~~Edward Paździorka~~
~~10 maja 1905.~~
w antykwarni 11 Kor 50 hal
zakupione 1/XII 08.

# Grundriß
der
# Differential- u. Integral-Rechnung.

## I. Teil: Differential-Rechnung.

Von

**Dr. Ludwig Kiepert,**
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Zehnte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. **Dr. Max Stegemann.**

Mit 181 Figuren im Texte.



**Hannover 1905.**
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

# Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Schrift habe ich gesucht, neben der Forderung wissenschaftlicher Strenge vor allen Dingen der didaktischen Forderung möglichster Faßlichkeit zu genügen.

In betreff der speziellen Ausführung bemerke ich, daß ich mich bemüht habe, die Einsicht in den Gang der analytischen Untersuchung durch graphische Darstellungen zu erleichtern, und ferner, daß ich bei schwierigen oder wichtigen Stellen die Entwickelung der allgemeinen Theorie durch Erörterung eines speziellen Falles eingeleitet habe.

Die große Anzahl von Beispielen und Anwendungen in jedem Kapitel, sowie die gelegentlichen Bemerkungen sind zunächst für solche Leser bestimmt, welche durch Selbst-Studium sich in der Wissenschaft weiter ausbilden und mehr befestigen wollen; indeß dürften sie auch dem Lehrer ein Mittel bieten, um seine Schüler zur freien Selbsttätigkeit anzuregen.

In betreff der äußeren Ausstattung ist die Verlagshandlung sowohl wie die Druckerei allen meinen Wünschen bereitwillig entgegengekommen.

Hannover, den 1. August 1862.

**M. Stegemann.**

## Vorrede zur fünften Auflage.

Als der Unterzeichnete den Auftrag erhielt, die neue Auflage dieses Werkes herauszugeben, ahnte er noch nicht, daß Änderungen in so weitem Umfange notwendig sein würden. Erst bei der Bearbeitung überzeugte er sich davon, daß sehr viele Lücken auszufüllen und zahlreiche Irrtümer, die sich in den früheren Auflagen finden, richtig zu stellen waren.

Neben den angedeuteten Mängeln besaß aber das Buch von Stegemann doch auch große Vorzüge, welche namentlich in der leicht faßlichen Darstellung liegen und durch den verhältnismäßig schnell erfolgten Absatz von vier Auflagen bestätigt worden sind.

Der Herausgeber hat sich bemüht, diese Vorzüge nach Möglichkeit beizubehalten, ohne die wissenschaftliche Strenge und Gründlichkeit außer Acht zu lassen. Das Buch hat demnach den Zweck, den Anfänger, — mag er nun an der Universität, an der technischen Hochschule oder an irgend einer anderen Bildungs-Anstalt, an der höhere Mathematik getrieben wird, studieren, — auf möglichst bequeme Weise mit den wichtigsten Sätzen und Aufgaben der Differential-Rechnung vertraut zu machen. Auch zum Selbst-Studium ist das Buch seiner ganzen Anlage nach geeignet.

Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber im großen und ganzen seine eigenen Vorträge an der technischen Hochschule in Hannover maßgebend. Da die für diese Vorträge verfügbare Zeit eine beschränkte ist, so war dadurch auch für den Umfang des Buches ein Rahmen gegegeben, so daß der Inhalt nicht so erschöpfend sein konnte wie z. B. bei Lehrbüchern der Differential-Rechnung hervorragender französischer Mathematiker.

Aber diese Beschränkung ist vielleicht gerade ein wesentlicher Vorzug, weil die Fülle des Stoffes den Anfänger häufig mehr verwirrt und abschreckt als fördert. Der vorliegende Leitfaden soll daher eine feste und sichere Grundlage bieten, welche dem Techniker genügen, dem Mathematiker aber eine nützliche Vorbereitung zu weitergehenden Studien sein wird.

Als Anhang ist eine Tabelle der wichtigsten Formeln hinzugefügt, welche einerseits die Anwendungen sehr erleichtert, andererseits aber ein durch langjährige Erfahrung erprobtes Hilfsmittel bei Repetitionen ist.

Dem Herrn Verleger spricht der Herausgeber hierdurch seinen verbindlichsten Dank aus für das liebenswürdige Entgegenkommen, das allen seinen Wünschen entgegengebracht worden ist.

Hannover, im Juli 1887.

**L. Kiepert.**

---

## Vorrede zur sechsten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, welche die fünfte Auflage in weiten Kreisen gefunden hat, war für den Herausgeber ein Antrieb, bei der Bearbeitung der neuen Auflage mit größter Sorgfalt die hervorgetretenen Mängel zu beseitigen und die vorhandenen Lücken auszufüllen. Den Herren Lampe, von Mangoldt, Franz Meyer, Runge und Voss, welche dabei den Herausgeber durch wertvolle Winke unterstützt haben, sei hierdurch der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Durch die angedeuteten Verbesserungen hat das Buch an Umfang und Inhalt wesentlich zugenommen; namentlich sind die geometrischen Anwendungen vermehrt worden, auch hat eine kurzgefaßte Darstellung der Determinanten-Theorie Aufnahme gefunden. Die Figuren sind sämtlich neu gezeichnet worden, ihre Zahl ist von 66 auf 154 gewachsen.

Mit Rücksicht darauf, daß das Buch auch vielfach von Studierenden der Mathematik an der Universität benutzt worden ist, schien es zweckmäßig, noch mehr Gewicht auf wissenschaftliche Strenge zu legen, als es in den früheren Auflagen geschehen war. Da aber die elementare Art der Behandlung darunter nicht leiden sollte, so war es nicht immer ganz leicht, den richtigen Mittelweg zu finden.

Durch die mühsame Umarbeitung und die erhebliche Erweiterung des Buches ist die Drucklegung etwas verzögert worden. Der Herausgeber ist der Verlagsbuchhandlung für die Nachsicht, die ihm dabei gewährt worden, und für das bereitwillige Entgegenkommen, das er bei allen seinen Wünschen gefunden hat, zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Schließlich sei noch mit bestem Danke die gütige Mitwirkung des Herrn Petzold bei dem Lesen der Korrektur hervorgehoben.

Hannover, den 15. November 1892.

**L. Kiepert.**

## Vorrede zur siebenten Auflage.

Schon bei der Herausgabe der fünften und sechsten Auflage waren die erforderlichen Änderungen so grundlegend und umfassend, daß von dem Stegemannschen Grundrisse nur äußerst wenig übrig geblieben ist. Deshalb ist es nicht mehr gerechtfertigt, Stegemann als Verfasser des Buches zu bezeichnen. Die neue Auflage erscheint vielmehr unter dem Namen des Unterzeichneten, der die vollständige Umarbeitung des Stegemannschen Leitfadens ausgeführt hat. Da die siebente Auflage der sechsten in sehr kurzer Zeit gefolgt ist, so unterscheidet sie sich von dieser nur an wenigen Stellen. Doch hat der Verfasser die Verbesserungsvorschläge, die ihm von befreundeter Seite zugegangen sind, nach Möglichkeit berücksichtigt und benutzt diese Gelegenheit, um allen Fachgenossen für die gütige Empfehlung des Buches und für die freundschaftliche Unterstützung durch wohlwollende Ratschläge den aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Insbesondere dankt er auch den Herren Franz Meyer und Petzold für die förderliche Mitwirkung beim Lesen der Korrektur und der Verlagsbuchhandlung für die opferfreudige Gewährung aller bei der schwierigen Drucklegung hervortretenden Wünsche.

Hannover, den 21. Mai 1895.

**L. Kiepert.**

---

## Vorrede zur achten Auflage.

Seit dem Erscheinen der siebenten Auflage ist eine so kurze Zeit verflossen, daß der Verfasser inzwischen nur wenig Muße finden konnte, um durchgreifende Änderungen an dem Leitfaden vorzunehmen. Deshalb weicht die achte Auflage nur in einigen Punkten von der vorhergehenden ab. Vorangestellt ist eine kurze geschichtliche Darstellung, in welcher Weise gerade Aufgaben aus der Technik mit Notwendigkeit zur Auffindung der Differential- und Integral-Rechnung geführt haben. Damit sollte darauf hingewiesen werden, wie unentbehrlich die Infinitesimal-Rechnung, d. h. die Rechnung mit unbegrenzt wachsenden und unbegrenzt abnehmenden Größen für die Technik ist, und wie zweckmäßig es andererseits ist, diese Rechnungsart in möglichst weitem Umfange der Technik dienstbar zu machen.

Aus diesem Grunde würde der Verfasser für freundliche Ratschläge und nützliche Anregungen, welche er von Seiten der Herren Techniker zur Verbesserung und Bereicherung des Stoffes in späteren Auflagen erhalten sollte, besonders dankbar sein. Ein solches Zusammenarbeiten der Techniker und der Mathematiker würde die Sache und auch die beiderseitigen Interessen mehr fördern als umfangreiche Auseinandersetzungen über Ausdehnung oder Beschränkung des mathematischen Unterrichts an technischen Hochschulen, wie sie zur Zeit an der Tagesordnung sind. Ob die Mathematik für die Techniker eine grundlegende Wissenschaft oder nur Hilfswissenschaft sei, ist ein Streit um Worte. Es kommt vielmehr darauf an, den mathematischen Unterricht an der technischen Hochschule so zu gestalten, daß er bei einem nicht übermäßig großen Zeitaufwande der Technik recht gute Dienste leistet. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen sich aber die Techniker und Mathematiker möglichst eng in ihren Bestrebungen aneinander anschließen. Mit vereinten Kräften wird es gelingen, die mathematische Behandlung technischer Aufgaben in nutzbringender Weise auszugestalten und gleichzeitig der Mathematik den Anstoß zu weiteren Fortschritten zu geben.

Für die Abfassung der geschichtlichen Einleitung stellte mir Herr Max Simon in Straßburg ein umfangreiches Manuskript zur Verfügung, wofür ich hiermit bestens danke.

Auch Herrn Petzold habe ich wieder für die Mitwirkung beim Lesen der Korrektur und der Verlagsbuchhandlung für das freundliche Entgegenkommen bei Drucklegung der neuen Auflage meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Hannover, im Oktober 1897.

**L. Kiepert.**

# Vorrede zur neunten Auflage.

In den Vorreden zu den früheren Auflagen hatte der Verfasser die Bitte ausgesprochen, ihm doch Vorschläge für etwaige Verbesserungen und Zusätze zu machen. Daraufhin sind ihm von vielen Seiten nützliche Ratschläge erteilt worden. Mit besonderem Danke sind in dieser Beziehung hervorzuheben eine sehr eingehende und sachkundige Besprechung von Herrn Edward B. Van Vleck in dem Bulletin of the American mathematical Society (1897, Nr. 10), mehrere briefliche Mitteilungen der Herren Voss in Würzburg und Stäckel in Kiel und verschiedene Anregungen von Seiten hiesiger Kollegen.

Um die mir zugegangenen Wünsche nach Möglichkeit zu berücksichtigen, mußten mehrere Abschnitte der Differential-Rechnung vollständig umgearbeitet werden, wie z. B. die Bestimmung des Restgliedes bei der Taylorschen Reihe, die Konvergenz der Reihen usw. Einige andere Abschnitte, z. B. die Untersuchung der hyperbolischen Funktionen, die Lagrangesche Interpolationsformel, die Näherungsmethoden für die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen, sind neu aufgenommen. Dem entprechend war auch eine andere Einteilung erforderlich, so daß die Differential-Rechnung, die bisher nur zwei Teile mit 16 Abschnitten und 140 Paragraphen enthielt, jetzt auf drei Teile mit 21 Abschnitten und 161 Paragraphen ausgedehnt ist. Dabei umfaßt der zweite Teil diejenigen algebraischen Untersuchungen, welche für den zukünftigen Techniker von Wichtigkeit sind. Die Figuren, deren Anzahl ebenfalls vermehrt ist, sind sämtlich neu hergestellt. Auch eine Tafel für den Gebrauch der hyperbolischen Funktionen ist im Anhange abgedruckt.

Der Verlagsbuchhandlung, die für die neue Drucklegung besondere Opfer zu bringen hatte, sage ich für die bereitwillige Berücksichtigung aller meiner Wünsche und Herrn Petzold für die gütige Mitwirkung beim Lesen der Korrektur meinen verbindlichsten Dank.

Hannover, den 3. Januar 1901.

**L. Kiepert.**

# Vorrede zur zehnten Auflage.

Beim mathematischen Unterricht kommt es sehr wesentlich darauf an, daß die einzelnen Begriffe, welche zur Anwendung kommen, genügend erklärt sind, und daß sich die einzelnen Untersuchungen in logischer Reihenfolge aneinander angliedern. Viele Auf aben, die an und für sich große Schwierigkeiten bieten, werden weniger schwierig, wenn sie durch leichtere voraufgehende Aufgaben passend vorbereitet sind. Allerdings wird, wenn man schrittweise vorgeht, vieles selbstverständlich und deshalb vielleicht weniger interessant erscheinen. Geht man dagegen bei mathematischen Untersuchungen sprungweise vor, so wird vieles, weil es rätselhaft bleibt, oder überraschend wirkt, einen größeren Reiz ausüben. Sollen aber die mathematischen Kenntnisse einem festen Bau gleichen, welcher der Gefahr des Zusammensturzes nicht ausgesetzt ist, so muß die Herleitung der einzelnen Sätze in organischem Zusammenhange erfolgen. Auch das Verständnis wird wesentlich erleichtert, wenn beim Unterricht nach Möglichkeit an das bereits Bekannte angeknüpft wird.

Diese Grundsätze hat der Verfasser bei den früheren Auflagen befolgt und auch bei der vorliegenden 10. Auflage festgehalten. Trotzdem sind Wortlaut und Inhalt der 9. Auflage an zahlreichen Stellen geändert; auch sind etliche Untersuchungen, z. B. die Herleitung der *Newton*schen Interpolationsformel, hinzugefügt worden. Bei den Kurven doppelter Krümmung sind die Sätze über die Schmiegungsebene, die Hauptnormale, Binormale, den Krümmungskreis, den Kontingenzwinkel, den Torsionswinkel, den Halbmesser der zweiten

Krümmung und die Schmiegungskugel hinzugetreten. Bei der Theorie der Flächen sind noch die Sätze für die Krümmung, die Hauptnormalschnitte, die Hauptkrümmungshalbmesser, die Krümmungsmittelpunktsfläche und das *Gauß*sche Krümmungsmaß aufgenommen, und zwar erfolgten diese Ergänzungen auf den ausdrücklichen Rat einiger Fachgenossen, von denen ich die Herren Lampe und Prandtl mit dem Ausdrucke des besten Dankes nennen möchte.

Zu aufrichtigem Danke bin ich außerdem verpflichtet der Verlagsbuchhandlung, die wiederum mit der größten Bereitwilligkeit alle meine Wünsche erfüllt hat, und Herrn Petzold für die liebenswürdige Mitwirkung beim Lesen der Korrektur.

Hannover, den 8. November 1904.

**L. Kiepert.**

# Inhalts-Verzeichnis.

## II. Abschnitt.

### Funktionen von Funktionen.



## III. Abschnitt.

### Hyperbolische Funktionen.



## IV. Abschnitt.

### Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.



## V. Abschnitt.

### Herleitung und Anwendungen der *Taylor*schen und der *Mac-Laurin*schen Reihe.

## VI. Abschnitt.

### Konvergenz der Reihen.



## VII. Abschnitt.

### Maxima und Minima von entwickelten Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

Seite

VIII. Abschnitt.

**Bestimmung von Ausdrücken, welche an der Grenze eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ haben.**



IX. Abschnitt.

**Differentiation der nicht entwickelten Funktionen.**



X. Abschnitt.

**Vertauschung der Abhängigkeit der veränderlichen Größen.**



XI. Abschnitt.

**Untersuchung der Kurven, die auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen sind.**

## XV. Abschnitt.

### Numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten.



## XVI. Abschnitt.

### Asymptoten einer Kurve.



## XVII. Abschnitt.

### Theorie der Determinanten.

Seite

# Dritter Teil.

## Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

### XVIII. Abschnitt.

### Differentiation der Funktionen von mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen.



### XIX. Abschnitt.

### Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

Seite

XX. Abschnitt.

**Herleitung der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Homogene Funktionen.**



XXI. Abschnitt.

**Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen.**

# Geschichtliches.

Die *Differential-Rechnung* und ihre Umkehrung, die *Integral-Rechnung*, werden mit dem gemeinsamen Namen *Infinitesimal-Rechnung* zusammengefaßt, weil sie auf dem Gebrauche der *unbegrenzt wachsenden* und der *unbegrenzt abnehmenden* (oder der sogenannten *unendlich kleinen*) Größen beruhen. Solche unendlich kleine Größen und die damit in Beziehung stehenden Begriffe der *Grenze* und der *Stetigkeit* wurden bereits in den mathematischen und philosophischen Untersuchungen des Altertums angewendet, wenn auch die Vorstellungen über diese Begriffe teilweise noch unklar und mangelhaft waren.

Schon bei den Schülern des *Pythagoras* (etwa 582 v. Chr. geb.) und bei dem Eleaten *Zeno* (etwa 500 v. Chr.) spielen unendlich kleine Größen eine Rolle. *Aristoteles* (384—322 v. Chr.) gab sogar eine Erklärung der Begriffe „Stetigkeit" und „Mächtigkeit". Daraus entwickelte sich dann in der Schule des *Plato* (429—347 v. Chr.) und noch mehr in der des *Eudoxos* (etwa 370 v. Chr.) der Begriff der Grenze mit Hülfe der sogenannten „*Exhaustions-Methode*", deren Wesen darin besteht, daß eine Größe, welche berechnet werden soll, z. B. der Flächeninhalt eines Kreises, zwischen zwei Reihen bekannter Größen eingeschlossen wird, von denen die eine beständig zunimmt und die andere beständig abnimmt. Bei der Kreisfläche benutzt man dazu die einbeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen $n$-Ecke, wobei $n$ nach und nach die Werte 6, 12, 24, ... annimmt. Der Unterschied zwischen den Größen der zunehmenden und der abnehmenden Reihe wird immer kleiner und schließlich beliebig klein, so daß sich daraus auch der Wert der gesuchten Größe selbst mit beliebiger Genauigkeit ergibt.

Derartige Schlüsse wurden namentlich von *Euklid* (etwa 300 v. Chr.), *Archimedes* (287—212 v. Chr.) und *Pappus* (etwa 400 n. Chr.) angewendet. *Archimedes* hat bei der Berechnung des Flächeninhaltes von Figuren, des Kubikinhaltes der Körper und der Lage des Schwerpunktes ein Verfahren benutzt, welches der Integral-Rechnung nahe verwandt ist und den Forschern der Neuzeit wesentliche Dienste geleistet hat.

Nach *Pappus* tritt aber Stillstand ein. Erst *Kepler* (1571 bis 1630) und *Galilei* (1564—1642) knüpfen, von astronomischen und physikalischen Gesichtspunkten ausgehend, an die von *Archimedes* gefundenen Resultate an. *Kepler* dehnt die Anwendung der unendlich kleinen Größen aus auf die Lösung von Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima und auf die Berechnung des Volumens von Körpern. Damit war für die wirkliche Erfindung der Differential- und Integral-Rechnung, welche in die Zeit von 1615—1684 fällt, der Anfang gemacht.

Einen weiteren Schritt tat der Franzose *Descartes* (1596 bis 1650), der die Rechnung mit unendlich kleinen Größen benutzte, um das sogenannte „Tangenten-Problem" zu lösen, bei welchem es darauf ankommt, die Lage der Tangente an eine gegebene Kurve in einem Punkte derselben zu bestimmen. Dieselbe Aufgabe behandelte in jener Zeit auch der Franzose *Fermat* (1608—1665), der die Methoden der Differential-Rechnung bereits in umfangreicher Weise beherrschte und die Methoden der Integral-Rechnung für die Ermittelung des Flächeninhaltes, der Länge von Kurvenbögen, der Lage des Schwerpunktes usw. geschickt verwendete. Auch den Begriff der Stetigkeit kannte *Fermat* genau und löste mit Hülfe der Differential-Rechnung Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima.

Noch schärfer und zielbewußter werden die neuen Methoden von dem Engländer *Wallis* (1616—1703) und dem Franzosen *Pascal* (1623—1662) erfaßt. *Wallis* rechnete bereits mit unendlichen Reihen, d. h. mit Summen, welche unendlich viele Summanden enthalten, und mit Produkten, welche aus unendlich vielen

Faktoren bestehen. *Pascal* wendete sogar schon mehrfache Integrale an.

So war die Erfindung der Infinitesimal-Rechnung in vielseitigster Weise vorbereitet durch die Behandlung von Aufgaben, deren Lösung die Rechnung mit unendlich kleinen Größen erfordert. Solche Aufgaben lieferte

1. die *Mechanik*, und zwar die *Statik* bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunktes und die *Dynamik* bei der Erklärung und Anwendung der Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.;
2. die Theorie der Maxima und Minima;
3. die Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren, des Kubikinhaltes der Körper und der Länge von Kurvenbögen;
4. das Tangenten-Problem;
5. die Rechnung mit unendlichen Reihen, unendlichen Produkten, periodischen Kettenbrüchen usw.

Es kam nur noch darauf an, den innigen Zusammenhang zwischen allen diesen Aufgaben zu erkennen und in die unklaren, den weiteren Kreisen der Mathematiker bisher unzugänglichen Methoden Gesetz und Ordnung zu bringen.

Diesen letzten, wichtigsten Schritt taten der englische Astronom und Mathematiker *Newton* (1643—1727) und der deutsche Mathematiker und Philosoph *Leibniz* (1646—1716), welche als die eigentlichen Erfinder der Infinitesimal-Rechnung zu betrachten sind. *Newton* hatte schon im Jahre 1665 bei seiner „*Fluxionen-Rechnung*“ die Methoden zur Anwendung gebracht, welche für die Differential-Rechnung grundlegend geworden sind. Er veröffentlichte aber seine Erfindung erst im Jahre 1711, *Leibniz* dagegen schon im Jahre 1684. Es darf jetzt wohl als sicher angesehen werden, daß beide Forscher voneinander unabhängig auf die neue Rechnungsart geführt worden sind, wenn auch *Leibniz* bei seinem ersten Aufenthalte in London, welcher in das Jahr 1673 fällt, durch den Verkehr mit Freunden von *Newton* zweifellos zu seinen Untersuchungen über Infinitesimal-Rechnung angeregt worden ist. *Newton* hat sogar selbst einen Brief an *Leibniz* gerichtet, in welchem er das Tangenten-Problem erwähnt. Jedenfalls gebührt aber *Leibniz* das unsterbliche Verdienst, für die neue Rechnung Formen gefunden zu haben, welche auch einem größeren Leserkreise verständlich sind, während die Fluxionen-Rechnung *Newtons* nur von wenigen auserwählten Geistern erfaßt werden konnte. Die Bezeichnungen und Kunstausdrücke, welche noch heute in der Differential- und Integral-Rechnung gebräuchlich sind, stammen zumeist von *Leibniz* her, der auch zuerst erkannte, welche außerordentliche Bedeutung der neuen Rechnungsweise für die gesamte Mathematik zukommt.

Auf die weitere Ausgestaltung der Infinitesimal-Rechnung verwandten sodann die beiden Brüder *Jakob Bernoulli* (1654 bis 1705) und *Johann Bernoulli* (1667—1748) alle Kraft, und zwar im besten Einvernehmen mit *Leibniz* und als eifrige Vorkämpfer desselben, während zwischen *Leibniz* und *Newton* ein heftiger Prioritäts-Streit entbrannt war. Die beiden Brüder *Bernoulli* hielten die ersten Vorlesungen über Infinitesimal-Rechnung, über die *Johann Bernoulli* auch das erste Lehrbuch verfaßte.

Aus der nun folgenden Entwickelungsgeschichte der Infinitesimal-Rechnung mögen noch besonders hervorgehoben werden: *Euler* (1707—1783), *Lagrange* (1736—1813) und *Cauchy* (1789 bis 1857). Es würde aber nicht zweckmäßig sein, an dieser Stelle noch tiefer auf die wissenschaftlichen Leistungen dieser Männer einzugehen, da zur richtigen Würdigung derselben eine genaue Kenntnis der Infinitesimal-Rechnung erforderlich ist.

# Einleitung.

## § 1.

### Begriff und Einteilung der Funktionen.

**Erklärung.** *Eine Größe heißt variabel oder veränderlich, wenn sie im Verlaufe derselben Untersuchung nach und nach verschiedene Werte annehmen darf; eine Größe heißt dagegen konstant oder unveränderlich, wenn sie im Verlaufe derselben Untersuchung denselben Wert beibehält.*

Die *unveränderlichen* Größen werden gewöhnlich mit den ersten Buchstaben des Alphabets, also mit

$$a,\ b,\ c, \ldots,$$

oder mit

$$A,\ B,\ C, \ldots,$$

oder mit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots,$$

bezeichnet. Zum Unterschiede davon werden die *veränderlichen* Größen gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabets, also mit

$$x,\ y,\ z,$$

oder mit

$$t,\ u,\ v,\ w,$$

oder mit den $x$, $y$, $z$ entsprechenden griechischen Buchstaben

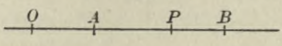
$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

bezeichnet.

Man kann den Wert einer (veränderlichen oder unveränderlichen) Größe auch durch die Lage eines Punktes auf einer geraden Linie geometrisch darstellen, wenn auf derselben ein fester Punkt $O$ als Anfangspunkt gegeben ist. Sind z. B. in Figur 1 die Strecken

$$OA = a, \quad OP = x, \quad OB = b,$$

Fig. 1.




so entsprechen die Punkte $A$, $P$, $B$ den Werten $a$, $x$, $b$. Die Maßeinheit, durch welche dabei die Strecken gemessen sind, ist beliebig; dagegen muß man festsetzen, daß die Punkte auf der *einen* Seite des Anfangspunktes $O$, z. B. auf der rechten Seite von $O$, *positiven* Zahlwerten entsprechen; dann müssen alle Punkte, welche *negativen* Zahlwerten entsprechen, auf der *anderen* Seite von $O$ liegen, während $O$ selbst dem Werte Null entspricht.

Gewöhnlich denkt man sich $x$ in der Weise veränderlich, daß $x$ *alle* Werte zwischen zwei konstanten Werten $a$ und $b$ annehmen kann. Der Punkt $P$, welcher $x$ entspricht, durchläuft dann in Figur 1 die Strecke von $A$ bis $B$. Deshalb sagt man in diesem Falle: „*Die veränderliche Größe $x$ durchläuft das Intervall von $a$ bis $b$.*“ Wenn $a$ gleich $-\infty$ und $b$ gleich $+\infty$ wird, wobei mit $\infty$ eine ins Unbegrenzte wachsende Zahl bezeichnet werden möge, so darf die Veränderliche $x$ alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so daß der Punkt $P$ die ganze unbegrenzte gerade Linie durchläuft.

Wenn man zwischen zwei veränderlichen Größen $x$ und $y$ eine Gleichung aufstellt, so sind diese beiden Größen dadurch in eine gegenseitige Abhängigkeit gebracht, und zwar so, daß die eine Größe, z. B. $y$, nur einen oder mehrere *ganz bestimmte* Werte haben kann, sobald man für die andere veränderliche Größe $x$ irgend einen bestimmten Wert ausgewählt hat. Es sei z. B.

$$y = x^2 + 3x - 2, \tag{1.}$$

dann wird

$$\begin{array}{lll}
y = +8 & \text{für} & x = -5, \\
y = +2 & „ & x = -4, \\
y = -2 & „ & x = -3, \\
y = -4 & „ & x = -2, \\
y = -4 & „ & x = -1, \\
y = -2 & „ & x = \phantom{-}0, \\
y = +2 & „ & x = +1, \\
y = +8 & „ & x = +2, \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Hätte man in der Gleichung (1.) beliebige Werte für $y$ angenommen, so wären dadurch die entsprechenden Werte von $x$ ebenfalls bestimmt gewesen. Weil aber die Gleichung (1.) in bezug auf $x$ vom *zweiten* Grade ist, so entsprechen jedem beliebigen Werte von $y$ *zwei* (reelle oder imaginäre) Werte von $x$. So sind z. B. dem Werte

$$y = +2$$

die beiden Werte

$$x = +1, \quad x = -4$$

zugeordnet. Die veränderliche Größe $x$, deren Werte man beliebig annimmt, nennt man „die *unabhängige* Veränderliche oder das *Argument*"; die andere veränderliche Größe $y$ dagegen nennt man „die *abhängige* Veränderliche oder eine *Funktion* von $x$".

In der Gleichung (1.) wurde also zuerst $x$ als die *unabhängige* Veränderliche und $y$ als eine von $x$ *abhängige* Veränderliche, d. h. als eine *Funktion* von $x$ betrachtet.

Gewöhnlich ist das Gesetz der Abhängigkeit zwischen einer Funktion $y$ und der unabhängigen Veränderlichen $x$ durch eine *Gleichung* zwischen $x$ und $y$ gegeben. Ganz allgemein kann man aber den Begriff der Funktion in folgender Weise erklären:

*Eine veränderliche Größe $y$ heißt eine Funktion einer anderen veränderlichen Größe $x$ in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$, wenn jedem Werte von $x$ in diesem Intervalle ein oder mehrere Werte von $y$ nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.*

So ist z. B. der Umfang eines Kreises eine Funktion von dem Halbmesser des Kreises. Dasselbe gilt vom Flächeninhalt des Kreises. Diese Funktionen können auch durch die Gleichungen

$$y = 2x\pi, \quad y = x^2\pi$$

dargestellt werden.

Ebenso sind Oberfläche und Volumen einer Kugel Funktionen von dem Halbmesser der Kugel, welche bezw. durch die Gleichungen

$$y = 4x^2\pi, \quad y = \frac{4x^3\pi}{3}$$

dargestellt werden.

Bei diesen Beispielen war der Halbmesser als eine *veränderliche* Größe betrachtet worden. Läßt man aber den Halbmesser *unveränderlich*, so kann man z. B. auch die Sehne, das Segment und den Sektor des Kreises als Funktionen des zugehörigen Zentriwinkels ansehen.

Ferner ist die Intensität des Lichtes eine Funktion von der Entfernung des leuchtenden Punktes; die Spannkraft des Dampfes ist eine Funktion der Temperatur desselben; die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers ist eine Funktion der Fallzeit; die Schwingungsdauer bei einem Pendel ist eine Funktion seiner Länge, usw.

Wie oben schon erwähnt wurde, kann man die Abhängigkeit einer Funktion von der unabhängigen Veränderlichen häufig durch eine Gleichung ausdrücken. Demnach sind z. B. folgende Ausdrücke Funktionen von $x$:

$$y = x^2 + 3x - 2, \quad y = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 11,$$
$$y = \frac{2x - 1}{x + 3}, \quad y = \frac{1}{x} - \frac{3x + 4}{x^2 + x},$$
$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2}}{x - \sqrt{a^2 - x^2}},$$
$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = \log x, \quad y = \log(\sin x),$$
$$y = a^x, \quad y = b^x + b^{-x},$$
$$y = a^x + b \cos x - cx^m.$$

Ist die Abhängigkeit zwischen $x$ und $y$ durch eine nach $y$ *aufgelöste* Gleichung gegeben, wie das in den soeben erwähnten Beispielen geschehen ist, so nennt man $y$ eine „*entwickelte* (oder *explizite*) Funktion von $x$“.

Ist dagegen die Gleichung zwischen $x$ und $y$ nicht nach $y$ aufgelöst, so nennt man $y$ eine „*unentwickelte* (oder *implizite*) Funktion von $x$“. Durch jede der Gleichungen

$$xy^3 - 3x^2y^2 + (2x^2 - 5)y - x^3 = 0,$$
$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 7x + 3 = 0,$$
$$y^x - \cos x + x^n + 7 = 0$$

ist z. B. $y$ als eine *unentwickelte* Funktion von $x$ gegeben.

In vielen Fällen ist es möglich, $y$ als eine *entwickelte* Funktion von $x$ darzustellen, obgleich $y$ zunächst als eine *unentwickelte* Funktion von $x$ gegeben ist. Aus

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

folgt z. B.

$$y = 2x \pm \sqrt{7x - 3};$$

und aus

$$y^x - \cos x + x^n + 7 = 0$$

folgt

$$y = \sqrt[x]{\cos x - x^n - 7}.$$

Will man andeuten, daß $y$ eine *entwickelte* Funktion von $x$ ist, so schreibt man gewöhnlich

$$y = f(x), \quad \text{oder} \quad y = F(x), \quad \text{oder} \quad y = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad y = \Phi(x).$$

Hat man es mit mehreren Funktionen zu tun, die man voneinander unterscheiden will, so geschieht dies durch Indices, indem man schreibt

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots.$$

Will man andeuten, daß $y$ eine *unentwickelte* Funktion von $x$ ist, so schreibt man gewöhnlich

$$f(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Man denkt sich dabei die Gleichung zwischen $x$ und $y$ so umgeformt, daß auf der rechten Seite nur 0 stehen bleibt.

Aus den angeführten Beispielen erkennt man auch, wie schon oben gelegentlich bemerkt wurde, daß jedem Werte der unabhängigen Veränderlichen $x$ nicht immer nur *ein* Wert der Funktion $y$ entspricht, sondern daß häufig jedem Werte von $x$ *mehrere* Werte von $y$ zugeordnet sind. Demnach muß man *eindeutige* und *mehrdeutige* Funktionen unterscheiden.

In einer Gleichung zwischen $x$ und $y$ wurde bisher $x$ als diejenige Veränderliche angesehen, deren Wert man beliebig annehmen durfte. Mit demselben Rechte kann man aber auch $y$ als die *unabhängige* und $x$ als die *abhängige* Veränderliche betrachten. (Vergl. das Beispiel auf S. 6.) Das gibt den Satz:

*Wenn $y$ durch eine Gleichung (welche die beiden Veränderlichen $x$ und $y$ wirklich enthält) als eine entwickelte oder un-*

*entwickelte Funktion von $x$ gegeben ist, so ist auch umgekehrt $x$ eine Funktion von $y$,* oder mit anderen Worten: *Die durch eine Gleichung gegebene Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Größen $x$ und $y$ ist eine gegenseitige.*

Daraus ergibt sich auch die Erklärung solcher Funktionen, welche aus bereits bekannten Funktionen „*durch Umkehrung*" hervorgehen, indem man das Argument zur Funktion und die Funktion zum Argumente macht.

Es sei z. B.

$$y = b^x, \tag{2.}$$

dann kann auch $x$ als eine Funktion von $y$ betrachtet werden, und zwar wird diese Funktion der „*Logarithmus*" von $y$ mit der Basis $b$ genannt. Dies gibt die Gleichung

$$x = \overset{b}{\log} y; \tag{2a.}$$

das stimmt überein mit der bekannten Erklärung des Logarithmus: „*Der Logarithmus einer Zahl $y$ ist der Exponent, zu dem die Basis $b$ erhoben werden muß, damit man $y$ erhält.*"

Die Gleichungen (2.) und (2a.) sagen also dem Sinne nach genau dasselbe aus.

Ein zweites Beispiel liefert die Gleichung

$$y = \sin x. \tag{3.}$$

Es sei aber hier zunächst darauf hingewiesen, daß man in der höheren Mathematik bei den trigonometrischen Funktionen

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \mathrm{tg}\, x, \quad \mathrm{ctg}\, x$$

unter $x$ nicht einen Winkel in Graden, Minuten und Sekunden, sondern das Verhältnis des dem Zentriwinkel entsprechenden Kreisbogens zum Halbmesser des Kreises versteht. Macht man den Halbmesser der Einheit gleich, so ist $x$ geradezu die Länge des Kreisbogens. Einem Winkel von $360^0$ entspricht also der Bogen $2\pi$, nämlich der Umfang des ganzen Kreises mit dem Halbmesser 1, einem Winkel von $1^0$ entspricht daher der Bogen

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017\,453\,29,$$

und einem Winkel von $\alpha^0$ entspricht der Bogen

$$\frac{\alpha\pi}{180} = \alpha \,.\, 0{,}017\,453\,29.$$

Der Bogen, dessen Länge gleich dem Halbmesser ist, entspricht also einem Winkel $\alpha$, für welchen $\frac{\alpha\pi}{180}$ gleich 1 wird. Dies gibt

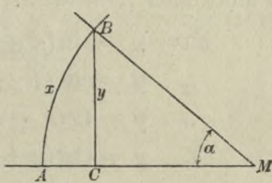
$$\alpha^0 = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3{,}141\,592\,65} = 57^0\,17'45''.$$

Dieser Winkel wird „*Radiant*“ genannt und bildet also die Einheit, durch welche die anderen Winkel gemessen werden.

In Figur 2 sei deshalb

$$MA = MB = 1,$$

Fig. 2.




dann entspricht dem Zentriwinkel $AMB$ oder $\alpha$ der Bogen

$$AB = x = \frac{\alpha\pi}{180}\,.$$

Dies vorausgeschickt, ist der Sinn der Gleichung (3.) der, daß $x$ der Bogen (arcus) ist, dessen Sinus ($CB$) gleich $y$ wird. Dasselbe soll auch die Gleichung

(3a.) $$x = \arcsin y$$

(sprich: $x$ gleich Arcus Sinus $y$) aussagen; nämlich $x$ ist gleich dem Arcus, dessen Sinus gleich $y$ ist.

In ähnlicher Weise sind die Gleichungen

(4.) $y = \cos x$ und (4a.) $x = \arccos y$,

(5.) $y = \operatorname{tg} x$ und (5a.) $x = \operatorname{arctg} y$,

(6.) $y = \operatorname{ctg} x$ und (6a.) $x = \operatorname{arcctg} y$

gleichbedeutend.

Diese Funktionen

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x,$$

welche durch *Umkehrung* aus den *trigonometrischen* Funktionen abgeleitet werden, heißen „*zyklometrische* Funktionen“.

Der Wert der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ ändert sich bekanntlich nicht, wenn man die unabhängige Veränderliche $x$ um $2\pi$ (d. h. den zugehörigen Winkel um $360^0$)

oder um ein Vielfaches davon vermehrt oder vermindert. Es ist also für ganzzahlige Werte von $n$

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x \quad \text{und} \quad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x.$$

Die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ wiederholen sich also periodisch. Deshalb nennt man diese Funktionen „*periodische Funktionen*“ und die Größe $2\pi$ heißt „die *Periode*“ derselben.

Ebenso sind die trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ *periodische* Funktionen, denn es wird

$$\operatorname{tg}(x \pm n\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x \pm n\pi) = \operatorname{ctg} x;$$

hier ist aber die Periode $\pi$ (oder $180^0$).

Diesem Umstande entsprechend werden die zyklometrischen Funktionen „*unendlich vieldeutige* Funktionen“, denn

$$\begin{array}{llll}
\text{aus} & y = \sin(x \pm 2n\pi) & \text{folgt} & x \pm 2n\pi = \arcsin y, \\
,, & y = \cos(x \pm 2n\pi) & ,, & x \pm 2n\pi = \arccos y, \\
,, & y = \operatorname{tg}(x \pm n\pi) & ,, & x \pm n\pi = \operatorname{arctg} y, \\
,, & y = \operatorname{ctg}(x \pm n\pi) & ,, & x \pm n\pi = \operatorname{arcctg} y,
\end{array}$$

wobei $n$ jede beliebige ganze Zahl sein darf. Beachtet man aber, daß $x = \sin y$ alle Werte von $-1$ bis $+1$ durchläuft, wenn $y$ die Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft, so kann man $y = \arcsin x$ zu einer eindeutigen Funktion machen, wenn man festsetzt, daß $y$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll. Ebenso kann man $y = \arccos x$ zu einer eindeutigen Funktion machen, wenn man ihre Werte auf das Intervall von 0 bis $\pi$ beschränkt, und zwar mit Rücksicht darauf, daß $x = \cos y$ alle Werte von $+1$ bis $-1$ durchläuft, wenn $y$ alle Werte von 0 bis $\pi$ annimmt. Die Funktion $x = \operatorname{tg} y$ durchläuft alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn $y$ alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft, deshalb wird man $y = \operatorname{arctg} x$ zu einer eindeutigen Funktion machen, indem man sie auf das Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ beschränkt. Schließlich durchläuft die Funktion $x = \operatorname{ctg} y$ alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$, wenn $y$ alle Werte von 0 bis $\pi$

durchläuft, deshalb wird man $y = \operatorname{arcctg} x$ zu einer eindeutigen Funktion machen, wenn man ihre Werte auf das Intervall von 0 bis $\pi$ beschränkt.

**Einteilung der entwickelten Funktionen.** Die *entwickelten* Funktionen, von denen zunächst nur die Rede sein soll, teilt man wieder ein in *algebraische* und *transzendente* Funktionen, und zwar heißt $y$ eine *algebraische* Funktion von $x$, wenn $y$ einem Ausdrucke gleich ist, welcher aus $x$ und aus konstanten Größen nur durch die gewöhnlichen algebraischen Operationen, nämlich nur durch *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation*, *Division* und *Wurzelausziehung* gebildet ist.

Ist dieses nicht der Fall, so heißt $y$ eine *transzendente* Funktion von $x$. Durch jede der Gleichungen

$$y = 2x^3 + 3\sqrt{x} - x^2\sqrt[5]{x}, \tag{7.}$$

$$y = \frac{3x^2 + 7x - 11}{2x + 5} - 13x + 9, \tag{8.}$$

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 + 3x - 8}{x + 1}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}} \tag{9.}$$

wird daher $y$ als eine *algebraische* Funktion von $x$ erklärt; durch jede der Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \tag{10.}$$

$$y = a^x, \quad y = \log x, \tag{11.}$$

$$y = 3\sin x + 4\cos x, \tag{12.}$$

$$y = a^x + 2\sqrt[x]{b} + x^3 - c \tag{13.}$$

dagegen wird $y$ als eine *transzendente* Funktion von $x$ erklärt.

Die *algebraischen* Funktionen werden wieder eingeteilt in *rationale* und *irrationale*, je nachdem man bei der Bildung Wurzelausziehung vermeiden kann oder nicht; und die *rationalen* Funktionen werden weiter eingeteilt in *ganze rationale* und in *gebrochene rationale* Funktionen, je nachdem man bei der Bildung die Division vermeiden kann oder nicht.

1) *Die ganzen rationalen Funktionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen $x$ und aus konstanten Größen nur durch Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet.*

(Die Division und die Wurzelausziehung sind also hierbei ausgeschlossen.)

Es ist z. B.

$$y = 3x^4 - \tfrac{7}{2}x^3 + \tfrac{2}{5}x^2 - 11x + \tfrac{3}{8}$$

eine *ganze rationale* Funktion von $x$, denn sie ist aus $x$ und den konstanten Größen $3$, $\tfrac{7}{2}$, $\tfrac{2}{5}$, $11$, $\tfrac{3}{8}$ nur durch Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammengesetzt.

Da hierbei die Brüche $\tfrac{7}{2}$, $\tfrac{2}{5}$, $\tfrac{3}{8}$ vorkommen, so könnte man glauben, die Bildung dieser Funktion widerspräche der soeben angegebenen Regel, weil diese Brüche durch Division entstanden sind. Dieser Einwand ist aber deshalb unbegründet, weil die Resultate der Division selbst wieder konstante Größen sind, die man bei der Bildung einer ganzen rationalen Funktion beliebig verwenden darf.

Ferner ist zu beachten, daß die Potenzen von $x$, also

$$x^2 = xx, \quad x^3 = xxx, \quad x^4 = xxxx, \ldots$$

durch Multiplikation entstanden sind, so lange der Exponent eine *positive ganze* Zahl ist.

Die Funktion

$$y = ax + a_1$$

heißt eine *ganze rationale* Funktion *ersten Grades*, weil $x$ (ohne daß Klammern auftreten) nur in der ersten Potenz vorkommt.

Ebenso heißt

$$y = ax^2 + a_1x + a_2$$

eine ganze rationale Funktion *zweiten Grades*,

$$y = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

eine ganze rationale Funktion *dritten Grades*,

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

eine ganze rationale Funktion $n^{ten}$ *Grades*, weil (ohne daß Klammern auftreten) die höchste Potenz von $x$, welche vorkommt, $x^n$ ist.

Die Gleichung

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

gibt auch diejenige Form an, auf welche *jede* ganze rationale Funktion gebracht werden kann, wenn man sämtliche Klammern auflöst. Ist z. B.

$$y = (2x^2 - 3x + 11)(3x - 5) + x[(2x+3)(x+2) + (x-1)(x+1) - 7],$$

so findet man, indem man alle Klammern auflöst und die Glieder mit gleichen Potenzen von $x$ vereinigt,

$$\begin{aligned} y &= 6x^3 - 19x^2 + 48x - 55 + x[(2x^2 + 7x + 6) + (x^2 - 1) - 7] \\ &= 9x^3 - 12x^2 + 46x - 55. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren führt immer zum Ziele, wie auch die Funktion durch Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet sein mag, wenn nur die Anzahl der angewendeten Operationen eine endliche ist. Unter dieser Voraussetzung kann man nämlich zunächst die innersten Klammern auflösen, d. h. diejenigen Klammerausdrücke, in denen keine weiteren Klammern stehen, und in den gefundenen Resultaten die Glieder vereinigen, welche mit gleichen Potenzen von $x$ multipliziert sind. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, kann man nach und nach alle Klammern auflösen, die Glieder mit gleichen Potenzen von $x$ vereinigen und nach fallenden Potenzen von $x$ ordnen.

Um anzudeuten, daß $y$ eine *ganze* rationale Funktion von $x$ ist, schreibt man

$$y = g(x), \quad \text{oder} \quad y = G(x)\,.$$

2) *Die gebrochenen rationalen Funktionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen $x$ und aus konstanten Größen gebildet durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.* (Die Wurzelausziehung ist also hierbei ausgeschlossen.)

So sind z. B.

$$y = \frac{ax^2 - b}{cx + d},$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{7x}{2x - 3},$$

$$y = \frac{\frac{2x-1}{5x+2} + \frac{2x+9}{3x-4}}{\frac{1}{2x} - \frac{3x^2}{2x+5}}$$

*gebrochene rationale* Funktionen von $x$. Hier tritt also zu den Operationen, welche bei der Bildung von *ganzen* rationalen Funktionen zulässig waren, noch die Division hinzu. Wie oft aber auch die Division bei der Bildung einer gebrochenen rationalen Funktion verwendet sein mag, es läßt sich die Funktion immer so umformen, daß bei ihrer Bildung nur *eine einzige* Division vorkommt. Es gilt nämlich der Satz:

*Jede gebrochene rationale Funktion läßt sich darstellen als Quotient von zwei ganzen rationalen Funktionen*, d. h. es läßt sich jede gebrochene rationale Funktion auf die Form

$$y = \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{bx^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

bringen.

Der Beweis dieses Satzes folgt daraus, daß man Brüche addiert oder subtrahiert, indem man sie auf gleichen Nenner bringt und die Zähler addiert oder subtrahiert, daß man ferner Brüche miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, und daß man endlich Brüche durcheinander dividiert, indem man den Divisor umkehrt und dann multipliziert. Alle diese Operationen liefern, wenn sie auf Quotienten von ganzen rationalen Funktionen angewendet werden, als Endresultat immer wieder den Quotienten von zwei ganzen rationalen Funktionen.

Führt man also bei der Bildung einer gebrochenen rationalen Funktion alle Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen in der gehörigen Reihenfolge wirklich aus, indem man immer nur mit Brüchen operiert, welche schon die vorgeschriebene Form haben, so kann man schließlich die Funktion selbst auf die vorgeschriebene Form bringen. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Anzahl der Operationen nicht unendlich groß ist.

Es ist z. B.

$$y = \frac{\dfrac{2x-3}{x-1} + \dfrac{3x-2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-2}} + 7x = \frac{\dfrac{5x^2-6x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x}{x-2}} + 7x$$

$$= \frac{5x^2-6x-1}{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{x} + 7x$$

$$= \frac{5x^3-16x^2+11x+2}{x^3-x} + 7x$$

$$= \frac{7x^4+5x^3-23x^2+11x+2}{x^3-x}.$$

Wie man bei den gewöhnlichen Brüchen *echte* und *unechte* Brüche von einander unterscheidet, je nachdem der Zähler des Bruches kleiner oder größer ist als der Nenner, so unterscheidet man auch *echt* gebrochene und *unecht* gebrochene rationale Funktionen. Doch kommt es hier natürlich nicht auf die *Größe* von Zähler und Nenner an, weil dieselben ja noch Funktionen von $x$ sind und deshalb unendlich viele Werte annehmen. *Man nennt vielmehr eine gebrochene rationale Funktion*

$$y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{bx^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

*„echt gebrochen", wenn der Grad n des Zählers kleiner ist als der Grad m des Nenners; man nennt sie dagegen „unecht gebrochen", wenn der Grad des Zählers größer oder mindestens ebenso groß ist wie der Grad des Nenners.*

Wie man aber einen *unechten* Bruch, z. B. $\frac{17}{5}$, durch Ausführung der Division als Summe einer ganzen Zahl 3 und eines echten Bruches $\frac{2}{5}$ darstellen kann, so kann man auch jede unecht gebrochene rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ als die Summe einer *ganzen* rationalen Funktion $g(x)$ und einer *echt gebrochenen* rationalen Funktion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ darstellen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Zähler $F(x)$ durch den Nenner $f(x)$ zu dividieren, bis der Grad des Restes $\varphi(x)$ kleiner ist als der Grad des Nenners. Bezeichnet man den Quotienten mit $g(x)$, wird also

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) + \varphi(x),$$

so erhält man

$$\frac{F(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

wo $g(x)$ eine *ganze* rationale Funktion und $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ eine *echt gebrochene* rationale Funktion ist. Am besten erkennt man das Verfahren aus einem Beispiele. Es sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3},$$

dann erhält man durch Division

$$\begin{array}{l}
x^3 + 9x^2 + 12x - 16 \div (x^2 + 2x - 3) = (x + 7) + (x + 5), \\
\underline{x^3 + 2x^2 - \phantom{1}3x \phantom{{}-16}} \\
\phantom{x^3} + 7x^2 + 15x - 16 \\
\underline{\phantom{x^3} + 7x^2 + 14x - 21} \\
\phantom{x^3 + 7x^2} + \phantom{1}x + \phantom{1}5
\end{array}$$

also

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3} = (x + 7) + \frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}.$$

Bekanntlich ist

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n};$$

deshalb sind Potenzen von $x$ mit *negativen*, ganzzahligen Exponenten auch *gebrochene* rationale Funktionen von $x$.

Um anzudeuten, daß $y$ eine (ganze oder gebrochene) *rationale* Funktion von $x$ ist, schreibt man gewöhnlich

$$y = R(x).$$

3) *Die irrationalen (entwickelten) Funktionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen $x$ und aus konstanten Größen gebildet durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelausziehung.*

Hier tritt also noch die Wurzelausziehung hinzu.

Durch die Gleichungen

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - 7} = (2x^2 - 7)^{\frac{1}{3}},$$

$$y = \sqrt[5]{3x - \sqrt{4x^2 + 5}},$$

$$y = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5}}{x^2 - 1}$$

werden also *irrationale* Funktionen erklärt. Man erkennt aus diesen Beispielen, daß Potenzen von $x$ mit *gebrochenen* (positiven oder negativen) Exponenten *irrationale* Funktionen von $x$ sind, denn es ist

$$x^{+\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

**Bemerkung.**

Bei dieser Einteilung der Funktionen handelte es sich nur um *entwickelte* Funktionen; nimmt man aber die *unentwickelten* Funktionen hinzu, so erweitert sich der Begriff der *algebraischen* Funktionen, und zwar heißt dann $y$ eine algebraische Funktion von $x$, wenn $y$ die Wurzel einer Gleichung von der Form

$$G_0(x) \cdot y^n + G_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + G_{n-1}(x) \cdot y + G_n(x) = 0$$

ist, wobei $G_0(x)$, $G_1(x), \ldots G_{n-1}(x)$, $G_n(x)$ sämtlich *ganze rationale* Funktionen von $x$ sind. Vorläufig können aber solche algebraische Funktionen übergangen werden.

## § 2.

## Geometrische Darstellung der Funktionen.

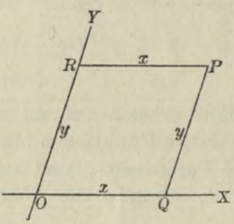
Von dem Verlaufe einer Funktion kann man sich auf zweifache Weise eine Vorstellung machen, *erstens* durch eine Tabelle und *zweitens* durch eine Figur.

Solche Tabellen sind z. B. für die Funktionen $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\log x$, $\log(\sin x)$, $\log(\cos x)$ usw. hergestellt und zwar in der Weise, daß in der einen Kolonne die verschiedenen, nach regelmäßigen Intervallen eingeteilten Werte von $x$ und in der anderen Kolonne die zugehörigen Werte von $y$ stehen, z. B.

| $x$ | $y = {}_{10}\log x$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,301 030 0 |
| 3 | 0,477 121 3 |
| 4 | 0,602 060 0 |
| . | . . . . . . . . . . . |

Das andere Mittel bietet die analytische Geometrie. Sind nämlich in einer Ebene zwei sich schneidende gerade Linien $OX$ und $OY$ gegeben (Fig. 3), und legt man durch einen beliebigen Punkt $P$ die Gerade $RP$ parallel zu $OX$ und die Gerade $QP$ parallel zu $OY$, so erhält man ein Parallelogramm $OQPR$, in welchem

Fig. 3.




$$OQ = RP = x,$$
$$OR = QP = y$$

die *Koordinaten* des Punktes $P$ heißen, und zwar nennt man $x$ die „*Abszisse*" und $y$ die „*Ordinate*" des Punktes $P$. Die gegebenen Geraden $OX$ und $OY$ heißen die „*Koordinaten-Achsen*", und zwar heißt $OX$ die „*Abszissen-Achse*" oder „*X-Achse*", $OY$ heißt die „*Ordinaten-Achse*" oder „*Y-Achse*", und ihre Zusammenstellung heißt ein „*Parallel-Koordinatensystem*". Dabei nennt man $O$ den „*Nullpunkt*" oder den „*Anfangspunkt* des Koordinatensystems".

Durch die Lage des Punktes $P$ sind also seine Koordinaten $x$ und $y$ bestimmt; umgekehrt ist aber auch die Lage des Punktes $P$ bestimmt, wenn seine Koordinaten $x$ und $y$ gegeben sind. Schneidet man nämlich $OQ = x$ von $O$ aus auf der $X$-Achse und $OR = y$ von $O$ aus auf der $Y$-Achse ab, so schneiden sich die Geraden, welche man bezw. durch $R$ parallel zur $X$-Achse und durch $Q$ parallel zur $Y$-Achse legt, im Punkte $P$.

Allerdings ist diese Konstruktion nur dann eindeutig, wenn man die *eine* Seite der $X$-Achse, z. B. die rechts von $O$ verlaufende, als die *positive* und deshalb die andere Seite als die *negative* festsetzt, so daß $OQ = x$ auf der positiven oder negativen Seite abzutragen ist, je nachdem $x$ einen positiven oder negativen Wert hat. Ebenso muß man auf der $Y$-Achse die *eine* Seite, z. B. die über der $X$-Achse, als die *positive* und deshalb die andere als die *negative* festsetzen.

Für viele Untersuchungen ist es am bequemsten, ein „*rechtwinkliges*" Koordinatensystem zugrunde zu legen, bei welchem die Koordinaten-Achsen sich rechtwinklig schneiden. Das Parallelogramm $OQPR$ wird dann ein *Rechteck*. Man wendet dabei zur Konstruktion der einzelnen Punkte am bequemsten karriertes Millimeter-Papier an.

Betrachtet man nun $x$ und $y$ als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, so entspricht jedem Wertepaare der eben beschriebenen Tabelle ein Punkt. Da man den Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Werten von $x$, wie eine nähere Untersuchung zeigt, beliebig klein machen kann, so wird die Anzahl dieser Punkte beliebig groß; auch werden im allgemeinen die aufeinander folgenden Punkte einander beliebig nahe liegen und dadurch eine stetig verlaufende Kurve bestimmen, welche der Gleichung

$$y = f(x)$$

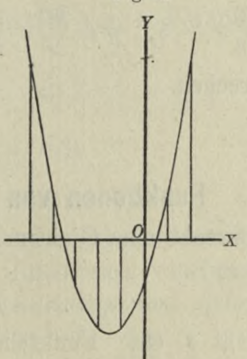
entspricht. Ist z. B.

$$y = x^2 + 3x - 2, \tag{1.}$$

so ergibt sich die Tabelle

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-5$ | $+8$ |
| $-4$ | $+2$ |
| $-3$ | $-2$ |
| $-2$ | $-4$ |
| $-1$ | $-4$ |
| $0$ | $-2$ |
| $+1$ | $+2$ |
| $+2$ | $+8$ |
| .... | .... |

Fig. 4.




und daraus die in Fig. 4 dargestellte Kurve.

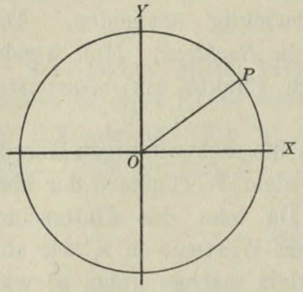
Ein zweites Beispiel liefert die Gleichung

(2.) $$x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

oder

(2a.) $$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Fig. 5.




Die Kurve, welche dieser Gleichung entspricht, ist der in Fig. 5 dargestellte Kreis.

Liegt die einer Gleichung zwischen $x$ und $y$ entsprechende Kurve gezeichnet vor, so kann man zu jedem Werte von $x$ die zugehörigen Werte von $y$ finden, indem man im Abstande $x$ eine Parallele zur $Y$-Achse zieht, welche die Kurve in einem oder in mehreren Punkten $P$ schneidet. Der Abstand eines solchen Punktes $P$ von der $X$-Achse ist dann ein zugehöriger Wert von $y$.

Möglicherweise wird diese Parallele die Kurve in gar keinem Punkte schneiden. Dies tritt in dem zweiten Beispiele ein, wenn $x^2 > 25$ ist; dann wird nämlich $y$ imaginär.

Dem Anfänger ist zu empfehlen, daß er noch mehrere Kurven nach dem angegebenen Verfahren zeichnet, z. B. die Kurven, welche den Gleichungen

$$y = \frac{2}{3}x - 5, \quad y = \frac{60}{x}, \quad y = \pm\sqrt{9x}, \quad y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{36 - x^2}$$

entsprechen.

## § 3.

## Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Besteht eine Gleichung zwischen *drei* Veränderlichen $x$, $y$, $z$, ist z. B.

$$z = 3x^2 - 7xy + 11y^2,$$

so heißt $z$ eine Funktion der beiden Veränderlichen $x$ und $y$, weil jedem Wertepaare $x$, $y$ ein oder mehrere Werte von $z$ nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.

Ganz allgemein kann man eine Funktion von zwei Veränderlichen in folgender Weise erklären:

*Eine veränderliche Größe $z$ heißt eine Funktion der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ für $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, wenn jedem Wertepaare $x$, $y$ in den angegebenen Intervallen ein oder mehrere Werte von $z$ nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.*

Diese Erklärung läßt sich leicht auch auf Funktionen von *drei* und *mehr* unabhängigen Veränderlichen erweitern.

So ist z. B. der Flächeninhalt $\left(\frac{gh}{2}\right)$ eines Dreiecks eine Funktion der Grundlinie $g$ und der Höhe $h$; das Volumen $\left(\frac{r^2\pi h}{3}\right)$ eines Kreiskegels ist eine Funktion vom Halbmesser $r$ des Grundkreises und der Höhe $h$.

Das Volumen eines Kegelstumpfes

$$\frac{h\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

ist eine Funktion der Höhe $h$ und der Halbmesser $r_1$ und $r_2$ der beiden begrenzenden Kreise.

Die Schwingungszahl einer gespannten Saite ist eine Funktion ihrer Länge, ihrer Dicke und der spannenden Gewichte.

Der Zins, welchen ein ausgeliehenes Kapital bringt, ist eine Funktion des Kapitals, der Zeit und des Zinsfußes.

Um anzudeuten, daß $y$ eine Funktion von $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, schreibt man

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$y = F(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Die Funktionen von *mehreren* Veränderlichen kann man in derselben Weise einteilen wie die Funktionen von *einer* Veränderlichen; es gibt also auch hier *eindeutige* und *mehrdeutige*, *entwickelte* und *unentwickelte* Funktionen.

Die *entwickelten* Funktionen werden eingeteilt in *algebraische* und *transzendente*. Dabei unterscheidet man unter den *alge-*

*braischen* Funktionen je nach ihrer Bildung aus den unabhängigen Veränderlichen und konstanten Größen gerade so wie bei den Funktionen von *einer* Veränderlichen

1) *ganze rationale Funktionen*,
2) *gebrochene rationale Funktionen*,
3) *irrationale Funktionen*.

Alle übrigen Funktionen heißen *transzendent*.

## § 4.
## Begriff der Grenze.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 1.)*)

*Wenn eine Reihe von Größen* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *sich einer konstanten Größe* $A$ *immer mehr nähert, so daß schließlich der Unterschied zwischen* $X_n$ *und* $A$ *für hinreichend großes* $n$ *beliebig klein wird, so heißt* $A$ *die Grenze (limes) von* $X_n$.

Dabei kann es vorkommen, daß $X_n$ immer kleiner bleibt als die Grenze $A$, oder daß $X_n$ immer größer bleibt als die Grenze $A$; es kann aber auch vorkommen, daß diese Größen $X_n$ bald größer sind, bald kleiner als die Grenze $A$, der sie sich nähern. Ein Beispiel hierfür bieten die periodischen Kettenbrüche. Außerdem ist es möglich, daß für gewisse Werte von $n$ der Unterschied zwischen $X_n$ und $A$ *kleiner* ist als der Unterschied zwischen $X_{n+1}$ und $A$; es soll hier auch nur vorausgesetzt werden, daß für *hinreichend große* Werte von $n$ dieser Unterschied *beliebig klein* gemacht werden kann.

Um auszudrücken, daß $A$ die Grenze von $X_n$ ist, schreibt man

$$\lim_{n=\infty} X_n = A. \quad \text{(sprich: limes } X_n \text{ für limes } n \text{ gleich unendlich.)}$$

Es kommt auch vor, daß man die Reihe von Größen $X_1$, $X_2$, $X_3, \ldots$ durch eine veränderliche Größe $X$ ersetzt, die sich so verändert, daß der Unterschied zwischen $X$ und der konstanten Größe $A$ immer kleiner und schließlich *beliebig klein*

*) Die wichtigsten Formeln sind im Anhange zu einer Tabelle zusammengestellt.

wird. Auch in diesem Falle nennt man $A$ die Grenze von $X$ und schreibt

$$\lim X = A.$$

## Beispiele.

1) Der Umfang eines Kreises ist die Grenze vom Umfange des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen $n$-Ecks, wenn die Anzahl der Seiten immer größer wird, denn der Unterschied zwischen beiden wird *beliebig klein*, wenn man $n$ *hinreichend groß* macht.

Ebenso kann der Umfang des Kreises als Grenze des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen $n$-Ecks angesehen werden.

2) Auch die Fläche des Kreises ist die Grenze vom Flächeninhalt des dem Kreise einbeschriebenen und ebenso des umschriebenen $n$-Ecks, wenn $n$ immer größer wird.

3) Es ist

$$0{,}7777\ldots = \lim_{n=\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9}\cdot$$

Hierbei bedeutet das Zeichen $\lim\limits_{n=\infty}$ (sprich: limes für limes $n$ gleich unendlich), daß der Wert der Summe $\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots+\frac{7}{10^n}\right)$ gesucht wird, wenn $n$ ins Unbegrenzte wächst.

Dieser gesuchte Grenzwert ist in der Tat $\frac{7}{9}$, denn es wird

$$\frac{7}{9}-\frac{7}{10}=\frac{7}{90},$$

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}\right)=\frac{7}{90}-\frac{7}{100}=\frac{7}{900},$$

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}\right)=\frac{7}{900}-\frac{7}{1000}=\frac{7}{9000},$$

..........................................................

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9.10^n}\cdot$$

Der Unterschied zwischen $\frac{7}{9}$ und 0,777 ... wird also *beliebig klein*, wenn man eine *hinreichend große* Anzahl von Dezimalstellen berücksichtigt.

Ähnliches gilt ganz allgemein, wenn man einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner von 2 und 5 verschiedene Faktoren enthält, in einen periodischen Dezimalbruch verwandelt.

4) Es ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

In der Tat, es wird

$$2-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}.$$

Der Unterschied zwischen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ und 2 wird also *beliebig klein*, wenn man $n$ *hinreichend groß* macht.

5) Die Gleichung

$$\sqrt{3}=1{,}732\,05$$

ist nicht genau, denn es wird

$$1{,}732\,05^2=2{,}999\,997\,202\,5,$$

ein Ausdruck, der von 3 um eine kleine Größe verschieden ist; nimmt man aber mehr Dezimalstellen, so kann man den Unterschied zwischen dem Quadrat des Dezimalbruches und 3 immer kleiner machen. Es ist also $\sqrt{3}$ die Grenze, welcher sich der Dezimalbruch nähert; d. h. der Unterschied zwischen dem Dezimalbruch und $\sqrt{3}$ wird *beliebig klein*, wenn man die Anzahl der Stellen *hinreichend groß* macht.

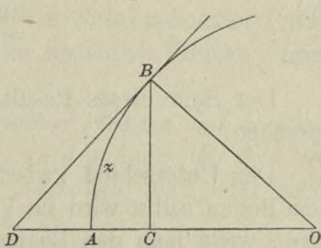
6) Es soll bewiesen werden, daß

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

wird.

Hierbei bedeutet das Zeichen $\lim\limits_{z=0}$ (sprich: limes $\frac{\sin z}{z}$ für limes $z$ gleich 0), daß der Wert von $\frac{\sin z}{z}$ bestimmt werden soll, wenn sich der Wert des Bogens $z$ der Null beliebig nähert.

Fig. 6.




Zum Beweise beachte man, daß für alle Bögen $z$, welche kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (d. h. kleiner als $90^0$) sind, in Figur 6

$$\triangle COB \leqq \text{Sektor } AOB \leqq \triangle DOB \tag{1.}$$

wird. Das Gleichheitszeichen kommt hierbei nur in Betracht, wenn der Bogen $AB$ gleich Null wird. Macht man den Halbmesser des Kreises um $O$ gleich 1, so ist

$$\sin z = CB, \quad \cos z = CO, \quad \operatorname{tg} z = BD,$$

also

$$2 \triangle COB = CB \,.\, CO = \sin z \cos z,$$
$$2 \text{ Sektor } AOB = \widehat{AB} \,.\, AO = z,$$
$$2 \triangle DOB = OB \,.\, BD = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

folglich gehen die Ungleichungen (1.) über in

$$\sin z \cos z \leqq z \leqq \frac{\sin z}{\cos z}. \tag{1a.}$$

Indem man die Gleichungen

$$\sin z = \sin z = \sin z \tag{2.}$$

durch die Ungleichungen (1a.) dividiert, erhält man

$$\frac{1}{\cos z} \geqq \frac{\sin z}{z} \geqq \cos z; \tag{3.}$$

d. h. $\frac{\sin z}{z}$ liegt immer zwischen $\cos z$ und $\frac{1}{\cos z}\cdot$ Da nun aber

$$(4.)\qquad \lim_{z=0} \cos z = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z=0} \frac{1}{\cos z} = 1$$

wird, so muß auch

$$(5.)\qquad \lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

sein.

Der Sinn dieses Resultates läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Der Unterschied zwischen dem Sinus eines Bogens $z$ und dem Bogen selbst wird im Verhältnis zu diesem Bogen $z$ *beliebig klein*, wenn man den Bogen *hinreichend klein* macht. So ist

$$\begin{aligned}
\text{arcus}\,4^0 &= 0{,}069\,813\,17, & \sin 4^0 &= 0{,}069\,756\,47,\\
\text{arcus}\,2^0 &= 0{,}034\,906\,58, & \sin 2^0 &= 0{,}034\,899\,42,\\
\text{arcus}\,1^0 &= 0{,}017\,453\,29, & \sin 1^0 &= 0{,}017\,452\,41,\\
\text{arcus}\,30' &= 0{,}008\,726\,64, & \sin 30' &= 0{,}008\,726\,54,\\
\text{arcus}\,15' &= 0{,}004\,363\,32, & \sin 15' &= 0{,}004\,363\,31,\\
\text{arcus}\,7\tfrac{1}{2}' &= 0{,}002\,181\,66, & \sin 7\tfrac{1}{2}' &= 0{,}002\,181\,66,
\end{aligned}$$

.....................................................

also

$$\begin{aligned}
\frac{\text{arcus}\,4^0 - \sin 4^0}{\text{arcus}\,4^0} &= \frac{5\,670}{69\,813\,17} = 0{,}000\,812\,17,\\
\frac{\text{arcus}\,2^0 - \sin 2^0}{\text{arcus}\,2^0} &= \frac{716}{34\,906\,58} = 0{,}000\,205\,12,\\
\frac{\text{arcus}\,1^0 - \sin 1^0}{\text{arcus}\,1^0} &= \frac{88}{17\,453\,29} = 0{,}000\,050\,42,\\
\frac{\text{arcus}\,30' - \sin 30'}{\text{arcus}\,30'} &= \frac{10}{8\,726\,64} = 0{,}000\,011\,46,
\end{aligned}$$

.....................................................

## § 5.
## Das unendlich Kleine und das unendlich Große.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 2 bis 4.)

**Erklärung.** *Nähert sich eine veränderliche Größe der Grenze* 0, *so sagt man, sie werde unendlich klein.*

Nach den Auseinandersetzungen des vorhergehenden Paragraphen könnte man die Erklärung des unendlich Kleinen daher auch so fassen:

*Wenn eine veränderliche Größe immer kleinere und kleinere Werte annimmt, so daß sie kleiner werden kann als jede gegebene Größe, so sagt man, sie werde unendlich klein,* oder noch besser, *sie werde verschwindend klein.*

Wenn man also von „*verschwindend kleinen*" oder von „*unendlich kleinen Größen*" spricht, so muß man sich stets dessen bewußt bleiben, daß man zunächst mit kleinen veränderlichen Größen rechnet, die sich dann der Grenze 0 beliebig nähern sollen.

Es ist sehr bequem, diese vereinfachte Bezeichnung zu benutzen, damit man es nicht nötig hat, in jedem einzelnen Falle die Auseinandersetzung des hier angedeuteten Grenzverfahrens zu wiederholen.

**Erklärung.** *Wenn eine veränderliche Größe immer größere und größere Werte annimmt, so daß sie jede gegebene Größe übersteigen kann, so sagt man, sie werde unendlich groß,* oder noch besser, *sie sei eine unbegrenzt wachsende Größe.*

Das Zeichen für unendlich groß ist $\infty$.

Wenn man also von „*unbegrenzt wachsenden*" oder von „*unendlich großen Größen*" spricht, so will man wiederum ein Grenzverfahren andeuten, welches darin besteht, daß man zunächst mit endlichen, veränderlichen Größen rechnet, die dann aber größer werden dürfen als jede angebbare Größe.

So wird z. B. $\operatorname{tg}\alpha$ erklärt als das Verhältnis der beiden Katheten im rechtwinkligen Dreieck, von denen die erste dem spitzen Winkel $\alpha$ gegenüberliegt. Wächst der Winkel $\alpha$, so wächst auch $\operatorname{tg}\alpha$. Für $\alpha = 90^0$ hat diese Erklärung keinen

Sinn mehr, weil es kein geradliniges Dreieck gibt, das *zwei* rechte Winkel enthält; trotzdem sagt man

$$\operatorname{tg} 90^0 = \infty$$

und will damit ausdrücken, daß $\operatorname{tg}\alpha$ über jede angebbare Größe hinaus wächst, wenn sich $\alpha$ dem Werte $90^0$ beliebig nähert.

**Erklärung.** *Eine Größe heißt „endlich“, wenn sie weder unendlich klein noch unendlich groß wird.*

**Satz 1.** *Neben einer endlichen Größe darf eine verschwindend kleine Größe vernachlässigt werden*, oder mit anderen Worten: *eine endliche Größe bleibt unverändert, wenn man sie um eine unendlich kleine Größe vermehrt oder vermindert.*

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der Erklärung der unendlich kleinen oder verschwindend kleinen Größen. Man könnte die unendlich kleinen Größen geradezu dadurch erklären, daß sie neben einer endlichen Größe vernachlässigt werden dürfen.

Von diesem Satze kann man sofort einige Anwendungen machen. Es sei

$$\lim X = A, \qquad \lim Y = B,$$

$$\text{also} \quad X = A + \alpha, \qquad Y = B + \beta,$$

wobei $\alpha$ und $\beta$ beim Übergange zur Grenze *verschwindend kleine* (positive oder negative) Größen sind. Dann werden aber $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ ebenfalls *verschwindend klein*, folglich wird

$$\lim(X \pm Y) = \lim[(A \pm B) + (\alpha \pm \beta)] = A \pm B,$$

oder

$$\lim(X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y. \tag{1.}$$

Dies gibt in Worten die beiden folgenden Sätze:

**Satz 2.** *Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der einzelnen Summanden.*

Dieser Satz gilt auch für Summen von beliebig vielen Gliedern.

**Satz 3.** *Der Grenzwert einer Differenz zweier Größen ist gleich der Differenz ihrer Grenzwerte.*

Ferner ist

$$X \,.\, Y = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta.$$

Da $A$ und $B$ *endliche* Größen sind, so werden beim Übergange zur Grenze $\alpha B$ und $\beta A$ *verschwindend klein*, und da auch $\alpha\beta$ *verschwindend klein* wird, so erhält man

$$\lim (X \,.\, Y) = A \,.\, B,$$

oder

(2.) $$\lim (X \,.\, Y) = \lim X \,.\, \lim Y.$$

Dies gibt in Worten:

**Satz 4.** *Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkte der Grenzwerte der einzelnen Faktoren.*

Schließlich ist

$$\frac{X}{Y} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} = \frac{A}{B} + \frac{\alpha B - \beta A}{B(B + \beta)}.$$

Beim Übergange zur Grenze werden $\alpha B$ und $\beta A$ *verschwindend klein*, während unter der Voraussetzung, daß $B \gtreqless 0$ ist, $B(B + \beta)$ den endlichen Wert $B^2$ erhält, folglich wird

$$\lim \left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{A}{B},$$

oder

(3.) $$\lim \left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{\lim X}{\lim Y},$$

wenn $\lim Y \lesseqgtr 0$ ist.

Daraus ergibt sich

**Satz 5.** *Der Grenzwert eines Bruches, dessen Nenner an der Grenze von Null verschieden bleibt, ist gleich dem Grenzwerte des Zählers, dividiert durch den Grenzwert des Nenners.*

Aus der Erklärung der unbegrenzt wachsenden Größen folgt:

**Satz 6.** *Eine unbegrenzt wachsende Größe wächst auch dann noch unbegrenzt, wenn man sie um eine endliche Größe vermehrt oder vermindert,* oder mit anderen Worten: *eine Größe bleibt unendlich groß, auch wenn man eine endliche Größe zu ihr addiert oder von ihr subtrahiert.*

## § 6.
## Über die Rechnung mit unendlich kleinen Größen.

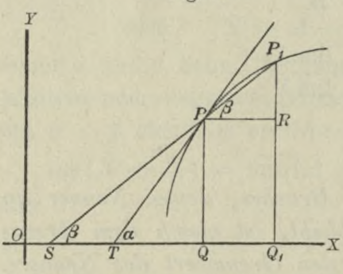
Nach den Erklärungen des vorhergehenden Paragraphen wird eine Größe dann unendlich klein (oder verschwindend klein), wenn man sie kleiner machen kann als jede gegebene Größe. Wie groß auch die Genauigkeit sein mag, mit der man rechnen will, man kann die verschwindend kleinen Größen so klein machen, daß sie neben einer endlichen Größe nicht mehr in Betracht kommen.

Verlangt man z. B., daß eine Zahl bis auf $n$ Dezimalstellen genau berechnet wird, so genügt es, eine etwa hinzutretende unendlich kleine Größe kleiner anzunehmen als

$$\frac{1}{2 \cdot 10^n},$$

damit sie im Vergleich zu der endlichen Zahl *verschwindend* klein wird. Man kann daher die unendlich kleinen Größen nicht mit *endlichen*, sondern nur mit *unendlich kleinen* Größen vergleichen; das *Verhältnis* zweier unendlich kleinen Größen kann nämlich sehr wohl einen *endlichen* Wert haben, wie die beiden folgenden Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik zeigen mögen.

Fig. 7.




1. Es sei

$$(1.) \qquad y = f(x)$$

die Gleichung einer Kurve $PP_1$ (Fig. 7), in welcher die Punkte $P$ und $P_1$ durch eine Sekante verbunden sind. Der Winkel $\beta$, den diese Sekante mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$(2.) \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} RPP_1 = \frac{RP_1}{PR}.$$

Bezeichnet man nun die Koordinaten des Punktes $P$ mit $x$ und $y$, die des Punktes $P_1$ mit $x_1$ und $y_1$*), so wird

*) In dem Folgenden sollen die Koordinaten eines Punktes $P$ immer mit $x$, $y$, die eines Punktes $P_1$ mit $x_1$, $y_1$, allgemein die eines Punktes $P_n$ mit $x_n$, $y_n$ bezeichnet werden.

$$OQ = x, \quad QP = y, \quad OQ_1 = x_1, \quad Q_1P_1 = y_1,$$

also

$$PR = QQ_1 = OQ_1 - OQ = x_1 - x,$$

$$RP_1 = Q_1P_1 - QP = y_1 - y,$$

folglich wird

(3.) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Die Differenzen $x_1 - x$ und $y_1 - y$ bezeichnet man gewöhnlich mit $\varDelta x$ und $\varDelta y$. Die Gleichung (3.) nimmt dadurch die Form

(3a.) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

an. Nähert sich jetzt der Punkt $P_1$ dem Punkte $P$, so werden auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ immer kleiner. Wird schließlich der Abstand des Punktes $P_1$ von $P$ verschwindend klein, so werden auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ verschwindend kleine Größen, welche man dann „*Differentiale*" nennt und mit $dx$ und $dy$ bezeichnet. Gleichzeitig geht die *Sekante* $PP_1$ in die *Tangente* $TP$ über, welche mit der positiven Richtung der $X$-Achse den Winkel $\alpha$ bildet. *Die Tangente im Kurvenpunkte $P$ ist nämlich eine Sekante, bei der zwei Schnittpunkte $P$ und $P_1$ in einen Punkt, den Berührungspunkt $P$ zusammengefallen sind.*

Die Gleichung (3a.) geht daher über in

(4.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x}.$$

Den Quotienten der beiden Differentiale $dy$ und $dx$ nennt man einen „*Differential-Quotienten*".

2. Unter der Geschwindigkeit $c$ eines (z. B. in gerader Linie) *gleichförmig* fortbewegten Massenpunktes versteht man die Länge des Weges, der in der Zeiteinheit (Sekunde) zurückgelegt wird. In $t$ Sekunden ist daher die Länge des zurückgelegten Weges

(5.) $$s = ct.$$

Ebenso ist die Länge des Weges, welchen der Massenpunkt in $t_1$ Sekunden zurücklegt,

(5a.) $$s_1 = ct_1, \quad \text{also} \quad s_1 - s = c(t_1 - t).$$

Dabei ist $s_1 - s$ der in dem Zeitintervall von $t$ bis $t_1$ zurückgelegte Weg. Dies gibt für die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung den Wert

$$c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}. \tag{6.}$$

In dieser Formel ist es ganz gleichgültig, wie groß, bezw. wie klein das Zeitintervall $t_1 - t$ ist, weil der zurückgelegte Weg $s_1 - s$ in demselben Verhältnisse wächst und abnimmt wie $t_1 - t$.

Wenn die Bewegung nicht mehr gleichförmig ist, d. h. wenn der bewegte Massenpunkt in gleichen Zeiten nicht mehr gleiche Strecken zurücklegt, so kann man doch noch von der *mittleren* Geschwindigkeit im Zeitintervalle von $t$ bis $t_1$ sprechen und diese wieder erklären als das Verhältnis der in der Zeit $t_1 - t$ zurückgelegten Strecke $s_1 - s$ zu diesem Zeitintervalle $t_1 - t$. Bezeichnet man diese Differenzen $s_1 - s$ und $t_1 - t$ bezw. mit $\Delta s$ und $\Delta t$, so ist also die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}.$$

Wird das Zeitintervall $\Delta t$ immer kleiner und schließlich verschwindend klein, so wird auch $\Delta s$ verschwindend klein. Diese verschwindend kleinen Größen bezeichnet man bezw. mit $dt$ und $ds$ und nennt

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{7.}$$

„*die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung zur Zeit $t$*“.

Auch hier nennt man die verschwindend kleinen Größen $ds$ und $dt$ „*Differentiale*“ und ihren Quotienten einen „*Differential-Quotienten*“.

Mit solchen *Differentialen* und *Differential-Quotienten* hat man es hauptsächlich in der *Differential-Rechnung* zu tun.

Man kann aber auch in anderer Weise mit verschwindend kleinen Größen rechnen.

Teilt man nämlich eine *endliche* Größe $F$ in $n$ Teile (die übrigens nicht gleich zu sein brauchen), so ist $F$ gleich der Summe aller dieser Teile. Wenn nun die Zahl $n$, d. h. die Anzahl der Teile ins Unbegrenzte wächst, so daß die einzelnen Teile immer kleiner und schließlich unendlich klein werden, so erkennt man, daß auch die Summe von *unendlich vielen*, *unendlich kleinen* Größen sehr wohl einen *endlichen* Wert $F$ haben kann.

Solche Summen von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen treten in der *Integral-Rechnung* auf.

Beispiele davon kommen schon in der Planimetrie und Stereometrie vor.

Indem man einen Kreis als ein regelmäßiges $n$-Eck mit unendlich vielen Seiten betrachtet, findet man den Umfang des Kreises als die Summe dieser unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten.

Ferner berechnet man die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser $r$, indem man sie in unendlich viele, unendlich schmale Sektoren zerlegt. Jeder solche Sektor wird dann als ein Dreieck betrachtet, dessen Spitze der Mittelpunkt des Kreises ist, und dessen Grundlinie in der Peripherie des Kreises liegt. Da diese Dreiecke alle dieselbe Höhe $r$ haben, so braucht man nur ihre Grundlinien zu addieren und erhält als Summe derselben den Umfang des Kreises, nämlich

$$u = 2r\pi .$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist daher

$$F = \frac{ur}{2} = r^2\pi .$$

Das Volumen einer Kugel kann man berechnen, indem man dieselbe durch Schnitte, senkrecht zu einem Durchmesser, in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerlegt und die einzelnen Schichten als Kegelstumpfe betrachtet.

In ähnlicher Weise berechnet man die Oberfläche einer Kugel, indem man dieselbe durch Schnitte, senkrecht zu einem Durchmesser, in unendlich viele, unendlich schmale Zonen zerlegt, welche man als Mäntel von Kegelstumpfen betrachtet.

Das Volumen $V$ einer Kugel kann man auch finden, indem man die Kugeloberfläche in unendlich kleine Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke als die Grundflächen von Pyramiden betrachtet, die alle ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel haben. Die Höhe ist bei allen diesen Pyramiden gleich dem Halbmesser $r$ der Kugel, folglich ist die Summe ihrer Volumina gleich der Summe ihrer Grundflächen, multipliziert mit $\frac{r}{3}$. Da die Summe der Volumina gleich dem Volumen der Kugel und die Summe der Grundflächen gleich der Kugeloberfläche ($4r^2\pi$) ist, so findet man

$$V = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Bei der Rechnung mit unendlich kleinen Größen kommen daher hauptsächlich nur zwei Aufgaben in Betracht:

1) *Es ist der Wert zu bestimmen, welchen das Verhältnis von zwei unendlich kleinen Größen annimmt.*
2) *Es ist die Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen zu bestimmen.*

In dem folgenden wird daher auch nur auf diese beiden Aufgaben Rücksicht genommen werden.

## § 7.

## Verschiedene Ordnungen der unendlich kleinen Größen.

Die verschwindend kleinen Größen, welche in einer Rechnung vorkommen, können noch sehr verschiedenartig sein. Zerlegt man z. B. einen Würfel durch Schnitte, senkrecht zu einer Seitenkante, in $n$ gleiche Schichten, so werden die einzelnen Schichten verschwindend kleine Größen, wenn $n$ ins Unbegrenzte wächst.

Legt man jetzt noch Schnitte, senkrecht zu einer zweiten Kante, so kann man jede dieser Schichten in $n$ gleiche Säulen zerlegen. Wenn jetzt $n$ wieder ins Unbegrenzte wächst, so werden diese Säulen verschwindend kleine Größen, und zwar sind sie auch noch verschwindend klein im Verhältnis zu jeder einzelnen Schicht, weil erst unendlich viele Säulen eine solche Schicht ausmachen.

Schließlich kann man noch durch Schnitte, senkrecht zu einer dritten Kante des Würfels, jede Säule in $n$ Würfel zerlegen. Wächst $n$ wieder ins Unbegrenzte, so werden diese Würfel noch verschwindend klein sein im Verhältnis zu den verschwindend kleinen Säulen, weil erst unendlich viele Würfel eine solche Säule ausmachen.

Dies Beispiel zeigt, daß man die unendlich kleinen Größen noch in verschiedene Ordnungen einteilen muß.

Kommen also in einer Rechnung verschiedenartige unendlich kleine Größen vor, so kann man eine, z. B. $\alpha$, nach Belieben auswählen und festsetzen, daß $\alpha$ eine *unendlich kleine Größe erster Ordnung* heiße.

Ist dann $\beta$ eine andere unendlich kleine Größe, und wird

$$\frac{\beta}{\alpha} = p$$

eine *endliche* Größe, so heißt $\beta$ gleichfalls eine „*unendlich kleine Größe erster Ordnung*".

Die unendlich kleinen Größen erster Ordnung haben daher nach dieser Festsetzung alle die Form $\alpha p$.

Wenn dagegen $\frac{\beta}{\alpha}$ selbst wieder eine unendlich kleine Größe erster Ordnung wird, wenn also $\frac{\beta}{\alpha}$ auf die Form $\alpha p$ gebracht werden kann, so bleibt

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = p$$

eine *endliche* Größe. Man sagt dann, $\beta$ sei eine „*unendlich kleine Größe zweiter Ordnung*".

Die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung haben daher alle die Form $\alpha^2 p$.

Wird auch noch $\frac{\beta}{\alpha^2}$ eine unendlich kleine Größe erster Ordnung, läßt sich also $\frac{\beta}{\alpha^2}$ auf die Form $\alpha p$ bringen, so bleibt

$$\frac{\beta}{\alpha^3} = p$$

eine endliche Größe, und $\beta$ heißt eine „*unendlich kleine Größe dritter Ordnung*".

So kann man fortfahren; es heißt dann $\beta$ eine „*unendlich kleine Größe* $n^{ter}$ *Ordnung*", wenn

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = p$$

eine *endliche* Größe bleibt, wenn also

$$\beta = \alpha^n p.$$

Dabei ist $n$ nicht notwendigerweise eine *ganze* Zahl, sondern $n$ darf auch eine *gebrochene positive* Zahl sein.

Auch wenn man für $n$ gebrochene Werte zuläßt, so sind in der Form $\alpha^n p$ noch nicht alle unendlich kleinen Größen erschöpft, wie später gezeigt werden soll. Deshalb möge die gegebene Erklärung dahin erweitert werden, daß $\gamma$ *im Vergleich zu* $\alpha$ *eine „unendlich kleine Größe höherer Ordnung" heißen möge, wenn noch* $\frac{\gamma}{\alpha}$ *unendlich klein wird.*

Dies vorausgeschickt, gelten die folgenden Sätze:

**Satz 1.** *Unterscheiden sich die unendlich kleinen Größen derselben Ordnung* $\alpha$ *und* $\alpha'$ *voneinander nur durch eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung* $\gamma$, *so ist der Grenzwert ihres Verhältnisses gleich* 1.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$\alpha' - \alpha = \gamma, \quad \text{oder} \quad \alpha' = \alpha + \gamma, \tag{1.}$$

wobei $\gamma$ eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung ist, so daß $\frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$ selbst noch unendlich klein wird. Deshalb folgt aus Gleichung (1.)

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \text{oder} \quad \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \tag{2.}$$

denn die unendlich kleine Größe $\varepsilon$ darf neben der endlichen Größe 1 vernachlässigt werden (nach Satz 1 in § 5).

Von diesem Satze gilt auch die **Umkehrung:**

*Ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnis zweier unendlich kleinen Größen* $\alpha$ *und* $\alpha'$ *nähert, gleich* 1, *so können sich* $\alpha$ *und* $\alpha'$ *nur durch eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung voneinander unterscheiden.*

**Beweis.** Ist nämlich wieder

$$\alpha' - \alpha = \gamma, \quad \alpha' = \alpha + \gamma,$$

also

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma}{\alpha},$$

so folgt aus $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$, daß $\frac{\gamma}{\alpha}$ unendlich klein werden muß.

**Beispiel.** Es war (vergl. Formel Nr. 1 der Tabelle)

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

folglich wird $z - \sin z$ unendlich klein von höherer Ordnung, wenn $z$ unendlich klein von der *ersten* Ordnung wird.

**Satz 2.** *Hat das Verhältnis zweier unendlich kleinen Größen* $\alpha$ *und* $\beta$ *einen endlichen Grenzwert (oder den Grenzwert* 0), *so ändert sich dieser Grenzwert nicht, wenn man* $\alpha$ *und* $\beta$ *um unendlich kleine Größen höherer Ordnung vermehrt oder vermindert.*

Man soll also zeigen, daß

$$\lim \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta},$$

wenn $\alpha$ und $\beta$ unendlich kleine Größen von beliebiger Ordnung sind, während $\gamma$ und $\delta$ unendlich kleine Größen höherer Ordnung sein sollen, so daß

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma' \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\beta} = \delta'$$

selbst noch unendlich kleine Größen sind.

**Beweis.** Es ist

$$(3.)\qquad \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pm \beta\gamma \mp \alpha\delta}{\beta(\beta \pm \delta)} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pm \gamma \mp \alpha\delta'}{\beta \pm \delta}$$
$$= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'}.$$

Da

$$\lim (1 \pm \delta') = 1, \quad \lim (\pm \gamma' \mp \delta') = 0,$$

und da $\frac{\alpha}{\beta}$ einen endlichen Wert hat, so wird

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'} = 0, \tag{4.}$$

d. h. $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'}$ wird *verschwindend* klein und darf neben der endlichen Größe $\frac{\alpha}{\beta}$ vernachlässigt werden. Man erhält daher

$$\lim \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \tag{5.}$$

Da sich die verschwindend kleinen Größen $\alpha$ und $\beta$ von

$$\alpha' = \alpha \pm \gamma \quad \text{und} \quad \beta' = \beta \pm \delta$$

nur durch verschwindend kleine Größen höherer Ordnung unterscheiden, so kann man die Gleichung (5.) auf die Form

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \tag{5 a.}$$

bringen und dem Satze 2 die folgende Fassung geben:

**Satz 2a.** *Der Grenzwert von* $\frac{\alpha}{\beta}$ *bleibt ungeändert, wenn man die verschwindend kleinen Größen* $\alpha$ *und* $\beta$ *durch andere* $\alpha'$ *und* $\beta'$ *ersetzt, welche sich von den ersteren nur durch verschwindend kleine Größen höherer Ordnung unterscheiden.*

**Beispiel.** Nach Formel Nr. 1 der Tabelle ist, wenn man für $z$ das eine Mal $3x$ und das andere Mal $4x$ setzt,

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\sin(4x)}{4x} = 1,$$

folglich unterscheiden sich $\lim \sin(3x)$ und $\lim \sin(4x)$ von $\lim(3x)$ und $\lim(4x)$ nur durch verschwindend kleine Größen höherer Ordnung; man erhält daher

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} = \lim \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \cdot$$

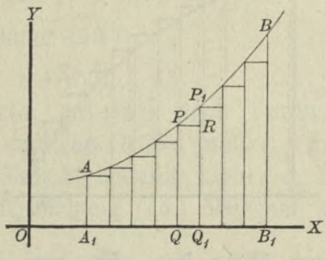
**Satz 3.** *Sind* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *verschwindend kleine Größen, deren Anzahl* $n$ *ins Unbegrenzte wächst, und weiß man, daß die Summe dieser unendlich vielen, unendlich kleinen Größen einen endlichen Grenzwert* $S$ *besitzt, daß also*

$$\lim_{n=\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = S$$

*ist, so bleibt dieser Grenzwert unverändert, wenn man die verschwindend kleinen Größen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *um verschwindend kleine Größen höherer Ordnung* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ *vermehrt oder vermindert.*

Dem Beweise dieses Satzes möge ein Beispiel zur Erläuterung vorangestellt werden.

Fig. 8.




Es sei eine ebene Figur $A_1B_1BA$ (Fig. 8), oben begrenzt durch einen Kurvenbogen $AB$, links und rechts von den Ordinaten $A_1A$, $B_1B$ und unten durch den Abschnitt $A_1B_1$ der $X$-Achse. Indem man $A_1B_1$ in $n$ (gleiche oder ungleiche) Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallelen zu der $Y$-Achse zieht, kann man den Flächeninhalt $F$ der Figur in $n$ Streifen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zerlegen. Dadurch wird, wenn man den griechischen Buchstaben $\Sigma$ als Summenzeichen anwendet,

$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \Sigma\alpha. \tag{6.}$$

Ist nun $QQ_1P_1P$ ein solcher Streifen, und zieht man durch $P$ eine Parallele $PR$ zur $X$-Achse, so zerfällt der Streifen $\alpha$ in das Rechteck $QQ_1RP = \alpha'$ und das Dreieck $PRP_1 = \gamma$, folglich wird, wenn man dieselbe Konstruktion für sämtliche Streifen ausführt,

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \gamma_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2' + \gamma_2, \ldots \alpha_n = \alpha_n' + \gamma_n, \tag{7.}$$

oder

$$\alpha_1' = \alpha_1 - \gamma_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2 - \gamma_2, \ldots \alpha_n' = \alpha_n - \gamma_n, \tag{7 a.}$$

$$F = \Sigma\alpha = \Sigma(\alpha' + \gamma) = \Sigma\alpha' + \Sigma\gamma. \tag{8.}$$

In Figur 8 sind die Streifen $\alpha$ sämtlich größer als die Rechtecke $\alpha'$, so daß in den Gleichungen (7.) und (8.) die Größen $\gamma$ sämtlich *positiv* sind. Es können aber auch (wie in Figur 9) die Streifen $\alpha$ *sämtlich kleiner* sein als die Rechtecke $\alpha'$, oder es können (wie in Figur 10) die Streifen $\alpha$ zum Teil *größer*, zum Teil *kleiner* sein als die Rechtecke $\alpha'$. Die Gleichungen (7.) und (8.) bleiben auch in diesen Fällen noch richtig, wenn man unter den Größen $\gamma$ auch *negative* zuläßt.

Wird jetzt die Anzahl $n$ der Streifen immer größer, werden also die Streifen selbst immer schmaler, so werden die Dreiecke

$\gamma$ nicht nur selbst immer kleiner, sondern auch ihre Summe wird immer kleiner. Selbst wenn man die Dreiecke $\gamma$ alle positiv nimmt, so ist ihre Summe kleiner als ein Rechteck, das die Seite $A_1B_1$ zur Grundlinie und die größte Höhe der Dreiecke $\gamma$

Fig. 9.

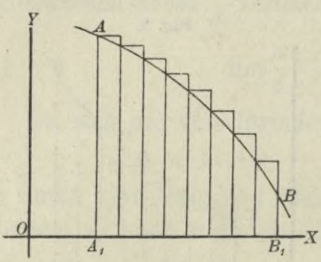
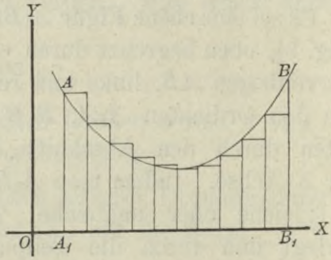



Fig 10.




zur Höhe hat. Da nun aber diese Höhe mit wachsendem $n$ immer kleiner wird, so wird auch der Flächeninhalt des Rechtecks und deshalb erst recht $\Sigma\gamma$ beliebig klein. Man erhält daher

$$\lim \Sigma\gamma = 0, \quad F = \lim \Sigma\alpha = \lim \Sigma\alpha'. \tag{9.}$$

Nach diesem Beispiele möge der oben ausgesprochene Satz zunächst für den Fall bewiesen werden, daß die Größen $\alpha$ und $\gamma$ sämtlich positiv sind. Es wird dann

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ S_2 = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) + \cdots + (\alpha_n + \gamma_n) \geqq S_1. \end{array}\right. \tag{10.}$$

Nach Voraussetzung sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ verschwindend kleine Größen höherer Ordnung, d. h. es sind

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \varepsilon_2, \ldots \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = \varepsilon_n \tag{11.}$$

selbst wieder verschwindend kleine Größen, die man also kleiner machen kann als jede gegebene Größe. Man kann sie z. B. kleiner machen als

$$\varepsilon = \frac{1}{10^{\varkappa}}, \tag{12.}$$

wobei man den Exponenten $\varkappa$ noch so groß machen kann, wie man will. Dies gibt

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \quad \varepsilon_2 \leqq \varepsilon, \ldots \varepsilon_n \leqq \varepsilon. \tag{13.}$$

Deshalb wird

$$S_2 = (\alpha_1 + \alpha_1\varepsilon_1) + (\alpha_2 + \alpha_2\varepsilon_2) + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n\varepsilon_n)$$
$$= \alpha_1(1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(1 + \varepsilon_2) + \cdots + \alpha_n(1 + \varepsilon_n),$$

oder

(14.) $$S_2 \leqq \alpha_1(1 + \varepsilon) + \alpha_2(1 + \varepsilon) + \cdots + \alpha_n(1 + \varepsilon),$$

(14a.) $$S_2 \leqq (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(1 + \varepsilon) = S_1(1 + \varepsilon),$$

oder mit Rücksicht auf die Ungleichung (10.)

(15.) $$S_1 \leqq S_2 \leqq S_1 + \varepsilon S_1.$$

Wächst jetzt $n$ ins Unbegrenzte, so wird nach Voraussetzung $\lim S_1 = S$ eine bestimmte endliche Größe, und $\varepsilon$ wird beliebig klein; folglich wird auch $\lim \varepsilon S_1$ beliebig klein, d. h. verschwindend klein, so daß die Ungleichung (15.) übergeht in die Gleichung

(16.) $$\lim S_2 = \lim S_1 = S.$$

Sind die Größen $\alpha$ und $\gamma$ teilweise positiv und teilweise negativ, so möge der Satz nur unter der Voraussetzung bewiesen werden, daß

$$S = \lim_{n=\infty}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lim_{n=\infty} \Sigma\alpha$$

auch dann noch einen endlichen Wert behält, wenn man die Größen $\alpha$ alle durch ihre *absoluten Beträge*, d. h. durch die entsprechenden positiven Werte ersetzt. Bezeichnet man also den absoluten Betrag von $\alpha$ mit $|\alpha|$ und den absoluten Betrag von $\gamma$ mit $|\gamma|$, so kann man jetzt in derselben Weise wie vorhin zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} \Sigma|\gamma| = 0$$

wird. Folglich ist erst recht

$$\lim_{n=\infty} \Sigma\gamma = 0$$

und deshalb

$$\lim_{n=\infty} \Sigma\alpha = \lim_{n=\infty} \Sigma(\alpha + \gamma).$$

Setzt man

$$\alpha_1' = \alpha_1 \pm \gamma_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2 \pm \gamma_2, \ldots \alpha_n' = \alpha_n \pm \gamma_n,$$

so unterscheiden sich die verschwindend kleinen Größen $\alpha$ und

$\alpha'$ voneinander nur um verschwindend kleine Größen höherer Ordnung; nach dem eben bewiesenen Satze 3 wird dann

$$\lim(\alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_n') = \lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Man kann daher diesem Satze auch die folgende Fassung geben:

**Satz 3a.** *Der Grenzwert von $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ bleibt unverändert, wenn die verschwindend kleinen Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ durch andere $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n'$ ersetzt werden, die sich von ihnen nur um verschwindend kleine Größen höherer Ordnung unterscheiden.*

Eine Anwendung dieses Satzes macht man schon bei der Berechnung der Kreisfläche, denn man betrachtet dabei die unendlich vielen Kreissektoren, in welche die Kreisfläche zerlegt werden kann, als geradlinige Dreiecke. Ein solches Dreieck unterscheidet sich von dem entsprechenden Sektor um ein Kreissegment; da aber diese Segmente unendlich kleine Größen höherer Ordnung werden, so darf man sie nach dem vorigen Satze in der Tat vernachlässigen.

Ebenso dürfen bei der Berechnung der Kugeloberfläche die Kugelzonen nur deshalb durch die Mäntel abgestumpfter Kegel ersetzt werden, weil sie sich von den letzteren nur um verschwindend kleine Größen höherer Ordnung unterscheiden.

Schließlich sind auch bei der Berechnung des Volumens einer Kugel die in § 6 angegebenen Schichten, streng genommen, nicht abgestumpfte Kegel, sondern sie unterscheiden sich von diesen um verschwindend kleine Größen höherer Ordnung.

Ähnliches gilt von den kleinen Teilen, welche man bei der Berechnung des Volumens einer Kugel als dreiseitige Pyramiden ansah.

## § 8.

## Begriff der Stetigkeit.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 5.)

Wenn durch die Gleichung

$$y = f(x) \tag{1.}$$

irgend eine Funktion von $x$ erklärt ist, so werden im allgemeinen unendlich kleine Änderungen von $x$ auch unendlich kleine Änderungen von $y$ nach sich ziehen. Für alle Werte von $x$, bei welchen dies der Fall ist, heißt die Funktion *stetig* oder *kontinuierlich*.

Diese Bezeichnung ist der in § 1 angedeuteten geometrischen Darstellung einer Veränderlichen entnommen. Durchläuft nämlich der Punkt $Q$, welcher auf der $X$-Achse den Werten der unabhängigen Veränderlichen $x$ entspricht, *stetig* eine Strecke $Q_1Q_2$, so wird im allgemeinen der Punkt $R$, welcher den zugeordneten Werten von $y$ entspricht, auf der $Y$-Achse eine Strecke $R_1R_2$ stetig durchlaufen, wobei auch einzelne Teile der $Y$-Achse (innerhalb oder außerhalb der Strecke $R_1R_2$) mehrfach durchlaufen werden können. (Vergl. Fig. 11.)

Fig. 11.

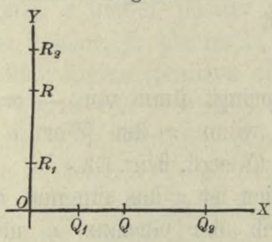
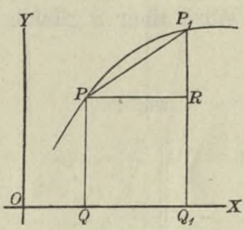



Fig. 12.




Noch besser wird man den Begriff der Stetigkeit erfassen, wenn man Gleichung (1.) durch eine Kurve geometrisch darstellt. Die Punkte $P$ und $P_1$, welche den Abszissen

$$x = OQ \quad \text{und} \quad x_1 = OQ_1$$

entsprechen, werden einander beliebig nahe liegen, wenn die Funktion $f(x)$ für den betreffenden Wert von $x$ stetig ist, und wenn $x_1 - x$ hinreichend klein wird. Nach Voraussetzung wird dann nämlich $y_1 - y$ mit $x_1 - x$ zugleich verschwindend klein, folglich auch

$$PP_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \tag{2.}$$

(Vergl. Fig. 12.)

Der Verlauf der Kurve, welche der Gleichung

$$y = f(x)$$

entspricht, ist also im Punkte $P$ ein *stetiger* (*kontinuierlicher*).

Wird aber $y_1 - y$ nicht mit $x_1 - x$ zugleich verschwindend klein, so ist die Kurve im Punkte $P$ *unstetig* (*diskontinuierlich*), wie die folgenden Beispiele zeigen sollen. Solche *Unstetigkeiten* sind nur Ausnahmefälle, d. h. nur ausnahmsweise wird der Fall eintreten, daß die Funktion $y$ für endliche Werte von $x$ unendlich groß wird, oder daß sie sich sprungweise (um endliche oder unendlich große Beträge) ändert, während die Änderung von $x$ unendlich klein ist.

## Beispiele.

1. Es sei

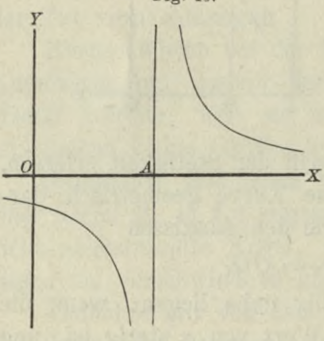
$$y = \frac{1}{x - a}, \tag{3.}$$

dann wird $y$, so lange $x$ kleiner als $a$ bleibt, negativ und stetig sein. Wird aber $x$ gleich $a$, so wird

$$y = -\infty$$

und springt dann von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn $x$ den Wert $a$ passiert. (Vergl. Fig. 13.)

Fig. 13.




Hier ist $x$ das einemal, wenn es sich der Grenze $a$ nähert, kleiner als $a$, das anderemal größer als $a$. Um diese beiden Fälle zu unterscheiden, schreibe man in dem ersten Falle

$$\lim x = a - 0 \tag{4.}$$

und in dem zweiten Falle

$$\lim x = a + 0. \tag{5.}$$

Dadurch kann man die vorhin untersuchte Unstetigkeit von $y$ durch die Gleichungen

$$\lim_{x=a-0} y = -\infty, \qquad \lim_{x=a+0} y = +\infty \tag{6.}$$

zum Ausdruck bringen.

2. Es sei

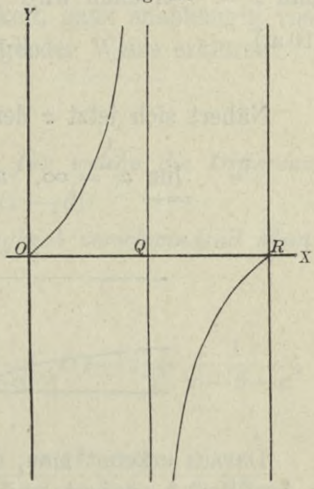
$$y = \operatorname{tg} x. \tag{7.}$$

Wenn $x$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so wächst $y$ gleichzeitig von 0 bis $+\infty$; wenn aber $x$ noch etwas größer wird, so erhält $y$ einen sehr großen *negativen* Wert. Es ist also

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} y = +\infty, \quad \lim_{x=\frac{\pi}{2}+0} y = -\infty, \tag{8.}$$

d. h. der Wert von $y$ springt von $+\infty$ bis zu $-\infty$, wenn $x$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ passiert. (Vergl. Fig. 14.)

Fig. 14.



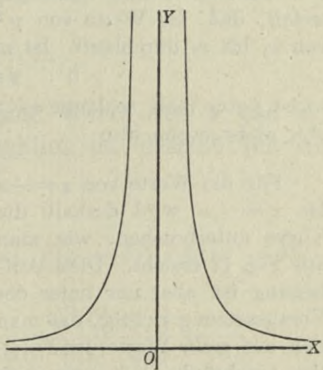

$OQ = \frac{\pi}{2}$, $OR = \pi$.

3. Ist

$$y = \frac{1}{x^2}, \tag{9.}$$

so bleibt $y$ immer positiv und wird um so größer, je kleiner $x$ ist. Für unendlich kleine (positive oder negative) Werte von $x$ wird $y$ unendlich groß, d. h. $y$ wird für diesen Wert von $x$ unstetig. (Vergl. Fig. 15.)

Fig. 15.




In den vorstehenden Beispielen besteht die Unstetigkeit der Funktion $y$ darin, daß $y$ unendlich groß wird, wie das zumeist der Fall sein wird. Doch kann die Funktion auch unstetig werden, ohne daß sie unendlich groß wird, wie man aus dem folgenden Beispiele ersieht.

4. Ist

$$y = \frac{a^{\frac{1}{x}}}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{a^{-\frac{1}{x}} + 1}, \tag{10.}$$

und beschränkt man $x$ zunächst auf positive Werte, so wird

$$\lim_{x=+0}\left(a^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x=+0}\left[\frac{1}{a^{\frac{1}{x}}}\right] = 0,$$

also

$$\lim_{x=+0} y = 1.$$

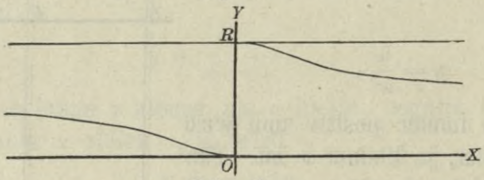
Um auszudrücken, daß $x$ negative Werte annimmt, setze man $x = -z$, dann wird

$$y = \frac{1}{a^{\frac{1}{z}} + 1}. \tag{10a.}$$

Nähert sich jetzt $z$ dem Werte 0, so wird

$$\lim_{z=+0} a^{\frac{1}{z}} = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{z=+0} y = \lim_{x=-0} y = 0.$$

Fig. 16.




$OR = 1.$

Daraus erkennt man, daß sich $y$ sprungweise ändert, wenn $x$ den Wert 0 passiert, und zwar springt $y$ von 0 bis 1. (Vergl. Fig. 16.)

**Bemerkung.**

Eine scheinbare Unstetigkeit der Funktion kann auch dadurch eintreten, daß die Werte von $y$ imaginär werden, wenn $x$ das Intervall von $x_1$ bis $x_2$ durchläuft. Ist z. B.

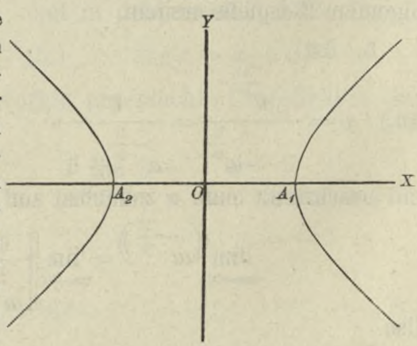
$$y = \pm\sqrt{x^2 - a^2},$$

so ist $y$ nur reell, so lange $x^2 \geqq a^2$ ist; $y$ wird dagegen imaginär, wenn $x^2 < a^2$ ist, wenn also

$$-a < x < +a.$$

Für die Werte von $x = -a$ bis $x = +a$ wird deshalb die Kurve unterbrochen, wie man aus Fig. 17 ersieht. Diese Auffassung ist aber nur unter der Voraussetzung richtig, daß man sich auf *reelle* Werte der Funktion beschränkt; läßt man auch *imaginäre* Werte von $y$ zu, so darf man den vorliegenden Fall nicht als eine Unstetigkeit betrachten, wie bei der Theorie der komplexen Größen gezeigt werden soll. Vorläufig kommt übri-

Fig. 17.



gens dieser Fall nicht in Betracht, weil nur *reelle* Werte der Funktionen berücksichtigt werden sollen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird.

Man kann den Begriff der Stetigkeit, ganz unabhängig von der geometrischen Anschauung, in folgender Weise erklären:

*Eine Funktion*

$$y = f(x)$$

*heißt für solche Werte von* $x$ *stetig, für welche die Differenz*

$$\Delta = f(x+\varepsilon) - f(x-\delta) \tag{11.}$$

*mit den positiven Größen* $\delta$ *und* $\varepsilon$ *zugleich verschwindend klein wird.*

Ist z. B.

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \frac{1}{x+\varepsilon-a}, \; f(x-\delta) = \frac{1}{x-\delta-a},$$

so wird

$$\Delta = \frac{1}{x+\varepsilon-a} - \frac{1}{x-\delta-a} = \frac{-(\delta+\varepsilon)}{(x-a)^2 + (\varepsilon-\delta)(x-a) - \delta\varepsilon}.$$

Dieser Ausdruck wird mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein, so lange $x$ von $a$ verschieden ist. Wird aber $x$ gleich $a$, so ist

$$\Delta = \frac{-(\delta+\varepsilon)}{-\delta\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\delta}$$

ein Ausdruck, der für unendlich kleine Werte von $\delta$ und $\varepsilon$ sogar unendlich groß wird. Die Funktion ist deshalb für $x$ gleich $a$ *unstetig*.

Ist

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \operatorname{tg}(x+\varepsilon), \; f(x-\delta) = \operatorname{tg}(x-\delta),$$

so wird

$$\Delta = \operatorname{tg}(x+\varepsilon) - \operatorname{tg}(x-\delta) = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\cos(x+\varepsilon)\cos(x-\delta)}.$$

Dieser Ausdruck wird mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich unendlich klein, wenn

$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

denn dann ist $\cos x$ von 0 verschieden. Wird aber $x$ gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = -\sin\varepsilon, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \sin\delta,$$

also

$$\Delta = \frac{-\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\delta\sin\varepsilon} = \frac{-\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon}{\sin\delta\sin\varepsilon},$$

oder

$$\Delta = -\operatorname{ctg}\delta - \operatorname{ctg}\varepsilon,$$

ein Ausdruck, welcher für unendlich kleine Werte von $\delta$ und $\varepsilon$ gleich $-\infty$ wird. Die Funktion $\operatorname{tg} x$ ist daher für $x$ gleich $\frac{\pi}{2}$ *unstetig*.

Ist

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \frac{1}{(x+\varepsilon)^2}, f(x-\delta) = \frac{1}{(x-\delta)^2},$$

so wird

$$\Delta = \frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\delta)^2} = \frac{-2x(\delta+\varepsilon)+\delta^2-\varepsilon^2}{(x+\varepsilon)^2(x-\delta)^2}.$$

Für alle Werte von $x$, welche von 0 verschieden sind, wird dieser Ausdruck mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein; ist aber $x = 0$, so wird

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\delta^2}$$

und nimmt beliebig große Werte an, wenn $\delta$ und $\varepsilon$ hinreichend klein und voneinander verschieden sind; d. h. $y$ wird für $x = 0$ *unstetig*.

Ist

$$f(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \frac{a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}{1+a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}, f(x-\delta) = \frac{a^{\frac{1}{x-\delta}}}{1+a^{\frac{1}{x-\delta}}},$$

so wird

$$\Delta = \frac{a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}{1+a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}} - \frac{a^{\frac{1}{x-\delta}}}{1+a^{\frac{1}{x-\delta}}},$$

also für $x = 0$ wird

$$\Delta = \frac{a^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1 + a^{\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{a^{-\frac{1}{\delta}}}{1 + a^{-\frac{1}{\delta}}}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{\delta} = \alpha$, $\frac{1}{\varepsilon} = \beta$, so erhält man

$$\Delta = \frac{a^\beta}{1 + a^\beta} - \frac{a^{-\alpha}}{1 + a^{-\alpha}} = \frac{1}{1 + a^{-\beta}} - \frac{a^{-\alpha}}{1 + a^{-\alpha}}.$$

Nun werden aber $\alpha$ und $\beta$ unendlich groß, wenn $\delta$ und $\varepsilon$ unendlich klein werden. Aus

$$\lim_{\alpha=\infty} a^{-\alpha} = \lim \frac{1}{a^\alpha} = 0, \quad \lim_{\beta=\infty} a^{-\beta} = \lim \frac{1}{a^\beta} = 0$$

folgt daher

$$\lim \Delta = 1;$$

d. h. $y$ wird für $x = 0$ *unstetig.*

**Satz 1.***) *Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervall von $x_1$ bis $x_2$ endlich und stetig***), *so sind auch die Funktionen $f(x) + g(x)$ und $f(x) - g(x)$ in diesem Intervalle endlich und stetig.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung werden

(12.) $\Delta_1 = f(x + \varepsilon) - f(x - \delta)$, $\Delta_2 = g(x + \varepsilon) - g(x - \delta)$

mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein, folglich auch

$$\Delta = [f(x + \varepsilon) \pm g(x + \varepsilon)] - [f(x - \delta) \pm g(x - \delta)] = \Delta_1 \pm \Delta_2.$$

---

*) Sollten die hier folgenden Sätze 1 bis 14 dem Anfänger noch zu schwer sein, so können sie vorläufig übergangen werden; der Leser muß aber bei den späteren Untersuchungen beachten, daß die *Stetigkeit* der Funktionen für die in Betracht kommenden Werte von $x$ vorausgesetzt wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist.

**) Wenn eine Funktion $y$ in dem angegebenen Intervalle *stetig* ist, so ist damit schon gesagt, daß sie in dem Intervalle nicht *unendlich gross* werden kann. Trotzdem fügt man in der Regel hinzu, daß sie auch *endlich* bleibe, um den häufigsten Fall der Unstetigkeit noch ausdrücklich auszuschließen.

**Satz 2.** *Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervalle von $x_1$ bis $x_2$ endlich und stetig, so ist auch die Funktion $F(x) = f(x) . g(x)$ in diesem Intervalle endlich und stetig.*

**Beweis.** Wendet man dieselben Bezeichnungen an wie in den Gleichungen (12.), so erhält man

$$\begin{aligned}\Delta = F(x+\varepsilon) - F(x-\delta) &= f(x+\varepsilon) . g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) . g(x-\delta) \\ &= f(x+\varepsilon) . g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) . g(x+\varepsilon) \\ &\quad + f(x-\delta) . g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) . g(x-\delta) \\ &= \Delta_1 . g(x+\varepsilon) + \Delta_2 . f(x-\delta).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $f(x-\delta)$, $g(x+\varepsilon)$ *endliche* Größen, und $\Delta_1$, $\Delta_2$ werden verschwindend klein zugleich mit $\delta$ und $\varepsilon$, folglich auch $\Delta$.

**Satz 3.** *Jede ganze rationale Funktion von $x$ ist stetig für alle endlichen Werte von $x$.*

Der Beweis folgt daraus, daß die ganzen rationalen Funktionen aus der Veränderlichen $x$ und aus konstanten Größen nur durch Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet werden.

**Satz 4.** *Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervalle von $x_1$ bis $x_2$ endlich und stetig, und bleibt $g(x)$ in diesem Intervalle entweder beständig positiv oder beständig negativ, so ist auch die Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ in diesem Intervalle endlich und stetig.*

**Beweis.** Hier ist

$$\begin{aligned}\Delta = F(x+\varepsilon) - F(x-\delta) &= \frac{f(x+\varepsilon)}{g(x+\varepsilon)} - \frac{f(x-\delta)}{g(x-\delta)} \\ &= \frac{g(x-\delta) . f(x+\varepsilon) - g(x+\varepsilon) . f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon) . g(x-\delta)} \\ &= \frac{g(x-\delta) . f(x+\varepsilon) - g(x-\delta) . f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon) . g(x-\delta)} \\ &\quad - \frac{g(x+\varepsilon) . f(x-\delta) - g(x-\delta) . f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon) . g(x-\delta)},\end{aligned}$$

oder, wenn man dieselben Bezeichnungen anwendet wie in den Gleichungen (12.),

$$\Delta = \frac{\Delta_1 \,.\, g(x-\delta) - \Delta_2 \,.\, f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon) \,.\, g(x-\delta)}.$$

Nach Voraussetzung werden $\Delta_1$, $\Delta_2$ mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein, folglich auch $\Delta$, da $g(x-\delta)$ und $g(x+\varepsilon)$ nach Voraussetzung von 0 verschieden sind.

**Satz 5.** *Der Quotient* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *zweier ganzen rationalen Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ *kann nur für diejenigen Werte von* $x$ *unstetig werden, für welche* $g(x)$ *gleich* 0 *wird.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4.

Da man *jede gebrochene rationale* Funktion als Quotienten zweier ganzen rationalen Funktionen darstellen kann, so findet man aus Satz 5, für welche Werte von $x$ die gebrochenen rationalen Funktionen stetig sind oder nicht.

**Satz 6.** *Die $n^{te}$ Wurzel aus einer endlichen, stetigen Funktion* $f(x)$ *ist wieder endlich und stetig.**)

**Beweis.** Nach Voraussetzuug wird

$$\Delta_1 = f(x+\varepsilon) - f(x-\delta)$$

mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein. Setzt man nun

$$\sqrt[n]{f(x+\varepsilon)} = u, \quad \sqrt[n]{f(x-\delta)} = v,$$

so ist nachzuweisen, daß auch

$$\Delta = u - v$$

verschwindend klein wird.

Ist zunächst $f(x) \lesseqgtr 0$, so kann man $\delta$ und $\varepsilon$ so klein machen, daß $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\delta)$ dasselbe Zeichen haben wie $f(x)$; dann muß man auch den Größen $u$ und $v$ das gleiche Zeichen geben. Deshalb sind in

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= f(x+\varepsilon) - f(x-\delta) = u^n - v^n \\ &= (u-v)\,(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})\end{aligned}$$

*) Ist $n$ *gerade*, so möge bei diesem Satze $x$ auf solche Werte beschränkt werden, für welche $f(x) > 0$ ist.

die Größen $u^{n-1}$, $u^{n-2}v, \ldots uv^{n-2}$, $v^{n-1}$ alle von 0 verschieden und haben sämtlich dasselbe Vorzeichen, folglich ist

$$S = u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1} \lesseqgtr 0,$$

und

$$\Delta = u - v = \frac{u^n - v^n}{S} = \frac{\Delta_1}{S}$$

wird mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein.

Ist $f(x) = 0$, so sind $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\delta)$ einzeln beliebig klein für hinreichend kleine Werte von $\delta$ und $\varepsilon$, folglich auch $u$, $v$ und $\Delta$, wobei vorausgesetzt wird, daß $u$ und $v$ beide reelle Größen sind.

Dieser Satz gibt Aufschluß über die Stetigkeit der *irrationalen* Funktionen.

**Satz 7.** *Die Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind für alle Werte von* $x$ *stetig.*

**Beweis.** Für $f(x) = \sin x$ wird

$$\Delta = \sin(x+\varepsilon) - \sin(x-\delta) = 2\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right).$$

Dabei liegt $\cos\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right)$ zwischen $-1$ und $+1$, und $\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)$ wird nach Formel Nr. 1 der Tabelle mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein, folglich auch $\Delta$.

Für $f(x) = \cos x$ wird

$$\Delta = \cos(x+\varepsilon) - \cos(x-\delta) = -2\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right).$$

Auch hier liegt $\sin\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right)$ zwischen $-1$ und $+1$, und $\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)$ wird mit $\delta$ und $\varepsilon$ verschwindend klein, folglich auch $\Delta$.

**Satz 8.** *Die Funktion* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *wird nur für diejenigen Werte von* $x$ *unstetig, für welche* $\cos x$ *gleich* 0 *wird, also für*

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \ \pm\frac{3\pi}{2}, \ \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots,$ *und die Funktion* $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *wird nur für diejenigen Werte von* $x$ *unstetig, für welche* $\sin x = 0$ *wird, also für* $x = 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ldots.$

Der Beweis folgt ohne weiteres aus den Sätzen 5 und 7.

**Satz 9.** *Die Funktion* $a^x$ *ist stetig für alle endlichen Werte von* $x$.

**Beweis.** Für $f(x) = a^x$ ist

$$\Delta = a^{x+\varepsilon} - a^{x-\delta} = a^x \,.\, a^\varepsilon - \frac{a^x}{a^\delta} = a^x\left(a^\varepsilon - \frac{1}{a^\delta}\right).$$

Nun ist

$$\lim_{\delta=0} a^\delta = 1, \qquad \lim_{\varepsilon=0} a^\varepsilon = 1,$$

folglich wird $\Delta$ mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein.

**Satz 10.** *Die Funktionen* $\arcsin x$ *und* $\arccos x$ *sind stetig, wenn* $-1 < x < +1$ *ist.*

**Beweis.** Ist $f(x) = \arcsin x$, und setzt man

$$u = \arcsin(x+\varepsilon), \quad v = \arcsin(x-\delta),$$

so wird

$$\Delta = \arcsin(x+\varepsilon) - \arcsin(x-\delta) = u - v.$$

Dabei kann man $\delta$ und $\varepsilon$ so klein machen, daß auch $-1 < x - \delta < x + \varepsilon < +1$ ist. Dies gibt

$$\sin u = x + \varepsilon, \quad \sin v = x - \delta,$$

wobei $u$ und $v$ so gewählt werden müssen, daß

$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < v < +\frac{\pi}{2},$$

also

$$-\pi < u + v < +\pi, \quad \text{oder} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{u+v}{2} < +\frac{\pi}{2}.$$

Nun wird

$$\sin u - \sin v = \delta + \varepsilon = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}, \ \Delta = u - v = 2\arcsin\left[\frac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}\right];$$

da $\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$ von 0 verschieden ist, so wird $\frac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}$ mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein, also auch $\Delta$.

Dadurch ist die Stetigkeit der Funktion $\arcsin x$ bewiesen, aus der sich auch die Stetigkeit von $\arccos x$ in folgender Weise ergibt. Es sei

$$y = \arcsin x, \quad z = \arccos x,$$

dann wird

$$x = \sin y = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Deshalb kann man $z$ so bestimmen, daß

$$z = \frac{\pi}{2} - y, \quad \text{oder} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

wird, und zwar durchläuft $z$ alle Werte von $\pi$ bis 0, wenn $y$ alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

**Satz 11.** *Die Funktionen* $\operatorname{arc\,tg} x$ *und* $\operatorname{arc\,ctg} x$ *sind für alle endlichen Werte von* $x$ *stetig.*

**Beweis.** Ist $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, und setzt man

$$u = \operatorname{arc\,tg}(x+\varepsilon), \quad v = \operatorname{arc\,tg}(x-\delta),$$

so wird

$$\Delta = \operatorname{arc\,tg}(x+\varepsilon) - \operatorname{arc\,tg}(x-\delta) = u - v.$$

Dabei kann man $u$ und $v$ so wählen, daß

$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < v < +\frac{\pi}{2}$$

ist. Dies gibt

$$\operatorname{tg} u = x + \varepsilon, \quad \operatorname{tg} v = x - \delta,$$

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \delta + \varepsilon = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v},$$

$$\sin(u-v) = (\delta+\varepsilon) \, . \cos u \cos v,$$

$$\Delta = u - v = \arcsin\left[(\delta+\varepsilon) \, . \cos u \cos v\right],$$

folglich wird $\Delta$ mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein.

Aus der Stetigkeit von $\operatorname{arc\,tg} x$ ergibt sich dann auch die Stetigkeit von $\operatorname{arc\,ctg} x$ in folgender Weise. Es sei

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad z = \operatorname{arc\,ctg} x,$$

dann wird

$$x = \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Deshalb kann man $z$ so bestimmen, daß

$$z = \frac{\pi}{2} - y, \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$$

wird, und zwar durchläuft $z$ alle Werte von $\pi$ bis $0$, wenn $y$ alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

**Satz 12.** *Die Funktion* $\log x$ *ist stetig für alle endlichen, positiven Werte von* $x$.

**Beweis.** Ist $f(x) = \log x$, so wird

$$\varDelta = \log(x + \varepsilon) - \log(x - \delta) = \log\left(\frac{x + \varepsilon}{x - \delta}\right) = \log\left(1 + \frac{\delta + \varepsilon}{x - \delta}\right).$$

Da nun, so lange $x > 0$ bleibt,

$$\lim_{\substack{\delta = 0 \\ \varepsilon = 0}} \log\left(1 + \frac{\delta + \varepsilon}{x - \delta}\right) = \log 1 = 0$$

ist, so wird $\varDelta$ mit $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich verschwindend klein.

Bei den folgenden Betrachtungen ist es von großer Wichtigkeit, ob die Funktionen, mit denen man operiert, stetig sind oder nicht, weil die meisten Sätze, die hergeleitet werden sollen, nur für stetige Funktionen gelten.

**Satz 13.** *Ist die Funktion* $f(x)$ *für alle Werte von* $x$ *zwischen* $x_1$ *und* $x_2$ *reell und stetig, und ist*

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0,$$

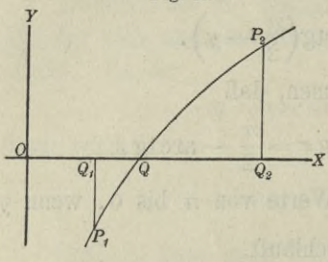
*so gibt es zwischen* $x_1$ *und* $x_2$ *mindestens einen Wert von* $x$, *für welchen* $f(x)$ *gleich* 0 *wird.*

**Beweis.** Am leichtesten erkennt man die Richtigkeit des Satzes aus der geometrischen Darstellung. Setzt man nämlich

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2,$$

so entspricht den Koordinaten $x_1$, $y_1$ ein Punkt $P_1$ auf der *negativen* Seite, und den Koordinaten $x_2$, $y_2$ entspricht ein Punkt $P_2$ auf der *positiven* Seite der $X$-Achse (vergl. Fig. 18). Da nun die Kurve, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht, zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$ stetig verläuft, so muß sie die $X$-Achse zwischen den Punkten $Q_1$ und $Q_2$ mindestens in *einem* Punkte $Q$ schneiden, um von der negativen Seite der $X$-Achse auf die positive zu gelangen. $OQ = x$ ist dann der Wert von $x$, für welchen $f(x) = 0$ wird.

Fig. 18.




Man kann aber den Beweis auch unabhängig von der geometrischen Darstellung führen.

Es sei $x_2 > x_1$, und es werde die Differenz $x_2 - x_1$ in zwei gleiche Teile $h$ geteilt, so daß

$$x_2 - x_1 = 2h, \quad \text{oder} \quad h = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

wird. Ist $f(x_1 + h) = 0$, so hat man bereits einen Wert von $x$ zwischen $x_1$ und $x_2$ gefunden, für welchen $f(x)$ gleich 0 wird; ist dagegen $f(x_1 + h) > 0$, so erkläre man die Größen $x_3$ und $x_4$ durch die Gleichungen

$$x_3 = x_1, \quad x_4 = x_1 + h;$$

und ist $f(x_1 + h) < 0$, so erkläre man die Größen $x_3$ und $x_4$ durch die Gleichungen

$$x_3 = x_1 + h, \quad x_4 = x_1 + 2h = x_2.$$

In beiden Fällen ist

$$f(x_3) < 0, \quad f(x_4) > 0,$$

wobei aber das Intervall von $x_3$ bis $x_4$ halb so groß ist wie das zwischen $x_1$ und $x_2$. Setzt man jetzt

$$x_4 - x_3 = 2h_1, \quad \text{oder} \quad h_1 = \frac{x_4 - x_3}{2},$$

so hat man den gesuchten Wert von $x$ bereits gefunden, wenn $f(x_3 + h_1) = 0$ wird. Ist dagegen $f(x_3 + h_1) > 0$, so erkläre man die Größen $x_5$ und $x_6$ durch die Gleichungen

$$x_5 = x_3, \quad x_6 = x_3 + h_1;$$

und ist $f(x_3 + h_1) < 0$, so erkläre man die Größen $x_5$ und $x_6$ durch die Gleichungen

$$x_5 = x_3 + h_1, \quad x_6 = x_3 + 2h_1 = x_4.$$

In beiden Fällen ist

$$f(x_5) < 0, \quad f(x_6) > 0,$$

wobei aber das Intervall zwischen $x_5$ und $x_6$ viermal kleiner ist als das Intervall zwischen $x_1$ und $x_2$.

In dieser Weise kann man fortfahren und findet entweder $f(x_{2n-1} + h_{n-1}) = 0$, oder

$$f(x_{2n+1}) < 0, \quad f(x_{2n+2}) > 0,$$

wobei das Intervall zwischen $x_{2n+1}$ und $x_{2n+2}$ $(2^n)^{\text{ten}}$mal kleiner ist als das zwischen $x_1$ und $x_2$. Da aber die Funktion für die betrachteten Werte von $x$ stetig ist, so wird der Unterschied zwischen $f(x_{2n+1})$ und $f(x_{2n+2})$ beliebig klein, wenn man nur $n$ hinreichend groß macht, folglich ist erst recht der Unterschied zwischen 0 und $f(x_{2n+1})$, oder zwischen 0 und $f(x_{2n+2})$ beliebig klein, da 0 zwischen diesen beiden Werten liegt, d. h.

$$\lim_{n=\infty} f(x_{2n+1}) = \lim_{n=\infty} f(x_{2n+2}) = 0.$$

Der Satz gilt auch noch, wenn

$$f(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) < 0$$

ist. Der Beweis wird dann in ganz ähnlicher Weise geführt wie vorhin.

Hieraus erhält man unmittelbar noch folgenden allgemeineren

**Satz 14.** *Ist die Funktion $f(x)$ für alle Werte von $x$ zwischen $x_1$ und $x_2$ reell und stetig, so wird $f(x)$ jeden Wert $M$ zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ mindestens einmal annehmen, wenn $x$ alle Werte zwischen $x_1$ und $x_2$ durchläuft.*

**Beweis.** Ist $M$ irgend ein Wert zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$, ist also entweder

$$f(x_1) < M < f(x_2),$$

oder

$$f(x_1) > M > f(x_2),$$

so bilde man die Funktion

$$F(x) = f(x) - M,$$

welche zwischen $x_1$ und $x_2$ stetig ist und sicher das Zeichen wechselt.

Für $F(x)$ gelten daher genau dieselben Voraussetzungen wie in dem vorigen Satze für $f(x)$. Deshalb gibt es in dem Intervalle von $x_1$ bis $x_2$ mindestens einen Wert von $x$, für welchen $F(x)$ gleich 0 wird. Dieser Wert sei $\xi$, dann ist

$$F(\xi) = f(\xi) - M = 0,$$

also

$$f(\xi) = M,$$

was zu beweisen war.

# Hülfssätze aus der algebraischen Analysis.

## § 9.

## Der binomische Lehrsatz für positive, ganzzahlige Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 6 bis 11.)

Es sei

$$(1.)\qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k},$$

wo $k$ eine *positive*, *ganze* Zahl sein möge, während $n$ auch negativ und gebrochen sein darf; dann gelten für die durch Gleichung (1.) erklärten Größen, welche man „*Binomial-Koeffizienten*" nennt, die folgenden Sätze:

**Satz 1.**

$$(2.)\qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}.$$

Der Beweis dieser Formel ergibt sich unmittelbar aus der Bildung der Binomial-Koeffizienten. Vertauscht man nämlich in Gleichung (1.) die Zahl $k$ mit $k+1$ und beachtet, daß

$$n-(k+1)+1 = n-k$$

ist, so erhält man

$$(3.)\qquad \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)}$$

$$= \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}.$$

Diese Formel kann man mit Vorteil benutzen, um die aufeinander folgenden Binomial-Koeffizienten der Reihe nach auszurechnen, denn nach Gleichung (2.) wird

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \binom{n}{1}\frac{n-1}{2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \binom{n}{2}\frac{n-2}{3},$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \binom{n}{3}\frac{n-3}{4},$$

$$\binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = \binom{n}{4}\frac{n-4}{5},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

also z. B. für $n = 13$

$$\binom{n}{1} = 13,\quad \binom{n}{2} = 13 \cdot \frac{12}{2} = 78,\quad \binom{n}{3} = 78 \cdot \frac{11}{3} = 286,$$

$$\binom{n}{4} = 286 \cdot \frac{10}{4} = 715,\quad \binom{n}{5} = 715 \cdot \frac{9}{5} = 1\,287, \ldots;$$

oder für $n = -\frac{1}{2}$

$$\binom{n}{1} = -\frac{1}{2},\quad \binom{n}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{2} = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4},$$

$$\binom{n}{3} = +\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{-\frac{5}{2}}{3} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6},$$

$$\binom{n}{4} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{-\frac{7}{2}}{4} = +\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8},$$

$$\binom{n}{5} = +\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} \cdot \frac{-\frac{9}{2}}{5} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}, \ldots$$

**Satz 2.**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{4.}$$

Der Beweis möge zunächst für einige besondere Fälle durchgeführt werden.

**1. Beispiel.** Es ist

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{3}=\frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$=\frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$=\frac{10\,.\,9\,.\,8(7+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=\frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=\binom{11}{4}.$$

**2. Beispiel.**

$$\binom{9}{7}+\binom{9}{6}=\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}+\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

$$=\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}+\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$$

$$=\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4(3+7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}=\frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$$

$$=\binom{10}{7}.$$

**Allgemeiner Beweis.**

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots(k-1)k}$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\,.\,2\ldots(k-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots(k-1)k}$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)k}{1\,.\,2\ldots(k-1)k}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1+k)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-1)k}$$

$$=\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n+1-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-1)k}=\binom{n+1}{k}.$$

Ist $n$ eine *positive*, *ganze* Zahl, so folgt aus Gleichung (1.) unmittelbar noch der folgende **Satz 3:**

$$(5.)\qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Auch hier möge der Beweis des Satzes zunächst durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden. Es ist

$$\binom{8}{5} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \cdot \frac{3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \binom{8}{3}.$$

**Allgemeiner Beweis.**

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots 3 \,.\, 2 \; 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-k)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-k)} \cdot \frac{k(k-1)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (k-1)k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-k)},$$

oder, da $k+1$ gleich $n-(n-k)+1$ ist,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Der Gleichung (5.) entsprechend, setze man

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$$

dann gilt die Gleichung (2.) auch noch für $k = 1$, d. h. es wird

$$(4a.)\qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{n}{1} + 1 = \frac{n+1}{1} = \binom{n+1}{1}.$$

**Satz 4.** *Wenn $m$ eine positive, ganze Zahl ist, so sind die Binomial-Koeffizienten $\binom{m}{k}$ ebenfalls positive, ganze Zahlen.*

**Beweis.** Aus den Gleichungen

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = \frac{2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2} = 1$$

erkennt man, daß der Satz für $m$ gleich 2 richtig ist. Durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ findet man dann, daß der Satz allgemein richtig ist; d. h. man setzt voraus, daß der Satz bewiesen sei für einen bestimmten Wert von $m$, nämlich für $m$ gleich $n$, und zeigt, daß er dann auch für $m$ gleich $n+1$ richtig bleibt. In der Tat, sind $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$ positive, ganze Zahlen, so folgt aus der Gleichung

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

ohne weiteres, daß auch $\binom{n+1}{k}$ eine positive, ganze Zahl ist. Der Satz gilt für $m$ gleich 2, folglich auch für $m$ gleich 3; dann gilt er aber auch für $m$ gleich 4, usw.

**Satz 5.** *Wenn $m$ eine positive, ganze Zahl ist, so wird*

$$(6.)\qquad (1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots$$
$$+\binom{m}{m-1}x^{m-1}+\binom{m}{m}x^m.$$

**Beweis.** Der Satz ist sicher richtig für $m=1,\ 2,\ 3$, denn man erhält der Reihe nach

$$(1+x)^1 = 1+x,$$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 = 1+\binom{2}{1}x+\binom{2}{2}x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = 1+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3.$$

Daß die Gleichung (6.) allgemein richtig ist, wenn $m$ irgend eine positive, ganze Zahl ist, findet man wieder durch den Schluß von $n$ auf $n+1$.

Aus der Gleichung

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{k-1}x^{k-1}+\binom{n}{k}x^k+\cdots$$

folgt durch Multiplikation mit $1+x$

$$(7.)\quad (1+x)^{n+1} =$$
$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}x^{k-1} + \binom{n}{k}x^k + \cdots$$
$$+ \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \cdots \qquad + \binom{n}{k-1}x^k$$
$$+ \binom{n}{k}x^{k+1} + \cdots;$$

nun ist aber nach Gleichung (4.) und (4a.)

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \binom{n+1}{1},$$
$$\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n},$$
$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1;$$

folglich erhält man dadurch, daß man auf der rechten Seite in Gleichung (7.) je zwei untereinanderstehende Glieder vereinigt,

$$(7a.)\quad (1+x)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n+1}{k}x^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}.$$

Gilt also der vorstehende Satz, welcher der *„binomische Lehrsatz“* genannt wird, für $m = 3$, so gilt er auch für $m = 4$, und daraus folgt wieder, daß er auch für $m = 5$ gilt. So kann man fortfahren und die Gültigkeit des Satzes für alle Fälle beweisen, in denen $m$ eine *positive*, *ganze* Zahl ist.

**Bemerkungen.**

1. Es wird später gezeigt werden, daß die Gleichung

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$$

unter der Voraussetzung

$$-1 < x < +1$$

auch noch richtig bleibt, wenn $m$ keine *positive*, *ganze* Zahl ist. In dem Falle aber, wo $m$ eine *positive*, *gebrochene*, oder eine *negative* (ganze oder gebrochene) Zahl ist, hat die rechte Seite eine *unendliche* Anzahl von Gliedern und ist ein besonderer Fall der *Taylor*schen Reihe.

2. Die Koeffizienten in der Entwickelung von $(1+x)^m$, also die Größen

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \ldots$$

werden die „zur Zahl $m$ gehörigen *Binomial-Koeffizienten*" genannt.

3. Das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis $k$ wird „*k-Fakultät*" genannt und mit $k!$ bezeichnet. Es ist daher

$$k! = 1.2.3\ldots(k-1)k;$$

da

$$(k-1)! = 1.2.3\ldots(k-1)$$

ist, so besteht die Gleichung

$$k! = (k-1)!\,k.$$

Durch Anwendung der Formel

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

kann man, immer unter der Voraussetzung, daß $m$ eine positive, ganze Zahl ist, die Gleichung (6.) noch auf eine einfachere Form bringen; es wird nämlich

$$\binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{m-1} = \binom{m}{1}, \quad \binom{m}{m-2} = \binom{m}{2}, \ldots$$

und deshalb

$$(1+x)^m = \tag{8.}$$

$$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdot + \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{1}x^{m-1} + x^m.$$

**Satz 6.** *Es sind also je zwei Koeffizienten in der Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze einander gleich, wenn sie zu Gliedern gehören, von denen das eine ebenso weit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht.*

**Beispiele.**

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5,$$
$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6,$$
$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Setzt man in Gleichung (8.)

$$x = \frac{b}{a}$$

und multipliziert beide Seiten der Gleichung mit $a^m$, so erhält man

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left[1+\binom{m}{1}\frac{b}{a}+\binom{m}{2}\frac{b^2}{a^2}+\cdots+\binom{m}{2}\frac{b^{m-2}}{a^{m-2}}\right.$$
$$\left.+\binom{m}{1}\frac{b^{m-1}}{a^{m-1}}+\frac{b^m}{a^m}\right],$$

oder

$$(9.)\quad (a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots$$
$$+\binom{m}{2}a^2b^{m-2}+\binom{m}{1}ab^{m-1}+b^m.$$

**Satz 7.** *Die Potenz eines unechten Bruches ist beliebig groß, wenn man den Exponenten hinreichend groß macht.*

**Beweis.** Es sei

$$a > b > 0, \quad \text{also} \quad a - b = c > 0, \quad a = b + c,$$

dann ist $\frac{a}{b}$ ein *unechter* Bruch. Bezeichnet man $\frac{c}{b}$ mit $x$, so ist $x$ gleichfalls *positiv*, und man erhält

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{b} = 1 + \frac{c}{b} = 1 + x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots,$$

folglich ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m > 1 + mx,$$

denn die Glieder $\frac{m(m-1)}{1.2}x^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3, \ldots$ sind nach Satz 3 alle positiv, wenn $m$ eine positive, ganze Zahl ist.

Da man nun aber durch Vergrößerung von $m$ den Ausdruck $1 + mx$ beliebig groß machen kann, so wird $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ für hinreichend große Werte von $m$ erst recht beliebig groß, oder mit anderen Worten:

*Wird $m$ unendlich groß, so wird auch $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ unendlich groß.*

**Satz 8.** *Die Potenz eines echten Bruches ist beliebig klein, wenn man den Exponenten hinreichend groß macht.*

**Beweis.** Es sei wieder $a > b > 0$, also $\frac{b}{a}$ ein *echter* Bruch; dann wird

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \left[\frac{1}{\frac{a}{b}}\right]^m = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.$$

Da hierbei $\frac{a}{b}$ ein *unechter* Bruch ist, so wird nach dem vorhergehenden Satze $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ für hinreichend große Werte von $m$ beliebig groß, folglich wird $\left(\frac{b}{a}\right)^m$ beliebig klein, oder mit anderen Worten:

*Wird $m$ unendlich groß, so wird $\left(\frac{b}{a}\right)^m$ unendlich klein.*

Die Sätze 7 und 8 sind zunächst unter der Voraussetzung bewiesen worden, daß $a$ und $b$ positiv sind; weil aber

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^m = (-1)^m\left(\frac{b}{a}\right)^m = \pm\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

wird, so gelten sie auch noch, wenn eine der beiden Zahlen *negativ* ist.

## § 10.
## Geometrische Progressionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 12, 12a und 13.)

Die Reihe der Zahlen

$$A,\ Aq,\ Aq^2, \ldots Aq^{n-1}$$

heißt eine „*geometrische Reihe*" oder „*geometrische Progression*". Die Anzahl ihrer Glieder beträgt $n$; die Summe derselben ist leicht zu bilden. Setzt man nämlich

$$S = A + Aq + Aq^2 + \cdots + Aq^{n-1}, \tag{1.}$$

so wird

$$qS = \quad Aq + Aq^2 + \cdots + Aq^{n-1} + Aq^n,$$

also

$$S - qS = S(1-q) = A - Aq^n,$$

$$S = \frac{A(1-q^n)}{1-q}. \tag{2.}$$

**Beispiel.** Es sei

$$S = x_1^{n-1} + xx_1^{n-2} + x^2x_1^{n-3} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1}, \tag{3.}$$

dann wird

$$A = x_1^{n-1},\quad q = \frac{x}{x_1},\quad S = \frac{x_1^{n-1}\left(1 - \frac{x^n}{x_1^n}\right)}{1 - \frac{x}{x_1}} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Noch leichter findet man dieses Resultat in folgender Weise. Es ist

$$Sx_1 = x_1^n + xx_1^{n-1} + x^2x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-1}x_1,$$

$$Sx = \quad xx_1^{n-1} + x^2x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-1}x_1 + x^n,$$

also

$$Sx_1 - Sx = S(x_1 - x) = x_1^n - x^n,$$

oder

$$S = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}. \tag{4.}$$

Bisher war stillschweigend vorausgesetzt worden, daß $n$ eine *endliche* (positive, ganze) Zahl ist. Ist aber $q$ ein *echter*

Bruch, so behält $S$ auch noch eine bestimmte Bedeutung, wenn $n$ *unendlich groß* wird. Es ist dann nämlich nach Satz 8 des vorhergehenden Paragraphen

$$\lim_{n=\infty} q^n = 0,$$

folglich wird

$$S = A + Aq + Aq^2 + Aq^3 + \cdots = \frac{A}{1-q}. \tag{5.}$$

**Beispiele.** 1) Es ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right];$$

wächst $n$ ins Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, also

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

2) Es ist

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right];$$

wächst $n$ ins Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, also

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2}.$$

3) Es ist

$$0{,}7777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

$$= \frac{7}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right];$$

wächst $n$ ins Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, also

$$0{,}777\ldots = \frac{7}{9}.$$

**Bemerkung.**

Die Summe

$$S = A + Aq + Aq^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

hat *unendlich* viele Glieder, aber trotzdem einen *endlichen* Wert, wenn $q$ ein echter Bruch ist. Man nennt eine solche Summe mit unendlich vielen Gliedern, welche einen bestimmten, endlichen Wert hat, eine „*konvergente* (unendliche) Reihe". Später wird noch ausführlich von der Konvergenz der Reihen die Rede sein.

## § 11.

## Erklärung der Zahl $e$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 14 und 15.)

Setzt man in der Gleichung

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k} x^k + \cdots$$

$x$ gleich $\frac{1}{n}$, so erhält man

$$(1.)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1 \,.\, 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k} + \cdots.$$

Es soll nun der Wert von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bestimmt werden, wenn $n$ unendlich groß wird, wobei aber $n$ zunächst auf *positive, ganzzahlige* Werte beschränkt sein möge.

Bezeichnet man den gesuchten Grenzwert mit $e$, so ist also

$$(2.)\qquad e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Zur Berechnung dieses Grenzwertes trenne man auf der rechten Seite von Gleichung (1.) die ersten $k+1$ Glieder ab und nenne ihre Summe $S_k$, während die Summe aller übrigen Glieder $S_k'$ heißen möge; es ist dann

$$(3.)\qquad S_k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\,.\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k},$$

$$(4.)\qquad S_k' = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k(k+1)} + \cdots$$

und

$$(5.)\qquad e = \lim_{n=\infty} S_k + \lim_{n=\infty} S_k'.$$

Nach Satz 4 in § 9 sind die Binomial-Koeffizienten $\binom{n}{k}$ sämtlich positiv, wenn $n$ eine positive, ganze Zahl ist. Deshalb sind in der Entwickelung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz alle Glieder positiv, so daß auch $S_k'$ positiv sein muß. Aus Gleichung (5.) folgt daher

$$(6.)\qquad \lim S_k < e.$$

Unter der Voraussetzung, daß $k$ eine endliche Zahl ist, werden die Größen

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots \frac{k-1}{n}$$

sämtlich unendlich klein, wenn $n$ unendlich groß wird; die Faktoren

$$1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n},\ \cdots 1-\frac{k-1}{n}$$

werden deshalb alle gleich 1, so daß man erhält

$$\lim S_k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k},$$

oder

(7.) $$\lim S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Denselben Schluß darf man aber *nicht* bei sämtlichen Gliedern von $S_k'$ machen, denn in den späteren Gliedern von $S_k'$ hat der Zähler auch Faktoren von der Form

$$1 - \frac{m}{n},$$

bei denen nicht nur $n$ unendlich groß wird, sondern auch $m$. Ist z. B. $m$ gleich $\frac{1}{2}n$, so wird stets, wie groß auch $n$ werden mag,

$$1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

und ist $m > \frac{n}{2}$, so wird sogar $\lim \frac{m}{n} > \frac{1}{2}$, also

$$\lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{m}{n}\right) < \frac{1}{2}.$$

Wollte man daher auch bei den sämtlichen Gliedern von $S_k'$ die Faktoren der Zähler alle gleich 1 setzen, so würde man die Zähler zu groß machen. Setzt man trotzdem die Faktoren der Zähler alle gleich 1, so wird aus der *Gleichung* (4.) eine *Ungleichung*, nämlich

(8.) $$\lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \cdots,$$

oder, weil

$$(k+2)! = (k+1)!\,(k+2),$$
$$(k+3)! = (k+1)!\,(k+2)\,(k+3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ist,

(8a.) $$\lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!}\left[1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \cdots\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1},\quad \frac{1}{(k+2)(k+3)} < \frac{1}{(k+1)^2},\ \ldots,$$

folglich wird die Ungleichung (8a.) noch verstärkt, wenn man

$\frac{1}{k+1}$ statt $\frac{1}{k+2}$, $\frac{1}{(k+1)^2}$ statt $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$, $\cdots$ setzt. Dadurch erhält man

$$\lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!}\left[1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots\right]. \tag{9.}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist hierbei eine geometrische Progression

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots,$$

die sich bis ins Unendliche erstreckt, deren Summe sich aber leicht bilden läßt, weil

$$q = \frac{1}{k+1} < 1$$

ist; und zwar wird nach Formel Nr. 12a der Tabelle diese Summe gleich

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k}. \tag{10.}$$

Daraus folgt

$$\lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+1}{k},$$

oder, da $(k+1)!$ gleich $k!(k+1)$ ist,

$$\lim S_k' < \frac{1}{k!\,k}. \tag{11.}$$

Nach Gleichung (5.) und Ungleichung (6.) ist daher

$$\lim_{n=\infty} S_k < e < \lim_{n=\infty} S_k + \frac{1}{k!\,k}. \tag{12.}$$

Nun wird aber für hinreichend große Werte von $k$ die Größe $\frac{1}{k!\,k}$ beliebig klein, so daß man $e$ zwischen zwei Grenzen gebracht hat, die einander beliebig nahe liegen; ja diese Grenzen fallen sogar zusammen, wenn man jetzt auch $k$ unendlich groß werden läßt. Es ist daher

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{13.}$$

Kommt es nur darauf an, die Zahl $e$ bis auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen genau zu berechnen, so genügen schon verhältnismäßig wenige Glieder der Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (13.). Will man z. B. $e$ bis auf 10 Dezimalstellen genau finden, so genügen schon die ersten 16 Glieder der Reihe. Es ist nämlich, wenn man zunächst 12 Dezimalstellen berücksichtigt,

$$\begin{aligned}
1 + 1 : 1! &= 2 \\
1 : 2! &= 0{,}5 \\
1 : 3! &= 0{,}166\,666\,666\,667 \\
1 : 4! &= 0{,}041\,666\,666\,667 \\
1 : 5! &= 0{,}008\,333\,333\,333 \\
1 : 6! &= 0{,}001\,388\,888\,889 \\
1 : 7! &= 0{,}000\,198\,412\,698 \\
1 : 8! &= 0{,}000\,024\,801\,587 \\
1 : 9! &= 0{,}000\,002\,755\,732 \\
1 : 10! &= 0{,}000\,000\,275\,573 \\
1 : 11! &= 0{,}000\,000\,025\,052 \\
1 : 12! &= 0{,}000\,000\,002\,088 \\
1 : 13! &= 0{,}000\,000\,000\,161 \\
1 : 14! &= 0{,}000\,000\,000\,011 \\
1 : 15! &= 0{,}000\,000\,000\,001
\end{aligned}$$

also

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots. \tag{14.}$$

Hierdurch ist $e$ ohne Zweifel auf 10 Dezimalstellen genau berechnet, denn der Unterschied zwischen $e$ und der Summe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{15!}$$

ist (unter Berücksichtigung von 14 Dezimalstellen)

$$\lim_{n=\infty} S'_{15} < \frac{1}{15!\,15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,05$$

und kommt daher bei den ersten 12 Dezimalstellen nicht in Betracht. Dagegen können die 11te und die 12te Dezimalstelle dadurch fehlerhaft geworden sein, daß bei Summierung der 16 Glieder die auf die 12te Dezimalstelle folgenden Stellen vernachlässigt worden sind. Dieser Fehler ist aber bei jedem der Glieder in der 12ten Dezimalstelle kleiner als $\frac{1}{2}$. Die ersten 3 Glieder sind genau, so daß der Gesamtfehler in der letzten Dezimalstelle kleiner als

$$13 \cdot \frac{1}{2} = 6{,}5$$

sein muß. Im allgemeinen wird der gesamte Fehler, welcher bei solchen Rechnungen durch Fortlassung der späteren Dezimalstellen begangen wird, noch viel kleiner sein, als das hier angedeutete Verfahren ergeben würde, weil die einzelnen Fehler verschiedene Zeichen haben und sich infolgedessen wenigstens teilweise gegeneinander fortheben.

In der soeben ausgeführten Berechnung der Zahl $e$ ist z. B. der gesamte Fehler bei der 12ten Dezimalstelle nicht 6,5, sondern 0, wie sich aus der Berücksichtigung der späteren Dezimalstellen ergibt. Die Gleichung (14.) enthält daher die Zahl $e$ bis auf 12 Dezimalstellen genau.

Es war vorhin angenommen worden, daß $n$ eine positive, *ganze* Zahl sei. Von dieser Voraussetzung kann man sich noch frei machen. Liegt nämlich $n$ zwischen den positiven, ganzen Zahlen $m$ und $m + 1$, ist also

$$m < n < m + 1,$$

so wird

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1}$$

und

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m+1}.$$

Da die Potenz eines unechten Bruches mit dem Exponenten zugleich wächst, so wird

$$(15.)\quad \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m}, \end{cases}$$

also

(15a.) $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Nun ist

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e,$$

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim_{m=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{m+1}}\cdot \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e,$$

folglich gehen die Ungleichungen (15a.) über in

(16.) $$e \geqq \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geqq e,$$

oder

(17.) $$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Die Zahl $e$ spielt eine sehr wichtige Rolle in der höheren Mathematik; sie ist die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen. Welche Vorzüge das Logarithmen-System mit dieser Basis besitzt, soll an einer späteren Stelle gezeigt werden.

Man hätte übrigens die Zahl $e$ auch durch die Gleichung

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

erklären können. Es ist nämlich

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n},$$

oder, wenn man $n-1$ gleich $m$ setzt,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Wird $n$ unendlich groß, so gilt dasselbe von $m$, folglich ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

**Satz.** *Die Zahl e ist keine rationale Zahl, d. h. es ist nicht möglich, e auf die Form* $\frac{l}{k}$ *zu bringen, so daß k und l ganze Zahlen sind.*

**Beweis.** Wäre

$$e = \frac{l}{k} = \frac{l(k-1)!}{(k-1)!k} = \frac{l(k-1)!}{k!},$$

so wäre nach Ungleichung (12.)

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < \frac{l(k-1)!}{k!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!\,k},$$

oder, wenn man diese doppelte Ungleichung mit $k!$ multipliziert und die ganze Zahl

$$k! + \frac{k!}{1!} + \frac{k!}{2!} + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!} + \frac{k!}{k!}$$

mit $A$ bezeichnet,

$$A < l(k-1)! < A + \frac{1}{k},$$

oder

$$0 < l(k-1)! - A < \frac{1}{k}.$$

Es müßte also zwischen 0 und $\frac{1}{k}$ noch eine positive, *ganze* Zahl $l(k-1)! - A$ liegen, und das ist unmöglich.

# Differential-Rechnung.

## Erster Teil.

### Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen.

### I. Abschnitt.

### Erklärung und Bildung der Differential-Quotienten.

#### § 12.

#### Bildung des Differential-Quotienten einer stetigen Funktion $y = f(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 16.)

Es sei die Funktion

$$y = f(x) \tag{1.}$$

für die betrachteten Werte der unabhängigen Veränderlichen $x$ (des Argumentes) *stetig*. Setzt man also

$$y_1 = f(x_1), \tag{2.}$$

so sollen die Differenzen

$$x_1 - x = \Delta x \quad \text{und} \quad y_1 - y = \Delta y \tag{3.}$$

gleichzeitig verschwindend klein werden. Den Quotienten dieser Differenzen $\Delta x$ und $\Delta y$, nämlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \tag{4.}$$

nennt man „*Differenzen-Quotient*". Werden jetzt die Differenzen $\varDelta x$ und $\varDelta y$ verschwindend klein, so nennt man sie „*Differentiale*" und bezeichnet sie mit $dx$ und $dy$; d. h. man schreibt der Kürze wegen $dx$ statt $\lim \varDelta x$ und $dy$ statt $\lim \varDelta y$, also $\frac{dy}{dx}$ statt $\lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$, wenn sich $\varDelta x$ und $\varDelta y$ beide der Grenze 0 nähern.

Dabei geht der Differenzen-Quotient über in den *Differential-Quotienten*, nämlich in

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \tag{5.}$$

**Beispiel 1.** Es sei

$$y = x^2, \quad \text{also} \quad y_1 = x_1{}^2,$$

dann wird

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1{}^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} (x_1 + x) = 2x.$$

**Beispiel 2.** Es sei

$$y = x^3, \quad \text{also} \quad y_1 = x_1{}^3,$$

dann wird

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1{}^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1{}^2 + x_1 x + x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} (x_1{}^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2.$$

In den meisten Fällen, in denen $y$ eine stetige Funktion von $x$ ist, wird es möglich sein, $\frac{dy}{dx}$, d. h. den Grenzwert von $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ zu bestimmen. Es gibt aber auch Funktionen, die für einzelne oder für unendlich viele Werte von $x$ *nicht* differentiierbar sind, d. h. es gibt Fälle, in denen $\frac{dy}{dx}$ *keinen bestimmten endlichen Wert* hat. Ist z. B. $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, so wird, wie sich zeigen läßt, $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ *unbestimmt*, obgleich die Funktion selbst für diesen Wert von $x$ noch stetig ist.

Umgekehrt kann man aber daraus, daß $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten, endlichen Wert hat, auf die Stetigkeit der Funktion schließen, weil $\frac{dy}{dx}$ nur dann einen solchen Wert haben kann, wenn

$$\varDelta y = y_1 - y \quad \text{mit} \quad \varDelta x = x_1 - x$$

zugleich verschwindend klein wird.

In den hier folgenden Untersuchungen werden nur Funktionen in Betracht kommen, welche differentiierbar sind. Mit der Bildung des Differential-Quotienten wird dann also jedesmal auch der Beweis für die Stetigkeit dieser Funktionen erbracht.

Die Gleichungen (4.) und (5.), durch welche der *Differenzen-Quotient* und der *Differential-Quotient* erklärt werden, kann man noch auf eine etwas andere Form bringen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.) und (2.) erhält man zunächst

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \tag{4a.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_1=x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \tag{5a.}$$

Aus den Gleichungen (3.) folgt ferner

$$x_1 = x + \varDelta x, \quad f(x_1) = f(x + \varDelta x);$$

dies gibt

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}, \tag{4b.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\varDelta x=0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}. \tag{5b.}$$

**Bemerkungen.**

Der Anfänger möge noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß in den Ausdrücken $\varDelta x$ und $\varDelta y$ das Zeichen $\varDelta$ nicht von $x$ oder von $y$ getrennt werden darf, denn $\varDelta x$ und $\varDelta y$ sind nicht etwa Produkte von $\varDelta$ und $x$ oder von $\varDelta$ und $y$, sondern sie sind Symbole, welche die gleichzeitigen Zunahmen von $x$ und $y$ bezeichnen.

Ähnliches gilt auch von den Differentialen $dx$ und $dy$. Dabei ist noch zu beachten, daß die Differentiale $dx$ und $dy$ immer mit einem *geraden* $d$ (nicht mit einem *geschwungenen* $\partial$) geschrieben werden, weil die Symbole $\partial x$ und $\partial y$ später in einer etwas anderen Bedeutung benutzt werden sollen. Ebenso haben die Bezeichnungen $\delta x$ und $\delta y$ eine andere Bedeutung wie $dx$ und $dy$.

*Der Differential-Quotient* $\frac{dy}{dx}$ *einer entwickelten Funktion* $y = f(x)$ *ist also der Grenzwert, welchem sich der Bruch* $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *nähert, wenn* $\Delta x$ *unendlich klein wird.*

Um anzudeuten, daß $\frac{dy}{dx}$ gleichfalls eine Funktion von $x$ ist, bezeichnet man dieselbe gewöhnlich mit $f'(x)$; es ist daher

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{6.}$$

Die Funktion $f'(x)$ nennt man im Gegensatz zu der ursprünglichen Funktion $f(x)$ die „*abgeleitete Funktion*" oder die „*Ableitung* von $f(x)$".

In derselben Weise, wie $f'(x)$ erklärt ist durch die Gleichung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

werden auch die Ableitungen der Funktionen $F(x)$, $\varphi(x)$ usw. erklärt. Es ist daher

$$F'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \tag{7.}$$

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}, \tag{8.}$$

usw.

Hervorzuheben ist noch, daß bei dieser Erklärung des Differential-Quotienten die Größe $\Delta x$ nach Belieben *positiv* oder *negativ* vorausgesetzt werden darf. Man hätte also mit demselben Rechte $f'(x)$ durch die Gleichung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x}$$

erklären können. Im allgemeinen wird man auch beidemale für $f'(x)$ denselben Ausdruck erhalten. Setzt man nämlich in diesem Falle $x - \Delta x = x_1$, so wird $x = x_1 + \Delta x$, also

$$\frac{f(x-\varDelta x)-f(x)}{-\varDelta x}=\frac{f(x_1)-f(x_1+\varDelta x)}{-\varDelta x}=\frac{f(x_1+\varDelta x)-f(x_1)}{\varDelta x}.$$

Dies gibt

$$\lim_{\varDelta x=0}\frac{f(x-\varDelta x)-f(x)}{-\varDelta x}=$$

$$\lim_{\varDelta x=0}\frac{f(x_1+\varDelta x)-f(x_1)}{\varDelta x}=\lim_{x_1=x}f'(x_1)=f'(x).$$

Man erhält daher, wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist, denselben Wert von $f'(x)$, gleichviel ob man $\varDelta x$ positiv oder negativ wählt.

## § 13.

## Geometrische Deutung des Differential-Quotienten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 17.)

Für viele Untersuchungen ist die Bildung des *Differenzen-Quotienten* und des *Differential-Quotienten* von großer Bedeutung, um zu beurteilen, in welchem Verhältnisse die Änderung der Funktion zu der Änderung des Argumentes steht. Ist z. B.

(1.) $$y=f(x)$$

die Gleichung einer Kurve (Fig. 19), und legt man durch die benachbarten Punkte $P$ und $P_1$ eine Sekante in der Richtung von $P$ nach $P_1$, welche mit der positiven Richtung der $X$-Achse den Winkel $\beta$ bildet, dann wird, wie schon auf Seite 32 und 33 gezeigt wurde,

$$PR=QQ_1=OQ_1-OQ=x_1-x,$$

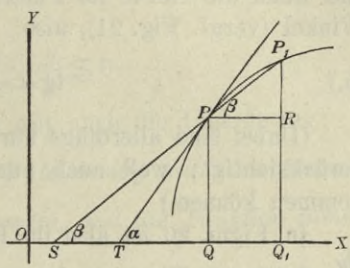
$$RP_1=Q_1P_1-QP=y_1-y,$$

also

(2.) $$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}RPP_1=\frac{RP_1}{PR}=\frac{y_1-y}{x_1-x}.$$

Dabei gibt der Differenzen-Quotient $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ein Maß für die *Steigung* der Kurve vom Punkte $P$ bis zum Punkte $P_1$, d. h. dieser Ausdruck gibt an, in welchem Verhältnisse die Zunahme der Ordinate $y$ zur Zunahme der Abszisse $x$ steht.

Fig. 19.




Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $y = f(x)$ für den betrachteten Wert von $x$ differentiierbar ist, nähert sich die Sekante $PP_1$ einer bestimmten Grenzlage $TP$, wenn der Punkt $P_1$ dem Punkte $P$ immer näher rückt und schließlich mit diesem Punkte zusammenfällt. Eine solche Sekante, bei der zwei Schnittpunkte in einen Punkt $P$ zusammenfallen, heißt „*Tangente*" und der Punkt $P$ ihr „*Berührungspunkt*". Bei diesem Grenzübergange werden die Strecken

$$PR = x_1 - x \quad \text{und} \quad RP_1 = y_1 - y$$

verschwindend klein, der Winkel $\beta$ geht in den Winkel $\alpha$ über, und man erhält aus Gleichung (2.) die wichtige Formel

$$\text{(3.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

in welcher der folgende Satz enthalten ist:

**Satz 1.** *Der Differential-Quotient ist gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels $\alpha$, welchen die geometrische Tangente im Kurvenpunkte $P$ mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve ist, und der Punkt $P$ die Koordinaten $x$ und $y$ hat.*

Wenn die Kurve im Punkte $P$ steigt, so ist $\alpha$ ein *spitzer* Winkel (vergl. Fig. 20), also

$$\text{(4.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} > 0;$$

Fig. 20.

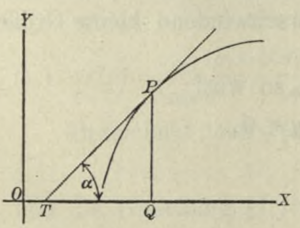
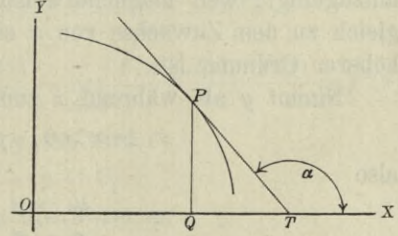



Fig. 21.



und wenn die Kurve im Punkte *P fällt*, so ist $\alpha$ ein *stumpfer* Winkel (vergl. Fig. 21), also

$$\text{(5.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} < 0.$$

(Dabei sind allerdings nur die Winkel zwischen $0^0$ und $180^0$ berücksichtigt, weil auch nur solche Winkel hier in Betracht kommen können.)

In Figur 20 ist also im Punkte $P$ der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ positiv, in Figur 21 ist er dagegen negativ.

Dies gibt

**Satz 2.** *Wenn eine Funktion $y = f(x)$ gleichzeitig mit $x$ zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Wert von $x$ positiv; wenn aber die Funktion abnimmt, während $x$ zunimmt, so ist die Ableitung für den betreffenden Wert von $x$ negativ.*

Der Beweis dieses Satzes kann auch unabhängig von der geometrischen Deutung des Differential-Quotienten geführt werden.

Nimmt nämlich $y$ mit $x$ gleichzeitig zu, so wird

$$x_1 - x > 0, \quad y_1 - y > 0,$$

also auch

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} > 0.$$

Dies gilt, wie klein auch $x_1 - x$ werden mag, folglich wird auch

$$\text{(4a.)} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = 0} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \geqq 0.$$

Hierbei ist das Gleichheitszeichen dem Ungleichheitszeichen hinzugefügt, weil möglicherweise der Zuwachs von $y$ im Vergleich zu dem Zuwachse von $x$ eine verschwindend kleine Größe höherer Ordnung ist.

Nimmt $y$ ab, während $x$ zunimmt, so wird

$$x_1 - x > 0, \quad y_1 - y < 0,$$

also

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} < 0.$$

Dies gilt gleichfalls, wie klein $x_1 - x$ auch werden mag, folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \leqq 0. \tag{5a.}$$

Von dem angegebenen Satze gilt auch die Umkehrung:

**Satz 3.** *Eine Funktion nimmt gleichzeitig mit $x$ zu für alle Werte von $x$, für welche $\frac{dy}{dx}$ positiv, und die Funktion nimmt ab, während $x$ zunimmt, für alle Werte von $x$, für welche $\frac{dy}{dx}$ negativ ist.*

Der Beweis folgt aus Satz 2 selbst ohne weiteres.

## § 14.
## Einige Lehrsätze über Differential-Quotienten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 18 bis 21.)

**Satz 1.** *Zwei Funktionen, welche sich voneinander nur durch eine additive Konstante unterscheiden, haben dieselbe Ableitung*, d. h. ist

$$g(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$g'(x) = f'(x).$$

**Beweis.** Ist

$$g(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$g(x + \varDelta x) = f(x + \varDelta x) + C,$$

also

$$g(x + \varDelta x) - g(x) = f(x + \varDelta x) - f(x),$$

$$\frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x},$$

$$g'(x) = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = f'(x). \tag{1.}$$

Bezeichnet man $f(x)$ mit $y$, so wird

$$g(x) = y + C,$$

und die Gleichung (1.) nimmt die Form an

(1a.) $$\frac{d(y+C)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

**Satz 2.** *Wird eine Funktion $y = f(x)$ mit einem konstanten Faktor $A$ multipliziert, so ist die Ableitung dieses Produktes gleich der Ableitung der Funktion $y$, multipliziert mit dem konstanten Faktor $A$*, d. h. es ist

$$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}.$$

**Beweis.** Setzt man

$$g(x) = Af(x),$$

so wird

$$g(x + \Delta x) = Af(x + \Delta x),$$

also

$$g(x+\Delta x) - g(x) = Af(x+\Delta x) - Af(x)$$
$$= A[f(x+\Delta x) - f(x)],$$
$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = A\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

oder, wenn man $\Delta x$ unendlich klein werden läßt,

(2.) $$g'(x) = Af'(x).$$

Bezeichnet man nun wieder $f(x)$ mit $y$, so wird

$$g(x) = Af(x) = Ay;$$

dadurch geht Gleichung (2.) über in

(2a.) $$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}.$$

**Satz 3.** *Die Ableitung einer Summe von zwei (oder von mehreren) Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Funktionen*; d. h. es ist

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

**Beweis.** Es seien

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad v = g(x)$$

zwei beliebige Funktionen von $x$, und es sei

$$y = F(x) = u + v = f(x) + g(x).$$

Es wird dann

$$F(x + \varDelta x) = f(x + \varDelta x) + g(x + \varDelta x),$$

$$\varDelta y = F(x + \varDelta x) - F(x) = f(x + \varDelta x) - f(x) + g(x + \varDelta x) - g(x),$$

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} + \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} + \lim_{\varDelta x = 0} \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} = f'(x) + g'(x),$$

oder

(3.) $$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß der angegebene Satz auch für eine Summe von beliebig vielen Funktionen gilt; nur muß die Anzahl der Summanden eine endliche sein.

Vertauscht man $u + v$ mit $u - v$, so findet man durch die gleichen Schlüsse die Gleichung

(4.) $$\frac{d(u - v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

und damit

**Satz 4.** *Die Ableitung der Differenz von zwei Funktionen ist gleich der Differenz der Ableitungen der einzelnen Funktionen.*

## § 15.

## Differentiation der ganzen rationalen Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 22.)

**Aufgabe 1.** Man soll die Ableitung von

(1.) $$y = f(x) = x^m$$

bilden, wenn $m$ eine positive, ganze Zahl ist.

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$y_1 = f(x_1) = x_1^m,$$

(3.) $$f(x_1) - f(x) = x_1^m - x^m,$$

also nach Formel Nr. 13 der Tabelle

(4.) $$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \cdots + x_1 x^{m-2} + x^{m-1};$$

dies gibt

$$(5.)\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{x_1=x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1=x} (x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \cdots$$
$$+ x_1 x^{m-2} + x^{m-1}),$$

oder

$$(6.)\quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Dasselbe Resultat kann man auch in folgender Weise erhalten.

Aus Gleichung (1.) folgt

$$(7.)\quad y + \varDelta y = f(x + \varDelta x) = (x + \varDelta x)^m$$
$$= x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} . \varDelta x + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} . \varDelta x^2 + \cdots,$$

also

$$\varDelta y = mx^{m-1} . \varDelta x + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} . \varDelta x^2 + \cdots,$$

$$(8.)\quad \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} . \varDelta x + \cdots.$$

Geht jetzt $\varDelta x$ in $dx$ über, d. h. wird $\varDelta x$ unendlich klein, so werden die Glieder auf der rechten Seite von Gleichung (8.) alle bis auf das erste unendlich klein, weil sie den Faktor $dx$ enthalten. Die Gleichung (8.) geht daher über in

$$(9.)\quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Der Wert $m$ gleich 0 möge besonders berücksichtigt werden; ist nämlich $f(x) = x^0 = 1$, so wird auch

$$f(x_1) = 1, \quad \text{also} \quad f(x_1) - f(x) = 0,$$

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 0.$$

Deshalb wird

$$\frac{d(1)}{dx} = \lim_{x_1=x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich aus Gleichung (9.), wenn man $m = 0$ setzt. Ebenso findet man

$$\frac{dC}{dx} = 0;$$

d. h. *die Ableitung einer Konstanten ist immer gleich* 0.

**Aufgabe 2.** Man soll die Ableitung von

$$y = x^4 + x^3 + x$$

bilden.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 20 der Tabelle ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^4)}{dx} + \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{dx}{dx} = 4x^3 + 3x^2 + 1.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Ableitung von

$$y = 3x^4 + 11x^2 - 7x + 8$$

bilden.

**Auflösung.** Hier ist nach den Formeln Nr. 20 und 21 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x^4)}{dx} + \frac{d(11x^2)}{dx} - \frac{d(7x)}{dx} + \frac{d(8)}{dx}.$$

Ferner wird nach Formel Nr. 19 der Tabelle

$$\frac{d(3x^4)}{dx} = 3\,\frac{d(x^4)}{dx} = 3\,.\,4x^3 = 12x^3,$$

$$\frac{d(11x^2)}{dx} = 11\,\frac{d(x^2)}{dx} = 11\,.\,2x = 22x,$$

$$\frac{d(7x)}{dx} = 7\,\frac{dx}{dx} = 7\,.\,1 = 7,$$

$$\frac{d(8)}{dx} = 0,$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 22x - 7.$$

In welcher Weise sich dieses Verfahren verallgemeinern läßt, soll die folgende Aufgabe zeigen.

**Aufgabe 4.** Man soll die Ableitung von

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bilden.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 20 der Tabelle ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ax^n)}{dx} + \frac{d(a_1x^{n-1})}{dx} + \frac{d(a_2x^{n-2})}{dx} + \cdots + \frac{d(a_{n-1}x)}{dx} + \frac{d(a_n)}{dx},$$

und nach den Formeln Nr. 19 und 22 der Tabelle wird

$$\frac{d(ax^n)}{dx} = a\frac{d(x^n)}{dx} = anx^{n-1},$$

$$\frac{d(a_1x^{n-1})}{dx} = a_1\frac{d(x^{n-1})}{dx} = a_1(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{d(a_2x^{n-2})}{dx} = a_2\frac{d(x^{n-2})}{dx} = a_2(n-2)x^{n-3},$$

.................................................

$$\frac{d(a_{n-1}x)}{dx} = a_{n-1}\frac{dx}{dx} = a_{n-1},$$

$$\frac{d(a_n)}{dx} = 0,$$

folglich erhält man

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

Da sich jede ganze rationale Funktion auf die Form

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bringen läßt, so ist damit gezeigt, wie man jede beliebige ganze rationale Funktion differentiieren kann.

§ 16.

## Differentiation einer Potenz mit negativem, ganzzahligen Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 22.)

**Aufgabe.** Man soll die Ableitung von

(1.) $$y = x^m$$

bilden, wenn

$$(2.)\qquad m = -n$$

eine *negative* ganze Zahl ist.

**Auflösung.** In diesem Falle ist

$$(3.)\qquad y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

$$(4.)\qquad y_1 = f(x_1) = x_1^{-n} = \frac{1}{x_1^{\,n}},$$

also

$$(5.)\qquad f(x_1) - f(x) = \frac{1}{x_1^{\,n}} - \frac{1}{x^n} = -\frac{x_1^{\,n} - x^n}{x^n{}_1 x^n},$$

also nach Formel Nr. 13 der Tabelle

$$(6.)\qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = -\frac{1}{x^n x_1^{\,n}}\,\frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}$$

$$= -\frac{1}{x^n x_1^{\,n}}(x_1^{\,n-1} + x x_1^{\,n-2} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1}).$$

Dies gibt

$$(7.)\qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot n x^{n-1},$$

oder

$$(8.)\qquad \frac{dy}{dx} = -n x^{-n-1} = m x^{m-1}.$$

Die Formel Nr. 22 der Tabelle bleibt also noch richtig, auch wenn $m$ eine *negative* ganze Zahl ist.

## § 17.

## Übungs-Beispiele.

1) $y = 6x^5 + 4, \qquad \frac{dy}{dx} = 30x^4.$

2) $y = 6x^5 - 4, \qquad \frac{dy}{dx} = 30x^4.$

3) $y = \frac{2}{5}x^{10}, \qquad \frac{dy}{dx} = 4x^9.$

4) $y = 3x^2 - 7x + 9, \qquad \frac{dy}{dx} = 6x - 7.$

5) $y=(2x-5)(x^2+11x-3)$, $\dfrac{dy}{dx}=6x^2+34x-61$.

Hier findet man das Resultat, indem man zunächst die Klammern auflöst und dadurch $y$ auf die Form bringt

$$y=2x^3+17x^2-61x+15.$$

6) $y=5x^4-\frac{11}{3}x^3+4x^2-3x+7$, $\dfrac{dy}{dx}=20x^3-11x^2+8x-3$.

7) $y=x^4+12x^3-29x^2-61x-134$, $\dfrac{dy}{dx}=4x^3+36x^2-58x-61$.

8) $y=x^3-5x^2+8x-4$, $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-10x+8$.

9) $y=3x^5-7x^3+13x$, $\dfrac{dy}{dx}=15x^4-21x^2+13$.

10) $y=5x^8-3x^6+2x^4-4x^2+7$, $\dfrac{dy}{dx}=40x^7-18x^5+8x^3-8x$.

11) $y=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{9}{x^5}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{21}{x^4}-\dfrac{20}{x^5}-\dfrac{45}{x^6}$.

12) $y=\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{10}{x^5}+\dfrac{12}{x^7}-\dfrac{13}{x^9}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{24}{x^4}+\dfrac{50}{x^6}-\dfrac{84}{x^8}+\dfrac{117}{x^{10}}$.

13) $y=2x^6+3x-\dfrac{7}{x}-\dfrac{11}{x^6}$, $\dfrac{dy}{dx}=12x^5+3+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{66}{x^7}$.

14) $y=8x^7-10x^3+\dfrac{10}{x^3}-\dfrac{8}{x^7}$, $\dfrac{dy}{dx}=56x^6-30x^2-\dfrac{30}{x^4}+\dfrac{56}{x^8}$.

## § 18.

## Differentiation der logarithmischen Funktion $f(x)=\log x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 23 und 24.)

**Aufgabe.** Man soll die Ableitung der logarithmischen Funktion

(1.) $$y=f(x)=\log x$$

bilden.

**Auflösung.** In dem vorliegenden Falle ist

(2.) $f(x) = \log x, \quad f(x + \varDelta x) = \log(x + \varDelta x),$

$$f(x + \varDelta x) - f(x) = \log(x + \varDelta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \varDelta x}{x}\right),$$

oder

$$f(x + \varDelta x) - f(x) = \log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right), \tag{3.}$$

$$\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{1}{\varDelta x}\log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right). \tag{4.}$$

Setzt man

$$\frac{\varDelta x}{x} = \frac{1}{n}, \quad \text{also} \quad \varDelta x = \frac{x}{n}, \ \frac{1}{\varDelta x} = \frac{n}{x}, \tag{5.}$$

so ist

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{n}{x}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]. \tag{6.}$$

Nun wird aber $n$ *unendlich groß*, wenn $\varDelta x$ *unendlich klein* wird; deshalb ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n=\infty} \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]. \tag{7.}$$

Diesen Grenzwert kann man leicht angeben, denn nach Formel Nr. 14 der Tabelle ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.}$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}. \tag{9.}$$

Dabei ist die Basis des Logarithmen-Systems noch eine ganz beliebige; wählt man aber die Zahl $e$ selbst zur Basis des Logarithmen-Systems, so ist

$$\log e = 1,$$

so daß die Gleichung (9.) eine noch einfachere Form annimmt.

Die Logarithmen mit der Basis $e$ heißen die *„natürlichen* Logarithmen" und mögen in dem folgenden nur durch lognat oder der Kürze wegen mit ln bezeichnet werden.

Demnach ergibt sich aus Gleichung (9.)

