_3 = C_2', C_4, \dots, C_m$ enthalten sind. Umgekehrt kann man auch zeigen, dass die Grössen y_1, y_2, \dots, y_m durch eine lineare Gleichung verbunden sind, wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist; der Beweis dieser Behauptung möge hier aber übergangen werden.

Nach Formel Nr. 238 der Tabelle kann man die Ordnung einer Differential-Gleichung, welche in Bezug auf $y, y', y'', \dots, y^{(m)}$ homogen ist, um eine Einheit erniedrigen, indem man

$$(9.) \quad \frac{y'}{y} = u, \quad \frac{y''}{y} = \frac{du}{dx} + u^2, \quad \frac{y'''}{y} = \frac{d^2u}{dx^2} + 3u \frac{du}{dx} + u^3, \dots$$

setzt. Dies giebt

Satz 3. Die Ordnung einer homogenen linearen Differential-Gleichung kann stets um eine Einheit erniedrigt werden.

Durch die angegebene Substitution erhält also Gleichung (1.) die Form

$$(10.) \quad \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \dots + [u^m + f_1(x)u^{m-1} + \dots + f_{m-1}(x)u + f_m(x)] = 0.$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nicht mehr homogen und im Allgemeinen auch nicht mehr linear, aber sie kann doch zu *particulären* Integralen führen. Hat z. B. die Gleichung

$$(11.) \quad F(u) = u^m + f_1(x)u^{m-1} + f_2(x)u^{m-2} + \dots + f_{m-1}(x)u + f_m(x) = 0$$

Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n , die von x unabhängig sind, so werden

$$(12.) \quad u = r_1, \quad u = r_2, \dots, u = r_n$$

particuläre Integrale der Gleichung (10.) sein, weil

$$(13.) \quad \frac{dr_1}{dx} = 0, \quad \frac{dr_2}{dx} = 0, \quad \dots \quad \frac{dr_n}{dx} = 0$$

ist. Die zugehörigen Werthe von $y = e^{\int u dx}$ sind dann

$$(14.) \quad y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}.$$

Dieser Fall tritt namentlich dann ein, wenn die Grössen $f_1(x) = f_1, f_2(x) = f_2, \dots, f_m(x) = f_m$ sämmtlich von x unabhängig sind. Die Gleichung

$$(15.) \quad F(u) = u^m + f_1 u^{m-1} + f_2 u^{m-2} + \dots + f_{m-1} u + f_m = 0$$

hat dann lauter constante Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_m . Sind diese Wurzeln zunächst sämmtlich von einander verschieden, so findet man aus den m *particulären* Integralen

$$(16.) \quad y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_m = e^{r_m x}$$

der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) ohne Weiteres das *allgemeine* Integral

$$(17.) \quad y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x}.$$

Der gefundene Ausdruck ist in der That das *allgemeine* Integral, denn man kann beweisen, dass durch passende Wahl

Weise die Constanten C_1, C_2, \dots, C_m so bestimmen, dass dem Werthe $x = x_0$ beliebige Anfangswerthe der m Grössen $y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$ zugeordnet sind. Deshalb ist Gleichung (17.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(23.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(24.) \quad F(u) = u^2 - \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{1}{a}, \quad r_2 = -\frac{1}{a},$$

folglich wird in Uebereinstimmung mit Aufgabe 1 in § 101

$$(25.) \quad y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}.$$

Hat die Gleichung $F(u) = 0$ auch complexe Wurzeln, so bleibt die gegebene Lösung noch richtig, sie nimmt aber eine complexe Form an. Dem Endresultate kann man jedoch leicht wieder eine reelle Form geben, wenn man beachtet, dass die complexen Wurzeln paarweise conjugirt auftreten. Ist z. B.

$$(26.) \quad r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi,$$

so wird

$$\begin{aligned} C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} &= C_1 \cdot e^{ax+bi x} + C_2 \cdot e^{ax-bi x} \\ &= e^{ax} [(C_1 + C_2) \cos(bx) + i(C_1 - C_2) \sin(bx)], \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$(27.) \quad C_1 + C_2 = A, \quad i(C_1 - C_2) = B$$

setzt,

$$(28.) \quad C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} = e^{ax} [A \cos(bx) + B \sin(bx)].$$

Beispiele.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(29.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(30.) \quad F(u) = u^2 + \frac{1}{a^2} = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = \frac{i}{a}, \quad r_2 = -\frac{i}{a},$$

folglich wird in Uebereinstimmung mit Aufgabe 2 in § 101

$$(31.) \quad y = C_1 \cdot e^{\frac{x i}{a}} + C_2 \cdot e^{-\frac{x i}{a}} = (C_1 + C_2) \cos\left(\frac{x}{a}\right) + i(C_1 - C_2) \sin\left(\frac{x}{a}\right) \\ = A \cos\left(\frac{x}{a}\right) + B \sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(32.) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} - 7 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(33.) \quad F(u) = u^3 - 7u + 6 = 0, \quad \text{also} \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -3,$$

folglich wird

$$(34.) \quad y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-3x}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(35.) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} - 6 \frac{d^2 y}{dx^2} + 13 \frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(36.) \quad F(u) = u^3 - 6u^2 + 13u - 10 = 0,$$

also

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2 + i, \quad r_3 = 2 - i,$$

folglich wird

$$(37.) \quad y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{2x+ix} + C_3 \cdot e^{2x-ix} \\ = e^{2x}(C_1 + A \cos x + B \sin x).$$

Bisher war vorausgesetzt worden, dass die Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_m der Gleichung $F(u) = 0$ alle von einander verschieden sind. Hat aber $F(u) = 0$ auch *gleiche* Wurzeln, so erhält man durch Gleichung (17.) nicht mehr das *allgemeine* Integral. Ist z. B. $r_1 = r_2$, so kann man in Gleichung (17.) die Glieder

$$C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \quad \text{in} \quad (C_1 + C_2) \cdot e^{r_1 x}$$

zusammenfassen, so dass der Ausdruck für y nur noch $m - 1$ Integrations-Constanten enthält.

Aber auch hier kann man das *allgemeine* Integral durch eine Grenzbetrachtung aus der bisher angegebenen Form finden. Es sei zunächst

$$(38.) \quad r_2 = r_1 + h,$$

also

$$(39.) \quad y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_1 x + h x} + C_3 \cdot e^{r_3 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x} \\ = (C_1 + C_2 \cdot e^{h x}) e^{r_1 x} + C_3 \cdot e^{r_3 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x}.$$

Nun ist aber

$$(40.) \quad C + C_2 \cdot e^{h x} = C_1 + C_2 + C_2 \frac{h x}{1!} + C_2 \cdot \frac{h^2 x^2}{2!} + \dots$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$(41.) \quad C_1 + C_2 = C, \quad C_2 h = C',$$

so sind auch C und C' noch zwei beliebige Constanten; Gleichung (40.) erhält dadurch die Form

$$(42.) \quad C_1 + C_2 \cdot e^{h x} = C + C' x + C' \frac{h x^2}{2!} + C' \cdot \frac{h^2 x^3}{3!} + \dots$$

Lässt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(43.) \quad \lim_{h=0} r_2 = r_1; \quad \lim_{h=0} (C_1 + C_2 \cdot e^{h x}) = C + C' x,$$

folglich geht Gleichung (39.) in diesem Falle über in

$$(44.) \quad y = (C + C' x) \cdot e^{r_1 x} + C_3 \cdot e^{r_3 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x}.$$

In dieser Formel treten wieder m willkürliche Integrations-Constanten auf, wenn r_1, r_3, \dots, r_m sämmtlich von einander verschieden sind.

Setzt man jetzt in Gleichung (44.)

$$(45.) \quad r_3 = r_1 + h,$$

also

$$(46.) \quad y = (C + C' x) \cdot e^{r_1 x} + C_3 \cdot e^{r_1 x + h x} + C_4 \cdot e^{r_4 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x} \\ = (C + C' x + C_3 \cdot e^{h x}) \cdot e^{r_1 x} + C_4 \cdot e^{r_4 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x},$$

so wird

$$(47.) C + C'x + C_3 \cdot e^{hx} = C + C'x + C_3 + C_3 \frac{hx}{1!} + C_3 \frac{h^2x^2}{2!} + \dots,$$

oder, wenn man

$$(48.) C + C_3 = A_1, \quad C' + C_3h = A_2, \quad C_3h^2 = 2A_3$$

setzt,

$$(49.) C + C'x + C_3 \cdot e^{hx} = A_1 + A_2x + A_3x^2 + 2A_3 \frac{hx^3}{3!} + \dots,$$

wobei A_1, A_2, A_3 wieder drei willkürliche Constanten sind. Lässt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(50.) \lim_{h=0} r_3 = r_1, \quad \lim_{h=0} (C + C'x + C_3 \cdot e^{hx}) = A_1 + A_2x + A_3x^2,$$

folglich geht Gleichung (46.) in diesem Falle, wo $r_1 = r_2 = r_3$ ist, über in

$$(51.) y = (A_1 + A_2x + A_3x^2) \cdot e^{r_1x} + C_4 \cdot e^{r_2x} + \dots + C_m \cdot e^{r_mx}.$$

Dieser Ausdruck enthält wieder m willkürliche Constanten, wenn r_1, r_2, \dots, r_m von einander verschieden sind.

In gleicher Weise kann man alle Fälle erledigen, in denen $F(u) = 0$ mehrfache Wurzeln hat.

Dieselben Resultate findet man auch auf einem anderen Wege. Nach D.-R., Formel Nr. 84 der Tabelle ist

$$(52.) \frac{d^n(uv)}{dx^n} = u \frac{d^n v}{dx^n} + \binom{n}{1} \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots$$

$$+ \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + \frac{d^nu}{dx^n} v.$$

Führt man also in die Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m \cdot y = 0$$

für y das Product uv ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 (53.) \quad & \left(\frac{d^m v}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + \dots + f_{m-1} \frac{dv}{dx} + f_m \cdot v \right) u \\
 & + \frac{1}{1!} \left[m \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + (m-1) f_1 \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + (m-2) f_2 \frac{d^{m-3} v}{dx^{m-3}} + \dots + f_{m-1} \cdot v \right] \frac{du}{dx} \\
 & + \frac{1}{2!} \left[m(m-1) \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2) f_1 \frac{d^{m-3} v}{dx^{m-3}} + \dots + 2 \cdot 1 f_{m-2} \cdot v \right] \frac{d^2 u}{dx^2} \\
 & + \dots \\
 & + \frac{1}{m!} m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot v \cdot \frac{d^m u}{dx^m} = 0,
 \end{aligned}$$

oder

$$(54.) \quad Vu + \frac{1}{1!} V_1 \frac{du}{dx} + \frac{1}{2!} V_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + \frac{1}{m!} V_m \frac{d^m u}{dx^m} = 0,$$

wobei

$$(55.) \quad \left\{ \begin{aligned}
 V &= \frac{d^m v}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + \dots + f_m \cdot v, \\
 V_1 &= m \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + (m-1) f_1 \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + (m-2) f_2 \frac{d^{m-3} v}{dx^{m-3}} + \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad + f_{m-1} \cdot v, \\
 V_2 &= m(m-1) \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + (m-1)(m-2) f_1 \frac{d^{m-3} v}{dx^{m-3}} + \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad + 2 \cdot 1 f_{m-2} \cdot v \\
 &\dots
 \end{aligned} \right.$$

Von den beiden Functionen u und v kann man die eine, z. B. v , noch willkürlich bestimmen. Setzt man daher

$$(56.) \quad v = e^{rx}, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx} = r \cdot e^{rx}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = r^2 \cdot e^{rx}, \dots,$$

so gehen die Gleichungen (55.) über in

$$(57.) \quad \left\{ \begin{aligned}
 V &= e^{rx} (r^m + f_1 r^{m-1} + f_2 r^{m-2} + \dots + f_{m-1} r + f_m) = e^{rx} \cdot F(r), \\
 V_1 &= e^{rx} [m r^{m-1} + (m-1) f_1 r^{m-2} + (m-2) f_2 r^{m-3} + \dots + f_{m-1}] \\
 &\qquad\qquad\qquad = e^{rx} \cdot F'(r), \\
 V_2 &= e^{rx} [m(m-1) r^{m-2} + (m-1)(m-2) f_1 r^{m-3} + \dots + 2 \cdot 1 f_{m-2}] \\
 &\qquad\qquad\qquad = e^{rx} \cdot F''(r), \\
 &\dots
 \end{aligned} \right.$$

Deshalb erhält Gleichung (54.), wenn man den allen Gliedern gemeinsamen Factor e^{rx} fortlässt, die Form

$$(58.) \quad F(r) \cdot u + \frac{F'(r)}{1!} \frac{du}{dx} + \frac{F''(r)}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} + \dots + \frac{F^{(m-1)}(r)}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{d^m u}{dx^m} = 0.$$

Jetzt sei r_1 eine *einfache* Wurzel von $F(r) = 0$, dann wird Gleichung (58.) befriedigt, wenn man

$$(59.) \quad r = r_1, \quad u = C_1, \quad \text{also} \quad y = C_1 \cdot e^{r_1 x}$$

setzt. Ist dagegen r_1 eine α -fache Wurzel von $F(r) = 0$, so wird

$$F(r_1) = 0, \quad F'(r_1) = 0, \quad F''(r_1) = 0, \dots, F^{(\alpha-1)}(r_1) = 0,$$

so dass Gleichung (58.) befriedigt wird, wenn man

$$(60.) \quad r = r_1, \quad u = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_\alpha x^{\alpha-1},$$

also

$$(61.) \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_\alpha x^{\alpha-1}) \cdot e^{r_1 x}$$

setzt. Auf diese Weise kann man immer einen Ausdruck finden, der m willkürliche Constanten enthält und deshalb das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung ist.

Beispiel.

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Gleichung

$$(62.) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 10 \frac{d^2 y}{dx^2} - 12 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(63.) \quad F(r) = r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = (r^2 - 2r + 1)(r^2 - 2r + 5) = 0,$$

also

$$(64.) \quad r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 1 + 2i, \quad r_4 = 1 - 2i,$$

folglich wird

$$(65.) \quad y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^x [A \cos(2x) + B \sin(2x)] \\ = e^x [C_1 + C_2 x + A \cos(2x) + B \sin(2x)].$$

Die Function

$$(7.) \quad z = \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_1(x-t)}}{F'(r_1)} + \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_2(x-t)}}{F'(r_2)} + \dots + \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_m(x-t)}}{F'(r_m)}$$

hat also die Eigenschaft, dass sie mit ihren $m - 2$ ersten Ableitungen für $x = t$ verschwindet, während die $(m - 1)^{\text{te}}$ Ableitung gleich $\varphi(t)$ wird.

Jetzt mögen mit

$$(z)_{t=x}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_{t=x} = (z')_{t=x}, \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{t=x} = (z'')_{t=x}, \dots \left(\frac{d^mz}{dx^m}\right)_{t=x} = (z^{(m)})_{t=x}$$

diejenigen Werthe bezeichnet werden, welche $z, z', z'', \dots z^{(m)}$ für $t = x$ annehmen. Dabei ergibt sich aus den Gleichungen (5.), dass

$$(8.) \quad (z)_{t=x} = 0, \quad (z')_{t=x} = 0, \quad (z'')_{t=x} = 0, \dots (z^{(m-2)})_{t=x} = 0$$

wird, während

$$(9.) \quad (z^{(m-1)})_{t=x} = \varphi(x)$$

ist. Setzt man also

$$(10.) \quad Y = \int_0^x z dt,$$

so findet man nach Formel Nr. 179 der Tabelle

$$(11.) \quad \frac{dY}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{dx} dt + (z)_{t=x} = \int_0^x \frac{dz}{dx} dt,$$

$$(12.) \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = \int_0^x \frac{d^2z}{dx^2} dt + (z')_{t=x} = \int_0^x \frac{d^2z}{dx^2} dt,$$

$$(13.) \quad \frac{d^3Y}{dx^3} = \int_0^x \frac{d^3z}{dx^3} dt + (z'')_{t=x} = \int_0^x \frac{d^3z}{dx^3} dt,$$

.....

$$(14.) \quad \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} = \int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} dt + (z^{(m-2)})_{t=x} = \int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} dt,$$

$$(15.) \quad \frac{d^mY}{dx^m} = \int_0^x \frac{d^mz}{dx^m} dt + (z^{(m-1)})_{t=x} = \int_0^x \frac{d^mz}{dx^m} dt + \varphi(x).$$

Indem man diese Werthe von Y , $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$, \dots , $\frac{d^m Y}{dx^m}$ in Gleichung (1.) für y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, \dots , $\frac{d^m y}{dx^m}$ einsetzt, erhält man, da sich $\varphi(x)$ weghebt,

$$(16.) \int_0^x \left(\frac{d^m z}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1} \frac{dz}{dx} + f_m \cdot z \right) dt = 0.$$

Diese Gleichung wird aber in der That befriedigt, denn nach Formel Nr. 239 der Tabelle ist z ein *particuläres* Integral der *homogenen* linearen Differential-Gleichung

$$(17.) \frac{d^m z}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1} \frac{dz}{dx} + f_m \cdot z = 0,$$

folglich ist Y ein *particuläres* Integral der Differential-Gleichung (1.). Aus dem *particulären* Integral findet man sofort das *allgemeine*, indem man

$$(18.) \quad y = Y + v$$

in die Gleichung (1.) einsetzt; dann wird nämlich

$$(19.) \quad \frac{d^m v}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1} \frac{dv}{dx} + f_m \cdot v = 0,$$

also

$$(20.) \quad v = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} + \dots + c_m \cdot e^{r_m x}$$

und nach den Gleichungen (7.) und (10.)

$$(21.) \quad y = \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_1(x-t)} dt}{F'(r_1)} + c_1 \cdot e^{r_1 x} \right] \\ + \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_2(x-t)} dt}{F'(r_2)} + c_2 \cdot e^{r_2 x} \right] \\ + \dots + \left[\int_0^x \frac{\varphi(t) \cdot e^{r_m(x-t)} dt}{F'(r_m)} + c_m \cdot e^{r_m x} \right],$$

oder, wenn man

$$(22.) \quad c_1 \cdot F'(r_1) = C_1, \quad c_2 \cdot F'(r_2) = C_2, \dots, c_m \cdot F'(r_m) = C_m$$

setzt,

$$(23.) \quad y = \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)} \left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_1 t} dt \right] + \frac{e^{r_2 x}}{F'(r_2)} \left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_2 t} dt \right] \\ + \dots + \frac{e^{r_m x}}{F'(r_m)} \left[C_m + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_m t} dt \right].$$

Dasselbe Resultat kann man auch durch die Methode des *integrirenden Factors* oder durch *Variation der Constanten* finden.

Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(24.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{y}{a^2} = \varphi(x)$$

integriren.

Auflösung. Hier ist

$$(25.) \quad \begin{cases} F(r) = r^2 - \frac{1}{a^2}, & r_1 = \frac{1}{a}, & r_2 = -\frac{1}{a}, \\ F'(r) = 2r, & F'(r_1) = \frac{2}{a}, & F'(r_2) = -\frac{2}{a}, \end{cases}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$(26.) \quad y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} \left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-\frac{t}{a}} dt \right] - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) e^{\frac{t}{a}} dt \right].$$

Ist z. B.

$$(27.) \quad \varphi(x) = e^{\frac{x}{a}},$$

so wird

$$(28.) \quad \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-\frac{t}{a}} dt = \int_0^x dt = x, \quad \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{\frac{t}{a}} dt = \int_0^x e^{\frac{2t}{a}} dt = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right),$$

so dass Gleichung (26.) übergeht in

$$(29.) \quad y = \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}} (C_1 + x) - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[C_2 + \frac{a}{2} (e^{\frac{2x}{a}} - 1) \right]$$

$$= \frac{a}{2} \left[(C_1 + x) e^{\frac{x}{a}} - C_2 e^{-\frac{x}{a}} \right] - \frac{a^2}{4} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(30.) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 9 \frac{dy}{dx} + 20y = 4000x^2$$

integrieren.

