

1842  
II

# ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

## HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMEN DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN

SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMÉTIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . .	H. BURKHARDT IN ZÜRICH UND W. WIRTINGER IN WIEN.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . .	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . .	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . .	PH. FURTWÄNGLER IN BONN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . .	K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK . . . . .	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.

BAND V<sub>2</sub>, HEFT 22

R. GANS IN TÜBINGEN: ELEKTROSTATIK UND MAGNETOSTATIK	S. 289
F. POCKELS IN HEIDELBERG: BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ELEKTROSTATISCHEN UND MAGNETOSTATISCHEN ZUSTÄNDÄNDERUNGEN EINERSEITS UND ELASTISCHEN UND THERMISCHEN ANDERERSEITS	S. 350

KIUSGEGESEN AM 18. MÄRZ



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907

Jeder Band ist einzeln käuflich.—Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II, Heft 1—6; Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1; Bd. III<sub>2</sub>, Heft 1—3; Bd. III<sub>3</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>1</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>1</sub><sub>2</sub>, Heft 1; Bd. IV<sub>2</sub>, Heft 1—3; Bd. VI<sub>1</sub>, Heft 1—3; Bd. V<sub>2</sub>, Heft 1 und 2; Bd. VI<sub>1</sub>, Heft 1; Bd. VI<sub>2</sub>, Heft 1.

**Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.**

## Unter der Presse:

- Band II. Teil 2. Elliptische Funktionen. Von J. Harkness in Montreal (Canada) und W. Wirtinger in Wien. — Automorphe Funktionen. Von R. Fricke in Braunschweig.
- III. 1. Prinzipien der Geometrie. Von F. Enriques in Bologna. — Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“. Von H. v. Mangoldt in Danzig. — Analysis situs. Von P. Heegaard in Kopenhagen und M. Dehn in Münster i. W. — Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert. Von G. Fano in Turin. — Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip. Von G. Fano in Turin.
- IV. 1. Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper. Von P. Stückel in Hannover.
- IV. 2. Theorie der hydraulischen Motoren und Pumpen. Von M. Grübler in Dresden. — Grundlegung der mathematischen Elastizitätstheorie von C. H. Müller in Göttingen und A. Timpe in Danzig. — Allgemeine Theoreme der Elastizitätstheorie (Integrationstheorie). Von O. Tedone in Genua. — Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper. Von O. Tedone in Genua und A. Timpe in Danzig. — Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik. Von H. Lamb in Manchester.
- V. 1. Kinetische Theorie der Materie. Von L. Boltzmann und J. Nabl in Wien. — Kapillarität. Von H. Minkowski in Göttingen.
- VI. 1. Höhere Geodäsie. Von E. Pizzetti in Pisa.

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschreibt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrteten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, G. v. Escherich-Wien, D. Hölder-Leipzig, F. Klein-Göttingen, V. v. Lang-Wien,  
ferner L. Boltzmann (†), H. v. Seeliger-München, H. Weber-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, Ph. Furtwängler-Bonn, F. Klein-Göttingen, W. Fr. Meyer-Königsberg, C. H. Müller-Göttingen,  
K. Schwarzschild-Göttingen, A. Sommerfeld-München, E. Wiechert-Göttingen und W. Wirtinger-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens-Magdeburg

P. Bachmann-Weimar

J. Bauschinger-Berlin

G. Bohlmann-Berlin

L. v. Bortkiewitsch-Berlin

H. Burkhardt-Zürich

E. Czuber-Wien

W. v. Dyck-München

D. Hilbert-Göttingen

O. Hölder-Leipzig

G. Landsberg-Kiel

R. Mehmkreis-Stuttgart

W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.

E. Metz-Gießen

V. Pareto-Lausanne

A. Pringsheim-München

K. Runge-Göttingen

A. Schoenflies-Königsberg i. P.

H. Schubert-Hamburg

D. Seliwanoff-St. Petersburg

E. Study-Bonn

K. Th. Vahlen-Greifswald

H. Weber-Straßburg i. E.

A. Wiman-Lund.

II. Band:

M. Böcher-Cambridge, Mass.

G. Brunel (†)

H. Burkhardt-Zürich

G. Faber-Karlsruhe

R. Fricke-Braunschweig

H. Hahn-Wien

J. Harkness-Montreal

K. Hensel-Marburg

G. Herglotz-Göttingen

A. Kneser-Breslau

A. Krämer-Karlsruhe

L. Maurer-Tübingen

W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.

W. F. Osgood-Cambridge,

P. Painlevé-Paris (Mass.)

S. Pincherle-Bologna

A. Pringsheim-München

A. Sommerfeld-München

E. Vessiot-Lyon

A. Voss-München

A. Wangerin-Halle

E. v. Weber-München

W. Wirtinger-Wien

E. Zermelo-Göttingen

III. Band:

R. Borchard-Pavia

H. Burkhardt-Zürich

G. Castelnuovo-Rom

M. Dehn-Münster i. W.

F. Dingeldey-Darmstadt

F. Enriques-Bologna

G. Fano-Turin

C. Guichard-Clermont-Ferrand

P. Heegaard-Kopenhagen

K. Heun-Karlsruhe

G. Kohn-Wien

H. Liebmann-Leipzig

G. Loria-Genua

R. v. Lilienthal-Münster i. W.

H. v. Mangoldt-Danzig

W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.

E. Müller-Wien

J. Neuberg-Lüttich

E. Papperitz-Freiburg i. S.

K. Rohn-Leipzig

G. Scheffers-Charlottenburg

A. Schoenflies-Königsberg

C. Segre-Turin

M. Simen-Straßburg i. E.

J. Sommer-Danzig

P. Stäckel-Hannover

O. Staudt-Rostock

H. Steinitz-Charlottenburg

A. Voss-München

E. Wälsch-Brittn

H. G. Zeuthen-Kopenhagen

K. Zindler

Ph. Forchheimer-Graz

Ph. Furtwängler-Bonn

M. Grübler-Dresden

L. Henneberg-Darmstadt

K. Heun-Karlsruhe

G. Jung-Malland

F. Klein-Göttingen

A. Kriloff-Petersburg

H. Lamb-Manchester

A. E. H. Love-Oxford

C. H. Müller-Göttingen

J. Petersen-Kopenhagen

L. Prandtl-Göttingen

H. Reißner-Aachen

A. Schoenflies-Königsberg

P. Stäckel-Hannover

O. Tedone-Genua

A. Timpe-Danzig

E. Timerding-Straßburg i. E.

A. Voss-München

S. T. Walker-Simla (Indien)

G. Zemplén-Budapest

V. Band:

M. Abraham-Göttingen

L. Boltzmann (†)

G. H. Bryan-Bangor (Wales)

P. Debye-München

H. Dubois-Berlin

H. Düsselhorst-Berlin

S. Finsterwalder-München

R. Gans-Tübingen

F. W. Hinrichsen-Aachen

E. W. Hobson-Cambridge

J. H. van t'Hoff-Berlin

H. Kamerlingh-Onnes-Leiden

Th. Liebisch-Göttingen

K. Runge-Göttingen

A. Schoenflies-Königsberg

M. Schröter-München

A. Sommerfeld-München

E. Study-Bonn

A. Wangerin-Halle

W. Wien-Würzburg

J. Zenneck-Braunschweig

VI. 1. Band:

R. Bourgeois-Paris

G. H. Darwin-Cambridge

S. Finsterwalder-München

H. Hergesell-Straßburg

S. Hough-Kapstadt

H. Meldau-Bremen

J. M. Pernter-Wien

P. Pizzetti-Pisa

C. Reinhardt (†)

A. Schmidt-Potsdam

W. Trabert-Wien

E. Wiechert-Göttingen

VI. 2. Band:

E. Anding-Gotha

J. Bauschinger-Berlin

A. Bemporad-Catania

E. W. Brown-Haverford

C. Ed. Caspari-Paris

C. V. L. Charlier-Lund

F. Cohn-Königberg i. P.

R. Emden-München

F. K. Ginzel-Berlin

J. v. Heppner-Wien

G. Herglotz-Göttingen

H. Kobold-Kiel

F. R. Moulton-Chicago

G. v. Niessl-Brünn

S. Oppenheim-Prag

L. Schulhof-Paris

K. Schwarzschild-Göttingen

E. Strömgren-Kiel

K. Sundmann-Helsingfors

E. T. Whittaker-Cambridge

C. W. Wirtz-Straßburg i. E.

H. v. Zeipel-Pulkowa

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299016

# **Mathematische Annalen.**

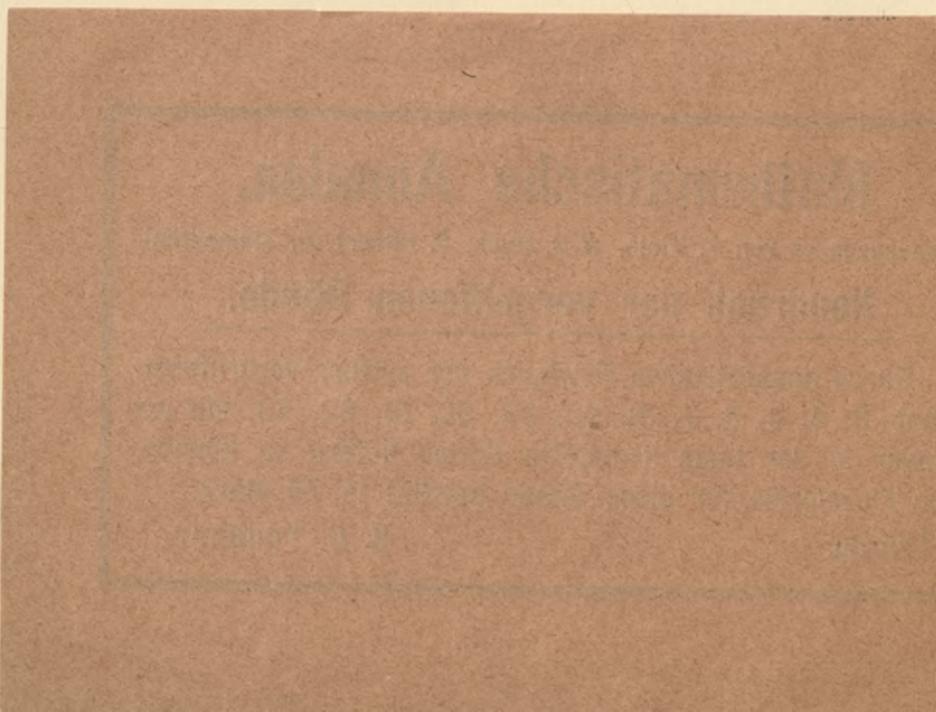
Herausgegeben von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.

## **Neudruck der vergriffenen Bände.**

Durch anastatischen Neudruck der seither vergriffenen Bände 3, 4, 5, 6, 7, 31, 32, 33, 50, 51, 52, 53, bin ich wieder in der Lage komplett Serien liefern zu können. Der Einzelpreis für diese Bände beträgt je 28 Mark.

Leipzig.

B. G. Teubner.





Soeben erschien:

# THEORIE DES INTEGRALLOGARITHMUS UND VERWANDTER TRANSZENDENTEN

•  
VON

DR. NIELS NIELSEN

DOZENT DER REINEN MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN

[VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 3.60.

Die mathematische Literatur des seit dem Erscheinen der Bücher von L. Mascheroni (1796) und J. Soldner (1809) verflossenen Jahrhunderts enthält zahlreiche Abhandlungen, die über den Integrallogarithmus und verwandte Funktionen handeln. Diese Arbeiten geben zwar verschiedene Anwendungen unserer Transzendenten und bringen auch hie und da numerische Tafeln sowie verschiedene neue Eigenschaften derselben; allein die systematische Untersuchung der oben genannten Funktionen scheint ganz und gar in diesem Zeitraume vernachlässigt zu sein, denn die gefundenen neuen Formeln und Lehrsätze stehen ganz vereinzelt da, ohne daß ein Versuch gemacht wird, diese Eigenschaften mit den früher bekannten zu vergleichen oder gar zu verknüpfen.

Namentlich scheint die, im Vorübergehen, von Schlömilch gemachte Beobachtung, daß der Integrallogarithmus und die Krampsche Transzendenten als Spezialfälle in der später als Prymsche Q-Funktion bezeichneten Transzendenten enthalten sind, ganz und gar unbeachtet geblieben zu sein.

Ein charakteristisches Beispiel in dieser Beziehung bieten die interessanten Kettenbruchentwicklungen, die in der Theorie unserer Funktionen auftreten, dar; diese Entwicklungen, die schöne Untersuchungen von Laguerre und Tannery hervorgerufen haben, sind in der Tat, wie in Kapitel III meines Büchleins gezeigt wird, schon als Spezialfälle im Kettenbruche von Legendre enthalten.

Schon meine Untersuchungen über die Zylinderfunktionen haben meine Aufmerksamkeit auf den Integrallogarithmus und die damit verwandten Transzendenten gelenkt; diese Funktionen treten in der

Tat auch als Spezialfälle der dort vorkommenden Transzendenten auf; allein diese Untersuchungsmethode scheint eine viel zu weit-schweifige zu sein. Später habe ich daher versucht, mit der Schlömilchschen Bemerkung als Ausgangspunkt, die schon bekannten, sowie verschiedene neue Eigenschaften unserer Transzendenten in systematischer Weise herzuleiten.

Möchte nun dieser Versuch weitere Untersuchungen und vor allem praktische Tafellegungen der ebenso wichtigen wie interessanten Transzendenten anregen!

Kopenhagen.

Niels Nielsen.



### Kapitel I.

#### Definitionen und analytische Eigenschaften.

Seite

§ 1. Der Integrallogarithmus . . . . .	1
§ 2. Formeln von Mascheroni und Bessel . . . . .	4
§ 3. Die Funktionen $ci(x)$ und $si(x)$ . Integrale von Kramp und Fresnel . . . . .	6
§ 4. Anwendungen der Fakultätenreihe für $P(x, v)$ . . . . .	8
§ 5. Differentiation und unbestimmte Integration . . . . .	11
§ 6. Die Funktion $li(e^{-x})$ und die logarithmische Reihe . . . . .	13
§ 7. Die Funktionen $ci(x)$ und $si(x)$ als Grenzwerte . . . . .	15

### Kapitel II.

#### Integraldarstellungen.

§ 8. Integraldarstellungen der sechs Transzendenten . . . . .	17
§ 9. Herleitung einiger allgemeinerer Integrale . . . . .	20
§ 10. Integrale von Laplace und Raabe . . . . .	23
§ 11. Integrale von Schlömilch . . . . .	25
§ 12. Integralbestimmungen durch $L(x)$ , $C(x)$ , $S(x)$ und $\varrho(x)$ . . . . .	27
§ 13. Über das Produkt $Q(\alpha x, v) \cdot Q(\beta x, \varrho)$ . . . . .	30
§ 14. Über einen Integralsatz von Bessel . . . . .	33

### Kapitel III.

#### Asymptotische Reihen und Kettenbrüche.

§ 15. Asymptotische Reihe für die $Q$ -Funktion . . . . .	35
§ 16. Anwendungen . . . . .	38
§ 17. Kettenbrüche von Laplace, Soldner und Legendre . . . . .	40
§ 18. Die Annäherungsbrüche des Legendreschen Kettenbruchs . . . . .	43
§ 19. Verallgemeinerungen der Kettenbrüche von Laguerre und Tannery . . . . .	45

### Kapitel IV.

#### Bestimmte Integrale.

§ 20. Integrale mit der Exponentialfunktion . . . . .	47
§ 21. Diskontinuierliche Integrale . . . . .	49
§ 22. Analogien der Integrale der §§ 9 und 14 . . . . .	51
§ 23. Weitere diskontinuierliche Integrale . . . . .	53
§ 24. Das Analogon des zweiten Eulerschen Integrals . . . . .	54
§ 25. Das Analogon des Laplace-Abelschen Integrals . . . . .	56

Akc. Nr.

	Seite
§ 26. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen . . . . .	59
§ 27. Integrale mit der Lommelschen Funktion . . . . .	62
§ 28. Integralsatz von Sonin . . . . .	64
§ 29. Weitere Integraldarstellungen der Eulerschen Konstante . . . . .	67

### Kapitel V.

#### Verschiedene Reihenentwicklungen.

§ 30. Partialbruchentwicklungen . . . . .	71
§ 31. Besondere Entwicklungen für $\text{si}(x)$ . . . . .	73
§ 32. Fouriersche Reihen für verschiedene elementare Funktionen . . . . .	75
§ 33. Fouriersche Reihen für $\log x$ , $\log \Gamma(x+1)$ und $\Psi(x+1)$ . . . . .	77
§ 34. Analogien der Bernoullischen Funktionen . . . . .	81

### Kapitel VI.

#### Numerische Berechnung der sechs Transzendenten.

§ 35. Über die Addition der Argumente . . . . .	83
§ 36. Weitere Formeln von Soldner und Bessel . . . . .	85
§ 37. Tafeln für $\text{li}(x)$ , $\text{ci}(x)$ und $\text{si}(x)$ . . . . .	88
§ 38. Tafeln für $L(x)$ , $C(x)$ und $S(x)$ . . . . .	90
§ 39. Der Integrallogarithmus und die Zahlentheorie . . . . .	92

### Literaturverzeichnis.

A. Theorie und Tafeln . . . . .	95
B. Zahlentheoretische Anwendungen . . . . .	100
C. Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	101
D. Physikalische Anwendungen . . . . .	102

Alphabetisches Register . . . . .	105
-----------------------------------	-----



### Bestellzettel.

Bei \_\_\_\_\_ Buchhandlung \_\_\_\_\_

in \_\_\_\_\_ bestellt der Unterzeichnete

hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

**Niels Nielsen**, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1906.  
geh. n. M. 3.60

— Handbuch der Theorie der Gammafunktion.  
[X u. 326 S.] gr. 8. 1906. geb. M. 12.—

— Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. M. 14.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Von Niels Nielsen erschien ferner im gleichen Verlage:

## Handbuch der Theorie der Gammafunktion.

[X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. M. 12.—

Dies Handbuch versucht, eine Gesamtdarstellung der bis jetzt bekannten Eigenarten und Anwendungen der Gammafunktion und verwandter Funktionen in strenger und doch möglichst elementarer Form zu liefern; es ist daher als der erste neuere Versuch dieser Art zu bezeichnen, denn merkwürdigerweise ist seit dem Traité von Legendre keine für ihre Zeit vollständige Darstellung dieser Theorie publiziert worden. Der erste Teil des Buches gibt ohne Zuhilfenahme bestimmter Integrale sondern ausschließlich durch Anwendung der Theorie analytischer Funktionen eine elementare Entwicklung der Eigenschaften von  $\Gamma(x)$  und verwandten Funktionen, indem  $\Gamma(x)$  mittels seiner Differenzengleichung definiert wird. Im zweiten Teile wird eine recht vollständige Theorie der beiden Eulerschen Integrale und der durch Gammafunktionen ausdrückbaren bestimmten Integrale, sowie ihrer Anwendung zur Herleitung der Reihen von Stirling, Kummer und Lerch gegeben; ebenso werden die beiden Mellinschen Umkehrprobleme und ihre Anwendung auf gewisse Funktionengattungen behandelt. Der dritte und letzte Teil untersucht die reziproken Gammafunktionen als Entwicklungsfunktionen durch eine Darstellung der von Schlömilch, Jensen, Pincherle und namentlich vom Verfasser ausgebildeten Theorie der Fakultätenreihen; hier findet sich wohl zum erstenmal eine Würdigung der Methoden, die Stirling über solche Reihen angedeutet hat. Das Buch enthält endlich ein möglichst vollständiges Verzeichnis der reichen Literatur über die behandelten Theorien.

## Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen.

[XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. M. 14.—

Der erste Teil gibt, größtenteils nach früheren Arbeiten des Verfassers, die systematische Theorie der Zylinderfunktionen, welche als Lösungen zweier Fundamentalgleichungen definiert werden, und einiger allgemeineren Funktionen, die späterhin von großer Bedeutung werden. Außer den gewöhnlichen Zylinderfunktionen der ersten und zweiten Art  $J^\nu(x)$  und  $Y^\nu(x)$  werden noch zwei Funktionen der dritten Art, nämlich  $H^\nu(x) = J^\nu(x) + i Y^\nu(x)$  und  $H_1^\nu(x) = J^\nu(x) - i Y^\nu(x)$ , eingeführt; diese Funk-

tionen verhalten sich asymptotisch wie  $\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot e^{\pm ix}$ , während sich  $J^\nu(x)$  und  $Y^\nu(x)$

bekanntlich wie  $\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \cos\left(x - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)$  und  $\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(x - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)$  asymptotisch verhalten. — Der zweite Teil gibt eine neue, bisher noch nicht publizierte Theorie der bestimmten Integrale mit Zylinderfunktionen. Die altbekannten Resultate werden, nebst vielen anderen, durch allgemeine Methoden, in welchen die  $H$ -Funktionen eine wichtige Rolle spielen, hergeleitet. Zahlreiche asymptotische Reihen werden entwickelt; u. a. wird der merkwürdige Satz bewiesen, daß die Quadratsumme  $(J^\nu(x))^2 + (Y^\nu(x))^2$  in der ganzen unendlichen  $x$ -Ebene, außer in  $x = 0$ , einen endlichen Wert hat; für  $\nu = \pm \frac{1}{2}$  gewinnt man dadurch die altbekannte Identität  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  als einfachsten Fall. — Der dritte Teil entwickelt, nach früheren Arbeiten des Verfassers, eine Theorie der Entwicklungen analytischer Funktionen in Reihen, die nach Zylinderfunktionen fortschreiten, d. h. Neumannsche und Kapteynsche Reihen und verschiedene andere. — Der vierte Teil behandelt die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Zylinderfunktionen, d. h. Reihen von Schlömilch und Fourier nach Dini und Integrale von Neumann und Hankel. Nach früheren Arbeiten des Verfassers wird hier gezeigt, daß die Schlömilchschen Reihen sämtlich Nullentwicklungen gestatten. — Der Theorie folgen ein Anhang mit Hilfsformeln und Zusätze und ein ausführliches Literaturverzeichnis über Theorie und Anwendungen der Zylinderfunktionen.

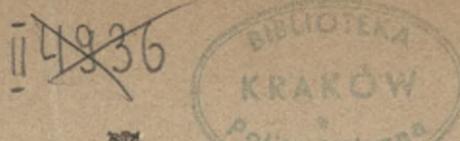
Encyklopädie  
der Mathematischen Wissenschaften. V2. 2.