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{9 a.}$$

**Bemerkung.**

In der höheren Mathematik benutzt man fast ausschließlich die natürlichen Logarithmen mit der Basis $e$; es ist aber sehr leicht, von dem einen Logarithmen-System zu einem anderen überzugehen.

Es bezeichne z. B. $\log x$ den *Briggs*schen Logarithmus von $x$ mit der Basis 10, und $\ln x$ den *natürlichen* Logarithmus mit der Basis $e$; dann ist

(10.) $\quad y = \log x \quad$ gleichbedeutend mit $\quad 10^y = x,$

und

(11.) $\quad z = \ln x \quad$ ist „ „ $\quad e^z = x.$

Daraus folgt

$$10^y = e^z. \tag{12.}$$

Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung den *natürlichen* Logarithmus, so erhält man

$$y \ln 10 = z, \quad \text{oder} \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}. \tag{13.}$$

Nimmt man dagegen auf beiden Seiten der Gleichung (12.) den *Briggs*schen Logarithmus, so erhält man

$$y = z \log e, \quad \text{oder} \quad \log x = \ln x \,.\, \log e. \tag{14.}$$

Aus den Gleichungen (13.) und (14.) folgt zunächst

$$\frac{1}{\ln 10} = \log e;$$

ferner geht aus derselben hervor, daß man die natürlichen Logarithmen sämtlich mit dem konstanten Faktor

$$\log e = \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2{,}302\,585\,093\,0} = 0{,}434\,294\,481\,9$$

zu multiplizieren hat, um aus ihnen die entsprechenden *Briggs*schen zu erhalten. Man nennt diesen Faktor $\log e$ gewöhnlich „den *Modul* der *Briggs*schen Logarithmen."

## § 19.

## Differentiation der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 25 und 26.)

**Aufgabe 1.** Man soll die Ableitung von

$$y = f(x) = \sin x \tag{1.}$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x), \tag{2.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x. \tag{3.}$$

Nun ist bekanntlich

$a = x + \Delta x$
$b = x$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

folglich wird

$$\Delta (x) f = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \tag{4.}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\Delta x = 2z \tag{5.}$$

setzt,

$$\Delta f(x) = 2\sin z \cos(x + z),$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin z}{z}\cos(x + z), \tag{6.}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}\cos(x + z) = \cos x \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}\,. \tag{7.}$$

Nach Formel Nr. 1 der Tabelle ist aber

$$\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z} = 1,$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x. \tag{8.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Ableitung von

$$y = f(x) = \cos x \tag{9.}$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (9.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x), \tag{10.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x. \tag{11.}$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

folglich wird

(12.) $$\Delta f(x) = -2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder, wenn man wieder

$$\Delta x = 2z$$

setzt,

(12a.) $$\Delta f(x) = -2\sin z\sin(x + z),$$

(13.) $$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\sin z}{z}\sin(x + z),$$

(14.) $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\sin x \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z},$$

oder

(15.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

**Bemerkung.**

Es wird hier nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß in $\sin x$ und $\cos x$ die Größe $x$ *kein Winkel*, sondern die *Länge eines Kreisbogens* ist. (Vergl. § 1, Seite 10.)

## § 20.

## Differentiation der trigonometrischen Funktionen tg$x$ und ctg$x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 27 und 28.)

**Aufgabe 1.** Man soll die Ableitung von

(1.) $$y = f(x) = \operatorname{tg} x$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$f(x + \Delta x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x),$$

(3.) $$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x.$$

Nun ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b},$$

folglich wird

(4.) $$\Delta f(x) = \frac{\sin(\Delta x)}{\cos(x + \Delta x)\cos x},$$

$$(5.)\qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x},$$

und da nach Formel Nr. 1 der Tabelle

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

wird, so ist

$$(6.)\qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Ableitung von

$$(7.)\qquad y = f(x) = \operatorname{ctg} x$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (7.) folgt

$$(8.)\qquad f(x + \Delta x) = \operatorname{ctg}(x + \Delta x),$$

$$(9.)\qquad f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = -\frac{\sin(a - b)}{\sin a \sin b},$$

folglich wird

$$(10.)\qquad \Delta f(x) = -\frac{\sin(\Delta x)}{\sin(x + \Delta x)\sin x},$$

$$(11.)\qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin(x + \Delta x)\sin x} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$(12.)\qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Aus den Ergebnissen der Paragraphen 19 und 20 erkennt man, daß *die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen wieder trigonometrische Funktionen sind.*

## § 21.

## Differentiation der Produkte und Quotienten von Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 29 bis 34.)

**Aufgabe 1.** Es sei

$$(1.)\qquad u = f(x), \quad v = g(x);$$

man soll die Ableitung des Produktes

$$y = F(x) = uv = f(x)\,g(x) \tag{2.}$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (2.) folgt

$$F(x + \varDelta x) = f(x + \varDelta x)\,g(x + \varDelta x), \tag{3.}$$

$$F(x+\varDelta x) - F(x) = \varDelta F(x) = f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x),$$

oder

$$\begin{aligned}\varDelta F(x) = {} & f(x + \varDelta x)\,g(x + \varDelta x) - f(x)\,g(x + \varDelta x) \\ & + f(x)\,g(x + \varDelta x) - f(x)\,g(x),\end{aligned} \tag{4.}$$

also

$$\frac{\varDelta F(x)}{\varDelta x} = g(x+\varDelta x)\frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} + f(x)\frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x}. \tag{5.}$$

Nun ist

$$\lim_{\varDelta x=0} g(x + \varDelta x) = g(x), \quad \lim_{\varDelta x=0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = f'(x),$$

$$\lim_{\varDelta x=0} \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} = g'(x),$$

folglich wird

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = g(x)f'(x) + f(x)\,g'(x), \tag{6.}$$

oder

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}. \tag{6a.}$$

Dies gibt den Satz:

*Ein Produkt von zwei Faktoren wird differentiiert, indem man jeden der beiden Faktoren einzeln differentiiert, mit dem andern Faktor multipliziert und die Summe dieser beiden Produkte bildet.*

## Beispiele.

1) $y = (3 + 4x)(2 - 7x)$,

$$\frac{dy}{dx} = 4(2 - 7x) - 7(3 + 4x) = -13 - 56x.$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man nach Auflösung der Klammern

$$y = 6 - 13x - 28x^2$$

erhält, woraus sich unmittelbar derselbe Wert von $\frac{dy}{dx}$ ergibt.

2) $y = (x^4 - 3x^2 + 11)\sin x$;

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 - 6x)\sin x + (x^4 - 3x^2 + 11)\cos x.$$

3) $y = \cos x \operatorname{tg} x$;

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x.$$

Dieses Resultat hätte man noch einfacher finden können, indem man berücksichtigt, daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ist, denn dadurch wird

$$y = \cos x \operatorname{tg} x = \sin x$$

und nach Formel Nr. 25 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

**Aufgabe 2.** Es sei

(7.) $$u = f(x), \quad v = g(x), \quad w = h(x),$$

man soll die Ableitung von

(8.) $$y = uvw$$

bilden.

**Auflösung.** Indem man

(9.) $$vw = v_1$$

setzt, erhält man

(10.) $$y = uv_1,$$

so daß nach der vorhergehenden Aufgabe

(11.) $$\frac{dy}{dx} = v_1 \frac{du}{dx} + u \frac{dv_1}{dx}$$

wird. Nun ist aber, gleichfalls nach der vorhergehenden Aufgabe,

$$(12.)\qquad \frac{dv_1}{dx} = w\frac{dv}{dx} + v\frac{dw}{dx},$$

folglich wird

$$(13.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d(uvw)}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}.$$

Dies gibt den Satz:

*Ein Produkt von drei Faktoren wird differentiiert, indem man jeden dieser Faktoren einzeln differentiiert, mit den beiden anderen Faktoren multipliziert und die Summe dieser Produkte bildet.*

Man erkennt leicht, daß sich diese Regel auch auf Produkte mit beliebig vielen Faktoren übertragen läßt. Zum Beweise mögen die Gleichungen (6a.) und (13.), indem man sie beziehungsweise durch $uv$ und $uvw$ dividiert, auf die Form

$$(6\text{b.})\qquad \frac{1}{uv}\frac{d(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx},$$

$$(13\text{a.})\qquad \frac{1}{uvw}\frac{d(uvw)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$$

gebracht werden.

Dementsprechend kann jetzt durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ die Richtigkeit der Gleichung

$$(14.)\qquad \frac{1}{u_1u_2\ldots u_m}\frac{d(u_1u_2\ldots u_m)}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx}$$

nachgewiesen werden. Gilt nämlich Gleichung (14.) für $m = n$, so wird

$$(14\text{a.})\qquad \frac{1}{u_1u_2\ldots u_n}\frac{d(u_1u_2\ldots u_n)}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}.$$

Ist hierbei $u_n$ wiederum aus zwei Faktoren zusammengesetzt, ist z. B.

$$u_n = uv,$$

so wird nach Gleichung (6b.)

$$\frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (14a.) über in

(15.) $$\frac{1}{u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u v} \cdot \frac{d(u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u v)}{dx} =$$
$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}}\frac{du_{n-1}}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx};$$

daraus folgt, wenn man $u_n$ statt $u$, $u_{n+1}$ statt $v$ schreibt,

(15a.) $$\frac{1}{u_1 u_2 \ldots u_n u_{n+1}} \frac{d(u_1 u_2 \ldots u_n u_{n+1})}{dx} =$$
$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx} + \frac{1}{u_{n+1}}\frac{du_{n+1}}{dx}.$$

Gilt also Gleichung (14.) für $m$ gleich $n$, so gilt sie auch für $m$ gleich $n + 1$. Damit ist die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (14.) nachgewiesen. Durch Multiplikation mit $u_1 u_2 \ldots u_m$ erhält man aus derselben die Formel

(16.) $$\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_m)}{dx} =$$
$$u_2 u_3 \ldots u_m \frac{du_1}{dx} + u_1 u_3 \ldots u_m \frac{du_2}{dx} + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1} \frac{du_m}{dx}$$

und damit den Satz:

*Ein Produkt von beliebig vielen Faktoren wird differentiiert, indem man jeden dieser Faktoren einzeln differentiiert, mit allen übrigen Faktoren multipliziert und die Summe dieser Produkte bildet.*

Sind die $m$ Faktoren alle einander gleich, ist also
$$u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_m = u,$$
so folgt aus Gleichung (16.)

(17.) $$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

Für den besonderen Fall, wo
$$u = x$$
ist, geht diese Gleichung in Formel Nr. 22 der Tabelle über, nämlich in
$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Die Gleichung (17.) gilt vorläufig nur, wenn $m$ eine positive *ganze* Zahl ist, sie bleibt aber, wie sogleich gezeigt werden soll, auch noch richtig, wenn $m$ eine positive *gebrochene* Zahl ist.

Wird nämlich

$$m = \frac{a}{b}, \quad \text{oder} \quad mb = a, \tag{18.}$$

wo $a$ und $b$ positive *ganze* Zahlen sind, so folgt aus

$$y = u^m = u^{\frac{a}{b}}, \tag{19.}$$

indem man beide Seiten der Gleichung in die $b^{\text{te}}$ Potenz erhebt,

$$y^b = u^a. \tag{20.}$$

Unter der Voraussetzung, daß sich die Funktionen $y$ und $u$ differentiieren lassen, findet man, indem man beide Seiten der Gleichung (20.) mit Anwendung der in Gleichung (17.) ausgesprochenen Regel differentiiert,

$$by^{b-1}\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx} = mbu^{mb-1}\frac{du}{dx}. \tag{21.}$$

Da aber aus Gleichung (19.) folgt, daß

$$y^{b-1} = u^{mb-m}$$

ist, so geht Gleichung (21.) über in

$$bu^{mb-m}\frac{dy}{dx} = mbu^{mb-1}\frac{du}{dx};$$

daraus folgt, wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch $bu^{mb-m}$ dividiert,

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}, \tag{22.}$$

ein Resultat, das der Form nach mit Gleichung (17.) genau übereinstimmt.

Es gilt daher auch die Gleichung

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1} \tag{22a.}$$

noch, wenn $m$ eine positive *gebrochene* Zahl ist.

Man kann sogar die Richtigkeit dieser Formeln noch zeigen, wenn

$$m = -n \tag{23.}$$

eine *negative* ganze oder gebrochene Zahl ist. Es wird dann

$$y = u^m = u^{-n} = \frac{1}{u^n}, \tag{24.}$$

also

$$u^n y = 1. \tag{25.}$$

Differentiiert man beide Seiten dieser Gleichung unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $y$ und $u$ differentiiert werden können, so findet man nach der Regel für die Differentiation eines Produktes

$$nu^{n-1}\frac{du}{dx}\cdot y + u^n\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder, wenn man mit $u$ multipliziert und für $u^n y$ den Wert 1 setzt,

$$n\frac{du}{dx} + u^{n+1}\frac{dy}{dx} = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -nu^{-n-1}\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}. \tag{26.}$$

Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (17.) und deshalb auch die Formel Nr. 22 der Tabelle gilt, gleichviel ob $m$ eine *ganze* oder eine *gebrochene*, eine *positive* oder *negative* Zahl ist.

Die Formel

$$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

bleibt sogar auch dann noch richtig, wenn der Exponent $m$ eine inkommensurable Zahl ist, wie an einer späteren Stelle gezeigt werden soll. (Vergl. § 23, Gl. (4.)).

## Beispiele.

1) $y = (2x^3 - 7x^2 + 3x + 11)^4$;

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^3 - 7x^2 + 3x + 11)^3(6x^2 - 14x + 3).$$

2) $y = \sqrt{a^2 + x^2} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Setzt man

$$a^2 + x^2 = u,$$

so wird

$$y = u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, 2x,$$

oder

$$\frac{d\sqrt{a^2 + x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \tag{27.}$$

Ebenso findet man

$$\frac{d\sqrt{x^2 - a^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{27a.}$$

3) $y = \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Setzt man hier

$$a^2 - x^2 = u,$$

so wird wieder

$$y = u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x),$$

oder

$$\frac{d\sqrt{a^2 - x^2}}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{28.}$$

4) $y = \sqrt[3]{(2x - 5)^4} = (2x - 5)^{\frac{4}{3}}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} (2x - 5)^{\frac{1}{3}} \,.\, 2 = \frac{8}{3} \sqrt[3]{2x - 5}.$$

5) $y = \frac{3}{5} x^{\frac{10}{3}} - \frac{5}{4} x^{\frac{8}{5}} + \frac{2}{11} x^{\frac{11}{4}} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{6}}$;

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\frac{7}{3}} - 2x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{6}}.$$

6) $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$; $\qquad \frac{dy}{dx} = -4x^{-5}$.

7) $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$; $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

8) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = x^{-\frac{1}{4}}$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$.

9) $y = \frac{3}{x^4} + 5\sqrt[3]{x} - 7x^5$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^5} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - 35x^4$.

10) $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} = ax^{-\frac{1}{2}} + b + cx^{\frac{1}{2}}$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2\sqrt{x^3}} + \frac{c}{2\sqrt{x}}.$$

11) $y = 12\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[7]{x^4} + 11x - \frac{8}{\sqrt{x^3}} =$

$$12x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{4}{7}} + 11x - 8x^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^{-\frac{1}{4}} - 4x^{-\frac{3}{7}} + 11 + 12x^{-\frac{5}{2}} = \frac{9}{\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{\sqrt[7]{x^3}} + 11 + \frac{12}{\sqrt[2]{x^5}}.$$

12) $y = (2x^2 - 3x + 4)\sqrt{(4x-3)^3}$.

Setzt man

$$2x^2 - 3x + 4 = u, \quad \sqrt{(4x-3)^3} = (4x-3)^{\frac{3}{2}} = v,$$

so wird

$$y = uv,$$

$$\frac{du}{dx} = 4x - 3, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}} . 4 = 6\sqrt{4x-3},$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$= (4x-3)^{\frac{3}{2}}(4x-3) + (2x^2 - 3x + 4) . 6\sqrt{4x-3}$$

$$= \sqrt{4x-3}\,[(4x-3)^2 + 6(2x^2 - 3x + 4)]$$

$$= \sqrt{4x-3}\,(28x^2 - 42x + 33).$$

13) $y = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x = \cos^5 x.$$

14) $y = \cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x)(-\sin x) = -\sin^7 x.$$

15) $y = 3\,\mathrm{tg}^5 x - 2\,\mathrm{tg}^4 x - 5\,\mathrm{tg}^3 x + 4\,\mathrm{tg}^2 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (15\,\mathrm{tg}^4 x - 8\,\mathrm{tg}^3 x - 15\,\mathrm{tg}^2 x + 8\,\mathrm{tg}\,x)(1 + \mathrm{tg}^2 x)$$
$$= 15\,\mathrm{tg}^6 x - 8\,\mathrm{tg}^5 x - 15\,\mathrm{tg}^2 x + 8\,\mathrm{tg}\,x.$$

**Aufgabe 3.** Es sei

$$u = f(x), \quad v = g(x); \tag{29.}$$

man soll die Ableitung des Quotienten

$$y = \frac{u}{v}, \quad \text{oder} \quad F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{30.}$$

bilden.

**Auflösung.** Aus Gleichung (30.) folgt

$$F(x + \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)}, \tag{31.}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x) = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{f(x + \Delta x) g(x) - g(x + \Delta x) f(x)}{g(x + \Delta x) g(x)}.$$

Dies gibt

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{g(x + \Delta x) g(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) g(x) - g(x + \Delta x) f(x)}{\Delta x}, \tag{32.}$$

oder, wenn man in dem Zähler auf der rechten Seite dieser Gleichung die Größe $f(x) g(x)$ subtrahiert und wieder addiert,

$$g(x + \Delta x) g(x) \cdot \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \tag{33.}$$
$$\frac{f(x + \Delta x) g(x) - f(x) g(x) - g(x + \Delta x) f(x) + f(x) g(x)}{\Delta x}$$
$$= g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, indem man $\Delta x$ unendlich klein werden läßt, so erhält man

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x);$$

deshalb findet man aus Gleichung (33.)

$$g(x)\,g(x)\cdot\frac{dF(x)}{dx}=g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x),$$

(34.)
$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{g(x)\,g(x)},$$

oder

(34a.)
$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Dies gibt den Satz:

*Die Ableitung eines Bruches ist gleich dem Nenner, multipliziert mit der Ableitung des Zählers, weniger dem Zähler, multipliziert mit der Ableitung des Nenners, das Ganze dividiert durch das Quadrat des Nenners.*

## Beispiele.

1) $y=\frac{\sin x}{\cos x}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dieses Resultat stimmt mit Formel Nr. 27 der Tabelle überein, denn es ist

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x.$$

2) $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{x^n\,.\,0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$.

Dieses Resultat stimmt mit Formel Nr. 22 der Tabelle überein.

3) $y=\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

Hier ist

$$u=x^2-a^2,\quad v=x^2+a^2,$$

also

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{dv}{dx}=2x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+a^2)\,2x-(x^2-a^2)\,2x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{4a^2x}{(x^2+a^2)^2}.$$

4) $y = \dfrac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 + x^2}}$.

Hier ist

$$u = x + \sqrt{a^2 + x^2},\ \frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$v = x - \sqrt{a^2 + x^2},\ \frac{dv}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - \sqrt{a^2 + x^2})(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + (x + \sqrt{a^2 + x^2})(x - \sqrt{a^2 + x^2})}{(x - \sqrt{a^2 + x^2})^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{-2a^2}{(x - \sqrt{a^2 + x^2})^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{-2(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

---

## II. Abschnitt.

# Funktionen von Funktionen.

## § 22.

## Differentiation einer Funktion von der Form $f[\varphi(x)]$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 35 und 36.)

Es sei $y$ irgend eine stetige Funktion von $u$, also

$$y = f(u), \tag{1.}$$

und $u$ sei wieder eine stetige Funktion von $x$, also

$$u = \varphi(x), \tag{2.}$$

dann ist $y$ auch eine stetige Funktion von $x$, nämlich

$$y = f[\varphi(x)] = F(x). \tag{3.}$$

Beispiele solcher „*Funktionen von Funktionen*" sind

$$y = \sqrt[3]{4x^2 - 7x + 11}, \quad y = \sin(3x), \quad y = (\sin x)^4,$$

$$y = \log(\sin x), \qquad y = (\log x)^n, \quad y = \arcsin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Es ist die Frage, in welcher Weise solche Funktionen von Funktionen differentiiert werden können.

Vermehrt man $x$ um $\varDelta x$, so gehen die Größen $x$, $u$ und $y$ bezw. über in

$$x + \varDelta x, \quad u + \varDelta u = \varphi(x + \varDelta x), \quad y + \varDelta y = f(u + \varDelta u),$$

folglich ist

$$\varDelta u = \varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x), \quad \varDelta y = f(u + \varDelta u) - f(u), \tag{4.}$$

$$\frac{\varDelta F(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(u + \varDelta u) - f(u)}{\varDelta x}, \tag{5.}$$

oder, wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung Zähler und Nenner mit $\varDelta u$ gleich $\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)$ multipliziert,

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(u+\varDelta u)-f(u)}{\varDelta u}\cdot\frac{\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)}{\varDelta x};$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\,\varphi'(x)=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}. \tag{6.}$$

Dies gibt den Satz:

*Die Ableitung einer Funktion von einer Funktion ist gleich dem Produkte der Ableitungen beider Funktionen.*

Aus diesem Satze erkennt man ohne weiteres, daß man mit den verschwindend kleinen Größen $dx$, $dy$, $du$,... ebenso rechnen darf, als wären sie bestimmte Zahlen. Man erhält nämlich $\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$ aus $\frac{dy}{dx}$, indem man Zähler und Nenner mit $du$ multipliziert.

Gleichzeitig ergibt sich hieraus, wie notwendig es ist, daß man sich stets darüber Rechenschaft gibt, nach welcher Veränderlichen differentiiert wird, denn die beiden Größen $\frac{dy}{du}$ und $\frac{dy}{dx}$ sind im allgemeinen wesentlich voneinander verschieden.

Eine etwas einfachere Form erhält der eben angeführte Satz, wenn man statt der *Ableitungen* oder *Differential-Quotienten* die *Differentiale* einführt.

Die Gleichung

$$f'(x)=\lim_{\varDelta x=0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x=0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x=0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x},$$

durch welche der Differential-Quotient einer Funktion $y=f(x)$ erklärt wird, hat den Sinn, daß der Unterschied $\varepsilon$ zwischen dem Differenzen-Quotienten $\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$ und der Funktion $f'(x)$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur $\varDelta x$ hinreichend klein macht. Aus

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\varepsilon$$

folgt aber

(7.) $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\,.\,\Delta x+\varepsilon\,.\,\Delta x.$

Da nun $\varepsilon\,.\,\Delta x$ eine verschwindend kleine Größe *höherer* Ordnung wird, wenn $\Delta x$ verschwindend klein wird, so darf man beim Übergange zur Grenze, so lange $f'(x)$ von Null verschieden ist, $\varepsilon\,.\,\Delta x$ vernachlässigen. Deshalb erhält man aus Gleichung (7.)

(8.) $$dy=df(x)=f'(x)dx.$$

Diese Größe, welche man das „*Differential*" der Funktion $y=f(x)$ nennt, ist der unendlich kleine Zuwachs, welchen die Funktion erleidet, wenn die unabhängige Veränderliche $x$ um die unendlich kleine Größe $dx$ wächst.

*Das Differential einer Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen $x$ ist also gleich der Ableitung, multipliziert mit dem Differential dieser Veränderlichen.*

Man beachte den Unterschied zwischen der *Ableitung* und dem *Differential* einer Funktion, der sich aus dem hinzugefügten Faktor $dx$ ergibt. Die Ableitung ist im Allgemeinen eine *endliche* Größe; das Differential dagegen ist *unendlich klein.*

Aus Gleichung (6.) folgt

(6a.) $$dy=f'(u)\,\varphi'(x)dx;$$

da aber

$$du=\varphi'(x)dx$$

ist, so findet man hieraus

(9.) $$dy=f'(u)du,$$

d. h. *man findet das Differential von $y$, indem man die Funktion $u$ als die unabhängige Veränderliche ansieht.*

## Beispiele.

1) $y=\sin^3 x=u^3$, wo $u=\sin x$.

Hier ist

$$dy=3u^2du \quad \text{und} \quad du=\cos x dx,$$

also

$$dy=3\sin^2 x\cos x dx, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx}=3\sin^2 x\cos x.$$

2) $y = \ln(1 - x^2) = \ln u$, wo $u = 1 - x^2$.

$$dy = \frac{1}{u}du = \frac{1}{1 - x^2}(-2x)dx = \frac{-2xdx}{1 - x^2}.$$

Ist $y$ eine Funktion von $u$, $u$ eine Funktion von $v$, und $v$ eine Funktion von $x$, ist also

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

so wird auch $y$ eine Funktion von $v$ und deshalb auch eine Funktion von $x$; daher findet man nach dem vorhergehenden Satze

$$dy = f'(u)du, \quad du = \varphi'(v)dv, \quad dv = \psi'(x)dx, \tag{10.}$$

oder

$$dy = f'(u)du = f'(u)\varphi'(v)dv = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)dx. \tag{11.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und das Differential von $y$ auch dann noch finden, wenn die Reihe der veränderlichen Größen, von denen jede eine Funktion der folgenden ist, noch länger wird.

Es sei z. B.

$$y = \sin u, \quad u = v^m, \quad v = a^3 + x^3,$$

oder

$$y = \sin[(a^3 + x^3)^m],$$

dann wird

$$dy = \cos u du, \quad du = mv^{m-1}dv, \quad dv = 3x^2dx,$$

also

$$dy = \cos u \,.\, mv^{m-1}dv = \cos u \,.\, mv^{m-1} \,.\, 3x^2dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = 3mx^2(a^3 + x^3)^{m-1}\cos[(a^3 + x^3)^m].$$

§ 23.

## Übungs-Aufgaben.

1) $$y = u^m, \quad \frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

Dieses Resultat stimmt mit Formel Nr. 30a der Tabelle überein. Daraus erkennt man, daß Formel Nr. 30a nur ein besonderer Fall von Formel Nr. 36 ist.

2) $y = \sin(mx)$.

Man setze

$$mx = u,$$

dann wird

$$y = \sin u, \quad dy = \cos u du,$$

$$du = m dx, \quad dy = m \cos(mx) dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = m \cos(mx).$$

3) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Hier ist

$$y = \operatorname{tg} u, \quad \text{wo} \quad u = \frac{x}{2},$$

$$dy = \frac{du}{\cos^2 u}, \qquad du = \frac{dx}{2},$$

also

$$dy = \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4) $y = \sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^3}$; $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3(\cos x - \sin x)}{5\sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^2}}$.

5) $y = \ln(\sin x)$.

Hier ist

$$y = \ln u, \quad \text{wo} \quad u = \sin x, \quad \text{also} \quad dy = \frac{du}{u}, \quad du = \cos x dx,$$

$$dy = \frac{\cos x dx}{\sin x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x.$$

6) $y = \ln(\cos x)$; $\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} x$.

7) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$; $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

8) $y = \ln(\operatorname{ctg} x)$; $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin x \cos x}$.

9) $y = \ln(\cos x + \sin x)$; $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$.

10) $y = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})$.

Man setze

$$u = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2},$$

dann wird

$$y = \ln u, \quad dy = \frac{1}{u}\,du,$$

$$du = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

$$dy = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})dx}{(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{a^4 - x^4}},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})}{(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Indem man noch Zähler und Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung mit $\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}$ multipliziert, erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(2a^2 - 2\sqrt{a^4 - x^4})}{2x^2\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - x^4}}{x\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

11) $y = \ln(\ln x)$.

Hier ist

$$y = \ln u, \quad \text{wo} \quad u = \ln x,$$

$$dy = \frac{du}{u}, \qquad du = \frac{dx}{x},$$

$$dy = \frac{dx}{x \ln x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}.$$

Jetzt kann man auch zeigen, daß die Formel Nr. 30a der Tabelle, nämlich die Formel

$$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}, \tag{1.}$$

auch dann noch richtig bleibt, wenn der Exponent $m$ eine *inkommensurable* Zahl ist; zu dem Zwecke setze man

$$z = u^m = e^y, \quad \text{also} \quad y = \ln z = m . \ln u, \tag{2.}$$

folglich wird

$$(3.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\,\frac{dz}{dx} = m \cdot \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}.$$

Dies gibt durch Multiplikation mit $z = u^m$

$$(4.)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

## § 24.

## Differentiation inverser Funktionen, insbesondere der zyklometrischen Funktionen und der Funktion $a^x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 37 bis 44.)

Wie schon früher (§ 1) hervorgehoben wurde, kann man aus der Gleichung

$$(1.)\qquad y = f(x),$$

wenn $y$ keine Konstante ist, durch Auflösung nach $x$ eine Gleichung

$$(2.)\qquad x = \varphi(y)$$

herleiten; man nennt dabei die eine Funktion die *inverse* der anderen, weil die eine aus der anderen durch Umkehrung entsteht. Beispiele dafür waren

$$\begin{array}{lcl}
y = b^x & \text{und} & x = \overset{b}{\log} y, \\
y = \sin x & ,, & x = \operatorname{arc}\sin y, \\
y = \cos x & ,, & x = \operatorname{arc}\cos y, \\
y = \operatorname{tg} x & ,, & x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y, \\
y = \operatorname{ctg} x & ,, & x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y.
\end{array}$$

Es ist nun mitunter notwendig, $\frac{dy}{dx}$ zu bilden, wenn nicht $y = f(x)$ gegeben ist, sondern die *inverse Funktion* $x = \varphi(y)$. Dies geschieht, indem man beide Seiten der Gleichung (2.) nach $x$ differentiiert; dabei muß man aber beachten, daß auf der rechten Seite der Gleichung eine Funktion von $y$ steht, und daß $y$ wieder eine Funktion von $x$ ist. Es kommt dabei also Formel Nr. 36 der Tabelle zur Anwendung, wobei man erhält

$$1 = \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi'(y) \frac{dy}{dx}, \tag{3.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{4.}$$

## Beispiele.

1) Es sei

$$y = \arcsin x, \tag{5.}$$

dann findet man durch *Umkehrung der Funktion*

$$x = \sin y \tag{6.}$$

und durch Differentiation dieser Gleichung nach $x$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{7.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}, \tag{8.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (6.)

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{8a.}$$

Für alle Werte von $x$ zwischen $-1$ und $+1$ gibt es einen Wert von $y$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Da $x = \sin y$ und der Bogen $y$ in diesem Intervalle gleichzeitig zunehmen, da also $dx$ und $dy$ gleiches Vorzeichen haben, so muß in Gleichung (8.) die Quadratwurzel mit dem positiven Vorzeichen genommen werden.

2) Es sei

$$y = \arccos x, \tag{9.}$$

dann wird in ähnlicher Weise wie vorhin

$$x = \cos y, \tag{10.}$$

$$1 = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{11.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}, \tag{12.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$(12\,a.)\qquad \frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für alle Werte von $x$ zwischen $-1$ und $+1$ gibt es einen Wert von $y$ zwischen 0 und $\pi$. Da $x = \cos y$ von $+1$ bis $-1$ *abnimmt*, während der Bogen $y$ von 0 bis $\pi$ *zunimmt*, da also $dx$ und $dy$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so ist in Gleichung (12.) das Vorzeichen der Quadratwurzel richtig bestimmt.

3) Es sei

$$(13.)\qquad y = \operatorname{arc\,tg} x,$$

dann wird

$$(14.)\qquad x = \operatorname{tg} y,$$

$$(15.)\quad 1 = (1 + \operatorname{tg}^2 y)\cdot\frac{dy}{dx},\qquad (16.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (14.)

$$(16\,a.)\qquad \frac{d(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Es sei

$$(17.)\qquad y = \operatorname{arc\,ctg} x,$$

dann wird

$$(18.)\qquad x = \operatorname{ctg} y,$$

$$(19.)\quad 1 = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y)\cdot\frac{dy}{dx},\qquad (20.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y},$$

oder

$$(20\,a.)\qquad \frac{d(\operatorname{arc\,ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5) Es sei

$$(21.)\qquad y = \operatorname{arc\,sec} x,$$

dann wird

$$(22.)\qquad x = \sec y = \frac{1}{\cos y},\quad \cos y = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$(23.)\qquad -\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = -x^{-2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{-2}}{\sin y} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - x^{-2}}}, \tag{24.}$$

oder

$$\frac{d(\operatorname{arc}\sec x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{24a.}$$

6) Es sei

$$y = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x, \tag{25.}$$

dann wird

$$x = \operatorname{cosec} y = \frac{1}{\sin y}, \quad \sin y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \tag{26.}$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -x^{-2}, \tag{27.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-2}}{\cos y} = -\frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = -\frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - x^{-2}}}, \tag{28.}$$

oder

$$\frac{d(\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{28a.}$$

Man beachte, daß die Ableitungen der *zyklometrischen* Funktionen ($\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arc}\sec x$, $\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$) sämtlich *algebraische* Funktionen sind.

7) Es sei

$$y = a^x, \tag{29.}$$

dann wird, wenn man auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus nimmt,

$$\ln y = x \,.\, \ln a, \tag{30.}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a, \tag{31.}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a, \tag{32.}$$

oder

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a. \tag{32a.}$$

Für den besonderen Fall, wo $a$ gleich $e$ (der Basis der natürlichen Logarithmen) wird, erhält man

$$\ln a = \ln e = 1,$$

so daß die Gleichung (32a.) übergeht in

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x. \tag{33.}$$

Ist $C$ eine beliebige Konstante, so ist auch

$$\frac{d(Ce^x)}{dx} = Ce^x. \tag{34.}$$

Dieses Resultat ist deshalb bemerkenswert, weil $Ce^x$, wie später gezeigt werden soll, die *einzige Funktion ist, welche mit ihrer Ableitung übereinstimmt.* Man nennt $e^x$ „die *Exponential-Funktion*".

## § 25.

## Übungs-Beispiele.

1) $d(ax^3 - bx^2 + c) = x(3ax - 2b)dx.$

2) $d(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5) = (x^2 - 3x + 4)dx.$

3) $d\left(2x^2 - 7x - 5 + \frac{3}{x}\right) = \left(4x - 7 - \frac{3}{x^2}\right)dx.$

4) $d\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{a^2}{x}\right) = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2}\right)dx.$

5) $$d\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}} + 8\sqrt[7]{x^3}\right) = d\left(3x^{\frac{13}{5}} - 7x^{-\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{3}{7}}\right)$$
$$= \left(\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}\right)dx.$$

6) $$d[(ax^{2n} - bx^n + c)^m] =$$
$$mn(ax^{2n} - bx^n + c)^{m-1}(2ax^n - b)x^{n-1}dx.$$

7) $d\left(\frac{1}{2x^2 - 5x + 9}\right) = d[(2x^2 - 5x + 9)^{-1}] = -\frac{(4x - 5)dx}{(2x^2 - 5x + 9)^2}.$

8) $d\left(\frac{a + x}{b + x}\right) = \frac{(b - a)dx}{(b + x)^2}.$

9) $d[(a + x)\sqrt{a - x}] = \frac{(a - 3x)dx}{2\sqrt{a - x}}.$

10) $d[(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}] = \frac{x(a^2 - 3x^2)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

11) $d[(2a^2+3x^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}] = -15x^3\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx.$

12) $d\left(\frac{x}{\sqrt{a-bx^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{(a-bx^2)^3}}\,dx.$

13) $d\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right) = d(a^x+a^{-x}) = (a^x-a^{-x})\ln a\,.\,dx.$

14) $d[(x-1)a^x] = a^x[1+(x-1)\ln a]\,dx.$

15) $d(e^x\,.\,x^m) = e^x\,.\,x^{m-1}(x+m)dx.$

16) $d[e^x(x^3-3x^2+6x-6)] = e^x\,.\,x^3dx.$

17) $d\left(e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{e^x(2-x^2)dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

18) $d\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

19) $d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

20) $$d\ln\left(\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = d[\ln x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$
$$= \frac{dx}{x} - \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

21) $$d\ln\left(\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}\right) = d\left[\frac{1}{2}\ln(3x-4) - \frac{1}{2}\ln(3x+4)\right]$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3x-4} - \frac{1}{3x+4}\right)dx = \frac{12dx}{9x^2-16}.$$

22) $$d\ln\left(\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right) = d\left[\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2) - \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)\right]$$
$$= \left(-\frac{x}{a^2-x^2} - \frac{x}{a^2+x^2}\right)dx = -\frac{2a^2xdx}{a^4-x^4}.$$

23) $d\ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}.$

24) $d\ln\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{2dx}{3(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt[3]{x^2}}.$

25) $$d\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}\right)=d\ln\left(\frac{u}{v}\right),$$

wobei

$$u=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2},\quad v=\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

oder

$$\frac{du}{dx}=-\frac{xv}{\sqrt{a^4-x^4}},\quad \frac{dv}{dx}=+\frac{xu}{\sqrt{a^4-x^4}}$$

ist. Dies gibt

$$d\ln\left(\frac{u}{v}\right)=d(\ln u-\ln v)=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$$

$$=-\frac{xvdx}{u\sqrt{a^4-x^4}}-\frac{xudx}{v\sqrt{a^4-x^4}}=-\frac{x(v^2+u^2)dx}{uv\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Nun ist

$$uv=a^2+x^2-(a^2-x^2)=2x^2,$$

$$\begin{aligned}u^2+v^2&=a^2+x^2+2\sqrt{a^4-x^4}+a^2-x^2\\&\quad+a^2+x^2-2\sqrt{a^4-x^4}+a^2-x^2\\&=4a^2,\end{aligned}$$

folglich wird

$$d\ln\left(\frac{u}{v}\right)=-\frac{4a^2xdx}{2x^2\sqrt{a^4-x^4}}=-\frac{2a^2dx}{x\sqrt{a^4-x^4}}.$$

26) $$d\ln\left(\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt[5]{(x+4)^3}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}}\right)$$

$$=d\left[\frac{2}{3}\ln(x+2)+\frac{3}{5}\ln(x+4)-\frac{5}{4}\ln(x-1)\right]$$

$$=\left(\frac{2}{3(x+2)}+\frac{3}{5(x+4)}-\frac{5}{4(x-1)}\right)dx.$$

27) $d\sin(2x+5)=2\cos(2x+5)dx.$

28) $d\cos(mx) = -m\sin(mx)dx.$

29) $d(\sin^2 x) = 2\sin x\cos x dx.$

30) $d(\sin^3 x\cos x) = \sin^2 x(3 - 4\sin^2 x)dx.$

31) $$d\left(\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sin x}\right) = \left(-\frac{6}{\sin^3 x} + \frac{5}{\sin^2 x}\right)\cos x dx$$
$$= \frac{(5\sin x - 6)\cos x dx}{\sin^3 x}.$$

32) $$d\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = -\frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}.$$

33) $$d\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{5}\right)\right]dx.$$

34) $d\,\mathrm{ctg}(3x) = -3[1 + \mathrm{ctg}^2(3x)]dx.$

35) $$d(\mathrm{tg}^m x) = \frac{m\,\mathrm{tg}^{m-1}x}{\cos^2 x}dx = m\,\mathrm{tg}^{m-1}x(1 + \mathrm{tg}^2 x)dx.$$

36) $$d(4\,\mathrm{tg}^3 x - 3\,\mathrm{tg}^2 x + 6\,\mathrm{tg}x) = (12\,\mathrm{tg}^2 x - 6\,\mathrm{tg}x + 6)(1 + \mathrm{tg}^2 x)dx$$
$$= 6(2\,\mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x + 1)dx.$$

37) $d(e^x\cos x) = e^x(\cos x - \sin x)dx.$

38) $$d\sin(\ln x) = \cos(\ln x)\,.\,d(\ln x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx.$$

39) $$d\sin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)d\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cos\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx.$$

40) $$d\,\mathrm{tg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]d\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$
$$= \left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]\frac{4dx}{(x+2)^2}.$$

41) $$d\ln(\sqrt{\cos x}) = d(\tfrac{1}{2}\ln\cos x) = \frac{d(\cos x)}{2\cos x} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x dx.$$

42) $$d\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = d[\ln(1+\cos x) - \ln(1-\cos x)]$$
$$= \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} - \frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x} = -\frac{2dx}{\sin x}.$$

43) $d\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot d\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=\frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{dx}{\sin x}\cdot$$

44) $d\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]=-\frac{dx}{\sin x}\cdot$

45) $d\ln(\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^3 x})=d\left[\frac{3}{4}\ln(\sin x)+\frac{3}{4}\ln(\cos x)\right]$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{3(\cos^2 x-\sin^2 x)dx}{4\sin x\cos x}=\frac{3}{2}\operatorname{ctg}(2x)\,dx.$$

46) $d(e^{\sin x})=e^{\sin x}\,.\,d(\sin x)=e^{\sin x}\,.\,\cos x dx.$

47) $d(xe^{\cos x})=e^{\cos x}(1-x\sin x)dx.$

48) $d[e^{ax}\,.\,\cos(mx)]=e^{ax}[a\cos(mx)-m\sin(mx)]dx.$

49) $d(a^{\ln x})=a^{\ln x}\ln a\,.\,d(\ln x)=\frac{a^{\ln x}\ln a}{x}dx.$

50) $d\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot$

51) $d\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{adx}{a^2+x^2}\cdot$

52) $d\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{a+x}}=\frac{1}{1+\frac{x}{a+x}}\cdot d\sqrt{\frac{x}{a+x}}$

$$=\frac{a+x}{a+2x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{x}}\cdot d\left(\frac{x}{a+x}\right)$$

$$=\frac{(a+x)\sqrt{a+x}}{2(a+2x)\sqrt{x}}\cdot\frac{adx}{(a+x)^2}=\frac{adx}{2(a+2x)\sqrt{x(a+x)}}\cdot$$

53) $$d\left[a\,.\,\arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)-\sqrt{2ax-x^2}\right]=$$
$$-\frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{a-x}{a}\right)-\frac{d(2ax-x^2)}{2\sqrt{2ax-x^2}}$$
$$=+\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

54) $y=x^x$, $\ln y=x\ln x$, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\ln x$,
$d(x^x)=x^x(1+\ln x)dx$.

In dieser und in den folgenden Aufgaben ist $y$ eine Potenz, bei welcher der Exponent noch eine Funktion von $x$ ist. Man findet dann die Ableitung nach $x$ am einfachsten, indem man $\ln y$ bildet und beide Seiten der Gleichung nach $x$ differentiiert.

55) $y=x^{\sin x}$,
$$\ln y=\sin x\,.\,\ln x,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\cos x\,.\,\ln x+\frac{\sin x}{x},$$
$$d(x^{\sin x})=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\,.\,\ln x\right)dx.$$

56) $y=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$,
$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$
$$d(\sqrt[x]{x})=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx.$$

57) $y=(x^x)^x=x^{(x^2)}$,
$$\ln y=x^2\,.\,\ln x,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x}+2x\,.\,\ln x=x(1+2\ln x),$$
$$d[(x^x)^x]=x^{(x^2)}\,.\,x(1+2\ln x)dx=x^{x^2+1}(1+2\ln x)dx.$$

58) $y=x^{\left(x^x\right)}$,
$$\ln y=x^x\,.\,\ln x,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x^x(1+\ln x)\ln x+\frac{x^x}{x}$$
nach Aufgabe 54, folglich wird

$$d\left[x^{\left(x^x\right)}\right] = x^{\left(x^x\right)} \cdot x^x[(1 + \ln x)\ln x + x^{-1}]dx$$
$$= x^{x^x + x}[(1 + \ln x)\ln x + x^{-1}]dx.$$

59) $y = (\cos x)^{\sin x}$,

$$\ln y = \sin x \ln(\cos x), \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$
$$d[(\cos x)^{\sin x}] = (\cos x)^{-1+\sin x}[\cos^2 x \ln(\cos x) - \sin^2 x]dx.$$

60) $y = \arcsin\left[\operatorname{tg}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\right]$.

$$\sin y = \operatorname{tg} u, \quad \text{wo} \quad u = \frac{a-x}{a+x},$$
$$\cos y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2},$$
$$\cos^2 y = 1 - \operatorname{tg}^2 u = \frac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos(2u)}{\cos^2 u},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos u \sqrt{\cos(2u)}} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2},$$

oder

$$d \arcsin\left[\operatorname{tg}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\right] =$$
$$\frac{-2\,a\,dx}{(a+x)^2 \cos\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\sqrt{\cos\left(\frac{2(a-x)}{a+x}\right)}}.$$

## III. Abschnitt.

# Hyperbolische Funktionen.

### § 26.

### Erklärung der hyperbolischen Funktionen und Herleitung der wichtigsten Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 45 bis 68.)

Bei den technischen Anwendungen der höheren Mathematik benutzt man häufig die *hyperbolischen Funktionen*:

Cosinus hyperbolicus ($\mathfrak{Cof}$),
Sinus hyperbolicus ($\mathfrak{Sin}$),
Tangens hyperbolica ($\mathfrak{Tg}$),
Cotangens hyperbolica ($\mathfrak{Ctg}$),
Secans hyperbolica ($\mathfrak{Sec}$),
Cosecans hyperbolica ($\mathfrak{Cofec}$).

Diese Funktionen besitzen ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen und werden, wenn man die unabhängige Veränderliche mit $u$ bezeichnet, durch die folgenden Gleichungen erklärt:

$$(1.)\qquad \mathfrak{Cof}\, u = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u}), \quad \mathfrak{Sin}\, u = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u}),$$

$$(2.)\qquad \mathfrak{Tg}\, u = \frac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cof}\, u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$(3.)\qquad \mathfrak{Ctg}\, u = \frac{\mathfrak{Cof}\, u}{\mathfrak{Sin}\, u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}},$$

$$(4.)\qquad \mathfrak{Sec}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, u}, \quad \mathfrak{Cofec}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, u}.$$

Da

$$e^{-u} = \frac{1}{e^u}$$

ist, so lassen sich die hyperbolischen Funktionen sämtlich als *rationale* Funktionen von $e^u$ darstellen, ein Umstand, der bei den Anwendungen von großer Bedeutung ist.

Aus Gleichung (2.) folgt ferner, wenn man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite mit $e^u$ multipliziert,

$$\mathfrak{Tg}\, u = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}, \quad \text{also} \quad e^{2u} = \frac{1 + \mathfrak{Tg}\, u}{1 - \mathfrak{Tg}\, u},$$

oder, wenn man $u$ mit $\frac{u}{2}$ vertauscht,

$$e^u = \frac{1 + \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}. \tag{5.}$$

Indem man diesen Wert von $e^u$ in die Gleichungen (1.) bis (4.) einsetzt, erkennt man, daß sich die hyperbolischen Funktionen auch als rationale Funktionen von $\mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)$ darstellen lassen.

Mitunter werden auch andere Bezeichnungen gebraucht, indem man schreibt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| cosh | statt | $\mathfrak{Cos}$, | sinh | statt | $\mathfrak{Sin}$, |
| tgh | „ | $\mathfrak{Tg}$, | ctgh | „ | $\mathfrak{Ctg}$, |
| sech | „ | $\mathfrak{Sec}$, | cosech | „ | $\mathfrak{Cosec}$. |

Ihren Namen haben die hyperbolischen Funktionen davon, daß sie zu der *gleichseitigen Hyperbel* in einer ähnlichen Beziehung stehen wie die trigonometrischen Funktionen zum *Kreise*. (Vergl. § 28.) Man beachte daher sogleich die Analogie, welche die hier folgenden Formeln mit den trigonometrischen Formeln besitzen. Mit Hilfe der komplexen Größen wird später sogar gezeigt werden, wie diese Formeln aus den entsprechenden trigonometrischen Formeln unmittelbar hervorgehen.

Aus den Gleichungen (1.) folgt zunächst

$$\mathfrak{Cos}\, 0 = 1, \quad \mathfrak{Sin}\, 0 = 0, \tag{6.}$$

$$\mathfrak{Cos}(-u) = \mathfrak{Cos}(+u), \quad \mathfrak{Sin}(-u) = -\mathfrak{Sin}\, u. \tag{7.}$$

Da die Größen $e^u$ und $e^{-u} = \frac{1}{e^u}$ immer positiv sind, so lange $u$ reelle Werte hat, so ist $\mathfrak{Cos}\, u$ *stets positiv*.

Ferner folgt aus den Gleichungen (1.)

(8.) $$\mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = e^u,$$

(9.) $$\mathfrak{Cos}\, u - \mathfrak{Sin}\, u = e^{-u};$$

deshalb wird

(10.) $$\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1,$$

oder

(11.) $$\mathfrak{Cos}^2 u = 1 + \mathfrak{Sin}^2 u.$$

Daraus erkennt man, daß

$$\mathfrak{Cos}^2 u \geqq 1 \quad \text{und deshalb auch} \quad \mathfrak{Cos}\, u \geqq 1.$$

Da $e^u$ mit $u$ zugleich unendlich groß wird, so durchläuft $\mathfrak{Cos}\, u$ alle Werte von 1 bis $\infty$, wenn $u$ alle Werte von 0 bis $+\infty$. oder von 0 bis $-\infty$ durchläuft.

Aus

(12.) $$\mathfrak{Sin}^2 u = \mathfrak{Cos}^2 u - 1$$

erkennt man, daß $\mathfrak{Sin}^2 u$ alle Werte von 0 bis $\infty$ durchläuft, wenn $u$ alle Werte von 0 bis $+\infty$ durchläuft. Beachtet man noch die Gleichungen (7.), so findet man, daß $\mathfrak{Sin}\, u$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, wenn $u$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft*).

Multipliziert man die Gleichungen (1.) miteinander und fügt noch den Faktor 2 hinzu, so erhält man

$$2\,\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cos}\, u = \frac{1}{2}(e^{2u} - e^{-2u}),$$

oder

(13.) $$\mathfrak{Sin}(2u) = 2\,\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cos}\, u.$$

Erhebt man die Gleichungen (1.) ins Quadrat und addiert sie, so ergibt sich

$$\mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u = \frac{1}{2}(e^{2u} + e^{-2u}),$$

oder

(14.) $$\mathfrak{Cos}(2u) = \mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) und (12.)

(15.) $$\mathfrak{Cos}(2u) = 1 + 2\,\mathfrak{Sin}^2 u = 2\,\mathfrak{Cos}^2 u - 1.$$

---

*) Eine kurzgefaßte Tabelle für die Werte von $\mathfrak{Sin}\, u$, $\mathfrak{Cos}\, u$, $\mathfrak{Tg}\, u$, $\log(\mathfrak{Sin}\, u)$, $\log(\mathfrak{Cos}\, u)$, $\log(\mathfrak{Tg}\, u)$ findet sich im Anhange dieses Bandes.

Indem man die Gleichung (11.) durch $\mathfrak{Cos}^2 u$ dividiert, erhält man

$$\mathfrak{Sec}^2 u + \mathfrak{Tg}^2 u = 1. \tag{16}$$

Indem man Gleichung (12.) durch $\mathfrak{Sin}^2 u$ dividiert, erhält man

$$\mathfrak{Ctg}^2 u - \mathfrak{Cosec}^2 u = 1. \tag{17.}$$

Dividiert man die rechte Seite von Gleichung (13.) durch

$$\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1,$$

so erhält man

$$\mathfrak{Sin}(2u) = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cos}\, u}{\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u}, \tag{18.}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $\mathfrak{Cos}^2 u$ dividiert,

$$\mathfrak{Sin}(2u) = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\, u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}. \tag{19.}$$

In ähnlicher Weise findet man aus Gleichung (14.)

$$\mathfrak{Cos}(2u) = \frac{\mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u}{\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u} = \frac{1 + \mathfrak{Tg}^2 u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}. \tag{20.}$$

Aus den Gleichungen

$$2\,\mathfrak{Cos}\, u = e^u + e^{-u}, \qquad 2\,\mathfrak{Cos}\, v = e^v + e^{-v},$$
$$2\,\mathfrak{Sin}\, u = e^u - e^{-u}, \qquad 2\,\mathfrak{Sin}\, v = e^v - e^{-v}$$

folgt

$$\begin{aligned} 4\,\mathfrak{Cos}\, u \,.\, \mathfrak{Cos}\, v &= e^{u+v} + e^{u-v} + e^{-(u-v)} + e^{-(u+v)} \\ &= 2\,\mathfrak{Cos}(u+v) + 2\,\mathfrak{Cos}(u-v), \end{aligned} \tag{21.}$$

$$\begin{aligned} 4\,\mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v &= e^{u+v} - e^{u-v} - e^{-(u-v)} + e^{-(u+v)} \\ &= 2\,\mathfrak{Cos}(u+v) - 2\,\mathfrak{Cos}(u-v). \end{aligned} \tag{22.}$$

Dies gibt

$$\mathfrak{Cos}(u+v) = \mathfrak{Cos}\, u \,.\, \mathfrak{Cos}\, v + \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v, \tag{23.}$$

$$\mathfrak{Cos}(u-v) = \mathfrak{Cos}\, u \,.\, \mathfrak{Cos}\, v - \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v. \tag{24.}$$

Setzt man noch

$$u + v = a, \qquad u - v = b, \tag{25.}$$

also

$$u = \frac{a+b}{2}, \qquad v = \frac{a-b}{2}, \tag{26.}$$

so folgt aus den Gleichungen (21.) und (22.)

$$(27.)\quad \mathfrak{Cof}\,a + \mathfrak{Cof}\,b = 2\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$(28.)\quad \mathfrak{Cof}\,a - \mathfrak{Cof}\,b = 2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ferner wird

$$(29.)\quad 4\,\mathfrak{Sin}\,u\,.\,\mathfrak{Cof}\,v = e^{u+v} + e^{u-v} - e^{-(u-v)} - e^{-(u+v)}$$
$$= 2\,\mathfrak{Sin}(u+v) + 2\,\mathfrak{Sin}(u-v),$$

$$(30.)\quad 4\,\mathfrak{Cof}\,u\,.\,\mathfrak{Sin}\,v = e^{u+v} - e^{u-v} + e^{-(u-v)} - e^{-(u+v)}$$
$$= 2\,\mathfrak{Sin}(u+v) - 2\,\mathfrak{Sin}(u-v).$$

Dies gibt

$$(31.)\quad \mathfrak{Sin}(u+v) = \mathfrak{Sin}\,u\,.\,\mathfrak{Cof}\,v + \mathfrak{Cof}\,u\,.\,\mathfrak{Sin}\,v,$$

$$(32.)\quad \mathfrak{Sin}(u-v) = \mathfrak{Sin}\,u\,.\,\mathfrak{Cof}\,v - \mathfrak{Cof}\,u\,.\,\mathfrak{Sin}\,v.$$

Setzt man die Werte von $u$ und $v$ aus den Gleichungen (25.) und (26.) in die Gleichungen (29.) und (30.) ein, so erhält man

$$(33.)\quad \mathfrak{Sin}\,a + \mathfrak{Sin}\,b = 2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$(34.)\quad \mathfrak{Sin}\,a - \mathfrak{Sin}\,b = 2\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Schließlich wird

$$(35.)\quad \mathfrak{Tg}\,a - \mathfrak{Tg}\,b = \frac{\mathfrak{Sin}\,a\,.\,\mathfrak{Cof}\,b - \mathfrak{Cof}\,a\,\mathfrak{Sin}\,b}{\mathfrak{Cof}\,a\,.\,\mathfrak{Cof}\,b} = \frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Cof}\,a\,.\,\mathfrak{Cof}\,b},$$

$$(36.)\quad \mathfrak{Ctg}\,a - \mathfrak{Ctg}\,b = \frac{\mathfrak{Cof}\,a\,.\,\mathfrak{Sin}\,b - \mathfrak{Sin}\,a\,\mathfrak{Cof}\,b}{.\,\mathfrak{Sin}\,a\,.\,\mathfrak{Sin}\,b} = -\frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Sin}\,a\,.\,\mathfrak{Sin}\,b}.$$

## § 27.

## Differentiation der hyperbolischen Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 69 bis 72.)

Aus den Gleichungen

$$(1.)\quad \mathfrak{Cof}\,u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}),\quad \mathfrak{Sin}\,u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}),$$

$$(2.)\quad \mathfrak{Tg}\,u = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cof}\,u},\qquad \mathfrak{Ctg}\,u = \frac{\mathfrak{Cof}\,u}{\mathfrak{Sin}\,u}$$

folgt ohne weiteres

$$(3.)\quad \frac{d(\mathfrak{Cof}\,u)}{du} = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \mathfrak{Sin}\,u,$$

$$(4.)\quad \frac{d(\mathfrak{Sin}\,u)}{du} = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \mathfrak{Cof}\,u,$$

$$(5.)\quad \frac{d(\mathfrak{Tg}\,u)}{du} = \frac{\mathfrak{Cof}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u}{\mathfrak{Cof}^2 u} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 u} = 1 - \mathfrak{Tg}^2 u,$$

$$(6.)\quad \frac{d(\mathfrak{Ctg}\,u)}{du} = \frac{\mathfrak{Sin}^2 u - \mathfrak{Cof}^2 u}{\mathfrak{Sin}^2 u} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 u} = 1 - \mathfrak{Ctg}^2 u.$$

## § 28.

## Geometrische Deutung der hyperbolischen Funktionen.

Setzt man bei den *trigonometrischen* Funktionen

$$(1.)\quad \cos\varphi = x, \quad \sin\varphi = y,$$

so folgt aus der Formel

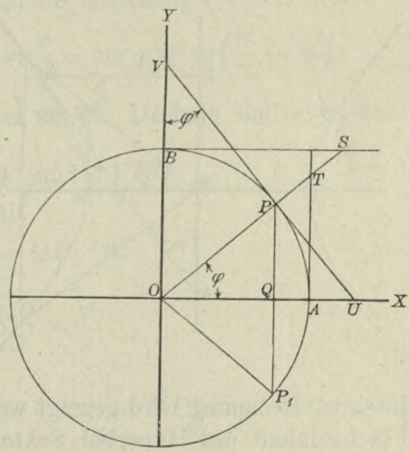
$$(2.)\quad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

die Gleichung

$$(3.)\quad x^2 + y^2 = 1,$$

d. h. $x$ und $y$ sind die Koordinaten $OQ$ und $QP$ eines Punktes $P$, welcher einen Kreis mit dem Halbmesser 1 durchläuft. (Fig. 22.) Dabei wird der Winkel $\varphi$ durch den Bogen $AP$ gemessen; man könnte aber auch $\varphi$ als den doppelten Flächeninhalt des Kreis-Sektors $AOP$ erklären.

Fig. 22.




Macht man nämlich

$$\text{Bogen } P_1A = \text{Bogen } AP, \quad \text{oder} \quad P_1P = 2AP,$$

so wird, weil der Halbmesser des Kreises gleich 1 ist,

$$(4.)\quad 2\,\text{Sektor } AOP = \text{Sektor } P_1OP = \tfrac{1}{2}P_1P\,.\,OA = AP = \varphi\,.$$

Legt man in den Punkten $A$ und $B$ an den Kreis die Tangenten, welche die Gerade $OP$ bezw. in den Punkten $T$ und $S$ schneiden, so ist bekanntlich

(5.) $$\operatorname{tg}\varphi = AT, \quad \operatorname{ctg}\varphi = BS.$$

Legt man ferner an den Kreis im Punkte $P$ die Tangente, welche die Koordinaten-Achsen bezw. in den Punkten $U$ und $V$ treffen möge, dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck $OPU$

(6.) $$\cos\varphi = \frac{OP}{OU} = \frac{1}{OU}, \quad \text{oder} \quad OU = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi;$$

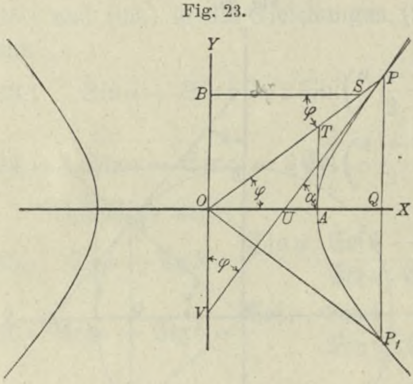
und in dem rechtwinkligen Dreieck $PVO$ ist

(7.) $$\sin\varphi = \frac{OP}{OV} = \frac{1}{OV}, \quad \text{oder} \quad OV = \frac{1}{\sin\varphi} = \operatorname{cosec}\varphi.$$

In ähnlicher Weise kann man auch die hyperbolischen Funktionen durch Strecken geometrisch darstellen, wenn man den Kreis mit einer gleichseitigen Hyperbel vertauscht. Setzt man

(8.) $$\mathfrak{Cos}\,u = x, \quad \mathfrak{Sin}\,u = y,$$

Fig. 23.




so folgt aus der Formel Nr. 52 der Tabelle, nämlich aus

(9.) $\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1,$

die Gleichung

(10.) $x^2 - y^2 = 1,$

oder

(10a.) $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$

Dieser Gleichung entspricht eine *gleichseitige Hyperbel*, wie sie in Figur 23 dargestellt ist. In der Integral-Rechnung wird gezeigt werden, daß dabei $u$ der doppelte Flächeninhalt des Hyperbel-Sektors $AOP$ ist, wenn der Punkt $P$ die Koordinaten

(8a.) $$x = OQ = \mathfrak{Cos}\,u, \quad y = QP = \mathfrak{Sin}\,u$$

besitzt. Die Tangente im Scheitelpunkte $A$ der Hyperbel treffe die Gerade $OP$ im Punkte $T$, dann ist

$$\triangle OAT \backsim \triangle OQP,$$

folglich verhält sich

$$AT : QP = OA : OQ.$$

Da nun $OA$ gleich 1 ist, so wird

$$(11.)\qquad AT = \frac{QP}{OQ} = \frac{y}{x} = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u} = \mathfrak{Tg}\,u.$$

Schneidet man ferner auf der $Y$-Achse die Strecke $OB$ gleich 1 ab und legt durch $B$ eine Parallele zur $X$-Achse, welche die Gerade $OP$ im Punkte $S$ treffen möge, so ist

$$\triangle OBS \sim \triangle PQO,$$

folglich verhält sich

$$BS : OQ = OB : QP.$$

Weil $OB$ gleich 1 ist, so ergibt sich hieraus

$$(12.)\qquad BS = \frac{OQ}{QP} = \frac{x}{y} = \frac{\mathfrak{Cos}\,u}{\mathfrak{Sin}\,u} = \mathfrak{Ctg}\,u.$$

Legt man im Punkte $P$ an die Hyperbel die Tangente, welche mit der positiven Richtung der $X$-Achse den Winkel $\alpha$ bildet und die Koordinaten-Achsen bezw. in den Punkten $U$ und $V$ treffen möge, so ergibt sich aus Gleichung (10.) oder (10a.)

$$(13.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{y} = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

d. h. $\alpha$ ist der Komplementwinkel zu $\varphi$. Deshalb sind auch die Dreiecke

$$PUQ, \quad OPQ \quad \text{und} \quad VUO$$

einander ähnlich, und man erhält

$$UQ : QP = QP : OQ,$$

oder

$$(14.)\qquad UQ = \frac{\overline{QP}^2}{OQ} = \frac{y^2}{x}.$$

Dies gibt

$$OU = OQ - UQ = x - \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 - y^2}{x},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$(15.)\qquad OU = \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,u} = \mathfrak{Sec}\,u.$$

Ferner verhält sich

$$VO : OU = OQ : QP = x : y,$$

folglich ist

$$VO = \frac{OU\,.\,x}{y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,u} = \mathfrak{Cosec}\,u.$$

§ 29.

## Umkehrung der hyperbolischen Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 73 bis 80.)

Es war schon hervorgehoben worden, daß in der Gleichung

$$x = \mathfrak{Cos}\, u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \tag{1.}$$

die unabhängige Veränderliche $u$ dem doppelten Flächeninhalt des Hyperbel-Sektors $AOP$ gleich ist. Die Gleichung (1.) kann deshalb so gelesen werden, daß man $u$ als den Flächeninhalt (area) bezeichnet, dessen hyperbolischer Kosinus gleich $x$ ist. Dies gibt die Gleichung

$$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cos}\, x. \qquad \text{(Sprich: Area Cosinus } x.) \tag{2.}$$

Diese Gleichung kann man noch auf eine andere Form bringen. Nach Formel Nr. 50 der Tabelle ist nämlich

$$\mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = e^u, \tag{3.}$$

also, wenn man dieselben Bezeichnungen wie in § 28 anwendet,

$$u = \ln(\mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u) = \ln(x + y). \tag{4.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 52 der Tabelle

$$\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 = 1, \tag{5.}$$

also

$$y = \mathfrak{Sin}\, u = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \tag{6.}$$

Das obere oder untere Vorzeichen gilt hierbei, je nachdem $u$ positiv oder negativ ist. Deshalb findet man aus den Gleichungen (2.) und (4.)

$$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cos}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}). \tag{7.}$$

In ähnlicher Weise folgt aus der Gleichung

$$y = \mathfrak{Sin}\, u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \tag{8.}$$

durch Umkehrung mit Rücksicht auf Gleichung (4.)

$$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\, y = \ln(x + y). \tag{9.}$$

Nun folgt aus Gleichung (5.)

$$x = \pm\sqrt{1 + y^2}, \tag{10.}$$

wobei aber nur das obere Vorzeichen gelten kann, weil $x$ nach

Gleichung (1.) stets positiv ist, so lange $u$ reelle Werte hat. Deshalb geht Gleichung (9.) über in

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}). \tag{11.}$$

Setzt man ferner

$$z = \mathfrak{Tg}\,u = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u} = \frac{y}{x}, \tag{12.}$$

so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.) und (5.) durch Umkehrung

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,z = \ln(x + y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + y}{x - y}\right), \tag{13.}$$

oder, wenn man in der letzten Klammergröße Zähler und Nenner durch $x$ dividiert,

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right). \tag{14.}$$

Setzt man endlich

$$w = \mathfrak{Ctg}\,u = \frac{\mathfrak{Cos}\,u}{\mathfrak{Sin}\,u} = \frac{x}{y}, \tag{15.}$$

so wird

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,w = \ln(x + y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + y}{x - y}\right), \tag{16.}$$

oder, wenn man in der letzten Klammergröße Zähler und Nenner durch $y$ dividiert,

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right). \tag{17.}$$

Bezeichnet man in allen 4 Fällen die unabhängige Veränderliche mit $x$, so gehen die Gleichungen (7.), (11.), (14.) und (17.) in die folgenden Gleichungen über:

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \tag{18.}$$

(gleichbedeutend mit $x = \mathfrak{Cos}\,u$),

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \tag{19.}$$

(gleichbedeutend mit $x = \mathfrak{Sin}\,u$),

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \tag{20.}$$

(gleichbedeutend mit $x = \mathfrak{Tg}\,u$),

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), \tag{21.}$$

(gleichbedeutend mit $x = \mathfrak{Ctg}\,u$).

Die Umkehrungen der hyperbolischen Funktionen sind somit durch logarithmische Funktionen erklärt.

Aus
$$y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,x$$
folgt mit Rücksicht auf Formel Nr. 69 und 52a der Tabelle
$$x = \mathfrak{Cos}\,y,\quad \frac{dx}{dy} = \mathfrak{Sin}\,y = \pm\sqrt{\mathfrak{Cos}^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1},$$
also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,x)}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{22.}$$

Aus
$$y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x$$
folgt mit Rücksicht auf Formel Nr. 70 und 52a der Tabelle
$$x = \mathfrak{Sin}\,y,\quad \frac{dx}{dy} = \mathfrak{Cos}\,y = +\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 y + 1} = +\sqrt{1 + x^2},$$
also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \tag{23.}$$

Aus
$$y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x$$
folgt mit Rücksicht auf Formel Nr. 71 der Tabelle
$$x = \mathfrak{Tg}\,y,\quad \frac{dx}{dy} = 1 - \mathfrak{Tg}^2 y = 1 - x^2,$$
also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}. \tag{24.}$$

Aus
$$y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x$$
folgt mit Rücksicht auf Formel Nr. 72 der Tabelle
$$x = \mathfrak{Ctg}\,y,\quad \frac{dx}{dy} = 1 - \mathfrak{Ctg}^2 y = 1 - x^2,$$
also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}. \tag{25.}$$

## § 30.

# Beziehungen zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen.

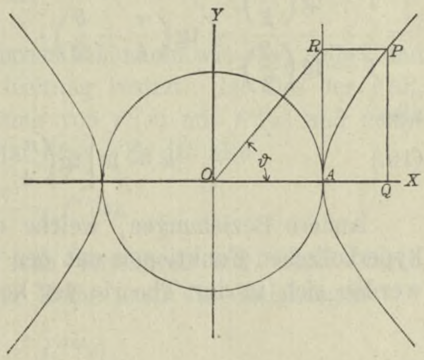
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 81.)

Setzt man wieder

(1.) $\mathfrak{Cos}\, u = x, \quad \mathfrak{Sin}\, u = y, \quad \text{also} \quad x^2 - y^2 = 1,$

so sind $x$ und $y$ die Koordinaten eines Punktes $P$, der die gleichseitige Hyperbel (Fig. 24) durchläuft. Legt man durch $P$ eine Parallele zur $X$-Achse, welche die Scheiteltangente im Punkte $R$ treffen möge, so nennt man den Winkel $AOR$ gleich $\vartheta$ den „*transzendenten Winkel*“, während die Veränderliche $u$, welche dem doppelten Flächeninhalt des Hyperbel-Sektors $AOP$ (Fig. 23) gleich ist, „*der gemeinsame Winkel*“ genannt wird. Es soll nun gezeigt werden, daß jede *hyperbolische* Funktion des gemeinsamen Winkels $u$ einer *trigonometrischen* Funktion des transzendenten Winkels $\vartheta$ gleich ist.

Fig. 24.




Zunächst folgt aus Figur 24

$$QP = AR,$$

oder

(2.) $\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg} \vartheta.$

Dies gibt

(3.) $\mathfrak{Cosec}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, u} = \operatorname{ctg} \vartheta.$

Ferner ist

$$x = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta},$$

oder

(4.) $$\mathfrak{Cos}\, u = \sec \vartheta;$$

(5.) $$\mathfrak{Sec}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, u} = \cos \vartheta;$$

(6.) $$\mathfrak{Tg}\, u = \frac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}\, u} = \operatorname{tg} \vartheta \,.\, \cos \vartheta = \sin \vartheta:$$

$$\mathfrak{Ctg}\, u = \frac{1}{\sin\vartheta} = \operatorname{cosec}\vartheta. \tag{7.}$$

Setzt man also

$$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg}\vartheta, \tag{8.}$$

so wird für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg}\vartheta, & \mathfrak{Tg}\, u \;\;= \sin\vartheta, \\ \mathfrak{Cof}\, u = \sec\vartheta, & \mathfrak{Sec}\, u \;= \cos\vartheta, \\ \mathfrak{Ctg}\, u = \operatorname{cosec}\vartheta, & \mathfrak{Cofec}\, u = \operatorname{ctg}\vartheta. \end{array}\right. \tag{9.}$$

Aus den Gleichungen (2.) und (4.) folgt ferner

$$e^u = \mathfrak{Cof}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = \sec\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1 + \sin\vartheta}{\cos\vartheta},$$

oder

$$e^u = \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right),$$

also

$$u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)\right]. \tag{10.}$$

Andere Beziehungen, welche die nahe Verwandtschaft der hyperbolischen Funktionen mit den trigonometrischen begründen, werden sich in der Theorie der komplexen Größen ergeben.

## IV. Abschnitt.

# Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

## § 31.

### Ermittelung von $f^{(n)}(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 82 bis 84.)

Wie schon früher gezeigt wurde, ist die Ableitung einer Funktion $f(x)$ im allgemeinen wieder eine Funktion von $x$. Es wurde deshalb auch das Zeichen $f'(x)$ eingeführt, so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \tag{1.}$$

war.

Man kann daher $f'(x)$ ebenso behandeln wie $f(x)$ selbst und untersuchen, ob $f'(x)$ eine Ableitung besitzt. Ist dies der Fall, so bezeichnet man die Ableitung von $f'(x)$ mit $f''(x)$ und nennt sie die „*zweite Ableitung*" von $f(x)$. Es ist also

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x). \tag{2.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält durch wiederholte Differentiation der Reihe nach die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df''(x)}{dx} = f'''(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x). \end{array}\right. \tag{3.}$$

Dabei heißt $f^{(n)}(x)$ die „*$n^{te}$ Ableitung*" der Funktion $f(x)$.

Es ist nun auch von Interesse, zu untersuchen, nach welchem Gesetze die höheren Ableitungen von $f(x)$ aus $f(x)$

selbst gebildet werden können, ohne daß man die dazwischen liegenden Ableitungen benutzt.

Der erste Differenzen-Quotient war

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \varphi(x). \tag{4.}$$

Vertauscht man in diesem Ausdrucke $x$ mit $x + \Delta x$ unter der Voraussetzung, daß sich dabei $\Delta x$ gar nicht ändert, so erhält man

$$\frac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} = \varphi(x + \Delta x). \tag{5.}$$

Indem man Gleichung (4.) von der Gleichung (5.) subtrahiert und die Differenz durch $\Delta x$ dividiert, ergibt sich

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \tag{6.}$$
$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}.$$

Läßt man jetzt $\Delta x$ verschwindend klein werden, so wird

$$\lim \varphi(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \lim \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x),$$

folglich ist

$$f''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}. \tag{7.}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x^3}, \tag{8.}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x^n}\Big\{f(x + n\Delta x) - \binom{n}{1} f[x + (n-1)\Delta x] \tag{9.}$$
$$+ \binom{n}{2} f[x + (n-2)\Delta x] - + \cdots \pm \binom{n}{1} f(x + \Delta x) \mp f(x)\Big\}.$$

Der Beweis dieser Formel kann durch den Schluß von $n$ auf $n + 1$ geführt werden, möge aber hier übergangen werden, weil für das folgende nur der Fall, wo $n = 2$ ist, in Betracht kommen wird.

Man kann auch von dem *Differentiale*

$$dy = f'(x)dx \tag{10.}$$

ausgehen und das Differential von $dy$ bilden.

Dann bezeichnet man dieses neue Differential $d(dy)$ mit $d^2y$ und nennt es das „*zweite Differential* von $y$". Bei der Bildung von $d^2y$ muß man aber beachten, daß in Gleichung (10.) die unendlich kleine Größe $dx$ einen von $x$ *unabhängigen* Wert hat und deshalb bei der nochmaligen Differentiation als eine *Konstante* anzusehen ist. Deshalb wird

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx; \tag{11.}$$

nach Formel Nr. 35 der Tabelle ist aber

$$d[f'(x)] = f''(x)dx,$$

folglich erhält man

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{12.}$$

Hierbei soll $dx^2$ immer mit $(dx)^2$ gleichbedeutend sein; man muß also $dx^2$ wohl unterscheiden von $d(x^2) = 2xdx$.

Aus Gleichung (12.) folgt jetzt auch, daß

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \tag{12a.}$$

ist.

Unter dem *dritten Differential* von $y$ versteht man das Differential von $d^2y$, also $d(d^2y)$ und bezeichnet es mit $d^3y$. Deshalb wird

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2] = d[f''(x)]dx^2,$$

oder

$$d^3y = f'''(x)dx^3. \tag{13.}$$

Hier ist $dx^3$ gleichbedeutend mit $(dx)^3$ und wohl zu unterscheiden von $d(x^3) = 3x^2dx$.

Aus Gleichung (13.) folgt wieder

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x). \tag{13a.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n, \tag{14.}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x), \tag{14a.}$$

wobei $dx^n$ immer mit $(dx)^n$ gleichbedeutend sein soll.

## § 32.
## Übungs-Beispiele.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 85 und 86.)

**Aufgabe 1.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = x^4$$

bilden.

**Auflösung.**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 4 \,.\, 3x^2 = 12x^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 4 \,.\, 3 \,.\, 2x = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x) = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = f^{(5)}(x) = 0.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = 3x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 6x + 9$$

bilden.

**Auflösung.**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 15x^4 - 28x^3 + 24x^2 + 22x - 6,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 60x^3 - 84x^2 + 48x + 22,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 180x^2 - 168x + 48,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x) = 360x - 168,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = f^{(5)}(x) = 360,$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = f^{(6)}(x) = 0.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die höheren Differentiale von

$$y = f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

bilden.

**Auflösung.**

$$dy = f'(x)dx \quad = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}dx,$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx^3,$$

$$d^4y = f^{(4)}(x)dx^4 = -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx^4,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$d^ny = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{5}{2}-n+1\right)x^{\frac{5}{2}-n}dx^n.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die höheren Differentiale von

$$y = f(x) = x^m$$

bilden.

**Auflösung.**

$$dy = f'(x)dx = mx^{m-1}dx,$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 = m(m-1)x^{m-2}dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n.$$

Ist hierbei $m$ eine positive ganze Zahl, so ist also $f^{(m)}(x)$ eine Konstante, und die höheren Ableitungen werden alle gleich 0; in allen übrigen Fällen aber kann man die Differentiation bis ins Unendliche fortsetzen.

**Aufgabe 5.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$f(x) = e^x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ldots f^{(n)}(x) = e^x.$$

Die Ableitungen der Exponential-Funktion $e^x$ sind also *sämtlich* wieder gleich $e^x$.

**Aufgabe 6.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = a^x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = a^x \,.\, \ln a, \quad f''(x) = a^x \,.\, (\ln a)^2, \ldots f^{(n)}(x) = a^x \,.\, (\ln a)^n.$$

Für $a = e$ geht diese Aufgabe in die vorhergehende über.

**Aufgabe 7.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \ln x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$f''(x) = -1 \,.\, x^{-2},$$

$$f'''(x) = +1 \,.\, 2 \,.\, x^{-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \,.\, (n-1)!\, x^{-n}.$$

Die Richtigkeit der letzten Formel wird durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ bewiesen.

**Aufgabe 8.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \sin x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$f^{(4)}(x) = +\sin x = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) = f(x).$$

Durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ findet man, daß ganz allgemein

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Aufgabe 9.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \cos x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = +\sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$f^{(4)}(x) = +\cos x = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) = f(x),$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Aufgabe 10.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \mathfrak{Sin}\, x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = \mathfrak{Cof}\, x, \quad f''(x) = \mathfrak{Sin}\, x, \quad f'''(x) = \mathfrak{Cof}\, x, \ldots$$
$$f^{(2n)}(x) = \mathfrak{Sin}\, x, \quad f^{(2n+1)}(x) = \mathfrak{Cof}\, x.$$

**Aufgabe 11.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \mathfrak{Cof}\, x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = \mathfrak{Sin}\, x, \quad f''(x) = \mathfrak{Cof}\, x, \quad f'''(x) = \mathfrak{Sin}\, x, \ldots$$
$$f^{(2n)}(x) = \mathfrak{Cof}\, x, \quad f^{(2n+1)}(x) = \mathfrak{Sin}\, x.$$

**Aufgabe 12.** Man soll die höheren Ableitungen von

$$f(x) = e^x \sin x$$

bilden.

**Auflösung.**

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(x) = \sqrt{2}\, e^x\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\, e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

$$f'''(x) = 2\, e^x\left[\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right),$$

.......................................................................

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

**Aufgabe 13.** Es sei $u = f(x)$, $v = g(x)$; man soll die höheren Ableitungen von

$$y = F(x) = u \pm v = f(x) \pm g(x)$$

bilden.

**Auflösung.** Aus den Formeln Nr. 20 und 21 der Tabelle, nämlich aus

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

folgt durch wiederholte Differentiation

$$\frac{d^n(u \pm v)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} \pm \frac{d^n v}{dx^n}.$$

**Beispiel.** Es ist

$$F(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} = (x + 1)^{-1} - (x + 2)^{-1},$$

folglich

$$F'(x) = -(x + 1)^{-2} + (x + 2)^{-2} = -\frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 2)^2},$$

$$F^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x + 1)^{-n-1} - (-1)^n n!\,(x + 2)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n n!\,\frac{(x + 2)^{n+1} - (x + 1)^{n+1}}{(x^2 + 3x + 2)^{n+1}}.$$

**Aufgabe 14.** Es sei wieder $u = f(x)$, $v = g(x)$; man soll die höheren Ableitungen von

$$y = F(x) = uv = f(x) \,.\, g(x)$$

bilden.

**Auflösung.** Nach Formel Nr. 29 der Tabelle ist

$$F'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

folglich wird

$$F''(x) = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x),$$

$$F'''(x) = f(x)g'''(x) + 3f'(x)g''(x) + 3f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$F^{(n)}(x) = f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}f'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}f''(x)g^{(n-2)}(x)$$
$$+ \cdots + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x) + f^{(n)}(x)g(x).$$

Die Richtigkeit dieser letzten Formel wird durch den Schluß von $n$ auf $n+1$ bewiesen.

V. Abschnitt.

# Herleitung und Anwendungen der *Taylor*schen und der *Mac-Laurin*schen Reihe.

§ 33.

## Entwickelung der ganzen rationalen Funktion $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von $h$.

Ehe die *Taylor*sche Reihe in ihrer allgemeinen Form hergeleitet wird, möge ein besonderer Fall behandelt werden, welcher dazu dienen soll, die später angewendeten Methoden zu erläutern.

Es sei

$$f(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \tag{1.}$$

also, wenn man mit $h$ eine beliebige zweite Veränderliche bezeichnet,

$$f(x+h) = a(x+h)^4 + a_1(x+h)^3 + a_2(x+h)^2 + a_3(x+h) + a_4, \tag{2.}$$

dann folgt aus Gleichung (2.) durch Auflösung der Klammern und durch Vereinigung aller Glieder, die mit gleichen Potenzen von $h$ multipliziert sind,

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & (ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) \\ & + (4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3)h \\ & + (6ax^2 + 3a_1x + a_2)h^2 \\ & + (4ax + a_1)h^3 \\ & + ah^4. \end{aligned} \tag{3.}$$

Dieses Resultat hätte man schneller auf folgendem Wege finden können.

Man weiß, $f(x+h)$ läßt sich auf die Form

$$f(x+h) = F(x) + F_1(x) \,.\, h + F_2(x) \,.\, h^2 + F_3(x) \,.\, h^3 + F_4(x) \,.\, h^4 \tag{4.}$$

bringen, wobei die Koeffizienten $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ Funktionen von $x$ sind. Um diese zu bestimmen, betrachte man $h$ als einzige Veränderliche und differentiiere beide Seiten der Gleichung (4.) nach dieser Veränderlichen $h$.

Nach Formel Nr. 36 der Tabelle wird

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

oder, wenn man die unabhängige Veränderliche mit $h$ bezeichnet,

$$\frac{df(u)}{dh} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dh} = f'(u) \cdot \frac{du}{dh}.$$

Betrachtet man für den vorliegenden Fall $x$ als eine Konstante und setzt

$$u = x + h, \quad \text{also} \quad \frac{du}{dh} = 1,$$

so findet man, daß

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \frac{df(x+h)}{d(x+h)} \cdot \frac{d(x+h)}{dh} = f'(x+h) \tag{5.}$$

ist. Man erhält daher

$$f'(x+h) = 1 \,.\, F_1(x) + 2F_2(x) \,.\, h + 3F_3(x) \,.\, h^2 + 4F_4(x) \,.\, h^3, \tag{6.}$$

und hieraus durch wiederholte Differentiation

$$f''(x+h) = 1 \,.\, 2F_2(x) + 2 \,.\, 3F_3(x) \,.\, h + 3 \,.\, 4F_4(x) \,.\, h^2, \tag{7.}$$

$$f'''(x+h) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3F_3(x) + 2 \,.\, 3 \,.\, 4F_4(x) \,.\, h, \tag{8.}$$

$$f^{(4)}(x+h) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4F_4(x). \tag{9.}$$

Setzt man in den Gleichungen (4.) und (6.) bis (9.) die Veränderliche $h$ gleich 0, so findet man

$$f(x) = F(x), \qquad \text{oder } F(x) = f(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a$$

$$f'(x) = 1 \,.\, F_1(x), \qquad \text{„ } F_1(x) = \frac{f'(x)}{1!} = 4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$

$$f''(x) = 1 \,.\, 2F_2(x), \qquad \text{„ } F_2(x) = \frac{f''(x)}{2!} = 6ax^2 + 3a_1x + a_2,$$

$$f'''(x) = 1.2.3F_3(x), \quad \text{„ } F_3(x) = \frac{f'''(x)}{3!} = 4ax + a_1,$$

$$f^{(4)}(x) = 1.2.3.4F_4(x), \text{ „ } F_4(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!} = a.$$

Setzt man diese Werte von $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ in die Gleichung (4.) ein, so erhält man in der Tat genau dasselbe Resultat wie in Gleichung (3.).

Es wird also

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4. \tag{3a.}$$

Diese Entwickelungs-Methode, welche hier nur für eine ganze rationale Funktion 4ten Grades ausgeführt wurde, läßt sich ohne weiteres auf *jede ganze rationale* Funktion übertragen. Es sei jetzt also ganz allgemein

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{10.}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} f(x+h) = a(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + a_2(x+h)^{n-2} + \cdots \\ + a_{n-1}(x+h) + a_n; \end{aligned} \tag{11.}$$

dann weiß man, daß sich $f(x+h)$ durch Auflösung der Klammern und durch Vereinigung aller Glieder, welche mit derselben Potenz von $h$ multipliziert sind, auf die Form

$$\begin{aligned} f(x+h) = F(x) + F_1(x).h + F_2(x).h^2 + F_3(x).h^3 + F_4(x).h^4 + \cdots \\ + F_{n-1}(x).h^{n-1} + F_n(x).h^n \end{aligned} \tag{12.}$$

bringen läßt, wobei die Koeffizienten

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x), \ldots F_{n-1}(x),\ F_n(x)$$

noch Funktionen von $x$ sind. Um diese zu bestimmen, betrachte man wieder $h$ als einzige Veränderliche und differentiiere beide Seiten der Gleichung (12.) zu wiederholten Malen nach $h$. Dadurch erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} f'(x+h) &= 1.F_1(x) + 2F_2(x).h + 3F_3(x).h^2 + 4F_4(x).h^3 \\ &\quad + \cdots + (n-1)F_{n-1}(x).h^{n-2} + nF_n(x).h^{n-1}, \\ f''(x+h) &= 1.2F_2(x) + 2.3F_3(x).h + 3.4F_4(x).h^2 \\ &\quad + \cdots + (n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-3} + (n-1)nF_n(x).h^{n-2}, \\ f'''(x+h) &= 1.2.3F_3(x) + 2.3.4F_4(x).h + \cdots \\ &\quad + (n-3)(n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-4} + (n-2)(n-1)nF_n(x).h^{n-3}, \\ f^{(4)}(x+h) &= 1.2.3.4F_4(x) + \cdots \\ &\quad + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-5} \\ &\quad + (n-3)(n-2)(n-1)nF_n(x)h^{n-4}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n-1)}(x+h) &= 1.2.3\ldots(n-1)F_{n-1}(x) + 2.3.4\ldots(n-1)nF_n(x).h, \\ f^{(n)}(x+h) &= 1.2.3\ldots(n-1)nF_n(x). \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

Setzt man jetzt in den Gleichungen (12.) und (13.) die Veränderliche $h$ gleich 0, so findet man

$$(14.)\quad \begin{cases} f(x) = F(x), & \text{oder}\quad F(x) = f(x), \\ f'(x) = 1\,.\,F_1(x), & ,,\quad F_1(x) = \dfrac{f'(x)}{1!}, \\ f''(x) = 1\,.\,2F_2(x), & ,,\quad F_2(x) = \dfrac{f''(x)}{2!}, \\ f'''(x) = 1\,.\,2\,.\,3F_3(x), & ,,\quad F_3(x) = \dfrac{f'''(x)}{3!}, \\ f^{(4)}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4F_4(x), & ,,\quad F_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(x)}{4!}, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x) = (n-1)!\,F_{n-1}(x), & ,,\quad F_{n-1}(x) = \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}, \\ f^{(n)}(x) = n!\,F_n(x), & ,,\quad F_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}. \end{cases}$$

Die Gleichung (12.) geht daher über in

$$(15.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch auf folgendem Wege. Nach Gleichung (5.) wird

$$\frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

In derselben Weise findet man, indem man $h$ mit $x$ vertauscht,

$$\frac{df(x+h)}{dx} = f'(x+h),$$

folglich ist

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

Man wird also miteinander übereinstimmende Ausdrücke erhalten, gleichviel ob man die rechte Seite von Gleichung (12.) nach $x$ oder nach $h$ differentiiert. Dies gibt

$$(16.)\quad F'(x) + F'_1(x)\,.\,h + F'_2(x)\,.\,h^2 + F'_3(x)\,.\,h^3 + \cdots$$
$$+ F'_{n-1}(x)\,.\,h^{n-1} + F'_n(x)\,.\,h^n =$$
$$1\,.\,F_1(x) + 2F_2(x)\,.\,h + 3F_3(x)h^2 + 4F_4(x)h^3 + \cdots + nF_n(x)\,.\,h^{n-1}.$$

Für $h = 0$ findet man aus Gleichung (12.)

$$(17.)\qquad F(x) = f(x)$$

und aus Gleichung (16.)

$$(18.)\quad F'(x) = 1\,.\,F_1(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \text{oder} \quad F_1(x) = \frac{f'(x)}{1!}\,.$$

Wenn man jetzt in Gleichung (16.) $F'(x)$ gegen $1\,.\,F_1(x)$ forthebt und beide Seiten der Gleichung durch $h$ dividiert, so erhält man

$$(16\text{a.})\quad F'_1(x) + F'_2(x)\,.\,h + F'_2(x)\,.\,h^2 + \cdots$$
$$+ F'_{n-1}(x)\,.\,h^{n-2} + F'_n(x)\,.\,h^{n-1} =$$
$$2F_2(x) + 3F_3(x)\,.\,h + 4F_4(x)\,.\,h^2 + \cdots + nF_n(x)\,.\,h^{n-2}.$$

Hieraus folgt, wenn man wieder $h = 0$ setzt,

$$F'_1(x) = 2F_2(x) = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x), \quad \text{oder} \quad F_2(x) = \frac{f''(x)}{2!}\,.$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, findet man der Reihe nach die Gleichungen

$$F'_2(x) = 3F_3(x), \quad \text{oder} \quad F_3(x) = \frac{f'''(x)}{3!},$$
$$F'_3(x) = 4F_4(x), \quad \text{„} \quad F_4(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F'_{n-1}(x) = nF_n(x), \quad \text{„} \quad F_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,.$$

§ 34.

## Anwendung auf den binomischen Lehrsatz für positive, ganzzahlige Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 11.)

Wie wichtig die oben angegebene Entwickelung ist, kann man schon aus einem sehr einfachen Falle ersehen. Es sei nämlich

$$f(x) = x^n, \tag{1.}$$

also

$$f(x+h) = (x+h)^n, \tag{2.}$$

wobei $n$ eine positive, ganze Zahl sein soll. Nun ist nach Gleichung (15.) des vorhergehenden Paragraphen

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n. \tag{3.}$$

In diesem Falle ist aber

$$f(x) = x^n,\quad f'(x) = nx^{n-1},\quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \ldots f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 3.2.1 = n!$$

folglich geht Gleichung (3.) über in

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}h^n \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \cdots + h^n.\end{aligned} \tag{4.}$$

Setzt man noch

$$x = a,\quad h = b,\quad n = m,$$

so erhält man den binomischen Lehrsatz, nämlich

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots + b^m \tag{5.}$$

eine Formel, welche schon in § 9, aber auf andere Weise, hergeleitet worden ist.

§ 35.

## Verallgemeinerung der gegebenen Entwickelungs-Methode.

Es ist nun die Frage, ob und in welcher Weise die hergeleitete Entwickelung einer *ganzen rationalen* Funktion $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von $h$ auch auf andere Funktionen übertragen werden kann.

Ohne jede Änderung ist eine solche Übertragung nicht möglich, denn es gilt der Satz: *Ist*

$$(1.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

*so ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades.*

**Beweis.** Aus Gleichung (1.) folgt für $x = 0$

$$f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n$$

$$= A + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots + A_n h^n,$$

oder, wenn man $h = x$ setzt,

$$(2.)\quad f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n.$$

Und doch liegt eine solche Verallgemeinerung sehr nahe, denn man kann dieselben Schlüsse, welche in § 33 richtig waren, auch bei jeder anderen Funktion $f(x+h)$ anwenden, von der man weiß, daß sie sich nach steigenden Potenzen von $h$ entwickeln läßt, daß sie sich also auf die Form

$$(3.)\quad f(x+h) = F(x) + F_1(x).h + F_2(x).h^2 + F_3(x).h^3 + F_4(x).h^4 + \cdots$$

bringen läßt. Man findet dann nämlich, indem man beide Seiten der Gleichung (3.) zu wiederholten Malen nach $h$ differentiiert*), der Reihe nach die Gleichungen

---

*) Dabei ist allerdings die Voraussetzung gemacht, daß die Summe auf der rechten Seite differentiiert wird, indem man jedes Glied einzeln differentiiert. Enthielte die Summe nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern, so wäre diese Voraussetzung ohne weiteres richtig, enthält die Summe aber unendlich viele Glieder, so muß man erst beweisen, daß diese Voraussetzung gilt.

$$(4.)\quad \begin{cases} f'(x+h) = 1.F_1(x) + 2F_2(x).h + 3F_3(x).h^2 + 4F_4(x).h^3 + \cdots, \\ f''(x+h) = 1.2F_2(x) + 2.3F_3(x).h + 3.4F_4(x)h^2 + \cdots, \\ f'''(x+h) = 1.2.3F_3(x) + 2.3.4F_4(x)h + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man dann in den Gleichungen (3.) und (4.) die Veränderliche $h$ gleich 0, so findet man genau so wie damals

$$(5.)\quad F(x) = f(x),\ F_1(x) = \frac{f'(x)}{1!},\ F_2(x) = \frac{f''(x)}{2!},\ F_3(x) = \frac{f'''(x)}{3!}, \ldots,$$

so daß Gleichung (3.) übergeht in

$$(6.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \cdots.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze ist es aber nicht möglich, daß diese Reihe an einer Stelle, z. B. beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede, abbricht; sie kann nur, wie gezeigt werden soll, unter gewissen Bedingungen richtig sein, wenn man sie bis ins Unendliche fortsetzt.

Da $f(x+h)$ von

$$f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

verschieden ist, wenn $f(x)$ keine *ganze rationale* Funktion ist, so möge der Unterschied zwischen beiden Größen mit $R$ bezeichnet werden. Es sei also $R$ erklärt durch die Gleichung

$$(7.)\quad R = f(x+h) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h - \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

oder

$$(7\text{a.})\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R.$$

Wird nun $R$ für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein, so darf man $R$ vernachlässigen, so daß dann die Gleichung (7 a.) auch noch in dem Falle, wo $f(x)$ keine ganze rationale Funktion ist, sehr brauchbare Resultate liefert.

Man nennt die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (7 a.) die *Taylor*sche Reihe und $R$ das „*Restglied der Taylorschen Reihe*".

Wie notwendig die Untersuchung dieses Restgliedes $R$ ist, soll zunächst bei einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \tag{8.}$$

also

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h} \tag{9.}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) = -1 \,.\, x^{-2}, & f''(x) = 1 \,.\, 2x^{-3}, \\ f'''(x) = -1 \,.\, 2 \,.\, 3x^{-4}, \ldots & f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-n-1}. \end{array} \right. \tag{10.}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (7a.) ein, so erhält man

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} + - \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}} + R. \tag{11.}$$

Für $x = 2$, $h = -1$ gibt dies z. B.

$$\frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + R.$$

Hier wird, wie man ohne weiteres erkennt,

$$R = \frac{1}{2^{n+1}},$$

also beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$.

In diesem Falle würde daher die *Taylor*sche Reihe anwendbar sein. Setzt man aber

$$x = 2, \quad h = -4,$$

so findet man aus Gleichung (11.)

$$\frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + R.$$

Jetzt ist

$$R = -2^n$$

und wird, vom Vorzeichen abgesehen, sogar beliebig groß, wenn $n$ hinreichend groß ist. Man darf also $R$ *nicht* vernachlässigen, d. h. man darf in diesem Falle die Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe *nicht* anwenden.

Man kann in dem vorliegenden Beispiele das Restglied $R$ auch für beliebige Werte von $x$ und $h$ sehr leicht bestimmen. Aus Gleichung (11.) folgt nämlich

$$(12.)\quad R = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} + \frac{h}{x^2} - \frac{h^2}{x^3} + \frac{h^3}{x^4} - + \cdots - (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{-h}{x} + \left(\frac{-h}{x}\right)^2 + \left(\frac{-h}{x}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{-h}{x}\right)^n\right]$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine geometrische Progression, deren Summe man nach Formel Nr. 12 der Tabelle bilden kann. Da nämlich

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

so erhält man in diesem Falle, in welchem $q$ gleich $-\frac{h}{x}$ ist,

$$(13.)\quad \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{1 + \frac{h}{x}} = x\,\frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h}.$$

Daraus folgt

$$(14.)\quad R = \frac{1}{x+h} - \frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h} = \frac{\left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h}.$$

Nun wird nach früheren Sätzen (vergl. § 9) die Potenz eines *echten* Bruches *beliebig klein* und die eines unechten Bruches *beliebig groß*, wenn man den Exponenten hinreichend groß macht, folglich wird hier $R$ nur dann *beliebig klein*, wenn, abgesehen vom Vorzeichen, $h$ kleiner als $x$ ist.

Bei diesem Beispiele wird also die *Taylor*sche Reihe nur anwendbar sein, wenn

$$|h| < |x|,$$

wobei man unter $|h|$ und $|x|$ die *absoluten Beträge* (d. h. die Zahlenwerte, abgesehen vom Vorzeichen) von $h$ und $x$ versteht.

So leicht wie in diesem Beispiele ist im allgemeinen die Berechnung des Restgliedes $R$ nicht ausführbar. Man braucht aber den wirklichen Wert von $R$ auch gar nicht, sondern braucht nur zu wissen, ob $R$ für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein wird.

Diese Untersuchung soll nun in den folgenden Paragraphen ausgeführt werden.

## § 36.

## Mittelwertsatz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 87.)

**Satz 1.** *Sind die Funktionen* $F(x)$ *und* $F'(x)$ *in dem Intervalle von* 0 *bis* $h$ (d. h. für alle Werte von $x$, welche zwischen 0 und $h$ liegen) *stetig und endlich, und ist außerdem*

$$F(0) = 0 \quad \textit{und} \quad F(h) = 0, \tag{1.}$$

*so gibt es zwischen* 0 *und* $h$ *mindestens einen Wert von* $x$, *für welchen* $F'(x)$ *verschwindet.* (Satz von *Rolle.*)

**Beweis.** Nach Satz 2 in § 13 ist die Ableitung einer Funktion $F(x)$ *positiv*, wenn die Funktion mit $x$ zugleich zunimmt; dagegen ist die Ableitung *negativ*, wenn die Funktion abnimmt, während $x$ zunimmt. Der Gleichung

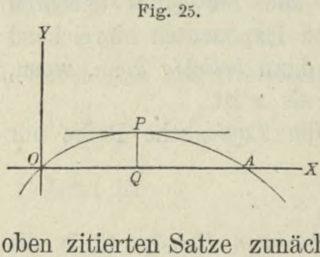
$$y = F(x) \tag{2.}$$

entspricht nach Voraussetzung eine Kurve, welche die Abszissen-Achse in den Punkten $O$ und $A$ mit den Abszissen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = h$$

schneidet. (Fig. 25 und 26.)

Fig. 25.




Nimmt man an, daß der zwischen $O$ und $A$ liegende Teil der Kurve *oberhalb* der $X$-Achse verläuft (Fig. 25), so muß die Kurve, vom Punkte $O$ ausgehend, zunächst *steigen*, es muß also nach dem oben zitierten Satze zunächst $F'(x) > 0$ sein. Damit die Kurve die $X$-Achse im Punkte $A$ wieder erreicht, muß sie nachher *fallen*, es muß also nachher $F'(x) < 0$ sein. Da aber $F'(x)$ in dem betrachteten Intervalle nach Voraussetzung stetig und endlich ist, so muß $F'(x)$ nach Satz 13 in § 8 (Seite 57) beim

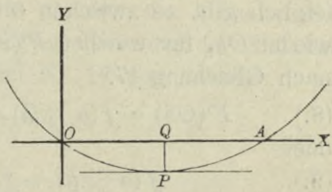
Übergange von positiven zu negativen Werten den Wert 0 annehmen. Dies geschehe für $OQ$ gleich $\xi$, dann ist

$$(3.)\qquad F'(\xi) = 0, \quad \text{wobei} \quad 0 < \xi < h.$$

Die Tangente in dem zugehörigen Punkte $P$ ist also parallel zur $X$-Achse.

Nimmt man an, der zwischen $O$ und $A$ liegende Teil der Kurve verlaufe *unterhalb* der $X$-Achse (Fig. 26), so muß die Kurve zuerst *fallen* und nachher wieder bis zum Punkte $A$ *steigen*. Dann wird also $F'(x)$ zuerst *negative* und nachher *positive* Werte annehmen. Beim Übergange von den negativen zu den positiven Werten wird $F'(x)$ wieder nach Satz 13 in § 8 (Seite 57) gleich 0. Dies geschehe für $OQ$ gleich $\xi$, dann ist also auch in diesem Falle

Fig. 26.




$$(3a.)\qquad F'(\xi) = 0, \quad \text{wobei} \quad 0 < \xi < h.$$

Die Tangente im zugehörigen Punkte $P$ ist wieder parallel zur $X$-Achse.

Liegt endlich der Kurvenbogen $OA$ zum Teil *über*, zum Teil *unter* der $X$-Achse, so braucht man nur den eben ausgeführten Schluß auf den Abschnitt der Kurve zwischen $O$ und dem ersten Schnittpunkte mit der $X$-Achse anzuwenden.

Setzt man

$$(4.)\qquad \Theta = \frac{\xi}{h}, \quad \text{also} \quad \xi = \Theta h,$$

so liegt die Größe $\Theta$ zwischen 0 und 1, und die Gleichung (3.) geht über in

$$(5.)\qquad F'(\Theta h) = 0, \quad \text{wobei} \quad 0 < \Theta < 1.$$

Der *Rolle*sche Satz läßt sich jetzt in folgender Weise verallgemeinern.

Die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ seien in dem Intervalle von $a$ bis $a + h$ stetig und endlich, und es sei

(6.) $F(x) = [f(a+h) - f(a)]x - [f(a+x) - f(a)]h$,*)

dann gelten für die Funktionen $F(x)$ und

(7.) $F'(x) = f(a+h) - f(a) - f'(a+x) \,.\, h$

die Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes; es sind nämlich $F(x)$ und $F'(x)$ in dem Intervalle von 0 bis $h$ stetig und endlich, und es ist außerdem

$$F(0) = 0 \quad \text{und} \quad F(h) = 0,$$

folglich gibt es zwischen 0 und $h$ einen Wert von $x$, er heiße wieder $\Theta h$, für welchen $F'(x)$ verschwindet. Deshalb findet man nach Gleichung (7.)

(8.) $F'(\Theta h) = f(a+h) - f(a) - f'(a+\Theta h) \,.\, h = 0$,

oder

(9.) $f(a+h) - f(a) = h \,.\, f'(a+\Theta h)$.

Setzt man noch

(10.) $a + h = x$, also $h = x - a$,

so findet man aus Gleichung (9.)

(11.) $f(x) - f(a) = (x-a)f'[a + \Theta(x-a)]$,

oder

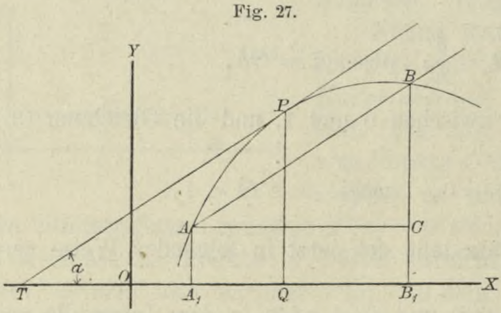
(11a.) $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'[a + \Theta(x-a)]$.

Da $0 < \Theta < 1$, so wird für $x > a$

(12.) $a < a + \Theta(x-a) < a + (x-a) = x$;

es ist also $a + \Theta(x-a)$ ein *Mittelwert*. Der in den Gleichungen (9.) und (11.) ausgesprochene Satz wird deshalb „*Mittelwertsatz*" genannt.

Fig. 27.




Die geometrische Deutung des Mittelwertsatzes erkennt man leicht aus Figur 27. Der Gleichung

*) Den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = F(x)$ entsprechen natürlich zwei verschiedene Kurven.

(13.) $$y = f(x)$$

entspreche die Kurve $APB$; die Abszissen der Punkte $A$, $P$ und $B$ seien bezw.

$$OA_1 = a, \quad OQ = a + \Theta h, \quad OB_1 = a + h,$$

dann haben diese Punkte bezw. die Ordinaten

$$A_1A = f(a), \quad QP = f(a + \Theta h), \quad B_1B = f(a + h).$$

Für die Tangente des Winkels $\alpha$, den die geometrische Tangente im Punkte $P$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, erhält man dann nach Formel Nr. 17 der Tabelle

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(a + \Theta h),$$

oder nach Gleichung (9.)

(14.) $$\operatorname{tg}\alpha = f'(a + \Theta h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{B_1B - A_1A}{OB_1 - OA_1}$$
$$= \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} CAB,$$

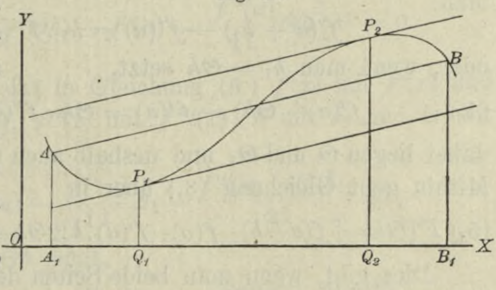
also

$$\sphericalangle\, CAB = \alpha,$$

d. h. die Tangente im Punkte $P$ ist parallel zur Sehne $AB$.

Der soeben bewiesene Satz sagt also aus, daß es zwischen den Kurvenpunkten $A$ und $B$ mindestens einen Punkt $P$ gibt, dessen Tangente zur Sehne $AB$ parallel ist.

Fig. 28.




Aus Figur 28 erkennt man, daß es unter Umständen sogar mehrere Kurvenpunkte $P_1, P_2, \ldots$ zwischen $A$ und $B$ geben kann, in denen die Tangente parallel zur Sehne $AB$ wird.

Der Satz bleibt auch noch richtig für $x < a$, wie man in gleicher Weise zeigen kann.

## § 37.
## Das Restglied der *Taylor*schen Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 88 und 89.)

Jetzt seien die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $a+h$ stetig und endlich, und es sei

$$(1.)\qquad F(x) = [f(a+h) - f(a) - f'(a)\,.\,h]x^2 \\ - [f(a+x) - f(a) - f'(a)\,.\,x]h^2,$$

dann sind auch die Funktionen $F(x)$ und

$$(2.)\; F'(x) = [f(a+h) - f(a) - f'(a)\,.\,h]2x - [f'(a+x) - f'(a)]h^2$$

stetig und endlich in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = h$. Dabei wird

$$F(0) = 0 \quad \text{und} \quad F(h) = 0,$$

folglich erhält man nach dem *Rolle*schen Satze

$$(3.)\; F'(\Theta h) = \\ [f(a+h) - f(a) - f'(a)\,.\,h]2\Theta h - [f'(a+\Theta h) - f'(a)]h^2 = 0.$$

Nun war nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Mittelwertsatze

$$f(a+h) - f(a) = h\,.\,f'(a+\Theta h).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung $f(x)$ mit $f'(x)$ und deshalb $f'(x)$ mit $f''(x)$, ferner $h$ mit $h_1$ und $\Theta$ mit $\Theta_1$, so erhält man

$$f'(a+h_1) - f'(a) = h_1\,.\,f''(a+\Theta_1 h_1),$$

oder, wenn man $h_1 = \Theta h$ setzt,

$$(4.)\qquad f'(a+\Theta h) - f'(a) = \Theta h\,.\,f''(a+\Theta_1\,.\,\Theta h);$$

dabei liegen $\Theta$ und $\Theta_1$ und deshalb auch $\Theta\Theta_1$ zwischen 0 und 1. Mithin geht Gleichung (3.) über in

$$(5.)\; F'(\Theta h) = [f(a+h) - f(a) - f'(a)\,.\,h]2\Theta h - \Theta h\,.\,f''(a+\Theta\Theta_1 h)h^2 = 0.$$

Dies gibt, wenn man beide Seiten der Gleichung durch $2\Theta h$ dividiert und der Kürze wegen $\Theta$ statt $\Theta\Theta_1$ schreibt,

$$(6.)\qquad f(a+h) - f(a) - f'(a)\,.\,h - \frac{f''(a+\Theta h)}{2!}h^2 = 0,$$

oder

$$(6a.)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a+\Theta h)}{2!}h^2,$$

wobei

$$0<\Theta<+1.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, indem man

$$(7.)\qquad F(x)=\left[f(a+h)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}h-\frac{f''(a)}{2!}h^2\right]x^3$$
$$-\left[f(a+x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}x-\frac{f''(a)}{2!}x^2\right]h^3$$

setzt. Dabei seien die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $a+h$ endlich und stetig, dann sind auch $F(x)$ und

$$(8.)\qquad F'(x)=\left[f(a+h)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}h-\frac{f''(a)}{2!}h^2\right]3x^2$$
$$-\left[f'(a+x)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}x\right]h^3$$

in dem Intervalle von 0 bis $h$ stetig und endlich. Jetzt wird wieder

$$F(0)=0 \quad \text{und} \quad F(h)=0,$$

folglich erhält man nach dem *Rolle* schen Satze

$$(9.)\qquad F'(\Theta h)=\left[f(a+h)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}h-\frac{f''(a)}{2!}h^2\right]3\Theta^2h^2$$
$$-\left[f'(a+\Theta h)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}\Theta h\right]h^3=0.$$

Vertauscht man jetzt in Gleichung (6.) $f(x)$ mit $f'(x)$ und deshalb $f'(x)$ mit $f''(x)$, $f''(x)$ mit $f'''(x)$, $h$ mit $h_1$ und $\Theta$ mit $\Theta_1$, so erhält man

$$f'(a+h_1)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}h_1=\frac{f'''(a+\Theta_1 h_1)}{2!}h_1^2,$$

oder, wenn man $h_1=\Theta h$ setzt,

$$(10.)\quad f'(a+\Theta h)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}\Theta h=\frac{f'''(a+\Theta_1\Theta h)}{2!}\Theta^2h^2,$$

wobei $\Theta$ und $\Theta_1$ und deshalb auch $\Theta_1\Theta$ zwischen 0 und 1 liegen. Gleichung (9.) geht daher über in

$$(11.)\quad F'(\Theta h) = \left[f(a+h) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h - \frac{f''(a)}{2!}h^2\right]3\Theta^2 h^2$$
$$- \frac{f'''(a+\Theta_1\Theta h)}{2!}\Theta^2 h^2 . h^3 = 0.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $3\Theta^2 h^2$ und schreibt der Kürze wegen $\Theta$ statt $\Theta_1\Theta$, so erhält man

$$(12.)\quad f(a+h) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h - \frac{f''(a)}{2!}h^2 - \frac{f'''(a+\Theta h)}{3!}h^3 = 0,$$

oder

$$(12a.)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a+\Theta h)}{3!}h^3,$$

wobei

$$0 < \Theta < h.$$

Setzt man das Verfahren noch weiter fort, so findet man schließlich für jeden beliebigen Wert von $n$

$$(13.)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R,$$

wobei

$$(14.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},\quad 0 < \Theta < 1.$$

Der Beweis wird durch den Schluß von $m$ auf $m+1$ geführt. Man setzt also voraus, daß die Gleichungen (13.) und (14.) richtig seien für $n$ gleich $m$, daß also

$$(15.)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}h^m$$
$$+ \frac{f^{(m+1)}(a+\Theta h)}{(m+1)!}h^{m+1}$$

sei, und zeigt, daß dann die Gleichungen (13.) und (14.) auch noch richtig bleiben für $n$ gleich $m+1$.

**Beweis.** Es sei

$$(16.)\quad F(x) = \left[f(a+h) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}h^{m+1}\right]x^{m+2}$$
$$- \left[f(a+x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}x - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}x^{m+1}\right]h^{m+2},$$

so wird

(17.) $F'(x)$

$$= \left[f(a+h) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}h^{m+1}\right](m+2)x^{m+1}$$

$$- \left[f'(a+x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}x - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}x^m\right]h^{m+2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(m+1)}(x)$ und $f^{(m+2)}(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $a+h$ stetig und endlich sind, sind auch die Funktionen $F(x)$ und $F'(x)$ in dem Intervalle von 0 bis $h$ stetig und endlich. Da außerdem noch

$$F(0) = 0 \quad \text{und} \quad F(h) = 0$$

wird, so erhält man nach dem *Rolle*schen Satze

(18.) $F'(\Theta h)$

$$= \left[f(a+h) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}h^{m+1}\right](m+2)\Theta^{m+1}h^{m+1}$$

$$- \left[f'(a+\Theta h) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}\Theta h - \cdots - \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}\Theta^m h^m\right]h^{m+2} = 0.$$

Vertauscht man jetzt in Gleichung (15.) $f(x)$ mit $f'(x)$ und deshalb $f'(x)$ mit $f''(x)$, $f''(x)$ mit $f'''(x)$, $\ldots f^{(m)}(x)$ mit $f^{(m+1)}(x)$ und $f^{(m+1)}(x)$ mit $f^{(m+2)}(x)$, ferner $h$ mit $h_1$ und $\Theta$ mit $\Theta_1$, so erhält man

$$f'(a+h_1) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}h_1 + \frac{f'''(a)}{2!}h_1^2 + \cdots + \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}h_1^m$$
$$+ \frac{f^{(m+2)}(a+\Theta_1 h_1)}{(m+1)!}h_1^{m+1},$$

oder, wenn man $h_1 = \Theta h$ setzt,

(19.) $$f'(a+\Theta h) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}\Theta h - \frac{f'''(a)}{2!}\Theta^2 h^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}\Theta^m h^m = \frac{f^{(m+2)}(a+\Theta_1\Theta h)}{(m+1)!}\Theta^{m+1}h^{m+1},$$

wobei $\Theta$ und $\Theta_1$ und deshalb auch $\Theta_1\Theta$ zwischen 0 und 1 liegen. Gleichung (18.) geht daher über in

$$(20.)\quad F'(\Theta h) =$$
$$\left[f(a+h)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}h-\cdots-\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}h^{m+1}\right](m+2)\Theta^{m+1}h^{m+1}$$
$$-\frac{f^{(m+2)}(a+\Theta_1 \,.\, \Theta h)}{(m+1)!}\Theta^{m+1}h^{m+1} \,.\, h^{m+2}=0.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch
$$(m+2)\Theta^{m+1}h^{m+1}$$
und schreibt der Kürze wegen wieder $\Theta$ statt $\Theta_1 \,.\, \Theta$, so erhält man

$$(21.)\quad f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}h^{m+1}+R,$$

wobei

$$(22.)\qquad R=\frac{f^{(m+2)}(a+\Theta h)}{(m+2)!}h^{m+2}, \qquad 0<\Theta<1.$$

Diese Gleichungen ergeben sich aber aus den Gleichungen (13.) und (14.), wenn man $n$ gleich $m+1$ setzt. Damit ist die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (13.) und (14.) nachgewiesen.

Setzt man wieder
$$a+h=x, \quad \text{also} \quad h=x-a,$$
so gehen die Gleichungen (13.) und (14.) über in

$$(23.)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R,$$

wobei

$$(24.)\quad R=\frac{f^{(n+1)}[a+\Theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad 0<\Theta<1.$$

Diese Gleichungen geben an, in welcher Weise man $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ entwickeln kann. Es ist dies die eine Form der *Taylor*schen Reihe. Die andere Form der *Taylor*schen Reihe findet man aus den Gleichungen (13.) und (14.), indem man $a$ gleich $x$ setzt. Dies gibt

$$(25.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R,$$

wobei

$$(26.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad 0<\Theta<1.$$

*Diese Gleichungen geben an, in welcher Weise man $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von $h$ entwickeln kann.*

**Bemerkung.**

Um die Form des Restes $R$ leichter zu behalten, merke man sich, daß $R$ aus dem letzten Gliede $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$ entsteht, indem man $n$ mit $n+1$ und $x$ mit $x+\Theta h$ vertauscht.

Läßt sich nun zeigen, daß $R$ *beliebig klein* wird für *hinreichend große* Werte von $n$, so darf man $R$ für unbegrenzt wachsende Werte von $n$ vernachlässigen und schreiben

$$(23\text{a.})\quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots,$$

$$(25\text{a.})\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots,$$

wo die Punkte andeuten sollen, daß die Reihen bis ins Unendliche fortzusetzen sind.

## § 38.

## Die *Mac-Laurin*sche oder *Stirling*sche Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 90 und 90a.)

Die *Mac-Laurin*sche oder *Stirling*sche Reihe ist nur ein besonderer Fall der *Taylor*schen Reihe, den man erhält, indem man in den Gleichungen (23.) und (24.) des vorhergehenden Paragraphen $a$ gleich 0 setzt. Dies gibt

$$(1.)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R,$$

wobei

(2.) $$R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{und} \quad 0 \leqq \Theta \leqq +1$$

ist. Für $n = 0$ findet man hieraus

(3.) $$f(x) - f(0) = x \,.\, f'(\Theta x).$$

## § 39.

## Entwickelung der Funktionen $e^x$ und $a^x$ und der hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cof}\, u$ und $\mathfrak{Sin}\, u$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 91 bis 94.)

**Aufgabe 1.** Man soll die Funktion $e^x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Hier ist

(1.) $$\begin{cases} f(x) = e^x, & \text{also} \quad f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & \quad " \quad f'(0) = 1, \\ f''(x) = e^x, & \quad " \quad f''(0) = 1, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) = e^x, & \quad " \quad f^{(n)}(0) = 1, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, & \quad " \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die *Mac-Laurin*sche Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R$$

ein, so erhält man

(2.) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

(3.) $$R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}.$$

Bezeichnet man nun den absoluten Betrag von $x$ (d. h. den Wert von $x$, abgesehen vom Vorzeichen) mit $|x|$, und bestimmt die ganze Zahl $g$ so, daß sie der Ungleichung

$$g \leqq |x| < g + 1$$

genügt, so zerlege man $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ in die Faktoren

$$F_1 = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{g} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{x}{g+1} \cdot \frac{x}{g+2} \cdots \frac{x}{n+1}.$$

Es ist dann, wenn man vorläufig voraussetzt, daß $x$ positiv ist,

$$\frac{x}{g+1} = k \tag{4.}$$

ein echter Bruch, und es wird

$$\frac{x}{g+2} < k, \quad \frac{x}{g+3} < k, \cdots \frac{x}{n+1} < k.$$

Daraus folgt

$$F_2 = \frac{x}{g+1} \cdot \frac{x}{g+2} \cdot \frac{x}{g+3} \cdots \frac{x}{n+1} < k^{n+1-g},$$

$$R = F_1 \,.\, F_2 \,.\, F_3, \quad \text{wobei} \quad F_3 = e^{\Theta x} \tag{5.}$$

ist. Die Faktoren

$$F_1 = \frac{x^g}{g!} \quad \text{und} \quad F_3 = e^{\Theta x}$$

sind *endliche* Größen, während man $k^{n+1-g}$ und folglich erst recht den Faktor $F_2$ beliebig klein machen kann, indem man den Exponenten $n+1-g$ hinreichend groß macht; deshalb wird auch $R$ beliebig klein für hinreichend großes $n$.

Vertauscht man $x$ mit $-x$, so ändert der Faktor $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ höchstens sein Vorzeichen, und $F_3 = e^{\Theta x}$ geht über in $e^{-\Theta x} = \frac{1}{e^{\Theta x}}$, bleibt also eine *endliche Größe*. Deshalb wird $R$ auch dann beliebig klein für hinreichend großes $n$, wenn $x$ einen negativen Wert hat.

Man kann daher in allen Fällen das Restglied bei dieser Entwickelung vernachlässigen, wenn man die Reihe bis ins Unendliche fortsetzt, und erhält

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{6.}$$

Für $x = 1$ stimmt diese Gleichung mit Formel Nr. 15 der Tabelle überein.

Hieraus findet man auch sogleich die Entwickelung der hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cof}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,u$ nach steigenden Potenzen von $u$. Nach Gleichung (6.) ist nämlich

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots. \tag{7.}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung $u$ mit $-u$, so erhält man

$$e^{-u} = 1 - \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^5}{5!} + - \cdots; \tag{8.}$$

folglich ist

$$\mathfrak{Cof}\,u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \cdots, \tag{9.}$$

$$\mathfrak{Sin}\,u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots. \tag{10.}$$

Diese Formeln könnte man natürlich auch direkt finden, indem man für die Funktionen

$$f(x) = \mathfrak{Cof}\,x \quad \text{und} \quad f(x) = \mathfrak{Sin}\,x$$

die Entwickelung nach steigenden Potenzen von $x$ mit Hülfe der *Mac-Laurin*schen Reihe ausführte.

**Aufgabe 2.** Man soll die Funktion $a^x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Hier ist

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) = a^x, & \text{also} & f(0) = 1, \\ f'(x) = a^x \ln a, & „ & f'(0) = \ln a, \\ f''(x) = a^x (\ln a)^2, & „ & f''(0) = (\ln a)^2, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n & „ & f^{(n)}(0) = (\ln a)^n, \\ f^{(n+1)}(x) = a^x (\ln a)^{n+1} & „ & f^{(n+1)}(\Theta x) = a^{\Theta x}(\ln a)^{n+1}. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Daraus folgt durch Anwendung der *Mac-Laurin*schen Reihe

$$f(x) = a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n (\ln a)^n}{n!} + R, \tag{12.}$$

wobei man in ähnlicher Weise wie vorhin zeigen kann, daß $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$. Dies gibt

$$(13.)\qquad a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \cdots.$$

Dasselbe Resultat hätte man auch aus Gleichung (6.) in folgender Weise finden können. Es sei

$$y = a^x,$$

dann wird

$$\ln y = \ln(a^x) = x\ln a,$$

folglich ist

$$y = e^{x\ln a},$$

also nach Gleichung (6.), indem man $x$ mit $x\ln a$ vertauscht,

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \cdots.$$

## § 40.

## Entwickelung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 95 und 96.)

**Aufgabe 1.** Man soll die Funktion $\sin x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Hier ist

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(x) = \sin x, & \text{also}\quad f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x, & \text{,,}\quad f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x, & \text{,,}\quad f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x, & \text{,,}\quad f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) = \sin x, & \text{,,}\quad f^{(4)}(0) = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, daß $n$ eine *ungerade* Zahl ist, wird daher

$$(2.)\qquad \begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm\cos x, & \text{also}\quad f^{(n)}(0) = \pm 1, \\ f^{(n+1)}(x) = \mp\sin x, & \text{,,}\quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \mp\sin(\Theta x). \end{cases}$$

Dies gibt mit Hilfe der *Mac-Laurin*schen Reihe

$$(3.)\qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

$$(4.)\qquad R = \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\Theta x).$$

Nun wurde bereits im vorigen Paragraphen bei Entwickelung von $e^x$ gezeigt, daß man $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ beliebig klein machen kann, wenn man nur $n$ hinreichend groß wählt. Außerdem liegt $\sin(\Theta x)$ zwischen $-1$ und $+1$, folglich kann $R$ vernachlässigt werden, wenn man die Reihe bis ins Unendliche fortsetzt. Dadurch erhält man

$$(5.)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots.$$

Heißt das letzte Glied, welches man für die Berechnung von $\sin x$ benutzt hat, $\pm \frac{x^n}{n!}$, und ist $|x| < n+1$, so ist der Rest, welcher vernachlässigt wird, nämlich

$$R = \mp \frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1}\cdot\sin(\Theta x),$$

vom Vorzeichen abgesehen, immer nur ein Bruchteil dieses letzten Gliedes, so daß man für die Genauigkeit der Rechnung ein sicheres Maß erhält.

**Aufgabe 2.** Man soll nach dieser Formel $\sin 15^0 25' 20''$ berechnen.

**Auflösung.** Die Länge des Bogens, welcher dem Zentriwinkel von $15^0 25' 20''$ in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 entspricht, ist

$$x = 15\frac{76}{180}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{2776 \,.\, 3{,}141\,592\,65}{32400} = 0{,}269\,168\,56.$$

Deshalb wird

$$\frac{x}{1!} = 0{,}269\,168\,56, \quad \frac{x^3}{3!} = 0{,}003\,250\,29,$$

$$\frac{x^5}{5!} = 0{,}000\,011\,77, \quad \frac{x^7}{7!} = 0{,}000\,000\,02.$$

Die folgenden Glieder haben in den ersten 8 Dezimalstellen keine geltenden Ziffern mehr. Es wird daher

$$\sin x = 0{,}269\,180\,33 - 0{,}003\,250\,31,$$

oder

$$\sin 15^0 25' 20'' = 0{,}265\,930\,02.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Funktion $\cos x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Hier ist

$$(6.)\quad \begin{cases} f(x) = \cos x, & \text{also} \quad f(0) = +1, \\ f'(x) = -\sin x, & \text{„} \quad f'(0) = 0, \\ f''(x) = -\cos x, & \text{„} \quad f''(0) = -1, \\ f'''(x) = \sin x, & \text{„} \quad f'''(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) = \cos x, & \text{„} \quad f^{(4)}(0) = +1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, daß $n$ eine *gerade* Zahl ist, wird daher

$$(7.)\quad \begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \cos x, & \text{also} \quad f^{(n)}(0) = \pm 1, \\ f^{(n+1)}(x) = \mp \sin x, & \text{„} \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \mp \sin(\Theta x). \end{cases}$$

Dies gibt mit Hilfe der *Mac-Laurin*schen Reihe

$$(8.)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

$$(9.)\quad R = \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin(\Theta x).$$

Der Rest hat hier dieselbe Form wie in Aufgabe 1, nur war dort $n$ eine *ungerade* Zahl, während hier $n$ eine *gerade* Zahl ist. Man findet daher ebenso wie in Aufgabe 1, daß $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$, und erhält

$$(10.)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.$$

Auch hier ist der vernachlässigte Rest nur ein Bruchteil des letzten von der Reihe beibehaltenen Gliedes.

**Aufgabe 4.** Man soll nach dieser Formel $\cos 15^0 25' 20''$ berechnen.

**Auflösung.** Da in diesem Falle

$$x = 0{,}269\,168\,56$$

ist, so findet man

$$1 = 1{,}000\,000\,00, \quad \frac{x^2}{2!} = 0{,}036\,225\,86,$$

$$\frac{x^4}{4!} = 0{,}000\,218\,72, \quad \frac{x^6}{6!} = 0{,}000\,000\,53.$$

Die folgenden Glieder haben in den ersten 8 Dezimalstellen keine geltenden Ziffern mehr. Es wird daher

$$\cos x = 1{,}000\,218\,72 - 0{,}036\,226\,39,$$

oder

$$\cos 15^0 25' 20'' = 0{,}963\,992\,33.$$

## § 41.

## Berechnung von Tafeln für die Funktionen $\sin\alpha^0$ und $\cos\alpha^0$.

Es war für alle endlichen Werte von $x$

$$(1.)\qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots,$$

$$(2.)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.$$

Dabei ist $x$ die Länge des zugehörigen Kreisbogens, nämlich

$$(3.)\qquad x = \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{90},$$

wenn der entsprechende Zentriwinkel gleich $\alpha^0$ ist. Da man nun für den Gebrauch zweckmäßigerweise die trigonometrischen Funktionen der *Winkel* in Tafeln zusammenstellen wird, so wird man den in Gleichung (3.) angegebenen Wert von $x$ in die Gleichungen (1.) und (2.) einsetzen. Dadurch erhält man

$$(4.)\quad \sin\alpha^0 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^5 - + \cdots,$$

$$(5.)\quad \cos\alpha^0 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^6 + - \cdots,$$

wobei man die numerischen Koeffizienten

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,\ \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3,\ \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4,\cdots$$

ein für allemal ausrechnen kann, und zwar wird

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,33, \qquad \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1{,}233\,700\,55,$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}645\,964\,10, \qquad \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0{,}253\,669\,51,$$

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}079\,692\,63, \qquad \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = 0{,}020\,863\,48,$$

$$\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}004\,681\,75, \qquad \frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 = 0{,}000\,919\,26,$$

$$\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = 0{,}000\,160\,44, \qquad \frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = 0{,}000\,025\,20,$$

$$\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11} = 0{,}000\,003\,60, \qquad \frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{12} = 0{,}000\,000\,47,$$

$$\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{13} = 0{,}000\,000\,06, \qquad \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{14} = 0{,}000\,000\,01.$$

Bezeichnet man also $\frac{\alpha}{90}$ mit $t$, so wird

$$(4\text{a.})\quad \begin{aligned}\sin\alpha^0 = {} & 1{,}570\,796\,33\,.\,t - 0{,}645\,964\,10\,.\,t^3 \\ & + 0{,}079\,692\,63\,.\,t^5 - 0{,}004\,681\,75\,.\,t^7 \\ & + 0{,}000\,160\,44\,.\,t^9 - 0{,}000\,003\,60\,.\,t^{11} \\ & + 0{,}000\,000\,06\,.\,t^{13},\end{aligned}$$

$$(5\text{a.})\quad \begin{aligned}\cos\alpha^0 = {} & 1{,}000\,000\,00 - 1{,}233\,700\,55\,.\,t^2 \\ & + 0{,}253\,669\,51\,.\,t^4 - 0{,}020\,863\,48\,.\,t^6 \\ & + 0{,}000\,919\,26\,.\,t^8 - 0{,}000\,025\,20\,.\,t^{10} \\ & + 0{,}000\,000\,47\,.\,t^{12} - 0{,}000\,000\,01\,.\,t^{14}.\end{aligned}$$

Da man nur die Winkel zu berücksichtigen braucht, welche zwischen $0^0$ und $45^0$ liegen, so ist $t$ immer kleiner als 0,5, so daß man bei der Berechnung nicht einmal die angeführten Glieder alle brauchen wird. Dabei ist es für die Genauigkeit des Endresultates von großer Bedeutung, daß $t$, $t^2$, $t^3$,... sämtlich echte Brüche sind, weil deshalb die Fehler, welche bei den Koeffizienten durch Vernachlässigung der späteren Dezimalstellen entstehen, durch die Multiplikation mit $t$, $t^2$, $t^3$,... nicht vergrößert werden.

Ist z. B. $\alpha = 18$, so wird $t = 18 : 90 = 0{,}2$, also

$$\begin{aligned}\sin 18^0 &= 0{,}314\,159\,27 - 0{,}005\,167\,71\\ &+ 0{,}000\,025\,50 - 0{,}000\,000\,06\\ &= 0{,}314\,184\,77 - 0{,}005\,167\,77,\end{aligned}$$

oder

$$\sin 18^0 = 0{,}309\,017\,00.$$

$$\begin{aligned}\cos 18^0 &= 1{,}000\,000\,00 - 0{,}049\,348\,02\\ &+ 0{,}000\,405\,87 - 0{,}000\,001\,34\\ &= 1{,}000\,405\,87 - 0{,}049\,349\,36,\end{aligned}$$

oder

$$\cos 18^0 = 0{,}951\,056\,51.$$

**Aufgabe.** Man soll eine Tafel herstellen, welche die Sinusse und Kosinusse aller Winkel von 10′ zu 10′ bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet enthält.

**Auflösung.** Bekanntlich ist

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{6.}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{7.}$$

Ist dabei $\beta = 10'$, so ist der zugehörige Wert von $t$ gleich $\frac{1}{540}$, und man erhält aus Gleichung (4a.)

$$\sin 10' = 0{,}002\,908\,88, \tag{8.}$$

wobei man nur das *erste* Glied zu berücksichtigen braucht, und aus Gleichung (5a.)

$$\cos 10' = 1 - 0{,}000\,004\,23 = 0{,}999\,995\,77, \tag{9.}$$

wobei man außer der 1 wieder nur ein einziges Glied zu berücksichtigen braucht. Indem man diese Werte in die Gleichungen (6.) und (7.) einsetzt, findet man

$$(10.)\quad \sin(\alpha \pm 10') = 0{,}999\,995\,77 \sin\alpha \pm 0{,}002\,908\,88 \cos\alpha,$$

$$(11.)\quad \cos(\alpha \pm 10') = 0{,}999\,995\,77 \cos\alpha \mp 0{,}002\,908\,88 \sin\alpha.$$

In ähnlicher Weise kann man $\sin(\alpha \pm 20')$ und $\cos(\alpha \pm 20')$, $\sin(\alpha \pm 30')$ und $\cos(\alpha \pm 30')$ berechnen, wenn $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bekannt sind.

Es genügt also nach dieser Methode, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für

$$\alpha = 1^0,\quad 2^0,\quad 3^0, \ldots 45^0$$

unter Anwendung der Gleichung (4a.) und (5a.) auszurechnen. Die dazwischen liegenden Werte findet man dann in der angedeuteten Weise mit Hülfe der Formeln (6.) und (7.).

Die Rechnung wurde auf 8 Dezimalstellen ausgeführt, damit in den Endresultaten die ersten 6 Dezimalstellen sicher richtig sind.

In welcher Weise man diese Methode auch auf den Fall übertragen kann, wo es sich um eine Tabelle von Minute zu Minute oder von zehn zu zehn Sekunden handelt, erkennt man ohne weiteres.

## § 42.

## Andere Formen des Restgliedes.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 88 bis 90.)

Dem Restgliede kann man noch andere Formen geben, die gleichfalls hergeleitet werden mögen, weil sie für spätere Anwendungen erforderlich sind.

Nach Gleichung (25.) in § 37 war

$$(1.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R.$$

Setzt man in dieser Gleichung für $R$ den Wert ein, wie er dort in Gleichung (26.) angegeben ist, vertauscht dann aber $n$ mit $n-1$, so erhält man

$$(2.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\Theta h)}{n!}h^n.$$

Indem man beide Seiten der Gleichungen (1.) und (2.) von einander subtrahiert, findet man

$$0=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R-\frac{f^{(n)}(x+\Theta h)}{n!}h^n,$$

oder

$$(3.)\qquad R=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)]h^n.$$

Diese Form des Restes ist der früheren z. B. dann vorzuziehen, wenn man nicht weiß, ob die $(n+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle stetig ist.

Auch hier ist $\Theta$ eine Zahl, welche zwischen 0 und 1 liegt; sie ist aber selbstverständlich verschieden von der Größe $\Theta$, welche bei der ersten Form des Restes auftrat. Es möge dies dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß man zu den beiden Größen $\Theta$ die Indizes 1 und 2 hinzufügt.

Es ist also

$$(3\text{a.})\qquad R=\frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta_2 h)-f^{(n)}(x)]h^n.$$

Setzt man in Gleichung (1.) $x$ gleich $a$, so geht sie über in

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R,$$

wobei jetzt nach Gleichung (3 a.)

$$R=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(a+\Theta_2 h)-f^{(n)}(a)]\,h^n$$

wird. Vertauscht man sodann noch $h$ mit $x-a$, so erhält man die andere Form der *Taylor*schen Reihe, nämlich

$$(4.)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R,$$

wobei

$$(5.)\quad R = \frac{1}{n!}\Big\{ f^{(n)}[a + \Theta_2(x - a)] - f^{(n)}(a) \Big\}(x - a)^n.$$

Indem man endlich in den Gleichungen (4.) und (5.) $a$ gleich 0 setzt, findet man für die *Mac-Laurin*sche Reihe

$$(6.)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R$$

das Restglied in der Form

$$(7.)\quad R = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(\Theta_2 x) - f^{(n)}(0)]x^n.$$

Eine dritte Form des Restgliedes erhält man in folgender Weise.

Setzt man in Gleichung (1.)

$$(8.)\quad x + h = b, \quad \text{also} \quad h = b - x,$$

so wird

$$(9.)\quad f(b) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^n + R,$$

oder

$$(10.)\quad R = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b - x) - \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^n.$$

Wenn man hierbei festsetzt, daß $b$ in der hier folgenden Betrachtung konstant bleibt, so ist $R$ als eine Funktion der einzigen Veränderlichen $x$ zu behandeln, d. h. man kann setzen

$$(11.)\quad R = \varphi(x).$$

Dies gibt

$$\frac{dR}{dx} =$$

$$-f'(x) - \frac{f''(x)}{1!}(b - x) - \frac{f'''(x)}{2!}(b - x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n$$

$$+ f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(b - x) + \frac{f'''(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1},$$

also

$$(12.)\qquad \frac{dR}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Wenn nun $f(x)$ mit seinen $n+1$ ersten Ableitungen in dem betrachteten Intervalle stetig ist, so sind auch die Funktionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ in diesem Intervalle stetig. Nach Formel Nr. 87 der Tabelle ist

$$f(a+h) - f(a) = h \,.\, f'(a + \Theta h),$$

also auch, wenn man $f$ mit $\varphi$ und $a$ mit $x$ vertauscht,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h \,.\, \varphi'(x + \Theta h),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.)

$$(13.)\qquad \varphi(b) - \varphi(x) = (b-x)\varphi'[x + \Theta(b-x)].$$

Nun folgt aber aus Gleichung (10.), daß $R = 0$ wird für $x = b$, daß also

$$\varphi(b) = 0$$

ist. Ferner folgt aus Gleichung (12.), indem man $x$ mit $x + \Theta(b-x)$ vertauscht,

$$\begin{aligned}\varphi'[x+\Theta(b-x)] &= -\frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!}\cdot[b-x-\Theta(b-x)]^n\\ &= -\frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!}(1-\Theta)^n(b-x)^n;\end{aligned}$$

deshalb geht Gleichung (13.) über in

$$(14.)\qquad \varphi(x) = R = \frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!}(1-\Theta)^n(b-x)^{n+1}.$$

Auch hier ist $\Theta$ eine Größe zwischen 0 und 1, die aber zum Unterschiede von $\Theta_1$ und $\Theta_2$ mit $\Theta_3$ bezeichnet werden möge. Berücksichtigt man noch die Gleichungen (8.), so wird

$$(15.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta_3 h)}{n!}(1-\Theta_3)^n h^{n+1}.$$

Vertauscht man jetzt wieder $x$ mit $a$ und $h$ mit $x - a$, so erhält man die andere Form der *Taylor*schen Reihe, nämlich

$$(16.)\qquad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

wobei

$$(17.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}[a + \Theta_3(x - a)]}{n!}(1 - \Theta_3)^n(x - a)^{n+1}.$$

Indem man in diesen Gleichungen (16.) und (17.) $a$ gleich 0 setzt, findet man für die *Mac-Laurin*sche Reihe

$$(18.)\qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^2 + R$$

das Restglied in der Form

$$(19.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta_3 x)}{n!}(1 - \Theta_3)^n x^{n+1}.$$

**Bemerkung.*)**

Diese Form des Restes ist nur ein besonderer Fall einer viel allgemeineren Form, die man auf folgende Weise findet.

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen, welche mit ihren Ableitungen $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ *stetig* und *endlich* bleiben, und nimmt $\psi'(x)$ innerhalb dieses Intervalles nur *positive* Werte an, so bleibt der Quotient

$$(20.)\qquad Q(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

in diesem Intervalle gleichfalls *stetig* und *endlich*, und die Funktion $\psi(x)$ nimmt mit $x$ zugleich zu.

Wenn nun $x$ das Intervall von $a$ bis $b$ durchläuft, so möge $Q(x)$ für $x = x_1$ seinen *kleinsten* Wert $K$ und für $x = x_2$ seinen *größten* Wert $G$ erreichen. Es sei also

$$(21.)\qquad Q(x_1) = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = K, \quad Q(x_2) = \frac{\varphi'(x_2)}{\psi'(x_2)} = G,$$

wobei $x_1$ und $x_2$ zwischen $a$ und $b$ liegen. Dies gibt für $a \leqq x \leqq b$

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - K \geqq 0, \quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - G \leqq 0,$$

oder

$$(22.)\qquad \varphi'(x) - K\psi'(x) \geqq 0, \quad \varphi'(x) - G\psi'(x) \leqq 0.$$

Diese Ausdrücke sind aber bezw. die Ableitungen von

$$(23.)\qquad \begin{cases} u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)], \\ v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - \psi(a)]. \end{cases}$$

---

*) Der Anfänger darf diese Bemerkung übergehen, da von der darin enthaltenen Untersuchung nur selten Gebrauch gemacht werden wird.

Da nach den Ungleichungen (22.)

(22a.) $$\frac{du}{dx} \geqq 0, \qquad \frac{dv}{dx} \leqq 0$$

ist, so muß $u$ beständig *zunehmen* und $v$ beständig *abnehmen*, wenn $x$ *zunimmt*. Für $x = a$ werden $u$ und $v$ beide gleich 0, folglich ist

0 der *kleinste* Wert von $u$, und

0 der *größte* Wert von $v$,

wenn $x$ das Intervall von $a$ bis $b$ durchläuft; d. h.

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)] \geqq 0,$$
$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - \psi(a)] \leqq 0,$$

oder, da $\psi(x) - \psi(a) > 0$ für $x > a$,

(24.) $$K \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \leqq G.$$

Bezeichnet man $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}$ mit $M$, so gehen die Ungleichungen (24.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (21.) über in

(24a.) $$\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \leqq M \leqq \frac{\varphi'(x_2)}{\psi'(x_2)}.$$

Nun ist aber $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ eine *stetige* Funktion, folglich gibt es nach dem in § 8 bewiesenen Satze 14 zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens einen Wert von $x$, er heiße $\xi$, für welchen

(25.) $$M = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

wird. Da $\xi$ zwischen $x_1$ und $x_2$ liegt, so liegt es auch zwischen $a$ und $b$, und man kann wieder

$$\xi = a + \Theta(b - a)$$

setzen, wobei $0 \leqq \Theta \leqq +1$ ist. Dies gibt

(25a.) $$M = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\psi'[a + \Theta(b - a)]},$$

und für $x = b$

(26.) $$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\psi'[a + \Theta(b - a)]}.$$

Setzt man z. B.

$$\psi(x) = c^{\varkappa} - (c - x)^{\varkappa}, \quad \text{also} \quad \psi'(x) = \varkappa(c - x)^{\varkappa - 1},$$

wobei $c \geqq b$ und $\varkappa > 0$ sein möge, so sind die für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ festgestellten Bedingungen erfüllt, und man erhält aus Gleichung (26.)

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{(c - a)^{\varkappa} - (c - b)^{\varkappa}} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\varkappa[c - a - \Theta(b - a)]^{\varkappa - 1}},$$

oder

$$(27.)\qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{(c-a)^\varkappa - (c-b)^\varkappa}{\varkappa\,[c - a - \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Dies gilt, wie nahe auch $c$ dem Werte von $b$ liegen mag, folglich erhält man für $\lim c = b$

$$(28.)\qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b-a}{\varkappa(1-\Theta)^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Für $b \leqq x \leqq a$ gelten ähnliche Schlüsse. Aus den Ungleichungen (22.) folgt dann wieder, daß $u$ beständig *zunimmt* und $v$ beständig *abnimmt*, wenn $x$ *zunimmt*. Da jetzt aber $x \leqq a$, so ist

0 der *größte* Wert von $u$ und

0 der *kleinste* Wert von $v$,

wenn $x$ das Intervall von $b$ bis $a$ durchläuft. Dies gibt

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)] \leqq 0,$$
$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - \psi(a)] \geqq 0.$$

Da jetzt $x \leqq a$, so ist $\psi(x) - \psi(a) < 0$; deshalb folgt aus diesen Ungleichungen wieder

$$K \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \leqq G$$

und

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b-a)]}{\psi'[a + \Theta(b-a)]}.$$

Setzt man in diesem Falle

$$\psi(x) = (x-c)^\varkappa - c^\varkappa, \quad \text{also} \quad \psi'(x) = \varkappa(x-c)^{\varkappa-1},$$

wobei $c \leqq b$ und $\varkappa > 0$ sein möge, so sind die für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ festgestellten Bedingungen wieder erfüllt, und man erhält

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{(b-c)^\varkappa - (a-c)^\varkappa} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b-a)]}{\varkappa[a - c + \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}},$$

oder

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{(b-c)^\varkappa - (a-c)^\varkappa}{\varkappa\,[a - c + \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)];$$

für $\lim c = b$ findet man also in Übereinstimmung mit Gleichung (28.)

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b-a}{\varkappa(1-\Theta)^{\varkappa-1}}\, \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Für $a = x$ folgt hieraus

$$\varphi(b) - \varphi(x) = \frac{b - x}{\varkappa(1 - \Theta)^{\varkappa - 1}} \varphi'[x + \Theta(b - x)], \tag{29.}$$

gleichviel ob $x < b$ oder $b < x$ ist.

Setzt man jetzt wieder

$$\varphi(x) = R = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b - x) - \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 - \cdots \tag{30.}$$
$$- \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^n,$$

so wird

$$\varphi(b) = 0, \quad \varphi'(x) = \frac{dR}{dx} = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n, \tag{31.}$$

$$\varphi'[x + \Theta(b - x)] = -\frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b - x)]}{n!}(1 - \Theta)^n(b - x)^n, \tag{32.}$$

folglich findet man aus Gleichung (29.)

$$R = \frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b - x)]}{\varkappa \,.\, n!}(1 - \Theta)^{n - \varkappa + 1}(b - x)^{n+1}. \tag{33.}$$

Für $\varkappa = 1$ erhält man hieraus in Übereinstimmung mit Gleichung (14.) die dritte Form des Restes.

## § 43.

## Der allgemeine binomische Lehrsatz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 97 bis 99.)

**Aufgabe.** Man soll $(1 + x)^m$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln, gleichviel ob $m$ eine positive ganze Zahl ist oder nicht.

**Auflösung.** Hier ist

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m, \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1}, \\ f''(x) &= m(m - 1)(1 + x)^{m-2}, \\ f'''(x) &= m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) &= m(m - 1)\ldots(m - n + 1)(1 + x)^{m-n}, \\ f^{(n+1)}(x) &= m(m - 1)\ldots(m - n + 1)(m - n)(1 + x)^{m-n-1}, \end{aligned}\right. \tag{1.}$$

also

$$(1a.)\quad \begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = m, \\ f''(0) = m(m-1), \\ f'''(0) = m(m-1)(m-2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1), \\ f^{(n+1)}(\Theta x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta x)^{m-n-1}. \end{cases}$$

Dies gibt mit Hülfe der *Mac-Laurin*schen Reihe

$$(2.)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\dots n}x^n + R$$

$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + R,$$

wobei

$$(3.)\quad R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta_1 x)^{m-n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,n(n+1)}x^{n+1},$$

oder

$$(4.)\quad R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta_3 x)^{m-n-1}}{1\,.\,2\dots n}\cdot(1-\Theta_3)^n x^{n+1},$$

je nachdem man die erste oder die dritte Form des Restes benutzt.

**Erster Fall.** Zunächst möge gezeigt werden, daß $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$, wenn

$$(5.)\quad 0 \leqq x < +1.$$

Bezeichnet man mit $g$ eine beliebige positive ganze Zahl, über deren Größe nachträglich passend verfügt werden soll, so kann man das Restglied nach Gleichung (3.) in drei Hauptfaktoren

$$(6.)\quad F_1 = \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{1\,.\,2\dots g}x^g,$$

$$(7.)\quad F_2 = \frac{m-g}{g+1}x\cdot\frac{m-g-1}{g+2}x\cdots\frac{m-n}{n+1}x,$$

(8.) $$F_3 = (1 + \Theta x)^{m-n-1} = \frac{(1+\Theta x)^m}{(1+\Theta x)^{n+1}}$$

zerlegen, wobei der Einfachheit wegen $\Theta$ statt $\Theta_1$ geschrieben ist.

Der erste Hauptfaktor $F_1$ enthält $n$ gar nicht und bleibt *endlich*, wie groß auch $g$ sein mag. Der dritte Hauptfaktor $F_3$ wird gleich 1, wenn von den beiden Größen $\Theta$ und $x$ wenigstens die eine gleich 0 wird; $F_3$ wird aber sogar beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$, wenn $\Theta > 0$ und $x > 0$.

Setzt man $m + 1 = p$, und ist

$$g > m \geqq -1, \quad \text{also} \quad m + 1 = p \geqq 0,$$

so wird

$$-\frac{m-g}{g+1}x = \frac{g+1-p}{g+1}x \leqq x,$$

$$-\frac{m-g-1}{g+2}x = \frac{g+2-p}{g+2}x \leqq x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{m-n}{n+1}x = \frac{n+1-p}{n+1}x \leqq x,$$

folglich ist

(9.) $$(-1)^{n-g+1}F_2 \leqq x^{n-g+1}.$$

Da nun $x < +1$ ist, so wird für hinreichend große Werte von $n - g + 1$ die Größe $x^{n-g+1}$ beliebig klein, folglich erst recht $F_2$.

Ist dagegen

$$m < -1, \quad \text{also} \quad m + 1 < 0,$$

so erhält man, indem man $m + 1 = -p$ setzt,

$$-\frac{m-g}{g+1} = \frac{g+1+p}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1},$$

$$-\frac{m-g-1}{g+2} = \frac{g+2+p}{g+2} = 1 + \frac{p}{g+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{m-n}{n+1} = \frac{n+1+p}{n+1} = 1 + \frac{p}{n+1}.$$

Alle diese Brüche sind *größer* als 1, da $p > 0$ ist, aber sie nähern sich dem Werte 1 beliebig. Da $x < 1$ ist, so wird

$$\frac{1}{x} > 1,$$

und man kann es erreichen, wenn man nur $g$ hinreichend groß macht, daß

$$-\frac{m-g}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} < \frac{1}{x}$$

wird, daß also

$$-\frac{m-g}{g+1}x = k < 1$$

ist. Dies gibt dann

$$-\frac{m-g-1}{g+2}x < k,$$

$$-\frac{m-g-2}{g+3}x < k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\frac{m-n}{n+1}x < k.$$

Deshalb wird

$$(10.)\qquad (-1)^{n-g+1}F_2 < k^{n-g+1},$$

also auch hier wird $F_2$ für hinreichend große Werte von $n-g+1$ beliebig klein, da $k$ ein echter Bruch ist.

Daraus folgt, daß auch

$$R = F_1 \,.\, F_2 \,.\, F_3, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq x < +1$$

ist, beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$.

**Zweiter Fall.** Liegt $x$ zwischen $-1$ und 0, ist also

$$(11.)\qquad -1 < x \leqq 0,$$

so wendet man die dritte Form des Restgliedes an, um zu zeigen, daß $R$ beliebig klein wird. Aus Gleichung (4.) folgt dann, wenn man der Einfachheit wegen $\Theta$ statt $\Theta_3$ schreibt und $x = -z$ setzt,

$$(12.)\quad R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1-\Theta z)^{m-1}(1-\Theta)^n(-z)^{n+1}}{1\,.\,2\dots n(1-\Theta z)^n}$$

$$= -mz(1-\Theta z)^{m-1} \,.\, \frac{(1-m)(z-\Theta z)}{1\,.\,(1-\Theta z)} \,.\, \frac{(2-m)(z-\Theta z)}{2\,.\,(1-\Theta z)} \dots$$

$$\frac{(n-m)\,(z-\Theta z)}{n(1-\Theta z)},$$

wobei

(11a.) $$0 \leqq z < +1.$$

Auch hier zerlegt man $R$ in drei Hauptfaktoren

(13.) $$F_1 = -mz(1-\Theta z)^{m-1},$$

(14.) $$F_2 = \frac{1-m}{1} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \cdot \frac{2-m}{2} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \cdots \frac{g-m}{g} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z},$$

(15.) $$F_3 = \frac{g+1-m}{g+1} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \cdot \frac{g+2-m}{g+2} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \cdots \frac{n-m}{n} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}.$$

Der erste Hauptfaktor $F_1$ ist eine endliche Größe, ebenso der zweite Hauptfaktor $F_2$. Ferner ist nach Ungleichung (11a.)

$$1 \geqq \Theta \geqq \Theta z, \quad 0 \leqq 1-\Theta \leqq 1-\Theta z,$$
$$0 \leqq z(1-\Theta) = z - \Theta z \leqq z(1-\Theta z),$$

folglich wird

(16.) $$0 \leqq \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \leqq z < 1.$$

Ist nun $m \geqq 0$, so wird

$$\frac{g+1-m}{g+1} \leqq 1, \quad \frac{g+2-m}{g+2} \leqq 1, \quad \cdots \frac{n-m}{n} \leqq 1,$$

also

(17.) $$F_3 \leqq \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^{n-g} \leqq z^{n-g}.$$

Da $z$ ein echter Bruch ist, so wird $z^{n-g}$ beliebig klein für hinreichend große Werte von $n-g$, also erst recht $F_3$.

Ist dagegen $m < 0$, also $-m > 0$, so wird, wenn man hier $-m = p$ setzt,

$$\frac{g+1-m}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} > 1,$$
$$\frac{g+2-m}{g+2} = 1 + \frac{p}{g+2} > 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n-m}{n} = 1 + \frac{p}{n} > 1.$$

Diese Brüche sind zwar alle größer als 1, da $p > 0$ ist, nähern sich aber dem Werte 1 beliebig. Macht man daher $g$ so groß, daß

$$\frac{g+1-m}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} < \frac{1-\Theta z}{z-\Theta z},$$

oder

$$\frac{g+1-m}{g+1} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} = k < 1$$

ist, so wird

$$\frac{g+2-m}{g+2} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} < k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} < k.$$

Dies gibt

(18.) $$F_3 < k^{n-g}.$$

Da $k$ ein echter Bruch ist, so wird $k^{n-g}$ beliebig klein für hinreichend große Werte von $n-g$, folglich erst recht $F_3$.

Damit ist bewiesen, daß auch $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$, gleichviel ob $m$ positiv oder negativ ist.

Durch Vereinigung des ersten und des zweiten Falles erhält man daher für

(19.) $$-1 < x < +1$$

die Entwickelung

(20.) $$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots.$$

**Bemerkung.*)**

Liegt $m$ zwischen $-1$ und $+\infty$, so läßt sich zeigen, daß diese Reihe auch noch für $x = +1$ gilt; liegt $m$ zwischen 0 und $+\infty$, so gilt sie auch noch für $x = -1$.

---

*) Sollte der Inhalt dieser Bemerkung für den Anfänger noch zu schwer verständlich sein, so darf sie übergangen werden.

**Beweis.** Ist

$$-1 < m < +\infty, \quad \text{oder} \quad 0 < m+1 < +\infty, \quad x = +1,$$

so gehen die Gleichungen (6.), (7.) und (8.) über in

$$F_1 = \frac{m(m-1)\ldots(m-g+1)}{1.2\ldots g}, \tag{6a.}$$

$$F_2 = \frac{m-g}{g+1} \cdot \frac{m-g-1}{g+2} \ldots \frac{m-n}{n+1}, \tag{7a.}$$

$$F_3 = \frac{(1+\Theta)^m}{(1+\Theta)^{n+1}}. \tag{8a.}$$

Der erste Hauptfaktor $F_1$ bleibt wieder *endlich*, der dritte Hauptfaktor wird gleich 1 für $\Theta = 0$ und beliebig klein für $\Theta > 0$. Ferner folgt aus Gleichung (7a.), wenn man die positive Größe $m + 1 = p$ setzt,

$$(-1)^{n-g+1} F_2 = \frac{g+1-p}{g+1} \cdot \frac{g+2-p}{g+2} \ldots \frac{n+1-p}{n+1} \tag{21.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 87 der Tabelle

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\Theta h),$$

also für

$$f(x) = x^{p+1}, \quad f'(x) = (p+1)x^p$$

erhält man

$$(x+h)^{p+1} = x^{p+1} + (p+1)h(x+\Theta h)^p, \tag{22.}$$

und für $x = 1$

$$(1+h)^{p+1} = 1 + (p+1)h(1+\Theta h)^p. \tag{23.}$$

Wenn nun $h$ und $p$ beide positiv sind, so ist

$$(1+\Theta h)^p \leqq (1+h)^p,$$

und die Gleichung (23.) geht über in die Ungleichung

$$(1+h)^{p+1} \leqq 1 + (p+1)h(1+h)^p,$$

folglich ist

$$(1+h)^p(1-ph) \leqq 1. \tag{24.}$$

Dies gibt für $h = \dfrac{1}{g+\alpha}$

$$\left(\frac{g+\alpha+1}{g+\alpha}\right)^p \cdot \frac{g+\alpha-p}{g+\alpha} \leqq 1,$$

oder

$$\frac{g+\alpha-p}{g+\alpha} \leqq \left(\frac{g+\alpha}{g+\alpha+1}\right)^p. \tag{25.}$$

Indem man für $\alpha$ nach und nach die Werte $1, 2, \ldots n-g+1$ einsetzt, erhält man

$$\frac{g+1-p}{g+1} \leqq \left(\frac{g+1}{g+2}\right)^p,$$
$$\frac{g+2-p}{g+2} \leqq \left(\frac{g+2}{g+3}\right)^p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n+1-p}{n+1} \leqq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^p.$$

Daraus folgt, wenn man alle diese Ungleichungen miteinander multipliziert, nach Gleichung (21.)

$$(26.)\qquad (-1)^{n-g+1} F_2 \leqq \left(\frac{g+1}{n+2}\right)^p,$$

d. h. $|F_2|$ wird *beliebig klein* für hinreichend große Werte von $n$, also auch $R$ selbst.

Im zweiten Falle, wo die Voraussetzungen

$$0 < m < +\infty, \quad x = -1$$

gelten, benutze man diejenige Form für den Rest der *Taylor*schen Reihe, welche in § 42, Gleichung (33.) gegeben worden ist, nämlich

$$R = \frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b-x)]}{\varkappa \,.\, n!}(1-\Theta)^{n-\varkappa+1}(b-x)^{n+1},$$

wobei $\varkappa$ eine beliebige positive Zahl ist.

Indem man $x$ mit 0 und $b-x$ mit $x$ vertauscht, findet man aus diesem Ausdrucke für den Rest der *Mac-Laurin*schen Reihe die Form

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{\varkappa \,.\, n!}(1-\Theta)^{n-\varkappa+1} x^{n+1}.$$

Deshalb wird in dem vorliegenden Falle nach den Gleichungen (1a.)

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\Theta x)^{m-n-1}}{\varkappa \,.\, n!} \cdot (1-\Theta)^{n-\varkappa+1} \,.\, x^{n+1},$$

Dies gibt für $x = -1$

$$(27.)\qquad R = (-1)^{n+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{\varkappa \,.\, n!}(1-\Theta)^{m-\varkappa},$$

also für $\varkappa = m$

$$(28.)\qquad R = -\frac{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}{1 \,.\, 2 \ldots n} = F_1 \,.\, F_2,$$

wobei für

$$g \leqq m < g+1$$

$$(29.)\qquad F_1 = -\frac{(1-m)(2-m)\ldots(g-m)}{1 \,.\, 2 \ldots g}$$

eine *endliche* Größe ist. Dagegen wird unter Anwendung der im ersten Falle ausgeführten Untersuchung, wenn man $p$ mit $m$ vertauscht,

$$(30.)\qquad F_2 = \frac{g+1-m}{g+1} \cdot \frac{g+2-m}{g+2} \cdots \frac{n-m}{n} \leqq \left(\frac{g+1}{n+1}\right)^m,$$

d. h. $F_2$ wird *beliebig klein* für hinreichend große Werte von $n$, folglich auch $R$.

Da $m$ unendlich viele Werte haben darf, so sind in dem binomischen Lehrsatze unendlich viele Reihenentwickelungen enthalten. Ist $m$ eine positive, ganze Zahl, so geht die Reihe nicht bis ins Unendliche, sondern sie bricht nach dem $m+1^{\text{ten}}$ Gliede ab.

## Beispiele.

1) $m = -1$.

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots.$$

2) $m = +\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^3}{6} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^4}{8} + - \cdots.$$

3) $m = -\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^2 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^4 - + \cdots.$$

Man kann den allgemeinen binomischen Lehrsatz auch auf die Entwickelung von $(a+b)^m$ anwenden.

Ist nämlich $|a| > |b|$, so wird $\frac{b}{a}$ ein echter Bruch, und man erhält

$$(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$
$$= a^m\left[1 + \binom{m}{1}\frac{b}{a} + \binom{m}{2}\frac{b^2}{a^2} + \binom{m}{3}\frac{b^3}{a^3} + \cdots\right],$$

oder

$$(31.)\qquad (a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots.$$

Ist dagegen $|a| < |b|$, so wird $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, und man erhält

$$(a+b)^m = b^m\left(1+\frac{a}{b}\right)^m$$
$$= b^m\left[1+\binom{m}{1}\frac{a}{b}+\binom{m}{2}\frac{a^2}{b^2}+\binom{m}{3}\frac{a^3}{b^3}+\cdots\right],$$

oder

$$(32.)\quad (a+b)^m = b^m+\binom{m}{1}ab^{m-1}+\binom{m}{2}a^2b^{m-2}+\binom{m}{3}a^3b^{m-3}+\cdots.$$

Der binomische Lehrsatz kann auch benutzt werden zur Ausziehung von Wurzeln mit beliebigen Wurzel-Exponenten.

**Beispiele.**

1) $\sqrt[3]{130} = (125+5)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}$.

Nach dem binomischen Lehrsatze wird aber

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\,\frac{x^2}{6}+\frac{2\,.\,5}{3\,.\,6}\,\frac{x^3}{9}-\frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}\,\frac{x^4}{12}+-\cdots,$$

hier ist also

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 1{,}013\,333\,333\,3 - 0{,}000\,177\,777\,8$$
$$+\,0{,}000\,003\,950\,6 - 0{,}000\,000\,105\,3$$
$$+\,0{,}000\,000\,003\,1 - 0{,}000\,000\,000\,1,$$

oder

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 1{,}013\,159\,403\,8,$$

$$\sqrt[3]{130} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 5{,}065\,797\,019\,0.$$

Wegen Vernachlässigung der späteren Dezimalstellen ist in diesem Resultate die letzte Dezimalstelle um 15 Einheiten unsicher.

2) $\sqrt[5]{1000} = (1024-24)^{\frac{1}{5}} = 4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1+\frac{x}{5}-\frac{4}{5}\,\frac{x^2}{10}+\frac{4\,.\,9}{5\,.\,10}\,\frac{x^3}{15}-\frac{4\,.\,9\,.\,14}{5\,.\,10\,.\,15}\,\frac{x^4}{20}+-\cdots,$$

$$(1-x)^{\frac{1}{5}} = 1-\frac{x}{5}-\frac{4}{5}\,\frac{x^2}{10}-\frac{4\,.\,9}{5\,.\,10}\,\frac{x^3}{15}-\frac{4\,.\,9\,.\,14}{5\,.\,10\,.\,15}\,\frac{x^4}{20}--\cdots,$$

folglich wird

$$\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - 0{,}004\,687\,500\,0$$
$$- 0{,}000\,043\,945\,3$$
$$- 0{,}000\,000\,618\,0$$
$$- 0{,}000\,000\,010\,1$$
$$- 0{,}000\,000\,000\,2,$$

oder

$$\sqrt[5]{1000} = 4 \,.\, 0{,}995\,267\,926\,4 = 3{,}981\,071\,705\,6.$$

Die Unsicherheit in der letzten Dezimalstelle beträgt hierbei 8.

In ähnlicher Weise werden die folgenden Aufgaben gelöst:

3) $\sqrt[3]{220} = (216 + 4)^{\frac{1}{3}} = 6\left(1 + \frac{1}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \,.\, 1{,}006\,135\,122\,799$
$= 6{,}036\,810\,736\,794.$

Die Unsicherheit in der letzten Dezimalstelle beträgt hierbei 18.

4) $\sqrt[7]{2106} = (2187 - 81)^{\frac{1}{7}} = 3\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{7}},$

$$(1 + x)^{\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7}x - \frac{6}{7 \,.\, 14}x^2$$
$$+ \frac{6 \,.\, 13}{7 \,.\, 14 \,.\, 21}x^3 - \frac{6 \,.\, 13 \,.\, 20}{7 \,.\, 14 \,.\, 21 \,.\, 28}x^4 + - \cdots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{7}} = 1 - \frac{1}{7 \,.\, 27} - \frac{6}{7 \,.\, 14 \,.\, 27^2} - \frac{6 \,.\, 13}{7 \,.\, 14 \,.\, 21 \,.\, 27^3} - \cdots$$
$$= 0{,}994\,623\,032\,493,$$

$$\sqrt[7]{2106} = 2{,}983\,869\,097\,479.$$

Die Unsicherheit in der letzten Dezimalstelle beträgt hierbei $10\frac{1}{2}$.

Es kann vorkommen, daß die Zahl, aus der die $n^{\text{te}}$ Wurzel gezogen werden soll, der $n^{\text{ten}}$ Potenz einer ganzen Zahl nicht nahe liegt, und daß deshalb bei der vorhin angegebenen Methode $\pm x$ von dem Werte 1 wenig verschieden ist. Dann liefert die Anwendung des binomischen Lehrsatzes nur durch die Berechnung von ziemlich vielen Gliedern ein Resultat, das auf mehrere Dezimalstellen genau ist. Soll z. B. $\sqrt[3]{45}$ berechnet werden, so ist

$$3^3 = 27 < 45 < 4^3 = 64.$$

Man müßte daher entweder

$$\sqrt[3]{45} = \sqrt[3]{27 + 18} = 3\left(1 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

setzen, oder

$$\sqrt[3]{45} = \sqrt[3]{64 - 19} = 4\left(1 - \frac{19}{64}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

In dem einen Falle wäre $x$ gleich $\frac{2}{3}$, in dem andern Falle wäre $x$ gleich $-\frac{19}{64}\cdot$ Beide Werte von $x$ sind so groß, daß man von der Reihe

$$(1 + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{6} + \frac{2\,.\,5}{3\,.\,6}\,\frac{x^3}{9} - \frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}\,\frac{x^4}{12} + - \cdots$$

recht viele Glieder brauchen würde, um $\sqrt[3]{45}$ z. B. auf 10 Dezimalstellen genau zu berechnen.

Viel schneller kommt man aber zum Ziele, wenn man

$$\sqrt[3]{45} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8\,.\,45} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{360}$$

setzt, denn es wird dann

$$\sqrt[3]{45} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{343 + 17} = \frac{7}{2}\left(1 + \frac{17}{343}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Jetzt ist $x$ gleich $\frac{17}{343}$, also so klein, daß nur wenige Glieder für die Berechnung von 10 Dezimalstellen erforderlich sind.

In ähnlicher Weise kann man sich allgemein helfen, um kleine Werte von $x$ zu erhalten.

## § 44.

## Der Logarithmus.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 100 bis 105.)

Setzt man

$$f(x) = \ln x,$$

so kann man die *Mac-Laurin*sche Reihe nicht anwenden, weil $f(x)$ und alle Ableitungen davon für $x = 0$ unendlich groß werden. Deshalb setzt man

$$
(1.)\quad \begin{cases}
f(x) = \ln(1 + x), & \text{also } f(0) = 0, \\
f'(x) = (1 + x)^{-1}, & \text{„ } f'(0) = +1, \\
f''(x) = -1 \,.\, (1 + x)^{-2}, & \text{„ } f''(0) = -1, \\
f'''(x) = 1 \,.\, 2(1 + x)^{-3}, & \text{„ } f'''(0) = +1 \,.\, 2, \\
f^{(4)}(x) = -1 \,.\, 2 \,.\, 3(1 + x)^{-4}, & \text{„ } f^{(4)}(0) = -1 \,.\, 2 \,.\, 3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}, & \text{„ } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \\
f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(1 + x)^{-n-1}, &
\end{cases}
$$

also

$$(1\text{a.})\qquad f^{(n+1)}(\Theta x) = (-1)^n n!\,(1 + \Theta x)^{-n-1}.$$

Durch Anwendung der *Mac-Laurin*schen Reihe erhält man dann

$$(2.)\qquad \ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n} + R.$$

Auch hier kann man zeigen, daß $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$, wenn $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt.

Ist zunächst

$$(3.)\qquad 0 \leqq x \leqq +1,$$

so wendet man die erste Form des Restes an und erhält

$$(4.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1 + \Theta x)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1 + \Theta x}\right)^{n+1}.$$

Für $x = 1$ wird also

$$R = \frac{\pm 1}{(n+1)(1 + \Theta)^{n+1}}$$

beliebig klein, selbst wenn $\Theta$ gleich 0 sein sollte, denn $\dfrac{1}{n+1}$ wird beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$. Ist aber $x$ ein echter Bruch, so ist

$$\frac{x}{1+\Theta x} \leqq x, \quad \text{also} \quad \left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1} \leqq x^{n+1};$$

dann wird $R$ erst recht beliebig klein, da die Faktoren

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1}$$

beide beliebig klein werden.

Ist

$$(5.) \qquad -1 < x \leqq 0,$$

so wendet man wieder die dritte Form des Restes an und erhält, indem man $x$ mit $-z$ vertauscht,

$$(6.) \quad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1} = (-1)^n (1+\Theta x)^{-n-1}(1-\Theta)^n x^{n+1}$$

$$= -\frac{z}{1-\Theta z} \cdot \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^n.$$

Nun folgt aus der Ungleichung (5.), daß

$$(7.) \quad 1 > z \geqq 0, \quad 1 \geqq \Theta \geqq \Theta z, \quad 0 \leqq 1-\Theta \leqq 1-\Theta z,$$

und deshalb

$$0 \leqq z(1-\Theta) = z - \Theta z \leqq z(1-\Theta z)$$

ist, folglich wird

$$\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \leqq z, \quad \text{und} \quad \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^n \leqq z^n$$

wird beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$. Dasselbe gilt daher auch für $R$.

Somit erhält man für

$$-1 < x \leqq +1$$

die Entwickelung

$$(8.) \qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

Es ist z. B.

$$(8\text{a.}) \qquad \ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots.$$

Für die numerische Berechnung der Logarithmen ist die Reihe in Gleichung (8.) noch nicht sehr geeignet, weil man sie nur für die Berechnung der Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 2 benutzen kann, und weil man sehr viele Glieder der Reihe braucht, um den Logarithmus auch nur auf einige Dezimalstellen genau zu erhalten.

Man kann aber aus dieser Reihe einige andere, für die numerische Berechnung weit geeignetere Reihen ableiten. Setzt man z. B. in Gleichung (8.) $x = \frac{y}{a}$, so erhält man

$$\ln\left(1 + \frac{y}{a}\right) = \ln\left(\frac{a+y}{a}\right) = \ln(a+y) - \ln a$$
$$= \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots,$$

oder

$$\text{(9.)} \qquad \ln(a+y) = \ln a + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots,$$

wenn $\frac{y}{a}$ ein echter Bruch ist. Für $y = 1$ folgt hieraus

$$\text{(9a.)} \qquad \ln(a+1) = \ln a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^4} + - \cdots.$$

Eine noch brauchbarere Reihe erhält man auf folgende Weise. Nach Gleichung (8.) ist

$$\ln(1+x) = +\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots,$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - - \cdots;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichungen voneinander subtrahiert, findet man

$$\text{(10.)} \quad \ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Setzt man jetzt

$$\text{(11.)} \quad x = \frac{z}{2y+z}, \text{ also } 1 + x = \frac{2y+2z}{2y+z}, \quad 1 - x = \frac{2y}{2y+z},$$

so wird

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+z}{y}, \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(y+z) - \ln y;$$

deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$(12.)\quad \ln(y+z)=\ln y+2\left[\frac{z}{2y+z}+\frac{z^3}{3(2y+z)^3}+\frac{z^5}{5(2y+z)^5}+\cdots\right].$$

Sind $y$ und $z$ positive Zahlen, so wird $x$ ein echter Bruch; dann gilt also die durch Gleichung (12.) gegebene Entwickelung.

Diese Reihe wird besonders häufig angewendet für den Fall, wo $z=1$ ist; dann wird nämlich

$$(12a.)\quad \ln(y+1)=\ln y+2\left[\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3(2y+1)^3}+\frac{1}{5(2y+1)^5}+\cdots\right].$$

Um sich darüber Rechenschaft zu geben, mit welcher Genauigkeit man $\ln(y+1)$ erhält, wenn man die Entwickelung in Gleichung (12a.) bis zu dem Gliede $\frac{1}{(2n-1)(2y+1)^{2n-1}}$ fortsetzt, beachte man, daß

$$(13.)\qquad \ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}+R_1,$$

$$(14.)\quad \ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}+R_2$$

wird, wobei

$$(15.)\qquad R_1=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\Theta_1 x)^{2n+1}},\quad R_2=\frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\Theta_2 x)^{2n+1}}$$

ist. Daraus folgt

$$(16.)\quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+R_1-R_2.$$

Da nun

$$(17.)\qquad \frac{x}{1+\Theta_1 x}\leqq x,\quad \frac{x}{1-\Theta_2 x}\leqq\frac{x}{1-x}$$

ist, so wird

$$R_1-R_2=\frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{x}{1+\Theta_1 x}\right)^{2n+1}+\left(\frac{x}{1-\Theta_2 x}\right)^{2n+1}\right],$$

$$R_1-R_2\leqq\frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left[1+\frac{1}{(1-x)^{2n+1}}\right],$$

$$(18.)\quad R_1 - R_2 \leqq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{(1-x)^{2n+1}+1}{(1-x)^{2n+1}} \leqq \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x)^{2n+1}}.$$

Setzt man jetzt wieder

$$(19.)\quad x = \frac{1}{2y+1}, \text{ also } 1 - x = \frac{2y}{2y+1}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{1}{2y},$$

so findet man aus Ungleichung (18.)

$$(20.)\quad R_1 - R_2 \leqq \frac{2}{(2n+1)(2y)^{2n+1}}.$$

## § 45.

## Berechnung der natürlichen Logarithmen.

**Aufgabe.** Man soll die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 auf 8 Dezimalstellen genau berechnen.

**Auflösung.** Um in dem Resultate eine Genauigkeit von 8 Dezimalstellen zu erzielen, wird es gut sein, die Rechnung bis auf 10 Dezimalstellen durchzuführen.

Zunächst ist

$$(1.)\quad \ln 1 = 0.$$

Ferner setze man in der Reihe

$$(2.)\quad \ln(y+1) = \ln y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right]$$

$y = 1$, dann wird

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$\begin{array}{llll}
1 : 3 & = 0{,}333\,333\,333\,3, & 1 : 3 & = 0{,}333\,333\,333\,3, \\
1 : 3^3 & = 0{,}037\,037\,037\,0, & 1 : 3 \cdot 3^3 & = 0{,}012\,345\,679\,0, \\
1 : 3^5 & = 0{,}004\,115\,226\,3, & 1 : 5 \cdot 3^5 & = 0{,}000\,823\,045\,3, \\
1 : 3^7 & = 0{,}000\,457\,247\,4, & 1 : 7 \cdot 3^7 & = 0{,}000\,065\,321\,1, \\
1 : 3^9 & = 0{,}000\,050\,805\,3, & 1 : 9 \cdot 3^9 & = 0{,}000\,005\,645\,0, \\
1 : 3^{11} & = 0{,}000\,005\,645\,0, & 1 : 11 \cdot 3^{11} & = 0{,}000\,000\,513\,2, \\
1 : 3^{13} & = 0{,}000\,000\,627\,2, & 1 : 13 \cdot 3^{13} & = 0{,}000\,000\,048\,2, \\
1 : 3^{15} & = 0{,}000\,000\,069\,7, & 1 : 15 \cdot 3^{15} & = 0{,}000\,000\,004\,6, \\
1 : 3^{17} & = 0{,}000\,000\,007\,7, & 1 : 17 \cdot 3^{17} & = 0{,}000\,000\,000\,5,
\end{array}$$

folglich ist

$$\frac{1}{2}\ln 2 = 0{,}346\,573\,590\,2$$

und

(3.) $$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\,4.$$

Setzt man in Gleichung (2.) $y = 2$, so erhält man

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$\begin{array}{llrl}
1:5 &= 0{,}2, & 1:5 &= 0{,}200\,000\,000\,0,\\
1:5^3 &= 0{,}008, & 1:3\,.\,5^3 &= 0{,}002\,666\,666\,7,\\
1:5^5 &= 0{,}000\,32, & 1:5\,.\,5^5 &= 0{,}000\,064\,000\,0,\\
1:5^7 &= 0{,}000\,012\,8, & 1:7\,.\,5^7 &= 0{,}000\,001\,828\,6,\\
1:5^9 &= 0{,}000\,000\,512, & 1:9\,.\,5^9 &= 0{,}000\,000\,056\,9,\\
1:5^{11} &= 0{,}000\,000\,020\,5, & 1:11\,.\,5^{11} &= 0{,}000\,000\,001\,9,\\
1:5^{13} &= 0{,}000\,000\,000\,8, & 1:13\,.\,5^{13} &= 0{,}000\,000\,000\,1,
\end{array}$$

folglich ist

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots = 0{,}202\,732\,554\,2,$$

$$2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots\right) = 0{,}405\,465\,108\,4,$$

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\,4.$$

Dies gibt

(4.) $$\ln 3 = 1{,}098\,612\,288\,8.$$

Ferner wird

(5.) $$\ln 4 = 2\,.\ln 2 = 1{,}386\,294\,360\,8.$$

Für $y = 4$ folgt aus Gleichung (2.)

$$\ln 5 = \ln 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$\begin{array}{llrl}
1:9 &= 0{,}111\,111\,111\,1, & 1:9 &= 0{,}111\,111\,111\,1,\\
1:9^3 &= 0{,}001\,371\,742\,1, & 1:3\,.\,9^3 &= 0{,}000\,457\,247\,4,\\
1:9^5 &= 0{,}000\,016\,935\,1, & 1:5\,.\,9^5 &= 0{,}000\,003\,387\,0,\\
1:9^7 &= 0{,}000\,000\,209\,1, & 1:7\,.\,9^7 &= 0{,}000\,000\,029\,9,\\
1:9^9 &= 0{,}000\,000\,002\,6, & 1:9\,.\,9^9 &= 0{,}000\,000\,000\,3,
\end{array}$$

folglich ist

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \,.\, 9^3} + \frac{1}{5 \,.\, 9^5} + \cdots = 0{,}111\,571\,775\,7,$$

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \,.\, 9^3} + \frac{1}{5 \,.\, 9^5} + \cdots\right) = 0{,}223\,143\,551\,4,$$

$$\ln 4 = 1{,}386\,294\,360\,8;$$

dies gibt

$$\ln 5 = 1{,}609\,437\,912\,2. \tag{6.}$$

Ferner ist

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 = 0{,}693\,147\,180\,4 + 1{,}098\,612\,288\,8,$$

oder

$$\ln 6 = 1{,}791\,759\,469\,2. \tag{7.}$$

Für $y = 6$ folgt aus Gleichung (2.)

$$\ln 7 = \ln 6 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \,.\, 13^3} + \frac{1}{5 \,.\, 13^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$1 : 13 = 0{,}076\,923\,076\,9,$ $\quad 1 : 13 = 0{,}076\,923\,076\,9,$

$1 : 13^3 = 0{,}000\,455\,166\,1,$ $\quad 1 : 3 \,.\, 13^3 = 0{,}000\,151\,722\,0,$

$1 : 13^5 = 0{,}000\,002\,693\,3,$ $\quad 1 : 5 \,.\, 13^5 = 0{,}000\,000\,538\,7,$

$1 : 13^7 = 0{,}000\,000\,015\,9,$ $\quad 1 : 7 \,.\, 13^7 = 0{,}000\,000\,002\,3,$

folglich ist

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \,.\, 13^3} + \frac{1}{5 \,.\, 13^5} + \cdots = 0{,}077\,075\,339\,9,$$

$$2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \,.\, 13^3} + \frac{1}{5 \,.\, 13^5} + \cdots\right) = 0{,}154\,150\,679\,8,$$

$$\ln 6 = 1{,}791\,759\,469\,2;$$

dies gibt

$$\ln 7 = 1{,}945\,910\,149\,0; \tag{8.}$$

$$\ln 8 = 3 \,.\, \ln 2 = 3 \,.\, 0{,}693\,147\,180\,4,$$

also

(9.) $\ln 8 = 2{,}079\,441\,541\,2;$

$\ln 9 = 2 \,.\, \ln 3 = 2 \,.\, 1{,}098\,612\,288\,8,$

also

(10.) $\ln 9 = 2{,}197\,224\,577\,6;$

$\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 = 0{,}693\,147\,180\,4 + 1{,}609\,437\,912\,2,$

also

(11.) $\ln 10 = 2{,}302\,585\,092\,6.$

Berücksichtigt man nun, daß die beiden letzten Dezimalstellen in den vorstehenden Rechnungen nicht mehr ganz zuverlässig sind, und behält man deshalb nur 8 Stellen bei, so ergibt sich als Resultat der Rechnung die folgende Tabelle:

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned}
\ln 1 &= 0,\\
\ln 2 &= 0{,}693\,147\,18,\\
\ln 3 &= 1{,}098\,612\,29,\\
\ln 4 &= 1{,}386\,294\,36,\\
\ln 5 &= 1{,}609\,437\,91,\\
\ln 6 &= 1{,}791\,759\,47,\\
\ln 7 &= 1{,}945\,910\,15,\\
\ln 8 &= 2{,}079\,441\,54,\\
\ln 9 &= 2{,}197\,224\,58,\\
\ln 10 &= 2{,}302\,585\,09.
\end{aligned}\right.$$

Will man hieraus die Logarithmen mit der Basis 10 berechnen, so hat man nach den Ausführungen in § 18 die gefundenen Werte mit dem *Modul* des *Briggs*schen Logarithmensystems, nämlich mit

$$(13.)\quad \log e = \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2{,}302\,585\,09} = 0{,}434\,294\,48$$

zu multiplizieren.