Auflösung. Hier ist

$$(31.) \quad \begin{cases} F(r) = r^2 - 9r + 20 = 0, & F'(r) = 2r - 9, & \varphi(x) = 4000x^2, \\ r_1 = 5, & r_2 = 4, & F'(r_1) = 1, & F'(r_2) = -1, \end{cases}$$

folglich wird nach Gleichung (23.)

$$(32.) \quad y = e^{5x} \left[C_1 + 4000 \int_0^x t^2 e^{-5t} \cdot dt \right] - e^{4x} \left[C_2 + 4000 \int_0^x t^2 e^{-4t} dt \right].$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$(33.) \quad \int t^2 e^{at} dt = e^{at} \left(\frac{t^2}{a} - \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right),$$

so dass Gleichung (32.) übergeht in

$$(34.) \quad y = e^{5x} \left[C_1 + 4000 e^{-5x} \left(-\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} - \frac{2}{125} \right) + \frac{8000}{125} \right]$$

$$- e^{4x} \left[C_2 + 4000 e^{-4x} \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{2x}{16} - \frac{2}{64} \right) + \frac{8000}{64} \right]$$

$$= (C_1 + 64) e^{5x} - 32(25x^2 + 10x + 2)$$

$$- (C_2 + 125) e^{4x} + 125(8x^2 + 4x + 1),$$

oder, wenn man $C_1 + 64$ mit A , $C_2 + 125$ mit $-B$ bezeichnet,

$$(35.) \quad y = A e^{5x} + B e^{4x} + 200x^2 + 180x + 61.$$

Führt man also die Function u durch die Gleichungen

$$(6.) \quad \frac{dC}{dx} = u, \quad \text{oder} \quad C = \int u dx + A$$

ein, so erhält man aus Gleichung (5.)

$$(7.) \quad y_1 \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + g_1(x) \frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \dots + g_{m-1}(x) \cdot u = \varphi(x).$$

Aus dem *allgemeinen* Integral u dieser Differential-Gleichung, die nur noch von der $(m-1)$ ten Ordnung ist, findet man das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) durch die Gleichung

$$(8.) \quad y = y_1(\int u dx + A).$$

Ebenso kann man die Ordnung der Differential-Gleichung (1.) um *zwei* Einheiten erniedrigen, wenn man *zwei* particuläre Integrale y_1 und y_2 der *homogenen* Differential-Gleichung (2.) kennt. Man setze dann

$$(9.) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

und betrachte C_1 und C_2 als Functionen von x , welche der Bedingung

$$(10.) \quad y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dC_2}{dx} = -\frac{y_1}{y_2} \frac{dC_1}{dx}$$

genügen. Bezeichnet man dabei $-\frac{y_1}{y_2}$ mit $\varphi_1(x)$, so folgt aus den Gleichungen (9.) und (10.)

$$(11.) \quad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx},$$

$$(12.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = C_1 \frac{d^3y_1}{dx^3} + C_2 \frac{d^3y_2}{dx^3} + \varphi_2(x) \cdot \frac{d^2C_1}{dx^2} + \varphi_3(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

wobei $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... leicht zu ermittelnde Functionen von x

sind. Setzt man diese Werthe in Gleichung (1.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Factoren von C_1 und C_2 , und es bleibt

$$(13.) \quad G_0(x) \frac{d^{m-1}C_1}{dx^{m-1}} + G_1(x) \frac{d^{m-2}C_1}{dx^{m-2}} + \dots + G_{m-2}(x) \frac{dC_1}{dx} = \varphi(x).$$

Wenn man jetzt noch

$$(14.) \quad \begin{cases} \frac{dC_1}{dx} = z, & \text{also} \quad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot z, \\ C_1 = \int z dx + A_1, & C_2 = \int \varphi_1(x) \cdot z dx + A_2 \end{cases}$$

setzt, so geht Gleichung (13.) über in

$$(15.) \quad G_0(x) \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + G_1(x) \frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \dots + G_{m-2}(x) \cdot z = \varphi(x).$$

Aus dem *allgemeinen* Integral z dieser Gleichung, welche nur noch von der $(m - 2)$ ten Ordnung ist, findet man nach den Gleichungen (9.) und (14.) das *allgemeine* Integral der vorgelegten Differential-Gleichung (1.) durch die Formel

$$(16.) \quad y = y_1(\int z dx + A_1) + y_2(\int \varphi_1(x) \cdot z dx + A_2).$$

Dieses Verfahren kann man fortsetzen und den Satz beweisen:

Kennt man n verschiedene particuläre Integrale y_1, y_2, \dots, y_n der homogenen Differential-Gleichung

$$(17.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_n(x) \cdot y = 0,$$

so lässt sich die nicht homogene lineare Differential-Gleichung

$$(18.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_n(x) \cdot y = \varphi(x)$$

auf eine andere nicht homogene lineare Differential-Gleichung von der Ordnung $m - n$ reduciren.

Beweis. Sind y_1, y_2, \dots, y_n die bekannten particulären Integrale von Gleichung (17.), so setze man

$$(19.) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

und bestimme $\frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_3}{dx}, \dots, \frac{dC_n}{dx}$ als Functionen von $\frac{dC_1}{dx}$ durch die $n - 1$ linearen Gleichungen

$$(20.) \left\{ \begin{array}{l} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dC_n}{dx} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \frac{dC_n}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$(21.) \frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \quad \frac{dC_3}{dx} = \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \dots$$

$$\frac{dC_n}{dx} = \varphi_{n-1}(x) \cdot \frac{dC_1}{dx},$$

wobei die Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ leicht zu ermitteln sind. Nach diesen Festsetzungen wird

$$(22.) \quad \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$

$$(23.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2},$$

$$(24.) \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

$$(25.) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + \psi(x) \cdot \frac{dC_1}{dx},$$

$$(26.) \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = C_1 \frac{d^{n+1}y_1}{dx^{n+1}} + C_2 \frac{d^{n+1}y_2}{dx^{n+1}} + \dots$$

$$+ C_n \frac{d^{n+1}y_n}{dx^{n+1}} + \psi(x) \cdot \frac{d^2C_1}{dx^2} + \psi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx},$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (18.) ein, so verschwinden nach Voraussetzung die Coefficienten von C_1, C_2, \dots, C_n , so dass sich die Gleichung auf

$$(27.) \quad L_0(x) \frac{d^{m-n+1}C_1}{dx^{m-n+1}} + L_1(x) \frac{d^{m-n}C_1}{dx^{m-n}} + \dots + L_{m-n}(x) \frac{dC_1}{dx} = \varphi(x)$$

reducirt. Indem man noch die Function v durch die Gleichung

$$(28.) \quad \frac{dC_1}{dx} = v$$

einführt, erhält man daher

$$(29.) \quad L_0(x) \frac{d^{m-n}v}{dx^{m-n}} + L_1(x) \frac{d^{m-n-1}v}{dx^{m-n-1}} + \dots + L_{m-n}(x) \cdot v = \varphi(x).$$

Dabei ist nach den Gleichungen (19.), (21.) und (28.)

$$(30.) \quad C_1 = \int v dx + A_1, \quad C_2 = \int \varphi_1(x) \cdot v dx + A_2, \dots$$

$$C_n = \int \varphi_{n-1}(x) \cdot v dx + A_n,$$

$$(31.) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Diese Betrachtungen gelten auch dann noch, wenn $n = m$ ist. Für $n = m - 1$ kann man durch das angegebene Verfahren die vorgelegte Differential-Gleichung auf eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung von der Form

$$(32.) \quad L_0(x) \frac{dv}{dx} + L_1(x) \cdot v = \varphi(x)$$

zurückführen, deren Integration in § 87 behandelt worden ist. (Vergl. auch Formel Nr. 209 der Tabelle.)

Aus dem vorstehenden Satze ergibt sich auch, wie man durch *Variation der Constanten* die *nicht homogene* Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung integrieren kann, wenn das allgemeine Integral der entsprechenden *homogenen* Differential-Gleichung bekannt ist. Am besten wird man das anzuwendende Verfahren aus einem Beispiele ersehen.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(33.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + c^2y = 2 \cos(bx)$$

integrieren.

Auflösung. Die homogene Differential-Gleichung

$$(34.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + c^2y = 0$$

hat nach Aufgabe 2 in § 104, wenn man $\frac{1}{a}$ mit c vertauscht, das allgemeine Integral

$$(35.) \quad y = A \cos(cx) + B \sin(cx),$$

wobei A und B beliebige Constanten sind. Soll y auch ein Integral der *nicht* homogenen Differential-Gleichung (33.) sein, so müssen A und B noch Functionen von x sein; dann wird

$$(36.) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & -Ac \sin(cx) + Bc \cos(cx) \\ & + \frac{dA}{dx} \cos(cx) + \frac{dB}{dx} \sin(cx). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt noch

$$(37.) \quad \frac{dA}{dx} \cos(cx) + \frac{dB}{dx} \sin(cx) = 0, \text{ oder } \frac{dB}{dx} = -\frac{dA}{dx} \operatorname{ctg}(cx),$$

so wird

$$(38.) \quad \frac{dy}{dx} = -Ac \sin(cx) + Bc \cos(cx),$$

$$(39.) \quad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = & -Ac^2 \cos(cx) - Bc^2 \sin(cx) \\ & - \frac{dA}{dx} c \sin(cx) + \frac{dB}{dx} c \cos(cx), \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (35.) und (37.)

$$(39a.) \quad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = & -c^2y - c \frac{dA}{dx} [\sin(cx) + \operatorname{ctg}(cx) \cos(cx)] \\ = & -c^2y - c \frac{dA}{dx} \cdot \frac{1}{\sin(cx)}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in Gleichung (33.) ein, so erhält man

$$(40.) \quad \begin{aligned} -c \frac{dA}{dx} & = 2 \cos(bx) \sin(cx) \\ & = \sin[(c+b)x] + \sin[(c-b)x], \end{aligned}$$

folglich wird, wenn man die Integrations-Constante mit C_1c bezeichnet,

$$(41.) \quad Ac = -\int \sin[(c + b)x] dx - \int \sin[(c - b)x] dx \\ = \frac{\cos[(c + b)x]}{c + b} + \frac{\cos[(c - b)x]}{c - b} + C_1 c.$$

Ferner folgt aus Gleichung (37.)

$$(42.) \quad c \frac{dB}{dx} = -c \frac{dA}{dx} \operatorname{ctg}(cx) = 2 \cos(bx) \cos(cx) \\ = \cos[(c + b)x] + \cos[(c - b)x],$$

folglich wird, wenn man die Integrations-Constante mit $C_2 c$ bezeichnet,

$$(43.) \quad Bc = \frac{\sin[(c + b)x]}{c + b} + \frac{\sin[(c - b)x]}{c - b} + C_2 c.$$

Setzt man die für A und B gefundenen Werthe in Gleichung (35.) ein, so erhält man

$$y = \frac{\cos[(c + b)x] \cos(cx) + \sin[(c + b)x] \sin(cx)}{c(c + b)} \\ + \frac{\cos[(c - b)x] \cos(cx) + \sin[(c - b)x] \sin(cx)}{c(c - b)} \\ + C_1 \cos(cx) + C_2 \sin(cx),$$

oder

$$(44.) \quad y = \frac{2 \cos(bx)}{c^2 - b^2} + C_1 \cos(cx) + C_2 \sin(cx).$$

Einfacher ergibt sich dieses Resultat durch Anwendung von Formel Nr. 242 der Tabelle.

§ 107.

Ein weiterer Fall, in dem sich die lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung integrieren lässt.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 245 bis 247.)

Es sei die homogene lineare Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.) \quad (ax + b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (ax + b)^{m-1} f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (ax + b)^{m-2} f_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} \\ + \dots + (ax + b) f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = 0$$

gegeben, wobei die Coefficienten f_1, f_2, \dots, f_m wieder Constante sein mögen; dann setze man

$$(2.) \quad y = (ax + b)^r,$$

also

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = ar(ax + b)^{r-1}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = a^2r(r-1)(ax + b)^{r-2}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^my}{dx^m} = a^mr(r-1)(r-2)\dots(r-m+1)(ax + b)^{r-m} \end{array} \right.$$

in die Gleichung (1.) ein. Dadurch erhält man nach Weglassung des allen Gliedern gemeinsamen Factors $(ax + b)^r$ die Gleichung

$$(4.) \quad a^mr(r-1)(r-2)\dots(r-m+1) + a^{m-1}r(r-1)(r-2)\dots(r-m+2)f_1 + \dots + a^2r(r-1)f_{m-2} + arf_{m-1} + f_m = 0.$$

Dies ist eine Gleichung m^{ten} Grades für r , welche man „die charakteristische Gleichung“ nennt. Hat sie die Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_m , so erhält man die m particulären Integrale

$$(5.) \quad y_1 = (ax + b)^{r_1}, y_2 = (ax + b)^{r_2}, \dots, y_m = (ax + b)^{r_m}.$$

Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung (1.) wird daher

$$(6.) \quad y = C_1(ax + b)^{r_1} + C_2(ax + b)^{r_2} + \dots + C_m(ax + b)^{r_m},$$

wobei C_1, C_2, \dots, C_m noch beliebige Constanten sind.

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$(7.) \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

integriren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(8.) \quad r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - 4r + 4 = 0,$$

oder

$$(8a.) \quad (r - 1)(r - 2)(r + 2) = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

$$(9.) \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -2,$$

folglich hat die Differential-Gleichung die particulären Integrale

$$(10.) \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = \frac{1}{x^2}$$

und das allgemeine Integral

$$(11.) \quad y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^2}.$$

Sind zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung conjugirt complexe Grössen, ist z. B.

$$(12.) \quad r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i,$$

so wird

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + C_2 y_2 &= C_1 (ax + b)^{\alpha + \beta i} + C_2 (ax + b)^{\alpha - \beta i} \\ &= (ax + b)^\alpha [C_1 e^{\beta i \ln(ax+b)} + C_2 e^{-\beta i \ln(ax+b)}], \end{aligned}$$

oder, wenn man $\ln(ax + b)$ mit t bezeichnet,

$$(13.) \quad C_1 y_1 + C_2 y_2 = (ax + b)^\alpha [(C_1 + C_2) \cos(\beta t) + (C_1 - C_2) i \sin(\beta t)] \\ = (ax + b)^\alpha [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)].$$

Dabei sind $A = C_1 + C_2$ und $B = (C_1 - C_2) i$ zwei willkürliche Integrations-Constanten.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$(14.) \quad (x + 1)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - (x + 1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6(x + 1) \frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

integriren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(15.) \quad r(r - 1)(r - 2) - r(r - 1) + 6r - 10 = 0,$$

oder

$$(15a.) \quad (r - 2)(r^2 - 2r + 5) = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

$$(16.) \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 1 + 2i, \quad r_3 = 1 - 2i,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

$$\begin{aligned}
 (17.) \quad y &= C_1(x+1)^2 + C_2(x+1)^{1+2i} + C_3(x+1)^{1-2i} \\
 &= C_1(x+1)^2 + (x+1)[C_2(x+1)^{2i} + C_3(x+1)^{-2i}] \\
 &= C_1(x+1)^2 + (x+1)[C_2e^{2i\ln(x+1)} + C_3e^{-2i\ln(x+1)}],
 \end{aligned}$$

oder

$$(17a.) \quad y = C_1(x+1)^2 + (x+1)[A \cos(2t) + B \sin(2t)],$$

wobei

$$(18.) \quad t = \ln(x+1), \quad A = C_2 + C_3, \quad B = (C_2 - C_3)i$$

ist.

Bisher war vorausgesetzt worden, dass die Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_m der charakteristischen Gleichung sämtlich von einander verschieden sind. Hat die charakteristische Gleichung aber auch *gleiche* Wurzeln, so führt ein ähnliches Grenzverfahren wie in § 104 zum Ziele. Ist z. B. r_2 gleich r_1 , so kann man in Gleichung (6.) die Glieder

$$C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} \quad \text{in} \quad (C_1 + C_2)(ax+b)^{r_1}$$

zusammenfassen. Setzt man aber zunächst

$$(19.) \quad r_2 = r_1 + h,$$

so wird

$$(20.) \quad C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_1+h} = (ax+b)^{r_1}[C_1 + C_2(ax+b)^h].$$

Bezeichnet man der Kürze wegen wieder

$$\ln(ax+b) \quad \text{mit} \quad t,$$

so wird

$$\begin{aligned}
 (21.) \quad C_1 + C_2(ax+b)^h &= C_1 + C_2e^{ht} \\
 &= C_1 + C_2 \left(1 + \frac{ht}{1!} + \frac{h^2t^2}{2!} + \frac{h^3t^3}{3!} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

oder wenn man wieder wie in § 104

$$(22.) \quad C_1 + C_2 = C \quad \text{und} \quad C_2h = C'$$

setzt,

$$(23.) \quad C_1 + C_2(ax + b)^h = C + C'(t + \frac{ht^2}{2!} + \frac{h^2t^3}{3!} + \dots).$$

Lässt man jetzt h sich der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(24.) \quad \lim_{h=0} r_2 = r_1, \quad \lim_{h=0} [C_1 + C_2(ax + b)^h] = C + C't \\ = C + C' \ln(ax + b).$$

Das allgemeine Integral der vorgelegten Differential-Gleichung wird dann also

$$(25.) \quad y = (ax + b)^{r_1} [C + C' \ln(ax + b)] + C_3(ax + b)^{r_3} \\ + \dots + C_m(ax + b)^{r_m}.$$

Beispiel.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$(26.) \quad (2x + 3)^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 8(2x + 3) \frac{dy}{dx} + 32y = 0$$

integriren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(27.) \quad 8r(r - 1)(r - 2) - 16r + 32 = 0,$$

oder

$$(27 a.) \quad 8(r - 2)^2(r + 1) = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

$$(28.) \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -1,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

$$(29.) \quad y = (2x + 3)^2 [C + C' \ln(2x + 3)] + \frac{C_3}{2x + 3}.$$

Hat die charakteristische Gleichung drei gleiche Wurzeln, ist z. B.

$$(30.) \quad r_1 = r_2 = r_3,$$

so findet man das allgemeine Integral, indem man zunächst

(31.) $r_3 = r_1 + h$ und $\ln(ax + b) = t$, also $ax + b = e^t$ setzt; dadurch geht Gleichung (25.) über in

$$(32.) \quad (ax + b)^{r_1} [C + C' \ln(ax + b)] + C_3(ax + b)^{r_1+h} \\ + \dots + C_m(ax + b)^{r_m} \\ = (ax + b)^{r_1} (C + C't + C_3 e^{ht}) + \dots + C_m(ax + b)^{r_m} \\ = (ax + b)^{r_1} \left[C + C't + C_3 \left(1 + \frac{ht}{1!} + \frac{h^2 t^2}{2!} + \frac{h^3 t^3}{3!} + \dots \right) \right] \\ + \dots + C_m(ax + b)^{r_m}.$$

Setzt man jetzt noch

$$(33.) \quad C + C_3 = A_1, \quad C' + C_3 h = A_2, \quad C_3 h^2 = 2A_3,$$

so erhält man

$$(34.) \quad C + C't + C_3 e^{ht} = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + 2A_3 \left(\frac{ht^3}{3!} + \frac{h^2 t^4}{4!} + \dots \right),$$

wobei A_1, A_2, A_3 drei beliebige Constanten sind. Lässt man jetzt h sich wieder der Grenze Null nähern, so erhält man

$$(35.) \quad \lim_{h=0} r_3 = r_1, \quad \lim_{h=0} (C + C't + C_3 e^{ht}) = A_1 + A_2 t + A_3 t^2,$$

folglich ergibt sich dann aus Gleichung (25.) das allgemeine Integral in der Form

$$(36.) \quad y = (ax + b)^{r_1} [A_1 + A_2 \ln(ax + b) + A_3 \{\ln(ax + b)\}^2] \\ + C_4(ax + b)^{r_4} + \dots + C_m(ax + b)^{r_m}.$$

In ähnlicher Weise kann man alle Fälle behandeln, in denen die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat.