---

Seite 289 des Artikels Gans schließt unmittelbar an Seite 280 des Artikels Lorentz an; die Reihenfolge der Paginierung ist durch ein Versehen unterbrochen worden.



2300249



V 15. Gans. Elektrostatik und Magnetostatik.

289

II - 351575

18/203  
II

## V 15. ELEKTROSTATIK UND MAGNETOSTATIK.

VON

R. G A N S

IN TÜBINGEN.

## Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Elektromagnetische Theorie.
3. Die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik.
4. Eindeutigkeit des Feldes. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie.
5. Allgemeine Eigenschaften des Feldes.
6. Superposition der Felder. Die Energie.

## I. Elektrostatik.

## A. Die Dielektrizitätskonstante ist im ganzen Raume eine und dieselbe Konstante.

7. Systeme von Leitern. Kapazität. Potentialverstärker. Influenzmaschine. Plattenkondensator.
8. Kräfte eines Leitersystems. Absolutes Elektrometer. Quadrantenelektrometer.
9. Zweidimensionale Probleme. Abbildung. Dichte der Elektrizität an Kanten.
10. Anwendung auf das Schutzgitter.
11. Anwendung auf den Kondensator.
12. Kugel. Ellipsoid. Zylinder. Ring.
13. Elektrische Bilder. Zwei Kugeln.

## B. Die Dielektrizitätskonstante hat in verschiedenen Teilen des Raumes verschiedene Werte.

14. Ungeladene Dielektrika im Felde. Leiter als Grenzfall des Dielektrikums. Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum.
15. Influenz. Wahre und freie Elektrizität.
16. Influenz auf Ellipsoid und Kugel. Clausius-Mossotti'sche Theorie.
17. Hohlkugel und Hohlzylinder im gleichförmigen Felde.
18. Spannungen und Kräfte.
19. Kräfte auf starre Körper.
20. Elektromotorische Kräfte.
21. Kristalle.
22. Rückstand.

Akk. Nr. 926  
B. 30

## II. Magnetostatik.

23. Unterschiede der magnetostatischen und elektrostatischen Probleme.
  24. Gibt es wahren Magnetismus?
  25. Influenz. Wahrer und freier Magnetismus.
  26. Energie und Kräfte.
  27. Kräfte auf starre Körper.
  28. Magnetisches Moment. Horizontalintensität. Kompaß.
  29. Magnetische Doppelschicht.
  30. Kristalle.
  31. Ferromagnetische Körper.
  32. Hysteresis.
- 

## Literatur.

Man vergleiche die Literatur der Artikel II A 7b; V 12; V 13.

- G. Green*, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham 1828, zitiert als „Essay“ und *Ostwalds Klassiker* Nr. 61. Auch abgedruckt in Mathematical Papers of the late George Green, herausgeg. von N. M. Ferrers, London 1871.
- M. Faraday*, Experimental researches in electricity, 3 vol. London 1839—1855 u. *Ostwalds Klassiker*.
- A. Beer*, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, herausgegeben von J. Plücker. Braunschweig 1865.
- W. Thomson*, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872. Zitiert als „Reprint“.
- J. C. Maxwell*, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. (Deutsche Übersetzung von: A treatise on electricity and magnetism, 2 vol. Oxford 1873), Berlin 1883. Zitiert als „Treatise“.
- B. Riemann*, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1876.
- M. E. Mascart*, Traité de l'électricité statique, 2 Bde. Paris 1876.
- R. Clausius*, Die mechanische Wärmetheorie, 2. 2. Aufl., Braunschweig 1879.
- H. v. Helmholtz*, Wissenschaftliche Abhandlungen 1, Leipzig 1882.
- G. Kirchhoff*, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882.  
— Vorlesungen über mathematische Physik 3, Leipzig 1891.
- Mascart et Joubert*, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus (deutsche Ausgabe: Berlin 1886).
- F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig 1887.  
— Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, Leipzig 1881.
- G. Wiedemann*, Die Lehre von der Elektrizität, 4. Aufl. Braunschweig 1889.
- H. Poincaré*, Électricité et optique, Paris 1890 (deutsche Ausgabe: Berlin 1891).
- H. Hertz*, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892.
- P. Drude*, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.
- W. Voigt*, Kompendium der theoretischen Physik 2. Leipzig 1896.
- A. Korn*, Lehrbuch der Potentialtheorie. Berlin 1899.
- H. Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik 1, Braunschweig 1900.

- E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900. Zitiert als „Elm. Feld“.  
*L. Graetz*, Elektrostatik usw. in *Winkelmann's Handbuch der Physik* 2. Aufl. 4<sup>1</sup>. Leipzig 1903.  
*J. Bosscha*, Leerboek der natuurkunde 5. Magneetkracht en electriciteit. 1<sup>o</sup> stuk. Herausgegeben von *C. H. Wind*, Leiden 1903.  
*M. Abraham u. A. Föppl*, Einführung in die *Maxwell'sche Theorie der Elektrizität*, 2. Aufl. Leipzig 1904.  
*J. Wallentin*, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre, Leipzig 1904.  
*F. Auerbach*, Magnetismus. In *Winkelmann's Handbuch der Physik*. 2. Aufl., 5<sup>1</sup>. Leipzig 1905.

In *Ostwalds „Klassikern der exakten Wissenschaften“* erschienen:

- Nr. 13. *Coulomb*, Vier Abhandlungen über die Elektrizität u. den Magnetismus (1785—86), herausgegeben von *W. König*.  
Nr. 53. *C. F. Gauß*, Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt (1832), herausgegeben von *E. Dorn*.  
Nr. 61. *G. Green*, Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorien der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden (1828), herausgegeben von *A. J. v. Oettingen u. A. Wangerin*.  
Nr. 69. *J. C. Maxwell*, Über Faradays Kraftlinien (1855—1856), herausgegeben von *L. Boltzmann*.  
Nr. 81, 86, 87, 126, 128, 131, 134, 136, 140. *M. Faraday*, Experimentaluntersuchungen über Elektrizität (1832—1850), herausgegeben von *A. J. v. Oettingen*.

**1. Einleitung.** Die ursprüngliche Grundlage der Elektrostatik und Magnetostatik bildeten die *Coulomb'schen Gesetze*<sup>1)</sup>. Wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem *Newton'schen Gravitationsgesetzen* erscheinen die Gebiete der Elektrostatik und Magnetostatik demjenigen der Gravitation wenigstens in mathematischer Hinsicht eng verwandt. Dementsprechend ist es möglich, die Grundtatsachen aller drei Gebiete bis zu einem gewissen Grade der Vollständigkeit gemeinsam darzustellen, wie dies in Bd. II, Art. Potentialtheorie<sup>2)</sup> geschehen ist.

Der Standpunkt der Theorie wurde ganz anders, als *Faraday* die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität entdeckt hatte und in konsequenter Weise die Ansicht vertrat, daß bei allen elektromagnetischen Erscheinungen das Medium zwischen den aufeinander wirkenden Körpern von wesentlicher Bedeutung sei. *Maxwell* brachte die *Faraday'schen Gedanken* in mathematische Form und stellte in zwei nach ihm benannten Vektorgleichungen die elektromagnetischen Erscheinungen dar. In der *Maxwellschen Theorie* müssen also Elektrostatik und Magnetostatik als Spezialfälle enthalten sein.

1) Vgl. V 12, Die Elementargesetze, Art. *Reiff-Sommerfeld*, Nr. 1.

2) Vgl. II A, 7b Potentialtheorie, Art. *Burkhardt-Meyer*.

Wir werden infolgedessen, entsprechend dem heutigen Stande der Wissenschaft, von den *Maxwell'schen* Gleichungen ausgehen.

Wegen der allgemeinen, mehr mathematisch gehaltenen Untersuchungen zur Potentialtheorie muß auf den genannten Artikel<sup>3)</sup> in Band 2 verwiesen werden; hier sollen hauptsächlich solche Arbeiten berücksichtigt werden, die unmittelbare Anwendung auf physikalische Probleme finden.

**2. Elektromagnetische Theorie.** Die *Maxwell'schen* Gleichungen lauten<sup>3)</sup>

$$(1) \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J},$$

$$(2) \quad -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.^4)$$

Hier ist  $c$  eine universelle Konstante (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum);  $\mathfrak{E}$  resp.  $\mathfrak{H}$  elektrische resp. magnetische Feldstärke;  $\mathfrak{D}$  resp.  $\mathfrak{B}$  elektrische resp. magnetische Erregung (früher Polarisation oder Induktion genannt),  $\mathfrak{J}$  die elektrische Strömung.

Für isotrope, homogene Körper ist<sup>5)</sup>

$$(3) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E},$$

$$(4) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

$$(5) \quad \mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}.$$

$\varepsilon$  heißt Dielektrizitätskonstante (für den Äther setzen wir  $\varepsilon = 1$ ),  $\mu$  heißt Permeabilität oder Magnetisierungskonstante (für den Äther setzen wir  $\mu = 1$ ).  $\sigma$  heißt elektrische Leitfähigkeit<sup>6)</sup>.

Bilden wir von (1) und (2) die Flächenintegrale über eine geschlossene Fläche  $\sigma$ , so ergibt sich, daß

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{D}_n d\sigma + \int \mathfrak{J}_n d\sigma = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{B}_n d\sigma = 0.$$

Verläuft in (6) die Fläche  $\sigma$  vollkommen in einem Isolator, so ist

$$(6') \quad \int \mathfrak{D}_n d\sigma = e \text{ zeitlich constant};$$

für jede Fläche ist

3) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 6.

4) Wegen der Vektorbezeichnungen und -beziehungen vgl. IV 2, 14 Geometrische Grundbegriffe Art. *Abraham* und V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 3 u. 4.

5) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 8.

6) Wegen der hier gewählten Einheiten vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 7.

$$(7') \quad \int \mathfrak{B}_n d\sigma = m$$

zeitlich konstant. Wir nennen diese Konstanten die von der Fläche eingeschlossene elektrische resp. magnetische Menge.

$$(8) \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_e$$

und

$$(9) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \varrho_m$$

sind die elektrische resp. magnetische Dichte. Tritt auch Flächenladung auf, so ist deren Dichte

$$(8') \quad \mathfrak{D}_n^{(2)} - \mathfrak{D}_n^{(1)} = \omega_e$$

resp.

$$(9') \quad \mathfrak{B}_n^{(2)} - \mathfrak{B}_n^{(1)} = \omega_m.{}^7)$$

Multipliziert man (1) skalar mit  $\mathfrak{E}$ , (2) skalar mit  $\mathfrak{H}$ , addiert und integriert über ein beliebiges Raumstück  $S$  mit der Oberfläche  $\sigma$ , so erhält man<sup>8)</sup> mit Berücksichtigung von (3), (4) und (5)

$$(10) \quad -c \int_{\sigma} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \varepsilon \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2 \right) dS + \int \sigma \mathfrak{E}^2 dS$$

als Ausdruck des Energieprinzips für homogene, isotrope Körper.

$c[\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$  ist der *Poynting'sche Strahlungsvektor*,  $\int \frac{1}{2} \varepsilon \mathfrak{E}^2 dS = W_e$  und  $\int \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2 dS = W_m$  sind die elektrische resp. magnetische Energie<sup>8)</sup>,  $\sigma \mathfrak{E}^2 = Q$  ist die pro Zeiteinheit in der Volumeinheit entwickelte *Joulesche Wärme*.

**3. Die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik.**  
Soll der betrachtete Zustand statisch sein, so muß  $\partial/\partial t = 0$  sein, und es darf ferner keine Energieumsetzung stattfinden, d. h. es muß  $Q$  verschwinden. Das bedeutet aber: in Leitern gilt

$$(11) \quad \mathfrak{E} = 0.$$

Aus (2) und (1) folgt dann

$$\text{I.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \text{Ia.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0,$$

oder

$$\text{I'}. \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \text{Ia'}. \quad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi.$$

In Leitern ist wegen (11)  $\varphi$  konstant.  $\varphi$  und  $\psi$  heißen elektrisches resp. magnetisches Potential.

Aus (8) und (9) wird durch Benutzung von I' und Ia'

7) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 11.

8) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 22. In der Bezeichnung weicht dieser Artikel von dem Lorentzschen insofern ab, als hier  $W_e$  und  $W_m$  die ganze elektrische und magnetische Energie des Feldes, dort die Energie der Volumeinheit bedeuten.

$$\text{II. } \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\varrho_e, \quad \text{IIa. } \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi = -\varrho_m.$$

Die elektrische resp. magnetische Energie schreibt sich

$$\text{III. } W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{grad}^2 \varphi dS, \quad \text{IIIa. } W_m = \int \frac{\mu}{2} \operatorname{grad}^2 \psi dS.$$

Ist  $\varepsilon$  resp.  $\mu$  an einer Fläche  $\sigma$  mit der Normalen  $n$  unstetig, so folgt aus (8') und (9')

$$\text{IV. } \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\omega_e, \quad \text{IVa. } \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = -\omega_m.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich ferner, da diese Gleichungen überall Beziehungen zwischen endlichen Größen darstellen sollen, daß an Flächen  $\sigma$ , in denen  $\varepsilon$  und  $\mu$  unstetig sind, die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  stetig sind<sup>9)</sup>. Ist  $s$  eine tangentiale Richtung an  $\sigma$ , so muß

$$\text{V. } \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \quad \text{Va. } \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s}$$

sein. Da  $-\operatorname{grad} \varphi$  und  $-\operatorname{grad} \psi$  auch in der Unstetigkeitsfläche  $\sigma$  die elektrische resp. magnetische Feldstärke darstellen sollen, welche durchweg endliche Größen sind, so müssen  $\varphi$  und  $\psi$  auch an  $\sigma$ , also im ganzen Raume stetig sein, da sonst die Normalkomponente der Feldstärken in  $\sigma$  unendlich groß würde. Von dieser Darstellung weicht man nur ab bei Einführung der elektrischen und magnetischen Doppelschichten (s. unten Nr. 29).

Durch I' und Ia' sind  $\varphi$  und  $\psi$  nur bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert. Gewöhnlich setzt man im Unendlichen  $\varphi$  und  $\psi$  gleich Null, falls dort keine Ladungen gedacht werden. Hiermit ist es verträglich, daß man das Potential  $\varphi$  der Erde, die man für die meisten Probleme als sich ins Unendliche erstreckend betrachten kann, gleich Null annimmt. Eine Ausnahme von der Bestimmung:  $\varphi$  und  $\psi$  gleich Null im Unendlichen pflegt man bei der Behandlung homogener Felder zu machen, in denen das Unendliche selbst geladen erscheint und das Potential im Unendlichen unendlich groß wird. In diesem Falle legt man einer willkürlichen Stelle im Endlichen das Potential Null bei.

Tatsächlich verzichtet man bei Einführung von Doppelschichten und von homogenen Feldern auf die Beschreibung der wahren Verhältnisse in der Doppelschicht resp. in unendlicher Entfernung.

9) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. H. A. Lorentz, Nr. 6. Romich und Fajdiga haben Wien Ber. 70 II (1875), p. 367 experimentell gezeigt, daß dünne dielektrische Überzüge die ponderomotorischen Kräfte nicht ändern. Dies folgt aus der Theorie unter der Annahme, daß die Gleichungen auch in den Unstetigkeitsflächen gültig sind.

Da die Energie endlich sein muß, so müssen  $\text{grad } \varphi$  und  $\text{grad } \psi$  stärker als  $R^{-\frac{3}{2}}$  im Unendlichen verschwinden, wenn  $R$  die Entfernung eines Punktes im Unendlichen von einem willkürlichen Punkt im Endlichen ist.

$\varphi$  und  $\psi$  müssen also im Unendlichen stärker als  $R^{-\frac{3}{2}}$  verschwinden.

I. bis V. resp. Ia. bis Va. bilden mit den Stetigkeitsbedingungen und der Unendlichkeitsbedingung die Grundgleichungen des elektrostatischen resp. magnetostatischen Feldes. Da die Gleichungen für  $\varphi$  und  $\psi$  nicht simultan sind, ergibt sich die einfache Superposition eines elektrostatischen und eines magnetostatischen Feldes; ebenso superponieren sich ihre Energien, wir dürfen also jedes für sich behandeln.

Dagegen superponieren sich die Strahlungen nicht. Diese sind, wenn nur ein elektrostatisches Feld oder nur ein magnetostatisches Feld vorhanden ist, wegen Nr. 2 Null; überlagern sich aber ein elektrostatisches und ein magnetostatisches Feld, so ist die Strahlung im Allgemeinen nicht Null, wir müssen uns also die Energie nach der *Poyntingschen* Darstellung als in Bewegung befindlich vorstellen, allerdings in geschlossenen Bahnen, so daß der Energieinhalt jeden Volumelements unverändert bleibt. Die *Poyntingsche* Vorstellungsweise erscheint im Falle solcher zusammengesetzter statischer Felder also gewaltsam<sup>10)</sup>.

**4. Eindeutigkeit des Feldes. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie.** Das Potential  $\varphi$  (oder  $\psi$ ) ist eindeutig gegeben durch die Dichten  $\varrho$  und  $\omega$ ; auf Leitern braucht nur die gesamte Elektrizitätsmenge  $e$  oder das Potential gegeben zu sein; denn die Differenz  $\varphi'' = \varphi - \varphi'$  der beiden als möglich angenommenen Funktionen  $\varphi$  und  $\varphi'$  genügt solchen Bedingungen, daß in der durch partielle Integration leicht abzuleitenden identischen Gleichung (12) die rechte Seite Null wird.

$$(12) \quad \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \text{grad}^2 \varphi'' dS = - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \text{div } \varepsilon \text{ grad } \varphi'' dS \\ - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left( \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2''}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1''}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \varepsilon \frac{\partial \varphi''}{\partial n} d\sigma.$$

Das zweite Integral rechts erstreckt sich über alle Unstetigkeitsflächen von  $\varepsilon$ , das dritte über alle Leiterflächen und eine unendlich große Fläche.  $n$  ist im zweiten Integral rechts die Normalenrichtung auf  $\sigma$ , welche nach der mit dem Index 2 bezeichneten Seite weist, im dritten Integral die ins Dielektrikum hineinweisende Normalenrichtung.

10) Vgl. V 13 *Maxwellsche Theorie* Art. H. A. Lorentz Nr. 22 und Anmerkung 42). Auf die oben genannte Unzuträglichkeit hat zuerst H. Hertz hin gewiesen. Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 577; Ges. Werke 2, p. 234, Leipzig 1892.

Also ist  $\varphi = \varphi'$ . Dasselbe gilt auch, wenn die Begrenzung des Raumes nicht im Unendlichen liegt, sondern wenn auf der Begrenzung  $\varphi$  oder  $\partial\varphi/\partial n$  gegeben ist, insbesondere wenn eine leitende Hülle den Raum begrenzt.

Hat  $\varepsilon$  im ganzen Dielektrikum einen konstanten Wert, so gilt wegen II.

$$(13) \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

und wegen IV.

$$(14) \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\frac{\omega_e}{\varepsilon}.$$

Ein Integral von (13) und (14) ist aber<sup>11)</sup>

$$(15) \quad \varphi = \int \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon r} dS + \int \frac{\omega_e}{4\pi\varepsilon r} d\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r}.$$

Dieser Ausdruck genügt allen an  $\varphi$  gestellten Bedingungen; wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist er also das einzige Integral. Ist  $\varepsilon$  nicht konstant, so hat man die Darstellung (15) abzuändern (vgl. Nr. 15 (87)).

Durch Differentiation von (15) nach der beliebigen Richtung  $s$  folgt wegen I':

$$(16) \quad \mathfrak{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r^2} \cos(\mathfrak{E}, s).$$

Da bei konstantem  $\varepsilon$  die Feldstärke als „Kraft auf die Menge Eins“ definiert ist (vgl. Nr. 18 (94)), so ist (16) der Ausdruck des *Coulomb-schen Gesetzes*.

**5. Allgemeine Eigenschaften des Feldes.** Auf Grund der Hauptgleichungen lassen sich über den Verlauf der einzelnen Erregungslinie ( $\mathfrak{D}$ -Linie) einige allgemeine Aussagen machen: bei stetigem  $\varepsilon$  ist die  $\mathfrak{D}$ -Linie stetig und stetig gekrümmt bis auf Flächen, auf denen Flächenelektrizität sitzt. Springt  $\varepsilon$  an einer ungeladenen Fläche, so gilt wegen (8') und V.

$$(17) \quad \varepsilon_1 \mathfrak{E}_n^{(1)} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_n^{(2)},$$

$$(18) \quad \mathfrak{E}_s^{(1)} = \mathfrak{E}_s^{(2)},$$

also

$$(19) \quad \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, n)_1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, n)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Dies ist das Brechungsgesetz der Erregungslinien; mit seiner Hilfe lassen sich Dielektrizitätskonstanten bestimmen<sup>12)</sup>.

11) Vgl. Potentialtheorie Art. Burkhardt-Meyer II A 7 b, Nr. 2.

12) W. v. Bezold, Ann. Phys. Chem. (3) 21 (1884), p. 401; die Theorie der Versuchsanordnung ist falsch, hierauf hat F. Lohnstein, Ann. Phys. Chem. (3) 44 (1891), p. 164 aufmerksam gemacht. Einwandsfrei ist die Versuchsanordnung von A. Pérot, Paris C. R. 113 (1891), p. 415.

Da die Aussagen der vorigen und dieser Nummer auch für magnetische Erscheinungen gelten, wenn man  $\epsilon, \mathfrak{E}, \varphi$  mit  $\mu, \mathfrak{H}, \psi$  vertauscht, so folgt aus (19) z. B., daß die magnetischen Erregungslinien aus Eisen (sehr großes  $\mu$ ) fast senkrecht in die Luft austreten.

Aus I. folgt  $\int \mathfrak{E}_s ds = 0$  für jede geschlossene Kurve, also können die  $\mathfrak{E}$ -Linien keine geschlossenen Kurven sein, sie entspringen (münden) an Stellen positiver (negativer) Elektrizität, gehen von Stellen höheren zu Stellen niederen Potentials und stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen (Niveauflächen), also z. B. auch auf den Leiteroberflächen (vgl. I').

Ist das Feld von einer leitenden Hülle umschlossen, so ist, da im Leiter  $\mathfrak{E} = 0$  (11), das Flächenintegral  $\int \mathfrak{D}_n d\sigma = 0$ , wenn  $\sigma$  vollständig in der leitenden Hülle verläuft, d. h. es ist gleichviel positive und negative Elektrizität im Innern der Hülle. Die innere Oberfläche wird ebenfalls geladen sein, sie gehört mit zum Felde.