Bezeichnet man also $\log e$ mit $M$, so erhält man für die Logarithmen mit der Basis 10 folgende Tabelle:

$$(14.)\quad \begin{cases} \log 2 \;\; = M \,.\, \ln 2 \;\; = 0{,}301\,029\,99, \\ \log 3 \;\; = M \,.\, \ln 3 \;\; = 0{,}477\,121\,25, \\ \log 4 \;\; = M \,.\, \ln 4 \;\; = 0{,}602\,059\,99, \\ \log 5 \;\; = M \,.\, \ln 5 \;\; = 0{,}698\,970\,00, \\ \log 6 \;\; = M \,.\, \ln 6 \;\; = 0{,}778\,151\,25, \\ \log 7 \;\; = M \,.\, \ln 7 \;\; = 0{,}845\,098\,04, \\ \log 8 \;\; = M \,.\, \ln 8 \;\; = 0{,}903\,089\,98, \\ \log 9 \;\; = M \,.\, \ln 9 \;\; = 0{,}954\,242\,51, \\ \log 10 = M \,.\, \ln 10 = 1{,}000\,000\,00. \end{cases}$$

Für die Berechnung der Logarithmen aller übrigen Zahlen mit der Basis 10 findet man aus Gleichung (2.) durch Multiplikation mit $M$

$$(15.)\quad \log(y+1) = \log y + 2M\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \cdots\right].$$

Dabei braucht man von der Reihe höchstens nur noch die drei ersten Glieder, wenn man auf 8 Dezimalstellen genau rechnen will. Bei etwas größeren Zahlen werden sogar schon die beiden ersten Glieder ausreichen. So ist z. B.

$$\ln 53 = \ln 52 + 2\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{3\,.\,105^3} + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{105} = 0{,}009\,523\,809\,5,$$

$$\frac{1}{3\,.\,105^3} = 0{,}000\,000\,287\,9;$$

folglich ist

$$\begin{aligned} \ln 53 &= \ln 52 + 2\,.\,0{,}009\,524\,097\,4 \\ &= \ln 52 + 0{,}019\,048\,194\,8. \end{aligned}$$

Hier hat schon das *dritte* Glied der Reihe in den ersten 10 Dezimalstellen keine geltende Ziffer mehr.

Allerdings darf man es sich nicht verhehlen, daß die Fehler, welche man durch Vernachlässigung der späteren Dezimalstellen begeht, bei diesem Verfahren um so größer werden, je weiter man es fortsetzt. Zu dem Fehler, der schon bei der Bildung von $\ln y$ begangen ist, tritt ein neuer Fehler bei der Bildung von

$\ln(y+1)$ hinzu. Ist ferner die Zahl $n$, deren Logarithmus man bilden will, eine zusammengesetzte, ist z. B.

$$n = abc\ldots,$$

so wird

$$\ln n = \ln a + \ln b + \ln c + \cdots,$$

so daß der Fehler bei $\ln n$ gleich der algebraischen Summe der Fehler bei $\ln a$, $\ln b$, $\ln c, \ldots$ ist.

Man muß daher die Logarithmen der Primzahlen 2, 3 und 5, die am häufigsten bei der Bildung zusammengesetzter Zahlen vorkommen, ganz besonders genau berechnen und kann das in folgender Weise. Löst man die Gleichungen

$$\text{(16.)}\quad \begin{cases} \ln\left(\frac{16}{15}\right) = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5, \\ \ln\left(\frac{25}{24}\right) = -3\ln 2 - \ln 3 + 2\ln 5, \\ \ln\left(\frac{81}{80}\right) = -4\ln 2 + 4\ln 3 - \ln 5 \end{cases}$$

nach $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ auf, so erhält man

$$\text{(17.)}\quad \begin{cases} \ln 2 = 7\ln\left(\frac{16}{15}\right) + 5\ln\left(\frac{25}{24}\right) + 3\ln\left(\frac{81}{80}\right), \\ \ln 3 = 11\ln\left(\frac{16}{15}\right) + 8\ln\left(\frac{25}{24}\right) + 5\ln\left(\frac{81}{80}\right), \\ \ln 5 = 16\ln\left(\frac{16}{15}\right) + 12\ln\left(\frac{25}{24}\right) + 7\ln\left(\frac{81}{80}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber nach Gleichung (2.), wenn man für $y$ die Werte 15, 24 und 80 einsetzt und mit 20 Dezimalstellen rechnet,

$$\text{(18.)}\quad \begin{cases} \ln\left(\frac{16}{15}\right) = 2\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3\,.\,31^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}064\,538\,521\,137\,571\,171\,70, \\ \ln\left(\frac{25}{24}\right) = 2\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3\,.\,49^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}040\,821\,994\,520\,255\,129\,56, \\ \ln\left(\frac{81}{80}\right) = 2\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\,.\,161^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}012\,422\,519\,998\,557\,153\,30. \end{cases}$$

Bei der Berechnung von $\ln\left(\frac{16}{15}\right)$ und $\ln\left(\frac{25}{24}\right)$ braucht man hierbei nur 6 Glieder der Entwickelung, bei der Berechnung von $\ln\left(\frac{81}{80}\right)$ sogar nur 4. Dadurch findet man

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,309\,60,\\
\ln 3 &= 1{,}098\,612\,288\,668\,109\,691\,68,\\
\ln 5 &= 1{,}609\,437\,912\,434\,100\,375\,02,\\
\ln 10 &= 2{,}302\,585\,092\,994\,045\,684\,62.
\end{aligned}$$

Es ist nicht zu verlangen, daß in diesen Resultaten die beiden letzten Dezimalstellen noch genau richtig sind; und zwar ist

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| bei | $\ln 2$, | $\ln 3$, | $\ln 5$, | $\ln 10$ |
| die obere Fehlergrenze | $\pm 48$, | $\pm 67$, | $\pm 112$, | $\pm 160$, |
| und der wirkliche Fehler | $+18$, | $+28$, | $+42$, | $+60$; |

d. h. die hier angeführten Werte von $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 10$ sind in den letzten beiden Dezimalstellen bezw. um 18, 28, 42, 60 zu groß.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, die hier angedeutete Rechnung wirklich durchzuführen.

Jetzt ist es auch möglich, $\ln 7$ sehr genau auszurechnen, denn es ist

$$7^2 = \frac{49}{50} \cdot 2 \cdot 5^2,$$

also

$$2\ln 7 = \ln 2 + 2\ln 5 - \ln\left(\frac{50}{49}\right).$$

Dabei ist nach Gleichung (2.) für $y = 49$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{50}{49}\right) &= 2\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{3\,.\,99^3} + \frac{1}{5\,.\,99^5} + \cdots\right)\\
&= 0{,}020\,202\,707\,317\,519\,448\,40,
\end{aligned}$$

und wenn man die hier gefundenen Werte zugrunde legt,

$$\ln 2 + 2\ln 5 = 3{,}912\,023\,005\,429\,146\,059\,64,$$

also

$$\begin{aligned}
2\ln 7 &= 3{,}891\,820\,298\,110\,626\,611\,24,\\
\ln 7 &= 1{,}945\,910\,149\,055\,313\,305\,62,
\end{aligned}$$

ein Wert, der in den beiden letzten Dezimalstellen um 51 zu groß ist.

## § 46.

## Partes proportionales.

Nach den Gleichungen (16.) und (18.) in § 44 war

$$(1.)\quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R_1 - R_2,$$

wobei

$$(2.)\quad R_1 - R_2 \leqq \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n+1}$$

ist. Dies gibt für $n = 1$, wenn man der Kürze wegen $R$ statt $R_1 - R_2$ schreibt,

$$(3.)\quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + R,$$

wo

$$(4.)\quad R \leqq \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3.$$

Setzt man wieder

$$x = \frac{z}{2y+z},$$

also

$$1 + x = \frac{2y+2z}{2y+z}, \quad 1 - x = \frac{2y}{2y+z},$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+z}{y}, \qquad \frac{x}{1-x} = \frac{z}{2y},$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.)\quad \ln(y+z) = \ln y + \frac{2z}{2y+z} + R,$$

wobei nach Ungleichung (4.)

$$(6.)\quad R \leqq \frac{z^3}{12y^3}.$$

Ist also $y > 10000$, $z \leqq 1$, so wird

$$(7.)\quad R \leqq \frac{1}{12 \cdot 10^{12}},$$

d. h. $R$ hat in den ersten 13 Dezimalstellen keine geltende Ziffer mehr.

Darauf gründet sich bei dem Gebrauche der Logarithmentafeln die Berechtigung für die Interpolation durch die *partes proportionales.*

Sind z. B. in einer solchen Tafel die Logarithmen für alle fünfstelligen Zahlen angegeben, so kann man daraus doch noch den Logarithmus einer siebenstelligen Zahl $a$ bis auf 7 Dezimalstellen genau finden, wie folgt.

Da es bei den *Briggs*schen Logarithmen nur auf die Mantisse ankommt, so setze man bei der Zahl $a$ das Dezimal-Komma hinter die fünfte Ziffer, nenne die Ganzen $y$ und den übrig bleibenden Dezimalbruch $z$, dann ist

$$a = y + z, \quad \text{wobei} \quad y > 10000 \quad \text{und} \quad z < 1.$$

Jetzt ist nach Gleichung (3.)

$$\ln a = \ln(y + z) = \ln y + \frac{2z}{2y + z} + R_z, \tag{8.}$$

$$\ln(y + 1) = \ln y + \frac{2}{2y + 1} + R_1, \tag{9.}$$

wobei man aber die beiden Reste $R_z$ und $R_1$ vernachlässigen darf, da beide in den ersten 13 Dezimalstellen keine geltende Ziffer haben. Setzt man daher

$$\Delta = \ln(y + 1) - \ln y = \frac{2}{2y + 1}, \tag{10.}$$

so wird

$$\ln a = \ln y + \frac{2z}{2y + z}, \tag{11.}$$

oder, wenn man die Gleichung

$$0 = z \,.\, \Delta - \frac{2z}{2y + 1}$$

addiert,

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln y + z \,.\, \Delta + \frac{2z}{2y + z} - \frac{2z}{2y + 1} \\ &= \ln y + z \,.\, \Delta + \frac{2z(1 - z)}{(2y + z)(2y + 1)}. \end{aligned} \tag{12.}$$

Dabei ist aber, da von den beiden Faktoren $z$ und $1 - z$ der eine kleiner als $\frac{1}{2}$ und der andere kleiner als 1 sein muß,

$$\frac{2z(1-z)}{(2y+z)(2y+1)} < \frac{2z(1-z)}{4y^2} < \frac{1}{4y^2} < \frac{1}{4 \,.\, 10^8}\,.$$

Setzt man also

$$\ln a = \ln y + z \,.\, \varDelta,$$

so ist der Fehler so klein, daß er in den ersten 8 Dezimalstellen keine geltende Ziffer hat.

Man braucht also nur, um $\ln a$ zu erhalten, in den Tafeln $\ln y$ aufzuschlagen und den Ausdruck

$$z \,.\, \varDelta = z[\ln(y+1) - \ln y]$$

zu addieren, welcher unter dem Namen „*partes proportionales*“ in den Logarithmentafeln an der Seite angegeben ist.

Das Gesagte gilt zunächst für *natürliche* Logarithmen, da aber die *Briggs*schen Logarithmen aus diesen entstehen, indem man sie sämtlich mit $M = \log e$ multipliziert, so gilt es in ähnlicher Weise auch für *Briggs*sche Logarithmen und ebenso für jedes andere Logarithmen-System.

## § 47.

## Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Bei manchen Funktionen ist die Bildung der höheren Ableitungen sehr umständlich; deshalb wählt man zur Entwickelung nach steigenden Potenzen von $x$ einen etwas anderen Weg.

Nach der *Mac-Laurin*schen Reihe wird

$$(1.)\quad f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + R,$$

wobei

$$(2.)\qquad A = f(0),\quad A_1 = \frac{f'(0)}{1!},\quad A_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots$$

wird. Aus Gleichung (1.) folgt aber durch Differentiation

$$(3.)\quad f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots + nA_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx}\,.$$

Ist also die Entwickelung von $f'(x)$ bekannt, so findet man die Werte der Koeffizienten $A_1$, $A_2$, $A_3, \ldots$ aus Gleichung (3.). Man muß aber noch zeigen, daß in der auf diese Weise gefundenen Entwickelung der Rest $R$ beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$. Deshalb soll der folgende Satz bewiesen werden:

*Ist für hinreichend große Werte von $n$ die Größe $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein, so gilt dasselbe auch von $R$.*

**Beweis.** Ist $\varepsilon$ eine beliebig kleine Zahl, so gilt für hinreichend große Werte von $n$ die Voraussetzung

$$-\varepsilon < \frac{dR}{dx} < +\varepsilon, \tag{4.}$$

also

$$\frac{dR}{dx} - \varepsilon < 0, \quad \frac{dR}{dx} + \varepsilon > 0,$$

oder

$$\frac{d(R - \varepsilon x)}{dx} < 0, \quad \frac{d(R + \varepsilon x)}{dx} > 0, \tag{4a.}$$

deshalb nimmt $R + \varepsilon x$ mit $x$ beständig zu, während $R - \varepsilon x$ beständig abnimmt, so lange $x$ zunimmt. Für $x = 0$ sind aber beide Funktionen gleich 0, folglich ist für positive Werte von $x$

$$R + \varepsilon x > 0 \quad \text{und} \quad R - \varepsilon x < 0, \tag{5.}$$

oder

$$-\varepsilon x < R < +\varepsilon x. \tag{5a.}$$

Für negative Werte von $x$ findet man ebenso

$$+\varepsilon x < R < -\varepsilon x. \tag{6.}$$

In beiden Fällen wird $R$ beliebig klein, denn $\varepsilon$ ist beliebig klein und deshalb auch $\varepsilon x$.

Dabei ist zu beachten, daß $\frac{dR}{dx}$ das Restglied in der Entwickelung von $f'(x)$ nach steigenden Potenzen von $x$ ist. Man kann daher dem eben bewiesenen Satze auch die Fassung geben:

*Läßt sich $f'(x)$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln, so gilt dasselbe auch von $f(x)$.*

Mit Hilfe dieses Satzes findet man z. B. sehr leicht die Entwickelung von

$$f(x) = \ln(1 + x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + R,$$

denn es wird nach dem binomischen Lehrsatze für

$$-1 < x < +1$$

$$(7.)\quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{dR}{dx},$$

folglich ist

$$A = f(0) = \ln 1 = 0,\quad A_1 = 1,\quad 2A_2 = -1,\quad 3A_3 = +1, \ldots$$

und deshalb in Übereinstimmung mit Formel Nr. 100 der Tabelle

$$(8.)\qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

Wenn $-1 < x < +1$ ist, so wird dabei $R$ beliebig klein, weil das Restglied $\frac{dR}{dx}$ in der Entwickelung von $f'(x)$ beliebig klein ist.

## § 48.

## Entwickelung der Funktion arctg $x$ nach steigenden Potenzen von $x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 106.)

**Aufgabe.** Man soll die Funktion arctg$x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Hier ist

$$(1.)\quad f(x) = \operatorname{arctg} x = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + R,$$

$$(2.)\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots + nA_nx^{n-1} + \frac{dR}{dx}.$$

Nun wird aber nach dem binomischen Lehrsatze, wenn $x$ ein echter Bruch ist,

$$(3.)\qquad \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots,$$

folglich ist

$$A = f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

$$A_1 = 1,\quad A_2 = 0,\quad 3A_3 = -1,\quad 4A_4 = 0,\quad 5A_5 = +1, \ldots$$

und deshalb

$$(4.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \\ \qquad\qquad \text{für } -1 < x < +1. \end{array}\right.$$

$R$ wird dabei beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$, weil das Restglied $\frac{dR}{dx}$ in der Entwickelung von $f'(x)$ beliebig klein ist.

## § 49.

## Berechnung der Zahl $\pi$ durch Anwendung der Entwickelung von arc tg$x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 107 bis 109.)

Die Entwickelung von arctg$x$ nach Potenzen von $x$ ist sicher richtig, so lange $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt. Es läßt sich aber auch beweisen, daß sie noch für $x = \pm 1$ richtig bleibt*) Wenn dies der Fall ist, so findet man daraus unmittelbar den Wert von $\frac{\pi}{4}$, weil $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gleich 1, also $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ist. Denn die Reihe gibt für $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots. \tag{1.}$$

Diese Reihe heißt die „*Reihe von Leibniz*".

Von dieser Reihe würde man sehr viele Glieder brauchen, wollte man die Zahl $\pi$ auch nur auf wenige Dezimalstellen genau berechnen; man kann aber die Reihe so umformen, daß man Reihen erhält, welche für die numerische Berechnung der Zahl $\pi$ sehr wohl geeignet sind. Aus Gleichung (1.) folgt nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots,$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots\right); \tag{2.}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \cdots,$$

oder

*) Der Beweis kann an dieser Stelle übergangen werden, weil die Folgerungen des Satzes hier nur geschichtliches Interesse haben. In den Beispielen auf Seite 250 (§ 53) wird der Beweis nachgeholt.

$$(3.)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{143} + \cdots\right).$$

Berücksichtigt man in Gleichung (2.) die ersten $n$ Glieder und ebenso in Gleichung (3.), so findet man zwei Zahlen, zwischen denen $\frac{\pi}{4}$ liegt. Das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Näherungswerten wird daher schon ein wesentlich genaueres Resultat liefern. Deshalb addiert man die Gleichungen

$$(2\text{a.})\qquad \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{5\,.\,7} + \frac{1}{9\,.\,11} + \cdots\right)$$

und

$$(3\text{a.})\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{3\,.\,5} + \frac{1}{7\,.\,9} + \frac{1}{11\,.\,13} + \cdots\right);$$

dadurch erhält man

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2\left(\frac{1}{1\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,7} - \frac{1}{7\,.\,9} + \frac{1}{9\,.\,11} - \frac{1}{11\,.\,13} + - \cdots\right),$$

also

$$(4.)\qquad \frac{\pi}{2} = 1 + 2\,.\,4\left(\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,7\,.\,9} + \frac{1}{9\,.\,11\,.\,13} + \cdots\right),$$

oder

$$(5.)\qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{1.3} - 2.4\left(\frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{11.13.15} + \cdots\right).$$

Berücksichtigt man in den Klammern wieder $n$ Glieder, so findet man aus Gleichung (4.) einen Wert, der zu klein ist, und aus Gleichung (5.) einen Wert, der zu groß ist. Deshalb nimmt man noch einmal das arithmetische Mittel, indem man die Gleichungen (4.) und (5.) addiert. Dies gibt

$$\pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2\,.\,4\left(\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5} - \frac{1}{3\,.\,5\,.\,7} + \frac{1}{5\,.\,7\,.\,9} - \frac{1}{7\,.\,9\,.\,11} + - \cdots\right),$$

also

$$(6.)\quad \pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2.4.6\left(\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{5.7.9.11} + \cdots\right),$$

oder

$$(7.)\quad \pi = 2 + \frac{2}{1.3} + \frac{2.4}{1.3.5}$$
$$-2.4.6\left(\frac{1}{3.5.7.9} + \frac{1}{7.9.11.13} + \cdots\right).$$

In dieser Weise kann man fortfahren, wobei man immer stärker konvergierende Reihen erhält.

Noch schneller führen die folgenden Methoden zum Ziele. Setzt man

$$(8.)\quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad u = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$(9.)\quad \operatorname{tg} v = \frac{1}{3}, \quad \text{„} \quad v = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right),$$

dann wird

$$(10.)\quad \operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1,$$

also

$$(11.)\quad u + v = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dies gibt

$$(12.)\quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right),$$

oder

$$(13.)\quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - + \cdots\right),$$

oder

$$(14.)\quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots.$$

Diese Reihe heißt die „*Reihe von Euler*". Sie ist zur Berechnung von $\pi$ schon weit geeigneter als die Reihe von *Leibniz.*

*Machin* hat eine Reihe zur Berechnung von $\pi$ aufgestellt, welche für die numerische Berechnung noch zweckmäßiger ist. Er setzte zunächst

$$(15.)\qquad \operatorname{tg} u = \frac{1}{5}, \quad \text{also} \quad u = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right).$$

Hieraus folgt

$$(16.)\qquad \operatorname{tg}(2u) = \frac{2\operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$(17.)\qquad \operatorname{tg}(4u) = \frac{2\operatorname{tg}(2u)}{1 - \operatorname{tg}^2(2u)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Es ist demnach

$$\operatorname{tg}(4u) > 1, \quad \text{also} \quad 4u > \frac{\pi}{4}.$$

Der Unterschied zwischen $4u$ und $\frac{\pi}{4}$ ist offenbar sehr klein; bezeichnet man ihn mit $v$, so wird

$$(18.)\qquad 4u = \frac{\pi}{4} + v, \quad \text{oder} \quad 4u - v = \frac{\pi}{4}$$

und

$$(19.)\qquad v = 4u - \frac{\pi}{4}.$$

Deshalb erhält man

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}(4u) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}(4u)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)},$$

oder

$$(20.)\qquad \operatorname{tg} v = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}\cdot 1} = \frac{1}{239}.$$

Dies gibt

$$(21.)\qquad v = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right),$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.) und (15.)

$$(22.)\qquad \frac{\pi}{4} = 4u - v = 4\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right),$$

oder

$$(23.)\quad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + - \cdots\right).$$

Will man also den Wert von $\pi$ bis auf 8 Dezimalstellen genau berechnen, so findet man

$$1:5 = 0{,}200\,000\,000\,0, \quad -1:3\;.\;5^3 = -0{,}002\,666\,666\,7,$$
$$1:5\,.\,5^5 = 0{,}000\,064\,000\,0, \quad -1:7\;.\;5^7 = -0{,}000\,001\,828\,6,$$
$$1:9\,.\,5^9 = 0{,}000\,000\,056\,9, \quad -1:11\,.\,5^{11} = -0{,}000\,000\,001\,9,$$
$$1:13\,.\,5^{13} = 0{,}000\,000\,000\,1,$$

also

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}200\,064\,057\,0 - 0{,}002\,668\,497\,2$$
$$= 0{,}197\,395\,559\,8.$$

Ferner ist

$$1:239 = +\,0{,}004\,184\,100\,4$$
$$-1:3\,.\,239^3 = +\,0{,}000\,000\,024\,4,$$

also

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right) = 0{,}004\,184\,076\,0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right)$$
$$= 0{,}789\,582\,239\,2 - 0{,}004\,184\,076\,0,$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,163\,2,$$

$$\pi = 3{,}141\,592\,652\,8.$$

Hierbei sind die beiden letzten Dezimalstellen nicht mehr sicher, weil schon bei Berechnung von $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right)$ durch Vernachlässigung der folgenden Dezimalstellen ein kleiner Fehler begangen ist, der in der $10^{\text{ten}}$ Dezimalstelle kleiner als $2\frac{1}{2}$ ist. Dieser kleine Fehler wird aber bei der Bildung von $\pi$ mit 16 multipliziert, weil

$$\pi = 16 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

ist. Dazu tritt noch ein Fehler, der von $4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$ herrührt und der in der letzten Dezimalstelle kleiner ist als 4. Der Gesamtfehler ist also kleiner als

$$\frac{44}{10^{10}}.$$

Durch eine Rechnung auf mehr, z. B. auf 20 Dezimalstellen findet man dies bestätigt; es wird dann nämlich

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46.$$

Daraus erhält man ohne weiteres noch die folgenden Zahlen, welche in der Vermessungskunde häufig angewendet werden:

$$\operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017\ 453\ 292\ 519\ 943,$$

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi} = 57{,}295\ 779\ 513\ 1;$$

$$\operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}000\ 290\ 888\ 208\ 666,$$

$$\varrho' = \frac{180 \cdot 60}{\pi} = 3\ 437{,}746\ 770\ 784\ 9;$$

$$\operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000\ 004\ 848\ 136\ 811,$$

$$\varrho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206\ 264{,}806\ 247\ 096\ 4.$$

## § 50.

## Entwickelung der Funktion arcsin $x$ nach steigenden Potenzen von $x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 110.)

**Aufgabe.** Man soll die Funktion $\arcsin x$ nach steigenden Potenzen von $x$ entwickeln.

**Auflösung.** Setzt man hier

(1.) $f(x) = \arcsin x = A + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + R,$

so wird nach dem allgemeinen binomischen Lehrsatze

$$(2.)\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1} + \frac{dR}{dx}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \cdots.$$

Wenn $x^2$ kleiner ist als 1, so wird $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$, folglich gilt auch dasselbe für $R$. Aus den Gleichungen (1.) und (2.) findet man daher

$A = f(0) = \arcsin 0 = 0,$

$A_1 = 1,\quad 2A_2 = 0,\quad 3A_3 = \frac{1}{2},\quad 4A_4 = 0,\quad 5A_5 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}, \ldots;$

folglich ist

$$(3.)\quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$\text{für}\quad -1 < x < +1.$$

Auch diese Reihe kann man zur Berechnung von $\pi$ benutzen. Es ist nämlich

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\quad \text{also}\quad \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),$$

folglich wird

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5\,.\,2^5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7\;2^7} + \cdots.$$

VI. Abschnitt.

# Konvergenz der Reihen.

## § 51.

## Erklärungen und vorbereitende Beispiele.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 110.)

Ist

$$(1.)\qquad u_m = f(m)$$

eine gegebene Funktion der positiven ganzen Zahl $m$, so bilden die einzelnen Funktionswerte

$$f(0),\ f(1),\ f(2), \ldots f(n-1),$$

oder

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{n-1},$$

eine *endliche Reihe*, welche aus $n$ Gliedern besteht, und deren Summe mit $S_n$ bezeichnet werden möge. Es sei also

$$(2.)\qquad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}.$$

Wächst die positive ganze Zahl $n$ ins Unbegrenzte, so wird aus der *endlichen* Reihe eine *unendliche* Reihe. Dabei kann es vorkommen, daß sich $S_n$ mit unbegrenzt wachsendem $n$ einer *bestimmten*, *endlichen* Grenze $S$ nähert, daß also

$$(3.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = S$$

wird. In diesem Falle heißt die unendliche Reihe (oder kürzer: die Reihe) „*konvergent*".

Dies gibt die

**Erklärung.** *Eine Reihe heißt „konvergent", wenn $S_n$, die Summe der $n$ ersten Glieder, sich mit unbegrenzt wachsendem $n$*

*einer bestimmten, endlichen Grenze $S$ nähert, welche die „Summe der Reihe" genannt wird.*

Der Unterschied zwischen dieser Grenze $S$ und der Größe $S_n$ wird mit $R_n$ bezeichnet und der „*Rest*" der Reihe genannt. Es ist also

$$R_n = S - S_n, \quad \text{oder} \quad S = S_n + R_n. \tag{4.}$$

**Satz 1.** *Ist die Reihe konvergent, so wird also der Rest $R_n$ beliebig klein, wenn man $n$ hinreichend groß macht.*

Davon gilt auch unter gewissen Voraussetzungen, die in Satz 5 angegeben sind, die Umkehrung.

Wird $S_n$ mit $n$ zugleich *unendlich groß*, so heißt die Reihe „*divergent*"; wird der Wert von $S_n$ mit wachsendem $n$ dadurch, daß er zwischen verschiedenen Werten hin- und herschwankt, *unbestimmt*, so sagt man, „die Reihe *oszilliert*".

Dabei möge für die zunächst folgenden Untersuchungen die Voraussetzung gemacht werden, daß die Reihenfolge der Glieder in keiner Weise geändert werden soll.

Zahlreiche Beispiele für solche unendliche Reihen liefert der vorhergehende Abschnitt, in welchem die *Taylor*sche und die *Mac-Laurin*sche Reihe behandelt worden sind. Dort wurde auch bereits die Konvergenz der gebildeten Reihen dadurch geprüft, daß man untersuchte, ob der Rest $R_n$ für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein wird. Ist dies der Fall, so war die Reihe in der Tat *konvergent*, denn der Unterschied zwischen der Funktion $f(x+h)$ und $S_n$ wurde beliebig klein, d. h. $S_n$ näherte sich der bestimmten, endlichen Grenze $f(x+h)$ beliebig. So nähert sich z. B. für $-1 < x \leqq +1$

$$S_n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \tag{5.}$$

dem Grenzwerte

$$S = \ln(1+x) \tag{6.}$$

beliebig, wenn $n$ ins Unbegrenzte wächst; denn es wird

$$R_n = S - S_n$$

beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$.

Ein anderes Beispiel liefern die geometrischen Progressionen

$$S_n = A + Aq + Aq^2 + \cdots + Aq^{n-1} = \frac{A(1-q^n)}{1-q}, \tag{7.}$$

wenn $q$ ein echter Bruch ist, denn dann wird sich nach Formel Nr. 12a der Tabelle $S_n$ der Grenze

$$S = \frac{A}{1-q} \tag{8.}$$

nähern, wenn $n$ unbegrenzt wächst.

Auch hier wird die Differenz

$$R_n = S - S_n = \frac{Aq^n}{1-q}$$

beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$.

Soll sich $S_n$ mit wachsendem $n$ einer bestimmten, endlichen Grenze $S$ nähern, so müssen die Größen $S - S_n$, $S - S_{n+1}$ und deshalb auch

$$(S - S_n) - (S - S_{n+1}) = S_{n+1} - S_n = u_n$$

für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein werden; dies gibt

**Satz 2.** *Die Glieder einer konvergenten Reihe müssen von einer bestimmten Stelle ab immer kleiner und schließlich unendlich klein werden.*

Damit ist nicht gesagt, daß $u_{n+1}$ stets kleiner als $u_n$ sein muß; es ist vielmehr sehr wohl denkbar, daß ab und zu auch größere Glieder auf kleinere folgen; wenn aber $n$ ins Unbegrenzte wächst, so muß $u_n$ verschwindend klein werden, es muß also

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 \tag{9.}$$

sein.

Diese Bedingung ist eine *notwendige*, aber durchaus noch keine *hinreichende*; d. h. die Reihe kann sehr wohl divergieren oder oszillieren, obwohl diese Bedingung erfüllt ist, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

In der sogenannten „*harmonischen*“ Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

werden die Glieder immer kleiner und schließlich unendlich klein; trotzdem kann man zeigen, daß $S_n$ beliebig groß wird, wenn man nur $n$ hinreichend groß macht, daß also die Reihe *divergent* ist.

Man setze zu diesem Zwecke

$$n = 2 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m,$$

dann wird

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right),$$

oder

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right),$$

oder

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Da man jetzt $m$ beliebig groß machen kann, so wird auch $S_n$ beliebig groß, d. h. die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ist *divergent.*

Soll sich $S_n$ mit wachsendem $n$ einer bestimmten, endlichen Grenze $S$ nähern, so müssen die Größen

$$S - S_m, \quad S - S_{m+p},$$

und deshalb auch $(S - S_m) - (S - S_{m+p})$, oder

$$S_{m+p} - S_m = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p-1} \tag{10.}$$

für hinreichend große Werte von $m$ beliebig klein werden, wie groß die ganze Zahl $p$ auch sein mag. Dies gibt

**Satz 3.** *Ist die Reihe konvergent, so kann man m so groß machen, daß die Summe von p aufeinander folgenden Gliedern*

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p-1}$$

*beliebig klein wird, wie groß man die Zahl p auch nehmen mag.*

Setzt man $m+p$ gleich $n$, so geht Gleichung (10.) über in

$$S_n - S_m = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{n-1}. \tag{10a.}$$

Läßt man jetzt $p$ ins Unbegrenzte wachsen, so wächst auch $n$ ins Unbegrenzte, und es wird

$$\lim S_n = S.$$

Deshalb geht Gleichung (10a.) über in

$$S - S_m = R_m = \lim_{n=\infty} (u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1}). \tag{11.}$$

Für unendlich große Werte von $p$ findet man somit aus Satz 3 wiederum als besonderen Fall Satz 1.

Die in Satz 3 für die Konvergenz der Reihe angegebene Bedingung ist notwendig; sie ist aber auch hinreichend, denn von Satz 3 gilt auch die Umkehrung:

**Satz 4.** *Ist von den Gliedern* $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$ *keines unendlich groß, und wird für hinreichend große Werte von* $m$

$$S_{m+p} - S_m = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p-1} \tag{12.}$$

*beliebig klein, wie groß man* $p$ *auch nehmen mag, so ist die Reihe konvergent.*

**Beweis.** Weil $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$ endliche Größen sind, so bleibt auch ihre Summe $S_m$ sicher eine endliche Größe, so lange $m$ nicht unendlich groß wird. Nach Voraussetzung kann man jetzt $S_{m+p} - S_m$ beliebig klein machen, d. h. es wird

$$-\varepsilon < S_{m+p} - S_m < +\varepsilon,$$

oder

$$S_m - \varepsilon < S_{m+p} < S_m + \varepsilon, \tag{13.}$$

wobei $\varepsilon$ eine gegebene, beliebig kleine Größe ist. Setzt man wieder $m+p$ gleich $n$, so erkennt man hieraus, daß die Reihe *nicht divergent* sein kann, weil $S_n$, wie groß auch $p$ und $m+p$ gleich $n$ werden mögen, stets zwischen den *endlichen* Größen $S_m - \varepsilon$ und $S_m + \varepsilon$ liegt. Die Reihe kann aber auch *nicht oszillieren*, weil man die Größe $\varepsilon$ und deshalb auch das Intervall $S_m - \varepsilon$ bis $S_m + \varepsilon$, in welchem $S_n$ liegt, beliebig klein machen kann, wenn man $m$ hinreichend groß macht. Die Reihe muß vielmehr *konvergieren*, und zwar liegt ihre Summe $S$ für hinreichend große Werte von $m$ dem Werte $S_m$ beliebig nahe.

Läßt man $p$ unendlich groß werden, so geht Gleichung (12.) über in

$$(12\text{a.})\quad \lim_{n=\infty} S_n - S_m = R_m = \lim_{n=\infty}(u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{n-1}).$$

**Satz 5.** *Ist von den Gliedern* $u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{m-1}$ *keines unendlich groß, und wird der Rest* $R_m$ *für hinreichend große Werte von* $m$ *beliebig klein, so ist die Reihe konvergent.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$-\varepsilon < R_m < +\varepsilon,$$

also

$$S_m - \varepsilon < S_m + R_m < S_m + \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon$ eine gegebene beliebig kleine Größe ist. Außerdem bleibt $S_m$ eine endliche Größe, so lange $m$ nicht unendlich groß wird. Nun ist aber

$$S_m + R_m = S_m + \lim_{n=\infty}(u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1}) = \lim_{n=\infty} S_n,$$

folglich liegt $\lim S_n$ zwischen $S_m - \varepsilon$ und $S_m + \varepsilon$, d. h. es gelten für die Konvergenz der Reihe dieselben Schlüsse wie bei dem vorigen Satze.

**Satz 6.** *Faßt man die aufeinander folgenden Glieder einer konvergenten Reihe mit der Summe* $S$ *in Gruppen zusammen, indem man*

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{m_1-1} &= v_0, \\ u_{m_1} + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_2-1} &= v_1, \\ u_{m_2} + u_{m_2+1} + \cdots + u_{m_3-1} &= v_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

*setzt, so ist auch die Reihe* $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ *konvergent, und ihre Summe ist ebenfalls* $S$.

**Beweis.** Nach Voraussetzung nähert sich

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

mit wachsendem $n$ der bestimmten endlichen Grenze $S$. Setzt man jetzt $n = m_q$, so erkennt man unmittelbar, daß sich mit wachsendem $q$ auch die Summe

$$\begin{aligned} &v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{q-1} \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m_q-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \end{aligned}$$

derselben endlichen Grenze $S$ nähert.

Von diesem Satze gilt aber nur dann die Umkehrung, wenn alle Glieder der Reihe positiv sind (vergl. § 52, Satz 4); hat die ursprüngliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ positive *und* negative Glieder, so ist sie durchaus nicht immer konvergent, wenn die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ konvergiert. Dagegen gilt

**Satz 7.** *Setzt man wieder*

$$\begin{aligned}
&u_0 + u_1 + \cdots + u_{m_1-1} = v_0, \\
&u_{m_1} + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_2-1} = v_1, \\
&u_{m_2} + u_{m_2+1} + \cdots + u_{m_3-1} = v_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

*und ist die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ divergent, so ist die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ ebenfalls divergent.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung wird

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{q-1}$$

mit wachsendem $q$ beliebig groß, folglich auch

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$

wenn man wieder $n$ gleich $m_q$ setzt.

Von diesem Satze ist bereits bei Untersuchung der harmonischen Reihe Gebrauch gemacht.

In der Reihe

$$a - a + a - a + - \cdots$$

wird $S_n$ zwar nicht unendlich groß, aber $S_n$ nähert sich mit wachsendem $n$ keiner *bestimmten* Grenze, denn für *gerade* Werte von $n$ wird $S_n$ gleich Null und für *ungerade* Werte von $n$ wird $S_n$ gleich $a$. Deshalb *oszilliert* diese Reihe.

Die Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots \tag{14.}$$

ist eine *geometrische Progression* und konvergiert, weil in diesem Falle

$$q = \tfrac{1}{3} < 1 \tag{15.}$$

ist. Ihre Summe ist daher nach Gleichung (5.)

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \tag{16.}$$

Indem man zu den einzelnen Gliedern dieser Reihe die entsprechenden Glieder der *oszillierenden* Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \cdots$$

addiert, erhält man eine dritte Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{26}{27} + \frac{82}{81} - + \cdots$$

und erkennt, daß die Summe $S_n$ der ersten $n$ Glieder dieser Reihe für *gerade* Werte von $n$ sich wieder dem Grenzwerte $\frac{3}{2}$, für *ungerade* Werte von $n$ aber dem Grenzwerte $\frac{5}{2}$ beliebig nähert, wenn $n$ hinreichend groß wird.

Deshalb *oszilliert* auch diese Reihe, d. h. $S_n$ schwankt zwischen den Grenzwerten $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$ hin und her.

Addiert man zu den einzelnen Gliedern der Reihe in Gleichung (14.) die entsprechenden Glieder der oszillierenden Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + - - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$2 - \frac{1}{6} - \frac{7}{18} + \frac{28}{27} - \frac{79}{162} - \frac{241}{486} + - - \cdots,$$

bei welcher $\lim S_n$ zwischen den drei Werten $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ und 2 hin- und herschwankt, je nachdem $n$ die Form $3m$, $3m+1$ oder $3m+2$ hat.

In ähnlicher Weise kann man Reihen bilden, bei denen $\lim S_n$ zwischen beliebig vielen, ja sogar zwischen unendlich vielen Werten hin- und herschwankt.

Ein solches Schwanken oder „*Oszillieren*“ kann nur eintreten, wenn die Reihe *positive und negative* Glieder enthält. Um diesen Fall auszuschließen, sollen zunächst nur Reihen mit lauter positiven Gliedern betrachtet werden.

§ 52.

## Reihen mit lauter positiven Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 112 und 113.)

**Satz 1.** *Sind die Glieder einer Reihe sämtlich positiv, so kann die Reihe niemals oszillieren; sie muß entweder konver-*

*gieren oder divergieren;* d. h. entweder nähert sich $S_n$ mit wachsendem $n$ einer bestimmten, *endlichen* Grenze, oder $S_n$ wird mit $n$ zugleich *unendlich groß*.

**Beweis.** Könnte man $S_{m+p} - S_m$ für hinreichend große Werte von $m$ beliebig klein machen, wie groß die Zahl $p$ auch sein mag, so wäre die Reihe konvergent. Setzt man aber voraus, daß die Reihe nicht konvergiert, so kann man eine Zahl $p$ finden, für welche

(1.) $$S_{m+p} - S_m = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+p-1} = a_1$$

einen *endlichen* Wert hat, wobei $a_1 > 0$, weil $a_1$ die Summe von lauter positiven Gliedern ist. Setzt man noch der Kürze wegen $m + p$ gleich $m_1$, so geht Gleichung (1.) über in

(1a.) $$S_{m_1} - S_m = a_1.$$

Ebenso kann man, weil die Reihe nach Voraussetzung nicht konvergiert, eine Zahl $p_1$ finden, für welche

(2.) $$S_{m_1+p_1} - S_{m_1} = a_2$$

einen *endlichen* Wert hat. Setzt man noch $m_1 + p_1$ gleich $m_2$, so geht Gleichung (2.) über in

(2a.) $$S_{m_2} - S_{m_1} = a_2.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und in den Ausdrücken

$$m_2 + p_2 = m_3, \quad m_3 + p_3 = m_4, \ldots m_{q-1} + p_{q-1} = m_q$$

die Zahlen $p_2, p_3, \ldots p_{q-1}$ so bestimmen, daß

(3.) $$S_{m_3} - S_{m_2} = a_3, \quad S_{m_4} - S_{m_3} = a_4, \ldots S_{m_q} - S_{m_{q-1}} = a_q$$

*endliche* Größen sind, welche sämtlich größer als eine *nicht* beliebig kleine Größe $a$ sind. Indem man die Gleichungen (1a.), (2a.) und (3.) addiert, erhält man daher

(4.) $$S_{m_q} - S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_q \geqq q \cdot a,$$

oder

(4a.) $$S_{m_q} \geqq S_m + q \cdot a.$$

Da man nun $q$ so groß machen kann, wie man will, so wird auch $S_{m_q}$ beliebig groß und wächst mit $q$ zugleich ins Unendliche.

Dies Verfahren wurde bereits in § 51 benutzt, um zu beweisen, daß die harmonische Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergiert, und zwar war damals $a$ gleich $\frac{1}{2}$.

Dem eben bewiesenen Satze kann man daher auch die folgende Fassung geben:

**Satz 1a.** *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist konvergent, wenn $S_n$ kleiner bleibt als eine endliche Größe $G$, wie groß $n$ auch sein mag.*

Denn wäre die Reihe *divergent*, so würde $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ unendlich groß, also auch größer als die endliche Größe $G$.

Daraus ergeben sich dann die folgenden Sätze:

**Satz 2.** *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*eine konvergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$*

$$u_n \leqq v_n,$$

*so ist auch die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

(*die lauter positive Glieder enthalten möge*) *konvergent.*

**Beweis.** Setzt man

$$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$

so wird, weil nach Voraussetzung die Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ konvergent ist, für hinreichend große Werte von $m$

$$V_{m+p} - V_m = v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots + v_{m+p-1}$$

beliebig klein, wie gross die Zahl $p$ auch sein mag. Da nun

$$u_m \leqq v_m, \quad u_{m+1} \leqq v_{m+1}, \ldots u_{m+p-1} \leqq v_{m+p-1},$$

so wird

$$U_{m+p} - U_m = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p-1} < V_{m+p} - V_m.$$

Es ist also $U_{m+p} - U_m$ für hinreichend große Werte von $m$ erst recht beliebig klein, folglich ist auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

konvergent.

**Satz 3.** *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*eine divergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab*

$$u_n \geqq v_n,$$

*so ist auch die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

*divergent.*

**Beweis.** Wäre die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ konvergent, so müßte nach dem zweiten Satze auch $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ konvergent sein, und das widerstreitet der Voraussetzung.

**Satz 4.** (Umkehrung von Satz 6 in § 51.) *Setzt man wieder*

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 \quad\;\; + \cdots + u_{m_1-1} &= v_0, \\ u_{m_1} + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_2-1} &= v_1, \\ u_{m_2} + u_{m_2+1} + \cdots + u_{m_3-1} &= v_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

*und ist $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ eine konvergente Reihe mit lauter positiven Gliedern und der Summe $S$, so konvergiert auch die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ und hat dieselbe Summe $S$.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung wird für hinreichend große Werte von $q$ die Summe

$$v_q + v_{q+1} + \cdots + v_{q+r-1}$$

beliebig klein, wie groß die Zahl $r$ auch sein mag, folglich kann man die Zahlen $m$ und $r$ so wählen, daß die Glieder $u_m$, $u_{m+1}$, $u_{m+2}$, $\ldots u_{m+p-1}$ sämtlich in den Gruppen $v_q$, $v_{q+1}, \ldots v_{q+r-1}$ enthalten sind. Dabei kann es vorkommen, daß die letzte Gruppe $v_{q+r-1}$ nicht vollständig erschöpft ist. Es wird daher

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+p-1} \leqq v_q + v_{q+1} + \cdots + v_{q+r-1},$$

d. h. es wird auch $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+p-1}$ beliebig klein, wie groß die Zahl $p$ auch sein mag, folglich wird die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ nach Satz 4 in § 51 konvergent.

Enthielte die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ auch *negative Glieder*, so wäre der Satz nicht mehr richtig, weil $u_m + u_{m+1} + \cdots$

$+ u_{m+p-1}$ möglicher Weise *größer* als $v_q + v_{q+1} + \cdots + v_{q+r-1}$ sein könnte.

**Satz 5.** (Kriterium von *Cauchy*.) *Eine Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

*mit lauter positiven Gliedern konvergiert jedenfalls, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für* $n \geqq m$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1 \tag{5.}$$

*ist, wobei* $k$ *eine von* $n$ *unabhängige Konstante ist.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung wird für $n \geqq m$

$$u_{n+1} \leqq u_n k;$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} u_m = u_m, \\ u_{m+1} \leqq u_m k, \\ u_{m+2} \leqq u_{m+1} k \leqq u_m k^2, \\ u_{m+3} \leqq u_{m+2} k \leqq u_m k^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{6.}$$

d. h. von einer bestimmten Stelle ab sind die Glieder der betrachteten Reihe gleich oder kleiner als die der Reihe

$$u_m + u_m k + u_m k^2 + u_m k^3 + \cdots;$$

diese Reihe ist aber *konvergent*, denn sie ist eine geometrische Progression, bei welcher der Quotient $k$ kleiner als 1 ist, und deren Summe daher nach Formel Nr. 12a der Tabelle gleich

$$\frac{u_m}{1-k}$$

wird. Deshalb ist nach Satz 2 auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

konvergent. Gleichzeitig erkennt man aus dem Beweise, daß der Fehler kleiner als $\frac{u_m}{1-k}$ wird, wenn man die Reihe hinter dem Gliede $u_{m-1}$ abbricht.

Es ist zu beachten, daß die in Satz 5 aufgestellte Bedingung für die Konvergenz *hinreichend*, aber nicht *notwendig* ist, d. h. die Reihe ist sicher konvergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1$$

ist, aber die Reihe kann sehr wohl konvergent sein, obgleich diese Bedingung *nicht* erfüllt ist.

## Beispiele.

1) $$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hier ist

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{n!(n+1)},$$

also wird für positive Werte von $x$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \leqq k < 1,$$

wenn man $n+1$ größer als $x$ wählt, folglich ist die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

für alle positiven endlichen Werte von $x$ konvergent.

2) $$S_n = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Da $n$ eine beliebige ganze Zahl ist, so kann man in Satz 5 noch $n$ mit $n-1$, also $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ mit $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ vertauschen. In dem vorstehenden Beispiele ist für $n \geqq 2$

$$u_{n-1} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-4)(2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-2)(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

folglich wird

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n(2n+1)} = \frac{\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x^2}{4 + \frac{2}{n}}.$$

Ist $x$ gleich 1, so nähert sich dieser Ausdruck mit wachsendem $n$ dem Werte 1 beliebig, dann ist also die Bedingung

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqq k < 1$$

*nicht* erfüllt, denn $k$ muß um eine *endliche* Größe von 1 verschieden sein. Dies gilt auch, wenn $k$ dem Werte 1 beliebig nahe liegt. Macht man z. B.

$$k = 1 - \frac{1}{10^m},$$

so wird für $n \geqq \frac{3}{2} \cdot 10^m$ der Ausdruck $\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} > k$. In der Tat, es ist

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4n^2 - 4n + 1}{2n(2n+1)} > \frac{4n^2 - 4n}{2n(2n+1)}$$
$$= \frac{2n-2}{2n+1} = 1 - \frac{3}{2n+1}.$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$2n + 1 > 2n \geqq 3 \,.\, 10^m, \quad \frac{3}{2n+1} < \frac{1}{10^m},$$

also

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} > 1 - \frac{1}{10^m}.$$

Damit ist noch nicht gesagt, daß für $x$ gleich 1 die Reihe *divergent* ist; es läßt sich vielmehr ihre Konvergenz auf einem *anderen Wege* (vergl. 244) sehr wohl beweisen.

Ist dagegen

$$x^2 = k < 1,$$

so wird auch

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqq k < 1;$$

in diesem Falle ist also die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

sicher konvergent.

3) $S_n = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)^p} + \frac{x^n}{n^p},$

wobei $p > 0$ sein möge.

Hier ist für $n \geqq 1$

$$u_{n-1} = \frac{x^n}{n^p}, \quad u_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^p},$$

folglich wird

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot x = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}$$

gleich oder kleiner als ein echter Bruch $k$, wenn $x$ gleich $k$ ist. Die Reihe

$$\frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots$$

ist also *konvergent*, wenn $x$ kleiner als 1 ist.

**Satz 6.** *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 \tag{7.}$$

*ist.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung wird

$$\left\{\begin{array}{l} u_m = u_m, \\ u_{m+1} \geqq u_m, \\ u_{m+2} \geqq u_{m+1} \geqq u_m, \\ u_{m+3} \geqq u_{m+2} \geqq u_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{8.}$$

Da nun die Reihe

$$u_m + u_m + u_m + \cdots$$

divergent ist, so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

nach Satz 3 erst recht divergent.

Die Reihen

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots$$

und

$$\frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots.$$

welche vorhin in den Beispielen 2 und 3 untersucht wurden, sind daher *divergent*, wenn $x > 1$ ist; denn man kann dann $n$ so groß wählen, daß auch die Größen $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, nämlich

$$\frac{\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x^2}{4 + \frac{2}{n}}, \quad \text{bezw.} \quad \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}$$

gleich oder größer als 1 werden.

**Satz 7.** *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für* $n \geqq m$

$$\sqrt[n]{u_n} \leqq k < 1 \tag{9.}$$

ist.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist für $n \geqq m$

$$u_n \leqq k^n, \tag{10.}$$

folglich wird

$$\left\{\begin{array}{l} u_m \leqq k^m, \\ u_{m+1} \leqq k^{m+1}, \\ u_{m+2} \leqq k^{m+2}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{11.}$$

d. h. von einer bestimmten Stelle ab sind die Glieder der betrachteten Reihe gleich oder kleiner als die der Reihe

$$1 + k + k^2 + k^3 + \cdots.$$

Diese Reihe ist aber *konvergent*, denn sie ist eine geometrische Progression, bei welcher der Quotient $k$ kleiner als 1 ist, und deren Summe daher nach Formel Nr. 12a der Tabelle gleich

$$\frac{1}{1 - k}$$

wird. Deshalb ist nach Satz 2 auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

konvergent.

Auch die in Satz 7 aufgestellte Bedingung ist für die Konvergenz der Reihe nur *hinreichend*, aber nicht notwendig, wie man aus dem folgenden Beispiele ersehen kann.

Soll man nämlich die Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

untersuchen, so setze man $u_0 = 0$, so daß

$$S_n = 0+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}$$

wird; dann ist für $n \geqq 1$

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

und

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich dem Werte 1 beliebig mit wachsendem $n$, wird also größer als jeder beliebige echte Bruch $k$. Die in Satz 5 aufgestellte Bedingung ist also *nicht* erfüllt, obwohl nachher bewiesen werden wird, daß die Reihe doch konvergent ist.

Ebensowenig ist die in Satz 7 aufgestellte Bedingung erfüllt, denn

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n^{-2}} = n^{-\frac{2}{n}}$$

ist zwar beständig kleiner als 1, nähert sich aber dem Werte 1 beliebig; es ist nämlich

$$\log\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \log\left(n^{-\frac{2}{n}}\right) = -\frac{2}{n}\log n.$$

Dieser Ausdruck wird aber mit wachsendem $n$ beliebig klein. Nimmt man z. B. die Zahl 10 als Basis des Logarithmensystems und setzt

$$n = 10^m,$$

so wird

$$\log\sqrt[n]{u_n} = -\frac{2}{n}\log n = -\frac{2m}{10^m},$$

folglich nähert sich $\log\sqrt[n]{u_n}$ mit wachsendem $m$ dem Werte 0 und deshalb $\sqrt[n]{u_n}$ dem Werte 1 beliebig*). Daher ist auch Satz 7 nicht unmittelbar verwendbar.

Setzt man aber

$$v_0 = \frac{1}{1^2},$$

$$v_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2},$$

$$v_2 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_m = \frac{1}{(2^m)^2} + \frac{1}{(2^m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^m + 2^m - 1)^2},$$

so wird

$$v_0 = 1,$$

$$v_1 < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$v_2 < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_m < \frac{1}{(2^m)^2} + \frac{1}{(2^m)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^2} = \frac{1}{2^m}.$$

Es ist also

$$v_1 < \frac{1}{2}, \quad \sqrt[2]{v_2} < \frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{v_3} < \frac{1}{2}, \quad \cdots \sqrt[m]{v_m} < \frac{1}{2},$$

und deshalb ist die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

*konvergent.*

**Satz 8.** *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$,*

---

*) Die Größe $n^{-\frac{2}{n}}$ nimmt für $\lim n = \infty$ die unbestimmte Form $\infty^0$ an. Ein vollständig strenger Nachweis dafür, daß $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ ist, wird an einer späteren Stelle (Seite 357) gegeben werden.

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1 \tag{12.}$$

*ist.*

**Beweis.** Für den gegebenen Wert von $m$ ist in diesem Falle

$$u_m \geqq 1, \quad u_{m+1} \geqq 1, \quad u_{m+2} \geqq 1, \ldots;$$

da nun die Reihe

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

divergent ist, so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

nach Satz 3 erst recht divergent.

Das zu Satz 7 gegebene Beispiel kann man sogleich verallgemeinern und den folgenden Satz beweisen:

**Satz 9.** *Die Reihe*

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

*ist konvergent für* $p > 1$.

**Beweis.** Setzt man

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = \dfrac{1}{1^p}, \\[2ex] v_1 = \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p}, \\[2ex] v_2 = \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{6^p} + \dfrac{1}{7^p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m = \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dfrac{1}{(2^m + 1)^p} + \cdots + \dfrac{1}{(2^{m+1} - 1)^p}, \end{array}\right. \tag{13.}$$

dann wird

$$(14.)\quad \begin{cases} v_1 < \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{2^p} = \dfrac{2}{2^p} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}, \\ v_2 < \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} = \dfrac{4}{4^p} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{p-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m < \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dots + \dfrac{1}{(2^m)^p} = \dfrac{2^m}{(2^m)^p} = \left(\dfrac{1}{2^m}\right)^{p-1}, \end{cases}$$

folglich ist

$$(15.)\quad v_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}, \quad \sqrt[2]{v_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}, \dots \sqrt[m]{v_m} < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1},$$

und da nach Voraussetzung $p - 1$ positiv sein soll,

$$\sqrt[m]{v_m} < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = k < 1.$$

Deshalb ist die Reihe

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

*konvergent*, wenn $p > 1$ ist.

**Satz 10.** *Die Reihe*

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

*ist divergent für* $p \leqq 1$.

**Beweis.** Setzt man in diesem Falle

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{v_0}{2} = \dfrac{1}{1^p} = 1, \\ \dfrac{v_1}{2} = \dfrac{1}{2^p}, \\ \dfrac{v_2}{2} = \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p}, \\ \dfrac{v_3}{2} = \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{6^p} + \dfrac{1}{7^p} + \dfrac{1}{8^p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{v_m}{2} = \dfrac{1}{(2^{m-1}+1)^p} + \dfrac{1}{(2^{m-1}+2)^p} + \dots + \dfrac{1}{(2^m)^p}, \end{cases}$$

dann wird

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{v_2}{2} > \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} = \dfrac{2}{4^p}, & \text{oder } v_2 > \dfrac{4}{4p} = 4^{1-p}, \\ \dfrac{v_3}{2} > \dfrac{1}{8^p} + \dfrac{1}{8^p} + \dfrac{1}{8^p} + \dfrac{1}{8^p} = \dfrac{4}{8^p}, & \text{oder } v_3 > \dfrac{8}{8^p} = 8^{1-p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{v_m}{2} > \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dots + \dfrac{1}{(2^m)^p} = \dfrac{2^{m-1}}{(2^m)^p}, & \\ & \text{oder } v_m > \dfrac{2^m}{(2^m)^p} = (2^m)^{1-p}, \end{cases}$$

also

$$(18.)\quad \sqrt[2]{v_2} > 2^{1-p},\quad \sqrt[3]{v_3} > 2^{1-p},\quad \dots \sqrt[m]{v_m} > 2^{1-p}.$$

Dies gibt, da $p \leqq 1$ und deshalb $1 - p \geqq 0$ ist,

$$\sqrt[m]{v_m} \geqq 1,$$

folglich ist nach Satz 8 die Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

und deshalb auch die Reihe

$$\frac{v_0}{2} + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} + \cdots$$

*divergent.*

**Satz 11.** *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

*eine konvergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für* $n \geqq m$,

$$(19.)\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

*so ist auch die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \dots,$$

(*welche gleichfalls lauter positive Glieder enthalten möge*), *konvergent.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist für $n \geqq m$

$$(19\text{a.})\quad u_{n+1} \leqq \frac{u_n}{v_n} \cdot v_{n+1},$$

also für $n = m$

$$u_{m+1} \leqq \frac{u_m}{v_m} \cdot v_{m+1},$$

oder, wenn man $\frac{u_m}{v_m}$ mit $A$ bezeichnet,

$$(20.)\qquad \begin{cases} u_m = A \,.\, v_m, \\ u_{m+1} \leqq A \,.\, v_{m+1}. \end{cases}$$

Ferner findet man aus Ungleichung (19a.) für $n = m + 1$, $m + 2, \ldots$

$$(21.)\qquad \begin{cases} u_{m+2} \leqq \dfrac{u_{m+1}}{v_{m+1}} \cdot v_{m+2} \leqq A \,.\, v_{m+2}, \\ u_{m+3} \leqq \dfrac{u_{m+2}}{v_{m+2}} \cdot v_{m+3} \leqq A \,.\, v_{m+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Daraus folgt, daß von einer bestimmten Stelle ab die Glieder der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ kleiner sind als die entsprechenden Glieder der Reihe $Av_0 + Av_1 + Av_2 + \cdots$; da aber $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ nach Voraussetzung eine konvergente Reihe ist, so gilt dasselbe von

$$(22.)\qquad Av_0 + Av_1 + Av_2 + \cdots;$$

deshalb ist auch nach Satz 2 die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

konvergent.

**Satz 12.** (Kriterium von *Raabe.*) *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

*ist konvergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für* $n \geqq m$,

$$(23.)\qquad n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqq p > 1$$

*ist.*

**Beweis.** Aus der Voraussetzung folgt

$$n - p \geqq n\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

oder

$$(24.)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{n-p}{n}.$$

Setzt man jetzt $v_0 = 0$ und für $n > 0$

$$(25.)\qquad v_n = \frac{1}{n^p},$$

so ist die Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = 0 + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots$$

nach Satz 9 konvergent, weil $p > 1$ ist. Dabei wird

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p. \tag{26.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 90a der Tabelle

$$f(x) = f(0) + x \,.\, f'(\Theta x);$$

für

$$f(x) = (1+x)^{p+1}, \quad f'(x) = (p+1)(1+x)^p$$

erhält man daher

$$(1+x)^{p+1} = 1 + (p+1)(1+\Theta x)^p \,.\, x.$$

Da $0 < \Theta < 1$ ist, so ist für positive Werte von $x$

$$\Theta x < x, \quad \text{also auch} \quad 1 + \Theta x < 1 + x, \quad (1+\Theta x)^p < (1+x)^p,$$

folglich wird

$$(1+x)^{p+1} < 1 + (p+1)(1+x)^p \,.\, x = 1 + (px + x)(1+x)^p,$$

oder

$$(1+x)^p(1-px) < 1,$$

$$1 - px < \left(\frac{1}{1+x}\right)^p. \tag{27.}$$

Setzt man in dieser Ungleichung $x = \frac{1}{n}$, so erhält man

$$1 - \frac{p}{n} = \frac{n-p}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \tag{28.}$$

oder mit Rücksicht auf Ungleichung (24.)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}. \tag{29.}$$

Es gilt deshalb in diesem Falle Satz 11, d. h. die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist konvergent.

## Beispiel.

Es sei

$$S_{n+1} = 0 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-3)}{2 \,.\, 4 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1},$$

dann wird für $n \geqq 2$

$$u_n = \frac{1.3\ldots(2n-5)(2n-3)}{2.4\ldots(2n-4)(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1},$$

$$u_{n+1} = \frac{1.3\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n} = \frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich mit wachsendem $n$ der Grenze 1 beliebig; deshalb ist Satz 5 nicht anwendbar. Dagegen wird

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left(1-\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}\right) = \frac{6n-1}{4n+2}$$
$$= 1 + \frac{2n-3}{4n+2} = \frac{11}{10} + \frac{4(n-2)}{5(2n+1)}.$$

Es ist also

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_u}\right) \geqq \frac{11}{10} > 1 \quad \text{für} \quad n \geqq 2,$$

und

$$\lim_{n=\infty}\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = \lim_{n=\infty} \frac{6-\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{3}{2},$$

folglich ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

*konvergent.*

Es war

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

für $-1 < x < +1$. Da die Funktion $\arcsin x$ stetig ist, und die Reihe auch noch für $\lim x = 1$ konvergent bleibt, so gilt diese Entwickelung auch noch für $x = 1$, d. h. es ist

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots.$$

**Satz 13.** *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für* $n \geqq m$,

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqq 1 \tag{30.}$$

*ist.*

**Beweis.** Aus der Voraussetzung folgt

$$n-1 \leqq n\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{n-1}{n}. \tag{31.}$$

Setzt man also

$$(m-1)u_m = A, \tag{32.}$$

so ist

$$u_m = \frac{A}{m-1},$$

$$u_{m+1} \geqq \frac{(m-1)u_m}{m} = \frac{A}{m},$$

$$u_{m+2} \geqq \frac{mu_{m+1}}{m+1} \geqq \frac{A}{m+1},$$

$$u_{m+3} \geqq \frac{(m+1)u_{m+2}}{m+2} \geqq \frac{A}{m+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Da nun die Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

divergent ist, so ist auch die Reihe

$$A\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right) = \frac{A}{1}+\frac{A}{2}+\frac{A}{3}+\frac{A}{4}+\cdots$$

divergent, folglich ist nach Satz 3

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$$

erst recht divergent.

§ 53.

## Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 114 und 115.)

Die Bedingungen, welche in dem vorhergehenden Paragraphen für die Konvergenz einer Reihe aufgestellt wurden, bezogen sich immer nur auf ihre Glieder *von einer bestimmten Stelle ab.* Die ersten Glieder der Reihe, d. h. die Glieder *bis zu einer bestimmten Stelle*, die noch im Endlichen liegt, sind nur der einen Bedingung unterworfen, daß keines von ihnen unendlich groß wird.

Auch in den folgenden Untersuchungen kommt es auf die Beschaffenheit der ersten Glieder nicht an. Wenn dabei also Beweise für die Konvergenz der Reihen unter gewissen Voraussetzungen geführt werden, welche für *alle* Glieder der Reihe gelten, so bleiben diese Beweise auch dann noch richtig, wenn diese Voraussetzungen für die *ersten* Glieder der Reihe aufgehoben werden.

Für Reihen mit positiven und negativen Gliedern gilt zunächst der folgende

**Satz 1.** *Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert.*

**Beweis.** Es sei

$$S_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1}; \tag{1.}$$

hierbei seien die Glieder

$$u_0', \quad u_1', \quad u_2', \quad \cdots u'_{\mu-1},$$

alle positiv, und die Glieder

$$-u_0'', \quad -u_1'', \quad -u_2'', \quad \cdots - u''_{\nu-1}$$

alle negativ. Setzt man also

$$\left\{\begin{array}{l} u_0' + u_1' + u_2' + \cdots + u'_{\mu-1} = S_m', \\ u_0'' + u_1'' + u_2'' + \cdots + u''_{\nu-1} = S_m'', \end{array}\right. \tag{2.}$$

so wird für endliche Werte von $m$

$$S_m = S_m' - S_m''. \tag{3.}$$

Nach Voraussetzung ist die Reihe

$$\Sigma = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

konvergent, folglich muß nach Satz 3 in § 51 für hinreichend große Werte von $m$

$$\Sigma_{m+p} - \Sigma_m = |u_m| + |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_{m+p-1}|$$

beliebig klein werden, wie groß die Zahl $p$ auch sein mag. In der entsprechenden Summe

$$S_{m+p} - S_m = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p-1}$$

seien die Glieder

$$u_\mu', \quad u'_{\mu+1}, \quad \ldots u'_{\mu+\varkappa-1}$$

*positiv*, und die Glieder

$$-u_\nu'', \quad -u''_{\nu+1}, \quad \cdots - u''_{\nu+\lambda-1}$$

seien *negativ*, dann ist

$$u_\mu' + u'_{\mu+1} + \cdots + u'_{\mu+\varkappa-1} \leqq \Sigma_{m+p} - \Sigma_m,$$

weil diese Summe aus $\Sigma_{m+p} - \Sigma_m$ hervorgeht, indem man die positiven Größen $u_\nu''$, $u''_{\nu+1}$, $\ldots u''_{\nu+\lambda-1}$ fortläßt. Ebenso ist

$$u_\nu'' + u''_{\nu+1} + \cdots + u''_{\nu+\lambda-1} \leqq \Sigma_{m+p} - \Sigma_m,$$

folglich werden die Summen

$$u_\mu' + u'_{\mu+1} + \cdots + u'_{\mu+\varkappa-1} \quad \text{und} \quad u_\nu'' + u''_{\nu+1} + \cdots + u''_{\nu+\lambda-1}$$

ebenfalls beliebig klein und deshalb erst recht

$$S_{m+p} - S_m = u_\mu' + u'_{\mu+1} + \cdots + u'_{\mu+\varkappa-1} - (u_\nu'' + u''_{\nu+1} + \cdots + u''_{\nu+\lambda-1}),$$

wie groß die ganze Zahl $p$ auch sein mag. Deshalb ist die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ nach Satz 4 in § 51 konvergent.

Dabei erkennt man aus Gleichung (3.), daß in diesem Falle

$$\lim_{m=\infty} S_m = \lim_{m=\infty} S'_m - \lim_{m=\infty} S''_m$$

wird.

Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern kann aber auch dann noch *konvergieren*, wenn die Summe der absoluten Beträge *divergiert*.

Versteht man unter einer *alternierenden Reihe* eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, so gilt z. B.

**Satz 2.** (Kriterium von *Leibniz*.) *Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn der absolute Betrag der Glieder immer kleiner und schließlich unendlich klein wird.*

Im Gegensatz zu der Bemerkung bei Satz 2 auf Seite 223 möge besonders hervorgehoben werden, daß hier *$u_{n+1}$ stets kleiner als $u_n$ sein muß.* Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann die Reihe auch divergieren.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist bei der alternierenden Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + - \cdots$$

(4.) $$u_{n+1} < u_n \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Ordnet man daher in Gruppen zu je zwei Gliedern, so erhält man

(5.) $$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}),$$

(6.) $$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Da hierbei die Klammergrößen sämtlich positiv sind, so wird

(7.) $$S_{2m} > 0, \quad S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m} < u_0,$$

also

(8.) $$0 < S_{2m} < S_{2m+1} < u_0.$$

Die Reihe

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots$$

enthält lauter positive Glieder, und die Summe $S_{2m}$ der ersten $m$ Glieder bleibt kleiner als die endliche Größe $u_0$, wie groß $m$ auch werden mag, folglich ist die Reihe nach Satz 1a in § 52 *konvergent*, d. h. $S_{2m}$ nähert sich mit wachsendem $m$ einer bestimmten endlichen Grenze $S$. Aus

(9.) $$\lim_{m=\infty} S_{2m} = S = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots$$

folgt aber nach den Gleichungen (6.) und (4.)

(10.) $$\lim_{m=\infty} S_{2m+1} = \lim_{m=\infty} S_{2m} + \lim_{m=\infty} u_{2m} = S.$$

Es nähert sich also $S_{2m+1}$ mit wachsendem $m$ ebenfalls der Grenze $S$, so daß

(11.) $$\lim_{n=\infty} S_n = S$$

wird, gleichviel ob $n$ gerade oder ungerade ist; d. h. die Reihe $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + - \cdots$ ist konvergent und hat die Summe $S$.

Da $S$ durch Gleichung (9.) als eine Reihe mit lauter positiven Gliedern dargestellt werden kann, so ist die Summe $S_{2m}$ der ersten $m$ Glieder derselben kleiner als $S$; es ist also

$$S_{2m} < S. \tag{12.}$$

Man kann aber nach Gleichung (10.) $S$ auch als Grenzwert von $S_{2m+1}$ darstellen und nach Gleichung (6.) auf die Form

$$S = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots \tag{13.}$$

bringen. Je mehr Glieder man von dieser Reihe nimmt, desto kleiner wird die Summe; deshalb ist

$$S < S_{2m+1} < S_{2m-1}. \tag{14.}$$

Faßt man die Ungleichungen (12.) und (14.) zusammen, so findet man

$$S_{2m} < S < S_{2m+1} \quad \text{und} \quad S_{2m} < S < S_{2m-1}. \tag{15.}$$

Da nun

$$S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m-1} \quad \text{und} \quad S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m} \tag{16.}$$

ist, so wird der Unterschied zwischen $S$ und $S_{2m-1}$ kleiner als $u_{2m-1}$, und der Unterschied zwischen $S$ und $S_{2m}$ wird kleiner als $u_{2m}$. Es ergibt sich also aus den Ungleichungen (15.), daß *der Unterschied zwischen $S$ und $S_n$ kleiner als $u_n$ wird, gleichviel ob $n$ gerade oder ungerade ist.*

In Ungleichung (4.) war vorausgesetzt worden, daß $u_{n+1} < u_n$ für $n \geqq 0$; die alternierende Reihe ist aber auch dann noch konvergent, wenn diese Bedingung erst von einer späteren Stelle ab erfüllt ist, da es auf die ersten Glieder der Reihe nicht ankommt.

### Beispiele.

1) Die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

ist *konvergent*, und zwar ist nach Formel Nr. 101 der Tabelle ihre Summe gleich $\ln 2$, obwohl die Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

*divergent* ist, wie schon in § 51 gezeigt wurde.

2) Die Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots$$

ist *konvergent*, und zwar ist nach Formel Nr. 107 der Tabelle ihre Summe gleich $\frac{\pi}{4}$. Hierdurch ist auch der Nachweis geführt, daß die Entwickelung von $\operatorname{arctg} x$ in Formel Nr. 106 der Tabelle noch richtig bleibt für $x = +1$. Es folgt dies aus der Stetigkeit der Funktion $\operatorname{arctg} x$ für $x = 1$. Die Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

ist dagegen *divergent*. Dies folgt schon daraus, daß

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots,$$

oder

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

ist.

Bei alternierenden Reihen kann ein eigentümlicher Umstand eintreten. Werden nämlich die absoluten Beträge der Glieder schließlich nicht beliebig klein, sondern nähern sie sich einer bestimmten, endlichen Grenze $\varrho$, so werden sich die Differenzen

$$u_n - u_{n+1}$$

der Grenze Null nähern. Es kann also sehr wohl eintreten, daß sich mit wachsendem $m$

$$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1})$$

einer bestimmten, endlichen Grenze nähert. Dasselbe ist dann bei

$$\begin{aligned} S_{2m+1} = {} & (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots \\ & + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m} = S_{2m} + u_{2m} \end{aligned}$$

der Fall; trotzdem ist die Reihe *nicht konvergent*, denn es ist nach Voraussetzung

$$\lim_{m=\infty}(S_{2m+1} - S_{2m}) = \lim_{m=\infty} u_{2m} = \varrho\,,$$

d. h. die Summe der Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + - \cdots$$

nähert sich *zwei* endlichen, um $\varrho$ von einander *verschiedenen* Grenzen, je nachdem man eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl von Gliedern addiert. Eine solche Reihe wird, wie schon in § 51 hervorgehoben wurde, „eine *oszillierende* Reihe" genannt.

## Beispiele.

1) Bei der Reihe

$$a - a + a - a + - \cdots$$

ist

$$S_{2m} = 0, \quad S_{2m+1} = a.$$

2) Bei der Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + - \cdots$$

ist

$$S_{2m} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right),$$

$$S_{2m+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) + \frac{2m+2}{2m+1},$$

also

$$\lim_{m=\infty} S_{2m} = \ln 2, \quad \lim_{m=\infty} S_{2m+1} = 1 + \ln 2.$$

3) Addiert man zu den Gliedern der konvergenten Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 2$$

die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + - - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$\frac{2}{1} + 0 - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} - \frac{7}{16} - \frac{15}{32} + \frac{65}{64} - \frac{63}{128} - \frac{127}{256} + - - \cdots.$$

Bei dieser Reihe ist

$$\lim_{m=\infty} S_{3m} = 2, \quad \lim_{m=\infty} S_{3m+1} = 3, \quad \lim_{m=\infty} S_{3m+2} = 2\tfrac{1}{2};$$

diese Reihe oszilliert also zwischen *drei* verschiedenen Werten.

In ähnlicher Weise kann man Reihen bilden, bei denen $\lim S_n$ zwischen beliebig vielen Werten hin- und herschwankt, ja es kann vorkommen, daß $\lim S_n$ ganz unbestimmt wird.

## § 54.

## Bedingte und unbedingte Konvergenz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 116.)

Bisher wurde die Annahme gemacht, daß bei den Gliedern einer Reihe eine bestimmte Ordnung festgehalten werde.

Bei einer Summe mit einer *endlichen* Anzahl von Gliedern ändert sich der Wert der Summe nicht, wenn man die Aufeinanderfolge der Glieder ändert; bei Summen mit unendlich vielen Gliedern aber, d. h. also bei unendlichen Reihen kann sich möglicherweise der Wert der Summe mit der Reihenfolge der Glieder ändern. Ist z. B.

$$S_m = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right)$$

und

$$S_m' = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right),$$

so wird

$$S_m' - S_m = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m} - \frac{1}{2m}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}\right),$$

oder

$$S_m' - S_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right)\right].$$

Nun wird aber

$$\lim_{m=\infty} S_m = \ln 2, \quad \lim_{m=\infty}(S_m' - S_m) = \frac{1}{2}\ln 2,$$

folglich ist

$$\lim S_m' = \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\lim S_m.$$

Die Reihen

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$$

und

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \cdots$$

sind also beide konvergent und jede von ihnen enthält, wenn man sie nur weit genug fortsetzt, sämtliche Glieder, welche die andere enthält, aber ihre Summen haben *verschiedene Werte, weil die Aufeinanderfolge der Glieder in den beiden Reihen eine verschiedene ist.*

In diesem Beispiele bilden die positiven Glieder für sich eine *divergente Reihe*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

und ebenso bilden die negativen Glieder für sich eine *divergente* Reihe

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots.$$

Zwei Reihen, welche sich nur durch die Reihenfolge ihrer Glieder voneinander unterscheiden, müssen natürlich so beschaffen sein, daß jedes Glied der ersten Reihe gleichfalls in der zweiten Reihe, wenn auch an einer späteren Stelle, vorkommt. Bezeichnet man z. B. mit

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

die Summe der $n$ ersten Glieder in der einen Reihe und mit

$$S_\nu' = u_0' + u_1' + u_2' + \cdots + u'_{\nu-1}$$

die Summe der $\nu$ ersten Glieder in der anderen Reihe, so kann man $\nu$ immer so groß machen, daß *alle* in $S_n$ enthaltenen Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ auch unter den Gliedern von $S_\nu'$ wirklich vorkommen.

Bei solchen Reihen gilt allgemein der folgende

**Satz 1.** *Bilden in der Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

*die positiven Glieder $u_0', u_1', u_2', \ldots$ für sich, und ebenso die negativen Glieder $-u_0'', -u_1'', -u_2'', \ldots$ für sich eine divergente Reihe, und wird*

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

*so kann man die Glieder der Reihe so anordnen, daß sich die Summe der ersten $n$ Glieder dem Grenzwerte $K$ nähert, wo $K$ eine beliebig gegebene Zahl ist.*

**Beweis.** Setzt man

$$S_\mu' = u_0' + u_1' + u_2' + \cdots + u'_{\mu-1},$$
$$S_\nu'' = u_0'' + u_1'' + u_2'' + \cdots + u''_{\nu-1},$$

so kann man unter der Voraussetzung, daß $K$ positiv ist, die Zahl $\alpha$ so wählen, daß

$$S'_{\alpha-1} = u_0' + u_1' + \cdots + u'_{\alpha-2} \leqq K < u_0' + u_1' + \cdots + u'_{\alpha-1} = S_\alpha'$$

wird, denn man kann $S_\alpha'$ beliebig groß machen, weil nach Voraussetzung

$$\lim_{\mu=\infty} S_\mu' = \infty$$

ist.

Jetzt lasse man auf $S_\alpha'$ die negativen Glieder $-u_0'', -u_1'', \cdots - u''_{\beta-1}$ folgen, wobei man die Zahl $\beta$ so wählen kann, daß

$$S''_{\beta-1} = u_0'' + u_1'' + \cdots + u''_{\beta-2} \leqq S_\alpha' - K < u_0'' + u_1'' + \cdots + u''_{\beta-1} = S_\beta''$$

wird, denn man kann $S_\beta''$ beliebig groß machen, weil nach Voraussetzung

$$\lim_{\nu=\infty} S_\nu'' = \infty$$

ist.

Dies gibt
$$S_\alpha' - S''_{\beta-1} \geqq K > S_\alpha' - S_\beta''.$$

Jetzt lasse man $\gamma - \alpha$ positive Glieder $u_\alpha'$, $u'_{\alpha+1}, \ldots u'_{\gamma-1}$ folgen, wobei man die Zahl $\gamma$ so wählen kann, daß $\gamma > \alpha$ und
$$S'_{\gamma-1} - S_\alpha' \leqq K - (S_\alpha' - S_\beta'') < S_\gamma' - S_\alpha' = u_\alpha' + u'_{\alpha+1} + \cdots + u'_{\gamma-1}$$
wird. Dies gibt
$$S_\alpha' - S_\beta'' + (S'_{\gamma-1} - S_\alpha') \leqq K < S_\alpha' - S_\beta'' + (S_\gamma' - S_\alpha').$$

Darauf lasse man wieder $\delta - \beta$ negative Glieder $-u_\beta''$, $-u''_{\beta+1}, \cdots - u''_{\delta-1}$ mit der Summe $-(S_\delta'' - S_\beta'')$ folgen, so daß
$$S_\alpha' - S_\beta'' + (S_\gamma' - S_\alpha') - (S_\delta'' - S_\beta'')$$
gerade unter $K$ sinkt. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man
$$S_\alpha' - S_\beta'' + (S_\gamma' - S_\alpha') - (S_\delta'' - S_\beta'') + - \cdots + (S_\mu' - S_\varkappa'),$$
oder
$$S_\alpha' - S_\beta'' + (S_\gamma' - S_\alpha') - (S_\delta'' - S_\beta'') + - \cdots - (S_\nu'' - S_\lambda''),$$
je nachdem man mit positiven oder mit negativen Gliedern aufhört. Diese Summe unterscheidet sich von $K$ um eine Größe, welche bezw. kleiner als $u'_{\mu-1}$ oder kleiner als $u''_{\nu-1}$ ist. Da nun aber
$$\lim_{\mu=\infty} u'_{\mu-1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} u''_{\nu-1} = 0,$$
so kann man den Unterschied beliebig klein machen.

In ähnlicher Weise wird der Fall behandelt, wo $K$ negativ ist.

**Erklärung.** *Eine Reihe, bei der sich die Summe der $n$ ersten Glieder mit wachsendem $n$ nur unter der Bedingung derselben endlichen Grenze nähert, daß die Aufeinanderfolge der Glieder eine bestimmte ist, heißt „bedingt konvergent". Bleibt aber dieser Grenzwert derselbe, wie man auch die Glieder der Reihe anordnen mag, so heißt die Reihe „unbedingt konvergent".*

Dabei gilt nun der folgende

**Satz 2.** *Eine Reihe ist unbedingt konvergent, wenn nach Absonderung von $S_n$ die Summe von beliebig vielen Gliedern,* *welche aus den noch folgenden Gliedern willkürlich ausgewählt sind, beliebig klein wird für hinreichend große Werte von $n$.*

**Beweis.** Um zu zeigen, daß sich dann

(1.) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$, und $S_\nu' = u_0' + u_1' + \cdots + u'_{\nu-1}$

derselben endlichen Grenze nähern, kann man nach der früheren Erklärung $\nu$ so groß wählen, daß die Glieder

$$u_0,\ u_1,\ \ldots u_{n-1}$$

sämtlich unter den Gliedern

$$u_0'\ u_1',\ \ldots u'_{\nu-1}$$

enthalten sind. Außerdem kommen in $S_\nu'$ noch beliebig viele andere Glieder

$$u_r,\ u_s,\ u_t, \ldots$$

vor, so daß

(2.) $$S_\nu' = S_n + u_r + u_s + u_t + \cdots$$

wird. Nach Voraussetzung ist aber

(3.) $$\lim_{n=\infty}(u_r + u_s + u_t + \cdots) = 0,$$

folglich wird

(4.) $$\lim S_\nu' = \lim S_n;$$

d. h. unter der gemachten Voraussetzung nähert sich die Summe $S_n$ mit wachsendem $n$ derselben Grenze, wie man auch die Reihenfolge der Glieder bestimmen mag.

Diese Voraussetzung, unter welcher der eben bewiesene Satz gilt, wird offenbar erfüllt, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert. Bezeichnet man nämlich mit $|u|$ den absoluten Betrag von $u$, und nähert sich

(5.) $$\Sigma_n = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}|$$

mit wachsendem $n$ einer bestimmten endlichen Grenze $\Sigma$, so wird für hinreichend große Werte von $n$

(6.) $$\Sigma_{n+p} - \Sigma_n = |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p-1}|$$

beliebig klein, folglich erst recht

$$u_r + u_s + u_t + \cdots,$$

wobei $u_r$, $u_s$, $u_t, \ldots$ aus den Gliedern $u_n$, $u_{n+1}, \ldots u_{n+p-1}$ willkürlich ausgewählt sind.

Hiervon gilt aber auch die Umkehrung:

**Satz 3.** *Wird bei willkürlicher Auswahl der Glieder $u_r$, $u_s$, $u_t$,... aus den Gliedern $u_n$, $u_{n+1}$, ... $u_{n+p-1}$ die Summe*

$$u_r + u_s + u_t + \cdots$$

*für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein, so ist in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ die Summe der absoluten Beträge eine konvergente Reihe.*

**Beweis.** Setzt man

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} = D_p \tag{7.}$$

und bezeichnet die Summe aller *positiven* Glieder, welche in $D_p$ enthalten sind, mit $D_p'$ und die Summe aller in $D_p$ enthaltenen *negativen* Glieder mit $-D_p''$, so ist

$$D_p = D_p' - D_p''. \tag{8.}$$

Nach Voraussetzung müssen $D_p'$ und $D_p''$ *einzeln* beliebig klein werden, folglich wird auch

$$\Sigma_{n+p} - \Sigma_n = D_p' + D_p'' \tag{9.}$$

beliebig klein für hinreichend große Werte von $n$. $\Sigma_n$ und $\Sigma_{n+p}$ nähern sich daher mit wachsendem $n$ demselben Grenzwerte $\Sigma$, d. h. die Summe der absoluten Beträge ist *konvergent.*

Der vorhin ausgesprochene Satz deckt sich daher mit dem folgenden Satze:

*Eine Reihe ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert;* und umgekehrt.

## § 55.

## Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Reihen. Wurzelausziehung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 117.)

**Satz 1.** *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1.}$$

*und*

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{2.}$$

*zwei (bedingt oder unbedingt) konvergente Reihen, so werden* *diese Reihen addiert, indem man die gleichstelligen Glieder addiert*; es wird also

(3.) $$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots.$$

**Beweis.** Setzt man

(4.) $$U_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1},$$

(5.) $$V_m = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1},$$

so wird

(6.) $$U_m + V_m = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_{m-1} + v_{m-1}).$$

Nun ist aber

(7.) $$\lim_{m=\infty}(U_m + V_m) = \lim_{m=\infty} U_m + \lim_{m=\infty} V_m = U + V,$$

folglich erhält man aus Gleichung (6.), wenn $m$ ins Unbegrenzte wächst, die konvergente Reihe

(8.) $$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots.$$

In derselben Weise kann man auch drei und mehr Reihen addieren.

**Satz 2.** *Sind wieder durch die Gleichungen* (1.) *und* (2.) *zwei (bedingt oder unbedingt) konvergente Reihen gegeben, so werden diese Reihen von einander subtrahiert, indem man die gleichstelligen Glieder voneinander subtrahiert*, also

(9.) $$U - V = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots.$$

Der Beweis wird in derselben Weise wie bei der Addition geführt.

**Satz 3.** *Sind*

(10.) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

*und*

(11.) $$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*zwei unbedingt konvergente Reihen, und ist*

(12.) $$\left\{\begin{array}{l} w_0 = u_0 v_0, \\ w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \end{array}\right.$$

*so ist auch die Reihe*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

*unbedingt konvergent, und ihre Summe W ist gleich dem Produkte UV der Summen der beiden ersten Reihen.*

**Beweis.** Es sei

$$(13.)\qquad \begin{cases} U_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1}, \\ V_m = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1}, \\ W_m = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{m-1}, \end{cases}$$

und es mögen zunächst die Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots v_0, v_1, v_2, \ldots$ alle positiv sein, dann ist für $m = 2n$

$$U_{2n} . V_{2n} = W_{2n} + (u_1 v_{2n-1} + u_2 v_{2n-2} + \cdots + u_{2n-2} v_2 + u_{2n-1} v_1)$$
$$+ \cdots + (u_{2n-2} v_{2n-1} + u_{2n-1} v_{2n-2}) + u_{2n-1} v_{2n-1},$$

also

$$(14.)\qquad U_{2n} . V_{2n} > W_{2n}.$$

Dagegen ist

$$W_{2n} = U_n . V_n + (u_0 v_n + u_n v_0) + (u_0 v_{n+1} + u_1 v_n + u_n v_1 + u_{n+1} v_0)$$
$$+ \cdots + (u_0 v_{2n-1} + u_1 v_{2n-2} + \cdots + u_{2n-2} v_1 + u_{2n-1} v_0),$$

also

$$(15.)\qquad W_{2n} > U_n . V_n.$$

Faßt man die Ungleichungen (14.) und (15.) zusammen, so erhält man

$$(16.)\qquad U_{2n} . V_{2n} > W_{2n} > U_n . V_n.$$

Ebenso kann man zeigen, daß

$$(16\text{a}.)\qquad U_{2n+1} . V_{2n+1} > W_{2n+1} > U_n . V_n$$

ist. Läßt man aber $n$ immer größer werden, so nähern sich die Produkte $U_n . V_n$ und $U_{2n} . V_{2n}$, bezw. $U_{2n+1} . V_{2n+1}$ nach Voraussetzung derselben endlichen Grenze $U . V$, folglich nähern sich auch die dazwischen liegenden Werte $W_{2n}$ bezw. $W_{2n+1}$ einer bestimmten, endlichen Grenze $W$, und es wird

$$(17.)\qquad W = U . V.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß

$$U_n . V_n - W_n = (u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-2} v_2 + u_{n-1} v_1)$$
$$+ \cdots + (u_{n-2} v_{n-1} + u_{n-1} v_{n-2}) + u_{n-1} v_{n-1}$$

beliebig klein wird, wenn man $n$ hinreichend groß macht.

Enthalten die Reihen $U$ und $V$ positive und negative Glieder, sind sie aber, wie vorausgesetzt wurde, *unbedingt konvergent*, d. h. sind auch noch die Summen der absoluten Beträge konvergent, so nähert sich der Ausdruck $U_n . V_n - W_n$, wie vorhin gezeigt wurde, mit wachsendem $n$ dem Werte 0, wenn man die Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ sämtlich durch ihre absoluten Beträge ersetzt; er nähert sich also dem Werte 0 erst recht, wenn diese Größen teilweise negativ sind. Es wird daher auch in diesem Falle

$$\text{(18.)} \qquad \lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} U_n . V_n = U . V.$$

Dabei ist auch

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

eine *unbedingt konvergente* Reihe; denn ersetzt man die Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots$ in den Gleichungen

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

durch ihre absoluten Beträge, so mögen dadurch die Größen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ in $w_0', w_1', w_2', \ldots$ übergehen. Bezeichnet man nun den absoluten Betrag von $w_0$ mit $|w_0|$, den von $w_1$ mit $|w_1|, \ldots$, so wird

$$\text{(19.)} \qquad |w_0| = w_0', \quad |w_1| \leqq w_1', \quad |w_2| \leqq w_2', \ldots .$$

Jetzt enthält aber die Reihe

$$w_0' + w_1' + w_2' + \cdots$$

lauter positive Glieder und ist konvergent, folglich gilt dasselbe auch für

$$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots,$$

d. h. die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

ist *unbedingt konvergent*.

Diejenigen Fälle, in denen dieses Verfahren für die Multiplikation der unendlichen Reihen noch anwendbar ist, obgleich die beiden Reihen

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \text{und} \quad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*nicht unbedingt* konvergent sind, mögen hier übergangen werden, damit der Umfang des Buches nicht allzu groß wird.

**Beispiel.**

$$U = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{20.}$$

$$V = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots \tag{21.}$$

sind zwei unbedingt konvergente Reihen, folglich ist

$$U \cdot V = 1 + \left(\frac{x}{1!} + \frac{y}{1!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{xy}{1!\,1!} + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots. \tag{22.}$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\qquad + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{y^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\Big[x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots \\ &\qquad + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + \frac{n}{1!}xy^{n-1} + y^n\Big] \\ &= \frac{(x+y)^n}{n!}, \end{aligned} \tag{23.}$$

folglich erhält man

$$U \cdot V = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots. \tag{24.}$$

Setzt man für $U$ und $V$ nach Formel Nr. 91 der Tabelle ihre Werte ein, so ergibt sich hieraus die bekannte Formel

$$e^x e^y = e^{x+y}. \tag{25.}$$

In derselben Weise kann man auch das Produkt von drei oder mehr *unbedingt konvergenten* Reihen bilden.

Macht man die Faktoren eines solchen Produktes sämtlich einander gleich, so erhält man die *Potenz* einer Reihe.

Ist z. B. wieder

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{26.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe, so wird auch

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \tag{27.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe, bei welcher nach den Regeln der Multiplikation

$$A_n = \Sigma \frac{m!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} u_0^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n} \tag{28.}$$

ist. Die Summation erstreckt sich dabei auf alle Werte von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für welche

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n \end{cases} \tag{29.}$$

wird. Deshalb kann $\alpha_n$ nur die Werte 0 und 1 annehmen, d. h. $A_n$ ist inbezug auf $u_n$ nur vom ersten Grade, ein Umstand, welcher für das Folgende von Bedeutung ist. Die ausführliche Ableitung des in Gleichung (28.) ausgesprochenen Gesetzes für die Bildung von $A_n$ kann übergangen werden, weil für die Berechnung der einzelnen Glieder $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die rekurrierende Formel

$$\begin{aligned} nu_0A_n + [n-(m+1)]u_1A_{n-1} + [n-2(m+1)]u_2A_{n-2} \\ + [n-3(m+1)]u_3A_{n-3} + \cdots + [n-(n-1)(m+1)]u_{n-1}A_1 \\ + [n-n(m+1)]u_nA_0 = 0, \end{aligned} \tag{30.}$$

oder

$$\begin{aligned} n(u_0A_n + u_1A_{n-1} + u_2A_{n-2} + \cdots + u_{n-1}A_1 + u_nA_0) \\ -(m+1)[u_1A_{n-1} + 2u_2A_{n-2} + 3u_3A_{n-3} + \cdots + (n-1)u_{n-1}A_1 \\ + nu_nA_0] = 0 \end{aligned} \tag{31.}$$

ausreicht, welche sogleich durch den Schluß von $m$ auf $m+1$ bewiesen werden soll*).

Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ findet man z. B.

$$\begin{cases} A_0 = u_0^m, \quad (u_0A_1 + u_1A_0) - (m+1)u_1A_0 = 0, \\ 2(u_0A_2 + u_1A_1 + u_2A_0) - (m+1)(u_1A_1 + 2u_2A_0) = 0, \\ 3(u_0A_3 + u_1A_2 + u_2A_1 + u_3A_0) - (m+1)(u_1A_2 + 2u_2A_1 \\ \qquad + 3u_3A_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{32.}$$

*) Sollte dem Anfänger der allgemeine Beweis Schwierigkeiten bereiten, so mögen zunächst die besonderen Fälle $m = 2, 3, 4, \ldots$ behandelt werden.

Durch Multiplikation der Gleichungen (26.) und (27.) findet man nämlich nach den Regeln für die Multiplikation der Reihen

$$U^{m+1} = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots, \tag{33.}$$

wobei nach den Gleichungen (12.)

$$\left\{\begin{aligned} B_0 &= u_0 A_0, \\ B_1 &= u_0 A_1 + u_1 A_0, \\ B_2 &= u_0 A_2 + u_1 A_1 + u_2 A_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_n &= u_0 A_n + u_1 A_{n-1} + u_2 A_{n-2} + \cdots + u_{n-1} A_1 + u_n A_0 \end{aligned}\right. \tag{34.}$$

ist. Deshalb kann man die Gleichung (31.) auf die Form

$$\begin{aligned} nB_n - (m+1)[u_1 A_{n-1} + 2u_2 A_{n-2} + 3u_3 A_{n-3} + \cdots \\ + (n-1)u_{n-1} A_1 + nu_n A_0] = 0 \end{aligned} \tag{35.}$$

bringen. Vertauscht man in dieser Gleichung der Reihe nach $n$ mit $n-1$, $n-2$, $\ldots 3$, $2$, $1$, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (n-1)B_{n-1} - (m+1)[u_1 A_{n-2} + 2u_2 A_{n-3} + 3u_3 A_{n-4} + \cdots \\ + (n-1)u_{n-1} A_0] = 0, \\ (n-2)B_{n-2} - (m+1)[u_1 A_{n-3} + 2u_2 A_{n-4} + 3u_3 A_{n-5} + \cdots \\ + (n-2)u_{n-2} A_0] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 3B_3 - (m+1)[u_1 A_2 + 2u_2 A_1 + 3u_3 A_0] = 0, \\ 2B_2 - (m+1)[u_1 A_1 + 2u_2 A_0] = 0, \\ B_1 - (m+1)u_1 A_0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{36.}$$

Indem man die Gleichungen (35.) und (36.) bezw. mit $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $\ldots u_{n-3}$, $u_{n-2}$, $u_{n-1}$ multipliziert und dann addiert, ergibt sich

$$\begin{aligned} &nu_0 B_n + (n-1)u_1 B_{n-1} + (n-2)u_2 B_{n-2} + \cdots \\ &\qquad + 3u_{n-3} B_3 + 2u_{n-2} B_2 + u_{n-1} B_1 \\ &- (m+1)[u_1(u_0 A_{n-1} + u_1 A_{n-2} + u_2 A_{n-3} + \cdots \\ &\qquad + u_{n-3} A_2 + u_{n-2} A_1 + u_{n-1} A_0) \\ &+ 2u_2(u_0 A_{n-2} + u_1 A_{n-3} + u_2 A_{n-4} + \cdots + u_{n-3} A_1 + u_{n-2} A_0) \\ &+ 3u_3(u_0 A_{n-3} + u_1 A_{n-4} + u_2 A_{n-5} + \cdots + u_{n-3} A_0) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$+ (n-2)u_{n-2}(u_0A_2 + u_1A_1 + u_2A_0) + (n-1)u_{n-1}(u_0A_1 + u_1A_0)$$
$$+ nu_nu_0A_0] = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (34.)

$$\text{(37.)}\quad nu_0B_n + (n-1)u_1B_{n-1} + (n-2)u_2B_{n-2} + \cdots$$
$$+ 3u_{n-3}B_3 + 2u_{n-2}B_2 + u_{n-1}B_1$$
$$-(m+1)[u_1B_{n-1} + 2u_2B_{n-2} + 3u_3B_{n-3} + \cdots$$
$$+ (n-2)u_{n-2}B_2 + (n-1)u_{n-1}B_1 + nu_nB_0] = 0,$$

oder

$$\text{(37a.)}\quad nu_0B_n + [n-(m+2)]u_1B_{n-1} + [n-2(m+2)]u_2B_{n-2}$$
$$+ [n-3(m+2)]u_3B_{n-3} + \cdots$$
$$+ [n-(n-1)(m+2)]u_{n-1}B_1 + [n-n(m+2)]u_nB_0 = 0.$$

Dies ist aber die Formel, welche sich aus Gleichung (30.) ergibt, indem man $m$ mit $m+1$ und demgemäß die Größen $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ mit $B_0, B_1, B_2, \ldots B_n$ vertauscht. Nun ist die Formel zunächst richtig für $m = 1$, denn für diesen Wert von $m$ wird

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = u_1, \quad A_2 = u_2, \ldots A_n = u_n,$$

so daß die Gleichung (30.) übergeht in

$$\text{(30a.)}\quad nu_0u_n + (n-2)u_1u_{n-1} + (n-4)u_2u_{n-2} + \cdots$$
$$+ (4-n)u_{n-2}u_2 + (2-n)u_{n-1}u_1 - nu_nu_0 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber richtig, denn auf der linken Seite heben sich je zwei Glieder, von denen das eine ebensoweit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht, gegeneinander fort.

Deshalb ist die Gleichung (30.) auch richtig für $m = 2$, und deshalb dann auch für $m = 3$ und so fort, d. h. sie ist richtig für alle Werte von $m$.

Bei der Division der unbedingt konvergenten Reihe

$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

durch die unbedingt konvergente Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

wird eine Reihe

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

gesucht, für welche

$$UV = W \tag{38.}$$

wird. Zwischen den Gliedern dieser 3 Reihen gelten daher dieselben Beziehungen wie bei der Multiplikation, nur sind jetzt die Größen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *gegeben*, während die Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ *gesucht* sind. Diese findet man daher der Reihe nach aus den Gleichungen (12.); es ist nämlich unter der Voraussetzung, daß $u_0$ von 0 verschieden ist,

$$w_0 = u_0 v_0, \qquad \text{also} \quad v_0 = \frac{w_0}{u_0},$$

$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \qquad \text{,,} \quad v_1 = \frac{w_1 - u_1 v_0}{u_0},$$

$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \quad \text{,,} \quad v_2 = \frac{w_2 - u_1 v_1 - u_2 v_0}{u_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0,$$

also

$$v_n = \frac{w_n - u_1 v_{n-1} - u_2 v_{n-2} - \cdots - u_n v_0}{u_0}. \tag{39.}$$

Läßt sich dann zeigen, daß die Reihe

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

gleichfalls *unbedingt konvergent* ist, so ergibt sich aus der Berechnung der Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots$, daß $UV = W$ sein muß, folglich wird

$$V = \frac{W}{U}. \tag{40.}$$

Schließlich kann man auch aus der *Potenzierung* durch Umkehrung die *Wurzelausziehung* herleiten. Ist nämlich die Reihe

$$S = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \tag{41.}$$

gegeben, so findet man die Reihe

$$\sqrt[m]{S} = U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \tag{42.}$$

indem man nach und nach die einzelnen Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so bestimmt, daß

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \tag{43.}$$

wird. Dies ist mit Hilfe der Gleichung (31.) leicht möglich, wenn man aus $A_0$ die $m^{\text{te}}$ Wurzel ausziehen kann. Es ist nämlich

$$(44.) \qquad A_0 = u_0{}^m, \quad \text{also} \quad u_0 = \sqrt[m]{A_0},$$

und ferner nach Gleichung (31.) und (32.)

$$u_0 A_1 - m u_1 A_0 = 0, \quad \text{also} \quad u_1 = \frac{u_0 A_1}{m A_0},$$

$$2(u_0 A_2 + u_1 A_1) - (m+1) u_1 A_1 - 2 m u_2 A_0 = 0,$$

also

$$u_2 = \frac{2(u_0 A_2 + u_1 A_1) - (m+1) u_1 A_1}{2 m A_0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$n(u_0 A_n + u_1 A_{n-1} + u_2 A_{n-2} + \cdots + u_{n-1} A_1) - (m+1)[u_1 A_{n-1} + 2 u_2 A_{n-2} + \cdots + (n-1) u_{n-1} A_1] - n m u_n A_0 = 0,$$

also

$$(45.) \quad u_n = \{ n(u_0 A_n + u_1 A_{n-1} + u_2 A_{n-2} + \cdots + u_{n-1} A_1) - (m+1)[u_1 A_{n-1} + 2 u_2 A_{n-2} + \cdots + (n-1) v_{n-1} A_1] \} : n m A_0.$$

Läßt sich dann zeigen, daß die Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

unbedingt konvergent ist, so wird

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = S$$

gleichfalls eine unbedingt konvergente Reihe, und es ist

$$U = \sqrt[m]{S}.$$

In dieser Weise kann man die algebraischen Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens und der Wurzelausziehung auf die unendlichen Reihen übertragen.

## § 56.

## Begriff der gleichmäßigen Konvergenz.

Wie man schon aus den in den vorhergehenden Paragraphen angeführten Beispielen ersieht, können die einzelnen Glieder $u_0$,

$u_1, u_2, \ldots$ einer Reihe stetige Funktionen einer Veränderlichen $x$ sein; es kann also

(1.) $$u_0 = f_0(x), \quad u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \ldots$$

sein. Dann setze man

(2.) $$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x),$$

(3.) $$R_n(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots.$$

Die Erklärung für die Konvergenz der Reihen, welche in § 51 gegeben wurde, gilt auch noch für solche Reihen. *Demnach heißt die Reihe*

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

*konvergent für irgend einen Wert von* $x$, *wenn sich* $S_n(x)$ *mit wachsendem* $n$ *einer bestimmten, endlichen Grenze* $S$ *nähert.* Ist die Reihe nicht für einen *einzelnen*, bestimmten Wert von $x$ konvergent, sondern *für alle* Werte von $x$ zwischen $a$ und $b$, so ist in diesem Falle $S$ noch eine Funktion von $x$, welche mit $f(x)$ bezeichnet werden möge; es wird also

(4.) $$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots.$$

Nach den Ausführungen in § 51 ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe die, daß

(5.) $$S_{m+p}(x) - S_m(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots + f_{m+p-1}(x)$$

für hinreichend große Werte von $m$ beliebig klein wird, z. B. (vom Vorzeichen abgesehen) kleiner als die beliebig kleine Größe $\varepsilon$, also

(6.) $$|\, S_{m+p}(x) - S_m(x) \,| < \varepsilon,$$

wie groß die Zahl $p$ auch sein mag. Deshalb wird auch

(7.) $$\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0.$$

Im allgemeinen wird die Reihe für verschiedene Werte von $x$ *verschieden stark* konvergieren, d. h. die Anzahl der Glieder, welche man berücksichtigen muß, um den Wert von $f(x)$ mit einer bestimmten Genauigkeit zu berechnen, wird je nach den verschiedenen Werten von $x$ verschieden groß sein; oder mit anderen Worten: Ist die beliebig kleine Zahl $\varepsilon$ irgendwie gegeben, so wird man im allgemeinen für die Zahl $m$ verschiedene Werte $m_1, m_2, m_3, \ldots$ einsetzen müssen, um die Ungleichung (6.) zu befriedigen, wenn die Veränderliche $x$ das Intervall von $a$ bis $b$ durchläuft. Ist unter diesen Zahlen $m_1$, $m_2, m_3, \ldots$ auch noch die größte eine *endliche* Zahl $m$, so lange $\varepsilon$ nicht unendlich klein wird, so sagt man, die Reihe sei in dem Intervalle von $a$ bis $b$ *gleichmäßig konvergent.* Es gilt also die folgende

**Erklärung.** *Die Reihe*

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

*heißt in dem Intervalle von $a$ bis $b$ gleichmäßig konvergent, wenn zu jeder beliebig kleinen Größe $\varepsilon$ eine ganze Zahl $m$ so bestimmt werden kann, daß für $n \geqq m$ der absolute Betrag von $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ und deshalb auch der absolute Betrag von $R_n(x)$ kleiner bleiben als $\varepsilon$, welchen Wert $x$ auch in dem Intervalle von $a$ bis $b$ haben mag.*

So ist z. B. die Reihe

$$f(x) = \cos x + \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{2}} + \frac{\cos(3x)}{3\sqrt{3}} + \frac{\cos(4x)}{4\sqrt{4}} + \cdots \tag{8.}$$

*gleichmäßig konvergent*, denn nach Satz 9 in § 52 ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$$

konvergent. Man kann daher die Zahl $m$ so groß wählen, daß für $n \geqq m$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}} + \cdots < \varepsilon \tag{9.}$$

wird. Da nun für jeden Wert von $x$

$$\left|\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right| \leqq \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \tag{10.}$$

ist, so wird für $n \geqq m$ erst recht

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}} + \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)\sqrt{n+2}} + \cdots\right| < \varepsilon. \tag{11.}$$

Aus dem Beweise sieht man, daß diese Reihe außerdem auch *unbedingt* konvergent ist.

Um den Gegensatz hervorzuheben, möge auch noch ein Beispiel für die *ungleichmäßige* Konvergenz folgen. Es sei

$$(12.)\quad f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \frac{x}{(3x+1)(4x+1)} + \cdots,$$

dann ist

$$f_0(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{x+1},$$

$$f_1(x) = \frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1},$$

$$f_2(x) = \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1},$$

..................................................

$$(13.)\quad f_n(x) = \frac{x}{(nx+1)[(n+1)x+1]} = \frac{1}{nx+1} - \frac{1}{(n+1)x+1}.$$

Deshalb wird

$$(14.)\quad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

$$(15.)\quad S_{m+p}(x) - S_m(x) = \frac{1}{mx+1} - \frac{1}{(m+p)x+1},$$

folglich wird für $x > 0$

$$(16.)\quad R_m(x) = \frac{1}{mx+1}.$$

Die Reihe ist daher noch für beliebig kleine Werte von $x$ konvergent, denn man kann $n$ so groß machen, daß $nx + 1$ doch noch beliebig groß wird, und erhält aus Gleichung (14.)

$$(17.)\quad f(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x) = 1 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Ja, die Reihe ist sogar noch für $x$ *gleich* 0 konvergent, weil dann sämtliche Glieder gleich Null sind, so daß man

$$(18.)\quad f(x) = 0 \quad \text{für} \quad \lim x = 0$$

erhält. Damit aber

$$R_m(x) = \frac{1}{mx+1} < \varepsilon$$

wird, muß

$$mx\varepsilon + \varepsilon > 1, \quad \text{oder} \quad m > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} \tag{19.}$$

sein. Die Zahl $m$ wächst daher ins Unbegrenzte, wenn $x$ sich dem Werte 0 immer mehr nähert, folglich ist die Reihe für $0 \leqq x < +\infty$ *ungleichmäßig* konvergent. Bezeichnet man dagegen mit $a$ eine beliebig kleine, aber noch endliche positive Größe, so ist die Reihe für $a \leqq x \leqq +\infty$ *gleichmäßig* konvergent.

**Satz.** *Sind die Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... für $a < x < b$ stetig, und ist in diesem Intervalle die Reihe*

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots \tag{20.}$$

*gleichmäßig konvergent, so ist $f(x)$ für $a < x < b$ eine stetige Funktion von $x$.*

**Beweis.** Nach Formel Nr. 5 der Tabelle ist die Funktion $f(x)$ stetig für alle Werte von $x$, für welche die Differenz

$$\Delta = f(x+\gamma) - f(x-\delta) \tag{21.}$$

mit den positiven Größen $\gamma$ und $\delta$ zugleich verschwindend klein wird. Diese Bedingung wird hier erfüllt, denn solange $n$ eine endliche Zahl bleibt, ist

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) \tag{22.}$$

eine *stetige* Funktion von $x$, weil $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... stetige Funktionen sind; man kann also

$$|S_n(x+\gamma) - S_n(x-\delta)| < \varepsilon \tag{23.}$$

machen, wenn man nur $\gamma$ und $\delta$ hinreichend klein macht. Außerdem kann man nach Voraussetzung, wenn

$$a < x - \delta < x + \varepsilon < b$$

ist, für hinreichend große Werte von $n$ auch

$$|R_n(x-\delta)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |R_n(x+\gamma)| < \varepsilon \tag{24.}$$

machen, folglich wird

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |f(x+\gamma) - f(x-\delta)| \\ &= |S_n(x+\gamma) + R_n(x+\gamma) - S_n(x-\delta) - R_n(x-\delta)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

d. h. $\Delta$ wird mit $\gamma$ und $\delta$ zugleich verschwindend klein, da man $3\varepsilon$ beliebig klein machen kann.

## § 57.
## Konvergenz der Potenzreihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 118 und 119.)

Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Von einer solchen Reihe gelten die folgenden Sätze:

**Satz 1.** *Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe $r$, wenn*

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

*wird.*

**Beweis.** In dem vorliegenden Falle ist nach Voraussetzung

$$(1.)\qquad |x| < r, \quad \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}, \quad \text{also} \quad \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| < 1,$$

folglich erhält man für hinreichend große Werte von $n$, wenn man $a_n x^n$ mit $u_n$ bezeichnet,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} x}{a_n} \right| \leqq k < 1.$$

Dies ist aber nach Satz 5 in § 52 die hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots.$$

Ob die Reihe auch für $x = +r$ oder für $x = -r$ konvergiert, ist durch den Satz noch nicht entschieden.

Die Beispiele, welche bei Satz 5 in § 52 angeführt wurden, können auch hier benutzt werden. So ist die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

für alle endlichen Werte von $x$ unbedingt konvergent, weil

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$$

mit $n$ zugleich beliebig groß wird.

Die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

ist unbedingt konvergent für $-1 < x < +1$, weil

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-4)(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n-2)(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

ist. Deshalb wird

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} = \frac{4 + \frac{2}{n}}{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} \geqq 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots$$

ist unbedingt konvergent für $-1 < x < +1$, wenn $p$ einen positiven Wert hat, denn hier ist

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}, \; \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \geqq 1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Differentiiert man die einzelnen Glieder der Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, so erhält man wieder eine Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots, \quad \text{wobei} \quad A_n = (n+1)\, a_{n+1}$$

ist. Daraus folgt

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| = \lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n+2} \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

und damit

**Satz 2.** *Wird*

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r,$$

*so ist auch die Potenzreihe $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$, welche aus der ursprünglichen Potenzreihe durch Differentiation der ein-*

*zelnen Glieder entsteht, für alle Werte von $x$ zwischen $-r$ und $+r$ unbedingt konvergent.*

**Beispiel.** Die Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \tag{2.}$$

ist unbedingt konvergent für $-1 < x < +1$, weil

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$$

ist, folglich gilt dasselbe auch für die Reihe

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots. \tag{3.}$$

**Satz 3.** *Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe $r$, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$,*

$$| a_n | r^n \leqq g \tag{4.}$$

ist, wobei $g$ eine bestimmte endliche Größe bedeutet.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist für hinreichend große Werte von $m$

$$| a_m | r^m \leqq g, \quad | a_{m+1} | r^{m+1} \leqq g, \quad | a_{m+2} | r^{m+2} \leqq g, \ldots, \tag{5.}$$

folglich ist, wenn $x$ vorläufig positiv genommen wird,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| a_m x^m \right| = \left| a_m r^m \left(\frac{x}{r}\right)^m \right| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^m, \\ \left| a_{m+1} x^{m+1} \right| = \left| a_{m+1} r^{m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} \right| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}, \\ \left| a_{m+2} x^{m+2} \right| + \left| a_{m+2} r^{m+2} \left(\frac{x}{r}\right)^{m+2} \right| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \tag{6.}$$

Da nun $\frac{x}{r}$ nach Voraussetzung ein echter Bruch ist, so wird die geometrische Progression

$$\begin{aligned} & g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^m + g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} + g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+2} + \cdots \\ & = g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^m \left[1 + \frac{x}{r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots\right] = g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^m \frac{1}{1 - \frac{x}{r}} \end{aligned} \tag{7.}$$

eine konvergente Reihe, folglich erst recht

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots,$$

d. h. die Reihe

$$(8.) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist *unbedingt konvergent.*

In der Reihe wird nur das Vorzeichen der Glieder $a_1 x$, $a_3 x^3$, $a_5 x^5, \ldots$ geändert, wenn man $x$ mit $-x$ vertauscht. Der Satz gilt also für positive und negative Werte von $x$, wenn nur der absolute Betrag von $x$ kleiner ist als $r$.

Aus Gleichung (7.) erkennt man auch, daß der Fehler, welcher begangen wird, wenn man die Reihe beim $m^{\text{ten}}$ Gliede $a_{m-1}x^{m-1}$ abbricht, kleiner ist als der absolute Betrag von

$$g \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^m \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{r}}.$$

**Satz 4.** *Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag (gleich oder) kleiner ist als die positive Größe $r$, wenn sie für $x$ gleich $r$ unbedingt konvergiert.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist die Reihe

$$|a_0| + |a_1 r| + |a_2 r^2| + \cdots$$

konvergent, folglich ist nach Satz 3 in § 52 die Reihe

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots$$

erst recht konvergent, weil für $|x| \leqq r$

$$(9.) \qquad |a_n x^n| \leqq |a_n r^n|.$$

**Satz 5.** *Ist eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ unbedingt konvergent für $x = r$, so ist auch die Reihe*

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

*unbedingt konvergent für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner als $r$ ist.*

**Beweis.** Aus der Voraussetzung folgt, daß $|a_n| r^n$ verschwindend klein wird, wenn $n$ ins Unbegrenzte wächst; deshalb bleibt für hinreichend große Werte von $n$, z. B. für $n \geqq m$, $|a_n| r^n$ kleiner als die endliche Größe $g$. Aus

$$(10.)\qquad |na_n x^{n-1}| = \left|\frac{n}{r} a_n \left(\frac{x}{r}\right)^{n-1}\right| r^n = \frac{n}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1} \cdot |a_n| r^n$$

folgt, wenn man $\left|\frac{x}{r}\right|$ mit $k$ bezeichnet, für alle Werte von $x$ zwischen $-r$ und $+r$

$$(11.)\qquad |na_n x^{n-1}| = \frac{n}{r} k^{n-1} \cdot |a_n| r^n < \frac{g}{r} \cdot nk^{n-1}.$$

Da $k < 1$ ist, so sind nach Gleichung (3.) die Reihen

$$1 + 2k + 3k^2 + 4k^3 + \cdots \quad \text{und} \quad \frac{g}{r}(1 + 2k + 3k^2 + 4k^3 + \cdots)$$

konvergent, folglich erst recht die Reihe

$$|a_1| + 2|a_2 x| + 3|a_3 x^2| + \cdots.$$

**Satz 6.** *Ist die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für $x$ gleich $r$ divergent, so ist sie auch für alle Werte von $x$ divergent, deren absoluter Betrag größer ist als $r$.*

**Beweis.** Wäre die Reihe für einen solchen Wert von $x$ *konvergent*, so müßte dafür

$$\lim_{n=\infty} |a_n x^n| = 0$$

werden. Es müßten also die Glieder $|a_n x^n|$ abnehmen und wären deshalb von einer bestimmten Stelle ab kleiner als die endliche Größe $g$, d. h. es wäre

$$(12.)\qquad |a_n x^n| \lesseqqgtr g \quad \text{für} \quad n \geqq m;$$

dann müßte aber nach Satz 3 die Reihe auch für $x$ gleich $r$ unbedingt konvergent sein.

Faßt man die Sätze 4 und 6 zusammen, so erhält man den folgenden

**Satz 7.** *Gibt es überhaupt Werte von $x$, welche von Null verschieden sind, und für welche die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ unbedingt konvergiert, so konvergiert die Reihe entweder unbedingt für alle endlichen Werte von $x$, oder es gibt eine positive Zahl $r$, welche die Eigenschaft besitzt, daß die Reihe unbedingt konvergiert für $|x| < r$, und daß sie divergiert für $|x| > r$.*

**Beweis.** Wenn die Potenzreihe nicht für alle endlichen Werte von $x$ konvergiert, so sei $x_1$ ein Wert von $x$, für welchen sie *konvergiert*, und $x_2$ sei ein Wert von $x$, für welchen sie *divergiert*. Man darf annehmen, daß $x_1$ und $x_2$ beide positiv sind, da die Reihe

(13.) $$\Sigma = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots$$

doch lauter positive Glieder enthält. Dabei muß nach Satz 4 $x_2 > x_1$ sein. Durchläuft jetzt die Veränderliche $x$ das Intervall von $x_1$ bis $x_2$ stetig, so muß sie einen Wert $r$ erreichen, für welchen die Reihe in Gleichung (9.) aufhört, konvergent zu sein; d. h. die Konvergenz der Reihe mit lauter positiven Gliedern geht über in Divergenz, wenn $x$ den Wert $r$ passiert. Dann ist aber nach Satz 4 die Reihe unbedingt konvergent für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner als $r$ ist, und sie ist divergent für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag größer ist als $r$.

Was für $|x|$ *gleich* $r$ geschieht, ist noch unbestimmt. So ist z. B. die Reihe

(14.) $$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$$

konvergent für $-1 < x < +1$ und divergent für $|x| > 1$. Hier ist also die Zahl $r$ gleich 1. Für $x$ gleich $+1$ ist die Reihe

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

*bedingt konvergent*, und für $x$ gleich $-1$ ist die Reihe *divergent*.

**Satz 8.** *Ist $r > 0$, und ist die Potenzreihe*

(15.) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

*(bedingt oder unbedingt) konvergent für $x$ gleich $r$, so ist sie für $0 \leqq x \leqq r$ gleichmäßig konvergent und stellt deshalb nach dem in § 56 bewiesenen Satze in diesem Intervall eine stetige Funktion dar.*

**Beweis.** Ist $\varepsilon$ wieder eine beliebig kleine positive Größe, so ist nach Voraussetzung für hinreichend große Werte von $m$

(16.) $$|S_{m+p}(r) - S_m(r)| = |a_m r^m + a_{m+1} r^{m+1} + \cdots \\ + a_{m+p-1} r^{m+p-1}| < \varepsilon,$$

wie groß man $p$ auch nehmen mag. Setzt man also

$$(17.)\quad \begin{cases} a_m r^m = \sigma_1, \\ a_m r^m + a_{m+1} r^{m+1} = \sigma_2, \\ a_m r^m + a_{m+1} r^{m+1} + a_{m+2} r^{m+2} = \sigma_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

so wird

$$(18.)\quad |\sigma_1| < \varepsilon,\ |\sigma_2| < \varepsilon,\ |\sigma_3| < \varepsilon,\ \dots |\sigma_p| < \varepsilon.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\frac{x}{r}$ mit $k$, so ist $k \leqq 1$, und man erhält

$$(19.)\quad S_{m+p}(x) - S_m(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_{m+p-1} x^{m+p-1}$$
$$= a_m r^m k^m + a_{m+1} r^{m+1} k^{m+1} + \dots + a_{m+p-1} r^{m+p-1} k^{m+p-1}.$$

Aus den Gleichungen (17.) folgt

$$(20.)\quad \begin{cases} a_m r^m = \sigma_1,\ a_{m+1} r^{m+1} = \sigma_2 - \sigma_1,\ a_{m+2} r^{m+2} = \sigma_3 - \sigma_2, \dots \\ \qquad a_{m+p-1} r^{m+p-1} = \sigma_p - \sigma_{p-1}, \end{cases}$$

deshalb geht Gleichung (19.) über in

$$(21.)\quad S_{m+p}(x) - S_m(x) = \sigma_1 k^m + (\sigma_2 - \sigma_1) k^{m+1} + (\sigma_3 - \sigma_2) k^{m+2} + \cdots$$
$$+ (\sigma_p - \sigma_{p-1}) k^{m+p-1} = \sigma_1 (k^m - k^{m+1}) + \sigma_2 (k^{m+1} - k^{m+2}) + \cdots$$
$$+ \sigma_{p-1} (k^{m+p-2} - k^{m+p-1}) + \sigma_p k^{m+p-1}.$$

Da der absolute Betrag einer Summe kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge, und da

$$k^{n-1} - k^n = k^{n-1}(1 - k) \geqq 0$$

ist, so wird

$$(22.)\quad |S_{m+p}(x) - S_m(x)| \leqq |\sigma_1| (k^m - k^{m+1}) + |\sigma_2| (k^{m+1} - k^{m+2}) + \cdots$$
$$+ |\sigma_{p-1}| (k^{m+p-2} - k^{m+p-1}) + |\sigma_p| k^{m+p-1},$$

oder mit Rücksicht auf die Ungleichungen (18.)

$$(23.)\quad |S_{m+p}(x) - S_m(x)| \leqq \varepsilon (k^m - k^{m+1} + k^{m+1} - k^{m+2} + \dots$$
$$+ k^{m+p-2} - k^{m+p-1} + k^{m+p-1}) = \varepsilon k^m.$$

Es wird also $|S_{m+p}(x) - S_m(x)|$ für hinreichend große Werte von $m$ beliebig klein, gleichviel, welchen Wert $x$ in dem Intervalle von 0 bis $r$ haben mag, d. h. die Reihe ist in diesem Intervalle *gleichmäßig konvergent.*

Derselbe Satz gilt für das Intervall $-r \leqq x \leqq 0$, wenn die Reihe für $x$ gleich $-r$ konvergent ist.

§ 58.

## Konvergenz der periodischen Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 120 und 121.)

Die Reihen von der Form

$$(1.)\qquad \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + a_3\cos(3x) + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

nennt man *„periodische Reihen"*, weil die Glieder sämtlich denselben Wert behalten, wenn man $x$ um ein Vielfaches von $2\pi$ vermehrt oder vermindert, weil sich also die Werte der Reihe periodisch wiederholen, wenn $x$ um $2\pi$ wächst.

Zunächst möge der einfache Fall betrachtet werden, wo die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle einander gleich und die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sämtlich gleich 0 sind; es sei also

$$(2.)\qquad S_n = a_0\left[\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cdots + \cos(n-1)x\right].$$

Aus der bekannten Formel

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

folgt für $a = \frac{2m+1}{2}x, \quad b = \frac{2m-1}{2}x$

$$(3.)\qquad 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(mx) = \sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right).$$

Multipliziert man Gleichung (2.) mit $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, so erhält man daher

$$(4.)\qquad 2S_n\sin\left(\frac{x}{2}\right) = a_0\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left\{\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\right.$$
$$+ \left\{\sin\left(\frac{5x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right\}$$
$$\left. + \cdots + \left\{\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{(2n-3)}{2}x\right)\right\}\right]$$
$$= a_0\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right),$$

oder

$$(5.)\qquad S_n = \frac{a_0 \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Wächst $n$ ins Unbegrenzte, so schwankt der Wert von $\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$ zwischen $-1$ und $+1$, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze, folglich ist die Reihe *nicht konvergent*.

Jetzt seien die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ alle einander gleich, und die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien sämtlich gleich $0$; es sei also

$$(6.)\qquad S_n' = b_1[\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)].$$

Aus der bekannten Formel

$$\cos b - \cos a = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

folgt für $a = \frac{2m+1}{2}x,\quad b = \frac{2m-1}{2}x$

$$(7.)\qquad 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(mx) = \cos\left(\frac{2m-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right).$$

Multipliziert man Gleichung (6.) mit $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, so erhält man daher

$$\begin{aligned}(8.)\qquad 2S_n'\sin\left(\frac{x}{2}\right) = b_1\Bigg[&\left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right\}\\ &+\left\{\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right)\right\} + \cdots\\ &+\left\{\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right\}\Bigg]\\ = b_2&\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right],\end{aligned}$$

oder

$$(9.)\qquad S_n' = \frac{b_1}{2}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right],$$

eine Größe, die sich ebenfalls keiner bestimmten Grenze nähert, wenn $n$ ins Unbegrenzte wächst, folglich ist auch diese Reihe *nicht konvergent.*

Bilden die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine *steigende* Reihe, so können sich $S_n$ und $S_n'$ mit wachsendem $n$ schon deshalb keiner bestimmten, endlichen Grenze nähern, weil die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0$$

nicht erfüllt wird. Man braucht daher nur noch zu untersuchen, ob die periodischen Reihen dann konvergent sind, wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *fallende* Reihen bilden. Es sei jetzt also

$$S_n = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \cdots + a_{n-1}\cos(n-1)x, \tag{10.}$$

wobei

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0 \tag{11.}$$

sein möge; dann wird nach Gleichung (3.)

$$\begin{aligned} 2S_n \sin\left(\frac{x}{2}\right) = a_0 \sin\left(\frac{x}{2}\right) &+ a_1\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\ &+ a_2\left[\sin\left(\frac{5x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right] \\ + \cdots &+ a_{n-1}\left[\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2n-3}{2}x\right)\right], \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2S_n \sin\left(\frac{x}{2}\right) - a_{n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = \\ (a_0 - a_1)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + (a_1 - a_2)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) + (a_2 - a_3)\sin\left(\frac{5x}{2}\right) + \cdots \\ + (a_{n-2} - a_{n-1})\sin\left(\frac{2n-3}{2}x\right). \end{aligned} \tag{12.}$$

In der Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) = a_0 - a_{n-1} \tag{13.}$$

sind sämtliche Glieder positiv, und die Summe der ersten $n$ Glieder nähert sich mit wachsendem $n$ der bestimmten, endlichen Grenze $a_0$, d. h. die in Gleichung (13.) angegebene Reihe ist *unbedingt* konvergent. Deshalb ist auch die in Gleichung (12.) angegebene Reihe *unbedingt* konvergent, da der absolute Betrag der einzelnen Glieder kleiner ist als die entsprechenden Glieder in der Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots.$$

Da noch

$$\lim_{n=\infty} a_{n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) = 0$$

ist, so nähert sich $2S_n \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ mit wachsendem $n$ einer bestimmten, endlichen Grenze. Dasselbe gilt auch für $S_n$ selbst, wenn man die Werte von $x$ ausnimmt, für welche $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ gleich 0 wird. Dies gibt

**Satz 1.** *Die Reihe*

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots$$

*ist konvergent für alle Werte von $x$, welche von $0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi, \ldots$ verschieden sind, wenn die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3, \ldots$ positiv sind und eine bis ins unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden.*

Indem man $x$ mit $x + \pi$ vertauscht, findet man, daß die Reihe

$$+\tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) - a_3 \cos(3x) + - \cdots$$

unter denselben Bedingungen für alle Werte von $x$ konvergiert, die von $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$ verschieden sind.

Wenn die Koeffizienten $b_1$, $b_2$, $b_3, \ldots$ positiv sind und eine bis ins unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, wenn also

$$(14.)\qquad b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0,$$

so findet man in ähnlicher Weise aus

$$(15.)\qquad S_n' = b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \cdots + b_n \sin(nx),$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ multipliziert und Gleichung (7.) anwendet,

$$(16.)\quad 2S_n'\sin\left(\frac{x}{2}\right) = b_1\cos\left(\frac{x}{2}\right) - (b_1 - b_2)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - (b_2 - b_3)\cos\left(\frac{5x}{2}\right) - \cdots - (b_{n-1} - b_n)\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - b_n\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf die jetzt geltenden Voraussetzungen die Reihe

$$(17.)\qquad (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots = b_1$$

unbedingt konvergent, folglich erst recht die Reihe

$$(b_1 - b_2)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + (b_2 - b_3)\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + (b_3 - b_4)\cos\left(\frac{7x}{2}\right) + \cdots,$$

bei welcher die absoluten Beträge der einzelnen Glieder noch kleiner sind. Da hierbei noch $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, ... sämtlich gleich 0 sind für alle Werte von $x$, für welche $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ verschwindet, so bleibt die Reihe

$$b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

auch noch für diese Werte von $x$ konvergent, und man erhält

**Satz 2.** *Die Reihe*

$$b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

*ist für alle Werte von $x$ konvergent, wenn die Koeffizienten $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... positiv sind und eine bis ins unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden.*

Indem man $x$ mit $x + \pi$ vertauscht, findet man, daß die Reihe

$$b_1\sin x - b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) - + \cdots$$

unter denselben Bedingungen für alle Werte von $x$ konvergiert.

## Beispiele.

1) Die Reihe

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(3x)}{3} + \cdots$$

ist konvergent, wenn $x$ von $0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... verschieden ist.

2). Die Reihe

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1}} + \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(3x)}{\sqrt{3}} + \cdots$$

ist konvergent für alle Werte von $x$.

Die Methoden, durch welche es möglich ist, gegebene Funktionen durch solche periodische Reihen darzustellen, können erst in der Integral-Rechnung mitgeteilt werden.

VII. Abschnitt.

# Maxima und Minima von entwickelten Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

## § 59.

## Bedingungen, unter denen ein Maximum oder Minimum eintreten kann.

Entspricht der Gleichung

$$y = f(x) \tag{1.}$$

die in Figur 29 oder in Figur 30 dargestellte Kurve, so liegt der Punkt $P_1$ *höher* und der Punkt $P_2$ *tiefer* als die benachbarten Punkte. Man nennt deshalb $P_1$ einen *höchsten* und $P_2$ einen

Fig. 29.

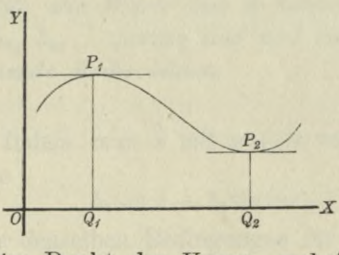
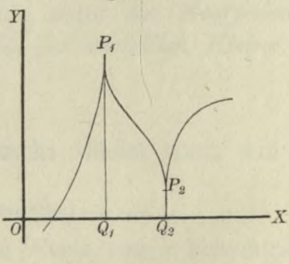



Fig. 30.




*tiefsten* Punkt der Kurve, wobei aber nicht ausgeschlossen ist, daß die Kurve in ihrem weiteren Verlaufe Punkte enthält, die noch höher liegen als $P_1$ oder noch tiefer als $P_2$, da diese Punkte $P_1$ und $P_2$ nur mit den *benachbarten* Punkten, d. h. mit den *unmittelbar vorhergehenden* und den *unmittelbar folgenden* Punkten verglichen werden. Die einem solchen höchsten Punkte $P_1$ entsprechende Ordinate $Q_1P_1$ oder $y_1 = f(x_1)$ heißt dann ein

*Maximum*, und die einem solchen tiefsten Punkte $P_2$ entsprechende Ordinate $Q_2P_2$ oder $y_2 = f(x_2)$ heißt ein *Minimum* der Funktion $y = f(x)$.

Bezeichnet man mit $a$ eine beliebig kleine Größe, so sind die Ordinaten der Kurvenpunkte, welche dem Kurvenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$ und $y = f(x)$ benachbart sind $f(x - a)$ und $f(x + a)$, und zwar ist $f(x - a)$ die Ordinate eines unmittelbar vorhergehenden und $f(x + a)$ die Ordinate eines unmittelbar folgenden Punktes.

Dieser geometrischen Deutung entsprechend sollen allgemein

$$f(x - a) \quad \text{und} \quad f(x + a)$$

„zu $f(x)$ *benachbarte* Werte" genannt werden, und zwar ist $f(x - a)$ „ein unmittelbar *vorhergehender*", $f(x + a)$ „ein unmittelbar *folgender* benachbarter Wert" der Funktion. Daraus ergibt sich dann auch die folgende Erklärung:

*Wenn $f(x)$ größer ist als alle unmittelbar vorhergehenden und folgenden Werte der Funktion, so heißt $f(x)$ „ein Maximum"; und wenn $f(x)$ kleiner ist als alle unmittelbar vorhergehenden und folgenden Werte der Funktion, so heißt $f(x)$ „ein Minimum".*

Im ersten Falle sind also die Differenzen

$$\Delta_1 = f(x - a) - f(x) < 0 \quad \text{und} \quad \Delta_2 = f(x + a) - f(x) < 0;$$

im zweiten Falle sind

$$\Delta_1 = f(x - a) - f(x) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta_2 = f(x + a) - f(x) > 0.$$

Damit nun die Kurve (vergl. Fig. 29 und 30) einen solchen höchsten Punkt $P_1$ erreicht, muß sie vorher steigen und nachher fallen; und damit sie einen solchen tiefsten Punkt $P_2$ erreicht, muß sie vorher fallen und nachher steigen.

Aus diesen Erwägungen kann man die Bedingungen ableiten, unter denen $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird.

In § 13 (Seite 86 und 87) war nämlich gezeigt worden, daß $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *positiv* sein muß, wenn die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ in dem zugehörigen Punkte *steigt*, und daß $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *negativ* sein muß, wenn die Kurve in dem zugehörigen Punkte *fällt.* Unabhängig von der geometrischen Darstellung gab dies den Satz:

*Wenn eine Funktion $y = f(x)$ gleichzeitig mit $x$ zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Wert von $x$ positiv; wenn aber die Funktion abnimmt, während $x$ zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Wert von $x$ negativ;*

und umgekehrt:

*Eine Funktion $f(x)$ nimmt gleichzeitig mit $x$ zu für alle Werte von $x$, für welche $f'(x)$ positiv ist, und die Funktion nimmt ab, während $x$ zunimmt, für alle Werte von $x$, für welche $f'(x)$ negativ ist.*

Wenn also $f(x)$ ein *Maximum* werden soll, so muß $f'(x)$ aus dem Positiven in das Negative übergehen; wenn dagegen $f(x)$ ein *Minimum* werden soll, so muß $f'(x)$ aus dem Negativen in das Positive übergehen.

Hieraus folgt, daß $f(x)$ nur für diejenigen Werte von $x$ ein Maximum oder Minimum werden kann, für welche die Ableitung $f'(x)$ einen *Zeichenwechsel* erleidet. Setzt man voraus, daß $f'(x)$ wohl unendlich groß werden kann, daß aber alle übrigen Fälle der Unstetigkeit ausgeschlossen sind, so tritt ein solcher Zeichenwechsel nur dann ein, wenn $f'(x)$ entweder gleich *Null* oder *unendlich groß wird.*

Dies gibt den Satz:

*Die Funktion $f(x)$ kann nur für diejenigen Werte von $x$ ein Maximum oder Minimum werden, für welche $f'(x)$ gleich Null oder unendlich groß wird.*

Aus der geometrischen Deutung der Ableitung, nämlich aus (Formel Nr. 17 der Tabelle)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

folgt, wie auch aus den Figuren zu ersehen ist, daß in den Kurvenpunkten, welche einem Maximum oder Minimum entsprechen, die Tangente zur $X$-Achse oder zur $Y$-Achse parallel sein muß.

Ist $f'(x) = 0$, ist also die Tangente in dem zugehörigen Kurvenpunkte $P$ parallel zur $X$-Achse, so liegen die dem Punkte

$P$ benachbarten Punkte sämtlich unterhalb oder sämtlich oberhalb dieser Tangente, je nachdem der Punkt $P$ einem Maximum oder Minimum entspricht. (Vergl. Fig. 29.)

Ist $f'(x) = \infty$, ist also die Tangente parallel zur $Y$-Achse, so hat die Kurve in dem zugehörigen Punkte $P$ eine nach oben oder nach unten gerichtete *Spitze*, je nachdem der Punkt $P$ einem Maximum oder einem Minimum entspricht. (Vergl. Fig. 30.)

Die Regel, welche sich aus den vorhergehenden Betrachtungen für die Aufsuchung der Maxima und Minima ergibt, ist daher die folgende:

Man ermittele diejenigen Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich Null oder unendlich groß wird, und untersuche dann für die dadurch gefundenen Werte von $x$ noch das Vorzeichen von $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$.

Wird für hinreichend kleine Werte von $a$

$$f'(x-a) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x+a) > 0,$$

so ist $f(x)$ ein *Minimum*, wie man aus den Figuren 31 und 32 erkennt, in denen

$$OQ_1 = x - a \quad \text{und} \quad OQ_2 = x + a$$

sein möge.

Fig. 31.

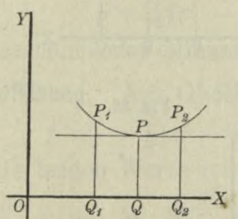
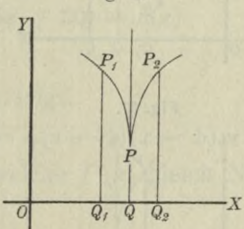



Fig. 32.




Wird dagegen für hinreichend kleine Werte von $a$

$$f'(x-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(x+a) < 0,$$

so ist $f(x)$ ein *Maximum*, wie man aus den Figuren 33 und 34 erkennt, in denen wieder

$$OQ_1 = x - a \quad \text{und} \quad OQ_2 = x + a$$

sein möge.

Fig. 33.

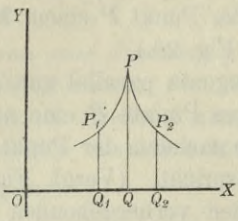
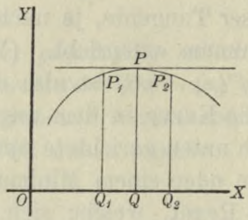



Fig. 34.




**Bemerkungen.**

1) Es kann vorkommen, daß $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ *beide* positiv sind, obgleich $f'(x)=0$ (vergl. Fig. 35) oder obgleich $f'(x)=\infty$ wird (vergl. Fig. 36). Ebenso kann es vorkommen, daß $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ *beide* negativ sind, obgleich $f'(x)=0$ (vergl. Fig. 37), oder $f'(x)=\infty$ wird (vergl. Fig. 38). In diesen Fällen ist $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Die Kurven haben vielmehr in den zugehörigen Punkten einen Wendepunkt.

Fig. 35.

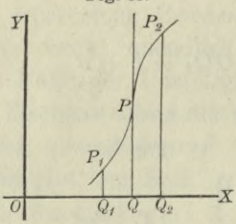



Fig. 36.

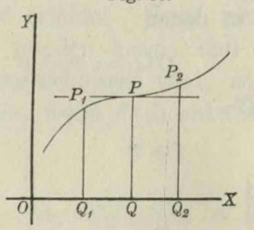



Fig. 37.

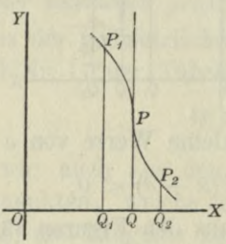
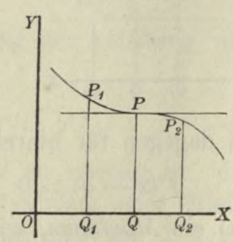



Fig. 38.




2) Wenn man für einen bestimmten Wert von $x$ die Vorzeichen von $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$ untersuchen will, so ist es *notwendig*, die Größe $a$ *hinreichend klein* zu wählen, um sichere Schlüsse über das

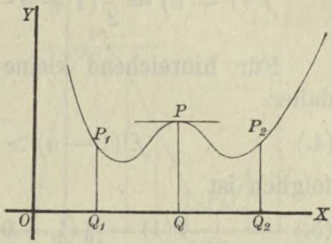
Auftreten eines Maximums oder Minimums ziehen zu können.

Wäre z. B. die Kurve, welche der Funktion

$$y = f(x)$$

entspricht, durch die Figur 39 dargestellt, so würde $f(x)$ für $x = OQ$ ein *Maximum*. Trotzdem erhielte man, wenn $a$ so groß gewählt würde, wie es in der Figur geschehen ist.

Fig. 39.




$$f'(x-a) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x+a) > 0,$$

Aus diesen Ungleichungen würde man also den falschen Schluß ziehen, daß $f(x)$ ein Minimum sei.

Wenn man aber $a$ *hinreichend klein* wählt, so ist auch in diesem Falle, wie man von vornherein erwarten konnte, die angegebene Regel bestätigt, d. h. es wird

$$f'(x-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(x+a) < 0,$$

dem Umstande entsprechend, daß $f(x)$ ein Maximum ist.

## § 60.

## Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll untersuchen, für welche Werte von $x$ die Funktion

$$(1.) \qquad y = \tfrac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 15x + 30) = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum wird.

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$(2.) \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) = \tfrac{1}{2}(x-1)(x-5).$$

Die beiden Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich Null wird, sind also

$$(3.) \qquad x = 1 \quad \text{und} \quad x = 5.$$

Für diese Werte kann *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum eintreten. Um zu entscheiden, ob das eine oder das andere wirklich stattfindet, bilde man nach Anleitung des vorigen Paragraphen

$$f'(1-a) = \frac{1}{2}(1-a-1)(1-a-5) = \frac{a}{2}(a+4)$$

und

$$f'(1+a) = \frac{1}{2}(1+a-1)(1+a-5) = \frac{a}{2}(a-4).$$

Für hinreichend kleine Werte der positiven Größe $a$ ist daher

(4.) $$f'(1-a) > 0, \quad f'(1+a) < 0,$$

folglich ist

(5.) $$f(1) = \tfrac{1}{6}(1 - 9 + 15 + 30) = \tfrac{37}{6} = 6{,}1666\ldots$$

ein Maximum.

Ebenso bilde man

$$f'(5-a) = \tfrac{1}{2}(5-a-1)(5-a-5) = -\frac{a}{2}(4-a)$$

und

$$f'(5+a) = \tfrac{1}{2}(5+a-1)(5+a-5) = +\frac{a}{2}(4+a).$$

Für hinreichend kleine Werte von $a$ ist daher

(6.) $$f'(5-a) < 0 \quad \text{und} \quad f'(5+a) > 0,$$

folglich wird

(7.) $$f(5) = \tfrac{1}{6}(125 - 225 + 75 + 30) = \tfrac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$$

ein Minimum.

Man könnte jetzt noch fragen, für welche Werte von $x$ die erste Ableitung $f'(x)$ unendlich groß wird. Diese Frage beantwortet sich aber nach Gleichung (2.) dahin, daß es keinen endlichen Wert von $x$ gibt, für welchen $f'(x)$ unendlich groß wird.

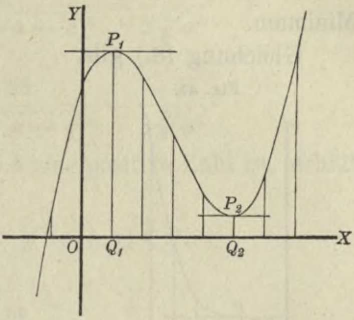
Demnach sind $x = 1$ und $x = 5$ die *einzigen* Werte von $x$, für welche die Funktion ein Maximum oder Minimum werden kann.

**Bemerkung.**

Die Richtigkeit des gefundenen Resultates kann man durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) anschaulich machen. Aus dieser Gleichung findet man nämlich

$y = -7{,}333\ldots$ für $x = -2$,
$y = +0{,}833\ldots$ „ $x = -1$,
$y = +5$ „ $x = 0$,
$y = +6{,}166\ldots$ „ $x = +1$.
$y = +5{,}333\ldots$ „ $x = +2$,
$y = +3{,}5$ „ $x = +3$,
$y = +1{,}666\ldots$ „ $x = +4$,
$y = +0{,}833\ldots$ „ $x = +5$,
$y = +2$ „ $x = +6$,
$y = +6{,}166\ldots$ „ $x = +7$.

Fig. 40.




Wenn man nach diesen Angaben die Kurve zeichnet, welche der Gleichung (1.) entspricht, so findet man in der Tat, daß dem Werte $x_1 = OQ_1 = 1$ ein Maximum und dem Werte $x_2 = OQ_2 = 5$ ein Minimum entspricht.

Der Anblick der Figur lehrt ferner, daß die *Maximal-Werte* durchaus nicht immer die *größten* Funktions-Werte sind, und daß die *Minimal-Werte* ebenso wenig die *kleinsten* Funktions-Werte zu sein brauchen. Die Maximal-Werte sind nur *größer*, und die Minimal-Werte sind nur *kleiner* als die *benachbarten* Werte der Funktion.

**Aufgabe 2.** Man soll untersuchen, für welche Werte von $x$ die Funktion

$$(8.)\qquad y = \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x + 48) = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum wird.

**Auflösung.** Aus Gleichung (8.) folgt

$$(9.)\qquad f'(x) = \tfrac{1}{8}(3x^2 - 12x + 12) = \tfrac{3}{8}(x-2)^2.$$

Der einzige Wert von $x$, für welchen $f'(x)$ gleich Null wird, ist

$$x = 2,$$

während $f'(x)$ für keinen endlichen Wert von $x$ unendlich groß wird.

Um zu entscheiden, ob für $x$ gleich 2 ein Maximum oder ein Minimum eintritt, bilde man

$$f'(2-a) = \tfrac{3}{8}(2-a-2)^2 = \tfrac{3}{8}a^2$$

und

$$f'(2+a) = \tfrac{3}{8}(2+a-2)^2 = \tfrac{3}{8}a^2.$$

Es wird also

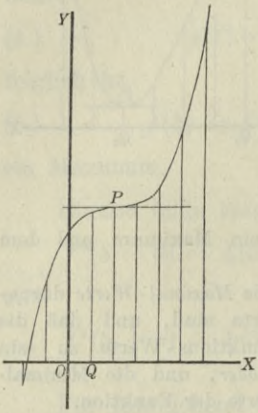
$$(10.)\qquad f'(2-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(2+a) > 0,$$

folglich ist $f(2)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Da $x = 2$ der einzige Wert von $x$ war, für welchen möglicherweise ein Maximum oder Minimum eintreten konnte, so besitzt die Funktion überhaupt weder ein Maximum noch ein Minimum.

Gleichung (8.) gibt

Fig. 41.



$$
\begin{aligned}
y &= -1 &&\text{für } x = -2,\\
y &= +3{,}625 &&\quad\text{„}\; x = -1,\\
y &= +6 &&\quad\text{„}\; x = \phantom{+}0,\\
y &= +6{,}875 &&\quad\text{„}\; x = +1,\\
y &= +7 &&\quad\text{„}\; x = +2,\\
y &= +7{,}125 &&\quad\text{„}\; x = +3,\\
y &= +8 &&\quad\text{„}\; x = +4,\\
y &= +10{,}375 &&\quad\text{„}\; x = +5,\\
y &= +15 &&\quad\text{„}\; x = +6.
\end{aligned}
$$

Konstruiert man hiernach die Kurve, welche der Gleichung (8.) entspricht (Fig. 41), so findet man es bestätigt, daß $f(x)$ für keinen Wert von $x$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Man sieht vielmehr, daß die Kurve für $x$ gleich 2 einen Wendepunkt besitzt.

**Aufgabe 3.** Man soll die Werte von $x$ bestimmen, für welche

$$y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2} = f(x) \tag{11.}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

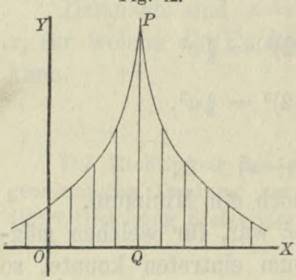
**Auflösung.** Die Gleichung (11.) kann man auf die Form

$$f(x) = m - b(x-c)^{\frac{2}{5}} \tag{11a.}$$

bringen und erhält daraus

$$f'(x) = -\frac{2}{5}b(x-c)^{-\frac{3}{5}} = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(x-c)^3}}. \tag{12.}$$

Fig. 42.



Hieraus folgt, daß $f'(x)$ für keinen endlichen Wert von $x$ gleich Null werden kann. Dagegen wird

$$f'(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c. \tag{13.}$$

Dies ist also der einzige Wert von $x$, für welchen $f(x)$ möglicherweise ein Maximum oder Minimum wird. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f'(c-a) = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(c-a-c)^3}} = \frac{+2b}{5\sqrt[5]{a^3}}$$

und

$$f'(c+a) = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(c+a-c)^3}} = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{a^3}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $b$ eine positive Zahl ist, erhält man also

(14.) $$f'(c-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(c+a) < 0,$$

folglich wird

(15.) $$f(c) = m$$

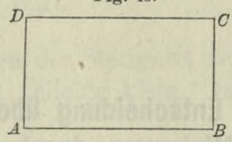
ein Maximum. (Vergl. Fig. 42.)

**Aufgabe 4.** Von einem Rechteck ist der Umfang gleich $2c$, wie groß muß man die Seiten machen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

**Auflösung.** Bezeichnet man die eine Seite $AB$ mit $x$, so wird die andere Seite

(16.) $$BC = c - x,$$

Fig. 43.



und der Flächeninhalt

(17.) $$F = f(x) = x(c-x) = cx - x^2;$$

mithin liefert

(18.) $$f'(x) = c - 2x = 0$$

den Wert

(19.) $$x = \tfrac{1}{2}c.$$

Um zu entscheiden, ob für diesen Wert von $x$ wirklich ein Maximum eintritt, bilde man

$$f'(x-a) = f'\left(\frac{c}{2} - a\right) = c - (c - 2a) = +2a$$

und

$$f'(x+a) = f'\left(\frac{c}{2} + a\right) = c - (c + 2a) = -2a.$$

Da $f'(x-a) > 0$ und $f'(x+a) < 0$ ist, so wird $f(x)$ ein Maximum. Dies gibt den Satz:

*Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfange hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.*

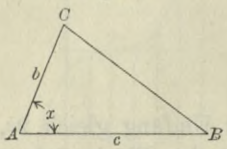
**Aufgabe 5.** Von einem Dreieck $ABC$ sind zwei Seiten $b$ und $c$ gegeben; wie groß muß der eingeschlossene Winkel sein, wenn der Flächeninhalt ein Maximum werden soll?

**Auflösung.** Nennt man den eingeschlossenen Winkel $x$, so wird der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks

$$2F = bc\sin x = f(x), \tag{20.}$$

also wird

Fig. 44.



$$f'(x) = bc\cos x = 0 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}, \tag{21.}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = bc\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) > 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = bc\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) < 0,$$

folglich wird $f(x)$ ein Maximum für $x = \frac{\pi}{2}$, d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks wird am größten, wenn der von den gegebenen Seiten $b$ und $c$ eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

## § 61.

## Entscheidung über das Eintreten eines Maximums oder Minimums durch Untersuchung der höheren Ableitungen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 122.)

Die Fälle, wo $f'(x)$ unendlich groß wird, mögen in den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen sein. Es soll vielmehr vorausgesetzt werden, daß die Funktion $f(x)$ mit ihren $n$ ersten Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ *stetig* und *endlich* sei, wobei über die Zahl $n$ noch später passend verfügt werden soll. Dann ist nach Formel Nr. 89 der Tabelle unter Anwendung der zweiten Form des Restes

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R, \tag{1.}$$

$$R = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x + \Theta h) - f^{(n)}(x)]h^n. \tag{2.}$$

Setzt man in dieser Entwickelung das eine Mal

$$h = -a$$

und das andere Mal

$$h = +a,$$

so kann man dieselbe benutzen, um das Vorzeichen von

$$(3.)\quad \Delta_1 = f(x-a) - f(x) \quad \text{und von} \quad \Delta_2 = f(x+a) - f(x)$$

zu bestimmen. Sind nun diese Differenzen für hinreichend kleine Werte von $a$ beide *negativ*, so wird $f(x)$ offenbar ein Maximum; sind aber diese Differenzen beide *positiv*, so wird $f(x)$ ein Minimum; haben endlich diese beiden Differenzen verschiedenes Zeichen, so tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein.

Für $n = 1$ erhält man aus den Gleichungen (1.) und (2.)

$$(4.)\quad \Delta = f(x+h) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!}h + [f'(x+\Theta h) - f'(x)]h.$$

Hierbei werde

$$(5.)\quad f'(x+\Theta h) - f'(x) = \alpha$$

gesetzt, dann erhält man

$$(4\text{a.})\quad f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!}[f'(x) + \alpha].$$

Da $\alpha = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit der Funktion $f'(x)$ die Größe $\alpha$ mit $h$ zugleich beliebig klein. Ist also

$$(6.)\quad f'(x) \lesseqgtr 0,$$

so kann man $h$ so klein wählen, daß $\alpha$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f'(x)$. Das Vorzeichen der Klammergröße $f'(x) + \alpha$ wird deshalb mit dem Vorzeichen von $f'(x)$ übereinstimmen. Ist $\alpha$ gleich $\alpha_1$ für $h = -a$ und $\alpha$ gleich $\alpha_2$ für $h = +a$, so folgt hieraus, daß

$$\Delta_1 = f(x-a) - f(x) = -a[f'(x) + \alpha_1]$$

und

$$\Delta_2 = f(x+a) - f(x) = +a[f'(x) + \alpha_2]$$

*entgegengesetztes* Vorzeichen haben, daß also weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten kann, so lange die Ungleichung (6.) besteht.

Ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ kann vielmehr nur eintreten, wenn

$$(7.) \qquad f'(x) = 0$$

ist. Die geometrische Deutung dieses Resultates gibt wieder den Satz:

*Die Tangente in einem Kurvenpunkte, welcher einem Maximum oder Minimum entspricht, ist der X-Achse parallel.*

Ist Gleichung (7.) befriedigt, so füge man noch die Voraussetzung hinzu, daß auch $f''(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ stetig sei, und daß

$$(8.) \qquad f''(x) \lesseqgtr 0.$$

Nach den Gleichungen (1.) und (2.) wird dann für $n$ gleich 2

$$\varDelta = f(x+h) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{1}{2!}[f''(x+\Theta h) - f''(x)]h^2,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$(9.) \qquad \varDelta = f(x+h) - f(x) = \frac{h^2}{2!}[f''(x) + \beta],$$

wobei

$$(10.) \qquad f''(x+\Theta h) - f''(x) = \beta$$

gesetzt worden ist. Da $\beta = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ diese Größe $\beta$ mit $h$ zugleich beliebig klein. Man kann also $h$ immer so klein wählen, daß $\beta$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f''(x)$, daß also das Vorzeichen von $f''(x)$ über das Vorzeichen der Klammergröße $f''(x) + \beta$ entscheidet. Ist $\beta$ gleich $\beta_1$ für $h = -a$, und $\beta$ gleich $\beta_2$ für $h = +a$, so folgt hieraus, daß

$$\varDelta_1 = f(x-a) - f(x) = \frac{a^2}{2!}[f''(x) + \beta_1]$$

und

$$\varDelta_2 = f(x+a) - f(x) = \frac{a^2}{2!}[f''(x) + \beta_2]$$

*gleiches* Vorzeichen haben, daß also ein *Maximum* eintritt, wenn $f''(x)$ *negativ* ist, während ein *Minimum* eintritt, wenn $f''(x)$ *positiv* ist.

Dies gibt die folgende Regel:

*Ist*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) < 0,$$

*so wird $f(x)$ ein Maximum; ist dagegen*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) > 0,$$

*so wird* $f(x)$ *ein Minimum.*

Es bleibt nur der Fall übrig, wo

$$f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = 0. \tag{11.}$$

Fügt man dann die Voraussetzung hinzu, daß $f'''(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ stetig sei, und daß

$$f'''(x) \gtrless 0, \tag{12.}$$

so folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) für $n = 3$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{1}{3!}[f'''(x+\Theta h) - f'''(x)]h^3,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.)

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h^3}{3!}[f'''(x) + \gamma], \tag{13.}$$

wobei

$$f'''(x+\Theta h) - f'''(x) = \gamma \tag{14.}$$

gesetzt worden ist. Da $\gamma = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f'''(x)$ diese Größe $\gamma$ mit $h$ zugleich beliebig klein. Man kann also $h$ immer so klein wählen, daß $\gamma$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f'''(x)$, daß also das Vorzeichen von $f'''(x)$ über das Vorzeichen der Klammergröße $f'''(x) + \gamma$ entscheidet. Ist nun $\gamma$ gleich $\gamma_1$ für $h = -a$, und $\gamma$ gleich $\gamma_2$ für $h = +a$, so folgt hieraus, daß

$$\Delta_1 = f(x-a) - f(x) = -\frac{a^3}{3!}[f'''(x) + \gamma_1]$$

und

$$\Delta_2 = f(x+a) - f(x) = +\frac{a^3}{3!}[f'''(x) + \gamma_2]$$

*entgegengesetztes* Vorzeichen haben, daß also weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten kann, so lange neben den Gleichungen (11.) die Ungleichung (12.) besteht.

Ist dagegen auch $f'''(x)$ gleich Null, ist also

$$(15.) \qquad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0,$$

so füge man die Voraussetzung hinzu, daß $f^{(4)}(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ stetig sei, und daß

$$(16.) \qquad f^{(4)}(x) \gtrless 0$$

wird. Jetzt folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) für $n = 4$, wenn man die Gleichungen (15.) berücksichtigt,

$$(17.) \quad f(x+h) - f(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!} h^4 + \frac{1}{4!}[f^{(4)}(x + \Theta h) - f^{(4)}(x)] h^4$$

$$= \frac{h^4}{4!} [f^{(4)}(x) + \delta],$$

wobei

$$(18.) \qquad f^{(4)}(x + \Theta h) - f^{(4)}(x) = \delta$$

gesetzt worden ist. Da $\delta = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f^{(4)}(x)$ diese Größe $\delta$ mit $h$ zugleich beliebig klein. Man kann also $h$ immer so klein wählen, daß $\delta$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f^{(4)}(x)$, daß also das Vorzeichen von $f^{(4)}(x)$ über das Vorzeichen der Klammergröße $f^{(4)}(x) + \delta$ entscheidet. Ist nun $\delta$ gleich $\delta_1$ für $h = -a$, und $\delta$ gleich $\delta_2$ für $h = +a$, so folgt hieraus, daß

$$\Delta_1 = f(x - a) - f(x) = \frac{a^4}{4!} [f^{(4)}(x) + \delta_1]$$

und

$$\Delta_2 = f(x + a) - f(x) = \frac{a^4}{4!} [f^{(4)}(x) + \delta_2]$$

*gleiches* Vorzeichen haben, daß also $f(x)$ ein *Maximum* wird, wenn $f^{(4)}(x)$ *negativ* ist, während $f(x)$ ein *Minimum* wird, wenn $f^{(4)}(x)$ *positiv* ist.

In dieser Weise kann man fortfahren. Ganz allgemein findet man das folgende Resultat:

Es sei für einen bestimmten Wert von $x$

$$(19.) \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \ldots f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$f^{(n)}(x)$ dagegen sei von Null verschieden und für die betrachteten

Werte der Veränderlichen stetig; dann folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (19.)

$$(20.)\quad f(x+h)-f(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)]h^n$$
$$=\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x)+\nu],$$

wobei

$$(21.)\quad f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)=\nu$$

gesetzt worden ist. Da $\nu=0$ ist für $h=0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ diese Größe $\nu$ mit $h$ zugleich beliebig klein. Man kann also $h$ immer so klein wählen, daß $\nu$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner wird als $f^{(n)}(x)$, daß also das Vorzeichen von $f^{(n)}(x)$ über das Vorzeichen der Klammergröße $f^{(n)}(x)+\nu$ entscheidet. Ist nun $\nu$ gleich $\nu_1$ für $h=-a$ und $\nu$ gleich $\nu_2$ für $h=+a$, so ergibt sich hieraus, daß

$$\Delta_1=f(x-a)-f(x)=(-1)^n\frac{a^n}{n!}[f^{(n)}(x)+\nu_1]$$

und

$$\Delta_2=f(x+a)-f(x)=\frac{a^n}{n!}[f^{(n)}(x)+\nu_2]$$

*gleiches* oder *entgegengesetztes* Zeichen haben, je nachdem $n$ *gerade* oder *ungerade* ist.

Daher wird $f(x)$ ein *Maximum*, wenn $n$ *gerade* und $f^{(n)}(x)$ *negativ* ist; $f(x)$ wird ein *Minimum*, wenn $n$ *gerade* und $f^{(n)}(x)$ *positiv* ist. Wenn dagegen $n$ *ungerade* ist, so wird $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Dies gibt die allgemeine Regel:

*Um die Werte von $x$ zu bestimmen, für welche $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, bestimme man die Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich Null wird. Ein solcher Wert sei $x$, und $f^{(n)}(x)$ sei die erste spätere Ableitung, welche für diesen Wert von $x$ nicht verschwindet; dann ist $f(x)$ ein Maximum, wenn $n$ gerade und $f^{(n)}(x)$ negativ ist; $f(x)$ ist ein Minimum, wenn $n$ gerade und $f^{(n)}(x)$ positiv ist. Dagegen tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn $n$ ungerade ist.*

**Bemerkungen.**

1) Gewöhnlich wird $n$ gleich 2, nur ausnahmsweise kommen auch größere Werte von $n$ in Betracht.

2) Aus dem Vorhergehenden folgt, daß vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten können, wenn für irgend einen Wert von $x$

$$f'(x) = 0$$

wird.

I. Ist unter dieser Voraussetzung entweder $f''(x)$ *negativ*, oder $f''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *gerader* Ordnung und *negativ*, so wird der entsprechende Wert der Funktion ein *Maximum* (vergl. Fig. 45).

Fig. 45.

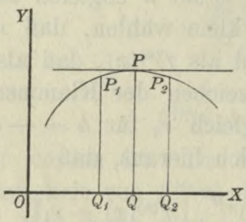
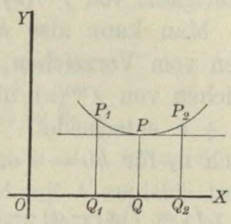



Fig. 46.




II. Ist unter der Voraussetzung, daß $f'(x) = 0$ wird, entweder $f''(x)$ *positiv*, oder $f''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *gerader* Ordnung und *positiv*, so wird der entsprechende Wert der Funktion ein *Minimum* (vergl. Fig. 46).

III. Ist für einen Wert von $x$, für welchen $f'(x) = 0$ wird, auch $f''(x) = 0$, und ist entweder $f'''(x)$ *positiv*, oder $f'''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *ungerader* Ordnung und *positiv*, so ist der entsprechende Wert der Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum (vergl. Fig. 47).

Fig. 47.

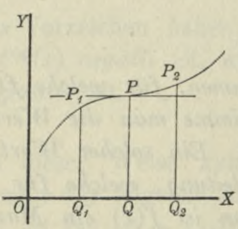
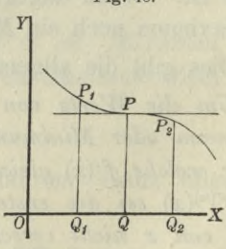



Fig. 48.




IV. Ist für einen Wert von $x$, für welchen $f'(x) = 0$ wird, auch $f''(x) = 0$, und ist entweder $f'''(x)$ *negativ*, oder $f'''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *un-*

*gerader* Ordnung und *negativ*, so ist der entsprechende Wert der Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum (vergl. Fig. 48).

3) In den Figuren 47 und 84 ist der Punkt $P$ ein Wendepunkt, und zwar steigt die Kurve in Figur 47 bis zum Punkte $P$ und fährt unmittelbar hinter ihm fort, zu steigen. Im Punkte $P$ selbst ist die Richtung der Kurve parallel zur $X$-Achse.

In Figur 48 dagegen fällt die Kurve bis zum Punkte $P$ und fährt unmittelbar hinter ihm fort, zu fallen. Auch hier ist $P$ ein Wendepunkt, in welchem die Richtung der Kurve zur $X$-Achse parallel ist.

## § 62.

## Anwendungen.

Es möge diese Methode zunächst auf die Aufgaben angewendet werden, welche schon in § 60 behandelt worden sind; Aufgabe 3 daselbst kommt hier aber nicht in Betracht, weil hier nur die Fälle berücksichtigt werden, in denen $f'(x)$ *stetig* und *endlich* bleibt.

**Aufgabe 1.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

$$y = \tfrac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 15x + 30) = f(x) \tag{1.}$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** Man bilde

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) = \tfrac{1}{2}(x - 1)(x - 5), \tag{2.}$$

$$f''(x) = x - 3 \tag{3.}$$

und bestimme die Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 5. \tag{4.}$$

Für diese Werte kann *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum eintreten. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f''(1) = -2 \quad \text{und} \quad f''(5) = +2, \tag{5.}$$

folglich wird

$$f(1) = 6{,}1666\ldots \tag{6.}$$

ein *Maximum*, weil $f''(1)$ *negativ* ist, und

$$f(5) = 0{,}8333\ldots \tag{7.}$$

ein *Minimum*, weil $f''(5)$ *positiv* ist.

(Vergl. Fig. 40 auf Seite 291.)

**Aufgabe 2.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

(8.) $$y = \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x + 48) = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** Man bilde

(9.) $$f'(x) = \tfrac{3}{8}(x^2 - 4x + 4) = \tfrac{3}{8}(x - 2)^2,$$

(10.) $$f''(x) = \tfrac{3}{4}(x - 2)$$

und bestimme die Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man nur den einzigen Wert

(11.) $$x = 2,$$

für den *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Um darüber zu entscheiden, bildet man $f''(2)$ und findet

(12.) $$f''(2) = 0.$$

Deshalb muß man noch die *dritte* Ableitung

(13.) $$f'''(x) = \tfrac{3}{4}$$

bilden. Da diese Ableitung sogar für jeden Wert von $x$ von 0 verschieden ist, so tritt *weder ein Maximum noch ein Minimum* ein.

(Vergl. Fig. 41 auf Seite 292.)

**Aufgabe 3.** Für welche Werte von $x$ wird

(14.) $$f(x) = x(c - x) = cx - x^2$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** Man bilde

(15.) $$f'(x) = c - 2x,$$

(16.) $$f''(x) = -2$$

und bestimme den Wert von $x$, für welchen $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man nur den einzigen Wert

(17.) $$x = \tfrac{1}{2}c.$$

Da $f''(x)$ für *jeden* Wert von $x$ *negativ* ist, so wird $f(x)$ für $x = \frac{1}{2}c$ ein *Maximum.*

**Aufgabe 4.** Für welche Werte von $x$ wird

(18.) $$f(x) = bc\sin x$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** Man bilde

$$f'(x) = bc\cos x, \tag{19.}$$

$$f''(x) = -bc\sin x \tag{20.}$$

und bestimme den Wert von $x$, für welchen $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man, weil der Dreieckswinkel $x$ kleiner als $\pi$ sein muß, den einzigen Wert

$$x = \frac{\pi}{2}. \tag{21.}$$

Um zu entscheiden, ob für diesen Wert von $x$ wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, bildet man $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und findet

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -bc. \tag{22.}$$

Da dieser Wert *negativ* ist, so wird $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ein *Maximum*.

**Aufgabe 5.** Die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2ax + b^2$$

wird ein *Minimum* für $x = a$, und zwar wird

$$f(x) = b^2 - a^2.$$

**Aufgabe 6.** Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x - 20$$

wird ein *Maximum* für $x = 4$ und ein *Minimum* für $x = 8$; dabei ist

$$f(4) = 140 \quad \text{und} \quad f(8) = 108.$$

**Aufgabe 7.** Die Funktion

$$f(x) = a + (x - c)^4$$

wird ein *Minimum* für $x = c$, und zwar ist

$$f(c) = a.$$

**Aufgabe 8.** Die Funktion

$$f(x) = a + (x - c)^5$$

hat weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*.

**Aufgabe 9.** Die Funktion

$$f(x) = a + (x - c)^n$$

wird ein *Minimum* für $x = c$, wenn $n$ eine *gerade* Zahl ist; sie ist dagegen weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, wenn $n$ eine *ungerade* Zahl ist.

**Aufgabe 10.** Die Funktion

$$f(x) = x^2(a - x)^3 = a^3x^2 - 3a^2x^3 + 3ax^4 - x^5$$

wird unter der Voraussetzung, daß $a$ positiv ist, für $x = 0$ ein *Minimum*, für $x = \frac{2a}{5}$ ein *Maximum* und für $x = a$ weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, obgleich $f'(a) = 0$ ist.

**Aufgabe 11.** Die Funktion

$$f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^3$$

wird für $x = 1$ ein *Minimum*,

für $x = -\frac{5}{7}$ ein *Maximum*

und für $x = -2$ weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, obgleich $f'(-2) = 0$ ist.

**Aufgabe 12.** Die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$$

wird für $x = \frac{a}{e}$ ein *Maximum*.

**Aufgabe 13.** Die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

wird für $x = e$ ein *Minimum*.

**Aufgabe 14.** Die Funktion

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

wird für $x = e$ ein *Maximum*.

**Aufgabe 15.** Die Funktion

$$f(x) = x^x$$

wird für $x = \frac{1}{e}$ ein *Minimum*.

§ 63.

## Vereinfachungen der Rechnung, wenn $f'(x)$ eine gebrochene Funktion ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 123.)

Hat $f'(x)$ die Form

$$f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1.}$$

so wird im allgemeinen $f'(x)$ zugleich mit $P(x)$ gleich Null. Will man nun entscheiden, ob $f(x)$ für einen Wert von $x$, für welchen $P(x)$ gleich Null ist, ein Maximum oder Minimum wird, so muß man das Vorzeichen von

$$f''(x) = \frac{Q(x)\,P'(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q(x)^2} \tag{2.}$$

bestimmen. Nun ist aber für den betrachteten Wert von $x$ die Funktion $P(x)$ gleich Null, folglich wird

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}. \tag{3.}$$

Das Vorzeichen dieses Bruches kann man aber verhältnismäßig leicht bestimmen.

### Beispiele.

**Aufgabe 1.** Für welchen Wert von $x$ wird die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \tag{4.}$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** Man bilde

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{5.}$$

Daraus folgt, daß $P(x)$ und deshalb auch $f'(x)$ nur verschwindet für

$$x = +1 \quad \text{und} \quad x = -1. \tag{6.}$$

Für diese Werte von $x$ wird aber

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}, \tag{7.}$$

also

$$f''(+1) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(-1) = +\frac{1}{2}.$$

Deshalb ist

$$f(+1) = +\frac{1}{2} \text{ ein Maximum}$$

und

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ ein Minimum.}$$

**Aufgabe 2.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

$$f(x) = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** $f(+\sqrt{2})$ wird ein Minimum
und $f(-\sqrt{2})$ „ „ Maximum.

**Aufgabe 3.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.** $f(+1)$ wird ein Maximum
und $f(-1)$ „ „ Minimum.

**Aufgabe 4.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder Minimum?

**Auflösung.**

$f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ und $f\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ werden Maxima,

$f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ und $f\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ werden Minima.

## § 64.

## Verschiedene Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima.

### A. Maximum oder Minimum einer gegebenen Funktion.

**Aufgabe 1.** Für welche Werte von $x$ wird die Funktion

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$$

ein Minimum?

**Auflösung.** Hier wird

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x} = f(x) = 4 > 0 \text{ für } x = 0;$$

folglich tritt für $x = 0$ ein Minimum ein.

**Aufgabe 2.** Man soll eine positive Zahl $c$ so in zwei Teile zerlegen, daß das Produkt aus der vierten Potenz des einen Teiles und der siebenten Potenz des anderen Teiles ein Maximum wird.

**Auflösung.** Bezeichnet man die beiden Teile von $c$ mit $x$ und $c - x$, so wird

$$f(x) = x^4(c - x)^7, \tag{1.}$$

folglich ist

$$f'(x) = x^3(c - x)^6(4c - 11x). \tag{2.}$$

Die beiden Werte $x = 0$ und $x = c$, für welche $f'(x)$ verschwindet, kommen hier nicht in Betracht, denn $x = 0$ liefert ein *Minimum*, weil $f'(x)$ aus dem Negativen ins Positive übergeht, wenn $x$ den Wert 0 passiert, und für $x = c$ tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, weil für hinreichend kleine Werte von $a$

$$f'(c - a) = (c - a)^3 a^6(-7c + 11a) < 0,$$

und auch

$$f'(c + a) = (c + a)^3 a^6(-7c - 11a) < 0$$

ist. Dagegen tritt wirklich ein Maximum ein, wenn

$$(3.) \qquad 4c - 11x = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{4}{11}c$$

ist, weil $f'(x)$ für diesen Wert von $x$ verschwindet, und weil

$$(4.) \; f''(x) = x^2(c-x)^5(12c^2 - 80cx + 110x^2) = -\frac{4^3 \,.\, 7^6 \,.\, c^9}{11^8} < 0$$

ist. Hier ergibt sich auch aus der Natur der Aufgabe, daß zwischen $x = 0$ und $x = c$ ein Wert von $x$ liegen muß, für welchen $f(x)$ ein Maximum wird, denn die stetige Funktion $f(x)$ wird für $x = 0$ und für $x = c$ selbst gleich 0 und ist für die dazwischen liegenden Werte von $x$ positiv.

**Aufgabe 3.** Man soll die Zahl $c$ so in zwei Teile zerlegen, daß das Produkt aus der $m^{\text{ten}}$ Potenz des einen Teiles und aus der $n^{\text{ten}}$ Potenz des anderen Teiles ein Maximum wird.

**Auflösung.** Ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe ist hier

$$(5.) \qquad f(x) = x^m(c-x)^n$$

die Funktion, welche für $x = \frac{mc}{m+n}$ ein Maximum wird, denn es wird

$$(6.) \; f'\left(\frac{mc}{m+n}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{mc}{m+n}\right) = -\frac{m^{m-1} \,.\, n^{n-1} \,.\, c^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}} < 0.$$

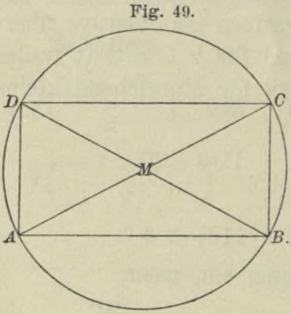
### Bemerkung.

Man erkennt, daß die vorhergehende Aufgabe, und ebenso Aufgabe 3 in § 62 nur besondere Fälle dieser Aufgabe sind.

## B. Aufgaben aus der Planimetrie.

**Aufgabe 4.** In einen Kreis (Fig. 49) mit dem Halbmesser $a$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden.

Fig. 49.




**Auflösung.** Bezeichnet man die eine Seite des Rechtecks $AB$ mit $2x$, so wird die andere Seite

$$BC = 2\sqrt{a^2 - x^2},$$

also der Flächeninhalt

$$F = AB \,.\, BC = 4x\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{7.}$$

$$F^2 = 16x^2(a^2 - x^2) = 16(a^2x^2 - x^4). \tag{8.}$$

Soll $F$ ein Maximum werden, dann muß auch $F^2$ ein Maximum werden, so daß man

$$f(x) = a^2x^2 - x^4 \tag{9.}$$

setzen kann. Dies gibt

$$f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2), \tag{10.}$$

$$f''(x) = 2a^2 - 12x^2, \tag{11.}$$

$$f'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a^2, \tag{12.}$$

folglich tritt für

$$AB = BC = a\sqrt{2} \tag{13.}$$

ein Maximum ein. Es gilt also der Satz:

*Unter allen Rechtecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.*

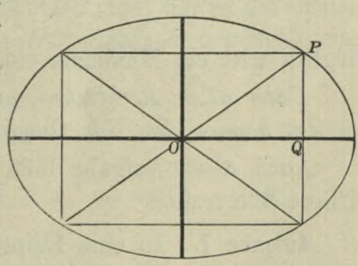
Diese Aufgabe läßt sich sogleich in folgender Weise verallgemeinern.

**Aufgabe 5.** In eine Ellipse (Fig. 50) mit der Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden.

Fig. 50.




**Auflösung.** Da die Diagonalen des Rechtecks sich gegenseitig halbieren, fällt nach bekannten Sätzen aus der analytischen Geometrie der Mittelpunkt des Rechtecks in den Mittelpunkt der Ellipse, und die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Achsen der Ellipse. Bezeichnet man also die Koordinaten der einen Ecke $P$ des Rechtecks mit $x$ und $y$, so hat das Rechteck die Seiten $2x$ und $2y$ und den Flächeninhalt

$$F = 4xy = \frac{4bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Deshalb wird

$$F^2 = \frac{16b^2x^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

man kann also auch hier

$$f(x) = x^2(a^2 - x^2)$$

setzen und erhält wie bei Aufgabe 4 ein Maximum, wenn

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

ist.

**Aufgabe 6.** In einen Kreis (Fig. 49) mit dem Halbmesser $a$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Umfange eingeschrieben werden.

**Auflösung.** Benutzt man dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 4, so wird der vierte Teil des Umfanges

$$\tag{14.} \tfrac{1}{4}u = x + \sqrt{a^2 - x^2} = f(x),$$

$$\tag{15.} f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Hier wird $P(x) = 0$, wenn

$$\tag{16.} \sqrt{a^2 - x^2} = x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ist; für diesen Wert von $x$ wird

$$\tag{17.} f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = \frac{-x - \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2} = \frac{-a\sqrt{2}}{\frac{a^2}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{a} < 0,$$

folglich tritt ein Maximum ein. Dies gibt den Satz:

*Unter allen Rechtecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Umfang.*

Auch diese Aufgabe läßt sich in folgender Weise auf die Ellipse übertragen.

**Aufgabe 7.** In eine Ellipse mit der Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

soll ein Rechteck mit möglichst großem Umfange eingeschrieben werden.

**Auflösung.** Benutzt man dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 5, so wird der Umfang

$$u = 4x + 4y = 4x + \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4}{a}\left(ax + b\sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

Deshalb setze man

$$f(x) = ax + b\sqrt{a^2 - x^2};$$

daraus folgt

$$f'(x) = a - \frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} - bx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Hier wird $P(x) = 0$, wenn

$$a\sqrt{a^2 - x^2} = bx, \quad \text{oder} \quad a^4 = (a^2 + b^2)x^2,$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ist. Für diesen Wert von $x$ ist

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = -\frac{ax + b\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2} = -\frac{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} < 0,$$

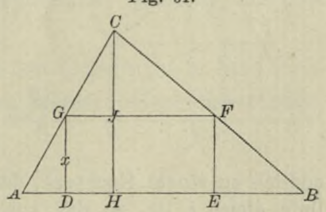
folglich tritt ein Maximum ein.

**Bemerkung.**

Die Lösung der Aufgaben 4 und 6 wird noch etwas kürzer, wenn man den Winkel $CAB$ als Veränderliche einführt; es sollten aber an dieser Stelle trigonometrische Funktionen vermieden werden.

**Aufgabe 8.** Von einem Dreieck $ABC$ (Fig. 51) ist die Grundlinie $AB$ gleich $c$ und die Höhe $HC$ gleich $h$ gegeben; man soll in dieses Dreieck ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalte einzeichnen, so daß die eine Seite $DE$ in der Basis $AB$ liegt.

Fig. 51.




$AB = c, \quad HC = h.$

**Auflösung.** Bezeichnet man die Höhe $DG$ eines solchen Rechtecks mit $x$, so wird

$$JC : HC = GF : AB,$$

oder

$$(h - x) : h = DE : c,$$

also

(18.) $$DE = \frac{c(h - x)}{h}.$$

Mithin ist der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$

(19.) $$F = \frac{xc(h - x)}{h} = \frac{c}{h}(hx - x^2).$$

Daher ist in dieser Aufgabe

(20.) $$f(x) = hx - x^2, \quad f'(x) = h - 2x, \quad f''(x) = -2;$$

daraus folgt, daß $f(x)$ ein Maximum wird für $x = \frac{h}{2}$.

Das größte unter allen Rechtecken, welche sich in der angegebenen Weise in das Dreieck $ABC$ einschreiben lassen, ist also dasjenige, dessen Höhe und Grundlinie halb so groß sind wie die Höhe und die Grundlinie des gegebenen Dreiecks. Der Flächeninhalt von diesem Rechteck ist

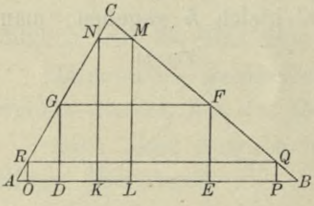
(21.) $$F = \frac{ch}{4},$$

also halb so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks.

**Bemerkung.**

In vielen Fällen erkennt man schon aus der Natur der Aufgabe, ob für die Werte von $x$, für welche $f'(x)$ verschwindet, ein Maximum oder Minimum eintritt. In das Dreieck $ABC$ (Fig. 52) lassen sich z. B. unendlich viele Rechtecke einschreiben. Denkt man sie sich alle gezeichnet

Fig. 52.




und fängt man bei demjenigen an, dessen Höhe gleich $h$ und dessen Grundlinie gleich Null ist (Fig. 51), das also mit der Höhe $h$ des Dreiecks selbst zusammenfällt, so wird bei diesem Rechteck auch der Flächeninhalt gleich Null. Wenn dann die Höhe des Rechtecks kleiner wird, so wird die Grundlinie größer. Auf diese Weise gelangt man in Figur 52 zu den Rechtecken $KLMN$, $DEFG$, $OPQR$ und endlich zu einem Rechteck, dessen Höhe gleich Null, und dessen Grundlinie gleich $c$ ist, so daß auch bei diesem Rechteck der Flächeninhalt gleich Null wird.

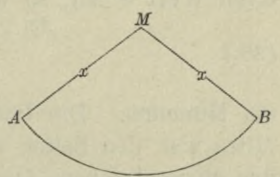
Daraus folgt, daß der Flächeninhalt dieser Rechtecke zuerst zunehmen und dann wieder abnehmen muß. Deshalb muß es wenigstens *ein* Rechteck in dieser Reihe von Rechtecken geben, dessen Flächeninhalt ein *Maximum* ist.

Da man aber aus Gleichung (20.) nur einen einzigen Wert von $x$, nämlich $x = \frac{h}{2}$ findet, für den ein Maximum oder Minimum eintreten kann, so folgt, daß dieser Wert wirklich das Maximum liefert.

Durch derartige Überlegungen kann man in vielen Fällen die Bildung und Berechnung von $f''(x)$ ersparen. So würden z. B. in Aufgabe 4 ganz ähnliche Erwägungen zum Ziele geführt haben.

**Aufgabe 9.** Von einem Kreissektor (Fig. 53) ist der gesamte Umfang $u$ gegeben; wie groß muß man den Halbmesser machen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

Fig. 53.




**Auflösung.** Bezeichnet man den Halbmesser $MA$ mit $x$, so wird der gesamte Umfang des Sektors

$$u = 2x + \widehat{AB}, \quad \text{also} \quad \widehat{AB} = u - 2x. \tag{22.}$$

Der doppelte Flächeninhalt des Sektors ist daher

$$2F = \widehat{AB} \,.\, x = (u - 2x)x = ux - 2x^2 = f(x), \tag{23.}$$

folglich wird

$$f'(x) = u - 4x = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{u}{4}, \tag{24.}$$

$$f''(x) = -4 < 0. \tag{25.}$$

Der Flächeninhalt wird daher ein Maximum, wenn der Bogen des Sektors die Hälfte vom Umfange des Sektors ist.

**Aufgabe 10.** Man soll das kleinste unter allen Quadraten bestimmen, welche sich in ein gegebenes Quadrat $ABCD$ (Fig. 54) einschreiben lassen.