Beispiel.

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Gleichung

$$(37.) \quad x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} - 11x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 49x \frac{dy}{dx} - 81y = 0$$

integriren.

Auflösung. Die charakteristische Gleichung ist hier

$$(38.) \quad r(r-1)(r-2)(r-3) - 11r(r-1) + 49r - 81 = 0,$$

oder

$$(38 a.) \quad (r - 3)^3(r + 3) = 0;$$

sie hat also die Wurzeln

$$(39.) \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 3, \quad r_4 = -3,$$

folglich hat die Differential-Gleichung das allgemeine Integral

$$(40.) \quad y = x^3[A_1 + A_2 \ln x + A_3(\ln x)^2] + \frac{C}{x^3}.$$

XVIII. Abschnitt.

Simultane Differential-Gleichungen.

§ 108.

Zurückführung von simultanen Differential-Gleichungen zwischen einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen auf eine Differential-Gleichung höherer Ordnung zwischen *zwei* Veränderlichen.

Die unabhängige Veränderliche, von der die Veränderlichen x, y, z, \dots abhängig sind, heisse in dem Folgenden t , dann mögen der Einfachheit wegen zunächst zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen t, x und y gegeben sein. Indem man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{dy}{dt}$, bezw.

$\frac{dx}{dt}$ eliminirt, kann man sie leicht auf die Form

$$(1.) \quad F\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

$$(2.) \quad G\left(t, x, y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

bringen. Löst man jetzt noch die Gleichung (1.) nach y auf, so erhält man

$$(3.) \quad y = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f(t, x, x'),$$

wobei der Kürze wegen $\frac{dx}{dt}$ mit x' bezeichnet worden ist. Hieraus folgt durch Differentiation

$$(4.) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Indem man diese Werthe von y und $\frac{dy}{dt}$ in die Gleichung (2.) einsetzt, ergibt sich eine Differential-Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen t und x , auf deren Integration man die in dem vorigen Abschnitt gegebenen Regeln anwenden kann. Hat man das allgemeine Integral dieser Differential-Gleichung gefunden, so erhält man den zugehörigen Werth von y unmittelbar aus Gleichung (3.).

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

$$(5.) \quad \frac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0,$$

$$(6.) \quad \frac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0$$

integriren.

Auflösung. Aus Gleichung (5.) folgt

$$(7.) \quad y = \frac{dx}{dt} - 4x + 36t,$$

$$(8.) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 36.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (6.) ein, so erhält man

$$(9.) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 36(t-1) - 2e^t.$$

Wendet man zur Integration dieser Differential-Gleichung die in Formel Nr. 242 der Tabelle ausgesprochene Regel an, so wird

$$(10.) \quad x = \frac{e^{r_1 t}}{F'(r_1)} \left[C_1 + \int_0^t \varphi(t) \cdot e^{-r_1 t} dt \right] \\ + \frac{e^{r_2 t}}{F'(r_2)} \left[C_2 + \int_0^t \varphi(t) \cdot e^{-r_2 t} dt \right],$$

wobei in dem vorliegenden Falle

$$(11.) \quad F(u) = u^2 - 5u + 6 = 0$$

mit den Wurzeln

$$(12.) \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$

ist, folglich wird

$$(13.) \quad F'(u) = 2u - 5, \quad F'(r_1) = -1, \quad F'(r_2) = +1.$$

Ferner ist

$$(14.) \quad \varphi(t) = 36(t-1) - 2e^t,$$

also

$$(15.) \quad \int_0^t \varphi(t) \cdot e^{-r_1 t} dt = 36 \int_0^t (t-1) e^{-2t} dt - 2 \int_0^t e^{-t} dt \\ = 9e^{-2t}(-2t+1) + 2e^{-t} - 11,$$

$$(16.) \quad \int_0^t \varphi(t) \cdot e^{-r_2 t} dt = 36 \int_0^t (t-1) e^{-3t} dt - 2 \int_0^t e^{-2t} dt \\ = 4e^{-3t}(-3t+2) + e^{-2t} - 9.$$

Dies giebt

$$(17.) \quad x = -e^{2t}[C_1 + (-18t+9)e^{-2t} + 2e^{-t} - 11] \\ + e^{3t}[C_2 + (-12t+8)e^{-3t} + e^{-2t} - 9],$$

oder, wenn man $11 - C_1$ mit A und $C_2 - 9$ mit B bezeichnet,

$$(18.) \quad x = 6t - 1 - e^t + Ae^{2t} + Be^{3t}.$$

Dabei sind A und B zwei beliebige Integrations-Constanten. Daraus folgt dann mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$(19.) \quad y = 12t + 10 + 3e^t - 2Ae^{2t} - Be^{3t}.$$

Dieses Verfahren kann man zunächst verallgemeinern auf zwei simultane Differential-Gleichungen höherer Ordnung zwischen t , x und y . Setzt man der Kürze wegen

$$(20.) \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad \dots \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = x^{(\alpha)}, \dots,$$

$$(21.) \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \quad \dots \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = y^{(\beta)}, \dots,$$

so seien die beiden Differential-Gleichungen

$$(22.) \quad F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}, y, y', y'', \dots, y^{(p)}) = 0,$$

$$(23.) \quad G(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}, y, y', y'', \dots, y^{(q)}) = 0$$

gegeben. Indem man Gleichung (22.) q -mal und Gleichung (23.) p -mal nach t differentiirt, erhält man die q Gleichungen

$$(24.) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial x'} x'' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}} y^{(p+1)} = 0,$$

.....

und die p Gleichungen

$$(25.) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} x' + \frac{\partial G}{\partial x'} x'' + \dots + \frac{\partial G}{\partial y^{(q)}} y^{(q+1)} = 0,$$

.....

Im Ganzen verfügt man also, wenn man die Gleichungen (22.) und (23.) hinzurechnet, über $p + q + 2$ Gleichungen, aus denen man die $p + q + 1$ Grössen $y, y', y'', \dots, y^{(p+q)}$ eliminiren kann. Das Resultat der Elimination ist dann eine Differential-Gleichung $(m + q)^{\text{ter}}$ oder $(n + p)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen t und x , und zwar ist die Ordnung im Allgemeinen der grösseren von diesen beiden Zahlen $m + q$ und $n + p$ gleich. In besonderen Fällen kann natürlich eine Erniedrigung der Ordnung eintreten.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

$$(26.) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4x + \frac{dy}{dt} + 12 = 0,$$

$$(27.) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - y - 10 \frac{dx}{dt} + 7 = 0$$

integriren.

Auflösung. Durch zweimalige Differentiation findet man aus Gleichung (26.) die beiden Gleichungen

$$(28.) \quad \frac{d^3x}{dt^3} - 4 \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$(29.) \quad \frac{d^4x}{dt^4} - 4 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} = 0;$$

und durch einmalige Differentiation findet man aus Gleichung (27.)

$$(30.) \quad \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} - 10 \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Aus den fünf Gleichungen (26.) bis (30.) kann man jetzt die vier Grössen y , $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$ eliminiren. Zieht man nämlich Gleichung (30.) von Gleichung (29.) ab, so bleibt

$$(31.) \quad \frac{d^4x}{dt^4} + 6 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0,$$

und wenn man hiervon noch Gleichung (26.) abzieht,

$$(32.) \quad \frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 12.$$

Indem man auf diese Differential-Gleichung die Bezeichnungen der Formel Nr. 242 der Tabelle anwendet, erhält man die Gleichungen

$$(33.) \quad F(u) = u^4 + 5u^2 + 4 = 0$$

mit den Wurzeln

$$(34.) \quad r_1 = +i, \quad r_2 = -i, \quad r_3 = +2i, \quad r_4 = -2i,$$

$$\varphi(t) = 12, \quad F'(u) = 4u^3 + 10u,$$

$$F'(r_1) = +6i, \quad F'(r_2) = -6i, \quad F'(r_3) = -12i, \quad F'(r_4) = +12i,$$

folglich wird

$$(35.) \quad x = \frac{1}{6i} e^{ti} \left(C_1 + 12 \int_0^t e^{-ti} dt \right) - \frac{1}{6i} e^{-ti} \left(C_2 + 12 \int_0^t e^{ti} dt \right) \\ - \frac{1}{12i} e^{2ti} \left(C_3 + 12 \int_0^t e^{-2ti} dt \right) + \frac{1}{12i} e^{-2ti} \left(C_4 + 12 \int_0^t e^{2ti} dt \right),$$

oder, wenn man

$$C_1 - 12i = C'_1, \quad C_2 + 12i = C'_2, \quad C_3 - 6i = C'_3, \quad C_4 + 6i = C'_4$$

setzt,

$$(35.a.) \quad x = \frac{i}{6} \left(-C'_1 e^{ti} + C'_2 e^{-ti} \right) + \frac{i}{12} \left(C'_3 e^{2ti} - C'_4 e^{-2ti} \right) + 3.$$

Setzt man noch

$$i(-C'_1 + C'_2) = 6A, \quad C'_1 + C'_2 = 6B,$$

$$i(C'_3 - C'_4) = 12C, \quad -C'_3 - C'_4 = 12D,$$

so geht Gleichung (35.a.) über in

$$(36.) \quad x = 3 + A \cos t + B \sin t + C \cos(2t) + D \sin(2t),$$

wobei A , B , C und D die 4 willkürlichen Integrations-Constanten sind.

Den zugehörigen Werth von y findet man aus den Gleichungen (27.) und (28.). Eliminirt man nämlich aus diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2y}{dt^2}$, so erhält man

$$(37.) \quad y = -\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{dx}{dt} + 7,$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (36.)

$$(38.) \quad y = 7 + 5A \sin t - 5B \cos t + 4C \sin(2t) - 4D \cos(2t).$$

Sind *drei* simultane Differential-Gleichungen zwischen der unabhängigen Veränderlichen t und den Functionen x, y, z gegeben, so kann man zunächst das oben angedeutete Verfahren benutzen, um z und die Ableitungen von z zu eliminiren. Dadurch erhält man *zwei* simultane Differential-Gleichungen, welche dieselbe Form haben wie die Gleichungen (22.) und (23.) und deshalb auch in derselben Weise behandelt werden können.

Dieses Verfahren lässt sich noch verallgemeinern auf n simultane Differential-Gleichungen zwischen einer unabhängigen Veränderlichen t und n Functionen derselben.

Häufig wird man allerdings das entgegengesetzte Verfahren anwenden, indem man Differential-Gleichungen höherer Ordnung auf eine grössere Anzahl von Differential-Gleichungen niedrigerer Ordnung zurückführt. Beispiele dafür bieten schon die Angaben in § 82.

§ 109.

Integration linearer simultaner Differential-Gleichungen erster Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tablle Nr. 248.)

Zwei simultane Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen t, x und y , welche in Bezug auf $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ nur vom ersten Grade sind, heissen „*lineare* Differential-Gleichungen erster Ordnung“ und können durch Elimination von $\frac{dy}{dt}$, bzw. von $\frac{dx}{dt}$ auf die Form

$$(1.) \quad \frac{dx}{dt} + f_1(t) \cdot x + g_1(t) \cdot y = h_1(t),$$

$$(2.) \quad \frac{dy}{dt} + f_2(t) \cdot x + g_2(t) \cdot y = h_2(t)$$

gebracht werden, wobei $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ noch beliebige Functionen von t sind.

Die Integration dieser Differential-Gleichungen kann nun nach einem Verfahren, das von *d'Alembert* angegeben und von *Ampère* verbessert ist, in folgender Weise ausgeführt werden. Man setze

$$(3.) \quad w = x - vy,$$

also

$$(4.) \quad x = w + vy, \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} = \frac{dw}{dt} + y \frac{dv}{dt},$$

wo v eine noch passend zu wählende Function von t sein möge. Indem man Gleichung (2.) mit v multiplicirt und von Gleichung (1.) abzieht, erhält man

$$(5.) \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} + (f_1 - vf_2)x + (g_1 - vg_2)y = h_1 - vh_2,$$

wobei der Kürze wegen

$$f_1(t) = f_1, \quad g_1(t) = g_1, \quad h_1(t) = h_1,$$

$$f_2(t) = f_2, \quad g_2(t) = g_2, \quad h_2(t) = h_2$$

gesetzt ist. Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.)

$$\frac{dw}{dt} + y \frac{dv}{dt} + (f_1 - vf_2)(w + vy) + (g_1 - vg_2)y = h_1 - vh_2,$$

oder

$$(6.) \quad \frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2)w + \left[\frac{dv}{dt} - f_2v^2 + (f_1 - g_2)v + g_1 \right] y = h_1 - vh_2.$$

Da man über die Function v noch willkürlich verfügen darf, so kann man den Coefficienten von y gleich Null machen, indem man

$$(7.) \quad \frac{dv}{dt} = f_2v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1$$

setzt. Obwohl diese Differential-Gleichung zwischen t und v nur von der ersten Ordnung ist, so kann man doch ihr allgemeines Integral nicht immer finden, weil sie nicht linear ist. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe genügt es aber, dass man zwei particuläre Integrale v_1 und v_2 kennt, denn dann ergeben sich aus Gleichung (6.) die beiden linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$(8.) \quad \frac{dw_1}{dt} + (f_1 - v_1 f_2)w_1 = h_1 - v_1 h_2,$$

$$(9.) \quad \frac{dw_2}{dt} + (f_1 - v_2 f_2)w_2 = h_1 - v_2 h_2,$$

die man z. B. nach der *Bernoulli'schen* Methode integrieren kann. Da hierbei *zwei* Integrations-Constanten C_1 und C_2 auftreten, so findet man aus den Gleichungen

$$(10.) \quad x - v_1 y = w_1 \quad \text{und} \quad x - v_2 y = w_2$$

die *allgemeinen* Werthe der Functionen x und y .

Beispiel.

Aufgabe 1. Man soll die beiden simultanen Differential-Gleichungen

$$(11.) \quad \frac{dx}{dt} - 4x - y = -36t,$$

$$(12.) \quad \frac{dy}{dt} + 2x - y = -2e^t$$

integrieren.

Auflösung. Indem man Gleichung (12.) mit v multiplicirt und von Gleichung (11.) abzieht, erhält man

$$(13.) \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} - (4 + 2v)x - (1 - v)y = -36t + 2e^t \cdot v,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.)

$$(14.) \quad \frac{dw}{dt} - (4 + 2v)w + \left(\frac{dv}{dt} - 2v^2 - 3v - 1 \right) y = -36t + 2e^t \cdot v.$$

Ueber die willkürliche Function v verfüge man jetzt so, dass in Gleichung (14.) der Coefficient von y verschwindet. Dies giebt

$$(15.) \quad \frac{dv}{dt} = 2v^2 + 3v + 1 = (2v + 1)(v + 1),$$

oder

$$(16.) \quad dt = \frac{dv}{(2v + 1)(v + 1)} = \frac{2dv}{2v + 1} - \frac{dv}{v + 1},$$

folglich wird

$$(17.) \quad t = \ln(2v + 1) - \ln(v + 1) - \ln C,$$

oder

$$(18.) \quad \frac{2v + 1}{v + 1} = Ce^t, \quad v = -\frac{Ce^t - 1}{Ce^t - 2}.$$

In diesem Falle hat man sogar für v das *allgemeine* Integral gefunden; da man aber nur zwei particuläre Integrale braucht, so nehme man für C die Werthe 0 und ∞ . Dadurch erhält man

$$(19.) \quad v_1 = -\frac{1}{2}, \quad v_2 = -1,$$

Werthe, von denen man ohne Weiteres erkennt, dass sie der Gleichung (15.) genügen. Aus Gleichung (14.) ergeben sich deshalb die beiden linearen Gleichungen erster Ordnung

$$(20.) \quad \frac{dw_1}{dt} - 3w_1 = -36t - e^t,$$

$$(21.) \quad \frac{dw_2}{dt} - 2w_2 = -36t - 2e^t.$$

Setzt man jetzt

$$(22.) \quad w_1 = u_1 z_1, \quad w_2 = u_2 z_2,$$

so gehen die Gleichungen (20.) und (21.) über in

$$(23.) \quad u_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 \left(\frac{du_1}{dt} - 3u_1 \right) = -36t - e^t,$$

$$(24.) \quad u_2 \frac{dz_2}{dt} + z_2 \left(\frac{du_2}{dt} - 2u_2 \right) = -36t - 2e^t,$$

folglich wird man setzen

$$(25.) \quad \frac{du_1}{u_1} = 3dt, \quad \frac{du_2}{u_2} = 2dt,$$

also

$$(26.) \quad u_1 = e^{3t}, \quad u_2 = e^{2t}.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (23.) und (24.) über in

$$(27.) \quad \frac{dz_1}{dt} = -36te^{-3t} - e^{-2t},$$

$$(28.) \quad \frac{dz_2}{dt} = -36te^{-2t} - 2e^{-t},$$

folglich wird

$$(29.) \quad z_1 = 4(3t + 1)e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + C_1,$$

$$(30.) \quad z_2 = 9(2t + 1)e^{-2t} + 2e^{-t} + C_2.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (3.)

$$(31.) \quad w_1 = u_1 z_1 = 12t + 4 + \frac{1}{2}e^t + C_1 e^{3t} = x + \frac{1}{2}y,$$

$$(32.) \quad w_2 = u_2 z_2 = 18t + 9 + 2e^t + C_2 e^{2t} = x + y,$$

also

$$(33.) \quad x = 6t - 1 - e^t + 2C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t},$$

$$(34.) \quad y = 12t + 10 + 3e^t - 2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t}.$$

Setzt man noch

$$-C_2 = A, \quad 2C_1 = B,$$

so stimmen diese Gleichungen genau mit den Gleichungen (18.) und (19.) in § 108 überein, welche man bei der Lösung derselben Aufgabe fand.

Sind die Coefficienten f_1, f_2, g_1, g_2 constant, so darf man für v_1 und v_2 immer, wie es in dem vorhergehenden Beispiele geschehen ist, die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$f_2 v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1 = 0$$

setzen, denn in diesem Falle werden v_1 und v_2 Constante, deren Ableitung gleich Null ist; sie genügen deshalb der Differential-Gleichung (7.).