Trennt die leitende Hülle ein inneres Feld von einem äußeren, so gehört die innere (äußere) Oberfläche  $\sigma_i$  ( $\sigma_a$ ) der Hülle mit zum inneren (äußeren) Felde; ist die Gesamtladung der Hülle  $e$ , und ist  $e_i$  die Elektrizitätsmenge der Körper im Innern, so befindet sich nach obigem Satze auf  $\sigma_i$  die Elektrizitätsmenge  $-e_i$ , also auf  $\sigma_a$  die Menge  $e_i + e$ .

Nun ist das Feld im Innenraum, unabhängig von den  $e_a$ , durch die  $e_i$  gegeben. Sind diese speziell  $= 0$ , so ist, gleichviel welches Feld im Außenraum besteht, kein Feld im Innern vorhanden; diese Erscheinung nennt man die *Schirmwirkung einer leitenden Hülle*<sup>13)</sup>.

Da, wie bemerkt, auf  $\sigma_i$  keine Elektrizität vorhanden ist, wenn im Hohlraum des Leiters keine Elektrizität sich befindet, so *befindet sich alle Elektrizität eines Leiters auf seiner äußeren Oberfläche*. Ein elektrisierter Leiter im Innern eines zweiten muß also bei der Berührung mit diesem seine gesamte Elektrizitätsmenge an ihn abgeben, da bei der Berührung das System nur *einen* Leiter bildet. Dieses Experiment der vollständigen Ladungsabgabe ist ein sehr genauer Beweis dafür, daß im Coulomb'schen Gesetz die Potenz der Entfernung den Wert 2 hat<sup>14)</sup>.

13) E. Almansi, Linc. Rend. (5) 13 [2] (1904), p. 12 behandelt den Fall hohler Leiter, deren Hohlraum durch Löcher mit dem Außenraume verbunden ist. Er findet, daß die im Innern sitzende Elektrizitätsmenge  $e < \sum \frac{aV}{2}$  ist, wo  $V$  das Potential des Leiters und  $a$  den Radius des kleinsten Kreises auf der Oberfläche bedeutet, durch den das betreffende Loch verdeckt werden kann.

14) Maxwell, Treatise 1, Art. 74a. Das Experiment wurde zuerst von

Einige wichtige Reziprozitäts- und Minimalsätze findet man in dem Artikel über *Maxwellsche Theorie* von *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 27. Bis auf die über Leiter ausgesprochenen Sätze gelten alle mutatis mutandis auch für magnetostatische Felder.

**6. Superposition der Felder. Die Energie.** Durch die Werte  $\varrho'$ ,  $\omega'$  und die Werte von  $e'$  oder  $\varphi'$  auf Leitern ist das Feld  $\mathfrak{E}'$  und damit auch die Dichte  $\omega'$  auf den Leitern bestimmt (Nr. 4). Aus den Werten  $\varrho''$ ,  $\omega''$ ,  $e''$  oder  $\varphi''$  folge das Feld  $\mathfrak{E}''$ ; dann bestimmt sich aus

$$\varrho = \varrho' + \varrho'', \quad \omega = \omega' + \omega'', \quad e = e' + e'' \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi' + \varphi'',$$

das Feld

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'',$$

denn dieser Wert genügt wegen der Linearität der Gleichungen allen Bedingungen, wegen der Eindeutigkeit ist es also der einzige mögliche Wert.

Hieraus schließt man, daß das Potential  $\varphi$  der Ladungen  $e_1, e_2, \dots$  die Form hat

$$(20) \quad \varphi = e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 + \dots,$$

wo die  $\varphi_i$  von den  $e_i$  unabhängige Ortsfunktionen sind.

Der Energieausdruck III. läßt sich auf Grund von (12), wenn wir dort  $\varphi$  statt  $\varphi''$  setzen, auf die Form bringen

$$(21) \quad W = \frac{1}{2} \sum e \varphi.$$

Die Energien zweier Felder überlagern sich nicht, sondern es kommt noch eine *wechselseitige Energie*

$$U = \frac{1}{2} \sum (e'' \varphi' + e' \varphi'')$$

hinzzu. Für diese wechselseitige Energie gewinnt man durch partielle Integration von  $\int \varepsilon \mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' dS$  noch die folgenden Darstellungen:

$$(22) \quad U = \sum e'' \varphi' = \sum e' \varphi'' = \int \varepsilon \mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' dS.$$

Aus (22) folgt: Bringt man die unendlich kleine Elektrizitätsmenge  $de$  zu einem Felde hinzzu, so ist die Energiezunahme

$$dW = \varphi de,$$

also

$$(23) \quad \varphi = \frac{\partial W}{\partial e},$$

---

Cavendish gemacht; es ergab sich bei einer späteren Wiederholung des Versuchs als Exponent  $2 \pm 5 \cdot 10^{-6}$ . Eine Kritik der Theorie des Versuchs findet man bei *S. J. Barnett*, Phys. Rev. 15 (1902), p. 175.

d. h. das Potential eines Punktes (Leiters) ist gleich der Energievermehrung, die auftritt, wenn man die unendlich kleine Menge  $de$  dem Punkte (Leiter) zufügt, geteilt durch eben diese Menge.

## I. Elektrostatik.

A. Die Dielektrizitätskonstante ist im ganzen Raum eine und dieselbe Konstante.

7. Systeme von Leitern. Kapazität. Potentialverstärker. Influenzmaschine. Plattenkondensator. Es seien  $n$  Leiter in einer leitenden Hülle vom Potential Null eingeschlossen. Der  $\nu$ te Leiter habe das Potential  $V_\nu$  und die Elektrizitätsmenge  $e_\nu$ , dann ist wegen (20)

$$(24) \quad V_\nu = \sum_{k=1}^n \beta_{\nu k} e_k.$$

Auflösung nach den  $e_\mu$  ergibt

$$(25) \quad e_\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_{\mu i} V_i.$$

Wegen (24) und (23) ist

$$(26) \quad \beta_{\nu \mu} = \frac{\partial V_\nu}{\partial e_\mu} = \frac{\partial}{\partial e_\mu} \left( \frac{\partial W}{\partial e_\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left( \frac{\partial W}{\partial e_\mu} \right) = \beta_{\mu \nu},$$

also auch

$$(27) \quad \alpha_{\nu \mu} = \alpha_{\mu \nu}.$$

Die  $\beta$  heißen *Potentialkoeffizienten*, ein  $\alpha$  mit verschiedenen Indizes heißt *wechselseitiger* (elektrostatischer) *Induktionskoeffizient*,  $\alpha_{\mu \mu}$  heißt die *Kapazität* des Leiters  $\mu$ , sie ist gleich der Elektrizitätsmenge, welche auf dem Leiter sitzt, wenn sein Potential 1 ist, während die übrigen Leiter das Potential Null haben.

Mit Hilfe von (21) und (24) resp. (25) wird

$$(28) \quad W_{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \beta_{\mu \nu} e_\mu e_\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots n.$$

resp.

$$(29) \quad W_{(V)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_{\mu \nu} V_\mu V_\nu.$$

Erteilt man den geladenen Leitern virtuelle Verschiebungen, indem man auf jedem die gesamte Elektrizitätsmenge konstant lässt, so wird die Arbeit gleich der Abnahme der elektrischen Energie<sup>15)</sup>, d. h.

15) Damit man die Arbeit gleich der ganzen Energieabnahme setzen kann, muß man zeigen, daß die Joulesche Wärme bei einer Verschiebung unendlich klein gegen die übrige Energieänderung ist. Dieser Beweis läßt sich führen; vgl. Kirchhoff, Vorlesungen 3, p. 76 ff. oder Cohn, Elm. Feld, p. 59.

$$(30) \quad \delta A = -\delta W_{(e)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} e_{\mu} e_{\nu} \delta \beta_{\mu\nu}.$$

Die  $\beta_{\mu\nu}$  enthalten die Parameter, welche die Lage der geladenen Körper bestimmen.

Setzt man in (30) anstatt der  $e$  die  $V$  mit Hilfe von (25) ein, so folgt

$$(31) \quad \delta A = +\delta W_{(V)} = +\frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} V_{\mu} V_{\nu} \delta \alpha_{\mu\nu}.$$

Die fragliche Arbeit ist also auch gleich der *Zunahme* der Energie bei konstant gehaltenen Potentialen. Natürlich betrachten wir dann kein vollständiges System, weil zum Konstanthalten der Potentiale Energie aus den zur Verfügung stehenden Reservoiren nachströmen muß. Die Kräfte, die sich aus (30) oder dem ganz gleichwertigen Ausdruck (31) ergeben, sind also quadratische Funktionen der Elektrizitätsmengen oder der Potentiale.

Da  $W$  wesentlich positiv ist, folgt, daß

$$\alpha_{11}, \quad \left| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right|, \quad \dots \quad \left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right|$$

positiv sein müssen. Die analogen Bedingungen bestehen für die  $\beta$ .

Folgende Eigenschaften kommen den  $\alpha$  und  $\beta$  zu, wenn kein Leiter den anderen umschließt<sup>16)</sup>:

1. Die  $\alpha_{\nu\nu}$  sind  $> 0$ ; die  $\alpha_{\nu\mu} < 0$  ( $\nu \neq \mu$ ) und  $\sum_{\mu=1}^n \alpha_{\nu\mu} > 0$ .
2. Die  $\beta$  sind  $> 0$ ;  $\beta_{\nu\nu} > \beta_{\nu\mu}$ .
3. Durch Einführung neuer Leiter ins Feld, also auch durch Vergrößerung eines Leiters werden alle  $\beta_{\nu\nu}$  verkleinert.
4. Wachsen alle linearen Dimensionen eines Leiters  $\nu$  unbegrenzt, so werden die  $\beta_{\nu\mu}$  und  $\beta_{\nu\nu}$  Null wie das Reziproke dieser Dimension. Daraus folgt z. B., daß das Erdpotential sich nicht durch Ableitung von Ladungen in der Nähe der Erde ändert.
5. Bei gleichmäßiger Vergrößerung aller Dimensionen des Feldes ändern sich die  $\alpha$  in direktem, die  $\beta$  in umgekehrtem Verhältnis der Lineardimensionen.
6. Haben wir es mit nur zwei geladenen Leitern zu tun, und zwar so, daß alle Erregungslinien, die von einem ausgehen, auf dem anderen endigen (d. h. daß alle anderen Leiter unendlich weit entfernt sind, oder daß der eine Leiter den anderen vollständig umschließt), so ist

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -\alpha_{12} = \alpha$$

16) Vgl. Maxwell, Treatise 1, Art. 89b und 89c.

und daher

$$(32) \quad e_2 = -e_1 = \alpha(V_2 - V_1).$$

Eine solche Anordnung heißt ein *Kondensator*,  $\alpha$  ist seine *Kapazität*.

Wir betrachten  $n$  Kondensatoren im Raume, die so weit voneinander entfernt sind, daß sie sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die beiden Leiter eines Kondensators nennen wir seine Belegungen. Wir können die einzelnen Belegungen auf verschiedene Weise miteinander verbinden. Die Kapazität sehr dünner Drähte ist gegen die endlicher Kondensatoren zu vernachlässigen<sup>17)</sup>.

a) *Parallel geschaltete Kondensatoren*. Wir verbinden je eine Belegung aller Kondensatoren miteinander und die anderen Belegungen auch miteinander, so daß wir zwei zusammenhängende leitende Flächen haben. Dann ist

$$e_v^{(1)} = \alpha_v(V_1 - V_2), \\ e^{(1)} = \sum e_v^{(1)} = \sum \alpha_v \cdot (V_1 - V_2) = \alpha(V_1 - V_2).$$

Die Kapazität ist die Summe der Einzelkapazitäten.

b) *Hintereinanderschaltung (Kaskadenbatterie)*. Wir verbinden die zweite Belegung des  $v$ ten Kondensators mit der ersten des  $(v+1)$ ten und laden die erste Belegung des ersten Kondensators aufs Potential  $V_1$ , die zweite Belegung des letzten Kondensators aufs Potential  $V_2$ , dann ist das Potential der ersten Belegung des  $v+1$ ten gleich dem der zweiten Belegung des  $v$ ten Kondensators:

$$V_{v+1}^{(1)} = V_v^{(2)}.$$

Ferner sind die absoluten Werte  $e$  der Ladungen aller Belegungen einander gleich, also ist

$$V_v^{(2)} - V_v^{(1)} = \frac{e_v^{(2)}}{\alpha_v} = \frac{e}{\alpha_v},$$

folglich

$$V_2 - V_1 = e \sum_v \frac{1}{\alpha_v} = \frac{e}{\alpha}.$$

Die reziproken Werte der Einzelkapazitäten addieren sich also zum reziproken Wert der Gesamtkapazität.

Sind alle  $n$  Kapazitäten  $\alpha$  einander gleich, so ist die Gesamtkapazität  $A$  im Falle a)  $A = n\alpha$ ; im Falle b)  $A = \frac{\alpha}{n}$ .

Will man sich höhere Potentialdifferenzen verschaffen, als die zur Verfügung stehende Potentialquelle der Potentialdifferenz  $V$  liefert, so lade man eine Batterie in Parallelschaltung und schalte sie dann

---

17) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen 3, p. 24.

in Kaskaden<sup>18)</sup>: Da zuerst  $ne = n\alpha V$ , wo  $\alpha$  die Kapazität eines einzelnen Kondensators der Batterie ist, und nachher  $e = \frac{\alpha}{n} V'$  ist, so wird  $V' = nV$ . Solche Anordnungen heißen *Potentialverstärker*.

Die Energie einer Batterie ist wegen (21) und (32)

$$W = \frac{1}{2} \sum e_r V_r = \frac{1}{2} \sum \alpha_r V_r^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{e_r^2}{\alpha_r}.$$

Hier bedeutet  $V_r$  die Potentialdifferenz der Belegungen des  $n^{\text{ten}}$  Kondensators. Beim Potentialverstärker ist also in der ersten Schaltung die Energie  $\frac{n\alpha V^2}{2}$ , in der zweiten  $\frac{1}{2} \frac{\alpha}{n} V'^2 = \frac{\alpha n V^2}{2}$ , d. h. die Energie bleibt konstant, man erhält die Potentialerhöhung auf Kosten der zur Verfügung stehenden Elektrizitätsmenge.

Eine *Influenzmaschine* kann auch als Potentialverstärker oder Duplikator aufgefaßt werden. Das Prinzip ist folgendes<sup>19)</sup>:

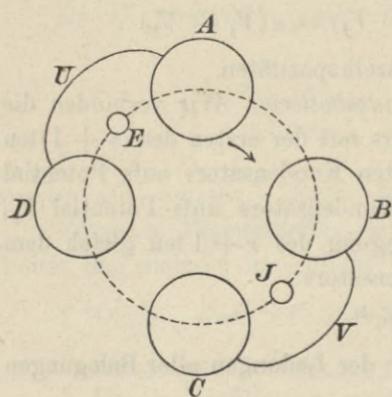


Fig. 1.

Zwei hohle Leiter  $A$  und  $D$  (vgl. Fig. 1) seien metallisch miteinander verbunden und auf dem Potential  $U_0$ ,  $B$  und  $C$  seien gleichfalls miteinander verbunden und auf dem Potential  $V_0$ . Die beweglichen Leiter  $E$  und  $J$  können in  $A$  und  $C$  mit der Erde (Potential 0) und in  $B$  und  $D$  mit diesen verbunden werden. Ist  $E$  in  $A$  mit der Erde verbunden, so ist die Elektrizitätsmenge —  $\alpha U_0$  auf  $E$  ( $\alpha$  Kapazität des Kondensators, bestehend aus  $E$  und  $A$ ), (nach (32)). Diese Ladung wird in  $B$  vollständig an  $B$  und  $C$  abgegeben (vgl. Nr. 5)

und erhöht das Potential um  $-\frac{\alpha}{c} U_0$  ( $c$  Kapazität von  $B$  und  $C$  zusammen). Nach einer halben Umdrehung ist also

$$V_1 = V_0 - \frac{\alpha}{c} U_0; \quad U_1 = U_0 - \frac{\alpha}{c} V_0.$$

Nach der  $n$ ten halben Umdrehung ebenso

18) Über Duplikatoren siehe W. Thomson, Proc. Royal. Soc. 1867 und Reprint Art. 352 und Art. 401—426; Historisches, Art. 427—429. Vgl. auch G. Plantés „Rheostatische Maschine“, Paris C. R. 85 (1877), p. 794 oder auch W. Kaufmann, Gött. Nachr. (1901), p. 143 und W. Hallwachs, Ann. Phys. Chem. (3) 29 (1886), p. 300.

19) Vgl. Maxwell, Treatise 1, Art. 209 (hier finden sich auch historische Angaben) oder E. Cohn, Elm. Feld, p. 81.

$$V_n = V_{n-1} - \frac{\alpha}{c} U_{n-1}; \quad U_n = U_{n-1} - \frac{\alpha}{c} V_{n-1}$$

oder

$$V_n - U_n = (V_{n-1} - U_{n-1}) \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) = (V_0 - U_0) \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right)^n.$$

*Maxwell* hat<sup>19)</sup> auch einen Duplikator angegeben, bei dem die ganze geleistete Arbeit in elektrische Energie verwandelt wird, indem das Auftreten von Funken dadurch vermieden wird, daß nur Leiter gleichen Potentials miteinander in Berührung kommen.

Stehen sich zwei Metallplatten von den Potentialen  $V_1$  resp.  $V_2$  in dem kleinen Abstande  $a$  gegenüber, und legen wir die  $z$ -Achse in die Richtung der Plattenormalen, so wird an Stellen zwischen den Platten, die vom Rande weit entfernt sind,

$$\varphi = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{a} z.$$

Die Dichte folgt aus IV.

$$\omega_1 = -\omega_2 = -\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = -\varepsilon \frac{V_2 - V_1}{a}.$$

Sehen wir von den Rändern ab, wo die Elektrizitätsverteilung verwickelter ist, so ist auf der ganzen Fläche  $\sigma$

$$(38) \quad e_1 = -e_2 = -\varepsilon \frac{V_2 - V_1}{a} \sigma,$$

d. h. die Kapazität ist (vgl. (32))  $\alpha = \frac{\varepsilon \sigma}{a}$ .

Zwei Kondensatoren mit verschiedenen Dielektrizis haben also gleiche Kapazitäten, wenn  $\varepsilon/\varepsilon' = \sigma/a/\sigma a'$  ist. So kann man Dielektrizitätskonstanten vergleichen<sup>20)</sup>. Die genauere Formel für die Kapazität eines Kreisplattenkondensators mit Berücksichtigung der Streuung der Erregungslinien und der Elektrizität auf den einander abgewandten Seiten findet sich unten (Nr. 11).

Um bei absoluten Messungen mit einem Plattenkondensator möglichst unabhängig von der Randkorrektion zu sein, und um den Einfluß äußerer elektrischer Kräfte von den Kondensatorteilen zu eliminieren, hat *W. Thomson*<sup>21)</sup> einen sogenannten Schutzringkondensator konstruiert. Man nehme große Platten, trenne durch einen feinen Schnitt einen Teil der einen Platte, der weit vom Rande entfernt liegt, ab und sorge für leitende Verbindung beider Teile; dann ist die Kapazität des inneren Teils sehr nahe durch  $\frac{\varepsilon \sigma}{a}$  ausgedrückt. (Die genauere Formel findet sich in Nr. 11.)

20) *L. Boltzmann*, Wien Ber. 67<sup>2</sup> (1873), p. 17.

21) *W. Thomson*, Reprint Art. 360.

### 8. Kräfte eines Leitersystems. Absolutes Elektrometer.

**Quadrantenelektrometer.** Die Arbeit bei einer virtuellen Verschiebung ist durch Nr. 7 (30) und (31) gegeben. Ist das Medium zwischen den Leitern homogen, so sind die  $\beta$  der Dielektrizitätskonstante umgekehrt (vgl. (24) u. (15)), die  $\alpha$  direkt proportional (vgl. (25) u. (15)); also sind die Kräfte bei gegebenen Elektrizitätsmengen (Potentialen) der Dielektrizitätskonstanten umgekehrt (direkt) proportional<sup>22)</sup>.

Zur absoluten Bestimmung von Potentialen eignet sich der Thomson'sche Schutzzringkondensator, das sogenannte absolute Elektrometer (vgl. Nr. 7<sup>23)</sup>). Aus (31) und (33) folgt

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} \delta \alpha = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \delta a = - \frac{(V_2 - V_1)^2}{2} \frac{\varepsilon \sigma}{a^2} \delta a,$$

d. h. die Kraft, welche den Plattenabstand zu verkleinern sucht, ist

$$(35) \quad \frac{\varepsilon \sigma}{2} \left( \frac{V_2 - V_1}{a} \right)^2 = \frac{\varepsilon \sigma}{2} \mathfrak{E}^2.$$

Wegen des genaueren Wertes siehe Nr. 11. Man hängt die eine Kondensatorplatte an der Wage auf und kompensiert die Kraft (35) durch Gewichte.

Verzichtet man auf absolute Messung der Potentiale, so ist das Quadrantenelektrometer von W. Thomson<sup>24)</sup> als das bedeutend empfindlichere Instrument vorzuziehen. Eine flache Metallbüchse ist durch zwei zusammen senkrechte Achsenschnitte in 4 Quadranten geteilt (Fig. 2).

Je zwei diagonal gegenüberliegende Quadranten sind metallisch miteinander verbunden und befinden sich auf den Potentialen  $A$  und  $B$ , während eine biskuitförmige Scheibe, die „Nadel“, deren Ebene parallel Boden und Deckel der Büchse ist, und die frei um die vertikal stehende Achse der Büchse drehbar ist, auf dem Potential  $C$  sich befindet. Sind  $A$ ,  $B$ ,

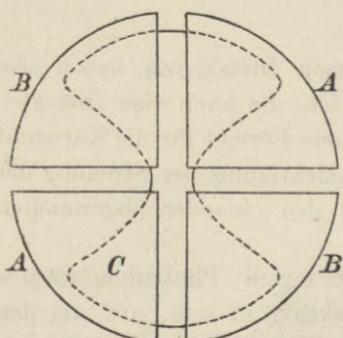


Fig. 2.