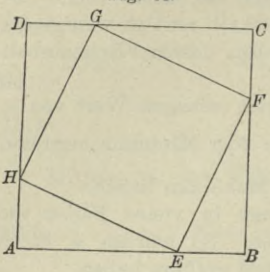
**Auflösung.** Es sei $EFGH$ eines der Quadrate, welche sich in das gegebene Quadrat einschreiben lassen. Bezeichnet man $AB$ mit $a$ und $AE$ mit $x$, so wird

$$EB = AH = a - x,$$

also

$$HE^2 = x^2 + (a - x)^2.$$

Fig. 54.




Dieser Ausdruck ist gleichzeitig auch der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$, also die Funktion, welche ein Minimum werden soll; daher ist

$$(26.)\quad f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Daraus folgt

$$(27.)\quad f'(x) = 4x - 2a,\ f''(x) = 4;$$

die Ableitung $f'(x)$ verschwindet also nur für $x = \frac{a}{2}\cdot$ Da nun $f''(x)$ für alle Werte von $x$ den positiven Wert 4 hat, so wird

$$(28.)\qquad f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

ein Minimum. Die Punkte $E$, $F$, $G$, $H$ müssen daher in der Mitte von den Seiten des gegebenen Quadrates liegen, damit das eingeschriebene Quadrat $EFGH$ möglichst klein wird.

**Aufgabe 11.** Von einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten $s = a + b$ gegeben und die dritte Seite $c$; wie groß müssen die Seiten $a$ und $b$ sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

**Auflösung.** Bekanntlich ist der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten $a$, $b$, $c$

$$(29.)\quad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Setzt man $a$ gleich $x$ und deshalb $b$ gleich $s - x$, so wird also

$$(30.)\quad 16F^2 = (s+c)(s-c)(s+c-2x)(c-s+2x).$$

Da $F$ zugleich mit $16F^2$ und mit $\frac{16F^2}{(s+c)(s-c)}$ ein Maximum wird, so wird man

$$(31.)\quad f(x) = (s+c-2x)(c-s+2x) = c^2 - s^2 + 4sx - 4x^2$$

setzen. Dies gibt

$$(32.)\qquad f'(x) = 4s - 8x,$$

$$(33.)\qquad f''(x) = -8 < 0;$$

folglich tritt für $x = \frac{s}{2}$, d. h. also für $a = b$ ein Maximum ein. Das Dreieck hat somit den größten Flächeninhalt, wenn es *gleichschenklig* ist.

Daraus folgt auch sogleich die Auflösung von

**Aufgabe 12.** Man soll unter allen Dreiecken mit gleichem Umfange dasjenige bestimmen, das den größten Flächeninhalt besitzt.

**Auflösung.** Ist $c$ bereits bekannt, so muß nach Aufgabe 11

$$a = b \tag{34.}$$

sein. Ebenso muß aber, wenn $a$ bekannt ist,

$$b = c \tag{35.}$$

sein; das gibt

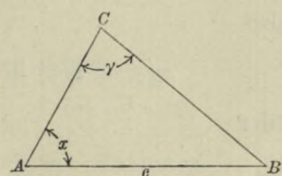
$$a = b = c, \tag{36.}$$

d. h. *unter allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.*

### C. Aufgaben aus der Trigonometrie und Vermessungskunde.

**Aufgabe 13.** Von einem Dreieck $ABC$ (Fig. 55) sind die Grundlinie $AB = c$ und der Winkel $\gamma$ an der Spitze gegeben; wie groß müssen die anderen Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

Fig. 55.




**Auflösung.** Bezeichnet man den Dreieckswinkel $\alpha$ mit $x$, so wird der dritte Winkel $\beta$ gleich $180^0 - (\gamma + x)$ und der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma} = \frac{c^2 \sin x \sin(\gamma + x)}{2\sin\gamma}. \tag{37.}$$

Da der Faktor $\frac{c^2}{2\sin\gamma}$ positiv ist, so wird $F$ ein Maximum, wenn $\sin x \sin(\gamma + x)$ ein Maximum wird; deshalb ist in dieser Aufgabe

(38.) $f(x) = \sin x \sin(\gamma + x)$,

(39.) $f'(x) = \cos x \sin(\gamma + x) + \cos(\gamma + x) \sin x = \sin(\gamma + 2x)$,

(40.) $f''(x) = 2\cos(\gamma + 2x)$.

Für

$$\gamma + 2x = \pi = \alpha + \beta + \gamma,$$

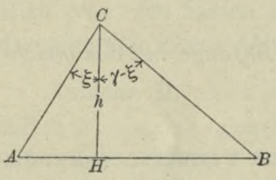
oder, da $x$ gleich $\alpha$ ist, für

(41.) $$x = \alpha = \beta$$

verschwindet $f'(x)$, und $f''(x)$ wird gleich $-2 < 0$. Deshalb wird der Flächeninhalt ein Maximum, wenn das Dreieck ein *gleichschenkliges* ist.

**Aufgabe 14.** Von einem Dreieck $ABC$ (Fig. 56) ist die Grundlinie $c$ und die Höhe $h$ gegeben; wie groß müssen die anderen Seiten sein, damit der Winkel $\gamma$, welcher $c$ gegenüberliegt, ein Maximum wird?

Fig. 56.




$AH = x$, $HB = c - x$,

**Auflösung.** Die Höhe des Dreiecks teile die Grundlinie in die Abschnitte $x$ und $c - x$, und den Winkel $\gamma$ teile sie in die Winkel $\xi$ und $\gamma - \xi$; dann ist

(42.) $$\operatorname{tg}\xi = \frac{x}{h}, \quad \operatorname{tg}(\gamma - \xi) = \frac{c - x}{h},$$

also

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}[\xi + (\gamma - \xi)] = \frac{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}(\gamma - \xi)}{1 - \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}(\gamma - \xi)},$$

oder

(43.) $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{x}{h} + \frac{c - x}{h}}{1 - \frac{x(c - x)}{h^2}} = \frac{hc}{h^2 - x(c - x)}.$$

Da die Ableitung von $\operatorname{tg} x$, nämlich $1 + \operatorname{tg}^2 x$ (vergl. Formel Nr. 27 der Tabelle) beständig positiv ist, so nimmt $\operatorname{tg} x$ mit $x$ gleichzeitig zu, und zwar für *alle* Werte von $x$. Deshalb wird $\operatorname{tg}\gamma$ mit $\gamma$ zugleich ein Maximum oder Minimum. In der vorliegenden Aufgabe kommt es daher nur darauf an, $x$ so zu bestimmen, daß

$$\frac{hc}{h^2 - x(c - x)}$$

ein Maximum wird. Dieser Ausdruck ist aber ein Bruch, dessen Zähler eine positive Konstante ist. Deshalb wird der Bruch ein *Maximum*, wenn der Nenner ein *Minimum* ist. Man hat also zu setzen

$$f(x) = h^2 - x(c - x) = h^2 - cx + x^2, \tag{44.}$$

$$f'(x) = -c + 2x, \quad f''(x) = 2. \tag{45.}$$

Daraus folgt, daß $f(x)$ für $x = \frac{c}{2}$ ein Minimum wird. Für diesen Wert von $x$ werden $\operatorname{tg}\gamma$ und $\gamma$ ein Maximum, und das Dreieck wird wieder ein *gleichschenkliges.*

**Aufgabe 15.** Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten, nämlich $a + b$ gleich $s$, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma$; wie groß müssen die Seiten $a$ und $b$ selbst sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

**Auflösung.** Bezeichnet man die Seite $a$ mit $x$, so wird $b$ gleich $s - x$, und man erhält für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks

$$2F = x(s - x)\sin\gamma. \tag{46.}$$

Deshalb hat man in diesem Falle zu setzen

$$f(x) = sx - x^2, \quad f'(x) = s - 2x, \quad f''(x) = -2, \tag{47.}$$

folglich wird für $x = \frac{s}{2}$ der Flächeninhalt ein Maximum.

**Aufgabe 16.** Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten, nämlich $a + b$ gleich $s$, und der anliegende Winkel $\alpha$; wie groß müssen die beiden anderen Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

**Auflösung.** Bezeichnet man den Dreieckswinkel $\beta$ mit $x$, so wird $\gamma$ gleich $180^0 - (\alpha + x)$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}, \tag{48.}$$

oder, weil nach dem Sinussatz

$$c = \frac{s \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

ist,

$$F = \frac{s^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2(\sin\alpha + \sin\beta)^2}, \tag{48a.}$$

also

$$\frac{2F}{s^2 \sin\alpha} = \frac{\sin x \sin(\alpha + x)}{(\sin\alpha + \sin x)^2} = f(x). \tag{49.}$$

Da nämlich der Faktor $\frac{s^2 \sin\alpha}{2}$ positiv ist, so wird $F$ mit $f(x)$ zugleich ein Maximum. Hieraus folgt nach einigen Umformungen

$$f'(x) = \frac{\sin\alpha[\sin(\alpha + 2x) - \sin x]}{(\sin\alpha + \sin x)^3} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{50.}$$

Damit $f'(x)$ verschwindet, muß

$$\sin(\alpha + 2x) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{\alpha + x}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + 3x}{2}\right) = 0 \tag{51.}$$

sein. Da $\alpha + x$ größer als 0 und kleiner als $\pi$ sein muß, so kann Gleichung (51.) nur befriedigt werden, wenn

$$\frac{\alpha + 3x}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \alpha + 3x = \pi = \alpha + \beta + \gamma$$

ist. Dies gibt

$$2x = 2\beta = \gamma = \tfrac{2}{3}(\pi - \alpha), \quad x = \beta = \tfrac{1}{3}(\pi - \alpha). \tag{52.}$$

Ob für diesen Wert von $x$ wirklich ein Maximum von $f(x)$ eintritt, findet man aus dem Vorzeichen von $f''(x)$, wobei nach Formel Nr. 123 der Tabelle

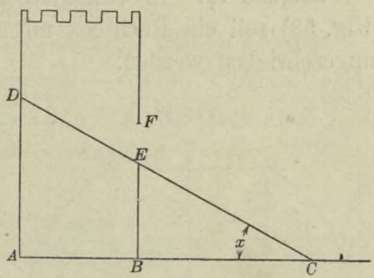
$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} \tag{53.}$$

ist. Nun wird, weil $\alpha + 2x$ gleich $\pi - x$ ist,

$$(54.)\qquad P'(x) = \sin\alpha\,[2\cos(\alpha + 2x) - \cos x]$$
$$= -3\sin\alpha\cos x < 0,$$
$$(55.)\qquad Q(x) = (\sin\alpha + \sin x)^3 > 0,$$
folglich ist $f''(x) < 0$, und $f(x)$ ein Maximum.

**Aufgabe 17.** Wie hoch muß die Tür $BF$ eines Turmes mit der Breite $AB$ gleich $a$ (Fig. 57) mindestens sein, damit man eine Leiter von der Länge $DC$ gleich $l$ in den Turm hineinbringen kann?

Fig. 57.




**Auflösung.** Die Aufgabe hat nur einen Sinn, wenn $l$ größer als $a$ ist; dann muß aber die Tür mindestens ebenso hoch sein, wie das Maximum der Geraden $BE$. Bezeichnet man den Winkel $ACD$ mit $x$, so wird

$$(56.)\qquad AD = l\sin x,\quad AC = l\cos x,$$
$$(57.)\qquad BC = AC - AB = l\cos x - a,$$
$$(58.)\qquad BE = BC\,.\,\mathrm{tg}\,x = (l\cos x - a)\,\mathrm{tg}\,x = l\sin x - a\,\mathrm{tg}\,x = f(x).$$

Dies gibt

$$(59.)\qquad f'(x) = l\cos x - \frac{a}{\cos^2 x} = \frac{l\cos^3 x - a}{\cos^2 x} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Hier wird $P(x) = 0$, wenn

$$(60.)\qquad l\cos^3 x = a$$

wird. Setzt man noch

$$(61.)\qquad l = \lambda^3,\quad a = \alpha^3,\quad \text{also}\quad \lambda = \sqrt[3]{l},\quad \alpha = \sqrt[3]{a},$$

so folgt aus Gleichung (60.)

$$(62.)\qquad \cos x = \frac{\alpha}{\lambda},\quad f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lambda^3\cos^3 x - \alpha^3}{\cos^2 x},$$

$$(63.)\qquad f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = \frac{-3l\cos^2 x\sin x}{\cos^2 x} = -3l\sin x < 0,$$

da $x$ ein spitzer Winkel ist; folglich wird

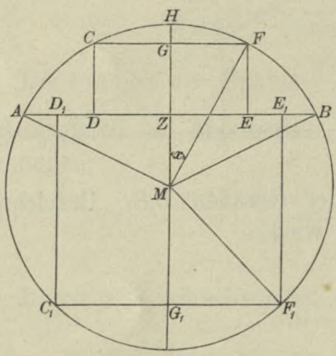
(64.) $BE = f(x) = \left(l - \frac{a}{\cos x}\right)\sin x$

$$= (\lambda^3 - \alpha^2\lambda)\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}} = (\lambda^2 - \alpha^2)\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$$

ein *Maximum.*

**Aufgabe 18.** In einen Kreisabschnitt über der Sehne $AB$ (Fig. 58) soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden.

Fig. 58.




**Auflösung.** Die Aufgabe hat offenbar zwei Lösungen, weil man in den *kleineren* Kreisabschnitt und ebenso in den *größeren* Kreisabschnitt ein solches Rechteck $CDEF$, bezw. $C_1D_1E_1F_1$ einschreiben kann. Für das Rechteck $CDEF$ bezeichne man den *gegebenen* Winkel $BMH$ mit $\alpha$ und den *gesuchten* Winkel $FMH$ mit $x$, dann wird, wenn $a$ der Halbmesser des Kreises ist,

(65.) $MG = a\cos x, \quad GF = a\sin x, \quad MZ = a\cos\alpha,$

(66.) $ZG = MG - MZ = a(\cos x - \cos\alpha), \quad CF = 2a\sin x;$

der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist also

$$F = 2a^2(\cos x - \cos\alpha)\sin x. \tag{67.}$$

Deshalb setze man

(68.) $f(x) = \cos x \sin x - \cos\alpha \sin x,$

(69.) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos\alpha\cos x = 2\cos^2 x - \cos\alpha\cos x - 1.$

Hier wird also $f'(x) = 0$, wenn

$$\cos x = \frac{1}{4}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{8 + \cos^2\alpha}\right). \tag{70.}$$

Nimmt man hierbei das obere Zeichen, so wird $\cos x$ positiv und deshalb $x$ ein *spitzer* Winkel, dem Rechteck $CDEF$ entsprechend. Dabei wird mit Rücksicht auf Gleichung (70.)

$$(71.)\quad f''(x) = -4\cos x \sin x + \cos\alpha \sin x$$
$$= -\sin x(4\cos x - \cos\alpha) = -\sin x\sqrt{8+\cos^2\alpha} < 0,$$

folglich wird $f(x)$ für den gefundenen Wert von $x$ ein *Maximum*.

Soll das Rechteck in den *größeren* Kreisabschnitt eingeschrieben werden, so muß man den *spitzen* Winkel $FMG$ mit dem *stumpfen* Winkel $F_1MG$ vertauschen, der wieder mit $x$ bezeichnet werden möge; es wird dann

$$(65\text{a.})\quad MG_1 = -a\cos x, \quad G_1F_1 = a\sin x, \quad ZM = a\cos\alpha,$$

$$(66\text{a.})\quad ZG_1 = ZM + MG_1 = a(\cos\alpha - \cos x), \quad C_1F_1 = 2a\sin x;$$

der Flächeninhalt des Rechtecks $C_1D_1E_1F_1$ ist jetzt also

$$(67\text{a.})\quad F = 2a^2(\cos\alpha - \cos x)\sin x.$$

Deshalb wird man hier

$$(68\text{a.})\quad f(x) = \cos\alpha \sin x - \cos x \sin x$$

$$(69\text{a.})\quad f'(x) = \cos\alpha\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x$$
$$= -(2\cos^2 x - \cos\alpha\cos x - 1)$$

setzen. Hier wird $f'(x)$ ebenfalls gleich 0 für

$$(70\text{a.})\quad \cos x = \frac{1}{4}(\cos\alpha \pm \sqrt{8+\cos^2\alpha}),$$

wobei man aber das untere Zeichen nehmen muß, weil $x$ ein *stumpfer* Winkel ist. Dabei wird mit Rücksicht auf Gleichung (70a.)

$$(71\text{a.})\quad f''(x) = 4\cos x \sin x - \cos\alpha \sin x$$
$$= \sin x(4\cos x - \cos\alpha) = -\sin x\sqrt{8+\cos^2\alpha} < 0,$$

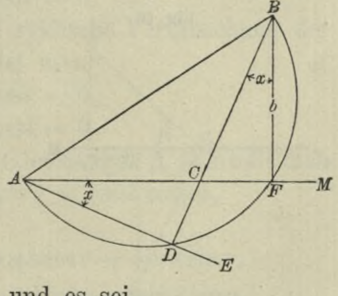
folglich wird $f(x)$ für den gefundenen Wert von $x$ ein *Maximum*.

**Aufgabe 19.** Es ist eine Gerade $AM$ gegeben (Fig. 59) und außerhalb derselben ein Punkt $B$; man soll auf der Geraden $AM$ einen Punkt $C$ bestimmen, so daß

$$(72.)\quad S = p\,.\,AC + q\,.\,CB$$

ein Minimum wird, wobei $p < q$ vorausgesetzt werden soll.

Fig. 59.




**Auflösung.** Es sei der Winkel, den $CB$ mit dem von $B$ auf $AM$ gefällten Lote $BF$ bildet, gleich $x$, und es sei

$$AF = a, \quad FB = b,$$

dann wird

$$(73.)\qquad S = f(x) = p(AF - CF) + q \,.\, CB$$
$$= p(a - b\,\mathrm{tg}\,x) + q \cdot \frac{b}{\cos x},$$

$$(74.)\quad f'(x) = -\frac{pb}{\cos^2 x} + \frac{qb\sin x}{\cos^2 x} = \frac{b(q\sin x - p)}{\cos^2 x} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

$P(x)$ wird gleich 0, wenn

$$(75.)\qquad \sin x = \frac{p}{q}$$

ist; für diesen Wert von $x$ wird

$$(76.)\qquad f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = \frac{bq\cos x}{\cos^2 x} = \frac{bq}{\cos x} > 0,$$

folglich tritt ein Minimum ein.

Legt man $AE$ unter dem aus Gleichung (51.) gefundenen Winkel $x$ im Punkte $A$ an die Gerade $AM$ an und verlängert $BC$ bis zum Schnittpunkte $D$ mit der Geraden $AE$, so steht $BD$ senkrecht auf $AE$, und es wird mit Rücksicht auf Gleichung (75.)

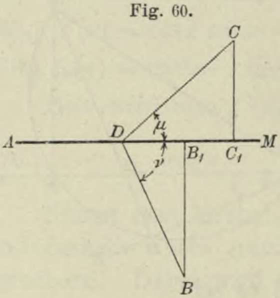
$$(77.)\qquad S = p \,.\, AC + q \,.\, CB = q\sin x \,.\, AC + q \,.\, CB$$
$$= q(AC\sin x + CB) = q(DC + CB) = q \,.\, DB.$$

**Aufgabe 20.** Es ist eine Gerade $AM$ gegeben (Fig. 60) und auf verschiedenen Seiten derselben zwei Punkte $B$ und $C$; man soll auf $AM$ einen Punkt $D$ bestimmen, so daß

$$(78.)\qquad S = p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD$$

ein Minimum wird.

Fig. 60.




**Auflösung.** Es seien $BB_1$ und $CC_1$ die Lote, die man von $B$ und $C$ auf $AM$ fällen kann, und es sei

$$(79.)\quad \begin{cases} AB_1 = b, & AC_1 = c, \\ B_1B = b_1, & C_1C = c_1, \quad AD = x, \end{cases}$$

dann wird

(80.) $$S = f(x) = px + q\sqrt{(b-x)^2 + b_1^2} + r\sqrt{(c-x)^2 + c_1^2},$$

(81.) $$f'(x) = p - \frac{q(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + b_1^2}} - \frac{r(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + c_1^2}} = 0,$$

oder, wenn man den Winkel $B_1DB$ mit $\nu$ und den Winkel $C_1DC$ mit $\mu$ bezeichnet,

(81 a.) $$p - q\cos\nu - r\cos\mu = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so tritt wirklich ein Minimum ein, denn es ist

$$f''(x) = \frac{qb_1^2}{[(b-x)^2 + b_1^2]^{3/2}} + \frac{rc_1^2}{[(c-x)^2 + c_1^2]^{3/2}} > 0.$$

Der Wert von $x$ und die Lage des Punktes $D$ lassen sich aus der Gleichung (81.) oder (81 a.) noch nicht in einfacher Weise ermitteln, dagegen werden diese Gleichungen benutzt werden können zur Lösung der folgenden Aufgabe.

**Aufgabe 21.** Es sind drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben (Fig. 61); man soll einen Punkt $D$ bestimmen, so daß

(82.) $$S = p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD$$

ein Minimum wird.

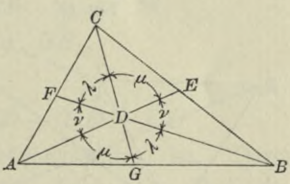
**Auflösung.** Die Gerade $AD$ habe bereits die verlangte Richtung, dann ergibt sich, wenn man Winkel

$BDG = CDF$ mit $\lambda$,

$CDE = ADG$ mit $\mu$,

$ADF = BDE$ mit $\nu$

Fig. 61.




bezeichnet, aus Gleichung (81a.) der vorhergehenden Aufgabe

(83.) $$p - q\cos\nu - r\cos\mu = 0.$$

In derselben Weise, oder durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $p$, $q$, $r$ und $\lambda$, $\mu$, $\nu$ findet man

(84.) $$q - r\cos\lambda - p\cos\nu = 0,$$

(85.) $$r - p\cos\mu - q\cos\lambda = 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $p$, so erhält man

(86.) $$q(\cos\mu + \cos\lambda\cos\nu) = r(\cos\nu + \cos\lambda\cos\mu),$$

oder, weil

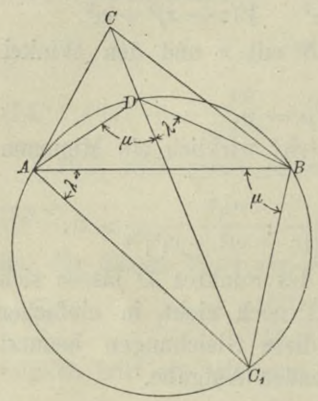
$$\cos\mu = -\cos(\lambda + \nu) = -\cos\lambda\cos\nu + \sin\lambda\sin\nu,$$

$$\cos\nu = -\cos(\lambda + \mu) = -\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu$$

ist,

(86 a.) $$q \sin\lambda \sin\nu = r \sin\lambda \sin\mu,$$

Fig. 62.




oder

(87.) $$q : \sin\mu = r : \sin\nu.$$

Ebenso findet man

(88.) $$p : \sin\lambda = q : \sin\mu.$$

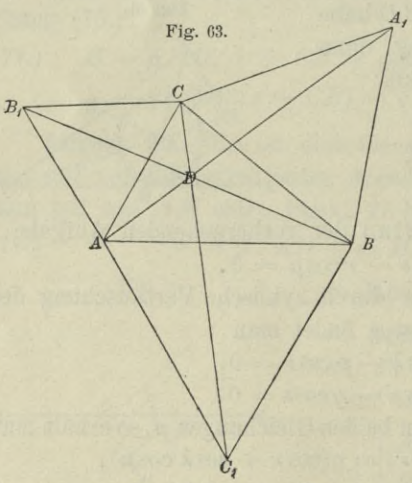
Beschreibt man um das Dreieck $ADB$ den umschriebenen Kreis (Fig. 62) und verlängert $CD$ bis zum zweiten Schnittpunkte $C_1$ mit diesem Kreise, so sind in dem Dreieck $ABC_1$ die Winkel bei $A$, $B$ und $C_1$ bezw. gleich $\lambda$, $\mu$ und $\nu$, so daß man erhält

(89.) $$BC_1 : C_1A : AB = \sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (87.) und (88.)

(90.) $$BC_1 : C_1A : AB = p : q : r.$$

Fig. 63.




Daraus ergibt sich die folgende *Konstruktion:*

Man errichte über $AB$ auf der zu $C$ entgegengesetzten Seite ein Dreieck $ABC_1$, dessen Seiten in Übereinstimmung mit Gleichung (90.) sich verhalten wie $p : q : r$, und beschreibe um dieses Dreieck den umschriebenen Kreis, dann schneidet die Gerade $CC_1$ diesen Kreis in dem gesuchten Punkte $D$.

Da in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite, so folgt hieraus, daß die Aufgabe nur einen Sinn hat, wenn die drei Größen $q + r - p$, $r + p - q$ und $p + q - r$ positiv sind.

Man kann natürlich auch über der Seite $BC$ ein Dreieck $BCA_1$ und über der Seite $CA$ ein Dreieck $CAB_1$ konstruieren (Fig. 63), so daß

(91.) $$BC : CA_1 : A_1B = B_1C : CA : AB_1 = p : q : r$$

ist. Durch den gesuchten Punkt $D$ gehen dann auch die Geraden $AA_1$ und $BB_1$ und die Kreise, welche diesen Dreiecken $BCA_1$ und $CAB_1$ umschrieben sind. Gleichzeitig erhält man für $S$ eine geometrische Darstellung. Nach dem *Ptolomaeischen* Lehrsatze ist nämlich (Fig. 62)

(92.) $$AD . BC_1 + BD . AC_1 = C_1D . AB;$$

nun ist aber nach Konstruktion

$$BC_1 = \frac{p . AB}{r}, \quad AC_1 = \frac{q . AB}{r},$$

folglich geht Gleichung (92.) über in

$$\frac{AB}{r}(p . AD + q . BD) = C_1D . AB.$$

Dies gibt

(93.) $$S = p . AD + q . BD + r . CD = r(CD + DC_1) = r . CC_1.$$

In derselben Weise findet man auch

(93a.) $$S = p . AA_1 \quad \text{und} \quad S = q . BB_1.$$

Ein besonderer Fall ist der, wo

$$p = q = r = 1, \quad \text{also} \quad S = AD + BD + CD$$

wird, ein Fall, der auch in Figur 63 berücksichtigt ist. Dann sind die Dreiecke $BCA_1$, $CAB_1$, $ABC_1$ *gleichseitige Dreiecke*, die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind alle drei gleich $60^0$, so daß Winkel

$$BDC = CDA = ADB = 120^0$$

wird, und endlich ist

(93b.) $$S = AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

**Bemerkung.**

1) Der gefundene Punkt $D$ hat nur dann die Eigenschaft des Minimums, wenn von den Eckpunkten des Dreiecks keiner *innerhalb* der um die Dreiecke $BCA_1$, $CAB_1$, $ABC_1$ beschriebenen Kreise liegt. Läge z. B. $C$ innerhalb des Kreises um $ABC_1$, so würde aus den Ungleichungen

$$AC < AD + CD, \quad BC < BD + CD, \quad AC + BC < AD + BD,$$

wenn man sie bezw. mit den positiven Faktoren $p+r-q$, $q+r-p$, $p+q-r$ multipliziert und dann addiert, folgen

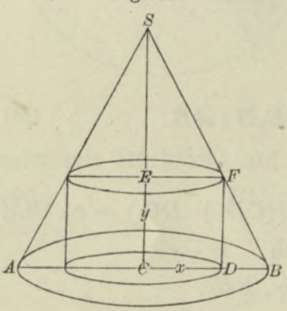
$$p \,.\, AC + q \,.\, BC < p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD.$$

2) Die letzten drei Aufgaben haben ganz besondere Bedeutung für die Lehre vom Trassieren und bilden den Ausgangspunkt für eine Reihe von Aufgaben, deren Besprechung hier aber zu weit führen würde. (Man vergleiche *Launhardt*, Theorie des Trassierens, Hannover 1887.)

### D. Aufgaben aus der Stereometrie.

**Aufgabe 22.** Man soll unter allen Zylindern, die sich in einen geraden Kegel einschreiben lassen, denjenigen bestimmen, welcher das größte Volumen hat.

Fig. 64.




**Auflösung.** Die Höhe des gegebenen Kegels (Fig. 64) $CS$ sei $h$, der Halbmesser $CB$ der Grundfläche sei $r$, die Höhe $CE$ des eingeschriebenen Zylinders sei $y$, und der Halbmesser $CD$ seiner Grundfläche sei $x$. Dadurch findet man für das Volumen des Zylinders

$$V = x^2 \pi y. \tag{94.}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $SCB$ und $FDB$ folgt

$$CS : CB = DF : DB,$$

oder

$$h : r = y : r - x,$$

folglich wird

$$y = \frac{h}{r}(r - x) \quad \text{und} \quad V = \frac{h\pi}{r} x^2 (r - x). \tag{95.}$$

Die Funktion, welche ein Maximum werden soll, ist daher $\left(\text{abgesehen von dem positiven konstanten Faktor } \frac{h\pi}{r}\right)$

$$f(x) = x^2(r - x) = rx^2 - x^3. \tag{96.}$$

Dies gibt

$$f'(x) = 2rx - 3x^2 = x(2r - 3x), \quad f''(x) = 2r - 6x. \tag{97.}$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet erstens für $x = 0$ und zweitens für $x = \frac{2r}{3}\cdot$ Nun ist

$$f''(0) = 2r > 0,$$

folglich erhält man für $x = 0$ ein Minimum. In der Tat, der entsprechende Zylinder ist zu einer geraden Linie zusammengeschrumpft, und sein Volumen ist gleich Null. Dagegen wird

$$f''\left(\frac{2r}{3}\right) = -2r < 0,$$

folglich wird $f\left(\frac{2r}{3}\right)$ ein Maximum. Die Höhe $y$ des zugehörigen Zylinders ist nach Gleichung (95.) gleich $\frac{h}{3}$, und das Volumen wird nach Gleichung (94.)

$$V = \frac{4r^2h\pi}{27}. \tag{98.}$$

Da das Volumen des gegebenen Kegels gleich $\frac{r^2h\pi}{3}$ ist, so ist das Volumen des größten Zylinders, der sich in einen geraden Kreiskegel einschreiben läßt, gleich $\frac{4}{9}$ von dem Volumen des Kegels.

**Aufgabe 23.** Man soll unter allen Zylindern, welche sich einem geraden Kreiskegel einschreiben lassen (Fig. 64), denjenigen bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

**Auflösung.** Wendet man dieselben Bezeichnungen an wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man für die Mantelfläche des Zylinders

$$M = 2x\pi y. \tag{99.}$$

Nach Gleichung (95.) ist aber

$$y = \frac{h}{r}(r - x),$$

folglich wird

$$M = \frac{2h\pi}{r}(rx - x^2).$$

Die Funktion, welche ein Maximum werden soll, ist daher

(100.) $$f(x) = rx - x^2,$$

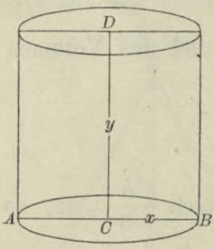
deshalb wird

(101.) $$f'(x) = r - 2x, \quad f''(x) = -2.$$

Daraus findet man, daß die Mantelfläche für $x = \frac{r}{2}$ ein Maximum wird.

**Aufgabe 24.** Ein zylindrisches Gefäß (Fig. 65) soll so geformt werden, daß es bei gegebenem Volumen eine möglichst kleine Gesamtoberfläche besitzt. In welchem Verhältnisse stehen dann die Höhe und der Halbmesser der Grundfläche?

Fig. 65.




**Auflösung.** Bezeichnet man den Halbmesser $CB$ der Grundfläche mit $x$, die Höhe $CD$ mit $y$, die Oberfläche mit $F$ und das Volumen mit $V$, so wird

(102.) $$V = x^2\pi y, \quad \text{oder} \quad y = \frac{V}{x^2\pi},$$

(103.) $$F = 2x\pi y + 2x^2\pi = 2Vx^{-1} + 2x^2\pi = f(x),$$

also

(104.) $$f'(x) = -2Vx^{-2} + 4x\pi = 2x^{-2}(2x^3\pi - V) = 0.$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (102.)

(105.) $$2x^3\pi = V, \quad y = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Für diesen Wert von $x$ tritt wirklich ein Minimum ein, denn es wird dann

(106.) $$f''(x) = 4Vx^{-3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0.$$

*Die Gesamtoberfläche wird daher möglichst klein, wenn der Durchmesser des Grundkreises und die Höhe einander gleich sind.*

**Aufgabe 25.** Ein zylindrisches Gefäß (Fig. 65) soll so geformt werden, daß bei gegebenem Volumen (nicht die Gesamtoberfläche, sondern nur) der Mantel und die *eine* Grundfläche zusammen ein Minimum werden.

**Auflösung.** In diesem Falle ist

(107.) $$f(x) = 2x\pi y + x^2\pi = 2Vx^{-1} + x^2\pi,$$

(108.) $$f'(x) = -2Vx^{-2} + 2x\pi = 0 \text{ für } x^3\pi = V.$$

Dies gibt

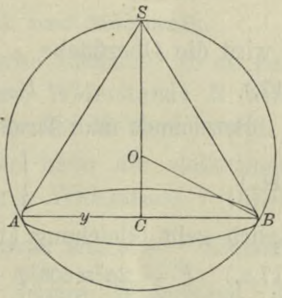
(109.) $$y = x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

und zwar tritt für diesen Wert von $x$ wirklich ein Minimum ein, weil

(110.) $$f''(x) = 4Vx^{-3} + 2\pi = 6\pi > 0$$

wird. *Hier muß also der Halbmesser der Grundfläche der Höhe gleich sein.*

Fig. 66.




**Aufgabe 26.** Man soll einer Kugel einen geraden Kegel (Fig. 66) einschreiben, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

**Auflösung.** Bezeichnet man den Halbmesser $BO$ der Kugel mit $a$, den Halbmesser $AC$ von der Grundfläche des Kegels mit $y$, die Scheitelkante $AS$ mit $s$ und die Höhe $CS$ mit $x$, so wird die Mantelfläche des Kegels

(111.) $$M = y\pi s.$$

Nun ist aber nach bekannten Sätzen aus der Planimetrie

(112.) $$y^2 = x(2a - x), \quad s^2 = 2ax;$$

deshalb wird

(113.) $$M^2 = 2ax^2(2a - x)\pi^2.$$

Ist $M$ ein Maximum, so gilt dasselbe von $M^2$, folglich hat man hier zu setzen

(114.) $$f(x) = x^2(2a - x) = 2ax^2 - x^3;$$

dies gibt

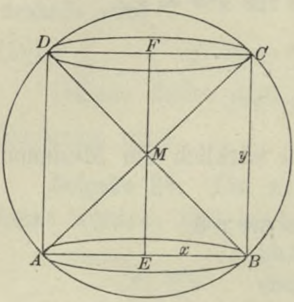
(115.) $$\begin{cases} f'(x) = 4ax - 3x^2 = x(4a - 3x), \\ f''(x) = 4a - 6x. \end{cases}$$

Für $x = 0$ wird $f(x)$ ein Minimum, dagegen wird

(116.) $$f\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{32a^3}{27}$$

ein Maximum.

Fig. 67.




**Aufgabe 27.** In eine Kugel mit dem Halbmesser $a$ soll ein Zylinder mit möglichst großer Gesamtoberfläche einbeschrieben werden. (Vergleiche Fig. 67.)

**Auflösung.** Bezeichnet man den Halbmesser der Grundkreise mit $x$ und die Höhe des Zylinders mit $y$, so wird die Oberfläche

(117.) $$F = 2x^2\pi + 2x\pi y.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel $BAC$ mit $\varphi$, so wird

(118.) $$\begin{cases} 2x = 2a\cos\varphi, \\ y = 2a\sin\varphi, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (117.) über in

(117 a.) $$\begin{aligned} F &= 2a^2\pi\cos^2\varphi + 4a^2\pi\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2a^2\pi(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi). \end{aligned}$$

Deshalb setze man in diesem Falle

(119.) $$f(\varphi) = \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

also

(120.) $$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -2\cos\varphi\sin\varphi + 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi \\ &= 2\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi), \end{aligned}$$

(121.) $$f''(2\varphi) = -4\sin(2\varphi) - 2\cos(2\varphi).$$

Ein Maximum oder Minimum kann daher nur eintreten, wenn

(122.) $$\operatorname{tg}(2\varphi) = 2, \quad \text{oder} \quad \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = 2,$$

also

(122 a.) $$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \mp \dfrac{2}{\sqrt{5}}}, \quad \cos\varphi = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}} \end{cases}$$

ist. Da $\varphi$ ein *spitzer* Winkel sein muß, so kann hierbei nur das *obere* Vorzeichen gelten. Man erhält daher nach den Gleichungen (118.)

$$(123.)\quad x = a\cos\varphi = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}},\quad y = 2a\sin\varphi = a\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}\,.$$

Nun wird nach den Gleichungen (122a.) und (121.)

$$(124.)\quad \cos(2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin(2\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad f''(\varphi) = -2\sqrt{5} < 0,$$

folglich tritt für die gefundenen Werte von $x$ und $y$ ein Maximum ein.

### E. Aufgaben aus der Physik und Mechanik.

**Aufgabe 28.** Man soll $n$ galvanische Elemente so zu einer Batterie zusammenstellen, daß bei dem Widerstande $R$ (*Ohm*) im äußeren Stromkreise die Stromstärke ein Maximum wird.

**Auflösung.** Jedes der $n$ Elemente habe die elektromotorische Kraft $e$ (*Volt*) und den inneren Widerstand $r$ (*Ohm*); dann schalte man $x$ *Elemente* hintereinander und $y = \frac{n}{x}$ Elemente *nebeneinander*. Dadurch wird der innere Widerstand der Batterie

$$(125.)\qquad W = \frac{rx}{y} = \frac{rx^2}{n},$$

und die Stromstärke wird nach dem *Ohm*schen Gesetze

$$(126.)\qquad J = \frac{ex}{W+R} = \frac{nex}{rx^2+nR}\,.$$

Die Stromstärke $J$ wird ein Maximum, wenn

$$(127.)\qquad \frac{ne}{J} = \frac{rx^2+nR}{x} = rx + nRx^{-1} = f(x)$$

ein Minimum wird. Dies gibt

$$(128.)\quad f'(x) = r - nRx^{-2},\quad f''(x) = 2nRx^{-3} = \frac{2nR}{x^3} > 0\,.$$

Hier wird $f'(x) = 0$, wenn man

$$(129.)\quad rx^2 = nR,\quad \text{oder}\quad W = R,\quad x = \sqrt{\frac{nR}{r}},\quad y = \sqrt{\frac{nr}{R}}$$

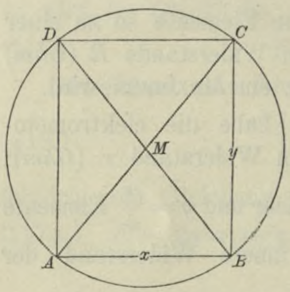
macht, und zwar wird $f(x)$ für diesen Wert von $x$ ein Minimum, weil $f''(x)$ positiv ist.

Allerdings wird man die Aufgabe im allgemeinen nur näherungsweise lösen können, weil der gefundene Wert von $x$ keine *ganze* Zahl ist. Es ergibt sich aber aus Gleichung (128.) die Regel:

*Die Stromstärke wird möglichst groß, wenn man die Elemente so anordnet, daß der innere Widerstand dem äußeren Widerstande gleich wird.*

**Aufgabe 29.** Man soll aus einem Baumstamme mit kreisförmigem Querschnitte (Fig. 68) einen Balken mit rechteckigem Querschnitte so ausschneiden, daß seine Tragfähigkeit ein Maximum wird.

Fig. 68.




**Auflösung.** Da die Tragfähigkeit $T$ proportional zu der Breite $x$ des Querschnitts und proportional zum Quadrate der Höhe $y$ desselben ist, so wird

$$T = cxy^2,$$

wobei

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

wenn man mit $d$ den Durchmesser $AC$ des Kreises bezeichnet. Dies gibt

$$T = cx(d^2 - x^2) = c(d^2x - x^3), \tag{130.}$$

$$f(x) = d^2x - x^3, \tag{131.}$$

$$f'(x) = d^2 - 3x^2 = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{d}{\sqrt{3}}. \tag{132.}$$

Für diesen Wert von $x$ tritt ein Maximum ein, denn es ist

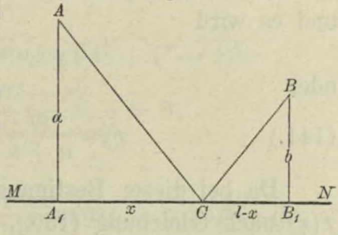
$$f''(x) = -6x < 0. \tag{133.}$$

*Die Tragfähigkeit des Balkens ist daher ein Maximum, wenn*

$$x^2 : y^2 : d^2 = 1 : 2 : 3, \quad \text{oder} \quad x : y : d = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}. \tag{134.}$$

**Aufgabe 30.** Auf derselben Seite einer geraden Linie $MN$ (Fig. 69) seien zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben; man soll die Lage des Punktes $C$ auf der Geraden $MN$ so bestimmen, daß $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ ein Minimum wird.

Fig. 69.




**Auflösung.** Fällt man von $A$ und $B$ auf $MN$ die Lote $AA_1$ und $BB_1$, dann sei

$A_1A = a,\ B_1B = b,\ A_1B_1 = l;$ setzt man also

$$A_1C = x, \quad \text{so wird} \quad CB_1 = l - x.$$

Dies gibt

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = a^2 + x^2 + b^2 + (l - x)^2 = f(x), \tag{135.}$$

$$f'(x) = 2x - 2(l - x) = 4x - 2l, \quad f''(x) = 4, \tag{136.}$$

folglich wird $f(x)$ ein Minimum für $x = \frac{l}{2}$, d. h., wenn der Punkt $C$ in der Mitte zwischen $A_1$ und $B_1$ liegt.

**Aufgabe 31.** Auf derselben Seite einer geraden Linie $MN$ (Fig. 69) seien zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben; man soll die Lage des Punktes $C$ auf der Geraden $MN$ so bestimmen, daß $AC + CB$ ein Minimum wird.

**Auflösung.** Die Funktion, welche hier ein Minimum werden soll, ist

$$AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2} = f(x). \tag{137.}$$

Dies gibt

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}, \tag{138.}$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b^2}{[b^2 + (l - x)^2]\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}. \tag{139.}$$

Um die Werte von $x$ zu bestimmen, für welche $f'(x)$ verschwindet, beachte man, daß aus Gleichung (138.) folgt

$$f'(x) = \frac{A_1C}{AC} - \frac{CB_1}{CB} = \cos ACA_1 - \cos BCB_1.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn der Winkel

$$ACA_1 = BCB_1. \tag{140.}$$

Die beiden Dreiecke $ACA_1$ und $BCB_1$ sind deshalb ähnlich, und es wird

$$x : a = (l - x) : b,$$

oder

$$x = \frac{al}{a+b}, \quad l - x = \frac{bl}{a+b}. \tag{141.}$$

Da bei dieser Bestimmung von $x$ die zweite Ableitung von $f(x)$ nach Gleichung (139.), nämlich

$$f''(x) = \frac{\overline{A_1A}^2}{\overline{AC}^3} + \frac{\overline{B_1B}^2}{\overline{BC}^3}, \tag{142.}$$

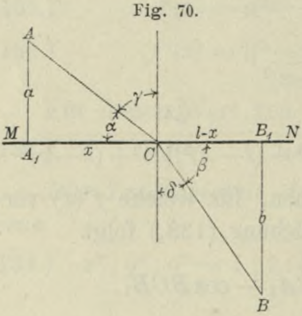
positiv ist, so wird $AC + CB$ ein Minimum.

Wegen Gleichheit der Winkel $ACA_1$ und $BCB_1$ ist die gebrochene Linie $ACB$ der Weg, den ein Lichtstrahl nehmen würde, der von dem Punkte $A$ ausgeht und von der Geraden $MN$ nach $B$ reflektiert werden soll.

*Dieser Weg ist demnach ein Minimum.*

**Aufgabe 32.** Die Gerade $MN$ (Fig. 70) trenne das Medium, in welchem das Licht sich mit der Geschwindigkeit $c$ fortbewegt, von dem Medium, in welchem die Geschwindigkeit des Lichtes gleich $d$ ist; in welchem Punkte $C$ muß der Lichtstrahl die Gerade $MN$ treffen, damit er in der kürzesten Zeit vom Punkte $A$ in dem ersten Medium zum Punkte $B$ in dem anderen Medium gelangt, und nach welchem Gesetze wird er gebrochen?

Fig. 70.




**Auflösung.** Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei den beiden vorhergehenden Aufgaben wird in diesem Falle die Zeit $t_1$, welche der Strahl braucht, um von $A$ nach $C$ zu gelangen, $\frac{AC}{c}$, und die Zeit $t_2$, welche er braucht, um von $C$ nach $B$ zu gelangen, $\frac{CB}{d}$.

Setzt man also

$$(143.)\qquad \frac{1}{c} = p, \quad \frac{1}{d} = q,$$

so erhält man

$$(144.)\qquad f(x) = t_1 + t_2 = p\sqrt{a^2 + x^2} + q\sqrt{b^2 + (l - x)^2},$$

$$(145.)\qquad f'(x) = \frac{px}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{q(l - x)}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = 0,$$

oder

$$(145\text{a.})\qquad f'(x) = \frac{p \,.\, A_1C}{AC} - \frac{q \,.\, CB_1}{CB} = p\cos\alpha - q\cos\beta = 0,$$

wobei die Winkel $A_1CA$ und $B_1CB$ bezw. mit $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet sind. Nennt man die Winkel, welche das Einfallslot im Punkte $C$ mit den Strahlen $AC$ und $BC$ bildet, bezw. $\gamma$ und $\delta$, so wird

$$p\sin\gamma = q\sin\delta, \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\delta}{d},$$

also

$$(146.)\qquad \sin\gamma : \sin\delta = c : d.$$

*In dieser Gleichung ist das Gesetz ausgesprochen, nach welchem der Strahl im Punkte C gebrochen wird.*

Aus

$$(147.)\qquad f''(x) = \frac{pa^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{qb^2}{[b^2 + (l - x)^2]\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$$

$$= \frac{p \,.\, \overline{A_1A}^2}{\overline{AC}^3} + \frac{q \,.\, \overline{B_1B}^2}{\overline{BC}^3} > 0$$

folgt wieder, daß $p \,.\, AC + q \,.\, CB$ ein Minimum wird.

## VIII. Abschnitt.

# Bestimmung von Ausdrücken, welche an der Grenze eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ haben.

## § 65.

### Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 124.)

Nähern sich in dem Bruche $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ Zähler und Nenner der Grenze 0, wenn sich $x$ dem Werte $a$ nähert, so erhält dieser Bruch für $x$ gleich $a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Beispiele dafür kommen in der Differential-Rechnung sehr häufig vor. Schon die Erklärung des Differential-Quotienten (vergl. Formel Nr. 16 der Tabelle)

$$(1.)\qquad f'(x) = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

liefert den Grenzwert eines Ausdruckes von der Form $\frac{0}{0}$. Indem man $x$ mit $a$ und $x_1$ mit $x$ vertauscht, geht Gleichung (1.) über in

$$(2.)\qquad f'(a) = \lim_{x = a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

ebenso ist

$$(3.)\qquad \varphi'(a) = \lim_{x = a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt schon die Lösung der vorgelegten Aufgabe. Weil nämlich nach Voraussetzung

(4.) $$\varphi(a) = 0 \quad \text{und} \quad f(a) = 0$$

ist, so erhält man

(5.) $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$

also

(6.) $$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\lim \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\lim \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}.$$

*Man findet daher den wahren Wert von* $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, *indem man Zähler und Nenner einzeln differentiiert und in den Quotienten der Ableitungen $x$ gleich $a$ einsetzt.*

Gleichung (6.) führt zu keinem brauchbaren Resultate, wenn $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ entweder beide gleich Null oder beide unendlich groß werden. Deshalb möge Gleichung (6.) durch die folgende Untersuchung noch auf eine etwas andere Form gebracht werden.

**Hilfssatz 1.** *Verschwindet die Funktion $F(x)$, die mit ihrer ersten Ableitung $F'(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ stetig und endlich sein möge, für $x = a$ und für $x = b$, so gibt es zwischen $a$ und $b$ mindestens einen Wert von $x$ — er heiße $\xi$ —, für welchen $F'(x) = 0$ wird.*

Dieser Satz ist nur eine andere Form des Satzes von *Rolle* (§ 36) und folgt ohne weiteres aus Formel Nr. 87 der Tabelle, welche den in § 36 (Seite 162) bewiesenen Mittelwertsatz enthält. Danach ist nämlich, wenn man $f(x)$ mit $F(x)$ vertauscht,

(7.) $$F(x) - F(a) = (x - a) \cdot F'[a + \Theta(x - a)], \quad \text{wo } 0 < \Theta < +1,$$

oder, wenn man $x$ gleich $b$ setzt,

(8.) $$F(b) - F(a) = (b - a) \cdot F'[a + \Theta(b - a)].$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0, \quad b \gtreqless a,$$

folglich wird

$$F'(\xi) = F'[a + \Theta(b - a)] = 0. \tag{9.}$$

Den Sinn dieses Satzes kann man am besten erkennen, indem man die Funktion

$$y = F(x)$$

durch eine Kurve geometrisch darstellt, welche die $X$-Achse in den Punkten $A$ und $B$ schneiden muß, wenn man

$$OA = a, \quad OB = b$$

macht. (Fig. 71 und 72.)

Fig. 71.

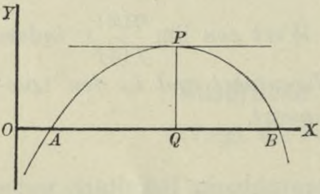
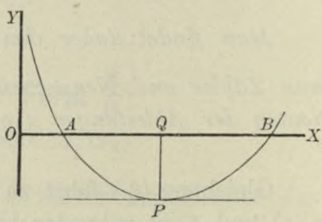



Fig. 72.




Wenn nun die Kurve (dem Falle $F'(a) > 0$ entsprechend) im Punkte $A$ *steigt* (Fig. 71), so muß sie, um die $X$-Achse im Punkte $B$ wieder zu erreichen, nachher *fallen*, d. h. für spätere Werte von $x$ muß $F'(x)$ *negativ* sein. Da nach Voraussetzung $F'(x)$ in dem Intervalle *stetig und endlich* ist, so muß bei dem Übergange vom Steigen zum Fallen auf der Kurve ein Punkt $P$ mit der Abszisse $OQ = \xi$ liegen, in welchem die Tangente zur $X$-Achse parallel ist, d. h. $F'(\xi)$ ist gleich Null.

Wenn dagegen die Kurve (dem Falle $F'(a) < 0$ entsprechend) im Punkte $A$ *fällt* (Fig. 72), so muß sie, um die $X$-Achse im Punkte $B$ wieder zu erreichen, nachher *steigen*, d. h. für spätere Werte von $x$ muß $F'(x)$ *positiv* sein. Auch hier muß also bei dem Übergange vom Fallen zum Steigen auf der Kurve ein Punkt $P$ mit der Abszisse $OP = \xi$ liegen, in welchem die Tangente zur $X$-Achse parallel ist, d. h. $F'(\xi)$ ist auch in diesem Falle gleich Null.

Der Satz bleibt sogar auch dann noch richtig, wie man ohne weiteres erkennt, wenn die Kurve in dem Punkte $A$ oder $B$, oder auch in beiden Punkten auf der $X$-Achse senkrecht steht, wenn also

$F'(a) = \pm\infty$, oder $F'(b) = \pm\infty$, oder $F'(a) = \pm\infty$ *und* $F'(b) = \pm\infty$.

**Hilfssatz 2.** *Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ mit ihren ersten Ableitungen $\varphi'(x)$ und $f'(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ stetig und endlich, so gibt es zwischen $a$ und $b$ mindestens einen Wert von $x$, für welchen*

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \tag{10.}$$

*wird.*

**Beweis.** Die Funktion

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)}[f(x) - f(a)] \tag{11.}$$

verschwindet für $x = a$ und $x = b$ und bleibt mit ihrer Ableitung $F'(x)$ nach den Voraussetzungen des Satzes in dem Intervalle von $a$ bis $b$ stetig und endlich, wenn $f(b)$ von $f(a)$ verschieden ist. Deshalb gibt es nach dem ersten Hilfssatze zwischen $a$ und $b$ mindestens einen Wert von $x$, für welchen $F'(x)$ verschwindet. Nennt man diesen Wert wieder $\xi$, so erhält man also

$$F'(\xi) = \varphi'(\xi) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)} f'(\xi) = 0,$$

oder

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{f'[a + \Theta(b - a)]}, \tag{12.}$$

und wenn man $b = x$ setzt,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(x - a)]}{f'[a + \Theta(x - a)]}. \tag{12a.}$$

Diese Formel stimmt mit Gleichung (26.) in § 42 überein, wenn man die Buchstaben $f$ und $x$ bezw. mit $\psi$ und $b$ vertauscht. Sie bleibt auch dann noch richtig, wenn $\varphi'(a)$ oder $f'(a)$, oder $\varphi'(a)$ *und* $f'(a)$ unendlich groß werden.

Unter der Voraussetzung, daß

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{und} \quad f(a) = 0$$

ist, geht Gleichung (12a.) über in

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(x - a)]}{f'[a + \Theta(x - a)]} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}. \tag{13.}$$

Dies gilt, wie klein auch $x - a$ sein mag, folglich wird

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)},$$

oder, da $\xi$ mit $x$ zugleich sich dem Grenzwerte $a$ nähert,

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{14.}$$

Diese Gleichung geht ohne weiteres in Gleichung (6.) über, wenn $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ nicht beide gleich 0 sind oder nicht beide unendlich groß werden.

Aus Gleichung (14.) findet man sogleich, daß man das angegebene Verfahren noch zum zweiten Male anwenden muß, wenn auch

$$\lim_{x=a} \varphi'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f'(x) = 0 \tag{15.}$$

ist. In diesem Falle wird also

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi''(x)}{f''(x)}. \tag{16.}$$

Wird auch noch

$$\lim_{x=a} \varphi''(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f''(x) = 0, \tag{17.}$$

so wendet man dasselbe Verfahren auf $\lim \frac{\varphi''(x)}{f''(x)}$ an, indem man Zähler und Nenner einzeln differentiiert, und erhält

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)}. \tag{18.}$$

Kommt man bei Fortsetzung dieses Verfahrens zu einem Bruche, der für $\lim x = a$ nicht mehr die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ hat, so ist die Aufgabe gelöst. In diesem Falle ergibt sich die allgemeine Regel: *Ist*

$$(19.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{x=a}\varphi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x=a}\varphi'(x) = 0, \ldots \lim\limits_{x=a}\varphi^{(n-1)}(x) = 0, \\ \lim\limits_{x=a}f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x=a}f'(x) = 0, \ldots \lim\limits_{x=a}f^{(n-1)}(x) = 0, \end{cases}$$

*so ist*

$$(20.)\qquad \lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}.$$

Bei dieser Herleitung dürfen $\lim\limits_{x=a}\varphi^{(n)}(x)$ und $\lim\limits_{x=a}f^{(n)}(x)$ auch unendlich groß sein. Macht man aber die Voraussetzung, daß die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ mit ihren ersten $n$ Ableitungen *stetig* und *endlich* bleiben für alle Werte von $x$, deren Unterschied von $a$ beliebig klein ist, so kann man dasselbe Resultat auch durch Anwendung der *Taylor*schen Reihe finden. Nach Formel Nr. 88 der Tabelle ist, wenn man $n+1$ mit $n$ vertauscht,

$$(21.)\quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}[a+\Theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n;$$

ebenso findet man

$$(22.)\quad \varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}[a+\Theta_1(x-a)]}{n!}(x-a)^n.$$

Wenn aber die in den Gleichungen (19.) angegebenen Voraussetzungen gelten, so reduzieren sich diese Gleichungen (21.) und (22.) auf

$$(21\text{a.})\qquad f(x) = \frac{f^{(n)}[a+\Theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n,$$

$$(22\text{a.})\qquad \varphi(x) = \frac{\varphi^{(n)}[a+\Theta_1(x-a)]}{n!}(x-a)^n,$$

folglich ist

$$(23.)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n)}[a+\Theta_1(x-a)]}{f^{(n)}[a+\Theta(x-a)]}$$

und

$$(24.)\qquad \lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)},$$

ein Resultat, das mit Gleichung (20.) übereinstimmt.

Bei dieser Untersuchung ist die Voraussetzung gemacht, daß man die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $f(x)$ bilden kann, namentlich aber, daß $a$ ein *endlicher* Wert ist. Diese zweite Voraussetzung darf auch wegfallen; denn, wenn $a$ unendlich groß wird, setze man

$$x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{x}, \tag{25.}$$

dann wird

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{t=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t=0} \frac{\frac{d\varphi(x)}{dt}}{\frac{df(x)}{dt}}. \tag{26.}$$

Da nun aber

$$\frac{d\varphi(x)}{dt} = \varphi'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot \varphi'(x), \quad \frac{df(x)}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot f'(x)$$

ist, so findet man, auch wenn man $t$ als die unabhängige Veränderliche betrachtet, nach der angegebenen Regel

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{27.}$$

Dabei muß man die Funktionen $\varphi'(x)$ und $f'(x)$ zunächst für endliche Werte von $x$ bilden und dann $x$ unendlich groß werden lassen.

## § 66.

## Übungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim \dfrac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}$.

2) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \dfrac{0}{0}$,

$\lim \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \dfrac{0}{0} = \lim \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{0}{0}$,

$\lim \dfrac{\sin x}{6x} = \lim \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$.

3) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

4) $\lim\limits_{x=1} \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = \lim \frac{-mx^{m-1}}{-nx^{n-1}} = \frac{m}{n}$.

5) $\lim\limits_{x=0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$.

6) $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} = \lim \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$.

Nun ist aber

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x},$$

folglich wird

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} = \lim \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3.$$

7) $\lim\limits_{x=a} \frac{x^n - a^n}{\ln(x^n) - \ln(a^n)} = \lim \frac{nx^{n-1}}{\frac{n}{x}} = \lim x^n = a^n$.

8) $\lim\limits_{x=0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{1} = 1$.

Die Aufgabe 8 findet folgende geometrische Anwendung. In der Integral-Rechnung erhält man für die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation der Ellipse um die *große* Achse entsteht, den Ausdruck

$$F = 2b^2\pi + \frac{2a^2b\pi}{e} \arcsin\left(\frac{e}{a}\right), \tag{1.}$$

oder, wenn man $\frac{e}{a} = x$ setzt,

$$F = 2b^2\pi + 2ab\pi \cdot \frac{\arcsin x}{x}. \tag{1a.}$$

Wenn nun die Ellipse in einen Kreis übergeht, wenn also

$$a = b, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 0, \quad x = 0$$

wird, so geht das *Rotations-Ellipsoid* in eine Kugel über, und das zweite Glied in dem Ausdruck für $F$ erhält die Form $\frac{0}{0}$.

Benutzt man aber das soeben gefundene Resultat, so ergibt sich für die Oberfläche der Kugel aus Gleichung (1a.) der bekannte Ausdruck

$$F = 4a^2\pi.$$

$$9)\ \lim_{x=0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}}{1} = 2.$$

Auch dieses Resultat findet eine geometrische Anwendung. In der Integral-Rechnung erhält man für die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation der Ellipse um die *kleine* Achse entsteht, und welcher *Sphäroid* genannt wird, den Ausdruck

$$(2.)\quad F = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\ln\left(\frac{a+e}{a-e}\right) = 2a^2\pi + b^2\pi\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x},$$

wenn man wieder $\frac{e}{a}$ mit $x$ bezeichnet. Geht nun die Ellipse in einen Kreis über, wird also

$$a = b, \quad e = 0, \quad x = 0,$$

so geht das *Sphäroid* in eine Kugel über, und das zweite Glied in dem Ausdrucke für $F$ erhält die Form $\frac{0}{0}\cdot$ Benutzt man aber das soeben gefundene Resultat, so ergibt sich für die Oberfläche der Kugel aus Gleichung (2.) der bekannte Ausdruck

$$F = 4a^2\pi.$$

$$10)\ \lim_{x=1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim \frac{nx^{n-1}}{1} = n.$$

$$11)\ \lim_{x=1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} = \lim \frac{nx^{n-1} - n}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die beiden letzten Aufgaben 10 und 11 finden Anwendung in der Rentenrechnung. Bezeichnet man nämlich mit $R_y$ den Barwert einer Leibrente, die den Betrag 1 hat und einer Person im Alter von $y$ Jahren am Anfange eines jeden Jahres ausgezahlt wird, und mit $R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)}$ den Barwert einer Leibrente von gleichem Betrage, die einer Person gleichen Alters in $n$ Quoten am Anfange eines jeden $n^{tel}$ des Jahres ausgezahlt wird, so ist

$$(3.)\quad R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{1}{n^2\sqrt[n]{r^{n-1}}}\left(\frac{r-1}{\sqrt[n]{r}-1}\right)^2 R_y - \frac{\sqrt[n]{r}}{n^2}\cdot\frac{r-n\sqrt[n]{r}+n-1}{(\sqrt[n]{r}-1)^2},$$

wobei der *Zinsfaktor* $r$ durch die Gleichung

$$(4.)\quad 100r = 100 + \mathit{Prozente}$$

erklärt wird. Der in Gleichung (3.) gegebene Ausdruck für $R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)}$ ist für die numerischen Berechnungen sehr unbequem; deshalb benutzt man gewöhnlich einen Näherungswert, den man erhält, indem man den Zinsfaktor $r$, welcher so wie so von 1 wenig verschieden ist, gleich 1 werden läßt. Setzt man dann noch

$$(5.)\quad r = x^n, \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{r} = x,$$

so wird

$$\lim_{x=1} R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \lim_{x=1}\frac{1}{n^2x^{n-1}}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2 R_y - \lim_{x=1}\frac{x}{n^2}\cdot\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2},$$

oder mit Rücksicht auf die in den Aufgaben 10 und 11 gefundenen Resultate

$$(6.)\quad \lim R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = R_y - \frac{n-1}{2n}.$$

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß dieser Näherungswert von dem wahren Werte sehr wenig verschieden ist.

12) $$\lim_{x=1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x} = \frac{0}{0} = \lim\frac{(1+\ln x)x^x-1}{-1+x^{-1}} = \frac{0}{0},$$

$$\lim\frac{(1+\ln x)x^x-1}{-1+x^{-1}} = \lim\frac{(1+\ln x)^2x^x+x^{x-1}}{-x^{-2}} = -2.$$

13) $$\lim_{x=a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{0}{0} = \lim\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x(x+a)}}{2x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2a^2}}{2a\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

In diesem Beispiele werden $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ beide unendlich groß; es ist aber in § 65 ausdrücklich nachgewiesen worden, daß die angegebene Regel auch in diesem Falle noch richtig bleibt.

14) $$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \frac{0}{0} = \lim \frac{\sin x}{-\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x} = \frac{0}{0}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\sin x}{-\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x} = \frac{1}{-\sin^2 x + 2 \cos^2 x},$$

folglich wird

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$ (Vergl. Bemerkungen auf Seite 359.)

## § 67.

## Ausdrücke von der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 124.)

Werden die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ beide für $x$ gleich $a$ unendlich groß, so wird

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Um den Grenzwert zu ermitteln, dem sich in diesem Falle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nähert, setze man

(1.) $$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \text{also} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)},$$

(2.) $$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{also} \quad f(x) = \frac{1}{f_1(x)};$$

dann folgt aus $\lim\limits_{x=a} \varphi(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x=a} f(x) = \infty$

(3.) $$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0,$$

und man erhält

(4.) $$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{0}{0},$$

d. h. man hat diese Aufgabe auf die in § 65 behandelte Aufgabe zurückgeführt und damit bewiesen, daß sich $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ für $x = a$ einem bestimmten, endlichen (oder unendlich großen) Grenzwerte $A$ nähert, wenn sich $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ diesem Grenswerte nähert. Daraus ergibt sich nach der damals gefundenen Regel

$$A = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f'_1(x)}{\varphi'_1(x)}. \tag{5.}$$

Nun ist aber

$$f'_1(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}, \quad \varphi'_1(x) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2},$$

folglich wird

$$A = \lim \frac{f'(x)}{f(x)^2} \cdot \frac{\varphi(x)^2}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \lim \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2, \tag{6.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (5.)

$$A = A^2 . \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \tag{6a.}$$

Unter der Voraussetzung, daß $A$ von 0 verschieden ist, kann man beide Seiten dieser Gleichung durch $A^2$ dividieren und erhält dadurch

$$\frac{1}{A} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{7.}$$

oder

$$A = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot \tag{8.}$$

Es gilt hier also dieselbe Regel wie bei den Ausdrücken, welche an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, d. h. man findet den Wert von $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, indem man Zähler und Nenner einzeln differentiiert und in den Quotienten der Ableitungen $x$ gleich $a$ einsetzt.

Diese Regel bleibt auch dann noch richtig, wenn $A$ den Wert 0 hat. Denn wenn man in diesem Falle den Ausdruck

$$1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)} \tag{9.}$$

betrachtet, so erkennt man, daß er für $x$ gleich $a$ den von 0 verschiedenen Wert 1 hat. Dies ist nur dadurch möglich, daß auch der Zähler $f(x) + \varphi(x)$ für $x$ gleich $a$ unendlich groß wird. Der Ausdruck nimmt daher an der Grenze die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so daß man die eben ausgesprochene Regel anwenden darf. Dadurch findet man

$$\lim_{x=a} \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f'(x) + \varphi'(x)}{f'(x)}, \tag{10.}$$

oder

$$1 + \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1 + \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

folglich ist auch in diesem Falle

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{11.}$$

Werden $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ und $\lim\limits_{x=a} \varphi'(x)$ beide gleich 0, oder werden sie beide unendlich groß, so findet man durch nochmalige Anwendung derselben Regel

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \lim \frac{\varphi''(x)}{f''(x)} \tag{12.}$$

und kann so fortfahren, bis sich ein bestimmter Wert ergibt.

Auch hier darf die Größe $a$ unendlich groß werden, wie man durch die in § 65 ausgeführte Untersuchung zeigen kann.

## § 68.

## Übungs-Beispiele.

$$1) \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{\dfrac{5}{\cos^2(5x)}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim \frac{5\cos^2 x}{\cos^2(5x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{5\cos^2 x}{\cos^2(5x)} = \lim \frac{-10\cos x \sin x}{-10\cos(5x)\sin(5x)} = \lim \frac{\sin(2x)}{\sin(10x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{\sin(2x)}{\sin(10x)} = \lim \frac{2\cos(2x)}{10\cos(10x)} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}.$$

2) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{1}{e^x} = 0.$

3) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{2 \cdot 1}{e^x} = 0.$

4) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$

Zunächst möge vorausgesetzt werden, daß $n$ eine *positive ganze* Zahl ist. Dann wird

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

wenn $n > 1$ ist;

$$\lim \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}.$$

Dieser Ausdruck wird entweder gleich

$$\frac{n(n-1)}{\infty} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

je nachdem $n$ gleich 2 oder größer als 2 ist. Um die Aufgabe allgemein zu lösen, muß man Zähler und Nenner $n$ Mal differentiieren und erhält dadurch

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, wenn $n$ eine *positive gebrochene* Zahl ist; denn in diesem Falle liegt $n$ zwischen zwei ganzen Zahlen $k-1$ und $k$, so daß

$$k - 1 < n < k$$

wird, folglich ist

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{x^{k+n-k}}{e^x} = \lim \frac{x^k \cdot x^{n-k}}{e^x},$$

oder

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{x^k}{e^x} \cdot \frac{1}{x^{k-n}} = \lim \frac{x^k}{e^x} \cdot \lim \frac{1}{x^{k-n}}.$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$\lim \frac{x^k}{e^x} = 0$$

und, da $k - n$ positiv ist,

$$\lim \frac{1}{x^{k-n}} = 0,$$

folglich ist auch

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Der Sinn dieses Resultates ist der, daß für hinreichend große Werte von $x$ die Exponential-Funktion $e^x$ noch größer wird als jede beliebig hohe Potenz von $x$.

$$5) \lim_{x=\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim \frac{1}{nx^n} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

dabei ist nur vorausgesetzt, daß $n$ positiv ist, im übrigen darf $n$ beliebig klein sein. Der Sinn dieses Resultates ist dann der, daß $\ln x$ für hinreichend große Werte von $x$ zwar selbst beliebig groß wird, aber doch noch kleiner bleibt als jede beliebig niedrige Potenz von $x$.

Setzt man $n = \frac{1}{m}$, so nimmt für positive Werte von $m$ das soeben gefundene Resultat die Form an

$$\lim_{x=\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[m]{x}} = 0.$$

$$6) \lim_{x=0} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\ln[\operatorname{tg}(3x)]} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{\frac{3}{\sin(3x)\cos(3x)}}$$

$$= \lim \frac{\sin(3x)\cos(3x)}{3\sin x \cos x} = \lim \frac{\sin(6x)}{3\sin(2x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{\sin(6x)}{3\sin(2x)} = \lim \frac{6\cos(6x)}{6\cos(2x)} = \frac{6}{6} = 1.$$

7) $$\lim_{x=0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim \frac{-\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim \frac{-2\sin x \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

§ 69.

## Ausdrücke von der Form 0 . ∞.

Bei den Ausdrücken, welche an der Grenze die Form $0 . \infty$ haben, kann man die Bestimmung auf einen der beiden vorhergehenden Fälle zurückführen. Wird nämlich

(1.) $$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty,$$

so setze man wieder

(2.) $$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \text{also} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)},$$

(3.) $$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{also} \quad f(x) = \frac{1}{f_1(x)},$$

dann ist

(4.) $$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0.$$

Deshalb wird

(5.) $$\varphi(x) . f(x) = \frac{\varphi(x)}{f_1(x)}$$

ein Ausdruck, der für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; und

(6.) $$\varphi(x) . f(x) = \frac{f(x)}{\varphi_1(x)}$$

wird ein Ausdruck, der für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt. Daraus ergibt sich die Regel: *Man bringe den Ausdruck auf die Form* $\frac{0}{0}$ *oder auf die Form* $\frac{\infty}{\infty}$ *und behandle ihn, wie in* § 65, *bezw. in* § 67 *angegeben worden ist.*

## § 70.
## Übungs-Beispiele.

1) $$\lim_{x=0}(x\,.\,\mathrm{ctg}\,x) = \lim\frac{x}{\mathrm{tg}\,x} = \frac{0}{0} = \lim\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

2) $$\lim_{x=a}(x-a)[\ln(x-a)]^2 = 0\,.\,\infty,$$

$$\lim_{x=a}(x-a)[\ln(x-a)]^2 = \lim\frac{[\ln(x-a)]^2}{(x-a)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty},$$

$$\lim\frac{[\ln(x-a)]^2}{(x-a)^{-1}} = \lim\frac{2\ln(x-a)\frac{1}{x-a}}{-(x-a)^{-2}} = -2\lim\frac{\ln(x-a)}{(x-a)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty},$$

$$-2\lim\frac{\ln(x-a)}{(x-a)^{-1}} = -2\lim\frac{\frac{1}{x-a}}{-(x-a)^{-2}} = +2\lim(x-a) = 0.$$

3) $$\lim_{x=1}(x-1)\mathrm{tg}\left(\frac{x\pi}{2}\right) = 0\,.\,\infty = \lim\frac{x-1}{\mathrm{ctg}\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim\frac{x-1}{\mathrm{ctg}\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \lim\frac{1}{\frac{-\pi}{2\sin^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)}} = -\lim\frac{2\sin^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

Noch etwas einfacher hätte man diese Aufgabe in folgender Weise behandeln können. Es wird, weil $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ist,

$$\lim_{x=1}(x-1)\,\mathrm{tg}\left(\frac{x\pi}{2}\right) = \lim\frac{(x-1)\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \lim\frac{x-1}{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim\frac{x-1}{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = \lim\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}.$$

4) $$\lim_{x=\infty} 2^x\,\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2^x}\right) = \infty\,.\,0.$$

Die Lösung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn man

$$y = \frac{a}{2^x}$$

als Veränderliche einführt. Dadurch wird

$$2^x = \frac{a}{y} \quad \text{und} \quad \lim_{x=\infty} y = 0,$$

also

$$\lim_{x=\infty} 2^x \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2^x}\right) = \lim_{y=0} \frac{a}{y} \operatorname{tg} y = \lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \lim \frac{a}{\cos^2 y} = a.$$

5) $\lim\limits_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \infty . 0 = \lim\limits_{t=0} \dfrac{r^t - 1}{t} = \dfrac{0}{0}$, wo $t = \dfrac{1}{x}$
gesetzt ist,

$$\lim_{t=0} \frac{r^t - 1}{t} = \lim \frac{r^t \ln r}{1} = \ln r.$$

Von diesem Resultate kann man wieder eine Anwendung machen. Nach Gleichung (3.) in § 66 war

$$(1.)\quad R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{r^{n-1}}} \left(\frac{r-1}{\sqrt[n]{r} - 1}\right)^2 R_y - \frac{\sqrt[n]{r}}{n^2} \cdot \frac{r - n\sqrt[n]{r} + n - 1}{(\sqrt[n]{r} - 1)^2},$$

oder, wenn man $n$ mit $x$ vertauscht,

$$(1\text{a.})\quad R_y^{\left(\frac{x}{x}\right)} = \frac{\sqrt[x]{r}(r-1)^2 R_y}{r[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2} - \frac{\sqrt[x]{r}[r - 1 - x(\sqrt[x]{r} - 1)]}{[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2}.$$

Wird nun die Zahl $x$ immer größer und schließlich unendlich groß, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß

$$\lim_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \ln r, \ \lim \sqrt[x]{r} = \lim r^{\frac{1}{x}} = 1$$

wird,

$$(2.)\qquad R_y^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{\ln r}\right)^2 R_y - \frac{r - 1 - \ln r}{(\ln r)^2}.$$

## § 71.
## Ausdrücke von der Form $\infty - \infty$.

Wird

$$(1.)\qquad \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty,$$

so nimmt der Ausdruck

$$\varphi(x) - f(x)$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Den wahren Wert dieses Ausdruckes kann man wieder dadurch ermitteln, daß man

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \text{also} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}, \tag{2.}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{also} \quad f(x) = \frac{1}{f_1(x)} \tag{3.}$$

setzt. Dann wird

$$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0, \tag{4.}$$

und man erhält

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x) \cdot f_1(x)}. \tag{5.}$$

Dies ist aber ein Bruch, welcher für $\lim x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und nach der in § 65 angegebenen Regel bestimmt werden kann.

Mitunter gestaltet sich die Umformung noch etwas einfacher, wie es die folgenden Beispiele zeigen werden.

## § 72.

## Übungs-Beispiele.

1) $$\lim_{x=1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \lim \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

2) $$\lim_{x=1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - x^{-1}} = \lim \frac{\ln x}{\ln x + 1 - x^{-1}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = \lim \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

3) $$\lim_{x=0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

4) $$\lim_{x=0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \frac{0}{0},$$

oder, wenn man $2x$ gleich $y$ setzt,

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{y=0} \frac{4y - 4 \sin y}{2y(1 - \cos y) + y^2 \sin y}$$

$$= \lim \frac{4(1 - \cos y)}{2(1 - \cos y) + 4y \sin y + y^2 \cos y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{4 \sin y}{6 \sin y + 6y \cos y - y^2 \sin y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{4 \cos y}{12 \cos y - 8y \sin y - y^2 \cos y} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Häufig wird man bei Behandlung der Ausdrücke, welche für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, oder $\infty - \infty$ annehmen, am schnellsten zum Ziele kommen, indem man sie so umformt, daß sie für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten, dann Zähler und Nenner mit Hilfe der *Taylor*'schen Reihe nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickelt und Zähler und Nenner durch eine möglichst hohe Potenz von $x - a$ dividiert.

Für die letzte Aufgabe erhält man z. B.

$$x^2 - \sin^2 x = (x - \sin x)(x + \sin x)$$

$$= \left(x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + - \cdots\right)\left(x + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)$$

$$= x^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots\right)\left(2 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right),$$

$$x^2\sin^2 x = x^2\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)^2 = x^4\left(1 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2.$$

Dies gibt

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots\right)\left(2 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2},$$

also

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

## § 73.

## Ausdrücke von der Form $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$.

Nimmt der Ausdruck $[\varphi(x)]^{f(x)}$ für $x$ gleich $a$ eine der Formen

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

an, so setze man

(1.) $$[\varphi(x)]^{f(x)} = u,$$

dann wird

(2.) $$\ln u = f(x) \,.\, \ln \varphi(x),$$

also

(3.) $$u = e^{\ln u} = e^{f(x) \,.\, \ln\varphi(x)}.$$

Ist nun

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a} \varphi(x) = 0,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x) \,.\, \ln\varphi(x) = 0 \,.\, (-\infty);$$

ist

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x) \,.\, \ln\varphi(x) = 0 \,.\, \infty;$$

ist endlich

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} \varphi(x) = 1,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x) \,.\, \ln\varphi(x) = \infty \,.\, 0.$$

Um den Wert von $\lim u$ zu ermitteln, braucht man nur den Wert von $\lim(\ln u)$ zu berechnen, der zunächst die unbestimmte Form $0 \,.\, (\pm\infty)$ hat und sich deshalb nach den Angaben der vorhergehenden Paragraphen behandeln läßt.

## § 74.
## Übungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=0}(x^x) = 0^0$.

$$\lim\ln u = \lim\ln(x^x) = \lim(x\ln x) = \lim\frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim\frac{x}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(x^x) = e^0 = 1.$$

2) $\lim\limits_{x=0}(x^{\sin x}) = 0^0$.

$$\lim\ln u = \lim\ln(x^{\sin x}) = \lim(\sin x\ln x) = \lim\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= -\lim\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(x^{\sin x}) = e^0 = 1.$$

3) $\lim\limits_{x=0}\left(x^{\frac{3}{4+2\ln x}}\right) = 0^0$.

$$\lim\ln u = \lim\left(\frac{3}{4+2\ln x}\cdot\ln x\right) = \lim\frac{3\ln x}{4+2\ln x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$= \lim\frac{\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim\frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim u = \lim\left(x^{\frac{3}{4+2\ln x}}\right) = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}.$$

4) $\lim\limits_{x=\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \infty^0$.

$$\lim \ln u = \lim\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = \lim\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\frac{1}{x} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^0 = 1.$$

5) $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim n^{-\frac{2}{n}} = \infty^0$.

$$\lim\ln u = -2\lim\frac{\ln n}{n} = -2\lim\frac{1}{n} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = e^0 = 1.$$

Die Bestimmung dieses Ausdruckes war in § 52 (Seite 237) erforderlich.

6) $\lim\limits_{n=0}[(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}] = \infty^0$.

$$\lim\ln u = \lim[\sin x \ln(\operatorname{ctg} x)] = \lim\frac{\ln(\cos x) - \ln(\sin x)}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{-\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{-(\sin x)^{-2}\cos x} = \lim\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim[\operatorname{ctg} x)^{\sin x}] = e^0 = 1.$$

7) $\lim\limits_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$.

$$\lim\ln u = \lim\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

8) $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty.$

Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man $x$ mit $\frac{1}{x}$ vertauscht.

Man beachte, daß in § 11 (Formel Nr. 14 der Tabelle) die Zahl $e$ durch die Gleichung

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

erklärt worden ist.

9) $\lim\limits_{x=a}\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}\right] = 1^\infty.$

$$\lim \ln u = \lim \operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)\ln\left(\frac{2a-x}{a}\right) = \lim \frac{\ln(2a-x)-\ln a}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{2a-x}}{\frac{-\pi}{2a\sin^2\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}} = \frac{2a}{\pi}\lim \frac{\sin^2\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}{2a-x} = \frac{2}{\pi},$$

folglich ist

$$\lim u = \lim\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}\right] = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

**Bemerkungen.**

1. In vielen Fällen kann man Grenz-Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ dadurch ermitteln, daß man Zähler und Nenner des Bruches, bevor man den Grenzwert von $x$ einsetzt, durch einen passenden Faktor dividiert. So ist z. B. (vergl. Aufgabe 14 in § 66)

$$\frac{1-\cos x}{\cos x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)},$$

folglich wird

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x} = \lim\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

2. Zu demselben Resultate hätte man auch, wie schon oben hervorgehoben ist, durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von $x$ gelangen können. Nach den Formeln Nr. 95 und 96 der Tabelle ist nämlich

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+-\cdots=x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+-\cdots\right),$$

$$\sin^2 x=\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+-\cdots\right)^2=x^2\left(\frac{1}{1!}-\frac{x^2}{3!}+-\cdots\right)^2;$$

dies gibt

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+-\cdots}{\left(\frac{1}{1!}-\frac{x^2}{3!}+-\cdots\right)^2},$$

folglich ist

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x=0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

## § 75.

## Zusammentreffen unbestimmter Formen.

Die Grenz-Ausdrücke, welche eine unbestimmte Form haben, sind durch die behandelten Fälle noch nicht erschöpft; die angegebenen Regeln reichen aber zur Erledigung der noch übrigen Fälle aus, die im wesentlichen nur Kombinationen der bereits besprochenen Grenz-Ausdrücke sind, wie die noch folgenden Beispiele zeigen sollen.

1) $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}.$

Nun ist aber

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=\lim\frac{\cos x}{1}=1,$$

folglich ist

$$\lim u=\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$$

und

$$\lim \ln u = \lim \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{ctg} x - x^{-1}}{2x} = \lim \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-x \sin x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} = \lim \frac{-\sin x}{4 \sin x + 2x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-\cos x}{6 \cos x - 2x \sin x} = -\frac{1}{6};$$

dies gibt

$$\lim u = \lim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

2) $\lim\limits_{x=\infty} \left[\frac{\ln(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0.$

Hier ist

$$\lim \frac{\ln(ax)}{x} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim \left[\frac{\ln(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = 0^0,$$

$$\lim \ln u = \lim \frac{\ln[\ln(ax)] - \ln x}{x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{\ln(ax)} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim \frac{1 - \ln(ax)}{x \ln(ax)} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \ln(ax)} = \frac{-1}{x[1 + \ln(ax)]} = \frac{-1}{\infty} = 0;$$

dies gibt

$$\lim u = \lim \left[\frac{\ln(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

3) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \dfrac{1^{\infty} - e}{0}$.

Nun ist aber nach Aufgabe 7 in § 74

$$\lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

folglich ist

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{0}{0} = \lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right] : x^2}{1}$$

$$= \lim (1+x)^{\frac{1}{x}} \,.\, \lim \frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = e \cdot \frac{0}{0}$$

$$= e \,.\, \lim \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x}}{2x} = e \,.\, \lim \frac{-x}{2x(1+x)^2}$$

$$= e \,.\, \lim \frac{-1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2} \,.$$

---

# IX. Abschnitt.

# Differentiation der nicht entwickelten Funktionen.

## § 76.

## Differentiation einer Funktion von der Form $F(u, v)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 125 bis 129.)

Ist

(1.) $$z = F(u, v)$$

eine Funktion von *zwei* Veränderlichen $u$ und $v$, ist z. B.

$$z = 3u^3 - 7u^2v + 11uv^2 + 2v^3,$$

so wird sich $z$ im allgemeinen schon verändern, wenn sich nur $u$ verändert, während $v$ konstant bleibt, oder wenn sich nur $v$ verändert, während $u$ konstant bleibt. Man kann also, wenn $z$ in bezug auf $u$ eine *stetige* Funktion ist, in derselben Weise wie bei Funktionen von *einer* Veränderlichen den *Differenzen-Quotienten* bilden, dessen Grenzwert dann für verschwindend kleine Werte von $\Delta u$ den *Differential-Quotienten* oder die *Ableitung* liefert.

In diesem Falle bezeichnet man aber die Ableitung nicht mit $\frac{dz}{du}$, sondern mit $\frac{\partial z}{\partial u}$ und nennt sie „die *partielle Ableitung* von $z$ nach $u$“, weil man bei dieser Operation nur $u$ als Veränderliche betrachtet und dadurch die Veränderlichkeit der Funktion $z$ beschränkt. In dem vorliegenden Falle wird also

(2.) $$\frac{\partial z}{\partial u} = 9u^2 - 14uv + 11v^2.$$

Mit demselben Rechte kann man $z$ so differentiieren, daß man $v$ als die *einzige Veränderliche* und $u$ als eine *Konstante* betrachtet. In dem vorliegenden Beispiele wird daher

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -7u^2 + 22uv + 6v^2. \tag{3.}$$

Wie man also nach Formel Nr. 16 der Tabelle die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ von *einer* Veränderlichen durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4.}$$

erklären kann, so kann man die *partiellen Ableitungen* einer Funktion von *zwei* Veränderlichen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u}, \tag{5.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \tag{6.}$$

erklären.

Der Kürze wegen bezeichnet man die partielle Ableitung von $F(u, v)$ nach der ersten Veränderlichen, also $\frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$, mit $F_1(u, v)$ und die partielle Ableitung von $F(u, v)$ nach der zweiten Veränderlichen, also $\frac{\partial F(u, v)}{\partial v}$, mit $F_2(u, v)$. Dadurch erhalten die Gleichungen (5.) und (6.) die Form

$$F_1(u, v) = \lim_{\Delta u = 0} \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u}, \tag{5a.}$$

$$F_2(u, v) = \lim_{\Delta v = 0} \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v}. \tag{6a.}$$

**Beispiele.**

1) $z = uv;$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u.$

2) $z = \frac{u}{v};$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}.$

3) $z = \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v;$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{v}.$

4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{u} - \sqrt{v}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{-1}{2\sqrt{u}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{+1}{2\sqrt{v}(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2}.$$

Ausführlicher wird von den partiellen Ableitungen im dritten Teile dieses Bandes die Rede sein, der über die Funktionen von mehreren Veränderlichen handelt.

Hier soll nur der Fall in Betracht gezogen werden, wo $u$ und $v$ beide Funktionen von $x$ sind, wo also

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x) \tag{7.}$$

ist, so daß $z$ als eine Funktion der einzigen Veränderlichen $x$ angesehen werden kann.

Jetzt sind zwar die Veränderlichen $u$ und $v$ nicht mehr voneinander unabhängig, man könnte vielmehr aus den Gleichungen (7.) durch Elimination von $x$ eine Gleichung zwischen $u$ und $v$, nämlich

$$f(u, v) = 0 \tag{8.}$$

herleiten, man kann aber trotzdem die Ausdrücke $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ und $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ bilden, genau so, wie sie durch die Gleichungen (5.) und (6.) erklärt sind, und für das Folgende verwenden.

Vermehrt man $x$ um $\Delta x$, so gehen die Größen $u$, $v$, $z$ bezw. über in

$$\left\{\begin{array}{l} u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad v + \Delta v = \psi(x + \Delta x), \\ \qquad z + \Delta z = F(u + \Delta u, v + \Delta v); \end{array}\right. \tag{9.}$$

daraus folgt

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x), \\ \Delta z = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v) \\ \qquad = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v) \\ \qquad\qquad + F(u, v + \Delta v) - F(u, v), \end{array}\right. \tag{10.}$$

oder, wenn man $v + \Delta v$ mit $v_1$ bezeichnet,

$$\Delta z = F(u + \Delta u, v_1) - F(u, v_1) + F(u, v + \Delta v) - F(u, v), \tag{10a.}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u, v_1) - F(u, v_1)}{\Delta x} + \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta x},$$

oder

$$(11.)\quad \frac{\varDelta z}{\varDelta x} = \frac{F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1)}{\varDelta u} \cdot \frac{\varDelta u}{\varDelta x} + \frac{F(u, v + \varDelta v) - F(u, v)}{\varDelta v} \cdot \frac{\varDelta v}{\varDelta x}.$$

Geht man jetzt zur Grenze über, indem man $\varDelta x$ verschwindend klein werden läßt, so werden auch, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ *stetige* Funktionen sind, nach den Gleichungen (9.) die Größen $\varDelta u$ und $\varDelta v$ verschwindend klein, und man erhält

$$(12.)\quad \lim_{\varDelta x=0} \frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x=0} \frac{\varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x)}{\varDelta x} = \frac{du}{dx},$$

$$(13.)\quad \lim_{\varDelta x=0} \frac{\varDelta v}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x=0} \frac{\psi(x + \varDelta x) - \psi(x)}{\varDelta x} = \frac{dv}{dx},$$

und da $\lim v_1 = v$ ist,

$$(14.)\quad \lim_{\varDelta x=0} \frac{F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1)}{\varDelta u} = \lim_{v_1=v} \left[ \lim_{\varDelta u=0} \frac{F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1)}{\varDelta u} \right] = \lim_{v_1=v} F_1(u, v_1) = F_1(u, v) = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Hierbei hat man allerdings angenommen, daß $\varDelta u$ zuerst verschwindend klein wird und nachher erst $\varDelta v$, während $\varDelta u$ und $\varDelta v$ zugleich verschwindend klein werden. Man erhält aber auch dann noch dasselbe Resultat, wenn man zuerst $\varDelta v$ verschwinden läßt, weil

$$\lim_{\varDelta v=0} \frac{F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1)}{\varDelta u} = \frac{F(u + \varDelta u, v) - F(u, v)}{\varDelta u}$$

wird.*) Ferner wird

*) Noch strenger wird der Beweis durch Anwendung der Formel Nr. 87 der Tabelle, nämlich der Formel

$$f(a + h) - f(a) = h \,.\, f'(a + \Theta h)$$

geführt. Indem man $f(x)$ mit $F(u, v_1)$, also $f'(x)$ mit $F_1(u, v_1)$, $a$ mit $u$ und $h$ mit $\varDelta u$ vertauscht, ergibt sich hieraus

$$F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1) = \varDelta u \,.\, F_1(u + \Theta \,.\, \varDelta u, v_1),$$

oder

$$\lim_{\varDelta x=0} \frac{F(u + \varDelta u, v_1) - F(u, v_1)}{\varDelta u} = \lim_{\varDelta x=0} F_1(u + \Theta \,.\, \varDelta u, v_1) = F_1(u, v).$$

$$(15.)\quad \lim_{\Delta x=0} \frac{F(u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v=0} \frac{F(u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta v}$$
$$= F_2(u, v) = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (11.)

$$(16.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

oder auch, wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit $dx$ multipliziert,

$$(16\text{a.})\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

In Gleichung (16.) sind mehrere Formeln, die schon früher hergeleitet worden sind, als besondere Fälle enthalten.

**Beispiele.**

1) Es sei

$$(17.)\quad z = u \pm v,$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \pm 1,$$

folglich ist in Übereinstimmung mit den Formeln Nr. 20 und 21 der Tabelle

$$(18.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

2) Es sei

$$(19.)\quad z = uv,$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u,$$

folglich ist in Übereinstimmung mit Formel Nr. 29 der Tabelle

$$(20.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

3) Es sei

$$(21.)\quad z = \frac{u}{v},$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

folglich ist in Übereinstimmung mit Formel Nr. 34 der Tabelle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{22.}$$

4) Es sei

$$z = \ln(uv) = \ln u + \ln v, \tag{23.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{v},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\ln(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}. \tag{24.}$$

5) Es sei

$$z = \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v, \tag{25.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{v},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\ln\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}. \tag{26.}$$

6) Es sei

$$z = u^v, \tag{27.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^v . \ln u,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v . \ln u \frac{dv}{dx}. \tag{28.}$$

Von dieser letzten Formel mögen noch einige Anwendungen gegeben werden.

7) Es sei

$$z = (\sin x)^{\sqrt{x}},$$

also

$$u = \sin x, \quad v = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{x}(\sin x)^{\sqrt{x}-1}\cos x + (\sin x)^{\sqrt{x}}\ln(\sin x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sin x)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left[\frac{2x\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x)\right].$$

8) Es sei

$$z = \sqrt[x]{\operatorname{tg} x} = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}},$$

also

$$u = \operatorname{tg} x, \quad v = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}\ln(\operatorname{tg} x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt[x]{\operatorname{tg} x}}{x^2}\left[\frac{x}{\sin x\cos x} - \ln(\operatorname{tg} x)\right].$$

9)
$$z = (\ln x)^{\operatorname{tg} x},$$

also

$$u = \ln x, \quad v = \operatorname{tg} x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} x \,.\, (\ln x)^{-1+\operatorname{tg} x} \,.\, \frac{1}{x} + (\ln x)^{\operatorname{tg} x} \,.\, \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= (\ln x)^{\operatorname{tg} x}\left[\frac{\operatorname{tg} x}{x\ln x} + \frac{\ln(\ln x)}{\cos^2 x}\right].$$

## § 77.

## Herleitung der allgemeinen Regel für die Differentiation der nicht entwickelten Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 130 und 131.)

Es sei wieder

(1.) $$z = F(u, v),$$

und es seien $u$ und $v$ beide Funktionen von $x$, die eine Ableitung besitzen, dann wird nach Formel Nr. 126 der Tabelle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \tag{2.}$$

oder

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{2a.}$$

Hierbei ist $u$ eine beliebige Funktion von $x$, folglich darf $u$ auch *gleich* $x$ sein. Dann geht Gleichung (2.) über in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{3.}$$

Vertauscht man jetzt $v$ mit $y$, so wird

$$z = F(x, y), \tag{4.}$$

wobei $y$ noch eine Funktion von $x$, also

$$y = f(x) \tag{5.}$$

ist, und man erhält

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{6.}$$

oder

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{6a.}$$

oder

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx}. \tag{7.}$$

In diesem Falle ist also $z$ erstens *unmittelbar* abhängig von $x$ und außerdem auch noch *mittelbar* abhängig von $x$, indem $z$ auch eine Funktion von $y$, und $y$ wieder eine Funktion von $x$ ist.

Man nennt $\frac{dz}{dx}$ „die *vollständige* oder *totale* Ableitung von $z$ nach $x$“ im Gegensatze zur *partiellen* Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}$ und ersieht aus den Gleichungen (6.) und (6a.) auch, wie notwendig es ist, die *partielle* Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}$ von der *totalen* Ableitung $\frac{dz}{dx}$ dadurch zu unterscheiden, daß man das eine Mal ein (rundes) $\partial$, das andere Mal ein (gerades) $d$ schreibt.

**Beispiele.**

1) $z = x^{\ln x} = x^y$, wo $y = \ln x$.

Hier wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

folglich ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(x^{\ln x})}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \ln x \,.\, x^{\ln x - 1} + x^{\ln x - 1} \,.\, \ln x = 2x^{\ln x - 1} \,.\, \ln x.$$

2) $z = (\operatorname{tg} x)^x = y^x$, wo $y = \operatorname{tg} x$.

Hier wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

folglich ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d[(\operatorname{tg} x)^x]}{dx} = y^x \ln y + \frac{x}{\cos^2 x} y^{x-1} = (\operatorname{tg} x)^x \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{x(\operatorname{tg} x)^{x-1}}{\cos^2 x}.$$

Gleichung (6a.) oder (7.) kann man jetzt auch benutzen zur Differentiation von *nicht entwickelten* Funktionen. Ist z. B. $y$ als Funktion von $x$ durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{8.}$$

gegeben, so kann man sich vorstellen, diese Gleichung sei nach $y$ aufgelöst und dadurch auf die Form

$$y = f(x) \tag{9.}$$

gebracht. Man erhält daher nach Gleichung (7.)

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y) \frac{dy}{dx}. \tag{10.}$$

Setzt man den Wert von $y$, welchen die Gleichung (9.) liefert, in die Funktion $F(x, y)$ ein, so muß nach Voraussetzung

$$F(x, y) = 0$$

werden; deshalb wird erst recht

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 0,$$

so daß aus Gleichung (10.) folgt

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{11.}$$

oder

$$F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0. \tag{11a.}$$

Aus Gleichung (11.) findet man jetzt unmittelbar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}. \tag{12.}$$

## § 78.

## Übungs-Beispiele.

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Hier ist

$$F(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_1(x, y) = 2b^2x, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y) = 2a^2y,$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

2) $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Setzt man hierbei noch fest, daß $a_{21}$ gleich $a_{12}$ ist, so wird

$$F_1(x, y) = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}), \quad F_2(x, y) = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}.$$

3) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$,

$$F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad F_2(x, y) = 3y^2 - 3ax,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

4) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$,

$$F_1(x, y) = 2(x^2 + y^2) . 2x - 2a^2x,$$

$$F_2(x, y) = 2(x^2 + y^2) . 2y + 2a^2y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{2(x^2 + y^2) - a^2}{2(x^2 + y^2) + a^2}.$$

5) $F(x, y) = x^2y^3 + \cos x - \sin x \operatorname{tg} y - \sin y = 0,$

$$F_1(x, y) = 2xy^3 - \sin x - \cos x \operatorname{tg} y,$$

$$F_2(x, y) = 3x^2y^2 - \frac{\sin x}{\cos^2 y} - \cos y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + \sin x + \cos x \operatorname{tg} y}{3x^2y^2 - \frac{\sin x}{\cos^2 y} - \cos y}$$

$$= \frac{(-2xy^3 + \sin x)\cos^2 y + \cos x \sin y \cos y}{3x^2y^2\cos^2 y - \sin x - \cos^3 y}.$$

6) $F(x, y) = x^2y^4 + \sin y = 0,$

$$F_1(x, y) = 2xy^4, \quad F_2(x, y) = 4x^2y^3 + \cos y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}.$$

7) $F(x, y) = \sin x \sin y + \sin x \cos y - y = 0,$

$$F_1(x, y) = \cos x(\sin y + \cos y),$$

$$F_2(x, y) = \sin x(\cos y - \sin y) - 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x(\cos y + \sin y)}{\sin x(\cos y - \sin y) - 1}.$$

In ähnlicher Weise findet man die Lösungen der folgenden Aufgaben.

8) $e^y - e^x + xy = 0;$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{e^y + x}.$

9) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0;$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x^2 + e^{xy} - \cos(xy)]}.$

10) $x^2 + y^2 - a^2 = 0;$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}.$

## § 79.

## Ableitungen höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 132 und 133.)

Der Kürze wegen setzt man häufig

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r.$$

Aus der Gleichung

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} \tag{1.}$$

folgt dann, daß $p$ wieder eine Funktion von $x$ und $y$ ist, die man ebenso differentiieren kann wie in § 77 die Funktion $z$; man erhält daher, indem man in Formel Nr. 130 der Tabelle, nämlich in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dx},$$

$z$ mit $p$ vertauscht,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}, \tag{2.}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\,p. \tag{2a.}$$

In derselben Weise findet man aus $q$ auch die dritte Ableitung von $y$ nach $x$, denn es ist wieder nach Formel Nr. 130 der Tabelle, indem man $z$ mit $q$ vertauscht,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}, \tag{3.}$$

oder

$$\frac{d^3y}{dx^3} = r = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\,p. \tag{3a.}$$

Dies kann man beliebig fortsetzen. Man achte aber darauf, daß die Gleichungen (2.) und (3.) nur dann anwendbar sind, wenn $p$ und $q$ Funktionen von $x$ und $y$ sind.

## § 80.

## Übungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Ableitungen $p$ und $q$ bestimmen, wenn gegeben ist

$$x^2 - xy + y^2 = a^2. \tag{1.}$$

Hier ist

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - a^2, \tag{2.}$$

(3.) $$F_1(x, y) = 2x - y, \quad F_2(x, y) = -x + 2y,$$
also

(4.) $$p = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

Daraus folgt

(5.) $$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-3y}{(x - 2y)^2},$$

(6.) $$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{3x}{(x - 2y)^2},$$

$$q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p = \frac{-3y}{(x - 2y)^2} + \frac{3x}{(x - 2y)^2} \cdot \frac{2x - y}{x - 2y},$$

oder

(7.) $$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3}.$$

Berücksichtigt man noch Gleichung (1.), so erhält man

(8.) $$q = \frac{6a^2}{(x - 2y)^3}.$$

**Aufgabe 2.** Es ist gegeben

(9.) $$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - a^2 = 0,$$

man soll die Werte von $p$ und $q$ ermitteln.

**Auflösung 1.** Hier ist

(10.) $$F(x, y) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - a^2,$$

(11.) $$F_1(x, y) = 2(x - \xi), \quad F_2(x, y) = 2(y - \eta),$$

also

(12.) $$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{x - \xi}{y - \eta}.$$

Daraus folgt

(13.) $$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{y - \eta},$$

(14.) $$\frac{\partial p}{\partial y} = +\frac{x - \xi}{(y - \eta)^2},$$

(15.) $$q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p = -\frac{1}{y - \eta} - \frac{x - \xi}{(y - \eta)^2} \cdot \frac{x - \xi}{y - \eta},$$

oder

$$(16.)\quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(y-\eta)^3} = -\frac{a^2}{(y-\eta)^3}.$$

**Auflösung 2.** Dasselbe Resultat kann man hier auch durch Auflösung der Gleichung (9.) nach $y$ finden. Es wird nämlich

$$(17.)\qquad y = \eta \pm \sqrt{a^2 - (x-\xi)^2},$$

also

$$(18.)\quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{-(x-\xi)}{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2}} = \mp \frac{x-\xi}{\sqrt{a^2-(x-\xi)}},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2} - (x-\xi)\dfrac{-(x-\xi)}{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2}}}{a^2-(x-\xi)^2}$$

$$= \mp \frac{a^2}{[a^2-(x-\xi)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$(19.)\quad q = -\frac{a^2}{(y-\eta)^3},$$

ein Resultat, daß mit Gleichung (16.) übereinstimmt.

**Aufgabe 3.** Man soll $p$, $q$ und $r$ bestimmen, wenn gegeben ist

$$(20.)\qquad F(x, y) = y^2 - 2ax = 0.$$

**Auflösung.** Hier ist

$$F_1(x, y) = -2a, \quad F_2(x, y) = 2y,$$

$$(21.)\qquad p = \frac{a}{y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{a}{y^2},$$

$$(22.)\qquad q = -\frac{a^2}{y^3}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = +\frac{3a^2}{y^4},$$

$$(23.)\qquad r = \frac{3a^3}{y^5}.$$

**Aufgabe 4.** Man soll $p$, $q$ und $r$ bestimmen, wenn gegeben ist

$$(24.)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

**Auflösung.** Hier ist

$$p = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \tag{25.}$$

$$q = -\frac{b^2}{a^2y} + \frac{b^2x}{a^2y^2} \cdot \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)$$

$$= -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{a^2b^4}{a^4y^3},$$

oder

$$q = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = +\frac{3b^4}{a^2y^4}. \tag{26.}$$

Daraus folgt

$$r = \frac{3b^4}{a^2y^4} \cdot \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right) = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}. \tag{27.}$$

## § 81.

## Anwendung auf die Theorie der Maxima und Minima von nicht entwickelten Funktionen einer Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 134 und 134a.)

Es sei $y$ als Funktion von $x$ gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0; \tag{1.}$$

es sollen die Werte von $x$ bestimmt werden, für welche $y$ ein Maximum oder Minimum wird.

Beachtet man, daß man die Gleichung (1.) auf die Form

$$y = f(x) \tag{2.}$$

bringen kann, indem man sie sich nach $y$ aufgelöst denkt, so erkennt man, daß hier dieselben Regeln anwendbar sind, welche im VII. Abschnitt für die Aufsuchung der Maxima und Minima von *entwickelten* Funktionen gegeben worden sind; d. h. man bestimmt diejenigen Werte von $x$, für welche

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

verschwindet. Wird dann $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ für einen solchen Wert von $x$ *negativ*, so tritt ein *Maximum* ein; und wird $f''(x)$ für einen solchen Wert von $x$ *positiv*, so tritt ein *Minimum* ein.

Dabei ist es aber in dem vorliegenden Falle gar nicht nötig, die Gleichung (2.) wirklich zu bilden, denn nach Formel Nr. 131 der Tabelle wird

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = p. \tag{3.}$$

Schließt man den Fall aus, wo $F_2(x, y)$ unendlich groß wird, so kann $f'(x)$ nur dann verschwinden, wenn

$$F_1(x, y) = 0 \tag{4.}$$

ist. Aus den beiden Gleichungen (1.) und (4.) findet man dann die Werte von $x$ und $y$, für welche $y$ *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum wird.

Um zu entscheiden, ob für einen der gefundenen Werte von $x$ wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, bilde man nach Formel Nr. 132 der Tabelle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{5.}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1(x, y) = F_1, \quad F_2(x, y) = F_2,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = F_{11}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = F_{12}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = F_{21}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = F_{22}, \tag{6.}$$

so wird

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{F_2F_{11} - F_1F_{21}}{F_2^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{F_2F_{12} - F_1F_{22}}{F_2^2}, \tag{7.}$$

also

$$q = -\frac{F_2F_{11} - F_1F_{21}}{F_2^2} + \frac{F_2F_{12} - F_1F_{22}}{F_2^2}\cdot\frac{F_1}{F_2}. \tag{8.}$$

Dieser allgemein gültige Ausdruck vereinfacht sich in dem vorliegenden Falle, wo nur solche Werte von $x$ und $y$ in Betracht kommen, für welche

$$F_1(x, y) = F_1 = 0$$

ist. Deshalb wird hier

$$(8a.)\qquad q = f''(x) = -\frac{F_{11}}{F_2}\,.$$

Haben also $F_{11}$ und $F_2$ für das betrachtete Wertepaar $x$, $y$ *gleiches* Zeichen, so ist $f''(x)$ *negativ*, und $y$ wird ein *Maximum*. Haben dagegen $F_{11}$ und $F_2$ *entgegengesetztes* Zeichen, so ist $f''(x)$ *positiv*, und $y$ wird ein *Minimum*. Dies gibt die Regel:

*Sind $x$ und $y$ so bestimmt, daß*

$$F(x, y) = 0 \quad \textit{und} \quad F_1(x, y) = 0$$

*werden, so ist $y$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $F_2$ und $F_{11}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.*

Der Fall, wo die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig gelten, möge hier ausgeschlossen werden, da er in einem späteren Paragraphen (bei der Untersuchung der Doppelpunkte) ausführlich behandelt werden soll.

Indem man $x$ und $y$, und dementsprechend die Indizes 1 und 2 miteinander vertauscht, findet man hieraus auch die folgende Regel:

*Sind $x$ und $y$ so bestimmt, daß*

$$F(x, y) = 0 \quad \textit{und} \quad F_2(x, y) = 0$$

*werden, so ist $x$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $F_1$ und $F_{22}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.*

## § 82.

## Übungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll auf der Kurve (Fig. 73)

$$(1.)\qquad F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

einen Punkt $P$ bestimmen, der höher liegt als die benachbarten Punkte.

**Auflösung.** Hier ist

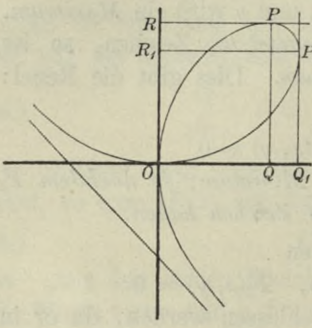
$$(2.)\qquad F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay = 0 \quad \text{für} \quad y = \frac{x^2}{a}\,.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1.) ein, so wird

$$(3.)\quad x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3x^3 = 0, \text{ oder } x^6 - 2a^3x^3 = x^3(x^3 - 2a^3) = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt für $x = 0$; dann ist aber, wie später gezeigt werden soll, der zugehörige Wert von $y$ ein *Minimum*. Ein *Maximum* kann also nur eintreten, wenn

Fig. 73.




$$x^3 - 2a^3 = 0, \tag{4.}$$

oder

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Es wird nämlich für diese Werte

$$\left\{\begin{aligned} F_2(x, y) &= 3(y^2 - ax) \\ &= 3a^2\sqrt[3]{2} > 0, \\ F_{11}(x, y) &= 6x = 6a\sqrt[3]{2} > 0; \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

da $F_2$ und $F_{11}$ *gleiches* Vorzeichen haben, so ist $y = a\sqrt[3]{4}$ ein *Maximum*.

Das Maximum von $x$, dem ein *äußerster* Punkt $P_1$ der Kurve entspricht, findet man in ähnlicher Weise, und zwar sind die Koordinaten dieses Punktes

$$x_1 = a\sqrt[3]{4}, \quad y_1 = a\sqrt[3]{2}. \tag{6.}$$

Die hier behandelte Kurve hat den Namen „*Folium Cartesii*".

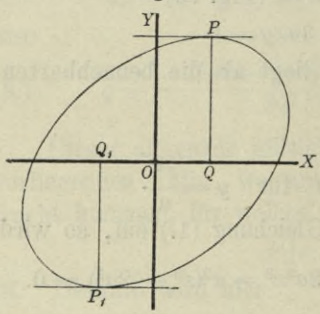
**Aufgabe 2.** Man soll den höchsten, bezw. den tiefsten Punkt der Ellipse (Fig. 74)

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \tag{7.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

Fig. 74.




$$F_1(x, y) = 2(a_{11}x + a_{12}y) = 0 \tag{8.}$$

für

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x. \tag{9.}$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$a_{11}(a_{11}a_{22} - a^2{}_{12})x^2 = -a^2{}_{12}a_{33}, \tag{10.}$$

oder

$$x = \pm\frac{a_{12}}{a_{11}}W, \tag{11.}$$

wobei
$$W = \sqrt{\frac{-a_{11}a_{33}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}}}$$
ist. Die Größe $W$ wird sicher reell, denn Gleichung (7.) stellt bekanntlich nur dann eine reelle Ellipse dar, wenn
$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{33} < 0$$
ist. Aus den Gleichungen (9.) und (11.) folgt dann
$$y = \mp W. \tag{12.}$$

Ferner ist
$$F_{11} = 2a_{11}, \quad F_2 = 2(a_{12}x + a_{22}y) = \mp \frac{2(a_{11}a_{22} - a^2_{12})W}{a_{11}}, \tag{13.}$$
also
$$F_{11}F_2 = \mp 4(a_{11}a_{22} - a^2_{12})W. \tag{14.}$$

Für das *obere* Vorzeichen wird daher $y$ ein *Minimum*, weil dann $F_{11}$ und $F_2$ *ungleiches* Vorzeichen haben; für das *untere* Vorzeichen dagegen wird $y$ ein *Maximum*, weil dann $F_{11}$ und $F_2$ *gleiches* Vorzeichen haben.

Dieses Resultat wird durch Figur 74 bestätigt, bei der vorausgesetzt ist, daß $a_{11}$ und $a_{12}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Hätten $a_{11}$ und $a_{12}$ gleiches Vorzeichen, so würden die vorstehenden Ausführungen unverändert bleiben, in der Figur würde aber der höchste Punkt $P$ *links* von der $Y$-Achse und der tiefste Punkt $P_1$ *rechts* von der $Y$-Achse liegen.

# X. Abschnitt.

# Vertauschung der Abhängigkeit der veränderlichen Größen.

## § 83.

## Bildung der Größen $p$, $q$ und $r$, wenn $x$ und $y$ Funktionen von $t$ sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 135.)

Ist $y$ eine (entwickelte oder nicht entwickelte) Funktion von $x$, so ist es häufig von Vorteil, $x$ als eine Funktion einer dritten Veränderlichen $t$ auszudrücken. Dann wird nämlich auch $y$ eine Funktion von $t$.

Beim Kreise ist z. B.

(1.) $$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzt man nun

(2.) $$x = a\cos t, \quad \text{so wird} \quad y = a\sin t.$$

Bei der Ellipse ist

(3.) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

setzt man hier wieder

(4.) $$x = a\cos t, \quad \text{so wird} \quad y = b\sin t,$$

In beiden Beispielen wird der Punkt $P$ mit den Koordinaten $x$ und $y$ die ganze Kurve durchlaufen, wenn die Veränderliche $t$ alle Werte von 0 bis $2\pi$ durchläuft.

In ähnlicher Weise kann man die Gleichung der Hyperbel

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

durch die Gleichungen

$$x = a\,\mathfrak{Cos}\,t, \quad y = b\,\mathfrak{Sin}\,t$$

ersetzen.

Sind die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{5.}$$

gegeben, so kann man umgekehrt durch Elimination von $t$ eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ herleiten, aus der man erkennt, daß man auch in diesem Falle $y$ als eine Funktion von $x$ betrachten darf.

Es seien z. B. die Gleichungen der *Zykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{6.}$$

gegeben (vergl. § 88, Aufgabe 8); dann wird

$$a\cos t = a - y, \quad a\sin t = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t} = \sqrt{2ay - y^2}, \tag{7.}$$

$$t = \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right), \tag{8.}$$

folglich ist

$$x = a\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}. \tag{9.}$$

Es ist nun die Frage, in welcher Weise man die Größen $p$, $q$ und $r$ bilden kann, wenn die Abhängigkeit zwischen $x$ und $y$ durch die Gleichungen (5.) gegeben ist.

Hier wird

$$\varDelta x = \varphi(t + \varDelta t) - \varphi(t), \quad \varDelta y = \psi(t + \varDelta t) - \psi(t), \tag{10.}$$

also

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\psi(t+\varDelta t) - \psi(t)}{\varphi(t+\varDelta t) - \varphi(t)} = \frac{\dfrac{\psi(t+\varDelta t) - \psi(t)}{\varDelta t}}{\dfrac{\varphi(t+\varDelta t) - \varphi(t)}{\varDelta t}},$$

oder, wenn $\varDelta t$ und deshalb auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ unendlich klein werden,

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \tag{11.}$$

Dieses Resultat hätte man auch aus Formel Nr. 36 der Tabelle finden können, nach welcher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

wird, wenn $y$ eine Funktion von $u$, und $u$ eine Funktion von $x$ ist. Man braucht für den vorliegenden Fall nur $u$ mit $t$ zu vertauschen und erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

In derselben Weise kann man jetzt auch

$$q = \frac{dp}{dx}$$

finden, denn es ist, wenn man in Gleichung (11.) $y$ mit $p$ vertauscht,

$$(12.)\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx}.$$

Im allgemeinen wird diese Formel für die Bildung von $q$ am meisten geeignet sein; man kann aber auch $q$ durch die Ableitungen von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ausdrücken, denn es ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2},\quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t),$$

folglich wird

$$(12\text{a.})\qquad q = \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

Diesen Ausdruck schreibt man noch bequemer in der Form

$$(12\text{b.})\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

wobei man sich aber bewußt bleiben muß, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung $x$ und $y$ als Funktionen von $t$ zu betrachten sind, daß also

$$dx = \varphi'(t)dt,\quad d^2x = \varphi''(t)dt^2,$$
$$dy = \psi'(t)dt,\quad d^2y = \psi''(t)dt^2$$

ist.

Dieses Verfahren kann man noch fortsetzen, um die höheren Ableitungen von $y$ nach $x$ zu ermitteln. So ist z. B.

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dq}{dx} = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dq}{dt}\,\frac{dt}{dx}. \tag{13.}$$

Usw.

## § 84.

## Übungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** Man soll die Größen $p$, $q$ und $r$ bilden, wenn gegeben ist

$$x = a\,\mathfrak{Cos}\,t, \quad y = b\,\mathfrak{Sin}\,t. \tag{1.}$$

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (1.) folgt

$$\begin{cases} dx = a\,\mathfrak{Sin}\,t\,.\,dt, & dy = b\,\mathfrak{Cos}\,t\,.\,dt, \\ d^2x = a\,\mathfrak{Cos}\,t\,.\,dt^2, & d^2y = b\,\mathfrak{Sin}\,t\,.\,dt^2; \end{cases} \tag{2.}$$

deshalb wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,\mathfrak{Ctg}\,t; \tag{3.}$$

$$q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{ab(\mathfrak{Sin}^2t - \mathfrak{Cos}^2t)}{a^3\,\mathfrak{Sin}^3t} = -\frac{b}{a^2\,\mathfrak{Sin}^3t}, \tag{4.}$$

weil

$$\mathfrak{Cos}^2t - \mathfrak{Sin}^2t = 1$$

ist. Einfacher findet man dieses Resultat aus der Gleichung

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\frac{b}{a\,\mathfrak{Sin}^2t}}{a\,\mathfrak{Sin}\,t} = -\frac{b}{a^2\,\mathfrak{Sin}^3t}. \tag{4 a.}$$

Ferner wird

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = +\frac{3b\,\mathfrak{Cos}\,t}{a^2\,\mathfrak{Sin}^4t}\cdot\frac{1}{a\,\mathfrak{Sin}\,t} = \frac{3b\,\mathfrak{Cos}\,t}{a^3\,\mathfrak{Sin}^5t}. \tag{5.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Größen $p$ und $q$ bilden, wenn gegeben ist

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \tag{6.}$$

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (6.) folgt

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t\,dt, \tag{7.}$$

$$d^2x = a\sin t\,dt^2, \qquad d^2y = a\cos t\,dt^2; \tag{8.}$$

deshalb wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \tag{9.}$$

oder

$$p = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{9a.}$$

Ferner ist

$$q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{a^2(\cos t - 1)dt^3}{a^3(1 - \cos t)^3 dt^3},$$

oder

$$q = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{10.}$$

Dieses Resultat hätte man auch durch Differentiation von Gleichung (9a.) finden können. Es ist nämlich

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

und nach Gleichung (7.)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a(1 - \cos t)} = \frac{1}{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

folglich ist

$$q = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Größen $p$ und $q$ bilden, wenn gegeben ist

$$x = \operatorname{ctg} t, \quad y = \sin^3 t. \tag{11.}$$

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (11.) folgt

(12.) $$dx = -\frac{dt}{\sin^2 t}, \quad dy = 3\sin^2 t \cos t dt,$$

also

(13.) $$p = \frac{dy}{dx} = -3\sin^4 t \cos t.$$

Ferner ist

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx}$$
$$= (-12\sin^3 t\cos^2 t + 3\sin^5 t)\,(-\sin^2 t),$$

oder

(14.) $$q = 3\sin^5 t(4\cos^2 t - \sin^2 t) = 3\sin^5 t(4 - 5\sin^2 t).$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Größen $p$ und $q$ bilden, wenn gegeben ist

(15.) $$x = a[m\cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)].$$

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (15.) folgt

(16.) $$dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt, \quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt,$$

oder, wenn man

(17.) $$m - 1 = n, \quad m + 1 = l$$

setzt,

(16a.) $$\begin{cases} dx = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \\ dy = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \end{cases}$$

also

(18.) $$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right).$$

Ferner ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{l}{2\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad \frac{dx}{dt} = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right).$$

(19.) $$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{l}{4ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Größen $p$ und $q$ bilden, wenn gegeben ist

$$x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t). \tag{20.}$$

**Auflösung.** Hier wird

$$dx = at\cos t\,dt,\quad dy = at\sin t\,dt, \tag{21.}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \tag{22.}$$

$$dp = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{at\cos^3 t}. \tag{23.}$$

**Aufgabe 6.** In der Gleichung

$$x\frac{dy}{dx} - ay = 0 \tag{24.}$$

ist $x$ die unabhängige Veränderliche. Im Verlaufe einer analytischen Untersuchung wird es notwendig, durch die Gleichung

$$x = e^t \tag{25.}$$

die Größe $t$ als unabhängige Veränderliche einzuführen. Welche Form nimmt dadurch die Gleichung (24.) an?

**Auflösung.** Zunächst ist

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}, \tag{26.}$$

so daß Gleichung (24.) übergeht in

$$e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} - ay = 0,$$

oder

$$\frac{dy}{dt} - ay = 0. \tag{27.}$$

**Aufgabe 7.** In der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \tag{28.}$$

wird die Größe $t$ als unabhängige Veränderliche eingeführt durch die Gleichung

$$x = \operatorname{arctg} t. \tag{29.}$$

Welche Form nimmt dadurch die Gleichung (28.) an?

**Auflösung.** Aus Gleichung (29.) folgt

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2, \tag{30.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \frac{dt}{dx} = 1 + t^2, \tag{31.}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(1+t^2), \tag{32.}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + \frac{dy}{dt}\cdot 2t\right](1+t^2). \tag{33.}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (28.) ein, so erhält man

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + \frac{dy}{dt}\cdot 2t\right](1+t^2) + \operatorname{arctg} t \cdot y\frac{dy}{dt}(1+t^2) + (1+t^2) = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch $1+t^2$ dividiert,

$$(1+t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + (2t + y\operatorname{arctg} t)\frac{dy}{dt} + 1 = 0. \tag{34.}$$

## § 85.

## Behandlung des Falles, in welchem $y$ die unabhängige Veränderliche wird.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 136 und 137.)

Ein besonderer Fall in der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen $x$ mit einer anderen $t$ ist der, wo $t$ gleich $y$ wird, d. h. wo die Größe $y$ zur unabhängigen Veränderlichen gemacht wird.

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn man bei Kurven die Ordinate $y$ als unabhängige Veränderliche ansehen will.

Nach Formel Nr. 135 der Tabelle ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{1.}$$

Diese Gleichungen bleiben auch noch richtig, wenn man

$$t = y \tag{2.}$$

setzt; dann wird aber

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dy^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{3.}$$

Die Gleichungen (1.) gehen daher über in

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ und } q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}. \tag{4.}$$

Dem entsprechend findet man durch Vertauschung von $x$ mit $y$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = -\frac{q}{p^3}. \tag{5.}$$

Aus dem Werte von $q$ kann man durch Differentiation auch den Wert von $r$ finden. Es ist nämlich

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dy}\,\frac{dy}{dx}, \tag{6.}$$

$$\frac{dq}{dy} = -\frac{\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^4}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

folglich wird

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}, \tag{7.}$$

und dem entsprechend

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{pr - 3q^2}{p^5}. \tag{8.}$$

In dieser Weise kann man mit der Bildung der höheren Ableitungen fortfahren.

## § 86.

## Übungs-Beispiele.

**Aufgabe 1.** In der Gleichung

$$(1.)\qquad (x+a)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-1=0$$

ist $x$ die unabhängige Veränderliche; man soll die Gleichung so umformen, daß $y$ die unabhängige Veränderliche wird.

**Auflösung.** Setzt man in die Gleichung (1.) die Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach den Gleichungen (4.) des vorhergehenden Paragraphen ein, so erhält man

$$(x+a)\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\cdot\frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+x\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}-1=0,$$

oder

$$(2.)\qquad -(x+a)\frac{d^2x}{dy^2}+x\frac{dx}{dy}-\left(\frac{dx}{dy}\right)^4=0.$$

**Aufgabe 2.** In der Gleichung

$$(3.)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y=0$$

ist $x$ die unabhängige Veränderliche; man soll die Gleichung so umformen, daß $y$ die unabhängige Veränderliche wird.

**Auflösung.** Setzt man wieder für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ihre Werte ein, so erhält man

$$-x\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+\frac{2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}-y=0,$$

oder

$$(4.)\qquad x\frac{d^2x}{dy^2}-2\frac{dx}{dy}+y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die ersten drei Ableitungen von $x = \arcsin y$ bilden.

**Auflösung.** Hier ist

$$y = \sin x,\quad p = \cos x,\quad q = -\sin x,\quad r = -\cos x, \tag{5.}$$

folglich wird nach den Formeln Nr. 137 der Tabelle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x},\quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x},\quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^5 x}. \tag{6.}$$

## XI. Abschnitt.

# Untersuchung von Kurven, die auf ein rechtwinkliges Koordinaten-System bezogen sind.

### § 87.

### Tangenten und Normalen.

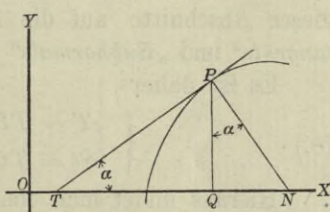
(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 138 bis 144.)

Es sei

(1.) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer Kurve (Fig. 75), auf welcher der beliebige Punkt $P$ mit den Koordinaten $x$ und $y$ liegen möge.

Fig. 75.




Legt man in diesem Punkte die Tangente $TP$ an die Kurve und bezeichnet den Winkel, welchen diese Tangente mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, wieder mit $\alpha$, so ist nach Formel Nr. 17 der Tabelle

(2.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Ist nun die Gleichung der Tangente

(3.) $$y' = mx' + \mu,$$

so ist bekanntlich

(4.) $$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die laufenden Koordinaten sind mit $x'$ und $y'$ bezeichnet, weil $x$ und $y$ die Koordinaten des Berührungspunktes $P$ sein sollen. Da die Tangente durch den Punkt $P$ gehen muß, so ist auch

$$y = mx + \mu,$$

folglich wird

$$y' - y = m(x' - x). \tag{5.}$$

Außerdem ist, wie schon in Gleichung (2.) und (4.) gezeigt wurde,

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{dx}{dy};$$

deshalb geht Gleichung (5.) über in

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x). \tag{6.}$$

Die gerade Linie $PN$, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, heißt „*Normale*". Sie bildet mit der $X$-Achse den Winkel $90^0 + \alpha$. Deshalb ist die Gleichung der Normalen

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x). \tag{7.}$$

Die Abschnitte der Tangente und der Normalen, welche zwischen der Abszissen-Achse und dem Berührungspunkte $P$ liegen, also die Strecken $TP$ und $PN$, heißen auch kurzweg „*Tangente*", beziehungsweise „*Normale*". Man bezeichnet sie durch $T$ und $N$. Die rechtwinkligen Projektionen $TQ$ und $QN$ dieser Abschnitte auf die Abszissen-Achse nennt man „*Subtangente*" und „*Subnormale*" und bezeichnet sie durch $St$ und $Sn$.

Es ist daher

$$\left\{ \begin{array}{ll} T = TP, & N = PN, \\ St = TQ, & Sn = QN. \end{array} \right. \tag{8.}$$

Hieraus findet man ohne weiteres

$$Sn = y \operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx}, \tag{9.}$$

$$St = y \operatorname{ctg}\alpha = y\frac{dx}{dy}, \tag{10.}$$

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{11.}$$

$$T = \frac{y}{\sin\alpha} = y\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{12.}$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man noch etwas einfacher schreiben. Haben die benachbarten Kurvenpunkte $P$ und $P_1$ (vergl. Fig. 19 auf Seite 85) bezw. die Koordinaten $x$, $y$ und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RP_1}^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2,$$

oder, wenn die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe rücken, und wenn man die unendlich kleine Sehne $PP_1$ durch $ds$ bezeichnet,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{13.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2. \tag{13a.}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (11.) und (12.) ein, so erhält man

$$N = y\frac{ds}{dx}, \quad T = y\frac{ds}{dy} = N\frac{dx}{dy}. \tag{14.}$$

## § 88.

## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Die Gleichung einer Parabel (Fig. 76) sei

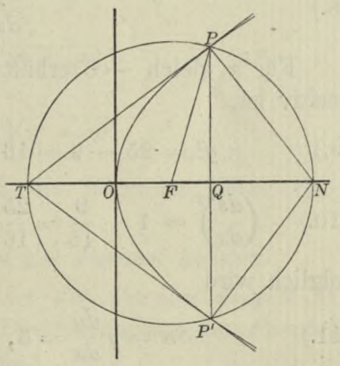
$$y^2 = 9x; \tag{1.}$$

man soll für den Punkt $P$, der die Abszisse

$$x = 4$$

hat, die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente berechnen.

Fig. 76.




**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$2y\,dy = 9\,dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2y}. \tag{2.}$$

Für $x$ gleich 4 erhält man also, wenn man nur den oberen Teil der Kurve berücksichtigt,

$$(3.)\qquad y^2 = 36, \quad y = 6, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4},$$

$$(4.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{5}{4}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{5}{3},$$

folglich wird

$$(5.)\qquad Sn = QN = y\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}, \qquad St = TQ = y\frac{dx}{dy} = 8,$$

$$(6.)\qquad N = PN = y\frac{ds}{dx} = \frac{15}{2}, \qquad T = TP = y\frac{ds}{dy} = 10.$$

**Aufgabe 2.** Ein Kreis (Fig. 77) ist durch die Gleichung

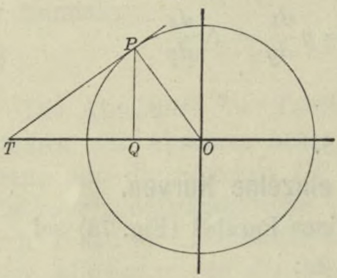
$$(7.)\qquad x^2 + y^2 = 25$$

gegeben; man soll für den Punkt $P$ mit der Abszisse

$$x = -3$$

die Größen $Sn$, $St$, $N$ und $T$ berechnen.

Fig. 77.




**Auflösung.** Aus Gleichung (7.) folgt

$$2xdx + 2ydy = 0,$$

oder

$$(8.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Für $x$ gleich $-3$ erhält man also, da die Ordinate von $P$ positiv ist,

$$(9.)\qquad y^2 = 25 - 9 = 16, \quad y = 4, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4},$$

$$(10.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{5}{4}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{5}{3};$$

folglich wird

$$(11.)\qquad Sn = y\frac{dy}{dx} = 3, \qquad St = y\frac{dx}{dy} = \frac{16}{3},$$

$$(12.)\qquad N = y\frac{ds}{dx} = 5, \qquad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{20}{3}.$$

Die Normale muß, wie auch aus $Sn = QN = 3$ folgt, durch den Mittelpunkt $O$ des Kreises hindurchgehen, d. h. der Punkt $N$ fällt mit $O$ zusammen.

**Aufgabe 3.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Parabel*

$$y^2 = 2ax \tag{13.}$$

berechnen. (Vergl. Fig. 76.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (13.) folgt,

$$2ydy = 2adx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \tag{14.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{y^2} = \frac{a^2 + y^2}{y^2},$$

also

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{a^2 + y^2}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + y^2}. \tag{15.}$$

Dies gibt

$$\left\{\begin{aligned} Sn &= QN = y\frac{dy}{dx} = a, \\ St &= TQ = y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

$$\left\{\begin{aligned} N &= PN = y\frac{ds}{dx} = \sqrt{a^2 + y^2}, \\ T &= TP = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}. \end{aligned}\right. \tag{17.}$$

In den Gleichungen (16.) sind die folgenden Sätze ausgesprochen:

**Satz 1.** *Die Subnormale ist bei der Parabel konstant.*

**Satz 2.** *Die Subtangente ist bei der Parabel doppelt so groß wie die zugehörige Abszisse. Die Subtangente der Parabel wird daher durch den Scheitel halbiert.*

Diese beiden Sätze führen zu einer sehr einfachen Konstruktion beliebig vieler Punkte der Parabel. Beschreibt man nämlich um den Brennpunkt $F$ (vergl. Fig. 76) einen Kreis mit dem beliebigen Halbmesser $TF = FN = x + \frac{a}{2}$ und macht $OQ = TO$, so schneidet die Gerade, welche durch $Q$ parallel zur $Y$-Achse gezogen wird, den Kreis in zwei Punkten $P$ und $P'$ der Parabel. Dabei sind $TP$ und $TP'$ die Tangenten und $PN$ und $P'N$ die Normalen in den Punkten $P$ und $P'$.

Auch die Gleichungen von Tangente und Normale lassen sich jetzt ohne weiteres angeben. Allgemein ist die Gleichung der Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

also hier

$$y' - y = \frac{a}{y}(x' - x),$$

oder

(18.) $$yy' - y^2 = a(x' - x).$$

Berücksichtigt man noch, daß nach Gleichung (13.) $y^2$ gleich $2ax$ ist, so geht Gleichung (18.) über in

(18a.) $$yy' = a(x' + x).$$

Die Gleichung der Normale ist allgemein

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x),$$

also hier

$$y' - y = -\frac{y}{a}(x' - x),$$

oder

(19.) $$y(x' - x) + a(y' - y) = 0.$$

**Aufgabe 4.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Ellipse*

(20.) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

berechnen. (Vergl. Fig. 78.)

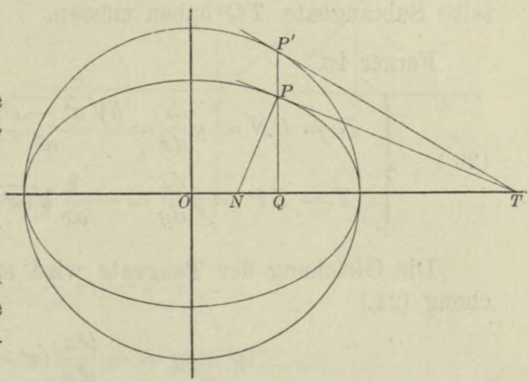
**Auflösung.** Aus Gleichung (20.) folgt durch Differentiation

$$2b^2xdx + 2a^2ydy = 0,$$

oder

$$(21.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Fig. 78.




Löst man noch die Gleichung (20.) nach $y$ auf, so erhält man

$$(22.)\quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich wird, wenn man nur das obere Vorzeichen berücksichtigt,

$$(23.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

wobei die Exzentrizität der Ellipse, nämlich die Größe $\sqrt{a^2 - b^2}$ mit $e$ bezeichnet worden ist. Dies gibt

$$(24.)\quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{bx},$$

folglich ist

$$(25.)\quad Sn = QN = y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2},\quad St = TQ = y\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

In der letzten Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

*Bei allen Ellipsen mit derselben großen Achse* $2a$ *gehören zu gleichen Abszissen gleiche Subtangenten.*

Diesen Satz kann man anwenden, um in dem Punkte $P$ einer Ellipse, auch wenn dieselbe *nicht* gezeichnet vorliegt, wenn nur die große Achse bekannt ist, die Tangente zu konstruieren.

**Auflösung.** Man beschreibe über der großen Achse als Durchmesser einen Kreis, welcher von der Ordinate des Punktes $P$ in einem Punkte $P'$ getroffen wird. Legt man nun im Punkte

$P'$ an den Kreis eine Tangente, welche die große Achse im Punkte $T$ schneiden möge, dann ist $TP$ die gesuchte Tangente, weil der Kreis und die Ellipse für die Punkte $P'$ und $P$ dieselbe Subtangente $TQ$ haben müssen.

Ferner ist

$$(26.)\quad \begin{cases} N = PN = y\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{b\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a^2}, \\[2ex] T = TP = y\dfrac{ds}{dy} = -\dfrac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente wird mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

$$y' - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(x' - x),$$

oder

$$a^2yy' - a^2y^2 + b^2xx' - b^2x^2 = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (20.)

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

daher erhält man durch Addition der beiden letzten Gleichungen

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2,$$

oder

$$(27.)\quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Normalen wird

$$y' - y = \frac{a^2y}{b^2x}(x' - x),$$

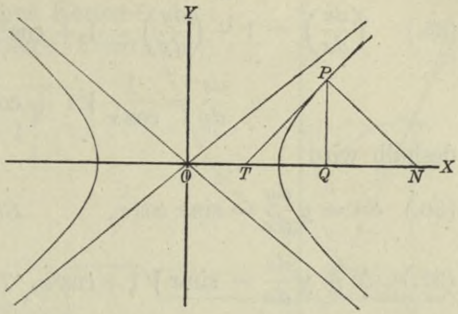
oder

$$b^2xy' - b^2xy - a^2yx' + a^2xy = 0,$$

oder

$$(28.)\quad a^2yx' - b^2xy' - e^2xy = 0.$$

Fig. 79.




In ähnlicher Weise findet man für die *Hyperbel* (Fig. 79)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(29.)\quad Sn = QN = \frac{b^2x}{a^2},$$

$$St = TQ = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$(30.)\quad \begin{cases} N = PN = \dfrac{b}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4}, \\[2ex] T = TP = \dfrac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente ist bei der Hyperbel

$$(31.)\qquad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

und die Gleichung der Normalen

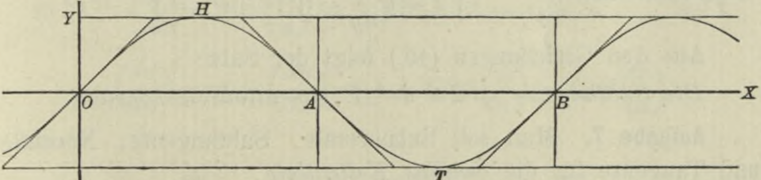
$$(32.)\qquad a^2yx' + b^2xy' - e^2xy = 0.$$

**Aufgabe 5.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Sinuslinie*

$$(33.)\qquad y = \sin x$$

berechnen. (Vergl. Fig. 80.)

Fig. 80.




**Auflösung.** Aus Gleichung (33.) folgt

$$(34.)\qquad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Dies gibt

$$(35.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \cos^2 x,\quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \cos^2 x},$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\cos x}\sqrt{1 + \cos^2 x};$$

deshalb wird

$$(36.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x,\qquad St = y\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} x,$$

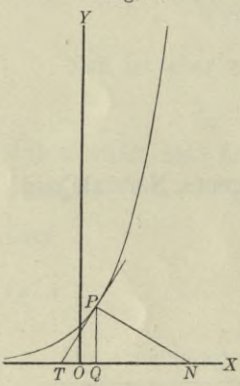
$$(37.)\quad N = y\frac{ds}{dx} = \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x},\quad T = y\frac{ds}{dy} = \operatorname{tg} x\sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

**Aufgabe 6.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Exponentiallinie*

$$(38.)\qquad y = e^x$$

berechnen. (Vergl. Fig. 81.)

Fig. 81.




**Auflösung.** Aus Gleichung (38.) folgt

$$(39.)\quad \frac{dy}{dx} = e^x = y,\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + e^{2x}} = \sqrt{1 + y^2},$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{e^x}\sqrt{1 + e^{2x}} = \frac{1}{y}\sqrt{1 + y^2};$$

dies gibt

$$(40.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = e^{2x} = y^2,\quad St = y\frac{dx}{dy} = 1,$$

$$(41.)\quad \begin{cases} N = y\dfrac{ds}{dx} = e^x\sqrt{1 + e^{2x}} = y\sqrt{1 + y^2}, \\ T = y\dfrac{ds}{dy} = \sqrt{1 + e^{2x}} = \sqrt{1 + y^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (40.) folgt der Satz:

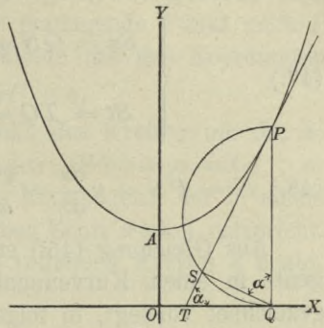
*Die Subtangente ist bei der Exponentiallinie konstant.*

**Aufgabe 7.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *gemeine Kettenlinie*

$$(42.)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad \text{oder}\quad y = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)$$

berechnen. (Vergl. Fig. 82.)

Fig. 82.




$OA = a.$

**Auflösung.** Man kann zunächst die Gleichung der gemeinen Kettenlinie noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich

$$y^2 - a^2 = a^2\left[\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right]$$
$$= a^2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

also

$$(43.)\quad \pm\sqrt{y^2 - a^2} = a\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Durch Addition der Gleichungen (42.) und (43.) erhält man

$$y \pm \sqrt{y^2 - a^2} = a\left[\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = ae^{\frac{x}{a}},$$

oder

$$(44.)\qquad x = a\ln\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right).$$

Hierbei gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $x$ positiv oder negativ ist.

Der Kürze wegen möge in dem Folgenden vorausgesetzt werden, daß $x$ positiv ist, dann findet man aus Gleichung (42.) durch Differentiation

$$(45.)\qquad \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2} = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x}{a}\right) = \mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

also

$$(46.)\qquad \frac{ds}{dx} = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{y}{a},\quad \frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Dies gibt

$$(47.)\quad \begin{cases} Sn = QN = y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \\[2ex] St = TQ = y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{ay}{\sqrt{y^2 - a^2}}, \end{cases}$$

$$(48.)\quad N = PN = y\frac{ds}{dx} = \frac{y^2}{a}, \quad T = TP = y\frac{ds}{dy} = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Aus Gleichung (45.) ergibt sich die Konstruktion der Tangente in einem Kurvenpunkte $P$, auch wenn die Kurve nicht gezeichnet vorliegt, in folgender Weise.

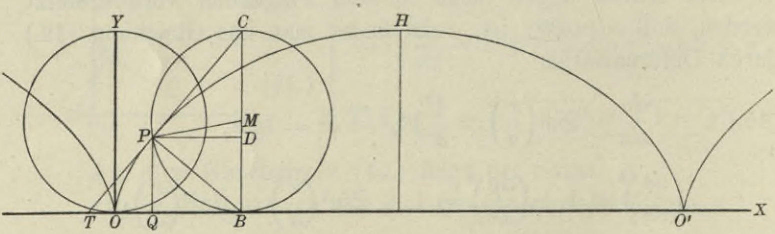
Man beschreibe über $QP$ als Durchmesser einen Kreis (Fig. 82) und trage von $Q$ aus die Sehne $QS$ gleich $a$ ab, dann ist die Gerade $PS$, welche die $X$-Achse im Punkte $T$ schneiden möge, die Tangente im Punkte $P$, denn es wird

$$\operatorname{tg} QTP = \operatorname{tg} SQP = \frac{SP}{SQ} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} = \operatorname{tg}\alpha.$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Gleichungen der gemeinen *Zykloide* aufstellen. (Vergl. Fig. 83.)

**Auflösung.** Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt der Peripherie dieses Kreises eine gemeine Zykloide.

Fig. 83.




Um die Gleichungen dieser Kurve zu bestimmen, mache man die Gerade $OX$ (Fig. 83), auf welcher der Kreis rollt, zur $X$-Achse und lege die $Y$-Achse durch denjenigen Punkt $O$, in welchen der die Zykloide erzeugende Punkt fällt, wenn der rollende Kreis in diesem Punkte die $X$-Achse berührt.

Rollt der Kreis, von dieser Anfangslage ausgehend, fort, bis sein Mittelpunkt nach $M$ und der erzeugende Punkt nach $P$ gelangt, so ist $P$ ein Punkt der Zykloide mit den Koordinaten

$$OQ = x \quad \text{und} \quad QP = y. \tag{49.}$$

Ist ferner $B$ der Berührungspunkt des Kreises um $M$, so nennt man den Zentriwinkel $PMB$ den „*Wälzungswinkel*"; er wird gemessen durch die Länge $t$ des Kreisbogens, der in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 demselben Zentriwinkel entspricht. Wenn man also den Halbmesser des rollenden Kreises $a$ nennt, so ist der Bogen

$$\widehat{PB} = at. \tag{50.}$$

Dieser Bogen muß aber der Strecke $OB$ gleich sein, auf welcher der Kreis fortgerollt ist, um aus der Anfangslage in die neue Lage zu kommen. Es ist also auch

$$OB = at; \tag{51.}$$

ferner ist

$$QB = PD = a\sin t,$$

und deshalb

$$x = OQ = OB - QB = a(t - \sin t). \tag{52.}$$

Da außerdem

$$BM = a \quad \text{und} \quad DM = a\cos t$$

ist, so wird

$$y = QP = BD = BM - DM = a(1 - \cos t). \tag{53.}$$

Aus den Gleichungen (52.) und (53.) kann man noch die Größe $t$ eliminieren. Man erhält dadurch, wie in § 83, Gleichung (9.) gezeigt wurde,

$$x = a\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}. \tag{54.}$$

Bei der Untersuchung der Zykloide ist es aber bequemer, von den beiden Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

auszugehen.

**Aufgabe 9.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Zykloide*

(55.) $$x = a(t - \sin t), \quad y = a\,1 - \cos t) = 2a \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

berechnen. (Vergl. Fig. 83.)

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (55.) folgt durch Differentiation

(56.) $$\begin{cases} dx = a(1 - \cos t)\,dt = 2a \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt, \\ dy = a \sin t dt = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt, \end{cases}$$

und daraus durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

oder

(57.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

wo $\alpha$ der Winkel ist, welchen die Tangente im Punkte $P$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet.

Aus Gleichung (57.) ergibt sich zunächst, daß

(58.) $$\alpha = 90^0 - \frac{t}{2}$$

ist. Nun ist der Winkel $PCB$ (Fig. 83) als Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel $PMB$, folglich ist

$$\sphericalangle\, PCB = \frac{t}{2}$$

und

$$\sphericalangle\, PTB = 90^0 - PCB = 90^0 - \frac{t}{2} = \alpha.$$

Verbindet man also den höchsten Punkt $C$ des Kreises um $M$ mit dem erzeugenden Punkte $P$, so erhält man die Tangente der Zykloide im Punkte $P$.

Ferner ist

$$Sn = y\frac{dy}{dx} = 2a \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

oder

(59.) $$Sn = a \sin t = PD = QB.$$

*Die Normale geht also durch den Punkt $B$, in welchem der Kreis um $M$ die $X$-Achse berührt.*

Dieses Resultat ist schon eine Folge des vorhergehenden, weil der Winkel $CPB$ als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter ist, und die Normale auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht.

$$St = y\frac{dx}{dy} = 2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right), \tag{60.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

also

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)};$$

dabei ist die Wurzel aus $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ mit positivem Vorzeichen genommen, weil der Bogen $s$ mit $x$ zugleich zunimmt und deshalb $dx$ und $ds$ gleiches Vorzeichen haben. Dies gibt

$$N = PB = y\frac{ds}{dx} = \frac{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right), \tag{61.}$$

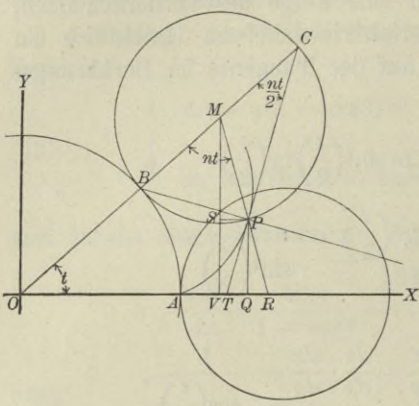
$$T = TP = y\frac{ds}{dy} = \frac{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{62.}$$

**Aufgabe 10.** Man soll die Gleichungen der gemeinen *Epizykloiden* und *Hypozykloiden* herleiten.

**Auflösung.** Wenn ein Kreis mit dem Halbmesser $a$ auf einem festen Kreise mit dem Halbmesser $na$ rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises eine gemeine Epizykloide oder Hypozykloide, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

Findet die Berührung zunächst von außen statt (Fig. 84), so mache man den Mittelpunkt $O$ des festen Kreises zum Nullpunkte und lege die $X$-Achse durch denjenigen Punkt $A$, in welchem der die Kurve erzeugende Punkt der Berührungspunkt der beiden Kreise wird. Liegt dann beim Weiterrollen des beweglichen Kreises um $M$ der Berührungspunkt in $B$, so nennt man Winkel

Fig. 84.




$$AOB = t$$

den „*Wälzungswinkel* des festen" und $PMB$ den „*Wälzungswinkel* des rollenden Kreises", wobei $P$ ein Punkt der Kurve ist. Dann wird

$$\widehat{AB} = \widehat{PB},$$

oder, weil $\widehat{AB}$ zum Zentriwinkel $t$ und zum Halbmesser $na$ gehört,

$$\widehat{PB} = \widehat{AB} = na\,.\,t = a\,.\,nt.$$

Daraus folgt, daß Winkel

$$PMB = nt \quad \text{und} \quad PCB = \frac{nt}{2}$$

ist. Trifft die Gerade $MP$ die $X$-Achse im Punkte $R$, so wird Winkel

$$XRM = (n+1)t$$

als Außenwinkel des Dreiecks $OMR$. Bezeichnet man noch die Koordinaten des Punktes $M$ mit $x_1$, $y_1$ und setzt

(63.) $$n + 1 = m,$$

so wird

(64.) $$x = OQ = OV + SP = x_1 - a\cos(mt),$$

(65.) $$y = QP = VM - SM = y_1 - a\sin(mt);$$

da

$$x_1 = OM\cos t = ma\cos t, \quad y_1 = OM\sin t = ma\sin t$$

ist, so gehen die Gleichungen (64.) und (65.) über in

$$(64\text{a.}) \qquad x = a[m\cos t - \cos(mt)],$$

$$(65\text{a.}) \qquad y = a[m\sin t - \sin(mt)].$$

Dies sind die Gleichungen der *Epizykloiden.*

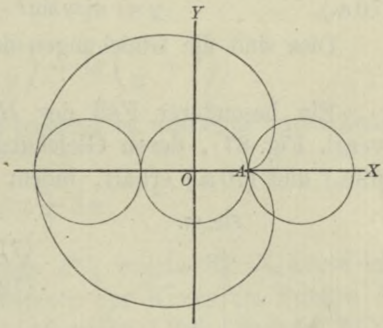
Ein besonderer Fall der *Epizykloiden* ist die *Kardioide* (vergl. Fig. 85), deren Gleichungen man aus den Gleichungen (64a.) und (65a.) erhält, indem man $n = 1$, also $m = 2$ setzt. Dies gibt

$$(66.) \quad x = a[2\cos t - \cos(2t)],$$

$$(67.) \quad y = a[2\sin t - \sin(2t)].$$

Der feste und der rollende Kreis haben in diesem Falle denselben Halbmesser $a$.

Fig. 85.




In ähnlicher Weise findet man die Gleichungen der *Hypozykloiden.* Wendet man nämlich in Fig. 86 die entsprechenden Bezeichnungen an wie in Fig. 84 und nennt den Wälzungswinkel $AOB$ des festen Kreises $t$, so wird in dem vorliegenden Falle wieder

$$\widehat{AB} = \widehat{PB},$$

oder

$$\widehat{PB} = na \,.\, t = a \,.\, nt.$$

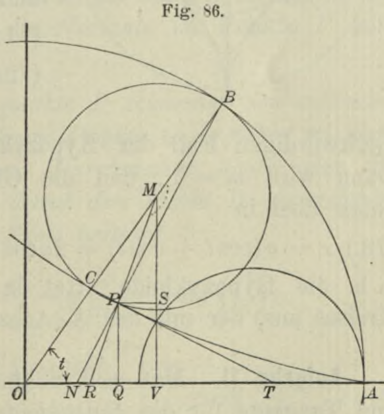
Der Wälzungswinkel $PMB$ des rollenden Kreises ist daher $nt$, so daß man erhält

$$\sphericalangle\, OMR = \pi - nt,$$

$$\sphericalangle\, TRM = \pi - nt + t.$$

Bezeichnet man wieder die Koordinaten des Punktes $M$ mit $x_1, y_1$ und setzt in diesem Falle

Fig. 86.



(68.) $$n - 1 = m,$$

so wird

(69.) $$x = OQ = OV - PS = x_1 - a\cos(\pi - mt),$$

(70.) $$y = QP = VM - SM = y_1 - a\sin(\pi - mt);$$

da aber

$$x_1 = OM\cos t = ma\cos t, \quad y_1 = OM\sin t = ma\sin t$$

ist, so gehen die Gleichungen (69.) und (70.) über in

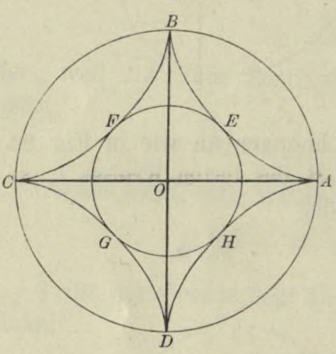
(69a.) $$x = a[m\cos t + \cos(mt)],$$

(70a.) $$y = a[m\sin t - \sin(mt)].$$

Dies sind die Gleichungen der *Hypozykloiden.*

Ein besonderer Fall der *Hypozykloiden* ist die *Astroide* (vergl. Fig. 87), deren Gleichungen man aus den Gleichungen (69a.) und (70a.) erhält, indem man $n = 4$, also $m = 3$ setzt. Dies gibt

Fig. 87.




(71.) $$x = a[3\cos t + \cos(3t)],$$

(72.) $$y = a[3\sin t - \sin(3t)].$$

Da bekanntlich

$$\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t,$$
$$\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

ist, so gehen die Gleichungen (71.) und (72.) über in

(71a.) $$x = 4a\cos^3 t,$$

(72a.) $$y = 4a\sin^3 t.$$

Einen anderen, besonders merkwürdigen Fall der Hypozykloiden erhält man für $n = 2$. Dann wird $m = 1$, und die Gleichungen (69a.) und (70a.) gehen über in

(73.) $$x = a(\cos t + \cos t) = 2a\cos t, \quad y = a(\sin t - \sin t) = 0,$$

d. h. die Hypozykloide artet in den Durchmesser des festen Kreises aus, der mit der $X$-Achse zusammenfällt.

**Aufgabe 11.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Epizykloide*

$$(74.)\quad x = a[m\cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen. (Vergl. Fig. 84.)

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (74.) erhält man durch Differentiation, wenn man $m + 1 = n + 2$ mit $l$ bezeichnet,

$$(75.)\quad \begin{cases} dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \\ dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \end{cases}$$

und daraus durch Division

$$(76.)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{nt}{2} + t\right),$$

oder, wenn man mit $h$ eine noch passend zu wählende ganze Zahl bezeichnet,

$$(76\text{a.})\quad \alpha = \frac{nt}{2} + t \pm h\pi.$$

Daraus folgt, daß die Gerade $PC$, welche die $X$-Achse im Punkte $T$ schneiden möge, *Tangente* der Kurve im Punkte $P$ ist, denn Winkel $XTC$ ist als Außenwinkel des Dreiecks $TCO$ gleich Winkel

$$TCO + COT = \frac{nt}{2} + t,$$

also gleich $\alpha$. Da der Winkel $CPB$ als Winkel im Halbkreise ein rechter ist, so muß $PB$ die *Normale* im Punkte $P$ sein. Dies gibt den Satz:

*Die Tangente im Kurvenpunkte $P$ schneidet den rollenden Kreis zum zweiten Male in einem Punkte $C$, welcher mit dem Berührungspunkte $B$ auf einem Durchmesser liegt;* oder die *Normale des Punktes $P$ geht durch den Punkt $B$, in welchem der rollende Kreis den festen Kreis berührt.*

$$(77.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = y\operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right), \quad St = y\frac{dx}{dy} = y\operatorname{ctg}\left(\frac{lt}{2}\right);$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{lt}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

also, da für kleine Werte von $t$ der Bogen $s$ mit $x$ und $y$ gleichzeitig wächst,

$$(78.)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

folglich wird

$$(79.)\qquad N = y\frac{ds}{dx} = \frac{y}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

**Aufgabe 12.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Hypozykloide*

$$(80.)\qquad x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen. (Vergl. Fig. 86.)

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (80.) erhält man durch Differentiation, wenn man hier $m - 1 = n - 2$ mit $l$ bezeichnet,

$$(81.)\qquad dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt = -2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(82.)\qquad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

und daraus durch Division

$$(83.)\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{nt}{2} - t\right),$$

oder, abgesehen von einem Vielfachen von $\pi$,

$$(83\,a.)\qquad \alpha = \pi - \frac{nt}{2} + t, \quad \text{oder} \quad \frac{nt}{2} - t = \pi - \alpha.$$

Daraus folgt, daß die Gerade $PC$, welche die $X$-Achse im Punkte $T$ schneiden möge, *Tangente* der Kurve im Punkte $P$ ist, denn der Dreieckswinkel $CTO$ ist gleich dem Außenwinkel $TCB$ $\left(\text{oder } \frac{nt}{2}\right)$, weniger dem anderen Dreieckswinkel $COT$ (oder $t$), also

$$CTO = \frac{nt}{2} - t = \pi - \alpha.$$

Da der Winkel $CPB$ als Winkel im Halbkreise ein rechter ist, so muß $PB$ die *Normale* im Punkte $P$ sein.

Man erhält daher hier denselben Satz wie bei der Epizykloide

$$(84.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = -y\,\mathrm{tg}\Big(\frac{lt}{2}\Big),\quad St = y\frac{dx}{dy} = -y\,\mathrm{ctg}\Big(\frac{lt}{2}\Big);$$

$$\Big(\frac{ds}{dx}\Big)^2 = 1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\Big(\frac{lt}{2}\Big) = \frac{1}{\cos^2\Big(\frac{lt}{2}\Big)},$$

also

$$(85.)\qquad \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos\Big(\frac{lt}{2}\Big)},\quad \frac{ds}{dy} = +\frac{1}{\sin\Big(\frac{lt}{2}\Big)},$$

wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, daß $s$ für kleine Werte von $t$ zunimmt, während $x$ abnimmt, daß also $dx$ und $ds$ entgegengesetztes Zeichen haben. Dies gibt

$$(86.)\quad N = y\frac{ds}{dx} = -\frac{y}{\cos\Big(\frac{lt}{2}\Big)},\quad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sin\Big(\frac{lt}{2}\Big)}.$$

Für die *Astroide* wird

$$n = 4,\quad m = 3,\quad l = 2,$$

also

$$x = a[3\cos t + \cos(3t)] = 4a\cos^3 t,\ y = a[3\sin t - \sin(3t)] = 4a\sin^3 t,$$

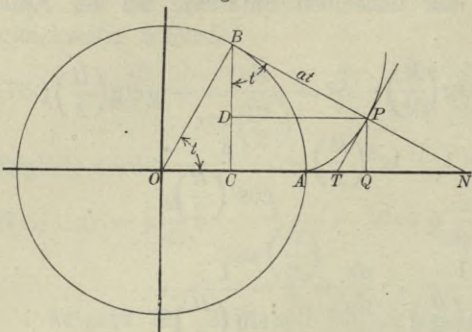
$$(87.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\mathrm{tg}\,t,\quad Sn = -y\,\mathrm{tg}\,t,\quad St = -y\,\mathrm{ctg}\,t, \\[2ex] N = -\dfrac{y}{\cos t} = -4a\sin^2 t\,\mathrm{tg}\,t,\quad T = \dfrac{y}{\sin t} = 4a\sin^2 t. \end{cases}$$

**Aufgabe 13.** Man soll die Gleichungen der *Kreisevolvente* herleiten. (Vergl. Fig. 88.)

**Auflösung.** Die Kreisevolvente entsteht durch Abwickelung eines Fadens von einem Kreise, wobei der Endpunkt des gespannten Fadens die Kurve durchläuft. Es sei $B$ der Punkt, in welchem der Faden den Kreis verläßt, dann ist der Faden $BP$ die Tangente des Kreises im Punkte $B$, und es wird die Gerade

$$BP = \widehat{BA} = at,$$

Fig. 88.




wenn $A$ der Endpunkt des aufgewickelten Fadens, $a$ der Halbmesser des Kreises und $t$ der Winkel $AOB$ ist. Diesen Winkel nennt man auch hier den „*Wälzungswinkel*".

Macht man den Mittelpunkt $O$ des Kreises zum Anfangspunkt der Koordinaten, legt die $X$-Achse durch den Punkt $A$ und zieht durch $B$ die Gerade $BC$ parallel zur $Y$-Achse und durch $P$ die Gerade $PD$ parallel zur $X$-Achse, so wird

$$OQ = x = OC + CQ = OC + DP,$$
$$QP = y = CD = CB - DB,$$

oder, weil auch Winkel $DBP$ gleich $t$ ist,

$$(88.)\qquad x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Die Kreisevolvente entsteht, wie man unmittelbar aus Figur 88 erkennt, auch dadurch, daß eine Gerade $BP$ auf einem Kreise abrollt, ohne zu gleiten. Jeder Punkt $P$ der Geraden beschreibt dann eine Kreisevolvente. Diese Kurve kann deshalb auch als eine Epizykloide oder Hypozykloide betrachtet werden, bei welcher der Halbmesser des rollenden Kreises unendlich groß geworden ist.

**Aufgabe 14.** Man soll die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *Kreisevolvente* berechnen. (Vergl. Fig. 88.)

**Auflösung.** Aus den Gleichungen der Kreisevolvente, nämlich aus den Gleichungen (88.), folgt

$$(89.)\qquad dx = at\cos t\,dt, \quad dy = at\sin t\,dt$$

und daraus durch Division

$$(90.)\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}t.$$

Dies gibt den Satz: *Die Tangente TP im Kurvenpunkte P ist dem entsprechenden Kreishalbmesser OB parallel, und der den Kreis im Punkte B berührende Faden BP ist Normale der Kreisevolvente.* Ferner wird

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos t}, \tag{91.}$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}, \tag{92.}$$

$$Sn = QN = y\,\mathrm{tg}\,t, \quad St = TQ = y\,\mathrm{ctg}\,t, \tag{93.}$$

$$N = PN = \frac{y}{\cos t}, \quad T = TP = \frac{y}{\sin t}. \tag{94.}$$

## § 89.
## Konkavität, Konvexität, Wendepunkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 145 und 146.)

**Erklärung.** Legt man in einem Punkte $P$ an eine Kurve die Tangente, so heißt die Kurve in diesem Punkte $P$ nach oben *konkav*, wenn die dem Berührungspunkte $P$ benachbarten Kurvenpunkte *oberhalb* der Tangente liegen. (Vergl. Fig. 89.)

Fig. 89.

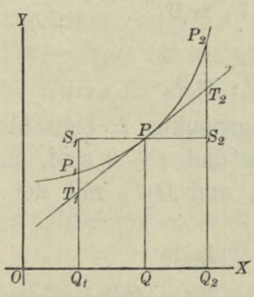
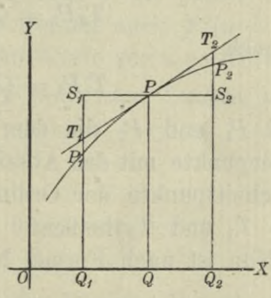



Fig. 90.




Dagegen ist die Kurve im Punkte $P$ nach oben *konvex* (vergl. Fig. 90), wenn die dem Berührungspunkte $P$ benachbarten Punkte *unterhalb* der Tangente liegen.

Wenn endlich die Kurve mit wachsendem $x$ im Punkte $P$ von der Konkavität in die Konvexitität übergeht (vergl. Fig. 91), oder wenn die Kurve mit wachsendem $x$ im Punkte $P$ aus der Konvexität in die Konkavität übergeht (vergl. Fig. 92), so heißt

Fig. 91.

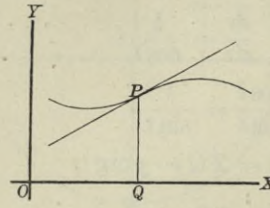
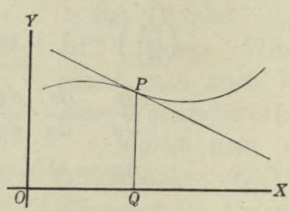



Fig. 92.




der Punkt $P$ ein „*Wendepunkt*". Die Tangente in einem solchen Punkte heißt „*Wendetangente*". Bei einer Wendetangente muß daher die Kurve auf der einen Seite des Berührungspunktes *oberhalb*, auf der anderen Seite des Berührungspunktes *unterhalb* der Tangente liegen, wobei natürlich nur die benachbarten Teile der Kurve in Frage kommen.

Die Gleichung einer Kurve (Fig. 89) sei

$$y = f(x), \tag{1.}$$

und die Kurve sei in der Nähe des Punktes $P$ nach oben *konkav*, dann ist nach der vorstehenden Erklärung

$$T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 > 0$$

und auch

$$T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 > 0,$$

wobei $P_1$ und $P_2$ die dem Berührungspunkte $P$ benachbarten Kurvenpunkte mit den Abszissen $x - a$ und $x + a$ sind, und wo die Schnittpunkte der Ordinaten $Q_1P_1$ und $Q_2P_2$ mit der Tangente $T_1$ und $T_2$ heißen.

Nun ist nach Formel Nr. 89 der Tabelle

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x+\Theta h)}{2!}h^2, \tag{2.}$$

also für $h = +a$

$$Q_2P_2 = f(x+a) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}a + \frac{f''(x+\Theta a)}{2!}a^2, \tag{3.}$$

und für $h = -a$

$$(4.)\quad Q_1P_1 = f(x-a) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}a + \frac{f''(x-\Theta_1 a)}{2!}a^2.$$

Ferner ist die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkte $P$ nach Formel Nr. 138 der Tabelle

$$(5.)\quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x'-x), \text{ oder } y' = f(x) + f'(x).(x'-x).$$

Dies gibt für $x' = x + a$

$$(6.)\qquad y' = Q_2T_2 = f(x) + f'(x).a,$$

und für $x' = x - a$

$$(7.)\qquad y' = Q_1T_1 = f(x) - f'(x).a.$$

Daraus folgt

$$(8.)\qquad T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 = \frac{a^2}{2}\cdot f''(x+\Theta a),$$

$$(9.)\qquad T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 = \frac{a^2}{2}\cdot f''(x-\Theta_1 a).$$

Damit die Kurve nach oben *konkav* ist, müssen für hinreichend kleine Werte von $a$ die Strecken $T_2P_2$ und $T_1P_1$ *positive* Richtung haben. Das ist nur möglich, wenn $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ beide *positiv* sind.

Unter der Voraussetzung, daß $f''(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ *stetig* ist, muß deshalb auch $f''(x)$ *positiv* sein, und umgekehrt: ist $f''(x)$ positiv, so werden auch $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ positiv sein.

*Die Kurve ist daher im Punkte P nach oben konkav, wenn*

$$(10.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0.$$

Die Gleichung einer Kurve (Fig. 90) sei wieder

$$y = f(x),$$

die Kurve sei jetzt aber in der Nähe des Punktes $P$ nach oben *konvex*, dann ist nach der vorstehenden Erklärung

$$P_2T_2 = Q_2T_2 - Q_2P_2 > 0, \quad \text{oder} \quad T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 < 0$$

und auch

$$P_1T_1 = Q_1T_1 - Q_1P_1 > 0, \quad \text{oder} \quad T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 < 0,$$

wobei dieselben Bezeichnungen angewendet sind wie in Fig. 89. Daraus ergibt sich genau ebenso wie vorhin

$$(11.)\qquad T_2P_2 = \frac{a^2}{2}f''(x+\Theta a),\quad T_1P_1 = \frac{a^2}{2}f''(x-\Theta_1 a).$$

Damit die Kurve nach oben *konvex* ist, müssen für hinreichend kleine Werte von $a$ die Strecken $T_2P_2$ und $T_1P_1$ *negative* Richtung haben. Das ist nur möglich, wenn $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ beide *negativ* sind.

Unter der Voraussetzung, daß $f''(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ *stetig* ist, muß deshalb auch $f''(x)$ *negativ* sein, und umgekehrt: ist $f''(x)$ negativ, so werden auch $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ negativ sein.

*Die Kurve ist daher im Punkte $P$ nach oben konvex, wenn*

$$(12.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0.$$

In dem vorhergehenden sind die Fälle, wo

$$f''(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f''(x) = \infty$$

wird, ausgeschlossen worden. Beide Fälle können im allgemeinen nur für *einzelne* Werte von $x$ eintreten. Ist $x$ ein solcher Wert, so hat man noch die Vorzeichen von $f''(x-a)$ und $f''(x+a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ zu untersuchen und danach die folgenden 8 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I.}\quad f''(x) = 0,\quad f''(x-a) > 0,\quad f''(x+a) < 0.$$

In diesem Falle geht die Kurve im Punkte $P$ (vergl. Fig. 91) von der Konkavität zur Konvexität über. Dasselbe gilt auch, wenn

II. $f''(x) = \infty,\quad f''(x-a) > 0,\quad f''(x+a) < 0$ (vergl. Fig. 91).

Wird dagegen

III. $f''(x) = 0,\quad f''(x-a) < 0,\quad f''(x+a) > 0$ (vergl. Fig. 92), oder

IV. $f''(x) = \infty,\quad f''(x-a) < 0,\quad f''(x+a) > 0$ (vergl. Fig. 92), so geht die Kurve von der Konvexität zur Konkavität über.

In allen diesen Fällen ist der Punkt $P$ ein *Wendepunkt*, weil sich die Kurve von der Konkavität zur Konvexität oder von der Konvexität zur Konkavität *wendet.* Das Gesagte bleibt auch noch richtig, wenn die erste Ableitung $f'(x)$ in den Fällen II und IV für den betrachteten Wert von $x$ unendlich groß wird, wenn also

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \text{oder} \quad \alpha = 90^0.$$

Die Wendetangente steht dann senkrecht auf der $X$-Achse. (Vergl. Fig. 93 und 94.)

Fig. 93.

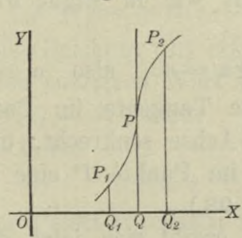
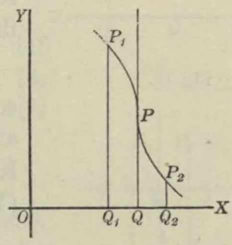


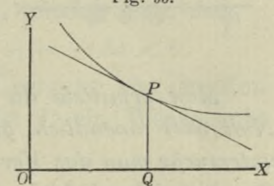

Fig. 94.




Ist aber

$$\text{V.} \quad \begin{cases} f''(x) = 0, \quad f''(x - a) > 0, \\ f''(x + a) > 0 \quad \text{(vergl. Fig. 95),} \end{cases}$$

Fig. 95.




oder

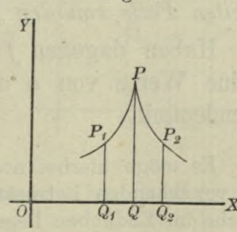
$$\text{VI.} \quad \begin{cases} f''(x) = \infty, \quad f''(x - a) > 0, \\ f''(x + a) > 0, \end{cases}$$

so ist die Kurve unmittelbar *vor* dem Punkte $P$ und ebenso unmittelbar *nach* dem Punkte $P$ nach oben konkav; sie hat daher im Punkte $P$ *keinen* Wendepunkt, und hat auch im Falle VI, wenn $f'(x)$ einen endlichen Wert hat, dieselbe Gestalt wie in Figur 95. Ist dagegen im Falle VI

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \text{also} \quad \alpha = 90^0,$$

so steht die Tangente im Punkte $P$ auf der $X$-Achse senkrecht, und die Kurve hat im Punkte $P$ eine Spitze. (Vergl. Fig. 96.)

Fig. 96.




Ist endlich

$$\text{VII.} \quad \begin{cases} f''(x) = 0, \quad f''(x - a) < 0, \\ f''(x + a) < 0 \quad \text{(vergl. Fig. 97),} \end{cases}$$

oder

VIII. $f''(x) = \infty, \quad f''(x - a) < 0, \quad f''(x + a) < 0,$

so ist die Kurve unmittelbar *vor* dem Punkte $P$ und ebenso unmittelbar *nach* dem Punkte $P$ nach oben konvex, so daß auch hier der Punkt $P$ kein Wendepunkt ist. Die Kurve hat auch im Falle VIII, wenn $f'(x)$ einen endlichen Wert hat, dieselbe Gestalt wie in Figur 97. Ist dagegen

Fig. 97.

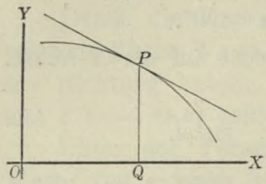
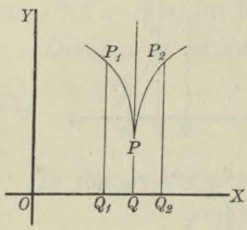



Fig. 98.




$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \infty, \quad \text{also} \quad \alpha = 90^0,$$

so steht die Tangente im Punkte $P$ auf der $X$-Achse senkrecht, und die Kurve hat im Punkte $P$ eine Spitze. (Vergl. Fig. 98.)

Daraus ergibt sich jetzt die allgemeine Regel für die Aufsuchung der etwaigen Wendepunkte einer Kurve

$$y = f(x).$$

*Man ermittele die Werte von $x$, für welche $f''(x)$ gleich Null oder unendlich groß wird. Ist $x$ ein solcher Wert, so untersuche man das Vorzeichen von $f''(x - a)$ und von $f''(x + a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$. Man erhält dann einen Wendepunkt, wenn entweder*

$$f''(x - a) > 0 \quad \textit{und} \quad f''(x + a) < 0,$$

*oder wenn*

$$f''(x - a) < 0 \quad \textit{und} \quad f''(x + a) > 0;$$

*und zwar geht die Kurve bei wachsendem $x$ im ersten Falle in diesem Wendepunkte von der Konkavität zur Konvexität und im zweiten Falle von der Konvexität zur Konkavität über.*

Haben dagegen $f''(x - a)$ und $f''(x + a)$ für hinreichend kleine Werte von $a$ dasselbe Zeichen, so ist der Punkt *kein* Wendepunkt.

**Bemerkung.**

Es möge hierbei noch besonders hervorgehoben werden, daß sich die vorstehenden Betrachtungen nur auf Punkte der Kurve beziehen, welche im Endlichen liegen.

## § 90.

## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll die etwaigen Wendepunkte der Kurve

(1.) $$y = b + (c - x)^3 = f(x)$$

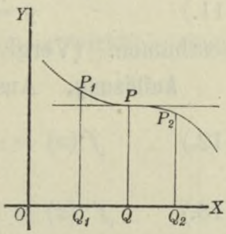
bestimmen. (Vergl. Fig. 99.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$f'(x) = -3(c - x)^2,$$

(3.) $$f''(x) = +6(c - x).$$

Fig. 99.




Aus Gleichung (3.) erkennt man, daß es keinen endlichen Wert von $x$ gibt, für den $f''(x) = \infty$ wird. Dagegen wird $f''(x) = 0$ für

(4.) $$x = c.$$

Der Punkt $P$, dessen Abszisse gleich $c$ ist, kann also möglicherweise ein Wendepunkt sein. Um darüber zu entscheiden, beachte man, daß

(5.) $$f''(c - a) = +6a > 0, \quad f''(c + a) = -6a < 0$$

ist. Es findet also im Punkte $P$ ein Übergang von der Konkavität zur Konvexität statt; folglich ist $P$ ein Wendepunkt. (Vergl. Fig. 99.)

**Aufgabe 2.** Man soll die etwaigen Wendepunkte der Kurve

(6.) $$y = b + (x - c)^4 = f(x)$$

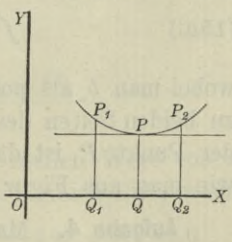
bestimmen. (Vergl. Fig. 100.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (6.) folgt

(7.) $$f'(x) = 4(x - c)^3,$$

(8.) $$f''(x) = 12(x - c)^2.$$

Fig. 100.




Auch hier gibt es keinen endlichen Wert von $x$, für welchen $f''(x) = \infty$ wird. Dagegen wird $f''(x) = 0$ für

(9.) $$x = c.$$

Für diesen Wert von $x$ kann man möglicherweise einen Wendepunkt erhalten. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$(10.) \qquad f''(c-a) = +12a^2 > 0$$

und

$$(10a.) \qquad f''(c+a) = +12a^2 > 0,$$

folglich ist die Kurve auf beiden Seiten des betrachteten Punktes $P$ nach oben konkav, so daß dieser Punkt *kein* Wendepunkt sein kann. (Vergl. Fig. 100.)

**Aufgabe 3.** Man soll die etwaigen Wendepunkte der Kurve

$$(11.) \qquad y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2} = f(x)$$

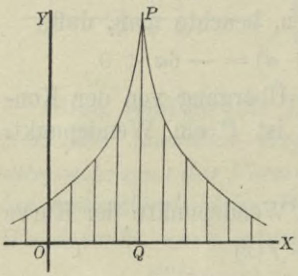
bestimmen. (Vergl. Fig. 101.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (11.) folgt

$$(12.) \qquad f'(x) = -\frac{2b}{5}(x-c)^{-\frac{3}{5}},$$

$$(13.) \qquad f''(x) = +\frac{6b}{25}(x-c)^{-\frac{8}{5}} = \frac{6b}{25\sqrt[5]{(x-c)^8}}.$$

Fig. 101.




Hieraus erkennt man, daß $f''(x)$ für keinen endlichen Wert von $x$ gleich Null wird, dagegen wird

$$(14.) \qquad f''(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c.$$

Dieser Wert von $x$ kann also möglicherweise einen Wendepunkt liefern. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$(15.) \qquad f''(c-a) = \frac{6b}{25\sqrt[5]{a^8}} > 0$$

und

$$(15a.) \qquad f''(c+a) = \frac{6b}{25\sqrt[5]{a^8}} > 0,$$

wobei man $b$ als positiv vorausgesetzt hat. Die Kurve ist also zu beiden Seiten des betrachteten Punktes $P$ nach oben konkav; der Punkt $P$ ist daher *kein* Wendepunkt der Kurve, sondern, wie man aus Figur 101 ersieht, eine Spitze.

**Aufgabe 4.** Man soll die etwaigen Wendepunkte der Kurve

$$(16.) \qquad y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^3} = f(x)$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (16.) folgt

$$f'(x) = -\frac{3b}{5}(x-c)^{-\frac{2}{5}}, \tag{17.}$$

$$f''(x) = +\frac{6b}{25}(x-c)^{-\frac{7}{5}} = \frac{6b}{25\sqrt[5]{(x-c)^7}}. \tag{18.}$$

Auch hier wird $f''(x)$ für keinen endlichen Wert von $x$ gleich Null, dagegen wird

$$f''(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c. \tag{19.}$$

Um zu entscheiden, ob dieser Wert von $x$ wirklich einen Wendepunkt liefert, bilde man

$$f''(c-a) = \frac{-6b}{25\sqrt[5]{a^7}} < 0$$

und

$$f''(c+a) = \frac{+6b}{25\sqrt[5]{a^7}} > 0.$$

Daraus erkennt man, daß im Punkte $P$ mit den Koordinaten

$$x = c, \quad y = m \tag{20.}$$

eine Wendung von der Konvexität zur Konkavität stattfindet, daß also der Punkt $P$ ein Wendepunkt ist. (Vergl. Fig. 94.)

**Aufgabe 5.** Man soll die etwaigen Wendepunkte der Kurve

$$y = \frac{b^2(b-x)}{b^2+x^2} = f(x) \tag{21.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Durch Differentiation folgt aus Gleichung (21.)

$$f'(x) = \frac{b^2(x^2-2bx-b^2)}{(x^2+b^2)^2}, \tag{22.}$$

$$f''(x) = \frac{-2b^2(x^3-3bx^2-3b^2x+b^3)}{(x^2+b^2)^3}. \tag{23.}$$

Hier kann $f''(x)$ für keinen endlichen, reellen Wert von $x$ unendlich groß werden. Dagegen wird $f''(x)$ gleich Null, wenn

$$x^3-3bx^2-3b^2x+b^3 = (x+b)(x^2-4bx+b^2) = 0 \tag{24.}$$

wird. Die Werte von $x$, für welche möglicherweise ein Wendepunkt eintritt, sind daher

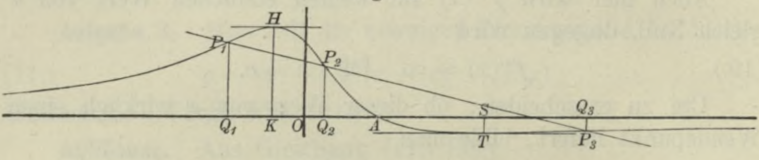
(25.) $x_1 = -b, \quad x_2 = b(2 - \sqrt{3}), \quad x_3 = b(2 + \sqrt{3}),$

welche beziehungsweise den Werten

(26.) $y_1 = +b, \quad y_2 = \frac{b}{4}(1 + \sqrt{3}), \quad y_3 = \frac{b}{4}(1 - \sqrt{3})$

entsprechen.

Fig. 102.




Da $x^2 + b^2$ für reelle Werte von $x$ immer positiv ist, so braucht man nur zu untersuchen, ob

(27.) $(x^2 + b^2)^3 f''(x) = -2b^2(x + b)(x^2 - 4bx + b^2) = F(x)$

für die angegebenen Werte von $x$ das Vorzeichen wechselt.

Zunächst ist für hinreichend kleine Werte von $a$

(28.) $\begin{cases} F(-b-a) = +2ab^2(6b^2 + 6ab + a^2) > 0, \\ F(-b+a) = -2ab^2(6b^2 - 6ab + a^2) < 0; \end{cases}$

deshalb ist der Punkt $P_1$ mit den Koordinaten $x_1$, $y_1$ ein Wendepunkt, in welchem die Kurve von der Konkavität zur Konvexität übergeht.

Ferner ist für hinreichend kleine Werte von $a$

(29.) $\begin{cases} F(2b - b\sqrt{3} - a) = -2ab^2(3b - b\sqrt{3} - a)(2b\sqrt{3} + a) < 0, \\ F(2b - b\sqrt{3} + a) = +2ab^2(3b - b\sqrt{3} + a)(2b\sqrt{3} - a) > 0, \end{cases}$

folglich ist auch der Punkt $P_2$ mit den Koordinaten $x_2$, $y_2$ ein Wendepunkt, in welchem die Kurve von der Konvexität zur Konkavität übergeht.

Endlich ist noch für hinreichend kleine Werte von $a$

(30.) $\begin{cases} F(2b + b\sqrt{3} - a) = +2ab^2(3b + b\sqrt{3} - a)(2b\sqrt{3} - a) > 0, \\ F(2b + b\sqrt{3} + a) = -2ab^2(3b + b\sqrt{3} + a)(2b\sqrt{3} + a) < 0, \end{cases}$

folglich ist der Punkt $P_3$ mit den Koordinaten $x_3$, $y_3$ gleichfalls ein Wendepunkt, in welchem die Kurve von der Konkavität zur Konvexität übergeht.

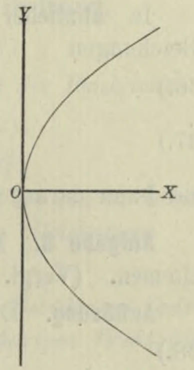
Es ist dabei noch zu beachten, daß die drei Wendepunkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ in einer geraden Linie liegen, weil

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \tag{31.}$$

wird. (Vergl. Fig. 102.)

**Aufgabe 6.** Man soll untersuchen, in welchen Punkten die *Parabel* nach oben *konkav*, und in welchen Punkten sie nach oben *konvex* ist. (Vergl. Fig. 103.)

Fig. 103.




**Auflösung.** Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = 2ax; \tag{32.}$$

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}. \tag{33.}$$

Für positive Werte von $y$ wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, und für negative Werte von $y$ wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv. Die obere Hälfte der Kurve ist daher nach oben *konvex*, und die untere Hälfte ist nach oben *konkav*. Einen Wendepunkt besitzt die Kurve nicht, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für endliche Werte von $y$ niemals verschwinden kann.