Das angegebene Verfahren kann man auch auf drei simultane Differential-Gleichungen von der Form

$$(35.) \quad \frac{dx}{dt} + f_1x + g_1y + h_1z = k_1,$$

$$(36.) \quad \frac{dy}{dt} + f_2x + g_2y + h_2z = k_2,$$

$$(37.) \quad \frac{dz}{dt} + f_3x + g_3y + h_3z = k_3$$

übertragen, wobei $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, k_\alpha$ noch Functionen von t sein dürfen. Zieht man jetzt die Gleichungen (36.) und (37.), nachdem man sie bezw. mit den willkürlichen Functionen v und w multiplicirt hat, von Gleichung (35.) ab, so erhält man

$$(38.) \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} - w \frac{dz}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)x + (g_1 - vg_2 - wg_3)y \\ + (h_1 - vh_2 - wh_3)z = k_1 - vk_2 - wk_3.$$

Setzt man jetzt

$$(39.) \quad x - vy - wz = u, \quad \text{also} \quad x = u + vy + wz,$$

so wird

$$(40.) \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} - w \frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + y \frac{dv}{dt} + z \frac{dw}{dt}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe geht Gleichung (38.) über in

$$(41.) \quad \frac{du}{dt} + y \frac{dv}{dt} + z \frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)(u + vy + wz) \\ + (g_1 - vg_2 - wg_3)y + (h_1 - vh_2 - wh_3)z = k_1 - vk_2 - wk_3.$$

Jetzt kann man über die willkürlichen Functionen v und w so verfügen, dass in dieser Gleichung die Coefficienten von y und z verschwinden, indem man

$$(42.) \quad \frac{dv}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)v + (g_1 - vg_2 - wg_3) = 0,$$

$$(43.) \quad \frac{dw}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)w + (h_1 - vh_2 - wh_3) = 0$$

setzt. Dadurch reducirt sich Gleichung (41.) auf

$$(44.) \quad \frac{du}{dt} + (f_1 - vf_2 - wf_3)u = k_1 - vk_2 - wk_3.$$

Die Gleichungen (42.) und (43.) enthalten nur die Veränderlichen t , v und w ; sie sind aber in Bezug auf v und w nicht linear, so dass ihre Integration in den meisten Fällen auf Schwierigkeiten stossen wird. Es genügt aber auch hier, von diesen beiden Differential-Gleichungen drei particuläre Lösungen v_1 und w_1 , v_2 und w_2 , v_3 und w_3 zu kennen, denn zu jedem solchen Werthepeare ergibt sich aus Gleichung (44.) eine lineare Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Integrale u_1 , u_2 , u_3 jedesmal eine willkürliche Integrations-Constante enthalten. Dann findet man aber aus den Gleichungen

$$(45.) \quad \begin{cases} x - v_1y - w_1z = u_1, \\ x - v_2y - w_2z = u_2, \\ x - v_3y - w_3z = u_3 \end{cases}$$

die allgemeinen Werthe von x , y , z .

Sind die Coefficienten $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ constant, so genügen den Gleichungen (42.) und (43.) constante Werthe von v und w , die sich aus den Gleichungen

$$(46.) \quad (f_1 - vf_2 - wf_3)v + (g_1 - vg_2 - wg_3) = 0,$$

$$(47.) \quad (f_1 - vf_2 - wf_3)w + (h_1 - vh_2 - wh_3) = 0$$

ergeben. Setzt man zur Auflösung dieser Gleichungen

$$(48.) \quad f_1 - vf_2 - wf_3 = r,$$

so ergeben sich die drei Gleichungen

$$(48 a.) \quad (r - f_1) + f_2v + f_3w = 0,$$

$$(49.) \quad g_1 + (r - g_2)v - g_3w = 0,$$

$$(50.) \quad h_1 - h_2v + (r - h_3)w = 0.$$

Durch Elimination von v und w findet man aus diesen Gleichungen für r die kubische Gleichung

$$(51.) \quad \begin{vmatrix} r - f_1, & f_2, & f_3 \\ g_1, & r - g_2, & -g_3 \\ h_1, & -h_2, & r - h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(51 \text{ a.}) \quad (r - f_1)(r - g_2)(r - h_3) - g_3 h_2 (r - f_1) - h_1 f_3 (r - g_2) \\ - f_2 g_1 (r - h_3) - f_2 g_3 h_1 - f_3 g_1 h_2 = 0.$$

Sind r_1, r_2, r_3 die Wurzeln dieser kubischen Gleichung, so findet man aus den Gleichungen (48 a.) bis (50.) die zugehörigen Werthe von v und w , und Gleichung (44.) nimmt die Form

$$(52.) \quad \frac{du_\alpha}{dt} + r_\alpha u_\alpha = k_1 - v_\alpha k_2 - w_\alpha k_3 \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, 3)$$

an, deren allgemeines Integral nach Formel Nr. 209 der Tabelle durch die Gleichung

$$(53.) \quad u_\alpha = e^{-r_\alpha t} \left[\int (k_1 - v_\alpha k_2 - w_\alpha k_3) e^{r_\alpha t} dt + C_\alpha \right]$$

dargestellt wird.

Beispiel.

Aufgabe 2. Man soll die drei simultanen Differential-Gleichungen

$$(54.) \quad \frac{dx}{dt} - 7x - 34y + 42z = 2e^{4t},$$

$$(55.) \quad \frac{dy}{dt} + x + 10y - 6z = 5e^{7t},$$

$$(56.) \quad \frac{dz}{dt} - 4x - 10y + 18z = 8e^{10t},$$

integriren.

Auflösung. Indem man die Gleichungen (55.) und (56.) bezw. mit den willkürlichen Functionen v und w multiplicirt und dann von Gleichung (54.) abzieht, erhält man

$$(57.) \quad \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} - w \frac{dz}{dt} + (-7 - v + 4w)x + (-34 - 10v + 10w)y \\ + (42 + 6v - 18w)z = 2e^{4t} - 5ve^{7t} - 8we^{10t}.$$

Diese Gleichung reducirt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (39.) und (40.) auf

$$(58.) \quad \frac{du}{dt} + y \frac{dv}{dt} + z \frac{dw}{dt} + (-7 - v + 4w)(u + ry + wz) \\ + (-34 - 10v + 10w)y + (42 + 6v - 18w)z = 2e^{4t} - 5ve^{7t} - 8we^{10t}.$$

Setzt man jetzt noch

$$(59.) \quad \begin{cases} -7 - v + 4w = r, & \text{oder } r + 7 + v - 4w = 0, \\ -34 + (r - 10)v + 10w = 0, \\ 42 + 6v + (r - 18)w = 0, \end{cases}$$

so werden in Gleichung (58.) die Coefficienten von y und von z gleich Null, weil für constante Werthe von v und w die Ableitungen $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ verschwinden. Eliminirt man aus den Gleichungen (59.) die Grössen v und w , so erhält man

$$(60.) \quad r^3 - 21r^2 + 126r - 216 = (r - 3)(r - 6)(r - 12) = 0,$$

also

$$(61.) \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 6, \quad r_3 = 12.$$

Die zugehörigen Werthe von v und w findet man dann aus den Gleichungen (59.), welche durch Einsetzen der besonderen Werthe von r die Form

$$(62.) \quad \begin{cases} -v_1 + 4w_1 = 10, & -v_2 + 4w_2 = 13, & -v_3 + 4w_3 = 19, \\ -7v_1 + 10w_1 = 34, & -4v_2 + 10w_2 = 34, & +2v_3 + 10w_3 = 34 \end{cases}$$

annehmen. Daraus ergibt sich

$$(63.) \quad \begin{cases} v_1 = -2, \quad w_1 = +2; & v_2 = -1, \quad w_2 = +3; \\ v_3 = -3, \quad w_3 = +4. \end{cases}$$

Deshalb erhält man aus Gleichung (58.) die drei linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$(64.) \quad \frac{du_1}{dt} + 3u_1 = 2e^{4t} + 10e^{7t} - 16e^{10t},$$

$$(65.) \quad \frac{du_2}{dt} + 6u_2 = 2e^{4t} + 5e^{7t} - 24e^{10t},$$

$$(66.) \quad \frac{du_3}{dt} + 12u_3 = 2e^{4t} + 15e^{7t} - 32e^{10t};$$

folglich ist

$$(67.) u_1 = e^{-3t} \left[\int (2e^{4t} + 10e^{7t} - 16e^{10t}) e^{3t} dt + C_1 \right]$$

$$= C_1 e^{-3t} + \frac{2}{7} e^{4t} + e^{7t} - \frac{16}{13} e^{10t},$$

$$(68.) u_2 = e^{-6t} \left[\int (2e^{4t} + 5e^{7t} - 24e^{10t}) e^{6t} dt + C_2 \right]$$

$$= C_2 e^{-6t} + \frac{1}{5} e^{4t} + \frac{5}{13} e^{7t} - \frac{3}{2} e^{10t},$$

$$(69.) u_3 = e^{-12t} \left[\int (2e^{4t} + 15e^{7t} - 32e^{10t}) e^{12t} dt + C_3 \right]$$

$$= C_3 e^{-12t} + \frac{1}{8} e^{4t} + \frac{15}{19} e^{7t} - \frac{16}{11} e^{10t}.$$

Schliesslich findet man aus den Gleichungen

$$(70.) x + 2y - 2z = u_1, \quad x + y - 3z = u_2, \quad x + 3y - 4z = u_3$$

die Werthe der Functionen x, y, z selbst, nämlich

$$(71.) \quad \begin{cases} 3x = 5u_1 + 2u_2 - 4u_3, \\ 3y = u_1 - 2u_2 + u_3, \\ 3z = 2u_1 - u_2 - u_3, \end{cases}$$

oder

$$(72.) \quad \begin{cases} 3x = 5C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{-6t} - 4C_3 e^{-12t} + \frac{93}{70} e^{4t} + \frac{645}{247} e^{7t} \\ \quad \quad \quad - \frac{477}{143} e^{10t}, \\ 3y = C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-6t} + C_3 e^{-12t} + \frac{3}{280} e^{7t} + \frac{252}{247} e^{7t} \\ \quad \quad \quad + \frac{45}{143} e^{10t}, \\ 3z = 2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-6t} - C_3 e^{-12t} + \frac{69}{280} e^{4t} + \frac{204}{247} e^{7t} \\ \quad \quad \quad + \frac{141}{286} e^{10t}. \end{cases}$$

Tafel für das elliptische Integral $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, wo $k = \sin \alpha^*$.

Grad α	0'	12'	24'	36'	48'	Grad α	0'	12'	24'	36'	48'
0	1,57080	1,57080	1,57082	1,57084	1,57087	45	1,85407	1,85704	1,86003	1,86305	1,86609
1	1,57092	1,57097	1,57103	1,57110	1,57118	46	1,86915	1,87223	1,87534	1,87847	1,88163
2	1,57127	1,57138	1,57149	1,57161	1,57173	47	1,88481	1,88801	1,89124	1,89450	1,89778
3	1,57187	1,57202	1,57218	1,57235	1,57253	48	1,90108	1,90441	1,90777	1,91115	1,91456
4	1,57271	1,57291	1,57312	1,57333	1,57356	49	1,91800	1,92146	1,92495	1,92847	1,93201
5	1,57379	1,57404	1,57429	1,57456	1,57483	50	1,93558	1,93918	1,94281	1,94646	1,95015
6	1,57511	1,57541	1,57571	1,57602	1,57635	51	1,95386	1,95761	1,96138	1,96518	1,96902
7	1,57668	1,57702	1,57737	1,57773	1,57811	52	1,97288	1,97678	1,98070	1,98466	1,98865
8	1,57849	1,57888	1,57928	1,57969	1,58011	53	1,99267	1,99672	2,00081	2,00493	2,00908
9	1,58054	1,58098	1,58143	1,58189	1,58236	54	2,01327	2,01749	2,02174	2,02603	2,03036
10	1,58284	1,58333	1,58383	1,58434	1,58486	55	2,03472	2,03911	2,04354	2,04801	2,05252
11	1,58539	1,58593	1,58648	1,58705	1,58762	56	2,05706	2,06164	2,06626	2,07092	2,07562
12	1,58820	1,58879	1,58939	1,59000	1,59062	57	2,08036	2,08514	2,08995	2,09481	2,09971
13	1,59125	1,59190	1,59255	1,59321	1,59388	58	2,10466	2,10964	2,11467	2,11974	2,12486
14	1,59457	1,59526	1,59597	1,59668	1,59741	59	2,13002	2,13523	2,14048	2,14578	2,15112
15	1,59814	1,59889	1,59964	1,60041	1,60119	60	2,15652	2,16196	2,16745	2,17298	2,17857
16	1,60198	1,60278	1,60359	1,60441	1,60524	61	2,18421	2,18990	2,19565	2,20144	2,20729
17	1,60608	1,60693	1,60780	1,60867	1,60956	62	2,21319	2,21915	2,22517	2,23124	2,23736
18	1,61045	1,61136	1,61228	1,61321	1,61415	63	2,24355	2,24979	2,25610	2,26246	2,26889
19	1,61510	1,61606	1,61704	1,61802	1,61902	64	2,27538	2,28193	2,28854	2,29523	2,30197
20	1,62003	1,62104	1,62207	1,62311	1,62417	65	2,30879	2,31567	2,32262	2,32964	2,33674
21	1,62523	1,62631	1,62740	1,62850	1,62961	66	2,34390	2,35115	2,35846	2,36585	2,37332
22	1,63073	1,63186	1,63301	1,63417	1,63534	67	2,38087	2,38850	2,39621	2,40400	2,41188
23	1,63652	1,63771	1,63892	1,64013	1,64136	68	2,41984	2,42789	2,43603	2,44426	2,45258
24	1,64260	1,64386	1,64512	1,64640	1,64769	69	2,46100	2,46951	2,47812	2,48683	2,49564
25	1,64900	1,65031	1,65164	1,65298	1,65433	70	2,50455	2,51357	2,52269	2,53193	2,54127
26	1,65570	1,65708	1,65847	1,65987	1,66129	71	2,55073	2,56030	2,57000	2,57982	2,58975
27	1,66272	1,66416	1,66561	1,66708	1,66856	72	2,59982	2,61001	2,62034	2,63080	2,64140
28	1,67006	1,67157	1,67309	1,67462	1,67617	73	2,65214	2,66302	2,67405	2,68524	2,69657
29	1,67773	1,67931	1,68090	1,68250	1,68412	74	2,70807	2,71973	2,73155	2,74354	2,75571
30	1,68575	1,68740	1,68905	1,69073	1,69241	75	2,76806	2,78060	2,79332	2,80624	2,81935
31	1,69411	1,69583	1,69756	1,69930	1,70106	76	2,83267	2,84620	2,85995	2,87392	2,88813
32	1,70284	1,70462	1,70643	1,70824	1,71008	77	2,90256	2,91725	2,93218	2,94737	2,96283
33	1,71192	1,71379	1,71567	1,71756	1,71947	78	2,97857	2,99459	3,01091	3,02753	3,04446
34	1,72139	1,72333	1,72529	1,72726	1,72924	79	3,06173	3,07933	3,09728	3,11560	3,13430
35	1,73125	1,73326	1,73530	1,73735	1,73942	80	3,15339	3,17288	3,19280	3,21317	3,23400
36	1,74150	1,74360	1,74572	1,74785	1,75000	81	3,25530	3,27711	3,29945	3,32234	3,34580
37	1,75217	1,75435	1,75655	1,75877	1,76100	82	3,36987	3,39457	3,41994	3,44601	3,47283
38	1,76326	1,76553	1,76781	1,77012	1,77244	83	3,50042	3,52885	3,55814	3,58837	3,61950
39	1,77479	1,77715	1,77952	1,78192	1,78434	84	3,65186	3,68525	3,71984	3,75572	3,79298
40	1,78677	1,78922	1,79169	1,79418	1,79669	85	3,83174	3,87211	3,91423	3,95826	4,00437
41	1,79922	1,80177	1,80434	1,80693	1,80953	86	4,05276	4,10367	4,15736	4,21416	4,27444
42	1,81216	1,81481	1,81748	1,82016	1,82287	87	4,33865	4,40733	4,48115	4,56091	4,64765
43	1,82560	1,82835	1,83112	1,83392	1,83673	88	4,74272	4,84784	4,96542	5,09876	5,25274
44	1,83957	1,84242	1,84530	1,84820	1,85113	89	5,43491	5,65702	5,94550	6,35080	7,04398
45	1,85407	1,85704	1,86003	1,86305	1,86609	90	∞				

*) Bei der Berechnung dieser Tafeln ist das Werk von Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, benutzt worden.

Tafel für das elliptische Integral $E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, wo $k = \sin \alpha$.

Grad α	0'	12'	24'	36'	48'	Grad α	0'	12'	24'	36'	48'
0	1,57080	1,57079	1,57078	1,57075	1,57072	45	1,35064	1,34888	1,34712	1,34535	1,34358
1	1,57068	1,57062	1,57056	1,57049	1,57041	46	1,34181	1,34003	1,33824	1,33646	1,33466
2	1,57032	1,57022	1,57011	1,56999	1,56986	47	1,33287	1,33107	1,32927	1,32746	1,32565
3	1,56972	1,56957	1,56941	1,56925	1,56907	48	1,32384	1,32203	1,32021	1,31838	1,31656
4	1,56888	1,56869	1,56848	1,56827	1,56804	49	1,31473	1,31290	1,31106	1,30922	1,30739
5	1,56781	1,56757	1,56731	1,56705	1,56678	50	1,30554	1,30369	1,30184	1,29999	1,29814
6	1,56650	1,56621	1,56591	1,56560	1,56528	51	1,29628	1,29442	1,29256	1,29069	1,28882
7	1,56495	1,56461	1,56426	1,56390	1,56354	52	1,28695	1,28508	1,28321	1,28133	1,27945
8	1,56316	1,56278	1,56238	1,56198	1,56156	53	1,27757	1,27569	1,27381	1,27192	1,27004
9	1,56114	1,56071	1,56027	1,55982	1,55936	54	1,26815	1,26626	1,26436	1,26247	1,26058
10	1,55889	1,55841	1,55792	1,55742	1,55692	55	1,25868	1,25678	1,25488	1,25298	1,25108
11	1,55640	1,55587	1,55534	1,55480	1,55424	56	1,24918	1,24728	1,24538	1,24347	1,24157
12	1,55368	1,55311	1,55253	1,55194	1,55134	57	1,23966	1,23776	1,23585	1,23394	1,23203
13	1,55073	1,55011	1,54949	1,54885	1,54821	58	1,23013	1,22822	1,22631	1,22440	1,22250
14	1,54755	1,54689	1,54622	1,54554	1,54485	59	1,22059	1,21868	1,21677	1,21487	1,21296
15	1,54415	1,54344	1,54273	1,54200	1,54127	60	1,21106	1,20915	1,20725	1,20534	1,20344
16	1,54052	1,53977	1,53901	1,53824	1,53746	61	1,20154	1,19964	1,19774	1,19584	1,19394
17	1,53667	1,53587	1,53507	1,53425	1,53343	62	1,19205	1,19015	1,18826	1,18637	1,18448
18	1,53260	1,53176	1,53091	1,53005	1,52918	63	1,18259	1,18070	1,17882	1,17694	1,17506
19	1,52831	1,52742	1,52653	1,52563	1,52472	64	1,17318	1,17130	1,16943	1,16756	1,16569
20	1,52380	1,52287	1,52194	1,52099	1,52004	65	1,16383	1,16197	1,16011	1,15825	1,15640
21	1,51908	1,51811	1,51713	1,51614	1,51515	66	1,15455	1,15270	1,15086	1,14902	1,14718
22	1,51415	1,51314	1,51212	1,51109	1,51005	67	1,14535	1,14352	1,14169	1,13987	1,13806
23	1,50901	1,50795	1,50689	1,50582	1,50475	68	1,13624	1,13444	1,13263	1,13083	1,12904
24	1,50366	1,50257	1,50147	1,50036	1,49924	69	1,12725	1,12546	1,12366	1,12187	1,12014
25	1,49811	1,49698	1,49584	1,49469	1,49353	70	1,11838	1,11662	1,11487	1,11312	1,11138
26	1,49237	1,49120	1,49002	1,48883	1,48763	71	1,10964	1,10791	1,10619	1,10448	1,10277
27	1,48643	1,48522	1,48400	1,48277	1,48153	72	1,10106	1,09937	1,09768	1,09599	1,09432
28	1,48029	1,47904	1,47779	1,47652	1,47525	73	1,09265	1,09099	1,08934	1,08769	1,08605
29	1,47397	1,47268	1,47139	1,47009	1,46878	74	1,08443	1,08280	1,08119	1,07959	1,07799
30	1,46746	1,46614	1,46481	1,46347	1,46213	75	1,07641	1,07483	1,07326	1,07170	1,07015
31	1,46077	1,45941	1,45805	1,45668	1,45529	76	1,06861	1,06708	1,06556	1,06405	1,06255
32	1,45391	1,45251	1,45111	1,44971	1,44829	77	1,06106	1,05958	1,05811	1,05666	1,05521
33	1,44687	1,44544	1,44401	1,44257	1,44112	78	1,05378	1,05233	1,05094	1,04955	1,04816
34	1,43966	1,43820	1,43673	1,43526	1,43378	79	1,04679	1,04543	1,04408	1,04274	1,04142
35	1,43229	1,43080	1,42930	1,42779	1,42628	80	1,04011	1,03882	1,03754	1,03628	1,03503
36	1,42476	1,42324	1,42170	1,42017	1,41862	81	1,03379	1,03257	1,03136	1,03017	1,02900
37	1,41707	1,41552	1,41396	1,41239	1,41082	82	1,02784	1,02670	1,02558	1,02447	1,02338
38	1,40924	1,40766	1,40606	1,40447	1,40287	83	1,02231	1,02126	1,02023	1,01921	1,01821
39	1,40126	1,39965	1,39803	1,39640	1,39478	84	1,01724	1,01628	1,01534	1,01443	1,01354
40	1,39314	1,39150	1,38985	1,38820	1,38655	85	1,01266	1,01181	1,01099	1,01018	1,00940
41	1,38489	1,38322	1,38155	1,37987	1,37819	86	1,00865	1,00792	1,00721	1,00653	1,00588
42	1,37650	1,37481	1,37312	1,37142	1,36971	87	1,00526	1,00466	1,00410	1,00356	1,00306
43	1,36800	1,36628	1,36456	1,36284	1,36111	88	1,00258	1,00215	1,00174	1,00137	1,00104
44	1,35938	1,35764	1,35590	1,35415	1,35240	89	1,00075	1,00050	1,00030	1,00014	1,00004
45	1,35064	1,34888	1,34712	1,34535	1,34358	90	1,00000				

Tafel für das elliptische Integral $F(k, \varphi)$, wo $k = \sin \alpha$.