$C$  einander gleich, so sind die Slitze zwischen den Quadranten Symmetrieebenen der Nadel. Der ganze Apparat befindet sich in

22) Dieser Satz wurde von H. Helmholtz zuerst ausgesprochen J. f. Math. 72 (1870), p. 117; zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten wurde er zuerst benutzt von P. Silow, Ann. Phys. Chem. (2) 156 (1875), p. 389.

23) W. Thomson, Reprint Art. 358 u. Phil. Mag. (4) 8 (1854), p. 42.

24) W. Thomson, Reprint Art. 345.

einer Metallhülle vom Potential Null. Die Elektrizitätsmengen, die  $A, B, C$  entsprechen, seien  $e_a, e_b, e_c$ . Dann ist wegen (25) und (27)

$$(36) \quad \begin{aligned} e_a &= \alpha_{aa}A + \alpha_{ab}B + \alpha_{ac}C, \\ e_b &= \alpha_{ba}A + \alpha_{bb}B + \alpha_{bc}C, \quad \alpha_{\nu\mu} = \alpha_{\mu\nu}. \\ e_c &= \alpha_{ca}A + \alpha_{cb}B + \alpha_{cc}C. \end{aligned}$$

Wegen der unter 1. in Nr. 7 angegebenen Eigenschaften ist nun  $\alpha_{\nu\nu} > 0, \alpha_{\nu\mu} < 0, \sum_{\mu} \alpha_{\nu\mu} > 0$ . Daher kann man schreiben

$$(36') \quad \begin{aligned} e_a &= \gamma_{ab}(A - B) + \gamma_{ac}(A - C) + \gamma_a A, \\ e_b &= \gamma_{ba}(B - A) + \gamma_{bc}(B - C) + \gamma_b B, \\ e_c &= \gamma_{ca}(C - A) + \gamma_{cb}(C - B) + \gamma_c C, \end{aligned}$$

wo alle  $\gamma > 0$  und  $\gamma_{\nu\mu} = \gamma_{\mu\nu}$ .

Die Energie ist wegen (21)

$$(37) \quad W = \frac{1}{2} \{ \gamma_{ab}(A - B)^2 + \gamma_{ac}(A - C)^2 + \gamma_{bc}(B - C)^2 + \gamma_a A^2 + \gamma_b B^2 + \gamma_c C^2 \}$$

Das Drehmoment auf die Nadel wird nach (31)

$$\mathfrak{N} = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

wo  $\vartheta$  der Winkel ist, um den die Nadel aus der Ruhelage abgelenkt ist.

Die Konstruktion des Instruments läßt Schlüsse auf die Abhängigkeit der  $\gamma$  von  $\vartheta$  zu. Die breite Form der Nadel und die Schmalheit der Schlüsse bewirken, daß von den Rändern der Nadel keine Erregungslinien nach den Rändern der Quadranten laufen, so daß sich bei einer unendlich kleinen Drehung  $d\vartheta$  die Anzahl Erregungslinien, die zwischen  $B$  und  $C$  verlaufen, um einen  $d\vartheta$  proportionalen Betrag vermehren. Aus Symmetriegründen ist

$$\frac{\partial \gamma_{bc}}{\partial \vartheta} = - \frac{\partial \gamma_{ac}}{\partial \vartheta} = k,$$

dagegen sind  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_{ab}$  von  $\vartheta$  unabhängig, weil die Anzahl Erregungslinien, die von den Quadranten oder von der Nadel zur Hülle, sowie von einem Quadrantenpaar zum anderen gehen, durch die Drehung sich nicht verändern.

Also ist

$$(38) \quad \mathfrak{N} = \frac{k}{2} \{ (B - C)^2 - (A - C)^2 \} = k(A - B) \left\{ (C - A) + \frac{A - B}{2} \right\}.$$

Die verschiedenen Schaltungsweisen der Quadranten und der Nadel

sind von *Hallwachs*<sup>25)</sup> behandelt. Er berücksichtigt auch die Kontaktpotentialdifferenzen zwischen den Metallteilen (s. u. Nr. 20).

**9. Zweidimensionale Probleme<sup>26)</sup>.** **Abbildung. Dichtigkeit der Elektrizität an Kanten.** Wenn eine Verteilung der Elektrizität auf leitenden Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden vorliegt und die Querdimensionen klein sind gegen die Längenerstreckung der Zylinder, und wenn nur nach dem Zustand in den mittleren Teilen gefragt wird, so hängt das Problem allein von den zwei Variablen  $x$  und  $y$  ab, während es von den den Erzeugenden parallelen Variablen unabhängig ist.

Setzen wir

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2, \\ r^2 &= (z - c)^2 + \varrho^2,\end{aligned}$$

wo  $a, b, c$  die laufenden Koordinaten sind, so wird

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\omega}{r} d\sigma$$

unendlich. Man kann  $\varphi$  aber durch Addition einer unendlich großen Konstanten auf die Form

$$(39) \quad \varphi = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int \omega \lg \varrho ds,$$

bringen. Diese Addition ist erlaubt, da  $\varphi$  nach Nr. 3 nur bis auf eine additive Konstante definiert ist.  $ds$  bedeutet ein Element der Spur der Zylinderflächen in der  $xy$ -Ebene.

Wegen der Form von (39) heißt  $\varphi$  das logarithmische Potential zum Unterschied von dem Potential  $\varphi$  der Nr. 4 (15), welches das Newtonsche Potential heißt.

$\varphi$  genügt der Gleichung

$$(40) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

25) *W. Hallwachs*, Ann. Phys. Chem. (3) 29 (1886), p. 1. Die Theorie ist vervollständigt unter der Annahme, daß bei Drehungen auch die höheren Potenzen des Drehwinkels mit in Betracht kommen. Dann ergibt sich außer dem oben angegebenen konstanten Drehmoment noch eins, das dem Ablenkungswinkel proportional ist. *Gouy*, J. d. phys. (2) 7 (1888), p. 97; *A. B. Chauveau*, J. d. phys. (3) 9 (1900), p. 524. Die Theorie eines Bifilarquadrantelektrometers mit konstanter Empfindlichkeit gibt *A. Hartwich*, Königsberger Diss. 1888 oder Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 772.

26) Vgl. auch *C. Neumann*, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Leipzig 1877.

welche auch der reelle Teil jeder Funktion  $\chi = \varphi + i\psi$  komplexen Arguments  $z = x + yi^{27)}$  befriedigt.

Liegen die leitenden Zylinderflächen sämtlich im Endlichen, so muß  $\varphi$  im Unendlichen wegen (39) die Form

$$(41) \quad \varphi_\infty = -\frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg R$$

haben, wo  $E = \int \omega ds$  die Gesamtelektrizitätsmenge auf der Höhen-einheit der Zylinder,  $R$  den Abstand von einem beliebigen festen Punkt im Endlichen bedeutet.  $\varphi + \frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg R$  muß also im Unendlichen verschwinden.

Die Grundgleichungen der Cauchy'schen Funktionentheorie sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s},$$

wenn die zueinander senkrechten Richtungen  $s$  und  $n$  im Sinne der reellen und imaginären Achse aufeinander folgen. Aus der letzten dieser beiden Beziehungen ergibt sich, daß die Elektrizitätsmenge  $E$  auf der Höhe 1 zwischen zwei Punkten  $s_1$  und  $s_2$  einer Randkurve — so wollen wir kurz die Spur eines Zylinders in der  $xy$ -Ebene nennen — mit den Werten  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sich durch die Formel

$$(42) \quad E = -\int_{s_1}^{s_2} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \varepsilon(\psi_2 - \psi_1)$$

ausdrückt.

Ist ein Zylinder mit beliebig gestalteter Basisfläche zum Potential  $\varphi_0$  geladen, so läßt sich das Potential außerhalb des Zylinders durch die Lösung einer Abbildungsaufgabe finden. Man braucht nämlich nur den Raum außerhalb der Randkurve  $s$  des Zylinders in der  $z$ -Ebene auf den Innenraum des Einheitskreises in einer  $w$ -Ebene abzubilden, indem man eine Funktion  $w = u + vi$  von  $z$  sucht, welche auf der Randkurve  $s$  den absoluten Wert 1 hat und für  $z = \infty$  sich in der Form

$$(43) \quad w = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (a_1 \neq 0)$$

entwickeln läßt. Durch

$$(44) \quad w = e^{\frac{2\pi\varepsilon}{E}(z-h)}$$

ist dann das Problem gelöst, wenn der reelle Teil der Konstanten  $h$

27)  $z$  ist hier nicht mit der früher so bezeichneten dritten Raumkoordinate zu verwechseln.

gleich dem vorgeschriebenen Potentialwert  $\varphi_0$  auf  $s$  ist. Denn aus (44) folgt

$$(44') \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg |w|.$$

Wegen (41) und (43) muß  $\varphi_0 + \frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg |a_1| = 0$  sein, d. h. die Kapazität der Längeneinheit des Zylinders (vgl. Nr. 7)  $\frac{E}{\varphi_0} = \frac{2\pi\varepsilon}{\lg \frac{1}{|a_1|}}$

ist durch das erste Glied der Entwicklung von  $w$  im Unendlichen gegeben.

Es ist wesentlich, daß nur *ein* Zylinder vorhanden ist, daß also der Raum außerhalb der Randkurve einfach zusammenhängend ist, da sonst die Abbildung auf den Einheitskreis nicht möglich wäre. Das Gleichgewicht der Elektrizität auf mehreren Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt behandelt *B. Riemann*<sup>28)</sup> in einer Arbeit, die den ersten Anstoß zur Theorie der automorphen Funktionen gegeben hat.

In der Nähe einer Ecke vom Winkel  $(1 - \alpha)\pi$  (im Dielektrikum gerechnet) erhält man das Potential durch Abbildung der  $z$ -Ebene auf eine  $w$ -Halbebene mittels der Formel

$$(47) \quad w = (z - z_0)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

so daß

$$(48) \quad \chi = \chi_0 + c \cdot (z - z_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

wird. Aus (42) berechnet sich die Elektrizitätsmenge auf der Höhe 1 über jeder endlichen Länge  $s$  der Randkurve, und aus (48) ergibt sich diese Menge als endlich, auch wenn die Kante sich auf dem betrachteten Stück befindet. Wegen (42) ist die Dichte der Elektrizität gleich dem Faktor von  $i$  in  $\varepsilon \frac{d\chi}{ds} = \varepsilon \frac{d\chi}{dz} e^{i\gamma} = \varepsilon \frac{c e^{i\gamma}}{1-\alpha} (z - z_0)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ , wo  $\gamma$  der Winkel ist, den die Kante mit der  $x$ -Achse einschließt; die Dichte ist also unendlich klein (groß), wenn  $\alpha > 0 (< 0)$  ist, d. h. wenn die Kante des Zylinders ein-(aus-)springt.

Im dreidimensionalen Felde ergibt sich die Elektrizitätsverteilung in der Nähe einer scharfen Kante nach *A. Sommerfeld*<sup>29)</sup>. *Green*<sup>30)</sup> beschäftigt sich mit der Frage der Elektrizitätsdichte an einer Kegelspitze, er findet daß die Dichte bei ein-(aus-)springenden Spitzen un-

28) *B. Riemann*, Ges. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 440.

29) *A. Sommerfeld*, Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 395; vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b Nr. 9, p. 476.

30) *G. Green*, Essay; s. Ostw. Klassiker Nr. 61, p. 66.

endlich klein (groß) wird, und zwar gibt er auch die Stärke des Null resp. Unendlichwerdens in der Nähe der Spitze an.

Ganz allgemein läßt sich auch die Elektrizitätsverteilung auf einem unendlich langen Prisma von polygonaler Basis berechnen, da mit Hilfe der *Schwarzschen* Derivierten jedes Polygon sich auf den Einheitskreis abbilden läßt<sup>31)</sup>. Mit diesem Problem identisch ist das des elektrischen Gleichgewichts auf den beiden Belegungen eines Kondensators, wenn diese Belegungen Prismen von polygonaler Basis mit parallelen Erzeugenden sind und die Basis sich ins Unendliche erstreckt, so daß das Dielektrikum ein einfach zusammenhängender Raum ist.

Ist das Potential auf der einen Belegung Null, auf der anderen konstant  $= \varphi_0$ , so besteht die Aufgabe darin, das Polygon in der  $z$ -Ebene — und zwar den Teil, welcher dem Dielektrikum entspricht — auf einen Streifen in der  $\chi$ -Ebene abzubilden, der durch die imaginäre Achse  $\varphi = 0$  und eine ihr Parallele  $\varphi = \varphi_0$  begrenzt ist, so daß die eine Grenze des Streifens der Spur der einen Kondensatorplatte, die andere Grenze der Spur der anderen Platte entspricht.

Man bewerkstelligt dies<sup>31)</sup> durch Abbildung des Polygons in der  $z$ -Ebene und des Streifens in der  $\chi$ -Ebene auf den Teil der  $t$ -Ebene, der durch die reelle Achse und einen unendlich großen Halbkreis auf der positiv imaginären Seite der  $t$  mit  $t = 0$  als Zentrum begrenzt ist.

Den  $n$  Ecken des Polygons mögen die Punkte  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  auf der reellen Achse der  $t$ -Ebene der Reihe nach entsprechen. Dann wird durch

$$(45) \quad z = C \int (a_1 - t)^{-\alpha_1} (a_2 - t)^{-\alpha_2} \dots (a_n - t)^{-\alpha_n} dt + C_1$$

diese Abbildung erreicht. Die  $\alpha$  sind durch die Polygonwinkel bestimmt, indem  $(1 - \alpha_v)\pi$  resp.  $(\alpha_v - 1)\pi$  der  $v^{\text{te}}$  innere Polygonwinkel ist, je nachdem der der  $v^{\text{ten}}$  Ecke in der  $z$ -Ebene entsprechende Kreisbogen in der  $t$ -Ebene, der den Punkt  $a_v$  von der Halbebene ausschließt, unendlich klein oder unendlich groß ist.  $C$  und  $C_1$  bestimmen sich, indem man willkürlich zwei aufeinanderfolgenden Ecken des Polygons zwei aufeinanderfolgende  $a$  zuordnet.

Ebenso läßt sich der Streifen in der  $\chi$ -Ebene auf die  $t$ -Halbebene abbilden, und zwar durch die Funktion

$$(46) \quad \chi = \varphi_0 \left( 1 + \frac{i}{\pi} \lg t \right),$$

wo  $\lg t$  für positiv reelle Werte von  $t$  reell zu nehmen ist.

31) *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 105; *E. B. Christoffel*, Ann. di mat. (2) 1 (1867); 4 (1870), siehe auch Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b Nr. 20.

Eliminiert man  $t$  aus (45) und (46), so ist  $z$  durch  $\chi$  und damit auch  $\chi$  durch  $z$  ausgedrückt. Der reelle Teil  $\varphi$  von  $\chi$  gibt das

Potential, der imaginäre Teil  $\psi$  durch Anwendung von (42) die Elektrizitätsmengen auf der Höheneinheit der Prismenflächen.

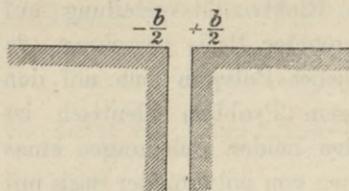


Fig. 3.

überstehen, wie Fig. 3 es andeutet, die einen Schnitt senkrecht zur Längenerstreckung der Platten darstellt.

Den Punkten

$$z = -\frac{b}{2}, -i\infty, +\frac{b}{2}$$

mögen die Punkte

$$t = -1, 0, +1$$

entsprechen. Die Polygonwinkel in diesen Punkten der  $z$ -Ebene sind

$$\frac{3\pi}{2}, 0, \frac{3\pi}{2},$$

also ergibt (45)

$$z = C \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dt + C_1$$

oder bei richtiger Bestimmung von  $C$  und  $C_1$

$$(45') \quad z = \frac{b}{2} + \frac{bi}{\pi} \left\{ \sqrt{1-t^2} + \lg \frac{t}{\sqrt{1-t^2+1}} \right\}.$$

(45') und (46) stellen die Lösung des Problems dar.

*Helmholtz*<sup>32)</sup> hat durch die Abbildung zweier geradlinigen Schnitte (also einer zweifach zusammenhängenden Fläche), deren Endpunkte die Ecken eines Rechtecks bilden, auf einen Kreisring das Problem des Plattenkondensators behandelt, dessen Länge sehr groß gegen Breite und Plattenabstand ist. Die Endformel ist jedoch nicht richtig; sie ist von *H. Weber*<sup>33)</sup> verbessert.

**10. Anwendung auf das Schutzgitter**<sup>34)</sup>. Eine geschlossene metallische Hülle schützt das Innere vor der Einwirkung eines äußeren

32) *H. Helmholtz*, Berl. Ber. (1868), p. 215 oder Wissensch. Abh. 1, p. 157, Leipzig. 1882.

33) *H. Weber*, Partielle Differentialgleichungen 1, p. 356. Eine eingehende Untersuchung dieses Falles findet sich auch bei *F. Bennecke*, Verh. d. Leop. Carol. Ak. 51 (1887), p. 253; vgl. auch *Maxwell*, Treatise 1, Art. 202 und die Fig. Tafel 13.

34) Vgl. *Maxwell*, Treatise 1, Art. 203 (genauere Behandlung Art. 206) u.

elektrischen Feldes (Nr. 5). Da das Innere dann aber der Beobachtung unzugänglich ist, soll untersucht werden, inwieweit eine Hülle sich durch ein Gitter ersetzen läßt, welches aus leitend miteinander verbundenen Drähten vom Radius  $c$  und dem Abstand  $a$  gebildet ist.

Befindet sich im Felde ein einziger mit der Elektrizitätsmenge  $E$  auf der Höheneinheit geladener metallischer Kreiszylinder, so ist das Potential symmetrisch um den Mittelpunkt

$$\varphi = -\frac{E}{2\pi\epsilon} \log r$$

d. h.

$$(50) \quad \chi = -\frac{E}{2\pi\epsilon} \log z.$$

Die Niveauflächen sind mit dem Drahte konzentrische Kreiszylinder.  $\chi$  bleibt in der Nähe des Drahtes endlich, da (50) nur außerhalb des Leiters gilt, also  $|z| \geq c$  sein muß. Denken wir uns  $\chi$  aber durch (50) auch ins Innere des Drahtes analytisch fortgesetzt, so wird  $\chi$  in der Drahtachse logarithmisch unendlich.

Es mögen sich jetzt die Achsen der Gitterdrähte in den Punkten  $z_\nu = \pm \nu a$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) befinden. Wenn  $c$  sehr klein gegen  $a$  ist, d. h. wenn ein Draht auf seinen Nachbardrähten nicht merklich durch Influenz die Verteilung ändert, so wird  $\chi$  in der Nähe des bei  $z_\nu$  befindlichen Drahtes sich durch

$$(51) \quad \chi = -\frac{E}{2\pi\epsilon} \log(z - z_\nu) + \text{funct. cont.}$$

darstellen lassen.

Die Funktion  $e^{\frac{2\pi z}{a}} - 1$  bildet den Punkt  $z = 0$  auf die Punkte  $z_\nu$  ab und einen die Stelle  $z = 0$  umgebenden Kreis in eine Reihe die Stellen  $z_\nu$  umgebende Kurven, die um so eher als Kreise angesehen werden können, je kleiner der Radius des abgebildeten Kreises ist.

Da in der  $\nu^{\text{ten}}$  Drahtachse  $(e^{\frac{2\pi z}{a}} - 1)$  genau ebenso unendlich wird wie  $\log(z - z_\nu)$ , so gilt für das Gitter

$$(51') \quad \chi = -\frac{E}{2\pi\epsilon} \log \left( e^{\frac{2\pi z}{a}} - 1 \right) + \text{funct. cont.}$$

(51') ist die Form des Potentials, auch wenn noch beliebige andere geladene Körper im Felde sind, von denen nur vorausgesetzt wird, daß dieselben in einer gegen den Drahtradius großen Entfernung sich befinden. Denn in der Nähe eines Drahtes überwiegt der erste

---

die Zeichnung Tafel 14; siehe auch H. Weber, Partielle Differentialgl. 1, p. 441, wo das Problem als Strömungsaufgabe behandelt ist.

Term von (51'), und dieser ergibt ein Potential  $\varphi$ , welches auf den Drahtoberflächen annähernd konstant ist. Addieren wir zu (51') die konjugierte Funktion  $\varphi - i\psi$ , so erhalten wir

$$(52) \quad \varphi = -\frac{E}{4\pi\epsilon} \log \left\{ e^{\frac{4\pi x}{a}} + 1 - 2e^{\frac{2\pi x}{a}} \cos \frac{2\pi y}{a} \right\} + \text{funct. cont.}$$

Lassen wir in (52) die funct. cont. fort, so wird für

$$x = +\infty : \cdots \varphi = -\frac{E}{\epsilon} \frac{x}{a}$$

und für

$$x = -\infty : \cdots \varphi = 0;$$

d. h. wir haben den Fall, daß parallel der Gitterebene in großer Entfernung vom Gitter eine leitende Ebene steht, die mit der Dichte  $-\frac{E}{a}$  geladen ist, auf der also sämtliche vom Gitter ausgehenden Erregungslinien münden (auf dies Problem bezieht sich die Figur bei Maxwell<sup>34)</sup>).

Sollen auf beiden Seiten des Gitters, und zwar in großer Entfernung von demselben, dem Gitter parallel, geladene Ebenen stehen, so brauchen wir nur in (52) für funct. cont.  $-C_1 x + C_2$  zu substituieren. Setzen wir zur Abkürzung  $-\frac{E}{4\pi\epsilon} = C$ , so erhalten wir

$$(52') \quad \varphi = C \log \left\{ e^{\frac{4\pi x}{a}} + 1 - 2e^{\frac{2\pi x}{a}} \cos \frac{2\pi y}{a} \right\} - C_1 x + C_2.$$

Die Konstanten  $C, C_1, C_2$  lassen sich durch das Potential  $V_0$  des Gitters, sowie durch die Potentiale  $V_1$  und  $V_2$  der beiden dem Gitter parallelen Ebenen, die in den Abständen  $b_1$  und  $b_2$  zu verschiedenen Seiten des Gitters stehen, ausdrücken.