**Aufgabe 7.** Man soll untersuchen, in welchen Punkten die *Ellipse* und die *Hyperbel* nach oben *konkav*, und in welchen Punkten sie nach oben *konvex* sind. (Vergl. Fig. 104.)

**Auflösung.** Die Gleichung der Ellipse ist

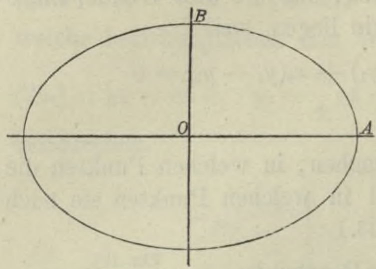
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0; \tag{34.}$$

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}. \tag{35.}$$

Auch hier wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ für positive Werte von $y$ und positiv für negative Werte von $y$. Die obere Hälfte der Kurve

Fig. 104.




ist daher nach oben *konvex* und die untere Hälfte der Kurve ist nach oben *konkav* (Fig. 104). Einen Wendepunkt besitzt die Kurve nicht, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für endliche Werte von $x$ und $y$ niemals verschwinden kann.

In ähnlicher Weise erhält man bei der Hyperbel die Gleichungen

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{36.}$$

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3} \tag{37.}$$

und kann daraus dieselben Schlüsse ziehen wie bei der Ellipse.

**Aufgabe 8.** Man soll die Wendepunkte der *Sinuslinie* bestimmen. (Vergl. Fig. 105.)

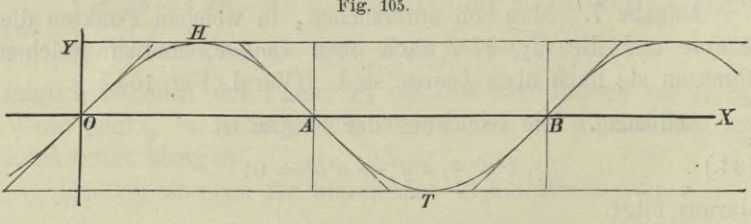
**Auflösung.** Die Sinuslinie hat die Gleichung

$$y = \sin x; \tag{38.}$$

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x. \tag{39.}$$

Fig. 105.




Die Kurve ist daher nach oben *konvex*, wenn $0 < x < \pi$ $2\pi < x < 3\pi, \ldots$ allgemein, wenn

$$2n\pi < x < (2n+1)\pi$$

ist; und die Kurve ist nach oben *konkav*, wenn

$$(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$$

ist, wobei $n$ eine positive oder negative *ganze* Zahl bedeuten soll. Ein Wendepunkt tritt ein, wenn

$$x = 0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \ldots$$

ist; die zugehörigen Werte von $y$ sind sämtlich gleich $0$, d. h. *die Wendepunkte liegen alle in der X-Achse.*

## § 91.

## Berührung (oder Oskulation) $n^{\text{ter}}$ Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 147.)

**Erklärung.** *Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen*

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots f^{(n+1)}(x),$$
$$g(x), \quad g'(x), \quad g''(x), \ldots g^{(n+1)}(x)$$

*endlich und stetig sind für den betrachteten Wert von $x$, haben zwei Kurven $VW$ und $RS$* (Fig. 106) *mit den Gleichungen*

$$(1.) \qquad y = f(x) \quad \textit{und} \quad y = g(x)$$

*in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte $P$ eine Berührung (oder Oskulation) $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn für den zugehörigen Wert von $x$ nicht nur*

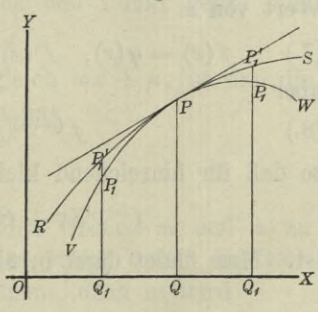
$$(2.) \qquad f(x) = g(x)$$

*ist, sondern außerdem auch noch*

$$(3.) \qquad f'(x) = g'(x), \quad f''(x) = g''(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

Mit welchem Rechte die Erklärung aufgestellt worden ist, ersieht man aus dem folgenden Satze:

Fig. 106.




*Zwei Kurven*

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x),$$

*welche im Punkte $P$ eine Berührung $n^{\text{ter}}$ Ordnung haben, schmiegen sich in diesem Punkte enger aneinander an, als an jede andere Kurve, mit der sie im Punkte $P$ keine Berührung von gleich hoher Ordnung haben.*

**Beweis.** Nach Formel Nr. 89 der Tabelle ist

$$(4.)\quad \begin{cases} Q_1P_1 = f(x+h) = f(x) + \dfrac{f'(x)}{1!}h + \dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \dfrac{f^{(n+1)}(x+\Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \end{cases}$$

gleichviel, ob $h$ positiv oder negativ ist. Ebenso wird

$$(5.)\quad Q_1P'_1 = g(x+h) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!}h + \frac{g''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{g^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

folglich ist, weil nach Voraussetzung die Gleichungen (2.) und (3.) gelten,

$$(6.)\quad \begin{cases} P_1P'_1 = g(x+h) - f(x+h) \\ \qquad = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[g^{(n+1)}(x+\Theta_1 h) - f^{(n+1)}(x+\Theta h)\right]. \end{cases}$$

Da $h$ eine beliebig kleine, positive oder negative Größe ist, so wird $P_1P'_1$ eine beliebig kleine Größe von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wenn man nun mit diesen beiden Kurven noch eine dritte Kurve

$$y = \varphi(x)$$

zusammenstellt, welche mit der Kurve

$$y = f(x)$$

im Punkte $P$ nur eine Berührung von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung hat, wobei $m < n$ vorausgesetzt wird, so ist für den betrachteten Wert von $x$

$$(7.)\quad f(x) = \varphi(x),\ \ f'(x) = \varphi'(x), \ldots f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x),$$

aber

$$(8.)\quad f^{(m+1)}(x) \gtrless \varphi^{(m+1)}(x),$$

so daß für hinreichend kleine Werte von $h$ auch

$$f^{(m+1)}(x+\Theta_2 h) \gtrless \varphi^{(m+1)}(x+\Theta_3 h)$$

ist. Man findet dann in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi(x+h) - f(x+h) \\ \qquad = \dfrac{h^{m+1}}{(m+1)!}\left[\varphi^{(m+1)}(x+\Theta_3 h) - f^{(m+1)}(x+\Theta_2 h)\right]. \end{cases}$$

Diese Differenz wird nur beliebig klein von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, weil der Ausdruck in der eckigen Klammer eine endliche (von Null verschiedene) Größe ist. Deshalb wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$(10.)\quad P_1P'_1 = g(x+h) - f(x+h) < \varphi(x+h) - f(x+h),$$

d. h. die Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schmiegen sich im Punkte $P$ enger aneinander an als die Kurven $y = f(x)$ und $x = \varphi(x)$.

## § 92.

## Anwendungen auf einzelne Kurven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 148 bis 150.)

**Aufgabe 1.** Man soll durch den Punkt $P$ einer Kurve mit der Gleichung

$$(1.)\qquad y = f(x)$$

eine gerade Linie legen, welche mit der Kurve eine Berührung von möglichst hoher Ordnung hat.

**Auflösung.** Die Gleichung der geraden Linie sei

$$(2.)\qquad y' = mx' + \mu,$$

wobei die laufenden Koordinaten mit $x'$ und $y'$ bezeichnet sind, weil die Koordinaten des Berührungspunktes $x$ und $y$ heißen sollen. Damit nun die Gerade durch den Punkt geht, muß

$$(3.)\qquad y = f(x) = mx + \mu$$

sein. In diesem Falle ist also $g(x)$ gleich $mx + \mu$, so daß die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ hier die Form hat

$$(4.)\qquad \frac{dy}{dx} = m.$$

Man hat hier nur über die beiden Größen $m$ und $\mu$ zu verfügen, und zwar sind diese Größen schon durch die Gleichungen (3.) und (4.) vollständig bestimmt, denn es wird

$$(5.)\qquad m = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \mu = y - mx = y - x\frac{dy}{dx},$$

so daß die Gleichung (2.) übergeht in

$$(6.)\qquad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Dies ist aber die Gleichung der *Tangente*.

Die Tangente ist daher diejenige Gerade, welche sich im Punkte $P$ der Kurve am engsten anschmiegt. Da außerdem jede Gerade in allen ihren Punkten dieselbe Richtung hat, so gibt die Tangente in dem betrachteten Punkte die Richtung der Kurve an.

Aus dem vorstehenden erkennt man auch, daß die Tangente mit der Kurve im allgemeinen nur eine Berührung *erster* Ordnung hat. Man kann aber sogleich die Bedingung angeben, unter welcher die Berührung eine Berührung von der *zweiten* Ordnung wird. Es ist hier nämlich

$$(7.)\qquad g(x) = mx + \mu, \quad g'(x) = m, \quad g''(x) = 0,$$

folglich muß auch

$$(8.)\qquad f''(x) = 0$$

sein, damit die Berührung höher als von der *ersten* Ordnung ist.

Diese Bedingung ist nur für einzelne Punkte der Kurve erfüllt, und zwar sind diese Punkte (nach Formel Nr. 146 der Tabelle) *Wendepunkte*, wenn $f''(x)$ für den betrachteten Wert von $x$ das Vorzeichen wechselt.

**Aufgabe 2.** Man soll die Gleichung eines Kreises bestimmen, der im Punkte $P$ mit der Kurve

$$(9.)\qquad y = f(x)$$

eine Berührung von möglichst hoher Ordnung besitzt.

**Auflösung.** Ein Kreis mit dem Halbmesser $\varrho$ hat, wenn man die laufenden Koordinaten mit $x'$, $y'$ bezeichnet, bekanntlich die Gleichung

$$(10.)\qquad (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 - \varrho^2 = 0,$$

wobei $\xi$ und $\eta$ die Koordinaten seines Mittelpunktes sind. Löst man die Gleichung inbezug auf $y'$ auf und setzt $x' = x$, so erhält man

$$(10a.) \qquad y' = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \xi)^2} = g(x).$$

In der Gleichung des Kreises kommen also *drei* willkürliche Konstante $\xi$, $\eta$ und $\varrho$ vor, über die man so verfügen kann, daß *drei* Bedingungen erfüllt sind. Deshalb ist es möglich, die drei Gleichungen

$$(11.) \qquad f(x) = g(x) = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \xi)^2} = y,$$

$$(12.) \qquad f'(x) = g'(x) = \mp \frac{x - \xi}{\sqrt{\varrho^2 - (x - \xi)^2}} = -\frac{x - \xi}{y - \eta},$$

$$(13.) \qquad f''(x) = g''(x) = \mp \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (x - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\varrho^2}{(y - \eta)^3} \text{*)}$$

durch passende Bestimmung von $\xi$, $\eta$ und $\varrho$ zu befriedigen. Dabei sind $x$ und $y$ die Koordinaten des Berührungspunktes. Aus den Gleichungen (12.) und (10.) findet man

$$(14.) \qquad x - \xi = -(y - \eta) f'(x),$$

$$(15.) \qquad \varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (y - \eta)^2[1 + f'(x)^2],$$

so daß Gleichung (13.) übergeht in

$$f''(x) = -\frac{1 + f'(x)^2}{y - \eta}.$$

Deshalb ist

$$(16.) \qquad y - \eta = -\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

$$(17.) \qquad x - \xi = -(y - \eta) f'(x) = \frac{[1 + f'(x)^2] f'(x)}{f''(x)},$$

$$(18.) \qquad \varrho^2 = \frac{[1 + f'(x)^2]^3}{f''(x)^2};$$

folglich wird

$$(19.) \qquad \xi = x - \frac{[1 + f'(x)^2] f'(x)}{f''(x)}, \quad \eta = y + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

---

*) Über die Bildung dieser Ableitungen vergleiche man § 80, Aufgabe 2.

$$\varrho = \pm \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \tag{20.}$$

Wenn man

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{statt} \quad f'(x) \quad \text{und} \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{statt} \quad f''(x)$$

schreibt, so erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 142 der Tabelle

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x - \frac{(1 + p^2)p}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 p}{q}, \\ \eta &= y + \frac{1 + p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}, \\ \varrho &= \pm \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q}. \end{aligned}\right. \tag{21.}$$

Hierbei wird man für $\varrho$ das obere oder das untere Vorzeichen wählen, je nachdem $q$ mit $\frac{ds}{dx}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat, damit $\varrho$ selbst positiv wird.

Da $x$ und $y$ die Koordinaten des Berührungspunktes sind, so mögen die laufenden Koordinaten des Kreises mit $x'$ und $y'$ bezeichnet werden, so daß er die Gleichung

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 - \varrho^2 = 0 \tag{22.}$$

hat. Man nennt diesen Kreis den „*Oskulationskreis* oder *Krümmungskreis*"; er hat, wie aus dem vorhergehenden folgt, im allgemeinen nur eine Berührung von der *zweiten* Ordnung mit der Kurve. In besonderen Punkten der Kurve kann aber auch eine Berührnng *höherer* Ordnung mit dem Krümmungskreise stattfinden. Die Bedingung dafür ist

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = g'''(x) = -\frac{3\varrho^2(x - \xi)}{(y - \eta)^5}. \tag{23.}$$

In den Punkten der Kurve, für welche $f'(x)$, oder $f''(x)$ unendlich groß wird, bringe man die Gleichung derselben auf die Form

$$x = \varphi(y),$$

dann hat der Krümmungskreis im Punkte $P$ mit der Kurve eine Berührung *dritter* Ordnung, wenn

(23a.) $$\varphi'''(y) = \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5}$$

ist.

Sind $x$ und $y$ Funktionen einer dritten Veränderlichen $t$, also

(24.) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

so gehen, mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 135 der Tabelle, die Gleichungen (21.) über in

(25.) $$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = x - \dfrac{ds^2dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\[2ex] \eta = y + \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = y + \dfrac{ds^2dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\[2ex] \varrho = \pm\dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = \pm\dfrac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \end{cases}$$

**Aufgabe 3.** Man soll eine Parabel bestimmen, deren Achse zur $Y$-Achse parallel ist, und welche mit der Kurve

(26.) $$a^2y = x^3$$

im Punkte $P$ mit den Koordinaten $x = a$, $y = a$ eine Berührung von möglichst hoher Ordnung hat.

**Auflösung.** Hier ist

(27.) $$y = \frac{x^3}{a^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{a^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{a^2}.$$

Die Gleichung einer Parabel, deren Achse zur $Y$-Achse parallel ist, hat die Form

(28.) $$Ax^2 + 2By' + 2Cx + D = 0.$$

Man kann hier also über die drei Größen $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$ passend verfügen, so daß für $x = a$

$$(29.)\qquad y' = y = a,\quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} = 3,\quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{a}$$

wird. Dies gibt zunächst

$$(30.)\quad Aa^2 + 2Ba + 2Ca + D = 0,$$

$$(31.)\quad A(x^2 - a^2) + 2B(y' - a) + 2C(x - a) = 0,$$

$$(32.)\quad Ax + B\frac{dy'}{dx} + C = 0,\quad \text{oder}\quad Aa + 3B + C = 0,$$

$$(33.)\quad A \;+ B\frac{d^2y'}{dx^2} = 0,\quad \text{oder}\quad A + \frac{6B}{a} = 0.$$

Daraus folgt

$$(34.)\qquad 6B = -Aa,\quad 2C = -Aa,$$

$$(35.)\qquad 3(x^2 - a^2) - a(y' - a) - 3a(x - a) = 0,$$

oder

$$(35\text{a.})\qquad 3x(x - a) = a(y' - a).$$

Nach Gleichung (6.) in § 91 war

$$P_1P'_1 = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[g^{(n+1)}(x + \Theta_1 h) - f^{(n+1)}(x + \Theta h)\right].$$

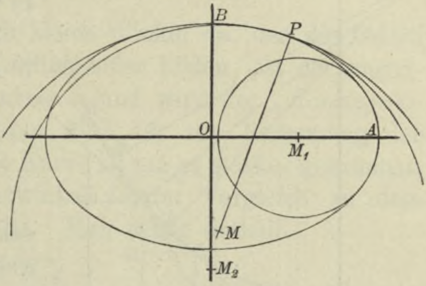
Ist also $n$ *gerade*, so wechselt $P_1P'_1$ mit $h$ sein Zeichen, und ist $n$ *ungerade*, so bleibt das Zeichen von $P_1P'_1$ unverändert, wenn auch $h$ sein Zeichen wechselt; d. h. *die beiden Kurven durchsetzen einander, wenn die Ordnung der Berührung gerade ist, und von den beiden Kurven verläuft die eine in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes ganz an derselben Seite der anderen, wenn die Ordnung der Berührung ungerade ist.*

Ein Beispiel hierfür liefert bereits die *Tangente* einer Kurve. Im allgemeinen ist die Berührung nur von der ersten Ordnung, dann liegen alle dem Berührungspunkt benachbarten Kurvenpunkte auf derselben Seite der Tangente. Ist aber die Berührung von der zweiten Ordnung, so ist der Berührungspunkt ein *Wendepunkt* der Kurve, und die Tangente ist eine *Wende-*

*tangente*, welche die Kurve im Berührungspunkte durchsetzt. (Vergl. Fig. 91 und 92 auf Seite 416.)

Ein zweites Beispiel liefert der Oskulationskreis oder Krümmungskreis, der sich einer Kurve im Punkte $P$ möglichst eng anschmiegt. Im allgemeinen wird die Berührung (nach Aufgabe 2) von der *zweiten* Ordnung sein. Dann wird, wie Figur 107 im Punkte $P$ zeigt, der Kreis die Kurve durchsetzen. Nur ausnahmsweise ist die Berührung von der *dritten* Ordnung. So ist z. B. in den Scheiteln der Ellipse, wie später gezeigt werden soll, die Berührung zwischen Krümmungskreis und Kurve von der *dritten* Ordnung; deshalb verläuft in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes der Kreis an derselben Seite der Kurve.

Fig. 107.




## § 93.
## Der Kontingenzwinkel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 151.)

Es seien $P$, $P_1$, $P_2$ drei benachbarte Punkte der Kurve

$$y = f(x), \tag{1.}$$

die zu den Koordinaten

$$\begin{array}{ll} x = x, & y = f(x), \\ x_1 = x + \Delta x, & y_1 = f(x + \Delta x), \\ x_2 = x + 2\Delta x & y_2 = f(x + 2\Delta x) \end{array}$$

gehören; dann ist (Fig. 108)

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} RPP_1 = \frac{RP_1}{PR} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.}$$

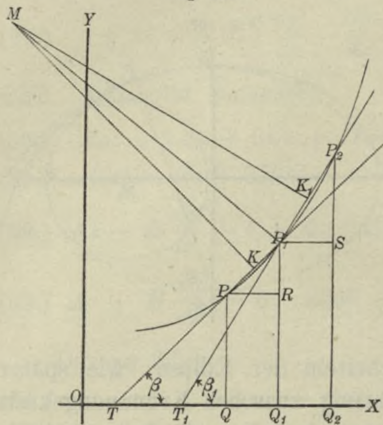
Ebenso findet man

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg} SP_1P_2 = \frac{SP_2}{P_1S} = \frac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}, \tag{3.}$$

folglich ist

$$(4.)\quad \operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\cos\beta_1 \cos\beta} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x}.$$

Fig. 108.




Dies gibt, wenn man $\beta_1 - \beta$ mit $\Delta\beta$ bezeichnet,

$$(5.)\quad \frac{\sin(\Delta\beta)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos\beta_1 \cos\beta} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}.$$

Läßt man jetzt $\Delta x$ verschwindend klein werden, so geht $\beta$ in den Winkel $\alpha$ über, den die Tangente im Punkte $P$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, und es wird

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\sin(\Delta\beta)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\sin(\Delta\alpha)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\sin(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x=0} (\cos\beta_1) = \lim_{\Delta x=0} (\cos\beta) = \cos\alpha$$

und nach Formel Nr. 82a der Tabelle

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = f''(x);$$

folglich geht Gleichung (5.) über in

$$(6.)\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Auf diese Gleichung wird man auch geführt, wenn man die Gleichung

$$(7.)\quad \operatorname{tg}\alpha = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

nach $x$ differentiiert. Dabei ist

$$(8.)\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

weshalb man die Gleichung (6.) auf die Form

$$(9.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}$$

bringen kann. Der unendlich kleine Winkel $d\alpha$, den die beiden unendlich nahen Tangenten miteinander bilden, ist der unendlich kleine Zuwachs des Winkels $\alpha$ und wird der „*Kontingenzwinkel*“ genannt. Er gibt ein Maß für die Krümmung der Kurve im Punkte $P$, denn die Kurve ist um so stärker gekrümmt, je größer dieser Kontingenzwinkel $d\alpha$ im Vergleich zu dem unendlich kleinen Bogen $ds$ ist. Man nennt deshalb

$$(10.)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3} = \frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die „*Krümmung der Kurve*“ im Punkte $P$. Dies gibt nach Formel Nr. 149 der Tabelle

$$(11.)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

d. h. die Krümmung der Kurve ist hier in derselben Weise erklärt wie in § 92. Man kann Gleichung (11.) auch unmittelbar aus Figur 108 finden. Die Lote, welche man in der Mitte der Seiten $PP_1$ und $P_1P_2$ errichtet, schneiden sich nämlich in dem Mittelpunkte $M$ des Kreises, der durch die Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht. Dabei ist

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{PP_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{\Delta x}{P_1P_2},$$

also, wenn $\Delta x$ verschwindend klein wird,

$$\lim \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta} = \lim \frac{PP_1}{P_1P_2} = \frac{\cos(\alpha + d\alpha)}{\cos\alpha} = 1,$$

oder

$$\lim PP_1 = \lim P_1P_2$$

und

$$\triangle\, MKP_1 \cong MK_1P_1,$$

$$\sphericalangle\, KMP_1 = \sphericalangle\, K_1MP_1 = \tfrac{1}{2}d\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) = \frac{KP_1}{\varrho} = \frac{ds}{2\varrho},$$

oder

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho};$$

d. h. $\varrho$ ist der Halbmesser des Kreises, der durch die Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht.

## § 94.

## Krümmung der Kurven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 148 und 149.)

Der Kreis hat in allen seinen Punkten dieselbe *Krümmung*, und zwar ist die Krümmung um so größer, je kleiner der Halbmesser $\varrho$ des Kreises ist. Man setzt daher die Krümmung eines Kreises gleich dem reziproken Werte des Halbmessers, also gleich $\frac{1}{\varrho}$.

Bei anderen Kurven ist die Krümmung in verschiedenen Punkten eine verschiedene. Um sie zu messen, wird man die Kurve mit demjenigen Kreise vergleichen, welcher sich in dem betrachteten Punkte unter allen Kreisen am nächsten an die Kurve anschmiegt.

Es gibt nämlich für jeden Punkt $P$ einer beliebigen Kurve unendlich viele Kreise, welche die Kurve im Punkte $P$ berühren. Unter diesen Kreisen gibt es jedoch, wie in § 92 gezeigt wurde, einen, der sich an die Kurve näher anschmiegt als alle anderen. Dieser Kreis, der den Halbmesser $\varrho$ haben möge, heißt der „*Krümmungskreis*"; man nennt dann $\frac{1}{\varrho}$ „die *Krümmung* der Kurve in dem betrachteten Punkte".

Der Wert von $\varrho$ und ebenso die Werte der Koordinaten $\xi$ und $\eta$ des *Krümmungsmittelpunktes* wurden bereits in § 92 berechnet. (Vergl. die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle.)

Der Krümmungskreis kann aber auch in folgender Weise erklärt werden. Die Gleichung des Kreises

$$(1.)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\varrho^2=0$$

enthält drei willkürliche Konstante $\xi$, $\eta$, $\varrho$, welche man so bestimmen kann, daß der Kreis durch drei gegebene Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht. Dies gibt die drei Bedingungsgleichungen

$$(1\text{a.})\qquad x^2-2\xi x+\xi^2+y^2-2\eta y+\eta^2-\varrho^2=0,$$

$$(2.)\qquad x_1{}^2-2\xi x_1+\xi^2+y_1{}^2-2\eta y_1+\eta^2-\varrho^2=0,$$

$$(3.)\qquad x_2{}^2-2\xi x_2+\xi^2+y_2{}^2-2\eta y_2+\eta^2-\varrho^2=0.$$

Indem man die Gleichungen (1a.) und (2.) bezw. von den Gleichungen (2.) und (3.) subtrahiert, findet man hieraus

$$(4.)\qquad x_1{}^2-x^2-2\xi(x_1-x)+y_1{}^2-y^2-2\eta(y_1-y)=0,$$

$$(5.)\qquad x_2{}^2-x_1{}^2-2\xi(x_2-x_1)+y_2{}^2-y_1{}^2-2\eta(y_2-y_1)=0,$$

oder, wenn man Gleichung (4.) durch $x_1-x$ und Gleichung (5.) durch $x_2-x_1$ dividiert,

$$(6.)\qquad x_1+x-2\xi+(y_1+y-2\eta)\frac{y_1-y}{x_1-x}=0,$$

$$(7.)\qquad x_2+x_1-2\xi+(y_2+y_1-2\eta)\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraktion

$$(8.)\qquad x_2-x-(y_1+y-2\eta)\frac{y_1-y}{x_1-x}+(y_2+y_1-2\eta)\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0,$$

oder, wenn man

$$(y_2+y_1-2\eta)\frac{y_1-y}{x_1-x}-(y_2+y_1-2\eta)\frac{y_1-y}{x_1-x}=0$$

addiert,

$$(8\text{a.})\qquad x_2-x+(y_2-y)\frac{y_1-y}{x_1-x}+(y_2+y_1-2\eta)\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y}{x_1-x}\right)=0.$$

Diese Gleichungen gelten, wo auch die Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ liegen mögen. Nimmt man sie auf der Kurve an und setzt, der Figur 108 entsprechend,

$$(9.)\qquad x_1=x+\varDelta x,\quad x_2=x+2\varDelta x,$$

so gelten die Gleichungen

$$(10.)\qquad y=f(x),\quad y_1=f(x+\varDelta x),\quad y_2=f(x+2\varDelta x),$$

und die Gleichungen (6.) und (8a.) gehen über in

$$(6\text{a.})\qquad 2x+\varDelta x-2\xi+(y_1+y-2\eta)\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}=0,$$

$$(8\text{b.})\quad 2\varDelta x + [f(x+2\varDelta x) - f(x)]\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$
$$+ (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{f(x+2\varDelta x) - 2f(x+\varDelta x) + f(x)}{\varDelta x} = 0,$$

oder, wenn man die letzte Gleichung durch $2\varDelta x$ dividiert, in

$$(8\text{c.})\quad 1 + \frac{f(x+2\varDelta x)-f(x)}{2\varDelta x}\cdot\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{f(x+2\varDelta x) - 2f(x+\varDelta x) + f(x)}{\varDelta x^2} = 0.$$

Nun ist aber für $\lim \varDelta x = 0$

$$\lim y_2 = \lim y_1 = y;$$

sodann ist nach Formel Nr. 16 der Tabelle

$$\lim \frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

und ebenso, wenn man $\varDelta x$ mit $2\varDelta x$ vertauscht,

$$\lim \frac{f(x+2\varDelta x)-f(x)}{2\varDelta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x);$$

endlich ist nach Formel Nr. 82a der Tabelle

$$\lim \frac{f(x+2\varDelta x) - 2f(x+\varDelta x) + f(x)}{\varDelta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Deshalb erhält man aus den Gleichungen (6a.) und (8c.), wenn die Punkte $P$, $P_1$ und $P_2$ einander unendlich nahe rücken, so daß sich $\varDelta x$ dem Grenzwerte 0 nähert,

$$(11.)\qquad (x-\xi) + (y-\eta)f'(x) = 0,$$

$$(12.)\qquad 1 + f'(x)^2 + (y-\eta)f''(x) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man wieder in Übereinstimmung mit den Gleichungen (16.), (17.) und (18.) in § 92

$$(13.)\quad y - \eta = -\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)},\quad x - \xi = \frac{[1+f'(x)^2]f'(x)}{f''(x)},$$

$$(14.)\qquad \varrho = \pm\frac{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

*Der Krümmungskreis* (wie schon aus der Untersuchung in § 93 folgt) *kann also auch erklärt werden als der Kreis, welcher durch drei unendlich nahe Punkte der Kurve hindurchgeht.*

Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, daß zwei Kurven $n+1$ unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben, wenn sie eine Berührung $n^{\text{ter}}$ Ordnung besitzen.

## § 95.

## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll den Krümmungskreis für die *Parabel*

$$y^2 = 2ax \tag{1.}$$

bestimmen*).

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{y^3}, \tag{2.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = \frac{a^2+y^2}{y^2}. \tag{3.}$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle ein, so findet man

$$\xi = x - \frac{a^2+y^2}{y^2}\cdot\frac{a}{y}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = x + \frac{a^2+y^2}{a}$$

oder

$$\xi = x + \frac{a^2+2ax}{a} = a + 3x, \tag{4.}$$

$$\eta = y + \frac{a^2+y^2}{y^2}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = y - \frac{(a^2+y^2)y}{a^2},$$

oder

$$\eta = \frac{a^2y - a^2y - y^3}{a^2} = -\frac{y^3}{a^2}, \tag{5.}$$

$$\varrho = \pm\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y^3}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = \mp\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}. \tag{6.}$$

---

*) In dieser Aufgabe ist der Parameter der Parabel nicht wie gewöhnlich mit $p$, sondern mit $a$ bezeichnet, weil $p$ hier und in den folgenden Aufgaben gleich $\frac{dy}{dx}$ sein soll.

Für den Scheitel der Parabel werden $x$ und $y$ gleich 0, folglich ist in diesem Punkte

$$\varrho = a, \quad \xi = a, \quad \eta = 0. \tag{7.}$$

In dem Scheitel hat auch der Krümmungskreis mit der Parabel eine Berührung von der *dritten* Ordnung. Da aber die Ausdrücke

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3a^3}{y^5} \tag{8.}$$

für $x = 0$, $y = 0$ unendlich groß werden, so wird es zum Beweise zweckmäßig sein, die Gleichung der Kurve auf die Form

$$x = \frac{y^2}{2a} \tag{9.}$$

zu bringen und zu zeigen, daß

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5} \tag{10.}$$

wird. (Vergl. Formel Nr. 150 der Tabelle.) In der Tat, es wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{a}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = 0, \tag{11.}$$

und es wird

$$-\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5} = -\frac{3a^2(0-0)}{-a^5} = 0;$$

Gleichung (10.) wird also befriedigt, woraus folgt, daß im Scheitel der Parabel eine Berührung *dritter* Ordnung mit dem zugehörigen Krümmungskreise stattfindet.

**Aufgabe 2.** Man soll den Krümmungskreis für die *Ellipse*

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{12.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (12.) findet man

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \tag{13.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}. \tag{14.}$$

Setzt man diese Werte in die Formeln 148 und 149 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = x - \frac{x(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^4b^2}.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (12.) ist aber

(15.) $$b^4x^2 + a^4y^2 = b^2(a^4 - e^2x^2) = a^2(b^4 + e^2y^2),$$

folglich wird

(16.) $$\xi = x - \frac{x(a^4 - e^2x^2)}{a^4} = \frac{e^2x^3}{a^4},$$

$$\eta = y + \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = y - \frac{y(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^2b^4},$$

oder nach Gleichung (15.)

(17.) $$\eta = y - \frac{y(b^4 + e^2y^2)}{b^4} = -\frac{e^2y^3}{b^4},$$

(18.) $$\varrho = \pm\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6y^3}\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = \mp\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Ferner ist

(19.) $$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3a^6y}{b^4x^5},$$

folglich wird für $x = 0$, $y = \pm b$

(20.) $$\xi = 0, \quad \eta = \mp\frac{e^2}{b}, \quad \varrho = \frac{a^2}{b},$$

(21.) $$\frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad -\frac{3\varrho^2(x - \xi)}{(y - \eta)^5} = 0,$$

es wird also

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\varrho^2(x - \xi)}{(y - \eta)^5},$$

woraus nach Formel Nr. 150 der Tabelle folgt, daß in diesen beiden Scheiteln eine Berührung *dritter* Ordnung mit dem Krümmungskreise stattfindet.

In ähnlicher Weise findet man für $x = \pm a$, $y = 0$

(22.) $$\xi = \pm\frac{e^2}{a}, \quad \eta = 0, \quad \varrho = \frac{b^2}{a},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = 0, \quad -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5} = 0, \tag{23.}$$

es wird also

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5}, \tag{24.}$$

woraus wieder nach Formel Nr. 150 der Tabelle folgt, daß auch in den beiden anderen Scheiteln der Ellipse eine Berührung *dritter* Ordnung mit dem Krümmungskreise stattfindet.

Diesen Umstand kann man benutzen, um eine Ellipse ziemlich genau zu zeichnen. Man konstruiert die Krümmungskreise in den 4 Scheiteln der Ellipse und verbindet die Kreisbögen, so weit sie sich der Ellipse eng anschmiegen, durch das Kurvenlineal miteinander. (Vergl. Fig. 107.)

**Aufgabe 3.** Man soll den Krümmungskreis für die *Hyperbel*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{25.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Die Rechnungen gestalten sich hier genau ebenso wie in der vorhergehenden Aufgabe, man hat nur $+b^2$ mit $-b^2$ zu vertauschen. Dadurch erhält man wieder

$$\xi = \frac{e^2x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2y^3}{b^4}, \quad \varrho = \mp\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \tag{26.}$$

genau so wie bei der Ellipse, hier ist aber $e^2$ gleich $a^2 + b^2$, während bei der Ellipse $e^2$ gleich $a^2 - b^2$ war.

**Aufgabe 4.** Man soll den Krümmungskreis für die *Kettenlinie*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{27.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (27.) folgt mit Rücksicht auf die Formeln, welche in § 88, Aufgabe 7 entwickelt worden sind,

$$p = \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \tag{28.}$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{y}{a^2}, \tag{29.}$$

$$\text{(30.)} \qquad \frac{ds}{dx} = \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{y}{a}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle ein, so erhält man

$$\text{(31.)} \qquad \xi = x - \frac{y^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} \cdot \frac{a^2}{y} = x - \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

$$\text{(32.)} \qquad \eta = y + \frac{y^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{y} = 2y,$$

$$\text{(33.)} \qquad \varrho = \pm \frac{y^3}{a^3} \cdot \frac{a^2}{y} = \pm \frac{y^2}{a}.$$

Es war aber auch die Normale

$$\text{(34.)} \qquad N = y\frac{ds}{dx} = \frac{y^2}{a}$$

(vergl. Gleichung (48.) auf Seite 404), folglich ist der Krümmungshalbmesser bei der Kettenlinie der zugehörigen Normale gleich; er hat aber die entgegengesetzte Richtung, wie man schon aus Gleichung (32.) erkennt.

**Aufgabe 5.** Man soll den Krümmungskreis für die *Zykloide*

$$\text{(35.)} \qquad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (35.) folgt durch Differentiation

$$\text{(36.)} \qquad dx = a(1 - \cos t)dt, \qquad dy = a \sin t\, dt,$$

$$\text{(37.)} \qquad d^2x = a \sin t \,.\, dt^2, \qquad d^2y = a \cos t \,.\, dt^2,$$

$$\text{(38.)} \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos t)dt^2 = 4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2,$$

$$\text{(38a.)} \qquad ds = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$\text{(39.)} \qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = -a^2(1 - \cos t)dt^3 = -2a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^3.$$

Dies gibt nach Formel Nr. 148 und 149 der Tabelle

$$\xi = x - \frac{4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cdot a \sin t}{-2a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = a(t - \sin t) + 2a \sin t,$$

oder

$$\xi = a(t + \sin t); \tag{40.}$$

$$\eta = y + \frac{4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cdot a(1 - \cos t)}{-2a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t),$$

oder

$$\eta = -a(1 - \cos t) = -y, \tag{41.}$$

$$\varrho = \pm \frac{8a^3 \sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{-2a^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \mp 4a \sin\left(\frac{t}{2}\right). \tag{42.}$$

Nun war aber (nach Gleichung (61.) in § 88) die Normale

$$N = y\frac{ds}{dx} = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right), \tag{43.}$$

folglich *ist der Krümmungshalbmesser doppelt so groß wie die Normale.*

Noch etwas schneller kommt man auf folgende Weise zum Ziele. Aus den Gleichungen (36.) findet man

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)},$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

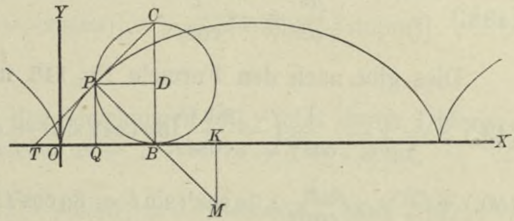
$$\xi = x + \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot 4a \sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = a(t + \sin t),$$

$$\eta = y - \frac{4a \sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = -a(1 - \cos t) = -y,$$

$$\varrho = \pm \frac{-4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)} = \mp 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Diese Resultate werden durch Figur 109 bestätigt.

Fig. 109.




Ist nämlich $M$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises für den Punkt $P$, so wird

$$PM = 2PB,$$

oder

$$PB = BM.$$

Daraus folgt

$$\triangle BKM \cong \triangle BQP,$$

und deshalb

$$\eta = KM = -MK = -QP = -y,$$
$$BK = QB = PD = a\sin t,$$

also

$$\begin{aligned}\xi &= OQ + 2QB = a(t - \sin t) + 2a\sin t \\ &= a(t + \sin t).\end{aligned}$$

In ihrem höchsten Punkte hat die Zykloide mit dem zugehörigen Krümmungskreise eine Berührung von der dritten Ordnung, und der Halbmesser dieses Kreises ist gleich $4a$.

**Aufgabe 6.** Man soll den Krümmungskreis der *Astroide*

(44.) $$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (44.) folgt durch Differentiation

(45.) $$dx = -3a\cos^2 t\sin t\,.\,dt, \quad dy = 3a\sin^2 t\cos t\,.\,dt.$$

(46.) $$p = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t,$$

$$(47.)\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t},$$

$$(48.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$(48\text{a.})\qquad \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Dies gibt nach den Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle

$$(49.)\quad \xi = x - \frac{1}{\cos^2 t}\left(-\frac{\sin t}{\cos t}\right)3a\cos^4 t\sin t = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t,$$

$$(50.)\quad \eta = y + \frac{1}{\cos^2 t}\cdot 3a\cos^4 t\sin t = 3a\cos^2 t\sin t + a\sin^3 t,$$

$$(51.)\quad \varrho = \pm\frac{-1}{\cos^3 t}\cdot 3a\cos^4 t\sin t = \mp 3a\sin t\cos t.$$

**Aufgabe 7.** Man soll den Krümmungskreis für die Kurve

$$(52.)\qquad x = 3t^2,\quad y = 3t - t^3$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (52.) folgt durch Differentiation

$$(53.)\qquad dx = 6tdt,\quad dy = 3(1 - t^2)dt,$$

$$(54.)\qquad d^2x = 6dt^2,\quad d^2y = -6tdt^2,$$

$$(55.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = 9(1 + 2t^2 + t^4)dt^2 = 9(1 + t^2)^2dt^2,$$

$$(55\text{a.})\qquad ds = 3(1 + t^2)dt,$$

$$(56.)\qquad dxd^2y - dyd^2x = -18(1 + t^2)dt^3.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{9(1 + t^2)^2 . 3(1 - t^2)}{-18(1 + t^2)} = 3t^2 + \frac{3}{2}(1 - t^4),$$

oder

$$(57.)\qquad \xi = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4);$$

$$\eta = y + \frac{9(1 + t^2)^2 . 6t}{-18(1 + t^2)} = 3t - t^3 - 3t(1 + t^2),$$

oder

$$(58.)\qquad \eta = -4t^3;$$

$$(59.)\qquad \varrho = \pm\frac{27(1+t^2)^3}{-18(1+t^2)} = \mp\frac{3}{2}(1+t^2)^2.$$

**Aufgabe 8.** Man soll den Krümmungskreis der *Epizykloide*

$$(60.)\quad x = a[m\cos t - \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (60.) folgt durch Differentiation, wenn man wieder $m - 1 = n$, $m + 1 = l$ setzt,

$$(61.)\quad dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(62.)\quad dy = ma[+\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(63.)\quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right),\quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

$$(64.)\quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}$$

$$= \frac{l}{4ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{lt}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$= a[m\cos t - \cos(mt)] + \frac{2ma}{l}[\cos(mt) - \cos t],$$

oder, wenn man

$$(65.)\qquad a - \frac{2a}{l} = \frac{na}{l} = \frac{2ma}{l} - a = a_1$$

setzt,

$$(66.)\qquad \xi = a_1[m\cos t + \cos(mt)],$$

$$\eta = y + \frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)$$

$$= a[m\sin t - \sin(mt)] + \frac{2ma}{l}[\sin(mt) - \sin t],$$

oder

$$(67.)\qquad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)].$$

Endlich wird

$$(68.)\qquad \varrho = \pm\frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Aus Figur 84 auf Seite 408 erkennt man, daß

$$(69.)\qquad PB = 2a\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

wird, folglich ist

$$(70.)\qquad \varrho = \frac{2m}{l}\cdot PB = \frac{2n+2}{n+2}\cdot PB.$$

Daraus ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.

**Aufgabe 9.** Man soll den Krümmungskreis der *Hypozykloide*

$$(71.)\qquad x = a[m\cos t + \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

bestimmen.

**Auflösung.** Wenn man hier $m+1$ mit $n$ und $m-1$ mit $l$ bezeichnet, so wird in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$(72.)\qquad dx = -2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(73.)\qquad dy = +2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(74.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right),\quad \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

$$(75.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{l}{4ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)};$$

dies gibt, wenn man $\frac{na}{l}$ mit $a_1$ bezeichnet,

$$(76.)\qquad \xi = a_1[m\cos t - \cos(mt)],$$

$$(77.)\qquad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)],$$

$$(78.)\qquad \varrho = \mp\frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{2m}{l}\cdot PB. \qquad \text{(Vgl. Fig. 86.)}$$

**Aufgabe 10.** Man soll den Krümmungskreis der *Kreisevolvente*

$$(79.)\qquad x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

bestimmen.

**Auflösung.** Durch Differentiation der Gleichungen (79.) erhält man

$$(80.)\qquad dx = at\cos t\,.\,dt,\quad dy = at\sin t\,.\,dt,$$

$$(81.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t,\quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos t},$$

$$(82.)\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{at\cos t} = \frac{1}{at\cos^3 t}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 148 und 149 der Tabelle ein, so wird

$$(83.)\qquad \xi = x - at\sin t = a(\cos t + t\sin t) - at\sin t = a\cos t,$$

$$(84.)\qquad \eta = y + at\cos t = a(\sin t - t\cos t) + at\cos t = a\sin t,$$

$$(85.)\qquad \varrho = \pm at.$$

Daraus ergibt sich, daß der Punkt $B$, in welchem der abgewickelte Faden den Kreis verläßt (Fig. 88), der Krümmungsmittelpunkt ist.

## § 96.

## Die Krümmungsmittelpunkts-Kurven oder Evoluten.

Wenn man sich die Krümmungskreise zu sämtlichen Punkten $P$, $P_1$, $P_2$, ... einer Kurve konstruiert denkt, so wird durch die zugehörigen Krümmungs-Mittelpunkte $M$, $M_1$, $M_2$, ... eine neue Kurve bestimmt, welche man die „*Krümmungsmittelpunkts-Kurve oder Evolute*“ der gegebenen Kurve nennt. Durchläuft also ein Punkt die ursprüngliche Kurve, so durchläuft sein Krümmungsmittelpunkt die Krümmungsmittelpunkts-Kurve. Um die Gleichung derselben zu finden, braucht man nur aus den drei Gleichungen

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0, \tag{1.}$$

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} = x - \frac{[1+f'(x)^2]f'(x)}{f''(x)}, \tag{2.}$$

$$\eta = y + \frac{1+p^2}{q} \quad = y + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} \tag{3.}$$

die Größen $x$ und $y$ zu eliminieren, dann erhält man die gesuchte Gleichung zwischen $\xi$ und $\eta$.

Sind

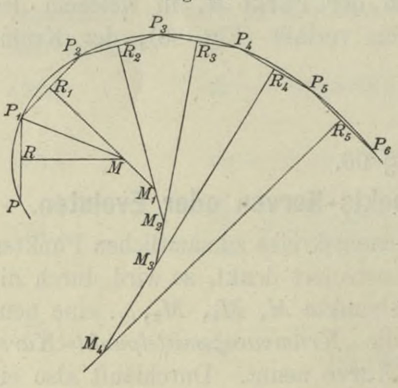
$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t)$$

als Funktionen einer dritten Veränderlichen $t$ gegeben, so werden auch

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x - \frac{ds^2dy}{dxd^2y - dyd^2x} = \varphi(t) - \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]\psi'(t)}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}, \\ \eta &= y + \frac{ds^2dx}{dxd^2y - dyd^2x} = \psi(t) + \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]\varphi'(t)}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

Funktionen von $t$, so daß die Krümmungsmittelpunkts-Kurve schon durch diese beiden Gleichungen in zweckmäßiger Form gegeben ist, da man zu jedem Werte von $t$ die zugehörigen Werte von $\xi$ und $\eta$ findet.

Fig. 110.




Um die Beziehungen leichter zu erkennen, welche zwischen der ursprünglichen Kurve und der Krümmungsmittelpunkts-Kurve bestehen, ersetze man die Kurve zunächst durch ein Polygon $PP_1P_2P_3\ldots$ mit lauter gleichen, beliebig kleinen Seiten (vergl. Figur 110), dessen Ecken $P$, $P_1$, $P_2\ldots$ auf der Kurve liegen. Dann kann man die Mittelpunkte $M$, $M_1$, $M_2,\ldots$ der Kreise finden, die durch je drei aufeinander folgende Punkte $P$ gehen, indem man die Seiten des

Polygons halbiert und in den Mittelpunkten $R$, $R_1$, $R_2, \ldots$ Lote $RM$, $R_1M_1$, $R_2M_2, \ldots$ auf den Seiten des Polygons errichtet. Dabei möge vorausgesetzt werden, daß für das betrachtete Kurvenstück vom Punkte $P$ ab die Krümmungshalbmesser immer größer werden.

Rücken die Punkte $P$, $P_1$, $P_2, \ldots$ einander immer näher, so geht das Polygon $PP_1P_2\ldots$ in die ursprüngliche Kurve und das Polygon $MM_1M_2\ldots$ in die Krümmungsmittelpunkts-Kurve über. Dabei werden die Geraden $PP_1$, $P_1P_2$, $P_2P_3, \ldots$ *Tangenten* der ursprünglichen Kurve, weil sie zwei unendlich nahe Kurvenpunkte miteinander verbinden, und die darauf senkrecht stehenden Geraden $RM$, $R_1M_1$, $R_2M_2, \ldots$ werden *Normalen* der ursprünglichen Kurve. Die Gerade $R_1M_1$ geht aber auch durch $M$, die Gerade $R_2M_2$ geht auch durch $M_1$, usw. Da nun auch die Punkte $M$, $M_1$, $M_2, \ldots$ einander unendlich nahe rücken, so sind die Geraden $RM$, $R_1M_1$, $R_2M_2, \ldots$ gleichzeitig *Tangenten* der Krümmungsmittelpunkts-Kurve, und man erhält

**Satz 1.** *Die Normalen der ursprünglichen Kurve sind Tangenten der Krümmungsmittelpunkts-Kurve.*

Dabei folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $RMP_1$ und $R_1MP_1$, daß

$$RM = R_1M$$

ist. Ebenso wird

$$R_1M_1 = R_2M_1, \quad R_2M_2 = R_3M_2, \quad R_3M_3 = R_4M_3, \ldots.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} R_1M_1 - RM = R_1M_1 - R_1M = MM_1, \\ R_2M_2 - R_1M_1 = R_2M_2 - R_2M_1 = M_1M_2, \\ R_3M_3 - R_2M_2 = R_3M_3 - R_3M_2 = M_2M_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_\alpha M_\alpha - R_{\alpha-1}M_{\alpha-1} = R_\alpha M_\alpha - R_\alpha M_{\alpha-1} = M_{\alpha-1}M_\alpha. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition

$$(6.)\quad R_\alpha M_\alpha - RM = MM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_{\alpha-1}M_\alpha.$$

Rücken die Punkte $P$, $P_1$, $P_2, \ldots$ einander unendlich nahe, so gehen $RM$, $R_1M_1$, $R_2M_2, \ldots$ in die Krümmungshalbmesser $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2, \ldots$, und das Polygon $MM_1M_2M_3\ldots$ geht in den

Bogen $\sigma$ der Krümmungsmittelpunkts-Kurve über. Bezeichnet man daher den Unterschied zweier benachbarten Krümmungshalbmesser mit $d\varrho$ und die entsprechende unendliche kleine Seite des Polygons $MM_1M_2M_3\ldots$ mit $d\sigma$, so wird $d\sigma$ der unendlich kleine Zuwachs des Bogens $\sigma$, und die Gleichungen (5.) und (6.) erhalten die Form

$$d\varrho = d\sigma, \tag{5a.}$$

$$\varrho_\alpha - \varrho = \sigma, \tag{6a.}$$

wobei $\sigma$ der Bogen der Krümmungsmittelpunkts-Kurve ist, welcher zwischen den beiden Krümmungshalbmessern $\varrho$ und $\varrho_\alpha$ liegt.

Darin sind folgende Sätze ausgesprochen:

**Satz 2.** *Die unendlich kleine Größe, um welche sich der Krümmungshalbmesser einer Kurve ändert, ist gleich der entsprechenden Änderung des Bogens der Krümmungsmittelpunkts-Kurve.*

**Satz 3.** *Die Differenz zweier Krümmungshalbmesser $\varrho_\alpha$ und $\varrho$ gibt die Länge des Bogens $\sigma$ der Krümmungsmittelpunkts-Kurve zwischen $\varrho$ und $\varrho_\alpha$.*

Aus diesen beiden Sätzen folgt, daß die ursprüngliche Kurve aus der Krümmungsmittelpunkts Kurve durch Abwickelung (oder Aufwickelung) eines Fadens entsteht. Denkt man sich nämlich zunächst um das Polygon $MM_1M_2M_3\ldots M_\alpha$ einen vollkommen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden gelegt, dessen Endpunkt sich in $R$ befindet, so beschreibt der Endpunkt des Fadens zunächst einen Kreisbogen $RR_1$, weil $MR$ und $MR_1$ gleich lang sind, und aus der *gebrochenen* Linie $M_1MR$ wird die *gerade* Linie $M_1R_1$. Dann beschreibt der Endpunkt des Fadens einen Kreisbogen $R_1R_2$, und aus der *gebrochenen* Linie $M_2M_1R_1$ wird die *gerade* Linie $M_2R_2$; usw.

Rücken die Punkte $P$, $P_1$, $P_2, \ldots$ einander unendlich nahe, so fallen die kleinen Kreisbögen $RR_1$, $R_1R_2\ldots$ mit der ursprünglichen Kurve zusammen, und man erhält

**Satz 4.** *Die ursprüngliche Kurve entsteht durch Abwickelung (oder Aufwickelung) aus der Krümmungsmittelpunkts-Kurve.*

Man nennt deshalb auch die Krümmungsmittelpunkts-Kurve gewöhnlich die „*Evolute*" und die ursprüngliche Kurve die „*Evolvente*".

Da die Länge des Fadens noch beliebig ist, so folgt hieraus, daß bei der Abwickelung des Fadens unendlich viele Kurven entstehen. (Vergl. Fig. 111 auf folgender Seite.) Dies gibt

**Satz 5.** *Jede Kurve hat eine einzige Evolute, aber zu jeder als Evolute angenommenen Kurve gehören unendlich viele Evolventen.*

Diese Sätze ergeben sich auch durch Rechnung aus den Gleichungen

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1+p^2}{q}. \tag{7.}$$

Da $y$ durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

als Funktion von $x$ erklärt ist, so sind auch die Größen

$$p = f'(x), \quad q = f''(x), \quad r = f'''(x),$$

und deshalb auch $\xi$ und $\eta$ Funktionen von $x$. Durch Differentiation nach $x$ findet man daher aus den Gleichungen (7.)

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - \frac{q^2(1+3p^2) - p(1+p^2)r}{q^2} = \frac{-3p^2q^2 + p(1+p^2)r}{q^2}, \tag{8.}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = p + \frac{2pq^2 - (1+p^2)r}{q^2} = \frac{3pq^2 - (1+p^2)r}{q^2}. \tag{9.}$$

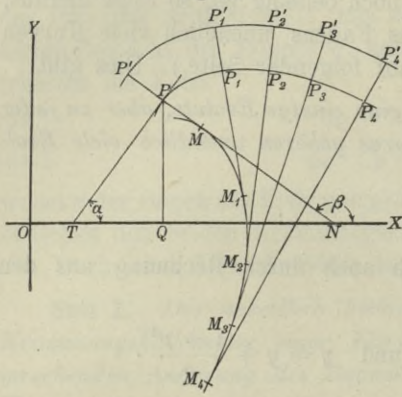
Indem man diese beiden Gleichungen durcheinander dividiert, findet man

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p} = -\frac{dx}{dy}. \tag{10.}$$

Ist also wie gewöhnlich $\alpha$ der Winkel, den die Tangente $TP$ in irgend einem Punkte $P$ der Kurve $y = f(x)$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, und $\beta$ der Winkel, welchen die Tangente $MN$ der Krümmungsmittelpunkts-Kurve in dem zugehörigen Punkte $M$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, so ist (Fig. 111)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\beta$$

Fig. 111.




und deshalb nach Gleichung (10.)

$$(11.)\quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(90^0 + \alpha),$$

d. h. *die beiden Tangenten $TP$ und $MN$ bilden* (hinreichend verlängert) *einen rechten Winkel miteinander.*

Die Gerade $PM$ steht aber als Krümmungshalbmesser ebenfalls senkrecht auf der Tangente $TP$, sie muß daher mit $MN$ zusammenfallen, da es durch den Punkt $M$ nur *eine* Gerade gibt, welche auf $TP$ senkrecht steht. Dies gibt wieder

**Satz 1.** *Die Normalen der ursprünglichen Kurve sind zugleich Tangenten der Krümmungsmittelpunkts-Kurve.*

Indem man die Gleichungen (8.) und (9.) in's Quadrat erhebt und addiert, findet man

$$(12.)\qquad \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2} = \frac{(1+p^2)[3pq^2 - (1+p^2)r]^2}{q^4},$$

und wenn man die Gleichung

$$\varrho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

differentiiert, erhält man

$$(13.)\qquad \frac{d\varrho}{dx} = \pm \frac{[3pq^2 - (1+p^2)r]\sqrt{1+p^2}}{q^2}.$$

Setzt man jetzt wieder das Bogenelement der Krümmungsmittelpunkts-Kurve

$$(14.)\qquad \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\sigma,$$

so findet man aus den Gleichungen (12.) und (13.)

(15.) $$d\sigma = \pm\, d\varrho.$$

Dies gibt

**Satz 2.** *Die unendlich kleine Größe, um welche sich der Krümmungshalbmesser einer Kurve ändert, ist gleich der entsprechenden Änderung des Bogens der Krümmungsmittelpunkts-Kurve.*

Aus diesen Sätzen ergeben sich dann ohne weiteres auch die Sätze 3, 4 und 5 in derselben Weise wie oben.

## § 97.
## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll die Evolute der *Parabel*

(1.) $$y^2 = 2ax$$

aufsuchen.

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (4.) und (5.) in § 95 wird für die Parabel

(2.) $$\xi = a + 3x, \quad \eta = -\frac{y^3}{a^2},$$

folglich ist

$$a^4\eta^2 = y^6 = 8a^3x^3 = \frac{8a^3(\xi - a)^3}{27},$$

oder

(3.) $$27a\eta^2 = 8(\xi - a)^3, \quad \text{oder} \quad \eta = \pm\frac{2(\xi - a)}{9a}\sqrt{6a(\xi - a)}.$$

Da $\eta$ nur reelle Werte haben kann, wenn

$$\xi - a \geqq 0, \quad \text{also} \quad \xi \geqq a$$

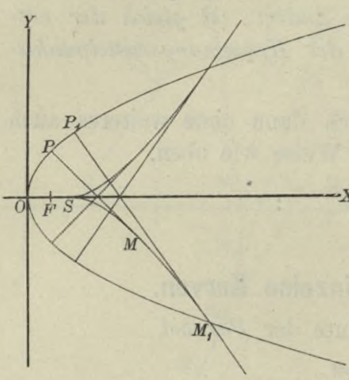
ist, so beginnt die Kurve in einem Punkte $S$ auf der $X$-Achse, welcher den Abstand $a$ vom Scheitel hat. Sie erstreckt sich von da in zwei zur $X$-Achse symmetrisch gelegenen Zweigen bis ins Unendliche. (Vergl. Fig. 112 auf folgender Seite.)

Aus Gleichung (3.) folgt durch Differentiation

(4.) $$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4(\xi - a)^2}{9a\eta} = \pm\frac{1}{3a}\sqrt{6a(\xi - a)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Für $\xi = a$ wird also der Winkel $\alpha$ gleich 0, d. h. die beiden Zweige berühren im Punkte $S$ die $X$-Achse, so daß die Kurve im Punkte $S$ eine Spitze hat.

Fig. 112.




Im übrigen hat $\frac{d\eta}{d\xi}$ dasselbe Vorzeichen wie $\eta$, der Kurvenzweig *über* der $X$-Achse *steigt* daher und der *unter* der $X$-Achse *fällt* beständig.

Ferner findet man aus Gleichung (4.) durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{4\left[2\eta(\xi - a) - (\xi - a)^2 \frac{d\eta}{d\xi}\right]}{9a\eta^2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.) und (4.)

$$(5.)\qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{72a\eta^2(\xi - a) - 16(\xi - a)^4}{81a^2\eta^3} = \frac{2(\xi - a)}{9a\eta}.$$

Also auch $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\eta$, d. h. der obere Zweig der Kurve ist nach oben *konkav*, und der untere Zweig der Kurve ist nach oben *konvex*.

Für

$$x = 4a \quad \text{wird} \quad y^2 = 8a^2,$$

und für

$$\xi = 4a \quad \text{wird} \quad \eta^2 = 8a^2,$$

folglich wird die Parabel in den Punkten mit den Koordinaten $x = 4a$, $y = \pm 2a\sqrt{2}$ von ihrer Evolute geschnitten.

**Aufgabe 2.** Man soll die Evolute der *Ellipse*

$$(6.)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 113, 114 und 115.)

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (16.) und (17.) in § 95 wird für die Ellipse

$$\xi = \frac{e^2 x^3}{a^4} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}, \tag{7.}$$

oder

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a\xi}{e^2}, \qquad \frac{y^3}{b^3} = -\frac{b\eta}{e^2},$$

also

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{y}{b} = -\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (6.) ein, so erhält man

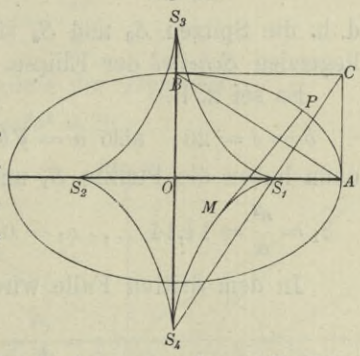
$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{8.}$$

Da die Ellipse die beiden Koordinaten-Achsen zu Symmetrie-Achsen hat, so gilt dasselbe auch von ihrer Evolute.

Für $\eta = 0$ wird $\xi = \pm \frac{e^2}{a}$,

und für $\xi = 0$ „ $\eta = \pm \frac{e^2}{b}$.

Fig. 113.




Dadurch erhält man die vier Schnittpunkte $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ der Evolute mit den Koordinaten-Achsen, und zwar sind diese Punkte wieder Spitzen der Kurve, weil

$$\xi^2 \leqq \frac{e^4}{a^2} \quad \text{und} \quad \eta^2 \leqq \frac{e^4}{b^2}$$

sein muß, und weil die Kurvenzweige in den angegebenen Punkten die $X$-Achsen, bezw. die $Y$-Achsen berühren.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$$a^2 > 2b^2, \quad a^2 = 2b^2, \quad \text{oder} \quad a^2 < 2b^2$$

ist. In dem ersten Falle wird die Ordinate des Punktes $S_3$

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} > b,$$

d. h. die Spitzen $S_3$ und $S_4$ liegen *außerhalb* der Ellipse. (Vergl. Fig. 113.)

Es sei z. B.

$$a = 30, \; b = 18, \quad \text{also} \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 24,$$

dann haben die Punkte $S_1$ und $S_3$ bezw. die Koordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 19{,}2, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 32.$$

In dem zweiten Falle wird die Ordinate des Punktes $S_3$

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} = b;$$

Fig. 114.

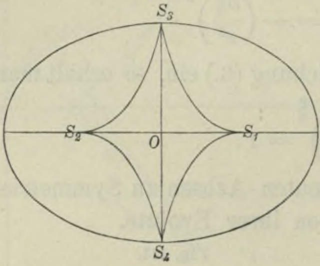
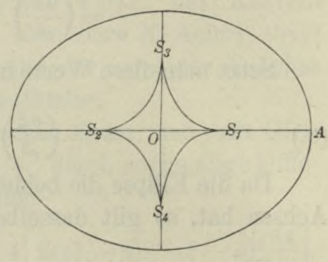



Fig. 115.




d. h. die Spitzen $S_3$ und $S_4$ sind zugleich die in der $Y$-Achse liegenden *Scheitel* der Ellipse. (Vergl. Fig. 114.)

Es sei z. B.

$$b = e = 20, \quad \text{also } a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{800} = 28{,}28\ldots,$$

dann haben die Punkte $S_1$ und $S_3$ bezw. die Koordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 14{,}14\ldots, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 20.$$

In dem dritten Falle wird die Ordinate des Punktes $S_3$

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} < b,$$

d. h. die Spitzen $S_3$ und $S_4$ liegen *innerhalb* der Ellipse. (Vergl. Fig. 115.)

Es sei z. B.

$$a = 30, \quad b = 24, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 18,$$

dann haben die Punkte $S_1$ und $S_3$ bezw. die Koordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 10{,}8, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 13{,}5.$$

Man kann übrigens diese Punkte $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ auch leicht konstruieren (Fig. 113), indem man von dem Punkte $C$ mit den Koordinaten

$$x = a, \quad y = b$$

auf die Gerade $AB$ mit der Gleichung

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1, \quad \text{oder} \quad y' = -\frac{b}{a}x' + b,$$

welche durch die beiden Scheitel $A$ und $B$ der Ellipse hindurchgeht, ein Lot fällt. Dieses Lot, welches die Gleichung

$$(9.) \qquad y' - b = \frac{a}{b}(x' - a), \quad \text{oder} \quad b(y' - b) = a(x' - a)$$

hat, schneidet die X-Achse in einem Punkte $S_1$ mit den Koordinaten

$$x' = \frac{e^2}{a}, \quad y' = 0$$

und die Y-Achse in einem Punkte $S_4$ mit den Koordinaten

$$x' = 0, \quad y' = -\frac{e^2}{b}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Evolute der *Hyperbel*

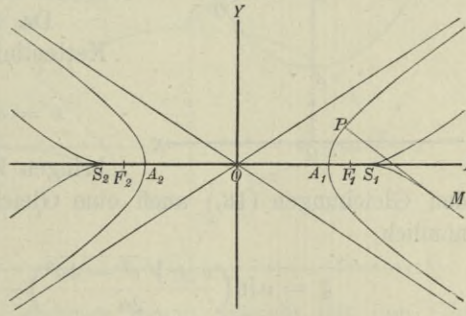
$$(10.) \qquad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aufsuchen.

Fig. 116.




**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(11.) \qquad \left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Man untersuche die Eigenschaften und die Gestalt dieser Kurve (Fig. 116.)

**Aufgabe 4.** Man soll die Evolute der *Kettenlinie*

$$(12.) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad \text{oder} \quad \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

oder

(12a.) $$y = a\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \sqrt{y^2 - a^2} = a\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right)$$

aufsuchen.

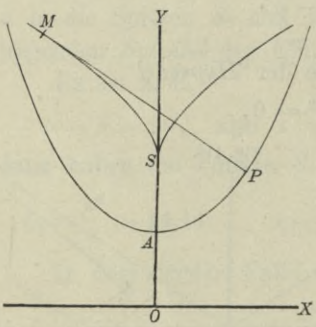
**Auflösung.** Nach den Gleichungen (31.) und (32.) in § 95 wird für die Kettenlinie

(13.) $$\xi = x - \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{a}, \quad \eta = 2y,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.)

(14.) $$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) = x - \dfrac{a}{2}\,\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{2x}{a}\right), \\ \eta = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = 2a\,\mathfrak{Cof}\left(\dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

Fig. 117.




Somit sind $\xi$ und $\eta$ als Funktionen einer dritten Veränderlichen $x$ dargestellt, so daß man die Kurve punktweise konstruieren und ihre Eigenschaften untersuchen kann. (Vergl. Fig. 117.)

Da man die Gleichung der Kettenlinie auf die Form

$$x = a\ln\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right)$$

bringen kann, so ergibt sich aus den Gleichungen (13.) auch eine Gleichung zwischen $\xi$ und $\eta$, nämlich

$$\xi = a\ln\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{2a}\right) - \frac{\eta\sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{4a}.$$

**Aufgabe 5.** Man soll die Evolute der *Zykloide*

(15.) $$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

aufsuchen.

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (40.) und (41.) in § 95 wird für die Zykloide

(16.) $$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Diese Gleichungen, welche zur Konstruktion und Untersuchung der Evolute wohl geeignet sind, haben einige Ähnlichkeit mit den Gleichungen der Zykloide selbst, ja man kann sogar zeigen, daß die Evolute gleichfalls eine Zykloide ist. Dies geschieht, indem man ein neues Koordinaten-System einführt, dessen Abszissen-Achse $O'X'$ parallel ist zur $X$-Achse, und dessen Ordinaten-Achse $O'Y'$ parallel ist zur $Y$-Achse (Fig. 118). Dabei soll der neue Anfangspunkt $O'$ eine solche Lage haben, daß

(17.) $$\xi' = a\pi + \xi, \quad \eta' = 2a + \eta$$

wird. Dadurch gehen die Gleichungen (16.) über in

(18.) $$\xi' = a(\pi + t + \sin t), \quad \eta' = a(1 + \cos t).$$

Setzt man jetzt noch

(19.) $$t = t' - \pi, \quad \text{also} \quad t' = \pi + t,$$

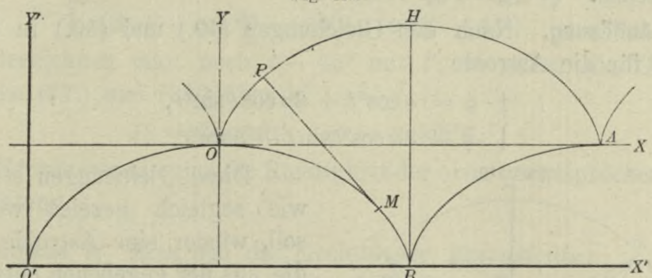
so wird

(20.) $$\sin t = -\sin t', \quad \cos t = -\cos t',$$

und die Gleichungen (18.) gehen über in

(21.) $$\xi' = a(t' - \sin t'), \quad \eta' = a(1 - \cos t').$$

Fig. 118.




Diese Gleichungen stimmen genau überein mit den Gleichungen (15.); es sind nur die Buchstaben $x$, $y$, $t$ bezw. vertauscht mit $\xi'$, $\eta'$, $t'$, d. h. *die gemeine Zykloide ist ihrer Evolute kongruent.*

Nach dem Vorstehenden ist also die Zykloide $OPHA$ (Fig. 118) eine Evolvente der beiden halben Zykloidenbögen $OB$ und $BA$. Befestigt man in $B$ einen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden und legt ihn um den halben Zykloidenbogen $BMO$, so wird das Ende $O$ die Zykloide $OPHA$ beschreiben, wenn man zunächst den Faden von dem Bogen $BMO$ abwickelt und dann auf den Bogen $BA$ aufwickelt, bis das Ende das Fadens in dem Punkte $A$ anlangt.

Daraus findet man auch leicht die Länge des Zykloidenbogens $OB$, denn die Länge des Fadens, der auf diesen Bogen aufgewickelt werden kann, ist

$$\widehat{OB} = HB = 4a. \tag{22.}$$

Der Bogen $OB$ ist aber kongruent dem Bogen $HA$, und $HA$ ist die Hälfte des ganzen Zykloidenbogens, folglich ist

$$OPHA = 8a. \tag{23.}$$

*Die Länge des ganzen Zykloidenbogens ist daher 8-mal so groß wie der Halbmesser des die Zykloide erzeugenden Kreises.*

In der Integral-Rechnung wird die Länge des Zykloidenbogens durch eine andere, allgemein verwendbare Methode ermittelt werden.

**Aufgabe 6.** Man soll die Evolute der *Astroide*

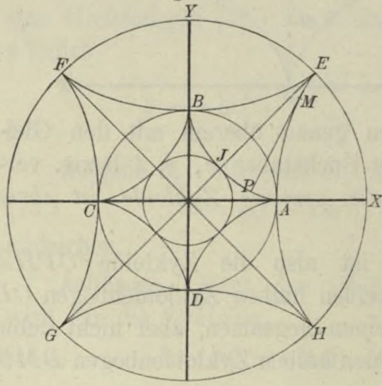
$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \tag{24.}$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 119.)

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (49.) und (50.) in § 95 wird für die Astroide

$$\begin{cases} \xi = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t, \\ \eta = 3a\cos^2 t\sin t + a\sin^3 t. \end{cases} \tag{25.}$$

Fig. 119.




Diese Gleichungen stellen, wie sogleich gezeigt werden soll, wieder eine Astroide dar, die aus der gegebenen entsteht, indem man $a$ mit $2a$ vertauscht und die Koordinaten-Achsen um einen Winkel von $45^0$ dreht. Zwischen den neuen und den alten Koordinaten eines Punktes bestehen bei einer solchen Drehung der Achsen bekanntlich die Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} \xi' = \xi\cos 45^0 + \eta\sin 45^0, \\ \eta' = -\xi\sin 45^0 + \eta\cos 45^0, \end{cases}$$

oder, weil $\cos 45^0$ und $\sin 45^0$ beide gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind,

$$(26\text{a.})\quad \sqrt{2}\,.\,\xi' = \xi + \eta, \quad \sqrt{2}\,.\,\eta' = -\xi + \eta.$$

In diesem Falle erhält man deshalb

$$(27.)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\,.\,\xi' = a(\cos^3 t + 3\cos^2 t\sin t + 3\cos t\sin^2 t + \sin^3 t) \\ \qquad\; = a(\cos t + \sin t)^3, \end{cases}$$

$$(28.)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\,.\,\eta' = a(\sin^3 t - 3\sin^2 t\cos t + 3\sin t\cos^2 t - \cos^3 t) \\ \qquad\; = a(\sin t - \cos t)^3. \end{cases}$$

Da aber

$$\cos(t - 45^0) = \cos t\cos 45^0 + \sin t\sin 45^0 = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(t - 45^0) = \sin t\cos 45^0 - \cos t\sin 45^0 = \frac{\sin t - \cos t}{\sqrt{2}}$$

ist, so wird

$$(29.)\quad \begin{cases} (\cos t + \sin t)^3 = 2\sqrt{2}\,.\,\cos^3(t - 45^0), \\ (\sin t - \cos t)^3 = 2\sqrt{2}\,.\,\sin^3(t - 45^0). \end{cases}$$

Bezeichnet man noch $t - 45^0$ mit $t'$, so gehen die Gleichungen (27.) und (28.) über in

$$(30.)\quad \xi' = 2a\cos^3 t', \quad \eta' = 2a\sin^3 t'.$$

Hieraus erkennt man die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

**Aufgabe 7.** Man soll die Evolute der *Epizykloide*

$$(31.)\quad x = a[m\cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 120.)

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (65.), (66.) und (67.) in § 95 wird für die Epizykloide

$$(32.)\quad \xi = a_1[m\cos t + \cos(mt)], \quad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)],$$

wobei

$$(33.)\quad a_1 = \frac{na}{l} = \frac{n}{n+2}a$$

ist. Diese Gleichungen sind den Gleichungen der ursprünglichen Kurve so ähnlich, daß die Vermutung nahe liegt, die Evolute sei eine der Epizykloide verwandte Kurve. Durch Transformation der Koordinaten kann man diese Vermutung bestätigen. Dreht man nämlich die Koordinaten-Achsen um den Winkel $v$, so sind die neuen Koordinaten eines Punktes bekanntlich durch die Gleichungen

$$(34.)\qquad \xi' = \xi\cos v + \eta\sin v, \quad \eta' = -\xi\sin v + \eta\cos v$$

gegeben. In dem vorliegenden Falle erhält man daher

$$\xi' = a_1[m(\cos t\cos v + \sin t\sin v) + (\cos mt\cos v + \sin mt\sin v)],$$
$$\eta' = a_1[m(-\cos t\sin v + \sin t\cos v) + (-\cos mt\sin v + \sin mt\cos v)],$$

oder

$$(35.)\qquad \begin{cases} \xi' = a_1[m\cos(t - v) + \cos(mt - v)], \\ \eta' = a_1[m\sin(t - v) + \sin(mt - v)]. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(36.)\qquad v = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t - v = t',$$

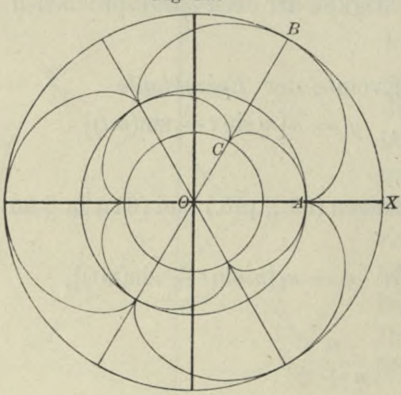
so wird, da $m = n + 1$ ist,

$$t = t' + \frac{\pi}{n}, \quad mt - v = mt' + \pi,$$

also

$$\cos(mt - v) = -\cos(mt'),$$
$$\sin(mt - v) = -\sin(mt').$$

Fig. 120.




Deshalb gehen die Gleichungen (35.) über in

$$(37.)\qquad \begin{cases} \xi' = a_1[m\cos t' - \cos(mt')], \\ \eta' = a_1[m\sin t' - \sin(mt')]. \end{cases}$$

*Die Evolute ist also wieder eine Epizykloide derselben Art, nur die Dimension hat sich in dem Verhältnis von $n + 2$ zu $n$ verkleinert, und die Richtung der Achsen hat sich um den Winkel $\frac{\pi}{n}$* $\left(\text{oder } -\frac{\pi}{n}\right)$ *gedreht.*

Jetzt kann man auch leicht die Länge des Epizykloiden-Bogens berechnen. In Figur 120 entsteht der Bogen $AB$ durch Abwickelung des Bogens $AC$, folglich muß der Bogen $AC$ dieselbe Länge haben wie die Gerade $CB$. Nun ist aber

$$CB = OB - OC = (n+2)a - \frac{n^2}{n+2}a$$
$$= \frac{4(n+1)a}{n+2} = \frac{4(n+1)a_1}{n}.$$

Deshalb wird

(38.) $$\widehat{AC} = \frac{4(n+1)a_1}{n}, \quad \widehat{AB} = \frac{4(n+1)a}{n}.$$

Ist $n$ eine ganze Zahl, so besteht die Kurve aus $2n$ Bögen, welche dem Bogen $AB$ kongruent sind; der Umfang $U$ der ganzen Epizykloide wird dann $8(n+1)a$.

Ist z. B., der Figur 120 entsprechend, $n = 3$, so wird

(38 a.) $$\widehat{AB} = \frac{16a}{3}, \quad U = 32a.$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Evolute der *Hypozykloide*

(39.) $$x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 119.)

**Auflösung.** Nach den Gleichungen (76.) und (77.) in § 95 wird für die Hypozykloide

(40.) $$\xi = a_1[m\cos t - \cos(mt)], \quad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)],$$

wobei

(41.) $$a_1 = \frac{na}{l} = \frac{na}{n-2}$$

ist. Durch Drehung der Koordinaten-Achsen um den Winkel $v$ findet man in diesem Falle

(42.) $$\begin{cases} \xi' = a_1[m\cos(t-v) - \cos(mt+v)], \\ \eta' = a_1[m\sin(t-v) + \sin(mt+v)]. \end{cases}$$

Setzt man jetzt wieder

(43.) $$v = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t - v = t',$$

so wird, da hier $m = n - 1$ ist,

$$t = t' + \frac{\pi}{n}, \quad mt + v = mt' + \pi,$$

$$\cos(mt + v) = -\cos(mt'), \quad \sin(mt + v) = -\sin(mt').$$

Deshalb gehen die Gleichungen (42.) über in

$$(44.) \quad \xi' = a_1[m\cos t' + \cos(mt')], \quad \eta' = a_1[m\sin t' - \sin(mt')].$$

*Die Evolute ist also wieder eine Hypozykloide derselben Art, nur die Dimension hat sich in dem Verhältnis von $n - 2$ zu $n$ vergrößert, und die Richtung der Achsen hat sich um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ gedreht.*

Auch hier kann man sehr leicht die Länge des Bogens berechnen und findet, ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe, wenn $n$ eine ganze Zahl ist, daß der Umfang der ganzen Hypozykloide

$$(45.) \quad U = 8(n - 1)a$$

ist.

Als Beispiel kann hier die *Astroide* dienen, welche man für den Fall $n = 4$ erhält. (Vergl. Fig. 119.)

**Aufgabe 9.** Man soll die Evolute der *Kreisevolvente*

$$(46.) \quad x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 88 auf Seite 414.)

**Auflösung.** Schon aus der Entstehung der Kreisevolvente durch Abwickelung eines Kreises kann man schließen, daß dieser Kreis die Evolute sein muß. (Vergl. Satz 4 in § 96.)

Dieser Schluß wird auch durch die Rechnung bestätigt, denn nach den Gleichungen (83.) und (84.) in § 95 wird für die Kreisevolvente

$$(47.) \quad \xi = a\cos t, \quad \eta = a\sin t,$$

also

$$(48.) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^2,$$

und dies ist die Gleichung des Kreises, durch dessen Abwickelung die Kreisevolvente entstanden ist.

XII. Abschnitt.

# Untersuchung von Kurven, welche auf ein Polarkoordinaten-System bezogen sind.

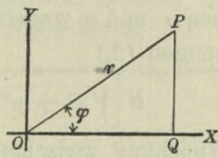
§ 98.

## Tangenten und Normalen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 152 bis 157.)

Bei der Bestimmung der Lage eines Punktes durch Polarkoordinaten ist eine Gerade $OX$ gegeben und auf dieser Geraden ein Punkt $O$; den Punkt $O$ nennt man den „*Nullpunkt*" oder den „*Pol*", und die Gerade $OX$ nennt man die „*Anfangsrichtung*" oder die „*Polar-Achse* des Koordinaten-Systems".

Fig. 121.




Ist nun ein Punkt $P$ beliebig gegeben, so nennt man die *positive* Strecke $OP = r$ den „*Radius vector*" oder „*Fahrstrahl*" und den Winkel $\varphi$, welchen $OP$ mit der Anfangsrichtung bildet, das „*Argument* des Punktes $P$". (Vergl. Fig. 121.)

*Durch die Lage des Punktes $P$ sind daher die beiden Koordinaten $r$ und $\varphi$ gegeben*, und umgekehrt: *Durch die beiden Koordinaten $r$ und $\varphi$ ist die Lage des Punktes $P$ gegeben.*

Macht man $O$ zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinaten-Systems und die Anfangsrichtung $OX$ zur $X$-Achse, so ist der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten, wie man ohne weiteres aus der Figur erkennt, gegeben durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi.$$

Diese Gleichungen bleiben auch dann noch richtig, wenn $\varphi > \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn $\varphi$ nicht mehr ein spitzer Winkel ist.

Dabei wird $x$ negativ für $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, und $y$ wird negativ für $\pi < \varphi < 2\pi$.

Daraus folgen dann die Gleichungen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.}$$

welche den Übergang von Polarkoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten vermitteln.

Ist irgend eine Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

zwischen $x$ und $y$ gegeben, so erhält man daraus mit Hülfe der Gleichungen (1.)

$$F(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = G(r, \varphi) = 0,$$

eine Gleichung zwischen $r$ und $\varphi$. Ist umgekehrt irgend eine Gleichung

$$F(r, \varphi) = 0$$

zwischen $r$ und $\varphi$ gegeben, so findet man daraus mit Hülfe der Gleichungen (2.)

$$F\left[\sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right] = H(x, y) = 0,$$

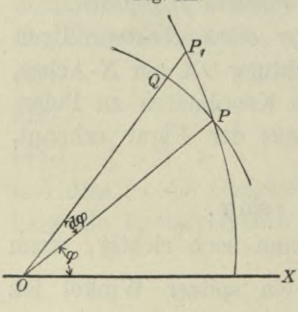
eine Gleichung zwischen $x$ und $y$. Daraus erkennt man auch, daß jeder Gleichung von der Form

$$F(r, \varphi) = 0, \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi) \tag{3.}$$

eine ebene Kurve entspricht.

Auf einer solchen Kurve (Fig. 122) seien $P$ und $P_1$ zwei benachbarte Punkte, deren Koordinaten mit $r$, $\varphi$, bezw. mit $r + dr$, $\varphi + d\varphi$ bezeichnet werden mögen; dabei soll durch die Bezeichnung sogleich ausgedrückt werden, daß die beiden Punkte einander beliebig nahe rücken dürfen. Beschreibt man um $O$ mit dem Halbmesser $OP$ gleich $r$ einen Kreisbogen, welcher den Radius vector $OP_1$ im Punkte $Q$ treffen möge, dann ist

Fig. 122.




$$OP_1 = r + dr, \tag{4.}$$

also

(5.) $$OQ = r, \quad QP_1 = dr, \quad PQ = rd\varphi.$$

Wenn die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe rücken, so darf man das kleine rechtwinklige Dreieck $PQP_1$ als geradlinig betrachten und erhält nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QP_1}^2,$$

oder, wenn man den unendlich kleinen Bogen $PP_1$ wieder mit $ds$ bezeichnet,

(6.) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Ferner ist

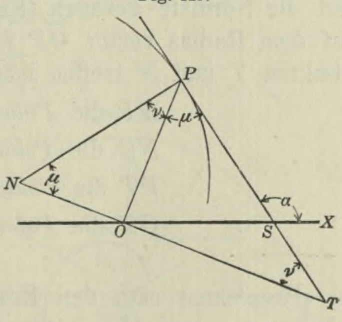
(7.) $$\operatorname{tg} QP_1P = \frac{QP}{QP_1} = \frac{rd\varphi}{dr}.$$

Der Winkel $QP_1P$ ist der Winkel, den die Gerade $P_1P$ mit dem Radius vector $OP_1$ bildet; rücken aber die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe, so wird $P_1P$ die *Tangente* der Kurve im Punkte $P$ (oder $P_1$), und der Radius vector $OP_1$ fällt mit $OP$ zusammen. Bezeichnet man also den Winkel, welchen die Tangente im Punkte $P$ mit dem Radius vector $OP$ bildet, mit $\mu$, so wird nach Gleichung (7.)

(7a.) $$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr}.$$

Nennt man den Winkel, den die Tangente mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, wieder $\alpha$, so ist, wie man ohne weiteres aus Fig. 123 erkennt,

Fig. 123.




$$\begin{aligned}\alpha &= \varphi + \mu,\\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}(\varphi + \mu)\\ &= \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\mu}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\mu}\\ &= \frac{\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{rd\varphi}{dr}}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \dfrac{rd\varphi}{dr}},\end{aligned}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\varphi \,.\, dr$ multipliziert,

(8.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi \,.\, dr + r\cos\varphi \,.\, d\varphi}{\cos\varphi \,.\, dr - r\sin\varphi \,.\, d\varphi}.$$

Durch den Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten werden die in den Gleichungen (6.) und (8.) enthaltenen Resultate bestätigt. Da $r$ durch Gleichung (3.) als Funktion von $\varphi$ erklärt ist, so muß man auch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

als Funktionen von $\varphi$ betrachten und erhält durch Differentiation

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

oder

$$(9.)\qquad \begin{cases} dx = \cos\varphi\,.\,dr - r\sin\varphi\,.\,d\varphi \\ dy = \sin\varphi\,.\,dr + r\cos\varphi\,.\,d\varphi. \end{cases}$$

Erhebt man diese beiden Gleichungen ins Quadrat und addiert sie, so findet man wieder wie in Gleichung (6.)

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2;$$

durch Division erhält man in Übereinstimmung mit Gleichung (8.)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi\,.\,dr + r\cos\varphi\,.\,d\varphi}{\cos\varphi\,.\,dr - r\sin\varphi\,.\,d\varphi}.$$

In einem beliebigen Punkte $P$ der Kurve seien die Tangente und die Normale gezogen (Fig. 123), welche die im Punkte $O$ auf dem Radius vector $OP$ errichtete Senkrechte bezw. in den Punkten $T$ und $N$ treffen mögen. Man nennt dann

$NP$ die *Polar-Normale* ($N$),

$NO$ die *Polar-Subnormale* ($Sn$),

$PT$ die *Polar-Tangente* ($T$),

$OT$ die *Polar-Subtangente* ($St$).

Bezeichnet man den Komplementwinkel von $\mu$ mit $\nu$, so erkennt man aus Figur 123, daß $\nu$ auch der Komplementwinkel von $ONP$ ist. Deshalb wird

$$\sphericalangle\, ONP = \mu,$$

und man erhält mit Rücksicht auf Gleichung (7a.)

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} ONP = \frac{OP}{NO} = \frac{r}{NO} = \frac{rd\varphi}{dr},$$

$$NO = Sn = \frac{dr}{d\varphi}; \tag{10.}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} OPT = \frac{OT}{OP} = \frac{OT}{r},$$

$$OT = St = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr}; \tag{11.}$$

$$\overline{NP}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{OP}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2,$$

$$NP = N = \frac{ds}{d\varphi}; \tag{12.}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} PNT = \frac{PT}{NP},$$

$$PT = T = N\operatorname{tg}\mu = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{rds}{dr}. \tag{13.}$$

## § 99.

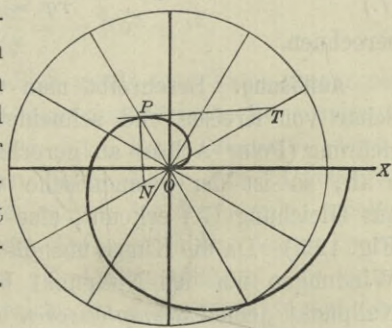
## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Archimedische Spirale*

$$r = a\varphi \tag{1.}$$

berechnen.

Fig. 124.




**Auflösung.** Die Archimedische Spirale entsteht, indem eine gerade Linie sich um einen ihrer Punkte $O$ dreht, während ein anderer Punkt $P$ auf ihr mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortrückt. Dadurch ist es auch leicht, die Kurve punktweise zu konstruieren. (Vergl. Fig. 124.)

Aus Gleichung (1.) folgt nun

$$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = a, \tag{2.}$$

d. h. *die Subnormale ist in allen Punkten der Kurve konstant*; deshalb kann man in jedem beliebigen Punkte der Kurve sehr leicht Tangente und Normale konstruieren, auch wenn die Kurve nicht gezeichnet vorliegt. Ferner ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{r}{a} = \varphi. \tag{3.}$$

Für $\varphi$ gleich 0 werden auch $r$ und $\mu$ gleich 0, d. h. die Kurve geht durch den Anfangspunkt des Koordinaten-Systems und die Tangente in diesem Punkte der Kurve fällt mit der Anfangsrichtung zusammen.

$$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{a} = a\varphi^2, \tag{4.}$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = a^2 + r^2 = a^2(1 + \varphi^2),$$

also

$$N = \frac{ds}{d\varphi} = a\sqrt{1 + \varphi^2} = \sqrt{a^2 + r^2}; \tag{5.}$$

$$T = \frac{rds}{dr} = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + \varphi^2} = \frac{r}{a}\sqrt{a^2 + r^2}. \tag{6.}$$

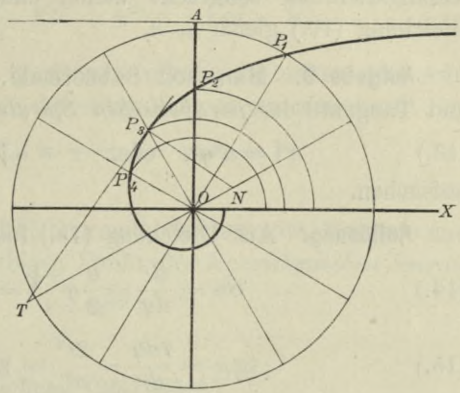
**Aufgabe 2.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *hyperbolische Spirale*

$$r\varphi = a \tag{7.}$$

berechnen.

**Auflösung.** Beschreibt man um den Anfangspunkt $O$ eine Schar von Kreisen und schneidet auf ihnen, von der Anfangsrichtung (Polar-Achse) an gerechnet, Bögen von gleicher Länge $a$ ab, so ist der geometrische Ort der Endpunkte, wie man aus Gleichung (7.) erkennt, eine hyperbolische Spirale. (Vergl. Fig. 125.) Da die Kurve unendlich viele, immer enger werdende Windungen um den Nullpunkt beschreibt, so nennt man den Nullpunkt „einen *asymptotischen Punkt*“.

Fig. 125.




Aus Gleichung (7.) folgt

(7a.) $r = a\varphi^{-1}$,

also

(8.) $$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = -a\varphi^{-2} = -\frac{r^2}{a},$$

(9.) $$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{a}{r} = -\varphi,$$

(10.) $$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = -a.$$

*Bei der hyperbolischen Spirale ist also die Subtangente konstant*; deshalb kann man für jeden beliebigen Punkt der Kurve sehr leicht Tangente und Normale konstruieren.

Ferner ist

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = r^2 + \frac{r^4}{a^2} = \frac{r^2}{a^2}(a^2 + r^2),$$

also

(11.) $$N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{a}\sqrt{a^2 + r^2},$$

(12.) $$T = \frac{rds}{dr} = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = -\sqrt{a^2 + r^2}.$$

Für $\varphi$ gleich 0 ist $r$ unendlich groß; man kann aber auch dann noch die Tangente an den zugehörigen Kurvenpunkt legen, obgleich er unendlich fern ist. Eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich fern liegt, heißt eine *Asymptote*. Die Asymptote der hyperbolischen Spirale ist die Gerade, welche man im Abstande $a$ parallel zur Anfangsrichtung legen kann. Denn $r$ fällt für $\varphi$ gleich 0 in die Anfangsrichtung, die Subtangente also in die Gerade, welche im Anfangspunkte auf der

Anfangsrichtung senkrecht steht, und ihre Länge ist nach Gleichung (10.) gleich $-a$,

**Aufgabe 3.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *parabolischen Spirale*

$$r^2 = a^2\varphi, \quad \text{oder} \quad r = a\sqrt{\varphi} = a\varphi^{\frac{1}{2}} \tag{13.}$$

aufsuchen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (13.) folgt

$$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2r}, \tag{14.}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{2r^2}{a^2} = 2\varphi; \tag{15.}$$

deshalb wird ebenso wie bei der Archimedischen Spirale

$$r = 0, \ \mu = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0.$$

$$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{2r^3}{a^2} = 2r\varphi, \tag{16.}$$

$$N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2r}\sqrt{a^4 + 4r^4} = \frac{a}{2}\sqrt{4\varphi + \varphi^{-1}}, \tag{17.}$$

$$T = N\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{a^2}\sqrt{a^4 + 4r^4} = a\sqrt{\varphi(1 + 4\varphi^2)}. \tag{18.}$$

**Aufgabe 4.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *allgemeinen Spirale*

$$r = a\varphi^n \tag{19.}$$

aufsuchen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (19.) folgt

$$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = na\varphi^{n-1}, \tag{20.}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{n}, \tag{21.}$$

$$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{a\varphi^{n+1}}{n}, \tag{22.}$$

$$N = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{n^2a^2\varphi^{2n-2} + a^2\varphi^{2n}} = a\varphi^{n-1}\sqrt{n^2 + \varphi^2}, \tag{23.}$$

$$(24.)\qquad T = N\operatorname{tg}\mu = \frac{a\varphi^n}{n}\sqrt{n^2+\varphi^2} = \frac{r}{n}\sqrt{n^2+\varphi^2}.$$

Man erkennt, daß in dieser Aufgabe die ersten drei Aufgaben als besondere Fälle enthalten sind, wenn man bezw.

$$n = +1,\quad n = -1,\quad n = +\tfrac{1}{2}$$

setzt.

**Aufgabe 5.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für einen beliebigen Punkt der *logarithmischen Spirale*

$$(25.)\qquad r = e^{a\varphi}$$

berechnen.

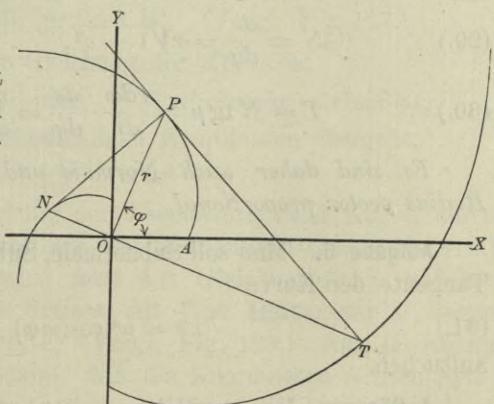
**Auflösung.** Aus Gleichung (25.) folgt

$$(26.)\qquad Sn = \frac{dr}{d\varphi} = ae^{a\varphi} = ar.$$

*Die Subnormale ist also dem Radius vector proportional*, deshalb beschreibt der Endpunkt $N$ der Subnormale eine Kurve, welche der ursprünglichen Kurve ähnlich ist. (Vergl. Fig. 126.) Da die Subnormale $ON = r'$ mit der Anfangsrichtung den Winkel $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ bildet, so wird die Gleichung der vom Punkte $N$ beschriebenen Kurve

$$(26\text{a.})\qquad r' = ae^{a\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Fig. 126.




Führt man jetzt noch die Größen $\alpha$ und $\varphi''$ durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\ln a}{a},\quad \ln a = a\alpha,$$

oder

$$a = e^{a\alpha},$$

$$\varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2} = \varphi''$$

ein, so geht Gleichung (26a.) über in

$$r' = e^{a\left(\varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{a\varphi''}. \tag{26b.}$$

Daraus erkennt man, daß die von dem Punkte $N$ beschriebene Kurve, wenn man sie um den Winkel $\alpha - \frac{\pi}{2}$ dreht, sogar mit der ursprünglichen Kurve zusammenfällt und deshalb mit derselben kongruent ist.

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{1}{a}, \quad \mu = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\right); \tag{27.}$$

*der Winkel $\mu$, den eine beliebige Tangente mit dem zugehörigen Radius vector bildet, ist also konstant.*

$$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{r}{a}, \tag{28.}$$

*folglich ist auch die Subtangente dem Radius vector proportional*, so daß der Endpunkt $T$ der Subtangente gleichfalls eine Kurve beschreibt, welche der ursprünglichen Kurve ähnlich ist. (Vergl. Fig. 126.) Auch von dieser Kurve kann man zeigen, daß sie der ursprünglichen Kurve sogar kongruent ist.

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2(1 + a^2),$$

also

$$N = \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + a^2}, \tag{29.}$$

$$T = N \operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2}. \tag{30.}$$

*Es sind daher auch Normale und Tangente selbst dem Radius vector proportional.*

**Aufgabe 6.** Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der Kurve

$$r^m = a^m \cos(m\varphi) \tag{31.}$$

aufsuchen.

**Auflösung.** Da in Gleichung (31.) die Größe $m$ noch unendlich viele Werte haben darf, so sind in dieser Gleichung unendlich viele Kurven inbegriffen, von denen einzelne hervorgehoben werden mögen.

I. $m = 1$. Die Gleichung der Kurve ist

(32.) $$r = a\cos\varphi, \quad \text{oder} \quad r^2 = ar\cos\varphi,$$

also, wenn man zu rechtwinkligen Koordinaten übergeht,

(32a.) $$x^2 + y^2 = ax,$$

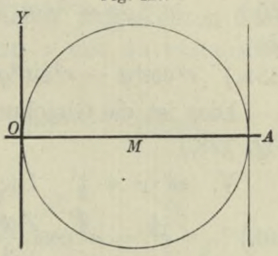
und dies ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\xi = \frac{a}{2}, \quad \eta = 0$$

hat. (Vergl. Fig. 127.)

II. $m = -1$. Die Gleichung der Kurve ist

Fig. 127.




(33.) $$r^{-1} = a^{-1}\cos\varphi,$$

oder

$$r\cos\varphi = a,$$

also, wenn man zu rechtwinkligen Koordinaten übergeht,

(33a.) $$x = a.$$

Dies ist die Gleichung einer *Geraden*, welche im Abstande $a$ parallel zur $Y$-Achse gezogen ist. (Vergl. Fig. 127.)

III. $m = 2$. Die Gleichung der Kurve ist

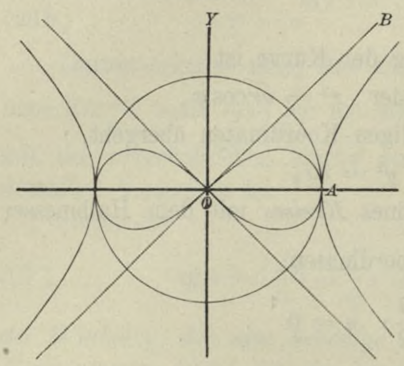
(34.) $$r^2 = a^2\cos(2\varphi), \quad \text{oder} \quad r^4 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi),$$

also, wenn man zu rechtwinkligen Koordinaten übergeht,

(34a.) $$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Dies ist die Gleichung der *Lemniskate*, einer Kurve, deren Gestalt man sehr leicht aus den Gleichungen (34.) und (34a.) erkennen kann. Zunächst folgt aus Gleichung (34.), daß die Kurve innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser $a$ liegen muß, denn es ist $r \leqq a$. (Vergl. Fig. 128.) Aus Gleichung (34a.) erkennt man sodann, daß die Koordinaten-Achsen Symmetrie-Achsen der Kurve sind, weil nur die Quadrate von $x$ und $y$ in der Gleichung vorkommen.

Fig. 128.




Für $\varphi = 0$ wird $r = a$; wächst $\varphi$, so wird $r$ kleiner und nimmt ab bis zu $r = 0$, wenn der Winkel $\varphi = 45^0$ geworden ist. Liegt $\varphi$ zwischen $45^0$ und $90^0$, so wird $r^2$ negativ, $r$ selbst also imaginär; deshalb liegt kein reeller Punkt der Kurve zwischen der Geraden $OB$ mit der Gleichung $y = x$ und der $Y$-Achse.

IV. $m = -2$. Die Gleichung der Kurve ist

$$(35.)\qquad r^{-2} = a^{-2}\cos(2\varphi), \quad \text{oder} \quad r^2\cos(2\varphi) = a^2,$$

also

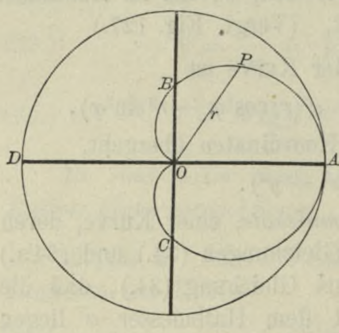
$$(35\text{a.})\qquad r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = a^2, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung der *gleichseitigen Hyperbel.* (Vergl. Fig. 128.)

V. $m = +\frac{1}{2}$. Die Gleichung der Kurve ist

$$(36.)\qquad r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{oder} \quad r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right);$$

Fig. 129.




daraus folgt

$$2r^2 = 2ar\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= ar(1 + \cos\varphi) = ar + ar\cos\varphi,$$

$$(37.)\qquad 2r^2 - ax = ar,$$

$$4r^4 - 4axr^2 + a^2x^2 = a^2r^2,$$

oder

$$4(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + a^2x^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

also

$$(36\text{a.})\qquad 4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ax) = a^2y^2.$$

Dies ist die Gleichung der *Kardioide.* (Vergl. Fig. 129.) Um die Übereinstimmung dieser Kurve mit der bei den Epizykloiden als Kardioide bezeichneten Kurve nachzuweisen, setze

$$\varphi = \pi - t,$$

dann folgt aus den Gleichungen (36.) und (37.)

$$(38.)\qquad 2r = 2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = a(1 - \cos t),$$

$$(39.)\qquad 2x = 2r\cos\varphi = -a\cos t(1 - \cos t),$$

$$(40.)\qquad 2y = 2r\sin\varphi = a\sin t(1 - \cos t).$$

Transformiert man noch die Koordinaten, indem man

$$4x' = a - 4x$$

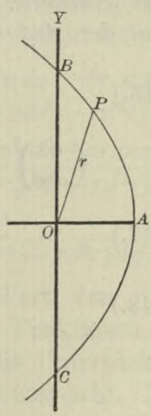
setzt, so erhält man

$$(41.)\qquad \begin{cases} 4x' = a(1 + 2\cos t - 2\cos^2 t) = a[2\cos t - \cos(2t)], \\ 4y = a(2\sin t - 2\sin t\cos t) = a[2\sin t - \sin(2t)]. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen in die damals aufgestellten Gleichungen der Kardiode über, wenn man $a$ mit $4a$ vertauscht. (Vergl. Fig. 85 auf Seite 409.)

VI. $m = -\frac{1}{2}$. Die Gleichung der Kurve ist

Fig. 130.




$$(42.)\qquad r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),\ \text{oder}\ r\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = a,$$

$$2r\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = r + r\cos\varphi = 2a,$$

oder

$$r = 2a - x,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 4a^2 - 4ax + x^2,$$

also

$$(42a.)\qquad y^2 = 4a^2 - 4ax = 4a(a - x).$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse die $X$-Achse ist, und deren Scheitel die Koordinaten $x = a$, $y = 0$ hat. (Vergl. Fig. 130.)

Allgemein folgt aus der Gleichung (31.)

$$mr^{m-1}\frac{dr}{d\varphi} = -ma^m\sin(m\varphi),$$

also

$$(43.)\qquad Sn = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^m \sin(m\varphi)}{r^{m-1}} = -\frac{\sqrt{a^{2m} - r^{2m}}}{r^{m-1}},$$

oder

$$(43\text{a.})\qquad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^m r \sin(m\varphi)}{r^m} = -r\,\mathrm{tg}(m\varphi);$$

$$(44.)\qquad \mathrm{tg}\,\mu = \frac{r d\varphi}{dr} = -\mathrm{ctg}(m\varphi) = \mathrm{ctg}\,\nu,$$

folglich ist

$$\nu = \frac{\pi}{2} - \mu = \pi - m\varphi + h\pi, \quad \pi - \nu = m\varphi - h\pi = \nu',$$

oder

$$(45.)\qquad \mu + \frac{(2h+1)\pi}{2} = m\varphi,$$

wobei $h$ eine ganze, passend zu wählende Zahl ist. Dies gibt den Satz:

*Der Winkel $\nu'$ (oder $\pi - \nu$), den der Radius vector mit der Normale bildet, ist m-mal so groß wie der Winkel, den er mit der Anfangsrichtung bildet.*

$$(46.)\qquad St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = -r\,\mathrm{ctg}(m\varphi),$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = \frac{a^{2m} - r^{2m}}{r^{2m-2}} + r^2 = \frac{a^{2m}}{r^{2m-2}},$$

$$(47.)\qquad N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a^m}{r^{m-1}} = \frac{r}{\cos(m\varphi)},$$

$$(48.)\qquad T = N\,\mathrm{tg}\,\mu = -\frac{r}{\sin(m\varphi)}\cdot$$

## § 100.

## Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkts-Kurven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 158.)

Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so kann man immer den Radius vector $r$ als eine Funktion vom Argumente $\varphi$ betrachten; deshalb sind auch

(1.) $$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

Funktionen von $\varphi$, so daß man durch Differentiation die folgenden Gleichungen erhält

(2.) $$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

(3.) $$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

(4.) $$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi,$$

(5.) $$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

(6.) $$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2,$$

(7.) $$\frac{dx}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

Vertauscht man in den Formeln 148 und 149 der Tabelle $t$ mit $\varphi$, setzt die hier gefundenen Werte ein und multipliziert in den Brüchen Zähler und Nenner mit $d\varphi^3$, so erhält man

(8.) $$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{ds^2dy}{dxd^2y - dyd^2x} = r\cos\varphi - \dfrac{ds^2(r\cos\varphi\, d\varphi + dr\,.\sin\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)\,d\varphi}, \\ \eta = y + \dfrac{ds^2dx}{dxd^2y - dyd^2x} = r\sin\varphi + \dfrac{ds^2(-r\sin\varphi\, d\varphi + dr.\cos\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi}, \end{cases}$$

(9.) $$\varrho = \pm\frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x} = \pm\frac{ds^3}{(r^2d\varphi^2 + 2\,dr^2 - rd^2r)\,d\varphi}.$$

Wenn man in diesen Gleichungen den Wert von $r$ als Funktion von $\varphi$ einsetzt, so sind $\xi$ und $\eta$ als Funktionen der dritten Veränderlichen $\varphi$ dargestellt, was für die Untersuchung der Krümmungsmittelpunkts-Kurve oder Evolute ausreicht. Man kann aber auch noch $\varphi$ aus den beiden Gleichungen (8.) eliminieren und erhält dadurch eine Gleichung zwischen $\xi$ und $\eta$.

Will man noch die Evolute in Polarkoordinaten darstellen, so hat man in dieser Gleichung zu setzen

(10.) $$\xi = r'\cos\varphi', \quad \eta = r'\sin\varphi'.$$

## § 101.
## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll den Krümmungskreis der *Archimedischen Spirale*

$$r = a\varphi \tag{1.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 124 auf Seite 473.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (1.) folgt

$$dr = ad\varphi, \quad d^2r = 0, \tag{2.}$$

also

$$ds^2 = r^2d\varphi^2 + dr^2 = a^2(1 + \varphi^2)d\varphi^2, \tag{3.}$$

$$r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r = a^2(2 + \varphi^2)d\varphi^2. \tag{4.}$$

Setzt man diese Werte in die Formeln 158 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = a\varphi\cos\varphi - \frac{a^2(1 + \varphi^2) \,.\, a(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)}{a^2(2 + \varphi^2)},$$

$$\eta = a\varphi\sin\varphi + \frac{a^2(1 + \varphi^2) \,.\, a(-\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)}{a^2(2 + \varphi^2)},$$

oder

$$\xi = \frac{a[\varphi\cos\varphi - (1 + \varphi^2)\sin\varphi]}{2 + \varphi^2}, \tag{5.}$$

$$\eta = \frac{a[\varphi\sin\varphi + (1 + \varphi^2)\cos\varphi]}{2 + \varphi^2}, \tag{6.}$$

$$\varrho = \pm\frac{a(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \varphi^2}. \tag{7.}$$

**Aufgabe 2.** Man soll den Krümmungskreis der *allgemeinen Spirale*

$$r = a\varphi^n \tag{8.}$$

bestimmen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (8.) folgt durch Differentiation

$$\frac{dr}{d\varphi} = na\varphi^{n-1}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = n(n-1)a\varphi^{n-2}; \tag{9.}$$

deshalb ist

$$(10.)\qquad ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 = a^2\varphi^{2n-2}(n^2 + \varphi^2)d\varphi^2,$$

$$(11.)\qquad r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - r d^2 r = a^2\varphi^{2n-2}[n(n+1) + \varphi^2]d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 158 der Tabelle ein, so erhält man

$$(12.)\qquad \xi = \frac{n[r\cos\varphi - (n^2+\varphi^2)a\varphi^{n-1}\sin\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2},$$

$$(13.)\qquad \eta = \frac{n[r\sin\varphi + (n^2+\varphi^2)a\varphi^{n-1}\cos\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2},$$

$$(14.)\qquad \varrho = \pm\frac{a\varphi^{n-1}(n^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)+\varphi^2}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll den Krümmungskreis und die Evolute der *logarithmischen Spirale*

$$(15.)\qquad r = e^{a\varphi}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 126 auf Seite 477.)

**Auflösung.** Aus Gleichung (15.) folgt durch Differentiation

$$(16.)\qquad \frac{dr}{d\varphi} = e^{a\varphi}\,.\,a = ar,\quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = a\frac{dr}{d\varphi} = a^2 r;$$

deshalb ist

$$(17.)\qquad ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 = r^2(1+a^2)d\varphi^2,$$

$$(18.)\qquad r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - r d^2 r = r^2(1 + 2a^2 - a^2)d\varphi^2 = r^2(1+a^2)d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 158 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = r\cos\varphi - \frac{r^2(1+a^2)\,.\,r(\cos\varphi + a\sin\varphi)}{r^2(1+a^2)},$$

$$\eta = r\sin\varphi + \frac{r^2(1+a^2)\,.\,r(-\sin\varphi + a\cos\varphi)}{r^2(1+a^2)},$$

oder

$$(19.)\qquad \xi = -ar\sin\varphi,\quad \eta = +ar\cos\varphi.$$

$$(20.)\qquad \varrho = \pm\frac{r^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+a^2)} = \pm r\sqrt{1+a^2}.$$

Es war aber (nach § 99, Gleichung (29.)) auch die Normale

$$N = \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + a^2}, \tag{21.}$$

folglich *ist der Krümmungshalbmesser gleich der Polar-Normale.* Der Krümmungsmittelpunkt fällt daher in Figur 126 mit $N$ zusammen.

Nach den Gleichungen (19.) wird

$$\xi = -ay, \quad \eta = ax. \tag{22.}$$

Hieraus erkennt man schon, daß die Evolute wieder eine *logarithmische Spirale* ist, bei der aber die Dimensionen $a$-mal so groß sind wie bei der gegebenen. Gleichzeitig sind auch noch die Koordinaten-Achsen um einen Winkel von $90^0$ gedreht. In § 99 (Seite 478) ist sogar gezeigt worden, daß die Evolute der gegebenen Kurve *ähnlich* und außerdem auch *kongruent* ist.

Dasselbe Resultat findet man natürlich auch aus den Gleichungen (22.).

**Aufgabe 4.** Man soll den Krümmungskreis und die Evolute der *Lemniskate*

$$r^2 = a^2\cos(2\varphi) \tag{23.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 131.)

**Auflösung.** Durch Differentiation folgt aus Gleichung (23.)

$$r\frac{dr}{d\varphi} = -a^2\sin(2\varphi) = -r^2\mathrm{tg}(2\varphi), \tag{24.}$$

und wenn man diese Gleichung nochmals differentiiert,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -2a^2\cos(2\varphi) = -2r^2. \tag{25.}$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (23.) und (24.)

$$r^2ds^2 = r^2(r^2d\varphi^2 + dr^2) = r^4d\varphi^2 + r^2dr^2 = a^4d\varphi^2,$$

oder

$$ds^2 = \frac{a^4}{r^2}d\varphi^2. \tag{26.}$$

Ferner findet man aus Gleichung (25.)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] =$$

$$2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + 2r^2 = 2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2,$$

folglich ist bei der Lemniskate

$$(27.)\qquad r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 3\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{3a^4}{r^2}\cdot$$

Setzt man diese Werte in die Formeln Nr. 158 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = r\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\left(r\cos\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cdot\sin\varphi\right),$$

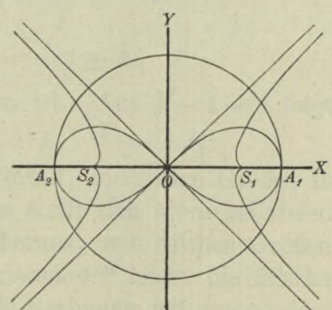
$$\eta = r\sin\varphi + \tfrac{1}{3}\left(-r\sin\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cdot\cos\varphi\right),$$

oder

$$(28.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{a^2}{3r}\left[2\cos(2\varphi)\cos\varphi + \sin(2\varphi)\sin\varphi\right] = \dfrac{2a^2\cos^3\varphi}{3r}, \\ \eta = \dfrac{a^2}{3r}\left[2\cos(2\varphi)\sin\varphi - \sin(2\varphi)\cos\varphi\right] = -\dfrac{2a^2\sin^3\varphi}{3r}, \end{cases}$$

$$(29.)\qquad \varrho = \pm\tfrac{1}{3}\frac{ds}{d\varphi} = \pm\frac{a^2}{3r}\cdot$$

Fig. 131.




Aus den Gleichungen (28.) folgt

$$(30.)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \left(\dfrac{3r\xi}{2a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \sin\varphi = -\left(\dfrac{3r\eta}{2a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{3r}{2a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right) = 1,$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \left(\frac{3r}{2a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = \cos(2\varphi) = \frac{r^2}{a^2},$$

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2a^2}{3r}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}} = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{2a^2}{3r}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{31.}$$

folglich ist

$$9\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = 4a^2. \tag{32.}$$

Den beiden Scheiteln $A_1$ und $A_2$ der Lemniskate entsprechen die Spitzen $S_1$ und $S_2$ der Evolute, wobei

$$S_2O = OS_1 = \tfrac{2}{3}a. \tag{33.}$$

# Zweiter Teil.

## Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra.

---

### XIII. Abschnitt.

### Theorie der komplexen Größen.

§ 102.

#### Erklärung der komplexen Größen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 159 bis 167.)

Bekanntlich führt schon die Auflösung der quadratischen Gleichungen häufig auf *imaginäre* Wurzeln. Ist z. B.

$$x^2 + 6x + 13 = 0,$$

so wird

$$x = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i,$$

wobei $\sqrt{-1}$ mit $i$ bezeichnet worden ist. Aus $\sqrt{-1} = i$ folgt

(1.) $\quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \ldots$

Es ist nicht nur von *großem* Vorteil, imaginäre Größen in die Rechnung einzuführen, sondern es stellt sich sogar bei vielen Untersuchungen die *Notwendigkeit* heraus, mit solchen Größen zu rechnen. Da die Bezeichnung „*imaginär*" leicht die falsche Vorstellung erwecken könnte, daß die Rechnung mit *imaginären* Größen unzulässig sei, soll die Bezeichnung „*imaginär*" oder „*rein imaginär*" auf die Größen von der Form $bi$ beschränkt werden; dagegen nennt man die Größen von der Form

$$a + b\sqrt{-1}, \quad \text{oder} \quad a + bi,$$

wobei $a$ und $b$ reelle Größen sind, zum Unterschiede von den *reellen* Größen „*komplexe* Größen“, d. h. Größen, welche reelle und imaginäre Größen zusammenfassen. Man kann nun zeigen, daß sich alle Rechnungen mit komplexen Größen in derselben Weise ausführen lassen wie mit reellen Größen.

Man nennt $a$ „den *reellen Teil*“ und $b$ „den *Faktor des imaginären Teils*“.

Wie die *reellen* Größen aus den *beiden* Einheiten $+1$ und $-1$ gebildet sind, so werden die *komplexen* Größen aus den vier Einheiten

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i$$

gebildet. Auf die so erklärten Größen kann man ohne weiteres die Regeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, wie sie für *reelle* Größen gelten, anwenden. Daß Resultat dieser Operationen ist, wie sogleich gezeigt werden soll, wieder eine Größe von der Form $A + Bi$. Daraus folgt dann die *Berechtigung*, mit *komplexen* Größen ebenso zu rechnen, wie mit *reellen*.

**I. Addition.** *Komplexe Größen werden addiert, indem man die reellen Teile zu den reellen und die Faktoren der imaginären Teile zu den Faktoren der imaginären Teile addiert*, also

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{2.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$.

**II. Subtraktion.** *Zwei komplexe Größen werden voneinander subtrahiert, indem man die reellen Teile und die Faktoren der imaginären Teile voneinander subtrahiert*, also

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \tag{3.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$.

**III. Multiplikation.** *Zwei komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Teil des einen Faktors mit jedem Teile des andern Faktors multipliziert*, also

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned} \tag{4.}$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A + Bi$.

In dem besonderen Falle, wo $c = a$, $d = -b$ ist, erhält man

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{5.}$$

Hier ist das Resultat sogar eine *positive reelle* Größe.

Zwei solche komplexe Größen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles voneinander unterscheiden, heißen „*konjugiert*“; es gelten für sie die folgenden Sätze:

1) *Die Summe zweier konjugiert komplexen Größen ist reell:*

$$(a+bi)+(a-bi)=2a. \tag{6.}$$

2) *Die Differenz zweier konjugiert komplexen Größen ist rein imaginär:*

$$(a+bi)-(a-bi)=2bi. \tag{7.}$$

3) *Das Produkt zweier konjugiert komplexen Größen ist reell und positiv:*

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Dieses Produkt heißt nach *Gauß* „die *Norm von* $a+bi$“ und ebenso „die *Norm von* $a-bi$“. Um die Norm einer komplexen Größe zu bezeichnen, setzt man ein $N$ vor dieselbe; es ist also

$$N(a+bi)=N(a-bi)=a^2+b^2. \tag{8.}$$

Die Quadratwurzel aus der Norm, mit positivem Vorzeichen genommen, heißt „der *Modul*“ oder (nach *Weierstraß*) „der *absolute Betrag*“ der komplexen Größe. Das Zeichen dafür ist ein vorgesetztes $M$, oder es besteht aus zwei senkrechten Strichen, von denen die komplexe Größe eingeschlossen wird, also

$$\left\{\begin{array}{l} M(a+bi)=|a+bi|=+\sqrt{a^2+b^2}, \\ M(a-bi)=|a-bi|=+\sqrt{a^2+b^2}. \end{array}\right. \tag{9.}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2} \tag{10.}$$

folgt der Satz:

4) *Der reziproke Wert einer komplexen Größe ist gleich ihrer konjugierten, dividiert durch die Norm.*

**IV. Division.** Bei der Division komplexer Größen multipliziert man Zähler und Nenner mit der zum Nenner konjugierten Größe, dann hat man nur noch durch eine *reelle* Größe, nämlich nur durch die *Norm* des Nenners zu dividieren. Dies gibt

$$(11.)\quad \frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i.$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A+Bi$.

Da eine *Potenz mit positivem, ganzzahligen Exponenten* ein Produkt ist, so kann man auch eine komplexe Größe potenzieren; und zwar findet man

$$(12.)\quad (a+bi)^n=\left[a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-+\cdots\right]$$
$$+\left[\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+-\cdots\right]i.$$

## § 103.

## Einige Sätze über komplexe Größen. *Moivre*sche Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 168 bis 173.)

Da eine rein imaginäre Größe die Quadratwurzel aus einer *negativen* Zahl ist, so kann eine *reelle* Größe, welche von 0 verschieden ist, niemals einer *rein imaginären* Größe gleich sein. Ist also

$$(1.)\quad a+bi=0,$$

so müssen $a$ und $b$ *einzeln* gleich Null sein. Dies gibt

**Satz 1.** *Sind zwei komplexe Größen einander gleich, so müssen die reellen Teile und ebenso auch die Faktoren der imaginären Teile einander gleich sein.*

**Beweis.** Aus

$$(2.)\quad a+bi=c+di$$

folgt

$$(3.)\quad (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i=0.$$

Dies gibt aber

$$(4.)\quad a-c=0,\quad b-d=0,\quad \text{oder}\quad a=c,\quad b=d.$$

Jede Gleichung zwischen komplexen Größen umfaßt daher *zwei* Gleichungen zwischen reellen Größen.

Die komplexen Größen lassen sich auch noch in einer anderen Form darstellen. Setzt man nämlich

$$(5.)\qquad |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2} = r,$$

so wird $r \geqq a$ und $r \geqq b$, folglich kann man zwischen 0 und $2\pi$ (bezw. zwischen $0^0$ und $360^0$) einen Winkel $\varphi$ so bestimmen, daß

$$(6.)\qquad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

wird. Aus $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ folgt nämlich $\sin\varphi = \pm\frac{b}{r}$; dann wird aber stets das obere Zeichen gelten, wenn man festsetzt, daß der Winkel $\varphi$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| zwischen | $0^0$ und | $90^0$ | liegen soll | für | $a > 0,\ b > 0,$ |
| „ | $90^0$ „ | $180^0$ | „ „ | „ | $a < 0,\ b > 0,$ |
| „ | $180^0$ „ | $270^0$ | „ „ | „ | $a < 0,\ b < 0,$ |
| „ | $270^0$ „ | $360^0$ | „ „ | „ | $a > 0,\ b < 0.$ |

Dieser Winkel $\varphi$ heißt das *Argument* der komplexen Größe $a + bi$. Durch Einführung dieser Bezeichnungen wird

$$(7.)\qquad a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Bekanntlich kann man den Winkel $\varphi$ um ein beliebiges Vielfache von $360^0$ vermehren oder vermindern, ohne daß sich die Werte von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ändern. Versteht man unter dem Argumente $\varphi$ nicht den Winkel, sondern den zugehörigen Bogen und bezeichnet man mit $h$ eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl, so wird also

$$\cos(\varphi + 2h\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2h\pi) = \sin\varphi.$$

Deshalb geht Gleichung (7.) über in

$$(7a.)\qquad a + bi = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)].$$

Multipliziert man jetzt die komplexen Größen

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{und} \quad r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

miteinander, so erhält man

$$(8.)\qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Diese nach *Moivre* genannte Formel gibt

**Satz 2.** *Komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem man ihre absoluten Beträge miteinander multipliziert und ihre Argumente addiert.*

Dieser Satz läßt sich ohne weiteres auf Produkte von drei oder mehr Faktoren übertragen; es ist also

$$(9.)\quad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \,.\, r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$
$$= r_1 r_2 r_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)].$$

Sind die Faktoren alle einander gleich, so erhält man

$$(10.)\qquad [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

und damit zunächst für positive, ganzzahlige Exponenten

**Satz 3.** *Eine komplexe Größe wird potenziert, indem man den absoluten Betrag potenziert und das Argument mit dem Potenzexponenten multipliziert.*

Für $r = 1$ geht die Gleichung (10.) über in

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$\left[\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots\right]$$
$$+ i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots\right].$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Satz 1

$$(11.)\ \cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots,$$

$$(12.)\quad \sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots.$$

Durch diese Formeln, in denen das *Multiplikationstheorem* der trigonometrischen Funktionen ausgesprochen ist, lassen sich $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ als rationale Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ darstellen.

Es wird z. B. für $n = 5$, wenn man noch die Relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ anwendet,

$$\cos(5\varphi) = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$$
$$= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi,$$
$$\sin(5\varphi) = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$
$$= 16\sin^5\varphi - 20\sin^3\varphi + 5\sin\varphi.$$

Für die Division zweier komplexen Größen erhält man jetzt

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2},$$

oder

$$(13.)\quad \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r^2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Daraus folgt

**Satz 4.** *Komplexe Größen werden durcheinander dividiert, indem man die absoluten Beträge durcheinander dividiert und die Argumente voneinander subtrahiert.*

Satz 3 macht es jetzt auch möglich, aus einer komplexen Größe die $n^{\text{te}}$ Wurzel auszuziehen. Unter $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ versteht man nämlich eine Größe $A$, deren $n^{\text{te}}$ Potenz gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist. Diese Eigenschaft besitzt für ganzzahlige Werte von $h$ die komplexe Größe

$$(14.)\quad A = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$$

denn es wird nach Gleichung (10.)

$$A^n = r\,[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)],$$

oder, weil

$$\cos(\varphi + 2h\pi) = \cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + 2h\pi) = \sin\varphi$$

ist,

$$(15.)\quad A^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dies gibt

$$(16.)\quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right].$$

Dieser Ausdruck hat wieder die Form $A + Bi$.

Damit ist bewiesen:

**Satz 5.** *Aus einer komplexen Größe wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus dem absoluten Betrage zieht und das Argument durch den Wurzel-Exponenten dividiert.*

Gleichzeitig sind hiermit auch die Potenzen, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist, ebenso für *komplexe* Größen erklärt wie für *reelle*, indem man

$$(17.)\qquad A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p} = \left(\sqrt[q]{A}\right)^p$$

findet.

Da die ganze Zahl $h$ unendlich viele Werte hat, so könnte man glauben, es gäbe unendlich viele Werte für die $n^{\text{te}}$ Wurzel aus $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dies ist aber nicht der Fall; setzt man nämlich

$$h = n + h',$$

o wird

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n}\right),$$

d. h. die Zahlen $h$ und $h'$ liefern denselben Wert der Wurzel, wenn ihre Differenz gleich $n$, oder gleich einem Vielfachen von $n$ ist. Es gibt daher im ganzen nur $n$ verschiedene Werte für die $n^{\text{te}}$ Wurzel aus einer komplexen Größe. Diese $n$ verschiedenen Werte findet man aus Gleichung (16.), indem man der ganzen Zahl $h$ z. B. die Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ beilegt.

Da unter den *komplexen* Größen die *reellen* Größen mit inbegriffen sind, so gelten diese Ausführungen auch für die Wurzeln aus reellen Größen. So ist z. B.

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2h\pi}{n}\right),$$

ein Ausdruck, aus dem man die $n$ verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ findet, indem man

$$h = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1$$

setzt.

## § 104.

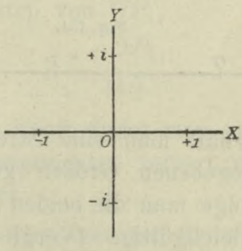
## Geometrische Darstellung der komplexen Größen.

Wie man die *reellen* Größen durch Punkte oder Strecken in einer *geraden Linie* geometrisch darstellen kann, so kann man die *komplexen* Größen durch Punkte oder Strecken in einer *Ebene* darstellen. Dabei soll der folgende Grundsatz gelten:

*Zwei Strecken sind einander gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben.*

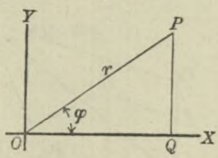
Dann bezeichne man mit $+1$ eine Strecke, deren Länge gleich 1 ist, und deren Richtung parallel ist zur positiven Richtung der $X$-Achse. Mit $+i$ dagegen bezeichne man eine Strecke, deren Länge auch gleich 1 ist, deren Richtung aber parallel ist zur positiven Richtung der $Y$-Achse. (Vergl. Fig. 132.)

Fig. 132.




Damit ist natürlich noch nicht gesagt, daß $+i$ dieselbe Bedeutung habe wie in den vorhergehenden Paragraphen, daß nämlich $i$ gleich $\sqrt{-1}$ sei; es sollen vielmehr die hier folgenden Untersuchungen zunächst ganz unabhängig von den vorhergehenden geführt werden. Demnach werde hier die komplexe Größe $a+bi$ durch eine Strecke $OP$ erklärt, welche den Anfangspunkt der Koordinaten $O$ und einen Punkt $P$ mit den Koordinaten $OQ=a$, $QP=b$ verbindet. (Vergl. Fig. 133.) Man gelangt nämlich vom Punkte $O$ aus zum Punkte $P$, indem man $a$ Einheiten in der Richtung der $X$-Achse und dann $b$ Einheiten in der Richtung der $Y$-Achse durchläuft, oder indem man zuerst $b$ Einheiten in der Richtung der $Y$-Achse und dann $a$ Einheiten in der Richtung der $X$-Achse durchläuft.

Fig. 133.




So entspricht jeder komplexen Größe $a+bi$ ein Punkt $P$ in der Ebene und jedem Punkte $P$ eine komplexe Größe $a+bi$.

Durch die Gleichungen

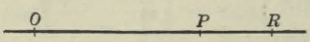
$$(1.)\quad \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \quad \sin\varphi=\dfrac{b}{r}, \\ a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \end{cases}$$

kann man auch Polarkoordinaten einführen. Dabei heißt $r$ der „*absolute Betrag* der Strecke $OP$“, weil ihre absolute Länge gleich $r$ ist, und der Winkel $\varphi$ heißt das „*Argument* der komplexen Größe“.

Die so erklärten komplexen Größen kann man nun durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division miteinander verbinden, indem man dieselben Regeln anwendet, welche für reelle Größen gebräuchlich sind, und zwar geschieht das in folgender Weise:

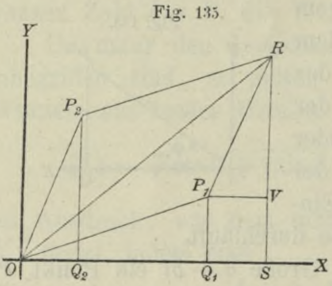
**I. Addition.** Will man die Addition zweier *reellen* Größen geometrisch ausführen, so trägt man auf einer Geraden, z. B. auf der $X$-Achse vom Anfangspunkte $O$ aus eine Strecke $OP$ ab, welche der einen Größe entspricht, und darauf vom Punkte $P$ aus eine zweite Strecke $PR$, welche der anderen Größe entspricht. Dadurch erhält man eine Strecke $OR$, welche die Summe der beiden gegebenen Größen geometrisch darstellt. In welcher Reihenfolge man die beiden Strecken aufeinander folgen läßt, ist dabei gleichgültig. (Vergl. Fig. 134.)

Fig. 134.




Genau ebenso kann man zwei komplexe Größen $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$, welche durch die Strecken $OP_1$ und $OP_2$ geometrisch dargestellt sind, addieren. (Vergl. Fig. 135.) Man macht zu diesem Zwecke den Punkt $P_1$ zum Anfangspunkte einer Strecke $P_1R$, welche der Strecke $OP_2$ *gleich* ist, d. h. welche mit $OP_2$ gleiche Länge und gleiche Richtung hat. Dadurch erhält man ein Parallelogramm $OP_1RP_2$, in welchem der Punkt $R$, bezw. die Diagonale $OR$ die Summe der beiden gegebenen Strecken $OP_1$ und $OP_2$ ist.

Fig. 135




Da die Seite $P_2R$ der Seite $OP_1$ gleich und parallel ist, so hätte man auch $P_2$ zum Anfangspunkte einer Strecke $P_2R$ machen können, welche der Strecke $OP_1$ gleich ist, und wäre zu demselben Punkte $R$ gekommen.

Wie man sehr leicht aus Figur 135 nachweisen kann, sind dabei die Koordinaten des Punktes $R$ gleich $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, so daß er in der Tat der komplexen Größe

$$(2.)\qquad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

entspricht.

In dieser Konstruktion ist der Satz vom *Parallelogramm der Kräfte* enthalten. Stellen nämlich die Strecken $OP_1$ und $OP_2$ durch ihre Länge und Richtung die Intensität und Richtung zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkte $O$ dar, so haben dieselben mit der Diagonale $OR$ des Parallelogramms $OP_1RP_2$ gleiche Wirkung. Dabei sind

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ und $b_1$ | die Komponenten von | $OP_1$, |
| $a_2$ „ $b_2$ | „ „ „ | $OP_2$, |
| $a_1 + a_2$ „ $b_1 + b_2$ | „ „ „ | $OR$. |

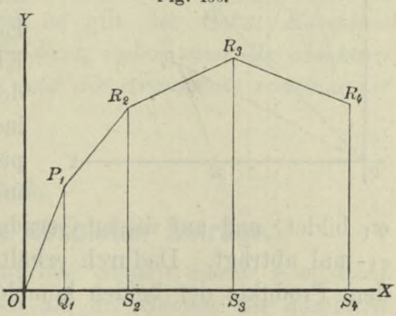
Die Komponenten der resultierenden Kraft findet man also, indem man die Einzelkräfte in ihre Komponenten zerlegt und die gleichgerichteten Komponenten addiert.

Man kann die Sätze über Addition ausdehnen auf Summen von beliebig vielen Summanden. Soll man z. B. die Strecken

$$a_1 + b_1 i,\quad a_2 + b_2 i, \ldots a_n + b_n i$$

addieren, so erhält man für die Summe der beiden ersten Strecken einen Punkt $R_2$ mit den Koordinaten $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, für die Summe der drei ersten Strecken einen Punkt $R_3$ mit den Koordinaten $a_1 + a_2 + a_3$ und $b_1 + b_2 + b_3$; in dieser Weise kann man fortfahren, bis man einen Punkt $R_n$ mit den Koordinaten $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ und $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ erhält, welcher der Summe entspricht (Fig. 136). Ist das Polygon $OP_1R_2R_3 \ldots R_n$ geschlossen, so daß der letzte Punkt $R_n$ mit dem Anfangspunkte $O$ zusammenfällt, so ist die Summe gleich Null; die Bedingung für einen geschlossenen Streckenzug ist daher

Fig. 136.




$$(3.)\qquad \Sigma(a + bi) = 0,$$

welche die beiden Bedingungen

$$\Sigma a = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma b = 0$$

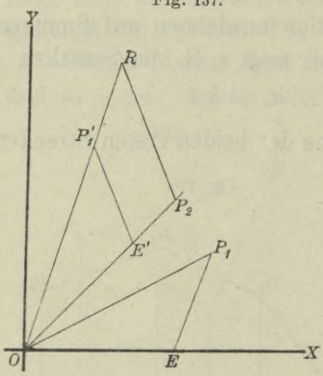
in sich einschließt.

**II. Subtraktion.** Da eine Größe von der anderen subtrahiert wird, indem man die entgegengesetzte Größe addiert, so kann man die Subtraktion auf die Addition zurückführen und findet

$$(4.)\quad (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i)$$
$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

**III. Multiplikation.** Für reelle Größen gilt die Regel: *Das Produkt $A \,.\, B$ entsteht aus $B$ wie $A$ aus der Einheit.* Dieselbe Regel kann man auch bei der Multiplikation zweier komplexen Größen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, welche den Strecken $OP_1$ und $OP_2$ entsprechen, anwenden.

Fig. 137.




Hat der Punkt $E$ (Fig. 137) die Koordinaten $a = 1$ und $b = 0$, so entsteht die Strecke $OP_1$ aus der Einheit $OE$, indem man durch $O$ eine Gerade legt, welche mit $OE$ den Winkel $\varphi_1$ bildet, und auf dieser Geraden die Länge der Einheit $(OE)$ $r_1$-mal abträgt. Ebenso findet man das Produkt der beiden Strecken $OP_1$ und $OP_2$, indem man durch den Anfangspunkt $O$ eine Gerade legt, welche mit der Geraden $OP_2$ den Winkel $\varphi_1$ bildet, und auf dieser Geraden die Länge von $OP_2$ (also $r_2$) $r_1$-mal abträgt. Dadurch erhält man einen Punkt $R$, welcher dem Produkte der beiden komplexen Größen entspricht.

Durch den Umstand, daß die beiden Dreiecke $OEP_1$ und $OP_2R$ einander ähnlich sind, wird auch die Konstruktion des Punktes $R$ verhältnismäßig einfach. Man mache zu diesem Zwecke das Dreieck $OE'P'_1$ dem Dreieck $OEP_1$ kongruent und ziehe $P_2R$ parallel zu $E'P'_1$. Dabei hat die Strecke $OR$ nach Konstruktion die Länge $r_1r_2$ und bildet mit der positiven Richtung der X-Achse den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$, so daß man erhält

$$(5.)\quad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Es gilt also auch hier der Satz: *Komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem man die absoluten Beträge miteinander multipliziert und die Argumente addiert.*

In dem besonderen Falle, wo

$$r_1 = 1,\quad r_2 = 1,\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist, geht Gleichung (4.) über in

$$(6.)\qquad i^2 = -1.$$

Damit ist bewiesen, daß *die komplexen Größen, welche in diesem Paragraphen geometrisch erklärt wurden, mit den früher betrachteten identisch sind.*

**IV. Division.** Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, so liegt in der eben angegebenen Konstruktion auch die Anleitung zur Division komplexer Größen. Soll man nämlich die den Strecken $OR$ und $OP_1$ entsprechenden komplexen Größen durcheinander dividieren, so macht man wieder das Dreieck $OP_2R$ (Fig. 137) ähnlich dem Dreieck $OEP_1$, so daß $P_2$ und $E$ homologe Punkte sind. Die Strecke $OP_2$ entspricht dann dem gesuchten Quotienten, und es gilt der Satz: *Komplexe Größen werden durcheinander dividiert, indem man die absoluten Beträge durcheinander dividiert und die Argumente voneinander subtrahiert.*

## § 105.

## Vier Sätze über die absoluten Beträge.

**Satz 1.** *Der absolute Betrag der Summe zweier komplexen Größen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) größer als die Differenz derselben.*

**Beweis.** Die Summe der beiden komplexen Größen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ist

$$(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2) + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2);$$

der absolute Betrage dieser Summe wird daher

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Dieser Ausdruck erhält seinen *größten* Wert, nämlich den Wert $r_1 + r_2$, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$ wird; den *kleinsten* Wert dagegen, nämlich den Wert $|r_1 - r_2|$, erhält er, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ wird. Deshalb ist

$$(1.)\quad |r_1 - r_2| \leqq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \leqq r_1 + r_2.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Viel einfacher gestaltet sich der Beweis mit Hilfe der geometrischen Darstellung; denn da ist dieser Satz identisch mit dem Satze: *In einem Dreiecke $OP_1R$* (Fig. 135) *ist die Seite $OR$ kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seiten $OP_1$ und $P_1R$.*

**Satz 2.** *Der absolute Betrag der Differenz zweier komplexen Größen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) größer als die Differenz derselben.*

**Beweis.** Man kann die Differenz auch als eine Summe auffassen, indem man die Größe, welche subtrahiert werden soll, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, addiert. Deshalb folgt dieser Satz schon aus dem vorhergehenden Satze.

Man kann somit Satz 1 auch ohne weiteres ausdehnen auf die algebraische Summe beliebig vieler Größen.

**Satz 3.** *Der absolute Betrag des Produktes zweier komplexen Größen ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge.*

Der Beweis des Satzes folgt aus der Gleichung

$$(2.)\quad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

**Satz 4.** *Der absolute Betrag des Quotienten zweier komplexen Größen ist gleich dem Quotienten der absoluten Beträge.*

Auch hier folgt der Beweis unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

## § 106.
## Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 116 und 117.)

**Erklärung.** *Eine unendliche Reihe*

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots,$$

*bei der die einzelnen Glieder komplexe Größen sind, heißt konvergent, wenn die reellen Teile und die Faktoren der imaginären Teile für sich zwei konvergente Reihen bilden, wenn also die Reihen*

$$(1.)\qquad \begin{cases} A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \\ B = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots, \end{cases}$$

*konvergent sind*; und zwar heißt sie „*unbedingt konvergent*", wenn $A$ und $B$ *unbedingt konvergente* Reihen sind. Ihre *Summe* wird sich dann derselben Grenze

$$(2.)\qquad S = A + Bi$$

nähern, wie man auch die Glieder der Reihe anordnen mag.

**Satz 1.** *Eine Reihe (mit reellen oder komplexen Gliedern) ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert.*

**Beweis.** Ist

$$(3.)\qquad r_0 = |a_0 + b_0 i|,\quad r_1 = |a_1 + b_1 i|,\quad r_2 = |a_2 + b_2 i| \ldots,$$

so konvergiert nach Voraussetzung die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots.$$

Nun ist aber

$$r_0 \geqq |a_0|,\quad r_1 \geqq |a_1|,\quad r_2 \geqq |a_2|, \ldots,$$
$$r_0 \geqq |b_0|,\quad r_1 \geqq |b_1|,\quad r_2 \geqq |b_2|, \ldots,$$

folglich sind die Reihen

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots,$$
$$|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots$$

erst recht konvergent, d. h. die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{und} \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

sind nach Formel Nr. 116 der Tabelle *unbedingt konvergent*. Deshalb gilt auch dasselbe für die Reihe

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots.$$

Der Wortlaut dieses Satzes stimmt genau überein mit dem letzten Satze in § 54 (S. 257, vergl. auch Formel Nr. 116 der Tabelle); dort handelte es sich aber nur um Reihen mit positiven und negativen *reellen* Gliedern, während hier die einzelnen Glieder *komplexe* Größen sind.

**Umkehrung.** *Ist eine Reihe mit komplexen Gliedern unbedingt konvergent, so konvergiert auch die Summe der absoluten Beträge.*

**Beweis.** Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Satz 1 konvergieren nach Voraussetzung die beiden Reihen

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots$$

und

$$|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots;$$

deshalb konvergiert auch die Reihe

$$(|a_0| + |b_0|) + (|a_1| + |b_1|) + (|a_2| + |b_2|) + \cdots,$$

die nur positive Glieder enthält. Nach Satz 1 in § 105 ist aber der absolute Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge, es ist also

$$\begin{aligned} r_0 &= |a_0 + b_0 i| \leqq |a_0| + |b_0|, \\ r_1 &= |a_1 + b_1 i| \leqq |a_1| + |b_1|, \\ r_2 &= |a_2 + b_2 i| \leqq |a_2| + |b_2|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

folglich ist die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$$

erst recht konvergent.

Auch die Sätze, welche in § 55 für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier *unbedingt konvergenten* Reihen und über die Wurzelausziehung aus Reihen mit *reellen* Gliedern bewiesen wurden, lassen sich jetzt auf Reihen mit *komplexen* Gliedern übertragen. Dadurch erhält man die folgenden Sätze:

**Satz 2.** *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \textit{und} \quad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{4.}$$

*zwei (bedingt oder unbedingt) konvergente Reihen, so werden* *diese Reihen addiert, indem man die gleichstelligen Glieder addiert*; es wird also

(5.) $$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + u_2) + \cdots.$$

Ebenso findet man für die Subtraktion der beiden konvergenten Reihen

(6.) $$U - V = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots.$$

In derselben Weise kann man auch die algebraische Summe von drei oder mehr konvergenten Reihen mit komplexen Gliedern bilden.

**Satz 3.** *Sind*

(7.) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \textit{und} \quad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*zwei unbedingt konvergente Reihen* (deren Glieder jetzt auch komplex sein dürfen), *und ist*

$$\begin{aligned}
w_0 &= u_0 v_0,\\
w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0,\\
w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,
\end{aligned}$$

*so ist auch die Reihe*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

*unbedingt konvergent, und ihre Summe $W$ ist gleich dem Produkte $UV$ der Summen der beiden ersten Reihen.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind die Reihen

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + |v_2| + \cdots$$

konvergent. Bezeichnet man ihre Summen bezw. mit $U'$ und $V'$, und mit $W'$ die Reihe, welche durch Multiplikation der beiden Reihen $U'$ und $V'$ entsteht, so kann man in diesen drei Reihen die Summen $U'_n$, $V'_n$, $W'_n$ der $n$ ersten Glieder absondern und findet ebenso wie in § 55, daß

$$\begin{aligned}
U'_n V'_n - W'_n = {} & |u_{n-1}|\cdot|v_{n-1}| + (|u_{n-2}|\cdot|v_{n-1}| + |u_{n-1}|\cdot|v_{n-2}|) + \cdots\\
& + (|u_1|\cdot|v_{n-1}| + |u_2|\cdot|v_{n-2}| + \cdots + |u_{n-2}|\cdot|v_2| + |u_{n-1}|\cdot|v_1|)\\
= {} & |u_{n-1} v_{n-1}| + (|u_{n-2} v_{n-1}| + |u_{n-1} v_{n-2}|) + \cdots
\end{aligned}$$

für hinreichend große Werte von $n$ beliebig klein wird; folglich wird nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen der absolute Betrag von

$$U_n V_n - W_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-2} v_{n-1} + u_{n-1} v_{n-2}) + \cdots$$
$$+ (u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-2} v_2 + u_{n-1} v_1)$$

erst recht beliebig klein, denn der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge. Es wird daher

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} U_n V_n = UV. \tag{8.}$$

Dabei ist auch $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ *unbedingt konvergent*; denn ersetzt man die Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots$ durch ihre absoluten Beträge, so verwandeln sich die Größen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ in $w'_0, w'_1, w'_2, \ldots$, und es wird

$$|w_0| = w'_0, \quad |w_1| \leqq w'_1, \quad |w_2| \leqq w'_2, \ldots .$$

Jetzt ist die Reihe $w'_0 + w'_1 + w'_2 + \cdots$ konvergent, folglich ist die Reihe

$$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots$$

erst recht konvergent.

Daraus ergibt sich dann auch ohne weiteres, wie man das Produkt von drei oder mehr *unbedingt konvergenten* Reihen bilden kann.

Macht man die Faktoren eines solchen Produktes sämtlich einander gleich, so erhält man die *Potenz* einer Reihe. Ist z. B. wieder

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{9.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe, so wird auch

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \tag{10.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe. Für die Bildung der einzelnen Glieder $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ gilt auch hier die in § 55 bewiesene Rekursionsformel

$$\begin{aligned} nu_0 A_n &+ [n - (m+1)] u_1 A_{n-1} + [n - 2(m+1)] u_2 A_{n-2} \\ &+ [n - 3(m+1)] u_3 A_{n-3} + \cdots + [n - (n-1)(m+1)] u_{n-1} A_1 \\ &+ [n - n(m+1)] u_n A_0 = 0. \end{aligned} \tag{11.}$$

Aus der *Multiplikation* ergibt sich durch Umkehrung auch die *Division*, und aus der *Potenzierung* ergibt sich durch Umkehrung die *Wurzelausziehung*. Dabei gelten auch hier dieselben Beziehungen und Gleichungen wie die in § 55 für Reihen mit *reellen* Gliedern aufgeführten. Bei der Übertragung der Wurzelausziehung auf Reihen mit komplexen Gliedern ist nur noch zu beachten, daß die Größe

$$u_0 = \sqrt[m]{A_0} \tag{12.}$$

nach Formel Nr. 173 der Tabelle $m$ verschiedene Werte besitzt.

## § 107.

## Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 174.)

Da man die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bei komplexen Größen in derselben Weise ausführen kann wie bei reellen, so kann man auch ganze und gebrochene rationale Funktionen von einer komplexen Veränderlichen

$$z = x + yi \tag{1.}$$

bilden. Eine solche Funktion kann immer auf die Form

$$f(z) = f(x + yi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = u + vi \tag{2.}$$

gebracht werden, wenn man die Operationen, welche durch die Bildung der Funktion gefordert werden, wirklich ausführt. Dabei sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ wieder *rationale* Funktionen der beiden Veränderlichen $x$ und $y$, die nur reelle Größen enthalten.

Auch *irrationale* Funktionen von $x + yi$ kann man bilden, da es möglich ist, bei jeder komplexen Größe $n$ Werte der Wurzel $n^{\text{ten}}$ Grades anzugeben. Außerdem kann man noch *transzendente* Funktionen von $x + yi$ durch konvergente Reihen erklären. Beispiele hierzu bieten die Reihen

$$1 + \frac{x + yi}{1!} + \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^3}{3!} + \cdots,$$

$$\frac{x + yi}{1!} - \frac{(x + yi)^3}{3!} + \frac{(x + yi)^5}{5!} - + \cdots,$$

$$1 - \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^4}{4!} - + \cdots$$

usw., welche bezw. in $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ übergehen, wenn $y$ gleich 0 wird. Diese Reihen sind auch konvergent, weil die Summe der absoluten Beträge konvergiert. Auf die so gebildeten Funktionen lassen sich ohne weiteres alle Erklärungen und Sätze ausdehnen, welche in der Differential-Rechnung für Funktionen von einer *reellen* Veränderlichen gegeben worden sind. Namentlich kann man auch hier den Differentialquotienten, d. h. die Ableitung der Funktion wieder wie in Formel Nr. 16 der Tabelle durch die Gleichung

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{z_1=z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$

erklären. Handelt es sich z. B. um die Bildung der Ableitung von $z^n$, so findet man in derselben Weise wie bei reellen Veränderlichen

$$\frac{d(z^n)}{dz} = \lim_{z_1=z} \frac{z_1{}^n - z^n}{z_1 - z} = \lim_{z_1=z} (z_1{}^{n-1} + zz_1{}^{n-2} + \cdots + z^{n-2}z_1 + z^{n-1})$$
$$= nz^{n-1},$$

wobei $z_1 = x_1 + y_1 i$ sich dem Werte $z = x + yi$ beliebig nähert, indem sich $x_1$ dem Werte $x$ und $y_1$ dem Werte $y$ beliebig nähern. Dabei ist

(3.) $$dz = dx + idy, \quad df(z) = d(u + vi) = du + idv,$$

so daß man es, abgesehen von dem Faktor $i$, auch hier nur mit den Differentialen *reeller* Größen zu tun hat.

Bemerkenswert sind hier aber noch die folgenden Formeln.

Man kann $f(z)$ als Funktion der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ betrachten und erhält deshalb

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

oder

(4.) $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z).$$

Dies gibt

(5.) $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\frac{\partial f(z)}{\partial y} = f'(z) - f'(z) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

$$(6.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

also

$$(7.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

## § 108.

## Zusammenhang der Exponential-Funktion mit den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 175 bis 185.)

Es sei eine Funktion $f(z)$ erklärt durch die Gleichung

$$(1.)\qquad f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

wobei $z$ jetzt auch komplexe Werte $x + yi$ haben darf.

Multipliziert man diese Reihe mit

$$(2.)\qquad f(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \cdots,$$

so erhält man

$$(3.)\qquad f(z)\,.\,f(z_1) = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots,$$

wobei nach Formel Nr. 117 der Tabelle

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{z}{1!} + \frac{z_1}{1!} = \frac{z + z_1}{1!},$$

$$w_2 = \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{1!}\cdot\frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} = \frac{z^2 + 2zz_1 + z_1^2}{2!} = \frac{(z+z_1)^2}{2!},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$w_n = \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_1}{1!} + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{z_1^2}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n!}\left[z^n + \frac{n}{1}z^{n-1}z_1 + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}z_1^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{(z+z_1)^n}{n!}$$

wird. Deshalb ist

$$(4.)\quad f(z)f(z_1) = 1 + \frac{z+z_1}{1!} + \frac{(z+z_1)^2}{2!} + \frac{(z+z_1)^3}{3!} + \cdots = f(z+z_1).$$

Beschränkt man $z$ und $z_1$ auf *reelle* Werte, so wird

$$f(z) = e^z,\quad f(z_1) = e^{z_1},\quad f(z + z_1) = e^{z+z_1},$$

und Gleichung (4.) gibt die bekannte Relation

$$e^z \,.\, e^{z_1} = e^{z+z_1}. \tag{5.}$$

Man bezeichnet nun die durch Gleichung (1.) erklärte Funktion $f(z)$ auch dann noch mit $e^z$ und nennt sie „*Exponential-Funktion*“, wenn $z$ beliebige *komplexe* Werte annimmt, obgleich dann $z$ kein eigentlicher Exponent mehr ist. Es ist also bei dieser Erweiterung des Begriffes die Funktion $e^z$ nicht mehr als eine *Potenz* aufzufassen, sondern als die Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

Wie aber soeben gezeigt wurde, gilt auch dann noch die Gleichung (5.), in welcher das *Additionstheorem* der Exponential-Funktion ausgesprochen ist.

Um zu untersuchen, welchen Sinn $e^z$ für komplexe Werte von $z$ hat, setze man zunächst $x = 0$, also $z = yi$; dann wird

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right) \tag{6.}$$
$$= \cos y + i \sin y.$$

Ebenso findet man für $z = -yi$

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y. \tag{7.}$$

Daraus folgt

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2},\quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{8.}$$

Setzt man jetzt $z = x + yi$, so wird nach Gleichung (5.)

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{9.}$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich auch mit großer Leichtigkeit die *Moivre*schen Formeln (vergl. die Formel-Tabelle Nr. 169 bis 173).

Setzt man nämlich

$$e^{x_1} = r_1,\ e^{x_2} = r_2,\quad \text{also}\quad e^{x_1+x_2} = r_1 r_2,\ e^{x_1-x_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

so wird

$$e^{x_1+y_1i} = r_1(\cos y_1 + i\sin y_1),$$
$$e^{x_2+y_2i} = r_2(\cos y_2 + i\sin y_2);$$

deshalb folgt aus Gleichung (5.)

$$e^{x_1+y_1i} \cdot e^{x_2+y_2i} = e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i},$$

oder

$$(10.)\qquad r_1(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot r_2(\cos y_2 + i\sin y_2) = r_1r_2[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)].$$

Dadurch wird Formel Nr. 169 der Tabelle bestätigt.

Ferner folgt aus Gleichung (5.)

$$e^{x+yi} \cdot e^{-x-yi} = e^0 = 1,$$

oder

$$(11.)\qquad e^{-x-yi} = \frac{1}{e^{x+yi}} = \frac{1}{e^x}(\cos y - i\sin y);$$

deshalb wird

$$(12.)\qquad \frac{e^{x_1+y_1i}}{e^{x_2+y_2i}} = e^{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i},$$

oder

$$(13.)\qquad \frac{r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)}{r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)].$$

Dadurch wird Formel Nr. 172 der Tabelle bestätigt.

Durch wiederholte Anwendung des *Additionstheorems* ergibt sich das *Multiplikationstheorem* der Exponential-Funktion, das in der Gleichung

$$(14.)\qquad (e^{\varphi i})^n = e^{n\varphi i}$$

ausgesprochen ist. Diese Gleichung enthält aber zugleich auch das *Multiplikationstheorem* der trigonometrischen Funktionen, denn sie kann auch in der Form

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

geschrieben werden und liefert dann die Formeln Nr. 171 der Tabelle, nämlich

$$(15.)\quad \begin{cases} \cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi \\ \qquad + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots, \\ \sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots. \end{cases}$$

Besonders zu beachten ist es noch, daß aus Gleichung (6.) für $y = 2\pi,\ 4\pi, \ldots 2h\pi$

$$(16.)\qquad e^{2\pi i} = 1, \quad e^{4\pi i} = 1, \quad \ldots e^{2h\pi i} = 1$$

folgt, wenn $h$ eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl ist. Ferner wird deshalb

$$(17.)\qquad e^{z+2h\pi i} = e^z \,.\, e^{2h\pi i} = e^z.$$

Die Exponential-Funktion hat also die Eigenschaft, daß sich ihr Wert gar nicht ändert, wenn man die Veränderliche $z$ um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt. Man nennt deshalb $2\pi i$ eine „*Periode* der Exponential-Funktion“ und $e^z$ selbst eine „*periodische* Funktion“. In ähnlicher Weise sind auch die trigonometrischen Funktionen periodische Funktionen, und zwar ist ihre Periode $2\pi$; denn sie ändern ihren Wert nicht, wenn man den Wert der Veränderlichen um ein Vielfaches von $2\pi$ vermehrt.

Aus den vorstehenden Formeln erkennt man auch den inneren Grund für die nahe Verwandtschaft zwischen den *trigonometrischen* und den *hyperbolischen* Funktionen. Den Gleichungen (6.), (7.) und (8.) entsprechen nämlich die Gleichungen

$$(6\text{a.})\quad e^u = \mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u, \qquad (7\text{a.})\quad e^{-u} = \mathfrak{Cos}\, u - \mathfrak{Sin}\, u,$$

$$(8\text{a.})\qquad \mathfrak{Cos}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Setzt man $u = \varphi i$, so erhält man aus diesen Gleichungen

$$(18.)\qquad \mathfrak{Cos}(\varphi i) = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} = \cos\varphi,$$

$$(19.)\qquad \mathfrak{Sin}(\varphi i) = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2} = i\sin\varphi.$$

Setzt man dagegen $y = \varphi i$, so findet man aus den Gleichungen (8.)

$$(20.)\qquad \cos(\varphi i) = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} = \mathfrak{Cos}\,\varphi,$$

$$(21.)\qquad \sin(\varphi i) = \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2i} = i \cdot \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = i\,\mathfrak{Sin}\,\varphi.$$

Daraus ergibt sich auch, wie man die Formeln für die hyperbolischen Funktionen aus den entsprechenden trigonometrischen Formeln ohne weiteres ableiten kann.

Setzt man der Kürze wegen

$$(22.)\qquad e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi = s, \quad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi = t,$$

so wird

$$(23.)\qquad \begin{cases} s + t = 2\cos\varphi, \quad s - t = 2i\sin\varphi, \quad st = 1, \\ s^m + t^m = e^{m\varphi i} + e^{-m\varphi i} = 2\cos(m\varphi), \\ s^m - t^m = e^{m\varphi i} - e^{-m\varphi i} = 2i\sin(m\varphi). \end{cases}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man dann

$$(s + t)^{2n} = s^{2n} + \binom{2n}{1} s^{2n-1}t + \binom{2n}{2} s^{2n-2}t^2 + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{2} s^2 t^{2n-2} + \binom{2n}{1} s t^{2n-1} + t^{2n},$$

oder, wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung je zwei Glieder miteinander vereinigt, von denen das eine ebenso weit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht,

$$(s + t)^{2n} = (s^{2n} + t^{2n}) + \binom{2n}{1} st(s^{2n-2} + t^{2n-2})$$
$$+ \binom{2n}{2} s^2t^2(s^{2n-4} + t^{2n-4}) + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{n-1} s^{n-1}t^{n-1}(s^2 + t^2) + \binom{2n}{n} s^n t^n.$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (22.) und (23.)

$$(24.)\qquad 2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi$$
$$+ \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}.$$

Ebenso findet man

$$(25.)\quad 2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1}2\cos(2n-1)\varphi + \cdots$$
$$+ \binom{2n+1}{n-1}2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n}2\cos\varphi.$$

Bildet man jetzt in ähnlicher Weise

$$(s-t)^{2n} = (s^{2n}+t^{2n}) - \binom{2n}{1}st(s^{2n-2}+t^{2n-2})$$
$$+ \binom{2n}{2}s^2t^2(s^{2n-4}+t^{2n-4}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}s^{n-1}t^{n-1}(s^2+t^2) + (-1)^n\binom{2n}{n}s^nt^n,$$

so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (22.) und (23.)

$$(26.)\quad (-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)\varphi$$
$$+ \binom{2n}{2}2\cos(2n-4)\varphi - + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}2\cos(2\varphi) + (-1)^n\binom{2n}{n}.$$

Dagegen wird

$$(s-t)^{2n+1} = (s^{2n+1}-t^{2n+1}) - \binom{2n+1}{1}st(s^{2n-1}-t^{2n-1}) + - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}s^{n-1}t^{n-1}(s^3-t^3)$$
$$+ (-1)^n\binom{2n+1}{n}s^nt^n(s-t).$$

Berücksichtigt man jetzt wieder die Gleichungen (22.) und (23.) und dividiert beide Seiten der Gleichung durch $i$, so erhält man

$$(27.)\quad (-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1}2\sin(2n-1)\varphi + - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}2\sin(3\varphi) + (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\sin\varphi.$$

Ähnliche Formeln lassen sich auch für die *hyperbolischen* Funktionen herleiten.

**Bemerkungen.**

1. Dem Anfänger wird dringend empfohlen, diese Formeln durch Zahlenbeispiele einzuüben, also die Ausdrücke für $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$, $\cos^3\varphi$, $\sin^3\varphi$, $\cos^4\varphi$, $\sin^4\varphi, \ldots$ wirklich zu bilden.

2. Die vorstehenden Formeln finden in der Integral-Rechnung eine wichtige Anwendung.

## § 109.

## Logarithmen der komplexen Größen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 186 und 187.)

Nach Gleichung (9.) des vorhergehenden Paragraphen war

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = u + vi, \tag{1.}$$

wo

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y \tag{2.}$$

reelle Größen sind. Hierbei waren $x$ und $y$ ganz beliebige Größen. Man kann aber auch die Gleichung (1.) befriedigen, wenn die Größen $u$ und $v$ beliebig gegeben sind, denn aus den Gleichungen (2.) folgt dann

$$\left\{\begin{array}{lll} e^{2x} = u^2 + v^2, & \text{oder} & x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \\ \operatorname{tg} y = \frac{v}{u}, & \text{oder} & y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\right), \end{array}\right. \tag{3.}$$

wobei man den Wert von $y$ so bestimmen muß, daß

$$\begin{array}{lll} 0 < y < \frac{\pi}{2}, & \text{wenn} & u > 0,\ v > 0, \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi, & ,, & u < 0,\ v > 0, \\ \pi < y < \frac{3\pi}{2}, & ,, & u < 0,\ v < 0, \\ \frac{3\pi}{2} < y < 2\pi, & ,, & u > 0,\ v < 0 \end{array}$$

ist, damit die Gleichungen (2.) befriedigt werden.

Für *reelle* Größen war nun der natürliche Logarithmus einer Zahl $a$ der Exponent, zu welchem die Basis $e$ erhoben werden muß, damit man $a$ erhält, d. h. aus der Gleichung

$$e^\alpha = a \quad \text{folgte} \quad \alpha = \ln a.$$

Man erkennt aus dem vorstehenden, daß man diese Erklärung jetzt ohne weiteres auf komplexe Größen ausdehnen kann, indem man aus Gleichung (1.) die Gleichung

$$x + yi = \ln(u + vi) \tag{4.}$$

ableitet. Dabei tritt aber der äußerst bemerkenswerte Umstand ein, daß der Logarithmus von $u + vi$ *unendlich viele* Werte haben kann, denn nach Formel Nr. 179 der Tabelle wird für ganzzahlige Werte von $h$ auch

$$e^{x+yi+2h\pi i} = u + vi. \tag{5.}$$

Dies gibt

$$\ln(u + vi) = x + yi + 2h\pi i. \tag{6.}$$

Liegt $y$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so nennt man $x + yi$ den „*Hauptwert* von $\ln(u + vi)$". Aus diesem gehen alle übrigen Werte von $\ln(u + vi)$ durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ hervor.

Aus der Gleichung

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \tag{7.}$$

folgt z. B.

$$\ln(-1) = \pi i + 2h\pi i = (2h + 1)\pi i. \tag{8.}$$

## § 110.

## Zusammenhang der Funktionen $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ und $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 188 und 189.)

Nach Formel Nr. 100 der Tabelle ist für $-1 < x < +1$

$$\tag{1.} \begin{cases} \ln(1 + x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + - \cdots, \\ \ln(1 - x) = -\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - - \cdots, \end{cases}$$

also

$$\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{2.}$$

Damals war $x$ eine *reelle* Größe; jetzt gelten aber die zur Herleitung dieser Reihenentwickelung notwendigen Voraussetzungen auch noch, wenn $x$ eine *komplexe* Größe ist, deren absoluter Betrag kleiner als 1 bleibt. Setzt man z. B. $x = \varphi i$, wo $\varphi$ eine reelle Größe zwischen $-1$ und $+1$ sein möge, so erhält man

$$(3.)\qquad \ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = 2i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} - \frac{\varphi^7}{7} + - \cdots\right).$$

Dies gibt aber nach Formel Nr. 106 der Tabelle

$$(4.)\qquad \ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg} \varphi.$$

Nach Formel Nr. 75 der Tabelle war

$$(5.)\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

folglich wird, wenn man $x = \varphi i$ setzt,

$$(6.)\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\varphi i) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = i \operatorname{arctg} \varphi.$$

Setzt man dagegen in

$$(7.)\qquad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

$x = \varphi i$, so findet man

$$(8.)\qquad \operatorname{arctg}(\varphi i) = i\left(\frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} + \cdots\right) = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varphi.$$

---

## XIV. Abschnitt.

# Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$.

### § 111.

### Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$. Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades in $n$ lineare Faktoren.

Es sei

$$(1.)\qquad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

eine ganze rationale Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades von $x$, wobei die Koeffizienten $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ reelle oder komplexe Größen sind; nur werde zunächst vorausgesetzt, daß $a$ von Null verschieden sei, dann nennt man

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

„eine algebraische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades".

Ist nun $f(x)$ für irgend einen reellen oder komplexen Wert von $x$ nicht gleich Null, so kann man, wie sich streng nachweisen läßt,*) die komplexe Größe $h$ stets so bestimmen, daß

$$|f(x+h)| < |f(x)|$$

wird. Auf diese Weise kann man nach und nach andere und andere Werte von $x$ finden, für welche $|f(x)|$ kleinere und kleinere Werte annimmt, bis schließlich

---

*) Der strenge Nachweis möge hier übergangen werden, damit der Umfang dieses Lehrbuches nicht allzu groß werde.

$$\lim |f(x)| = 0, \quad \text{und deshalb auch} \quad \lim f(x) = 0$$

wird. Ein solcher Wert von $x$ wird „eine *Wurzel* der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$“ genannt. Es gilt also

**Satz 1.** *Jede algebraische Gleichung besitzt Wurzeln.*

Ist $x_1$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so wird

$$(2.)\quad f(x_1) = ax_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (1.) und (2.) voneinander, so erhält man

$$(3.)\quad f(x) - f(x_1) = f(x) = a(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1),$$

oder nach Formel Nr. 13 der Tabelle

$$\begin{aligned}(3a.)\quad f(x) = (x - x_1)[&a(x^{n-1} + x_1 x^{n-2} + x_1^2 x^{n-3} + \cdots + x_1^{n-1}) \\ &+ a_1(x^{n-2} + x_1 x^{n-3} + x_1^2 x^{n-4} + \cdots + x_1^{n-2}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n-2}(x + x_1) + a_{n-1}].\end{aligned}$$

Bezeichnet man die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in der eckigen Klammer mit $f_1(x)$, so wird daher

$$(4.)\quad f(x) = (x - x_1) f_1(x) = (x - x_1)(ax^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}),$$

wobei

$$b_1 = ax_1 + a_1, \quad b_2 = ax_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \ldots .$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

**Satz 2.** *Ist $x_1$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ durch den Faktor $x - x_1$ ohne Rest teilbar.*

Nach Satz 1 hat jetzt auch die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_1(x) = 0$ Wurzeln. Eine solche Wurzel sei $x_2$; dann ist nach Satz 2

$$(5.)\quad f_1(x) = (x - x_2) f_2(x),$$

wobei

$$f_2(x) = ax^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \cdots + c_{n-2}$$

eine ganze rationale Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist. Ebenso findet man die Gleichungen

(6.) $f_2(x) = (x-x_3)f_3(x) = (x-x_3)(ax^{n-3}+d_1x^{n-4}+\cdots+d_{n-3})$,

(7.) $f_3(x) = (x-x_4)f_4(x) = (x-x_4)(ax^{n-4}+e_1x^{n-5}+\cdots+e_{n-4})$,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(8.) $f_{n-2}(x) = (x-x_{n-1})f_{n-1}(x) = (x-x_{n-1})(ax+k)$,

(9.) $f_{n-1}(x) = a(x-x_n)$, wobei $x_n = -\frac{k}{a}$

ist. Multipliziert man die Gleichungen (4.) bis (9.) miteinander und hebt die Faktoren

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x), \ldots f_{n-1}(x)$$

auf beiden Seiten fort, so erhält man

(10.) $$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n).$$

Daraus folgen die Sätze:

**Satz 3.** *Jede ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades läßt sich in lineare Faktoren* (d. h. Faktoren ersten Grades) *zerlegen.*

**Satz 4.** *Jede Gleichung $n^{ten}$ Grades hat genau $n$ Wurzeln.*

Aus Gleichung (10.) ersieht man nämlich, daß $f(x) = 0$ wird für die $n$ Werte

$$x = x_1,\quad x = x_2,\quad x = x_3, \ldots x = x_n,$$

und daß $f(x)$ für keinen anderen Wert von $x$ verschwinden kann. Denn wäre $f(x) = 0$ für $x = x_{n+1}$, wobei $x_{n+1}$ von $x_1$, $x_2$, $x_3, \ldots x_n$ verschieden sein soll, so würde aus Gleichung (10.) folgen

(11.) $$a(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_3)\ldots(x_{n+1}-x_n) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach Voraussetzung sind sämtliche Faktoren dieses Produktes von 0 verschieden.

Daraus geht auch hervor, daß die Zerlegung eindeutig ist.

Läßt man die Voraussetzung, daß $a$ von Null verschieden sei, fort, so folgt aus der Gleichung (11.), daß $a = 0$ sein muß und daß sich $f(x)$ auf die rationale ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

reduziert, welche für mehr als $n-1$ Werte von $x$ verschwindet. Daraus würde man wieder schließen, daß auch $a_1 = 0$ sein muss. Indem man diesen Schluß wiederholt, findet man

**Satz 5.** *Verschwindet die ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades*

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

*für mehr als $n$ verschiedene Werte von $x$, so müssen sämtliche Koeffizienten $a$, $a_1$, $a_2, \ldots a_{n-1}$, $a_n$ gleich* 0 *sein.*

Weiß man z. B., daß

$$ax + a_1 = 0$$

wird für zwei verschiedene Werte von $x$, so kann man daraus schließen

$$a = 0, \quad a_1 = 0.$$

Oder wenn man weiß, daß

$$ax^2 + a_1x + a_2 = 0$$

wird für drei verschiedene Werte von $x$, so kann man daraus schließen

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Aus Satz 5 ergibt sich auch der

**Satz 5a.** *Sind zwei ganze rationale Funktionen*

$$F(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

*und*

$$G(x) = Bx^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_{n-1}x + B_n$$

*für mehr als $n$ Werte von $x$ einander gleich, so müssen die gleichstelligen Koeffizienten einander gleich sein*, d. h. es muß

$$A = B, \quad A_1 = B_1, \ldots A_{n-1} = B_{n-1}, \quad A_n = B_n$$

sein. Der Beweis folgt aus Satz 5, indem man

$$F(x) - G(x) = f(x),$$

also

$$A - B = a, \; A_1 - B_1 = a_1, \ldots A_{n-1} - B_{n-1} = a_{n-1}, \; A_n - B_n = a_n$$

setzt.

## § 112.

## Gleiche Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß unter den $n$ Wurzeln $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ einer Gleichung $n^{ten}$ Grades auch etliche einander gleich sind. Ist z. B. $x_2 = x_1$, so wird nach dem vorstehenden

(1.) $f(x) = (x - x_1)^2 f_2(x),$

(2.) $$f'(x) = 2(x - x_1)f_2(x) + (x - x_1)^2 f'_2(x)$$
$$= (x - x_1)[2f_2(x) + (x - x_1)f'_2(x)],$$

oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

(2a.) $$f'(x) = (x - x_1)\varphi(x),$$

d. h. $x_1$ ist dann auch eine Wurzel der Gleichung
$$f'(x) = 0.$$

Dieses Resultat kann man noch verallgemeinern. Ist $x_1$ eine $\alpha$-fache Wurzel von $f(x) = 0$, ist also z. B.
$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_\alpha,$$
so wird nach dem vorstehenden

(3.) $f(x) = (x - x_1)^\alpha f_\alpha(x),$

(4.) $$f'(x) = \alpha(x - x_1)^{\alpha-1} f_\alpha(x) + (x - x_1)^\alpha f'_\alpha(x)$$
$$= (x - x_1)^{\alpha-1}[\alpha f_\alpha(x) + (x - x_1)f'_\alpha(x)],$$

oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer wieder mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

(4a.) $$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1}\varphi(x).$$

Dies gibt den

**Satz.** *Ist $x_1$ eine $\alpha$-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $x_1$ eine $(\alpha - 1)$-fache Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, eine $(\alpha - 2)$-fache Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0, \ldots$ und eine einfache Wurzel der Gleichung $f^{(\alpha-1)}(x) = 0$.*

Ein besonderer Fall hiervon ist der, daß
$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_{n-2} = 0, \ldots a_{n-\alpha+1} = 0$$
wird; dann reduziert sich die Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades auf

(5.) $$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-\alpha}x^\alpha = 0$$

und hat die $\alpha$-fache Wurzel $x = 0$.

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so geht die Gleichung $f(x) = 0$ über in
$$\frac{a}{t^n} + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{t} + a_n = 0,$$
oder, wenn man die ganze Gleichung mit $t^n$ multipliziert, in

(6.) $$a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a = 0.$$

Jeder Wurzel $t_\alpha$ dieser Gleichung entspricht eine Wurzel $x_\alpha = \frac{1}{t_\alpha}$ der Gleichung $f(x) = 0$. Wenn nun

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \ldots a_{\alpha-1} = 0$$

ist, so reduziert sich Gleichung (6.) auf

$$(6a.) \qquad a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_\alpha t^\alpha = 0$$

und hat die $\alpha$-fache Wurzel $t = 0$, folglich werden in diesem Falle $\alpha$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ *unendlich groß*.

## § 113.

## Auftreten komplexer Wurzeln einer Gleichung.

Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung können reell sein, sie können aber auch zum Teil komplex, ja sie können auch sämtlich komplex sein. Über das Auftreten komplexer Wurzeln gilt aber der folgende

**Satz 1.** *Sind die Koeffizienten einer Gleichung $n^{ten}$ Grades $f(x) = 0$ sämtlich reell, und ist $x_1 = g + hi$ eine Wurzel dieser Gleichung, so muß auch $g - hi$ eine Wurzel derselben sein.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$(1.) \qquad f(x) = (x - x_1) f_1(x) = (x - g - hi) f_1(x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von $x$, folglich bleibt sie auch richtig, wenn man $x$ auf reelle Werte beschränkt. Bringt man dann $\frac{f(x)}{x - x_1} = f_1(x)$ auf die Form $P + Qi$, wo $P$ und $Q$ reelle Größen sind, so wird

$$f(x) = (x - g - hi)(P + Qi).$$

Nun ist

$$(2.) \quad (x-g-hi)(P+Qi) = [(x-g)P + Qh] + [(x-g)Q - Ph]i,$$

$$(3.) \quad (x-g+hi)(P-Qi) = [(x-g)P + Qh) - [(x-g)Q - Ph]i.$$

Da aber

$$(4.) \qquad (x - g - hi)(P + Qi) = f(x)$$

eine *reelle* Größe ist, so muß

$$(5.) \qquad (x - g)Q - Ph \equiv 0$$

sein, d. h. $(x-g)Q-Ph$ muß für *alle* Werte von $x$ gleich Null sein. Daraus erkennt man nach Gleichung (3.), daß auch

$$(6.)\qquad (x-g+hi)(P-Qi)=f(x)$$

wird. Die komplexen Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades mit reellen Koeffizienten treten also paarweise auf, so daß jeder komplexen Wurzel die konjugierte Größe als eine zweite Wurzel der Gleichung zugeordnet ist.

Dies gilt auch noch, wenn $x_1=g+hi$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung ist; denn aus

$$f(x)=(x-g-hi)^{\alpha}f_{\alpha}(x)$$

folgt, wenn man $f_{\alpha}(x)$ auf die Form $P_{\alpha}+Q_{\alpha}i$ bringt, daß

$$(7.)\qquad f(x)=(x-g-hi)^{\alpha}(P_{\alpha}+Q_{\alpha}i)$$

ist. Da sich aber $f(x)$ nicht ändert, wenn man $+i$ mit $-i$ vertauscht, so ist auch

$$(8.)\qquad f(x)=(x-g+hi)^{\alpha}(P_{\alpha}-Q_{\alpha}i).$$

Daraus folgt unmittelbar

**Satz 2.** *Sind die Koeffizienten der Gleichung $n^{ten}$ Grades sämtlich reell, und ist $n$ eine ungerade Zahl, so muß mindestens eine Wurzel der Gleichung reell sein.*

## § 114.

## Die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 190.)

**Erklärung.** Eine Funktion der $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heißt symmetrisch, wenn sie bei jeder beliebigen Vertauschung (Permutation) der Veränderlichen unverändert bleibt.

Die algebraischen Gleichungen liefern Beispiele für die symmetrischen Funktionen. Sind z. B. $x_1$ und $x_2$ die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$f(x)=x^2-\mathfrak{f}_1x+\mathfrak{f}_2=0,$$

so wird nach § 111

$$(1.)\qquad f(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2;$$

folglich erhält man

$$(2.)\qquad \mathfrak{f}_1=x_1+x_2,\quad \mathfrak{f}_2=x_1x_2.$$

Sind $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$f(x) = x^3 - \mathfrak{f}_1 x^2 + \mathfrak{f}_2 x - \mathfrak{f}_3 = 0,$$

so wird nach § 111

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \tag{3.}$$

oder, wenn man die Multiplikation ausführt,

$$f(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3, \tag{4.}$$

folglich erhält man

$$\mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad \mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3. \tag{5.}$$

So kann man fortfahren und findet das folgende allgemeine Ergebnis. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \mathfrak{f}_3 x^{n-3} + - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0, \tag{6.}$$

so wird nach § 111

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n), \tag{7.}$$

oder, wenn man die Multiplikation ausführt,

$$f(x) = x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots \\ + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - + \cdots \pm x_1x_2x_3 \ldots x_n. \tag{8.}$$

Da die Ausdrücke auf der rechten Seite von Gleichung (6.) und Gleichung (8.) einander gleich sind für alle Werte von $x$, so müssen nach Satz 5a in § 111 die gleichstelligen Koeffizienten einander gleich sein, es wird also

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\ \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ \mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{f}_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n. \end{array}\right. \tag{9.}$$

Die Größen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots \mathfrak{f}_n$ sind, wie man ohne weiteres erkennt, *symmetrische* Funktionen der Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, und zwar nennt man sie „die *elementaren* symmetrischen Funktionen“, erstens weil sie besonders einfach gebildet sind, namentlich aber, *weil sich jede rationale symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ rational durch die Größen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ ausdrücken läßt.*

Der Beweis dieses Satzes soll aber hier übergangen werden, da in dem folgenden keine Anwendung davon gemacht wird.

Jede algebraische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

kann man, indem man sie durch $a$ dividiert, auf die in Gleichung (6.) angegebene Form bringen. Dadurch wird

$$(10.)\qquad \mathfrak{f}_1 = -\frac{a_1}{a},\quad \mathfrak{f}_2 = +\frac{a_2}{a},\quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{a_3}{a}, \ldots$$

Bei den folgenden Untersuchungen soll daher von vornherein vorausgesetzt werden, daß der Koeffizient von $x^n$ in $f(x)$ gleich 1 sei.

Die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades durch Ausziehen von Wurzeln ist nur für $n = 1$, 2, 3 und 4 möglich. Ist $n \geqq 5$, so ist eine solche Auflösung nur ausnahmsweise möglich. Dagegen gibt es Näherungsmethoden, durch welche man die Wurzeln jeder algebraischen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann. Von diesen Methoden mögen die einfachsten (unter Beschränkung auf die reellen Wurzeln) in dem folgenden Abschnitte erläutert werden.

## § 115.
## Interpolationsformel von *Lagrange*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 191.)

**Aufgabe.** Man soll die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(1.)\qquad y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}$$

so bestimmen, daß sie für $n$ gegebene Werte von $x$, nämlich für $x$ gleich $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt.

**Auflösung.** Die gesuchte Funktion ist

$$(2.)\quad y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}y_2$$
$$+ \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Diese Funktion ist in der Tat eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, denn jedes Glied ist vom Grade $n-1$. Sie nimmt auch für die gegebenen Werte von $x$ die vorgeschriebenen Werte an, denn für $x = x_1$ ist nur das erste Glied von Null verschieden und nimmt den Wert $y_1$ an, für $x = x_2$ ist nur das zweite Glied von Null verschieden und nimmt den Wert $y_2$ an, usw. Für $x = x_n$ ist nur das letzte Glied von Null verschieden und nimmt den Wert $y_n$ an.

Man kann Gleichung (2.) noch auf eine einfachere Form bringen, wenn man

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \tag{3.}$$

setzt; dann wird

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & (x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\ & + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{4.}$$

Dies gibt

$$\left\{ \begin{aligned} f'(x_1) &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n), \\ f'(x_2) &= (x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'(x_n) &= (x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1}). \end{aligned} \right. \tag{5.}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke geht Gleichung (2.) über in

$$y = \frac{f(x)\cdot y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{f(x)\cdot y_2}{(x-x_2)f'(x_2)} + \cdots + \frac{f(x)\cdot y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}. \tag{6.}$$

**Beispiel.** Man soll die Funktion

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$$

bestimmen, welche für die Werte

$$x = 1, \quad x = 4, \quad x = 6, \quad x = 9$$

bezw. die Werte

$$y = 2, \quad y = 5, \quad y = 3, \quad y = 6$$

annimmt.

**Auflösung.** Hier wird

$$\begin{aligned} y = {} & 2\frac{(x-4)(x-6)(x-9)}{(1-4)(1-6)(1-9)} + 5\frac{(x-1)(x-6)(x-9)}{(4-1)(4-6)(4-9)} \\ & + 3\frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(6-1)(6-4)(6-9)} + 6\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(9-1)(9-4)(9-6)}, \end{aligned} \tag{7.}$$

oder

$$y = -\frac{1}{60}(x^3 - 19x^2 + 114x - 216) + \frac{1}{6}(x^3 - 16x^2 + 69x - 54)$$
$$- \frac{1}{10}(x^3 - 14x^2 + 49x - 36) + \frac{1}{20}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24),$$

oder

(8.) $$10y = x^3 - 15x^2 + 64x - 30.$$

Man kann der Interpolationsformel von *Lagrange* eine geometrische Deutung geben, wenn man $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ als die Koordinaten der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ betrachtet. Dann stellt die Gleichung (2.) eine Kurve dar, welche durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ hindurchgeht.

## § 116.
## Interpolationsformel von *Newton*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 192 und 193.)

Die in dem vorhergehenden Paragraphen behandelte Aufgabe, eine ganze rationale Funktion $y = f(x)$ so zu bestimmen, daß sie für $n$ gegebene Werte von $x$, nämlich für $x$ gleich $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt, läßt sich auch in folgender Weise lösen. Man setze

(1.) $$y = y_1 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) + A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots$$
$$+ A_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}),$$

wobei über die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ noch passend verfügt werden soll. Zunächst erhält $y$ für $x = x_1$ den vorgeschriebenen Wert $y_1$; sodann findet man für $x = x_2$ aus Gleichung (1.)

(2.) $$y_2 = y_1 + A_2(x_2 - x_1),$$

oder

(3.) $$A_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Für $x = x_3$ wird

(4.) $$y_3 = y_1 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

oder

$$(5.)\qquad A_2 = \frac{(y_3 - y_1) - A_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Indem man so weiter fortfährt und für $x$ die Werte $x_4$, $x_5, \ldots x_n$ einsetzt, kann man die Koeffizienten $A_3$, $A_4, \ldots A_{n-1}$ der Reihe nach berechnen.