Grad α	$F(k, 5^0)$	$F(k, 10^0)$	$F(k, 15^0)$	$F(k, 20^0)$	$F(k, 25^0)$	$F(k, 30^0)$	$F(k, 35^0)$	$F(k, 40^0)$	$F(k, 45^0)$
0	0,08727	0,17453	0,26180	0,34907	0,43633	0,52360	0,61087	0,69813	0,78540
5	0,08727	0,17454	0,26182	0,34912	0,43643	0,52377	0,61113	0,69852	0,78594
10	0,08727	0,17456	0,26189	0,34927	0,43674	0,52428	0,61193	0,69969	0,78756
15	0,08727	0,17459	0,26200	0,34953	0,43723	0,52513	0,61325	0,70162	0,79025
20	0,08728	0,17464	0,26215	0,34988	0,43791	0,52628	0,61506	0,70429	0,79398
25	0,08729	0,17469	0,26233	0,35031	0,43875	0,52773	0,61734	0,70765	0,79871
30	0,08729	0,17475	0,26254	0,35082	0,43973	0,52943	0,62003	0,71165	0,80437
35	0,08730	0,17482	0,26278	0,35138	0,44084	0,53134	0,62308	0,71622	0,81088
40	0,08731	0,17490	0,26303	0,35199	0,44203	0,53343	0,62643	0,72126	0,81815
45	0,08732	0,17498	0,26330	0,35262	0,44328	0,53562	0,62998	0,72667	0,82602
50	0,08733	0,17505	0,26356	0,35326	0,44455	0,53787	0,63364	0,73231	0,83431
55	0,08734	0,17513	0,26382	0,35388	0,44580	0,54009	0,63730	0,73801	0,84281
60	0,08735	0,17520	0,26406	0,35447	0,44699	0,54223	0,64085	0,74358	0,85122
65	0,08736	0,17526	0,26428	0,35501	0,44808	0,54420	0,64415	0,74882	0,85925
70	0,08736	0,17532	0,26448	0,35548	0,44904	0,54593	0,64707	0,75352	0,86653
75	0,08737	0,17537	0,26463	0,35586	0,44982	0,54736	0,64950	0,75745	0,87270
80	0,08737	0,17540	0,26475	0,35615	0,45040	0,54843	0,65132	0,76043	0,87741
85	0,08738	0,17542	0,26482	0,35632	0,45075	0,54908	0,65245	0,76228	0,88037
90	0,08738	0,17543	0,26484	0,35638	0,45088	0,54931	0,65284	0,76291	0,88137

Grad α	$F(k, 50^0)$	$F(k, 55^0)$	$F(k, 60^0)$	$F(k, 65^0)$	$F(k, 70^0)$	$F(k, 75^0)$	$F(k, 80^0)$	$F(k, 85^0)$	$F(k, 90^0)$
0	0,87266	0,95993	1,04720	1,13446	1,22173	1,30900	1,39626	1,48353	1,57080
5	0,87339	0,96086	1,04837	1,13590	1,22345	1,31102	1,39860	1,48619	1,57379
10	0,87556	0,96366	1,05188	1,14020	1,22861	1,31710	1,40565	1,49423	1,58284
15	0,87915	0,96832	1,05774	1,14740	1,23727	1,32733	1,41752	1,50781	1,59814
20	0,88416	0,97483	1,06597	1,15755	1,24953	1,34184	1,43442	1,52717	1,62003
25	0,89054	0,98317	1,07657	1,17070	1,26548	1,36083	1,45663	1,55273	1,64900
30	0,89825	0,99331	1,08955	1,18691	1,28530	1,38457	1,48455	1,58503	1,68575
35	0,90719	1,00519	1,10490	1,20626	1,30915	1,41339	1,51870	1,62478	1,73125
40	0,91725	1,01871	1,12256	1,22877	1,33723	1,44767	1,55973	1,67295	1,78677
45	0,92829	1,03371	1,14243	1,25447	1,36972	1,48788	1,60848	1,73082	1,85407
50	0,94008	1,04998	1,16432	1,28326	1,40677	1,53455	1,66597	1,80006	1,93558
55	0,95232	1,06716	1,18788	1,31491	1,44840	1,58817	1,73347	1,88296	2,03472
60	0,96465	1,08479	1,21254	1,34893	1,49441	1,64918	1,81253	1,98264	2,15652
65	0,97660	1,10223	1,23764	1,38443	1,54410	1,71763	1,90484	2,10348	2,30879
70	0,98762	1,11865	1,26186	1,41994	1,59591	1,79269	2,01193	2,25178	2,50455
75	0,99711	1,13307	1,28371	1,45316	1,64684	1,87145	2,13390	2,43658	2,76806
80	1,00444	1,14442	1,30135	1,48098	1,69181	1,94682	2,26527	2,66935	3,15339
85	1,00909	1,15171	1,31292	1,49977	1,72372	2,00499	2,38365	2,94869	3,83174
90	1,01068	1,15423	1,31696	1,50645	1,73542	2,02759	2,43625	3,13130	∞

Tafel für das elliptische Integral $E(k, \varphi)$, wo $k = \sin \alpha$.

Grad α	$E(k, 50^\circ)$	$E(k, 100^\circ)$	$E(k, 150^\circ)$	$E(k, 200^\circ)$	$E(k, 250^\circ)$	$E(k, 300^\circ)$	$E(k, 350^\circ)$	$E(k, 400^\circ)$	$E(k, 450^\circ)$
0	0,08727	0,17453	0,26180	0,34907	0,43633	0,52360	0,61087	0,69813	0,78540
5	0,08727	0,17453	0,26178	0,34901	0,43623	0,52343	0,61060	0,69774	0,78486
10	0,08726	0,17451	0,26171	0,34886	0,43593	0,52292	0,60980	0,69658	0,78324
15	0,08726	0,17447	0,26160	0,34860	0,43544	0,52208	0,60850	0,69467	0,78050
20	0,08725	0,17443	0,26145	0,34825	0,43477	0,52094	0,60672	0,69207	0,77607
25	0,08725	0,17438	0,26127	0,34783	0,43394	0,51953	0,60451	0,68884	0,77247
30	0,08724	0,17431	0,26106	0,34733	0,43298	0,51788	0,60194	0,68506	0,76720
35	0,08723	0,17424	0,26083	0,34678	0,43191	0,51605	0,59907	0,68084	0,76128
40	0,08722	0,17417	0,26058	0,34619	0,43076	0,51409	0,59598	0,67628	0,75489
45	0,08721	0,17409	0,26032	0,34558	0,42958	0,51205	0,59276	0,67153	0,74819
50	0,08720	0,17401	0,26006	0,34496	0,42838	0,51000	0,58952	0,66671	0,74137
55	0,08719	0,17394	0,25981	0,34437	0,42722	0,50799	0,58634	0,66197	0,73465
60	0,08718	0,17387	0,25957	0,34381	0,42612	0,50609	0,58332	0,65746	0,72822
65	0,08718	0,17381	0,25936	0,34330	0,42513	0,50437	0,58057	0,65334	0,72232
70	0,08717	0,17375	0,25917	0,34286	0,42426	0,50287	0,57818	0,64974	0,71715
75	0,08716	0,17371	0,25902	0,34250	0,42356	0,50165	0,57622	0,64679	0,71289
80	0,08716	0,17367	0,25891	0,34224	0,42304	0,50074	0,57477	0,64459	0,70972
85	0,08716	0,17365	0,25884	0,34207	0,42273	0,50019	0,57388	0,64324	0,70777
90	0,08716	0,17365	0,25882	0,34202	0,42262	0,50000	0,57358	0,64279	0,70711

Grad α	$E(k, 500^\circ)$	$E(k, 550^\circ)$	$E(k, 600^\circ)$	$E(k, 650^\circ)$	$E(k, 700^\circ)$	$E(k, 750^\circ)$	$E(k, 800^\circ)$	$E(k, 850^\circ)$	$E(k, 900^\circ)$
0	0,87266	0,95993	1,04720	1,13446	1,22173	1,30900	1,39626	1,48353	1,57080
5	0,87194	0,95900	1,04603	1,13304	1,22002	1,30698	1,39393	1,48087	1,56781
10	0,86979	0,95622	1,04255	1,12878	1,21491	1,30097	1,38698	1,47294	1,55889
15	0,86626	0,95166	1,03683	1,12176	1,20650	1,29107	1,37550	1,45985	1,54415
20	0,86142	0,94541	1,02897	1,11213	1,19493	1,27742	1,35968	1,44178	1,52380
25	0,85539	0,93761	1,01915	1,10005	1,18040	1,26026	1,33976	1,41900	1,49811
30	0,84832	0,92843	1,00756	1,08577	1,16318	1,23989	1,31606	1,39186	1,46746
35	0,84036	0,91807	0,99445	1,06958	1,14360	1,21666	1,28897	1,36076	1,43229
40	0,83173	0,90680	0,98013	1,05183	1,12205	1,19101	1,25897	1,32623	1,39314
45	0,82265	0,89490	0,96495	1,03293	1,09991	1,16346	1,22661	1,28886	1,35064
50	0,81338	0,88269	0,94930	1,01333	1,07500	1,13460	1,19255	1,24934	1,30554
55	0,80419	0,87052	0,93362	0,99358	1,05064	1,10513	1,15755	1,20850	1,25868
60	0,79538	0,85879	0,91839	0,97427	1,02664	1,07586	1,12249	1,16726	1,21106
65	0,78724	0,84788	0,90415	0,95606	1,00379	1,04769	1,08839	1,12673	1,16383
70	0,78007	0,83822	0,89144	0,93965	0,98298	1,02172	1,05648	1,08825	1,11838
75	0,77414	0,83020	0,88080	0,92580	0,96519	0,99916	1,02823	1,05343	1,07641
80	0,76971	0,82417	0,87276	0,91523	0,95144	0,98141	1,00543	1,02436	1,04011
85	0,76697	0,82042	0,86773	0,90858	0,94270	0,96992	0,99023	1,00394	1,01266
90	0,76604	0,81915	0,86603	0,90631	0,93969	0,96593	0,98481	0,99619	1,00000

Tabelle

der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung.*)

1.) $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x).$ [§ 1, Gl. (3.) und (4.)]

2.) $d\int F'(x)dx = F'(x)dx.$ [§ 1, Gl. (5.)]

3.) Ist a der Werth von x , für welchen das Integral von $F'(x)dx$ verschwindet, so ist

$$\int_a F'(x)dx = F(x) - F(a). \quad [\text{§ 2, Gl. (3.)}]$$

4.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche begrenzt wird

1.) von der Curve $y = f(x)$,

2.) von der X-Axe,

3.) von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$,

ist gleich

$$F = \int_a^b y dx = \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

wobei $F'(x) = f(x)$ sein soll.

[§ 2, Gl. (5.) und (8a.)]

5.) $\int_a^b F'(x)dx = -\int_b^a F'(x)dx.$ [§ 2, Gl. (29.)]

*) Die Integrations-Constante ist überall der Kürze wegen fortgelassen.

- 6.) $\int_a^h F'(x) dx = \int_a^c F'(x) dx + \int_c^h F'(x) dx.$ [§ 2, Gl. (30.)]
- 7.) $\int A F'(x) dx = A \int F'(x) dx.$ [§ 3, Gl. (5.)]
- 8.) $\int [F'(x) \pm G'(x)] dx = \int F'(x) dx \pm \int G'(x) dx.$
[§ 3, Gl. (11.) und (13.)]
- 9.) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$ [§ 4, Gl. (2.)]
- 10.) $\int dx = x.$ [§ 4, Gl. (2a.)]
- 11.) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \int e^x dx = e^x.$ [§ 4, Gl. (3.) und (3a.)]
- 12.) $\int \frac{dx}{x} = \ln x.$ [§ 4, Gl. (4.)]
- 13.) $\int \cos x dx = \sin x.$ [§ 4, Gl. (12.)]
- 14.) $\int \sin x dx = -\cos x.$ [§ 4, Gl. (13.)]
- 15.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$ [§ 4, Gl. (14.)]
- 16.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$ [§ 4, Gl. (15.)]
- 17.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$ [§ 4, Gl. (16.) u. (28.)]
- 18.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x.$ [§ 4, Gl. (17.) und (32.)]
- 19.) $\int \operatorname{Cof} x dx = \operatorname{Sin} x.$ [§ 4, Gl. (18.)]
- 20.) $\int \operatorname{Sin} x dx = \operatorname{Cof} x.$ [§ 4, Gl. (19.)]
- 21.) $\int \frac{dx}{\operatorname{Cof}^2 x} = \operatorname{Tg} x.$ [§ 4, Gl. (20.)]
- 22.) $\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x.$ [§ 4, Gl. (21.)]
- 23.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$ [§ 4, Gl. (22.)]

$$24.) \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Ar Co}f x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}). \quad [\S 4, \text{Gl. (23.)}]$$

$$25.) \int \frac{dx}{1 - x^2} = \text{Ar Tg} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \text{ wenn } |x| < +1. \\ [\S 4, \text{Gl. (24.) und (36.)}]$$

$$25 \text{ a.}) \int \frac{dx}{1 - x^2} = \text{Ar Ctg} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right), \text{ wenn } |x| > +1. \\ [\S 4, \text{Gl. (25.) und (37.)}]$$

26.) Setzt man

$$x = \psi(t), \text{ also } dx = \psi'(t)dt,$$

so wird

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt. \quad [\S 7, \text{Gl. (1.) und (5.)}]$$

$$27.) \int \frac{dx}{x \pm a} = \ln(x \pm a). \quad [\S 8, \text{Gl. (2.), (3.) und } \S 37, \text{Gl. (2.)}]$$

$$28.) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \left(\frac{x}{a} \right). \quad [\S 8, \text{Gl. (22.)}]$$

$$29.) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \text{Ar Tg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a - x}{a + x} \right), \text{ wenn } |x| < a. \\ [\S 8, \text{Gl. (23.)}]$$

$$29 \text{ a.}) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \text{Ar Ctg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right), \\ \text{wenn } |x| > a > 0. \\ [\S 8, \text{Gl. (24.), } \S 13, \text{Gl. (1.) und (7.), } \S 37, \text{Gl. (4.)}]$$

$$30.) \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 \pm a^2). \quad [\S 8, \text{Gl. (26.) und (27.)}]$$

$$31.) \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}. \quad [\S 9, \text{Gl. (2.)}]$$

$$32.) \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = +\sqrt{a^2 + x^2}. \quad [\S 9, \text{Gl. (4.)}]$$

$$33.) \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = +\sqrt{x^2 - a^2}. \quad [\S 9, \text{Gl. (5.)}]$$

$$34.) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right). \quad [\S 9, \text{Gl. (7.)}]$$

$$35.) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Ar Sin} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right)^* \quad [\S 9, \text{Gl. (8.)}]$$

$$36.) \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Ar Cos} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)^{**} \quad [\S 9, \text{Gl. (9.)}]$$

$$37.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \text{Ar Cos} \left(\frac{a}{x} \right) = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right). \quad [\S 9, \text{Gl. (12.)}]$$

$$38.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}. \quad [\S 9, \text{Gl. (14.) und } \S 18, \text{Gl. (28.)}]$$

$$39.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a} \text{Ar Sin} \left(\frac{a}{x} \right) = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right). \quad [\S 9, \text{Gl. (17.)}]$$

$$40.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x}. \quad [\S 9, \text{Gl. (19.) und } \S 18, \text{Gl. (55.)}]$$

$$41.) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \left(\frac{a}{x} \right). \quad [\S 9, \text{Gl. (21.)}]$$

$$42.) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}. \quad [\S 9, \text{Gl. (23.) und } \S 18, \text{Gl. (58.)}]$$

$$43.) \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln[f(x)]. \quad [\S 10, \text{Gl. (8.)}]$$

$$44.) \int \text{tg } x dx = -\ln(\cos x). \quad [\S 10, \text{Gl. (10.)}]$$

$$45.) \int \text{ctg } x dx = +\ln(\sin x). \quad [\S 10, \text{Gl. (11.)}]$$

*) Man kann auch unter Weglassung der Integrations-Constanten $-\ln a$ schreiben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