Da  $V_0$  das Potential des Gitters sein soll, so ergibt sich, daß für  $x = 0, y = c \pm va$

$$(53) \quad V_0 = 2C \log 2 \sin \frac{\pi c}{a} + C_2 = -\frac{4\pi C}{a} \alpha + C_2,$$

wenn

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi} \log 2 \sin \frac{\pi c}{a}.$$

Sind  $b_1$  und  $b_2$  positiv und groß gegen  $a$ , so sind die Ebenen  $x = +b_1$  und  $x = -b_2$  Äquipotentialflächen; da sie die Potentiale  $V_1$  resp.  $V_2$  und die Dichten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  haben sollen, so folgt durch Elimination von  $C, C_1, C_2$

$$(54) \quad \begin{aligned} \frac{\omega_1}{\epsilon} \left( b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) &= V_1 \left( 1 + \frac{b_2}{\alpha} \right) - V_2 - V_0 \frac{b_2}{\alpha}, \\ \frac{\omega_2}{\epsilon} \left( b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) &= V_2 \left( 1 + \frac{b_1}{\alpha} \right) - V_1 - V_0 \frac{b_1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Verbindet man das Gitter leitend mit der Ebene  $x = b_1$ , so wird  $V_0 = V_1$  und

$$\frac{\omega_1}{\varepsilon} \left( b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha} \right) = V_1 - V_2.$$

Das Gitter wirkt also so, als wenn es nicht vorhanden wäre und dafür die Entfernung  $b_1 + b_2$  auf  $b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}$  vergrößert wäre.

**11. Anwendung auf den Kondensator.** Da Formel (33) in Nr. 7 nur für die Kapazität eines Plattenkondensators mit ebenen Platten gilt, behandelt Clausius<sup>35)</sup> den Fall, daß zwei gekrümmte parallele Leiterflächen, deren Hauptkrümmungsradien in einem bestimmten Punkte  $R$  und  $R'$  sind, im Abstande  $a$  sich gegenüberstehen.

Wählt man die Tangentialebene in einem Punkte der ersten Platte zur  $xy$ -Ebene, den Berührungs punkt zum Koordinatenursprung und die Richtung der Hauptkrümmungslinien zu Koordinatenrichtungen  $x$  und  $y$ , so ist nach dem Taylorschen Satze

$$V = V_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 z + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{z^2}{2} + \dots$$

Setzen wir für  $z$  den Abstand  $a$  der Platten, so folgt

$$(55) \quad V_2 - V_1 = \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 a + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{a^2}{2} + \dots$$

Schreitet man vom Koordinatenursprung in der Schnittlinie der  $xz$ -Ebene und der Oberfläche der ersten Platte unendlich wenig vorwärts, so ändert sich  $V$  nicht, also ist

$$(56) \quad dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 dx + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 dz + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 \frac{dx^2}{2} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_1 dxdz + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{dz^2}{2} + \dots = 0.$$

Da aber

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 = 0 \quad \text{und} \quad dz = \mp \frac{1}{2R_1} dx^2 + \dots,$$

wo das obere (untere) Zeichen gilt, wenn die Kurve, in der die  $xz$ -Ebene die Platte schneidet, vom Raum zwischen den Platten betrachtet, konvex (konkav) ist, so folgt

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1} \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 dx^2 + \dots = 0.$$

Also ergibt sich

$$(57) \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 = \pm \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1;$$

35) R. Clausius, Mechanische Wärmetheorie 2, p. 39 (2. Aufl., Braunschweig 1879).

ebenso ist

$$(57') \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_1 = \pm \frac{1}{R_1'} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1.$$

Setzt man diese Werte in die Laplace'sche Gleichung ein, so erhält man

$$(58) \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 = \left( \mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1.$$

Schließlich substituieren wir diesen Ausdruck für  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1$  in (55) und finden

$$V_2 - V_1 = \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 a \left[ 1 + \frac{a}{2} \left( \mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_1'} \right) \right] + \dots$$

Da aber  $-\varepsilon \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$  gleich der elektrischen Dichte ist, so folgt für die Kapazität

$$(59) \quad \alpha = \frac{\varepsilon \sigma_1}{a} + \frac{\varepsilon}{2} \int \left( \pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_1'} \right) d\sigma_1^{36}).$$

*Beispiel:* Von zwei konzentrischen Zylinderflächen mit den Radien  $R$  und  $R + a$  und der Höhe  $h$  werde durch zwei Ebenen, welche durch die Zylinderachse gehen und den Winkel  $\gamma$  miteinander bilden, ein Teil abgeschnitten. Die Kapazität dieses Teils lässt sich nach dem Vorigen berechnen. Es ist nämlich, wenn wir (59) auf die kleinere Fläche anwenden, das obere Zeichen bei  $R_1$  zu wählen und  $R_1' = R$  zu setzen; ferner ist  $R_1' = \infty$ , also finden wir

$$(60) \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{a} Rh\gamma + \frac{\varepsilon}{2} h\gamma = \frac{\varepsilon \sigma_1}{a} \left( 1 + \frac{a}{2R} \right)$$

Denselben Wert hätten wir erhalten durch Anwendung von (59) auf die größere Fläche  $\sigma_2 = h(R + a)\gamma$ ; dann hätten wir aber das negative Zeichen vor  $R_1$  zu nehmen gehabt.

Der Wert, den Clausius<sup>37)</sup> durch eine sehr umständliche Methode für die Kapazität eines Kondensators aus zwei unendlich dünnen Kreisplatten ohne Vernachlässigung der modifizierten Verteilung in der Nähe der Ränder findet, stimmt mit der Kirchhoff'schen Formel (s. u.) nicht überein, er ist durch die weitläufigen numerischen Rechnungen gefälscht.

Mit Hilfe einer bedeutend einfacheren und zuverlässigeren Methode, nämlich durch die konforme Abbildung geradliniger Polygone auf-

36) Maxwell, Art. 102a schließt die Kapazität eines beliebigen Systems auch in Grenzwerte ein, wenn der genäherte Verlauf der Erregungslinien bekannt ist. Er benutzt dabei eine Methode, die von Lord Rayleigh, Theory of sound 2 (1878), p. 162, 170 herrührt.

37) R. Clausius, Ann. Phys. Chem. (2) 86 (1852), p. 161.

einander behandelt *G. Kirchhoff*<sup>38)</sup>) denselben Fall. Da die Methode bei ähnlichen Problemen Anwendung finden kann, soll sie kurz skizziert werden.

Der Plattenradius  $R$  soll als unendlich groß, Plattenabstand  $a$  und Plattendicke  $b$  als unendlich klein gegen  $R$  angenommen werden, so daß höhere Potenzen von  $a/R$  und  $b/R$  vernachlässigt werden können. *Kirchhoff* teilt den ganzen Raum in drei Teile: Raum 1 ist ein ringförmiger Raum, dessen Oberfläche aus Punkten besteht, deren Abstände von den Rändern der Platten unendlich klein gegen  $R$ , aber unendlich groß gegen  $a$  und  $b$  sind. Raum 2 ist der noch übrige Raum zwischen den Platten, Raum 3 der noch übrige Raum außerhalb der Platten.

Es möge jetzt  $y$  die Koordinatenrichtung senkrecht zu den Plattenebenen sein, dann ist im Raume 2 das Potential

$$\varphi = \frac{2y}{a},$$

wenn es auf der einen Platte ( $y = +a/2$ ) gleich  $+1$  und auf der anderen Platte ( $y = -a/2$ ) gleich  $-1$  ist. In Raum 3 ergibt sich die Darstellung von  $\varphi$  nach Nr. 29 Gl. (131) als Potential einer Doppelschicht, deren Begrenzung ein Kreis vom Radius  $R$  um den Nullpunkt der Ebene  $y = 0$  ist.

$\varphi$  und seine Differentialquotienten müssen an der Grenze des Raumes 1 stetig in die in den Räumen 2 resp. 3 gültigen Werte übergehen. Durch diese Bestimmungen, sowie durch die Bedingung, daß  $\varphi$  in unendlicher Entfernung  $\varphi$  vom Kondensator wie  $1/\rho^2$  verschwinden muß, ist  $\varphi$  eindeutig gegeben. Findet man also ein Potential, welches allen Bedingungen genügt, so ist es das durch die Aufgabe verlangte.

Da die Elektrizitätsmengen auf den Teilen der Platten, die zu Raum 1 und Raum 3 gehören, nur unendlich klein sind, so vernachlässigt man nur Glieder höherer Ordnung, wenn man in diesen Raumteilen die Bedingungen, denen  $\varphi$  zu genügen hat, nur annähernd (mit Vernachlässigung von Größen erster Ordnung) erfüllt. Dies gilt nicht nur für die Grenzbedingungen, sondern auch für die Differentialgleichung selbst, der  $\varphi$  zu genügen hat.

Unter dieser Vernachlässigung hat z. B. in Raum 3 das Potential der Doppelschicht auf den rückseitigen Grenzflächen der Platten Werte, die nicht genau  $+1$  resp.  $-1$  sind, da der Winkel, unter dem die

38) *G. Kirchhoff*, Berl. Ber. 1877, p. 144 oder Ges. Abhandl., p. 101, Leipz. (1882). Für den speziellen Fall  $b/a = 0$  auch Vorlesungen 3, p. 90.

Doppelschicht von Punkten dieser Grenzflächen aus erscheint, von  $+2\pi$  resp.  $-2\pi$  in Größen erster Ordnung abweicht.

Unter denselben Vernachlässigungen muß  $\varphi$  in Raum 1 der Gleichung genügen

$$(61) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

wo  $x = R - \varrho$  endlich ist ( $\varrho$  Abstand des betrachteten Punktes von der Kondensatorachse).

Die Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $a/R$  und  $b/R$  kommt also darauf hinaus, daß im Raume 1 die Krümmung der Plattenränder unberücksichtigt bleibt, in Raum 2 die Werte gelten, die bestehen würden, wenn die Elektrizitätsmengen mit gleichförmiger Dichte auf den inneren Begrenzungsebenen der Platten verteilt wären und in Raum 3 die beiden Belegungen zu einer Doppelschicht mit entsprechend unendlich großer Ladung zusammenrückten.

Wegen (61) ist  $\varphi$  der reelle Teil einer Funktion  $w = \varphi + i\psi$  von  $z = x + yi$ .  $\varphi$  muß  $= +1$  sein auf der inneren Grenzfläche der einen Kondensatorplatte, d. h. für  $x > 0; y = +\frac{a}{2}$ , ferner am Rande dieser Platte, also für  $x = 0; \frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2} + b$ , und auf der äußeren Grenzfläche dieser Platte, also für  $x > 0; y = \frac{a}{2} + b$ .  $\varphi$  ist  $= -1$  auf der anderen Platte, also für  $x > 0; y = -\frac{a}{2}$ ; ferner für  $x = 0; -\frac{a}{2} - b \leq y < -\frac{a}{2}$ , und für  $x > 0; y = -\frac{a}{2} - b$ . Es ist also das durch die soeben angegebenen geradlinigen Strecken begrenzte Flächenstück der  $z$ -Ebene auf den durch die Geraden  $\varphi = \pm 1$  der  $w$ -Ebene begrenzten Streifen abzubilden. Dies gelingt durch die Schwarzsche Methode der konformen Abbildung geradliniger Polygone aufeinander (vgl. Nr. 9 und Anm. <sup>31)</sup>).  $\psi$  gibt ganz ähnlich wie in Nr. 9 (42) die Elektrizitätsverteilung auf den Platten an.

So erhält man als Kapazität

$$(62) \quad \alpha = \frac{\epsilon R^2 \pi}{a} \left\{ 1 + \frac{a}{R\pi} \left( \lg \frac{16\pi(a+b)R}{a^2} - 1 + \frac{b}{a} \lg \frac{a+b}{b} \right) \right\} \\ = \frac{\epsilon R^2 \pi}{a} (1 + k)^{38a}.$$

<sup>38a)</sup> N. Bulgakov, Mém. de l'acad. de St. Pétersbourg (8) 15 (1904), Nr. 3 geht von dem Potential zweier kongruenter abgeplatteter Rotationsellipsoide mit gemeinsamer Achse aus, auf denen er die Elektrizitätsmenge  $+e$  resp.  $-e$  so verteilt annimmt, wie sie ohne Vorhandensein des anderen Ellipsoids im Gleichgewicht wäre, und konstruiert hierzu die Äquipotentialflächen, von denen er sich dann zwei leitend denkt.

Um wenigstens für unendlich dünne Platten ( $b/a = 0$ ) den Einfluß der Streuung der Erregungslinien an den Rändern, sowie den Einfluß der auf den äußeren Flächen und auf dem Rande selbst sitzenden Elektrizität zu veranschaulichen, ist der in (62) mit  $k$  bezeichnete Ausdruck für verschiedene Werte von  $a/R$  in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

$a/R$	$k$
0.0001	0.0004
0.0005	0.0017
0.0010	0.0031
0.0050	0.0131
0.0100	0.0239

Nach demselben Prinzip wird sich auch der Einfluß der Enden beim Zylinderkondensator behandeln lassen. Die pro Längeneinheit gerechnete Kapazität eines sehr langen Zylinderkondensators ohne Berücksichtigung der Streuung an den Enden ergibt sich sofort aus der Laplace'schen Gleichung, indem man die Unabhängigkeit des Potentials von der  $z$ - und  $\varphi$ -Koordinate benutzt ( $z$  parallel der Zylinderachse,  $\varphi$  Azimut gegen eine feste Ebene durch die Zylinderachse)<sup>39)</sup>.

Kirchhoff<sup>38)</sup> hat nach derselben Methode die genaue Theorie des Schutzringkondensators gegeben (vgl. Nr. 7).  $a$  und  $b$  bedeuten daselbe wie oben, der Radius der ausgeschnittenen Kreisscheibe sei  $R - c$ , der innere Radius des Schutzringes  $R + c$ , also die Schlitzbreite  $2c$ . Wird  $b/c$  unendlich groß angenommen (sonst wird der Ausdruck komplizierter), so wird

$$(63) \quad \alpha = \frac{\epsilon R^2 \pi}{a} \left\{ 1 - \frac{4a}{R\pi} (\beta \operatorname{tg} \beta + \lg \cos \beta + 4q \sin^2 \beta) \right\},$$

wo  $c/a = \operatorname{tg} \beta$  und

$$-\lg q = 2 \left( 1 + \frac{\beta}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{b}{c} \frac{\pi}{2} \right).$$

Auch Maxwell<sup>40)</sup> hat für den Schutzringkondensator eine Formel abgeleitet:

$$(64) \quad \alpha = \frac{\epsilon (R - c)^2 \pi}{a} \left\{ 1 + \frac{2ac}{(a + \gamma)(R - c)} \left( 1 + \frac{c}{R - c} \right) \right\},$$

wo  $\gamma$  genähert  $\frac{2c}{\pi} \lg 2$  ist. (63) und (64) sind praktisch gleichwertig<sup>41)</sup>.

**12. Kugel. Ellipsoid. Zylinder. Ring.** Die Einführung krummliniger Koordinaten in die Laplace'sche Differentialgleichung ermög-

39) Maxwell, Treatise 1, Art. 126.

40) Maxwell, Treatise 1, Art. 201.

41) F. Himstedt, Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 126; 36 (1889), p. 759.

licht ohne weiteres die Lösung vieler Probleme<sup>41a)</sup>. So ergibt sich z. B. die Kapazität zweier konzentrischer Kugelschalen von den Radien  $a_1$  und  $a_2$  als  $\alpha = 4\pi\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}$  und für eine einzige Kugel entsprechend dem Grenzübergang  $a_2 = \infty : \dots \alpha = 4\pi\varepsilon a_1$ .

Auch für Zylinder<sup>42)</sup> und Ellipsoid<sup>43)</sup> lassen sich durch Benutzung von Zylinder- resp. elliptischen Koordinaten Potential und Kapazität bestimmen, durch Spezialisierung des Ellipsoids ergibt sich weiterhin die Kreisscheibe<sup>44)</sup>. Für die Dynamik eines kugelförmigen Elektrons ist der Satz wichtig<sup>45)</sup>, daß die elektrischen Energieen zweier Ellipsoide von gleicher Form, von denen das eine gleichförmig über sein Volumen geladen ist, während bei dem anderen die Verteilung der nämlichen Gesamtladung der Gleichgewichtsverteilung auf der Oberfläche des leitenden Ellipsoids entspricht, sich wie 6 : 5 verhalten.

Durch die Gleichung

$$x + yi = b \frac{1 - e^{\lambda + i\omega}}{1 + e^{\lambda + i\omega}}$$

füre man anstatt  $x$  und  $y$  die Koordinaten  $\lambda$  und  $\omega$  in die Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  ein. Die Kurvenschar  $\lambda = \text{const.}$  ist ein Kreisbüschel mit imaginären Schnittpunkten und den Punktkreisen  $y = 0$ ,  $x = \pm b$ ;  $\omega = \text{const.}$  ist der zu  $\lambda = \text{const.}$  orthogonale Kreisbüschel. Läßt man diese Kurvenschar um die  $y$ -Achse rotieren, so erhält man ein System von Kreisringen, von denen jeder durch einen speziellen Wert  $\lambda = \text{const.}$  gegeben ist. *Riemann*<sup>46)</sup> hat durch Benutzung dieser sogenannten Ringkoordinaten zuerst die Laplacesche Gleichung integriert.

41a) Vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b, Nr. 22.

42) *W. Thomson*, Reprint, p. 38 u. *Phil. Mag.* (4) 9 (1855), p. 531 mit Anwendungen auf Kabel und Leidener Flaschen; *Maxwell*, Treatise 1, Art. 129 behandelt ebenfalls konzentrische, unendlich lange Zylinder und das absolute Zylinderelektrometer. Wegen des letzteren siehe auch *E. Bichat* u. *R. Blondlot*, *J. de phys.* (2) 5 (1886), p. 325. *Blavier*, *J. de phys.* (1) 3 (1874), p. 115 u. 151 gibt die für elektrische Leitungen wichtige Theorie der Potentialverteilung bei nicht koaxialen Zylindern. Wegen der Theorie der Leidener Flaschen siehe auch Anm. 35. *F. Breisig*, Elektrotechn. Zeitschr. 19 (1898), p. 772 berechnet die Kapazität der Kabel bei Berücksichtigung der leitenden Erde. Kabel, die aus mehreren Drähten bestehen, behandelt *T. Levi-Civita*, Rend. R. Acc. dei Lincei. (5) 13 (1904), p. 375.

43) Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b, Nr. 15.

44) Vgl. Anm. 43 und *H. Weber*, Partielle Differentialgl. 1, p. 326, siehe auch *R. Gans*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903), p. 298; 53 (1906), p. 434.

45) Vgl. *M. Abraham*, Ann. Phys. (4) 10 (1903), p. 146.

46) *B. Riemann*, Ges. Werke 1876, p. 407; *C. Neumann*, Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864. *A. Wangerin*, Re-

Die Methode der partikulären Lösungen der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  in krummlinigen Koordinaten ergibt Entwicklungen des Potentials nach Kugelfunktionen bei der Kugel und dem Rotationsellipsoid, nach Besselschen Funktionen beim Zylinder, nach Riemannschen  $P$ -Funktionen (hypergeometrischen Funktionen) beim Ring<sup>47)</sup>. C. Neumann<sup>46)</sup> und Wangerin haben sich weiter mit diesem Problem beschäftigt.

Durch Entwicklung nach Kugelfunktionen findet Maxwell<sup>48)</sup> das Potential auf einem nahezu kugelförmigen Leiter.

**13. Elektrische Bilder. Zwei Kugeln**<sup>48a)</sup>. Spiegelungsmethoden zur Befriedigung der Grenzbedingungen bei Randwertaufgaben sind auf allen Gebieten der mathematischen Physik für ebene Grenzflächen anwendbar, speziell auf dem Gebiete der optischen Erscheinungen, von denen der Name der Methode entlehnt ist. In der dreidimensionalen Potentialtheorie kann man aber auch an Kugel- bez. Zylinderflächen spiegeln, da es eine Besonderheit der Potentialgleichung ist, bei der Transformation durch reziproke Radien unverändert zu bleiben; d. h. ist  $\varphi(r, \vartheta, \psi)$  eine Lösung der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  in Kugelkoordinaten, so ist auch  $\frac{c}{r}\varphi\left(\frac{c^2}{r}, \vartheta, \psi\right)$  eine Lösung, die für  $r = c$  denselben Wert annimmt (oder ist  $\varphi(r, \psi)$  eine zweidimensionale Lösung in Zylinderkoordinaten, so ist auch  $\varphi\left(\frac{c^2}{r}, \psi\right)$  eine Lösung, die für  $r = c$  denselben Wert hat). Gibt die erste Lösung das Potential im Innern einer Kugel vom Radius  $c$ , so hat man in der zweiten Lösung das Potential für den Außenraum, und zwar in geschlossener Form, ohne daß man nach Kugelfunktionen entwickeln müßte.

Mit Hilfe dieser Methode hat W. Thomson<sup>49)</sup> viele auf die Kugel bezügliche Probleme gelöst. Befindet sich z. B. im Punkte  $p_1$  im Innern (Äußern) einer leitenden Kugelschicht vom Radius  $c$ , die sich

---

dunktion der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung (gekrönte Preisschrift), Leipzig 1875, behandelt das Problem der Elektrizitätsverteilung auf einem Rotationskörper, dessen Meridian eine Lemniskate ist. Vgl. die historische Bemerkung über das Ringproblem bei H. Weber, Partielle Differentialgleichungen 2, p. 406.

47) Potentialtheorie Art. Burkhardt-Meyer, II A 7 b, Nr. 14 u. 21, ebenfalls Kugelfunktionen Art. Wangerin, II A. 10, sowie E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin 1878.

48) Maxwell, Treatise 1, Art. 145 a; s. auch G. L. Dirichlet, Werke 2, p. 87, Berlin 1897.

48a) Siehe auch Potentialtheorie Art. Burkhardt-Meyer II A 7 b Nr. 16.

49) W. Thomson, Cambr. and Dubl. Math. J. 1848, 1849, 1850; siehe auch Reprint Art. 55 ff.; Art. 208 ff.

auf dem Potential Null befindet, die Elektrizitätsmenge  $e_1$ , so erhält man das Potential im Innen-(Außen-)raum der Kugel, indem man im harmonischen Pol  $p_2$  von  $p_1$  die Elektrizitätsmenge  $e_2 = -\frac{e_1 c}{R_1}$  anbringt und die Kugel fortdenkt. Hier bedeutet  $R_1$  den Abstand des Punktes  $p_1$  vom Zentrum. In Wirklichkeit röhrt das Auftreten des Zusatzpotentials  $\frac{e_2}{4\pi\epsilon r_2}$  zu  $\frac{e_1}{4\pi\epsilon r_1}$  von der Influenzelektrizität  $e_2 = -\frac{e_1 c}{R_1}$  auf der Oberfläche der Kugel her. In derselben Weise kann man die Influenzwirkung eines geladenen Systems auf eine Kugel behandeln<sup>50)</sup>.