Für das im vorigen Paragraphen durchgeführte Beispiel, bei dem

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = 6,\quad x_4 = 9,$$
$$y_1 = 2,\quad y_2 = 5,\quad y_3 = 3,\quad y_4 = 6$$

war, findet man also

$$(6.)\quad y = 2 + A_1(x-1) + A_2(x-1)(x-4) + A_3(x-1)(x-4)(x-6).$$

Dies gibt für $x = 4$

$$(7.)\qquad 5 = 2 + 3A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 1;$$

für $x = 6$ wird

$$(8.)\quad 3 = 2 + 5A_1 + 5 \,.\, 2A_2 = 2 + 5 + 10A_2, \text{ oder } A_2 = -\frac{2}{5};$$

und für $x = 9$ wird

$$(9.)\quad 6 = 2 + 8A_1 + 8 \,.\, 5A_2 + 8 \,.\, 5 \,.\, 3A_3 = 2 + 8 - 16 + 120A_3,$$

oder

$$(10.)\qquad A_3 = \frac{1}{10}.$$

Man erhält also in Übereinstimmung mit Gleichung (8.) in § 115

$$(11.)\ y = 2 + (x-1) - \frac{2}{5}(x-1)(x-4) + \frac{1}{10}(x-1)(x-4)(x-6).$$

Besonders einfach wird diese Interpolationsformel, wenn

$$(12.)\quad x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

wird; dann setze man

$$(13.)\quad y_2 - y_1 = \Delta y_1,\quad y_3 - y_2 = \Delta y_2,\quad y_4 - y_3 = \Delta y_3, \ldots,$$

$$(14.)\quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,\ \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2,\ \Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3, \ldots,$$

$$(15.)\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1,\ \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2,\ \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = \Delta^3 y_3, \ldots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(16.)\quad \Delta^m y_2 - \Delta^m y_1 = \Delta^{m+1} y_1,\quad \Delta^m y_3 - \Delta^m y_2 = \Delta^{m+1} y_2, \ldots.$$

Aus dieser Erklärung folgt durch Analogie mit dem binomischen Lehrsatz, wie man auch durch den Schluß von $n$ auf auf $n+1$ streng beweisen kann,

$$(17.)\quad \varDelta^2 y_1 = y_3 - 2y_1 + y_1, \qquad \varDelta^2 y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2, \ldots$$

$$(18.)\quad \varDelta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \quad \varDelta^3 y_3 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2, \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(19.)\quad \varDelta^m y_1 = y_{m+1} - \binom{m}{1} y_m + \binom{m}{2} y_{m-1} - \binom{m}{3} y_{m-2} + - \cdots \pm \binom{m}{1} y_2 \mp y_1.$$

Die Gleichungen (13.) bis (16.) kann man jetzt auch auf die Form

$$(20.)\quad y_2 = y_1 + \varDelta y_1, \qquad y_3 = y_2 + \varDelta y_2, \qquad y_4 = y_3 + \varDelta y_3, \ldots,$$

$$(21.)\quad \varDelta y_2 = \varDelta y_1 + \varDelta^2 y_1, \quad \varDelta y_3 = \varDelta y_2 + \varDelta^2 y_2, \quad \varDelta y_4 = \varDelta y_3 + \varDelta^2 y_3, \ldots,$$

$$(22.)\quad \varDelta^2 y_2 = \varDelta^2 y_1 + \varDelta^3 y_1, \quad \varDelta^2 y_3 = \varDelta^2 y_2 + \varDelta^3 y_2, \quad \varDelta^2 y_4 = \varDelta^2 y_3 + \varDelta^3 y_3, \ldots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(23.)\quad \varDelta^m y_2 = \varDelta^m y_1 + \varDelta^{m+1} y_1, \quad \varDelta^m y_3 = \varDelta^m y_2 + \varDelta^{m+1} y_2, \ldots$$

bringen. Dies gibt durch Addition je zweier untereinander stehenden Gleichungen

$$(24.)\quad y_3 = y_1 + 2\varDelta y_1 + \varDelta^2 y_1, \qquad y_4 = y_2 + 2\varDelta y_2 + \varDelta^2 y_2, \ldots,$$

$$(25.)\quad \varDelta y_3 = \varDelta y_1 + 2\varDelta^2 y_1 + \varDelta^3 y_1, \quad \varDelta y_4 = \varDelta y_2 + 2\varDelta^2 y_2 + \varDelta^3 y_3, \ldots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Addiert man auch hier wieder je zwei untereinander stehende Gleichungen, so findet man

$$(26.)\quad y_4 = y_1 + 3\varDelta y_1 + 3\varDelta^2 y_1 + \varDelta^3 y_1, \quad y_5 = y_2 + 3\varDelta y_2 + 3\varDelta^2 y_2 + \varDelta^3 y_2, \ldots.$$

So kann man fortfahren und erhält schließlich

$$(27.)\quad y_{m+1} = y_1 + \binom{m}{1} \varDelta y_1 + \binom{m}{2} \varDelta^2 y_1 + \binom{m}{3} \varDelta^3 y_1 + \cdots + \binom{m}{1} \varDelta^{m-1} y_1 + \varDelta^m y_1.$$

Setzt man jetzt wieder

$$(28.)\quad y = y_1 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) + A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots + A_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}),$$

so wird für $x = x_2 = x_1 + h$

$$y_2 = y_1 + A_1 h, \tag{29.}$$

also

$$A_1 = \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{\Delta y_1}{h}. \tag{30.}$$

Für $x = x_3 = x_1 + 2h = x_2 + h$ wird

$$y_3 = y_1 + 2A_1 h + 1 . 2 A_2 h^2, \tag{31.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (24.) und (30.)

$$y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_1 + 2\Delta y_1 + 1 . 2 A_2 h^2,$$

also

$$A_2 = \frac{\Delta^2 y_1}{1 . 2h^2}. \tag{32.}$$

Für $x = x_4 = x_1 + 3h = x_2 + 2h = x_3 + h$ wird

$$y_4 = y_1 + 3A_1 h + 2 . 3 A_2 h^2 + 1 . 2 . 3 A_3 h^3, \tag{33.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (26.), (30.) und (32.)

$$y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 = y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1 + 1 . 2 . 3 A_3 h^3,$$

also

$$A_3 = \frac{\Delta^3 y_1}{1 . 2 . 3h^3}. \tag{34.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält

$$\begin{aligned} y = y_1 &+ \frac{\Delta y_1 . (x - x_1)}{1!\,h} + \frac{\Delta^2 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)}{2!\,h^2} \\ &+ \frac{\Delta^3 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\,h^3} + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^{n-1} y_1 . (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(n-1)!\,h^{n-1}}. \end{aligned} \tag{35.}$$

**Beispiel.**

Es sei $n = 5$ und

$$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6,\ x_5 = 7,$$
$$y_1 = 2,\ y_2 = 4,\ y_3 = 3,\ y_4 = 2,\ y_5 = 5;$$

dann bilde man zunächst

$\Delta y_1 = 4 - 2 = 2,\ \Delta y_2 = 3 - 4 = -1,\ \Delta y_3 = 2 - 3 = -1,\ \Delta y_4 = 5 - 2 = 3,$

$\Delta^2 y_1 = -1 - 2 = -3,\ \Delta^2 y_2 = -1 + 1 = 0,\ \Delta^2 y_3 = 3 + 1 = 4,$

$\Delta^3 y_1 = 0 + 3 = 3,\ \Delta^3 y_2 = 4 - 0 = 4,$

$\Delta^4 y_1 = 4 - 3 = 1.$

Folglich wird nach Gleichung (35.)

$$(36.)\quad y = 2 + 2(x-3) - \frac{3}{2}(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5) + \frac{1}{24}(x-3)(x-4)(x-5)(x-6).$$

## XV. Abschnitt.

# Numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten.

## § 117.

### Teiler der ganzen rationalen Funktionen.

**Erklärung.** Eine ganze rationale Funktion $F(x)$ heißt durch eine andere $\vartheta(x)$ teilbar, wenn sich eine ganze rationale Funktion $\varphi(x)$ so bestimmen läßt, daß $F(x)$ gleich $\vartheta(x) \,.\, \varphi(x)$ wird. Dies gibt

$$(1.) \qquad F(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{F(x)}{\vartheta(x)} = \varphi(x).$$

Ist $\vartheta(x)$ ein Teiler von $F(x)$, so findet man $\varphi(x)$, indem man die Division nach den bekannten Regeln ausführt. Haben die Funktionen $F(x)$, $\vartheta(x)$ und $\varphi(x)$ bezw. den Grad $n$, $l$ und $m$, so ist daher

$$(2.) \qquad n = l + m.$$

**Satz 1.** *Ist eine Funktion*) $F(x)$ durch eine andere desselben Grades teilbar, so ist der Quotient eine Konstante.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Gleichung (2.).

**Satz 2.** *Ist $\vartheta(x)$ ein Teiler der beiden Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, so ist $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von der Summe und der Differenz dieser Funktionen.*

---

*) Da in den folgenden Untersuchungen meist nur *ganze rationale* Funktionen in Betracht kommen, so möge der Leser, wenn nicht etwas anderes ausdrücklich hervorgehoben wird, unter Funktion immer eine *ganze rationale* Funktion verstehen.

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$F_1(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi_1(x), \quad F_2(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi_2(x), \tag{3.}$$

folglich wird

$$F_1(x) \pm F_2(x) = \vartheta(x)[\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]. \tag{4.}$$

**Satz 3.** *Ist die Funktion $F(x)$ durch $\vartheta(x)$ teilbar, so ist auch $f(x) \,.\, F(x)$ durch $\vartheta(x)$ teilbar, wobei $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion ist.*

**Beweis.** Aus

$$F(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi(x) \tag{5.}$$

folgt unmittelbar

$$f(x) \,.\, F(x) = \vartheta(x) \,.\, f(x) \,.\, \varphi(x). \tag{6.}$$

Von diesem Satze gilt aber *nicht* die Umkehrung.

**Aufgabe.** Man soll den *höchsten gemeinsamen* Teiler zweier Funktionen $y$ und $y_1$ finden.

Dabei versteht man unter „dem *höchsten gemeinsamen Teiler*" einen gemeinsamen Teiler von möglichst hohem Grade.

**Auflösung.** Das Verfahren ist demjenigen analog, welches man anwendet, um den höchsten gemeinsamen Teiler zweier ganzen Zahlen $a$ und $b$ zu finden. Ist der Grad von $y_1$ niedriger (oder wenigstens nicht größer) als der von $y$, so dividiere man $y$ durch $y_1$. Der Quotient sei $q_1$ und der Rest $y_2$, dann wird

$$y = q_1 \cdot y_1 + y_2, \tag{7.}$$

wobei der Grad von $y_2$ niedriger ist als der von $y_1$. Ist $y_2$ gleich Null, so ist $y$ durch $y_1$ selbst teilbar, ist aber $y_2$ von Null verschieden, so ist nach Satz 2 und 3

$$y_2 = y - q_1 y_1 \tag{7a.}$$

auch teilbar durch den höchsten gemeinsamen Teiler der Funktionen $y$ und $y_1$; und umgekehrt: der höchste gemeinsame Teiler von $y_1$ und $y_2$ ist auch ein Teiler von $y$.

Man hat jetzt also nur noch den höchsten gemeinsamen Teiler von $y_1$ und $y_2$ zu suchen. Zu diesem Zwecke dividiere man $y_1$ durch $y_2$. Dadurch erhält man

$$y_1 = q_2 \cdot y_2 + y_3, \tag{8.}$$

wobei der Grad von $y_3$ niedriger ist als der von $y_2$. Ist $y_3$ gleich Null, so ist $y_2$ ein Teiler von $y_1$ und deshalb auch ein Teiler von $y$, und zwar ist dann $y_2$ der höchste gemeinsame Teiler von $y$ und $y_1$. Ist aber $y_3$ von Null verschieden, so setzt man dieses Verfahren fort, bis der Rest schließlich gleich Null wird, d. h. man bildet die Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} y = q_1 \cdot y_1 + y_2, \\ y_1 = q_2 \cdot y_2 + y_3, \\ y_2 = q_3 \cdot y_3 + y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m-3} = q_{m-2} \cdot y_{m-2} + y_{m-1}, \\ y_{m-2} = q_{m-1} \cdot y_{m-1} + y_m, \\ y_{m-1} = q_m \cdot y_m + 0. \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist eine endliche, denn der Grad der Funktionen $y, y_1, y_2, y_3, \dots$ wird immer kleiner. Entweder wird also die Division schon ohne Rest ausführbar sein, wenn $y_m$ noch eine Funktion von $x$ ist, oder es wird $y_m$ eine Konstante.

Der letzte Divisor $y_m$ ist dann der höchste gemeinsame Teiler von $y$ und $y_1$.

**Beweis.** Nach der letzten Gleichung ist $y_{m-1}$ teilbar durch $y_m$, deshalb ist nach der vorletzten Gleichung auch $y_{m-2}$ durch $y_m$ teilbar. Aus der drittletzten Gleichung folgt dann, daß auch $y_{m-3}$ durch $y_m$ teilbar ist. Indem man so fortfährt, findet man, daß auch $y$ und $y_1$ durch $y_m$ teilbar sind.

Es ist aber $y_m$ auch der *höchste* gemeinsame Teiler von $y$ und $y_1$, denn hätten $y$ und $y_1$ einen Teiler $\vartheta(x)$ von höherem Grade, so wäre nach Gleichung (7a.) auch $y_2$ durch $\vartheta(x)$ teilbar, und deshalb auch $y_3$ usw. Schließlich müßte auch $y_m$ durch $\vartheta(x)$ teilbar sein. Das ist aber nicht möglich, wenn der Grad von $\vartheta(x)$ höher ist als der von $y_m$. Der Grad von $\vartheta(x)$ kann also höchstens ebenso groß sein wie der von $y_m$, dann ist aber der Quotient von $y_m$ und $\vartheta(x)$ eine Konstante.

Gleichzeitig folgt aus diesem Beweise

**Satz 4.** *Jeder gemeinsame Teiler der beiden Funktionen $y$ und $y_1$ ist auch ein Teiler ihres höchsten gemeinsamen Teilers $y_m$.*

**Erklärung.** Zwei Funktionen $y$ und $y_1$ heißen „*relativ prim*", wenn ihr höchster gemeinsamer Teiler eine Konstante ist.

**Beispiel 1.** Es sei

$$y = x^5 + 1, \quad y_1 = x^3 - 1,$$

dann findet man durch Division

$$\begin{aligned} y &= x^2 \cdot y_1 + y_2, && \text{wo} \quad y_2 = x^2 + 1, \\ y_1 &= x \cdot y_2 + y_3, && \text{wo} \quad y_3 = -x - 1, \\ y_2 &= (-x + 1)y_3 + y_4, && \text{wo} \quad y_4 = 2, \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}(-x - 1)y_4. \end{aligned}$$

Der höchste gemeinsame Teiler ist die Konstante 2, folglich sind die beiden Funktionen relativ prim.

**Beispiel 2.** Es sei

$$y = x^4 - 1, \quad y_1 = x^3 - 2x^2 + x - 2,$$

dann findet man durch Division

$$\begin{aligned} y &= (x + 2)y_1 + y_2, \quad \text{wo} \quad y_2 = 3x^2 + 3, \\ y_1 &= \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)y_2. \end{aligned}$$

Der höchste gemeinsame Teiler ist hier also $y_2 = 3x^2 + 3$, oder, wenn man den konstanten Faktor 3 fortläßt, $x^2 + 1$. Es ist in der Tat

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1), \quad x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2 + 1)(x - 2).$$

**Satz 5.** *Ist $y_1$ relativ prim zu den beiden Funktionen $y$ und $f$, so ist sie auch relativ prim zu ihrem Produkte $f \cdot y$.*

**Beweis.** Da $y_1$ relativ prim zu $y$ ist, so muß in den Gleichungen (9.) die Größe $y_m$ eine Konstante sein. Indem man beide Seiten der Gleichungen (9.) mit dem Faktor $f$ multipliziert, erhält man die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} f \cdot y = q_1 \cdot f \cdot y_1 + f \cdot y_2, \\ f \cdot y_1 = q_2 \cdot f \cdot y_2 + f \cdot y_3, \\ f \cdot y_2 = q_3 \cdot f \cdot y_3 + f \cdot y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f \cdot y_{m-2} = q_{m-1} \cdot f \cdot y_{m-1} + f \cdot y_m . \end{cases}$$

Hätten $f . y$ und $y_1$ einen gemeinsamen Teiler $\vartheta(x)$, so wäre nach der ersten Gleichung $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von $f . y_2$, und deshalb nach der zweiten Gleichung auch ein Teiler von $f \cdot y_3$, usw. Aus der letzten Gleichung würde folgen, daß $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von $f . y_m$ ist. Da aber $y_m$ eine Konstante ist, so wäre $\vartheta(x)$ ein gemeinsamer Teiler von $f$ und $y_1$, was der Voraussetzung widerstreitet.

**Satz 6.** *Sind die Funktionen $y$ und $y_1$ relativ prim, ist aber $f . y$ teilbar durch $y_1$, so muß die Funktion $f$ teilbar sein durch $y_1$.*

**Beweis.** Aus den Gleichungen (10.) folgt wieder, daß $f . y_m$ durch $y_1$ teilbar sein muß, wenn $f . y$ durch $y_1$ teilbar ist. Da aber $y_m$ nach Voraussetzung eine Konstante ist, so ist die Funktion $f$ teilbar durch $y_1$.

**Satz 7.** *Ist eine Funktion durch beliebig viele andere Funktionen teilbar, die paarweise zueinander relativ prim sind, so ist sie auch durch ihr Produkt teilbar.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung sei die Funktion $u$ teilbar durch die Funktionen $y$ und $z$, die zueinander relativ prim sind, es sei also

$$u = f . y .$$

Nun ist $f . y$ nach Voraussetzung teilbar durch $z$, folglich muß nach Satz 6 die Funktion $f$ teilbar sein durch $z$; es ist also

$$f = g . z \quad \text{und deshalb} \quad u = g . y . z .$$

Ist $u$ durch $n$ Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ teilbar, die paarweise zueinander relativ prim sind, so ist $u$ nach dem eben geführten Beweise teilbar durch $y_1 y_2$, und da $y_3$ nach Satz 5 zu $y_1 y_2$ relativ prim ist, so ist $u$ auch teilbar durch $y_1 y_2 y_3$.

So kann man fortfahren und zeigen, daß $u$ durch $y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$ teilbar ist*).

## § 118.

## Gemeinsame Teiler der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 194 bis 196.)

In § 112 wurde gezeigt, daß die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ den Faktor $(x - x_1)^{\alpha-1}$ gemeinsam haben, wenn $x_1$ ein $\alpha$-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, und zwar folgte aus

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha . f_1(x), \tag{1.}$$

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1} . \varphi(x), \tag{2.}$$

wobei

$$\varphi(x) = \alpha f_1(x) + (x - x_1) f_1'(x). \tag{3.}$$

Wäre $\varphi(x)$ noch durch $x - x_1$ teilbar, so wäre nach Gleichung (3.) $f_1(x)$ durch $x - x_1$ teilbar, d. h. $f(x)$ wäre durch $(x - x_1)^{\alpha+1}$ teilbar. Das soll in dem folgenden nicht der Fall sein, es soll vielmehr

$$f(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m} . \psi(x) \tag{4.}$$

sein, wobei die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ alle größer als 1 sind, während $\psi(x)$ nur *einfache* lineare Faktoren enthalten möge, die von $x - x_1,\ x - x_2, \ldots x - x_m$ verschieden sind. Dann ist $f'(x)$ durch die Faktoren

$$(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}, \quad (x - x_2)^{\alpha_2 - 1}, \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1}$$

teilbar, und da diese Faktoren paarweise relativ prim sind, so ist $f'(x)$ auch durch ihr Produkt teilbar; es wird also

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1}(x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} . \chi(x). \tag{5.}$$

Dabei enthält nach den vorstehenden Ausführungen $\chi(x)$ keinen der Faktoren $x - x_1,\ x - x_2, \ldots x - x_m$; und auch $\psi(x)$ ist zu $\chi(x)$ relativ prim, denn die Ableitung $f'(x)$ enthält keinen der einfachen Faktoren von $f(x)$. Folglich ist

$$\vartheta(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1}(x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} \tag{6.}$$

der höchste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, und die ganze rationale Funktion

*) Alle diese Sätze gelten auch für positive ganze Zahlen, wenn man an die Stelle des konstanten Faktors die Einheit setzt.

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m) \cdot \psi(x) \tag{7.}$$

hat nur noch *einfache* lineare Faktoren.

Daraus ergibt sich die Lösung der folgenden Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll eine Gleichung finden, welche dieselben Wurzeln hat wie $f(x) = 0$, aber jede nur einmal.

**Auflösung.** Man suche den höchsten gemeinsamen Teiler $\vartheta(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$, dann ist

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = 0 \tag{8.}$$

die gesuchte Gleichung.

**Aufgabe 2.** Man soll eine Gleichung finden, welche nur die mehrfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ enthält, und jede nur einmal.

**Auflösung.** Man bestimme den höchsten gemeinsamen Teiler $\varrho(x)$ von $f'(x)$ und $\dfrac{f(x)}{\vartheta(x)}$, dann ist

$$\varrho(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m) = 0 \tag{9.}$$

die gesuchte Gleichung.

**Aufgabe 3.** Man soll eine Gleichung finden, welche nur die einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ enthält.

**Auflösung.** Die gesuchte Gleichung ist

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x) \cdot \varrho(x)} = \psi(x) = 0. \tag{10.}$$

Will man die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ berechnen, so kommt es also nur darauf an, die Wurzeln der Gleichungen (9.) und (10.) zu berechnen. Wenn $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, so sind diese Gleichungen von niedrigerem Grade und haben nur einfache Wurzeln.

## § 119.

## Obere und untere Grenze der reellen Wurzeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 197.)

**Erklärung.** Die *obere Grenze* der reellen Wurzeln einer Gleichung

(1.) $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$

in welcher die Koeffizienten sämtlich reell sind, ist eine Zahl $L$, die größer ist als alle reellen Wurzeln.

Eine solche Zahl $L$ kann man leicht finden, wie zunächst an dem folgenden Beispiele gezeigt werden möge. Es sei $x$ eine positive Wurzel der Gleichung

$$x^6 + 5x^4 - 7x^2 - 16x + 27 = 0,$$

dann ist

$$x^6 < x^6 + 5x^4 + 27 = 7x^2 + 16x < 16(x^2 + x + 1),$$

also

$$x^6 < 16\frac{x^3 - 1}{x - 1},$$

oder, wenn $x > 1$ ist,

$$x^6(x - 1) < 16(x^3 - 1) < 16x^3,$$

folglich ist

$$x^3(x - 1) < 16.$$

Nun ist $x - 1 < x$ und $(x - 1)^3 < x^3$; deshalb wird

$$(x - 1)^4 < 16, \quad x - 1 < \sqrt[4]{16} = 2, \quad x < 3.$$

Hier ist also die obere Grenze $L$ aller reellen Wurzeln gleich 3.

In dem allgemeinen Falle, welchem die Gleichung (1.) entspricht, sei $a_m = -b_m$ der *erste* und $a_p = -b_p$ (dem absoluten Betrage nach) der *größte* negative Koeffizient, es sei also

(1 a.) $$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots - b_mx^{n-m} \pm \cdots - b_px^{n-p} \pm \cdots + a_n = 0.$$

Ist $x$ wieder eine reelle Wurzel dieser Gleichung, so findet man, indem man alle negativen Glieder auf die rechte Seite schafft, (2.) $x^n \leqq x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots = b_m x^{n-m} + \cdots + b_p x^{n-p} + \cdots;$

deshalb ist erst recht

(3.) $x^n < b_p(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \cdots + x + 1) = b_p \dfrac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1},$

oder, wenn $x > 1$ ist,

(4.) $$x^n(x-1) < b_p(x^{n-m+1} - 1) < b_p x^{n-m+1},$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Ungleichung durch $x^{n-m+1}$ dividiert,

(5.) $$x^{m-1}(x-1) < b_p.$$

Nun ist noch $x - 1 < x$ und deshalb $(x-1)^{m-1} < x^{m-1}$, deshalb findet man aus Ungleichung (5.)

(6.) $$(x-1)^m < b_p, \quad x - 1 < \sqrt[m]{b_p},$$

also

(7.) $$x < 1 + \sqrt[m]{b_p} = L.$$

In derselben Weise kann man für die reellen Wurzeln eine untere Grenze $-K$ angeben. Indem man nämlich in der Gleichung $f(x) = 0$ mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Veränderliche $x$ mit $-x$ vertauscht, erhält man eine Gleichung

(8.) $f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - + \cdots \pm a_n = 0$

mit den Wurzeln $-x_1, -x_2, \cdots - x_n$. Bestimmt man also für diese Gleichung die obere Grenze $K$ der Wurzeln, so ist $-K$ die untere Grenze der reellen Wurzeln für die Gleichung $f(x) = 0$.

So findet man bei dem oben angeführten Zahlenbeispiel die Gleichung

$$f_1(x) = x^6 + 5x^4 - 7x^2 + 16x + 27 = 0,$$

für welche

$$m = 4, \quad b_p = 7$$

ist; folglich wird

$$K = 1 + \sqrt[4]{7} = 2{,}63.$$

Die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen daher zwischen

$$-2{,}63 \quad \text{und} \quad +3.$$

Vertauscht man in der gegebenen Gleichung $x$ mit $\frac{1}{x}$ und sucht für die sich daraus ergebende Gleichung die obere Grenze $L'$ und die untere Grenze $-K'$ der reellen Wurzeln, so kann zwischen $-\frac{1}{K'}$ und $\frac{1}{L'}$ keine Wurzel der gegebenen Gleichung liegen.

Für das vorgelegte Zahlenbeispiel wird die transformierte Gleichung

$$x^6 - \frac{16}{27}x^5 - \frac{7}{27}x^4 + \frac{5}{27}x^2 + \frac{1}{27} = 0,$$

also

$$m = 1, \quad b_p = \frac{16}{27}; \quad L' = 1 + \frac{16}{27} = \frac{43}{27};$$

ebenso findet man

$$K' = 1 + \sqrt[2]{\frac{7}{27}} < 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}.$$

Die gegebene Gleichung hat also zwischen $-\frac{9}{14}$ und $+\frac{27}{43}$ keine Wurzel.

## § 120.

## *Cartesi*sche Zeichenregel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 198.)

**Satz 1.** *Hat die Gleichung $f(x) = 0$ lauter negative reelle Wurzeln, so sind die Koeffizienten der Gleichung sämtlich positiv.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$x_1 = -a, \; x_2 = -b, \; x_3 = -c, \; \ldots x_n = -l,$$

wobei die Größen $a, b, c, \ldots l$ sämtlich positiv sind, folglich wird

$$(1.) \qquad f(x) = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + l).$$

Führt man die Multiplikation aus, so kann in dem Produkt kein Minuszeichen auftreten, da die einzelnen Faktoren keines enthalten. Es kann auch keiner der Koeffizienten verschwinden.

In dem Ausdrucke

$$(x - g - hi)(x - g + hi) = x^2 - 2gx + (g^2 + h^2)$$

ist das letzte Glied $g^2 + h^2$ positiv. Auch in dem Ausdrucke

$$(x - g_1 - h_1 i)(x - g_1 + h_1 i)(x - g_2 - h_2 i)(x - g_2 + h_2 i) \ldots$$
$$(x - g_\alpha - h_\alpha i)(x - g_\alpha + h_\alpha i)$$

wird, wenn man ausmultipliziert und nach fallenden Potenzen von $x$ ordnet, das letzte Glied

$$(g_1^2 + h_1^2)(g_2^2 + h_2^2) \ldots (g_\alpha^2 + h_\alpha^2)$$

positiv. Auch wenn man dieses Produkt jetzt noch mit $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + l)$ multipliziert und nach fallenden Potenzen von $x$ ordnet, ist das letzte Glied

$$abc \ldots l(g_1^2 + h_1^2)(g_2^2 + h_2^2) \ldots (g_\alpha^2 + h_\alpha^2)$$

positiv. Dies gibt

**Satz 2.** *Hat die Gleichung*

$$\varphi(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-r-1} x^{r+1} + b_{m-r} x^r = 0$$

*außer der Wurzel $x = 0$ nur negative und komplexe*) Wurzeln, so ist der Koeffizient des letzten Gliedes positiv.*

**Erklärung.** Wenn zwei aufeinander folgende Glieder dasselbe Vorzeichen haben, so nennt man dies „eine *Zeichenfolge*"; haben sie aber das entgegengesetzte Zeichen, so nennt man dies „einen *Zeichenwechsel*". Etwa verschwindende Glieder, d. h. Glieder, deren Koeffizient gleich Null ist, werden dabei einfach übergangen.

**Satz 3.** *Die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel; dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel und der Anzahl der positiven Wurzeln eine gerade Zahl.*

**Beweis.** Multipliziert man die Funktion

$$(2.) \qquad \varphi(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-r} x^r,$$

---

*) Wenn hier von *komplexen* Wurzeln von der Form $g + hi$ im Gegensatz zu den *reellen* Wurzeln die Rede ist, so versteht man darunter Größen, bei denen der Faktor $h$ des imaginären Teiles von Null verschieden ist.

welche nur *positive* Glieder enthalten möge und deshalb *keinen* Zeichenwechsel besitzt, mit $x - a$, so ergibt sich

$$(3.)\quad (x-a)\varphi(x) = x^{m+1} + (b_1 - a)x^m + (b_2 - ab_1)x^{m-1} + \cdots - ab_{m-r}x^r.$$

In diesem Produkte ist das erste Glied positiv und das letzte negativ, es muß also mindestens *ein* Zeichenwechsel eintreten. Es ist aber auch möglich, daß zwischen $x^{m+1}$ und $-ab_{m-r}x^r$ negative und darauf folgende positive Glieder liegen, dann würden sogar 3, oder 5, oder noch mehr Zeichenwechsel eintreten; die Anzahl der Zeichenwechsel ist also stets eine ungerade Zahl $2\nu + 1$.

Das bleibt auch noch richtig, wenn von den Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_{m-r}$ einzelne gleich Null sind.

**Beispiel.** Es sei

$$\varphi(x) = x^4 + 2x,$$

dann hat

$$(x-3)\varphi(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 6x$$

sogar *drei* Zeichenwechsel.

Hat

$$(4.)\quad \varphi(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{p-1}x^{m-p+1} - c_px^{m-p} - \cdots - c_{m-r}x^r$$

*einen* Zeichenwechsel, so wird

$$(5.)\quad (x-a)\varphi(x) = x^{m+1} + (b_1 - a)x^m + \cdots - (c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1} \\ - \cdots + ac_{m-r}x^r.$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied positiv, das Glied $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ ist negativ und das letzte Glied $ac_{m-r}x^r$ ist wieder positiv, folglich treten mindestens *zwei* Zeichenwechsel ein. Es können aber auch 4, oder 6, oder noch mehr Zeichenwechsel eintreten, indem zwischen $x^{m+1}$ und $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ noch negative und dann wieder positive Glieder liegen. Auch zwischen $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ und $ac_{m-r}x^r$ können noch positive Glieder liegen, auf die negative Glieder folgen; die Anzahl der Zeichenwechsel muß aber stets eine *gerade* Zahl $2\nu + 2$ sein, weil $(x-a)\varphi(x)$ mit einem positiven Gliede anfängt und mit einem positiven Gliede schließt.

Hat

$$(6.)\quad \varphi(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{p-1}x^{m-p+1} - c_px^{m-p}$$
$$- \cdots - c_{q-1}x^{m-q+1} + d_qx^{m-q} + \cdots + d_{m-r}x^r$$

*zwei* Zeichenwechsel, so wird

$$(7.)\quad (x-a)\varphi(x) = x^{m+1} + (b_1 - a)x^m + \cdots - (c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$$
$$- \cdots + (d_q + ac_{q-1})x^{m-q+1} + \cdots - ad_{m-r}x^r.$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied positiv, das Glied $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ ist negativ, das Glied $+(d_q + ac_{q-1})x^{m-q+1}$ ist positiv und das letzte Glied $-ad_{m-r}x^r$ ist negativ, folglich treten mindestens *drei* Zeichenwechsel ein. Es können aber auch noch mehr Zeichenwechsel auftreten; dabei muß die Anzahl der Zeichenwechsel stets eine ungerade Zahl $2\nu + 3$ sein, weil $(x-a)\varphi(x)$ mit einem positiven Gliede anfängt und mit einem negativen Gliede schließt.

In dieser Weise kann man fortfahren und zeigen, daß $(x-a)\varphi(x)$ mindestens *einen* Zeichenwechsel *mehr* hat als $\varphi(x)$.

Sind nun $a_1, a_2, \ldots a_\varkappa$ die positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, ist also

$$(8.)\qquad f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa) . \varphi(x),$$

wobei

$$\varphi(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-r}x^r = 0$$

außer der Wurzel $x = 0$ nur noch negative und komplexe Wurzeln hat, so ist nach Satz 2 der Koeffizient $b_{m-r}$ des letzten Gliedes positiv, folglich muß die Anzahl der Zeichenwechsel in $\varphi(x)$ eine *gerade* Zahl $2\nu$ sein. Nach dem vorstehenden ist dann die Anzahl der Zeichenwechsel

| | |
|---|---|
| in $(x-a_1)\varphi(x)$ | $2\nu + 2\nu_1 + 1,$ |
| „ $(x-a_1)(x-a_2)\varphi(x)$ | $2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + 2,$ |
| ............ | ............ |
| „ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa)\varphi(x)$ | $2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + 2\nu_\varkappa + \varkappa,$ |

wobei $2\nu + 2\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + 2\nu_\varkappa$ eine positive gerade Zahl ist, die auch gleich Null sein kann. Die Anzahl der Zeichenwechsel ist also mindestens gleich der Anzahl $\varkappa$ der positiven Wurzeln und kann sich von $\varkappa$ nur durch eine *gerade* Zahl unterscheiden.

Vertauscht man wieder $x$ mit $-x$, so geht $f(x) = 0$ in eine Gleichung $f_1(x) = 0$ über, bei der die Koeffizienten von $x^{n-1}$, $x^{n-3}$, $x^{n-5}, \dots$ und die sämtlichen Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen haben wie in der gegebenen Gleichung. Ist nun die Anzahl der Zeichenwechsel in dieser Gleichung $\lambda$, so kann sie höchstens $\lambda$ positive Wurzeln haben; deshalb hat die gegebene Gleichung höchstens $\lambda$ negative Wurzeln. Dabei kann sich auch hier die Anzahl der negativen Wurzeln von $\lambda$ nur durch eine *gerade* Zahl unterscheiden.

Ist das Polynom

$$(9.) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

vollständig, sind also die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots a_n$ sämtlich reell und von Null verschieden, so wird jede Zeichenfolge in $f(x)$ zum Zeichenwechsel in $f_1(x)$, und jeder Zeichenwechsel in $f(x)$ wird zur Zeichenfolge in $f_1(x)$. Daraus ergibt sich

**Satz 4.** *Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nie größer als die Anzahl der Zeichenfolgen. Dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der Anzahl der negativen Wurzeln eine gerade Zahl.*

**Satz 5.** *Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, und sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, so ist die Anzahl $\varkappa$ der positiven Wurzeln ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenwechsel, und die Anzahl $\lambda$ der negativen Wurzeln ist ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenfolgen.*

**Beweis.** Die Anzahl aller reellen Wurzeln ist nach Voraussetzung

$$\varkappa + \lambda = n.$$

Ist nun die Anzahl der Zeichenwechsel $\varkappa'$ und die Anzahl der Zeichenfolgen $\lambda'$, so ist nach Satz 3 und 4

$$\varkappa' \geqq \varkappa, \quad \lambda' \geqq \lambda.$$

Da aber $\varkappa' + \lambda'$ ebenfalls gleich $n$ sein muß, so ist

$$\varkappa' + \lambda' = \varkappa + \lambda,$$

und das ist nur möglich, wenn

$$\varkappa' = \varkappa, \quad \lambda' = \lambda.$$

**Satz 6.** *Verschwindet ein Glied von $f(x)$ zwischen zwei positiven oder zwei negativen Gliedern, so folgt daraus die Existenz zweier komplexen Wurzeln.*

**Beweis.** Vertauscht man in $f(x)$ das verschwindende Glied mit einem positiven Gliede, so werden die Zeichenkombinationen

$$+\ 0\ + \quad \text{und} \quad -\ 0\ -$$

in

$$+\ +\ + \quad \text{und} \quad -\ +\ -$$

übergeführt; in $f_1(x)$ dagegen gehen die Zeichenkombinationen

$$\pm\ 0\ \pm \quad \text{und} \quad \mp\ 0\ \mp$$

in

$$\pm\ \mp\ \pm \quad \text{und} \quad \mp\ \mp\ \mp$$

über. Durch das Verschwinden des eingesetzten Gliedes gehen also entweder in $f(x)$ oder in $f_1(x)$ zwei Zeichenwechsel verloren. Die Summe der Zeichenwechsel in $f(x)$ und $f_1(x)$ kann daher höchstens $n-2$ sein, folglich ist auch die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ höchstens $n-2$.

Ähnliches hätte man gefunden, wenn man das verschwindende Glied durch ein negatives Glied ersetzt hätte.

Man kann diesen Satz sogleich auf den Fall verallgemeinern, wo an mehreren Stellen ein Glied von $f(x)$ zwischen zwei positiven oder zwischen zwei negativen Gliedern verschwindet. Die Anzahl der komplexen Wurzelpaare ist dann mindestens ebenso groß wie die Anzahl dieser Stellen.

**Satz 7.** *Verschwinden in $f(x)$ zwei nebeneinander stehende Glieder, so folgt daraus ebenfalls die Existenz zweier komplexen Wurzeln.*

**Beweis.** Vertauscht man in den 4 möglichen Zeichenkombinationen

$$+\,0\,0\,+ \qquad +\,0\,0\,- \qquad -\,0\,0\,+ \qquad -\,0\,0\,-$$

die verschwindenden Glieder durch passend gewählte nicht verschwindende, so erhält man die Zeichenkombinationen

$$+\,-\,+\,+ \qquad +\,-\,+\,- \qquad -\,+\,-\,+ \qquad -\,+\,-\,-$$

und erkennt, daß durch das Verschwinden der beiden Glieder zwei Zeichenwechsel in $f(x)$ verloren gegangen sind, während in $f_1(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel dieselbe geblieben ist; folglich kann $f(x)$ höchstens $n-2$ reelle Wurzeln haben.

Auch hier kann der Satz auf den Fall verallgemeinert werden, wo an mehreren Stellen zwei aufeinander folgende Glieder verschwinden.

**Beispiel.** Es sei

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^8 + 12x^2 - 19x - 24 = 0,$$

also

$$f_1(x) = x^{12} + x^{11} + 3x^8 + 12x^2 + 19x - 24 = 0;$$

hier hat $f(x)$ nur drei und $f_1(x)$ nur einen Zeichenwechsel, folglich hat die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens drei positive und nur eine negative Wurzel; mindestens 8 Wurzeln sind komplex.

## § 121.

## Der *Sturm*sche Satz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 199.)

Über die Intervalle, in denen die reellen Wurzeln liegen, gibt bereits Satz 13 in § 8 (Seite 57 bis 59) Auskunft. Danach gibt es zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens einen Wert von $x$, für welchen die stetige Funktion $f(x)$ gleich Null wird, wenn $f(x)$ in diesem Intervalle das Zeichen wechselt, wenn also entweder

$$f(x_1) < 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) > 0,$$

oder

$$f(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) < 0$$

ist. In dem vorliegenden Falle ist die Funktion $f(x)$ eine ganze rationale Funktion, nämlich

$$(1.)\quad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Bei dieser und den folgenden Untersuchungen kommt es häufig vor, daß der Wert der ganzen rationalen Funktion $f(x)$ für irgend einen Wert von $x$, z. B. für $x = x_1$ berechnet werden soll. Dies geschieht in der Regel am einfachsten durch dasselbe Verfahren, welches bei der Division durch $x - x_1$ ausgeführt wird. Setzt man nämlich

$$(2.)\quad b_1 = a_1 + ax_1, \quad b_2 = a_2 + b_1x_1, \quad b_3 = a_3 + b_2x_1, \quad \ldots b_n = a_n + b_{n-1}x_1,$$

so findet man durch Ausführung der Division

$$(3.)\quad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= (x - x_1)(ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-1}) + b_n.$$

Dabei erfolgt die Berechnung der Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}, b_n$ am einfachsten durch Addition der in dem folgenden Schema untereinander stehenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} a & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & ax_1 & b_1x_1 & b_2x_1 & \ldots & b_{n-2}x_1 & b_{n-1}x_1 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{n-1} & b_n. \end{array}$$

Aus Gleichung (3.) ergibt sich dann ohne weiteres

$$(4.)\qquad f(x_1) = b_n.$$

**Beispiel.** Es sei

$$f(x) = 40x^3 - 639x^2 + 3029x - 4032,$$

dann findet man die Werte $f(2)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(9)$ bezw. in folgender Weise

$$\begin{array}{rrrrl} 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +80 & -1118 & +3822 & \\ \hline & -559 & +1911 & -210 & = f(2), \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +160 & -1916 & +4452 & \\ \hline & -479 & +1113 & +420 & = f(4), \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +280 & -2513 & +3612 & \\ \hline & -359 & +516 & -420 & = f(7), \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +360 & -2511 & +4662 & \\ \hline & -279 & +518 & +630 & = f(9). \end{array}$$

Da

$$f(2) = -210 < 0,\quad f(4) = +420 > 0,\quad f(7) = -420 < 0,$$
$$f(9) = +630 > 0$$

ist, so folgt gleichzeitig hieraus, daß in jedem der Intervalle 2 bis 4, 4 bis 7, 7 bis 9 eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

Um die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche in dem Interwalle von $x_1$ bis $x_2$ liegen, genau zu bestimmen, hat *Charles Sturm* das folgende Verfahren angegeben.

Sucht man den größten gemeinsamen Teiler zwischen $f(x)$ und $f'(x)$, so erhält man nach den Angaben in § 117, wenn man die bei der Division sich ergebenden Reste bezw. mit $-f_2(x)$, $-f_3(x)$, $\cdots -f_\mu(x)$ bezeichnet, das folgende Schema:

$$
(5.)\qquad \left\{\begin{array}{l}
f(x) = Q_1(x) \,.\, f'(x) - f_2(x),\\
f'(x) = Q_2(x) \,.\, f_2(x) - f_3(x),\\
f_2(x) = Q_3(x) \,.\, f_3(x) - f_4(x),\\
\dotfill\\
f_{\mu-2}(x) = Q_{\mu-1}(x) \,.\, f_{\mu-1}(x) - f_\mu(x),\\
f_{\mu-1}(x) = Q_\mu(x) \,.\, f_\mu(x).
\end{array}\right.
$$

Hierbei ist $f_\mu(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$. Die vorstehende Rechnung kann deshalb, wie bereits in § 118 gezeigt wurde, dazu benutzt werden, um die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ zurückzuführen auf die Auflösung der Gleichungen

$$
(6.)\qquad \varrho(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x)}{\vartheta(x) \,.\, \varrho(x)} = 0,
$$

welche nur einfache Wurzeln besitzen. (Vergl. § 118, Gl. (9.) und (10.))

Setzt man in dem folgenden voraus, daß $f(x)$ nur einfache Wurzeln hat, so ist $f_\mu(x)$ eine Konstante, die mit $f_\mu$ bezeichnet werden möge.

Verschwindet von den Funktionen

$$
f_\mu,\, f_{\mu-1}(x), \ldots f_3(x),\, f_2(x),\, f'(x)
$$

irgend eine, z. B. $f_\varkappa(x)$ für $x = a$, so muß

$$
f_{\varkappa-1}(a) \lesseqgtr 0 \quad \text{und} \quad f_{\varkappa+1}(a) \gtreqless 0
$$

sein. Wäre nämlich $f_{\varkappa+1}(a) = 0$, so würde aus der Gleichung

$$
f_{\varkappa-1}(a) = Q_\varkappa(a) \,.\, f_\varkappa(a) - f_{\varkappa+1}(a)
$$

folgen, daß auch $f_{\varkappa-1}(a) = 0$ wäre. Dann wäre aber

$$
f_{\varkappa-2}(a) = Q_{\varkappa-1}(a) \,.\, f_{\varkappa-1}(a) - f_\varkappa(a)
$$

ebenfalls gleich Null. Auf diese Weise würde man finden

$$f_{\varkappa+1}(a) = 0, \quad f_\varkappa(a) = 0, \quad f_{\varkappa-1}(a) = 0, \quad \ldots f'(a) = 0, \quad f(a) = 0,$$

d. h. $x = a$ wäre eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Das widerstreitet aber der Voraussetzung.

Aus der Gleichung

$$f_{\varkappa-1}(x) = Q_\varkappa(x) \,.\, f_\varkappa(x) - f_{\varkappa+1}(x) \tag{7.}$$

folgt daher, wenn $f_\varkappa(a) = 0$ ist,

$$f_{\varkappa-1}(a) = -f_{\varkappa+1}(a). \tag{8.}$$

Man kann jetzt $h$ so klein nehmen, daß $f_{\varkappa-1}(a \pm h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f_{\varkappa-1}(a)$, und daß $f_{\varkappa+1}(a \pm h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f_{\varkappa+1}(a)$. Jetzt haben, wenn man mit $z$ das Vorzeichen von $f_\varkappa(a - h)$ und mit $z'$ das Vorzeichen von $f_\varkappa(a + h)$ bezeichnet, nach Gleichung (8.) die Funktionen

| | $f_{\varkappa-1}(x)$, | $f_\varkappa(x)$, | $f_{\varkappa+1}(x)$ |
|---|---|---|---|
| für $x = a - h$ das Vorzeichen | $\pm$ | $z$ | $\mp$ |
| „ $x = a$ „ „ | $\pm$ | $\pm 0$ | $\mp$ |
| „ $x = a + h$ „ „ | $\pm$ | $z'$ | $\mp$ |

Welche Vorzeichen $z$ und $z'$ auch sein mögen, es findet bei den drei aufeinander folgenden Funktionen $f_{\varkappa-1}(x)$, $f_\varkappa(x)$, $f_{\varkappa+1}(x)$ für die betrachteten Werte von $x$ stets nur *ein* Zeichenwechsel statt, d. h. es kann in der Reihe der Funktionen

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x), \quad \ldots f_3(x), \quad f_2(x), \quad f'(x), \quad f(x)$$

kein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn $x$ den Wert $a$ passiert, für welchen $f_\varkappa(x) = 0$ wird.

Werden für $x = a$ mehrere Funktionen der vorstehenden Reihe, welche „die *Sturm*sche Reihe" genannt wird, gleich Null, so kommt jede verschwindende Funktion zwischen zwei nicht verschwindende, so daß in der ganzen Reihe kein Zeichenwechsel verloren gehen kann.

Nur wenn $f(x)$ selbst für $x = a$ verschwindet, verhält sich die Sache anders. Dann wird nach Voraussetzung $f'(a) \gtrless 0$, und man kann $h$ so klein machen, daß $f'(x)$ das Zeichen nicht wechselt, wenn $x$ das Intervall von $a - h$ bis $a + h$ durchläuft. Dagegen wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze (vergl. Formel Nr. 89 der Tabelle)

$$(9.)\quad \begin{cases} f(a-h) = f(a) - h[f'(a) + \alpha_1] = -h[f'(a) + \alpha_1], \\ f(a+h) = f(a) + h[f'(a) + \alpha_2] = +h[f'(a) + \alpha_2], \end{cases}$$

wobei $f'(a) + \alpha_1$ und $f'(a) + \alpha_2$ dasselbe Zeichen haben wie $f'(a)$. Deshalb haben die Funktionen

| | | $f(x)$ und | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| | für $x = a - h$ das Zeichen | $\pm$ | $\mp$ |
| und | „ $x = a + h$ „ „ | $\mp$ | $\mp$ |

Hier geht also wirklich ein Zeichenwechsel verloren. Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung ist daher folgendes:

Alle Werte von $x$, für welche eine der Funktionen

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x),\ \ldots f_3(x),\ f_2(x),\ f'(x),\ f(x)$$

zwischen $x_1$ und $x_2$ verschwindet, seien in steigender Ordnung $a, b, c, \ldots k, l$, dann wechselt in den Intervallen von

$$x_1 \text{ bis } a,\quad a \text{ bis } b,\quad b \text{ bis } c,\ \ldots k \text{ bis } l,\quad l \text{ bis } x_2$$

keine dieser Funktionen das Zeichen, es kann also kein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn $x$ eines dieser Intervalle durchläuft.

Durchläuft aber $x$ die Intervalle von $a - h$ bis $a + h$, $b - h$ bis $b + h, \ldots l - h$ bis $l + h$, so wird nur dann ein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn $a$ oder $b, \ldots$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ selbst ist. Daraus folgt der

**Satz.** *Die Gleichung $f(x) = 0$ hat in dem Intervalle von $x_1$ bis $x_2$ genau so viele Wurzeln, wie die Reihe*

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x_1),\ \ldots f_3(x_1),\ f_2(x_1),\ f'(x_1),\ f(x_1)$$

*Zeichenwechsel mehr hat als die Reihe*

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x_2),\ \ldots f_3(x_2),\ f_2(x_2),\ f'(x_2),\ f(x_2).$$

**Beispiel.** Wieviel reelle Wurzeln hat die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$$

in dem Intervalle von 1 bis 6?

**Auflösung.** Hier ist

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 + 142x - 154,$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{4} - \frac{7}{8}, \quad 4f_2(x) = 5x^2 - 35x + 59,$$

$$Q_2(x) = \frac{16x}{5} - \frac{56}{5}, \quad 5f_3(x) = 16x - 56,$$

$$Q_3(x) = \frac{25x}{64} - \frac{175}{128}, \quad 16f_4 = 9.$$

Deshalb wird

$$16f_4 = 9,\ 5f_3(1) = -40,\ 4f_2(1) = +29,\ f'(1) = -50,\ f(1) = +24,$$
$$16f_4 = 9,\ 5f_3(6) = +40,\ 4f_2(6) = +29,\ f'(6) = +50,\ f(6) = +24.$$

Die erste Reihe hat 4 Zeichenwechsel, während in der zweiten Reihe kein Zeichenwechsel auftritt; es gehen also 4 Zeichenwechsel verloren, wenn $x$ das Intervall von 1 bis 6 durchläuft, d. h. die Gleichung 4ten Grades hat 4 reelle Wurzeln, die zwischen 1 und 6 liegen.

## § 122.

## Die *Newton*schen Näherungsformeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 200.)

Durch die in den vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methoden kann man nicht nur die Anzahl der reellen Wurzeln genau bestimmen, sondern man kann auch durch Einsetzen von Zahlenwerten Werte von $x$ finden, die den reellen Wurzelwerten ziemlich nahe liegen. Unterscheidet sich z. B. die Zahl $a$ von einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ nur um eine kleine Größe $h$, so ist nach der *Taylor*schen Reihe

$$(1.) \qquad f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots = 0.$$

Da $\frac{f''(x)}{2!}h^2$ und die folgenden Glieder für hinreichend kleine Werte von $h$ sehr klein werden, so kann man sie, ohne einen großen Fehler zu begehen, vernachlässigen. Deshalb findet man aus Gleichung (1.) näherungsweise

$$(2.) \qquad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h = 0, \quad \text{oder} \quad h = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

folglich ist

$$(3.) \qquad a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

ein zweiter Näherungswert, der unter gewissen Bedingungen dem wahren Werte von $x$ näher liegt als $a$. Einen dritten Näherungswert findet man dann durch die Gleichung

$$(4.) \qquad a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}.$$

Indem man dieses Verfahren, welches „die *Newton*sche Näherungsmethode" genannt wird, fortsetzt, kann man sich dem wahren Werte von $x$ beliebig nähern.

Dieses Verfahren führt aber nur dann zum Ziele, wenn $\frac{f''(a)}{2!}h^2$ und die folgenden Glieder in Gleichung (1.) wirklich sehr klein sind. Deshalb hat *Fourier* die *Newton*sche Methode noch in der folgenden Weise verbessert.

Man bestimme zwei Zahlen $a$ und $b$ so, daß zwischen $a$ und $b$ nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, und daß die Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ in diesem Intervalle keine Wurzel haben. Dann müssen $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Zeichen haben, weil $f(x)$ für einen Wert von $x$ zwischen $a$ und $b$ verschwindet. Dagegen hat $f'(a)$ mit $f'(b)$, und ebenso $f''(a)$ mit $f''(b)$ gleiches Zeichen. Deshalb sind in bezug auf die Vorzeichen von $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ 4 Fälle zu unterscheiden. Diesen 4 Fällen entsprechen die Figuren 138 bis 141, in denen

$$OA_1 = a, \quad OB_1 = b, \quad OQ = x$$

sein möge. In den Figuren 138 und 139 schneidet die Tangente des Kurvenpunktes $B$ die $X$-Achse im Punkte $T$, und durch den Kurvenpunkt $A$ ist eine Parallele $AS$ zu $TB$ gelegt; in den Figuren 140 und 141 schneidet die Tangente des Kurvenpunktes $A$ die $X$-Achse im Punkte $T$, und durch den Kurvenpunkt $B$ ist eine Parallele $BS$ zu $TA$ gelegt.

Fig. 138.

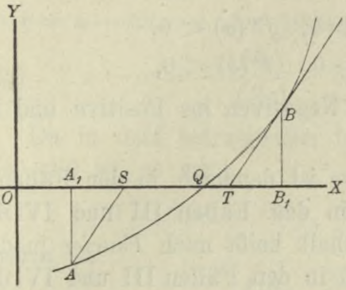
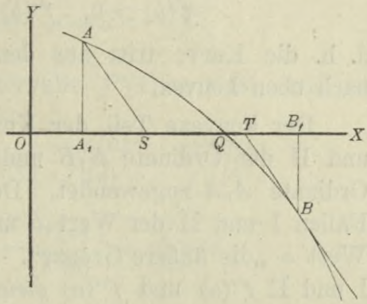



Fig. 139.




Im Falle I (Fig. 138) ist

$$f(a) < 0, \quad f'(a) > 0, \quad f''(a) > 0,$$
$$f(b) > 0, \quad f'(b) > 0, \quad f''(b) > 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Negativen ins Positive und ist nach oben konkav.

Im Falle II (Fig. 139) ist

$$f(a) > 0, \quad f'(a) < 0, \quad f''(a) < 0,$$
$$f(b) < 0, \quad f'(b) < 0, \quad f''(b) < 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Positiven ins Negative und ist nach oben konvex.

Fig. 140.

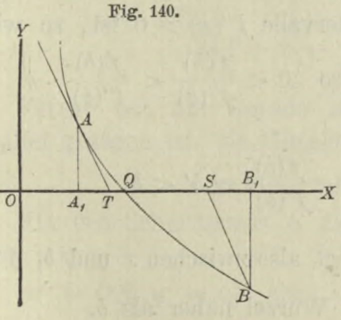
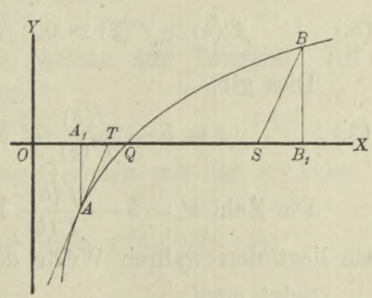



Fig. 141.




Im Falle III (Fig. 140) ist

$$f(a) > 0, \quad f'(a) < 0, \quad f''(a) > 0,$$
$$f(b) < 0, \quad f'(b) < 0, \quad f''(b) > 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Positiven ins Negative und ist nach oben konkav.

Im Falle IV (Fig. 141) ist

$$f(a) < 0,\quad f'(a) > 0,\quad f''(a) < 0,$$
$$f(b) > 0,\quad f'(b) > 0,\quad f''(b) < 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Negativen ins Positive und ist nach oben konvex.

Der konvexe Teil der Kurve ist demnach in den Fällen I und II der Ordinate $B_1B$ und in den Fällen III und IV der Ordinate $A_1A$ zugewendet. Deshalb heißt nach *Fourier* in den Fällen I und II der Wert $b$ und in den Fällen III und IV der Wert $a$ „die äußere Grenze". Man beachte, daß in den Fällen I und II $f'(a)$ und $f''(a)$ *gleiches*, und in den Fällen III und IV *entgegengesetztes* Zeichen haben.

Im Falle I setze man

$$x = b - (b - x) = OQ, \tag{5.}$$

dann wird nach Formel Nr. 87 der Tabelle, wenn man $a$ mit $b$ vertauscht,

$$f(x) = f(b) - (b - x)f'(\xi) = 0, \tag{6.}$$

wo $\xi = b - \Theta(b - x)$ zwischen $x$ und $b$ liegt. Daraus folgt

$$b - x = \frac{f(b)}{f'(\xi)},\quad \text{oder}\quad x = b - \frac{f(b)}{f'(\xi)}\cdot \tag{7.}$$

Da in dem betrachteten Intervalle $f''(x) > 0$ ist, so wird

$$f'(b) > f'(\xi) > 0,\quad \text{also}\quad 0 < \frac{f(b)}{f'(b)} < \frac{f(b)}{f'(\xi)}\cdot \tag{8.}$$

Dies gibt

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(\xi)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b' < b. \tag{9.}$$

Die Zahl $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ liegt also zwischen $x$ und $b$, d. h. sie liegt dem wahren Werte der Wurzel näher als $b$.

Setzt man

$$x = a + (x - a), \tag{10.}$$

so findet man in ähnlicher Weise nach Formel Nr. 87 der Tabelle

(11.) $$f(x) = f(a) + (x - a) f'(\eta) = 0,$$
wo $\eta = a + \Theta(x - a)$ zwischen $a$ und $x$ liegt. Dies gibt

(12.) $$x - a = -\frac{f(a)}{f'(\eta)}, \quad \text{oder} \quad x = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)}.$$

Da in dem betrachteten Intervalle $f''(x) > 0$ ist, und da $f(a) < 0$ ist, so wird

(13.) $$0 < f'(\eta) < f'(b), \quad \text{also} \quad \frac{-f(a)}{f'(\eta)} > \frac{-f(a)}{f'(b)},$$
folglich ist

(14.) $$x = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)} > a - \frac{f(a)}{f'(b)} = a' > a.$$

Man findet also

(15.) $$a < a' < x < b' < b.$$

Diese Untersuchung läßt sich in folgender Weise geometrisch deuten. Die Tangente im Punkte $B$ (Fig. 138) hat die Gleichung

(16.) $$y' - f(b) = f'(b)(x' - b);$$
für den Schnittpunkt $T$ dieser Tangente mit der $X$-Achse findet man

$$x' = OT, \quad y' = 0, \quad \text{also} \quad -f(b) = f'(b)(OT - b),$$
oder

(17.) $$OT = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b'.$$

Ferner hat die Gerade $AS$, welche zur Tangente $TB$ parallel gezogen ist, die Gleichung

(18.) $$y' - f(a) = f'(b)(x' - a).$$

Für den Schnittpunkt $S$ dieser Geraden mit der $X$-Achse findet man

$$x' = OS, \; y' = 0, \quad \text{also} \quad -f(a) = f'(b)(OS - a),$$
oder

(19.) $$OS = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = a'.$$

Gleichzeitig erkennt man, daß das Intervall zwischen $a'$ und $b'$ wesentlich kleiner ist als das Intervall zwischen $a$ und $b$.

Indem man dieses Verfahren weiter fortsetzt, findet man

$$(20.)\quad \begin{cases} a'' = a' - \dfrac{f(a')}{f'(b')}, & b'' = b' - \dfrac{f(b')}{f'(b')}, \\ a''' = a'' - \dfrac{f(a'')}{f'(b'')}, & b''' = b'' - \dfrac{f(b'')}{f'(b'')}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Die einzelnen Intervalle

$$(21.)\quad k = b - a,\ k' = b' - a',\ k'' = b'' - a'',\ \dots k^{(p)} = b^{(p)} - a^{(p)}$$

werden immer kleiner und nähern sich schließlich dem Werte 0 beliebig. Nach den Gleichungen (17.) und (19.) ist nämlich

$$(22.)\quad k' = b' - a' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - a + \frac{f(a)}{f'(b)} = k - \frac{f(b) - f(a)}{f'(b)}.$$

Nach der *Taylor*schen Reihe wird aber

$$f(x) - f(b) = (x - b)f'(b) + \frac{(x-b)^2}{2} f''[b + \Theta(x - b)],$$

also für $x = a$

$$(23.)\quad f(a) - f(b) = -kf'(b) + \frac{k^2}{2} f''(\zeta),$$

wo $\zeta = b + \Theta(a - b) = b - \Theta k$ zwischen $a$ und $b$ liegt. Deshalb geht Gleichung (22.) über in

$$(24.)\quad k' = k - k + \frac{k^2 f''(\zeta)}{2f'(b)} = \frac{k^2 f''(\zeta)}{2f'(b)}.$$

Bezeichnet man mit $G$ den größten Wert, den $f''(x)$ in dem Intervalle von $a$ bis $b$ annimmt, und setzt

$$(25.)\quad \frac{G}{2f'(a)} = C,$$

so wird

$$f''(\zeta) \leqq G,\ f'(a) < f'(b), \quad \text{also} \quad k' \leqq \frac{k^2 G}{2f'(b)} < \frac{k^2 G}{2f'(a)},$$

oder

$$(26.)\quad k' < C \,.\, k^2.$$

Ebenso findet man

$$k'' \leqq \frac{k'^2 \,.\, G}{2f'(b')} < \frac{k'^2 \,.\, G}{2f'(a)} < C \,.\, k'^2 < C^3 \,.\, k^4,$$

$$k''' < C \,.\, (k'')^2 < C^7 \,.\, k^8,\ k^{(4)} < C \,.\, (k''')^2 < C^{15} \,.\, k^{16}, \dots.$$

Man erkennt, daß die Annäherung eine sehr starke wird, wenn $C \,.\, k < 1$ ist.

Dieselben Formeln, welche für den Fall I hergeleitet sind, gelten auch für den Fall II, wie man leicht zeigen kann.

Für die Fälle III und IV, bei denen $a$ die äußere Grenze ist, erhält man brauchbare Resultate, wenn man in den Gleichungen (17.), (19.) und (20.) $a, a', a'', \ldots$ bezw. mit $b, b', b'', \ldots$ vertauscht; man hat also zu setzen:

$$(27.)\qquad \begin{cases} a' = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, & b' = b - \dfrac{f(b)}{f'(a)}, \\ a'' = a' - \dfrac{f(a')}{f'(a')}, & b'' = b' - \dfrac{f(b')}{f'(a')}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hier haben $f'(a)$ und $f''(a)$ entgegengesetztes Zeichen.

Macht man noch die Voraussetzung, daß $f'''(x)$ zwischen $a$ und $b$ nicht verschwindet, so ist $G$ entweder $f''(a)$ oder $f''(b)$; dann kann man die Zahl $C$ für alle 4 Fälle durch die Gleichung

$$(28.)\qquad C = \frac{G}{2K}$$

erklären, wo $K$ die kleinere von den beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$ und $G$ die größere von den beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$ ist. Es gelten dann für alle 4 Fälle die Ungleichungen

$$(29.)\qquad b - a = k,\ k' < C \,.\, k^2,\ k'' < C^3 \,.\, k^4,\ k''' < C^7 \,.\, k^8, \ldots .$$

Ist $C \,.\, k < 1$, so braucht man nur die Näherungswerte an der äußeren Grenze zu berechnen, denn aus den Ungleichungen (29.) ergibt sich, wie groß der Fehler höchstens sein kann.

**Beispiel.** Es sei

$$(30.)\qquad f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 5 = 0,$$

und es sei bekannt, daß die 3 Wurzeln dieser Gleichung bezw. in den Intervallen $-2,4$ bis $-2,3$; $-0,6$ bis $-0,5$ und $3,8$ bis $4,0$ liegen; man soll die 3 Wurzeln auf 4 Dezimalstellen genau berechnen.

**Auflösung.** Aus Gleichung (30.) folgt

$$(31.)\qquad f'(x) = 3x^2 - 2x - 10,\ f''(x) = 6x - 2,\ f'''(x) = 6.$$

Indem man beim Einsetzen der Zahlwerte das in § 121 angegebene Schema benutzt, findet man zunächst für $a = -2,4$ und $b = -2,3$

$$(32.)\quad \begin{cases} f(a) = -0,584,\ f'(a) = +12,08,\ f''(a) = -16,4,\ f'''(a) = 6, \\ f(b) = +0,543,\ f'(b) = +10,47,\ f''(b) = -15,8,\ f'''(b) = 6. \end{cases}$$

Hier tritt also Fall IV ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -2,4 + \frac{0,584}{12,08} = -2,4 + 0,048\,34 = -2,351\,66,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)} = -2,3 - \frac{0,543}{12,08} = -2,3 - 0,044\,95 = -2,344\,95.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$(33.)\qquad a' = -2,352,\quad b' = -2,344.$$

Dies ist erlaubt, weil man $a'$ etwas *kleiner* und $b'$ etwas *größer* annimmt als die bereits gefundenen Näherungswerte. Jetzt wird

$$(34.)\ f(a') = -0,022\,942,\ f(b') = +0,066\,940,\ f'(a') = 11,299\,712,$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')} = -2,352 + \frac{0,022\,942}{11,299\,712} = -2,349\,970,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')} = -2,344 - \frac{0,066\,940}{11,299\,712} = -2,349\,924.$$

Da $x_1$ zwischen $a''$ und $b''$, aber näher an $a''$ liegt, so setze man

$$(35.)\qquad x_1 = -2,349\,970.$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0,000\,023$.

Für das zweite Intervall wird $a = -0,6$ und $b = -0,5$; dies gibt

$$(36.)\quad \begin{cases} f(a) = +0,424,\ f'(a) = -7,72,\ f''(a) = -5,6,\ f'''(a) = 6, \\ f(b) = -0,375,\ f'(b) = -8,25,\ f''(b) = -5,\quad f'''(b) = 6. \end{cases}$$

Hier tritt also Fall II ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = -0,6 + \frac{0,424}{8,25} = -0,6 + 0,051\,394 = -0,548\,606,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = -0,5 - \frac{0,375}{8,25} = -0,5 - 0,045\,455 = -0,545\,455.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$a' = -0{,}549, \quad b' = -0{,}545, \tag{37.}$$

dann wird

$$f(a') = 0{,}023\,130, \; f(b') = -0{,}008\,904, \; f'(b') = -8{,}018\,925, \tag{38.}$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')} = -0{,}549 + \frac{0{,}023\,130}{8{,}018\,925} = -0{,}546\,116,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = -0{,}545 - \frac{0{,}008\,904}{8{,}018\,925} = -0{,}546\,110.$$

Da $x_2$ zwischen $a''$ und $b''$, aber näher an $b''$ liegt, so setze man

$$x_2 = -0{,}546\,110. \tag{39.}$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0{,}000\,003$.

Für das dritte Intervall wird $a = 3{,}8$ und $b = 4$; dies gibt

$$\begin{cases} f(a) = -2{,}568, \; f'(a) = +25{,}72, \; f''(a) = +20{,}8, \; f'''(a) = 6, \\ f(b) = +3, \quad f'(b) = +30, \quad f''(b) = +22, \quad f'''(b) = 6. \end{cases} \tag{40.}$$

Hier tritt also Fall I ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = 3{,}8 + \frac{2{,}568}{30} = 3{,}8 + 0{,}0856 = 3{,}8856,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 4{,}0 - \frac{3}{30} = 4{,}0 - 0{,}1 = 3{,}9.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$a' = 3{,}885, \quad b' = 3{,}9, \tag{41.}$$

dann wird

$$f(a') = -0{,}306\,046, \; f(b') = +0{,}109, \; f'(b') = +27{,}83, \tag{42.}$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')} = 3{,}885 + \frac{0{,}306\,046}{27{,}83} = 3{,}895\,997,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = 3{,}9 - \frac{0{,}109}{27{,}83} = 3{,}896\,083.$$

Da $x_3$ zwischen $a''$ und $b''$, aber näher an $b''$ liegt, so setze man

$$x_3 = 3{,}896\,083. \tag{43.}$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0{,}000\,043$.

## § 123.

## Näherungsmethode von *Graeffe*.

Sind in der Gleichung $f(x) = 0$ die absoluten Beträge der Wurzeln voneinander verschieden, und sind die absoluten Beträge der reellen Wurzeln größer als die der komplexen Wurzeln, so kann man zur Ermittelung der reellen Wurzeln das folgende Verfahren anwenden.

Durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ geht die Gleichung

$$(1.)\quad \begin{aligned} f(x) &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = 0 \end{aligned}$$

in

$$(2.)\quad \begin{aligned} f_1(x) &= x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - + \cdots \mp a_{n-1}x \pm a_n \\ &= (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)\cdots(x + x_n) = 0 \end{aligned}$$

über. Indem man die beiden Gleichungen (1.) und (2.) miteinander multipliziert, erhält man eine Gleichung

$$(3.)\quad \begin{aligned} & x^{2n} + b_1 x^{2n-2} + b_2 x^{2n-4} + \cdots + b_{n-1}x^2 + b_n \\ &= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\cdots(x^2 - x_n^2) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$(4.)\quad \begin{cases} b_1 = 2a_2 - a_1^2, \\ b_2 = 2a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2, \\ b_3 = 2a_6 - 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 - a_3^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Am einfachsten findet man die Koeffizienten der Gleichung (3.), wenn man $f(x)$ auf die Form

$$(1a.)\quad \begin{aligned} f(x) &= (x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots) + (a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \cdots) \\ &= A + B \end{aligned}$$

bringt, wobei

$$A = x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots, \quad B = a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \cdots$$

ist, dann wird

$$(2a.)\quad f_1(x) = A - B = 0$$

und

$$(3a.)\quad f(x) \cdot f_1(x) = A^2 - B^2 = 0.$$

Indem man $x^2 = y$ setzt, geht Gleichung (3.) über in

$$(5.)\quad \begin{aligned} g(y) &= y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_{n-1} y + b_n \\ &= (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2) \ldots (y - x_n^2) = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$(6.)\quad \begin{aligned} (-1)^n g(-y) &= y^n - b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} - + \cdots \mp b_{n-1} y \pm b_n \\ &= (y + x_1^2)(y + x_2^2)(y + x_3^2) \cdots (y + x_n^2) = 0 \end{aligned}$$

und setzt $y^2 = z$, so erhält man die Gleichung

$$(7.)\quad \begin{aligned} & z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n \\ &= (z - x_1^4)(z - x_2^4)(z - x_3^4) \cdots (z - x_n^4) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren kann man beliebig fortsetzen und findet, wenn man die Zahl $2^\alpha$ mit $\mu$ bezeichnet, schließlich eine Gleichung

$$(8.)\quad w^n + p_1 w^{n-1} + p_2 w^{n-2} + \cdots + p_{n-1} w + p_n = 0$$

mit den Wurzeln $x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu, \ldots x_n^\mu$.

Sind alle Wurzeln reell, und ist

$$(9.)\quad x_1^2 > x_2^2 > x_3^2 > \cdots > x_n^2,$$

so wird nach den Ausführungen in § 114

$$(10.)\quad \begin{aligned} -p_1 &= x_1^\mu + x_2^\mu + x_3^\mu + \cdots + x_n^\mu \\ &= x_1^\mu \left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\mu + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^\mu\right] = x_1^\mu(1 + \varepsilon_1), \end{aligned}$$

$$(11.)\quad \begin{aligned} +p_2 &= x_1^\mu x_2^\mu + x_1^\mu x_3^\mu + \cdots + x_2^\mu x_3^\mu + \cdots + x_3^\mu x_4^\mu + \cdots \\ &= x_1^\mu x_2^\mu \left[1 + \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^\mu + \cdots\right] \\ &= x_1^\mu x_2^\mu (1 + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

$$(12.)\quad \begin{aligned} -p_3 &= x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu + x_1^\mu x_2^\mu x_4^\mu + \cdots \\ &= x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu \left[1 + \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^\mu + \cdots\right] = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu (1 + \varepsilon_3), \end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(13.)\quad \pm p_n = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu \ldots x_n^\mu.$$

Nun sind aber nach Voraussetzung die Größen

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2, \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2, \ldots \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2, \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2, \ldots \left(\frac{x_n}{x_2}\right)^2, \ldots \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^2$$

lauter echte Brüche, deren Potenzen man beliebig klein machen kann, wenn man nur den Exponenten hinreichend groß macht. Deshalb kann man auch die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ beliebig klein machen und findet mit beliebiger Annäherung

$$(14.)\quad -p_1 = x_1{}^\mu, \quad +p_2 = x_1{}^\mu x_2{}^\mu, \quad -p_3 = x_1{}^\mu x_2{}^\mu x_3{}^\mu, \quad \ldots \pm p_n = x_1{}^\mu x_2{}^\mu \ldots x_n{}^\mu.$$

Daraus folgt näherungsweise

$$(15.)\quad x_1{}^\mu = -p_1,\ x_2{}^\mu = -\frac{p_2}{p_1},\ x_3{}^\mu = -\frac{p_3}{p_2},\ \cdots x_n{}^\mu = -\frac{p_n}{p_{n-1}},$$

oder

$$(16.)\quad \begin{cases} \log(\pm x_1) = \frac{1}{\mu}\log(-p_1), \\ \log(\pm x_2) = \frac{1}{\mu}[\log p_2 - \log(-p_1)], \\ \log(\pm x_3) = \frac{1}{\mu}[\log(-p_3) - \log p_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \log(\pm x_n) = \frac{1}{\mu}[\log(\pm p_n) - \log(\mp p_{n-1})]. \end{cases}$$

**Beispiel.** Man soll die Wurzeln der Gleichung

$$(17.)\quad f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 5 = 0$$

berechnen.

**Auflösung.** Mit Hülfe des *Sturm*schen Satzes kann man leicht nachweisen, daß die Gleichung zwei negative und eine positive reelle Wurzel hat, daß also das vorher angegebene Verfahren anwendbar ist. Aus

$$(x^3 - 10x)^2 - (x^2 + 5)^2 = 0$$

folgt dann die Gleichung

$$(18.)\quad y^3 - 21y^2 + 90y - 25 = 0, \quad \text{wo} \quad y = x^2.$$

Ferner folgt aus

$$(y^3 + 90y)^2 - (21y^2 + 25)^2 = 0$$

$$(19.)\quad z^3 - 261z^2 + 7050z - 625 = 0, \quad \text{wo} \quad z = y^2 = x^4.$$

Aus

$$(z^3 + 7050z)^2 - (261z^2 + 625)^2 = 0$$

folgt die Gleichung

$$w^3 - 54021w^2 + 49\,376\,250w - 390\,625 = 0, \tag{20.}$$

$$\text{wo} \quad w = z^2 = y^4 = x^8.$$

Deshalb wird

$$\log(\pm x_1) = \frac{1}{8}\log 54\,021 = 4{,}732\,562\,6 : 8 = 0{,}591\,570\,3,$$

$$\log(\pm x_2) = \frac{1}{8}[\log 49\,376\,250 - \log 54\,021]$$
$$= (7{,}693\,518\,1 - 4{,}732\,562\,6) : 8$$
$$= 2{,}960\,955\,5 : 8 = 0{,}370\,119\,4,$$

$$\log(\pm x_3) = \frac{1}{8}[\log 390\,625 - \log 49\,376\,250]$$
$$= (5{,}591\,760\,1 - 7{,}693\,518\,1) : 8$$
$$= (5{,}898\,242\,0 - 8) : 8 = 0{,}737\,280\,3 - 1.$$

Daraus folgt

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \pm\,3{,}904\,544, \\ x_2 &= \pm\,2{,}344\,874, \\ x_3 &= \pm\,0{,}546\,110. \end{aligned}\right. \tag{21.}$$

Da $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist, so muß $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$ sein. Aus der Vergleichung dieser Näherungswerte mit den in § 122 für die Wurzeln derselben Gleichung gefundenen Werten erkennt man, daß die Annäherung eine ziemlich starke ist.

Der große Mangel dieser Methode liegt darin, daß man zwar die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, daß man aber für den Fehler keine zuverlässige Grenze angeben kann. Man wird daher im allgemeinen zunächst die *Graeffe*sche Methode benutzen, um für die Wurzeln Näherungswerte zu finden, und dann die Methode von *Newton* und *Fourier* anwenden, wenn es darauf ankommt, bei der Berechnung eine bestimmte Genauigkeit zu erzielen.

Sind auch komplexe Wurzeln vorhanden, so kann man die Methode von *Graeffe* noch zur Berechnung der reellen Wurzeln anwenden, deren absoluter Betrag größer ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln.

Nach den Ausführungen in § 113 treten die komplexen Wurzeln paarweise auf. Ist z. B.

$$x_\varkappa = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{22.}$$

eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so hat die Gleichung noch eine zweite Wurzel von der Form

$$x_\lambda = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). \tag{23.}$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} x_\varkappa^\mu + x_\lambda^\mu &= r^\mu[\cos(\mu\varphi) + i\sin(\mu\varphi)] + r^\mu[\cos(\mu\varphi) - i\sin(\mu\varphi)] \\ &= 2r^\mu\cos(\mu\varphi). \end{aligned} \tag{24.}$$

Hat jetzt die reelle Wurzel $x_1$ unter allen Wurzeln den größten absoluten Betrag, so kann man in der Gleichung,

$$-p_1 = x_1^\mu\left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \frac{2r^\mu\cos(\mu\varphi)}{x_1^\mu} + \cdots\right] = x_1^\mu(1 + \varepsilon_1)$$

die Größe $\varepsilon_1$ für hinreichend große Werte von $\mu$ wieder beliebig klein machen, so daß man mit beliebiger Annäherung

$$x_1 = \pm\sqrt[\mu]{p_1} \tag{25.}$$

erhält.

Ebenso kann man die Methode von *Graeffe* zur angenäherten Berechnung derjenigen reellen Wurzeln benutzen, deren absoluter Betrag kleiner ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln, denn man kann diesen Fall auf den vorstehenden zurückführen, indem man $x = \frac{1}{t}$ setzt. Dann entsprechen den gesuchten Wurzeln diejenigen reellen Wurzeln in der Gleichung

$$t^n f\left(\frac{1}{t}\right) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + 1 = 0, \tag{26.}$$

deren absoluter Betrag größer ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln.

Man kann die Methode von *Graeffe* sogar so verallgemeinern, daß sie für die angenäherte Berechnung der komplexen Wurzeln geeignet wird. Die Auseinandersetzung des dazu erforderlichen Verfahrens würde aber hier zu weit führen.

# XVI. Abschnitt.

# Asymptoten einer Kurve.

## § 124.

## Richtung der Asymptoten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 201.)

**Erklärung.** Eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich fern liegt, heißt eine „*Asymptote*“ der Kurve.

In diesem Falle ist Formel Nr. 138 der Tabelle, welche die Gleichung der Tangente angibt, nämlich

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

nicht mehr anwendbar, weil in dieser Gleichung $x$ und $y$ (oder wenigstens die eine von diesen beiden Größen) unendlich groß werden. Auch kann die Differentiation von $y$ nach $x$ in diesem Falle nicht mehr ausgeführt werden. Dagegen führen die in Abschnitt XIV ausgeführten algebraischen Untersuchungen zum Ziele.

Dabei möge die Bestimmung der Asymptoten einer Kurve mit der Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

auf den Fall beschränkt werden, wo $F(x, y)$ eine *ganze rationale* Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades ist, obgleich die meisten Schlüsse und Ergebnisse der hier folgenden Untersuchung auch dann noch richtig bleiben, wenn diese Beschränkung aufgehoben wird.

Zunächst beachte man, daß die Asymptote eine gerade Linie ist, deren Gleichung die Form

$$(2.)\qquad Ax' + By' + C = 0$$

haben muß. Ist $B \gtreqless 0$, so erhält man hieraus

$$(2a.)\qquad y' = mx' + \mu,$$

und ist $A \gtreqless 0$, so erhält man

$$(2b.)\qquad x' = ly' + \lambda,$$

wobei

$$(3.)\qquad m = -\frac{A}{B},\ l = -\frac{B}{A} = \frac{1}{m}$$

ist. Wird $B = 0$, so ist die Gerade parallel zur $Y$-Achse und hat die Gleichung

$$x' = \lambda,$$

während die Gleichung (2a.) nicht benutzt werden kann. Wird $A = 0$, so ist die Gerade parallel zur $X$-Achse und hat die Gleichung

$$y' = \mu,$$

während die Gleichung (2b.) nicht benutzt werden kann.

Damit die Gerade (2a.) oder (2b.) durch den Kurvenpunkt $P$ mit den Koordinaten $x$ und $y$ hindurchgeht, muß

$$y = mx + \mu \quad \text{und} \quad x = ly + \lambda,$$

oder

$$(4.)\qquad m = \frac{y}{x} - \frac{\mu}{x} \quad \text{und} \quad l = \frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y}$$

sein, wobei zunächst angenommen ist, daß der Punkt $P$ im Endlichen liegt. Rückt aber $P$ ins Unendliche, so wird

$$(4a.)\qquad m = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x} - \frac{\mu}{x}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$(4b.)\qquad l = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y}\right) = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Um nun die Größen $\lim\left(\frac{y}{x}\right)$ bezw. $\lim\left(\frac{x}{y}\right)$ zu berechnen, beachte man, daß $x$ und $y$ die Koordinaten eines *Kurven*punktes sind, daß man also die Werte von $\frac{y}{x}$ und $\frac{x}{y}$ aus der Gleichung der Kurve, nämlich aus

$$F(x, y) = 0$$

berechnen muß. Zu diesem Zwecke ordne man $F(x, y)$ so, daß

$$F(x, y) = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1 + U_0 = 0 \tag{5.}$$

wird, wobei

$$U_n = ay^n + a_1xy^{n-1} + a_2x^2y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}y + a_nx^n$$

alle Glieder der $n^{\text{ten}}$ Dimension,

$$U_{n-1} = by^{n-1} + b_1xy^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$$

alle Glieder der $(n-1)^{\text{ten}}$ Dimension,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$U_1 = ky + k_1x$$

die Glieder der ersten Dimension enthält, und $U_0$ eine Konstante ist.

Dividiert man jetzt beide Seiten der Gleichung (5.) durch $x^n$, so wird

$$\frac{F(x, y)}{x^n} = \frac{U_n}{x^n} + \frac{U_{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{U_1}{x^n} + \frac{U_0}{x^n} = 0.$$

Dabei ist

$$\frac{U_n}{x^n} = a\left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + a_n \tag{6.}$$

nur noch von $\frac{y}{x}$ abhängig. Dagegen wird

$$\frac{U_{n-1}}{x^n} = \frac{1}{x}\left[b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + b_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + \cdots + b_{n-1}\right]. \tag{7.}$$

Läßt man jetzt $x$ unendlich groß werden, so ist

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = m, \tag{8.}$$

und wenn $m$ eine endliche Größe ist,

$$\lim \frac{U_{n-1}}{x^n} = 0.$$

Ebenso werden die Größen $\lim \frac{U_{n-2}}{x^n}$, $\cdots \lim \frac{U_1}{x^n}$, $\lim \frac{U_0}{x^n}$ gleich $0$, so daß sich die Gleichung (5.) bei der Ausführung der angegebenen Operationen auf

$$\lim \frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0 \tag{9.}$$

reduziert.

Die $n$ Wurzeln dieser Gleichung entsprechen $n$ Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte der Kurve liegen.

*Eine Kurve $n^{ten}$ Grades hat daher $n$ unendlich ferne Punkte und deshalb auch $n$ Asymptoten, von denen aber einige imaginär sein können, dem Umstande entsprechend, daß die Gleichung* (9.) *imaginäre Wurzeln haben kann.**)

Wenn in Gleichung (9.) der Koeffizient von $m^n$, nämlich $a$, gleich 0 wird, so reduziert sich der Grad der Gleichung (9.) und somit auch die Anzahl ihrer Wurzeln, nicht aber die Anzahl der Asymptoten. Es wurde ja schon vorher darauf hingewiesen, daß die Gleichungsform

$$y' = mx' + \mu$$

für die Asymptoten nicht immer verwendbar sei. Dieser Fall tritt ein, wenn $a$ gleich 0 ist.

Dividiert man nämlich die Gleichung (5.) durch $y^n$, läßt dann $y$ unendlich groß werden und beachtet, daß $\lim\left(\frac{x}{y}\right) = l$ ist, so erhält man

$$(10.)\quad \lim_{y=\infty} \frac{U_n}{y^n} = a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + a_{n-2} l^{n-2} + \cdots + a_1 l + a = 0.$$

Wird jetzt $a$ gleich 0, so hat diese Gleichung die Wurzel

$$l = \frac{1}{m} = 0,$$

und die entsprechende Asymptote steht auf der $X$-Achse senkrecht. Ist auch $a_1$ gleich 0, so läßt sich in Gleichung (10.) auf der linken Seite der Faktor $l^2$ abtrennen, d. h. die Gleichung hat die Wurzel

$$l = 0$$

zweimal, so daß zwei Asymptoten auf der $X$-Achse senkrecht stehen. Usw.

---

*) Unter einer *imaginären* Wurzel soll hier im Gegensatz zu den *reellen* Wurzeln eine komplexe Größe von der Form $a + bi$ verstanden werden, bei der $b \gtreqless 0$ ist.

## § 125.

# Lage der Asymptoten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 201.)

Nachdem man im vorhergehenden Paragraphen aus der Gleichung (9.) einen Wert von $m$ (oder aus der Gleichung (10.) einen Wert von $l$) bestimmt hat, kennt man erst die *Richtung* der Asymptote

$$y' = mx' + \mu, \quad \text{oder} \quad x' = ly' + \lambda;$$

um ihre Lage vollständig zu erhalten, muß man noch den zugehörigen Wert von $\mu$ (bezw. $\lambda$) aufsuchen.

Zu diesem Zwecke bestimme man die Punkte, in denen die Kurve von der Geraden geschnitten wird. Für die Koordinaten eines solchen Punktes gelten die Gleichungen

$$(1.) \qquad F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad y = mx + \mu$$

gemeinschaftlich, also auch die Gleichung

$$(2.) \qquad F(x, mx + \mu) = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur noch die *eine* Unbekannte $x$ und läßt sich, da sie höchstens vom $n^{\text{ten}}$ Grade ist, auf die Form

$$(2a.) \quad F(x, mx + \mu) = Vx^n + V_1x^{n-1} + V_2x^{n-2} + \dots + V_{n-1}x + V_n = 0$$

bringen. Wie die Koeffizienten $V, V_1, V_2, \dots$ gebildet sind, ergibt sich aus der Betrachtung der Ausdrücke

$$U_n(x, mx + \mu), \quad U_{n-1}(x, mx + \mu), \quad U_{n-2}(x, mx + \mu), \dots,$$

in welche die Größen $U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \dots$ übergehen, wenn man $y$ gleich $mx + \mu$ einsetzt. Es ist nämlich

$$U_n(x, mx + \mu) =$$
$$a(mx + \mu)^n + a_1x(mx + \mu)^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n-1}(mx + \mu) + a_nx^n$$
$$= (am^n + a_1m^{n-1} + \dots + a_{n-1}m + a_n)x^n$$
$$+ \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1m^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}m + a_{n-1}]x^{n-1}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U_{n-1}(x,\ mx+\mu) =$$
$$b(mx+\mu)^{n-1} + b_1x(mx+\mu)^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}(mx+\mu) + b_{n-1}x^{n-1}$$
$$= (bm^{n-1} + b_1m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots.$$

Daraus folgt

(3.) $V = am^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n,$

(4.) $V_1 = \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}] + (bm^{n-1} + b_1m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1}),$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Da nun der Wert von $m$ bereits so bestimmt ist, daß Gleichung (9.) in § 124 befriedigt wird, so ist schon deshalb

$$V = 0,$$

d. h. die Gleichung (2a.), nämlich die Gleichung

$$Vx^n + V_1x^{n-1} + V_2x^{n-2} + \cdots + V_{n-1}x + V_n = 0$$

hat bereits eine Wurzel

$$x = \infty,$$

oder mit anderen Worten, die Gerade

$$y' = mx' + \mu$$

geht bereits durch einen unendlich fernen Punkt der Kurve, welchen Wert auch $\mu$ haben mag.

Damit sie aber die Kurve in diesem Punkte berührt, muß man $\mu$ so bestimmen, daß auch noch eine zweite Wurzel der Gleichung (2a.) unendlich groß wird. Dies geschieht, wenn man

(5.) $$V_1 = 0$$

macht, indem man

(6.) $$\mu = -\frac{bm^{n-1} + b_1m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1}}{nam^{n-1} + (n-1)a_1m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}$$

setzt.

Die Regel, welche sich aus dieser Untersuchung für die Behandlung von Beispielen ergibt, ist daher folgende:

Man dividiert $U_n$ durch $x^n$ und erhält dadurch, daß man $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ gleich $m$ setzt, die Gleichung

$$\lim_{x=\infty}\frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0.$$

Ist $m$ eine Wurzel dieser Gleichung, so setze man $y = mx + \mu$ in die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

ein, von der man aber nur die Glieder $U_n + U_{n-1}$ braucht, dividiert durch $x^{n-1}$ und läßt dann $x$ unendlich groß werden. Dies gibt eine Gleichung ersten Grades für die Bestimmung von $\mu$.

Man hätte auch $x$ mit $y$ und infolgedessen $m$ mit $l$ und $\mu$ mit $\lambda$ vertauschen können, um die Gleichung der Asymptoten in der Form

$$x' = ly' + \lambda$$

zu erhalten. Diese Vertauschung ist sogar notwendig, wenn eine oder mehrere Asymptoten der $Y$-Achse parallel sind, d. h. wenn

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \ldots.$$

Eine Modifikation der gegebenen Regel tritt nur ein, wenn die Gleichung

$$f(m) = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

*gleiche* Wurzeln hat, d. h. wenn unter den Asymptoten etliche *zueinander parallel* sind; dann wird nach dem in § 112 bewiesenen Satze auch

$$f'(m) = nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + (n-2)a_2 m^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

Der Wert von $\mu$ ist deshalb entweder nach Gleichung (6.) *unendlich*, d. h. die zugehörigen Asymptoten rücken ins Unendliche, oder es wird auch

$$bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + b_2 m^{n-3} + \cdots + b_{n-2} m + b_{n-1} = 0.$$

In diesem Falle wird $V_1$ gleich 0 für jeden beliebigen Wert von $\mu$, so daß man den Wert (oder vielmehr die beiden Werte) von $\mu$ erhält, indem man

$$V_2 = 0$$

setzt. Ist auch $V_2$ für jeden Wert von $\mu$ gleich 0, und gilt dasselbe für $V_3, \ldots V_{\alpha-1}$ (nicht aber für $V_\alpha$), beginnt also die Entwickelung von $F(x, mx + \mu)$ nach fallenden Potenzen von $x$ mit $V_\alpha x^{n-\alpha}$, so bestimme man $\mu$ so, dass auch

$$V_\alpha = 0$$

wird. Dies ist dann eine Gleichung $\alpha^{\text{ten}}$ Grades von $\mu$, dem

Umstande entsprechend, daß $\alpha$ Werte von $m$ einander gleich sind, die aber zu $\alpha$ verschiedenen (zueinander parallelen) Asymptoten gehören.

Am besten wird der Anfänger diese Angaben durch die Ausführung an einigen hier folgenden Beispielen verstehen.

## § 126.

## Anwendungen auf einzelne Kurven.

**Aufgabe 1.** Man soll die Asymptoten der *Hyperbel*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 142.)

**Auflösung.** Hier ist $n$ gleich 2 und

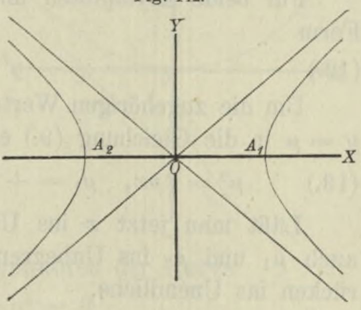
$$\frac{U_2}{x^2} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2} = b^2 - a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2, \tag{2.}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = b^2 - a^2m^2 = 0, \tag{2a.}$$

also

$$m = \pm \frac{b}{a} \cdot \tag{3.}$$

Fig. 142.




Die Gleichung der einen Asymptote ist daher

$$y' = \frac{b}{a}x' + \mu. \tag{4.}$$

Um auch noch den Wert von $\mu$ zu bestimmen, setze man $y$ gleich $\frac{b}{a}x + \mu$ in die Gleichung (1.) ein. Dadurch erhält man

$$b^2x^2 - b^2x^2 - 2ab\mu x - a^2\mu^2 - a^2b^2 = 0,$$

und wenn man durch $x$ dividiert,

$$-2ab\mu - \frac{a^2\mu^2 + a^2b^2}{x} = 0. \tag{5.}$$

Läßt man jetzt $x$ unendlich groß werden, so folgt hieraus

(6.) $$-2ab\mu = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0.$$

Die Gleichung der ersten Asymptote ist daher

(7.) $$y' = \frac{b}{a}x';$$

ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

(8.) $$y' = -\frac{b}{a}x'.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Asymptoten der *Parabel*

(9.) $$y^2 - 2px = 0$$

bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist wieder $n = 2$ und

(10.) $$\frac{U_2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = m^2 = 0,$$

also

(11.) $$m_1 = 0, \quad m_2 = 0.$$

Für beide Asymptoten findet man eine Gleichung von der Form

(12.) $$y' = \mu.$$

Um die zugehörigen Werte von $\mu$ zu bestimmen, setzt man $y = \mu$ in die Gleichung (9.) ein und erhält

(13.) $$\mu^2 = 2px, \quad \mu_1 = +\sqrt{2px}, \quad \mu_2 = -\sqrt{2px}.$$

Läßt man jetzt $x$ ins Unbegrenzte wachsen, so wachsen auch $\mu_1$ und $\mu_2$ ins Unbegrenzte, d. h. die beiden Asymptoten rücken ins Unendliche.

**Aufgabe 3.** Man soll die Asymptoten der Kurve

(14.) $$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 143.)

**Auflösung.** Bei dieser Kurve, welche man „*Folium Cartesii*“ nennt, ist $n$ gleich 3 und

(15.) $$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3,$$

(15a.) $$\lim_{x=\infty} \frac{U_3}{x^3} = 1 + m^3 = (1 + m)(1 - m + m^2) = 0,$$

also

$$m_1 = -1, \quad m_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad m_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Die beiden imaginären Werte von $m$ brauchen nicht berücksichtigt zu werden; die einzige reelle Asymptote erhält man, wenn man $m$ gleich $-1$ setzt. Dadurch wird

$$y = -x + \mu,$$

und Gleichung (14.) geht für diesen Wert von $y$ über in

(16.) $$3\mu x^2 - 3\mu^2 x + \mu^3 + 3ax^2 - 3a\mu x = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch $x^2$ dividiert, findet man

$$3\mu + 3a - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{3a\mu}{x} + \frac{\mu^3}{x^2} = 0.$$

Wenn jetzt $x$ unendlich groß wird, so erhält man

(17.) $$3\mu + 3a = 0,$$

oder

$$\mu = -a.$$

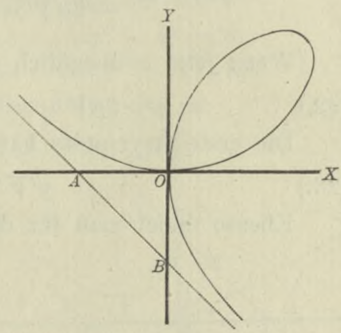
Die Gleichung der reellen Asymptote ist daher

(18.) $$y' = -x' - a,$$

oder

(18a.) $$x' + y' + a = 0.$$

Fig. 143.




**Aufgabe 4.** Man soll die Asymptoten der Kurve

(19.) $$x^3 - 3xy^2 - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 144.)

**Auflösung.** Hier ist $n$ gleich 3 und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^3} = 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

also

(20.) $$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 = 0, \quad m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da $m$ die Tangente des Winkels $\alpha$ ist, den die Gerade

$$y = mx + \mu$$

mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, und da

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist, so bilden die beiden Asymptoten, welche den gefundenen Werten von $m$ entsprechen, bezw. die Winkel $+30^0$ und $-30^0$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse.

Setzt man nun

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x + \mu$$

in die Gleichung (19.) ein, so findet man

$$(21.)\qquad x^3 - x^3 - 2x^2\mu\sqrt{3} - 3x\mu^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$-2\mu\sqrt{3} - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{a^3}{x^2} = 0.$$

Wenn jetzt $x$ unendlich groß wird, so folgt hieraus

$$(22.)\qquad -2\mu\sqrt{3} = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0.$$

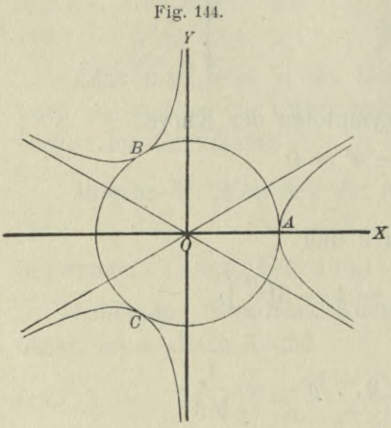
Die erste Asymptote hat daher die Gleichung

$$(23.)\qquad y'\sqrt{3} = x'.$$

Ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

$$(24.)\qquad y'\sqrt{3} = -x'.$$

Fig. 144.




Um noch die dritte Asymptote zu erhalten, bilde man

$$\frac{U_3}{y^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dies gibt

$$(25.)\qquad \lim \frac{U_3}{y^3} = l^3 - 3l = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(26.)\quad l = +\sqrt{3},\ l = -\sqrt{3},\ l = 0.$$

Wie man ohne weiteres erkennt, führen die beiden ersten Werte auf die schon bekannten Asymptoten; dagegen liefert $l = 0$ eine dritte Asymptote. Man muß daher

$$x = \lambda$$

in die Gleichung (19.) einsetzen und erhält dadurch

$$\lambda^3 - 3\lambda y^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$\frac{\lambda^3}{y^2} - 3\lambda - \frac{a^3}{y^2} = 0.$$

Läßt man jetzt $y$ unendlich groß werden, so folgt hieraus daß

(27.) $$\lambda = 0$$

wird, und daß die dritte Asymptote die Gleichung

(28.) $$x' = 0$$

hat. Dies ist aber die Gleichung der $Y$-Achse.

**Aufgabe 5.** Man soll die Asymptoten der Kurve

(29.) $$x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) - 3xy^2 - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 145.)

**Auflösung.** Hier ist wieder $n$ gleich 3 und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 2y^3 - 3xy^2}{x^3}$$

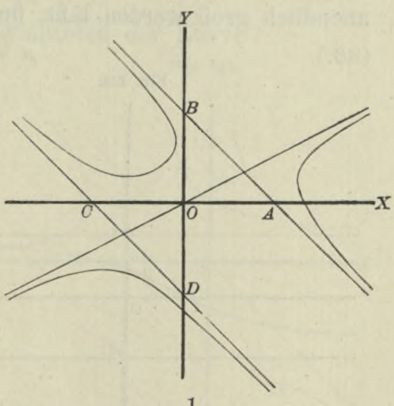
$$= 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3,$$

also

(30.) $$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 - 2m^3$$

$$= (1 + m)(1 + m)(1 - 2m) = 0.$$

Fig. 145.




Die 3 Wurzeln dieser Gleichungen sind daher

(31.) $$m_1 = -1, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = +\frac{1}{2}.$$

Bei dieser Kurve findet man zwei *parallele* Asymptoten, weil zwei Werte von $m$ einander gleich sind. Um die zugehörigen Werte von $\mu$ zu finden, setze man

$$y = -x + \mu$$

in die Gleichung (29.) ein. Dadurch erhält man

$$x(x^2 - a^2) + 2(x - \mu)(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - a^2) - 3x(x^2 - 2\mu x + \mu^2) - a^3 = 0,$$

oder

(32.) $$(-3a^2 + 3\mu^2)x - 2\mu^3 + 2a^2\mu - a^3 = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch $x$ dividiert und $x$ dann unendlich groß werden läßt, findet man

(33.) $$-3a^2 + 3\mu^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = \pm a.$$

Die beiden entsprechenden Asymptoten haben daher die Gleichungen

(34.) $$y' = -x' + a \quad \text{und} \quad y' = -x' - a.$$

Für die dritte Asymptote hat man

$$y = \frac{1}{2}x + \mu$$

in die Gleichung (29.) einzusetzen. Dadurch erhält man

(35.) $$-\frac{9}{2}\mu x^2 - 6\mu^2 x - 2\mu^3 + 2a^2\mu - a^3 = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch $x^2$ dividiert und dann $x$ unendlich groß werden läßt, findet man

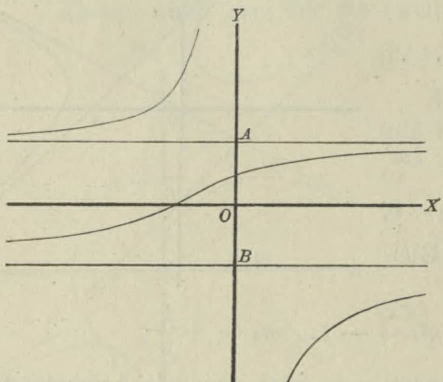
(36.) $$\mu = 0,$$

so daß die dritte Asymptote die Gleichung

(37.) $$2y' = x'$$

besitzt.

Fig. 146.




**Aufgabe 6.** Man soll die Asymptoten der Kurve

(38.) $$xy^2 - x + 2y - 1 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 146.)

**Auflösung.** Hier ist wieder $n = 3$ und

$$\frac{U_3}{x^3} = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad \lim \frac{U_3}{x^3} = m^2 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = \infty.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten haben daher die Form

$$(39.)\qquad y' = \mu_1,\quad y' = \mu_2,\quad x' = \lambda.$$

Dabei findet man $\mu_1$ und $\mu_2$, indem man $y = \mu$ in die Gleichung (38.) einsetzt. Dies gibt

$$x\mu^2 - x + 2\mu - 1 = 0,$$

oder

$$\mu^2 - 1 + \frac{2\mu - 1}{x} = 0,$$

und für $\lim x = \infty$

$$(40.)\qquad \mu^2 = 1,$$

$$(41.)\qquad \mu_1 = +1,\quad \mu_2 = -1.$$

Ebenso findet man $\lambda$, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung der Kurve einsetzt. Dadurch erhält man

$$(42.)\qquad \lambda y^2 - \lambda + 2y - 1 = 0,\quad \text{oder}\quad \lambda + \frac{2}{y} - \frac{\lambda + 1}{y^2} = 0,$$

und für $\lim y = \infty$

$$(43.)\qquad \lambda = 0.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten sind daher

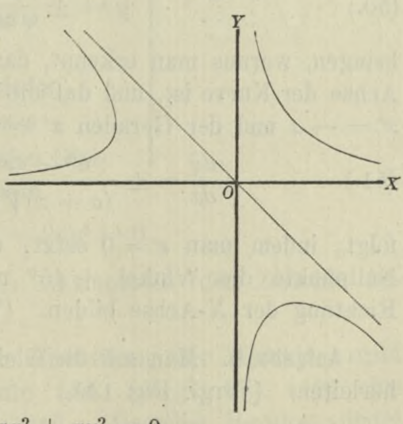
$$(44.)\qquad y' = +1,\quad y' = -1,\quad x' = 0.$$

**Aufgabe 7.** Man soll die Asymptoten der Kurve

$$(45.)\qquad xy^2 + x^2y - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 147.)

Fig. 147.




**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Aufgaben findet man hier drei Asymptoten mit den Gleichungen

$$(46.)\qquad \begin{cases} y' = 0,\quad y' = -x', \\ x' = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 8.** Man soll die Asymptoten der Kurve

$$(47.)\qquad x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 148.)

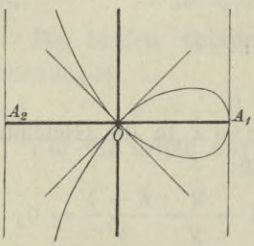
**Auflösung.** Hier werden zwei Asymptoten imaginär, weil aus der Gleichung

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = \lim\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0$$

folgt, daß

$$m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty$$

Fig. 148.




wird. Die dritte Asymptote ist reell und steht auf der $X$-Achse senkrecht. Dabei findet man aus Gleichung (47.), indem man $x = \lambda$ setzt,

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - a\lambda^2 + ay^2 = 0,$$

oder

$$\lambda + a + \frac{\lambda^3 - a\lambda^2}{y^2} = 0.$$

Dies gibt für $\lim y = \infty$

(48.) $$\lambda = -a;$$

die einzige reelle Asymptote hat die Gleichung

(49.) $$x' + a = 0.$$

Die Gleichung (47.) kann man auf die Form

(50.) $$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x}$$

bringen, woraus man erkennt, daß die $X$-Achse eine Symmetrie-Achse der Kurve ist, und daß die Kurve zwischen der Asymptote $x' = -a$ und der Geraden $x' = +a$ liegt. Aus

(51.) $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 - ax - x^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{tg}\alpha$$

folgt, indem man $x = 0$ setzt, daß die beiden Tangenten im Nullpunkte die Winkel $+45^0$ und $-45^0$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bilden. (Vergl. Fig. 148.)

**Aufgabe 9.** Man soll die Gleichung der *Zissoide* des *Diokles* herleiten. (Vergl. Fig. 149.)

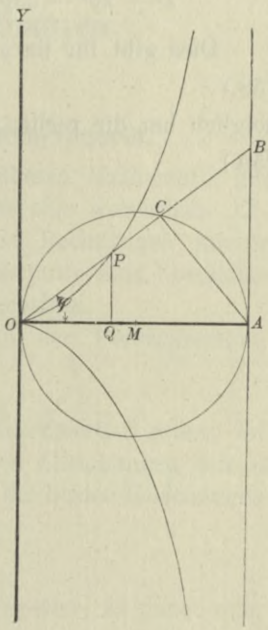
**Auflösung.** Die Zissoide des Diokles entsteht, indem man an einen Kreis mit dem Halbmesser $a$ zwei parallele Tangenten mit den Berührungspunkten $O$ und $A$ legt, von $O$ aus eine beliebige Sekante zieht, welche den Kreis zum zweiten Male im Punkte $C$ und die andere Tangente im Punkte $B$ schneiden möge, und von $B$ aus die Sehne $OC$ rückwärts auf der Sekante abträgt, so daß

$$PB = OC$$

wird, dann ist $P$ ein Punkt der Zissoide.

Bezeichnet man den Winkel $AOP$ mit $\varphi$ und die Strecke $OP$ mit $r$, so findet man aus den rechtwinkligen Dreiecken $OAB$ und $OCA$

Fig. 149.




$$(52.)\quad OB = \frac{2a}{\cos\varphi}, \quad OC = 2a\cos\varphi,$$

also

$$(53.)\quad OP = r = OB - OC$$

$$= \frac{2a}{\cos\varphi}(1 - \cos^2\varphi),$$

oder

$$(53a.)\quad r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Daraus folgt, da

$$OQ = r\cos\varphi, \quad QP = r\sin\varphi$$

ist,

$$(54.)\quad x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}.$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen $\varphi$ eliminiert, erhält man

$$(55.)\quad x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0.$$

**Aufgabe 10.** Man soll die Asymptoten der Zissoide bestimmen.

**Auflösung.** Schon aus der Entstehung der Zissoide ergibt sich, daß die Kreis-Tangente $AB$ (vergl. Fig. 149) eine Asymptote der Zissoide sein muß. Dasselbe Resultat findet man auch aus der Rechnung. Es ist nämlich

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0, \tag{56.}$$

also

$$m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty, \tag{57.}$$

d. h. zwei Asymptoten sind imaginär, nur die dritte ist reell und steht auf der $X$-Achse senkrecht. Dabei findet man, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung (55.) einsetzt,

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - 2ay^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda - 2a + \frac{\lambda^3}{y^2} = 0.$$

Dies gibt für $\lim y = \infty$

$$\lambda = 2a; \tag{58.}$$

folglich hat die reelle Asymptote die Gleichung

$$x' = 2a. \tag{59.}$$

# XVII. Abschnitt.

# Theorie der Determinanten.

## § 127.

## Einleitung in die Determinanten-Theorie.

Für viele Untersuchungen in der höheren Mathematik gewährt die Anwendung der Determinanten eine wesentliche Erleichterung, einerseits dadurch, daß die Rechnungen kürzer werden, andererseits dadurch, daß die Resultate eine übersichtlichere und leichter zu merkende Form erhalten.

Deshalb soll hier ein kurzer Abriß der Determinanten-Theorie eingeschaltet werden.

Auf die Ausdrücke, welche man Determinanten nennt, ist man durch die Auflösung von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten geführt worden. Sind z. B. die beiden Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

mit den beiden Unbekannten $x_1$ und $x_2$ gegeben, so findet man bekanntlich durch Elimination

$$(2.)\qquad x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{-c_1 a_{21} + c_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Den gemeinschaftlichen Nenner dieser beiden Ausdrücke, nämlich die Größe

$$(3.)\qquad \varDelta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

nennt man „die *Determinante*“ der Koeffizienten der beiden Gleichungen (1.). Die Determinante wird daher auch so geschrieben, daß man die Koeffizienten in derselben Reihenfolge wie in den gegebenen Gleichungen aufschreibt und zwischen zwei senkrechte Striche einschließt.

Sind *drei* lineare Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = c_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = c_2, \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + x_{33}\,x_3 = c_3 \end{cases}$$

gegeben, so findet man bei der Auflösung für die drei Unbekannten $x_1$, $x_2$, $x_3$ Werte, welche den gemeinschaftlichen Nenner

$$(5.)\quad \varDelta = a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{12}(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$$

haben. Diesen Nenner, welcher eine „*Determinante dritter Ordnung*“ genannt wird, schreibt man wieder in der Form

$$(5\text{a.})\quad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

wobei die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen zwischen zwei senkrechte Striche eingeschlossen sind. Aus Gleichung (5.) erkennt man, daß

$$\varDelta = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha}\,a_{2\beta}\,a_{3\gamma}$$

ist, wobei sich die Summation über alle Permutationsformen $\alpha\;\beta\;\gamma$ der Zahlen 1 2 3 erstreckt, und wobei das Vorzeichen $(-1)^\lambda$ gleich $+1$ oder $-1$ ist, je nachdem die Permutationsform $\alpha\;\beta\;\gamma$ aus 1 2 3 durch eine *gerade* oder *ungerade* Anzahl von Vertauschungen von je 2 Zahlen hervorgeht. Demnach sind die Glieder

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33},\quad a_{12}\,a_{23}\,a_{31},\quad a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

mit dem Vorzeichen $+$ zu nehmen, weil die Reihenfolge der zweiten Indizes

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2

bezw. durch 0, 2, 2

solche Vertauschungen von je 2 Zahlen aus der Permutationsform 1 2 3 hervorgehen. Vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2 miteinander, so erhält man 2 1 3, und vertauscht man dann die Zahlen 1 und 3 miteinander, so erhält man 2 3 1. Vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1, und vertauscht man dann die Zahlen 1 und 2, so erhält man 3 1 2.

Die Glieder

$$a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\,, \quad a_{12}\, a_{21}\, a_{33}\,, \quad a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

dagegen sind mit dem Vorzeichen — zu nehmen, weil die Permutationsformen

$$1\ 3\ 2, \quad 2\ 1\ 3, \quad 3\ 2\ 1$$

aus 1 2 3 durch eine einzige solche Vertauschung hervorgehen; vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 2 und 3, so erhält man 1 3 2, vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2, so erhält man 2 1 3, und vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1.

In ähnlicher Weise kann man „*Determinanten höherer Ordnung*“ erklären. Der Erklärung mögen aber einige Sätze aus der Permutationslehre vorangeschickt werden.

## § 128.

## Einige Sätze aus der Permutationslehre.

**Erklärung.** Das Permutieren besteht in dem Aufsuchen aller Stellungen, welche $n$ Elemente $a, b, c, \ldots k, l$ einnehmen können. Jede solche Stellung nennt man „eine *Permutationsform*“.

Die Anzahl der Permutationsformen bei 2 Elementen $a$ und $b$ ist $1 \,.\, 2 = 2!$, nämlich $a\,b$ und $b\,a$. Tritt ein drittes Element $c$ hinzu, so kann man aus jeder dieser beiden Permutationsformen drei bilden, z. B. aus $b\,a$ die drei Formen

$$c\,b\,a, \quad b\,c\,a, \quad b\,a\,c,$$

indem man $c$ an die erste, die zweite und die dritte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei 3 Elementen $a, b, c$ ist daher gleich $1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 3!$.

Tritt ein viertes Element $d$ hinzu, so kann man aus jeder dieser $3!$ Permutationsformen vier bilden, z. B. aus $b\,a\,c$ die vier Formen

$$d\,b\,a\,c, \quad b\,d\,a\,c, \quad b\,a\,d\,c, \quad b\,a\,c\,d,$$

indem man $d$ an die erste, zweite, dritte und vierte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei 4 Elementen ist daher gleich $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 4!$.

Indem man so fortfährt, findet man

**Satz 1.** *Die Anzahl der Permutationsformen bei $n$ Elementen ist* $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$.

Vertauscht man nur zwei Elemente miteinander, so nennt man diese Vertauschung eine „*Transposition*".

**Satz 2.** *Von zwei beliebigen Permutationsformen $P_1$ und $P_2$ kann die eine aus der anderen durch fortgesetzte Transposition hergeleitet werden.*

**Beispiele.** Die Permutationsform $e\,a\,b\,d\,c$ kann durch 3 Transpositionen in die Form $a\,b\,c\,d\,e$ übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

$$e\,a\,b\,d\,c, \quad a\,e\,b\,d\,c, \quad a\,b\,e\,d\,c, \quad a\,b\,c\,d\,e.$$

Die Permutationsform $f\,g\,a\,c\,d\,e\,b$ kann durch 5 Transpositionen in die Form $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$ übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

$$f\,g\,a\,c\,d\,e\,b, \quad a\,g\,f\,c\,d\,e\,b, \quad a\,b\,f\,c\,d\,e\,g,$$
$$a\,b\,c\,f\,d\,e\,g, \quad a\,b\,c\,d\,f\,e\,g, \quad a\,b\,c\,d\,e\,f\,g.$$

Aus diesen Beispielen erkennt man das Verfahren, das ganz allgemein zum Ziele führt. Es ist aber zu beachten, daß man eine Permutationsform $P_1$ in eine andere $P_2$ in mannigfacher Weise durch Transpositionen überführen kann, und daß die Anzahl der verwendeten Transpositionen noch unendlich viele Werte besitzt. Dabei gilt aber der folgende

**Satz 3.** *Kann man $P_1$ in $P_2$ überführen, das eine Mal durch $\lambda$, das andere Mal durch $\mu$ Transpositionen, so ist $\lambda - \mu$ stets eine gerade Zahl.*

**Beweis.** Es sei

$$\begin{aligned}(1.)\qquad F = (b-a)\,(c-a)\,(d-a) \ldots (k-a)\,(l-a)&\\ \text{mal } (c-b)\,(d-b) \ldots (k-b)\,(l-b)&\\ \text{mal } (d-c) \ldots (k-c)\,(l-c)&\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \text{mal } (l-k).&\end{aligned}$$

Bei der Bildung dieses Produktes hat man jedes Element von allen folgenden subtrahiert und die so entstandenen Differenzen miteinander multipliziert. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Größe $F$ ändert, wenn man zwei Elemente, z. B. $q$ und $s$ miteinander vertauscht. Alle Differenzen, in denen $q$ und $s$ gar nicht vorkommen, bleiben unverändert. Ist ferner $p$ irgend ein Element, das den beiden Elementen $q$ und $s$ *vorangeht*, so geht bei der Vertauschung von $q$ mit $s$ das Produkt $(q-p)(s-p)$ in $(s-p)(q-p)$ über und behält denselben Wert. Steht das Element $r$ *zwischen* $q$ und $s$, so geht das Produkt $(r-q)(s-r)$ in $(r-s)(q-r)$ über und behält gleichfalls denselben Wert. *Folgt* endlich das Element $t$ den beiden Elementen $q$ und $s$, so geht das Produkt $(t-q)(t-s)$ in $(t-s)(t-q)$ über und behält auch denselben Wert. Nur durch den Faktor $s-q$, welcher bei der Vertauschung von $q$ mit $s$ in $q-s$ übergeht, wird das Vorzeichen von $F$ geändert, während der absolute Betrag von $F$ derselbe bleibt.

*Wenn man also zwei Elemente miteinander vertauscht, so ändert die Größe $F$ nur das Vorzeichen.*

Ebenso kann man zeigen, daß $F$ bei jeder weiteren Transposition zweier Elemente nur das Vorzeichen ändert. Entsteht $F_\lambda$ aus $F$ durch $\lambda$ Transpositionen, so ist daher

$$(2.)\qquad F_\lambda = (-1)^\lambda F.$$

Bezeichnet man also die Werte von $F$, welche den Permutationsformen $P_1$ und $P_2$ entsprechen, mit $F_1$ und $F_2$, und geht $P_1$ in $P_2$ über, das eine Mal durch $\lambda$, das andere Mal durch $\mu$ Transpositionen, so gelten die beiden Gleichungen

$$(3.)\qquad F_2 = (-1)^\lambda F_1 \quad \text{und} \quad F_2 = (-1)^\mu F_1;$$

daraus folgt

$$(4.)\qquad (-1)^\lambda = (-1)^\mu, \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu \pm 2w,$$

wobei $2w$ eine beliebige gerade Zahl ist.

Um zu bezeichnen, daß die Permutationsform $P$ (z. B. $1\,2\,3\ldots n$) in $P_1$ (oder $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$) durch $\lambda$ Transpositionen übergeführt wird, schreibt man

$$(5.)\qquad \lambda = \binom{P}{P_1} = \binom{1\;2\;3\ldots n}{\alpha\;\beta\;\gamma\ldots\nu}.$$

**Satz 4.** *Geht $P$ in $P_1$ über durch $\lambda$, und geht $P_1$ in $P_2$ über durch $\mu$ Transpositionen, so geht $P$ in $P_2$ durch $\lambda + \mu \pm 2w$ Transpositionen über. Ist also*

$$\lambda = \binom{P}{P_1}, \quad \mu = \binom{P_1}{P_2}, \tag{6.}$$

*so wird*

$$\binom{P}{P_2} = \binom{P}{P_1} + \binom{P_1}{P_2} \pm 2w = \lambda + \mu \pm 2w. \tag{7.}$$

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß $P$ in $P_2$ übergeht, wenn man zuerst $P$ in $P_1$ und dann $P_1$ in $P_2$ überführt.

Der Satz läßt sich ohne weiteres verallgemeinern; es ist z. B.

$$\binom{P}{P_3} = \binom{P}{P_1} + \binom{P_1}{P_2} + \binom{P_2}{P_3} \pm 2w. \tag{8.}$$

**Satz 5.** *Die $n!$ Permutationsformen von $n$ Elementen lassen sich durch die Transpositionen zweier Elemente paarweise gruppieren.*

**Beweis.** Durch die Transposition zweier Elemente, z. B. der beiden Elemente $a$ und $b$, geht die beliebige Permutationsform $P_1$ in $P_2$ über, wobei $P_1$ und $P_2$ voneinander verschieden sind. Ist nun die Permutationsform $Q_1$ von $P_1$ und $P_2$ verschieden, so geht $Q_1$ durch die Vertauschung von $a$ mit $b$ in $Q_2$ über, wobei $Q_2$ von $Q_1$ und auch von $P_1$ und $P_2$ verschieden ist. Wäre nämlich $Q_2$ identisch mit $P_1$ (bezw. mit $P_2$), so müßte $Q_1$ identisch sein mit $P_2$ (bezw. mit $P_1$). Ist ferner die Permutationsform $R_1$ von $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ verschieden, so geht $R_1$ durch die Vertauschung von $a$ mit $b$ in $R_2$ über. wobei $R_2$ von $R_1$ und auch von $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ verschieden ist.

So kann man fortfahren, bis die sämtlichen Permutationsformen erschöpft sind

## § 129.

## Bildung einer Determinante $n^{\text{ter}}$ Ordnung aus $n^2$ Elementen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 202.)

Eine „*Determinante* $n^{\text{ter}}$ *Ordnung*“ möge durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

erklärt werden. Die $n^2$ Größen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ heißen „die *Elemente* der Determinante“; die Determinante $\Delta$ selbst ist eine Summe, bei der jedes Glied das Produkt von $n$ Elementen ist. Dabei enthält ein solches Produkt aus jeder *Zeile* (Horizontalreihe) und aus jeder *Kolonne* (Vertikalreihe) *ein und nur ein* Element.

Der Exponent $\lambda$ ist die Anzahl der Transpositionen, durch welche die Permutationsform $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu$ in die Permutationsform $1\,2\,3 \ldots n$ übergeführt werden kann, also

$$(2.)\qquad \lambda = \binom{\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu}{1\,2\,3 \ldots n}.$$

So ist z. B. für die Permutationsform 3 1 4 2 diese Zahl $\lambda$ gleich 3, und zwar erhält man nacheinander die Permutationsformen

3 1 4 2, 1 3 4 2, 1 2 4 3, 1 2 3 4.

Für die Permutationsform 3 2 5 1 4 ist $\lambda$ wieder gleich 3, und zwar erhält man nacheinander die Permutationsformen

3 2 5 1 4, 1 2 5 3 4, 1 2 3 5 4, 1 2 3 4 5.

Die Summation erstreckt sich über alle Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu$ der Zahlen $1\,2\,3 \ldots n$, folglich ist die Anzahl der Glieder gleich $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$.

Dies kann man auch so zeigen. Nimmt man ein beliebiges Element der ersten Zeile $a_{1\alpha}$, so gibt es $n$ mögliche Fälle, weil $\alpha$ dabei $n$ Werte haben darf. Da $\beta$ von $\alpha$ verschieden sein muß, so gibt es bei der Auswahl von $a_{2\beta}$ aus den Elementen der zweiten Zeile nur noch $n-1$ mögliche Fälle. Deshalb gibt es bei der

Auswahl von $a_{1\alpha}a_{2\beta}$ im ganzen $n(n-1)$ mögliche Fälle. Ebenso erkennt man, daß für die Auswahl von $a_{3\gamma}$ aus den Elementen der dritten Zeile nur $n-2$ mögliche Fälle und deshalb für die Auswahl von $a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}$ im ganzen $n(n-1)(n-2)$ mögliche Fälle vorhanden sind.

Indem man so weiter fortfährt, findet man das oben angegebene Resultat.

## § 130.

## Eigenschaften der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 203 bis 206.)

**Satz 1.** *Zwei Glieder* (oder Terme)

$$T_1 = (-1)^{\lambda_1} a_{1\alpha_1} a_{2\beta_1} a_{3\gamma_1} \ldots a_{n\nu_1} \tag{1.}$$

*und*

$$T_2 = (-1)^{\lambda_2} a_{1\alpha_2} a_{2\beta_2} a_{3\gamma_2} \ldots a_{n\nu_2} \tag{2.}$$

*haben gleiches oder entgegengesetztes Zeichen, je nachdem die Transpositionszahl*

$$\varrho = \binom{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \nu_1}{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots \nu_2} \tag{3.}$$

*gerade oder ungerade ist.*

**Beweis.** Es ist

$$\lambda_1 = \binom{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \nu_1}{1\ 2\ 3 \ldots n},$$

$$\lambda_2 = \binom{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots \nu_2}{1\ 2\ 3 \ldots n} = \binom{1\ 2\ 3 \ldots n}{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots \nu_2},$$

folglich ist

$$\varrho = \lambda_1 + \lambda_2 \pm 2w. \tag{3a.}$$

Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beide gerade oder beide ungerade, haben also $T_1$ und $T_2$ gleiches Zeichen, so ist $\varrho$ gerade. Wenn dagegen von den beiden Zahlen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die eine gerade und die andere ungerade ist, wenn also $T_1$ und $T_2$ entgegengesetztes Zeichen haben, so ist $\varrho$ ungerade.

**Satz 2.** *Die Determinante $\Delta$ hat ebenso viele positive wie negative Glieder.*

**Beweis.** Wenn die beiden Permutationsformen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\nu_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots\nu_2$ durch eine einzige Transposition in einander übergehen, wenn also $\varrho = 1$ ist, so haben nach Satz 1 die Glieder $T_1$ und $T_2$ entgegengesetztes Vorzeichen. Da man nun durch *eine* Transposition alle Permutationsformen paarweise gruppieren kann, so kann man auch die sämtlichen Glieder der Determinante paarweise gruppieren, so daß bei jedem solchen Paare das eine Glied positiv und das andere negativ ist.

Ordnet man in

$$T = (-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} \tag{4.}$$

die Faktoren anders, so geht $T$ über in

$$T = (-1)^\lambda a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \ldots a_{l\nu_1}. \tag{4a.}$$

Dabei folgt aus

$$\mu = \begin{pmatrix} a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} & \ldots a_{n\nu} \\ a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} & \ldots a_{l\nu_1} \end{pmatrix},$$

daß auch

$$\mu = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ f\ g\ h \ldots l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots \nu \\ \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \tag{5.}$$

ist. Außerdem ist

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu \\ 1\ 2\ 3 \ldots n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} f\ g\ h \ldots l \\ 1\ 2\ 3 \ldots n \end{pmatrix}. \tag{6.}$$

Deshalb erhält man

$$\begin{aligned} \varrho &= \begin{pmatrix} f\ g\ h\ \ldots l \\ \alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f\ g\ h \ldots l \\ 1\ 2\ 3 \ldots n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots \nu \\ \alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \pm 2w, \end{aligned} \tag{7.}$$

oder

$$\varrho = \mu + \lambda + \mu \pm 2w = \lambda \pm 2v, \tag{7a.}$$

$$(-1)^\varrho = (-1)^\lambda. \tag{8.}$$

Dies gibt

**Satz 3.** *Sind in dem Gliede $T$ die Faktoren beliebig geordnet, so ist das Vorzeichen von $T$ gleich $(-1)^\varrho$, wobei $\varrho$ die Transpositionszahl zwischen den ersten und den zweiten Indizes ist.*

Jetzt möge die Determinante $\varDelta_1$ aus

$$(9.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, indem man die Zeilen beliebig miteinander und ebenso die Kolonnen beliebig miteinander vertauscht, d. h. es sei

$$(10.)\qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & a_{f\gamma} & \dots & a_{f\nu} \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & a_{g\gamma} & \dots & a_{g\nu} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & a_{h\gamma} & \dots & a_{h\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & \dots & a_{l\nu} \end{vmatrix},$$

wobei $f\,g\,h \dots l$ und $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ irgend zwei Permutationsformen der Zahlen $1\,2\,3 \dots n$ sind.

Die beiden Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta_1$ enthalten dann, abgesehen vom Vorzeichen, genau dieselben Glieder; denn ein beliebiges Glied von $\varDelta_1$ ist

$$(11.)\qquad T_1 = (-1)^\mu a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei

$$(12.)\qquad \mu = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \nu_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \nu \end{pmatrix}$$

ist. Das entsprechende Glied in $\varDelta$ heißt

$$(13.)\qquad T = (-1)^\varrho a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei nach Satz 3

$$(14.)\qquad \varrho = \begin{pmatrix} f & g & h & \dots & l \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \nu_1 \end{pmatrix}$$

die Transpositionszahl zwischen den ersten und zweiten Indizes ist. Bezeichnet man jetzt

$$\begin{pmatrix} f\,g\,h \ldots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu \end{pmatrix}$$

mit $\lambda$, so wird

$$(15.)\qquad \mu = \begin{pmatrix} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \ldots \nu_1 \\ f\;g\;h \ldots l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\,g\,h \ldots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu \end{pmatrix} \pm 2w = \varrho + \lambda \pm 2w,$$

folglich ist

$$(16.)\qquad T_1 = (-1)^\lambda T,$$

und da diese Gleichung für alle Glieder der Determinanten $\varDelta_1$ und $\varDelta$ gilt, so erhält man

$$(17.)\qquad \varDelta_1 = (-1)^\lambda \varDelta.$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

**Satz 4.** *Vertauscht man in einer Determinante $\varDelta$ die Zeilen beliebig miteinander und die Kolonnen beliebig miteinander, so geht die Determinante in sich selber über, multipliziert mit $(-1)^\lambda$, wobei $\lambda$ die Transpositionszahl zwischen der neuen Aufeinanderfolge $f\,g\,h \ldots l$ der Zeilen und der neuen Aufeinanderfolge $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu$ der Kolonnen ist.*

Hieraus ergibt sich als besonderer Fall

**Satz 5.** *Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Kolonnen miteinander vertauscht.*

Hat eine Determinante $\varDelta$ zwei identische Zeilen oder zwei identische Kolonnen, so ändert sich $\varDelta$ nicht, wenn man diese beiden identischen Reihen miteinander vertauscht. Andererseits erhält aber nach Satz 5 die Determinante bei dieser Vertauschung das entgegengesetzte Vorzeichen, folglich wird

$$(18.)\qquad \varDelta = -\varDelta, \quad \text{oder} \quad 2\varDelta = 0.$$

Dies gibt

**Satz 6.** *Eine Determinante mit zwei identischen Zeilen oder mit zwei identischen Kolonnen ist gleich Null.*

**Satz 7.** *Eine Determinante ändert ihren Wert gar nicht, wenn man die Zeilen zu Kolonnen und die Kolonnen zu Zeilen macht.*

**Beweis.** Die Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen entspricht einer Vertauschung der ersten Indizes mit den zweiten, so daß die Determinante

$$\Delta = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} \tag{19.}$$

bei dieser Vertauschung übergeht in

$$\Delta_1 = \Sigma(-1)^\lambda a_{\alpha 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \ldots a_{\nu n}. \tag{20.}$$

Die beiden Determinanten $\Delta$ und $\Delta_1$ enthalten aber genau dieselben Glieder, nur sind die Faktoren der einzelnen Glieder in $\Delta$ nach den ersten und in $\Delta_1$ nach den zweiten Indizes geordnet.

Aus diesem letzten Satze erkennt man, daß jeder Satz, welcher sich auf die *Zeilen* einer Determinante bezieht, in gleicher Weise auch von den *Kolonnen* einer Determinante gilt. Um beide Fälle zusammenzufassen, möge in den folgenden Paragraphen der Ausdruck „*Reihen*" ebenso für die *Zeilen* wie für die *Kolonnen* gebraucht werden.

## § 131.
## Zerlegung der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 207 bis 211.)

Zieht man aus der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} \tag{1.}$$

alle Glieder heraus, die mit $a_{11}$ multipliziert sind, so erhält man

$$\Sigma(-1)^\lambda a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} = a_{11} \Sigma(-1)^\lambda a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}, \tag{2.}$$

wo sich die Summation auf alle Permutationsformen $\beta\, \gamma \ldots \nu$ der Zahlen $2\ 3 \ldots n$ erstreckt, während $\lambda$ die zugehörige Transpositionszahl ist. Der Faktor von $a_{11}$ in Gleichung (2.) — er heiße $\alpha_{11}$ — ist daher

$$(3.)\qquad \alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix};$$

er ist also eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus $\varDelta$ entsteht, indem man die erste Zeile und die erste Kolonne fortläßt.

Vertauscht man in $\varDelta$ die erste Zeile mit der zweiten, so wird

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = -\varDelta.$$

Bei dieser Determinante wird in gleicher Weise wie vorhin der Faktor von $a_{21}$ eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch Fortlassen der ersten Zeile und ersten Kolonne aus der vorstehenden Determinante hervorgeht; folglich ist der Faktor $\alpha_{21}$ von $a_{21}$ in der ursprünglichen Determinante $\varDelta$

$$(5.)\qquad \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

und geht aus $\varDelta$ hervor, indem man die *zweite Zeile* und die erste Kolonne fortläßt und das Zeichen

$$(6.)\qquad -1 = (-1)^{2+1}$$

davorsetzt.

In ähnlicher Weise findet man den Faktor von $a_{31}, a_{41}, \ldots$, allgemein den Faktor $\alpha_{f1}$ von $a_{f1}$. Vertauscht man nämlich die $f^{te}$ Zeile mit der $(f-1)^{\text{ten}}$, dann mit der $(f-2)^{\text{ten}}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Zeilen (bezw. der ersten Indizes)

$$f,\ 1,\ 2,\ \ldots f-1,\ f+1,\ \ldots n$$

geworden ist, so geht bei diesen $f-1$ Vertauschungen $\varDelta$ in $(-1)^{f-1}\varDelta$ über, und das Element $a_{f1}$ steht an erster Stelle. Daraus folgt, daß der Factor von $a_{f1}$ in $\varDelta$, nämlich

$$(7.)\qquad \alpha_{f1} = (-1)^{f-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{f-1,2} & a_{f-1,3} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,2} & a_{f+1,3} & \dots & a_{f+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus $\varDelta$ hervorgeht, indem man die $f^{\text{te}}$ Zeile und die erste Kolonne fortläßt und das Vorzeichen

$$(8.)\qquad (-1)^{f-1} = (-1)^{f+1}$$

hinzugefügt.

Vertauscht man jetzt in $\varDelta$ die $r^{\text{te}}$ Kolonne mit der $(r-1)^{\text{ten}}$, dann mit der $(r-2)^{\text{ten}}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Kolonnen (bezw. der zweiten Indizes)

$$r,\ 1,\ 2, \dots r-1,\quad r+1, \dots n$$

geworden ist, so geht $\varDelta$ in $(-1)^{r-1}\varDelta$ über; jetzt kann man den Faktor $\alpha_{fr}$ von $a_{fr}$ in gleicher Weise finden, wie vorhin den Faktor $\alpha_{f1}$ von $a_{f1}$. Daraus folgt dann, daß

$$(9.)\qquad \alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{f-1,1} & \dots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \dots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \dots & a_{f+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus $\varDelta$ entsteht, indem man die $f^{\text{te}}$ Zeile und die $r^{\text{te}}$ Kolonne fort läßt und den Faktor $(-1)^{f+r}$ hinzufügt.

Diese Faktoren $\alpha_{fr}$ heißen „*Unterdeterminanten* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung von* $\varDelta$" und können auch noch auf die folgende Form gebracht werden. Durch $f-1$ Vertauschungen können die Zeilen (bezw. die ersten Indizes)

$$1,\ 2,\ 3, \dots f-1,\quad f+1,\quad f+2, \dots n$$

in die Reihenfolge

$$f+1,\ 1,\ 2,\ 3, \dots f-1,\ f+2, \dots n$$

gebracht werden. Durch weitere $f-1$ Vertauschungen erhält man die Reihenfolge

$$f+1,\quad f+2,\ 1,\ 2, \dots f-1,\quad f+3, \dots n.$$

So kann man fortfahren, bis man durch $(n-f)(f-1)$ Vertauschungen die „*zyklische*" Reihenfolge

$$f+1,\ f+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots f-1$$

erhält. Ebenso gelangt man durch $(n-r)(r-1)$ Vertauschungen der Kolonnen (bezw. der zweiten Indizes) zu der *zyklischen* Reihenfolge

$$r+1,\ r+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots r-1.$$

Wegen dieser Vertauschungen ist $\alpha_{fr}$ mit

$$(-1)^{(n-f)(f-1)+(n-r)(r-1)} = (-1)^{n(f+r)-2n-f(f-1)-r(r-1)}$$

zu multiplizieren. Da noch $2n$, $f(f-1)$ und $r(r-1)$ gerade Zahlen sind, so geht dieser Faktor in

$$(-1)^{n(f+r)}$$

über. Deshalb wird das Vorzeichen von $\alpha_{fr}$

$$(-1)^{n(f+r)+f+r} = (-1)^{(n+1)(f+r)}.$$

Dies gibt

$$(10.)\qquad \alpha_{fr} = (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,\, r+1} & a_{f+1,\, r+2} & \ldots & a_{f+1,\, r-1} \\ a_{f+2,\, r+1} & a_{f+2,\, r+2} & \ldots & a_{f+2,\, r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{f-1,\, r+1} & a_{f-1,\, r+2} & \ldots & a_{f-1,\, r-1} \end{vmatrix}.$$

Ist $n$ *ungerade*, also $n+1$ *gerade*, so sind daher alle diese Unterdeterminanten mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen.

Beachtet man, daß jedes Glied der Determinante $\Delta$ *ein und nur ein* Element der ersten Kolonne enthält, so findet man, daß

$$(11.)\qquad \Delta = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

sein muß; denn es sind erstens alle Glieder von $\Delta$ durch die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (11.) erschöpft, weil jedes Glied ein Element der ersten Kolonne als Faktor enthalten muß, und zweitens kommt in dieser Summe jedes Glied nur einmal vor, weil kein Glied *zwei* Elemente der ersten Kolonne als Faktoren enthalten kann.

Ebenso kann man die Determinante $\Delta$ nach den Elementen der $r^{\text{ten}}$ Kolonne zerlegen und erhält

$$(12.)\qquad \Delta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + a_{3r}\alpha_{3r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr}.$$

**Beispiel.**

Es sei $n = 3$, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

dann ist

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die *zyklische* Anordnung der Unterdeterminanten benutzt,

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Da sich $\Delta$ nicht ändert, wenn man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, so findet man in gleicher Weise eine Zerlegung von $\Delta$ nach den Elementen einer beliebigen *Zeile* und zwar wird

(13.) $$\Delta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + a_{f3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{fn}\alpha_{fn}.$$

Ordnet man z. B. für $n = 3$ die Determinante nach den Elementen der zweiten Zeile, so erhält man

$$\Delta = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

oder bei *zyklischer* Anordnung

$$\Delta = a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Ist $s$ von $r$ verschieden, und vertauscht man in Gleichung (12.) die Elemente $a_{1r}, a_{2r}, \ldots a_{nr}$ mit $a_{1s}, a_{2s}, \ldots a_{ns}$, so erhält man

(14.) $$\Delta_1 = a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr},$$

wo $\Delta_1$ gleichfalls eine Determinante ist, welche aus $\Delta$ hervorgeht, indem man die Elemente der $r^{\text{ten}}$ Kolonne durch die Elemente der $s^{\text{ten}}$ Kolonne ersetzt. Dadurch wird aber $\Delta_1$ eine Determinante, in welcher die Elemente der $r^{\text{ten}}$ und der $s^{\text{ten}}$

Kolonne identisch sind. Deshalb wird $\varDelta_1$ nach Satz 6 in § 130 gleich Null, und Gleichung (14.) geht über in

$$\text{(14a.)}\qquad a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0,$$

wenn $r \gtreqless s$ ist.

Ist ferner $g$ von $f$ verschieden, und vertauscht man in Gleichung (13.) die Elemente $a_{f1}, a_{f2}, \ldots a_{fn}$ mit $a_{g1}, a_{g2}, \ldots a_{gn}$, so erhält man

$$\text{(15.)}\qquad \varDelta_2 = a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn},$$

wo $\varDelta_2$ gleichfalls eine Determinante ist, welche aus $\varDelta$ hervorgeht, indem man die Elemente der $f^{\text{ten}}$ Zeile durch die Elemente der $g^{\text{ten}}$ Zeile ersetzt. Dadurch wird aber $\varDelta_2$ eine Determinante, in welcher die Elemente der $f^{\text{ten}}$ und der $g^{\text{ten}}$ Zeile identisch sind. Deshalb wird $\varDelta_2$ nach Satz 6 in § 130 gleich Null, und Gleichung (15.) geht über in

$$\text{(15a.)}\qquad a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0,$$

wenn $f \gtreqless g$ ist.

## § 132.

## Anwendung auf die Auflösung von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 212.)

Sind $n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten:

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

gegeben, so findet man $x_1$, indem man die erste Gleichung mit $\alpha_{11}$, die zweite Gleichung mit $\alpha_{21}, \ldots$ die $n^{\text{te}}$ Gleichung mit $\alpha_{n1}$ multipliziert und alle Gleichungen addiert. Der Koeffizient von $x_1$ wird dann nach Formel Nr. 208 der Tabelle (für $r = 1$)

$$\text{(2.)}\qquad a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1} = \varDelta,$$

während der Koeffizient von $x_s$, wenn $s$ von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 210 der Tabelle (für $r = 1$) gleich

$$(3.) \qquad a_{1s}\,\alpha_{11} + a_{2s}\,\alpha_{21} + \cdots + a_{ns}\,\alpha_{n1} = 0$$

ist. Man erhält daher bei der Addition

$$(4.) \qquad \varDelta \,.\, x_1 = c_1\,\alpha_{11} + c_2\,\alpha_{21} + \cdots + c_n\,\alpha_{n1},$$

eine Gleichung, aus der sich $x_1$ unmittelbar ergibt, wenn man auf beiden Seiten durch $\varDelta$ dividiert.

Ebenso leicht findet man den Wert von $x_r$, indem man die Gleichungen (1.) bezw. mit

$$\alpha_{1r},\ \alpha_{2r}, \ldots \alpha_{nr}$$

multipliziert und dann addiert. Ist $s$ von $r$ verschieden, so wird bei der Addition der Koeffizient von $x_s$ nach Formel Nr. 210 der Tabelle

$$(5.) \qquad a_{1s}\,\alpha_{1r} + a_{2s}\,\alpha_{2r} + \cdots + a_{ns}\,\alpha_{nr} = 0;$$

nur der Koeffizient von $x_r$ wird nach Formel Nr. 208 der Tabelle

$$(6.) \qquad a_{1r}\,\alpha_{1r} + a_{2r}\,\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\,\alpha_{nr} = \varDelta,$$

folglich erhält man bei der Addition

$$(7.) \qquad \varDelta \,.\, x_r = c_1\,\alpha_{1r} + c_2\,\alpha_{2r} + \cdots + c_n\,\alpha_{nr}.$$

Wenn man in der Determinante

$$\varDelta = a_{1r}\,\alpha_{1r} + a_{2r}\,\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\,\alpha_{nr}$$

die Elemente der $r^{\text{ten}}$ Kolonne $a_{1r}, a_{2r}, \ldots a_{nr}$ durch die Größen $c_1, c_2, \ldots c_n$ ersetzt, so erhält man

$$c_1\,\alpha_{1r} + c_2\,\alpha_{2r} + \cdots + c_n\,\alpha_{nr};$$

deshalb kann man Gleichung (7.) auch schreiben, wie folgt:

$$(7\text{a.}) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} . x_r = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,\,r-1}\; c_1\; a_{1,\,r+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2,\,r-1}\; c_2\; a_{2,\,r+1} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{n,\,r-1}\; c_n\; a_{n,\,r+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um $x_r$ selbst zu finden, muß man noch die beiden Seiten der Gleichung (7.) oder (7a.) durch $\varDelta$ dividieren, was nur unter der Voraussetzung geschehen darf, daß $\varDelta$ von Null verschieden ist. Was geschieht, wenn $\varDelta = 0$ ist, möge einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

## § 133.
## Vereinfachungen bei Ausrechnung der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 213 bis 219.)

**Satz 1.** *Wenn alle Elemente einer Reihe bis auf eines $a_{fr}$ verschwinden, so ist die Determinante gleich diesem einen Elemente $a_{fr}$, multipliziert mit der zugehörigen Unterdeterminante $(n-1)^{ter}$ Ordnung $\alpha_{fr}$.*

So ist z. B.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & 0 & C_3 \end{vmatrix} = B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Der Beweis des allgemeinen Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

**Satz 2.** *Eine Determinante kann auf den nächst höheren Grad gebracht werden, indem man eine Zeile und eine Kolonne einschiebt, das den beiden eingeschobenen Reihen gemeinschaftliche Element gleich $\pm 1$ setzt und die übrigen Elemente der einen eingeschobenen Reihe gleich 0 macht. Die übrigen Elemente der anderen eingeschobenen Reihe sind ganz beliebig.*

Es ist z. B.

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei die Größen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ noch ganz beliebig sind.

Der Beweis des Satzes folgt unmittelbar aus der Anwendung von Satz 1. Stehen die beiden eingeschobenen Reihen am Rande der Determinante, wie in dem angegebenen Beispiele, so nennt man das Verfahren „*Rändern der Determinante*“.

**Satz 3.** *Verschwinden alle Elemente auf der einen Seite einer Diagonale, so reduziert sich die Determinante auf das erste bezw. auf das letzte Glied.*

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 D_4. \tag{2.}$$

Der Beweis folgt aus der wiederholten Anwendung von Satz 1.

**Satz 4.** *Haben sämtliche Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, so kann man denselben vor die Determinante setzen.*

Es ist also z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots m a_{1r} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots m a_{2r} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots m a_{nr} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2r} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nr} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.}$$

Der Beweis folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Durch die Anwendung dieses Satzes kann man in vielen Fällen eine Determinante auf eine andere mit kleineren Zahlen reduzieren. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 16 & 7 & 10 \\ 8 & 13 & 25 \end{vmatrix} = 3 . 4 . 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 13 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Satz 5.** *Sind die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe proportional, so ist die Determinante gleich Null.*

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} A_1 & mA_1 & C_1 \\ A_2 & mA_2 & C_2 \\ A_3 & mA_3 & C_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 \\ A_2 & A_2 & C_2 \\ A_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.}$$

Der Beweis des Satzes folgt aus Satz 4 und Formel Nr. 205 der Tabelle.

**Satz 6.** *Sind die Elemente einer Reihe Aggregate von gleich viel Gliedern, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Teilreihen einsetzt.*

Es ist z. B.

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 + B_1, C_1, D_1, \ldots \\ A_2 + B_2, C_2, D_2, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n + B_n, C_n, D_n, \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\, C_1\, D_1 \ldots \\ A_2\, C_2\, D_2 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_n\, C_n\, D_n \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1\, C_1\, D_1 \ldots \\ B_2\, C_2\, D_2 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_n\, C_n\, D_n \ldots \end{vmatrix}.$$

Der Beweis des Satzes folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

**Satz 7.** *Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein beliebiges Vielfaches von den Elementen einer parallelen Reihe addiert.*

Es ist also z. B.

$$(6.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r},\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r},\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + ma_{nr},\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der Beweis folgt aus der Verbindung der Sätze 5 und 6.

In welcher Weise die vorstehenden Sätze benutzt werden können, mögen die folgenden Beispiele zeigen.

1) Es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2) Es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ 0 & x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 & -z_3 \\ -1 & -x_4 & -y_4 & -z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

## § 134.

## Multiplikation der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 220.)

Es sei

(1.) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

wobei

(2.) $$\begin{cases} c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{12}, & c_{12} = a_{11}\,b_{21} + a_{12}\,b_{22}, \\ c_{21} = a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12}, & c_{22} = a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22}, \end{cases}$$

dann soll gezeigt werden, daß

(3.) $$A \,.\, B = C$$

ist. Es wird nämlich nach den Sätzen der vorhergehenden Paragraphen

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{12}, & a_{11}\,b_{21} + a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12}, & a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} \\ a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{12}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}\,b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}\,b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{12}\,b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Da nun aber die Determinanten mit zwei identischen Kolonnen gleich Null sind, so wird

$$(4.)\quad C = b_{11}\,b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}\,b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}\,b_{22} - b_{12}\,b_{21})$$
$$= A\,.\,B.$$

## Beispiel.

Es ist

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c, & -d \\ d, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd, & ad - bc \\ bc - ad, & bd + ac \end{vmatrix},$$

oder

$$(5\,\text{a.})\qquad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Dies gibt den Satz: *Multipliziert man die Summe zweier Quadrate wieder mit der Summe zweier Quadrate, so läßt sich das Produkt gleichfalls als die Summe zweier Quadrate darstellen.*

In ähnlicher Weise, wie vorhin Determinanten $2^{\text{ter}}$ Ordnung miteinander multipliziert worden sind, kann man auch Determinanten $n^{\text{ter}}$ Ordnung miteinander multiplizieren. Es sei jetzt

$$(6.)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11}\; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} b_{11}\; b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\; b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\; b_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} c_{11}\; c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21}\; c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}\; c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$(7.)\qquad c_{fr} = a_{f1}\,b_{r1} + a_{f2}\,b_{r2} + \cdots + a_{fn}\,b_{rn}$$

sein möge. Der Kürze wegen soll Gleichung (7.) in der Form

$(7\,\text{a.})$ $c_{fr} = \Sigma^{\alpha}\, a_{f\alpha} b_{r\alpha}$, oder $c_{fr} = \Sigma^{\beta}\, a_{f\beta} b_{r\beta}, \ldots$ oder $c_{fr} = \Sigma^{\nu}\, a_{f\nu} b_{r\nu}$

geschrieben werden, wobei die Summationsbuchstaben $\alpha, \beta, \ldots \nu$ die Werte 1 bis $n$ durchlaufen. Dadurch erhält man

$$(8.)\qquad C = \begin{vmatrix} \Sigma^{\alpha} a_{1\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{1\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{1\nu} b_{n\nu} \\ \Sigma^{\alpha} a_{2\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{2\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{2\nu} b_{n\nu} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma^{\alpha} a_{n\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{n\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{n\nu} b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Determinante nach den Teilkolonnen zerlegt,

$$(9.)\qquad C = \Sigma^{\alpha} \Sigma^{\beta} \ldots \Sigma^{\nu} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} b_{1\alpha}, & a_{1\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{1\nu} b_{n\nu} \\ a_{2\alpha} b_{1\alpha}, & a_{2\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{2\nu} b_{n\nu} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n\alpha} b_{1\alpha}, & a_{n\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{n\nu} b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta, \ldots \nu$ alle Werte von 1 bis $n$ durchlaufen, so daß die Summe im ganzen $n^n$ Glieder enthält. Die Gleichung (9.) kann jetzt aber auch in der Form

$$(9a.) \quad C = \Sigma b_{1\alpha} b_{2\beta} \ldots b_{n\nu} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} a_{1\beta} \ldots a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\alpha} a_{n\beta} \ldots a_{n\nu} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wobei das Summenzeichen verlangt, daß $\alpha, \beta, \ldots \nu$ *einzeln* alle Werte von 1 bis $n$ annehmen. Man darf sich aber darauf beschränken, daß $\alpha, \beta, \ldots \nu$ lauter *verschiedene* Werte haben, weil in Gleichung (9a.) die Determinante der $a$ verschwindet, sobald von den Indizes $\alpha, \beta, \ldots \nu$ zwei einander gleich sind. Man braucht daher in Gleichung (9a.) die Summation nur über die $n!$ Permutationsformen $\alpha\beta \ldots \nu$ der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ zu erstrecken. Nun ist aber, wenn $\alpha\beta \ldots \nu$ eine Permutiationsform der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ ist,

$$(10.) \quad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} a_{1\beta} \ldots a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\alpha} a_{n\beta} \ldots a_{n\nu} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda A,$$

wobei

$$(11.) \quad \lambda = \binom{\alpha\ \beta \ldots \nu}{1\ 2 \ldots n}$$

ist, folglich geht Gleichung (9a.) über in

$$(12.) \quad C = A \,.\, \Sigma(-)1^\lambda b_{1\alpha} b_{2\beta} \ldots b_{n\nu} = A \,.\, B.$$

Dies gibt den Satz:

*Zwei Determinanten $n^{ter}$ Ordnung werden miteinander multipliziert, indem man die Elemente der $f^{ten}$ Zeile der ersten Determinante mit den gleichstelligen Elementen der $r^{ten}$ Zeile der zweiten Determinante multipliziert, diese $n$ Produkte addiert und aus den so erhaltenen $n^2$ Summen eine neue Determinante bildet.*

Da man in jeder der beiden Determinanten $A$ und $B$ die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen darf, so kann $c_{fr}$ auch die folgenden Werte erhalten:

(13.) $$c_{fr} = a_{f1}\, b_{1r} + a_{f2}\, b_{2r} + \cdots + a_{fn}\, b_{nr},$$
oder
(14.) $$c_{fr} = a_{1f}\, b_{r1} + a_{2f}\, b_{r2} + \cdots + a_{nf}\, b_{rn},$$
oder
(15.) $$c_{fr} = a_{1f}\, b_{1r} + a_{2f}\, b_{2r} + \cdots + a_{nf}\, b_{nr}.$$

## § 135.

## Homogene, lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten.

Sind $n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten

(1.) $$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = c_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = c_n \end{cases}$$

gegeben, so wird nach Formel Nr. 212 der Tabelle

(2.) $$\varDelta \,.\, x_r = c_1\, \alpha_{1r} + c_2\, \alpha_{2r} + \cdots + c_n\, \alpha_{nr}.$$

Läßt man jetzt die Größen $c_1, c_2, \ldots c_n$ immer kleiner werden und schließlich ganz verschwinden, so erhält man die Gleichungen

(3.) $$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = 0. \end{cases}$$

Diese linearen Gleichungen heißen *homogen*. Aus den Gleichungen (3.) findet man in diesem Falle

(4.) $$\varDelta \,.\, x_r = 0 \quad \text{für} \quad r = 1,\ 2,\ 3, \ldots n.$$

Wenn man nun weiß, daß die Gleichungen (3.) auch für solche Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelten, die nicht sämtlich gleich Null sind, so folgt aus den Gleichungen (4.), daß

$$\varDelta = 0$$

sein muß. Dies gibt den Satz:

*Wenn $n$ lineare, homogene Gleichungen mit $n$ Unbekannten für Werte der Unbekannten, die nicht sämtlich gleich 0 sind, gleichzeitig bestehen, so muß die Determinante $\Delta$ der Koeffizienten gleich 0 sein.*

## § 136.

## Anwendungen auf einzelne Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Gerade $g_1$, $g_2$, $g_3$ durch einen Punkt gehen.

**Auflösung.** Man kann die Gleichungen

$$(1.)\quad A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0,\quad A_3x+B_3y+C_3=0$$

der drei Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ homogen machen, indem man

$$(2.)\qquad x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit $x_3$ multipliziert. Dadurch gehen die drei Gleichungen (1.) über in

$$(3.)\qquad \begin{cases} A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3=0, \\ A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3=0, \\ A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3=0. \end{cases}$$

Dabei darf man noch für $x_3$ jeden beliebigen Wert setzen. Ist z. B. $x_3=1$, so wird

$$x_1=x,\quad x_2=y.$$

Da also die drei linearen, homogenen Gleichungen (3.) gleichzeitig gelten sollen für Werte von $x_1$, $x_2$, $x_3$, die nicht alle drei gleich Null sind, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Die Bedingung dafür, daß die drei Geraden durch einen Punkt gehen, ist daher

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Ebenen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ durch einen Punkt gehen.

**Auflösung.** Man kann die Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

der vier Ebenen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ homogen machen, indem man

$$(6.)\quad x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit $x_4$ multipliziert. Dadurch gehen die Gleichungen (5.) über in

$$(7.)\quad \begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 = 0, \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Da diese linearen, homogenen Gleichungen gleichzeitig gelten sollen für Werte der Unbekannten $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, die nicht alle vier gleich Null sind, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Die Bedingung dafür, daß die vier Ebenen durch einen Punkt gehen, ist daher

$$(8.)\quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ in einer Geraden $g$ liegen.

**Auflösung.** Hat die Gerade $g$ die Gleichung

$$(9.)\quad Ax + By + C = 0,$$

so liegen die drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ auf dieser Geraden, wenn

$$(10.)\quad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0, \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

ist. Hierbei sind $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ die gegebenen Koordinaten der Punkte $P_1, P_2, P_3$, während die drei Größen $A, B, C$ noch unbekannt sind. Man hat also drei lineare, homogene Gleichungen mit den drei Unbekannten $A, B, C$. Da diese Unbekannten nicht alle drei gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (10.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Koëffizienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die drei Punkte in gerader Linie liegen, ist daher

$$\text{(11.)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ des Raumes in einer Ebene $\varepsilon$ liegen

**Auflösung.** Hat die Ebene $\varepsilon$ die Gleichung

$$\text{(12.)} \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

so liegen die vier Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$ in dieser Ebene, wenn

$$\text{(13.)} \qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{cases}$$

ist. Hierbei sind $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$; $x_4, y_4, z_4$ die gegebenen Koordinaten der Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4$, während die vier Größen $A, B, C, D$ noch unbekannt sind. Man hat also vier lineare, homogene Gleichungen mit den Unbekannten $A, B, C, D$. Da diese Unbekannten nicht alle vier gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (13.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die vier Punkte in einer Ebene liegen, ist daher

$$\text{(14.)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

**Aufgabe 5.** Man soll den Kreis bestimmen, der durch drei gegebene Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ hindurchgeht.

**Auflösung.** Hat der gesuchte Kreis die Gleichung

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\varrho^2=0, \tag{15.}$$

so geht er durch die drei gegebenen Punkte, wenn

$$x_1^2-2\xi x_1+\xi^2+y_1^2-2\eta y_1+\eta^2-\varrho^2=0, \tag{16.}$$

$$x_2^2-2\xi x_2+\xi^2+y_2^2-2\eta y_2+\eta^2-\varrho^2=0, \tag{17.}$$

$$x_3^2-2\xi x_3+\xi^2+y_3^2-2\eta y_3+\eta^2-\varrho^2=0 \tag{18.}$$

ist. Diese drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $\xi$, $\eta$ und $\varrho$ sind *nicht linear*. Zieht man aber die Gleichungen (17.) und (18.) von Gleichung (16.) ab, so erhält man zwei *lineare* Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x_1-x_2)\xi+2(y_1-y_2)\eta=x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2, \\ 2(x_1-x_3)\xi+2(y_1-y_3)\eta=x_1^2-x_3^2+y_1^2-y_3^2 \end{array}\right. \tag{19.}$$

mit den beiden Unbekannten $\xi$ und $\eta$. Indem man noch der Kürze wegen

$$x_1^2+y_1^2=r_1^2, \quad x_2^2+y_2^2=r_2^2, \quad x_3^2+y_3^2=r_3^2 \tag{20.}$$

setzt, findet man durch Auflösung der Gleichungen (19.)

$$2\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2 \\ x_1-x_3, & y_1-y_3 \end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix} r_1^2-r_2^2, & y_1-y_2 \\ r_1^2-r_3^2, & y_1-y_3 \end{vmatrix} \tag{21.}$$

$$2\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2 \\ x_1-x_3, & y_1-y_3 \end{vmatrix}\cdot\eta=\begin{vmatrix} x_1-x_2, & r_1^2-r_2^2 \\ x_1-x_3, & r_1^2-r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22.}$$

Die Determinanten, welche hier auftreten, kann man, wie schon in § 133, Seite 605 gezeigt wurde, umformen und erhält dadurch

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{21a.}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\eta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22a.}$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden $\xi$ und $\eta$ unendlich groß, d. h. der Mittelpunkt des Kreises rückt ins Unendliche, und die drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ liegen in gerader Linie, wie schon in Aufgabe 3 gezeigt wurde.

Der Wert von $\varrho^2$ ergibt sich aus Gleichung (16.), (17.) oder (18.), indem man die gefundenen Werte von $\xi$ und $\eta$ einsetzt.

**Aufgabe 6.** Man soll die Kugelfläche bestimmen, welche durch vier gegebene Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ hindurchgeht.

**Auflösung.** Hat die Kugelfläche die Gleichung

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{23.}$$

so findet man die Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe die Werte von $\xi$ und $\eta$, und zwar erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = r_2^2, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = r_3^2, & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = r_4^2 \end{cases} \tag{24.}$$

setzt,

$$2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cdot \xi = \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 & z_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 & z_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 & z_3 \\ 1 & r_4^2 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{25.}$$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cdot \eta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 & z_1 \\ 1 & x_2 & r_2^2 & z_2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 & z_3 \\ 1 & x_4 & r_4^2 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{26.}$$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cdot \zeta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & r_4^2 \end{vmatrix}. \tag{27.}$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden $\xi$, $\eta$, $\zeta$ unendlich groß, d. h. der Mittelpunkt der Kugel rückt ins Unendliche, und die vier Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ liegen, wie schon in Aufgabe 4 gezeigt wurde, in einer Ebene.

Den Wert von $\varrho$ findet man schließlich aus der Gleichung

$$(28.)\qquad (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2 = \varrho^2.$$

# Dritter Teil.

## Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

---

XVIII. Abschnitt.

## Differentiation der Funktionen von mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen.

§ 137.

### Differentiation einer Funktion von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 221.)

Eine Funktion von zwei oder mehr Veränderlichen wurde bereits in § 3 (Seite 23) folgendermaßen erklärt:

*Eine veränderliche Größe $z$ heißt eine Funktion der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ für $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, wenn jedem Wertsysteme $x$, $y$ in den angegebenen Intervallen ein oder mehrere Werte von $z$ nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.*

Hier möge nur der Fall in Betracht gezogen werden, wo dieses Gesetz durch eine Gleichung zwischen $x$, $y$, $z$ gegeben ist.

Besteht nämlich zwischen drei veränderlichen Größen $x$, $y$, $z$ eine Gleichung, so wird man zweien von ihnen, z. B. $x$ und $y$, beliebige Werte beilegen können; dadurch wird dann $z$ die Wurzel einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten, so daß $z$ nur noch eine Anzahl ganz bestimmter Werte haben darf.

Bei dieser Anschauungsweise sind also $x$ und $y$ die *unabhängigen* Veränderlichen, während $z$ eine von $x$ und $y$ *abhängige* Veränderliche oder eine *Funktion von $x$ und $y$* ist.

Man kann sich die Gleichung zwischen $x$, $y$ und $z$ deshalb auf die Form

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

gebracht denken und erkennt, daß Veränderungen von $z$ auf dreifache Art hervorgerufen werden können, nämlich

1) indem sich $x$ allein ändert,

2) „ „ $y$ „ „

3) „ „ $x$ und $y$ gleichzeitig ändern.

Den Unterschied zwischen diesen drei Fällen kann man sich am leichtesten durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) als Gleichung einer Fläche im Raume klar machen. Bleibt $y$ konstant, so liegen die Flächenpunkte mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ alle in einer Ebene, welche zur $ZX$-Ebene parallel ist und die Fläche in einer Kurve schneidet. Auf dieser Kurve kann daher der Flächenpunkt $P$ nur fortschreiten, wenn man $x$ als die einzige Veränderliche und $y$ als eine Konstante betrachtet.

Ebenso kann der Flächenpunkt $P$ nur auf einer Kurve fortschreiten, welche in einer zur $YZ$-Ebene parallelen Ebene liegt, wenn man $y$ als einzige Veränderliche und $x$ als eine Konstante betrachtet.

Sind aber $x$ und $y$ beide veränderlich, so kann der Flächenpunkt auf der Fläche nach allen beliebigen Richtungen fortschreiten.

Betrachtet man zunächst den ersten Fall, wo nur $x$ als *veränderlich* und $y$ als *konstant* angesehen wird, so kann man $z$ wie eine Funktion der einzigen Veränderlichen $x$ behandeln und auch ebenso differentiieren. Man bezeichnet dann aber, wie schon in § 76, Seite 363 hervorgehoben wurde, den Differential-Quotienten nicht mit $\frac{dz}{dx}$, sondern mit $\frac{\partial z}{\partial x}$, so daß man erhält

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}. \tag{2.}$$

In dem zweiten Falle, wo nur $y$ als *veränderlich* und $x$ als *konstant* angesehen wird, findet man in derselben Weise

$$(3.)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Diese Größen werden die „*partiellen* Ableitungen von $z$ nach $x$ und nach $y$“ genannt.

Dem entsprechend nennt man die Änderung, welche $z$ dadurch erleidet, daß sich nur $x$ um die Größe $\Delta x$ ändert, die „*partielle Zunahme von z in Bezug auf x*“ und bezeichnet sie mit $\Delta_x z$. Es ist also

$$(4.)\qquad z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y),$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

$$(5.)\qquad \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x.$$

Ebenso nennt man die Änderung, welche $z$ dadurch erleidet, daß sich nur $y$ um die Größe $\Delta y$ ändert, die „*partielle Zunahme von z in Bezug auf y*“ und bezeichnet sie mit $\Delta_y z$. Es ist also

$$(6.)\qquad z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y),$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

$$(7.)\qquad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Läßt man jetzt die Größen $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich klein werden, indem man sie durch ihre Differentiale $dx$ und $dy$ ersetzt, so werden auch die entsprechenden Änderungen von $z$, nämlich $\Delta_x z$ und $\Delta_y z$, unendlich klein und heißen dann die „*partiellen Differentiale* $\partial_x z$ und $\partial_y z$ von $z$“. Dabei folgt aus den Gleichungen (5.) und (7.)

$$(8.)\qquad \partial_x z = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

$$(9.)\qquad \partial_y z = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

In dem dritten Falle dagegen, wo sich $x$ um $\Delta x$ und gleichzeitig $y$ um $\Delta y$ ändert, nennt man die entsprechende Änderung von $z$ die „*vollständige* oder *totale* Zunahme von $z$" und bezeichnet sie mit $\Delta z$. Es wird also

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y), \tag{10.}$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \tag{11.}$$

wobei $\Delta x$ und $\Delta y$ voneinander *unabhängige* Größen sind. Die hier folgenden Schlüsse gelten jedoch auch dann noch, wenn man diese Voraussetzung nicht macht, wenn also $x$ und $y$ und deshalb auch $\Delta x$ und $\Delta y$ voneinander abhängig sind.

Gleichung (11.) kann man auf die Form

$$\begin{aligned}\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\\ + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\end{aligned}$$

bringen. Dies gibt, wenn man $y + \Delta y$ der Kürze wegen mit $y_1$ bezeichnet,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y.\end{aligned} \tag{12.}$$

Läßt man jetzt wieder $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich klein werden, so wird auch $\Delta z$ unendlich klein und geht in das *vollständige oder totale Differential von z* über, welches man mit $dz$ bezeichnet. Da nun

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

und $\lim y_1 = y$ wird, so geht Gleichung (12.) über in

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \tag{13.}$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \partial_x z + \partial_y z. \tag{14.}$$

Es gilt also der Satz:

*Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.*

Derselbe Satz ist auch in § 76, Gleichung (16a.) ausgesprochen; damals handelte es sich aber um eine Funktion

$$z = F(u, v)$$

von zwei veränderlichen Größen $u$ und $v$, die nicht voneinander *unabhängig*, sondern beide wieder Funktionen von *einer* Veränderlichen $x$ waren.

## § 138.

## Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und $dz$ ermitteln für

(1.) $$z = x^3y^2.$$

**Auflösung.** Die partielle Ableitung nach $x$ bildet man, indem man $x$ als *veränderlich* und $y$ als *konstant* betrachtet; und die partielle Ableitung nach $y$ bildet man, indem man $y$ als *veränderlich* und $x$ als *konstant* betrachtet. Deshalb ist

(2.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y,$$

(3.) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy.$$

**Aufgabe 2.** Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und $dz$ ermitteln für

(4.) $$z = y^3 + 4x^2y + 2x^3.$$

**Auflösung.**

(5.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy + 6x^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 4x^2,$$

(6.) $$dz = (8xy + 6x^2)dx + (3y^2 + 4x^2)dy.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und $dz$ ermitteln für

(7.) $$z = y^2\sin x.$$

**Auflösung.** Hier findet man in ähnlicher Weise wie vorhin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin x, \tag{8.}$$

$$dz = y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy. \tag{9.}$$

**Aufgabe 4.** Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und $dz$ ermitteln für

$$z = e^y \arcsin x + x^2 . \ln y. \tag{10.}$$

**Auflösung.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x . \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}, \tag{11.}$$

$$dz = \left(\frac{e^y}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x . \ln y\right) dx + \left(e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}\right) dy. \tag{12.}$$

## § 139.

## Differentiation der Funktionen von mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 222 und 223.)

Das in § 137 angedeutete Verfahren läßt sich ohne weiteres auf Funktionen von drei oder von mehr voneinander unabhängigen Veränderlichen übertragen. Ist z. B. $z$ eine Funktion von drei Veränderlichen $u$, $v$, $w$, ist also

$$z = f(u, v, w), \tag{1.}$$

so kann man zunächst die partiellen Ableitungen bilden, indem man setzt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w)}{\Delta u}, \tag{2.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v, w) - f(u, v, w)}{\Delta v}, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \lim_{\Delta w = 0} \frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w} \tag{4.}$$

Aus den drei *partiellen Zunahmen* von $z$, nämlich aus

$$(5.)\quad \begin{cases} \Delta_u z = f(u + \Delta u,\ v,\ w) - f(u,\ v,\ w), \\ \Delta_v z = f(u,\ v + \Delta v,\ w) - f(u,\ v,\ w), \\ \Delta_w z = f(u,\ v,\ w + \Delta w) - f(u,\ v,\ w) \end{cases}$$

erhält man sodann, indem man $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$ durch die Differentiale $du$, $dv$, $dw$ ersetzt, die drei *partiellen Differentiale* von $z$, nämlich

$$(6.)\quad \partial_u z = \frac{\partial z}{\partial u}\,du, \quad \partial_v z = \frac{\partial z}{\partial v}\,dv, \quad \partial_w z = \frac{\partial z}{\partial w}\,dw.$$

Ist endlich $\Delta z$ die Änderung von $z$, wenn sich gleichzeitig $u$ um $\Delta u$, $v$ um $\Delta v$, $w$ um $\Delta w$ ändern, ist also

$$z + \Delta z = f(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w),$$

so wird

$$(7.)\quad \Delta z = f(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w) - f(u,\ v,\ w),$$

oder

$$(7\text{a.})\quad \begin{aligned} \Delta z = {} & f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) \\ & + f(u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w) - f(u,\ v,\ w + \Delta w) \\ & + f(u,\ v,\ w + \Delta w) - f(u,\ v,\ w). \end{aligned}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $v + \Delta v$ mit $v_1$ und $w + \Delta w$ mit $w_1$, so kann man diese Gleichung auf die Form

$$(7\text{b.})\quad \begin{aligned} \Delta z = {} & \frac{f(u + \Delta u,\ v_1,\ w_1) - f(u,\ v_1,\ w_1)}{\Delta u}\,\Delta u \\ & + \frac{f(u,\ v + \Delta v,\ w_1) - f(u,\ v,\ w_1)}{\Delta v}\,\Delta v \\ & + \frac{f(u,\ v,\ w + \Delta w) - f(u,\ v,\ w)}{\Delta w}\,\Delta w \end{aligned}$$

bringen. Geht man jetzt zur Grenze über, indem man $\Delta u$, $\Delta v$ und $\Delta w$ durch die entsprechenden Differentiale $du$, $dv$, $dw$ ersetzt, so wird

$$\lim v_1 = v, \quad \lim w_1 = w,$$

und $\Delta z$ geht über in das *vollständige* (oder *totale*) Differential von $z$, nämlich in

$$(8.)\quad dz = \frac{\partial f(u,\ v,\ w)}{\partial u}\,du + \frac{\partial f(u,\ v,\ w)}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f(u,\ v,\ w)}{\partial w}\,dw,$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv + \frac{\partial z}{\partial w}\,dw. \tag{8a.}$$

Auch hier gilt also der Satz:

*Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.*

**Beispiel.**

Es sei

$$z = v^2 w \sin u + e^w . \ln u; \tag{9.}$$

dann wird

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= v^2 w \cos u + \frac{e^w}{u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2vw \sin u, \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= v^2 \sin u + e^w . \ln u, \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

also

$$dz = \left(v^2 w \cos u + \frac{e^w}{u}\right)du + 2vw \sin u\, dv + (v^2 \sin u + e^w . \ln u)dw. \tag{11.}$$

In derselben Weise kann man

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n) \tag{12.}$$

nach jeder der $n$ Veränderlichen einzeln differentiieren, indem man die anderen Veränderlichen als *konstant* betrachtet. So erhält man die *partiellen Ableitungen.* Multipliziert man dann noch mit dem Differential der betreffenden Veränderlichen, so sind die Produkte die *partiellen Differentiale* von $z$, nämlich

$$\partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1}\,du_1, \quad \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2}\,du_2, \ldots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n}\,du_n. \tag{13.}$$

*Das vollständige (oder totale) Differential ist dann wieder gleich der Summe der partiellen Differentiale*, also

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}\,du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\,du_n. \tag{14.}$$

Dabei ist zunächst die Voraussetzung gemacht, daß die $n$ Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander unabhängig sind. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel (14.) läßt sich aber auch leicht auf den Fall übertragen, wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämtlich Funktionen von einer Veränderlichen $t$ sind.

In diesem Falle sind jedoch, wie für $n = 2$ schon in § 76 gezeigt wurde, die Differentiale $du_1, du_2, \ldots du_n$ nicht mehr voneinander unabhängige Größen; es folgt vielmehr aus den Gleichungen

$$u_1 = \varphi_1(t), \quad u_2 = \varphi_2(t), \ldots u_n = \varphi_n(t), \tag{15.}$$

daß

$$du_1 = \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \ldots du_n = \varphi_n'(t)dt \tag{16.}$$

wird. Deshalb darf man in diesem Falle die beiden Seiten der Gleichung (14.) durch $dt$ dividieren und erhält auf diese Weise

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{17.}$$

Die Formel (14.) bleibt sogar noch richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ wiederum Funktionen von $m$ Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots t_m$ sind, wenn also

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots t_m), \\ u_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots t_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots t_m). \end{cases} \tag{18.}$$

Dabei muß natürlich $m < n$ sein.

Setzt man nämlich diese Werte in die Gleichung (12.) ein, so wird

$$z = F(t_1, t_2, \ldots t_m) \tag{19.}$$

eine Funktion von $t_1, t_2, \ldots t_m$ und deshalb, der Gleichung (14.) entsprechend,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial t_m}dt_m. \tag{20.}$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen (18.)

$$du_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_m}dt_m \tag{21.}$$

für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots n$. Nun ist aber nach Gleichung (17.), wenn man zuerst $t_1$, dann $t_2, \ldots$ endlich $t_m$ als die einzige Veränderliche betrachtet,

$$(22.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_2} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial t_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_m} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t_m} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial t_m} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial t_m}. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit $dt_1$, $dt_2$, $\ldots dt_m$ und addiert sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (20.) und (21.)

$$(23.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

## § 140.

## Wiederholte Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 224.)

Der Kürze wegen bezeichnet man gewöhnlich die partiellen Ableitungen durch Indizes. Ist z. B.

$$(1.)\qquad z = f(x, y),$$

so setzt man

$$(2.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y).$$

Nun sind $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ im allgemeinen wieder Funktionen von $x$ und $y$, die man nochmals nach den einzelnen Veränderlichen differentiieren kann. Dadurch erhält man, wenn man die Ableitungen wieder durch Indizes andeutet,

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = f_{11}(x, y), & \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y), \\ \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y), & \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = f_{22}(x, y). \end{cases}$$

Es gibt also im ganzen 4 zweite partielle Ableitungen einer Funktion von 2 Veränderlichen.

**Beispiel 1.** Es sei

$$z = f(x, y) = x^2y^3 - 3x^4y + xy^4, \tag{4.}$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 2xy^3 - 12x^3y + y^4, \tag{5.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 3x^2y^2 - 3x^4 + 4xy^3,$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} &= f_{11}(x, y) = 2y^3 - 36x^2y, \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} &= f_{12}(x, y) = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} &= f_{21}(x, y) = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} &= f_{22}(x, y) = 6x^2y + 12xy^2. \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

**Beispiel 2.** Es sei

$$z = f(x, y) = \sin x \,.\, \ln y + e^y \,.\, \ln x, \tag{7.}$$

dann erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = \cos x \,.\, \ln y + \frac{e^y}{x}, \tag{8.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = \frac{\sin x}{y} + e^y \ln x,$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} &= f_{11}(x, y) = -\sin x \,.\, \ln y - \frac{e^y}{x^2}, \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} &= f_{12}(x, y) = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} &= f_{21}(x, y) = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} &= f_{22}(x, y) = -\frac{\sin x}{y^2} + e^y \,.\, \ln x. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

In diesen beiden Beispielen wird

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y); \tag{10.}$$

es soll gezeigt werden, daß diese Beziehung ganz allgemein gilt, wenn $f_{12}(x, y)$ und $f_{21}(x, y)$ stetige Funktionen von $x$ und $y$ sind.

Zum Beweise setze man

$$(11.)\qquad \varphi(y) = f(x + h, y) - f(x, y),$$

also

$$(12.)\qquad \varphi(y + k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k).$$

Nun ist nach dem *Taylor*schen Lehrsatze (vergl. Formel Nr. 87 der Tabelle)

$$(13.)\qquad \varphi(y + k) - \varphi(y) = \varphi'(y + \Theta k) \,.\, k,$$

oder, wenn man die Werte aus den Gleichungen (11.) und (12.) einsetzt,

$$(13\text{a.})\quad f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y) = [f_2(x + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] \,.\, k.$$

Setzt man dagegen

$$(14.)\qquad \psi(x) = f(x, y + k) - f(x, y),$$

also

$$(15.)\qquad \psi(x + h) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y),$$

so folgt aus Formel Nr. 87 der Tabelle

$$(16.)\qquad \psi(x + h) - \psi(x) = \psi'(x + \Theta_1 h) \,.\, h,$$

oder, wenn man die Werte aus den Gleichungen (14.) und (15.) einsetzt,

$$(16\text{a.})\quad f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = [f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] \,.\, h.$$

Durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit Gleichung (13a.) erhält man

$$(17.)\qquad [f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] \,.\, h = [f_2(y + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] \,.\, k,$$

oder, wenn man auf die beiden Größen in den eckigen Klammern nochmals Formel Nr. 87 der Tabelle anwendet,

$$(18.)\quad f_{12}(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k) \,.\, hk = f_{21}(x + \Theta_3 h, y + \Theta k) \,.\, hk.$$

Dabei sind $h$ und $k$ hinreichend kleine, aber sonst beliebige Größen. Deshalb ist auch

$$(19.)\qquad f_{12}(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k) = f_{21}(x + \Theta_3 h, y + \Theta k).$$

Läßt man jetzt $h$ und $k$ gleich Null werden, so erhält man, weil die Funktionen $f_{12}(x, y)$ und $f_{21}(x, y)$ stetig sind,

$$(20.)\qquad f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y),\quad \text{oder}\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Dies gibt den Satz:

*Wenn man eine Funktion*

$$z = f(x, y)$$

*zuerst partiell nach $x$ und dann partiell nach $y$ differentiiert, so findet man dasselbe Resultat, welches man finden würde, indem man zuerst partiell nach $y$ und dann partiell nach $x$ differentiiert;* oder mit anderen Worten: *Die Reihenfolge, in welcher man die partiellen Differentiationen ausführt, ist gleichgültig.*

Dieser Satz läßt sich natürlich verallgemeinern, nicht nur auf die zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen, sondern auch auf höhere partielle Ableitungen. Setzt man nämlich

$$(21.)\quad \begin{cases} f_1(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}, & f_2(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ f_{11}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & f_{12}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \\ f_{21}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, & f_{22}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \end{cases}$$

so erhält der eben ausgesprochene Satz die Fassung

$$(22.)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x},\quad \text{oder}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial x}.$$

Bezeichnet man in entsprechender Weise mit $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n}$ den Ausdruck, welchen man erhält, indem man $z$ zuerst $m$-mal partiell nach $x$ und dann $n$-mal partiell nach $y$ differentiiert, so gilt die Gleichung

$$\text{(23.)} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$

und wenn man in ähnlicher Weise fortfährt,

$$\text{(24.)} \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial y^n \partial x^m}.$$

Ebenso setzt man, wenn

$$z = f(u,\ v,\ w)$$

gegeben ist,

$$\text{(25.)} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = f_1(u,\ v,\ w), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f_2(u,\ v,\ w), \quad \frac{\partial z}{\partial w} = f_3(u,\ v,\ w)$$

und kann diese Funktionen wieder nach jeder der drei Veränderlichen differentiieren. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial f_1(u,\ v,\ w)}{\partial u} = f_{11}(u,\ v,\ w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f_1(u,\ v,\ w)}{\partial v} = f_{12}(u, v, w),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial w} = f_{13}(u, v, w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial f_2(u, v, w)}{\partial u} = f_{21}(u, v, w),$$

.....................................................................

Auch hier läßt sich zeigen, daß

$$\text{(26.)} \qquad \begin{cases} f_{12}(u,\ v,\ w) = f_{21}(u,\ v,\ w), \\ f_{13}(u,\ v,\ w) = f_{31}(u,\ v,\ w), \\ f_{23}(u,\ v,\ w) = f_{32}(u,\ v,\ w) \end{cases}$$

ist, allgemein, daß

$$\text{(27.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial u^m \partial v^n \partial w^p} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial v^n \partial u^m \partial w^p} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial w^p \partial u^m \partial v^n} \\ = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial u^m \partial w^p \partial v^n} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial v^n \partial w^p \partial u^m} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial w^p \partial v^n \partial u^m}. \end{cases}$$

## § 141.

## Vollständige Differentiale höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 225.)

Es sei wieder

$$\text{(1.)} \qquad z = f(x,\ y)$$

eine Funktion von zwei *unabhängigen* Veränderlichen, dann wird nach Formel Nr. 221 der Tabelle

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{2.}$$

das *erste* vollständige Differential von $z$. Dabei sind $dx$ und $dy$ zwei voneinander *und auch von $x$ und $y$ unabhängige*, unendlich kleine Größen.

Unter dem *zweiten vollständigen* Differential von $z$ versteht man nun das vollständige Differential des ersten vollständigen Differentials und bezeichnet es mit $d^2z$.

Um $d^2z$ zu bilden, braucht man also nur in Gleichung (2.) $z$ mit $dz$ zu vertauschen. Dadurch erhält man

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy. \tag{3.}$$

Weil nun aber $dx$ und $dy$ von $x$ und $y$ unabhängig sind, so findet man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(dz)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \\[2ex] \dfrac{\partial(dz)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2} dy. \end{cases} \tag{4.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit $dx$ und $dy$ und addiert sie dann, so erhält man

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{5.}$$

Wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung überall $\partial^2 z$ mit $\partial z^2$ vertauscht, so wird die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} dx\,dy + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2. \tag{6.}$$

Diesen Umstand benutzt man, um Gleichung (5.) auf eine einfachere Form zu bringen; man schreibt nämlich

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{(2)}, \tag{5a.}$$

wobei der eingeklammerte Exponent (2) bedeutet, daß man den Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ wirklich ins Quadrat erheben, dann aber überall $\partial z^2$ mit $\partial^2 z$ vertauschen soll.

Man sagt bei der Ausführung dieses Verfahrens, daß $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ „*symbolisch*" ins Quadrat erhoben werde.

Ebenso versteht man unter dem *dritten* vollständigen Differential von $z$, nämlich unter $d^3z$ das erste vollständige Differential des zweiten vollständigen Differentials. Es ist also

$$(7.)\qquad d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy.$$

Nun ist aber nach Gleichung (5.)