**) Man kann auch unter Weglassung der Integrations-Constanten $-\ln a$ schreiben:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$46.) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln(\operatorname{tg} x) = -\ln(\operatorname{ctg} x). \quad [\S 10, \text{Gl. (13.) und } \S 14, \text{Gl. (2.)}]$$

$$47.) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right] = -\ln \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} \right) \right]. \quad [\S 10, \text{Gl. (15.)}]$$

$$48.) \int \frac{dx}{\cos x} = -\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] = +\ln \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] \\ = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] = -\ln \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right]. \quad [\S 10, \text{Gl. (17.)}]$$

$$49.) \int \mathfrak{Tg} x dx = \ln(\mathfrak{Cof} x). \quad [\S 10, \text{Gl. (19.)}]$$

$$50.) \int \mathfrak{Ctg} x dx = \ln(\mathfrak{Sin} x). \quad [\S 10, \text{Gl. (20.)}]$$

$$51.) \int \frac{dx}{\mathfrak{Sin} x \mathfrak{Cof} x} = \ln(\mathfrak{Tg} x) = -\ln(\mathfrak{Ctg} x). \quad [\S 10, \text{Gl. (21.)}]$$

$$52.) \int \frac{dx}{\mathfrak{Sin} x} = \ln \left[\mathfrak{Tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right] = -\ln \left[\mathfrak{Ctg} \left(\frac{x}{2} \right) \right]. \quad [\S 10, \text{Gl. (24.)}]$$

$$53.) \int F'(\sin x) \cos x dx = \int F'(t) dt = F(t), \quad \text{wo } t = \sin x. \\ [\S 11, \text{Gl. (3.)}]$$

$$54.) \int F'(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int F'(t) dt = -F(t), \quad \text{wo } t = \cos x. \\ [\S 11, \text{Gl. (6.)}]$$

$$55.) \int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cdot d(\sin x). \quad [\S 11, \text{Gl. (11.)}]$$

$$56.) \int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n \cdot d(\cos x). \quad [\S 11, \text{Gl. (13.)}]$$

$$57.) \int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n \cdot d(\sin x). \\ [\S 11, \text{Gl. (15.)}]$$

$$58.) \int \cos^m x \sin^{2n+1} x dx = -\int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^n \cdot d(\cos x). \\ [\S 11, \text{Gl. (17.)}]$$

$$59.) \int F'(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int F'(\operatorname{tg} x) \cdot d(\operatorname{tg} x) = F(\operatorname{tg} x). \\ [\S 11, \text{Gl. (21.)}]$$

$$60.) \int F'(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int F'(\operatorname{ctg} x) \cdot d(\operatorname{ctg} x) = -F(\operatorname{ctg} x). \\ [\S 11, \text{Gl. (24.)}]$$

$$61.) \int f(\operatorname{tg} x) \cdot dx = \int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (31.)}]$$

$$61a.) \int \operatorname{tg}^n x dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (32.)}]$$

$$62.) \int f(\operatorname{ctg} x) \cdot dx = - \int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (40.)}]$$

$$62a.) \int \operatorname{ctg}^n x \cdot dx = - \int \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (41.)}]$$

$$63.) \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (44.)}]$$

$$64.) \int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{m-1} d(\operatorname{ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (45.)}]$$

$$65.) \int F'(\operatorname{Sin} x) \operatorname{Cos} x dx = \int F'(\operatorname{Sin} x) \cdot d(\operatorname{Sin} x) = F(\operatorname{Sin} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (46.)}]$$

$$66.) \int F'(\operatorname{Cos} x) \operatorname{Sin} x dx = F'(\operatorname{Cos} x) \cdot d(\operatorname{Cos} x) = F(\operatorname{Cos} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (47.)}]$$

$$67.) \int \operatorname{Cos}^{2n+1} x dx = \int (1 + \operatorname{Sin}^2 x)^n \cdot d(\operatorname{Sin} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (48.)}]$$

$$68.) \int \operatorname{Sin}^{2n+1} x dx = \int (\operatorname{Cos}^2 x - 1)^n \cdot d(\operatorname{Cos} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (49.)}]$$

$$69.) \int F'(\operatorname{Tg} x) \cdot \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \int F'(\operatorname{Tg} x) \cdot d(\operatorname{Tg} x) = F(\operatorname{Tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (50.)}]$$

$$70.) \int F'(\operatorname{Ctg} x) \cdot \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = - \int F'(\operatorname{Ctg} x) \cdot d(\operatorname{Ctg} x) = - F(\operatorname{Ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (51.)}]$$

$$71.) \int f(\operatorname{Tg} x) dx = \int \frac{f(\operatorname{Tg} x)}{1 - \operatorname{Tg}^2 x} \cdot d(\operatorname{Tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (52.)}]$$

$$72.) \int f(\operatorname{Ctg} x) dx = \int \frac{f(\operatorname{Ctg} x)}{1 - \operatorname{Ctg}^2 x} \cdot d(\operatorname{Ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (53.)}]$$

$$73.) \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^{2m} x} = \int (1 - \operatorname{Tg}^2 x)^{m-1} \cdot d(\operatorname{Tg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (54.)}]$$

$$74.) \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^{2m} x} = - \int (\operatorname{Ctg}^2 x - 1)^{m-1} \cdot d(\operatorname{Ctg} x). \quad [\S 11, \text{Gl. (55.)}]$$

$$75.) F'[f(x)] \cdot f'(x) dx = F'(t) dt = F(t) = F[f(x)]. \quad [\S 11, \text{Gl. (56.)}]$$

$$76.) \int F'(a^x) \cdot a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int F'(a^x) \cdot d(a^x) = \frac{1}{\ln a} F(a^x). \quad [\S 11, \text{Gl. (57.)}]$$

$$76 \text{ a.}) \int F'(e^x) \cdot e^x dx = \int F'(e^x) \cdot d(e^x) = F(e^x). \quad [\S 11, \text{Gl. (58.)}]$$

$$77.) \int F'(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} = \int F'(\ln x) \cdot d(\ln x) = F(\ln x). \quad [\S 11, \text{Gl. (59.)}]$$

$$78.) \int F'(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int F'(\arcsin x) \cdot d(\arcsin x) \\ = F(\arcsin x). \quad [\S 11, \text{Gl. (60.)}]$$

$$79.) \int F'(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int F'(\arccos x) \cdot d(\arccos x) \\ = - F(\arccos x). \quad [\S 11, \text{Gl. (61.)}]$$

$$80.) \int F'(\arctg x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int F'(\arctg x) \cdot d(\arctg x) \\ = F(\arctg x). \quad [\S 11, \text{Gl. (62.)}]$$

$$81.) \int F'(\text{arctg } x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = - \int F'(\text{arctg } x) \cdot d(\text{arctg } x) \\ = - F(\text{arctg } x). \quad [\S 11, \text{Gl. (63.)}]$$

$$82.) \int f(\sin x, \cos x, \text{tg } x, \text{ctg } x) dx = \\ \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2},$$

wobei

$$t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right). \quad [\S 11, \text{Gl. (68.) bis (73.)}]$$

$$82 \text{ a.}) \int f(\text{Sin } x, \text{Cos } x, \text{Tg } x, \text{Ctg } x) dx = \\ \int f\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1+t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2dt}{1-t^2},$$

wobei

$$t = \text{Tg}\left(\frac{x}{2}\right). \quad [\S 11, \text{Gl. (76.) bis (80.)}]$$

$$83.) \int f(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx = \int f(a \sin t, a \cos t) \cdot a \cos t dt,$$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}, \quad \text{tg } t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \text{ctg } t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}. \\ [\S 12, \text{Gl. (3.) und (4.)}]$$

$$84.) \int f(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx = \int f\left(a \text{tg } t, \frac{a}{\cos t}\right) \cdot \frac{adt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}.$$

[§ 12, Gl. (7.) und (8.)]

$$85.) \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \int f\left(\frac{a}{\cos t}, a \operatorname{tg} t\right) \cdot \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t},$$

wobei

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, \quad \cos t = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

[§ 12, Gl. (16.) und (17.)]

$$86.) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln\left(\frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}}\right).$$

[§ 13, Gl. (18.) und § 37, Gl. (9.)]

$$87.) \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln\left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right).$$

[§ 13, Gl. (18a.) und § 37, Gl. (5.)]

$$88.) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}\right).$$

[§ 13, Gl. (25.) und § 38, Gl. (3.)]

$$89.) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x + b)^2} = -\frac{1}{x + b}.$$

[§ 13, Gl. (30.) und § 37, Gl. (3a.)]

$$90.) \int \frac{(Px + Q)dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{P}{2} \ln(x^2 + 2bx + c) + (Q - Pb) \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}.$$

[§ 13, Gl. (31.)]

$$91.) \int \frac{(Px + Q)dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2} [(Px_1 + Q) \ln(x - x_1) - (Px_2 + Q) \ln(x - x_2)].$$

[§ 13, Gl. (32.) und § 37, Gl. (10.)]

$$92.) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg}(2x). \quad [\text{§ 14, Gl. (1.)}]$$

$$93.) 2^{2n} \int \cos^{2n} x dx = \frac{2}{2n} \sin(2nx) + \binom{2n}{1} \frac{2}{2n-2} \sin(2n-2)x$$

$$+ \binom{2n}{2} \frac{2}{2n-4} \sin(2n-4)x + \dots + \binom{2n}{n-1} \sin(2x) + \binom{2n}{n} x.$$

[§ 14, Gl. (5.)]

$$\begin{aligned}
 94.) \quad & 2^{2n+1} \int \cos^{2n+1} x dx = \frac{2}{2n+1} \sin(2n+1)x \\
 & + \binom{2n+1}{1} \frac{2}{2n-1} \sin(2n-1)x + \binom{2n+1}{2} \frac{2}{2n-3} \sin(2n-3)x \\
 & + \dots + \binom{2n+1}{n-1} \frac{2}{3} \sin(3x) + \binom{2n+1}{n} 2 \sin x. \quad [\S 14, \text{Gl. (8.)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 95.) \quad & (-1)^n 2^{2n} \int \sin^{2n} x dx = \frac{2}{2n} \sin(2nx) \\
 & - \binom{2n}{1} \frac{2}{2n-2} \sin(2n-2)x + \binom{2n}{2} \frac{2}{2n-4} \sin(2n-4)x \\
 & - + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \sin(2x) + (-1)^n \binom{2n}{n} x. \\
 & \quad \quad \quad [\S 14, \text{Gl. (12.)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 96.) \quad & (-1)^n 2^{2n+1} \int \sin^{2n+1} x dx = -\frac{2}{2n+1} \cos(2n+1)x \\
 & + \binom{2n+1}{1} \frac{2}{2n-1} \cos(2n-1)x \\
 & - \binom{2n+1}{2} \frac{2}{2n-3} \cos(2n-3)x \\
 & + \dots - (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{n-1} \frac{2}{3} \cos(3x) \\
 & - (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2 \cos x. \quad [\S 14, \text{Gl. (15.)}]
 \end{aligned}$$

$$97.) \quad \int u dv = uv - \int v du. \quad [\S 15, \text{Gl. (2.)}]$$

$$98.) \quad \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}. \quad [\S 17, \text{Gl. (4.)}]$$

$$99.) \quad \int \sin^2 x \cdot dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}. \quad [\S 17, \text{Gl. (8.)}]$$

$$\begin{aligned}
 100.) \quad & \int \cos^m x \cdot dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \cdot dx. \\
 & \quad \quad \quad [\S 17, \text{Gl. (16.)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 101.) \int \cos^{2n} x \cdot dx &= \sin x \left[\frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \cos^{2n-3} x \right. \\
 &+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n \cdot (2n-2)(2n-4)} \cos^{2n-5} x + \dots \\
 &+ \left. \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} \cos x \right] \\
 &+ \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} x. \quad [\S 17, \text{Gl. (24.)}]
 \end{aligned}$$

$$102.) \int \frac{dx}{\cos^n x} = + \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}. \quad [\S 17, \text{Gl. (26.)}]$$

$$\begin{aligned}
 103.) \int \sin^m x \cdot dx &= -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \cdot dx. \\
 &[\S 17, \text{Gl. (38.)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 104.) \int \sin^{2n} x \cdot dx &= -\cos x \left[\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} \sin^{2n-3} x \right. \\
 &+ \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-5} x + \dots \\
 &+ \left. \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} \sin x \right] \\
 &+ \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} x. \quad [\S 17, \text{Gl. (46.)}]
 \end{aligned}$$

$$105.) \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}. \quad [\S 17, \text{Gl. (48.)}]$$

$$106.) \int \text{tg}^m x dx = \frac{1}{m-1} \text{tg}^{m-1} x - \int \text{tg}^{m-2} x dx. \quad [\S 17, \text{Gl. (57.)}]$$

$$\begin{aligned}
 107.) \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} \\
 &+ \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx. \quad [\S 17, \text{Gl. (58.)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 108.) \int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x} &= -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n x dx}{\sin^{m-2} x}. \\
 &[\S 17, \text{Gl. (59.)}]
 \end{aligned}$$

$$109.) \int \text{ctg}^m x dx = -\frac{1}{m-1} \text{ctg}^{m-1} x - \int \text{ctg}^{m-2} x dx. \quad [\S 17, \text{Gl. (63.)}]$$

$$110.) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx. \quad [\S 17, \text{Gl. (64.)}]$$

$$111.) \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x}. \quad [\S 17, \text{Gl. (65.)}]$$

$$112.) \int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2}. \quad [\S 17, \text{Gl. (72.)}]$$

$$113.) \int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}. \quad [\S 17, \text{Gl. (73.)}]$$

$$114.) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (4.)}]$$

$$115.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \quad [\S 18, \text{Gl. (7.) und (8.)}]$$

$$116.) \int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = c_n \cdot a^{2n} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} \cdot G_n(x),$$

wobei

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)(2n)},$$

$$G_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)a^2 x^{2n-3}}{(2n-2)2n} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)a^{2n-2} x}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)2n}. \quad [\S 18, \text{Gl. (14.), (16.) und (19.)}]$$

$$117.) \int x^m dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (24.)}]$$

$$118.) \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \quad [\S 18, \text{Gl. (25.)}]$$

$$119.) \int x dx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}. \quad [\S 18, \text{Gl. (26.)}]$$

$$120.) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (27.)}]$$

$$121.) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (34.)}]$$

$$121 \text{ a.}) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x^{m-1}}{m} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{(m-1)a^2}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (42.)}]$$

$$122.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right). \quad [\S 18, \text{Gl. (37.) und (38.)}]$$

$$122 \text{ a.}) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right). \quad [\S 18, \text{Gl. (43.)}]$$

$$123.) \int x^m dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (47.)}]$$

$$123 \text{ a.}) \int x^m dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x^{m+1}}{m+2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (50.)}]$$

$$124.) \int dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right). \quad [\S 18, \text{Gl. (48.)}]$$

$$124 \text{ a.}) \int dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right). \quad [\S 18, \text{Gl. (51.)}]$$

$$125.) \int x dx \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{1}{3} (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2}. \quad [\S 18, \text{Gl. (49.)}]$$

$$125 \text{ a.}) \int x dx \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{3} (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}. \quad [\S 18, \text{Gl. (52.)}]$$

$$126.) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a^2 + x^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (54.)}]$$

$$126 \text{ a.}) \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} = +\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad [\S 18, \text{Gl. (57.)}]$$

127.) Bilden die Coordinaten-Axen den Winkel γ mit einander, so ist

$$F = \sin \gamma \int_a^b y dx$$

der Flächeninhalt der ebenen Figur A_1B_1BA , welche oben von der Curve AB mit der Gleichung $y = f(x)$, unten von dem Abschnitte A_1B_1 auf der X -Axe und links und rechts von den Ordinaten A_1A und B_1B mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. [§ 20, Gl. (2.)]

128.) Der Flächeninhalt einer ebenen, von zwei Curvenbögen

$$y' = f(x) \quad \text{und} \quad y'' = g(x)$$

und von den beiden Ordinaten mit den Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

begrenzten Figur ist für rechtwinklige Coordinaten

$$F = \int_a^b (y' - y'') dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad [\text{§ 21, Gl. (6.)}]$$

129.) Der Flächeninhalt eines Sectors AOB , welcher von zwei beliebigen Radii vectores OA und OB und von einer Curve mit der Gleichung $r = f(\varphi)$ begrenzt wird, ist

$$S = \frac{1}{2} \int_a^\beta r^2 d\varphi. \quad [\text{§ 22, Gl. (6.)}]$$

130.) Ist die begrenzende Curve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, so wird der Flächeninhalt des Sectors AOB

$$S = \frac{1}{2} \int_{(\alpha)}^{(\beta)} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{(\alpha)}^{(\beta)} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt. \quad [\text{§ 23, Gl. (6.)}]$$

131.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die X -Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx. \quad [\text{§ 24, Gl. (10.)}]$$

132.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die Y -Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy. \quad [\S 24, \text{Gl. (11.)}]$$

133.) Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher die Gerade $x = a$ zur Rotations-Axe hat, ist

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x - a)^2 dy. \quad [\S 24, \text{Gl. (12.)}]$$

134.) Die Länge eines Curvenbogens ist bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \end{aligned} \quad [\S 26, \text{Gl. (4a.), (6.) und (8.)}]$$

135.) Die Länge eines Curvenbogens ist bei Anwendung von Polarcordinaten

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}. \quad [\S 28, \text{Gl. (3.), (4.) und (7.)}]$$

136.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die X-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds. \quad [\S 30, \text{Gl. (4.)}]$$

137.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers, welcher die Y-Axe zur Rotations-Axe hat, ist

$$O = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x ds. \quad [\S 30, \text{Gl. (5.)}]$$

138.) Die Länge des Bogens einer Raumcurve ist

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \quad [\S 32, \text{Gl. (7.) und (8.)}]$$

$$139.) \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l},$$

wenn in

$$\frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b}$$

$$+ \frac{C_1}{(x-c)^\beta} + \frac{C_2}{(x-c)^{\beta-1}} + \dots + \frac{C_\beta}{x-c} =$$

$$\frac{P_1x + Q_1}{[(x-g)^2 + h^2]^\beta} + \frac{P_2x + Q_2}{[(x-g)^2 + h^2]^{\beta-1}} + \dots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x-g)^2 + h^2}.$$

[§ 36, Gl. (1.), (11.) und (36.)]

141.) $\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}},$ wenn $n > 1.$ [§ 37, Gl. (3.)]

142.) $\int \frac{dx}{(x-g)^2 + h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-g}{h} \right).$ (Vergl. Formel Nr. 88 d. T.)
[§ 38, Gl. (4.) und (7.)]

143.) $\int \frac{dx}{[(x-g)^2 + h^2]^n} = \frac{1}{h^{2n-1}} \int \frac{\bar{d}t}{(1+t^2)^n},$ wobei $x-g = ht.$
[§ 38, Gl. (8.)]

144.) $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$
[§ 38, Gl. (12.)]

145.) $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \cos^{2n-2} z dz,$

wobei

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin z \cos z = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} z = t, \quad z = \operatorname{arctg} t. \quad [\text{§ 38, Gl. (13.), (15.) und (16.)}]$$

146.) $\int \frac{(Px + Q) dx}{(x-g)^2 + h^2} = \frac{P}{2} \ln[(x-g)^2 + h^2]$
 $+ \frac{Pg + Q}{h} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-g}{h} \right).$ [§ 39, Gl. (3.)]