Wird der Kugelradius unendlich groß, handelt es sich also um die Influenz auf einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene, so geht die Abbildung durch harmonische Pole (Abbildung durch reziproke Radien, Inversion) in Spiegelung an der Ebene über. Die Elektrizitätsmenge im gespiegelten Punkt  $p_2$  ist dann  $e_2 = -e_1$ .

Durch wiederholt angewandte Spiegelung<sup>51)</sup> ermittelt man z. B. das Potential einer punktförmigen Elektrizitätsmenge 1, die sich im Punkte  $p'(x', y', z')$  im Innern eines rechtwinklig parallelepipedischen leitenden Kastens befindet, der auf dem Potential Null ist; die Seitenebenen seien

$$x = \pm \frac{a}{2}; \quad y = \pm \frac{b}{2}; \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$

Man lege senkrecht zu den drei Parallelepipedkanten drei Scharen von Ebenen, durch die der ganze Raum in kongruente Parallelepipeda eingeteilt wird, von denen eins das gegebene ist. In jedem Spiegelbild von  $p'$  bezüglich dieser Ebenen, welches die Koordinaten

$$ka + (-1)^k x'; \quad mb + (-1)^m y'; \quad nc + (-1)^n z'$$

hat, wo  $k, m, n$  die Werte der ganzen Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annehmen, denken wir uns die Elektrizitätsmenge +1 resp. -1 angebracht, je nachdem  $k+m+n$  gerade oder ungerade ist. Dann ist

$$(65) \quad \varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{R},$$

wo zur Abkürzung

$$(66) \quad R^2 = \{ka + (-1)^k x' - x\}^2 + \{mb + (-1)^m y' - y\}^2 + \{nc + (-1)^n z' - z\}^2$$

50) W. Thomson, Reprint Art. 113; siehe auch Maxwell, Treatise 1, Art. 159.

51) B. Riemann, Schreie, Elektrizität und Magnetismus p. 84; F. Pockels, Gött. Abh. 39 (1893), p. 21 (Preisschrift) wendet dies Prinzip auf zwei Kugeln in einem parallelepipedischen Metallkasten an, indem er die Kirchhoff'schen Formeln für die Attraktion zweier Kugeln benutzt, vgl. Anm. <sup>56)</sup>.

gesetzt ist. Die Summe (65) ist nur bedingt, d. h. bei geeigneter Anordnung der positiven und negativen Glieder, konvergent. Aus diesem Grunde empfiehlt sich die folgende Umrechnung. Da

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-R^2 t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

ist, so erhalten wir mit Vertauschung der Integrations- und Summationsfolge die absolut konvergente Darstellung

$$(67) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \sum_k \sum_m \sum_n (-1)^{k+m+n} e^{-R^2 t}.$$

Die dreifache Summe zerfällt in das Produkt dreier einfachen Summen, deren jede sich durch Thetafunktionen ausdrücken läßt.

*Thomson*<sup>51a)</sup> bestimmt die Elektrizitätsverteilung auf einem kreisförmigen Abschnitt einer ebenen oder sphärischen leitenden Fläche, die einer beliebigen Influenz ausgesetzt ist, mit Hilfe der Bildmethode.

Die Methode der Spiegelung läßt sich erweitern für den Fall, daß der halbe Raum die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_1$ , der andere halbe Raum die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_2$  hat, und daß sich im ersten Halbraum im Punkte  $p_1$  die Elektrizitätsmenge  $e_1$  befindet. Man kann sich im Spiegelbild  $p_2$  von  $p_1$  bezüglich der Grenzebene der beiden Halbräume die Elektrizitätsmenge  $-e_2$  denken. Das Potential in einem Punkte des ersten Halbraums ist  $\frac{e_1}{\varepsilon_1 4\pi r_1} - \frac{e_2}{\varepsilon_1 4\pi r_2}$ ; das Potential im zweiten Halbraum ist  $\frac{e_2'}{\varepsilon_2 4\pi r_1}$ . Die Grenzbedingungen ergeben

$$e_2 = e_1 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}; \quad e_2' = e_1 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$
<sup>52)</sup>.

Diese Methode ist nicht ohne weiteres auf eine dielektrische Kugel übertragbar. Versucht man dies, so erhält man als Bild eines elektrischen Punktes außerhalb einer Kugel erstens seinen harmonischen Pol und zweitens die Verbindungsstrecke dieses Pols mit dem Zentrum, die in bestimmt angebbarer Weise mit Elektrizität belegt ist. *C. Neumann*<sup>53)</sup> hat dies Problem ausführlich behandelt und zwar für den

51a) *W. Thomson*, Reprint Art. 231; vgl. auch *G. Kirchhoff*, Vorlesungen 3, p. 57; *Lipschitz*, J. f. Math. 58, p. 152; 61, p. 1.

52) Siehe z. B. *M. Abraham* u. *A. Föppl*, Theorie der Elektrizität, p. 150, Leipzig 1904. Durch mehrfache Spiegelung läßt sich auch die unendlich ausgedehnte dielektrische Platte behandeln, vgl. *Th. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. (3) 44 (1891), p. 164.

53) *C. Neumann*, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883, p. 279.  
Encyklop. d. math. Wissensch. V 2.

ganz analogen Fall der magnetischen Bilder. Anstatt seines  $4\pi k$  ist durchweg  $\epsilon - 1$  zu setzen.

Das Problem der Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln von den Radien  $a_1$  und  $a_2$ , dem Abstande  $c$  der Zentren, die zu den Potentialen  $C_1$  und  $C_2$  geladen sind, wurde zuerst von Poisson<sup>54)</sup> behandelt, indem er das Potential  $\varphi$  sowie die Dichtigkeit der Elektrizität nach Kugelfunktionen entwickelt.

Das Potential wird symmetrisch um die gemeinsame Zentrale sein, welche als Polarachse eingeführt wird. Kennt man das Potential auf der Zentralen, so ist es auch in jedem anderen Punkte des Raumes bekannt; denn denken wir uns das Potential auf der Zentralen nach Potenzen des Abstandes  $r_1$  vom Zentrum der ersten Kugel entwickelt:

$$V_a = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_1}{r_1} A_\nu \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^\nu \quad r_1 > a_1,$$

$$V_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^\nu \quad r_1 < a_1,$$

so wird die allgemeine Lösung

$$(68) \quad V_a = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_1}{r_1} A_\nu P_\nu (\cos \vartheta) \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^\nu \quad r_1 > a_1,$$

$$V_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu P_\nu (\cos \vartheta) \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^\nu \quad r_1 < a_1,$$

wo  $P_\nu (\cos \vartheta)$  die Kugelfunktion  $\nu$ -ter Ordnung erster Art bedeutet.

Der Abstand eines willkürlichen Punktes der Zentralen vom Zentrum der ersten Kugel sei  $x$ , der Abstand eines Punktes vom Zentrum der zweiten Kugel  $y$ ; das Potential der auf der ersten Kugel befindlichen Elektrizität sei  $f(x)$ , das der auf der zweiten Kugel befindlichen  $g(y)$ .

Ist  $x < a_1$  und  $x' = \frac{a_1^2}{x} > a_1$  der harmonische Pol von  $x$ , so ist  $f(x') = \frac{a_1}{x'} f\left(\frac{a_1^2}{x'}\right)$ , wie am Anfang dieser Nr. bemerkt wurde; ebenso ist  $g(y') = \frac{a_2}{y'} g\left(\frac{a_2^2}{y'}\right)$ .

Sind  $x$  und  $y'$  derselbe Punkt innerhalb der ersten Kugel, also  $y' = c - x$ , so gilt

$$(69) \quad f(x) + g(y') = f(x) + \frac{a_2}{c-x} g\left(\frac{a_2^2}{c-x}\right) = C_1;$$

ebenso

54) Poisson, Mém. de l'inst. 12, 1, p. 1 (1811); 2, p. 163 (1811).

$$(70) \quad g(y) + f(x') = g(y) + \frac{a_1}{c-y} f\left(\frac{a_1^2(c-y)}{c-a_1^2}\right) = C_2.$$

Gleichung (70) gilt für jeden Punkt  $y < a_2$ , also z. B. für  $y = \frac{a_2^2}{c-x}$ .

Substituiert man diesen Wert in (70), so kann  $g$  aus (69) eliminiert werden; man erhält für  $-a_1 \leq x \leq +a_1$

$$f(x) - \frac{a_1 a_2}{c^2 - a_2^2 - cx} f\left(\frac{a_1^2(c-x)}{c^2 - a_2^2 - cx}\right) = C_1 - C_2 \frac{a_2}{c-x}.$$

Die Lösung dieser Funktionalgleichung ergibt  $f(x)$ . Aus  $f(x)$  erhält man die Dichtigkeit  $\omega$  für  $x = a_1$ , nämlich

$$(72) \quad \omega = \varepsilon \left( \frac{f(x)}{a_1} + 2 \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=a_1}$$

und die gesamte Elektrizitätsmenge  $E_1$  auf der ersten Kugel

$$(73) \quad E_1 = 4\pi \varepsilon a_1 f(0).$$

Berühren die beiden Kugeln einander, so verhalten sich die Elektrizitätsmengen  $E_2$  und  $E_1$  auf denselben wie

$$(74) \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\int_0^1 \left(t - \frac{a_2}{a_1+a_2} - 1\right) \frac{dt}{1-t}}{\int_0^1 \left(t - \frac{a_1}{a_1+a_2} - 1\right) \frac{dt}{1-t}}.$$

Ist  $a_2$  sehr klein gegen  $a_1$ , so wird

$$(74') \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{\pi^2}{6}$$

oder die Dichte nach Trennung der beiden Kugeln

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Diese Resultate sind für die genaue Diskussion der Coulombschen Versuche zur Ermittlung des Coulombschen Gesetzes von Wichtigkeit, da die Influenz der beiden Kugeln aufeinander berücksichtigt werden muß. Die Dichtigkeit  $\omega$  an den Punkten der beiden Kugeln, die einander am nächsten liegen, ist von Interesse, weil eine solche Anordnung als Funkenmikrometer zur Bestimmung von Funkenpotentialen benutzt wird. Schließlich gibt das Problem der Berührung einer kleinen und einer großen Kugel einen Anhalt über die Theorie der Probekugel<sup>54a)</sup>.

54a) Eine allgemeinere Behandlung der Theorie des Probekörpers: E. Almansi, Nuov. Cim. (5) 4 (1902), p. 81, 280; 5 (1903), p. 242.

Der Poissonschen Methode schließen sich die Entwicklungen von *Plana*<sup>55)</sup> und *Kirchhoff*<sup>56)</sup> an. Die Kirchhoffschen Resultate für die Dichtigkeit weichen von denen Poissons und Planas für den Fall eines unendlich kleinen Abstandes der beiden Kugeln ab; der Grund liegt in unerlaubten Potenzentwicklungen bei letzteren.

Durch die Methode der elektrischen Bilder hat *W. Thomson*<sup>57)</sup> 1853 unter Benutzung des „Prinzips der sukzessiven Influenzen“ von *Murphy*<sup>58)</sup> das Problem gelöst. (In spezieller Form als ein Verfahren sukzessiver Spiegelungen bereits oben bei dem Problem des rechteckigen Kastens benutzt.)

Das Murphysche Prinzip behandelt ganz allgemein die Influenz zweier Leiter, von denen der eine auf dem Potential 1, der zweite auf dem Potential Null ist, nach folgendem konvergenten Verfahren<sup>58)</sup>. Man denke den zweiten Leiter fort und lade den ersten mit der Elektrizitätsmenge  $e_0$ , so daß auf ihm das Potential 1 entsteht. Diese Verteilung denke man sich nun fixiert; sie influenziere auf dem abgeleiteten Leiter 2 die Ladungsverteilung  $e_1$ , die man sich wiederum fest denkt, und berechne die durch  $e_1$  hervorgerufene Influenzladung  $e_2$  auf dem ersten Leiter, während dieser abgeleitet gedacht wird, usf.; dann ist  $e_0 + e_2 + e_4 + \dots$  die Ladung des ersten,  $e_1 + e_3 + \dots$  die des zweiten Leiters; denn sie genügen allen an sie gestellten Bedingungen. Bei hinreichender Entfernung der beiden Körper wird das Verfahren auch numerisch gut brauchbar sein.

Da nun eine zum Potential  $C_1$  geladene Kugel nach außen so wirkt, als ob die Menge  $C_1 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon a_1}$  im Zentrum konzentriert wäre, so wird ihre fixiert gedachte Verteilung auf die zweite abgeleitete Kugel so wirken, als ob in dem Bild des Zentrums der ersten Kugel bezüglich der zweiten die Menge  $-e_1 \frac{a_2}{c} = -4\pi\varepsilon C_1 \frac{a_1 a_2}{c}$  vorhanden wäre, während die zweite Kugel fehlt. Von diesem Bild kann man wieder das Bild bezüglich der ersten Kugel konstruieren usf. Die

55) *Plana*, Mem. della r. Acc. di Torino 7 (1845).

56) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 59 (1861), p. 89 oder Ges. Abhandlungen p. 78; sehr konvergente Reihen gibt er Ann. Phys. Chem. (3) 27 (1887), p. 673 oder Ges. Abhandlungen Nachtrag, p. 131; vgl. auch *R. A. Herman*, Quaterly Journ. of Math. 22 (1887), p. 204. *E. W. Barnes*, ibid. 35 (1904), p. 155 löst das Problem mit Hilfe von  $\Gamma$ -Funktionen.

57) *W. Thomson*, Reprint Art. 128 und Phil. Mag. 4, 5, p. 287 (1853).

58) *R. Murphy*, Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, Cambridge 1833, p. 93. Wegen Konvergenzbeweise siehe Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b Nr. 28 besonders Anm. 183; ferner *A. Korn*, Lehrbuch der Potentialtheorie, p. 354.

Summierung der Wirkung sämtlicher so konstruierten Elektrizitätsmengen gibt die Verteilung, wenn die erste Kugel auf dem Potential  $C_1$ , die zweite auf dem Potential Null sich befindet. Dazu füge man in derselben Weise die Wirkung hinzu, die sich durch Ladung der zweiten Kugel zum Potential  $C_2$  und Ableitung der ersten Kugel ergibt. Bei *Thomson* finden sich auch numerische Tabellen über Kapazität und Anziehungs kraft zweier Kugeln<sup>59)</sup>.

Die Methode der elektrischen Bilder zur Lösung des Zweikugelproblems wurde von *F. Neumann*<sup>60)</sup> und *Riemann*<sup>61)</sup> aufgegriffen. *Liouville*<sup>62)</sup> hat, angeregt durch die *Thomsonsche Abbildungsmethode* durch reziproke Radien, die Aufgabe darauf zurückgeführt, zwei sich ausschließende Kugeln als konzentrische abzubilden.

Schließlich sei noch die Methode der bipolaren Koordinaten erwähnt. Läßt man die in Nr. 12 erwähnte Kurvenschar um die  $x$ -Achse rotieren, so werden die Flächen  $\lambda = \text{const.}$  Kugeln. Zwei Werten von  $\lambda$  entsprechen die betrachteten Kugeloberflächen; diese Koordinaten stammen von *Thomson*<sup>63)</sup>, die Methode wurde von *C. Neumann*<sup>64)</sup> weiter ausgearbeitet und z. B. auf die Influenz einer punktförmigen Elektrizitätsmenge auf zwei abgeleitete Kugeln angewandt<sup>64a)</sup>.

### B. Die Dielektrizitätskonstante hat in verschiedenen Teilen des Raumes verschiedene Werte.

**14. Ungeladene Dielektrika im Felde. Leiter als Grenzfall des Dielektrikums. Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum.** Wir betrachteten bisher den Fall, daß das Dielektrikum zwischen den Leitern homogen war, also  $\epsilon$  im ganzen Raum eine und dieselbe Konstante war, jetzt wenden wir uns der Frage zu, wie das Feld verändert wird, wenn in ein gegebenes Feld, dessen Dielektrikum die Dielektrizitätskonstante 1 hat, ein ungeladener homogener Körper der

59) *W. Thomson*, Reprint Art. 142.

60) *F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, p. 277, Leipzig 1887 (Vorlesungen vom Winter 1856/57).

61) *B. Riemann*, Schreibe, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1880; 2. Ausgabe, p. 189 (Vorlesungen vom Sommer 1861).

62) *J. Liouville*, in *Thomson*, Reprint Art. 229 ff.

63) *W. Thomson*, Reprint Art. 211, 212.

64) *C. Neumann*, Stationärer Temperaturzustand, Halle 1862; Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883, p. 283.

64a) Eine Zusammenstellung der Resultate *Poissons* und eine eingehende Behandlung zweier sich berührender Kugeln gibt *J. B. Goebel*, J. f. Math. 124 (1902), p. 157; 125 (1903), p. 267.

Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  gebracht wird. Dabei soll die Elektrizitätsverteilung des ursprünglichen Feldes ungeändert bleiben. Im Innern des Körpers gilt:

$$(75) \quad \operatorname{div} \epsilon \mathfrak{E} = \epsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0,$$

an seiner Oberfläche

$$(76) \quad \mathfrak{E}_n^a - \epsilon \mathfrak{E}_n^i = 0,$$

wo die Indizes  $a$  und  $i$  die äußere resp. innere Seite der Oberfläche andeuten.

Aus (75) folgt mit Berücksichtigung von (76)

$$(77) \quad \int \operatorname{div} \epsilon \mathfrak{E} dS_i = \int \epsilon \mathfrak{E}_n^i d\sigma = \int \mathfrak{E}_n^a d\sigma = 0.$$

Wird  $\epsilon$  unendlich groß, so folgt aus (76)

$$(77') \quad \mathfrak{E}_n^i = 0$$

und aus (77') zusammen mit (75) (vgl. Nr. 4)

$$(78) \quad \mathfrak{E}_i = 0.$$

(77) und (78) stimmen aber überein mit den Bedingungen, welchen das Feld eines an die Stelle unseres Nichtleiters gebrachten ungeladenen Leiters genügt. Genau das Analogie, wie bei der Bestimmung des Feldes, gilt auch bei den ponderomotorischen Kräften (vgl. Formel (95)). Der Fall des Leiters ist also in dem allgemeineren des Dielektrikums rechnerisch mit enthalten, nämlich für  $\epsilon = \infty$ . Dies ist jedoch nur eine Rechenregel und sagt nichts über die Dielektrizitätskonstante der Leiter aus; letztere ist durch elektrostatische Versuche nicht zu ermitteln, da im Leiter stets das Feld Null ist.

Die allgemeinen Bedingungen im elektrostatischen Felde ergeben die Kapazität eines Plattenkondensators mit  $n$  planparallelen Schichten der Dicke  $a_v$  und der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_v$ .

Da das elektrische Feld aus Symmetriegründen gleichförmig und parallel der Plattennormale ist, so folgt aus (I) für die Potentialdifferenz der Platten

$$V_{II} - V_I = \sum_{v=1}^n \mathfrak{E}_v a_v,$$

und da keine der dielektrischen Schichten geladen ist, folgt für die Dichte auf den Platten

$$\omega_{II} = -\omega_I = \epsilon_1 \mathfrak{E}_1 = \epsilon_2 \mathfrak{E}_2 = \dots \epsilon_v \mathfrak{E}_v = \dots \epsilon_n \mathfrak{E}_n \text{ (vgl. IV und (17))}.$$

Ist die Plattenfläche  $\sigma$ , so berechnet sich die Kapazität  $\alpha$  zu

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sum_v \frac{a_v}{\epsilon_v}}.$$

Man kann also durch Veränderung eines Abstandes  $a$ , eine gleichzeitige Änderung der Dielektrizitätskonstante einer Schicht hinsichtlich ihres Einflusses auf die Kapazität kompensieren; so sind Dielektrizitätskonstanten bestimmt worden<sup>65).</sup>

Führt man die Elektrizitätsmenge  $e$  der Belegung ein, so erhält man in der Formel  $V_{II} - V_I = e \sum \frac{a}{\epsilon \sigma}$  ein Analogon zum Ohmschen Gesetz<sup>66).</sup>  $\epsilon$  nennt man deshalb auch gelegentlich dielektrische Leitfähigkeit,  $\sum \frac{a}{\epsilon \sigma}$  dielektrischen Widerstand.

**15. Influenz. Wahre und freie Elektrizität.** Bevor wir zur Lösung bestimmter Probleme übergehen, wollen wir einige allgemeine Fragen erledigen, die uns zeigen, wie die Vor-Maxwellsche Theorie diese Fälle im Sinne einer Fernwirkung behandelt hat.

Es fragt sich, wie das Feld  $\mathfrak{E}_0$  geändert wird, wenn statt Luft ( $\epsilon = 1$ ) ein Körper aus anderem Material der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  ins Feld gebracht wird, während die Elektrizitätsverteilung  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $e$  unverändert bleibt; dann ist

$$(79) \quad \operatorname{div} \epsilon \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = \varrho$$

und für jede Leiteroberfläche

$$(80) \quad \int \epsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = \int \mathfrak{E}_{0n} d\sigma.$$

Für das Zusatzfeld  $\mathfrak{G} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$  folgt aus (79)

$$(81) \quad \operatorname{div} \mathfrak{G} = \operatorname{div} \mathfrak{E} - \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = -\operatorname{div} (\epsilon - 1) \mathfrak{E}$$

und ebenso aus (80)

$$(82) \quad \int \mathfrak{G}_n d\sigma = \int \mathfrak{E}_n d\sigma - \int \mathfrak{E}_{0n} d\sigma = - \int (\epsilon - 1) \mathfrak{E}_n d\sigma.$$

Setzen wir

$$(83) \quad -\operatorname{div} (\epsilon - 1) \mathfrak{E} = \varrho', \quad - \int (\epsilon - 1) \mathfrak{E}_n d\sigma = e',$$

so folgt

$$(84) \quad \operatorname{div} \mathfrak{G} = \varrho', \quad \int \mathfrak{G}_n d\sigma = e'.$$

$\mathfrak{G}$  genügt denselben allgemeinen Bedingungen wie  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{E}_0$ , ist also durch die  $\varrho'$ ,  $\omega'$ ,  $e'$  eindeutig gegeben. Diese Werte sind wegen (83) zwar erst bekannt, wenn  $\mathfrak{E}$  gefunden, also die Aufgabe gelöst ist, aber die Form von (84) zeigt, daß  $\mathfrak{G}$  als das Feld gewisser ge-

65) *Gordon*, Phil. Trans. 1879, p. 417; *Donle*, Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 307; *Winkelmann*, Ann. Phys. Chem. (3) 38 (1889), p. 161; 40 (1890), p. 732; *E. Cohn*, Ann. Phys. Chem. (3) 46 (1892), p. 135.