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx = \dfrac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 2\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + \dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2, \\ \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy = \dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 2\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \dfrac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3, \end{cases}$$

folglich ist

$$(9.)\qquad d^3z = \frac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3,$$

oder, wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise benutzt,

$$(9\,\text{a.})\qquad d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(3)}.$$

Auch hier bedeutet der eingeklammerte Exponent (3), daß man $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ zuerst wirklich in die dritte Potenz erheben und dann überall $\partial z^3$ mit $\partial^3 z$ vertauschen soll.

So kann man fortfahren und findet für das $m^{\text{te}}$ vollständige Differential

$$(10.)\qquad d^mz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(m)}$$

wobei man also $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ in die $m^{\text{te}}$ Potenz erheben und dann $\partial z^m$ mit $\partial^m z$ vertauschen soll.

Die Richtigkeit dieser Formel für einen beliebigen Wert von $m$ wird durch den Schluß von $n$ auf auf $n+1$ bewiesen. Nach dem binomischen Lehrsatze ist nämlich

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots,$$

oder

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

wobei das Summenzeichen $\Sigma$ andeutet, daß $k$ alle Werte von 0 bis $n$ durchlaufen soll. Gilt also die Gleichung (10.) für $m = n$, so wird

$$d^n z = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k. \tag{11.}$$

Nun ist

$$d^{n+1}z = d(d^n z) = \frac{\partial(d^n z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^n z)}{\partial y}dy;$$

dabei ergibt sich aus Gleichung (11.)

$$\tag{12.} \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(d^n z)}{\partial x}dx &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}dx^{n-k+1}dy^k,\\ \frac{\partial(d^n z)}{\partial y}dy &= \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}dx^{n-k}dy^{k+1}. \end{aligned}\right.$$

Ersetzt man die Glieder auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen durch die entsprechenden in der symbolischen Darstellung, so erhält man

$$\tag{13.} \left\{\begin{aligned} &\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}dx^{n-k+1}dy^k =\\ &\frac{\partial z}{\partial x}dx\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k = \frac{\partial z}{\partial x}dx\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n. \end{aligned}\right.$$

und

$$\tag{14.} \left\{\begin{aligned} &\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}dx^{n-k}dy^{k+1} =\\ &\frac{\partial z}{\partial y}dy\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k = \frac{\partial z}{\partial y}dy\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n. \end{aligned}\right.$$

Indem man die Gleichungen (12.) addiert, erhält man auf der linken Seite

$$\frac{\partial(d^n z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^n z)}{\partial y}dy = d^{n+1}z, \tag{15.}$$

auf der rechten Seite dagegen, wenn man $\partial^{n+1}z$ mit $\partial z^{n+1}$ vertauscht, mit Rücksicht auf die Gleichungen (13.) und (14.)

$$(16.)\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{n+1},$$

folglich ist unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise

$$(17.)\qquad d^{n+1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(n+1)}.$$

Gilt also Gleichung (10.) für $m = n$, so gilt sie auch für $m = n + 1$.

Was in dem vorhergehenden für eine Funktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen gezeigt worden ist, kann man in ähnlicher Weise auch für Funktionen von $n$ unabhängigen Veränderlichen zeigen. Dadurch findet man für

$$(18.)\qquad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

zunächst in Übereinstimmung mit Formel Nr. 223 der Tabelle

$$(19.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n$$

und durch wiederholte Differentiation

$$(20.)\quad \begin{cases} d^2z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^mz = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(m)}. \end{cases}$$

Bei dem *ersten* vollständigen Differential von $z$ war es gleichgültig, ob die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander unabhängig sind oder nicht, denn man erhielt, auch wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämtlich Funktionen von *einer* Veränderlichen $t$ oder von *mehreren* Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots t_m$ waren,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Bei den *höheren* vollständigen Differentialen aber bleiben die Gleichungen (20.) nur dann richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander *unabhängig*, oder wenn sie *lineare* Funktionen von neuen unabhängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots t_m$ sind. Ist z. B. wieder

(21.) $$z = f(x, y),$$

und sind

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

beide Funktionen einer neuen Veränderlichen $t$, so erhält man zunächst

(22.) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Hierbei sind aber $dx$ und $dy$ nicht mehr voneinander unabhängige Größen, sondern es ist

(23.) $$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt.$$

Deshalb kann man auch Gleichung (22.) auf die Form

(24.) $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

bringen. Da $z$ und $\frac{dz}{dt}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ als Funktionen der einzigen Veränderlichen $t$ anzusehen sind, so erhält man durch nochmalige Differentiation nach $t$

(25.) $$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (24.), indem man $z$ bezw. mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder mit $\frac{\partial z}{\partial y}$ vertauscht,

(26.) $$\begin{cases} \dfrac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{dy}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\dfrac{dy}{dt}, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (25.), wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise anwendet, über in

(27.) $$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Indem man beide Seiten der Gleichung mit $dt^2$ multipliziert, gibt dies

$$(27\text{a.})\qquad d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich also von der Gleichung (5a.) auch äußerlich dadurch, daß auf der rechten Seite noch die Glieder $\frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$ hinzugetreten sind.

Ist

$$(28.)\qquad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

und sind

$$(29.)\qquad u_1 = \varphi_1(t),\quad u_2 = \varphi_2(t), \ldots u_n = \varphi_n(t)$$

sämtlich Funktionen einer neuen Veränderlichen $t$, so findet man in ähnlicher Weise

$$(30.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n,$$

$$(31.)\qquad \begin{cases} d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)} \\ \qquad + \frac{\partial z}{\partial u_1}d^2u_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}d^2u_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}d^2u_n, \end{cases}$$

wobei

$$(32.)\qquad \begin{cases} du_1 = \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \ldots \quad du_n = \varphi_n'(t)dt, \\ d^2u_1 = \varphi_1''(t)dt^2, \quad d^2u_2 = \varphi_2''(t)dt^2, \ldots \quad d^2u_n = \varphi_n''(t)dt^2. \end{cases}$$

Man erkennt aus den letzten Gleichungen leicht, unter welcher Bedingung die Größen

$$d^2u_1,\quad d^2u_2, \ldots d^2u_n,$$

oder

$$\frac{d^2u_1}{dt^2},\quad \frac{d^2u_2}{dt^2}, \ldots \frac{d^2u_n}{dt^2}$$

verschwinden. Dies geschieht, wenn

$$(33.)\qquad u_1 = a_1t + b_1,\quad u_2 = a_2t + b_2, \ldots u_n = a_nt + b_n$$

*lineare* Funktionen von $t$ sind. Dann wird nämlich

$$(34.)\qquad \frac{du_1}{dt} = a_1, \qquad \frac{du_2}{dt} = a_2, \quad \cdots \frac{du_n}{dt} = a_n$$

und

$$(35.)\qquad \frac{d^2u_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2u_2}{dt^2} = 0, \quad \cdots \frac{d^2u_n}{dt^2} = 0.$$

In diesem Falle ist also wieder

$$(36.)\qquad d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n\right)^{(2)},$$

oder

$$(37.)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(2)}.$$

Gerade dieser Fall wird aber in dem folgenden in Betracht kommen.

Gelten die Gleichungen (33.), so findet man jetzt auch ebenso wie früher

$$(38.)\qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(3)},$$

.....................................................

$$(39.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^mz}{dt^m} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{du_n}{dt}\right)^{(m)} \\ \qquad = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1} a_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2} a_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n} a_n\right)^{(m)}. \end{cases}$$

## § 142.

## Differentiation einer nicht entwickelten Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 226.)

Es sei $z$ als Funktion von $x$ und $y$ durch die Gleichung

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0$$

gegeben, die man sich auf die Form

$$(1a.)\qquad z = f(x, y)$$

gebracht denken kann. Wie bildet man dann $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$?

Setzt man

$$(2.)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=F_1,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=F_2,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=F_3$$

und beachtet, daß $z$ eine Funktion von $x$ und $y$ ist, so folgt aus Gleichung (1.) durch partielle Differentiation nach $x$

$$(3.)\quad \frac{\partial F[x, y, f(x, y)]}{\partial x}=F_1+F_3\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \text{oder}\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1}{F_3},$$

und durch partielle Differentiation nach $y$

$$(4.)\quad \frac{\partial F[x, y, f(x, y)]}{\partial y}=F_2+F_3\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \text{oder}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2}{F_3},$$

**Beispiel.**

Es sei

$$F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

dann wird

$$F_1=\frac{2x}{a^2},\quad F_2=\frac{2y}{b^2},\quad F_3=\frac{2z}{c^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

§ 143.

## Nicht entwickelte Funktionen einer Veränderlichen, gegeben durch simultane Gleichungen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 227.)

Es kommt häufig vor, daß $y$ und $z$ als Funktionen der einen Veränderlichen $x$ gegeben sind durch *zwei* Gleichungen

$$(1.)\qquad F(x, y, z)=0 \quad\text{und}\quad G(x, y, z)=0,$$

welche *gleichzeitig* bestehen und deshalb „*simultan*" genannt werden.

Jede der beiden Gleichungen für sich allein würde, geometrisch gedeutet, einer Fläche entsprechen; gelten sie aber gleichzeitig, so können ihnen nur die Koordinaten derjenigen Punkte genügen, welche auf beiden Flächen liegen, d. h. die

Gleichungen (1.) stellen zusammen die *Schnittkurve* der beiden Flächen dar.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche $z$, so erhält man die Gleichung

$$(2.)\qquad H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die $XY$-Ebene projiziert. Eliminiert man aber aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche $y$, so erhält man die Gleichung

$$(3.)\qquad K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die $XZ$-Ebene projiziert. Da die Raumkurve, welche durch die beiden Gleichungen (1.) erklärt wird, auf diesen beiden Zylindern liegt, so ist sie auch die Schnittkurve dieser beiden Zylinder oder wenigstens ein Teil davon, denn die Zylinder können möglicherweise auch noch Punkte gemeinsam haben, die *nicht* auf der gegebenen Kurve liegen.

Es kommt hier zunächst nicht auf diese geometrische Deutung an, es sollte vielmehr die vorstehende Untersuchung nur zeigen, daß man $y$ und $z$ als Funktionen der *einzigen* unabhängigen Veränderlichen $x$ betrachten darf. Deshalb ist es auch möglich, $y$ und $z$ als Funktionen von $x$ zu differentiieren, und zwar kann man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auch berechnen, ohne die Gleichungen (2.) und (3.) wirklich zu bilden.

Dies geschieht, indem man auf die Gleichungen (1.) die Regeln anwendet, welche in Formel Nr. 223 der Tabelle ausgesprochen sind, wobei man aber in diesem Falle die drei Veränderlichen $u_1, u_2, u_3$ bezw. mit $x, y, z$ und die unabhängige Veränderliche $t$, von der $u_1, u_2, u_3$ abhängig sind, mit $x$ vertauschen muß. Dadurch erhält man

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder, wenn man wieder $\frac{\partial F}{\partial x}$ mit $F_1$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ mit $F_2$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ mit $F_3$ bezeichnet,

$$(4.)\qquad F_1 + F_2\frac{dy}{dx} + F_3\frac{dz}{dx} = 0.$$

Ebenso findet man

$$(5.)\qquad G_1 + G_2\frac{dy}{dx} + G_3\frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich jetzt sehr leicht durch Elimination

$$(6.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_2G_3 - F_3G_2} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_2G_3 - F_3G_2}.$$

Mit demselben Rechte, mit welchem in dem vorstehenden $x$ als die unabhängige Veränderliche betrachtet wurde, kann man auch $y$ als die unabhängige Veränderliche ansehen. Dadurch werden $x$ und $z$ Funktionen von $y$, und man erhält in Übereinstimmung mit den Gleichungen (6.)

$$(7.)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_3G_1 - F_1G_3} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_3G_1 - F_1G_3}.$$

Macht man $z$ zur unabhängigen Veränderlichen, so erhält man

$$(8.)\qquad \frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Man kann die Gleichungen (6.), (7.) und (8.) zusammenfassen in der Formel

$$(9.)\quad dx : dy : dz = (F_2G_3 - F_3G_2) : (F_3G_1 - F_1G_3) : (F_1G_2 - F_2G_1),$$

oder

$$(9a.)\qquad dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}.$$

Übungs-Beispiele für den Gebrauch dieser Formeln finden sich bei den geometrischen Anwendungen in den folgenden Paragraphen.

# XIX. Abschnitt.

# Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.*)

## § 144.

## Bestimmung der Tangenten und der Normalebenen bei einer Kurve doppelter Krümmung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 228 bis 231a.)

**Erklärung.** Unter einer *Kurve doppelter Krümmung* versteht man eine Kurve, deren Punkte nicht alle in derselben Ebene liegen.

Im folgenden wird daher der Kürze wegen häufig der Ausdruck „Raumkurve“ statt „Kurve doppelter Krümmung“ gebraucht werden.

**Aufgabe 1.** Man soll das Bogenelement $ds$ einer Raumkurve bestimmen und die Kosinusse der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ berechnen, welche $ds$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet.

**Auflösung.** Es seien $P$ und $P_1$ zwei benachbarte Punkte auf der Kurve mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ bezw.

(1.) $$x_1 = x + dx,\quad y_1 = y + dy,\quad z_1 = z + dz,$$

wo wieder die Bezeichnungen $dx$, $dy$, $dz$ andeuten sollen, daß die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe rücken dürfen.

Legt man jetzt durch die Punkte $P$ und $P_1$ Ebenen parallel zu den drei Koordinaten-Ebenen (vergl. Fig. 150), so erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Seitenkanten $dx$, $dy$, $dz$ und der Diagonale

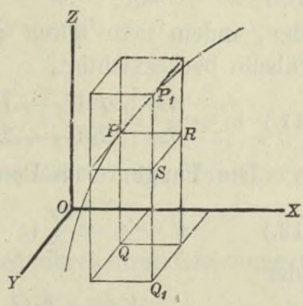
(2.) $$\overline{PP_1} = ds.$$

---

*) Die elementaren Untersuchungen aus der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes müssen hier als bekannt vorausgesetzt werden.

Da die Sehne $PP_1$ mit dem Bogen $PP_1$ zusammenfällt, wenn die Punkte $P$ und $P_1$ einander unendlich nahe rücken, so nennt man $ds$ das „*Bogenelement*“ und erhält nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

Fig. 150.




(3.) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ferner ergibt sich ohne weiteres aus der Figur, daß

(4.) $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds}, \\ \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds} \end{cases}$$

ist, wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel sind, welche das Bogenelement $ds$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet.

**Aufgabe 2.** Eine Raumkurve sei durch die Gleichungen

(5.) $$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

gegeben; man soll im Kurvenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ ihre Tangente bestimmen.

**Auflösung.** Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume schreibt man gewöhnlich in der Form

(6.) $$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu.$$

Dies seien also auch die Gleichungen der gesuchten Tangente, wobei die laufenden Koordinaten mit $x'$, $y'$, $z'$ bezeichnet werden mögen, weil $x$, $y$, $z$ die Koordinaten des Berührungspunktes $P$ sind. Damit die Tangente durch diesen Punkt $P$ geht, müssen die Gleichungen

(7.) $$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

gelten, folglich erhält man für die Tangente die Gleichungen

(8.) $$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z).$$

Um noch die Koeffizienten $m$ und $n$ zu bestimmen, beachte man, daß die Tangente auch durch den Kurvenpunkt $P_1$ hindurchgehen muß, welcher dem Punkte $P$ unendlich nahe liegt und deshalb die Koordinaten

(9.) $$x_1 = x + dx, \quad y_1 + y = dy, \quad z_1 = z + dz$$

hat. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (8.) ein, so erhält man

$$(10.)\qquad dx = mdz,\quad dy = ndz,$$

oder, indem man durch $dz$ dividiert und Formel Nr. 227 der Tabelle berücksichtigt,

$$(11.)\quad m = \frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1},\quad n = \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Die Tangente im Punkte $P$ hat daher die Gleichungen

$$(12.)\qquad x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z),\quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

oder

$$(12a.)\ x' - x = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z),\ y' - y = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z).$$

Gewöhnlich schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$(13.)\qquad \frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - z}{dz},$$

oder

$$(13a.)\quad \frac{x' - x}{F_2G_3 - F_3G_2} = \frac{y' - y}{F_3G_1 - F_1G_3} = \frac{z' - z}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll die Ebene bestimmen, welche im Kurvenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ auf der Kurve senkrecht steht.

**Auflösung.** Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $P$ hindurchgeht, ist

$$(14.)\qquad A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0.$$

Damit diese Ebene auf einer Geraden

$$x' = mz' + \mu,\quad y' = nz' + \nu$$

senkrecht steht, muß nach bekannten Sätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes

$$(15.)\qquad m = \frac{A}{C},\quad n = \frac{B}{C}$$

sein. In dem vorliegenden Falle ist aber die Tangente die Gerade, welche auf der gesuchten Ebene senkrecht stehen soll, folglich gehen die Gleichungen (15.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) über in

$$\frac{dx}{dz} = \frac{A}{C}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B}{C}, \tag{15a.}$$

so daß man für die gesuchte Ebene die Gleichung

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0, \tag{16.}$$

oder

$$\begin{aligned}(F_2G_3 - F_3G_2)(x' - x) + (F_3G_1 - F_1G_3)(y' - y)\\ + (F_1G_2 - F_2G_1)(z' - z) = 0\end{aligned} \tag{16a.}$$

erhält. Diese Ebene heißt die „*Normalebene*" der Raumkurve im Punkte $P$.

Eine Kurve im Raume kann auch durch drei Gleichungen von der Form

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{17.}$$

gegeben sein. Auf drei solche Gleichungen wird man z. B. geführt, wenn man aus den Gleichungen (5.) in der früher beschriebenen Weise (Gleichung (2.) und (3.) in § 143) die Gleichungen

$$y = f(x), \quad z = g(x) \tag{18.}$$

ableitet, die Funktion $x = f_1(t)$ nach Belieben annimmt (z. B. $x = t$ macht) und diesen Wert von $x$ in die Gleichungen (18.) einsetzt. Dann kann man die *Gleichungen der Tangente* im Kurvenpunkte $P$ ohne weiteres auf die Form

$$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z' - z}{\frac{dz}{dt}} \tag{13b.}$$

und die *Gleichung der Normalebene* auf die Form

$$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} + (z' - z)\frac{dz}{dt} = 0 \tag{16b.}$$

bringen.

## § 145.

## Übungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Der Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

schneidet die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

in einer Raumkurve; man soll die Tangente und die Normalebene dieser Kurve im Punkte $P$ bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad G = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \tag{1.}$$

folglich wird

$$\left\{\begin{array}{lll} F_1 = \dfrac{2x}{a^2}, & F_2 = \dfrac{2y}{b^2}, & F_3 = -\dfrac{2z}{c^2}, \\ G_1 = 2x, & G_2 = 2y, & G_3 = 2z, \end{array}\right. \tag{2.}$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} F_2G_3 - F_3G_2 = \dfrac{4yz}{b^2} + \dfrac{4yz}{c^2} = \dfrac{4yz}{b^2c^2}(b^2 + c^2), \\ F_3G_1 - F_1G_3 = -\dfrac{4xz}{c^2} - \dfrac{4xz}{a^2} = -\dfrac{4zx}{c^2a^2}(c^2 + a^2), \\ F_1G_2 - F_2G_1 = \dfrac{4xy}{a^2} - \dfrac{4xy}{b^2} = -\dfrac{4xy}{a^2b^2}(a^2 - b^2). \end{array}\right. \tag{3.}$$

Dies gibt nach Formel Nr. 230 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$\frac{b^2c^2(x' - x)}{yz(b^2 + c^2)} = -\frac{c^2a^2(y' - y)}{zx(c^2 + a^2)} = -\frac{a^2b^2(z' - z)}{xy(a^2 - b^2)}, \tag{4.}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} c^2(a^2 - b^2)x(x' - x) = -a^2(b^2 + c^2)z(z' - z), \\ c^2(a^2 - b^2)y(y' - y) = +b^2(c^2 + a^2)z(z' - z). \end{array}\right. \tag{5.}$$

Aus den Gleichungen (3.) folgt sodann nach Formel Nr. 231 der Tabelle für die Normalebene die Gleichung

$$\frac{4yz}{b^2c^2}(b^2+c^2)(x'-x) - \frac{4zx}{c^2a^2}(c^2+a^2)(y'-y) - \frac{4xy}{a^2b^2}(a^2-b^2)(z'-z) = 0,$$

oder

$$a^2yz(b^2+c^2)(x'-x) - b^2zx(c^2+a^2)(y'-y) - c^2xy(a^2-b^2)(z'-z) = 0, \tag{6.}$$

oder

$$a^2(b^2 + c^2)yzx' - b^2(c^2 + a^2)zxy' - c^2(a^2 - b^2)xyz' = 0. \tag{6a.}$$

**Aufgabe 2.** Die Schraubenlinie hat die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad y - x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = 0, \tag{7.}$$

oder

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = c\varphi; \tag{7a.}$$

man soll die Tangente und die Normalebene im Kurvenpunkte $P$ bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F = x^2 + y^2 - a^2, \quad G = y - x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right), \tag{8.}$$

folglich wird

$$F_1 = 2x, \qquad F_2 = 2y, \quad F_3 = 0; \tag{9.}$$

$$G_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right), \quad G_2 = 1, \quad G_3 = -\frac{x}{c}\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right], \tag{10.}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (7.)

$$G_1 = -\frac{y}{x}, \quad G_2 = 1, \quad G_3 = -\frac{x}{c}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{a^2}{cx}. \tag{10a.}$$

Dies gibt

$$\left\{\begin{array}{l} F_2G_3 - F_3G_2 = -\dfrac{2a^2y}{cx}, \\[2ex] F_3G_1 - F_1G_3 = +\dfrac{2a^2x}{cx} = \dfrac{2a^2}{c}, \\[2ex] F_1G_2 - F_2G_1 = 2x + \dfrac{2y^2}{x} = \dfrac{2a^2}{x} = \dfrac{2a^2c}{cx}. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Die Gleichungen der Tangente sind daher nach Formel Nr. 230 der Tabelle

$$-\frac{cx(x' - x)}{2a^2y} = \frac{cx(y' - y)}{2a^2x} = \frac{cx(z' - z)}{2a^2c},$$

oder

$$x' - x = -\frac{y}{c}(z' - z), \quad y' - y = \frac{x}{c}(z' - z) \tag{12.}$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 231 der Tabelle

$$-\frac{2a^2y}{cx}(x'-x)+\frac{2a^2x}{cx}(y'-y)+\frac{2a^2c}{cx}(z'-z)=0,$$

oder

$$y(x'-x)-x(y'-y)-c(z'-z)=0, \tag{13.}$$

oder

$$yx'-xy'-c(z'-z)=0. \tag{13a.}$$

Weit einfacher findet man diese Resultate, wenn man von den Gleichungen (7a.) ausgeht, aus welchen sich ohne weiteres

$$\frac{dx}{d\varphi}=-a\sin\varphi=-y,\quad \frac{dy}{d\varphi}=a\cos\varphi=x,\quad \frac{dz}{d\varphi}=c \tag{14.}$$

ergibt. Deshalb erhält man aus Formel Nr. 230a der Tabelle für die *Gleichungen der Tangente* in Übereinstimmung mit den Gleichungen (12.)

$$-\frac{x'-x}{y}=\frac{y'-y}{x}=\frac{z'-z}{c} \tag{15.}$$

und nach Formel Nr. 231a der Tabelle für die *Gleichung der Normalebene* in Übereinstimmung mit Gleichung (13.)

$$-y(x'-x)+x(y'-y)+c(z'-z)=0, \tag{16.}$$

oder

$$xy'-yx'+c(z'-z)=0.$$

Dabei ist noch

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(a^2+c^2)d\varphi^2, \tag{17.}$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}=-\dfrac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}},\\ \qquad\qquad \cos\gamma=\dfrac{dz}{ds}=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{array}\right. \tag{18.}$$

*Der Winkel $\gamma$, d. h. die Neigung der Tangente gegen die Z-Achse ist konstant.* Deshalb ist auch die Neigung der Tangente gegen die $XY$-Ebene konstant.

**Aufgabe 3.** Die Kugel

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0 \tag{19.}$$

wird von dem Zylinder

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \tag{20.}$$

durchbohrt; man soll die Tangente und die Normalebene der Schnittkurve im Punkte $P$ mit den Koordinaten $x, y, z$ bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2, \quad G = x^2 - ax + y^2, \tag{21.}$$

folglich wird

$$\left\{\begin{array}{lll} F_1 = 2x, & F_2 = 2y, & F_3 = 2z, \\ G_1 = 2x - a, & G_2 = 2y, & G_3 = 0, \end{array}\right. \tag{22.}$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} F_2G_3 - F_3G_2 = -4yz, \\ F_3G_1 - F_1G_3 = 4xz - 2az, \\ F_1G_2 - F_2G_1 = 4xy - 4xy + 2ya = 2ay; \end{array}\right. \tag{23.}$$

dies gibt nach Formel Nr. 230 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{-2yz} = \frac{y' - y}{z(2x - a)} = \frac{z' - z}{ay}, \tag{24.}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} a(x' - x) = -2z(z' - z), \\ ay(y' - y) = (2x - a)z(z' - z). \end{array}\right. \tag{25.}$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 231 der Tabelle

$$2yz(x' - x) - (2x - a)z(y' - y) - ay(z' - z) = 0, \tag{26.}$$

oder

$$2yzx' - (2x - a)zy' - ayz' = 0. \tag{26a.}$$

Noch einfacher findet man diese Resultate, wenn man

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos\varphi) = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{27.}$$

setzt; dann folgt aus Gleichung (20.)

$$y = \frac{a}{2}\sin\varphi = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{28.}$$

und aus Gleichung (19.)

$$z = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{29.}$$

Dadurch erhält man

$$(30.)\quad \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a}{2}\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\varphi,\quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dies gibt nach Formel Nr. 230a der Tabelle in Übereinstimmung mit den Gleichungen (24.) für die Tangente die Gleichungen

$$(31.)\qquad -\frac{x'-x}{\sin\varphi} = \frac{y'-y}{\cos\varphi} = \frac{z'-z}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Für die Normalebene findet man in Übereinstimmung mit Gleichung (26.) nach Formel Nr. 231a der Tabelle die Gleichung

$$(32.)\quad -\sin\varphi(x'-x) + \cos\varphi(y'-y) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)(z'-z) = 0,$$

oder

$$(32a.)\qquad -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + z'\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

## § 146.

## Schmiegungsebene, Hauptnormale und Binormale.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 232 bis 236.)

Jede Ebene, welche durch die Tangente der Raumkurve im Punkte $P$ gelegt werden kann, ist eine *Tangentialebene* der Kurve in diesem Punkte. Unter allen diesen unendlich vielen Tangentialebenen gibt es eine, die sich der Kurve im Punkte $P$ am engsten anschmiegt und deshalb „*Schmiegungsebene*" genannt wird. Diese Ebene geht nicht nur durch die beiden unendlich nahen Punkte $P$ und $P_1$ der Raumkurve, sondern noch durch einen dritten unendlich nahen Punkt $P_2$.

Um die Gleichung der Schmiegungsebene zu finden, nehme man an, daß die Raumkurve durch die drei Gleichungen

$$(1.)\qquad x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t)$$

gegeben sei, und betrachte die Kurvenpunkte $P$, $P_1$, $P_2$, welche den Werten

$$t,\quad t_1 = t + \varDelta t,\quad t_2 = t + 2\varDelta t$$

zugeordnet sind. Dann wird

(2.) $$x_1 = f_1(t_1), \quad y_1 = f_2(t_1), \quad z_1 = f_3(t_1),$$

(3.) $$x_2 = f_1(t_2), \quad y_2 = f_2(t_2), \quad z_2 = f_3(t_2).$$

Soll die Ebene mit der Gleichung

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

durch den Punkt $P$ gehen, so muß

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein. Dies gibt

(4.) $$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$

wobei $x'$, $y'$, $z'$ die laufenden Koordinaten sind. Da die Ebene auch durch den Punkt $P_1$ geht, so hätte man ihre Gleichung auch in der Form

(5.) $$A(x' - x_1) + B(y' - y_1) + C(z' - z_1) = 0$$

schreiben können; außerdem findet man aus Gleichung (4.)

(6.) $$A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z) = 0.$$

Damit die Ebene auch durch den Punkt $P_2$ geht, muß Gleichung (5.) für die Koordinaten dieses Punktes befriedigt werden; man erhält also

(7.) $$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0.$$

Indem man Gleichung (6.) von Gleichung (7.) abzieht, findet man schließlich noch

(8.) $$A(x_2 - 2x_1 + x) + B(y_2 - 2y_1 + y) + C(z_2 - 2z_1 + z) = 0.$$

Dabei ist nach Formel Nr. 16 der Tabelle

(9.) $$\lim_{t_1=t} \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \lim_{t_1=t} \frac{f_1(t_1) - f_1(t)}{t_1 - t} = \lim_{\varDelta t=0} \frac{f_1(t + \varDelta t) - f_1(t)}{\varDelta t} = \frac{dx}{dt}$$

und nach Formel Nr. 82a der Tabelle

(10.) $$\lim_{t_1=t} \frac{x_2 - 2x_1 + x}{(t_1 - t)^2}$$
$$= \lim_{\varDelta t=0} \frac{f_1(x + 2\varDelta t) - 2f_1(x + \varDelta t) + f_1(t)}{\varDelta t^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Rücken also die 3 Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ auf der Raumkurve einander unendlich nahe, indem $\varDelta t$ verschwindend klein wird, so muß man die Größen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ bezw. durch $dx$, $dy$, $dz$ und die Größen $x_2 - 2x_1 + x$, $y_2 - 2y_1 + y$,

$z_2 - 2z_1 + z$ bezw. durch $d^2x$, $d^2y$, $d^2z$ ersetzen. Die Gleichungen (6.) und (8.) gehen dadurch über in

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0.$$

Daraus findet man

$$\frac{A}{C} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \frac{B}{C} = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x}. \tag{11.}$$

Setzt man also

$$\begin{cases} dyd^2z - dzd^2y = P,^{*)} \\ dzd^2x - dxd^2z = Q, \\ dxd^2y - dyd^2x = R, \end{cases} \tag{12.}$$

so kann man

$$A = P, \quad B = Q, \quad C = R \tag{13.}$$

setzen und findet für die Schmiegungsebene die Gleichung

$$P(x' - x) + Q(y' - y) + R(z' - z) = 0. \tag{14.}$$

Die Gerade, in welcher die Normalebene von der Schmiegungsebene geschnitten wird, heißt „*Hauptnormale*"; ihre Gleichungen sind also

$$\begin{cases} (x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0, \\ P(x' - x) + Q(y' - y) + R(z' - z) = 0, \end{cases} \tag{15.}$$

oder, wenn man $y' - y$, bezw. $x' - x$ eliminiert,

$$\begin{cases} x' - x = \dfrac{Rdy - Qdz}{Qdx - Pdy}(z' - z), \\[2ex] y' - y = \dfrac{Pdz - Rdx}{Qdx - Pdy}(z' - z), \end{cases} \tag{16.}$$

oder

$$\frac{x' - x}{Rdy - Qdz} = \frac{y' - y}{Pdz - Rdx} = \frac{z' - z}{Qdx - Pdy}. \tag{17.}$$

Die Gerade, welche auf der Schmiegungsebene im Punkte $P$ senkrecht steht, heißt „*Binormale*"; ihre Gleichungen haben die Form

---

*) Mit $P$ ist außerdem der betrachtete Punkt der Raumkurve bezeichnet worden; die beiden Bedeutungen von $P$ dürfen nicht miteinander verwechselt werden.

$$x' - x = m(z' - z),$$
$$y' - y = n(z' - z),$$

wobei bekanntlich

$$m = \frac{P}{R}, \quad n = \frac{Q}{R}$$

sein muß; dies gibt

$$x' - x = \frac{P}{R}(z' - z), \quad y' - y = \frac{Q}{R}(z' - z), \tag{18.}$$

oder

$$\frac{x' - x}{P} = \frac{y' - y}{Q} = \frac{z' - z}{R}. \tag{19.}$$

Es seien wieder $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Tangente im Kurvenpunkte $P$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, dann ist nach Formel Nr. 229 der Tabelle

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{20.}$$

Mit $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ mögen die Winkel bezeichnet werden, welche die Binormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, dann ist, wenn man

$$P^2 + Q^2 + R^2 = M^2 \tag{21.}$$

setzt,

$$\cos\alpha' = \frac{P}{M}, \quad \cos\beta' = \frac{Q}{M}, \quad \cos\gamma' = \frac{R}{M}.\text{*)} \tag{22.}$$

---

*) Um die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zu bestimmen, die eine Gerade $g$ mit den Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, legt man durch den Nullpunkt die Gerade $g'$ parallel zu $g$; dann hat $g'$ die Gleichungen

$$x = mz, \quad y = nz.$$

Ist dann $P$ ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ auf $g'$, und legt man durch $P$ Ebenen parallel zu den Koordinaten-Ebenen, so findet man aus dem dadurch entstehenden Parallelepipedon, dessen Diagonale $OP = r$ ist,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{mz}{\sqrt{m^2z^2 + n^2z^2 + z^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

und in ähnlicher Weise

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}.$$

Mit $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ mögen die Winkel bezeichnet werden, welche die Hauptnormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Um die Kosinusse dieser Winkel zu berechnen, beachte man, daß aus Gleichung (14.) für $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$ unmittelbar

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{23.}$$

folgt, und daß mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

$$\begin{aligned}(Rdy - Qdz)^2 &+ (Pdz - Rdx)^2 + (Qdx - Pdy)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Pdx + Qdy + Rdz)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)ds^2 = M^2ds^2\end{aligned} \tag{24.}$$

wird. Deshalb findet man ohne weiteres aus den Gleichungen (16.)

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\alpha'' = \frac{Rdy - Qdz}{Mds}, \quad \cos\beta'' = \frac{Pdz - Rdx}{Mds}, \\ &\cos\gamma'' = \frac{Qdx - Pdy}{Mds}. \end{aligned}\right. \tag{25.}$$

## § 147.

## Krümmungskreis und Kontingenzwinkel, Torsionswinkel und Halbmesser der zweiten Krümmung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 237 bis 239.)

Der Kreis, welcher durch drei unendlich nahe Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ der Raumkurve hindurchgeht, wird auch hier „*Krümmungskreis*“ genannt.

Die Gleichungen eines Kreises im Raume sind bekanntlich

$$A(x' - \xi) + B(y' - \eta) + C(z' - \zeta) = 0, \tag{1.}$$

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{2.}$$

wobei Gleichung (1.) die Ebene des Kreises darstellt; dann ist Gleichung (2.) die Gleichung einer Kugel mit dem Halbmesser $\varrho$, deren Mittelpunkt $M$ die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ hat. Der Krümmungskreis hat ebenfalls den Mittelpunkt $M$ und den Halbmesser $\varrho$.

Da die Ebene des Kreises mit der Schmiegungsebene, welche durch die 3 unendlich nahen Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht, zusammenfällt, so wird

$$A = P, \quad B = Q, \quad C = R,$$

so daß Gleichung (1.) übergeht in

$$P(x' - \xi) + Q(y' - \eta) + R(z' - \zeta) = 0. \tag{3.}$$

Damit die Kugel durch die drei Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{4.}$$

$$(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{5.}$$

$$(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2 + (z_2 - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0 \tag{6.}$$

befriedigt werden. Indem man die Gleichungen (4.) und (5.) bezw. von den Gleichungen (5.) und (6.) abzieht, erhält man

$$\begin{aligned}(7.)\quad &(x_1{}^2 - x^2) - 2\xi(x_1 - x) \\ &\quad + (y_1{}^2 - y^2) - 2\eta(y_1 - y) + (z_1{}^2 - z^2) - 2\zeta(z_1 - z) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8.)\quad &(x_2{}^2 - x_1{}^2) - 2\xi(x_2 - x_1) \\ &\quad + (y_2{}^2 - y_1{}^2) - 2\eta(y_2 - y_1) + (z_2{}^2 - z_1{}^2) - 2\zeta(z_2 - z_1) = 0.\end{aligned}$$

Dividiert man Gleichung (7.) durch $t_1 - t$ und Gleichung (8.) durch $t_2 - t_1$, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}(9.)\quad &(x_1 + x - 2\xi)\frac{x_1 - x}{t_1 - t} + (y_1 + y - 2\eta)\frac{y_1 - y}{t_1 - t} \\ &\qquad + (z_1 + z - 2\zeta)\frac{z_1 - z}{t_1 - t} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10.)\quad &(x_2 + x_1 - 2\xi)\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\ &\qquad + (z_2 + z_1 - 2\zeta)\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = 0.\end{aligned}$$

Indem man jetzt noch Gleichung (9.) von Gleichung (10.) abzieht und beachtet, daß

$$\begin{aligned}(x_2 + x_1 - 2\xi)\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} &= (x_2 + x_1 - 2\xi)\frac{x_1 - x}{t_1 - t} \\ &\quad + (x_2 + x_1 - 2\xi)\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - \frac{x_1 - x}{t_1 - t}\right)\end{aligned}$$

ist, so findet man

$$(11.)\quad (x_2-x)\frac{x_1-x}{t_1-t}+(x_2+x_1-2\xi)\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}-\frac{x_1-x}{t_1-t}\right)$$
$$+(y_2-y)\frac{y_1-y}{t_1-t}+(y_2+y_1-2\eta)\left(\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}-\frac{y_1-y}{t_1-t}\right)$$
$$+(z_2-z)\frac{z_1-z}{t_1-t}+(z_2+z_1-2\zeta)\left(\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}-\frac{z_1-z}{t_1-t}\right)=0.$$

Aus den Gleichungen (9.) und (11.) folgt daher, wenn man Gleichung (11.) noch durch $2\varDelta t$ dividiert und die Gleichungen

$$\lim_{t_1=t}\frac{x_1-x}{t_1-t}=\frac{dx}{dt},\quad \lim_{\varDelta t=0}\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}-\frac{x_1-x}{t_1-t}\right)\frac{1}{\varDelta t}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

(vergl. § 146, Gl. (9.) und (14.)) beachtet,

$$(12.)\quad (x-\xi)\frac{dx}{dt}+(y-\eta)\frac{dy}{dt}+(z-\zeta)\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(13.)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2+(x-\xi)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-\zeta)\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Schneller kommt man zu diesen Gleichungen, wenn man die früher entwickelten Regeln der Differentiation anwendet. Setzt man nämlich

$$(14.)\quad F(x,y,z)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-\varrho^2=0,$$

so sind $x$, $y$, $z$ und deshalb auch $F(x,y,z)$ noch Funktionen von $t$. Bezeichnet man daher $F(x,y,z)$ mit $G(t)$, so gelten die drei Gleichungen

$$F(x,y,z)=G(t)=0,\quad F(x_1,y_1,z_1)=G(t_1)=0,$$
$$F(x_2,y_2,z_2)=G(t_2)=0,$$

weil die Kugel durch die drei Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ hindurchgeht. Deshalb gelten auch die Gleichungen

$$\frac{G(t_1)-G(t)}{t_1-t}=0\quad\text{und}\quad\frac{G(t_2)-G(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{G(t_1)-G(t)}{t_1-t}=0,$$

oder, wenn

$$t_1-t=t_2-t_1=\varDelta t$$

verschwindend klein wird, und deshalb die drei Punkte $P$, $P_1$ und $P_2$ einander unendlich nahe rücken,

$$(15.)\quad \frac{dG(t)}{dt}=\frac{dF(x,y,z)}{dt}=0\quad\text{und}\quad\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{d^2F(x,y,z)}{dt^2}=0.$$

Dies gibt in Übereinstimmung mit den Gleichungen (12.) und (13.)

$$2(x-\xi)\frac{dx}{dt}+2(y-\eta)\frac{dy}{dt}+2(z-\zeta)\frac{dz}{dt}=0,$$

$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2(x-\xi)\frac{d^2x}{dt^2}+2(y-\eta)\frac{d^2y}{dt^2}+2(z-\zeta)\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

oder

$$(16.)\quad (x-\xi)dx+(y-\eta)dy+(z-\zeta)dz=0,$$

$$(17.)\quad (x-\xi)d^2x+(y-\eta)d^2y+(z-\zeta)d^2z+ds^2=0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $x-\xi$, so erhält man

$$(18.)\qquad R(y-\eta)-Q(z-\zeta)+dx\,ds^2=0$$

und in ähnlicher Weise

$$(19.)\qquad P(z-\zeta)-R(x-\xi)+dy\,ds^2=0,$$

$$(20.)\qquad Q(x-\xi)-P(y-\eta)+dz\,ds^2=0.$$

Da die Schmiegungsebene ebenfalls durch den Punkt $P$ hindurchgeht, so wird

$$(21.)\qquad P(x-\xi)+Q(y-\eta)+R(z-\zeta)=0,$$

folglich ist

$$(22.)\quad \begin{cases} (P^2+Q^2+R^2)(x-\xi)=(Rdy-Qdz)ds^2, \\ (P^2+Q^2+R^2)(y-\eta)=(Pdz-Rdx)ds^2, \\ (P^2+Q^2+R^2)(z-\zeta)=(Qdx-Pdy)ds^2. \end{cases}$$

Bezeichnet man also $P^2+Q^2+R^2$ wieder mit $M^2$, so findet man

$$(23.)\quad \begin{cases} x-\xi=\dfrac{(Rdy-Qdz)ds^2}{M^2},\quad y-\eta=\dfrac{(Pdz-Rdx)ds^2}{M^2}, \\ z-\zeta=\dfrac{(Qdx-Pdy)ds^2}{M^2}; \end{cases}$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (24.) in § 146

$$(24.)\quad \varrho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\frac{M^2ds^6}{M^4}=\frac{ds^6}{M^2},$$

oder

$$(25.)\qquad \varrho=\pm\frac{ds^3}{M}.$$

In dieser Formel ist auch der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser $\varrho$ bei einer *ebenen* Kurve als besonderer Fall enthalten; denn bei einer ebenen Kurve wird

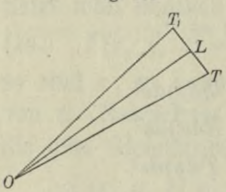
$$z = 0, \quad \text{also auch} \quad dz = 0, \; d^2z = 0,$$

deshalb werden auch $P$ und $Q$ gleich Null und Gleichung (25.) geht über in

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{R} = \pm \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Den Wert von $\varrho$, auf den es besonders ankommt, kann man auch für Raumkurven mit Hilfe des Kontingenzwinkels $d\varepsilon$ finden, den zwei unendlich nahe Tangenten miteinander bilden. Es seien wieder $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Tangente im Kurvenpunkte $P$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Diese Winkel mögen in $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ übergehen, wenn $t$ in $t + dt$ übergeht. Um den Winkel $d\varepsilon$ zu berechnen, lege man durch den Nullpunkt zwei Gerade $OT$ und $OT_1$ von der Länge 1, die zu den beiden Tangenten parallel sind und deshalb ebenfalls den Winkel $d\varepsilon$ miteinander bilden (Fig. 151). Dann hat $T$ die Koordinaten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und $T_1$ hat die Koordinaten

Fig. 151.




$$(26.)\quad \begin{cases} \cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha + d(\cos\alpha), \\ \cos(\beta + d\beta) = \cos\beta + d(\cos\beta), \\ \cos(\gamma + d\gamma) = \cos\gamma + d(\cos\gamma). \end{cases}$$

Deshalb wird

$$(27.)\qquad \overline{TT_1}^2 = [d(\cos\alpha)]^2 + [d(\cos\beta)]^2 + [d(\cos\gamma)]^2.$$

Halbiert man jetzt den Winkel $TOT_1 = d\varepsilon$ durch die Gerade $OL$, so wird

$$(28.)\qquad \sin\left(\frac{d\varepsilon}{2}\right) = \frac{TL}{OT} = \tfrac{1}{2}TT_1.$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 1 der Tabelle

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad \text{oder} \quad \lim \sin z = \lim z,$$

folglich wird, da hier $d\varepsilon$ ein verschwindend kleiner Winkel ist,

$$2\sin\left(\frac{d\varepsilon}{2}\right) = d\varepsilon = TT_1, \tag{29.}$$

also

$$d\varepsilon^2 = [d(\cos\alpha)]^2 + [d(\cos\beta)]^2 + [d(\cos\gamma)]^2. \tag{30.}$$

Dabei ist

$$\left\{\begin{aligned} d(\cos\alpha) &= d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2}, \\ d(\cos\beta) &= d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2}, \\ d(\cos\gamma) &= d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2}. \end{aligned}\right. \tag{31.}$$

Aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt sodann durch Differentiation

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z, \tag{32.}$$

also

$$\begin{aligned} ds(dsd^2x - dxd^2s) &= dx^2d^2x + dy^2d^2x + dz^2d^2x \\ &\quad - dx^2d^2x - dxdyd^2y - dxdzd^2z \\ &= - dy(dxd^2y - dyd^2x) + dz(dzd^2x - dxd^2z), \end{aligned}$$

oder

$$ds(dsd^2x - dxd^2s) = Qdz - Rdy, \tag{33.}$$

und dem entsprechend

$$ds(dsd^2y - dyd^2s) = Rdx - Pdz, \tag{34.}$$

$$ds(dsd^2z - dzd^2s) = Pdy - Qdx. \tag{35.}$$

Deshalb geht Gleichung (30.) über in

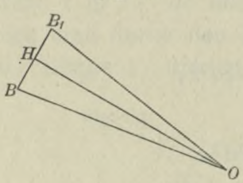
$$\begin{aligned} ds^6 \,.\, d\varepsilon^2 &= (Qdz - Rdy)^2 + (Rdx - Pdz)^2 + (Pdy - Qdx)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Pdz + Qdy + Rdz)^2 \\ &= M^2 ds^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \pm \frac{M}{ds^3} = \frac{1}{\varrho}. \tag{36.}$$

Diesen Ausdruck nennt man die *erste* Krümmung, während man unter der *zweiten* Krümmung die Größe $\frac{d\varepsilon'}{ds}$ versteht, wobei der „*Torsionswinkel*“ $d\varepsilon'$ der unendlich kleine Winkel ist, den zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen miteinander bilden. Da die Binormale auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, so kann man $d\varepsilon'$ auch als den Winkel erklären, den zwei aufeinander folgende Binormalen miteinander bilden. Nun seien wieder $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Winkel, welche die Binormale im Kurvenpunkte $P$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Diese Winkel mögen in $\alpha' + d\alpha'$, $\beta' + d\beta'$, $\gamma' + d\gamma'$ übergehen, wenn $t$ in $t + dt$ übergeht. Um den Torsionswinkel $d\varepsilon'$ zu berechnen, legt man jetzt wieder durch den Nullpunkt die beiden Geraden $OB$ und $OB_1$ von der Länge 1, die zu den beiden Binormalen parallel sind und deshalb ebenfalls den Winkel $d\varepsilon'$ miteinander bilden (Fig. 152). Der Punkt $B$ hat dann die Koordinaten

Fig. 152.




$$\text{(37.)}\quad \cos\alpha' = \frac{P}{M},\quad \cos\beta' = \frac{Q}{M},\quad \cos\gamma' = \frac{R}{M},$$

und $B_1$ hat die Koordinaten

$$\text{(38.)}\quad \begin{cases} \cos(\alpha' + d\alpha') = \cos\alpha' + d(\cos\alpha'), \\ \cos(\beta' + d\beta') = \cos\beta' + d(\cos\beta'), \\ \cos(\gamma' + d\gamma') = \cos\gamma' + d(\cos\gamma'). \end{cases}$$

Deshalb wird

$$\overline{BB_1}^2 = [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2.$$

Halbiert man jetzt den Winkel $BOB_1 = d\varepsilon'$ durch die Gerade $OH$, so wird

$$\text{(39.)}\quad \sin\left(\frac{d\varepsilon'}{2}\right) = \frac{BH}{OB} = \tfrac{1}{2}BB_1,$$

da man aber auch hier $\sin\left(\frac{d\varepsilon'}{2}\right)$ mit $\frac{d\varepsilon'}{2}$ vertauschen darf, so erhält man $d\varepsilon' = BB_1$, also

$$(40.)\qquad (d\varepsilon')^2 = [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2.$$

Dabei ist

$$d(\cos\alpha') = \frac{MdP - PdM}{M^2},\quad d(\cos\beta') = \frac{MdQ - QdM}{M^2},$$

$$d(\cos\gamma') = \frac{MdR - RdM}{M^2},$$

also

$$(41.)\quad \begin{aligned} &M^4(d\varepsilon')^2 \\ &= (MdP - PdM)^2 + (MdQ - QdM)^2 + (MdR - RdM)^2 \\ &= M^2(dP^2 + dQ^2 + dR^2) + (P^2 + Q^2 + R^2)(dM)^2 \\ &\quad - 2MdM(PdP + QdQ + RdR). \end{aligned}$$

Nun ist

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2, \text{ also } MdM = PdP + QdQ + RdR,$$

folglich wird

$$(42.)\quad \begin{aligned} &M^4(d\varepsilon')^2 \\ &= M^2(dP^2 + dQ^2 + dR^2) - M^2(dM)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(dP^2 + dQ^2 + dR^2) - (PdP + QdQ + RdR)^2 \\ &= (QdR - RdQ)^2 + (RdP - PdR)^2 + (PdQ - QdP)^2. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$P = dyd^2z - dzd^2y,\quad Q = dzd^2x - dxd^2z,\quad R = dxd^2y - dyd^2x,$$

$$dP = dyd^3z - dzd^3y,\ dQ = dzd^3x - dxd^3z,\ dR = dxd^3y - dyd^3x,$$

$$(43.)\quad \begin{cases} QdR - RdQ = dx(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z), \\ RdP - PdR = dy(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z), \\ PdQ - QdP = dz(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z). \end{cases}$$

Deshalb geht Gleichung (42.) über in

$$M^4(d\varepsilon')^2 = ds^2(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2,$$

und man erhält

$$(44.)\qquad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Die Kurve ist *eben*, wenn

$$(45.)\qquad Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 0$$

ist. Setzt man

$$(46.)\qquad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{1}{\varrho'}, \text{ also } \varrho' = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

so heißt $\varrho'$ der Halbmesser der zweiten Krümmung.

## § 148.

## Die Schmiegungskugel.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 240.)

Durch vier aufeinander folgende Punkte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ der Raumkurve kann man eine Kugel legen, welche die „*Schmiegungskugel*" genannt wird und die Gleichung

$$(1.)\qquad (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2 - r^2 = 0$$

haben möge. Um die vier Größen $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $r$ zu ermitteln, beachte man, daß Gleichung (1.) für die Koordinaten der Punkte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ befriedigt werden muß; d. h. es gelten nach den Ausführungen im vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen

$$(2.)\qquad F(x, y, z) = (x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + (z - \zeta')^2 - r^2 = 0,$$

$$(3.)\qquad dF(x, y, z) = 2[(x - \xi')dx + (y - \eta')dy + (z - \zeta')dz] = 0,$$

$$(4.)\qquad d^2F(x, y, z) = 2[(x - \xi')d^2x + (y - \eta')d^2y + (z - \zeta')d^2z + ds^2] = 0,$$

$$(5.)\qquad d^3F(x, y, z) = 2[(x - \xi')d^3x + (y - \eta')d^3y + (z - \zeta')d^3z + 3dsd^2s] = 0.$$

Multipliziert man Gleichung (3.) mit $d^2yd^3z - d^2zd^3y$, Gleichung (4.) mit $d^3ydz - d^3zdy$ und Gleichung (5.) mit $dyd^2z - dzd^2y$, so ergibt sich durch Addition dieser drei Gleichungen

$$(6.)\qquad (x - \xi')(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z) + (d^3ydz - d^3zdy)ds^2 + 3Pdsd^2s = 0,$$

oder

$$(7.)\qquad x - \xi' = \frac{ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

und in ähnlicher Weise findet man

$$(8.)\qquad y - \eta' = \frac{ds^2 \,.\, dQ - 3Qdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

$$(9.)\qquad z - \zeta' = \frac{ds^2 \,.\, dR - 3Rdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}.$$

Daraus folgt

$$(10.)\quad (Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2r^2 = (ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s)^2 + (ds^2 \,.\, dQ - 3Qdsd^2s)^2 + (ds^2 \,.\, dR - 3Rdsd^2s)^2.$$

Diesen Ausdruck kann man noch auf eine etwas einfachere Form bringen. Es war nämlich

$$\cos\alpha' = \frac{P}{M} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{ds^3}{M},$$

folglich ist

$$(11.)\quad \frac{\cos\alpha'}{\varrho} = \frac{P}{ds^3}, \quad d\Big(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\Big) = \frac{ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s}{ds^5};$$

deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$(12.)\quad r^2 = \frac{ds^{10}\Big\{\Big[d\Big(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\Big)\Big]^2 + \Big[d\Big(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\Big)\Big]^2 + \Big[d\Big(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\Big)\Big]^2\Big\}}{(Pd^3x + Qd^3y + Rdz)^2}.$$

Ferner ist

$$\varrho = \frac{ds^3}{M}, \quad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

also

$$(13.)\qquad \varrho^2\varrho' = \frac{ds^6}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z};$$

$$d\Big(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\Big) = \frac{\varrho d(\cos\alpha') - \cos\alpha' \,.\, d\varrho}{\varrho^2},$$

folglich wird

$$(14.)\quad \varrho^4\Big\{\Big[d\Big(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\Big)\Big]^2 + \Big[d\Big(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\Big)\Big]^2 + \Big[d\Big(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\Big)\Big]^2\Big\}$$
$$= \varrho^2\{[d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2\}$$
$$- 2\varrho d\varrho[\cos\alpha' d(\cos\alpha') + \cos\beta' d(\cos\beta') + \cos\gamma' d(\cos\gamma')]$$
$$+ d\varrho^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma').$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 239 der Tabelle

$$(15.)\quad [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2 = (d\varepsilon')^2, \quad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

und außerdem ist

$$(16.)\qquad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

also

$$\cos\alpha' d(\cos\alpha') + \cos\beta' d(\cos\beta') + \cos\gamma' d(\cos\gamma') = 0,$$

folglich geht Gleichung (14.) über in

$$(17.)\quad \varrho^4\left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}$$
$$= \varrho^2(d\varepsilon')^2 + d\varrho^2 = \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2 ds^2 + d\varrho^2.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (13.) und (17.) findet man daher aus Gleichung (12.)

$$\varrho^4 r^2 = \varrho^4 \varrho'^2\left[\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\right],$$

also

$$(18.)\qquad r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

## § 149.

## Übungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll für die Schraubenlinie mit den Gleichungen

$$(1.)\qquad x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = c\varphi$$

die Schmiegungsebene, die Hauptnormale, die Binormale, den Krümmungskreis, den Halbmesser der zweiten Krümmung und die Schmiegungskugel bestimmen.

**Auflösung.** Aus den Gleichungen (1.) folgt

$$(2.)\quad dx = -a\sin\varphi d\varphi,\qquad dy = a\cos\varphi d\varphi,\qquad dz = cd\varphi,$$

$$(3.)\quad d^2x = -a\cos\varphi d\varphi^2,\quad d^2y = -a\sin\varphi d\varphi^2,\quad d^2z = 0,$$

$$(4.)\quad d^3x = +a\sin\varphi d\varphi^3,\quad d^3y = -a\cos\varphi d\varphi^3,\quad d^3z = 0;$$

folglich wird

$$(5.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2,$$

$$(6.)\qquad \left\{\begin{array}{l} P = dyd^2z - dzd^2y = ac\sin\varphi d\varphi^3, \\ Q = dzd^2x - dxd^2z = -ac\cos\varphi d\varphi^3, \\ R = dxd^2y - dyd^2x = a^2 d\varphi^3, \end{array}\right.$$

$$(7.)\qquad M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = a^2(a^2 + c^2)d\varphi^6,$$

$$(8.)\qquad Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = a^2cd\varphi^6,$$

$$(9.)\quad \begin{cases} Rdy - Qdz = a(a^2 + c^2)\cos\varphi d\varphi^4, \\ Pdz - Rdx = a(a^2 + c^2)\sin\varphi d\varphi^4, \\ Qdx - Pdy = 0. \end{cases}$$

Die Schmiegungsebene hat daher die Gleichung

$$ac\sin\varphi(x' - x) - ac\cos\varphi(y' - y) + a^2(z' - z) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.)

$$cy(x' - x) - cx(y' - y) + a^2(z' - z) = 0,$$

oder

$$(10.)\quad c(yx' - xy') + a^2(z' - z) = 0.$$

Die Hauptnormale hat daher nach Formel Nr. 233 der Tabelle die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{x} = \frac{y' - y}{y}, \quad z' - z = 0,$$

oder

$$(11.)\quad yx' - xy' = 0, \quad z' - z = 0;$$

d. h. *die Hauptnormale geht stets durch die Achse der Schraubenlinie und ist parallel zur XY-Ebene.*

Dieser Satz wird auch bestätigt durch die Berechnung der Winkel $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, welche die Hauptnormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, denn es wird

$$(12.)\quad \begin{cases} \cos\alpha'' = \dfrac{Rdy - Qdz}{Mds} = \dfrac{a(a^2 + c^2)\cos\varphi}{a(a^2 + c^2)} = \cos\varphi, \\[2ex] \cos\beta'' = \dfrac{Pdz - Rdx}{Mds} = \dfrac{a(a^2 + c^2)\sin\varphi}{a(a^2 + c^2)} = \sin\varphi, \\[2ex] \cos\gamma'' = \dfrac{Qdx - Pdy}{Mds} = 0. \end{cases}$$

Die Binormale hat nach Formel Nr. 234 der Tabelle die Gleichung

$$\frac{x' - x}{ac\sin\varphi} = \frac{y' - y}{-ac\cos\varphi} = \frac{z' - z}{a^2},$$

oder

$$(13.)\quad \frac{x' - x}{cy} = -\frac{y' - y}{cx} = \frac{z' - z}{a^2}.$$

Die Winkel $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, die sie mit den Koordinaten-Achsen bildet, werden bestimmt durch die Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{P}{M} = \dfrac{cy}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \\[2ex] \cos\beta' = \dfrac{Q}{M} = -\dfrac{cx}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \\[2ex] \cos\gamma' = \dfrac{R}{M} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Der Winkel $\gamma'$ ist also konstant, d. h. *die Neigung der Binormale gegen die Z-Achse und deshalb auch gegen die XY-Ebene ist konstant.*

Ferner ist

$$(15.)\quad \varrho = \pm\frac{ds^3}{M} = \pm\frac{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{a^2+c^2}} = \pm\frac{a^2+c^2}{a}.$$

*Der Halbmesser der ersten Krümmung ist also konstant.*

Daraus folgt

$$(16.)\quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = 0 \quad \text{und deshalb auch} \quad \frac{d\varrho}{ds} = 0.$$

*Auch der Halbmesser der zweiten Krümmung ist konstant,* denn es wird

$$(17.)\quad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{a^2(a^2+c^2)}{a^2c} = \frac{a^2+c^2}{c}.$$

Endlich ist

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \varrho^2,$$

also

$$(18.)\quad r = \varrho = \frac{a^2+c^2}{a}.$$

*Die Schmiegungskugel hat denselben Halbmesser und deshalb auch denselben Mittelpunkt wie der Krümmungskreis.*

Dies gibt nach Formel Nr. 237 der Tabelle

$$\xi' = \xi = x - \frac{(Rdy - Qdz)ds^2}{M^2} = a\cos\varphi - \frac{(a^2+c^2)^2 a\cos\varphi}{a^2(a^2+c^2)},$$

$$\eta' = \eta = y - \frac{(Pdz - Rdx)ds^2}{M^2} = a\sin\varphi - \frac{(a^2+c^2)^2 a\sin\varphi}{a^2(a^2+c^2)},$$

$$\zeta' = \zeta = z - \frac{(Qdx - Pdy)ds^2}{M^2} = c\varphi,$$

oder

$$\xi' = \xi = -\frac{c^2}{a}\cos\varphi, \quad \eta' = \eta = -\frac{c^2}{a}\sin\varphi, \quad \zeta' = \zeta = c\varphi. \tag{19.}$$

*Der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, der mit dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zusammenfällt, beschreibt also wieder eine Schraubenlinie, die aus der ursprünglichen entsteht, indem man a mit* $-\frac{c^2}{a}$ *vertauscht.*

**Aufgabe 2.** Man soll für die Raumkurve dritten Grades mit den Gleichungen

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{3} \tag{20.}$$

die beiden Krümmungshalbmesser, den Halbmesser der Schmiegungskugel und die Krümmungsmittelpunktskurve ermitteln.

**Auflösung.** Hier ist

$$dx = dt, \quad dy = tdt, \quad dz = t^2dt, \tag{21.}$$

$$d^2x = 0, \quad d^2y = dt^2, \quad d^2z = 2tdt^2, \tag{22.}$$

$$d^3x = 0, \quad d^3y = 0, \quad d^3z = 2dt^3, \tag{23.}$$

folglich wird

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (t^4 + t^2 + 1)dt^2, \tag{24.}$$

$$P = t^2dt^3, \quad Q = -2tdt^3, \quad R = dt^3, \tag{25.}$$

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = (t^4 + 4t^2 + 1)dt^6, \tag{26.}$$

$$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 2dt^6, \tag{27.}$$

$$\begin{cases} Rdy - Qdz = (2t^3 + t)dt^4, \\ Pdz - Rdx = (t^4 - 1)dt^4, \\ Qdx - Pdy = (-t^3 - 2t)dt^4. \end{cases} \tag{28.}$$

Dies gibt

$$\varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{(t^4+t^2+1)^3}{t^4+4t^2+1}, \quad \varrho = \pm\frac{(t^4+t^2+1)\sqrt{t^4+t^2+1}}{\sqrt{t^4+4t^2+1}}, \tag{29.}$$

$$\varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{1}{2}(t^4 + 4t^2 + 1), \tag{30.}$$

$$2\varrho\frac{d\varrho}{dt} = \frac{2(t^4 + t^2 + 1)^2t(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)}{(t^4 + 4t^2 + 1)^2},$$

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{(t^4 + t^2 + 1)t^2(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)^2}{(t^4 + 4t^2 + 1)^3},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{(t^4+t^2+1)^3}{t^4+4t^2+1}$$
$$+ \frac{(t^4+4t^2+1)^2 t^2 (4t^6+21t^4+12t^2-1)^2}{4(t^4+4t^2+1)^3},$$

oder

$$(31.)\quad r^2 = \frac{4(t^4+t^2+1)^3 + t^2(4t^6+21t^4+12t^2-1)^2}{4(t^4+4t^2+1)}.$$

Schließlich wird

$$x - \xi = \frac{(Rdy - Qdz)ds^2}{M^2} = \frac{(2t^3+t)(t^4+t^2+1)}{t^4+4t^2+1},$$
$$y - \eta = \frac{(Pdz - Rdx)ds^2}{M^2} = \frac{(t^4-1)(t^4+t^2+1)}{t^4+4t^2+1},$$
$$z - \zeta = \frac{(Qdx - Rdy)ds^2}{M^2} = \frac{-(t^3+2t)(t^4+t^2+1)}{t^4+4t^2+1},$$

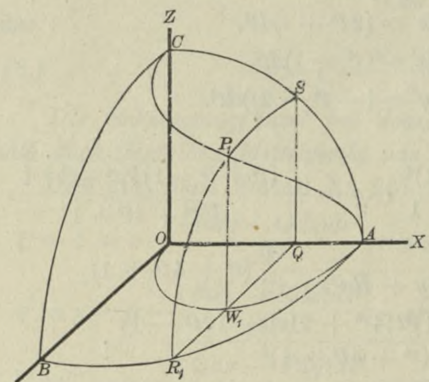
folglich wird

$$(32.)\quad \xi = \frac{-2t^7 - 2t^5 + t^3}{t^4+4t^2+1},\quad \eta = \frac{-2t^8 - t^6 + 4t^4 + 3t^2 + 2}{2(t^4+4t^2+1)},$$
$$\zeta = \frac{4t^7 + 13t^5 + 10t^3 + 6t}{3(t^4+4t^2+1)}.$$

**Aufgabe 3.** Man soll von der *sphärischen Lemniskate* mit den Gleichungen

$$(33.)\quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

Fig. 153.




die Schmiegungsebene, die beiden Krümmungshalbmesser und den Halbmesser der Schmiegungskugel ermitteln.

**Auflösung.** Setzt man hier wieder wie in § 145

$$(34.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(1 + \cos\varphi), \\ y = \dfrac{a}{2}\sin\varphi, \\ z = a\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right), \end{cases}$$

oder, wenn man $\varphi = 2t$ setzt,

(34a.) $x = \frac{a}{2}[1 + \cos(2t)] = a\cos^2 t, \quad y = \frac{a}{2}\sin(2t), \quad z = a\sin t,$

so findet man

(35.) $dx = -a\sin(2t)dt, \quad dy = a\cos(2t)dt, \quad dz = a\cos t dt,$

(36.) $d^2x = -2a\cos(2t)dt^2, \; d^2y = -2a\sin(2t)dt^2, \; d^2z = -a\sin t dt^2,$

(37.) $d^3x = +4a\sin(2t)dt^3, \; d^3y = -4a\cos(2t)dt^3, \; d^3z = -a\cos t dt^3,$

folglich wird

(38.) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(1 + \cos^2 t)dt^2,$$

(39.) $$\begin{cases} P = a^2[-\cos(2t)\sin t + 2\sin(2t)\cos t]dt^3 = a^2\sin t(1 + 2\cos^2 t)dt^3, \\ Q = a^2[-2\cos(2t)\cos t - \sin(2t)\sin t]dt^3 = -2a^2\cos^3 t dt^3, \\ R = 2a^2[\sin^2(2t) + \cos^2(2t)]dt^3 = 2a^2 dt^3, \end{cases}$$

(40.) $$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = a^4(5 + 3\cos^2 t)dt^6,$$

(41.) $$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 6a^3\cos t dt^6.$$

Dies gibt für die Gleichung der Schmiegungsebene

(42.) $(x' - x)\sin t(1 + 2\cos^2 t) - 2(y' - y)\cos^3 t + 2(z' - z) = 0.$

Aus den Gleichungen (34.) und (34a.) folgt aber

(43.) $$\cos^2 t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{z}{a}, \quad \cos t = \frac{y}{z},$$

(44.) $y^2 = ax - x^2 = (a - x)x, \quad z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a(a - x),$

folglich geht Gleichung (42.) über in

(45.) $(x' - x)z^2(a + 2x) - 2(y' - y)axy + 2a^2z(z' - z) = 0.$

Dabei ist aber

$$-xz^2(a + 2x) + 2axy^2 - 2a^2z^2 = a^2(x - a)(x + 2a),$$

folglich hat die Schmiegungsebene die Gleichung

(46.) $(x - a)(2x + a)x' + 2xyy' - 2azz' - a(x - a)(x + 2a) = 0.$

Ferner ist

(47.) $$\varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{a^2(1 + \cos^2 t)^3}{5 + 3\cos^2 t} = \frac{(a + x)^3}{5a + 3x},$$

also

(48.) $$\varrho = \pm \frac{(a + x)\sqrt{a + x}}{\sqrt{5a + 3x}},$$

(49.) $$\varrho\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{6a^2\sin t\cos t(1 + \cos^2 t)^2(2 + \cos^2 t)}{(5 + 3\cos^2 t)^2},$$

$$(50.)\qquad \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{36\sin^2 t\cos^2 t(2+\cos^2 t)^2}{(5+3\cos^2 t)^3},$$

$$(51.)\quad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{a(5+3\cos^2 t)}{6\cos t} = \frac{(5a+3x)z}{6y},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{a^2(1+\cos^2 t)^3}{5+3\cos^2 t} + \frac{a^2\sin^2 t(2+\cos^2 t)^2}{5+3\cos^2 t},$$

oder

$$(52.)\qquad r = a.$$

Dieses Resultat war zu erwarten, denn nach den Gleichungen (33.) geht ja die Kugel mit dem Halbmesser $a$ durch alle Punkte der Kurve hindurch.

## § 150.

## Tangenten, Tangentialebenen und Normalen an eine beliebige krumme Fläche.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 241 bis 243.)

*Eine gerade Linie heißt eine Tangente der Fläche*

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y),$$

*wenn sie durch zwei unendlich nahe Punkte der Fläche hindurchgeht.*

**Aufgabe 1.** Man soll die Bedingungen finden, unter denen die Gerade

$$(2.)\qquad x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu$$

die Fläche

$$z = f(x, y)$$

im Flächenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ berührt.

**Auflösung.** Die laufenden Koordinaten der geraden Linie sind mit $x'$, $y'$, $z'$ bezeichnet worden, weil $x$, $y$, $z$ die Koordinaten des Berührungspunktes $P$ sind. Damit nun die Gerade durch diesen Berührungspunkt $P$ hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$(3.)\qquad x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

gelten. Daraus folgt

$$(4.)\qquad x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z).$$

Irgend ein Flächenpunkt $P'$, welcher dem Punkte $P$ benachbart ist, hat die Koordinaten

(5.) $x' = x + \Delta x,\quad y' = y + \Delta y,\quad z' = z + \Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y),$
wobei noch $\Delta x$ und $\Delta y$ ganz beliebig und *voneinander unabhängig* sind. Damit nun die Gerade auch durch diesen Punkt $P'$ hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$\Delta x = m\Delta z \quad \text{und} \quad \Delta y = n\Delta z \tag{6.}$$

befriedigt werden.

Läßt man jetzt $\Delta x$ und $\Delta y$ unendlich klein werden, indem man sie bezw. durch $dx$ und $dy$ ersetzt, so rückt der Punkt $P'$ dem Punkte $P$ unendlich nahe. Dann wird auch $\Delta z$ unendlich klein, und zwar geht $\Delta z$ über in

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{7.}$$

Dadurch nehmen die Gleichungen (6.) die Form an

$$dx = m\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right),\quad dy = n\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right).$$

Dies gibt

$$\left(m\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)dx + m\frac{\partial z}{\partial y} dy = 0, \tag{8.}$$

$$n\frac{\partial z}{\partial x} dx + \left(n\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)dy = 0. \tag{9.}$$

Multipliziert man Gleichung (8.) mit $n\frac{\partial z}{\partial x}$, Gleichung (9.) mit $1 - m\frac{\partial z}{\partial x}$, so erhält man durch Addition und Fortlassung des Faktors $dy$

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0. \tag{10.}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so geht die Gerade

$$x' - x = m(z' - z),\quad y' - y = n(z' - z)$$

durch zwei unendlich nahe Punkte der Fläche, d. h. sie ist eine Tangente derselben.

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, so erhält man nach Formel Nr. 226 der Tabelle

(11.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}.$$

Deshalb geht Gleichung (10.) über in

(12.) $$F_1 m + F_2 n + F_3 = 0.$$

**Aufgabe 2.** Die Gleichung einer krummen Fläche sei wieder

(13.) $$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y);$$

man soll den geometrischen Ort aller Tangenten im Flächenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ bestimmen.

**Auflösung.** Da in Aufgabe 1 die Größen $dx$ und $dy$ voneinander *unabhängig* sind, so gibt es unendlich viele Tangenten der Fläche im Punkte $P$. Davon kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man in den Gleichungen (10.) und (12.) den Wert von $m$ noch beliebig annehmen und dann den Wert von $n$ aus dieser Gleichung berechnen kann. Es wird nämlich

(14.) $$n = \frac{1 - m\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{F_1 m + F_3}{F_2}.$$

Setzt man diesen Wert von $n$ in die Gleichungen (4.) ein, so erhält man

(15.) $$x' - x = m(z' - z), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y) = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z' - z),$$

oder

(15a.) $$x' - x = m(z' - z), \quad F_2(y' - y) = -(F_1 m + F_3)(z' - z).$$

Diese Gleichungen stellen also eine Tangente im Flächenpunkte $P$ dar, welchen Wert auch $m$ haben mag. Eliminiert man jetzt aus diesen beiden Gleichungen $m$, so erhält man

(16.) $$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y),$$

oder

(16a.) $$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0.$$

Dies sind zwei verschiedene Formen für die Gleichung einer *Ebene*, in welcher alle Tangenten liegen, die im Punkte $P$ an die Fläche möglich sind. Man nennt diese Ebene daher die „*Tangentialebene der Fläche im Punkte P*".

Die Gleichung der Tangentialebene wird illusorisch, wenn

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0. \tag{17.}$$

In diesem Falle, welcher allerdings *nur ausnahmsweise* eintreten kann, liegen die Tangenten des Flächenpunktes $P$ *nicht* mehr sämtlich in derselben Ebene.

So hat z. B. die Spitze des Kegels mit der Gleichung

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{18.}$$

die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \tag{19.}$$

für diese Werte von $x$, $y$, $z$ wird aber auch

$$F_1 = \frac{2x}{a^2} = 0, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2} = 0, \quad F_3 = -\frac{2z}{c^2} = 0. \tag{20.}$$

Man nennt einen Punkt der Fläche, für welchen die Gleichungen (17.) gelten, „einen *Knotenpunkt*".

Die Gerade, welche auf der Tangentialebene im Berührungspunkte $P$ senkrecht steht, heißt „*Normale*" der Fläche; ihre Gleichungen sind, wie aus Gleichung (16a.) unmittelbar hervorgeht,

$$\frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2} = \frac{z' - z}{F_3}. \tag{21.}$$

## § 151.

## Übungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Ein *Ellipsoid* ist durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1.}$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ die Tangentialebene und die Normale bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

also

$$F_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2}, \quad F_3 = \frac{2z}{c^2}; \tag{2.}$$

deshalb wird nach Formel Nr. 242 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$\text{(3.)} \qquad \frac{x(x'-x)}{a^2} + \frac{y(y'-y)}{b^2} + \frac{z(z'-z)}{c^2} = 0,$$

oder, wenn man die Gleichungen (1.) und (3.) addiert,

$$\text{(4.)} \qquad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichungen der Normalen sind nach Formel Nr. 243 der Tabelle

$$\text{(5.)} \qquad \frac{a^2(x'-x)}{x} = \frac{b^2(y'-y)}{y} = \frac{c^2(z'-z)}{z}.$$

**Aufgabe 2.** Ein *elliptisches Paraboloid* ist durch die Gleichung

$$\text{(6.)} \qquad x^2 + a^2y^2 - 2pz = 0$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x, y, z$ die Tangentialebene und die Normale bestimmen.

**Auflösung.** Hier ist

$$F(x, y, z) = x^2 + a^2y^2 - 2pz,$$

also

$$\text{(7.)} \qquad F_1 = 2x, \quad F_2 = 2a^2y, \quad F_3 = -2p,$$

deshalb wird nach Formel Nr. 242 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$\text{(8.)} \qquad x(x'-x) + a^2y(y'-y) - p(z'-z) = 0,$$

oder, wenn man die Gleichungen (6.) und (8.) addiert,

$$\text{(9.)} \qquad xx' + a^2yy' - p(z'+z) = 0.$$

Ist z. B.

$$x = 3a, \quad y = 4, \quad \text{also} \quad 2pz = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2,$$

so geht Gleichung (9.) über in

$$\text{(9a.)} \qquad 6ax' + 8a^2y' = 2pz' + 25a^2.$$

Die Gleichungen der Normalen sind nach Formel Nr. 243 der Tabelle

$$\text{(10.)} \qquad \frac{x'-x}{x} = \frac{y'-y}{a^2y} = -\frac{z'-z}{p}.$$

§ 152.

## Krümmung der Flächen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 244 bis 250.)

Ist eine Fläche durch die Gleichung

(1.) $$z = f(x, y)$$

gegeben, so möge der Kürze wegen

(2.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt werden. Da durch jeden Punkt $P$ der Fläche unendlich viele Kurven gehen, so kann man sich die Aufgabe stellen, die Krümmung aller dieser Kurven im Punkte $P$ zu ermitteln. Dabei liegt aber der Krümmungskreis in der Schmiegungsebene; deshalb haben alle Kurven, die auf der Fläche liegen, durch den Flächenpunkt $P$ gehen und dieselbe Schmiegungsebene in diesem Punkte haben, dieselbe Krümmung. Es genügt daher, die Krümmung aller *ebenen* Kurven zu untersuchen, welche aus der Fläche von einer durch den Punkt $P$ gelegten Ebene ausgeschnitten werden. Eine solche ebene Schnittkurve möge der Kürze wegen in dem folgenden „*Schnitt*“ genannt werden.

Die Gleichungen des Schnittes seien

(3.) $$z' = f(x', y'), \quad A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$

wobei $x'$ $y'$, $z'$ die laufenden Koordinaten sind, während $x$, $y$, $z$ die Koordinaten des betrachteten Flächenpunktes $P$ sind.

Dabei war nach Formel Nr. 237 der Tabelle

(4.) $$\varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}{P^2 + Q^2 + R^2},$$

wobei

(5.) $$P = dyd^2z - dzd^2y, \quad Q = dzd^2x - dxd^2z, \quad R = dxd^2y - dyd^2x$$

war. In dem vorliegenden Falle ist

(6.) $$dz = pdx + qdy,$$

(7.) $$d^2z = dpdx + dqdy + pd^2x + qd^2y,$$

(8.) $$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

(9.) $$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0.$$

Aus den Gleichungen (8.) und (9.) folgt

$$P : A = Q : B = R : C, \tag{10.}$$

und aus den Gleichungen (6.) und (7.) findet man

$$dzd^2z = d^2z(pdx + qdy) = dz(dpdx + dqdy + pd^2x + qd^2y),$$

also

$$dz(dpdx + dqdy) = q(dyd^2z - dzd^2y) - p(dzd^2x - dxd^2z),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.) und (10.)

$$dz(dpdx + dqdy) = Pq - Qp = P\frac{Aq - Bp}{A},$$

folglich ist

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{Adz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}, \\ Q &= \frac{Bdz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}, \\ R &= \frac{Cdz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Dabei ist noch

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

also

$$dpdx + dqdy = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \tag{12.}$$

$$\varrho^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3(Aq - Bp)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2)^2 dz^2}. \tag{13.}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \quad \text{und} \quad dz = pdx + qdy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A + Cp}{B + Cq}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{Aq - Bp}{B + Cq}. \tag{14.}$$

Deshalb geht Gleichung (13.) über in

$$\varrho^2 = \frac{[(B + Cq)^2 + (A + Cp)^2 + (Aq - Bp)^2]^3}{(A^2 + B^2 + C^2)[r(B + Cq)^2 - 2s(A + Cp)(B + Cq) + t(A + Cp)^2]^2}. \tag{15.}$$

Unter den unendlich vielen Ebenen, welche durch den Punkt $P$ hindurchgehen, mögen besonders diejenigen betrachtet werden, welche durch die Normale gehen. Die von einer solchen

Ebene ausgeschnittene Kurve nennt man „*Normalschnitt*“. Die Gleichungen der Normale waren nach Formel Nr. 243 der Tabelle

$$\frac{x'-x}{F_1}=\frac{y'-y}{F_2}=\frac{z'-z}{F_3},$$

oder

(16.) $x'-x+p(z'-z)=0,\quad y'-y+q(z'-z)=0.$

Damit die Ebene $\varepsilon$ durch diese Gerade hindurchgeht, muß

$$Ap(z'-z)+Bq(z'-z)-C(z'-z)=0$$

sein; dies gibt

(17.) $$Ap+Bq-C=0.$$

Da es unendlich viele Normalschnitte gibt, so kann man eine veränderliche Größe, z. B.

(18.) $$\frac{dy}{dx}=\lambda,$$

die man einen „*variablen Parameter*“ nennt, einführen. Zu jedem Werte von $\lambda$ gehört dann ein Normalschnitt. Dabei ist nach den Gleichungen (14.) und (17.)

$$A+B\lambda+C(p+q\lambda)=0 \quad\text{und}\quad Ap+Bq-C=0,$$

also

(19.) $$\frac{A}{C}=-\frac{pq+(1+q^2)\lambda}{q-p\lambda},\quad \frac{B}{C}=\frac{1+p^2+pq\lambda}{q-p\lambda},$$

(20.) $$\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}=\frac{(1+p^2+q^2)[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2]}{(q-p\lambda)^2},$$

(21.) $$\frac{Aq-Bp}{C}=-\frac{(1+p^2+q^2)(p+q\lambda)}{q-p\lambda},$$

(22.) $$\begin{aligned}dx^2+dy^2+dz^2&=dx^2+dy^2+(pdx+qdy)^2\\&=dx^2[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2],\end{aligned}$$

folglich geht Gleichung (13.) über in

(23.) $$\varrho^2=\frac{[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2]^2(1+p^2+q^2)}{(r+2s\lambda+t\lambda^2)^2}.$$

Dies gibt

(24.) $$\varrho=\pm\frac{[1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2]\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2s\lambda+t\lambda^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser $\varrho$ ist also eine Funktion von $\lambda$; man kann daher die Werte von $\lambda$ aufsuchen, für welche $\varrho$ ein Maximum oder Minimum wird. Zu diesem Zwecke setze man

$$\frac{d\varrho}{d\lambda} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{(r+2s\lambda+t\lambda^2)^2}\{(r+2s\lambda+t\lambda^2)[2pq+2(1+q^2)\lambda] - [1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2](2s+2t\lambda)\}$$

gleich Null; dies gibt

$$(25.)\quad (r+2s\lambda+t\lambda^2)[pq+(1+q^2)\lambda] = [1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2](s+t\lambda),$$

oder wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung

$$(s\lambda+t\lambda^2)[pq+(1+q^2)\lambda] = [pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2](s+t\lambda)$$

fortläßt,

$$(25\text{a.})\quad (r+s\lambda)[pq+(1+q^2)\lambda] = (1+p^2+pq\lambda)(s+t\lambda).$$

Daraus folgt

$$(26.)\quad \frac{1+p^2+2pq\lambda+(1+q^2)\lambda^2}{r+2s\lambda+t\lambda^2} = \frac{pq+(1+q^2)\lambda}{s+t\lambda} = \frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda},$$

$$(25\text{b.})\quad [pqt-(1+q^2)s]\lambda^2 + [(1+p^2)t-(1+q^2)r]\lambda + [(1+p^2)s-pqr] = 0.$$

Nennt man die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung $\lambda_1$ und $\lambda_2$, so wird

$$(27.)\quad \lambda_1+\lambda_2 = -\frac{(1+p^2)t-(1+q^2)r}{pqt-(1+q^2)s},\quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{(1+p^2)s-pqr}{pqt-(1+q^2)s}.$$

Da ein wirkliches Maximum und ein wirkliches Minimum vorhanden ist, so sind die Werte von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ reell. Für diese Werte von $\lambda$ wird nach den Gleichungen (24.) und (26.), wenn man das obere Vorzeichen nimmt,

$$(28.)\quad \varrho = \frac{[pq+(1+q^2)\lambda]\sqrt{1+p^2+q^2}}{s+t\lambda} = \frac{(1+p^2+pq\lambda)\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+s\lambda}.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung $\lambda$, so findet man die quadratische Gleichung

$$(29.)\quad (s^2-rt)\varrho^2 + [(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\varrho\sqrt{1+p^2+q^2} - (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

deren Wurzeln $\varrho_1$ und $\varrho_2$ den Gleichungen

$$(30.)\quad \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}}{s^2 - rt},$$

$$(31.)\quad \varrho_1\varrho_2 = -\frac{(1+p^2+q^2)^2}{s^2 - rt}$$

genügen. Dabei entsprechen $\varrho_1$ und $\varrho_2$ dem Maximum bezw. dem Minimum von $\varrho$. Die zugehörigen Normalschnitte nennt man „*Hauptnormalschnitte*"; $\varrho_1$ und $\varrho_2$ selbst nennt man die „*Hauptkrümmungshalbmesser*".

Ist $s^2 - rt < 0$, so haben $\varrho_1$ und $\varrho_2$ *gleiches* Zeichen, d. h. sie liegen in derselben Richtung der Normalen. Dies tritt z. B. beim Ellipsoid ein. Ist aber $s^2 - rt > 0$, so haben $\varrho_1$ und $\varrho_2$ *entgegengesetztes* Zeichen, d. h. die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen auf entgegengesetzten Seiten der Fläche, ein Fall, der z. B. beim einschaligen Hyperboloid eintritt. Wird $s^2 - rt = 0$, so wird einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß.

Macht man den betrachteten Flächenpunkt $P$ zum Anfangspunkt der Koordinaten, die Tangentialebene

$$(32.)\quad z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

zur $XY$-Ebene und die Normale

$$(33.)\quad x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0$$

zur $Z$-Achse, so wird

$$(34.)\quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0;$$

deshalb gehen die Gleichungen (32.) und (33.) über in

$$(32a.)\quad z' = 0,$$

$$(33a.)\quad x' = 0, \quad y' = 0.$$

Die Ebene eines Normalschnittes hat dann die Gleichung

$$(35.)\quad y' = \lambda x',$$

und die Gleichungen der beiden Hauptnormalschnitte sind

$$(36.)\quad y' = \lambda_1 x', \qquad y' = \lambda_2 x',$$

wobei nach Gleichung (27.)

$$(37.)\quad \lambda_1\lambda_2 = -1$$

wird. Dies gibt

**Satz 1.** *Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte stehen aufeinander senkrecht.*

Der Einfachheit wegen kann man jetzt noch die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte zur $XZ$-Ebene und zur $YZ$-Ebene machen; dann wird nach Gleichung (27.)

$$(38.)\qquad \lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = \infty,\quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{t - r}{s} = \infty,$$

also

$$(39.)\qquad s = 0.$$

Dadurch geht Gleichung (29.) über in

$$(40.)\qquad rt\varrho^2 - (r + t)\varrho + 1 = 0;$$

dies gibt

$$(41.)\qquad \varrho_1 = \frac{1}{r},\quad \varrho_2 = \frac{1}{t}.$$

Ist $\alpha$ der Winkel, den ein Normalschnitt mit dem ersten Hauptnormalschnitte bildet, so hat seine Ebene die Gleichung

$$y' = \lambda x', \quad \text{wobei} \quad \lambda = \operatorname{tg}\alpha$$

ist. Man findet dann aus Gleichung (24.) für das obere Vorzeichen

$$\varrho = \frac{1 + \lambda^2}{r + t\lambda^2} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\varrho_2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}},$$

oder

$$(42.)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}. \qquad (\textit{Euler}\text{sche Formel.})$$

Ist $s^2 - rt < 0$, so haben, wie schon oben gezeigt wurde, $\varrho_1$ und $\varrho_2$ gleiches Zeichen; deshalb folgt aus Gleichung (42.), daß auch $\varrho$ stets dasselbe Zeichen hat. Ist dagegen $s^2 - rt > 0$, so haben $\varrho_1$ und $\varrho_2$ ungleiches Zeichen, dann kann man den Winkel $\alpha$ so bestimmen, daß

$$(43.)\qquad \operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2} = 0$$

wird, wobei man noch $\alpha$ mit $-\alpha$ vertauschen darf. Daraus folgt

**Satz 2.** *Haben $\varrho_1$ und $\varrho_2$ verschiedenes Zeichen, so gibt es zwei Normalschnitte, deren Krümmungshalbmesser unendlich groß* *werden. Die Winkel, welche ihre Ebenen miteinander bilden, werden durch die Ebenen der Hauptnormalschnitte halbiert.*

Sind $\varrho$ und $\varrho'$ die Krümmungshalbmesser zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist also $\alpha' = \alpha + 90^0$, so wird

$$\cos\alpha' = -\sin\alpha, \quad \sin\alpha' = \cos\alpha$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2},$$

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2\alpha'}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha'}{\varrho_2} = \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_2},$$

folglich ist

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}; \tag{44.}$$

dies gibt

**Satz 3.** *Die Summe der Krümmungen je zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist konstant.*

Ist der Schnitt ein schiefer, so kann man durch die Schnittlinie $g$ der Tangentialebene und der schneidenden Ebene $\varepsilon$ eine Normalebene legen, welche wieder den Winkel $\alpha$ mit der Ebene des ersten Hauptnormalschnittes bilden möge, während der Winkel, den sie mit der Ebene $\varepsilon$ bildet, $\vartheta$ heißen soll. Die Gerade $g$ hat dann die Gleichungen

$$z' = 0, \quad y' = \operatorname{tg}\alpha \,.\, x'. \tag{45.}$$

Damit die Ebene $\varepsilon$ mit der Gleichung

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \tag{46.}$$

durch die Gerade $g$ hindurchgeht, muß also

$$Ax' + B\operatorname{tg}\alpha \,.\, x' = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$$

sein; deshalb setze man

$$A = \sin\alpha, \quad B = -\cos\alpha. \tag{47.}$$

Die Ebene $\varepsilon$ des schiefen Schnittes hat daher die Gleichung

$$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + Cz' = 0 \tag{48.}$$

und der durch $g$ gelegte Normalschnitt hat die Gleichung

$$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha = 0, \tag{49.}$$

folglich wird

$$(50.)\quad \cos\vartheta = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + C^2}\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}\ ^{*)};$$

dies gibt

$$(51.)\quad 1 + C^2 = \frac{1}{\cos^2\vartheta} = 1 + \mathrm{tg}^2\vartheta, \quad \text{also } C = \pm\,\mathrm{tg}\vartheta.$$

Die Gleichung des schiefen Schnittes ist also, wenn man das obere Zeichen wählt,

$$(52.)\quad x'\sin\alpha - y\cos\alpha + z'\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0.$$

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes mit $\varrho'$, den des zugehörigen Normalschnittes mit $\varrho$, so findet man daher aus Gleichung (15.)

$$\varrho'^2 = \frac{(B^2 + A^2)^3}{(A^2 + B^2 + C^2)(B^2r + A^2t)^2} = \frac{1}{(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta)(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}\right)^2},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (42.)

$$(53.)\quad \varrho' = \varrho\cos\vartheta. \qquad \text{(Satz von } \textit{Meunier}.)$$

Legt man durch die Normale des Flächenpunktes $P$ sämtliche Normalschnitte, so bilden die zugehörigen Krümmungskreise eine Fläche vierten Grades, deren Untersuchung hier aber übergangen werden möge.

## § 153.

## Die Krümmungsmittelpunktsflächen.

Zu den im vorigen Paragraphen entwickelten Sätzen gelangt man auch, indem man zu der Normale im Flächenpunkte

---

*) Den Neigungswinkel $\vartheta$ zweier Ebenen $\varepsilon$ und $\varepsilon_1$ mit den Gleichungen

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \quad \text{und} \quad A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1 = 0$$

findet man bekanntlich aus der Formel

$$\cos\vartheta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2}}.$$

$P$ diejenigen Normalen aufsucht, welche der ersten Normale unendlich nahe liegen und dieselbe schneiden. Die Gleichungen der Normalen im Punkte $P$ sind

$$x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0. \tag{1.}$$

Für eine unendlich nahe Normale gelten daher die Gleichungen

$$\begin{cases} x' - x - dx + (p + dp)(z' - z - dz) = 0, \\ y' - y - dy + (q + dq)(z' - z - dz) = 0. \end{cases} \tag{2.}$$

Wenn sich die beiden Normalen in einem Punkte $P'$ schneiden, so gelten für die Koordinaten dieses Punktes alle vier Gleichungen (1.) und (2.); deshalb gelten auch die Gleichungen

$$\begin{cases} -dx - pdz + (z' - z)\,dp = 0,\text{*)} \\ -dy - qdz + (z' - z)\,dq = 0\,, \end{cases} \tag{3.}$$

folglich wird

$$z' - z = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}, \tag{4.}$$

oder, wenn man für $dz$, $dp$, $dq$ ihre Werte einsetzt,

$$z' - z = \frac{(1 + p^2)\,dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{pqdx + (1 + q^2)dy}{sdx + tdy}. \tag{5.}$$

Dies gibt, wenn man wieder $\dfrac{dy}{dx} = \lambda$ setzt,

$$z' - z = \frac{1 + p^2 + pq\lambda}{r + s\lambda} = \frac{pq + (1 + q^2)\lambda}{s + t\lambda}. \tag{6.}$$

Diese Gleichung stimmt mit Gleichung (26.) in § 152 überein, d. h. sie gibt dieselben Werte von $\lambda$, welche den größten und den kleinsten Krümmungshalbmesser lieferten. Es gilt also

**Satz 1.** *Von allen Normalen, welche der Normale im Flächenpunkte $P$ unendlich nahe liegen, schneiden nur die in den Hauptnormalschnitten diese erste Normale.*

Dabei ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.), (3.) und (6.) der Abstand des Schnittpunktes $M$ vom Flächenpunkte $P$

---

*) Die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung $dpdz$ und $dqdz$ dürfen neben den unendlich kleinen Größen erster Ordnung vernachlässigt werden.

$$(7.)\quad \varrho = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2} = (z'-z)\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$= \frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda}\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{pq+(1+q^2)\lambda}{s+t\lambda}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Da diese Werte mit denen in Gleichung (28.) des vorhergehenden Paragraphen übereinstimmen, so ist dieser Abstand $\varrho$ der Krümmungshalbmesser, und der Schnittpunkt $M$ ist der zugehörige Krümmungsmittelpunkt. Dies gibt

**Satz 2.** *Die Normale im Flächenpunkte $P$ wird von den benachbarten Normalen in den Krümmungsmittelpunkten der beiden Hauptnormalschnitte getroffen.*

Die Mittelpunkte der größten und kleinsten Krümmungskreise für sämtliche Punkte der Fläche bilden selbst wieder eine Fläche, welche die „*Krümmungsmittelpunktsfläche*" genannt wird. Dabei gilt

**Satz 3.** *Jede Normale der ursprünglichen Fläche trifft die Krümmungsmittelpunktsfläche in zwei Punkten, in denen sie diese Fläche berührt.*

**Beweis.** Betrachtet man drei aufeinander folgende Normalen, sodaß die erste von der zweiten und die zweite von der dritten geschnitten wird, so liegen die beiden Schnittpunkte auf der Krümmungsmittelpunktsfläche und auf der mittleren Normale. Da sie außerdem einander unendlich nahe liegen, so ist die mittlere Normale eine Tangente an die Fläche. Dasselbe gilt von dem zweiten Punkte, den die Normale mit der Fläche gemein hat.

Die Normale im Flächenpunkte $P$ heiße $a$ und berühre die Krümmungsmittelpunktsfläche in den Punkten $M_1$ und $M_2$, und zwar sei $M_1$ der Schnittpunkt von $a$ mit der unendlich nahen Normalen $b$, welche mit $a$ in dem ersten Hauptnormalschnitte $\varepsilon_1$ liegt. Dann wird $\varepsilon_1$ die Krümmungsmittelpunktsfläche im Punkte $M_2$ berühren, denn sie hat mit dieser Fläche die beiden unendlich nahen Punkte gemein, in denen $a$ berührt, und außerhalb dieser Geraden $a$ noch den Punkt, in welchem die Fläche von $b$ getroffen wird. Ebenso kann man zeigen, daß die Ebene $\varepsilon_2$ des zweiten Hauptnormalschnittes die Krümmungsmittelpunktsfläche im Punkte $M_1$ berührt. Dies gibt

**Satz 4.** *Die Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ der beiden Hauptnormalschnitte berühren die Krümmungsmittelpunktsfläche bezw. in den Punkten $M_2$ und $M_1$.*

Da die Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ aufeinander senkrecht stehen, so gilt noch

**Satz 5.** *Der scheinbare Umriß der Krümmungsmittelpunktsfläche, in der Richtung einer Normalen gesehen, besteht aus zwei Kurvenästen, die sich rechtwinklig schneiden.*

## § 154.

## Das Krümmungsmaß von *Gauß*.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 251.)

Bei den ebenen Kurven wurde die Krümmung durch die Größe $\frac{d\varepsilon}{ds}$ gemessen, wobei $d\varepsilon$ der Kontingenzwinkel war, d. h. $d\varepsilon$ war der Winkel, den zwei unendlich nahe Tangenten miteinander bilden. Man kann aber auch unter $d\varepsilon$ den Winkel verstehen, den zwei unendlich nahe Normalen miteinander bilden, und kann diesen Winkel durch den Bogen eines Kreises messen. Zieht man nämlich in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 und dem Mittelpunkte $O$ zwei Halbmesser, welche zu den beiden unendlich nahen Normalen parallel sind und auf dem Kreise den Bogen $d\varepsilon$ ausschneiden, so ist die Krümmung im Kurvenpunkte $P$ das Verhältnis dieses Kreisbogens $d\varepsilon$ zu dem zugehörigen Kurvenbogen $ds$.

In ähnlicher Weise kann man im Raume ein Maß der Krümmung für eine Fläche

$$(1.)\qquad z = f(x, y)$$

in jedem ihrer Punkte finden. Legt man nämlich zur Normale $a$ im Flächenpunkte $P$ mit den Gleichungen

$$(2.)\qquad x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0$$

durch den Nullpunkt $O$ eine Parallele mit den Gleichungen

$$(3.)\qquad x' + pz' = 0, \quad y' + qz' = 0,$$

so trifft diese die Kugelfläche mit der Gleichung

$$(4.)\qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

welche mit dem Halbmesser 1 um den Nullpunkt beschrieben ist, in einem Punkte $P'$ mit den Koordinaten

$$(5.)\qquad x' = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad y' = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$z' = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Jedem Punkte $P$ auf der Fläche entspricht ein Punkt $P'$ auf der Kugel. Einer kleinen geschlossenen Kurve, welche auf der Fläche den Punkt $P$ einschließt, entspricht daher auf der Kugel eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt $P'$. Wird der Flächeninhalt $F$ bezw. $F'$ dieser geschlossenen Kurven verschwindend klein, so kann man das Verhältnis von $F'$ zu $F$ als ein Maß für die Krümmung der Fläche im Punkte $P$ ansehen.

Am einfachsten wird man für $F$ das unendlich kleine Dreieck $PP_1P_2$ auf der Fläche annehmen, bei welchem die Eckpunkte $P$, $P_1$, $P_2$ bezw. die Koordinaten

$$x,\ y,\ z;\quad x+dx,\ y,\ z+pdx;\quad x,\ y+dy,\ z+qdy$$

haben. Dieses Dreieck liegt in der Tangentialebene des Punktes $P$, welche mit der $XY$-Ebene den Winkel $\gamma$ bilden möge. Projiziert man dieses Dreieck in die $XY$-Ebene, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $dx$ und $dy$ und dem Flächeninhalt

$$(6.)\qquad F\cos\gamma = \tfrac{1}{2}dxdy.$$

Dem Dreieck $PP_1P_2$ auf der Fläche entspricht das Dreieck $P'P'_1P'_2$ auf der Kugel, dessen Ecken bezw. die Koordinaten

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l} x',\ y',\ z'; \\ x'_1 = x' + \dfrac{\partial x'}{\partial x}dx,\quad y'_1 = y' + \dfrac{\partial y'}{\partial x}dx,\quad z'_1 = z' + \dfrac{\partial z'}{\partial x}dx; \\ x'_2 = x' + \dfrac{\partial x'}{\partial y}dy,\quad y'_2 = y' + \dfrac{\partial y'}{\partial y}dy,\quad z'_2 = z' + \dfrac{\partial z'}{\partial y}dy \end{array}\right.$$

haben. Projiziert man dieses Dreieck in die $XY$-Ebene, so erhält man ein Dreieck, dessen Ecken bezw. die Koordinaten $x'$, $y'$; $x'_1$, $y'_1$; $x'_2$, $y'_2$ haben. Da die Tangentialebene der Kugel im Punkte $P'$ zur Tangentialebene der betrachteten

Fläche im Punkte $P$ parallel ist, so ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks

$$\begin{aligned} F'\cos\gamma &= \tfrac{1}{2}[x'(y'_1 - y'_2) + x'_1(y'_2 - y') + x'_2(y' - y'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\frac{\partial y'}{\partial y}dy(x'_1 - x') - \frac{\partial y'}{\partial x}dx(x'_2 - x')\Big], \end{aligned}$$

(8.) $$F'\cos\gamma = \tfrac{1}{2}dxdy\Big(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\Big).$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gleichung (6.), so erhält man

(9.) $$K = \frac{F'}{F} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (5.)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{-(1+q^2)r + pqs}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{-(1+q^2)s + pqt}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (31.) in § 152

(10.) $$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Von dem *Gauß*schen Krümmungsmaß wird besonders bei der Biegung der Flächen Gebrauch gemacht, wobei aber die Biegung so erfolgen soll, daß die Kurven zwischen je zwei Punkten weder verkürzt noch verlängert werden, und daß auch der Flächeninhalt der einzelnen Figuren derselbe bleibt. Es gilt dann der Satz, dessen Beweis hier aber übergangen werden möge.

*Das Krümmungsmaß bleibt bei der Biegung der Flächen unverändert.*

## § 155.

## Theorie der Umhüllungskurven oder Enveloppen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 252.)

Ist eine Gleichung zwischen $x$, $y$ und $u$, nämlich

(1.) $$F(x, y, u) = 0$$

gegeben, so stellt dieselbe für jeden konstanten Wert von $u$ eine Kurve dar. Da es aber unendlich viele Werte von $u$ gibt, so entspricht der Gleichung (1.) eine ganze *Schar* von Kurven. So entspricht z. B. der Gleichung

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

eine ganze Schar von *konzentrischen Kreisen*, da der Halbmesser $u$ noch unendlich viele Werte haben darf. Der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1$$

entspricht eine Schar *konfokaler Ellipsen* und *Hyperbeln*.

Der Gleichung

$$F(x, y, u) = (x - b\cos u)^2 + (y - b\sin u)^2 - a^2 = 0$$

entspricht eine ganze Schar von *Kreisen* (vergl. Fig. 154), denn für jeden Wert von $u$ erhält man einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

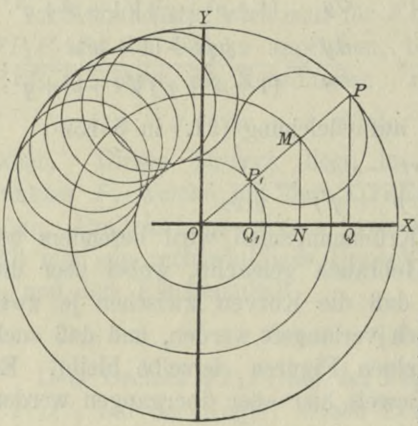
$$\xi = b\cos u, \quad \eta = b\sin u$$

hat. Zwischen $\xi$ und $\eta$ besteht daher die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 - b^2 = 0,$$

d. h. der Mittelpunkt $M$ des Kreises durchläuft selbst wieder einen Kreis, welcher mit dem Halbmesser $b$ um den Anfangspunkt $O$ der Koordinaten beschrieben ist.

Fig. 154.




$OM = b, \quad ON = \xi, \quad NM = \eta.$

Die Größe $u$ nennt man dabei den „(*variablen*) *Parameter*.“

Sind nun $u$ und $u_1 = u + \Delta u$ zwei benachbarte Werte von $u$, so gibt die Zusammenstellung der beiden Gleichungen

(2.) $\qquad F(x, y, u) = 0 \quad$ und $\quad F(x, y, u_1) = 0$

die Schnittpunkte der beiden entsprechenden Kurven.

Die Koordinaten dieser Schnittpunkte genügen daher auch den beiden Gleichungen

(3.) $F(x, y, u) = 0$ und $\frac{F(x, y, u + \Delta u) - F(x, y, u)}{\Delta u} = 0.$

Läßt man jetzt $\Delta u$ unendlich klein werden, so gehen diese Gleichungen über in

(4.) $$F(x, y, u) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0$$

und geben die Schnittpunkte der Kurve $F(x, y, u) = 0$ mit einer unendlich nahen Kurve.

Durch Elimination von $u$ aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ allein, nämlich

(5.) $$S(x, y) = 0,$$

welche *den geometrischen Ort aller Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Kurven der gegebenen Kurvenschar darstellt.*

Dieser geometrische Ort ist eine Kurve, welche die „*einhüllende Kurve*" oder die *Enveloppe*" genannt wird, da sie die sämtlichen Kurven der gegebenen Kurvenschar einhüllt. Es gilt nämlich folgender

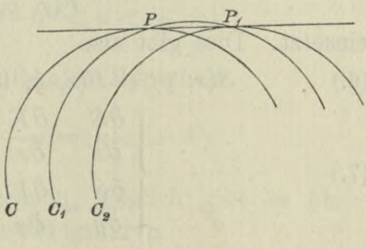
**Satz 1.** *Die Enveloppe hat in den Punkten, welche sie mit der zugehörigen Kurve*

$$F(x, y, u) = 0$$

*gemein hat, auch die Tangente mit dieser Kurve gemein.*

Zum Beweise dieses Satzes betrachte man drei benachbarte Kurven $C$, $C_1$, $C_2$ des gegebenen Kurvensystems (vergl. Fig. 155), welche den Werten $u$, $u_1$, $u_2$ des Parameters entsprechen. Ein Schnittpunkt der Kurven $C$ und $C_1$ heiße $P$. Dieser Schnittpunkt gehe in den Punkt $P_1$ über, wenn die Kurve $C$ in $C_1$ und die Kurve $C_1$ in $C_2$ übergeht. Die Punkte $P$ und $P_1$ liegen also beide auf der Kurve $C_1$ und rücken einander unendlich nahe, wenn die Werte $u$, $u_1$, $u_2$ unendlich wenig voneinander verschieden sind, d. h. wenn die Kurven $C$, $C_1$, $C_2$ einander unendlich nahe rücken.

Fig. 155.



Gleichzeitig rücken die Punkte $P$ und $P_1$ auf die Kurve mit der Gleichung

$$S(x, y) = 0,$$

weil sie Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Kurven der gegebenen Kurvenschar sind. Deshalb ist die Verbindungslinie dieser unendlich nahen Punkte $P$ und $P_1$ eine Tangente der Kurve $C_1$ und gleichzeitig auch der Kurve

$$S(x, y) = 0.$$

Dadurch ist bewiesen, daß die beiden Kurven im Punkte $P$ (oder in dem unendlich nahen Punkte $P_1$) eine gemeinsame Tangente haben, daß sie sich also im Punkte $P$ berühren.

Was von $C_1$ gilt, gilt ebenso von jeder beliebigen Kurve der gegebenen Kurvenschar. Es ist also hiermit bewiesen, daß die Kurve

$$S(x, y) = 0$$

sämtliche Kurven des gegebenen Kurvensystems berührt; sie ist daher die *Umhüllungskurve* oder *Enveloppe*.

Dasselbe Resultat findet man auch durch Rechnung. Die Gleichung

$$S(x, y) = 0$$

kann man nämlich aus den Gleichungen (4.) dadurch herleiten, daß man den Parameter $u$ als Funktion von $x$ und $y$ darstellt, indem man die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \quad \text{auf die Form} \quad u = \varphi(x, y)$$

bringt, und daß man sodann diesen Wert von $u$ in die Gleichung

$$F(x, y, u) = 0$$

einsetzt. Dies gibt also

$$S(x, y) = F(x, y, u) \quad \text{für} \quad u = \varphi(x, y), \tag{6.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{7.}$$

Da nun aber für den betrachteten Punkt $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist, so gehen die Gleichungen (7.) über in

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{7a.}$$

folglich hat nach Formel Nr. 131 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{8.}$$

in dem betrachteten Punkte $P$ für beide Kurven denselben Wert, d. h. die beiden Kurven haben in diesem Punkte dieselbe Tangente.

Es ist allerdings noch hervorzuheben, daß die Elimination von $u$ aus den Gleichungen (4.) durchaus nicht immer die Gleichung einer *reellen* Kurve liefert.

Dies folgt schon daraus, daß nicht jede Schar von gleichartigen Kurven eine Umhüllungskurve besitzt. Bei den konzentrischen Kreisen

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

z. B. schneidet kein Kreis den anderen in einem reellen Punkte, folglich gibt es für diese Kurvenschar auch keine Umhüllungskurve.

Ebensowenig haben die einander benachbarten konfokalen Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1, \quad (-b^2 < u < +\infty)$$

oder die einander benachbarten konfokalen Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1, \quad (-a^2 < u < -b^2)$$

reelle Schnittpunkte miteinander gemein, folglich gibt es bei dieser Kurvenschar auch keine Umhüllungskurve.

Dagegen schneidet jeder der Kreise

$$F(x, y, u) = (x - b\cos u)^2 + (y - b\sin u)^2 - a^2 = 0 \tag{9.}$$

den folgenden in zwei reellen Punkten. Deshalb gibt es in diesem Falle eine Umhüllungskurve. Dabei wird

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 2(x - b\cos u)\,b\sin u - 2(y - b\sin u)\,b\cos u = 0, \tag{10.}$$

oder

$$(x - b\cos u)\sin u = (y - b\sin u)\cos u, \tag{10a.}$$

oder

$$x\sin u = y\cos u, \quad \text{also} \quad y = x\,\mathrm{tg}\,u. \tag{10b.}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (9.) ein, so findet man

$$(x - b\cos u)^2(1 + \mathrm{tg}^2 u) = a^2, \quad \text{oder} \quad (x - b\cos u)^2 = a^2\cos^2 u, \tag{11.}$$

folglich ist

$$x = (b \pm a)\cos u, \quad y = (b \pm a)\sin u, \tag{12.}$$

also

$$x^2 + y^2 = (b \pm a)^2. \tag{13.}$$

Nimmt man in diesen Gleichungen das obere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b + a$; und nimmt man das untere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b - a$. Die Umhüllungskurve zerfällt also bei diesem Beispiele in zwei konzentrische Kreise. (Vergl. Fig. 154.)

## § 156.

## Übungs-Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Ein System von geraden Linien (Fig. 156) sei durch die Bedingung bestimmt, daß die zwischen den Koordinaten-Achsen liegenden Abschnitte derselben die konstante Länge $c$ haben. Man soll die Gleichung ihrer Umhüllungskurve aufstellen.

**Auflösung.** Es seien $OA = a$ und $OB = b$ die Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinaten-Achsen abschneidet, dann ist bekanntlich ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{1.}$$

oder

$$bx + ay - ab = 0.$$

Der Abschnitt $AB$ der Geraden zwischen den beiden Koordinaten-Achsen ist daher gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Hat also dieser Abschnitt die konstante Länge $c$, und bezeichnet man den Winkel $OAB$ mit $u$, so wird

$$(2.)\quad a = c\cos u, \qquad (3.)\quad b = c\sin u;$$

die Gleichung der Geraden $AB$ geht daher über in

$$(4.)\qquad F(x, y, u) = x\sin u + y\cos u - c\sin u\cos u = 0.$$

Dabei ergänzt der Winkel $u$ den Winkel $\alpha$, welchen die Gerade $AB$ mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, zu $180^0$.

Um die Enveloppe dieser Schar gerader Linien zu finden, bilde man

$$(5.)\qquad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = x\cos u - y\sin u - c(\cos^2 u - \sin^2 u) = 0.$$

Fig. 156.

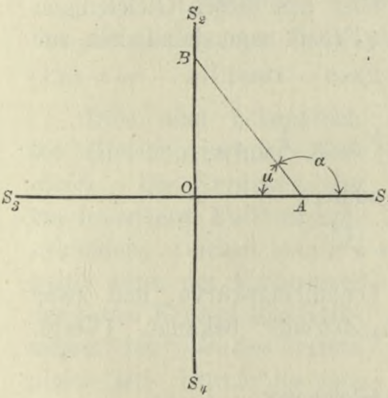
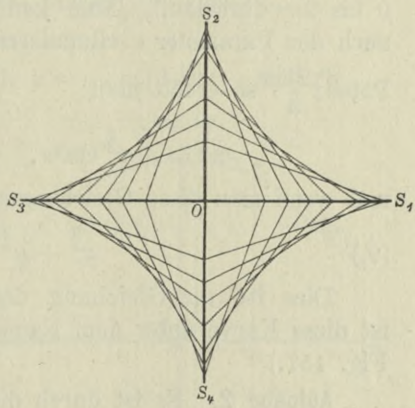



Fig. 157.




Multipliziert man die Gleichungen (4.) und (5.) bezw. mit $\sin u$ und $\cos u$, so erhält man durch Addition

$$(6.)\qquad x = +c\cos^3 u.$$

Multipliziert man sie dagegen bezw. mit $\cos u$ und $-\sin u$, so findet man durch Addition

$$(7.)\qquad y = +c\sin^3 u.$$

Wenn es sich, wie in der vorstehenden Aufgabe, um eine Schar gerader Linien handelt, wenn also die Gleichung

$F(x, y, u) = 0$ in bezug auf $x$ und $y$ vom *ersten* Grade ist, dann wird im allgemeinen auch die Gleichung $\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0$ vom *ersten* Grade in bezug auf $x$ und $y$ sein. Dann braucht man $u$ nicht aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, sondern wird $x$ und $y$ als Funktionen der dritten Veränderlichen $u$ darstellen, eine Rechnung, die in den meisten Fällen sehr viel leichter auszuführen ist als die Elimination.

In der vorliegenden Aufgabe geben die Gleichungen (6.) und (7.) die Koordinaten des Schnittpunktes der dem Werte $u$ entsprechenden Geraden mit der unendlich nahen. Dieser Punkt ist daher auch ein Punkt der Umhüllungskurve. Die Gleichungen

$$x = c\cos^3 u, \quad y = c\sin^3 u \tag{8.}$$

stellen also die Umhüllungskurve dar, wenn $u$ alle Werte von 0 bis $2\pi$ durchläuft. Man kann aber aus diesen Gleichungen auch den Parameter $u$ eliminieren. Erhebt man sie nämlich zur Potenz $\frac{2}{3}$, so erhält man

$$x^{\frac{2}{3}} = +c^{\frac{2}{3}}\cos^2 u, \quad y^{\frac{2}{3}} = +c^{\frac{2}{3}}\sin^2 u,$$

und wenn man diese Gleichungen addiert,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}. \tag{9.}$$

Dies ist die Gleichung der Umhüllungskurve, und zwar ist diese Kurve unter dem Namen „*Astroide*“ bekannt. (Vergl. Fig. 157.)

**Aufgabe 2.** Es ist durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = x\cos(3u) + y\sin(3u) - a\cos u = 0 \tag{10.}$$

eine Schar von geraden Linien gegeben; man soll die von ihnen eingehüllte Kurve bestimmen. (Vergl. Fig. 159.)

**Auflösung.** Hier wird

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -3x\sin(3u) + 3y\cos(3u) + a\sin u = 0. \tag{11.}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $y$, bezw. $x$, so erhält man

$$(12.)\quad \begin{cases} 3x = a[3\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u)], \\ 3y = a[3\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u)]. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u) = \cos(2u),$$
$$2\cos u\cos(3u) = \cos(4u) + \cos(2u);$$

ferner ist

$$\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u) = \sin(2u),$$
$$2\cos u\sin(3u) = \sin(4u) + \sin(2u),$$

folglich wird

$$(13.)\quad \begin{cases} 3x = a[\cos(4u) + 2\cos(2u)], \\ 3y = a[\sin(4u) + 2\sin(2u)]. \end{cases}$$

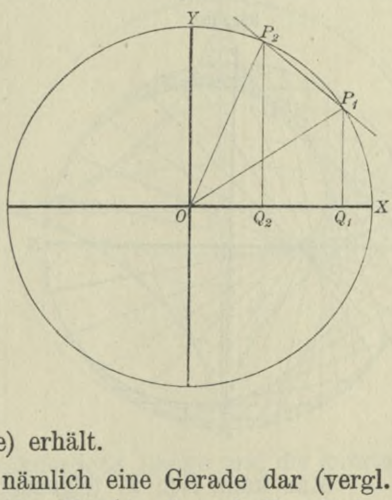
Setzt man $a = 3a_1$ und $2u = t + \pi$, so wird

$$(14.)\quad \begin{cases} \cos(2u) = -\cos t, \quad \sin(2u) = -\sin t, \\ \cos(4u) = +\cos(2t), \quad \sin(4u) = +\sin(2t), \end{cases}$$

und die Gleichungen (13.) gehen über in

$$(15.)\quad x = -a_1[2\cos t - \cos(2t)], \quad y = -a_1[2\sin t - \sin(2t)].$$

Fig. 158.




Dies sind bekanntlich die Gleichungen der *Kardioide*. Die Kardioide war ein besonderer Fall der Epizykloiden, welchen man erhält, wenn der Halbmesser des *festen* Kreises dem Halbmesser des *rollenden* Kreises gleich ist. Durch die vorliegende Aufgabe findet man also eine andere Erzeugungsweise der Kardioide, die sich dann auch so verallgemeinern läßt, daß man jede beliebige Epizykloide (oder Hypozykloide) erhält.

Die Gleichung (10.) stellt nämlich eine Gerade dar (vergl. Fig. 158), welche durch die beiden Punkte $P_1$ und $P_2$ mit den Koordinaten

$$x_1 = a\cos(2u), \quad y_1 = a\sin(2u)$$

und

$$x_2 = a\cos(4u), \quad y_2 = a\sin(4u)$$

hindurchgeht, denn diese Wertepaare von $x$ und $y$ befriedigen die Gleichung (10.). Nun wird aber

$$(16.) \qquad x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \text{und} \quad x_2^2 + y_2^2 = a^2,$$

d. h. die Punkte $P_1$ und $P_2$ liegen beide auf einem Kreise, der mit dem Halbmesser $a$ um den Anfangspunkt $O$ der Koordinaten beschrieben ist. Dabei sind die Winkel, welche die Halbmesser $OP_1$ und $OP_2$ mit der $X$-Achse bilden,

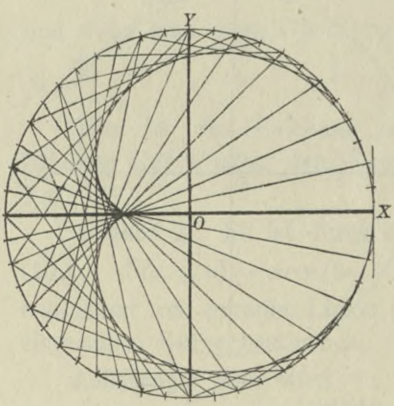
$$\sphericalangle XOP_1 = 2u, \quad \sphericalangle XOP_2 = 4u = 2 \sphericalangle XOP_1.$$

Wenn sich also der Parameter $u$ verändert, so bewegen sich die Punkte $P_1$ und $P_2$ beide auf diesem Kreise fort, der Punkt $P_2$ aber doppelt so schnell wie der Punkt $P_1$.

Dies gibt folgende Erzeugung der Kardioide:

*Bewegen sich auf einem Kreise zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ so, daß $P_2$ doppelt so schnell läuft wie $P_1$, so umhüllt die Gerade $P_1P_2$ eine Kardioide.* (Vergl. Fig. 159.)

Fig. 159.




In ähnlicher Weise können auch die anderen Epizykloiden erzeugt werden, wenn der Punkt $P_2$ auf dem Kreise $m$-mal so schnell fortschreitet wie der Punkt $P_1$.

Dabei war bisher vorausgesetzt, daß die Punkte $P_1$ und $P_2$ den Kreis in gleicher Richtung durchlaufen. Wenn sie aber den Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so umhüllt die Gerade $P_1P_2$ eine „*Hypozykloide*".

Man kann sich in folgender Weise von dem vorstehenden durch Zeichnung überzeugen. Man teile den Umfang eines Kreises in eine Anzahl gleicher Teile. (Vergl. Fig. 159.) Es sei z. B. diese Anzahl gleich 48. Dann bezeichne man die Teilpunkte der Reihe nach durch die Nummern

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots 47,\ 48,$$

wobei der Punkt 48 mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Jetzt verbinde man die Punkte

$$1 \text{ und } 2, \quad 2 \text{ und } 4, \quad 3 \text{ und } 6, \ldots,$$

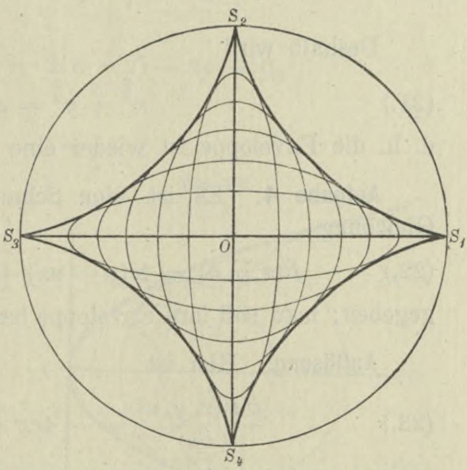
allgemein $k$ und $2k$ durch gerade Linien. Auf diese Weise erhält man 48 Tangenten der *Kardioide*, und zwar wird man daraus die Gestalt der Kardioide sicherer gewinnen, als wenn man die Kurve punktweise konstruiert hätte.

Verbindet man dagegen die Punkte $k$ und $mk$ durch Gerade, so erhält man eine andere *Epizykloide*, welche der Zahl $m$ entspricht, mit großer Genauigkeit als die *Enveloppe* ihrer Tangenten.

In ähnlicher Weise kann man auch die *Hypozykloide* als Enveloppe ihrer Tangenten zeichnen. In diesem Falle wird es zweckmäßig sein, die Anzahl der Teilpunkte auf dem Kreise etwas größer anzunehmen.

**Aufgabe 3.** Es ist eine Schar konzentrischer Ellipsen gegeben, deren Halbachsen mit den Koordinaten-Achsen zusammenfallen und die konstante Summe $c$ haben; man soll die Gleichung der Enveloppe bestimmen. (Vergl. Fig. 160.)

Fig. 160.




**Auflösung.** Die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ ist

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Da aber die Achsen veränderliche Länge und die konstante Summe $c$ haben sollen, so setze man

$$a = u \quad \text{und} \quad b = c - u.$$

Dadurch wird die Gleichung der gegebenen Kurvenschar

$$F(x, y, u) = (c - u)^2 x^2 + u^2 y^2 - u^2 (c - u)^2 = 0. \tag{17.}$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation nach $u$

$$-2(c - u)x^2 + 2uy^2 - 2u(c - u)(c - 2u) = 0, \tag{18.}$$

oder, wenn man mit $-\frac{u}{2}$ multipliziert,

$$(c - u)ux^2 - u^2y^2 + u^2(c - u)(c - 2u) = 0. \tag{18a.}$$

Indem man die Gleichungen (17.) und (18a.) addiert, findet man

$$(c - u)cx^2 - (c - u)u^3 = 0,$$

oder

$$x^2 = \frac{u^3}{c}, \quad x^{\frac{2}{3}} = \frac{u}{\sqrt[3]{c}}. \tag{19.}$$

Setzt man diesen Wert von $x^2$ in die Gleichung (17.) ein, so folgt

$$y^2 = \frac{(c - u)^3}{c}, \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{c - u}{\sqrt[3]{c}}. \tag{20.}$$

Deshalb wird

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}, \tag{21.}$$

d. h. die Enveloppe ist wieder eine *Astroide.*

**Aufgabe 4.** Es ist eine Schar von Parabeln durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = 4c(y - ux) + (1 + u^2)x^2 = 0 \tag{22.}$$

gegeben; man soll ihre Enveloppe bestimmen. (Vergl. Fig. 161.)

**Auflösung.** Hier ist

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -4cx + 2ux^2 = 0. \tag{23.}$$

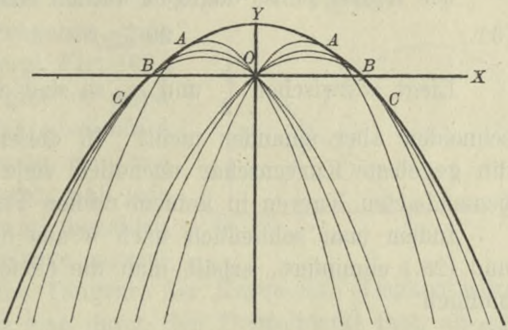
Dies gibt die beiden Lösungen

$$(24.)\quad x = 0 \quad \text{und} \quad (24a.)\quad u = \frac{2c}{x}.$$

Setzt man diesen Wert von $u$ in die Gleichung (22.) ein, so erhält man für die Enveloppe die Gleichung

(25.) $x^2+4c(y-c)=0.$

Fig. 161.




Die Enveloppe ist also wieder eine *Parabel.* Außerdem schneiden sich alle Parabeln der gegebenen Schar im Punkte $O$, welcher als ein Teil der Enveloppe zu betrachten ist und der Lösung durch Gleichung (24.) entspricht.

**Aufgabe 5.** Es ist eine Schar von *Kreisen* durch die Gleichung

$$F(x,\ y,\ u) = (x-u)^2 + y^2 - 2up + p^2 = 0 \tag{26.}$$

gegeben; man soll die Enveloppe bestimmen. (Vergl. Fig. 162.)

**Auflösung.** Hier ist

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ u)}{\partial u} = -2(x-u) - 2p = 0, \tag{27.}$$

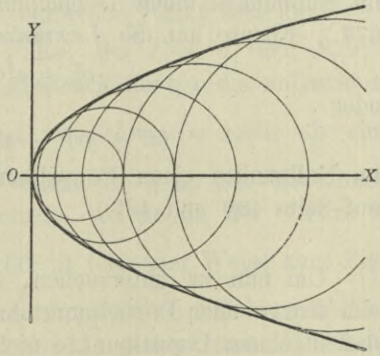
oder

$$x = u - p. \tag{28.}$$

Setzt man diesen Wert von $x$ in die Gleichung (26.) ein, so wird

(29.) $y = \pm\sqrt{2p(u-p)}.$

Fig. 162.




Die Gleichungen (28.) und (29.) geben die Schnittpunkte des Kreises, der dem Parameter $u$ entspricht, mit dem unendlich nahen. Diese Schnittpunkte werden erst reell, wenn

(30.) $u \geqq p.$

Die Kreise selbst dagegen werden schon reell, wenn

$$2u \geqq p. \tag{31.}$$

Liegt $u$ zwischen $\frac{p}{2}$ und $p$, so sind die Kreise zwar reell, schneiden aber einander nicht. In diesem Falle enthält also die gegebene Kurvenschar unendlich viele Kurven, welche die benachbarten Kurven in keinem reellen Punkte schneiden.

Indem man schließlich noch $u$ aus den Gleichungen (26.) und (28.) eliminiert, erhält man die Gleichung der Enveloppe, nämlich

$$y^2 = 2px \tag{32.}$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel.*

## § 157.

## Doppelpunkte und isolierte Punkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 253.)

Wenn eine Kurve, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

sein möge, zweimal durch denselben Punkt hindurchgeht, so nennt man diesen Punkt einen „*Doppelpunkt* der Kurve". So hat z. B. das *Folium Cartesii* mit der Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vergl. Fig. 143 auf Seite 577.) Ebenso hat die *Lemniskate* mit der Gleichung

$$r^2 = a^2\cos(2\varphi),$$

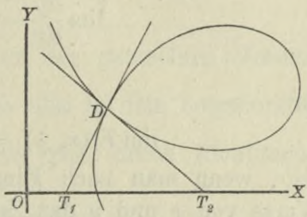
oder

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vergl. Fig. 128 und 131 auf Seite 480 und 487.)

Um nun zu untersuchen, für welche Werte von $x$ und $y$ eine Kurve einen Doppelpunkt hat, braucht man nur zu beachten, daß in einem Doppelpunkte nicht *eine*, sondern *zwei* Tangenten an die Kurve möglich sind, denn man kann an jeden der beiden

Fig. 163.




Kurvenzweige, welche durch den Doppelpunkt hindurchgehen, eine Tangente legen. (Vergl. Fig. 163.) Streng genommen gibt es sogar in einem Doppelpunkte *unendlich viele* Tangenten, wenn man von der Erklärung ausgeht, daß jede Gerade, welche zwei unendlich nahe Punkte der Kurve miteinander verbindet, eine Tangente der Kurve ist. Danach würde *jede* Gerade, welche man durch den Doppelpunkt legt, als eine Tangente aufgefaßt werden können. Hier soll aber nur die Verbindungslinie von zwei unendlich nahen Punkten, welche *auf demselben Zweige der Kurve liegen*, als eine Tangente angesehen werden.

Ist nun $F(x, y)$ eine *eindeutige* Funktion von $x$ und $y$, so gilt im allgemeinen dasselbe von

$$(2.)\qquad F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y};$$

es wird also für jedes Wertepaar $x$, $y$ die Richtungstangente

$$(3.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}$$

im allgemeinen nur einen einzigen Wert haben, so daß der zugehörige Kurvenpunkt nur ein einfacher Punkt sein kann.

Nur in dem besonderen Falle, wo $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ beide gleich 0 sind, erhält der Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$; dann kann also $\operatorname{tg}\alpha$ *möglicherweise* mehr als einen Wert haben. Die Methode, welche in § 65 zur Berechnung von Ausdrücken angegeben wurde, welche an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, führt hierbei in folgender Weise zum Ziele. Bezeichnet man wieder die zweiten partiellen Ableitungen durch Indizes, so folgt aus Gleichung (3.), indem man Zähler und Nenner einzeln differentiiert,

$$\lim \frac{dy}{dx} = -\lim \frac{F_{11} + F_{12}\dfrac{dy}{dx}}{F_{21} + F_{22}\dfrac{dy}{dx}}$$

für

$$\lim F_1(x, y) = 0, \quad \lim F_2(x, y) = 0,$$

also, wenn man nach Einsetzung der in Betracht kommenden Werte von $x$ und $y$ das Zeichen limes fortläßt,

$$\left(F_{21} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(F_{11} + F_{12}\frac{dy}{dx}\right),$$

oder

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}. \tag{4a.}$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man die Gleichung

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5.}$$

nochmals nach $x$ differentiiert; dann erhält man nämlich

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F(x, y)}{dx^2} = \dfrac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} \\ + \left[\dfrac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2(x, y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\right]\dfrac{dy}{dx} + F_2(x, y)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \end{cases} \tag{6.}$$

oder

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_2\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{6a.}$$

Aus dieser Gleichung bestimmt man im allgemeinen $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; gilt aber die Voraussetzung

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \tag{7.}$$

so erhält man wieder

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{8.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}. \tag{8a.}$$

Hieraus erkennt man, daß unter der gemachten Voraussetzung $\frac{dy}{dx}$ *zwei* Werte erhält, daß es also in dem betrachteten Punkte *zwei* Tangenten an die Kurve gibt, deren Richtungen durch die Gleichung (8a.) bestimmt sind.

Diese Untersuchung gibt daher den Satz:

*Ist der Punkt D mit den Koordinaten x, y ein Doppelpunkt der Kurve, so müssen die drei Gleichungen*

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0 \tag{9.}$$

*gleichzeitig befriedigt werden.*

Die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$, welche man aus der quadratischen Gleichung (8.) erhält, sind *reell*, wenn

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} > 0; \tag{10.}$$

sie sind dagegen imaginär, wenn

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} < 0. \tag{11.}$$

In dem ersten Falle erhält man einen *eigentlichen* Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, in dem zweiten Falle aber sind die Tangenten *imaginär*.

Ein Beispiel möge zeigen, wie die Kurve in dem Doppelpunkte beschaffen ist, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt. Es sei nämlich

$$F(x, y) = y^2 - (x-a)^2(x-b) = 0, \tag{12.}$$

oder

$$F(x, y) = y^2 - x^3 + (2a+b)x^2 - (a^2+2ab)x + a^2b = 0, \tag{12a.}$$

dann wird

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x, y) &= -3x^2 + (4a+2b)x - (a^2+2ab) \\ &= (x-a)(-3x+a+2b), \\ F_2(x, y) &= 2y, \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

$$F_{11} = -6x + (4a+2b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2. \tag{14.}$$

Für $x = a$, $y = 0$ werden also die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt, und man erhält

$$F_{11} = -2(a - b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2.$$

Deshalb wird nach Gleichung (8a.)

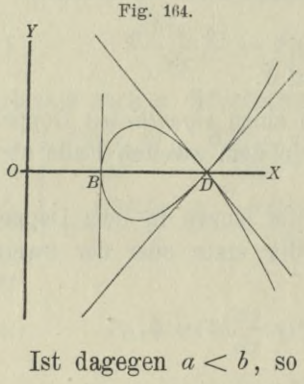
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a - b}. \tag{15.}$$

Ist $a > b$, so wird $\sqrt{a - b}$ reell; man kann in diesem Falle nicht nur die Tangenten in dem Doppelpunkte $D$ mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ zeichnen, sondern es ergibt sich auch aus Gleichung (12.), oder aus der Gleichung

$$y = \pm(x - a)\sqrt{x - b} \tag{12b.}$$

leicht die Gestalt der Kurve. Sie ist symmetrisch zur $X$-Achse, und $y$ wird für Werte von $x$, die kleiner als $b$ sind, imaginär, d. h. die Kurve liegt rechts von der Geraden, welche man durch den Punkt $B$ mit dem Koordinaten $x = b$, $y = 0$ parallel zur $Y$-Achse ziehen kann. Diese Gerade wird von der Kurve im Punkte $B$ berührt; und zwar gehen von $B$ aus zwei symmetrische Zweige der Kurve, welche sich im Doppelpunkte $D$ schneiden, so daß die Kurve zwischen $B$ und $D$ eine Schleife bildet. (Vergl. Fig. 164.)

Fig. 164.



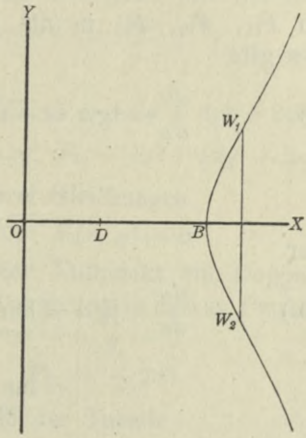

Ist dagegen $a < b$, so folgt aus der Gleichung

$$y = \pm(x - a)\sqrt{x - b},$$

daß der Punkt $D$ mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ wieder ein Punkt der Kurve ist. Für alle Werte von $x$, die kleiner als $a$ sind, und für alle Werte von $x$, die zwar größer als $a$, aber kleiner als $b$ sind, wird $y$ imaginär, so daß auch hier die Kurve eigentlich erst mit dem Punkte $B$ beginnt, dessen Koordinaten $x = b$, $y = 0$ sind. Der Punkt $D$ ist daher in diesem

Falle ein „*isolierter Punkt*“ oder „*Einsiedler*“. Ein solcher isolierter Punkt ist daher auch als ein Doppelpunkt anzusehen, in dem sich zwei imaginäre Kurvenzweige schneiden. Deshalb werden in diesem Falle auch die beiden Tangenten imaginär. (Vergl. Fig. 165.)

Fig. 165.




Für

$$x = \frac{4b - a}{3}, \quad y = \pm \frac{4(b-a)}{3}\sqrt{\frac{b-a}{3}}$$

hat die Kurve zwei Wendepunkte $W_1$ und $W_2$, wie man durch die früher angegebenen Methoden leicht bestätigen kann.

## § 158.

## Übungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 253.)

**Aufgabe 1.** Man soll beweisen, daß beim *Folium Cartesii* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vergl. Fig. 166.)

**Auflösung.** Hier ist

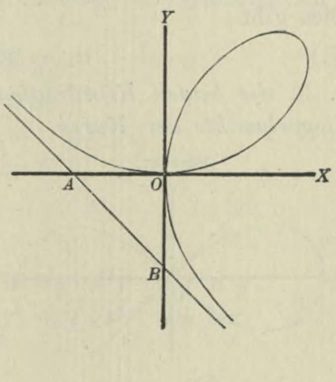
$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0, \tag{1.}$$

also

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay, \\ F_2(x, y) = 3y^2 - 3ax, \end{cases} \tag{2.}$$

$$\begin{cases} F_{11} = 6x, \quad F_{12} = -3a, \\ \qquad F_{22} = 6y. \end{cases} \tag{3.}$$

Fig. 166.




Für $x = 0, \; y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0,$$

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um in diesem Doppelpunkte die

Richtung der Tangenten zu bestimmen, setzt man die Werte von $F_{11}$, $F_{12}$, $F_{22}$ in die Formel Nr. 253 der Tabelle ein. Dies gibt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} \tag{4.}$$

$$= \frac{F_{11}}{-F_{12} \mp \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x=0} \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 36xy}}{6y} \tag{4a.}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{6x}{3a \mp \sqrt{9a^2 - 36xy}}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung das obere Zeichen und setzt $x = 0$, $y = 0$, so erhält man aus der ersten Darstellungsweise

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \infty, \tag{5.}$$

während man nach der zweiten Darstellungsweise auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ geführt wird.

Nimmt man dagegen das untere Zeichen, so erhält $\operatorname{tg}\alpha$ nach der ersten Darstellungsweise die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, nach der zweiten Darstellungsweise findet man aber

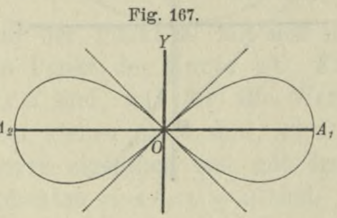
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0. \tag{6.}$$

Dies gibt

$$\alpha_1 = 90^0, \quad \alpha_2 = 0^0, \tag{7.}$$

d. h. *die beiden Koordinaten-Achsen sind Tangenten in dem Doppelpunkte der Kurve.*

Fig. 167.




**Aufgabe 2.** Man soll beweisen, daß bei der *Lemniskate* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vergl. Fig. 167.)

**Auflösung.** Hier ist

$$F(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0, \tag{8.}$$

also

$$F_1(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x, \quad F_2(x, y) = 4x^2y + 4y^3 + 2a^2y, \tag{9.}$$

$$F_{11} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2, \quad F_{12} = 8xy, \quad F_{22} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2. \tag{10.}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte zu bestimmen, beachte man, daß für $x = 0$, $y = 0$

$$F_{11} = -2a^2, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = +2a^2 \tag{11.}$$

wird. Dies gibt nach Formel Nr. 253 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \pm 1, \tag{12.}$$

also

$$\alpha_1 = +45^0, \quad \alpha_2 = -45^0, \tag{13.}$$

d. h. die beiden Tangenten im Nullpunkte halbieren die Winkel, welche die Koordinaten-Achsen miteinander bilden.

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

erhält man der Reihe nach unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise die Gleichungen

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{14.}$$

$$\frac{d^2F(x, y)}{dx^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{15.}$$

$$\frac{d^3F(x, y)}{dx^3} \tag{16.}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Bei *einfachen* Kurvenpunkten findet man

aus Gleichung (14.) die Größe $\frac{dy}{dx}$,

" " (15.) " " $\frac{d^2y}{dx^2}$,

" " (16.) " " $\frac{d^3y}{dx^3}$;

ist aber der Punkt ein Doppelpunkt, so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2(x, y) = 0;$$

dann reduzieren sich die Gleichungen (15.) und (16.) auf

$$(15\text{a.})\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$(16\text{a.})\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder

$$(16\text{b.})\quad F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+ 3\left(F_{12} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Da die Gleichung (14.) zur Berechnung von $\frac{dy}{dx}$ illusorisch wird, liefert Gleichung (15a.) die *beiden* Werte dieser Größe; aus Gleichung (16a.) oder (16b.) findet man dann die zugehörigen Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Für die *Lemniskate* wird z. B.

$$(17.)\quad F_{111} = 24x, \quad F_{112} = 8y, \quad F_{122} = 8x, \quad F_{222} = 24y,$$

Ausdrücke, welche für $x = 0$, $y = 0$ sämtlich verschwinden. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) und (12.) geht daher in diesem Falle die Gleichung (16b.) über in

$$(18.)\quad 3\left(0 + 2a^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm 6a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ sind also *beide* gleich Null. Daraus folgt, daß *die beiden Kurvenzweige der Lemniskate, welche sich in ihrem Doppelpunkte schneiden, gleichzeitig Wendepunkte sind.* (Vergl. Fig. 167.)

## § 159.

## Mehrfache Punkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 254.)

Wenn für ein Wertepaar $x$, $y$ nicht nur die Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt werden, sondern außerdem auch noch die Gleichungen

$$F_{11}(x, y) = 0, \quad F_{12}(x, y) = 0, \quad F_{22}(x, y) = 0,$$

so ist es nicht mehr möglich, die Werte von $\frac{dy}{dx}$ nach den Angaben der Formel Nr. 253 der Tabelle zu berechnen; dann reduziert sich aber die allgemein geltende Gleichung

$$\text{(1.)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

auf

$$\text{(2.)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0,$$

oder

$$\text{(2a.)} \quad F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom *dritten Grade* und liefert daher *drei* Werte dieser Größe. In dem zugehörigen Kurvenpunkte gibt es daher *drei* Tangenten der Kurve, woraus man schließen kann, daß drei Äste der Kurve durch diesen Punkt hindurchgehen.

Ein solcher Kurvenpunkt heißt daher ein „*dreifacher Punkt* der Kurve“.

Sind auch die *dritten* partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ sämtlich gleich Null, so kann man auch aus der Gleichung (2a.) noch nicht die Größe $\frac{dy}{dx}$ berechnen; dann gilt aber, wie man durch nochmalige Differentiation der Gleichung (1.) erkennt, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(4)} = 0, \tag{3.}$$

welche *vier* Werte von $\frac{dy}{dx}$ liefert. Der betrachtete Punkt ist dann ein „*vierfacher Punkt* der Kurve", denn es gibt in diesem Punkte *vier* Tangenten an die *vier* verschiedenen Zweige der Kurve, welche durch diesen Punkt hindurchgehen.

In dieser Weise kann man fortfahren und kommt schließlich zu dem folgenden Resultate:

*Sind die $n^{ten}$ partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ die ersten, welche für die Koordinaten $x$, $y$ des Kurvenpunktes $P$ nicht sämtlich verschwinden, so findet man aus der Gleichung*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(n)} = 0 \tag{4.}$$

*$n$ Werte von $\frac{dy}{dx}$, denen $n$ Tangenten in dem betrachteten Punkte an $n$ verschiedene Zweige der Kurve entsprechen. Der Punkt $P$ heißt dann ein „$n$-facher Punkt der Kurve".*

**Beispiel.**

Es sei

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - y(y^2 - 3x^2) = 0 \tag{5.}$$

die Gleichung der Kurve, dann wird

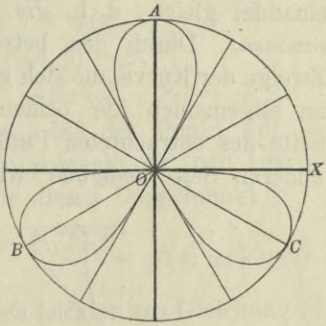
$$F(x, y) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - y^3 + 3x^2y,$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 6xy, \\ F_2 = 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 3y^2 + 3x^2, \end{array}\right. \tag{6.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_{11} = 30x^4 + 36x^2y^2 + 6y^4 + 6y, \\ F_{12} = 24x^3y + 24xy^3 + 6x, \\ F_{22} = 6x^4 + 36x^2y^2 + 30y^4 - 6y, \end{array}\right. \tag{7.}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} F_{111} = 120x^3 + 72xy^2, & F_{112} = 72x^2y + 24y^3 + 6, \\ F_{122} = 24x^3 + 72xy^2, & F_{222} = 72x^2y + 120y^3 - 6. \end{cases}$$

Fig. 168.




Für $x = 0$, $y = 0$ werden die 6 Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$
$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein dreifacher Punkt, in welchem man die Richtung der drei Tangenten aus Gleichung (2a.) findet, indem man

$$(8a.)\quad F_{111} = 0, \quad F_{112} = 6, \quad F_{122} = 0, \quad F_{222} = -6$$

einsetzt. Dies gibt

$$18\frac{dy}{dx} - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

oder, wenn man die drei Wurzeln dieser Gleichung mit $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$ bezeichnet,

$$(9.)\quad \operatorname{tg}\alpha_1 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = +\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = -\sqrt{3},$$

$$(10.)\quad \alpha_1 = 0^0, \quad \alpha_2 = 60^0, \quad \alpha_3 = 120^0.$$

(Vergl. Fig. 168.)

## § 160.

## Spitzen oder Rückkehrpunkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 255.)

In Formel Nr. 253 der Tabelle, nämlich in der Gleichung

$$(1.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}},$$

welche die Richtung der beiden Tangenten in einem Doppelpunkte lieferte, kann es vorkommen, daß

$$(2.)\quad F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

wird, ohne daß die drei Gleichungen

$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dann sind die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, d. h. *die beiden Tangenten fallen in eine zusammen.* Durch den betrachteten Punkt gehen daher zwei Zweige der Kurve, die sich gegenseitig berühren. Hierbei werden im allgemeinen die beiden Kurvenzweige nur auf der einen Seite des betrachteten Punktes *reell* sein, während sie auf der anderen Seite *imaginär* werden. Man kann sich diesen Fall

Fig. 169.

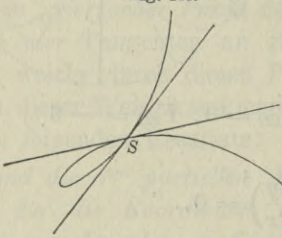
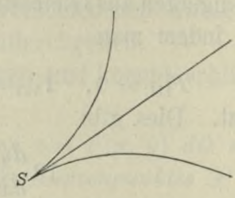



Fig. 170.




aus dem allgemeinen so entstanden denken, daß sich eine Schleife immer weiter zusammenzieht und schließlich zu einem Punkte zusammenschrumpft. (Vergl. Fig. 169 und 170.)

Man kann sich aber diesen Fall auch durch die folgende Rechnung klar machen. Es sei z. B.

$$y = \varphi(x) \pm (x - a)\sqrt{\psi(x)}, \tag{3.}$$

wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ rationale Funktionen sein mögen, die für $x = a$ nicht unendlich groß werden, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{2\psi(x) + (x - a)\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}}. \tag{4.}$$

Aus Gleichung (3.) findet man andererseits durch Fortschaffung des Wurzelzeichens

$$F(x, y) = [y - \varphi(x)]^2 - (x - a)^2\, \psi(x) = 0, \tag{5.}$$

$$\begin{cases} F_1(x, y) = -2[y - \varphi(x)]\varphi'(x) - 2(x - a)\psi(x) - (x - a)^2\psi'(x), \\ F_2(x, y) = +2[y - \varphi(x)], \end{cases} \tag{6.}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} F_{11} = +\,2\varphi'(x)^2 - 2[y - \varphi(x)]\varphi''(x) - 2\psi(x) \\ \qquad\qquad - 4(x-a)\psi'(x) - (x-a)^2\psi''(x), \\ F_{12} = -\,2\varphi'(x), \quad F_{22} = +\,2. \end{cases}$$

Deshalb erhält man für $x = a$, $y = \varphi(a)$

$$(8.)\quad F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0;$$

$$(9.)\quad F_{11} = 2\varphi'(a)^2 - 2\psi(a), \quad F_{12} = -\,2\varphi'(a), \quad F_{22} = +\,2.$$

Aus den Gleichungen (8.) folgt, daß der Punkt mit den Koordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$ ein Doppelpunkt ist, und aus den Gleichungen (9.) ergibt sich, daß für diesen Doppelpunkt

$$(10.)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \varphi'(a) \pm \sqrt{\psi(a)}.$$

Dasselbe Resultat findet man noch leichter aus Gleichung (4).

Wenn sich nun der Faktor $x - a$ noch einmal von der Funktion $\psi(x)$ absondern läßt, so daß für $x = a$

$$(11.)\qquad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 4\psi(a) = 0$$

wird, so fallen die beiden Tangenten im Doppelpunkte der Kurve in *eine* zusammen, und die Kurve selbst hat in dem Doppelpunkte eine Spitze, wenn $\psi(x)$ mit $x - a$ zugleich das Vorzeichen wechselt. Wird z. B.

$$\psi(x) > 0 \text{ für } x < a \quad \text{und} \quad \psi(x) < 0 \text{ für } x > a,$$

wobei (vom Vorzeichen abgesehen) nur hinreichend kleine Werte von $x - a$ in Betracht kommen sollen, so sind die beiden Werte von $y$ und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \leqq a$ ist; sie werden imaginär, wenn $x > a$ ist. Wird dagegen

$$\psi(x) < 0 \text{ für } x < a \quad \text{und} \quad \psi(x) > 0 \text{ für } x > a,$$

so sind die beiden Werte von $y$ und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \geqq a$ ist; sie werden imaginär für $x < a$.

Die beiden Kurvenzweige haben daher in dem Doppelpunkte dieselbe Tangente und endigen in diesem Punkte, so daß der eine Kurvenzweig als die Fortsetzung des andern betrachtet werden muß. Ein solcher Punkt heißt demgemäß eine „*Spitze* oder ein *Rückkehrpunkt* der Kurve“, und die zugehörige Tangente heißt „*Rückkehrtangente*“.

Eine Spitze ist gewissermaßen der Übergang von einem eigentlichen Doppelpunkte zu einem isolierten Punkte, ebenso wie eine quadratische Gleichung mit zwei *gleichen* Wurzeln den Übergang bildet von einer quadratischen Gleichung mit zwei *reellen* Wurzeln zu einer mit zwei *imaginären* Wurzeln.

**Beispiel 1.** Das in § 157 gewählte Beispiel

$$F(x, y) = y^2 - (x - a)^2 (x - b) = 0$$

liefert einen *eigentlichen Doppelpunkt*, wenn $a > b$, einen *isolierten Punkt*, wenn $a < b$, und eine *Spitze*, wenn $a = b$ ist. In der Tat, dann wird

(12.) $$F(x, y) = y^2 - (x - a)^3,$$

(13.) $$F_1(x, y) = -3(x - a)^2, \quad F_2(x, y) = 2y,$$

(14.) $$F_{11} = -6(x - a), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2,$$

folglich ist für $x = a$, $y = 0$

(15.) $$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

und

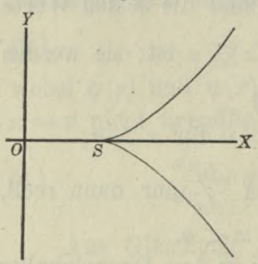
(16.) $$F_{12}{}^2 - F_{11} F_{22} = 0.$$

Hier kann die Gleichung der Kurve auch in der Form

(17.) $$y = \pm (x - a)\sqrt{x - a}$$

geschrieben werden; dies gibt dann

Fig. 171.




(18.) $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x - a},$$

und man erkennt, daß $y$ nur reell ist, wenn $x \geqq a$, und daß für $x = a$ die beiden Tangenten der Kurve mit der $X$-Achse zusammenfallen. Der Punkt $S$ mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ ist daher eine Spitze der Kurve. (Vergl. Fig. 171.)

**Beispiel 2.** Nach den Gleichungen (36.) und (36a.) in § 99 hat die *Kardioide* die Gleichung

(19.) $$r = a \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

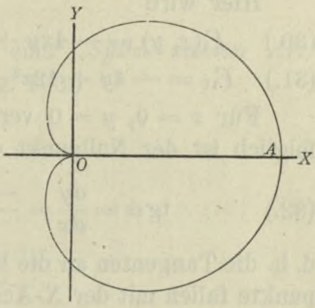
oder (vergl. Gl. (36a.) auf Seite 480)

$$(20.)\quad F(x, y) = 4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 - 4ax^3 - 4axy^2 - a^2y^2 = 0.$$

Man kann jetzt zeigen, daß diese Kurve im Nullpunkte einen Rückkehrpunkt (eine Spitze) hat, und daß die zugehörige Rückkehrtangente mit der $X$-Achse zusammenfällt. (Vergl. Fig. 172.)

In der Tat, hier wird

Fig. 172.




$$(21.)\quad F_1(x, y) = 16x^3 + 16xy^2 - 12ax^2 - 4ay^2,$$

$$(22.)\quad F_2(x, y) = 16x^2y + 16y^3 - 8axy - 2a^2y,$$

$$(23.)\quad F_{11}(x, y) = 48x^2 + 16y^2 - 24ax,$$

$$(24.)\quad F_{12}(x, y) = 32xy - 8ay,$$

$$(25.)\quad F_{22}(x, y) = 16x^2 + 48y^2 - 8ax - 2a^2.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ erhält man daher

$$(26.)\quad F_1(x, y) = 0,\quad F_2(x, y) = 0,\quad F_{11}(x, y) = 0,\quad F_{12}(x, y) = 0,$$
$$F_{22}(x, y) = -2a^2,$$

also

$$(27.)\quad F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_{12}}{F_{22}} = 0,\ \text{also}\ \alpha = 0;$$

d. h. der Nullpunkt ist eine Spitze der Kurve, und die Tangente in diesem Punkte fällt mit der $X$-Achse zusammen.

Andere Beispiele für das Auftreten von Spitzen liefern die anderen *Epizykloiden* und *Hypozykloiden*, insbesondere die *Astroide*; ferner die *Evoluten* oder *Krümmungsmittelpunkts-Kurven.*

Gewöhnlich wird von den beiden Zweigen einer Kurve, welche in einer Spitze zusammentreffen, der eine nach oben *konkav* und der andere nach oben *konvex* sein, so daß die gemeinsame Tangente *zwischen* beiden liegt, wie z. B. bei der Evolute der Parabel (Fig. 112 auf S. 458), der Ellipse (Fig. 113, 114 und 115 auf S. 459 und 460) und der Hyperbel (Fig. 116 auf S. 461). Diese Spitzen nennt man „*Spitzen erster Art*". Es können aber auch die beiden Zweige, welche in einer Spitze zusammentreffen, auf *derselben* Seite der gemeinsamen Tangente liegen. Es sei z. B.

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}, \tag{28.}$$

oder

$$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0. \tag{29.}$$

Hier wird

$$F_1(x, y) = -4xy + 4x^3 - 5x^4, \quad F_2(x, y) = 2y - 2x^2, \tag{30.}$$

$$F_{11} = -4y + 12x^2 - 20x^3, \quad F_{12} = -4x, \quad F_{22} = 2. \tag{31.}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, folglich ist der Nullpunkt ein *Doppelpunkt.* Dabei wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = 0, \tag{32.}$$

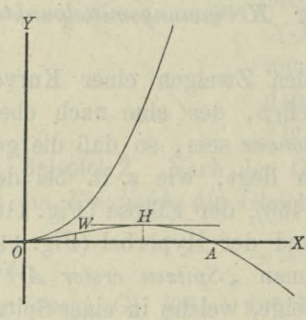
d. h. die Tangenten an die beiden Kurvenzweige in diesem Doppelpunkte fallen mit der $X$-Achse zusammen. Deshalb hat die Kurve in diesem Doppelpunkte eine *Spitze.* Daß der Nullpunkt wirklich eine Spitze ist, erkennt man aus Gleichung (28.), weil $y$ imaginär ist, sobald $x$ negativ wird.

Ferner folgt aus Gleichung (28.)

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}. \tag{33.}$$

Das doppelte Vorzeichen in den Gleichungen (28.) und (33.) entspricht dem Umstande, daß jedem Werte von $x$ *zwei* Werte von $y$, also auch *zwei* Punkte der Kurve zugeordnet sind.

Fig. 173.




Im Nullpunkte fallen diese beiden Punkte zusammen und gleichzeitig auch die beiden Tangenten. So lange $x < 1$ ist, liegen auch *beide* Zweige der Kurve über dieser gemeinsamen Tangente, nämlich über der $X$-Achse, weil *beide* Werte von $y$ positiv sind. Für kleine Werte von $x$, d. h. für $x < \frac{64}{225}$ werden sogar *beide* Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ *positiv,*

d. h. beide Zweige der Kurve sind in der Nähe der Spitze nach oben *konkav*; erst für

$$x = \frac{64}{225} \quad \text{wird} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{15}{4}\sqrt{x} = 0,$$

d. h. der untere Kurvenzweig hat in dem zugehörigen Punkte einen *Wendepunkt W*, in dem er sich von der Konkavität zur Konvexität wendet.

Eine solche Spitze nennt man eine „*Spitze zweiter Art*" oder „*Schnabel-Spitze*". (Vergl. Fig. 173.)

XX. Abschnitt.

# Herleitung der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Homogene Funktionen.

## § 161.

## Die *Taylor*sche Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 256.)

Es sei

$$(1.)\qquad z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei Veränderlichen, dann kann man $f(x + h, y + k)$ in ähnlicher Weise nach Potenzen von $h$ und $k$ entwickeln, wie früher (§ 35 und 37) $f(x + h)$ nach Potenzen von $h$ entwickelt wurde.

Man findet diese Entwickelung sehr leicht, indem man zunächst

$$ht \text{ statt } h, \qquad kt \text{ statt } k$$

schreibt und $f(x + ht, y + kt)$ nach steigenden Potenzen von $t$ entwickelt. Dies geschieht nach der *Mac-Laurin*schen *Reihe* in folgender Weise. Man setze

$$(2.)\qquad x + ht = u, \quad y + kt = v, \quad f(u, v) = F(t),$$

dann wird nach Formel Nr. 90 der Tabelle, wenn man $f$ mit $F$ und $x$ mit $t$ vertauscht,

$$(3.)\quad F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + R.$$

Bei der Bildung von $F'(t)$, $F''(t), \ldots$ muß man beachten, daß für diese Rechnung $t$ die *einzige Veränderliche* ist, während $x$, $y$, $h$, $k$ *konstant* bleiben, daß also

$$(4.)\qquad \frac{du}{dt} = h, \quad \frac{dv}{dt} = k$$

wird. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 225 der Tabelle

$$(5.)\quad \begin{cases} F(t) = f(u, v), \\ F'(t) = \dfrac{df(u, v)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k, \\ F''(t) = \dfrac{d^2 f(u, v)}{dt^2} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(2)}, \\ \dotfill \\ F^{(n)}(t) = \dfrac{d^n f(u, v)}{dt^n} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(n)}. \end{cases}$$

Die Formel Nr. 225 der Tabelle ist hier anwendbar, weil $u$ und $v$ *lineare* Funktionen von $t$ sind. Für $t = 0$ wird

$$(6.)\quad u = x,\ v = y,\ \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\ \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch daraus, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

ist, weshalb auch für beliebige Werte von $t$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

wird. Ähnliches gilt für die höheren Ableitungen. Daraus folgt

$$
(7.)\quad \begin{cases}
F(0) = f(x, y), \\
F'(0) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} k, \\
F''(0) = \left(\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} k\right)^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F^{(n)} = \left(\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} k\right)^{(n)}, \\
F^{(n+1)}(\Theta t) = \\
\left(\dfrac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial x} h + \dfrac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial y} k\right)^{(n+1)}.
\end{cases}
$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

$$
(8.)\quad F(t) = f(x + ht, y + kt) =
$$

$$
f(x, y) + \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(2)} + \cdots
$$

$$
+ \frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(n)} + R,
$$

wobei

$$
(9.)\quad R = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\Theta t) =
$$

$$
\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial y} k\right)^{(n+1)},
$$

oder, wenn man die zweite Form des Restes anwendet,

$$
(10.)\quad R = \frac{t^n}{n!}\left[F^{(n)}(\Theta_1 t) - F^{(n)}(0)\right]
$$

$$
= \frac{t^n}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 ht, y+\Theta_1 kt)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 ht, y+\Theta_1 kt}{\partial y} k\right)^{(n)}\right.
$$

$$
\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k\right)^{(n)}\right].
$$

Setzt man schließlich $t$ gleich 1, so geht Gleichung (8.) über in

$$(8\text{a.})\quad f(x+h,\, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wobei

$$(9\text{a.})\quad R = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)},$$

oder

$$(10\text{a.})\quad R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

In den vorstehenden Gleichungen ist wieder von der *symbolischen* Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht, nach welcher z. B.

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$
$$= f_{11}(x,y)h^2 + 2f_{12}(x,y)hk + f_{22}(x,y)k^2$$

wird. Die Größe $\Theta$ liegt dabei immer zwischen 0 und $+1$.

Diese Art der Entwickelung läßt sich ohne weiteres auf Funktionen von drei oder von mehr Veränderlichen übertragen. So ist z. B.

$$(12.)\quad f(x+h,\, y+k,\, z+l) = f(x,y,z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)} + R.$$

Aus der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen läßt sich dann auch die *Mac-Laurin*sche Reihe herleiten. So braucht man z. B. bei Funktionen von *drei* Veränderlichen nur

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

zu setzen und dann

$$x \text{ statt } h, \quad y \text{ statt } k, \quad z \text{ statt } l$$

zu schreiben, um die Funktion nach steigenden Potenzen von $x$, $y$ und $z$ zu entwickeln.

## § 162.
## Homogene Funktionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 257.)

**Erklärung.** *Eine Funktion*

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1.}$$

*von $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$ heißt eine „homogene Funktion $m^{ten}$ Grades", wenn sie sich durch Multiplikation der sämtlichen Veränderlichen mit ein und demselben Faktor $t$ in sich selbst verwandelt, multipliziert mit der $m^{ten}$ Potenz dieses Faktors.*

Eine *homogene* Funktion $m^{ten}$ Grades wird daher erklärt durch die Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \cdots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \cdots x_n). \tag{2.}$$

So ist z. B.

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y - 4yz^2 - 7xyz$$

eine homogene Funktion *dritten* Grades von $x$, $y$, $z$;

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy + \frac{z^3}{x} - \frac{3x^4 + z^4}{y^2}$$

und

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4} - \frac{3xyz}{\sqrt{x^2 - z^2}}$$

sind homogene Funktionen *zweiten* Grades von $x$, $y$, $z$;

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y + z}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{z + x}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

ist eine homogene Funktion *nullten* Grades von $x$, $y$, $z$.

**Satz 1.** *Dividiert man eine homogene Funktion $m^{ten}$ Grades durch die $m^{te}$ Potenz einer ihrer Veränderlichen, z. B. durch $x_n^m$, so wird der Quotient nur von den $n - 1$ Verhältnissen der übrigen Veränderlichen zu dieser einen abhängen*, d. h. der Quotient ist nur noch eine Funktion von $n - 1$ Veränderlichen

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$f(tx_1, tx_2 \ldots tx_{n-1}, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n);$$

setzt man in dieser Gleichung $t = \frac{1}{x_n}$, so erhält man

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}{x_n{}^m} = f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right). \tag{3.}$$

**Satz 2.** *Aus einer nicht homogenen Funktion von $n-1$ Veränderlichen $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ kann man eine homogene Funktion $m^{ten}$ Grades von $n$ Veränderlichen machen, indem man*

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \; u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \ldots u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

*setzt und die Funktion mit $x_n{}^m$ multipliziert.* Dabei ist der Exponent $m$ noch ganz beliebig.

**Beweis.** Vertauscht man in

$$x_n{}^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{4.}$$

$x_1$ mit $tx_1$, $x_2$ mit $tx_2, \ldots x_n$ mit $tx_n$, so geht Gleichung (4.) über in

$$t^m x_n{}^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n),$$

folglich wird

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ist $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ eine ganze rationale Funktion, so verfügt man über die beliebige Zahl $m$ gewöhnlich so, daß auch die homogene Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine ganze rationale Funktion wird.

Man kann diesen Satz benutzen, um Gleichungen zwischen $x, y$ oder zwischen $x, y, z$ homogen zu machen, wodurch ihre Behandlung für viele Zwecke bequemer wird. Ist z. B. die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{5.}$$

gegeben, so setze man

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

und multipliziere mit $x_3^2$. Dadurch erhält man eine *homogene* Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen $x_1$, $x_2$, $x_3$, nämlich

$$(6.) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Indem man

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x, \; x_2 = y$$

setzt, kann man dann jederzeit von den homogenen Gleichungen zu den nicht homogenen zurückkehren.

**Satz 3.** *Die ersten partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion $m^{ten}$ Grades sind sämtlich homogene Funktionen $(m-1)^{ten}$ Grades.*

**Beweis.** Bezeichnet man, wie gewöhnlich,

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \text{mit} \quad f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

und setzt

$$(7.) \qquad tx_1 = u_1, \; tx_2 = u_2, \ldots tx_n = u_n,$$

so folgt aus der Voraussetzung, nämlich aus der Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$(8.) \qquad f(u_1, u_2, \ldots u_n) = t^m f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

durch partielle Differentiation nach $x_\alpha$

$$f_\alpha(u_1, u_2, \ldots u_n) \,.\, t = t^m f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$(9.) \qquad f_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{m-1} f_\alpha(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

d. h. $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist eine homogene Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, wobei $\alpha$ die Werte $1, 2, \ldots n$ haben darf.

In derselben Weise kann man zeigen, daß jede zweite partielle Ableitung von einer homogenen Funktion $m^{\text{ten}}$ Grades eine homogene Funktion $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, allgemein, daß jede partielle Ableitung $r^{\text{ten}}$ Grades eine homogene Funktion $(m-r)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Differentiiert man Gleichung (8.), indem man $t$ als die einzige Veränderliche ansieht, so erhält man nach Formel Nr. 225 der Tabelle

$$f_1(u_1, u_2, \ldots u_n) \, . \, x_1 + f_2(u_1, u_2, \ldots u_n) \, . \, x_2 + \cdots$$
$$+ f_n(u_1, u_2, \ldots u_n) \, . \, x_n = mt^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder für $t = 1$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \, . \, x_1 + f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \, . \, x_2 + \cdots$$
$$+ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \, . \, x_n = mf(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Dies kann man noch einfacher schreiben, indem man

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = z$$

setzt; dann erhält man nämlich

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz. \tag{10.}$$

## Beispiel.

Es sei

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2, \tag{11.}$$

und

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

dann findet man

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} &= 2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3); \end{aligned} \right. \tag{12.}$$

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} &= 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ &+ 2x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &+ 2x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ &= 2z. \end{aligned} \tag{13.}$$

Wenn man beachtet daß $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ wieder homogene Funktionen $(m-1)^{ter}$ Ordnung sind, so folgt aus Gleichung (10.), indem man $z$ mit $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ und $m$ mit $m-1$ vertauscht,

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} = (m-1) \frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} = (m-1) \frac{\partial z}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = (m-1) \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und addiert sie, so erhält man unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise und mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$(14.)\qquad \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet

$$(15.)\qquad \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(r)} = m(m-1)\cdots(m-r+1)z.$$

Durch diese Formeln kann man die Gleichung der Tangente einer ebenen Kurve und die Gleichung der Tangentialebene einer Fläche vereinfachen.

Es sei z. B.

$$(16.)\qquad y = f(x), \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Kurve $n^{\text{ten}}$ Grades, so erhält man nach Formel Nr. 138 der Tabelle für die Tangente die Gleichung

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

oder

$$(17.)\qquad F_1(x, y)(x' - x) + F_2(x, y)(y' - y) = 0.$$

Macht man jetzt aber die Gleichung (16.) homogen, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{18.}$$

setzt und mit $x_3{}^n$ multipliziert, so wird

$$x_3{}^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{19.}$$

Daraus erhält man durch partielle Differentiation nach $x_1$ und $x_2$

$$x_3{}^{n-1} F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_3{}^{n-1} F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G_2(x_1, x_2, x_3).$$

Deshalb geht Gleichung (17.), wenn man sie mit $x_3{}^n$ multipliziert und

$$x' = \frac{x_1'}{x_3}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3}$$

setzt, über in

$$G_1(x'_1 - x_1) + G_2(x'_2 - x_2) = 0. \tag{20.}$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 = nG(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{21.}$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (20.) und (21.) für die Tangente die Gleichung

$$G_1 x'_1 + G_2 x'_2 + G_3 x_3 = 0. \tag{22.}$$

Indem man zum Schlusse

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x'_1 = x',\ x'_2 = y'$$

setzt, gehen

$$G(x_1, x_2, x_3), \quad G_1, \quad G_2$$

bezw. in

$$F(x, y), \qquad F_1, \quad F_2$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangente ist einfacher als die bisher benutzte, denn die Gleichung (17.) ist in bezug auf $x$ und $y$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade, während die Gleichung (22.) nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

### Beispiel.

Macht man die Gleichung der Ellipse homogen, so erhält man

(23.) $$G(x_1,\ x_2,\ x_3) = b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0,$$

folglich wird

(24.) $$G_1 = 2b^2x_1,\quad G_2 = 2a^2x_2,\quad G_3 = -2a^2b^2x_3,$$

so daß man für die Tangente die Gleichung

(25.) $$b^2x_1x'_1 + a^2x_2x'_2 - a^2b^2x_3^2 = 0$$

findet, die für $x_3 = 1$ in

(25a.) $$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0$$

übergeht.

Man erkennt, daß das hier allgemein erläuterte Verfahren bei den in § 88 behandelten Aufgaben bereits Anwendung gefunden hat.

Ist

(26.) $$F(x,\ y,\ z) = 0$$

die Gleichung einer Fläche $n^{\text{ten}}$ Grades, so hat nach Formel Nr. 242 die Tangentialebene im Flächenpunkte $P$ die Gleichung

(27.) $$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0.$$

Macht man Gleichung (26.) homogen, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_4},\quad y = \frac{x_2}{x_4},\quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

setzt und mit $x_4^n$ multipliziert, so erhält man

(26a.) $$x_4^nF\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}\right) = G(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Differentiation nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$

$$x_4^{n-1}F_1\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}\right) = G_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

$$x_4^{n-1}F_2\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}\right) = G_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

$$x_4^{n-1}F_3\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}\right) = G_3(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4).$$

Deshalb geht Gleichung (27.), wenn man noch

$$x' = \frac{x'_1}{x_4}, \; y' = \frac{x'_2}{x_4}, \; z' = \frac{x'_3}{x_4}$$

setzt, über in

$$(27\text{a.}) \qquad G_1(x'_1 - x_1) + G_2(x'_2 - x_2) + G_3(x'_3 - x_3) = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

$$(28.) \; G_1x_1 + G_2x_2 + G_3x_3 + G_4x_4 = nG(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (27 a.) und (28.) für die Tangentialebene die Gleichung

$$(29.) \qquad G_1x'_1 + G_2x'_2 + G_3x'_3 + G_4x_4 = 0.$$

Indem man zum Schlusse

$$x_4 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$
$$x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z'$$

setzt, gehen

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad G_1, \; G_2, \; G_3$$

bezw. in

$$F(x, y, z), \qquad\qquad F_1, \; F_2, \; F_3$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangentialebene ist einfacher als die bisher benutzte, denn Gleichung (27.) ist in bezug auf $x$, $y$, $z$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade, während Gleichung (29.) nur noch vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist.

**Beispiel.**

Macht man die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

homogen, so erhält man

$$(30.) \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2 = 0,$$

folglich wird

$$(31.) \qquad G_1 = \frac{2x_1}{a^2}, \; G_2 = \frac{2x_2}{b^2}, \; G_3 = \frac{2x_3}{c^2}, \; G_4 = -2x_4,$$

so daß man für die Tangentialebene die Gleichung

$$\frac{x_1 x'_1}{a^2} + \frac{x_2 x'_2}{b^2} + \frac{x_3 x'_3}{c^2} - x_4{}^2 = 0 \tag{32.}$$

findet, die für $x_4 = 1$ in

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0 \tag{32a.}$$

übergeht.

Man erkennt, daß auch diese Vereinfachung bereits in § 151 zur Anwendung gekommen ist.

XXI. Abschnitt.

# Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

## § 163.

## Maxima und Minima der Funktionen von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 258.)

Es sei

$$(1.)\qquad z = f(x, y)$$

eine stetige Funktion der beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$; man nennt dann $z$ ein *Maximum*, wenn

$$f(x, y) > f(x + h, y + k)$$

wird für hinreichend kleine, im übrigen aber beliebige, *positive oder negative* Werte von $h$ und $k$. Dagegen nennt man $z$ ein *Minimum*, wenn für die angegebenen Werte von $h$ und $k$

$$f(x, y) < f(x + h, y + k)$$

wird. Um die Werte von $x$ und $y$ zu bestimmen, für welche $z$ ein Maximum oder Minimum wird, muß man also untersuchen, für welche Werte von $x$ und $y$ die Differenz

$$(2.)\qquad \Delta = f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

*beständig negativ*, bezw. *beständig positiv* ist.

Zu diesem Zwecke entwickelt man $\Delta$ mit Hilfe des *Taylor*schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $h$ und $k$, wobei vorausgesetzt wird, daß $f(x, y)$ und die vorkommenden Ableitungen davon für die betrachteten Werte von $x$ und $y$ *stetig* und *endlich* sind. Dann erhält man nach Formel Nr. 256 der Tabelle

$$(3.)\quad f(x+h,\ y+k) = f(x,\ y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + R;$$

dabei ist, wenn man die zweite Form des Restes anwendet und bei $\Theta$ den Index 1 forläßt,

$$(4.)\quad \begin{aligned} R = {} & [f_1(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_1(x,\ y)]h \\ & + [f_2(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_2(x,\ y)]k. \end{aligned}$$

Da die Stetigkeit der Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ vorausgesetzt wird, so kann man die absoluten Beträge der Differenzen

$$f_1(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_1(x, y) = \alpha_1$$

und

$$f_2(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_2(x, y) = \alpha_2$$

für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ so klein machen, als man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Größe $\alpha$. Wäre jetzt $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y)$ von Null verschieden, so könnte man $k = 0$ und $h$ so klein machen, daß

$$\alpha < |f_1(x, y)|$$

wird. Da nun aber

$$(5.)\quad R = [f_1(x+\Theta h, y) - f_1(x, y)]h = \alpha_1 h$$

wird, wobei $\alpha_1$ seinem absoluten Betrage nach noch kleiner ist als $\alpha$, so hat

$$(6.)\quad \Delta = f_1(x, y)h + R = h[f_1(x, y) + \alpha_1]$$

dasselbe Vorzeichen wie $f_1(x, y)h$. Deshalb wechselt $\Delta$ mit $h$ zugleich das Zeichen, ist also weder *beständig negativ*, noch *beständig positiv*. Daraus folgt, daß $f(x, y)$ nur dann ein Maximum oder Minimum werden kann, wenn

$$(7.)\quad f_1(x, y) = 0$$

ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung erkennt man schon daraus, daß $f(x, y)$ ein Maximum bezw. ein Minimum bleiben muß, wenn man $y$ als *unveränderlich*, also $x$ als die *einzige Veränderliche* betrachtet. Wie nun $f(x)$ nur für Werte von $x$ ein Maximum oder Minimum werden konnte, für welche $f'(x) = 0$ wurde (vergl. Formel Nr. 122 der Tabelle), so kann hier $f(x, y)$ nur für Werte von $x$ und $y$ ein Maximum oder Minimum werden, für welche die Gleichung (7.) befriedigt ist.

Ebenso kann man jetzt aber auch zeigen, daß

$$f_2(x, y) = 0 \tag{8.}$$

sein muß. Aus den Gleichungen (7.) und (8.) findet man dann die Werte von $x$ und $y$, für welche *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ eintritt.

Ob für die so gefundenen Wertepaare von $x$ und $y$ *wirklich* ein Maximum oder Minimum eintritt, darüber entscheidet in vielen Fällen schon der Charakter der Aufgabe, wie das folgende Beispiel zeigen möge.

**Aufgabe.** In der Ebene seien beliebig viele Punkte $P_1$, $P_2, \ldots P_n$ mit den Koordinaten $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ gegeben; ihre Massen seien bezw. $M_1, M_2, \ldots M_n$; man soll die Koordinaten eines Punktes $P$ finden, so daß die Summe

$$M_1 \,.\, \overline{PP_1}^2 + M_2 \,.\, \overline{PP_2}^2 + \cdots + M_n \,.\, \overline{PP_n}^2$$

ein Minimum wird.

**Auflösung.** Hier ist die Funktion, welche ein Minimum werden soll,

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & M_1[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] + M_2[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2] \\ & + \cdots + M_n[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2], \end{aligned} \tag{9.}$$

also

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2M_1(x-x_1) + 2M_2(x-x_2) + \cdots + 2M_n(x-x_n), \\ f_2(x,y) = 2M_1(y-y_1) + 2M_2(y-y_2) + \cdots + 2M_n(y-y_n). \end{cases} \tag{10.}$$

Indem man

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x, y) = 0$$

setzt, findet man

$$\begin{cases} x = \dfrac{M_1x_1 + M_2x_2 + \cdots + M_nx_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}, \\[2ex] y = \dfrac{M_1y_1 + M_2y_2 + \cdots + M_ny_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}. \end{cases} \tag{11.}$$

Da bei dieser Aufgabe sicher ein Punkt vorhanden ist, welcher die Eigenschaft des Minimums besitzt, und da man nur ein einziges Wertepaar von $x$ und $y$ findet, für welches die beiden notwendigen Bedingungen erfüllt sind, so muß dieses Wertepaar das Minimum liefern.

So einfach ist aber die Entscheidung im allgemeinen nicht. Dagegen ergeben sich für alle Fälle die folgenden Regeln.

Sind die Bedingungsgleichungen (7.) und (8.) befriedigt, so findet man durch die Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe

$$\Delta = \frac{1}{2!}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + R, \tag{12.}$$

wobei nach Formel Nr. 256 der Tabelle, wenn man $n = 2$ setzt und wieder die zweite Form des Restes anwendet,

$$R = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(2)} - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(2)}\right],$$

also

$$\begin{aligned} 2R = {} & [f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y)]h^2 \\ & + 2[f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y)]hk \\ & + [f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y)]k^2 \end{aligned} \tag{13.}$$

ist. Da die Stetigkeit der Funktionen $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{22}(x, y)$ vorausgesetzt wird, so kann man die absoluten Beträge der Differenzen

$$\begin{aligned} f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y) &= \beta_1, \\ f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y) &= \beta_2, \\ f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y) &= \beta_3 \end{aligned}$$

für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ so klein machen, wie man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Größe $\beta$. Dann wird

$$2|R| < \beta(h^2 + 2|hk| + k^2) = \beta(|h| + |k|)^2. \tag{14.}$$

Setzt man jetzt

$$f_{11}(x, y)h^2 + 2f_{12}(x, y)hk + f_{22}(x, y)k^2 = \varphi(h, k), \tag{15.}$$

so heißt diese homogene Funktion zweiten Grades „eine *definite Form*", wenn sie für alle Werte von $h$ und $k$, von denen wenigstens der eine von Null verschieden sein muß, entweder *beständig positiv* oder *beständig negativ* ist. Es soll nun durch die folgenden Untersuchungen gezeigt werden, daß $\Delta$ für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen hat, wenn diese Funktion eine definite Form ist, daß also $f(x, y)$ für die gefundenen Werte von $x$ und $y$ ein *Minimum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig positiv* ist, und daß $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig negativ ist.*

Setzt man zunächst $k = 0$, so wird

$$\varphi(h, k) = f_{11}h^2;$$

daraus erkennt man, daß $\varphi(h, k)$ nur dann beständig positiv sein kann, wenn

$$f_{11} > 0 \tag{16.}$$

ist. Diese Bedingung ist *notwendig*, aber noch nicht *hinreichend*; um auch die weiteren Bedingungen zu finden, unter denen $\varphi(h, k)$ eine *definite Form* ist, bilde man unter der Voraussetzung, daß $f_{11} \gtreqless 0$ ist,

$$\varphi(h, k) . f_{11} = f_{11}^2 h^2 + 2 f_{11} f_{12} hk + f_{12}^2 k^2 + (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) k^2;$$

dies gibt

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}} [(f_{11}h + f_{12}k)^2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)k^2]. \tag{17.}$$

Damit dieser Ausdruck für $k = 0$ positiv ist, findet man wieder

$$f_{11} > 0;$$

damit ferner $\varphi(h, k)$ auch positiv ist, wenn man

$$f_{11}h + f_{12}k = 0, \quad \text{oder} \quad h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$$

setzt, muß außerdem

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{18.}$$

sein. Diese beiden Bedingungen (16.) und (18.) sind *notwendig*, sie sind aber auch *hinreichend*; denn, wie man auch $h$ und $k$ bestimmen mag, $\varphi(h, k)$ ist dann *immer positiv*, so lange $h$ und $k$ nicht beide gleich 0 sind.

In derselben Weise kann man unter der Voraussetzung, daß $f_{22} \gtreqless 0$ ist, die Funktion $\varphi(h, k)$ auf die Form

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}} [(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)h^2 + (f_{12}h + f_{22}k)^2] \tag{19.}$$

bringen. Dabei folgt aus den Bedingungen

$$f_{11} > 0 \text{ und } f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0$$

schon ganz von selbst, daß auch $f_{22} > 0$ sein muß.

Gelten die Ungleichungen (16.) und (18.), so kann man für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ die oben eingeführte Größe $\beta$ kleiner machen als die Werte von

$$\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{11}} \quad \text{und} \quad \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{22}},$$

woraus sich ergibt, daß auch

$$\beta < f_{11} \quad \text{und} \quad \beta < f_{22}$$

ist. Dadurch wird für $h \gtrless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

$$(20.)\qquad \varphi(h, k) = f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2\,|R|,$$

und für $h = 0$, $k \gtrless 0$

$$(21.)\qquad \varphi(h, k) = f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2\,|R|.$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|h| \geqq |k| > 0$

$$(22.)\quad \varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}}h^2 > 4\beta h^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2\,|R|,$$

und nach Gleichung (17.) für $|k| \geqq |h| > 0$

$$(23.)\quad \varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2 > 4\beta k^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2\,|R|.$$

Deshalb wird nach Gleichung (12.)

$$\varDelta = \frac{1}{2}\varphi(h, k) + R,$$

gleichviel, ob $R$ positiv oder negativ ist, mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen haben, d. h. $\varDelta$ ist *beständig positiv.*

Somit sind die Bedingungen

$$(24.)\quad f_1(x, y) = 0,\quad f_2(x, y) = 0,\quad f_{11} > 0,\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

dafür, daß $f(x, y)$ ein *Minimum* wird, auch *hinreichend.*

Ebenso findet man aus Gleichung (17.), daß die Funktion $\varphi(h, k)$ *beständig negativ* ist, wenn

$$(25.)\qquad f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

ist. Aus $f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0$ folgt dann, daß auch $f_{22} < 0$ sein muß.

Macht man jetzt die absoluten Beträge von $h$ und $k$ so klein, daß $\beta$ kleiner wird als die Größen

$$-f_{11},\quad -f_{22},\quad -\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{4f_{11}},\quad -\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{4f_{22}},$$

so wird für $h \gtreqless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

(26.) $$-\varphi(h, k) = -f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2\,|\,R\,|,$$

und für $h = 0$, $k \gtreqless 0$

(27.) $$-\varphi(h, k) = -f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2\,|\,R\,|.$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|\,h\,| \geqq |\,k\,| > 0$

(28.) $$-\varphi(h,k) > -\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{f_{22}}h^2 > 4\beta h^2 \geqq \beta(|\,h\,|+|\,k\,|)^2 > 2\,|\,R\,|,$$

und nach Gleichung (17.) für $|\,k\,| \geqq |\,h\,| > 0$

(29.) $$-\varphi(h, k) > -\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{f_{11}}k^2 > 4\beta k^2 \geqq \beta(|\,h\,|+|\,k\,|)^2 > 2\,|\,R\,|.$$

Deshalb hat auch in diesem Falle, gleichviel, ob $R$ positiv oder negativ ist, $\Delta$ mit $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ gleiches Vorzeichen, d. h. $\Delta$ ist *beständig negativ*.