147.) $\int \frac{(Px + Q) dx}{[(x-g)^2 + h^2]^n} = -\frac{P}{(2n-2)[(x-g)^2 + h^2]^{n-1}}$
 $+ \frac{Pg + Q}{h^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n},$

wobei

$$x-g = ht \quad \text{und} \quad n > 1. \quad [\text{§ 39, Gl. (7.)}]$$

$$148.) \int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots) dx = \int f(t^z, t^{\frac{zm}{n}}, t^{\frac{zp}{q}}, \dots) z t^{z-1} dt,$$

wobei z das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n, q, \dots ist. [§ 42, Gl. (8.)]

$$149.) \int f \left[x, \left(\frac{a+bx}{A+Bx} \right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{A+Bx} \right)^{\frac{p}{q}}, \dots \right] dx = \int f \left(\frac{Ay-a}{b-By}, y^{\frac{m}{n}}, y^{\frac{p}{q}}, \dots \right) \cdot \frac{(Ab-Ba)dy}{(b-By)^2}. \quad [\text{§ 42, Gl. (11.)}]$$

$$150.) \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C}) dx = \int F \left(\frac{y\sqrt{A}-B}{A}, \sqrt{y^2 \mp a^2} \right) \frac{dy}{\sqrt{A}},$$

wobei

$$y = \frac{Ax+B}{\sqrt{A}}, \quad \sqrt{y^2 \mp a^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}, \quad \pm a^2 = \frac{B^2-AC}{A}.$$

[§ 44, Gl. (1.), (3.), (4.), (5.) und (6.)]

$$151.) \int F(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C}) dx = - \int F \left(\frac{y\sqrt{-A}-B}{A}, \sqrt{\pm a^2-y^2} \right) \frac{dy}{\sqrt{-A}},$$

wobei

$$y = \frac{Ax+B}{\sqrt{-A}}, \quad \sqrt{\pm a^2-y^2} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

$$\pm a^2 = \frac{AC-B^2}{A} = \frac{B^2-AC}{-A}.$$

[§ 44, Gl. (7.) bis (12.)]

$$152.) \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{Ax+B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2+2Bx+C} \right),$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = - \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left(\frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \left(- \frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} \right).$$

[§ 45, Gl. (1a.) und (4a.)]

$$153.) \int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{A}} \left[\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right. \\ \left. + \frac{AC - B^2}{A} \ln \left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right) \right],$$

oder

$$\int dx \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{-A}} \left[-\frac{Ax + B}{\sqrt{-A}} \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right. \\ \left. + \frac{AC - B^2}{A} \arcsin \left(-\frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} \right) \right].$$

[§ 45, Gl. (9a.) und (13.)]

$$154.) \int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \int f\left(\frac{t^2 \mp a^2}{2t}, \frac{t^2 \pm a^2}{2t}\right) \cdot \frac{(t^2 \pm a^2) dt}{2t^2},$$

wobei

$$t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}. \quad [\text{§ 46, Gl. (5.) und (1.)}]$$

$$155.) \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx$$

$$= \int F\left(\frac{t^2 - C}{2(t\sqrt{A} + B)}, \frac{t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A}}{2(t\sqrt{A} + B)}\right) \cdot \frac{(t^2\sqrt{A} + 2Bt + C\sqrt{A}) dt}{2(t\sqrt{A} + B)^2},$$

wobei

$$t = x\sqrt{A} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}. \quad [\text{§ 46, Gl. (10.) und (11.)}]$$

$$156.) \int f(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx = \int f\left(\frac{2at}{t^2 \mp 1}, \frac{a(t^2 \pm 1)}{t^2 \mp 1}\right) \cdot \frac{-2a(t^2 \pm 1) dt}{(t^2 \mp 1)^2},$$

wobei

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}. \quad [\text{§ 47, Gl. (5.) und (1.)}]$$

$$157.) \int F(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx =$$

$$\int F\left(\frac{2(t\sqrt{C} + B)}{t^2 - A}, \frac{t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C}}{t^2 - A}\right) \cdot \frac{-2(t^2\sqrt{C} + 2Bt + A\sqrt{C}) dt}{(t^2 - A)^2},$$

wobei

$$t = \frac{1}{x} (\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}). \quad [\S 47, \text{Gl. (11.) und (12.)}]$$

$$158.) \int F(x, \sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}) dx \\ = \int F\left(\frac{\beta t^2 - \delta}{\gamma - \alpha t^2}, \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)t}{\gamma - \alpha t^2}\right) \frac{2(\beta\gamma - \alpha\delta)t dt}{(\gamma - \alpha t^2)^2},$$

wobei

$$t = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}. \quad [\S 48, \text{Gl. (9.) und (10.)}]$$

$$159.) \int_a^\infty F'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b F'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a). \quad [\S 51, \text{Gl. (2.)}]$$

$$160.) \int_{-\infty}^b F'(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b F'(x) dx = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a). \quad [\S 51, \text{Gl. (3.)}]$$

161.) Ist $F'(b) = \pm \infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a \leq x < b$, so ist

$$\int_a^b F'(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_a^{b-\beta} F'(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} F(b - \beta) - F(a). \quad [\S 52, \text{Gl. (2.) und (3.)}]$$

162.) Ist $F'(a) = \pm \infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a < x \leq b$, so ist

$$\int_a^b F'(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{a+\alpha}^b F'(x) dx = F(b) - \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(a + \alpha). \quad [\S 52, \text{Gl. (4.) und (5.)}]$$

163.) Ist $F'(a) = \pm \infty$, $F'(b) = \pm \infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a < x < b$, so ist

$$\int_a^b F'(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} F'(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} F(b - \beta) - \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(a + \alpha). \quad [\S 52, \text{Gl. (6.) und (7.)}]$$

164.) Ist $F'(c) = \pm \infty$, $F'(x)$ aber stetig für $a \leq x < c$ und $c < x \leq b$, so ist

$$\int_a^b F'(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_a^{c-\gamma} F'(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b F'(x) dx \\ = F(b) - F(a) + \lim_{\gamma \rightarrow 0} F(c - \gamma) - \lim_{\delta \rightarrow 0} F(c + \delta). \quad [\S 53, \text{Gl. (1.)}]$$

165.) Liegt die Function $f(x)$ für alle Werthe von x innerhalb des Intervalles von a bis b der Grösse nach beständig zwischen den Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, ist also

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

so ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b \psi(x) dx.$$

[§ 54, Gl. (3.) und (4.)]

$$166.) \int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = g[a + \Theta(b-a)] \int_a^b h(x) dx,$$

wenn $h(x)$ in dem Intervalle von a bis b das Vorzeichen nicht wechselt. [§ 55, Gl. (12.) und (12 a.)]

$$166 \text{ a.}) \int_0^x g(x) \cdot h(x) dx = g(\Theta x) \int_0^x h(x) dx. \quad [\text{§ } 55, \text{ Gl. (13.)}]$$

$$167.) \int_a^b g(x) dx = (b-a)g[a + \Theta(b-a)]. \quad [\text{§ } 55, \text{ Gl. (15.)}]$$

168.) Ist für alle Werthe von x zwischen a und b

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

eine gleichmässig convergente Reihe, deren Glieder u_0, u_1, u_2, \dots in dem betrachteten Intervalle stetige Functionen von x sind, so ist auch

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots$$

eine gleichmässig convergente Reihe, deren Summe gleich

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ist, wenn man $F'(x) = f(x)$ setzt. Dabei darf man noch die obere Grenze mit x bezeichnen. [§ 57, Gl. (4.) bis (6.)]

$$169.) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^2 k^{2n}\right) \text{arc sin } x \\ - \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n k^{2n} G_n(x),$$

wobei

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)},$$

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{(2n-1)x^{2n-3}}{(2n)(2n-2)} + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot x}{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \\ &= c_n \left(\frac{1}{c_{n-1}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{c_{n-2}} \cdot \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \dots + \frac{1}{c_1} \frac{x^3}{3} + \frac{x}{1} \right). \end{aligned}$$

[§ 58, Gl. (2.), (7.) und (8.)]

$$\begin{aligned} 170.) \quad K &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]. \end{aligned}$$

[§ 58, Gl. (9.) und (10.)]

$$\begin{aligned} 171.) \quad \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1} \right) \arcsin x \\ &+ \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n k^{2n}}{2n-1} G_n(x). \end{aligned}$$

[§ 58, Gl. (15.)]

$$\begin{aligned} 172.) \quad E &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{2n-1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 - c_1^2 k^2 - \frac{1}{3} c_2^2 k^4 - \frac{1}{5} c_3^2 k^6 - \dots \right). \end{aligned}$$

[§ 58, Gl. (15a.)]

$$\begin{aligned} 173.) \quad F(k, \varphi) &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2\varphi}} \\ &= a_0 \varphi - \frac{a_1}{1} \sin(2\varphi) + \frac{a_2}{2} \sin(4\varphi) - \frac{a_3}{3} \sin(6\varphi) + \dots, \end{aligned}$$

wobei

$$x = \sin \varphi, \quad k = \sin \alpha = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k},$$

$$a_0 = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \cdot \varepsilon^{4n}, \quad a_1 = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1} \cdot \varepsilon^{2+4n}, \dots,$$

$$a_v = (1 + \varepsilon^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+v} \cdot \varepsilon^{2v+4n},$$

oder, wenn man $\frac{2 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \varepsilon^4}{2\varepsilon^2}$ mit ζ bezeichnet,

$$(2n - 1)a_n = 4(n - 1)a_{n-1}\zeta - (2n - 3)a_{n-2}.$$

[§ 58, Gl. (22.), (24.), (36.), (37.), (38.), (40.), (44.) und (48.)]

$$174.) E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

$$= b_0 \varphi + \frac{k^2}{2} [B_1 \sin(2\varphi) - B_2 \sin(4\varphi) + B_3 \sin(6\varphi) - + \dots],$$

wobei

$$2b_0 = (2 - k^2)a_0 - k^2 a_1, \quad 4B_1 = a_0 - a_2, \quad 16B_2 = a_1 - a_3,$$

$$36B_3 = a_2 - a_4, \dots (2n)^2 B_n = a_{n-1} - a_{n+1}.$$

[§ 58, Gl. (25.), (61.), (65.) und (67.)]

$$175.) K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = \frac{a_0 \pi}{2}. \quad [\text{§ 58, Gl. (68.)}]$$

$$176.) E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} = \frac{b_0 \pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} [(2 - k^2)a_0 - k^2 a_1]. \quad [\text{§ 58, Gl. (69.)}]$$

$$177.) \int_a^b f(x) dx = -f(a)da + f(b)db. \quad [\text{§ 59, Gl. (3a.)}]$$

$$178.) \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx. \quad [\text{§ 59, Gl. (8.)}]$$

$$179.) \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = -f(a, t) \cdot \frac{da}{dt} + f(b, t) \cdot \frac{db}{dt}$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx. \quad [\text{§ 59, Gl. (10.)}]$$

$$180.) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

[§ 60, Gl. (6a.)]

$$181.) \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

[§ 60, Gl. (12.)]

$$182.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

[§ 61, Gl. (3.) und (5.)]

$$183.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

[§ 61, Gl. (19.) und (20.)]

$$184.) \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

[Formel von Wallis, § 61, Gl. (33.)]

185.) In jeder trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

welche in dem Intervalle von 0 bis 2π gleichmässig convergent ist, haben die Coefficienten a_n und b_n die Werthe

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

[§ 62, Gl. (22.)]

186.) Der Flächeninhalt einer ebenen Figur, welche oben (oder unten) begrenzt ist durch die Curve $y = f(x)$, unten (oder oben) durch die X-Axe, links und rechts durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$, ist näherungsweise

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-h) + f(b)],$$

wobei

$nh = b - a$, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a + h)$, \dots , $y_{n-1} = f(b - h)$, $y_n = f(b)$
ist. [§ 64, Gl. (4.) und (6.)]

187.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 186 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x) dx = 2h [f(a + h) + f(a + 3h) + \dots + f(b - h)] \\ = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}),$$

wobei aber

$2nh = b - a$, $y_1 = f(a + h)$, $y_3 = f(a + 3h)$, \dots , $y_{2n-1} = f(b - h)$
ist. [§ 64, Gl. (11.)]

188.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 186 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a + h) + 2f(a + 2h) + 4f(a + 3h) \\ + 2f(a + 4h) + \dots + 2f(b - 2h) + 4f(b - h) + f(b)] \\ = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

wobei

$2nh = b - a$, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a + h)$, $y_2 = f(a + 2h)$, \dots
 $y_3 = f(a + 3h)$, \dots , $y_{2n-1} = f(b - h)$, $y_{2n} = f(b)$
ist. (*Simpson'sche Regel*). [§ 65, Gl. (10.) und (11.)]

189.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 186 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$F = \int_a^b f(x) dx = \frac{2h}{45} [(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) \\ + (7y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 7y_8) \\ + \dots \\ + (7y_{4n-4} + 32y_{4n-3} + 12y_{4n-2} + 32y_{4n-1} + 7y_{4n})],$$

wobei

$4nh = b - a$, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a + h)$, $y_2 = f(a + 2h)$,
 $y_3 = f(a + 3h)$, \dots , $y_{4n-1} = f(b - h)$, $y_{4n} = f(b)$

ist.

[§ 65, Gl. (23.)]

190.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 186 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$\begin{aligned}
 F = \int_a^b f(x) dx &= h \left[f \left(a + \frac{3 - \sqrt{3}}{3} h \right) + f \left(a + \frac{3 + \sqrt{3}}{3} h \right) \right. \\
 &\quad + f \left(a + \frac{9 - \sqrt{3}}{3} h \right) + f \left(a + \frac{9 + \sqrt{3}}{3} h \right) \\
 &\quad + f \left(a + \frac{15 - \sqrt{3}}{3} h \right) + f \left(a + \frac{15 + \sqrt{3}}{3} h \right) \\
 &\quad + \dots \dots \dots \\
 &\quad \left. + f \left(b - \frac{3 + \sqrt{3}}{3} h \right) + f \left(b - \frac{3 - \sqrt{3}}{3} h \right) \right],
 \end{aligned}$$

wobei

$$2nh = b - a. \quad [\S 67; \text{Gl. (15.)}]$$

191.) Der Flächeninhalt der in Formel Nr. 186 beschriebenen Figur ist *näherungsweise*

$$\begin{aligned}
 F &= hc_1 [(y_{1,1} + y_{1,2}) + (y_{2,1} + y_{2,2}) + \dots + (y_{n,1} + y_{n,2})] \\
 &\quad + hc_2 [(y_{1,3} + y_{1,4}) + (y_{2,3} + y_{2,4}) + \dots + (y_{n,3} + y_{n,4})],
 \end{aligned}$$

wobei

$$y_{m,1} = f[a + (4m - 2 - \alpha)h],$$

$$y_{m,2} = f[a + (4m - 2 + \alpha)h],$$

$$y_{m,3} = f[a + (4m - 2 - \beta)h],$$

$$y_{m,4} = f[a + (4m - 2 + \beta)h],$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{7} (3 - 0,4\sqrt{30}), \quad \beta^2 = \frac{4}{7} (3 + 0,4\sqrt{30}),$$

$$c_1 = \frac{2(3\beta^2 - 4)}{3(\beta^2 - \alpha^2)} = 1 + \frac{1}{18} \sqrt{30},$$

$$c_2 = \frac{2(3\alpha^2 - 4)}{3(\alpha^2 - \beta^2)} = 1 - \frac{1}{18} \sqrt{30},$$

$$4nh = b - a. \quad [\S 67, \text{Gl. (30.) bis (35.)}]$$

192.) Das Volumen eines Körpers ist

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx,$$

wobei $F(x)$ der Flächeninhalt eines Schnittes, senkrecht zur X -Axe, im Abstände x von der YZ -Ebene ist.

[§ 68, Gl. (9.)]

193.) Ist der Körper oben begrenzt durch die Fläche

$$z' = g(x, y),$$

unten durch die Fläche

$$z'' = h(x, y),$$

vorn und rückwärts durch die Cylinder

$$y_1 = \varphi(x), \quad y_2 = \psi(x),$$

links und rechts durch die Ebenen

$$x = x_1, \quad x = x_2,$$

so ist das Volumen

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (z' - z'') dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

wobei

$$f(x, y) = z' - z'' = g(x, y) - h(x, y)$$

ist. [§ 70, Gl. (6.) und (10.)]

$$194.) \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

wenn die Integrationsgrenzen a und b , c und d constant sind.

[§ 71, Gl. (15.)]

$$195.) \quad \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy = \pm \int_a^\beta \int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv,$$

wobei

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

ist. [§ 72, Gl. (2.) und (14.)]

$$196.) \quad \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\varphi dr.$$

[§ 72, Gl. (19.)]

$$197.) \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

[§ 72, Gl. (38.)]

198.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{dy}{F_3} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

[§ 73, Gl. (13.)]

199.) Der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist

$$O = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \iint du dv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wobei

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

[§ 75, Gl. (4.), (8.) und (11.)]

200.) Führt man räumliche Polarcordinaten durch die Gleichungen

$$x = r \cos \lambda \cos \varphi, \quad y = r \cos \lambda \sin \varphi, \quad z = r \sin \lambda$$

ein, so wird

$$O = \iint r \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2\right] \cos^2 \lambda + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} d\lambda d\varphi.$$

[§ 76, Gl. (1.) und (5.)]

201.) $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$

ist ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

ist. Man erhält dann

$$u = v + \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + C, \quad \text{wobei} \quad v = \int M(x, y) dx.$$

[§ 77, Gl. (2a.), (4a.), (15.) und (16.)]

202.) $du = F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz$

ist ein vollständiges Differential, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}$$

ist. Man erhält dann

$$u = v + w + \int \left(H - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + C,$$

wobei

$$v = \int F dx, \quad w = \int \left(G - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

[§ 79, Gl. (2a.), (4a.), (8.), (17.), (22.) und (23.)]

203.) Die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

kann integriert werden durch die Reihe

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots$$

wobei $f(a) = b$ eine ganz beliebige Grösse ist. Die Coefficienten findet man für $x = a$ aus den Gleichungen

$$f'(x) = \varphi(x, y),$$

$$f''(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y),$$

$$f'''(x) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \varphi''(x, y),$$

.....

es wird also

$$f'(a) = \varphi(a, b), \quad f''(a) = \varphi'(a, b), \quad f'''(a) = \varphi''(a, b), \dots$$

[§ 82, Gl. (17.) bis (22.)]

204.) Die simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

können integriert werden durch die Reihen

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots,$$

$$z = g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!} (x - a) + \frac{g''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots,$$

wobei $f(a) = b$ und $g(a) = c$ ganz beliebige Grössen sind. Die Coefficienten findet man für $x = a$, $y = b$, $z = c$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \varphi(x, y, z), \\
 f''(x) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \varphi'(x, y, z), \\
 f'''(x) &= \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \varphi''(x, y, z), \\
 \dots\dots\dots \\
 g'(x) &= \psi(x, y, z), \\
 g''(x) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \psi'(x, y, z), \\
 g'''(x) &= \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \psi''(x, y, z), \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

es wird also

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \varphi(a, b, c), & f''(a) &= \varphi'(a, b, c), & f'''(a) &= \varphi''(a, b, c), \dots \\
 g'(a) &= \psi(a, b, c), & g''(a) &= \psi'(a, b, c), & g'''(a) &= \psi''(a, b, c), \dots
 \end{aligned}$$

[§ 82, Gl. (31.), (37.) bis (46.)]

205.) Die m simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x; y_1, y_2, \dots y_m), \\
 \frac{dy_2}{dx} &= \varphi_2(x; y_1, y_2, \dots y_m), \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{dy_m}{dx} &= \varphi_m(x; y_1, y_2, \dots y_m)
 \end{aligned}$$

können integrirt werden durch die Reihen

$$y_\alpha = f_\alpha(x) = f_\alpha(a) + \frac{f'_\alpha(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''_\alpha(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots,$$

wo $\alpha = 1, 2, \dots m$ zu setzen ist, und wo

$$f_1(a) = b_1, \quad f_2(a) = b_2, \quad f_m(a) = b_m$$

noch ganz beliebige Grössen sind. Dabei ist

$$f'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x; y_1, y_2, \dots, y_m),$$

$$f''_\alpha(x) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dx},$$

$$= \varphi'_\alpha(x; y_1, y_2, \dots, y_m),$$

$$f'''_\alpha(x) = \frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dx}$$

$$= \varphi''_\alpha(x; y_1, y_2, \dots, y_m),$$

also

$$f'_\alpha(a) = \varphi_\alpha(a; b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$f''_\alpha(a) = \varphi'_\alpha(a; b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$f'''_\alpha(a) = \varphi''_\alpha(a; b_1, b_2, \dots, b_m),$$

[§ 82, Gl. (53.) bis (59.)]