66) *P. Drude*, Physik des Äthers, Stuttgart 1894, p. 274 und Ann. Phys. Chem. (3) 57 (1896), p. 223.

dachter Elektrizitätsmengen aufgefaßt werden kann, die nur dort sich befinden, wo der dielektrische Körper in die Luft eingebettet ist ( $\varepsilon \neq 1$ ).

Nach Hertz<sup>67)</sup> heißen die  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $e$  die wahren, die  $\varrho'$ ,  $\omega'$ ,  $e'$  die induzierten, die  $\varrho + \varrho'$ ,  $\omega + \omega'$ ,  $e + e'$  die freien Dichten resp. Elektrizitätsmengen.

$\mathfrak{E}_0$  hat das Potential (vgl. Nr. 4 (15))

$$(85) \quad \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e}{r}.$$

Wegen (84) lautet das Zusatzpotential

$$(86) \quad \chi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e'}{r},$$

also

$$(87) \quad \varphi = \varphi_0 + \chi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e + e'}{r},$$

d. h. man kann bei beliebigen dielektrischen Körpern im ganzen Felde auf Grund der vor-Faradayschen Anschauungen das Potential nach dem Coulombschen Gesetz berechnen, wenn man statt der wahren Elektrizitätsmengen die freien wählt. Während aber die wahre Elektrizität an der Materie haftet, tut dies die freie nicht, sie hängt vom Felde selbst ab.

**16. Infuenz auf Ellipsoid und Kugel. Clausius-Mossottische Theorie.** Wird ein Ellipsoid der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  in ein gleichförmiges Feld  $\mathfrak{E}_0$  der Dielektrizitätskonstante 1 gebracht, so wird das Zusatzpotential<sup>68)</sup>

$$(88) \quad \chi = \int \left( \frac{\mathfrak{E}_{0x} \cos nx}{\frac{1}{\varepsilon-1} + A} + \frac{\mathfrak{E}_{0y} \cos ny}{\frac{1}{\varepsilon-1} + B} + \frac{\mathfrak{E}_{0z} \cos nz}{\frac{1}{\varepsilon-1} + C} \right) \frac{d\sigma}{4\pi r},$$

das Integral über die Ellipsoidoberfläche erstreckt. Hier bedeutet  $r$  den Abstand des Oberflächenelements  $d\sigma$  vom Aufpunkt; es ist

67) H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892, p. 225 u. 236; Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 577.

68) Vgl. Poisson, Mém. de la ac. de France 5 (1824), p. 492; vgl. auch Maxwell, Treatise 2, Art. 437 ff. F. Neumann löst das Problem für Rotationsellipsoide Journ. f. Math. 37 (1848), p. 21. Die Induktion in einem unendlich langen Kreiszylinder behandelt G. Kirchhoff Journ. f. Math. 48 (1854), p. 348 und Ges. Abhandl., p. 193. Das für den Magnetismus wichtige Problem der Induktion in einem endlichen Kreiszylinder durch ein gleichförmiges Feld parallel der Achse hat G. Green gelöst Essay, p. 66, doch ist der Gültigkeitsbereich seiner Formel auf paramagnetische Körper beschränkt (vgl. Maxwell, Treatise 2, Art. 439).

$$A = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)L}, \quad B = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)L},$$

$$C = \frac{1}{2} abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)L}, \quad L = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

Im Innern des Ellipsoids ist das Feld homogen, man hat nämlich für die Komponenten der Feldstärke die konstanten Werte

$$(89) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{\mathfrak{E}_{0x}}{1 + (\varepsilon - 1)A}; \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\mathfrak{E}_{0y}}{1 + (\varepsilon - 1)B}; \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\mathfrak{E}_{0z}}{1 + (\varepsilon - 1)C}.$$

Ist das Ellipsoid eine Kugel, so wird  $a = b = c$  der Radius und  $A = B = C = \frac{1}{3}$ , dann ist im Innern

$$(89') \quad \mathfrak{E} = \frac{3\mathfrak{E}_0}{\varepsilon + 2}.$$

Im Außenraum lautet das Zusatzpotential

$$(90) \quad \chi = \frac{a^3}{|\mathbf{r}|^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} (\mathfrak{E}_0 \cdot \mathbf{r}),$$

wo  $\mathbf{r}$  der Radiusvektor vom Kugelzentrum zum Aufpunkt ist. Ist die Kugel leitend, so wird (vgl. Nr. 14)

$$(90') \quad \chi = \frac{a^3}{|\mathbf{r}|^3} (\mathfrak{E}_0 \cdot \mathbf{r}).$$

Die Kugel ist durch den Einfluß des äußeren Feldes polarisiert. *Clausius*<sup>69)</sup> nahm wie *Mossotti* an, daß ein Dielektrikum aus solchen kleinen polarisierbaren leitenden Kugeln bestände, die voneinander isoliert seien. Diese Kugeln denkt er sich regellos im Körper verteilt; sie rufen je nach Konzentration und Größe verschiedene Dielektrizitätskonstanten hervor.  $a^3(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1) = \frac{3}{4\pi} v_d(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$  ist ein Maß für die Störung, welche eine dielektrische Kugel ausübt, wenn  $v_d$  das Volumen der Kugel ist;  $\frac{3}{4\pi} v_t$  ist die Störung, welche die leitenden Kugeln vom Gesamtvolumen  $v_t$  hervorrufen. Sollen diese Störungen einander gleich sein, so muß  $v_t : v_d = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$  sein. Eine strenge Ableitung dieser Beziehung für einen beliebig geformten Körper aus (90) gibt *Poincaré*.<sup>70)</sup> Da  $v_t$  als Volumen der leitend gedachten Moleküle unveränderlich ist, so folgt

$$(91) \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{d} = \text{const.},$$

69) *R. Clausius*, Mech. Wärmetheorie 2, p. 62, Braunschweig 1879.

70) Vgl. *H. Poincaré*, Électricité et optique 1, p. 48, Paris 1890; siehe auch *G. Adler*, Wien Ber. 99<sup>2a</sup> (1890), p. 1044 und den Art. über Elektronentheorie von *H. A. Lorentz* V 14 Nr. 43 u. 47.

wo  $d$  die mit Druck und Temperatur veränderliche Dichte des dielektrischen Körpers bedeutet. (91) ist unter dem Namen der *Lorentz-Lorenz'schen Gleichung* bekannt<sup>71)</sup>. Bei Gasen ist  $\epsilon$  nahezu = 1, also  $\epsilon + 2$  nahezu = 3, (91) ergibt also für Gase Proportionalität von  $\epsilon - 1$  mit dem Druck<sup>72)</sup>.

**17. Hohlkugel und Hohlzylinder im gleichförmigen Feld.** Von Wichtigkeit, wenigstens für den analogen Fall des Magnetismus (Nr. 23) ist das Problem der Hohlkugel im gleichförmigen Felde, weil man im Innern des Hohlkörpers von hoher Dielektrizitätskonstante (Permeabilität) ein geschwächtes gleichförmiges Feld erhält.

Wir unterscheiden die Potentiale  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , die für  $r < a_1$ ,  $a_1 < r < a_2$ ,  $r > a_2$  gültig sind, wo  $a_1$  und  $a_2$  die Radien der Hohlkugel sind.

Da die Laplacesche Differentialgleichung überall gültig ist, hat  $\varphi$  überall die Form

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}).$$

Die Konstanten bestimmen sich aus den Bedingungen, daß  $\varphi$  überall endlich und stetig ist, daß für  $r = \infty$

$$\varphi = -\mathfrak{E}_{0x}x - \mathfrak{E}_{0y}y - \mathfrak{E}_{0z}z$$

ist, wo die Konstanten  $\mathfrak{E}_{0x}, \mathfrak{E}_{0y}, \mathfrak{E}_{0z}$  die Komponenten des ungestörten Feldes sind, und daß für

$$\begin{aligned} r = a_1 : \dots & \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \\ r = a_2 : \dots & \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}. \end{aligned}$$

Die Durchrechnung ergibt für das Innere<sup>73)</sup>:

$$(92) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon} \left(1 - \frac{a_1^3}{a_2^3}\right)}.$$

Im Innern bleibt das Feld also gleichförmig. Wird  $\epsilon = \infty$ , so wird  $\mathfrak{E} = 0$ , wir haben die Schutzwirkung leitender Hüllen (vgl. Nr. 5). Für großes  $\epsilon$  wird das Feld sehr geschwächt.

Für den unendlich langen Hohlzylinder, dessen Achse senkrecht zum Feld gerichtet ist, erhalten wir auf dieselbe Weise

71) Eine optische Ableitung geben R. Lorenz, Ann. Phys. Chem. (3) 11 (1880), p. 77; 20 (1883), p. 19 und H. A. Lorentz, Ann. Phys. Chem. (3) 9 (1880), p. 642.

72) L. Boltzmann, Wien Ber. 69<sup>2</sup> (1874), p. 795.

73) Maxwell, Treatise 2, Art. 431.

$$(93) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\varepsilon - 1)^2}{4\varepsilon} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)}.$$

Ein allgemeines Näherungsverfahren, welches bei einem beliebigen Körper in einem beliebigen Felde anwendbar ist, wird in Nr. 25 für den analogen magnetischen Fall entwickelt.

**18. Spannungen und Kräfte.** Aus der Abnahme der elektrischen Energie bei einer virtuellen Verschiebung ergeben sich die Kräfte elektrischen Ursprunges; sie lassen sich durch Spannungen ausdrücken<sup>74)</sup>.

Aus diesen erhält man die auf die Volumeinheit wirkende Kraft

$$(94) \quad f = \varrho \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon.$$

(94) zeigt, daß die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  nur im homogenen Medium die Kraft auf die Elektrizitätsmenge 1 darstellt; in inhomogenen Medien kommt noch eine Kraft hinzu, die die Richtung des stärksten Gefälles der Dielektrizitätskonstanten hat.

An der Grenze eines Dielektrikums gegen Luft findet ein normal nach außen wirkender Zug statt

$$(95) \quad \frac{\varepsilon - 1}{2} \mathfrak{E}^2 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cos^2(\mathfrak{E}, n) \right\},$$

wo  $\mathfrak{E}$  die Feldstärke außerhalb des Körpers ist.

Ist  $\varepsilon$  nahezu = 1, so ist der Zug von der Richtung, in der die Erregungslinien die Oberfläche treffen, unabhängig. Durch hydrostatischen Druck kann man die elektrischen Druckkräfte an der Grenze einer Flüssigkeit gegen ein Gas kompensieren und so  $\varepsilon$  bestimmen<sup>75)</sup>. Ist die Umgebung nicht Luft, sondern ein Medium der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_0$ , so ist  $\varepsilon$  in (95) durch  $\varepsilon/\varepsilon_0$  zu ersetzen und der ganze Ausdruck mit  $\varepsilon_0$  zu multiplizieren.

**19. Kräfte auf starre Körper<sup>76)</sup>.** Handelt es sich um die Kräfte auf starre Körper, so dürfen wir zu (94) die Kraft

$$(96) \quad f' = \varrho' \mathfrak{E} + \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon$$

addieren, weil diese bei der Integration über den ganzen Körper keinen Beitrag liefert ( $\varrho'$  ist durch (82) definiert). Es folgt

74) Vgl. Maxwell'sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 23; *Maxwell*, Treatise 1, Art. 105; *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. (3) 41 (1890), p. 396; *Faraday*, Experimental researches in electricity, p. 409, London 1839. Näheres über diese Spannungen und die mit denselben zusammenhängenden Erscheinungen der so genannten Elektrostriktion findet man in dem Art. von *F. Pockels* V 16.

75) *G. Quincke*, Ann. Phys. Chem. (3) 19 (1883), p. 705.

76) Vgl. *E. Cohn*, Elm. Feld, p. 99.

$$(97) \quad f = (\varrho + \varrho') \mathfrak{E},$$

wo

$$\varrho + \varrho' = \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{E}$  bedeutet also die Kraft auf die freie Elektrizitätsmenge 1. In der Elektronentheorie<sup>77)</sup> ist, wie in der ursprünglichen Vor-Maxwell-schen Theorie, die Dielektrizitätskonstante kein Grundbegriff, sondern sie wird durch das Verhalten der induzierten Ladungen (verschobenen Elektrizitätsmengen) erklärt; dort ist die Feldstärke in der Tat die Kraft auf die freie Elektrizitätsmenge 1, so daß das Coulombsche Gesetz in der Elektrostatik der Elektronentheorie mit  $\varepsilon = 1$  ausnahmslos und allgemein gilt.

Ist der starre Körper ungeladen, so folgt aus (94)

$$f = -\frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} (\varepsilon - 1);$$

wir führen anstatt  $\operatorname{grad} \varepsilon$  in (94) das damit identische  $\operatorname{grad} (\varepsilon - 1)$  ein, weil auf der Oberfläche des Körpers, d. h. außerhalb der Grenzschicht,  $\varepsilon - 1 = 0$  ist, und weil daher in der durch partielle Integration erhaltenen Gesamtkraft

$$(98) \quad \mathfrak{F} = \int_{-\infty}^{\varepsilon-1} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 dS$$

das hinzutretende Oberflächenintegral verschwindet. Ebenso ist das Drehmoment

$$(98') \quad \mathfrak{N} = \int_{-\infty}^{\varepsilon-1} [\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2] dS.$$

Ist  $\varepsilon - 1$  sehr klein, so kann man  $\mathfrak{E}_0^2$  anstatt  $\mathfrak{E}^2$  setzen und erhält

$$(99) \quad \mathfrak{F} = \int_{-\infty}^{\varepsilon-1} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2 dS.$$

Ein dielektrischer Körper wird also nach Punkten größter Feldstärke getrieben<sup>78)</sup>.

Ist die Energie des Feldes  $W$ , und nennen wir  $W_0$  die Energie, die unter gleichen Umständen vorhanden wäre, wenn der dielektrische Körper durch Luft ersetzt würde, so würde bei einer virtuellen Verschiebung des Körpers  $\delta W_0 = 0$  sein, weil in diesem Falle durch die Verschiebung nichts an dem Felde geändert würde; da aber  $\delta A = -\delta W$  ist, so gilt auch<sup>79)</sup>

77) Vgl. Elektronentheorie Art. H. A. Lorentz V 14, Nr. 2 u. 3.

78) Vgl. das magnetische Analogon bei W. Thomson, Reprint Art. 670.

79) Vgl. Cohn, Elm. Feld, p. 85. Wichtig ist, daß in (100)  $\mathfrak{E}$  nur in  $S$  bekannt zu sein braucht.

$$(100) \quad \delta A = -\delta(W - W_0) = \delta \int \frac{\varepsilon-1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}_0) dS.$$

Für das Ellipsoid vom Volumen  $S$  im gleichförmigen Felde folgt hieraus (vgl. (89))

$$(101) \quad \delta A = \delta \frac{\varepsilon-1}{2} S \left\{ \frac{\mathfrak{E}_{0x}^2}{1 + (\varepsilon-1)A} + \frac{\mathfrak{E}_{0y}^2}{1 + (\varepsilon-1)B} + \frac{\mathfrak{E}_{0z}^2}{1 + (\varepsilon-1)C} \right\}.$$

Ist das Ellipsoid um die vertikale  $c$ -Achse drehbar, und bildet die  $a$ -Achse mit der Horizontalkomponente  $\mathfrak{E}_h$  den Winkel  $\vartheta$ , so ist das Drehmoment zu wachsenden  $\vartheta$

$$(101') \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_h^2 S \sin 2\vartheta \left( \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon-1} + B} - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon-1} + A} \right).$$

Mit  $a > b$  wird  $A < B < 1$  (vgl. Nr. 16), d. h. das Ellipsoid stellt sich im gleichförmigen Felde auf jeden Fall mit seiner großen Achse in die Feldrichtung. Ist die Umgebung nicht Luft, sondern hat sie die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_0$ , so ist (101') mit  $\varepsilon_0$  zu multiplizieren und  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon/\varepsilon_0$  zu ersetzen; der soeben ausgesprochene Satz gilt, gleichgültig ob  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  ist.

Ist  $\varepsilon-1$  klein, so folgt aus (100) die translatorische Kraft (vgl. (99))

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon-1}{2} S \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2.$$

Im Falle der Kugel wird aus (101)

$$\mathfrak{F} = \frac{3}{2} S \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2;$$

ist die Kugel leitend, so hat man:

$$\mathfrak{F}' = \frac{3}{2} S \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2.$$

Durch Vergleich von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}'$  hat Boltzmann<sup>80)</sup> an festen Körpern  $\varepsilon$  bestimmt. (101') wurde von Graetz und Fomm<sup>81)</sup> zur Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten verwendet.

Ein Feld, welches von zwei gleichen, aber entgegengesetzten Elektrizitätsmengen, die auf der  $X$ -Achse gleich weit vom Nullpunkt entfernt sind, herrührt, hat in der Nähe des Nullpunkts die Form<sup>82)</sup>

$$\mathfrak{E}_0^2 = \text{const.} + a^2 x^2 - b^2 (y^2 + z^2).$$

80) L. Boltzmann, Wien. Ber. 68<sup>o</sup> (1873), p. 81; 70<sup>o</sup> (1874), p. 307; Ann. Phys. Chem. (2) 153 (1874), p. 525.

81) L. Graetz und L. Fomm, Ann. Phys. Chem. (3) 53 (1894), p. 85; 54 (1895), p. 626, ferner L. Lombardi, Nuov. Cim. (4) 2 (1895), p. 360 und Mem. d. Acc. di Torino (2) 45 (1895), p. 171.

82) W. Thomson, Reprint Art. 670.

Bringt man in dieses Feld ein dünnes Stäbchen von kleinem  $\varepsilon - 1$ , welches um den Coordinatenursprung in der  $xy$ -Ebene drehbar ist, so folgt aus (98')

$$(102) \quad \mathfrak{N} = -\frac{\varepsilon - 1}{2} (a^2 + b^2) \sin 2\vartheta \cdot K,$$

wo  $K$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachsachse ist. Das Stäbchen sucht sich also in Richtung des Feldes ( $\vartheta = 0$ ) zu stellen. Setzt man in (102)  $\varepsilon/\varepsilon_0$  statt  $\varepsilon$  und multipliziert mit  $\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  Diel. Const. der Umgebung), so folgt, daß es sich senkrecht zum Felde stellt, wenn  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Diese Tendenz ist eine Eigenschaft der bestimmten Feldanordnung, nicht allgemein gültig, wie aus der Bemerkung nach (101') folgt<sup>83)</sup>. Das Drehmoment läßt sich zur Bestimmung von  $\varepsilon$  benutzen. Voraussetzung ist:  $\varepsilon$  nahezu 1.

**20. Elektromotorische Kräfte.** Sind Inhomogenitäten in den Leitern vorhanden, z. B. in der Grenzschicht zweier aneinander stoßender verschiedener Leiter, oder Temperaturgefälle in einem sonst homogenen Leiter, so muß man eine eingeprägte elektromotorische Kraft  $\mathfrak{E}^{el}$  annehmen. Es ist dann

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

$$(5') \quad \mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}),$$

also in der Elektrostatik

$$(11') \quad \mathfrak{E} = -\mathfrak{E}^{el}$$

in Leitern.

Ferner gelten (3) und (8). Damit (11') mit I. verträglich ist, d. h. damit ein statischer Zustand existieren kann, muß

$$(103) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E}^{el} = 0 \quad ,$$

sein. Aus (103) folgt

$$(104) \quad \int \mathfrak{E}_s^{el} ds = 0$$

für jede geschlossene Kurve. (104) drückt das Gesetz der Volotaschen Spannungsreihe aus.

Die Energie bleibt  $W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 dS$ , aber jetzt befindet sie sich zum Teil im Innern der Leiter, wo wegen (11')  $\mathfrak{E}$  nicht mehr verschwindet. Dieser Teil der Energie beträgt  $\int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^{el2} dS$ , die gesamte Energie lautet also

$$\int_{S_i}^{\frac{\varepsilon}{2}} \mathfrak{E}^{el2} dS + \int_{S_a}^{\frac{\varepsilon}{2}} \mathfrak{E}^2 dS,$$

83) Vgl. E. Cohn, Elm. Feld, p. 118.

wo  $S_i$  den Innenraum,  $S_a$  den Außenraum der Leiter bedeutet. Da wir aus der Abnahme der Energie die Kräfte erhalten, so wird elektrische Arbeit bei Deformation der Leiter geleistet, und diese Kräfte zusammen mit den übrigen Kräften (z. B. elastischen Kräften und Kapillarkräften) bestimmen das Gleichgewicht.

Auf Grund dieser Darstellung läßt sich der *Voltasche* Fundamentalversuch behandeln, ferner die *Thomsonsche* Methode<sup>84)</sup> zur Messung der elektrischen Differenz von Metallen. Die Resultate beider Methoden stimmen miteinander überein, aber sie stimmen nicht mit den Potentialdifferenzen aus Messungen der *Peltierschen* Wärme, die viel geringere elektrische Differenzen gibt; daher ist es wahrscheinlich, daß der größte Teil der elektrischen Differenz bei den Versuchen von *Volta* und *Thomson* in der Gasschicht an der Grenze Metall—Dielektrikum zu suchen ist. Von der letzteren Annahme ausgehend kann man die Erscheinungen darstellen, wenn man anstatt (3)

$$(3') \quad \mathfrak{D} = \varepsilon(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ed})$$

einführt, also eine im inhomogenen Dielektrikum wirksame elektromotorische Kraft, wie *Lorentz* das getan hat<sup>85)</sup>.

**21. Kristalle.** In Kristallen bleibt die Form der *Maxwellschen* Gleichungen erhalten; nur gilt anstatt (3) die kompliziertere Beziehung

$$(3'') \quad \mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}^{86})$$

Genau wie sich aus (1) und (2)  $W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 dS$  ergab (Nr. 2), gilt allgemein:

$$(105) \quad W_e = \int dS \int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E} d\mathfrak{D}.$$

Ist das System konservativ, d. h. durch den augenblicklichen Wert von  $\mathfrak{E}$  bestimmt, so folgt  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^{87})$  und

$$(105') \quad W_e = \int \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) dS.$$

Durch die  $\varepsilon$  ist ein Ellipsoid bestimmt, dessen Hauptachsen zu Koordinatenachsen gewählt werden sollen; dann geht (3'') über in

84) *W. Thomson*, Reprint Art. 400 und *Phil. Mag.* (5) 46 (1898), p. 82.