Somit sind die Bedingungen

(30.) $$f_1(x, y) = 0,\quad f_2(x, y) = 0,\quad f_{11} < 0,\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

dafür, daß $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, auch *hinreichend*.

Ist dagegen

(31.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0,$$

so ist $\varphi(h, k)$ *keine definite Form*, denn für $k = 0$ hat $\varphi(h, k) = f_{11}h^2$ *gleiches* Vorzeichen mit $f_{11}$, aber für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$, oder $f_{11}h + f_{12}k = 0$ wird nach Gleichung (17.)

(32.) $$\varphi(h, k) = \frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{f_{11}}k^2$$

und hat deshalb das *entgegengesetzte* Zeichen wie $f_{11}$. Dabei wird für diese besonderen Werte von $h$ und $k$ die Funktion $\varphi(h, k)$ über das Vorzeichen von $\Delta$ entscheiden, denn für $k = 0$ wird

(33.) $$2\Delta = f_{11}h^2 + [f_{11}(x + \Theta h, y) - f_{11}(x, y)]h^2,$$

wobei man den Ausdruck in der eckigen Klammer für hinreichend kleine Werte von $h$ beliebig klein machen kann; und für $f_{11}h = -f_{12}k$ wird

$$(34.)\qquad 2\Delta = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2 + 2R,$$

wobei nach Ungleichung (14.) in diesem Falle

$$2\,|R| < \beta(|h| + |k|)^2 + \frac{\beta k^2}{f_{11}^2}(|f_{11}| + |f_{12}|)^2$$

ist. Für hinreichend kleine Werte von $k$ kann man aber den Ausdruck

$$\frac{\beta}{f_{11}^2}(|f_{11}| + |f_{12}|)^2 < \left|\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}\right|$$

machen. Deshalb wird, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0$$

ist, $f(x, y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum*, da $\Delta$ weder beständig negativ noch beständig positiv ist.

Ist endlich

$$(35.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2,$$

so wird nach Gleichung (17.), wenn $f_{11} \gtrless 0$ ist,

$$(36.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2,$$

oder nach Gleichung (19.), wenn $f_{22} \lesseqgtr 0$ ist,

$$(37.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}}(f_{12}h + f_{22}k)^2.$$

In diesem Falle nennt man die homogene Funktion $\varphi(h, k)$ eine „*semidefinite Form*“; sie verschwindet nämlich für $h = 0$, $k = 0$ und *außerdem* noch für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$, während sie für alle anderen Werte von $h$ und $k$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f_{11}$, bezw. wie $f_{22}$. Deshalb kann jetzt $\varphi(h, k)$ nicht mehr für alle Wertsysteme von $h$ und $k$ über das Vorzeichen von $\Delta$ entscheiden. Man kann vielmehr über die Werte von $h$ und $k$ so verfügen, daß $\varphi(h, k)$ (vom Vorzeichen abgesehen) selbst dann kleiner als $2\,|R|$ wird, wenn man die absoluten Beträge von $h$ und $k$ beliebig klein macht.

Wie dies geschieht, möge zunächst bei einem Beispiele gezeigt werden. Es sei

$$(38.)\qquad \begin{aligned} f(x, y) &= (2px - y^2)(2qx - y^2) \\ &= 4pqx^2 - 2(p + q)xy^2 + y^4, \end{aligned}$$

also

(39.) $f_1(x, y) = 8pqx - 2(p+q)y^2,\ f_2(x, y) = -4(p+q)xy + 4y^3,$

(40.) $f_{11}(x, y) = 8pq,\ f_{12}(x, y) = -4(p+q)y,$

$$f_{22}(x, y) = -4(p+q)x + 12y^2.$$

Da die Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ für $x = 0,\ y = 0$ beide verschwinden, so muß man untersuchen, ob für diese Werte von $x$ und $y$ ein Maximum oder Minimum eintritt. Aus den Gleichungen (40.) ergibt sich für $x = 0,\ y = 0$

(41.) $f_{11}(0, 0) = 8pq,\ f_{12}(0, 0) = 0,\ f_{22}(0, 0) = 0,$

also

(42.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Die Bedingungen, welche *bisher* für das Eintreten eines Maximums oder Minimums aufgestellt worden sind, werden also nicht erfüllt.

Dagegen folgt aus

(43.) $f(0+h, 0+k) = f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4,$

daß die Funktion $\varphi(h, k)$, welche sich in diesem Falle auf das eine Glied $8pqh^2$ reduziert, nicht immer über das Vorzeichen von

(44.) $\varDelta = f(h, k) - f(0, 0) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4$

entscheidet. Setzt man z. B.

(45.) $$k^2 = 2lh,$$

wo man über die Größe $l$ noch beliebig verfügen darf, so wird

(46.) $\varDelta = 4[pq - (p+q)l + l^2]h^2 = 4(l-p)(l-q)h^2.$

Unter der Voraussetzung, daß $p > q$ ist, wird deshalb $\varDelta$ *positiv*, wenn $l > p$, oder $l < q$ ist; dagegen wird $\varDelta$ *negativ*, wenn $p > l > q$ ist. Obgleich also $\varphi(h, k)$ *niemals negativ* werden kann, wenn $p$ und $q$ dasselbe Vorzeichen haben, wird $\varDelta$ doch *positive und negative* Werte annehmen, so daß $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist.

**Bemerkung.**

In dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, liegt die folgende, *fehlerhafte* Schlußweise nahe. Wenn z. B. $f_{11} \gtreqless 0$ ist, so folgt aus Gleichung (17.) für $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$, daß

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2 \tag{47.}$$

ist, folglich hat $\varphi(h, k)$ immer dasselbe Vorzeichen wie $f_{11}$. Nur für $f_{11}h = -f_{12}k$ wird $\varphi(h, k)$ gleich Null und kann deshalb nicht mehr über das Vorzeichen von $\varDelta$ entscheiden. Für diesen besonderen Wert von $h:k$ muß also das Vorzeichen von $\varDelta$ noch untersucht werden, indem man

$$\varDelta = f\left(x - \frac{f_{12}k}{f_{11}},\ y + k\right) - f(x, y)$$

nach steigenden Potenzen von $k$ entwickelt. Da man es hierbei nur mit einer einzigen Veränderlichen $k$ zu tun hat, und da unter den gemachten Voraussetzungen die Glieder erster und zweiter Dimension verschwinden, so wird

$$\varDelta = Ck^3 + Dk^4 + Ek^5 + \cdots.$$

Ist $C \lesseqgtr 0$, so wechselt für hinreichend kleine Werte von $k$ die Größe $\varDelta$ mit $k$ zugleich das Vorzeichen, so daß *weder ein Maximum noch ein Minimum* eintreten kann. Ist aber $C = 0$, so tritt ein *Minimum* ein, wenn $f_{11}$ und $D$ *beide positiv* sind, und ein *Maximum*, wenn $f_{11}$ und $D$ *beide negativ* sind. Haben $f_{11}$ und $D$ *verschiedenes* Vorzeichen, so tritt *weder ein Maximum noch ein Minimum* ein.

Daß diese Schlußweise *fehlerhaft* ist, lehrt schon das oben angeführte Beispiel, in welchem $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist, obgleich in

$$\varDelta = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4$$

alle soeben angegebenen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums erfüllt sind. Es ist nämlich unter der Voraussetzung, daß $p$ und $q$ gleiches Vorzeichen haben,

1) $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$,
2) $f_{11} = 8pq > 0$,
3) der Koeffizient $C$ von $k^3$ in der Entwickelung von $\varDelta$ nach steigenden Potenzen von $k$ ist gleich 0, weil $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}} = 0$ ist,
4) der Koeffizient $D$ von $k^4$ in dieser Entwickelung ist gleich $+1$, also *positiv*.

Der Fehler der angeführten Schlußweise liegt darin, daß für das Vorzeichen von $\varDelta$ die Glieder höherer Dimensionen nicht nur in dem Falle den Ausschlag geben, wo $\varphi(h, k)$ *verschwindet*, sondern auch schon dann, wenn $\varphi(h, k)$ sich dem Werte 0 *nähert*, ohne daß $h$ und $k$ gleich 0 werden. Indem die Funktion $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ beliebig klein wird von einer höheren als der zweiten Ordnung, kann sie, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner sein als die Summe der Glieder dritter und höherer Dimensionen.

Will man in dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, die Untersuchung, ob $f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum, oder keines von beiden ist, zu Ende führen, so muß man beachten, daß $\Delta$ eine Funktion von $h$ und $k$ $F(h, k)$ ist, deren Vorzeichen für sehr kleine Werte von $h$ und $k$ bestimmt werden soll. Indem man zunächst annimmt, daß $h$ einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *konstanten* Wert besitzt, kann man $F(h, k)$ als eine Funktion der einzigen Veränderlichen $k$ betrachten und nach den Regeln, welche für die Theorie der Maxima und Minima bei Funktionen von *einer* Veränderlichen gelten, die Werte von $k$ bestimmen, für welche $F(h, k)$ ein Maximum oder Minimum wird. Zu diesem Zwecke sucht man die Werte von $k$ auf, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial k} = F_2(h, k) = 0$$

wird. Von diesen Werten braucht man aber nur diejenigen zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *konstanten* Grenzen $-h$ und $+h$ liegen; sie seien (der Größe nach geordnet)

$$k_1 = \varphi_1(h),\ k_2 = \varphi_2(h),\ \ldots k_m = \varphi_m(h).$$

Ebenso kann man annehmen, daß $k$ einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *konstanten* Wert besitzt, und $F(h, k)$ als Funktion der einzigen Veränderlichen $h$ betrachten. Indem man die Werte von $h$ aufsucht, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial h} = F_1(h, k) = 0$$

wird, findet man die Werte von $h$, für welche $F(h, k)$ möglicherweise ein Maximum oder Minimum wird. Auch hier braucht man nur diejenigen Werte von $h$ zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *konstanten* Grenzen $-k$ und $+k$ liegen; sie seien (der Größe nach geordnet)

$$h_1 = \psi_1(k),\ h_2 = \psi_2(k),\ \ldots h_n = \psi_n(k).$$

Ergibt sich jetzt, daß die Größen

$$(48.)\quad \begin{cases} F(h, -h),\ F(h, k_1),\ F(h, k_2),\ \ldots F(h, k_m),\ F(h, +h), \\ F(-k, k),\ F(h_1, k),\ F(h_2, k),\ \ldots F(h_n, k),\ F(+k, k) \end{cases}$$

*sämtlich negativ* sind, so ist $\Delta$ für *alle* in Betracht kommenden Werte von $h$ und $k$ negativ, weil auch die *größten* Werte von $\Delta$ noch negativ sind. Ergibt sich aber, daß die in (48.) angegebenen Größen *sämtlich positiv* sind, so ist $\Delta$ für alle in Betracht kommenden Werte von $h$ und $k$ positiv, weil auch die *kleinsten* Werte von $\Delta$ noch positiv sind. In dem ersten Falle wird also $f(x, y)$ ein *Maximum* und in dem zweiten Falle ein *Minimum*.

Diese Bedingungen sind gleichzeitig auch die *notwendigen:* denn sind die unter (48.) angegebenen Größen teilweise positiv und teilweise negativ, so wechselt $\Delta$ das Vorzeichen, woraus dann folgt, daß $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum wird.

Die vorstehenden Umformungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt worden, daß $f_{11} \gtreqless 0$ ist. Fällt diese Voraussetzung fort, so wird im allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.

Ist nämlich

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} \gtreqless 0, \quad f_{22} \gtreqless 0, \tag{49.}$$

so wird

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= 2f_{12}hk + f_{22}k^2 \\ &= \frac{1}{f_{22}}\left[(f_{12}h + f_{22}k)^2 - f_{12}{}^2h^2\right]. \end{aligned} \tag{50.}$$

Für $h = 0$ hat daher $\varphi(h, k)$ mit $f_{22}$ *gleiches* Vorzeichen; für $h = -\dfrac{f_{22}k}{f_{12}}$ dagegen sind die Vorzeichen von $\varphi(h, k)$ und $f_{22}$ *ungleich.*

In ähnlicher Weise kann man den Fall erledigen, wo

$$f_{11} \gtreqless 0, \quad f_{12} \gtreqless 0, \quad f_{22} = 0 \tag{51.}$$

ist; man braucht nur die Indizes 1 und 2 und die Größen $h$ und $k$ miteinander zu vertauschen.

Ist ferner

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} \gtreqless 0, \quad f_{22} = 0, \tag{52.}$$

so wechselt

(53.) $$\varphi(h,\ k) = 2f_{12}hk$$

mit $h$ (und ebenso mit $k$) das Vorzeichen. Wenn also die Voraussetzungen (49.), (51.) oder (52.) gelten, *kann weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.* Denn $\varDelta$ wechselt mit $\varphi(h,\ k)$ zugleich das Vorzeichen, da die betrachteten Werte von $\varphi(h,\ k)$ kleine Größen *zweiter* Ordnung sind und sich von $2\varDelta$ nur durch kleine Größen *dritter* Ordnung unterscheiden.

Die Fälle, in denen

(54.) $$f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} \gtreqless 0,$$

oder

(55.) $$f_{11} \gtreqless 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} = 0$$

ist, geben

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

und sind oben schon ausführlich behandelt worden.

Es bleibt daher nur der Fall übrig, wo

(56.) $$f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} = 0$$

ist; dann wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze

(57.) $$\varDelta = \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\Big)^{(3)} + R,$$

oder

(57 a.) $$6\varDelta = f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3 + 6R,$$

wobei nach Formel Nr. 256 der Tabelle

(58.) $$\begin{aligned} 6R = {} & [f_{111}(x + \Theta h,\ y + \Theta k) - f_{111}(x,\ y)]h^3 \\ & + 3\,[f_{112}(x + \Theta h,\ y + \Theta k) - f_{112}(x,\ y)]h^2k \\ & + 3\,[f_{122}(x + \Theta h,\ y + \Theta k) - f_{122}(x,\ y)]hk^2 \\ & + [f_{222}(x + \Theta h,\ y + \Theta k) - f_{222}(x,\ y)]k^3 \end{aligned}$$

ist. Da man die Stetigkeit der Funktionen $f_{111}(x,\ y)$, $f_{112}(x,\ y)$, $f_{122}(x,\ y)$, $f_{222}(x,\ y)$ voraussetzt, so kann man für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ die absoluten Beträge der Größen, welche bei Gleichung (58.) in den eckigen Klammern stehen, kleiner machen als eine beliebige kleine Größe $\gamma$, folglich wird

(59.) $$6\,|\,R\,| < \gamma\,(|\,h\,| + |\,k\,|)^3.$$

Sind die Größen $f_{111}$, $f_{112}$, $f_{122}$, $f_{222}$ nicht alle vier gleich 0, und sind $u_1$, $u_2$, $u_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$(60.) \qquad f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222} = 0,$$

so wird $f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222}$ für alle Werte von $u$, welche von $u_1$, $u_2$ und $u_3$ verschieden sind, eine *endliche* Größe sein. Indem man für einen solchen positiven Wert von $u$

$$(61.) \qquad \gamma < \frac{f_{111}u^3 + 3f_{112}u + 3f_{122}u + f_{222}}{(u+1)^3}$$

macht und $h = u \,.\, k$ setzt, wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$(62.) \qquad f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3$$
$$= (f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3 > \gamma(u+1)^3k^3 > 6\,|R|.$$

Deshalb hat $\varDelta$ das gleiche Vorzeichen wie $(f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3$, ein Ausdruck, der mit $k$ das Vorzeichen wechselt; folglich hat $\varDelta$ positive und negative Werte, so daß $f(x, y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* werden kann, wenn die Größen $f_{111}$, $f_{112}$, $f_{122}$, $f_{222}$ nicht alle vier gleich 0 sind.

Gelten die 9 Bedingungen

$$(63.) \qquad \begin{cases} f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} = 0, \\ f_{111} = 0,\ f_{112} = 0,\ f_{122} = 0,\ f_{222} = 0, \end{cases}$$

so findet man nach dem *Taylor*schen Lehrsatze

$$(64.) \qquad \varDelta = \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)} + R.$$

Der Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)}$ ist eine homogene Funktion $g(h, k)$ *vierten* Grades von $h$ und $k$ und kann nach den Sätzen der Algebra in zwei homogene Funktionen *zweiten* Grades $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zerlegt werden. Sind $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zwei *definite Formen*, so läßt sich zeigen, daß $\varDelta$ für hinreichend kleine Werte von $h$ und $k$ gleiches Vorzeichen mit $g(h, k)$ hat, daß also $f(x, y)$ ein *Maximum* oder *Minimum* wird, je nachdem $g(h, k)$ *beständig negativ* oder *beständig positiv* ist.

Diese Untersuchung wird jedoch nur in äußerst seltenen Fällen erforderlich sein und möge deshalb an dieser Stelle nicht weitergeführt werden.

Im allgemeinen wird man schon mit der folgenden Regel auskommen:

*$z = f(x, y)$ wird ein Minimum, wenn*

(65.) $f_1(x, y) = 0,\quad f_2(x, y) = 0,\quad f_{11} > 0,\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$

*und $z = f(x, y)$ wird ein Maximum, wenn*

(66.) $f_1(x, y) = 0,\quad f_2(x, y) = 0,\quad f_{11} < 0,\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$

*dagegen wird $z = f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn zwar*

(67.) $f_1(x, y) = 0,\quad f_2(x, y) = 0,\quad$ *aber* $\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$

## § 164.

## Geometrische Deutung der vorhergehenden Untersuchungen.*)

Die vorstehenden Untersuchungen werden anschaulich, wenn man

(1.) $$z = f(x, y)$$

als Gleichung einer Fläche auffaßt. Nach Formel Nr. 242 der Tabelle hat dann die Tangentialebene im Flächenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ die Gleichung

(2.) $$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial x}(y' - y).$$

Sind nun die Bedingungen

(3.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 0$$

erfüllt, so reduziert sich Gleichung (2.) auf

(4.) $$z' - z = 0,$$

d. h. *die Tangentialebene im Punkte $P$ wird parallel zur $XY$-Ebene.* Setzt man jetzt noch

(5.) $x' = x + h,\quad y' = y + k,\quad$ also $\quad h = x' - x,\quad k = y' - y,$

so kann man die Gleichung der Fläche auf die Form

*) Auch hier werden die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes als bekannt vorausgesetzt.

(6.) $$z' = f(x', y') = z + \frac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{21}hk + f_{22}k^2) + [h, k]_3$$

bringen, wobei mit $[h, k]_3$ die Glieder dritter und höherer Dimension bezeichnet sind. Deshalb wird $z' - z$ mit $h$ und $k$ zugleich unendlich klein von der zweiten Ordnung. Sind nun $h$ und $k$ wirklich beliebig klein und so bestimmt, daß $z' - z$ einen konstanten Wert $l$ beibehält, so ist

(7.) $$z' - z = l$$

die Gleichung einer Ebene, welche der Tangentialebene im Punkte $P$ parallel ist und ihr beliebig nahe liegt. Für den Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche findet man aus Gleichung (6.) unter Vernachlässigung der beliebig kleinen Größen *dritter* und *höherer* Ordnung,

(8.) $$f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 = 2l,$$

oder

(8a.) $$f_{11}(x' - x)^2 + 2f_{12}(x' - x)(y' - y) + f_{22}(y' - y)^2 = 2l.$$

Diese Gleichung stellt einen kleinen Kegelschnitt dar, welcher „der *Dupin*sche Kegelschnitt" oder die dem Flächenpunkte $P$ entsprechende „*Indikatrix*" genannt wird, weil man aus der Gestalt dieses Kegelschnittes über die Krümmung der Fläche im Punkte $P$ Auskunft erhält; und zwar ist bekanntlich die Kurve eine *Ellipse*, wenn

(9.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

wird. Damit aber diese Ellipse *reell* ist, müssen $f_{11}$ (und ebenso $f_{22}$) mit $l$ gleiches Zeichen haben.

Dies entspricht ganz der Anschauung. Ist nämlich der Punkt ein *tiefster* Punkt, dann muß in Gleichung (7.) die Größe $l$ einen *positiven* Wert haben, weil die Tangentialebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *oben* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Kurve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

(10.) $$f_{11} > 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

befriedigt sein.

Ist der Punkt $P$ ein *höchster* Punkt, so muß in Gleichung (7.) die Größe $l$ einen *negativen* Wert haben, weil die Tangentialebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *unten* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Kurve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

$$(11.)\qquad f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

befriedigt werden. In beiden Fällen nennt man den Punkt $P$ „*elliptisch*“.

Die Gleichung (8a.) stellt dagegen eine Hyperbel dar, wenn

$$(12.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0,$$

gleichviel, ob $l$ positiv oder negativ ist. Die Schnittkurve der Fläche mit jeder Ebene, welche zur Tangentialebene parallel ist und ihr sehr nahe liegt, hat dann in der Nähe des Flächenpunktes $P$ die Gestalt einer kleinen *Hyperbel*, was nur dadurch möglich wird, daß die Fläche im Punkte $P$ *sattelförmig* ist.

In diesem Falle nennt man den Punkt $P$ „*hyperbolisch*“ und erkennt, daß $P$ weder ein *höchster* noch ein *tiefster* Punkt der Fläche sein kann.

Die dem Flächenpunkte $P$ entsprechende *Indikatrix* ist also eine *Ellipse*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0,$$

sie ist eine *Hyperbel*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo

$$(13.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2$$

wird; dann kann man die Gleichung (8a.) auf die Form

$$f_{11}^2(x' - x)^2 + 2f_{11}f_{12}(x' - x)(y' - y) + f_{12}^2(y' - y)^2 = 2f_{11}l$$

bringen und erhält, indem man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel auszieht,

$$(14.)\qquad f_{11}(x' - x) + f_{12}(y' - y) = \pm\sqrt{2f_{11} \cdot l}.$$

Die Indikatrix zerfällt daher in diesem Falle in *zwei parallele Gerade*. Ein solcher Flächenpunkt entspricht im allgemeinen *weder einem eigentlichen Maximum noch einem eigentlichen Minimum von z*, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

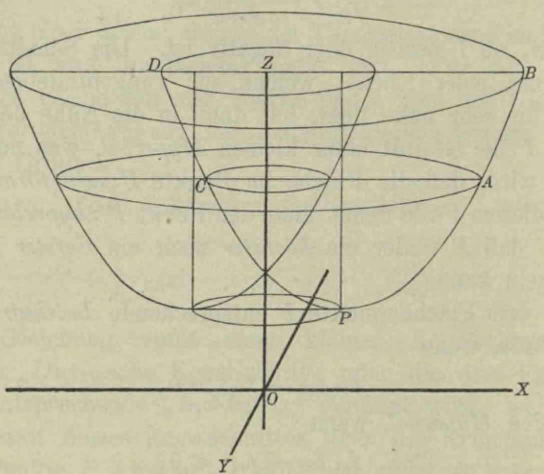
Es rotiere eine Parabel mit der Gleichung

$$2p(z-c) = (x-a)^2 \tag{15.}$$

um die $Z$-Achse (Fig. 174), dann hat die Rotationsfläche die Gleichung

$$2p(z-c) = (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2. \tag{16.}$$

Fig. 174.




Bezeichnet man der Kürze wegen $\sqrt{x^2+y^2}$ mit $r$, so wird

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \tag{17.}$$

$$z = f(x, y) = c + \frac{(r-a)^2}{2p}. \tag{18.}$$

Um einen höchsten oder tiefsten Punkt $P$ der Fläche aufzufinden, muß man seine Koordinaten $x, y, z$ so bestimmen, daß außer der Gleichung (18.) noch die beiden Gleichungen

$$f_1(x, y) = \frac{(r-a)x}{pr} = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{(r-a)y}{pr} = 0 \tag{19.}$$

befriedigt werden. Dies geschieht, indem man

$$x = a\cos\varphi, \; y = a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad r = a \text{ und } z = c \tag{20.}$$

setzt, wobei der Winkel $\varphi$ noch beliebig ist. Nun ist aber

$$(21.)\quad f_{11} = \frac{r^3 - ay^2}{pr^3},\quad f_{12} = \frac{axy}{pr^3},\quad f_{22} = \frac{r^3 - ax^2}{pr^3},$$

oder für die Koordinaten des Punktes $P$

$$(22.)\quad f_{11} = \frac{\cos^2\varphi}{p},\quad f_{12} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{p},\quad f_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{p},$$

$$(23.)\quad f_{11}f_{22} - f_{12}{}^2 = 0.$$

Der Punkt $P$ ist hier kein tiefster Punkt, denn er liegt auf dem Kreise, welchen der Scheitel der Parabel bei der Rotation beschreibt, so daß es allerdings Punkte in seiner unmittelbaren Nachbarschaft gibt, welche dieselbe Koordinate $z$ haben und deshalb mit $P$ in gleicher Höhe liegen. Aus dem vorstehenden Beispiele erkennt man auch, daß ein Flächenpunkt $P$ durchaus nicht immer ein tiefster Punkt ist, wenn seine Tangentialebene zur $XY$-Ebene *parallel* ist, und wenn die Schnittkurven der Fläche mit allen durch $P$ gelegten vertikalen Ebenen nach oben *konkav* sind.

Verschiebt man die Tangentialebene im Punkte $P$ um die kleine Größe $l$ nach oben, indem man

$$(24.)\quad z = c + l$$

setzt, so schneidet diese Ebene aus der Fläche zwei konzentrische Kreise mit den Gleichungen

$$(25.)\quad x^2 + y^2 = (a + \sqrt{2pl})^2 \quad\text{und}\quad x^2 + y^2 = (a - \sqrt{2pl})^2$$

aus. Die Indikatrix besteht in diesem Falle also aus zwei parallelen Linien, da in hinreichender Nähe des Punktes $P$ die beiden Kreise mit ihren Tangenten zusammenfallen.

## § 165.

## Maxima und Minima der Funktionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 259 und 260.)

Bei Funktionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen gestaltet sich die Untersuchung ganz ähnlich wie bei Funktionen von zwei Veränderlichen. Soll z. B.

$$u = f(x, y, z) \tag{1.}$$

ein Maximum oder Minimum werden, so muß

$$\Delta = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) \tag{2.}$$

für alle hinreichend kleinen, positiven oder negativen Werte von $h$, $k$, $l$ bei einem *Minimum beständig positiv* und bei einem *Maximum beständig negativ* sein. Aus der Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe findet man, daß dies nur möglich ist, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0 \tag{3.}$$

ist. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so folgt weiter aus der Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe, daß für hinreichend kleine Werte von $h$, $k$, $l$ die Differenz $\Delta$ dasselbe Zeichen hat wie

$$\varphi(h, k, l) = f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 + 2f_{13}hl + 2f_{23}kl + f_{33}l^2, \tag{4.}$$

es sei denn, daß diese Funktion $\varphi(h, k, l)$ gleich Null wird für Werte von $h$, $k$, $l$, die von Null verschieden sind. Die Entscheidung, unter welchen Bedingungen $\varphi(h, k, l)$ eine „*definite Form*" ist, d. h. die Entscheidung darüber, ob $\varphi(h, k, l)$ *beständig positiv*, bezw. *beständig negativ* ist, ergibt sich durch eine Umformung von $\varphi(h, k, l)$ unter Anwendung der Determinantentheorie.

Es seien die Größen $D_1$, $D_2$, $D_3$, $\alpha_{31}$, $\alpha_{32}$, $\alpha_{33}$, $h'$, $k'$, $h''$ durch die folgenden Gleichungen erklärt:

$$D_1 = f_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix}, \tag{5.}$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} f_{12} f_{13} \\ f_{22} f_{23} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} f_{13} f_{11} \\ f_{23} f_{21} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} = D_2, \tag{6.}$$

$$h' = h - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} l, \quad k' = k - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} l, \quad h'' = h' + \frac{f_{12}}{f_{11}} k'; \tag{7.}$$

dann wird nach den Formeln Nr. 209 und 211 der Tabelle

$$D_3 = f_{31}\,\alpha_{31} + f_{32}\,\alpha_{32} + f_{33}\,\alpha_{33}, \tag{8.}$$

$$f_{11}\,\alpha_{31} + f_{12}\,\alpha_{32} + f_{13}\,\alpha_{33} = 0, \tag{9.}$$

$$f_{21}\,\alpha_{31} + f_{22}\,\alpha_{32} + f_{23}\,\alpha_{33} = 0. \tag{10.}$$

Bringt man also Gleichung (4.) auf die Form

$$(4a.)\quad \varphi(h, k, l) = h(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) + k(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) + l(f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l)$$

und setzt, den Gleichungen (7.) entsprechend,

$$h = h' + \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}\, l, \quad k = k' + \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}\, l,$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.), (9.) und (10.)

$$(11.)\quad f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l = f_{11}h' + f_{12}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{11}\alpha_{31} + f_{12}\alpha_{32} + f_{13}\alpha_{33}) = f_{11}h' + f_{12}k',$$

$$(12.)\quad f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l = f_{21}h' + f_{22}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{21}\alpha_{31} + f_{22}\alpha_{32} + f_{23}\alpha_{33}) = f_{21}h' + f_{22}k',$$

$$(13.)\quad f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l = f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{31}\alpha_{31} + f_{32}\alpha_{32} + f_{33}\alpha_{33}) = f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{D_3 l}{\alpha_{33}};$$

folglich geht Gleichung (4a.) über in

$$(14.)\quad \varphi(h, k, l) = h(f_{11}h' + f_{12}k') + k(f_{21}h' + f_{22}k') + l(f_{31}h' + f_{32}k') + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}}$$
$$= h'(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) + k'(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}}.$$

Dies gibt, wenn man die Gleichungen (11.) und (12.) nochmals anwendet, mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.)

$$(15.)\quad \varphi(h, k, l) = h'(f_{11}h' + f_{12}k') + k'(f_{21}h' + f_{22}k') + \frac{D_3 l^2}{D_2},$$

oder

$$(16.)\quad \varphi(h, k, l) = f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 + \frac{D_3 l^2}{D_2}.$$

Jetzt ist noch, wie schon in § 163 gezeigt wurde,

$$f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 = f_{11}\Big(h' + \frac{f_{12}}{f_{11}}k'\Big)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}\, k'^2,$$

folglich wird

$$\varphi(h, k, l) = D_1 h''^2 + \frac{D_2}{D_1} k'^2 + \frac{D_3}{D_2} l^2. \tag{17.}$$

Damit dieser Ausdruck *beständig positiv* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Minimum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0 \tag{18.}$$

erfüllt sein; und damit $\varphi(h, k, l)$ *beständig negativ* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Maximum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0 \tag{19.}$$

erfüllt sein.

Auch in diesem Falle ist $\varphi(h, k, l)$ nur dann eine *definite* Form, wenn von den Determinanten $D_1$, $D_2$, $D_3$ keine gleich Null wird, doch möge die ausführliche Untersuchung hier übergangen werden.

In ähnlicher Weise findet man, daß

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{20.}$$

*ein Minimum wird, wenn die ersten partiellen Ableitungen* $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *sämtlich gleich Null sind, und wenn außerdem*

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0. \tag{21.}$$

Dabei ist

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1\alpha} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{\alpha 1} f_{\alpha 2} \cdots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \tag{22.}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots n$.

*Dagegen wird $u$ ein Maximum, wenn die ersten partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wieder sämtlich gleich Null und wenn die Determinanten $D_\alpha$ mit geradem Index sämtlich positiv und die mit ungeradem Index sämtlich negativ sind.*

Sind nämlich für ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ die ersten partiellen Ableitungen $f_1, f_2, \ldots f_n$ sämtlich gleich Null, so wird

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) + [h_1, h_2, \ldots h_n]_3, \end{aligned} \tag{23.}$$

wobei der Rest der *Taylor*'schen Reihe mit $[h_1, h_2, \dots h_n]_3$ bezeichnet ist, um anzudeuten, daß er mit den Größen $h_1, h_2, \dots h_n$ zugleich unendlich klein wird von der *dritten* Ordnung. Die Differenz $\Delta$ wird für hinreichend kleine Werte von $h_1, h_2, \dots h_n$ *beständig positiv* oder *beständig negativ* sein, wenn die homogene Funktion zweiter Ordnung

$$(24.)\quad \begin{aligned}\varphi(h_1, h_2, \dots h_n) = {} & h_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n)\\ & + h_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n)\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + h_n(f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n)\end{aligned}$$

eine *definite Form* ist. Bezeichnet man wieder die Unterdeterminanten von $D_n$ mit $\alpha_{11}, \dots \alpha_{nn}$, so erhält man nach den Formeln Nr. 209 und 211 der Tabelle

$$(25.)\quad D_n = f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{nn}\alpha_{nn},$$

$$(26.)\quad f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn} = 0 \quad \text{für } r < n.$$

Daraus folgt, wenn man

$$(27.)\quad \left\{\begin{aligned} & h_1 = h'_1 + \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}}h_n, \quad h_2 = h'_2 + \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}}h_n, \dots\\ & \qquad\qquad h_{n-1} = h'_{n-1} + \frac{\alpha_{n,\,n-1}}{\alpha_{nn}}h_n\end{aligned}\right.$$

setzt, mit Rücksicht auf Gleichung (26.) für $r < n$

$$(28.)\quad \begin{aligned} f_{r1}h_1 + f_{r2}h_2 + \cdots + f_{rn}h_n & = f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,\,n-1}h'_{n-1}\\ & \quad + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn})\\ & = f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,\,n-1}h'_{n-1},\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (25.)

$$(29.)\quad \begin{aligned} f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n & = f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,\,n-1}h'_{n-1}\\ & \quad + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{nn}\alpha_{nn})\\ & = f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,\,n-1}h'_{n-1}\\ & \qquad + \frac{D_n h_n}{D_{n-1}}.\end{aligned}$$

Dies gibt

$$(30.)\quad \begin{aligned}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,\,n-1}h'_{n-1}) \\ & + h_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,\,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h_n(f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,\,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \frac{D_n h^2_n}{D_{n-1}},\end{aligned}$$

oder, wenn man anders ordnet und $f_{\alpha\beta}$ mit $f_{\beta\alpha}$ vertauscht,

$$(31.)\quad \begin{aligned}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h'_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n) \\ & + h'_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h_1 + f_{n-1,2}h_2 + \cdots + f_{n-1,\,n}h_n) \\ & + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}}.\end{aligned}$$

Indem man die Gleichungen (28.) noch einmal anwendet, findet man

$$(32.)\quad \begin{aligned}\varphi(h_1, h_2 \ldots h_n) = {} & \\ & h'_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,n-1}h'_{n-1}) \\ & + h'_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h'_1 + f_{n-1,2}h'_2 + \cdots + f_{n-1,\,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}},\end{aligned}$$

oder

$$(33.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0) + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2.$$

Da nun hierbei die homogene Funktion zweiten Grades $\varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0)$ nur noch $n-1$ Veränderliche enthält, so kann man diese Funktion in ähnlicher Weise auf die Form

$$\varphi(h''_1,\ h''_2, \ldots h''_{n-2},\ 0,\ 0) + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2$$

bringen und so fortfahren, bis man erhält

$$(34.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = D_1\Big(h_1^{(n-1)}\Big)^2 + \frac{D_2}{D_1}\Big(h_1^{(n-2)}\Big)^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2 + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2.$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich dann ohne weiteres die oben aufgeführten Sätze.

## § 166.
## Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Man soll die Werte von $x$ und $y$ bestimmen, für welche

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10 \tag{1.}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

**Auflösung.** Hier ist

$$f_1(x, y) = 2x + y - 5, \quad f_2(x, y) = x + 2y - 4, \tag{2.}$$

$$f_{11} = 2 \quad f_{12} = 1, \quad f_{22} = 2. \tag{3.}$$

Die beiden ersten partiellen Ableitungen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ verschwinden nur für

$$x = 2, \quad y = 1, \tag{4.}$$

und zwar wird $z$ für diese Werte von $x$ und $y$ ein *Minimum*, weil

$$f_{11} = 2 > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}{}^2 = 3 > 0. \tag{5.}$$

Der Gleichung (1.) entspricht ein elliptisches Paraboloid.

**Aufgabe 2.** Man soll die Zahl $a$ so in drei Teile teilen, daß ihr Produkt ein Maximum wird.

**Auflösung.** Bezeichnet man zwei von diesen Teilen mit $x$ und $y$, so wird der dritte $a - x - y$, und das Produkt, welches ein Maximum werden soll, ist

$$z = f(x, y) = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2. \tag{6.}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} f_1(x, y) = ay - 2xy - y^2 = y(a - 2x - y), \\ f_2(x, y) = ax - x^2 - 2xy = x(a - x - 2y), \end{cases} \tag{7.}$$

$$f_{11} = -2y, \quad f_{12} = a - 2x - 2y, \quad f_{22} = -2x. \tag{8.}$$

Da die Werte $x = 0$, oder $y = 0$ hier nicht in Betracht kommen können, wie schon aus der Natur der Aufgabe hervorgeht, so erhält man, indem man $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ gleich Null setzt, die Gleichungen

$$(9.)\qquad a - 2x - y = 0,\quad a - x - 2y = 0,$$

welche nur für

$$(10.)\qquad x = \frac{a}{3},\quad y = \frac{a}{3}$$

befriedigt werden. Da für dieses Wertepaar

$$(11.)\quad f_{11} = -\frac{2a}{3} < 0,\ f_{12} = -\frac{a}{3},\ f_{22} = -\frac{2a}{3},\ f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{a^2}{3} > 0,$$

so tritt ein *Maximum* ein.

Dieser Aufgabe kann man auch die folgende Fassung geben: Von einem rechtwinkligen Parallelepipedon ist die Summe aller Kanten gleich $4a$; wie groß müssen die einzelnen Kanten sein, damit das Volumen ein Maximum wird?

Aus der vorstehenden Lösung sieht man, daß in diesem Falle das rechtwinklige Parallelepipedon mit möglichst großem Volumen ein Würfel ist.

**Aufgabe 3.** Man soll unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfange dasjenige ermitteln, welches den größten Flächeninhalt hat.*)

**Auflösung.** Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist bekanntlich

$$(12.)\qquad F = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)},$$

wenn man die Seiten mit $a$, $b$, $c$ und den Umfang mit $2u$ bezeichnet. Setzt man

*) Am einfachsten läßt sich die Aufgabe lösen, wenn man zunächst annimmt, daß $c$ und $a + b = s$ gegeben sind, und die Seite $a$ gleich $x$ so bestimmt, daß der Flächeninhalt ein Maximum wird. Man hat es dann nur mit einer Funktion der einzigen Veränderlichen $x$ zu tun und findet, daß das Dreieck ein gleichschenkliges sein muß, daß also $a = b$ ist. In derselben Weise kann man $a$ und $b + c$ als gegeben ansehen und findet, daß der Flächeninhalt ein Maximum wird, wenn $b = c$ ist; folglich muß, wenn nur $a + b + c = 2u$ gegeben ist, $a = b = c$ sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird.

In ähnlicher Weise kann man häufig Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima für Funktionen von mehreren Veränderlichen zurückführen auf die Lösung von Aufgaben, bei denen die Funktion einer einzigen Veränderlichen ein Maximum oder Minimum werden soll. Wie dies z. B. bei der hier folgenden Aufgabe 4 möglich ist, ergibt sich aus Aufgabe 15 in § 64.

$$(13.)\qquad a = x, \quad b = y,$$

so wird

$$(14.)\qquad c = 2u - x - y, \quad u - c = x + y - u,$$

$$(15.)\qquad F^2 = u(u - x)(u - y)(x + y - u),$$

also

$$(16.)\qquad f(x, y) = \frac{F^2}{u} = (u - x)(u - y)(x + y - u)$$

$$= (u - x)[-u^2 + u(x + 2y) - xy - y^2]$$

$$= (u - y)[-u^2 + u(y + 2x) - xy - x^2].$$

Da $F$ mit $f(x, y)$ zugleich ein Maximum wird, so bilde man

$$(17.)\qquad f_1(x, y) = (u - y)(2u - 2x - y),$$

$$(18.)\qquad f_2(x, y) = (u - x)(2u - x - 2y).$$

Die Summe aller drei Seiten ist gleich $2u$, und jede Seite muß kleiner sein als die Summe der beiden anderen Seiten, so daß jede der Seiten kleiner sein muß als $u$. Deshalb dürfen in $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ die Faktoren $u - y$, bezw. $u - x$ nicht gleich 0 sein; man muß vielmehr

$$(19.)\qquad 2u - 2x - y = 0, \quad 2u - x - 2y = 0,$$

oder

$$(20.)\qquad x = \frac{2u}{3}, \quad y = \frac{2u}{3}$$

setzen. Für diese Werte von $x$ und $y$ tritt auch wirklich ein Maximum ein, denn es ist

$$(21.)\qquad f_{11} = 2y - 2u = -\frac{2u}{3} < 0,$$

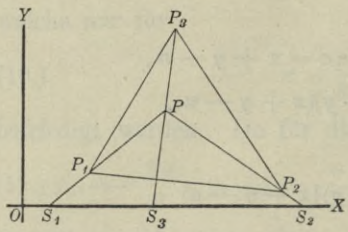
$$(22.)\qquad f_{12} = 2x + 2y - 3u = -\frac{u}{3}, \quad f_{22} = 2x - 2u = -\frac{2u}{3},$$

$$(23.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{u^2}{3} > 0.$$

*Unter allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat also das gleichseitige den größten Inhalt.*

**Aufgabe 4.** Von einem Dreieck sind die Koordinaten der Eckpunkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, nämlich $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; $x_3$, $y_3$ gegeben;

Fig. 175.




man soll die Koordinaten eines Punktes $P$ finden, für welchen $S = p\,.\,PP_1 + q\,.\,PP_2 + r\,.\,PP_3$ ein Minimum wird. (Vergl. Fig. 175.)

**Auflösung.** Die Abstände des Punktes $P$ von den Ecken seien $s_1$, $s_2$, $s_3$, und die Winkel, welche diese Linien mit der positiven Richtung der $X$-Achse bilden, seien

$$\sphericalangle XS_1P = \varphi_1, \quad \sphericalangle XS_2P = \varphi_2, \quad \sphericalangle XS_3P = \varphi_3,$$

dann wird

$$s_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \quad s_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}, \quad s_3 = \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}, \tag{24.}$$

und es ist

$$S = p\,.\,s_1 + q\,.\,s_2 + r\,.\,s_3 = f(x, y) \tag{25.}$$

die Funktion, welche ein Minimum werden soll. Nun ist für $\alpha = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial x} = \dfrac{x - x_\alpha}{\sqrt{(x-x_\alpha)^2 + (y-y_\alpha)^2}} = \dfrac{x - x_\alpha}{s_\alpha}, \\ \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial y} = \dfrac{y - y_\alpha}{\sqrt{(x-x_\alpha)^2 + (y-y_\alpha)^2}} = \dfrac{y - y_\alpha}{s_\alpha}, \end{cases} \tag{26.}$$

also

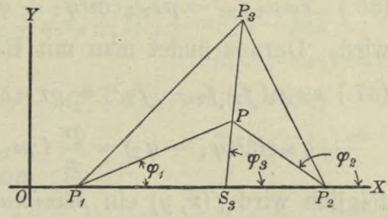
$$\begin{cases} f_1(x, y) = \dfrac{p(x-x_1)}{s_1} + \dfrac{q(x-x_2)}{s_2} + \dfrac{r(x-x_3)}{s_3}, \\ f_2(x, y) = \dfrac{p(y-y_1)}{s_1} + \dfrac{q(y-y_2)}{s_2} + \dfrac{r(y-y_3)}{s_3}. \end{cases} \tag{27.}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} f_{11}(x, y) = \dfrac{p(y-y_1)^2}{s_1^3} + \dfrac{q(y-y_2)^2}{s_2^3} + \dfrac{r(y-y_3)^2}{s_3^3}, \\ f_{12}(x, y) = -\dfrac{p(x-x_1)(y-y_1)}{s_1^3} - \dfrac{q(x-x_2)(y-y_2)}{s_2^3} \\ \qquad\qquad - \dfrac{r(x-x_3)(y-y_3)}{s_3^3}, \\ f_{22}(x, y) = \dfrac{p(x-x_1)^2}{s_1^3} + \dfrac{q(x-x_2)^2}{s_2^3} + \dfrac{r(x-x_3)^2}{s_3^3}. \end{cases} \tag{28.}$$

Um leichter zu erkennen, welche Bedeutung die in den Gleichungen (27.) und (28.) auftretenden Größen haben, lege man die $X$-Achse durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ und bestimme die positive Richtung der $Y$-Achse so, daß $y_3$ positiv wird (Fig. 176); dann fallen die Punkte $P_1$ und $P_2$ bezw. mit $S_1$ und $S_2$ zusammen, und es wird $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Die folgenden Gleichungen gelten aber ebenso auch für Figur 175; man findet nämlich

Fig. 176.




$$(29.)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{x - x_1}{s_1}, \quad \cos\varphi_2 = \dfrac{x - x_2}{s_2}, \quad \text{aber } \cos\varphi_3 = -\dfrac{x - x_3}{s_3}, \\[2ex] \sin\varphi_1 = \dfrac{y - y_1}{s_1}, \quad \sin\varphi_2 = \dfrac{y - y_2}{s_2}, \quad \text{aber } \sin\varphi_3 = -\dfrac{y - y_3}{s_3}. \end{cases}$$

Damit ein Maximum oder Minimum eintreten kann, muß also

$$(30.)\qquad f_1(x, y) = p\cos\varphi_1 + q\cos\varphi_2 - r\cos\varphi_3 = 0,$$

$$(31.)\qquad f_2(x, y) = p\sin\varphi_1 + q\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_3 = 0$$

sein. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$(32.)\quad p : \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = q : \sin(\varphi_3 - \varphi_1) = r : \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Nun ist aber

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \sphericalangle\, S_3PP_2 = 180^0 - \sphericalangle\, P_2PP_3,$$
$$\varphi_3 - \varphi_1 = \sphericalangle\, P_1PS_3 = 180^0 - \sphericalangle\, P_3PP_1,$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sphericalangle\, P_1PP_2,$$

folglich geht Gleichung (32.) über in

$$(33.)\qquad p : \sin P_2PP_3 = q : \sin P_3PP_1 = r : \sin P_1PP_2.$$

Dieses Resultat stimmt mit der Lösung überein, welche in § 64 (Seite 323 bis 325) von dieser Aufgabe gegeben wurde. Dort sind außer der Konstruktion des Punktes $P$ auch die Bedingungen erläutert worden, unter welchen der Punkt $P$ die verlangte Eigenschaft des Minimums besitzt. Um aber die in § 163 beschriebene Methode einzuüben, beachte man, daß nach den Gleichungen (28.) und (29.)

$$(34.)\quad s_1 s_2 s_3 f_{11} = p s_2 s_3 \sin^2\varphi_1 + q s_3 s_1 \sin^2\varphi_2 + r s_1 s_2 \sin^2\varphi_3 > 0,$$

$$(35.)\quad s_1 s_2 s_3 f_{12} = -p s_2 s_3 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - q s_3 s_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - r s_1 s_2 \sin\varphi_3 \cos\varphi_3,$$

$$(36.)\quad s_1 s_2 s_3 f_{22} = p s_2 s_3 \cos^2\varphi_1 + q s_3 s_1 \cos^2\varphi_2 + r s_1 s_2 \cos^2\varphi_3$$

wird. Daraus findet man mit Rücksicht auf Gleichung (32.)

$$(37.)\quad s_1 s_2 s_3 (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) = qr s_1 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) + rp s_2 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_1)$$

$$+ pq s_3 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qr}{p}(ps_1 + qs_2 + rs_3)\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) > 0,$$

folglich wird $f(x, y)$ ein *Minimum.*

**Aufgabe 5.** Durch die Gleichungen

$$(38.)\quad x = m_1 z + \mu_1, \quad y = n_1 z + \nu_1,$$

$$(39.)\quad x = m_2 z + \mu_2, \quad y = n_2 z + \nu_2$$

sind zwei Gerade $g_1$ und $g_2$ im Raume gegeben; man soll den kürzesten Abstand $P_1P_2$ zwischen $g_1$ und $g_2$ ermitteln.

**Auflösung.** Die Funktion, welche ein Minimum werden soll, ist

$$(40.)\quad \overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

wobei

$$x_1 = m_1 z_1 + \mu_1, \quad y_1 = n_1 z_1 + \nu_1,$$

$$x_2 = m_2 z_2 + \mu_2, \quad y_2 = n_2 z_2 + \nu_2$$

ist, folglich wird

$$(41.)\quad x_1 - x_2 = m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2, \quad y_1 - y_2 = n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2;$$

dies gibt

$$(42.)\quad \overline{P_1P_2}^2 = F(z_1, z_2)$$

$$= (m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2)^2 + (n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Damit diese Funktion ein Minimum wird, muß also

$$(43.)\quad F_1(z_1, z_2)$$

$$= 2(m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2)m_1 + 2(n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2)n_1 + 2(z_1 - z_2) = 0$$

und

$$(44.)\quad F_2(z_1,\ z_2) = -2(m_1z_1 - m_2z_2 + \mu_1 - \mu_2)m_2 - 2(n_1z_1 - n_2z_2 + \nu_1 - \nu_2)n_2 - 2(z_1 - z_2) = 0$$

sein. Diese Gleichungen kann man auf die Form

$$(43a.)\quad (m_1^2 + n_1^2 + 1)z_1 - (m_1m_2 + n_1n_2 + 1)z_2 + m_1(\mu_1 - \mu_2) + n_1(\nu_1 - \nu_2) = 0,$$

$$(44a.)\quad (m_1m_2 + n_1n_2 + 1)z_1 - (m_2^2 + n_2^2 + 1)z_2 + m_2(\mu_1 - \mu_2) + n_2(\nu_1 - \nu_2) = 0$$

bringen und findet daraus, wenn man

$$(45.)\quad (m_1^2 + n_1^2 + 1)(m_2^2 + n_2^2 + 1) - (m_1m_2 + n_1n_2 + 1)^2 = (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 = D$$

setzt,

$$(46.)\quad D \,.\, z_1 = -[(m_1 - m_2) + n_2(m_1n_2 - m_2n_1)](\mu_1 - \mu_2) - [(n_1 - n_2) - m_2(m_1n_2 - m_2n_1)](\nu_1 - \nu_2),$$

$$(47.)\quad D \,.\, z_2 = -[(m_1 - m_2) + n_1(m_1n_2 - m_2n_1)](\mu_1 - \mu_2) - [(n_1 - n_2) - m_1(m_1n_2 - m_2n_1)](\nu_1 - \nu_2).$$

Für diese Werte von $z_1$ und $z_2$ wird $F(z_1, z_2)$ auch wirklich ein Minimum, denn aus den Gleichungen (43.) und (44.) findet man

$$(48.)\quad F_{11} = 2(m_1^2 + n_1^2 + 1),\quad F_{12} = -2(m_1m_2 + n_1n_2 + 1),\quad F_{22} = 2(m_2^2 + n_2^2 + 1),$$

folglich ist

$$(49.)\quad F_{11} > 0 \quad \text{und} \quad F_{11}F_{22} - F_{12}^2 = 4D > 0.$$

Um den kürzesten Abstand $P_1P_2$ selbst zu berechnen, bilde man zunächst

$$(50.)\quad D(z_1 - z_2) = (m_1n_2 - m_2n_1)[-(m_1 - m_2)(\nu_1 - \nu_2) + (n_1 - n_2)(\mu_1 - \mu_2)]$$

und beachte, daß man mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.) die Gleichungen (43.) und (44.) auf die Form

$$(51.)\quad \begin{cases} m_1(x_1 - x_2) + n_1(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) = 0, \\ m_2(x_1 - x_2) + n_2(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) = 0 \end{cases}$$

bringen kann. Daraus folgt

$$(52.)\quad (m_1n_2 - m_2n_1)(x_1 - x_2) = (n_1 - n_2)(z_1 - z_2),$$

$$(53.)\quad (m_1n_2 - m_2n_1)(y_1 - y_2) = -(m_1 - m_2)(z_1 - z_2);$$

dies gibt

$$(54.)\quad \overline{P_1P_2}^2 = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(m_1n_2 - m_2n_1)^2}[(n_1 - n_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2]$$

$$= \frac{D(z_1 - z_2)^2}{(m_1n_2 - m_2n_1)^2} = \frac{[(m_1 - m_2)(\nu_1 - \nu_2) - (n_1 - n_2)(\mu_1 - \mu_2)]^2}{D},$$

also

$$(55.)\quad P_1P_2 = \pm\frac{(m_1 - m_2)(\nu_1 - \nu_2) - (n_1 - n_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2}}.$$

Die beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ schneiden sich, wenn der Zähler dieses Ausdruckes gleich Null ist.

## § 167.

## Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Bisher war immer die Voraussetzung gemacht worden, daß in der Funktion

$$(1.)\quad u = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

welche ein Maximum oder Minimum werden soll, die $n$ Veränderlichen voneinander *unabhängig* sind. Das wird aber bei den wenigsten Aufgaben der Fall sein. Soll man z B. die Zahl $a$ so in drei Teile teilen, daß das Produkt dieser Teile ein Maximum wird, so ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll,

$$(2.)\quad u = xyz,$$

wo zwischen den drei Veränderlichen die Bedingungsgleichung

$$(3.)\quad x + y + z = a$$

besteht. Diese Aufgabe wurde in dem vorhergehenden Paragraphen so gelöst, daß man aus Gleichung (3.) den Wert von $z$ berechnete und in die Gleichung (2.) einsetzte.

Dadurch erhält man

$$(4.)\quad u = xy(a - x - y) = f(x, y),$$

also eine Funktion, welche nur noch die beiden unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$ enthält.

In ähnlicher Weise kann man häufig zum Ziele kommen. Soll z. B. in die Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ein Dreieck $P_1P_2P_3$ mit möglichst großem Flächeninhalte einbeschrieben werden, so hängt die Funktion

$$2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2), \tag{5.}$$

welche ein Maximum werden soll, von *sechs* Veränderlichen $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; $x_3$, $y_3$ ab. Diese sind aber nicht voneinander unabhängig, sondern sie müssen den drei Gleichungen

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2, \quad b^2x_3^2 + a^2y_3^2 = a^2b^2 \tag{6.}$$

genügen, damit die drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ auf der Ellipse liegen. Jetzt kann man aber aus den Gleichungen (6.) die Werte von $y_1$, $y_2$, $y_3$ bezw. als Funktionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ ausrechnen und in den Ausdruck für $2F$ einsetzen. Dann hat man nur noch eine Funktion von *drei unabhängigen* Veränderlichen $x_1$, $x_2$, $x_3$, welche ein Maximum werden soll.

In den meisten Fällen wird aber eine derartige Elimination viel zu umständlich sein, als daß man an ihre Ausführung denken könnte. Dagegen führt die folgende Methode im allgemeinen viel leichter zum Ziele.

Es sei wieder

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{7.}$$

die Funktion, welche ein Maximum oder Minimum werden soll. Dabei seien die $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den $m$ Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{array}\right. \tag{8.}$$

unterworfen, wobei aber $m < n$ sein muß.

Zunächst erkennt man, daß hier das früher (§ 165) angegebene Verfahren nicht mehr anwendbar ist. Entwickelt man nämlich $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n)$ nach steigenden Potenzen von $h_1, h_2, \ldots h_n$, so erhält man allerdings wieder

$$\begin{aligned} \varDelta &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2. \end{aligned}$$

Wollte man jetzt aber

$$h_2 = 0,\ h_3 = 0, \ldots h_n = 0 \quad \text{und} \quad h_1 \gtreqless 0$$

setzen und daraus schließen, daß $f_1 = 0$ sein muß, so würde man einen Fehler begehen, weil ja nur solche Werte von $h_1$, $h_2, \ldots h_n$ in Betracht kommen dürfen, für welche auch die Gleichungen

$$(9.)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Von den Größen $h_1$, $h_2, \ldots h_n$ sind daher nur $n - m$, z. B. $h_{m+1}$, $h_{m+2}, \ldots h_n$ *willkürlich*, während sich die Werte der $m$ übrigen $(h_1, h_2, \ldots h_m)$ aus den $m$ Gleichungen (9.) ergeben.

Man kann aber trotzdem ein Verfahren finden, das dem früher angegebenen sehr ähnlich ist. Setzt man nämlich

$$(10.)\qquad F(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = f(x_1,\ x_2, \ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1,\ x_2, \ldots x_n) \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1,\ x_2, \ldots x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1,\ x_2, \ldots x_n),$$

wobei $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots \lambda_m$ noch ganz beliebige Größen sind, so ist es gleichgültig, ob man das Maximum, bezw. das Minimum der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ oder der Funktion $F(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ aufsucht, da doch nur solche Werte von $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ in Betracht kommen, für welche die Gleichungen (8.) befriedigt werden. Man kann jetzt aber noch über die $m$ Größen $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots \lambda_m$ passend verfügen und dadurch den Umstand, daß die Größen $h_1$, $h_2, \ldots h_m$ von den Größen $h_{m+1}$, $h_{m+2}, \ldots h_n$ abhängig sind, ausgleichen. Um nämlich die Werte von $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ zu finden, für welche $F(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum oder Minimum wird, muß man wieder

$$(11.)\qquad \Delta = F(x_1 + h_1,\ x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$$

nach Potenzen von $h_1$, $h_2, \ldots h_n$ entwickeln. Dies geschieht nach der *Taylor*schen Reihe, und zwar erhält man

$$(12.)\qquad \Delta = F_1h_1 + F_2h_2 + \cdots + F_nh_n + [h_1,\ h_2, \ldots h_n]_2,$$

wobei die ersten partiellen Ableitungen von $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nach $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ bezw. mit $F_1$, $F_2, \ldots F_n$ und der Rest mit $[h_1, h_2, \ldots h_n]_2$

bezeichnet sind. Damit nun $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Minimum* wird, muß $\Delta$ für alle *zulässigen*, hinreichend kleinen Werte der Größen $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig positiv* sein, und damit $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Maximum* wird, muß $\Delta$ für alle *zulässigen*, hinreichend kleinen Werte der Größen $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig negativ* sein.

Bezeichnet man jetzt

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} \quad \text{mit} \quad \varphi_{\alpha\beta},$$

wobei $\alpha$ alle Werte von 1 bis $m$ und $\beta$ alle Werte von 1 bis $n$ annehmen darf, so kann man die $m$ Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ so bestimmen, daß die $m$ *linearen* Gleichungen

$$(13.) \quad \begin{cases} F_1 = f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ F_2 = f_2 + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m = f_m + \lambda_1\varphi_{1m} + \lambda_2\varphi_{2m} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mm} = 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Dadurch geht Gleichung (12.) über in

$$(14.) \quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + F_{m+2}h_{m+2} + \cdots + F_nh_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2.$$

Da nun $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ willkürlich sind, so kann man

$$h_{m+2} = 0, \ldots h_n = 0$$

setzen, so daß sich die Größe $\Delta$ auf

$$(15.) \quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + [h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$$

reduziert. Macht man jetzt $h_{m+1}$ hinreichend klein, so müssen auch $h_1, h_2, \ldots h_m$ beliebig klein werden, wenn die Gleichungen (9.) befriedigt werden sollen. Wäre also $F_{m+1}$ von Null verschieden, so könnte man $h_{m+1}$ so klein machen, daß, vom Vorzeichen abgesehen, $F_{m+1}h_{m+1}$ größer würde als $[h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$, daß also $\Delta$ dasselbe Vorzeichen hätte wie $F_{m+1}h_{m+1}$. Diese Größe *wechselt* aber das Vorzeichen zugleich mit $h_{m+1}$, folglich kann nur dann ein Maximum oder Minimum eintreten, wenn

$$F_{m+1} = 0$$

ist. In derselben Weise kann man zeigen, daß auch

$$F_{m+2} = 0, \ldots F_n = 0$$

sein muß. Dies gibt zur Bestimmung der $n$ Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ außer den $m$ Gleichungen (8.) noch die $n - m$ Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} F_{m+1} = f_{m+1} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+1} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+1} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+1} = 0, \\ F_{m+2} = f_{m+2} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+2} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+2} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0. \end{cases}$$

Bei der Herleitung wurden allerdings die $m$ Gleichungen (13.) zur Berechnung der $m$ Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ und die $n$ Gleichungen (8.) und (16.) zur Berechnung der $n$ Größen $x_1$, $x_2, \ldots x_n$ benutzt. Man ist aber natürlich an diese Reihenfolge in der Ausführung der Rechnungen nicht gebunden, sondern hat nach dem vorhergehenden im ganzen $m + n$ Gleichungen, nämlich die Gleichungen

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = 0, \\ f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0, \end{cases}$$

die gerade zur Berechnung der $m + n$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, $x_1,\ x_2, \ldots x_n$ ausreichen.

Auf diese Weise findet man *alle* Wertsysteme der $n$ Veränderlichen, für welche *möglicherweise* ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Ob dann für ein so gefundenes Wertsystem *wirklich* ein Maximum oder Minimum eintritt, geht in vielen Fällen schon aus der Natur der Aufgabe hervor. Deshalb möge hier die etwas weitläufige Entwickelung eines allgemein gültigen Kriteriums übergangen werden.

## § 168.

## Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Es soll das größte rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, das einer *Kugel* mit dem Halbmesser $a$ einbeschrieben werden kann.

**Auflösung.** Da der Mittelpunkt des Parallelepipedons zugleich auch der Mittelpunkt der Kugel sein muß, so ist der Durchmesser der Kugel, nämlich $2a$, eine Diagonale des Parallelepipedons. Nennt man also drei aneinander stoßende Kanten $2x$, $2y$, $2z$, so wird

(1.) $$V = f(x, y, z) = 8xyz$$

die Funktion, welche ein Maximum werden soll, und

(2.) $$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

ist die Bedingung, welche zwischen den drei Veränderlichen stattfindet. In diesem Falle wird deshalb

(3.) $$F(x, y, z) = f + \lambda\varphi = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2),$$

(4.) $$F_1 = 8yz + 2\lambda x = 0,\quad F_2 = 8zx + 2\lambda y = 0,\quad F_3 = 8xy + 2\lambda z = 0.$$

Dies gibt

(5.) $$-\frac{\lambda}{4} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} = \frac{xy}{z},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

(6.) $$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{oder} \quad x = y = z = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Der *Würfel* ist daher das größte rechtwinklige Parallelepipedon, welches der Kugel einbeschrieben werden kann.

**Aufgabe 2.** Es soll das größte rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, welches dem Ellipsoid

(7.) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

einbeschrieben werden kann.

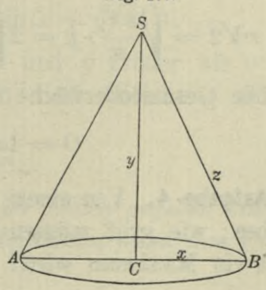
**Auflösung.** In ähnlicher Weise wie bei der vorigen Aufgabe findet man hier für die halben Seitenkanten die Werte

(8.) $$x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad y = \frac{b}{3}\sqrt{3}, \quad z = \frac{c}{3}\sqrt{3}.$$

**Aufgabe 3.** Unter allen Kegeln mit gleichem Volumen $V$ denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

**Auflösung.** Der Halbmesser der Grundfläche sei $x$, die Höhe sei $y$, und die Seitenkante sei $z$ (vergl. Fig. 177); dann wird die Gesamtoberfläche

Fig. 177.



$$f(x, y, z) = x^2\pi + xz\pi = \pi(x^2 + xz). \tag{9.}$$

Dies ist die Funktion, welche ein Minimum werden soll. Zwischen $x$, $y$ und $z$ bestehen dabei noch die Bedingungsgleichungen

$$V = \frac{x^2\pi y}{3}, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z) = 3V - x^2\pi y = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{array}\right. \tag{10.}$$

Dies gibt

$$F(x, y, z) = \pi(x^2 + xz) + \lambda_1(3V - x^2\pi y) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z^2), \tag{11.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, z) = \pi(2x + z) - 2\lambda_1\pi xy + 2\lambda_2 x = 0, \\ F_2(x, y, z) = \qquad\qquad - \lambda_1\pi x^2 \quad + 2\lambda_2 y = 0, \\ F_3(x, y, z) = \pi x \qquad\qquad\qquad - 2\lambda_2 z = 0. \end{array}\right. \tag{12.}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man

$$\lambda_2 = \frac{\pi x}{2z}, \quad \lambda_1 = \frac{y}{xz}, \quad x^2 + 2xz + z^2 = 2y^2, \tag{13.}$$

oder

$$x + z = y\sqrt{2}. \tag{14.}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10.) erhält man daher

$$z^2 = x^2 + y^2 = 2y^2 - 2\sqrt{2}xy + x^2,$$

oder

$$y = 2x\sqrt{2}, \quad z = 3x, \quad 3V = 2x^3\pi\sqrt{2}, \tag{15.}$$

also

$$x\sqrt{2} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \; y = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \; z\sqrt{2} = 3x\sqrt{2} = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}. \tag{16.}$$

Die Gesamtoberfläche dieses Kegels ist dann

$$O = 4x^2\pi = 2\sqrt[3]{9V^2\pi}. \tag{17.}$$

**Aufgabe 4.** Von einem Viereck sind die vier Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ gegeben; wie groß müssen die Winkel sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird? (Vergl. Fig. 178.)

**Auflösung.** Ist $ABCD$ das gesuchte Viereck, und setzt man

$$\sphericalangle ABC = x, \quad \sphericalangle ADC = y,$$

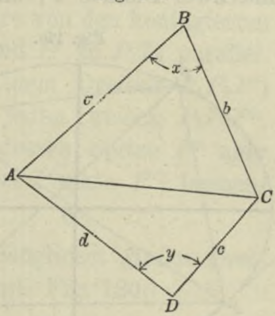
so wird

$$2\triangle ABC = ab\sin x, \quad 2\triangle ADC = cd\sin y,$$

also

(18.) $$2F = f(x, y) = ab\sin x + cd\sin y.$$

Fig. 178.




Dies ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll; dabei sind aber $x$ und $y$ nicht voneinander unabhängig, denn nach dem Kosinussatz wird

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x,$$

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos y,$$

dies gibt

(19.) $$\varphi(x, y) = a^2 + b^2 - 2ab\cos x - c^2 - d^2 + 2cd\cos y = 0.$$

Setzt man daher

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

so erhält man

(20.) $$\begin{cases} F_1(x, y) = ab\cos x + 2ab\lambda\sin x = 0, \\ F_2(x, y) = cd\cos y - 2cd\lambda\sin y = 0, \end{cases}$$

oder

(21.) $$\cos x + 2\lambda\sin x = 0, \quad \cos y - 2\lambda\sin y = 0,$$

und wenn man $\lambda$ eliminiert,

(22.) $$\sin y\cos x + \sin x\cos y = \sin(x + y) = 0.$$

Da jeder der beiden Winkel $x$ und $y$ größer als $0^0$ und kleiner als $180^0$ sein muß, so kann diese Gleichung nur befriedigt werden für

(23.) $$x + y = 180^0.$$

*Wenn von einem Viereck die vier Seiten gegeben sind, so ist also der Flächeninhalt dann ein Maximum, wenn das Viereck einem Kreise einbeschrieben ist.*

Den Wert von $x$ findet man jetzt ohne weiteres aus Gleichung (19.), weil $\cos y$ gleich $-\cos x$ ist. Dies gibt

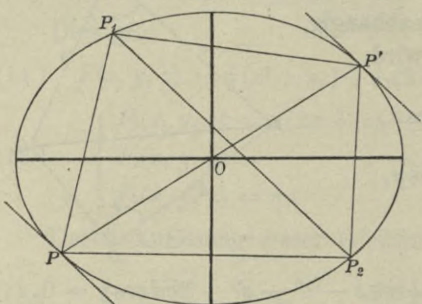
$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}. \tag{24.}$$

**Aufgabe 5.** Auf einer Ellipse mit der Gleichung

$$\varphi(x,\ y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{25.}$$

sind zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ gegeben; man soll auf der Ellipse einen dritten Punkt $P$ bestimmen, so daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P$ möglichst groß wird. (Vergl. Fig. 179.)

Fig. 179.




**Auflösung.** Bezeichnet man die Koordinaten der Punkte $P_1$, $P_2$, $P$ bezw. mit $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; $x$, $y$, so wird bekanntlich der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P$

$$2F = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = f(x,\ y). \tag{26.}$$

Dies ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll. Zwischen den beiden Veränderlichen $x$ und $y$ besteht dabei noch die Gleichung (25.), da der Punkt $P$ auf der Ellipse liegen soll. Deshalb ist hier

$$F(x, y) = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2), \tag{27.}$$

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x,\ y) &= y_1 - y_2 + 2\lambda b^2x = 0, \\ F_2(x,\ y) &= x_2 - x_1 + 2\lambda a^2y = 0. \end{aligned}\right. \tag{28.}$$

Dies gibt durch Elimination von $\lambda$

$$b^2(x_1 - x_2)x + a^2(y_1 - y_2)y = 0. \tag{29.}$$

Da die Punkte $P_1$ und $P_2$ auch auf der Ellipse liegen, so gelten die Gleichungen

$$b^2x_1{}^2 + a^2y_1{}^2 - a^2b^2 = 0 \quad \text{und} \quad b^2x_2{}^2 + a^2y_2{}^2 - a^2b^2 = 0,$$

folglich ist auch

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0; \tag{30.}$$

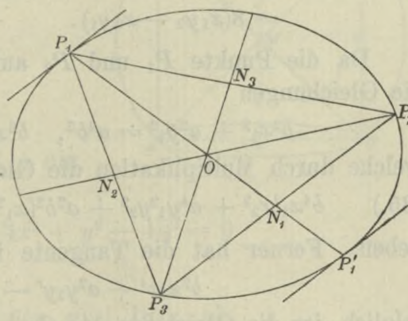
d. h. die Gleichung (29.) wird befriedigt für

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{31.}$$

und stellt deshalb einen Durchmesser dar, welcher die Sehne $P_1P_2$ halbiert. Nennt man die Endpunkte dieses Durchmessers $P$ und $P'$, so haben diese beiden Punkte die verlangte Eigenschaft des Maximums, denn nach der Lehre von den konjugierten Durchmessern sind die Tangenten in $P$ und $P'$ zu $P_1P_2$ parallel. In dem Dreieck $P_1P_2P$ (und ebenso in dem Dreieck $P_1P_2P'$) ist deshalb die Höhe größer als in einem jeden Dreieck $P_1P_2P''$, welches dieselbe Grundlinie $P_1P_2$ hat, dessen Spitze $P''$ aber auf der Ellipse dem Punkte $P$ (bezw. dem Punkte $P'$) benachbart liegt.

**Aufgabe 6.** In eine Ellipse soll ein möglichst großes Dreieck $P_1P_2P_3$ einbeschrieben werden. (Vergl. Fig. 180.)

Fig. 180.




**Auflösung.** Diese Aufgabe läßt sich unmittelbar auf die vorhergehende zurückführen, indem man z. B. die Punkte $P_1$ und $P_2$ als gegeben ansieht und den Punkt $P_3$ sucht. Die Verlängerung des Halbmessers $OP_3$ muß daher die Sehne $P_1P_2$ halbieren. Ebenso muß die Verlängerung von $OP_1$ die Gerade $P_2P_3$, und die Verlängerung von $OP_2$ die Gerade $P_3P_1$ halbieren, d. h. der *Mittelpunkt* $O$ der Ellipse ist gleichzeitig der *Schwerpunkt* des gesuchten Dreiecks $P_1P_2P_3$.

Da in jedem Dreieck der Schwerpunkt die drei Halbierungstransversalen im Verhältnis von $1:2$ teilt, so kann man ein solches Dreieck $P_1P_2P_3$ konstruieren, indem man auf der Ellipse einen Punkt $P_1$ beliebig annimmt, den Halbmesser $OP_1$ über $O$ bis $N_1$ verlängert, so daß

$$P_1O = 2ON_1 \tag{32.}$$

wird, und durch $N_1$ eine Parallele zu der Tangente im Punkte $P_1$ zieht; dann schneidet diese Parallele die Ellipse in zwei Punkten $P_2$ und $P_3$, so daß das Dreieck $P_1P_2P_3$ seinen Schwerpunkt in $O$ hat. Dabei sind nach der Lehre von den konjugierten Durchmessern die Koordinaten des Punktes $N_1$

$$-\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad -\frac{y_1}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

folglich gelten die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{33.}$$

Da bei dieser Konstruktion der Punkt $P_1$ noch ganz beliebig auf der Ellipse angenommen werden durfte, so findet man hierdurch *unendlich viele* Dreiecke, von denen aber sogleich gezeigt werden soll, daß sie alle *gleichen* Flächeninhalt haben. Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ wird nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (33.)

$$\begin{aligned} 2F &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\ &= 3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned} \tag{34.}$$

Da die Punkte $P_1$ und $P_2$ auf der Ellipse liegen, gelten die Gleichungen

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2,$$

welche durch Multiplikation die Gleichung

$$b^4x_1^2x_2^2 + a^4y_1^2y_2^2 + a^2b^2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = a^4b^4 \tag{35.}$$

geben. Ferner hat die Tangente im Punkte $P_1$ die Gleichung

$$b^2x_1x' + a^2y_1y' - a^2b^2 = 0,$$

folglich ist die Gleichung der Geraden, welche man durch $N_1$ parallel zu dieser Tangente legt,

$$2b^2x_1x' + 2a^2y_1y' + a^2b^2 = 0. \tag{36.}$$

Da diese Gerade durch den Punkt $P_2$ hindurchgeht, so wird

$$2b^2x_1x_2 + 2a^2y_1y_2 = -a^2b^2,$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erhebt,

$$4b^4x_1^2x_2^2 + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 + 4a^4y_1^2y_2^2 = a^4b^4, \tag{37.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (35.)

$$4a^4b^4 - 4a^2b^2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 = a^4b^4,$$

oder

(38.) $$4(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 3a^2b^2, \quad 2(x_1y_2 - x_2y_1) = ab\sqrt{3}.$$

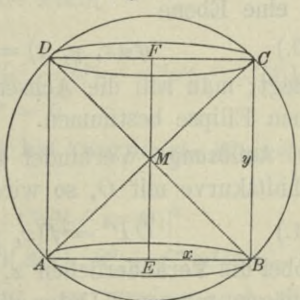
Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (34.)

(39.) $$4F = 3ab\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt ist also unabhängig von der Lage des Punktes $P_1$, so daß es *unendlich viele* Dreiecke $P_1P_2P_3$ gibt, welche *gleichen* Inhalt besitzen, und welche *größer* sind als alle übrigen der Ellipse einbeschriebenen Dreiecke.

**Aufgabe 7.** In eine Kugel mit dem Halbmesser $a$ soll ein Zylinder mit möglichst großer Oberfläche einbeschrieben werden. (Vergl. Fig. 181.)

Fig. 181.




**Auflösung.** Bezeichnet man die Halbmesser der Grundkreise mit $x$ und die Höhe des Zylinders mit $y$, so wird die Oberfläche

(40.) $$F = 2x^2\pi + 2xy\pi,$$

also

(41.) $$f(x, y) = x^2 + xy,$$

wobei noch zwischen $x$ und $y$ die Gleichung

(42.) $$\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$$

besteht. Daraus folgt

(43.) $$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

(44.) $$\begin{cases} F_1(x, y) = 2x + y + 8\lambda x = 0, \\ F_2(x, y) = \phantom{2x + {}} x + 2\lambda y = 0, \end{cases}$$

(45.) $$2xy + y^2 - 4x^2 = 0,$$

oder

(45a.) $$(x + y)^2 = 5x^2, \quad y = x(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Da $x$ und $y$ beide positiv sein müssen, so kann hierbei nur das obere Vorzeichen gelten. Es wird also

(45b.) $$y = x(-1 + \sqrt{5}),$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (42.)

(46.) $$x^2(10 - 2\sqrt{5}) = 4a^2, \quad 20x^2 = a^2(10 + 2\sqrt{5}),$$

(47.) $$x = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad y = a\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}};$$

(48.) $$f(x, y) = x(x + y) = x^2\sqrt{5} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Dasselbe Resultat war bereits in § 64, Aufgabe 27 (Seite 330 und 331) gefunden worden.

**Aufgabe 8.** Durch den Mittelpunkt $O$ eines Ellipsoids

(49.) $$\varphi_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist eine Ebene

(50.) $$\varphi_2(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$$

gelegt; man soll die Achsen der von dieser Ebene ausgeschnittenen Ellipse bestimmen.

**Auflösung.** Verbindet man einen beliebigen Punkt $P$ der Schnittkurve mit $O$, so wird

(51.) $$\overline{OP}^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

wobei die Veränderlichen $x$, $y$, $z$ den Gleichungen (49.) und (50.) genügen müssen. Unter diesen Halbmessern $OP$ ist die *große* Halbachse ein *Maximum* und die *kleine* Halbachse ein *Minimum*. Man findet daher die beiden Achsen, indem man die Werte von $x$, $y$, $z$ bestimmt, für welche $f(x, y, z)$ ein Maximum oder Minimum wird. Hierbei ist

(52.) $$F(x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2,$$

(53.) $$F_1 = 2x + \frac{2\lambda_1 x}{a^2} + A\lambda_2 = 0,$$

(54.) $$F_2 = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{b^2} + B\lambda_2 = 0,$$

(55.) $$F_3 = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{c^2} + C\lambda_2 = 0,$$

also

$$(56.)\quad 2x = -\frac{A\lambda_2 a^2}{a^2+\lambda_1},\quad 2y = -\frac{B\lambda_2 b^2}{b^2+\lambda_1},\quad 2z = -\frac{C\lambda_2 c^2}{c^2+\lambda_1}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (50.) und (49.) folgt hieraus

$$(57.)\qquad \frac{A^2a^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{B^2b^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{C^2c^2}{c^2+\lambda_1}=0,$$

$$(58.)\qquad \lambda_2^2\left[\frac{A^2a^2}{(a^2+\lambda_1)^2}+\frac{B^2b^2}{(b^2+\lambda_1)^2}+\frac{C^2c^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right]=4.$$

Aus Gleichung (57.) findet man die beiden Werte von $\lambda_1$ und aus Gleichung (58.) die zugehörigen Werte von $\lambda_2$. Indem man diese Werte von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ in die Gleichungen (56.) einsetzt, erhält man schließlich die gesuchten Werte von $x$, $y$, $z$.

Gleichung (57.) kann man auf die Form

$$(59.)\quad \begin{aligned}&(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)\lambda_1^2\\ &\quad+[A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(c^2+a^2)+C^2c^2(a^2+b^2)]\lambda_1\\ &\quad+(A^2+B^2+C^2)a^2b^2c^2=0\end{aligned}$$

bringen. Diese quadratische Gleichung hat zwei *gleiche* Wurzeln, wenn

$$(60.)\quad \begin{aligned}&[A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(c^2+a^2)+C^2c^2(a^2+b^2)]^2\\ &\quad-4(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)(A^2+B^2+C^2)a^2b^2c^2=0\end{aligned}$$

ist. Wird diese Gleichung befriedigt, so werden auch die Achsen der zugehörigen Ellipse einander gleich, d. h. die Ebene $Ax+By+Cz=0$ schneidet aus dem Ellipsoid einen Kreis aus.

Jetzt kann man aber Gleichung (60.) auf die Form

$$(60a.)\quad \begin{aligned}&A^4a^4(b^2-c^2)^2+B^4b^4(c^2-a^2)^2+C^4c^4(a^2-b^2)^2\\ &+2B^2C^2b^2c^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)+2C^2A^2c^2a^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)\\ &+2A^2B^2a^2b^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)=0,\end{aligned}$$

oder

$$(60b.)\quad \begin{aligned}&[A^2a^2(b^2-c^2)-C^2c^2(a^2-b^2)]^2+B^2b^2(a^2-c^2)[B^2b^2(a^2-c^2)\\ &\quad+2A^2a^2(b^2-c^2)+2C^2c^2(a^2-b^2)]=0\end{aligned}$$

bringen. Unter der Voraussetzung, daß $a^2>b^2>c^2>0$ ist, sind beide Glieder auf der linken Seite dieser Gleichung positiv, oder mindestens gleich Null; die Gleichung kann also nur befriedigt werden, wenn die beiden Glieder einzeln gleich Null sind. Dies gibt

$$A^2a^2(b^2-c^2) = C^2c^2(a^2-b^2) \quad \text{und} \quad B=0, \tag{61.}$$

oder

$$\frac{A}{C} = \pm\sqrt{\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)}}, \quad B=0. \tag{62.}$$

Durch die beiden Ebenen

$$x\sqrt{c^2(a^2-b^2)} \pm z\sqrt{a^2(b^2-c^2)} = 0 \tag{63.}$$

werden also Kreise aus dem Ellipsoid ausgeschnitten. Dasselbe gilt von allen Ebenen, die zu einer dieser Ebenen parallel sind.

## Tafel für die Beziehung zwischen dem transcendenten Winkel $\vartheta$ und dem gemeinsamen Winkel $u$.

| Grad | $u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ *) | | | | | | Grad | $u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ *) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vartheta$ | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | $\vartheta$ | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ |
| **0** | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | **45** | 8814 | 8855 | 8896 | 8938 | 8979 | 9021 |
| 1 | 0175 | 0204 | 0233 | 0262 | 0291 | 0320 | 46 | 0,9063 | 0,9105 | 0,9147 | 0,9189 | 0,9231 | 0,9274 |
| 2 | 0349 | 0378 | 0407 | 0436 | 0466 | 0495 | 47 | 0,9316 | 0,9359 | 0,9402 | 0,9445 | 0,9488 | 0,9531 |
| 3 | 0524 | 0553 | 0582 | 0611 | 0640 | 0670 | 48 | 0,9575 | 0,9618 | 0,9662 | 0,9706 | 0,9750 | 0,9794 |
| 4 | 0699 | 0728 | 0757 | 0786 | 0815 | 0845 | 49 | 0,9838 | 0,9882 | 0,9927 | 0,9972 | 1,0017 | 1,0062 |
| **5** | 0874 | 0903 | 0932 | 0961 | 0991 | 1020 | **50** | 1,0107 | 1,0152 | 1,0198 | 1,0243 | 1,0289 | 1,0335 |
| 6 | 1049 | 1078 | 1108 | 1137 | 1166 | 1195 | 51 | 0381 | 0428 | 0474 | 0521 | 0567 | 0614 |
| 7 | 1225 | 1254 | 1283 | 1313 | 1342 | 1371 | 52 | 0662 | 0709 | 0756 | 0804 | 0852 | 0900 |
| 8 | 1401 | 1430 | 1460 | 1489 | 1518 | 1548 | 53 | 0948 | 0997 | 1045 | 1094 | 1143 | 1192 |
| 9 | 1577 | 1607 | 1636 | 1666 | 1695 | 1725 | 54 | 1242 | 1291 | 1341 | 1391 | 1441 | 1492 |
| **10** | 0,1754 | 0,1784 | 0,1813 | 0,1843 | 0,1873 | 0,1902 | **55** | 1542 | 1593 | 1644 | 1695 | 1747 | 1799 |
| 11 | 1932 | 1961 | 1991 | 2021 | 2050 | 2080 | 56 | 1851 | 1903 | 1955 | 2008 | 2060 | 2113 |
| 12 | 2110 | 2140 | 2169 | 2199 | 2229 | 2259 | 57 | 2167 | 2220 | 2274 | 2328 | 2382 | 2437 |
| 13 | 2289 | 2319 | 2348 | 2378 | 2408 | 2438 | 58 | 2492 | 2547 | 2602 | 2657 | 2713 | 2769 |
| 14 | 2468 | 2498 | 2528 | 2558 | 2588 | 2618 | 59 | 2826 | 2882 | 2939 | 2996 | 3054 | 3112 |
| **15** | 2648 | 2679 | 2709 | 2739 | 2769 | 2799 | **60** | 1,3170 | 1,3228 | 1,3287 | 1,3345 | 1,3405 | 1,3464 |
| 16 | 2830 | 2860 | 2890 | 2920 | 2951 | 2981 | 61 | 3524 | 3584 | 3645 | 3705 | 3767 | 3828 |
| 17 | 3012 | 3042 | 3072 | 3103 | 3133 | 3164 | 62 | 3890 | 3952 | 4014 | 4077 | 4140 | 4204 |
| 18 | 3195 | 3225 | 3256 | 3286 | 3317 | 3348 | 63 | 4268 | 4332 | 4397 | 4462 | 4527 | 4593 |
| 19 | 3379 | 3409 | 3440 | 3471 | 3502 | 3533 | 64 | 4659 | 4726 | 4793 | 4860 | 4928 | 4996 |
| **20** | 0,3564 | 0,3595 | 0,3626 | 0,3657 | 0,3688 | 0,3719 | **65** | 5065 | 5134 | 5203 | 5273 | 5343 | 5414 |
| 21 | 3750 | 3781 | 3813 | 3844 | 3875 | 3906 | 66 | 5485 | 5557 | 5629 | 5702 | 5775 | 5849 |
| 22 | 3938 | 3969 | 4001 | 4032 | 4064 | 4095 | 67 | 5923 | 5998 | 6073 | 6149 | 6225 | 6302 |
| 23 | 4127 | 4158 | 4190 | 4222 | 4253 | 4285 | 68 | 6379 | 6457 | 6536 | 6615 | 6695 | 6775 |
| 24 | 4317 | 4349 | 4381 | 4413 | 4445 | 4477 | 69 | 6856 | 6937 | 7019 | 7102 | 7185 | 7269 |
| **25** | 4509 | 4541 | 4573 | 4605 | 4637 | 4670 | **70** | 1,7354 | 1,7440 | 1,7526 | 1,7612 | 1,7700 | 1,7788 |
| 26 | 4702 | 4735 | 4767 | 4799 | 4832 | 4865 | 71 | 1,7877 | 1,7967 | 1,8057 | 1,8149 | 1,8241 | 1,8334 |
| 27 | 4897 | 4930 | 4963 | 4995 | 5028 | 5061 | 72 | 1,8427 | 1,8522 | 1,8617 | 1,8714 | 1,8811 | 1,8909 |
| 28 | 5094 | 5127 | 5160 | 5193 | 5226 | 5259 | 73 | 1,9008 | 1,9108 | 1,9209 | 1,9311 | 1,9414 | 1,9518 |
| 29 | 5293 | 5326 | 5359 | 5393 | 5426 | 5460 | 74 | 1,9623 | 1,9729 | 1,9836 | 1,9944 | 2,0054 | 2,0164 |
| **30** | 0,5493 | 0,5527 | 0,5560 | 0,5594 | 0,5628 | 0,5662 | **75** | 2,0276 | 2,0389 | 2,0503 | 2,0619 | 2,0736 | 2,0854 |
| 31 | 5696 | 5730 | 5764 | 5798 | 5832 | 5866 | 76 | 2,0973 | 2,1094 | 2,1217 | 2,1340 | 2,1466 | 2,1593 |
| 32 | 5900 | 5935 | 5969 | 6004 | 6038 | 6073 | 77 | 2,1721 | 2,1851 | 2,1983 | 2,2117 | 2,2252 | 2,2389 |
| 33 | 6107 | 6142 | 6177 | 6212 | 6247 | 6282 | 78 | 2,2528 | 2,2669 | 2,2812 | 2,2957 | 2,3104 | 2,3253 |
| 34 | 6317 | 6352 | 6387 | 6422 | 6457 | 6493 | 79 | 2,3404 | 2,3558 | 2,3714 | 2,3872 | 2,4033 | 2,4196 |
| **35** | 6528 | 6564 | 6600 | 6635 | 6671 | 6707 | **80** | 2,4362 | 2,4531 | 2,4703 | 2,4878 | 2,5056 | 2,5237 |
| 36 | 6743 | 6779 | 6815 | 6851 | 6887 | 6923 | 81 | 2,5421 | 2,5609 | 2.5800 | 2,5995 | 2,6193 | 2,6396 |
| 37 | 6960 | 6996 | 7033 | 7070 | 7106 | 7143 | 82 | 2,6603 | 2,6814 | 2,7030 | 2,7250 | 2,7476 | 2,7706 |
| 38 | 7180 | 7217 | 7254 | 7291 | 7328 | 7366 | 83 | 2,7942 | 2,8184 | 2,8431 | 2,8685 | 2,8945 | 2,9212 |
| 39 | 7403 | 7440 | 7478 | 7516 | 7553 | 7591 | 84 | 2,9487 | 2,9769 | 3,0060 | 3,0359 | 3,0667 | 3,0985 |
| **40** | 0,7629 | 0,7667 | 0,7705 | 0,7743 | 0,7782 | 0,7820 | **85** | 3,1313 | 3,1652 | 3,2004 | 3,2368 | 3,2746 | 3,3138 |
| 41 | 7859 | 7897 | 7936 | 7975 | 8014 | 8053 | 86 | 3,3547 | 3,3973 | 3,4417 | 3,4883 | 3,5371 | 3,5884 |
| 42 | 8092 | 8131 | 8170 | 8210 | 8249 | 8289 | 87 | 3,6425 | 3,6997 | 3,7604 | 3,8249 | 3,8939 | 3,9681 |
| 43 | 8328 | 8368 | 8408 | 8448 | 8488 | 8529 | 88 | 4,0481 | 4,1352 | 4,2305 | 4,3359 | 4.4536 | 4,5872 |
| 44 | 8569 | 8610 | 8650 | 8691 | 8732 | 8773 | 89 | 4,7413 | 4.9237 | 5,1468 | 5,4345 | 5,8400 | 6,5331 |
| **45** | 8814 | 8855 | 8896 | 8938 | 8979 | 9021 | **90** | $\infty$ | | | | | |

*) Aus den Gleichungen

$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg}\vartheta$, $\mathfrak{Cof}\, u = \sec\vartheta$ (vergl. Formel Nr. 81 der Tabelle)

folgt

$$e^u = \mathfrak{Cof}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = \frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right), \quad \text{oder} \quad u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right].$$

[Vergl. § 30, Gl. (10.)]

## Tafel für die hyperbolische Funktion

$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg} \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$.*)

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0600 | 0701 | 0801 | 0901 | 101 |
| 0,1 | 0,1002 | 1102 | 1203 | 1304 | 1405 | 1506 | 1607 | 1708 | 1810 | 1911 | 102 |
| 0,2 | 0,2013 | 2115 | 2218 | 2320 | 2423 | 2526 | 2629 | 2733 | 2837 | 2941 | 104 |
| 0,3 | 0,3045 | 3150 | 3255 | 3360 | 3466 | 3572 | 3678 | 3785 | 3892 | 4000 | 108 |
| 0,4 | 0,4108 | 4216 | 4325 | 4434 | 4543 | 4653 | 4764 | 4875 | 4986 | 5098 | 113 |
| 0,5 | 0,5211 | 5324 | 5438 | 5552 | 5666 | 5782 | 5897 | 6014 | 6131 | 6248 | 119 |
| 0,6 | 0,6367 | 6485 | 6605 | 6725 | 6846 | 6967 | 7090 | 7213 | 7336 | 7461 | 125 |
| 0,7 | 0,7586 | 7712 | 7838 | 7966 | 8094 | 8223 | 8353 | 8484 | 8615 | 8748 | 133 |
| 0,8 | 0,8881 | 9015 | 9150 | 9286 | 9423 | 9561 | 9700 | 9840 | 9981 | 0122* | 143 |
| 0,9 | 1,0265 | 0409 | 0554 | 0700 | 0847 | 0995 | 1144 | 1294 | 1446 | 1598 | 154 |
| 1,0 | 1,1752 | 1907 | 2063 | 2220 | 2379 | 2539 | 2700 | 2862 | 3025 | 3190 | 166 |
| 1,1 | 1,3356 | 3524 | 3693 | 3863 | 4035 | 4208 | 4382 | 4558 | 4735 | 4914 | 181 |
| 1,2 | 1,5095 | 5276 | 5460 | 5645 | 5831 | 6019 | 6209 | 6400 | 6593 | 6788 | 196 |
| 1,3 | 1,6984 | 7182 | 7381 | 7583 | 7786 | 7991 | 8198 | 8406 | 8617 | 8829 | 214 |
| 1,4 | 1,9043 | 9259 | 9477 | 9697 | 9919 | 0143* | 0369* | 0597* | 0827* | 1059* | 234 |
| 1,5 | 2,1293 | 1529 | 1768 | 2008 | 2251 | 2496 | 2743 | 2993 | 3245 | 3499 | 257 |
| 1,6 | 2,3756 | 4015 | 4276 | 4540 | 4806 | 5075 | 5346 | 5620 | 5896 | 6175 | 281 |
| 1,7 | 2,6456 | 6740 | 7027 | 7317 | 7609 | 7904 | 8202 | 8503 | 8806 | 9112 | 310 |
| 1,8 | 2,9422 | 9734 | 0049* | 0367* | 0689* | 1013* | 1340* | 1671* | 2005* | 2341* | 341 |
| 1,9 | 3,2682 | 3025 | 3372 | 3722 | 4075 | 4432 | 4792 | 5156 | 5523 | 5894 | 375 |
| 2,0 | 3,6269 | 6647 | 7028 | 7414 | 7803 | 8196 | 8593 | 8993 | 9398 | 9806 | 413 |
| 2,1 | 4,0219 | 0635 | 1056 | 1480 | 1909 | 2342 | 2779 | 3221 | 3666 | 4116 | 455 |
| 2,2 | 4,4571 | 5030 | 5494 | 5962 | 6434 | 6912 | 7394 | 7880 | 8372 | 8868 | 502 |
| 2,3 | 4,9370 | 9876 | 0387* | 0903* | 1425* | 1951* | 2483* | 3020* | 3562* | 4109* | 553 |
| 2,4 | 5,4662 | 5221 | 5785 | 6354 | 6929 | 7510 | 8097 | 8689 | 9288 | 9892 | 610 |
| 2,5 | 6,0502 | 1118 | 1741 | 2369 | 3004 | 3645 | 4293 | 4946 | 5607 | 6274 | 673 |
| 2,6 | 6,6947 | 7628 | 8315 | 9008 | 9709 | 0417* | 1132* | 1854* | 2583* | 3319* | 744 |
| 2,7 | 7,4063 | 4814 | 5572 | 6338 | 7112 | 7894 | 8683 | 9480 | 0285* | 1098* | 821 |
| 2,8 | 8,1919 | 2749 | 3586 | 4432 | 5287 | 6150 | 7021 | 7902 | 8791 | 9689 | 907 |
| 2,9 | 9,0596 | 1512 | 2437 | 3371 | 4315 | 5268 | 6231 | 7203 | 8185 | 9177 | 1002 |
| 3,0 | 10,0179 | 1191 | 2212 | 3245 | 4287 | 5340 | 6403 | 7477 | 8562 | 9658 | 1107 |
| 3,1 | 11,0765 | 1882 | 3011 | 4151 | 5303 | 6466 | 7641 | 8827 | 0026* | 1236* | 1223 |
| 3,2 | 12,2459 | 3694 | 4941 | 6200 | 7473 | 8758 | 0056* | 1367* | 2691* | 4028* | 1351 |
| 3,3 | 13,5379 | 6743 | 8121 | 9513 | 0918* | 2338* | 3772* | 5221* | 6684* | 8161* | 1493 |
| 3,4 | 14,965 | 15,116 | 15,268 | 15,422 | 15,577 | 15,734 | 15,893 | 16,053 | 16,214 | 16,378 | 165 |
| 3,5 | 16.543 | 16,709 | 16,877 | 17,047 | 17,219 | 17,392 | 17,567 | 17,744 | 17,923 | 18,103 | 182 |
| 3,6 | 18,285 | 18,470 | 18,655 | 18,843 | 19,033 | 19,224 | 19,418 | 19,613 | 19,811 | 20,010 | 201 |
| 3,7 | 20,211 | 20,415 | 20,620 | 20 828 | 21,037 | 21,249 | 21,463 | 21,679 | 21,897 | 22,117 | 222 |
| 3,8 | 22,339 | 22,564 | 22,791 | 23,020 | 23,252 | 23,486 | 23,722 | 23,961 | 24,202 | 24,445 | 246 |
| 3,9 | 24,691 | 24,939 | 25,190 | 25,444 | 25.700 | 25,958 | 26,219 | 26,483 | 26,749 | 27,018 | 272 |
| 4,0 | 27,290 | 27,564 | 27,842 | 28,122 | 28.404 | 28.690 | 28,979 | 29,270 | 29,564 | 29,862 | 300 |
| 4,1 | 30,162 | 30,465 | 30,772 | 31.081 | 31.393 | 31.709 | 32,028 | 32,350 | 32,675 | 33,004 | 332 |
| 4,2 | 33,336 | 33,671 | 34,009 | 34.351 | 34.697 | 35,046 | 35.398 | 35,754 | 36,113 | 36,476 | 367 |
| 4,3 | 36,843 | 37 214 | 37.588 | 37.966 | 38,347 | 38.733 | 39,122 | 39,515 | 39.913 | 40,314 | 405 |
| 4,4 | 40,719 | 41,129 | 41,542 | 41,960 | 42.382 | 42.808 | 43,238 | 43,673 | 44,112 | 44,555 | 448 |
| 4,5 | 45,003 | 45,455 | 45,912 | 46,374 | 46,840 | 47,311 | 47,787 | 48,267 | 48,752 | 49,242 | 495 |
| 4,6 | 49,737 | 50,237 | 50,742 | 51,252 | 51,767 | 52,288 | 52,813 | 53,344 | 53,880 | 54,422 | 547 |
| 4,7 | 54,969 | 55,522 | 56,080 | 56,643 | 57,213 | 57,788 | 58,369 | 58.955 | 59,548 | 60,147 | 604 |
| 4,8 | 60,751 | 61,362 | 61,979 | 62,601 | 63,231 | 63,866 | 64,508 | 65,157 | 65,812 | 66,473 | 668 |
| 4,9 | 67,141 | 67,815 | 68,498 | 69,186 | 69,882 | 70,584 | 71,293 | 72,010 | 72,734 | 73,465 | 738 |
| 5,0 | 74,203 | 74,949 | 75,702 | 76,463 | 77,232 | 78,008 | 78,792 | 79,584 | 80,384 | 81,192 | 816 |

*) Die hier folgenden Tafeln sind entnommen aus *Ligowski*, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin.

## Tafel für die hyperbolische Funktion

$\mathfrak{Cos}\,u = \sec\vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$.

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 0001 | 0002 | 0005 | 0008 | 0013 | 0018 | 0025 | 0032 | 0041 | 9 |
| 0,1 | 1,0050 | 0061 | 0072 | 0085 | 0098 | 0113 | 0128 | 0145 | 0162 | 0181 | 20 |
| 0,2 | 1,0201 | 0221 | 0243 | 0266 | 0289 | 0314 | 0340 | 0367 | 0395 | 0423 | 30 |
| 0,3 | 1,0453 | 0484 | 0516 | 0549 | 0584 | 0619 | 0655 | 0692 | 0731 | 0770 | 41 |
| 0,4 | 1,0811 | 0852 | 0895 | 0939 | 0984 | 1030 | 1077 | 1125 | 1174 | 1225 | 51 |
| 0,5 | 1,1276 | 1329 | 1383 | 1438 | 1494 | 1551 | 1609 | 1669 | 1730 | 1792 | 63 |
| 0,6 | 1,1855 | 1919 | 1984 | 2051 | 2119 | 2188 | 2258 | 2330 | 2402 | 2476 | 76 |
| 0,7 | 1,2552 | 2628 | 2706 | 2785 | 2865 | 2947 | 3030 | 3114 | 3199 | 3286 | 88 |
| 0,8 | 1,3374 | 3464 | 3555 | 3647 | 3740 | 3835 | 3932 | 4029 | 4128 | 4229 | 102 |
| 0,9 | 1,4331 | 4434 | 4539 | 4645 | 4753 | 4862 | 4973 | 5085 | 5199 | 5314 | 117 |
| 1,0 | 1,5431 | 5549 | 5669 | 5790 | 5913 | 6038 | 6164 | 6292 | 6421 | 6552 | 133 |
| 1,1 | 1,6685 | 6820 | 6956 | 7093 | 7233 | 7374 | 7517 | 7662 | 7808 | 7957 | 151 |
| 1,2 | 1,8107 | 8258 | 8412 | 8568 | 8725 | 8884 | 9045 | 9208 | 9373 | 9540 | 169 |
| 1,3 | 1,9709 | 9880 | 0053* | 0228* | 0404* | 0583* | 0764* | 0947* | 1132* | 1320* | 189 |
| 1,4 | 2,1509 | 1700 | 1894 | 2090 | 2288 | 2488 | 2691 | 2896 | 3103 | 3312 | 212 |
| 1,5 | 2,3524 | 3738 | 3955 | 4174 | 4395 | 4619 | 4845 | 5073 | 5305 | 5538 | 237 |
| 1,6 | 2,5775 | 6013 | 6255 | 6499 | 6746 | 6995 | 7247 | 7502 | 7760 | 8020 | 263 |
| 1,7 | 2,8283 | 8549 | 8818 | 9090 | 9364 | 9642 | 9922 | 0206* | 0492* | 0782* | 293 |
| 1,8 | 3,1075 | 1371 | 1669 | 1972 | 2277 | 2585 | 2897 | 3212 | 3530 | 3852 | 325 |
| 1,9 | 3,4177 | 4506 | 4838 | 5173 | 5512 | 5855 | 6201 | 6551 | 6904 | 7261 | 361 |
| 2,0 | 3,7622 | 7987 | 8355 | 8727 | 9103 | 9483 | 9867 | 0255* | 0647* | 1043* | 400 |
| 2,1 | 4,1443 | 1847 | 2256 | 2669 | 3085 | 3507 | 3932 | 4362 | 4797 | 5236 | 443 |
| 2,2 | 4,5679 | 6127 | 6580 | 7037 | 7499 | 7966 | 8437 | 8914 | 9395 | 9881 | 491 |
| 2,3 | 5,0372 | 0868 | 1370 | 1876 | 2388 | 2905 | 3427 | 3954 | 4487 | 5026 | 543 |
| 2,4 | 5,5569 | 6119 | 6674 | 7235 | 7801 | 8373 | 8951 | 9535 | 0125* | 0721* | 602 |
| 2,5 | 6,1323 | 1931 | 2545 | 3166 | 3793 | 4426 | 5066 | 5712 | 6365 | 7024 | 666 |
| 2,6 | 6,7690 | 8363 | 9043 | 9729 | 0423* | 1123* | 1831* | 2546* | 3268* | 3998* | 737 |
| 2,7 | 7,4735 | 5479 | 6231 | 6991 | 7758 | 8533 | 9316 | 0106* | 0905* | 1712* | 815 |
| 2,8 | 8,2527 | 3351 | 4182 | 5022 | 5871 | 6728 | 7594 | 8469 | 9352 | 0244* | 902 |
| 2,9 | 9,1146 | 2056 | 2976 | 3905 | 4844 | 5791 | 6749 | 7716 | 8693 | 9680 | 997 |
| 3,0 | 10,0677 | 1683 | 2700 | 3728 | 4765 | 5814 | 6872 | 7942 | 9022 | 0113* | 1102 |
| 3,1 | 11,1215 | 2328 | 3453 | 4588 | 5736 | 6895 | 8065 | 9247 | 0442* | 1648* | 1218 |
| 3,2 | 12,2866 | 4097 | 5340 | 6596 | 7864 | 9146 | 0440* | 1747* | 3067* | 4401* | 1347 |
| 3,3 | 13,5748 | 7108 | 8483 | 9871 | 1273* | 2689* | 4120* | 5565* | 7024* | 8498* | 1489 |
| 3,4 | 14,999 | 15,149 | 15,301 | 15,455 | 15,610 | 15,766 | 15,924 | 16,084 | 16,245 | 16,408 | 165 |
| 3,5 | 16,573 | 16,739 | 16,907 | 17,077 | 17,248 | 17,421 | 17,596 | 17,772 | 17,951 | 18,131 | 182 |
| 3,6 | 18,313 | 18,497 | 18,682 | 18,870 | 19,059 | 19,250 | 19,444 | 19,639 | 19,836 | 20,035 | 201 |
| 3,7 | 20,236 | 20,439 | 20,644 | 20,852 | 21,061 | 21,272 | 21,486 | 21,702 | 21,919 | 22,139 | 223 |
| 3,8 | 22,362 | 22,586 | 22,813 | 23,042 | 23,273 | 23,507 | 23,743 | 23,982 | 24,222 | 24,466 | 245 |
| 3,9 | 24,711 | 24,959 | 25,210 | 25,463 | 25,719 | 25,977 | 26,238 | 26,502 | 26,768 | 27,037 | 271 |
| 4,0 | 27,308 | 27,582 | 27,860 | 28,139 | 28,422 | 28,707 | 28,996 | 29,287 | 29,581 | 29,878 | 300 |
| 4,1 | 30,178 | 30,482 | 30,788 | 31,097 | 31,409 | 31,725 | 32,044 | 32,365 | 32,691 | 33,019 | 332 |
| 4,2 | 33,351 | 33,686 | 34,024 | 34,366 | 34,711 | 35,060 | 35,412 | 35,768 | 36,127 | 36,490 | 367 |
| 4,3 | 36,857 | 37,227 | 37,601 | 37,979 | 38,360 | 38,746 | 39,135 | 39,528 | 39,925 | 40,326 | 406 |
| 4,4 | 40,732 | 41,141 | 41,554 | 41,972 | 42,393 | 42,819 | 43,250 | 43,684 | 44,123 | 44,566 | 448 |
| 4,5 | 45,014 | 45,466 | 45,923 | 46,385 | 46,851 | 47,321 | 47,797 | 48,277 | 48,762 | 49,252 | 495 |
| 4,6 | 49,747 | 50,247 | 50,752 | 51,262 | 51,777 | 52,297 | 52,823 | 53,354 | 53,890 | 54,431 | 547 |
| 4,7 | 54,978 | 55,531 | 56,089 | 56,652 | 57,221 | 57,796 | 58,377 | 58,964 | 59,556 | 60,155 | 604 |
| 4,8 | 60,759 | 61,370 | 61,987 | 62,609 | 63,239 | 63,874 | 64,516 | 65,164 | 65,819 | 66,481 | 668 |
| 4,9 | 67,149 | 67,823 | 68,505 | 69,193 | 69,889 | 70,591 | 71,300 | 72,017 | 72,741 | 73,472 | 738 |
| 5,0 | 74,210 | 74,956 | 75,709 | 76,470 | 77,238 | 78,014 | 78,798 | 79,590 | 80,390 | 81,198 | 816 |

## Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg} \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$; um 10 vergrößert.

| *u* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | *D* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | − ∞ | 8,0000 | 3011 | 4772 | 6022 | 6992 | 7784 | 8455 | 9036 | 9548 | 459 |
| 0,1 | 9,0007 | 0423 | 0802 | 1152 | 1475 | 1777 | 2060 | 2325 | 2576 | 2814 | 225 |
| 0,2 | 9,3039 | 3254 | 3459 | 3656 | 3844 | 4025 | 4199 | 4366 | 4528 | 4685 | 151 |
| 0,3 | 9,4836 | 4983 | 5125 | 5264 | 5398 | 5529 | 5656 | 5781 | 5902 | 6020 | 116 |
| 0,4 | 9,6136 | 6249 | 6359 | 6468 | 6574 | 6678 | 6780 | 6880 | 6978 | 7074 | 95 |
| **0,5** | 9,7169 | 7262 | 7354 | 7444 | 7533 | 7620 | 7707 | 7791 | 7875 | 7958 | 81 |
| 0,6 | 9,8039 | 8119 | 8199 | 8277 | 8354 | 8431 | 8506 | 8581 | 8655 | 8728 | 72 |
| 0,7 | 9,8800 | 8872 | 8942 | 9012 | 9082 | 9150 | 9218 | 9286 | 9353 | 9419 | 66 |
| 0,8 | 9,9485 | 9550 | 9614 | 9678 | 9742 | 9805 | 9868 | 9930 | 9992 | 0053* | 61 |
| 0,9 | 10,0114 | 0174 | 0234 | 0294 | 0353 | 0412 | 0470 | 0529 | 0586 | 0644 | 57 |
| **1,0** | 10,0701 | 0758 | 0815 | 0871 | 0927 | 0982 | 1038 | 1093 | 1148 | 1203 | 54 |
| 1,1 | 10,1257 | 1311 | 1365 | 1419 | 1472 | 1525 | 1578 | 1631 | 1684 | 1736 | 52 |
| 1,2 | 10,1788 | 1840 | 1892 | 1944 | 1995 | 2046 | 2098 | 2148 | 2199 | 2250 | 50 |
| 1,3 | 10,2300 | 2351 | 2401 | 2451 | 2501 | 2551 | 2600 | 2650 | 2699 | 2748 | 49 |
| 1,4 | 10,2797 | 2846 | 2895 | 2944 | 2993 | 3041 | 3090 | 3138 | 3186 | 3234 | 48 |
| **1,5** | 10,3282 | 3330 | 3378 | 3426 | 3474 | 3521 | 3569 | 3616 | 3663 | 3711 | 47 |
| 1,6 | 10,3758 | 3805 | 3852 | 3899 | 3946 | 3992 | 4039 | 4086 | 4132 | 4179 | 46 |
| 1,7 | 10,4225 | 4272 | 4318 | 4364 | 4411 | 4457 | 4503 | 4549 | 4595 | 4641 | 46 |
| 1,8 | 10,4687 | 4733 | 4778 | 4824 | 4870 | 4915 | 4961 | 5007 | 5052 | 5098 | 45 |
| 1,9 | 10,5143 | 5188 | 5234 | 5279 | 5324 | 5370 | 5415 | 5460 | 5505 | 5550 | 45 |
| **2,0** | 10,5595 | 5640 | 5685 | 5730 | 5775 | 5820 | 5865 | 5910 | 5955 | 6000 | 44 |
| 2,1 | 10,6044 | 6089 | 6134 | 6178 | 6223 | 6268 | 6312 | 6357 | 6401 | 6446 | 45 |
| 2,2 | 10,6491 | 6535 | 6580 | 6624 | 6668 | 6713 | 6757 | 6802 | 6846 | 6890 | 45 |
| 2,3 | 10,6935 | 6979 | 7023 | 7067 | 7112 | 7156 | 7200 | 7244 | 7289 | 7333 | 44 |
| 2,4 | 10,7377 | 7421 | 7465 | 7509 | 7553 | 7597 | 7642 | 7686 | 7730 | 7774 | 44 |
| **2,5** | 10,7818 | 7862 | 7906 | 7950 | 7994 | 8038 | 8082 | 8126 | 8169 | 8213 | 44 |
| 2,6 | 10,8257 | 8301 | 8345 | 8389 | 8433 | 8477 | 8521 | 8564 | 8608 | 8652 | 44 |
| 2,7 | 10,8696 | 8740 | 8784 | 8827 | 8871 | 8915 | 8959 | 9003 | 9046 | 9090 | 44 |
| 2,8 | 10,9134 | 9178 | 9221 | 9265 | 9309 | 9353 | 9396 | 9440 | 9484 | 9527 | 44 |
| 2,9 | 10,9571 | 9615 | 9658 | 9702 | 9746 | 9789 | 9833 | 9877 | 9920 | 9964 | 44 |
| **3,0** | 11,0008 | 0051 | 0095 | 0139 | 0182 | 0226 | 0270 | 0313 | 0357 | 0400 | 44 |
| 3,1 | 11,0444 | 0488 | 0531 | 0575 | 0618 | 0662 | 0706 | 0749 | 0793 | 0836 | 44 |
| 3,2 | 11,0880 | 0923 | 0967 | 1011 | 1054 | 1098 | 1141 | 1185 | 1228 | 1272 | 44 |
| 3,3 | 11,1316 | 1359 | 1403 | 1446 | 1490 | 1533 | 1577 | 1620 | 1664 | 1707 | 44 |
| 3,4 | 11,1751 | 1794 | 1838 | 1881 | 1925 | 1968 | 2012 | 2056 | 2099 | 2143 | 43 |
| **3,5** | 11,2186 | 2230 | 2273 | 2317 | 2360 | 2404 | 2447 | 2491 | 2534 | 2578 | 43 |
| 3,6 | 11,2621 | 2665 | 2708 | 2752 | 2795 | 2839 | 2882 | 2925 | 2969 | 3012 | 44 |
| 3,7 | 11,3056 | 3099 | 3143 | 3186 | 3230 | 3273 | 3317 | 3360 | 3404 | 3447 | 44 |
| 3,8 | 11,3491 | 3534 | 3578 | 3621 | 3665 | 3708 | 3752 | 3795 | 3838 | 3882 | 43 |
| 3,9 | 11,3925 | 3969 | 4012 | 4056 | 4099 | 4143 | 4186 | 4230 | 4273 | 4317 | 43 |
| **4,0** | 11,4360 | 4403 | 4447 | 4490 | 4534 | 4577 | 4621 | 4664 | 4708 | 4751 | 44 |
| 4,1 | 11,4795 | 4838 | 4881 | 4925 | 4968 | 5012 | 5055 | 5099 | 5142 | 5186 | 43 |
| 4,2 | 11,5229 | 5273 | 5316 | 5359 | 5403 | 5446 | 5490 | 5533 | 5577 | 5620 | 44 |
| 4,3 | 11,5664 | 5707 | 5750 | 5794 | 5837 | 5881 | 5924 | 5968 | 6011 | 6055 | 43 |
| 4,4 | 11,6098 | 6141 | 6185 | 6228 | 6272 | 6315 | 6359 | 6402 | 6446 | 6489 | 43 |
| **4,5** | 11,6532 | 6576 | 6619 | 6663 | 6706 | 6750 | 6793 | 6836 | 6880 | 6923 | 44 |
| 4,6 | 11,6967 | 7010 | 7054 | 7097 | 7141 | 7184 | 7227 | 7271 | 7314 | 7358 | 43 |
| 4,7 | 11,7401 | 7445 | 7488 | 7531 | 7575 | 7618 | 7662 | 7705 | 7749 | 7792 | 44 |
| 4,8 | 11,7836 | 7879 | 7922 | 7966 | 8009 | 8053 | 8096 | 8140 | 8183 | 8226 | 44 |
| 4,9 | 11,8270 | 8313 | 8357 | 8400 | 8444 | 8487 | 8530 | 8574 | 8617 | 8661 | 43 |
| **5,0** | 11,8704 | 8748 | 8791 | 8835 | 8878 | 8921 | 8965 | 9008 | 9052 | 9095 | 43 |

## Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

$\mathfrak{Cof}\, u = \sec\vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$.

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,0000 | 0000 | 0001 | 0002 | 0003 | 0005 | 0008 | 0011 | 0014 | 0018 | 4 |
| 0,1 | 0,0022 | 0026 | 0031 | 0037 | 0042 | 0049 | 0055 | 0062 | 0070 | 0078 | 8 |
| 0,2 | 0,0086 | 0095 | 0104 | 0114 | 0124 | 0134 | 0145 | 0156 | 0168 | 0180 | 13 |
| 0,3 | 0,0193 | 0205 | 0219 | 0232 | 0246 | 0261 | 0276 | 0291 | 0306 | 0322 | 17 |
| 0,4 | 0,0339 | 0355 | 0372 | 0390 | 0407 | 0426 | 0444 | 0463 | 0482 | 0502 | 20 |
| **0,5** | 0,0522 | 0542 | 0562 | 0583 | 0605 | 0626 | 0648 | 0670 | 0693 | 0716 | 23 |
| 0,6 | 0,0739 | 0762 | 0786 | 0810 | 0835 | 0859 | 0884 | 0910 | 0935 | 0961 | 26 |
| 0,7 | 0,0987 | 1013 | 1040 | 1067 | 1094 | 1122 | 1149 | 1177 | 1206 | 1234 | 29 |
| 0,8 | 0,1263 | 1292 | 1321 | 1350 | 1380 | 1410 | 1440 | 1470 | 1501 | 1532 | 31 |
| 0,9 | 0,1563 | 1594 | 1625 | 1657 | 1689 | 1721 | 1753 | 1785 | 1818 | 1851 | 33 |
| **1,0** | 0,1884 | 1917 | 1950 | 1984 | 2018 | 2051 | 2086 | 2120 | 2154 | 2189 | 34 |
| 1,1 | 0,2223 | 2258 | 2293 | 2328 | 2364 | 2399 | 2435 | 2470 | 2506 | 2542 | 36 |
| 1,2 | 0,2578 | 2615 | 2651 | 2688 | 2724 | 2761 | 2798 | 2835 | 2872 | 2909 | 38 |
| 1,3 | 0,2947 | 2984 | 3022 | 3059 | 3097 | 3135 | 3173 | 3211 | 3249 | 3288 | 38 |
| 1,4 | 0,3326 | 3365 | 3403 | 3442 | 3481 | 3520 | 3559 | 3598 | 3637 | 3676 | 39 |
| **1,5** | 0,3715 | 3754 | 3794 | 3833 | 3873 | 3913 | 3952 | 3992 | 4032 | 4072 | 40 |
| 1,6 | 0,4112 | 4152 | 4192 | 4232 | 4273 | 4313 | 4353 | 4394 | 4434 | 4475 | 40 |
| 1,7 | 0,4515 | 4556 | 4597 | 4637 | 4678 | 4719 | 4760 | 4801 | 4842 | 4883 | 41 |
| 1,8 | 0,4924 | 4965 | 5006 | 5048 | 5089 | 5130 | 5172 | 5213 | 5254 | 5296 | 41 |
| 1,9 | 0,5337 | 5379 | 5421 | 5462 | 5504 | 5545 | 5587 | 5629 | 5671 | 5713 | 41 |
| **2,0** | 0,5754 | 5796 | 5838 | 5880 | 5922 | 5964 | 6006 | 6048 | 6090 | 6132 | 43 |
| 2,1 | 0,6175 | 6217 | 6259 | 6301 | 6343 | 6386 | 6428 | 6470 | 6512 | 6555 | 42 |
| 2,2 | 0,6597 | 6640 | 6682 | 6724 | 6767 | 6809 | 6852 | 6894 | 6937 | 6979 | 43 |
| 2,3 | 0,7022 | 7064 | 7107 | 7150 | 7192 | 7235 | 7278 | 7320 | 7363 | 7406 | 42 |
| 2,4 | 0,7448 | 7491 | 7534 | 7577 | 7619 | 7662 | 7705 | 7748 | 7791 | 7833 | 43 |
| **2,5** | 0,7876 | 7919 | 7962 | 8005 | 8048 | 8091 | 8134 | 8176 | 8219 | 8262 | 43 |
| 2,6 | 0,8305 | 8348 | 8391 | 8434 | 8477 | 8520 | 8563 | 8606 | 8649 | 8692 | 43 |
| 2,7 | 0,8735 | 8778 | 8821 | 8864 | 8907 | 8951 | 8994 | 9037 | 9080 | 9123 | 43 |
| 2,8 | 0,9166 | 9209 | 9252 | 9295 | 9338 | 9382 | 9425 | 9468 | 9511 | 9554 | 43 |
| 2,9 | 0,9597 | 9641 | 9684 | 9727 | 9770 | 9813 | 9856 | 9900 | 9943 | 9986 | 43 |
| **3,0** | 1,0029 | 0073 | 0116 | 0159 | 0202 | 0245 | 0289 | 0332 | 0375 | 0418 | 44 |
| 3,1 | 1,0462 | 0505 | 0548 | 0591 | 0635 | 0678 | 0721 | 0764 | 0808 | 0851 | 43 |
| 3,2 | 1,0894 | 0938 | 0981 | 1024 | 1067 | 1111 | 1154 | 1197 | 1241 | 1284 | 43 |
| 3,3 | 1,1327 | 1371 | 1414 | 1457 | 1501 | 1544 | 1587 | 1631 | 1674 | 1717 | 44 |
| 3,4 | 1,1761 | 1804 | 1847 | 1891 | 1934 | 1977 | 2021 | 2064 | 2107 | 2151 | 43 |
| **3,5** | 1,2194 | 2237 | 2281 | 2324 | 2367 | 2411 | 2454 | 2497 | 2541 | 2584 | 44 |
| 3,6 | 1,2628 | 2671 | 2714 | 2758 | 2801 | 2844 | 2888 | 2931 | 2974 | 3018 | 43 |
| 3,7 | 1,3061 | 3105 | 3148 | 3191 | 3235 | 3278 | 3322 | 3365 | 3408 | 3452 | 43 |
| 3,8 | 1,3495 | 3538 | 3582 | 3625 | 3669 | 3712 | 3755 | 3799 | 3842 | 3886 | 43 |
| 3,9 | 1,3929 | 3972 | 4016 | 4059 | 4103 | 4146 | 4189 | 4233 | 4276 | 4320 | 43 |
| **4,0** | 1,4363 | 4406 | 4450 | 4493 | 4537 | 4580 | 4623 | 4667 | 4710 | 4754 | 43 |
| 4,1 | 1,4797 | 4840 | 4884 | 4927 | 4971 | 5014 | 5057 | 5101 | 5144 | 5188 | 43 |
| 4,2 | 1,5231 | 5274 | 5318 | 5361 | 5405 | 5448 | 5492 | 5535 | 5578 | 5622 | 43 |
| 4,3 | 1,5665 | 5709 | 5752 | 5795 | 5839 | 5882 | 5926 | 5969 | 6012 | 6056 | 43 |
| 4,4 | 1,6099 | 6143 | 6186 | 6230 | 6273 | 6316 | 6360 | 6403 | 6447 | 6490 | 43 |
| **4,5** | 1,6533 | 6577 | 6620 | 6664 | 6707 | 6751 | 6794 | 6837 | 6881 | 6924 | 44 |
| 4,6 | 1,6968 | 7011 | 7055 | 7098 | 7141 | 7185 | 7228 | 7272 | 7315 | 7358 | 44 |
| 4,7 | 1,7402 | 7445 | 7489 | 7532 | 7576 | 7619 | 7662 | 7706 | 7749 | 7793 | 43 |
| 4,8 | 1,7836 | 7880 | 7923 | 7966 | 8010 | 8053 | 8097 | 8140 | 8184 | 8227 | 43 |
| 4,9 | 1,8270 | 8314 | 8357 | 8401 | 8444 | 8487 | 8531 | 8574 | 8618 | 8661 | 44 |
| **5,0** | 1,8705 | 8748 | 8791 | 8835 | 8878 | 8922 | 8965 | 9009 | 9052 | 9095 | 43 |

## Tafel für die hyperbolische Funktion

$\mathfrak{Tg}\, u = \sin\vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 2{,}39$.

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0599 | 0699 | 0798 | 0898 | 99 |
| 0,1 | 0,0997 | 1096 | 1194 | 1293 | 1391 | 1489 | 1587 | 1684 | 1781 | 1878 | 96 |
| 0,2 | 0,1974 | 2070 | 2165 | 2260 | 2355 | 2449 | 2543 | 2636 | 2729 | 2821 | 92 |
| 0,3 | 0,2913 | 3004 | 3095 | 3185 | 3275 | 3364 | 3452 | 3540 | 3627 | 3714 | 86 |
| 0,4 | 0,3800 | 3885 | 3969 | 4053 | 4137 | 4219 | 4301 | 4382 | 4462 | 4542 | 79 |
| 0,5 | 0,4621 | 4700 | 4777 | 4854 | 4930 | 5005 | 5080 | 5154 | 5227 | 5299 | 71 |
| 0,6 | 0,5370 | 5441 | 5511 | 5581 | 5649 | 5717 | 5784 | 5850 | 5915 | 5980 | 64 |
| 0,7 | 0,6044 | 6107 | 6169 | 6231 | 6291 | 6352 | 6411 | 6469 | 6527 | 6584 | 56 |
| 0,8 | 0,6640 | 6696 | 6751 | 6805 | 6858 | 6911 | 6963 | 7014 | 7064 | 7114 | 49 |
| 0,9 | 0,7163 | 7211 | 7259 | 7306 | 7352 | 7398 | 7443 | 7487 | 7531 | 7574 | 42 |
| 1,0 | 0,7616 | 7658 | 7699 | 7739 | 7779 | 7818 | 7857 | 7895 | 7932 | 7969 | 36 |
| 1,1 | 0,8005 | 8041 | 8076 | 8110 | 8144 | 8178 | 8210 | 8243 | 8275 | 8306 | 31 |
| 1,2 | 0,8337 | 8367 | 8397 | 8426 | 8455 | 8483 | 8511 | 8538 | 8565 | 8591 | 26 |
| 1,3 | 0,8617 | 8643 | 8668 | 8693 | 8717 | 8741 | 8764 | 8787 | 8810 | 8832 | 22 |
| 1,4 | 0,8854 | 8875 | 8896 | 8917 | 8937 | 8957 | 8977 | 8996 | 9015 | 9033 | 19 |
| 1,5 | 0,9052 | 9069 | 9087 | 9104 | 9121 | 9138 | 9154 | 9170 | 9186 | 9202 | 15 |
| 1,6 | 0,9217 | 9232 | 9246 | 9261 | 9275 | 9289 | 9302 | 9316 | 9329 | 9342 | 12 |
| 1,7 | 0,9354 | 9367 | 9379 | 9391 | 9402 | 9414 | 9425 | 9436 | 9447 | 9458 | 10 |
| 1,8 | 0,9468 | 9478 | 9488 | 9498 | 9508 | 9518 | 9527 | 9536 | 9545 | 9554 | 8 |
| 1,9 | 0,9562 | 9571 | 9579 | 9587 | 9595 | 9603 | 9611 | 9619 | 9626 | 9633 | 7 |
| 2,0 | 0,9640 | 9647 | 9654 | 9661 | 9668 | 9674 | 9680 | 9687 | 9693 | 9699 | 6 |
| 2,1 | 0,9705 | 9710 | 9716 | 9722 | 9727 | 9732 | 9738 | 9743 | 9748 | 9753 | 4 |
| 2,2 | 0,9757 | 9762 | 9767 | 9771 | 9776 | 9780 | 9785 | 9789 | 9793 | 9797 | 4 |
| 2,3 | 0,9801 | 9805 | 9809 | 9812 | 9816 | 9820 | 9823 | 9827 | 9830 | 9834 | 3 |

## Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

$\mathfrak{Tg}\, u = \sin\vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 2{,}39$; um 10 vergrößert.

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | $-\infty$ | 8,0000 | 3010 | 4770 | 6018 | 6986 | 7776 | 8444 | 9022 | 9531 | 455 |
| 0,1 | 8,9986 | 0396* | 0771* | 1115 | 1433* | 1729* | 2004* | 2263* | 2506* | 2736* | 217 |
| 0,2 | 9,2953 | 3159 | 3355 | 3542 | 3720 | 3890 | 4053 | 4210 | 4360 | 4505 | 139 |
| 0,3 | 9,4644 | 4778 | 4907 | 5031 | 5152 | 5268 | 5381 | 5490 | 5596 | 5698 | 99 |
| 0,4 | 9,5797 | 5894 | 5987 | 6078 | 6166 | 6252 | 6336 | 6417 | 6496 | 6573 | 75 |
| 0,5 | 9,6648 | 6720 | 6792 | 6861 | 6928 | 6994 | 7058 | 7121 | 7182 | 7242 | 58 |
| 0,6 | 9,7300 | 7357 | 7413 | 7467 | 7520 | 7571 | 7622 | 7671 | 7720 | 7767 | 46 |
| 0,7 | 9,7813 | 7858 | 7902 | 7945 | 7988 | 8029 | 8069 | 8109 | 8147 | 8185 | 37 |
| 0,8 | 9,8222 | 8258 | 8293 | 8328 | 8362 | 8395 | 8428 | 8459 | 8491 | 8521 | 30 |
| 0,9 | 9,8551 | 8580 | 8609 | 8637 | 8664 | 8691 | 8717 | 8743 | 8768 | 8793 | 24 |
| 1,0 | 9,8817 | 8841 | 8864 | 8887 | 8909 | 8931 | 8952 | 8973 | 8994 | 9014 | 20 |
| 1,1 | 9,9034 | 9053 | 9072 | 9090 | 9108 | 9126 | 9144 | 9161 | 9177 | 9194 | 16 |
| 1,2 | 9,9210 | 9226 | 9241 | 9256 | 9271 | 9285 | 9300 | 9314 | 9327 | 9341 | 13 |
| 1,3 | 9,9354 | 9367 | 9379 | 9391 | 9404 | 9415 | 9427 | 9438 | 9450 | 9460 | 11 |
| 1,4 | 9,9471 | 9482 | 9492 | 9502 | 9512 | 9522 | 9531 | 9540 | 9550 | 9558 | 9 |
| 1,5 | 9,9567 | 9576 | 9584 | 9592 | 9601 | 9608 | 9616 | 9624 | 9631 | 9639 | 7 |
| 1,6 | 9,9646 | 9653 | 9660 | 9666 | 9673 | 9679 | 9686 | 9692 | 9698 | 9704 | 6 |
| 1,7 | 9,9710 | 9716 | 9721 | 9727 | 9732 | 9738 | 9743 | 9748 | 9753 | 9758 | 5 |
| 1,8 | 9,9763 | 9767 | 9772 | 9776 | 9781 | 9785 | 9789 | 9794 | 9798 | 9802 | 4 |
| 1,9 | 9,9806 | 9810 | 9813 | 9817 | 9821 | 9824 | 9828 | 9831 | 9834 | 9838 | 3 |
| 2,0 | 9,9841 | 9844 | 9847 | 9850 | 9853 | 9856 | 9859 | 9862 | 9864 | 9867 | 3 |
| 2,1 | 9,9870 | 9872 | 9875 | 9877 | 9880 | 9882 | 9884 | 9887 | 9889 | 9891 | 2 |
| 2,2 | 9,9893 | 9895 | 9898 | 9900 | 9902 | 9904 | 9905 | 9907 | 9909 | 9911 | 2 |
| 2,3 | 9,9913 | 9914 | 9916 | 9918 | 9919 | 9921 | 9923 | 9924 | 9926 | 9927 | 2 |

# Tabelle

## der wichtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung.

1.) $\lim\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1.$ [§ 4, Gl. (5.)]

2.) $\lim (X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y.$ [§ 5, Gl. (1.)]

3.) $\lim (X \,.\, Y) = \lim X \,.\, \lim Y.$ [§ 5, Gl. (2.)]

4.) $\lim \left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{\lim X}{\lim Y}$, wenn $\lim Y \gtrless 0$ ist. [§ 5, Gl. (3.)]

5.) Eine Funktion

$$y = f(x)$$

heißt für solche Werte von $x$ stetig, für welche die Differenz

$$\varDelta = f(x + \varepsilon) - f(x - \delta)$$

mit den positiven Größen $\delta$ und $\varepsilon$ zugleich unendlich klein wird. [§ 8. Gl. (11.)]

6.) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}.$ [§ 9, Gl. (1.)]

7.) $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$ [§ 9, Gl. (2.)]

8.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$ [§ 9, Gl. (4.)]

9.) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$ [§ 9, Gl. (5.)]

Die Formel Nr. 9 gilt nur unter der Voraussetzung, daß $n$ eine positive, ganze Zahl ist.

$$10.)\quad (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots$$
$$+ \binom{m}{m-2}x^{m-2} + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m$$
$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots$$
$$+ \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{1}x^{m-1} + x^m.$$

[§ 9, Gl. (6.) und Gl. (8.)]

$$11.)\quad (a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots$$
$$+ \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m.$$

[§ 9, Gl. (9.) und § 34, Gl. (5.)]

Bei den Formeln Nr. 10 und 11 wird vorausgesetzt, daß $m$ eine *positive*, *ganze* Zahl ist.

$$12.)\quad S = A + Aq + Aq^2 + \cdots + Aq^{n-1} = \frac{A(1-q^n)}{1-q}.$$

[§ 10, Gl. (1.) und (2.)]

12a.) Ist $q$ ein positiver oder negativer echter Bruch, und wird $n$ unendlich groß, so ist

$$S = A + Aq + Aq^2 + Aq^3 + \cdots = \frac{A}{1-q}.$$ [§ 10, Gl. (5.)]

$$13.)\quad {x_1}^{n-1} + x{x_1}^{n-2} + x^2{x_1}^{n-3} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1} = \frac{{x_1}^n - x^n}{x_1 - x}.$$

[§ 10, Gl. (3.) und (4.)]

$$14.)\quad e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} S_k + \lim_{n=\infty} S_k',$$

wo

$$\lim_{n=\infty} S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!},$$

$$\lim_{n=\infty} S_k' < \frac{1}{k!\,k},\quad \lim_{n=\infty} S_k < e < \lim_{n=\infty} S_k + \frac{1}{k!\,k}.$$

[§ 11, Gl. (2.), (5.), (7.), (11.) und (12.)]

$$15.)\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
$$= 2{,}718\,281\,828\,459\ldots.$$ [§ 11, Gl. (13.) und (14.)]

16.) Die Ableitung (der Differential-Quotient) einer stetigen Funktion $y = f(x)$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$ [§ 12, Gl. (5.), (5a.), (5b.) und (6.)]

17.) Ist $\alpha$ der Winkel, welchen die Tangente einer Kurve mit der positiven Richtung der $X$-Achse bildet, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

wobei $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve und $x$, $y$ die Koordinaten des Berührungspunktes sind. [§ 13, Gl. (3.)]

18.) $\dfrac{d(y + C)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}.$ [§ 14, Gl. (1a.)]

19.) $\dfrac{d(Ay)}{dx} = A\dfrac{dy}{dx}.$ [§ 14, Gl. (2a.)]

20.) $\dfrac{d(u + v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}.$ [§ 14, Gl. (3.)]

21.) $\dfrac{d(u - v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}.$ [§ 14, Gl. (4.)]

22.) $\dfrac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$ [§ 15, Gl. (6.) und Gl. (9.); § 16, Gl. (8.); § 21, Gl. (17.), (22a.) und (26.)]

23.) $\dfrac{d(\log x)}{dx} = \dfrac{\log e}{x}$; $\dfrac{d(\ln x)}{dx} = \dfrac{1}{x}.$ [§ 18, Gl. (9.) und (9a.)]

24.) $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln(10)} = \ln x \,.\, \log e.$ [§ 18. Gl. (13.) und (14.)]

25.) $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$ [§ 19, Gl. (8.)]

26.) $\dfrac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$ [§ 19, Gl. (15.)]

27.) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$ [§ 20, Gl. (6.)]

28.) $\dfrac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$ [§ 20, Gl. (12.)]

29.) $\dfrac{d(uv)}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$. [§ 21, Gl. (6a.)]

30.) $\dfrac{d(u_1 u_2 \ldots u_m)}{dx} =$

$$u_2 u_3 \ldots u_m \frac{du_1}{dx} + u_1 u_3 \ldots u_m \frac{du_2}{dx} + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1} \frac{du_m}{dx}.$$

[§ 21, Gl. (16.)]

30a.) $\dfrac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\dfrac{du}{dx}$. [§ 21, Gl. (17.), (22.) und (26.); § 23, Gl. (4.)]

31.) $\dfrac{d\sqrt{a^2+x^2}}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. [§ 21, Gl. (27.)]

32.) $\dfrac{d\sqrt{x^2-a^2}}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. [§ 21, Gl. (27a.)]

33.) $\dfrac{d\sqrt{a^2-x^2}}{dx} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. [§ 21, Gl. (28.)]

34.) $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$. [§ 21, Gl. 34a.)]

35.) $dy = df(x) = f'(x)dx$. [§ 22, Gl. (8.)]

36.) Ist

$$y = f(u) \quad \text{und} \quad u = \varphi(x),$$

so wird

$$du = \varphi'(x)dx, \quad dy = f'(u)du = f'(u)\varphi'(x)dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$ [§ 22, Gl. (6.), (6a.) und (9.)]

37.) Aus $x = \varphi(y)$ folgt $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$. [§ 24, Gl. (4.)]

38.) $\dfrac{d(\arcsin x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 24, Gl. (8a.)]

39.) $\dfrac{d(\arccos x)}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 24, Gl. (12a.)]

40.) $\dfrac{d(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$. [§ 24, Gl. (16a.)]

41.) $\dfrac{d(\operatorname{arc\,ctg} x)}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$. [§ 24, Gl. (20a.)]

42.) $\dfrac{d(\operatorname{arc\,sec} x)}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. [§ 24, Gl. (24a.)]

43.) $\dfrac{d(\operatorname{arc\,cosec} x)}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. [§ 24, Gl. (28a.)]

44.) $\dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a, \quad \dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$. [§ 24, Gl. (32a.) und (33.)]

45.) $\mathfrak{Cof}\, u = \dfrac{1}{2}(e^u + e^{-u})$. [§ 26, Gl. (1.)]

46.) $\mathfrak{Sin}\, u = \dfrac{1}{2}(e^u - e^{-u})$. [§ 26, Gl. (1.)]

47.) $\mathfrak{Tg}\, u = \dfrac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cof}\, u}, \quad \mathfrak{Ctg}\, u = \dfrac{\mathfrak{Cof}\, u}{\mathfrak{Sin}\, u}$. [§ 26, Gl. (2.) und (3.)]

48.) $\mathfrak{Sec}\, u = \dfrac{1}{\mathfrak{Cof}\, u}, \quad \mathfrak{Cofec}\, u = \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}\, u}$. [§ 26, Gl. (4.)]

49.) $e^u = \dfrac{1 + \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}$. [§ 26, Gl. (5.)]

50.) $\mathfrak{Cof}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = e^u$. [§ 26, Gl. (8.)]

51.) $\mathfrak{Cof}\, u - \mathfrak{Sin}\, u = e^{-u}$. [§ 26, Gl. (9.)]

52.) $\mathfrak{Cof}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1$. [§ 26, Gl. (10.)]

52a.) $\mathfrak{Cof}^2 u = 1 + \mathfrak{Sin}^2 u, \quad \mathfrak{Sin}^2 u = \mathfrak{Cof}^2 u - 1$. [§ 26, Gl. (11.) und (12.)]

53.) $\mathfrak{Sin}(2u) = 2\,\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u$. [§ 26, Gl. (13.)]

54.) $\mathfrak{Cof}(2u) = \mathfrak{Cof}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u = 2\,\mathfrak{Cof}^2 u - 1 = 1 + 2\,\mathfrak{Sin}^2 u$.
[§ 26, Gl. (14.) und (15.)]

55.) $\mathfrak{Sec}^2 u + \mathfrak{Tg}^2 u = 1$. [§ 26, Gl. (16.)]

56.) $\mathfrak{Ctg}^2 u - \mathfrak{Cofec}^2 u = 1$. [§ 26, Gl. (17.)]

57.) $\mathfrak{Sin}(2u) = \dfrac{2\,\mathfrak{Tg}\, u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}$. [§ 26, Gl. (19.)]

58.) $\mathfrak{Cof}(2u) = \dfrac{1 + \mathfrak{Tg}^2 u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}$. [§ 26, Gl. (20.)]

59.) $\mathfrak{Cof}(u + v) = \mathfrak{Cof}\, u \,.\, \mathfrak{Cof}\, v + \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v$. [§ 26, Gl. (23.)]

60.) $\mathfrak{Cof}(u - v) = \mathfrak{Cof}\, u \,.\, \mathfrak{Cof}\, v - \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v.$ [§ 26, Gl. (24.)]

61.) $\mathfrak{Sin}(u + v) = \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Cof}\, v + \mathfrak{Cof}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v.$ [§ 26, Gl. (31.)]

62.) $\mathfrak{Sin}(u - v) = \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Cof}\, v - \mathfrak{Cof}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v.$ [§ 26, Gl. (32.)]

63.) $\mathfrak{Cof}\, a + \mathfrak{Cof}\, b = 2\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot$ [§ 26, Gl. (27.)]

64.) $\mathfrak{Cof}\, a - \mathfrak{Cof}\, b = 2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot$ [§ 26, Gl. (28.)]

65.) $\mathfrak{Sin}\, a + \mathfrak{Sin}\, b = 2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot$ [§ 26, Gl. (33.)]

66.) $\mathfrak{Sin}\, a - \mathfrak{Sin}\, b = 2\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot$ [§ 26, Gl. (34.)]

67.) $\mathfrak{Tg}\, a - \mathfrak{Tg}\, b = \frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Cof}\, a \,.\, \mathfrak{Cof}\, b} \cdot$ [§ 26, Gl. (35.)]

68.) $\mathfrak{Ctg}\, a - \mathfrak{Ctg}\, b = -\frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Sin}\, a \,.\, \mathfrak{Sin}\, b} \cdot$ [§ 26, Gl. (36.)]

69.) $\frac{d(\mathfrak{Cof}\, u)}{du} = \mathfrak{Sin}\, u.$ [§ 27, Gl. (3.)]

70.) $\frac{d(\mathfrak{Sin}\, u)}{du} = \mathfrak{Cof}\, u.$ [§ 27, Gl. (4.)]

71.) $\frac{d(\mathfrak{Tg}\, u)}{du} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 u} = 1 - \mathfrak{Tg}^2 u.$ [§ 27, Gl. (5.)]

72.) $\frac{d(\mathfrak{Ctg}\, u)}{du} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 u} = 1 - \mathfrak{Ctg}^2 u.$ [§ 27, Gl. (6.)]

73.) $x = \mathfrak{Cof}\, u$ ist gleichbedeutend mit

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$ [§ 29, Gl. (18.)]

74.) $x = \mathfrak{Sin}\, u$ ist gleichbedeutend mit

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$ [§ 29, Gl. (19.)]

75.) $x = \mathfrak{Tg}\, u$ ist gleichbedeutend mit

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot$$ [§ 29, Gl. (20.)]

76.) $x = \mathfrak{Ctg}\, u$ ist gleichbedeutend mit

$$u = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot$$ [§ 29, Gl. (21.)]

77.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x)}{dx} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. [§ 29, Gl. (22.)]

78.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, [§ 29, Gl. (23.)]

79.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$. [§ 29, Gl. (24.)]

80.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$. [§ 29, Gl. (25.)]

81.) Setzt man

$$\mathfrak{Sin}\,u = \operatorname{tg}\vartheta,$$

so wird für $0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Sin}\,u &= \operatorname{tg}\vartheta, & \mathfrak{Tg}\,u &= \sin\vartheta,\\
\mathfrak{Cof}\,u &= \sec\vartheta, & \mathfrak{Sec}\,u &= \cos\vartheta,\\
\mathfrak{Ctg}\,u &= \operatorname{cosec}\vartheta, & \mathfrak{Cofec}\,u &= \operatorname{ctg}\vartheta,
\end{aligned}$$

$$u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right].$$ [§ 30, Gl. (9.) und (10.)]

82.) $f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx},\ f'''(x) = \dfrac{df''(x)}{dx},\ \cdots f^{(n)}(x) = \dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx}$.

[§ 31, Gl. (2.) und (3.)]

82a.) $f''(x) = \lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}$. [§ 31, Gl. (7.)]

83.) $$\begin{aligned}
d^2y &= d(dy) = f''(x)dx^2,\\
d^3y &= d(d^2y) = f'''(x)dx^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d^ny &= d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.
\end{aligned}$$ [§ 31, Gl. (11.) bis (14.)]

84.) $\dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$. [§ 31, Gl. (14a.)]

85.) $\dfrac{d^n(u\pm v)}{dx^n} = \dfrac{d^nu}{dx^n} \pm \dfrac{d^nv}{dx^n}$. [§ 32, Aufgabe 13.]

86.) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}f'(x)g^{(n-1)}(x)$$
$$+\binom{n}{2}f''(x)g^{(n-2)}(x) + \cdots + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x) + f^{(n)}(x)g(x),$$

wenn $u = f(x)$, $v = g(x)$ ist. [§ 32, Aufgabe 14.]

87.) Sind die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ im Intervalle von $a$ bis $a+h$ stetig und endlich, so wird

$$f(a+h)-f(a)=h\,.\,f'(a+\Theta h),$$

oder

$$f(x)-f(a)=(x-a)\,.\,f'[a+\Theta(x-a)],\quad \text{wobei}\quad 0<\Theta<+1.$$

[§ 36, Gl. (9.) und (11.)]

88.) $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R,$$

wobei

$$R=\frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_1(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}[a+\Theta_2(x-a)]-f^{(n)}(a)\right\}(x-a)^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_3(x-a)]}{n!}(1-\Theta_3)^n(x-a)^{n+1}.$$

Die Größen $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ liegen zwischen 0 und 1.

[§ 37, Gl. (23.) und (24.); § 42, Gl. (5.) und (17.)]

89.) $$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R,$$

wobei

$$R=\frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta_2 h)-f^{(n)}(x)]h^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_3 h)}{n!}(1-\Theta_3)^n h^{n+1}.$$

Die Größen $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ liegen zwischen 0 und 1.

[§ 37, Gl. (25.) und (26.); § 42, Gl. (3a.) und (15.)]

90.) $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R,$$

wobei

$$R=\frac{f^{(n+1)}(\Theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(\Theta_2 x)-f^{(n)}(0)]x^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\Theta_3 x)}{n!}(1-\Theta_3)^n x^{n+1}.$$

Die Größen $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ liegen zwischen 0 und 1.

[§ 38, Gl. (1.) und (2.); § 42, Gl. (7.) und (19.)]

90a.) $f(x) - f(0) = x \,.\, f'(\Theta x).$ [§ 38, Gl. (3.)]

91.) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$ [§ 39, Gl. (6.)]

92.) $\mathfrak{Cof}\, u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \cdots.$ [§ 39, Gl. (9.)]

93.) $\mathfrak{Sin}\, u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots.$ [§ 39, Gl. (10.)]

94.) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \frac{x^4(\ln a)^4}{4!} + \cdots.$ [§ 39, Gl. (13.)]

95.) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots.$ [§ 40. Gl. (5.)]

96.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.$ [§ 40, Gl. (10.)]

In den Formeln 91 bis 96 dürfen $x$ und $u$ jeden beliebigen endlichen Wert haben.

97.) $(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$

für $-1 < x < +1.$ [§ 43, Gl. (19.) und (20.)]

98.) $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots$

für $|b| < |a|.$ [§ 43, Gl. (31.)]

99.) $(a+b)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{3}a^3b^{m-3} + \cdots$

für $|b| > |a|.$ [§ 43, Gl. (32.)]

100.) $\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$

für $-1 < x \leqq +1.$ [§ 44, Gl. (8.)]

101.) $\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots.$ [§ 44, Gl. (8a.)]

102.) $\ln(a + y) = \ln a + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots$

für $|y| < |a|.$ [§ 44, Gl. (9.)]

103.) $\ln(a+1) = \ln a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^4} + - \cdots.$

[§ 44, Gl. (9a.)]

104.) $\ln(y+z) = \ln y + 2\left[\frac{z}{2y+z} + \frac{z^3}{3(2y+z)^3} + \frac{z^5}{5(2y+z)^5} + \cdots\right]$

für $-1 < \frac{z}{2y+z} < +1.$ [§ 44, Gl. (12.)]

105.) $\ln(y+1) = \ln y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right].$

[§ 44, Gl. (12a.)]

106.) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$

für $-1 < x < +1.$ [§ 48, Gl. (4.)]

107.) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots.$

[§ 49, Gl. (1.) und § 53, Beispiel 2 auf Seite 250.]

108.) $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots.$

[§ 49, Gl. (14.)]

109.) $\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + - \cdots\right).$

[§ 49, Gl. (23.)]

110.) $\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$

für $-1 < x < +1.$ [§ 50, Gl. (3.)]

111.) Eine Reihe heißt „*konvergent*“, wenn $S_n$, die Summe der $n$ ersten Glieder, sich mit unbegrenzt wachsendem $n$ einer bestimmten, endlichen Grenze $S$ nähert, welche die „*Summe der Reihe*“ genannt wird. [§ 51.]

112.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *konvergiert*, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1,$

II. $\sqrt[n]{u_n} \leqq k < 1,$

III. $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqq p > 1.$ [§ 52, Satz 5, 7 und 12.]

113.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *divergiert*, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1,$

II. $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1,$

III. $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqq 1.$ [§ 52, Satz 6, 8 und 13.]

114.) Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert.

[§ 53, Satz 1; vergl. auch Formel Nr. 116.]

115.) Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn der absolute Betrag der einzelnen Glieder immer kleiner und schließlich unendlich klein wird. [§ 53, Satz 2.]

116.) Eine Reihe ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert.

[§ 54, letzter Satz und 106, Satz 1.]

117.) Sind

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \text{und} \quad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, und ist

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \end{aligned}$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt konvergent, und ihre Summe $W$ ist gleich dem Produkte $UV$ der Summe der beiden ersten Reihen.

[§ 55, Satz 3 und 106, Satz 3.]

118.) Eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ konvergiert unbedingt für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe $r$, wenn

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

wird. [§ 57, Satz 1.]

119.) Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von $x$, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe $r$, wenn von einer bestimmten Stelle ab

$$|a_n| r^n \leqq g$$

ist, wobei $g$ eine bestimmte endliche Größe bedeutet. [§ 57, Satz 3.]

120.) Wenn die Größen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiv sind und eine bis ins unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, so ist die Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots$$

konvergent für alle Werte von $x$, welche von $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ verschieden sind; und die Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) - a_3 \cos(3x) + - \cdots$$

ist konvergent für alle Werte von $x$, welche von $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi \ldots$ verschieden sind. [§ 58, Satz 1.]

121.) Wenn die Größen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiv sind und eine bis ins unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, so sind die Reihen

$$b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \cdots$$

und

$$b_1 \sin x - b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) - b_4 \sin(4x) + - \cdots$$

für alle Werte von $x$ konvergent. [§ 58, Satz 2.]

122.) Um die Werte von $x$ zu bestimmen, für welche $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, bestimme man die Werte von $x$, für welche $f'(x)$ gleich Null wird. Ein solcher Wert sei $x$, und $f^{(n)}(x)$ sei die erste spätere Ableitung, welche für diesen Wert von $x$ nicht verschwindet; dann ist $f(x)$ ein *Maximum*, wenn *$n$ gerade* und *$f^{(n)}(x)$ negativ* ist; $f(x)$ ist ein *Minimum*, wenn *$n$ gerade* und *$f^{(n)}(x)$ positiv* ist. Dagegen *tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn $n$ ungerade ist.* [§ 61.]

123.) Ist

$$f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

so wird für alle Werte von $x$, für welche $P(x)$ verschwindet,

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}. \qquad \text{[§ 63, Gl. (3.)]}$$

124.) $$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)},$$

wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = 0,$$
$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = 0;$$

[§ 65, Gl. (19.), (20.) und (24.)]

oder wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = \infty,$$
$$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} f'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = \infty.$$

[§ 67, Gl. (12.)]

125.) Ist

$$z = F(u, v),$$

so wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\varDelta u=0} \frac{F(u + \varDelta u, v) - F(u, v)}{\varDelta u} = F_1(u, v),$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\varDelta v=0} \frac{F(u, v + \varDelta v) - F(u, v)}{\varDelta v} = F_2(u, v).$$

[§ 76, Gl. (5.) und (6.), (5a.) und (6a.)]

126.) Ist

$$z = F(u, v),$$

und sind $u$ und $v$ beide Funktionen von $x$, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \qquad \text{[§ 76, Gl. (16.) und (16a.)]}$$

127.) $$\frac{d \ln(uv)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}. \qquad \text{[§ 76, Gl. (24.)]}$$

128.) $$\frac{d \ln\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}. \qquad \text{[§ 76, Gl. (26.)]}$$

129.) $$\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \, . \ln u \frac{dv}{dx} \cdot$$ [§ 76, Gl. (28.)]

130.) Ist $z = F(x, y)$ und $y = f(x)$, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

oder

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx},$$

also

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

oder

$$dF(x, y) = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy.$$

[§ 77, Gl. (6.) und (7.)]

131.) Ist $F(x, y) = 0$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} \cdot$$ [§ 77, Gl. (12.)]

132.) $$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}p.$$ [§ 79, Gl. (2a.)]

133.) $$r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}p.$$ [§ 79, Gl. (3a.)]

134.) Sind $x$ und $y$ so bestimmt, daß

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(x, y) = 0$$

werden, so ist $y$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $F_2$ und $F_{11}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 81.]

134a.) Sind $x$ und $y$ so bestimmt, daß

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = 0$$

werden, so ist $x$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $F_1$ und $F_{22}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 81.]

135.) Ist $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx},$$

oder

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

[§ 83, Gl. (11.), (12.), (12a.) und (12b.)]

136.) $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ und $q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$ [§ 85, Gl. (4.) und (7.)]

137.) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{q}{p^3}$, $\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{pr - 3q^2}{p^5}.$

[§ 85, Gl. (5.) und (8.)]

138.) Gleichung der Tangente:

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$ [§ 87, Gl. (6.)]

139.) Gleichung der Normale:

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$ [§ 87, Gl. (7.)]

140.) Subnormale $(Sn) = y\frac{dy}{dx}.$ [§ 87, Gl. (9.)]

141.) Subtangente $(St) = y\frac{dx}{dy}.$ [§ 87, Gl. (10.)]

142.) $ds^2 = dx^2 + dy^2,$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$ [§ 87. Gl. (13.) und (13a.)]

143.) Normale $(N) = y\frac{ds}{dx}.$ [§ 87, Gl. (14.)]

144.) Tangente $(T) = y\frac{ds}{dy} = N\frac{dx}{dy}.$ [§ 87, Gl. (14.)]

145.) Eine Kurve $y = f(x)$ ist nach oben konkav oder konvex, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ größer oder kleiner als Null ist. Vorausgesetzt ist, daß die positive Richtung der $Y$-Achse nach oben geht; wird das Koordinaten-System um $180^0$ gedreht, so muß man das Wort „*oben*" mit „*unten*" vertauschen.

[§ 89, Gl. (10.) und (12.)]

146.) Ein Wendepunkt tritt ein, wenn für den zugehörigen Wert von $x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \infty$$

wird und außerdem das Zeichen wechselt. [§ 89.]

147.) Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen

$$f(x),\ \ f'(x),\ \ f''(x), \ldots f^{(n+1)}(x),$$
$$g(x),\ \ g'(x),\ \ g''(x), \ldots g^{(n+1)}(x)$$

endlich und stetig sind für den betrachteten Wert von $x$, haben zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Punkte $P$ eine Berührung (oder Oskulation) von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn für den zugehörigen Wert von $x$

$$f(x) = g(x),\, f'(x) = g'(x),\, f''(x) = g''(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

[§ 91.]

148.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 p}{q},$$

$$\eta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q},$$

oder

$$\xi = x - \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = x - \frac{ds^2 dy}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = y + \frac{ds^2\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

[§ 92, Gl. (21.) und (25.)]; § 94.]

149.) Der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q},$$

oder

$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = \pm \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

[§ 92, Gl. (21.) und (25.); § 94.]

150.) Der Krümmungskreis hat im Punkte $P$ mit der Kurve eine Berührung dritter Ordnung, wenn

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\varrho^2(x-\xi)}{(y-\eta)^5}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5}.$$

[§ 92, Gl. (23.) und (23a.)]

151.) Der Kontingenzwinkel $d\alpha$ wird erklärt durch die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho}.$$ [§ 93, Gl. (9.) und (11.)]

152.) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. [§ 98, Gl. (6.)]

153.) Nennt man den Winkel, den eine Tangente mit dem zugehörigen Radius vector bildet, $\mu$, so ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$ [§ 98, Gl. (7a.)]

154.) Polar-Subnormale $(Sn) = \frac{dr}{d\varphi}$. [§ 98, Gl. (10.)]

155.) Polar-Subtangente $(St) = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$. [§ 98, Gl. (11.)]

156.) Polar-Normale $(N) = \frac{ds}{d\varphi}$. [§ 98, Gl. (12.)]

157.) Polar-Tangente $(T) = N . \operatorname{tg} \mu = \frac{r ds}{dr}$. [§ 98, Gl (13.)]

158.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{ds^2 dy}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

$$= r \cos\varphi - \frac{ds^2 (r\cos\varphi\, d\varphi + dr . \sin\varphi)}{(r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - r d^2r)\, d\varphi},$$

$$\eta = y + \frac{ds^2 dx}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

$$= r\sin\varphi + \frac{ds^2(- r\sin\varphi\, d\varphi + dr . \cos\varphi)}{(r^2 d\varphi^2 + 2\, dr^2 - r d^2r)\, d\varphi},$$

und der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \pm \frac{ds^3}{(r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)\, d\varphi}.$$

[§ 100, Gl. (8.) und (9.)]

159.) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$ [§ 102, Gl. (2.)]

160.) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$ [§ 102, Gl. (3.)]

161.) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$ [§ 102, Gl. (4.)]

162.) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 102. Gl. (5.)]

163.) $N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 102, Gl. (8.)]

164.) $|a + bi| = |a - bi| = + \sqrt{a^2 + b^2}.$ [§ 102, Gl. (9.)]

165.) $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$ [§ 102, Gl. (10.)]

166.) $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$ [§ 102, Gl. (11.)]

167.)
$$(a + bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - + \cdots\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + - \cdots\right] i.$$

[§ 102, Gl. (12.)]

168.)
$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wobei

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

oder

$$a + bi = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)],$$

wobei $h$ eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl ist.

[§ 103, Gl. (5.), (6.), (7.) und (7a.)]

169.) $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$ [§ 103, Gl. (8.)]

170.) $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$

[§ 103, Gl. (10.)]

171.) $$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots,$$

$$\sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots.$$

[§ 103, Gl. (11.) und (12.)]

172.) $$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

[§ 103, Gl. (13.)]

173.) $$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$$

wobei $h$ eine beliebige ganze Zahl ist. [§ 103, Gl. (16.)]

174.) Ist $f(z) = f(x + yi) = u + vi$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen $x + yi$, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$ [§ 107, Gl. (7.)]

175.) $e^{yi} = \cos y + i\sin y, \quad e^{-yi} = \cos y - i\sin y.$

[§ 108, Gl. (6.) und (7.)]

176.) $\cos y = \dfrac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \dfrac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$ [§ 108, Gl. (8.)]

177.) $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y).$ [§ 108, Gl. (9.)]

178.) $e^{2h\pi i} = 1$, wenn $h$ eine ganze Zahl ist. [§ 108, Gl. (16.)]

179.) $e^{z+2h\pi i} = e^z$, wenn $h$ eine ganze Zahl ist. [§ 108, Gl. (17.)]

180.) $\mathfrak{Cof}(\varphi i) = \cos\varphi, \quad \mathfrak{Sin}(\varphi i) = i\sin\varphi.$

[§ 108, Gl. (18.) und (19.)]

181.) $\cos(\varphi i) = \mathfrak{Cos}\,\varphi, \quad \sin(\varphi i) = i\,\mathfrak{Sin}\,\varphi.$

[§ 108, Gl. (20.) und (21.)]

182.)
$$2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} =$$
$$2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi +$$
$$\cdots + \binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}.$$
[§ 108, Gl. (24.)]

183.)
$$2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1} 2\cos(2n-1)\varphi +$$
$$\cdots + \binom{2n+1}{n-1} 2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n} 2\cos\varphi.$$
[§ 108, Gl. (25.)]

184.)
$$(-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} =$$
$$2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi - +$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + (-1)^n \binom{2n}{n}.$$
[§ 108, Gl. (26.)]

185.)
$$(-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1} 2\sin(2n-1)\varphi + -$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1} 2\sin(3\varphi) + (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2\sin\varphi.$$
[§ 108, Gl. (27.)]

186.) Aus der Gleichung
$$e^{x+yi} = u + vi \quad \text{folgt} \quad \ln(u+vi) = x + yi + 2h\pi i.$$
Dabei ist $h$ eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl und
$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \quad y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\right),$$
und zwar ist
$$0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn} \quad u > 0,\ v > 0,$$
$$\frac{\pi}{2} < y < \pi, \quad \text{„} \quad u < 0,\ v > 0,$$

$$\pi < y < \frac{3\pi}{2}, \quad \text{wenn} \quad u < 0,\ v < 0,$$

$$\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi, \quad \text{„} \quad u > 0,\ v < 0.$$

[§ 109, Gl. (1.), (3.) und (6.)]

187.) $\ln(-1) = (2h+1)\pi i.$ [§ 109, Gl. (8.)]

188.) $\ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg}\varphi.$ [§ 110, Gl. (4.)]

189.) $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\varphi i) = i \operatorname{arctg}\varphi, \quad \operatorname{arctg}(\varphi i) = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varphi.$

[§ 110, Gl. (6.) und (8.)]

190.) Hat die Gleichung

$$f(x) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \mathfrak{f}_3 x^{n-3} + - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so ist

$$\mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$$
$$\mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{f}_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n.$$

[§ 114, Gl. (6.) und (9.)]

191.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}y_2$$
$$+ \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$
$$= \frac{f(x)\cdot y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{f(x)\cdot y_2}{(x-x_2)f'(x_2)} + \cdots + \frac{f(x)\cdot y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}$$

nimmt für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ an. Dabei ist

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n).$$

(Interpolationsformel von *Lagrange*. [§ 115, Gl. (2.), (3.) und (6.)]

192.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$y = y_1 + A_1(x-x_1) + A_2(x-x_1)(x-x_2) + A_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) +$$
$$\cdots + A_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

nimmt für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ an, wenn man die Koeffizienten $A_1$, $A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ der Reihe nach aus den Gleichungen

$$y_2 = y_1 + A_1(x_2 - x_1),$$
$$y_3 = y_1 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$
$$x_4 = y_1 + A_1(x_4 - x_1) + A_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$$
$$+ A_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

berechnet. [§ 116, Gl. (1.) bis (5.)]

193.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$y = y_1 + \frac{\Delta y_1 . (x - x_1)}{1!\,h} + \frac{\Delta^2 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)}{2!\,h^2}$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\,h^3} + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^{n-1} y_1 . (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(n-1)!\,h^{n-1}}$$

nimmt für $x = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots y_n$ an, wenn

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

ist, und wenn man

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,\quad \Delta y_2 = y_3 - y_2,\quad \Delta y_3 = y_4 - y_3, \ldots,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,\quad \Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3, \ldots,$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\quad \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2,\quad \Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3, \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt.

(Interpolationsformel von *Newton.*) [§ 116, Gl. (12.) bis (16.) und (35.)]

194.) Ist $\vartheta(x)$ der höchste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, so hat die Gleichung

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = 0$$

dieselben Wurzeln wie die Gleichung $f(x) = 0$, aber jede nur einmal. [§ 118, Gl. (8.)]

195.) Ist $\varrho(x)$ der höchste gemeinsame Teiler von $\dfrac{f(x)}{\vartheta(x)}$ und $f'(x)$, so enthält die Gleichung

$$\varrho(x) = 0$$

nur die mehrfachen Wurzeln von $f(x) = 0$, und jede nur einmal. [§ 118, Gl. (9.)]

196.) Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x) \cdot \varrho(x)} = 0$$

enthält nur die einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$. [§ 118, Gl. (10.)]

197.) Ist in der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots - b_m x^{n-m} \pm \cdots - b_p x^{n-p} \pm \cdots \pm a_n = 0$$

$-b_m$ der *erste* und $-b_p$ dem absoluten Betrage nach der *größte* negative Koeffizient, so ist

$$L = 1 + \sqrt[m]{b_p}$$

die obere Grenze aller reellen Wurzeln. [§ 119, Gl. (7.)]

198.) Die Anzahl der *positiven* Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel, und die Anzahl der *negativen* Wurzeln derselben Gleichung kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Gleichung

$$f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + - \cdots \mp a_{n-1} x \pm a_n = 0.$$

Dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel und der Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ eine gerade Zahl. Dasselbe gilt natürlich für die Gleichung $f_1(x) = 0$. (*Cartesi*sche Zeichenregel.) [§ 120, Satz 3.]

199.) Hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln und ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= Q_1(x) \cdot f'(x) - f_2(x), \\
f'(x) &= Q_2(x) \cdot f_2(x) - f_3(x), \\
f_2(x) &= Q_3(x) \cdot f_3(x) - f_4(x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{\mu-2}(x) &= Q_{\mu-1}(x) \cdot f_{\mu-1}(x) - f_\mu(x), \\
f_{\mu-1}(x) &= Q_\mu(x) \cdot f_\mu(x),
\end{aligned}$$

wobei $f_\mu(x)$ eine Konstante ist, so liegen zwischen $x_1$ und $x_2$ genau so viele reelle Wurzeln, wie die Reihe

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x_1), \ldots f_3(x_1),\ f_2(x_1),\ f'(x_1),\ f(x_1)$$

Zeichenwechsel mehr hat als die Reihe

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x_2),\ \ldots f_3(x_2),\ f_2(x_2),\ f'(x_2),\ f(x_2).$$ [§ 121.]

200.) Sind die Zahlen $a$ und $b$ so bestimmt, daß zwischen $a$ und $b$ nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, und daß die Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ in diesem Intervalle keine Wurzel haben, so setze man

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \qquad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')}, \qquad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}, \qquad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

je nachdem $f'(a)$ und $f''(a)$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Die Intervalle von $a$ bis $b$, $a'$ bis $b'$, $a''$ bis $b''$,... werden immer kleiner und schließlich beliebig klein.

[§ 122, Gl. (9.), (14.), (20.) und (27.)]

201.) Die Asymptoten $y' = mx' + \mu$ einer Kurve

$$F(x, y) = U_n(x, y) + U_{n-1}(x, y) + \cdots + U_1(x, y) + U_0 = 0$$

findet man, indem man die $n$ Werte von $m$ aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_n(x, y)}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{ay^n + a_1xy^{n-1} + a_2x^2y^{n-2} + \cdots + a_nx^n}{x^n}$$

$$= am^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ausrechnet und darauf aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-1}} = 0$$

die zugehörigen Werte von $\mu$ bestimmt.

Sind $\alpha$ Werte von $m$ einander gleich, so liegen möglicherweise etliche von den zugehörigen Asymptoten im Unendlichen. Ist das nicht der Fall, so findet man die $\alpha$ zugehörigen Werte von $\mu$ aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-\alpha}} = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Vertauschung von $x$ mit $y$ auch die Asymptoten, wenn die Gleichung derselben die Form $x' = ly + \lambda$ hat. [§ 124 und 125.]

202.)
$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \dots a_{n\nu},$$

wo

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \dots \nu \\ 1\ 2\ 3 \dots n \end{pmatrix}$$

die Transpositionszahl zwischen den Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ und $1\,2\,3 \dots n$ ist, und wo sich die Summation über alle $n!$ Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ der Zahlen $1\,2\,3 \dots n$ erstreckt.

[§ 129, Gl. (1.) und (2.)]

203.)
$$\begin{vmatrix} a_{f\alpha}\ a_{f\beta}\ a_{f\gamma} \dots a_{f\nu} \\ a_{g\alpha}\ a_{g\beta}\ a_{g\gamma} \dots a_{g\nu} \\ a_{h\alpha}\ a_{h\beta}\ a_{h\gamma} \dots a_{h\nu} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l\alpha}\ a_{l\beta}\ a_{l\gamma} \dots a_{l\nu} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$\lambda = \begin{pmatrix} f\ g\ h \dots l \\ \alpha\ \beta\ \gamma \dots \nu \end{pmatrix}.$$

[§ 130, Satz 4 und Gleichung (9.), (10.) und (17.)]

204.) Entsteht $\varDelta_1$ aus $\varDelta$ durch Vertauschung zweier parallelen Reihen, so ist

$$\varDelta_1 = -\varDelta.$$ [§ 130, Satz 5.]

205.) Sind die Elemente zweier parallelen Reihen der Determinante identisch, so ist

$$\varDelta = 0.$$ [§ 130, Satz 6.]

206.)
$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22} \dots a_{n2} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ a_{1n}\ a_{2n} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 130, Satz 7.]

207.) Ist $\alpha_{fr}$ der Koeffizient von $a_{fr}$ in $\Delta$, so ist

$$\alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,1} & \dots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \dots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \dots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,r+1} & a_{f+1,r+2} & \dots & a_{f+1,r-1} \\ a_{f+2,r+1} & a_{f+2,r+2} & \dots & a_{f+2,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,r+1} & a_{f-1,r+2} & \dots & a_{f-1,r-1} \end{vmatrix}.$$

[§ 131, Gl. (9.) und (10.)]

208.) $\Delta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \dots + a_{nr}\alpha_{nr}$. [§ 131, Gl. (12.)]

209.) $\Delta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + \dots + a_{fn}\alpha_{fn}$. [§ 131, Gl. (13.)]

210.) $$a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + \dots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0 \text{ für } r \gtreqless s.$$
[§ 131, Gl. (14a.)]

211.) $$a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + \dots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0 \text{ für } f \gtreqless g.$$
[§ 131, Gl. (15a.)]

212.) Sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

gegeben, so wird unter der Voraussetzung, daß die Determinante $\Delta$ der Koeffizienten von Null verschieden ist,

$$\Delta \,.\, x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \dots + c_n\alpha_{nr},$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} . \, x_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & c_1 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,r-1} & c_2 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,r-1} & c_n & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[§ 132, Gl. (1.), (7.) und (7a.)]

213.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 133, Satz 1.]

214.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 133, Satz 2.]

215.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$ [§ 133, Satz 3.]

216.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ma_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & ma_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & ma_{nr} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 133, Satz 4.]

217.) $$\begin{vmatrix} ma_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ma_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$ [§ 133, Satz 5.]

218.) $$\begin{vmatrix} A_1 + B_1, & C_1, & D_1, & \dots \\ A_2 + B_2, & C_2, & D_2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n + B_n, & C_n, & D_n, & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 & \dots \\ A_2 & C_2 & D_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & C_n & D_n & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 & \dots \\ B_2 & C_2 & D_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n & C_n & D_n & \dots \end{vmatrix}.$$ [§ 133, Satz 6.]

219.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + ma_{nr}, & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 133, Satz 7.]

220.)
$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}\, b_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}\, c_{n2} \dots c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo
$$c_{fr} = a_{f1} b_{r1} + a_{f2} b_{r2} + \cdots + a_{fn} b_{rn},$$
oder
$$c_{fr} = a_{f1} b_{1r} + a_{f2} b_{2r} + \cdots + a_{fn} b_{nr},$$
oder
$$c_{fr} = a_{1f} b_{r1} + a_{2f} b_{r2} + \cdots + a_{nf} b_{rn},$$
oder
$$c_{fr} = a_{1f} b_{1r} + a_{2f} b_{2r} + \cdots + a_{nf} b_{nr}.$$
[§ 134, Gl. (6.), (7.) und (12.) bis (15.)]

221.) Ist
$$z = f(x, y)$$
eine Funktion von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$, so wird
$$\partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx, \quad \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = \partial_x z + \partial_y z.$$
[§ 137, Gl. (8.), (9.) und (14.)]

222.) Das *partielle* Differential einer Funktion
$$z = f(u_1, u_2, \dots u_n)$$
in bezug auf $u_\alpha$ ist gleich der partiellen Ableitung von $z$ nach $u_\alpha$, multipliziert mit $du_\alpha$, also
$$\partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1}\, du_1, \quad \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2}\, du_2, \dots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n}\, du_n.$$
[§ 139, Gl. (13.)]

223.) Das *vollständige* (oder *totale*) Differential von
$$z = f(u_1, u_2, \dots u_n)$$
ist
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}\, du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\, du_n,$$
und zwar gleichviel, ob $u_1, u_2, \dots u_n$ voneinander unabhängig

sind, oder ob $u_1, u_2, \ldots u_n$ selbst wieder Funktionen von einer oder von mehreren Veränderlichen sind. Wenn z. B. $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämtlich Funktionen einer Veränderlichen $t$ sind, so kann man auch schreiben

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}.$$

[§ 139, Gl. (14.), (17.) und (23.)]

224.) $$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

oder

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y).$$ [§ 140, Gl. (20.) bis (22.)]

225.) Ist

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

und sind die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander *unabhängig*, so ist

$$d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n\right)^{(m)}.$$

Diese Formel bleibt noch richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ *lineare* Funktionen einer Veränderlichen $t$ sind, wenn also

$$u_1 = a_1 t + b_1, \quad u_2 = a_2 t + b_2, \ldots u_n = a_n t + b_n;$$

dann kann man auch schreiben

$$\frac{d^m z}{dt^m} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(m)}$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} a_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} a_n\right)^{(m)}.$$

[§ 141, Gl. (20.), (33.) und (39.)]

226.) Aus der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

findet man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}.$$ [§ 142, Gl. (3.) und (4.)]

227.) Gelten die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

gemeinschaftlich, so wird

$$dx : dy : dz = (F_2 G_3 - F_3 G_2) : (F_3 G_1 - F_1 G_3) : (F_1 G_2 - F_2 G_1).$$

[§ 143, Gl. (9.)]

228.) Für das Bogenelement $ds$ einer Raumkurve erhält man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad \text{[§ 144, Gl. (3.)]}$$

229.) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel sind, welche das Bogenelement $ds$ mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet.

[§ 144, Gl. (4.)]

230.) Sind

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen einer Raumkurve, so hat die Tangente im Kurvenpunkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - z}{dz},$$

oder

$$\frac{x' - x}{F_2G_3 - F_3G_2} = \frac{y' - y}{F_3G_1 - F_1G_3} = \frac{z' - z}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

[§ 144, Gl. (13.) und (13a.)]

230a.) Sind $x$, $y$, $z$ Funktionen einer vierten Veränderlichen $t$, so hat die Tangente im Kurvenpunkte $P$ die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z' - z}{\frac{dz}{dt}}. \quad \text{[§ 144, Gl. (13b.)]}$$

231.) Gleichung der Normalebene

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0,$$

oder

$$(F_2G_3 - F_3G_2)(x' - x) + (F_3G_1 - F_1G_3)(y' - y)$$
$$+ (F_1G_2 - F_2G_1)(z' - z) = 0.$$

[§ 144, Gl. (16.) und (16a.)]

231a.) Gleichung der Normalebene

$$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} + (z' - z)\frac{dz}{dt} = 0.$$

[§ 144, Gl. (16b.)]

232.) Die Schmiegungsebene im Kurvenpunkte $P$ hat die Gleichung

$$P(x' - x) + Q(y' - y) + R(z' - z) = 0,$$

wobei

$$P = dyd^2z - dzd^2y\,,\quad Q = dzd^2x - dxd^2z\,,\quad R = dxd^2y - dyd^2x\,.$$

[§ 146, Gl. (12.) und (14.)]

233.) Die Hauptnormale hat die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{Rdy - Qdz} = \frac{y' - y}{Pdz - Rdx} = \frac{z' - z}{Qdx - Pdy}\,.$$

[§ 146, Gl. (17.)]

234.) Die Binormale hat die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{P} = \frac{y' - y}{Q} = \frac{z' - z}{R}\,. \qquad \text{[§ 146, Gl. (19.)]}$$

235.) Sind $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Winkel, welche die Binormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, so ist

$$\cos\alpha' = \frac{P}{M}\,,\quad \cos\beta' = \frac{Q}{M}\,,\quad \cos\gamma' = \frac{R}{M}\,,$$

wobei

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2. \qquad \text{[§ 146, Gl. (21.) und (22.)]}$$

236.) Sind $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ die Winkel, welche die Hauptnormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, so ist

$$\cos\alpha'' = \frac{Rdy - Qdz}{Mds}\,,\quad \cos\beta'' = \frac{Pdz - Rdx}{Mds}\,,$$

$$\cos\gamma'' = \frac{Qdx - Pdy}{Mds}\,. \qquad \text{[§ 146, Gl. (25.)]}$$

237.) Der Krümmungskreis hat die Gleichungen

$$P(x' - \xi) + Q(y' - \eta) + R(z' - \zeta) = 0\,,$$

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0\,,$$

wobei

$$x - \xi = \frac{(Rdy - Qdz)ds^2}{M^2}\,,\quad y - \eta = \frac{(Pdz - Rdx)ds^2}{M^2}\,,$$

$$z - \zeta = \frac{(Qdx - Pdy)ds^2}{M^2}\,,\quad \varrho = \pm\frac{ds^3}{M}\,.$$

[§ 147, Gl. (2.), (3.), (23.) und (25.)]

238.) Bezeichnet man mit $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel, so wird

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \pm\frac{M}{ds^3} = \frac{1}{\varrho} \qquad \text{[§ 147, Gl. (36.)]}$$

239.) Bezeichnet man mit $d\varepsilon'$ den Torsionswinkel, so wird

$$(d\varepsilon')^2 = [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2,$$

oder

$$\frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}{M^2.} = \frac{1}{\varrho'},$$

wobei $\varrho'$ der Halbmesser der zweiten Krümmung ist.

[§ 147, Gl. (40.), (44.) und (46.)]

240.) Für den Halbmesser $r$ der Schmiegungskugel gelten die Formeln

$$r^2 = \frac{ds^{10}\left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}}{(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

[§ 148, Gl. (12.) und (18.)]

241.) Die Gerade

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = m(z' - z)$$

ist eine Tangente der Fläche

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y),$$

wenn

$$F_1 m + F_2 n + F_3 = 0, \quad \text{oder} \quad m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0.$$

[§ 150, Gl. (10.) und (12.)]

242.) Die Tangentialebene der Fläche

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

hat die Gleichung

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0,$$

oder

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y).$$

[§ 150, Gl. (16.) und (16a.)]

243.) Die Normale der Fläche im Punkte $P$ hat die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2} = \frac{z' - z}{F_3},$$

oder

$$x' - x + \frac{\partial z}{\partial x}(z' - z) = 0, \quad y' - y + \frac{\partial z}{\partial y}(z' - z) = 0.$$

[§ 150, Gl. (21.)]

244.) Ist $\varrho$ der Krümmungshalbmesser der ebenen Kurve, welche aus der Fläche $z' = f(x', y')$ durch die Ebene

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0$$

ausgeschnitten wird, so erhält man

$$\varrho^2 = \frac{[(B + Cq)^2 + (A + Cp)^2 + (Aq - Bp)^2]^3}{(A^2 + B^2 + C^2)[r(B + Cq)^2 - 2s(A + Cp)(B + Cq) + t(A + Cp)^2]^2},$$

wobei

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

[§ 152, Gl. (2.) und (15.)]

245.) Der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes ist

$$\varrho = \pm \frac{[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2s\lambda + t\lambda^2},$$

wobei

$$\lambda = \frac{dy}{dx}.$$ [§ 152, Gl. (18.) und (24.)]

246.) Nennt man die Werte von $\lambda$, für welche der Krümmungshalbmesser des zugehörigen Normalschnittes ein Maximum oder Minimum wird, $\lambda_1$ und $\lambda_2$, so findet man

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{pqt - (1 + q^2)s}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{(1 + p^2)s - pqr}{pqt - (1 + q^2)s}.$$

[§ 152, Gl. (27.)]

247.) Sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Hauptkrümmungshalbmesser, so wird

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{s^2 - rt},$$

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{s^2 - rt}.$$ [§ 152, Gl. (30.) und (31.)]

248.) Ist $\varrho$ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, dessen Ebene mit dem ersten Hauptnormalschnitt den Winkel $\alpha$ bildet, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}.$$ (*Euler*sche Formel.) [§ 152, Gl. (42.)]

249.) Sind $\varrho$ und $\varrho'$ die Krümmungshalbmesser zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so ist

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}.$$ [§ 152, Gl. (44.)]

250.) Ist $\varrho'$ der Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes, dessen Ebene mit der Ebene des zugehörigen Normalschnittes den Winkel $\vartheta$ bildet, so ist

$$\varrho' = \varrho \cos \vartheta,$$

wobei $\varrho$ der Krümmungshalbmesser dieses Normalschnittes ist.

(Satz von *Meunier*.) [§ 152, Gl. (53.)]

251.) Das *Gauß*sche Krümmungsmaß im Flächenpunkte $P$ ist

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}. \qquad \text{[§ 154, Gl. (10.)]}$$

252.) Die Enveloppe (Umhüllungskurve) der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = 0$$

erhält man durch Elimination von $u$ aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0. \qquad \text{[§ 155.]}$$

253.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte $D$ mit den Koordinaten $x, y$ einen *Doppelpunkt*, so müssen die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die beiden zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy}\right)^{(2)} = 0,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}};$$

und darauf die zugehörigen Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

[§ 157, Gl. (7.), (8.) und (8a.); § 158, Gl. (16a.)]

254.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte $D$ mit den Koordinaten $x, y$ einen *dreifachen* Punkt, so müssen die sechs Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die drei zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0. \qquad \text{[§ 159, Gl. (2.)]}$$

255.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte $D$ mit den Koordinaten $x$, $y$ eine *Spitze* (einen *Rückkehrpunkt*), so müssen die vier Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0 \text{ und } F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. [§ 160, Gl. (2.)]

256.) $$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wobei

$$R = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

[§ 161, Gl. (8a.), (9a.) und (10a.)]

257.) $$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

heißt eine „*homogene Funktion $m^{ten}$ Grades*“, wenn

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n);$$

dann wird

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = mz,$$

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

[§ 162, Gl. (2.), (10.) und (14.)]

258.) $z = f(x, y)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}{}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}{}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird dagegen *weder* ein Maximum *noch* ein Minimum, wenn zwar

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad \text{aber} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

[§ 163, Gl. (65.) bis (67.)]

259.) $u = f(x, y, z)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 = f_{11} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix} > 0;$$

$u = f(x, y, z)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0.$$

[§ 165, Gl. (3.), (5.), (18.) und (19.)]

260.) $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0,$$

wobei

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \ldots f_{1\alpha} \\ f_{21} f_{22} \ldots f_{2\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{\alpha 1} f_{\alpha 2} \ldots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix};$$

$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Maximum*, wenn wieder

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_{2r-1} < 0, \quad D_{2r} > 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \cdots \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{n+1}{2},$$

je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. [§ 165.]

---

## Druckfehler.

Seite 97, Zeile 7 v. o. lies $\Delta f(x)$ statt $\Delta(x)f$.

Seite 528, Zeile 6 und 4 v. u. lies $A_1$ statt $A_2$.

Seite 628, Zeile 5 v. u. lies $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ statt $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x}$.

Druck von Gebauer-Schwetschke, Druckerei und Verlag m. b. H., Halle a. S.