206.) Die Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)$$

kann integriert werden durch die Reihe

$$y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$

wobei

$$f(a) = b, \quad f'(a) = b_1, \dots, f^{(m-1)}(a) = b_{m-1}$$

ganz beliebige Grössen sind. Die höheren Ableitungen findet man aus den Gleichungen

$$f^{(m)}(a) = \varphi(a; b, b_1, \dots, b_{m-1}),$$

$$f^{(m+1)}(a) = \varphi'(a; b, b_1, \dots, b_{m-1}),$$

[§ 82, Gl. (63.) bis (68.)]

207.) Ist $M(x, y) = X_1 Y_1$, $N(x, y) = X_2 Y_2$, wo X_1 und X_2 Functionen der einzigen Veränderlichen x , Y_1 und Y_2 Functionen der einzigen Veränderlichen y sind, so kann die Differential-Gleichung erster Ordnung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

durch *Trennung der Variablen* auf die Form

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0$$

gebracht und ohne Weiteres integriert werden.

[§ 84, Gl. (2a.) bis (7.)]

208.) Sind $M(x, y)$ und $N(x, y)$ homogene Functionen m^{ten} Grades, so führt die Substitution $y = xz$, oder $x = yz$ in der Differential-Gleichung

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

zur Trennung der Variabeln.

[§ 85, Gl. (1.) bis (9.)]

209.) Die lineare Differential-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x)$$

wird integriert

a) nach *Bernoulli*, indem man $y = uz$ setzt und u so bestimmt, dass in der dadurch sich ergebenden Differential-Gleichung der Factor von z verschwindet;

b) nach *Lagrange* durch Variation der Constanten, indem man bei dem Integral der linearen, *homogenen* Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = 0$$

die Integrations-Constante als eine Function von x betrachtet;

c) durch den *integrirenden Factor*

$$\psi(x) = e^{\int f(x) dx}.$$

Durch jede dieser drei Methoden findet man

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + C \right].$$

[§ 87, Gl. (9.), (37.) und (70.)]

210.) Ebenso kann man die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = y^n \cdot \varphi(x)$$

integriren, indem man $y = uz$ setzt und u so bestimmt, dass in der sich daraus ergebenden Differential-Gleichung der Factor von z verschwindet.

[§ 88, Gl. (1.) bis (12.)]

211.) Die Function v heisst ein *integrirender Factor* der Differential-Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

wenn $v(Mdx + Ndy)$ ein *vollständiges Differential* ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$M \frac{\partial v}{\partial y} - N \frac{\partial v}{\partial x} = v \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

[§ 91, Gl. (1.)]

212.) Ist $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen x , so ist der integrirende Factor

$$v = e^{-\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dx}{N}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen x .

[§ 91, Gl. (4.)]

213.) Ist $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen y , so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dy}{M}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen y .

[§ 91, Gl. (14.)]

214.) Ist $\frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z = xy$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{xM - yN}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen z .

[§ 91, Gl. (25.)]

215.) Ist $\frac{x^2}{xM + yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z = \frac{y}{x}$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{x^2 dz}{xM + yN}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen z .

[§ 91, Gl. (39.)]

216.) Ist $\frac{1}{yM - xN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ eine Function der einzigen Veränderlichen $z = x^2 + y^2$, so ist der integrirende Factor

$$v = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{dz}{2(yM - xN)}}$$

gleichfalls eine Function der einzigen Veränderlichen z .

[§ 91, Gl. (52.)]

217.) Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ der Kürze wegen mit p , so wird die Integration der Differential-Gleichung

$$x = \varphi(p)$$

durch Ermittlung von

$$y = \int \varphi'(p) \cdot p dp + C$$

ausgeführt.

[§ 93, Gl. (2.) und (5.)]

218.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y = \varphi(p)$$

wird durch die Ermittlung von

$$x = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} + C$$

ausgeführt.

[§ 93, Gl. (15.) und (18.)]

219.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$x = f(y, p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy - \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

zurückgeführt.

[§ 93, Gl. (29.) und (30.)]

220.) Die Integration der Differential-Gleichung

$$y = f(x, p)$$

wird auf die Integration der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p \right) dx = 0$$

zurückgeführt.

[§ 93, Gl. (40.) und (41.)]

220 a.) So kann man z. B. die Differential-Gleichung

$$y = x \cdot f(p) + \varphi(p)$$

auf die Integration der *linearen Differential-Gleichung erster Ordnung*

$$[p - f(p)] \frac{dx}{dp} - x \cdot f'(p) = \varphi'(p)$$

zurückführen.

[§ 93, Gl. (43.) und (45.)]

221.) Aus der *allgemeinen* Lösung

$$G(x, y, C) = 0$$

einer Differential-Gleichung findet man die *singuläre* durch Elimination von C aus den beiden Gleichungen

$$G(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

[§ 94, Gl. (3.) und (6.)]

222.) Die Differential-Gleichung der *isogonalen* Trajektorien, welche die sämtlichen Curven der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter dem constanten Winkel ϑ schneiden, findet man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0$$

und

$$(F_1 \cos \vartheta - F_2 \sin \vartheta) dx + (F_1 \sin \vartheta + F_2 \cos \vartheta) dy = 0.$$

[§ 96, Gl. (1.) und (8.)]

223.) Die Differential-Gleichung der *orthogonalen* Trajektorien, welche die sämtlichen Curven der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

unter rechtem Winkel schneiden, findet man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad -F_2 dx + F_1 dy = 0.$$

[§ 96, Gl. (1.) und (11.)]

224.) Die orthogonalen Trajektorien der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = f(x) + g(y) - u = 0$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dx}{f'(x)} = \frac{dy}{g'(y)}. \quad [\text{§ 97, Gl. (55.) und (57.)}]$$

225.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$f(x) \cdot g(y) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(x)dx}{f'(x)} = \frac{g(y)dy}{g'(y)}.$$

[§ 97, Gl. (67.) und (70.)]

226.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$F(r, \varphi, u) = 0$$

genügen einer Differential-Gleichung, die man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(r, \varphi, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial r} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

findet.

[§ 97, Gl. (75.) und (83.)]

227.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$F(r, \varphi, u) = f(r) + g(\varphi) - u = 0$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{d\varphi}{g'(\varphi)}. \quad [\text{§ 97, Gl. (101.) und (103 a.)}]$$

228.) Die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar

$$f(r) \cdot g(\varphi) = u$$

genügen der Differential-Gleichung

$$\frac{f(r)dr}{r^2 \cdot f'(r)} = \frac{g(\varphi)d\varphi}{g'(\varphi)}.$$

[§ 97, Gl. (104.) und (105 a.)]

229.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x)$$

kann auf die Form

$$y = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} \varphi(z) dz + \frac{C_1 x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{C_2 x^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + \frac{C_{m-1} x}{1!} + C_m$$

gebracht werden.

[§ 99, Gl. (1.) und (33.)]

230.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{oder} \quad q = f(p)$$

findet man durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_2.$$

[§ 100, Gl. (1.), (3.) und (5.)]

231.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \text{oder} \quad p = \varphi(q)$$

findet man durch Elimination von q aus den Gleichungen

$$x = \int \frac{\varphi'(q) dq}{q} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \int \frac{\varphi(q) \varphi'(q) dq}{q} + C_2.$$

[§ 100, Gl. (23.) und (26.)]

232.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

ist

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(y) dy}} + C_2.$$

[§ 101, Gl. (1.) und (7.)]

233.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A \cdot e^{\frac{x}{a}} + B \cdot e^{-\frac{x}{a}}. \quad [\text{§ 101, Gl. (8.) und (18.)}]$$

234.) Die Differential-Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

hat die Lösung

$$y = A \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{x}{a}\right).$$

[§ 101, Gl. (19.) und (26.)]

235.) Das allgemeine Integral der Differential-Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u), \quad \text{wo} \quad u = \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}},$$

findet man, indem man die Gleichung

$$x = \pm \int \frac{du}{\sqrt{C_1 + 2 \int f(u) du}} + C_2$$

nach u auflöst und das in Formel Nr. 229 angegebene Verfahren anwendet. [§ 101, Gl. (29.), (33.) und (34.)]

236.) Die Differential-Gleichung

$$F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

reducirt sich auf die Form

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-n}u}{dx^{m-n}}\right) = 0,$$

wenn man $\frac{d^n y}{dx^n}$ mit u bezeichnet. [§ 102, Gl. (1.) bis (3.)]

237.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und y zur unabhängigen Veränderlichen macht. [§ 102, Gl. (10.) bis (13.)]

238.) Die Ordnung der Differential-Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

wird um eine Einheit erniedrigt, wenn die Gleichung in Bezug auf die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}$ homogen ist, indem man durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = yu$$

u als abhängige Veränderliche einführt. [§ 102, Gl. (75.) bis (80.)]

239.) Das allgemeine Integral der homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + f_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = 0,$$

in welcher die Coefficienten f_1, f_2, \dots, f_m constante Grössen sind, ist

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x},$$

wobei r_1, r_2, \dots, r_m die Wurzeln der Gleichung

$$F(u) = u^m + f_1 u^{m-1} + f_2 u^{m-2} + \dots + f_{m-1} u + f_m = 0$$

sind, vorausgesetzt, dass r_1, r_2, \dots, r_m sämmtlich von einander verschieden sind. [§ 104, Gl. (1.), (15.) und (17.)]

240.) Ist

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi,$$

so kann man $C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$ ersetzen durch

$$e^{ax} [A \cos(bx) + B \sin(bx)].$$

[§ 104, Gl. (26.) bis (28.)]

241.) Sind unter den Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_m der Gleichung $F(u) = 0$ gleiche vorhanden, ist z. B.

$$r_1 = r_2 = \dots = r_\alpha,$$

so giebt Formel Nr. 239 nicht mehr das allgemeine Integral; dieses hat in diesem Falle vielmehr die Form

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_\alpha x^{\alpha-1}) e^{r_\alpha x} + C_{\alpha+1} \cdot e^{r_{\alpha+1} x} + \dots + C_m \cdot e^{r_m x}.$$

[§ 104, Gl. (44.), (51.) und (61.)]

242.) Das allgemeine Integral der nicht homogenen linearen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = \varphi(x)$$

ist, wenn die Wurzeln der Gleichung $F(u) = 0$ sämmtlich von einander verschieden sind,

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)} \left[C_1 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_1 t} dt \right] + \frac{e^{r_2 x}}{F'(r_2)} \left[C_2 + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_2 t} dt \right] \\ + \dots + \frac{e^{r_m x}}{F'(r_m)} \left[C_m + \int_0^x \varphi(t) \cdot e^{-r_m t} dt \right]. \quad [\text{§ 105, Gl. (1.) und (23.)}]$$

243.) Ist y_1 ein particuläres Integral der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = 0,$$

so lässt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_m(x) \cdot y = \varphi(x)$$

durch die Substitution

$$y = y_1 \left(\int u dx + A \right), \quad \text{oder} \quad u = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right)$$

auf eine nicht homogene Differential-Gleichung $(m-1)$ ter Ordnung von der Form

$$y_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + g_1(x) \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + g_{m-1}(x) \cdot u = \varphi(x)$$

zurückführen.

[§ 106, Gl. (1.) bis (8.)]

244.) Sind n particuläre Integrale y_1, y_2, \dots, y_n der homogenen Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_m(x) \cdot y = 0$$

bekannt, so lässt sich die *nicht* homogene Differential-Gleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + f_m(x) \cdot y = \varphi(x)$$

auf eine andere nicht homogene Differential-Gleichung $(m-n)$ ter Ordnung von der Form

$$L_0(x) \frac{d^{m-n} v}{dx^{m-n}} + L_1(x) \frac{d^{m-n-1} v}{dx^{m-n-1}} + \dots + L_{m-n}(x) \cdot v = \varphi(x)$$

zurückführen, wobei

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

und

$$C_1 = \int v dx + A_1, \quad C_2 = \int \varphi_1(x) \cdot v dx + A_2, \dots$$

$$C_n = \int \varphi_{n-1}(x) \cdot v dx + A_n.$$

Die Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ sind durch die Gleichungen

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{dy_n}{dx} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \frac{dC_n}{dx} = 0,$$

oder

$$\frac{dC_2}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_3}{dx} = \varphi_2(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}, \dots, \frac{dC_n}{dx} = \varphi_{n-1}(x) \cdot \frac{dC_1}{dx}$$

erklärt.

[§ 106, Gl. (17.) bis (31.)]

245.) Sind in der Differential-Gleichung m^{ter} Ordnung

$$(ax + b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (ax + b)^{m-1} f_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (ax + b)^{m-2} f_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} \\ + \dots + (ax + b) f_{m-1} \frac{dy}{dx} + f_m y = 0$$

die Coefficienten f_1, f_2, \dots, f_m constant, so hat das allgemeine Integral die Form

$$y = C_1(ax + b)^{r_1} + C_2(ax + b)^{r_2} + \dots + C_m(ax + b)^{r_m},$$

wobei r_1, r_2, \dots, r_m die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a^m r(r-1)(r-2) \dots (r-m+1) + a^{m-1} r(r-1)(r-2) \dots (r-m+2) f_1 \\ + \dots + a^2 r(r-1) f_{m-2} + a r f_{m-1} + f_m = 0$$

sind, und wobei C_1, C_2, \dots, C_m noch beliebige Constanten sind.

[§ 107, Gl. (1.) bis (6.)]

246.) Sind

$$r_1 = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad r_2 = \alpha - \beta i$$

zwei conjugirt complexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so wird

$$C_1(ax + b)^{r_1} + C_2(ax + b)^{r_2} = (ax + b)^\alpha [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)],$$

wobei man

$$\ln(ax + b) = t$$

gesetzt und mit A und B zwei beliebige Constante bezeichnet hat.

[§ 107, Gl. (12.) und (13.)]

247.) Sind in der charakteristischen Gleichung die Wurzeln r_1 und r_2 einander gleich, so hat man in dem allgemeinen Integral für die in Formel Nr. 245 gelöste Differential-Gleichung

$C_1(ax + b)^{r_1} + C_2(ax + b)^{r_2}$ mit $(ax + b)^{r_1}[A_1 + A_2 \ln(ax + b)]$ zu vertauschen.

Sind in der charakteristischen Gleichung drei Wurzeln r_1 , r_2 , r_3 einander gleich, so hat man in dem allgemeinen Integral

$$C_1(ax + b)^{r_1} + C_2(ax + b)^{r_2} + C_3(ax + b)^{r_3}$$

mit

$$(ax + b)^{r_1}[A_1 + A_2 \ln(ax + b) + A_3 \{\ln(ax + b)\}^2]$$

zu vertauschen. U. s. w. [§ 107, Gl. (25.) und (36.)]

248.) Das allgemeine Integral der beiden linearen simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} + f_1x + g_1y = h_1, \quad \frac{dy}{dt} + f_2x + g_2y = h_2,$$

bei denen f_1 , g_1 , h_1 , f_2 , g_2 , h_2 noch beliebige Functionen von t sind, findet man, indem man die zweite Gleichung mit v multiplicirt, von der ersten abzieht und für die noch willkürliche Function v zwei particuläre Integrale v_1 und v_2 der Differential-Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = f_2v^2 - (f_1 - g_2)v - g_1$$

in die Gleichungen

$$w_1 = x - v_1y, \quad w_2 = x - v_2y$$

einsetzt. Die Functionen w_1 und w_2 sind dann die allgemeinen Integrale der linearen Differential-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dw_1}{dt} + (f_1 - v_1f_2)w_1 = h_1 - v_1h_2,$$

$$\frac{dw_2}{dt} + (f_1 - v_2f_2)w_2 = h_1 - v_2h_2.$$

[§ 109, Gl. (1) bis (10.)]

Druckfehler.

Seite 43, Zeile 10 v. u. lies

$$\int \frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1} dt \quad \text{statt} \quad \frac{t^3 - 7t^2 + 2t + 9}{t^2 + 1} dt.$$

Seite 44, Zeile 3 v. o. lies

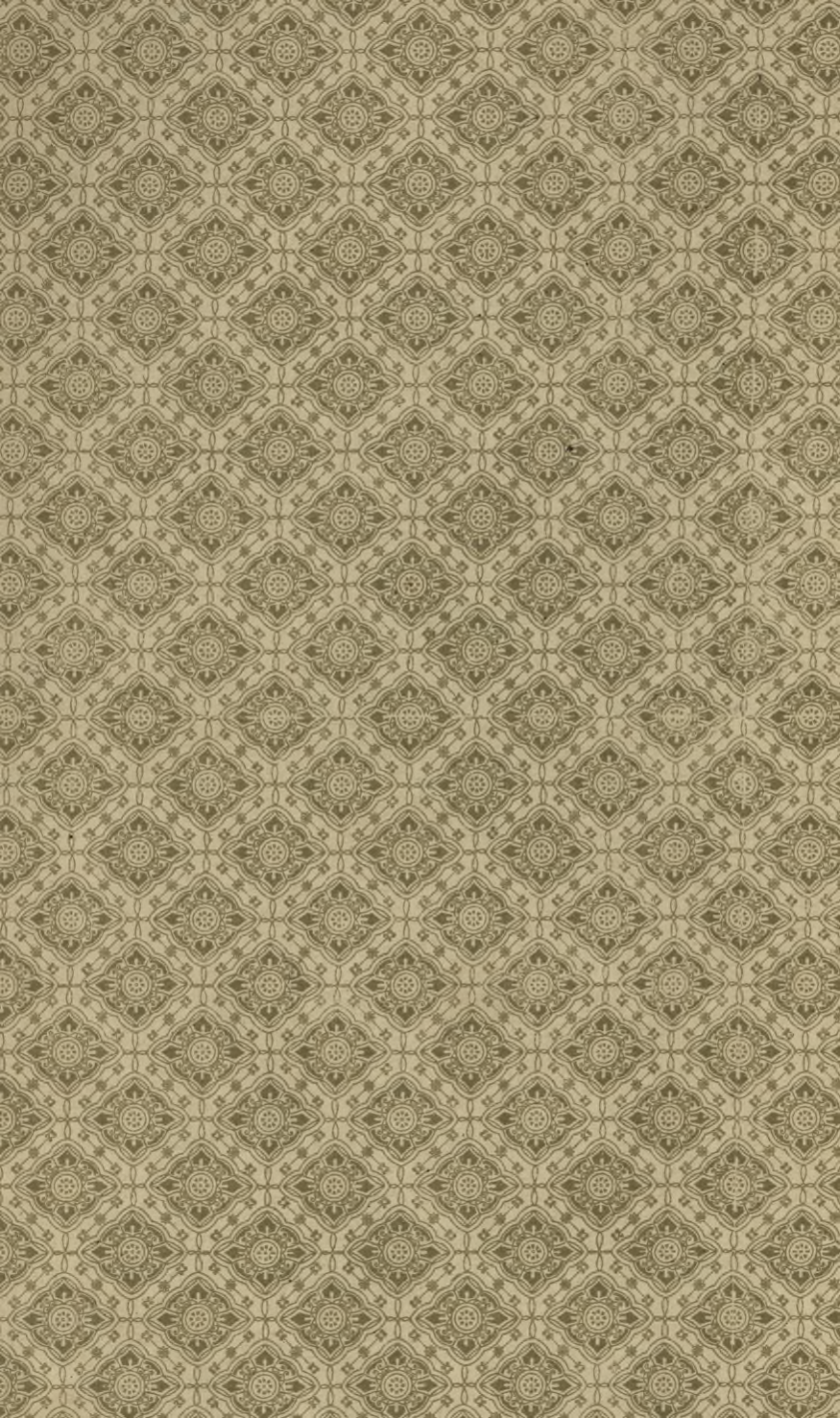
$$\int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \cdot d(\operatorname{tg} x) \quad \text{statt} \quad \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \int \cdot d(\operatorname{tg} x).$$



S-98

S. 61







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-351578

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298959