85) Elektronentheorie Art. *H. A. Lorentz* V 14, Nr. 44. Wichtig ist die Erklärung der Kontaktpotentialdifferenz auf elektronentheoretischer Grundlage: *H. A. Lorentz*, Amsterdam Akad. v. Wet. (1905), p. 556.

86) Wegen der Bezeichnungsweise siehe *Maxwellsche Theorie* Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 3.

87) Vgl. *Maxwell*, Treatise 1, Art. 101f.

$$(3'') \quad \mathfrak{D}_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x; \quad \mathfrak{D}_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y; \quad \mathfrak{D}_z = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z.$$

Es existiert auch hier ein Potential  $\varphi$ .<sup>87a)</sup> Anstatt (100) in Nr. 19 gilt

$$(106) \quad \delta A = \frac{1}{2} \delta \int \{ (\varepsilon_1 - 1) \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_{0x} + (\varepsilon_2 - 1) \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_{0y} + (\varepsilon_3 - 1) \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_{0z} \} dS.$$

Wird eine anisotrope Kugel in ein gleichförmiges Feld  $\mathfrak{E}_0$  gebracht, das parallel der  $x$ -Achse gerichtet ist, so ist

$$(107) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{3}{\varepsilon_1 + 2} \mathfrak{E}_{0x} \text{ (vgl. Nr. 16 (89'))},$$

also die Kraft

$$(108) \quad \mathfrak{F}_x = \frac{\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2}}{S} \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{E}_0^2 \text{ (vgl. Nr. 19)<sup>88)</sup>.$$

Eine um die  $z$ -Achse drehbare Kugel erfährt in einem Felde  $\mathfrak{E}_0$ , dessen horizontale Komponente  $\mathfrak{E}_{0h}$  den Winkel  $\vartheta$  mit der  $x$ -Achse bildet, wegen (106) und (107) das Drehmoment<sup>88a)</sup>

$$(109) \quad \mathfrak{N} = \frac{9}{2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + 2)(\varepsilon_2 + 2)} \mathfrak{E}_{0h}^2 S \sin 2\vartheta.$$

**22. Rückstand.** Ob es dielektrischen Rückstand, der analog der magnetischen Hysteresis ist (Nr. 32), in reinen Materialien überhaupt gibt, ist nicht absolut sicher. Die Versuche widersprechen sich bei homogenen Körpern<sup>89)</sup>; dagegen hat Maxwell<sup>90)</sup> gezeigt, daß bei inhomogenen Körpern, in denen das Verhältnis der Dielektrizitätskonstante zur Leitfähigkeit  $\varepsilon/\sigma$  Ortsfunktion ist, Rückstanderscheinungen auftreten müssen. Nimmt man an, daß die Erregung zur Zeit  $t$  proportional dem Wert der Feldstärke zu einer etwas früheren Zeit ist, so muß bei Schwingungen eines Körpers im Felde eine Dämpfung infolge der dielektrischen Hysteresis auftreten<sup>91)</sup>.

87a) *J. Curie*, Ann. chim. phys. (6) 17 (1889), p. 385 bestimmte Dielektrizitätskonstanten von Kristallen, indem er senkrecht zu den Hauptachsen geschnittene Kristallplatten zwischen die Belegungen eines Kondensators brachte.

88) *L. Boltzmann*, Wien. Ber. 70<sup>2</sup> (1874), p. 342. *Romich u. Nowak*, ibid. p. 380.

88a) *R. Fellinger*, Ann. Phys. (4) 7 (1902), p. 333 bestimmt aus dem Drehmoment von Kristallellipsoiden im homogenen Felde Dielektrizitätskonstanten; die Methode ist der in Anm. 81) erwähnten analog. Ebenso *Borel*, Diss. Genève 1893.

89) Siehe die Literaturzusammenstellung bei *L. Graetz*, Winkelmanns Handbuch d. Physik 4<sup>1</sup>, p. 157.

90) *Maxwell*, Treatise 1, Art. 328.

91) *W. Schaufelberger*, Ann. Phys. Chem. (3) 67 (1899), p. 307; *F. Beaulard*, Éclairage électrique 37 (1903), p. 404.

## II. Magnetostatik.

**23. Unterschiede der magnetostatischen und elektrostatischen Probleme.** In Nr. 3 sind die Grundgleichungen der Magnetostatik zusammengestellt, in Nr. 4 ist der Eindeutigkeitsbeweis erbracht, in Nr. 5 und 6 sind einige allgemeine Eigenschaften des Feldes und der Energie angegeben. Es wäre alles wörtlich aus der Elektrostatik zu entnehmen, indem man  $E$ ,  $\varphi$ ,  $\epsilon$ ,  $\varrho_e$ ,  $\omega_e$ ,  $W_e$  durch  $H$ ,  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $\varrho_m$ ,  $\omega_m$ ,  $W_m$  ersetzt, wenn nicht folgende wichtige Unterschiede beständen.

a) Es gibt keine Leiter des Magnetismus, also kein in Strenge vollständiges Feld außer dem unendlichen Raum; doch wir sahen in Nr. 14, daß ungeladene Dielektrika von unendlich großer Dielektrizitätskonstante analoges Verhalten zeigen wie Leiter. So zeigt auch ein Körper von sehr hoher Permeabilität  $\mu$  (weiches Eisen) ähnliche Eigenschaften (Schirmwirkung) wie Leiter in der Elektrostatik. Die Schirmwirkung einer Hohlkugel und eines Hohlzylinders, die zum magnetischen Schutz von Meßinstrumenten gebraucht werden, berechnet sich genau wie in Nr. 17 (92) und (93). Näheres hierüber in dem Artikel von *H. du Bois* V 17.

b) Wahre Dichten kommen nur in ferromagnetischen Körpern (Magneten) vor, aber es ist in jedem Magneten

$$\Sigma m = \int \varrho_m dS = 0.$$

Deshalb kann man

$$(110) \quad \varrho_m = -\operatorname{div} \mathfrak{M}^e$$

setzen, wo der Faktor  $\mathfrak{M}^e$  die (eingeprägte) wahre Magnetisierung heißt, die nur in Magneten von Null verschieden ist. Integriert man nämlich (110) über einen ganzen Magneten, so ergibt sich  $\Sigma m = 0$ , weil  $\mathfrak{M}^e$  auf einer den Magneten eng umschließenden Fläche bereits Null ist.

$\mathfrak{M}^e$  ist durch  $\varrho_m$  nicht gegeben, sondern es können noch geschlossene  $\mathfrak{M}^e$ -Linien in beliebiger Zahl und Anordnung hinzukommen, die aber, da sie quellenlos sind, kein  $\varrho_m$  ergeben (110), also wegen der Eindeutigkeit nichts zu  $\mathfrak{H}$  beitragen. Jedem Anfangspunkt einer  $\mu \mathfrak{H}$ -Linie entspricht der Endpunkt einer  $\mathfrak{M}^e$ -Linie und umgekehrt.

Die Einführung von  $\mathfrak{M}^e$  ist vorteilhaft, da  $\mathfrak{M}^e$  im Magneten beliebig gegeben sein darf, nur daß  $\mathfrak{M}^e$  stetig und differenzierbar an der Oberfläche in Null übergehen muß, während  $\varrho_m$  der Bedingung  $\Sigma m = 0$  genügen muß.

c) Während  $\varepsilon$  immer  $> 1$  ist, ist in den paramagnetischen Körpern  $\mu > 1$ , in den diamagnetischen  $< 1$ .<sup>92)</sup> Diese Tatsache wurde von Faraday<sup>93)</sup> durch die Drehmomente in einem Magnetfelde (der Form wie am Ende von Nr. 19) nachgewiesen. Es gilt auch hier die Bemerkung von der Nichtallgemeinheit der Erscheinung wie in Nr. 19.

**24. Gibt es wahren Magnetismus?** Diese Frage ist gleichbedeutend mit der, ob die Erregungslinien Endpunkte haben; die Antwort fällt verschieden aus, je nachdem die Erregung definiert wird<sup>94).</sup>

In unserer Darstellung existiert wahrer Magnetismus<sup>95);</sup> er ist gegeben durch die Beziehungen  $\varrho_m = \operatorname{div} \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ .

Im Gegensatz hierzu zeigen wir, daß wir zwei analoge Vektoren  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{H}'$  definieren können, derart daß  $0 = \operatorname{div} \mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}'$  wird. Setzen wir nämlich

$$(111) \quad \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^e = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}$$

ein ( $\mathfrak{M}$  heißt Magnetisierung, sie setzt sich additiv zusammen aus der induzierten Magnetisierung  $(\mu - 1)\mathfrak{H}$  und der wahren Magnetisierung  $\mathfrak{M}^e$ ), so ist wegen II<sup>a</sup> und (110)

$$(112) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0.$$

Ferner ist wegen I<sup>a</sup>

$$(113) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{\mathfrak{B}'}{\mu} - \frac{\mathfrak{M}^e}{\mu} \right) = 0.$$

Setzen wir schließlich noch

$$(114) \quad \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}'; \quad \frac{\mathfrak{M}^e}{\mu} = \mathfrak{H}'_e,$$

so haben wir

$$(112') \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0,$$

$$(113') \quad \operatorname{rot} (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'_e) = 0.$$

In dieser Darstellung gibt es keine magnetischen Mengen, man muß sich das Feld  $\mathfrak{H}'$  durch Ampère'sche Molekularströme erzeugt denken.  $\mathfrak{H}'_e$  ist als magnetomotorische Kraft zu deuten; diese bleibt

92)  $\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}$  heißt Suszeptibilität; dieselbe kann also  $> 0$  und  $< 0$  sein.

93) Faraday, Researches 2, p. 217.

94) Maxwellsche Theorie Art. H. A. Lorentz V 13, Nr. 19; E. Cohn, Elm. Feld, p. 299; R. Gans und R. H. Weber, Ann. d. Phys. (4) 16 (1905), p. 172.

95) Diese Darstellung weicht von der Lorentzschen ab; siehe Art. Maxwell-sche Theorie V 13, Nr. 15.

konstant bei Veränderungen in der Konfiguration der Magnete<sup>96)</sup>. Während die Felddarstellung an Einheitlichkeit gewinnt, wenn man  $\mathfrak{H}'$  einführt, da dann, gleichgültig, ob ein permanenter oder Elektromagnet vorliegt,  $\operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0$  und rot  $\mathfrak{H}'$  gegeben ist, hat die Energie, in  $\mathfrak{H}$  ausgedrückt, die einheitliche Form  $\frac{1}{2} \int \mu \mathfrak{H}^2 dS$ , dagegen in  $\mathfrak{H}'$  die Form  $\frac{1}{2} \int \mu \mathfrak{H}'^2 dS$  oder  $-\frac{1}{2} \int \mu \mathfrak{H}'^2 dS$ , je nachdem ein Elektromagnet oder ein permanenter Magnet vorliegt. Für permanent magnetische Kreise gilt das Analogon des Ohmschen Gesetzes<sup>96)</sup> ebenso wie für elektromagnetische Kreise<sup>97)</sup>. Man kann  $\mu$  die magnetische Leitfähigkeit,  $\sum_{\mu \sigma} \frac{l}{\sigma}$  den magnetischen Widerstand nennen<sup>98)</sup>. Nähere Ausführungen hierzu im Artikel V 17 von *H. du Bois*.

**25. Influenz. Wahrer und freier Magnetismus.** Die Theorie der magnetischen Influenz wurde von *Poisson*<sup>98)</sup> auf Grund molekularer Hypothesen über die Konstitution polarisierbarer Substanzen aufgestellt; von diesen Hypothesen machten sich *W. Thomson*<sup>99)</sup>, *F. Neumann*<sup>100)</sup>, *Kirchhoff*<sup>101)</sup> und *Duhem*<sup>101a)</sup> frei, indem sie die Theorie auf einige Erfahrungstatsachen gründeten, die heute ihren Ausdruck in den Maxwell'schen Gleichungen gefunden haben. Es gilt das Analoge wie in Nr. 15, die induzierte und freie Dichte drücken sich analog aus. Entsprechend gibt es eine induzierte Magnetisierung

$$\mathfrak{M}' = (\mu - 1) \mathfrak{H}.$$

Ist im ganzen Raum  $\mu = 1$ , so ist (vgl. Nr. 15)

$$(115) \quad \psi_0 = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{m}{r} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{M}'}{r} dS + \int \frac{\mathfrak{M}'^e}{r} d\sigma \right\}.$$

oder durch partielle Integration

96) *R. Gans* und *R. H. Weber*, Ann. d. Phys. (4) 16 (1905), p. 172; *R. H. Weber*, Ann. d. Phys. (4) (1905), p. 178 und *E. Kempken*, Tübinger Diss. 1906 und Ann. d. Phys. (4) 20 (1906) p. 1017.

97) Vgl. Anm. 96) und *H. du Bois*, Magnetische Kreise, p. 186, Berlin und München (1894).

98) *Poisson*, Mém. de l'acad. de France 5 (1826), p. 247, 488; 6 (1827), p. 441, vgl. auch *Maxwell*, Treatise 2, Art. 385.

99) *W. Thomson*, Reprint Art. 604.

100) *F. Neumann*, J. f. Math. 37 (1848), p. 21; Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, Leipzig 1881.

101) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 48 (1854), p. 348; Ges. Abhandlungen, p. 193 und p. 223.

101a) *P. Duhem*, De l'aimantation par influence, Diss. Paris 1888, verwendet die thermodynamischen Prinzipien.

$$(115') \quad \psi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left( \mathfrak{M}^e \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \right) dS,$$

wo der Strich am grad bedeuten soll, daß die Differentiationen nach den laufenden Koordinaten von  $S$  auszuführen sind.

(115') zeigt, daß der Magnet aufgefaßt werden kann als bestehend aus kleinen Elementarmagneten<sup>98)</sup>.

$$(116) \quad \int \mathfrak{M}^e dS = m$$

und

$$(116') \quad \int \mathfrak{M}' dS = m'$$

heißen wahres und induziertes Moment (ersteres auch kurz: Moment)<sup>101b)</sup> des Magneten.

Ist  $\mu \neq 1$ , so kommt zu  $\psi_0$  noch  $\chi_m$  hinzu, und wir haben

$$(117) \quad \psi = \psi_0 + \chi_m = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{m+m'}{r}, \text{ vgl. (87),}$$

wo

$$\chi_m = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{m'}{r} = \frac{1}{4\pi} \int \left( \mathfrak{M}' \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \right) dS, \text{ vgl. (86) und (116').}$$

Wird ein polarisierbares Ellipsoid (d. h.  $\mu \neq 1$ ) in ein gleichförmiges Feld gebracht, so gelten die Analoga von (88) und (89). Aus (89) folgt für die induzierte Magnetisierung

$$(89_1) \quad \mathfrak{M}'_x = \frac{\mathfrak{H}_{0x}}{\frac{1}{\mu-1} + A}; \quad \mathfrak{M}'_y = \frac{\mathfrak{H}_{0y}}{\frac{1}{\mu-1} + B}; \quad \mathfrak{M}'_z = \frac{\mathfrak{H}_{0z}}{\frac{1}{\mu-1} + C}.$$

Speziell für die Kugel ergibt sich das Analogon von (89'); aus dieser Gleichung folgt, daß die Erregungslinien in die Kugel hineingezogen oder aus ihr herausgedrängt werden, je nachdem  $\mu \gtrless 1$  ist<sup>102)</sup>.

Denkt man sich in ein gegebenes Feld mit festen Magnetismusmengen, das sich aus einem Potential  $\psi_0$  ableitet, einen polarisierbaren Körper gebracht, so muß das Potential  $\psi = \psi_0 + \chi$  des wirklichen Feldes außer der Laplaceschen Gleichung noch an der Oberfläche des Körpers der Gleichung

$$(118) \quad \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \frac{\partial \psi_a}{\partial n}$$

genügen, d. h. das Zusatzpotential  $\chi$  genügt der Gleichung

$$(119) \quad (\mu - 1) \frac{\partial \chi_i}{\partial n} + \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \frac{\partial \chi_a}{\partial n} \right) = -(\mu - 1) \frac{\partial \psi_0}{\partial n}.$$

101b) Die bei magnetischen Messungen als Moment bezeichnete Größe ist in Wirklichkeit nicht das wahre, sondern das freie Moment (vgl. Nr. 27 und 28).

102) W. Thomson, Reprint Art. 632.

Bei willkürlich gegebenem  $\psi_0$  läßt sich diese Gleichung in geschlossener Form bis jetzt nur in Spezialfällen integrieren. Poisson<sup>98)</sup>) führt dies für die Kugel und Hohlkugel durch Entwicklung von  $\psi_0$  nach Kugelfunktionen aus, Somigliana<sup>103)</sup> und gleichzeitig Boggio<sup>104)</sup>) kommen ohne solche Entwicklungen aus, sie erhalten das induzierte Potential direkt durch bestimmte Integrale. F. Neumann löst das Problem für das Rotationsellipsoid<sup>100)</sup>, Kirchhoff<sup>101)</sup> für unendlich lange Zylinder und den Kreisring; der Kreisring sowie das dreiachsiges Ellipsoid sind von Giuliani<sup>105)</sup> behandelt; C. Neumann<sup>106)</sup> dehnt die Methode auf zwei Körper, speziell zwei Kugeln im Magnetfeld aus. Boggio<sup>107)</sup> nimmt das Zweikugelproblem auf und behandelt auch den Grenzfall, daß zwei Halbräume mit parallelen Begrenzungen einander gegenüberstehen.

Bei einem beliebig gestalteten Körper denke man sich  $\chi$  nach Potenzen von  $\mu - 1$  entwickelt, also

$$(120) \quad \chi = \sum_{v=1}^{\infty} (\mu - 1)^v \chi^{(v)},$$

so folgen durch Substitution von (120) in (119) die Rekursionsformeln

$$(121) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \chi_a^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial \chi_i^{(1)}}{\partial n} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial n}, \\ \frac{\partial \chi_a^{(v+1)}}{\partial n} - \frac{\partial \chi_i^{(v+1)}}{\partial n} &= \frac{\partial \chi_i^{(v)}}{\partial n}, \end{aligned}$$

welche die Lösung haben (vgl. Nr. 4 (14) und (15))

$$(122) \quad \begin{aligned} \chi^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \\ \chi^{(v+1)} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \chi_i^{(v)}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Diese Methode der sukzessiven Induktionen stammt von Beer<sup>108)</sup> die Reihen von C. Neumann<sup>109)</sup>, L. Weber<sup>110)</sup>, Riecke<sup>111)</sup>, Wassmuth<sup>112)</sup>

103) Somigliana, Rend. del r. Ist. Lomb. (2) 36 (1903).

104) T. Boggio, ibid. (2) 37 (1904), p. 123; Nuovo Cim. (5) 11 (1906), p. 1

105) G. Giuliani, Nuovo Cim. (3) 11 (1882).

106) C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen p. 282, Leipzig (1883)

vgl. auch R. A. Herman, Quarterly J. of Math. 22 (1887), p. 204.

107) T. Boggio, Rend. del r. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 405.

108) A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Braunschweig 1865, p. 155.

109) C. Neumann, Untersuchungen über das log. und Newtonsche Potential, Leipzig 1877.

110) L. Weber, Zur magnetischen Induktion, Kiel 1877; Arch. Math. Phys 61 (1877), p. 286.

Korn<sup>112a)</sup> sind Potenzreihen nach Potenzen von  $\mu - 1$ ,  $\frac{\mu - 1}{\mu}$  oder  $\frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ . Anstatt dessen kann man auch  $\psi$  nach Potenzen von  $\frac{1}{\mu}$  entwickeln, muß aber die Lösung für  $\mu = \infty$ , d. h. für den Fall, daß in ein gegebenes elektrostatisches Feld ein ungeladener Leiter gebracht wird, vorher gefunden haben<sup>113)</sup>.

**26. Energie und Kräfte.** Die Energie drückt sich nach Nr. 6 (21) aus als

$$(21_1) \quad W = \frac{1}{2} \sum m \psi,$$

und dies wegen (110) und Ia' als

$$\int (\mathfrak{M}^e \mathfrak{H}) dS.$$

Die Spannungen sind Analoga der elektrischen, sie ergeben Kräfte analog (94). Die magnetischen Drucke an der Grenze zweier Körper gehorchen den (95) entsprechenden Formeln. Auf Grund dieser Formeln hat Quincke<sup>114)</sup> Permeabilitäten von Flüssigkeiten und Gasen bestimmt, indem er den magnetischen Druck durch hydrostatische Druck kompensiert hat.

Über die magnetischen Spannungen und die sogenannte Magnetostriktion findet sich Näheres in dem Art. von F. Pockels V 16.

**27. Kräfte auf starre Körper.** Wie in Nr. 19 ergibt sich durch Einführung der freien Mengen das Coulombsche Gesetz. Die Arbeit bei einer unendlich kleinen Verschiebung eines Magneten zu Stellen höherer Feldstärke ist

$$(123) \quad \delta A = \int (\mathfrak{M}^e + \mathfrak{M}') \cdot \delta \mathfrak{H}_0 dS. \quad ^{115)}$$

Ist  $\mathfrak{H}_0$  im Magneten gleichförmig, so ist wegen (116) und (116')

$$(123') \quad \delta A = (\mathfrak{m} + \mathfrak{m}') \cdot \delta \mathfrak{H}_0.$$

(101), (101') und (102) gelten analog für den Magnetismus; man hat diese Formeln zur Bestimmung der Permeabilität benutzt<sup>116)</sup>.

111) E. Riecke, Ann. Phys. Chem. (3) 13 (1881), p. 465; man beachte die Konvergenzfragen.

112) A. Wassmuth, Ann. Phys. Chem. (3) 51 (1894), p. 367.

112a) A. Korn, München Ber. 31 (1902), p. 435.

113) Vgl. G. Kirchhoff, Vorlesungen 3, p. 160.

114) G. Quincke, Ann. Phys. Chem. (3) 24 (1885), p. 347; H. du Bois, Ann. Phys. Chem. (3) 35, (1888), p. 137.

115) E. Cohn, Elm. Feld, p. 209.

116) H. A. Rowland, Americ. Journ. of science and arts (3) 9 (1873), p. 357; H. A. Rowland und W. Jacques, Journ. of science and arts (3) 18 (1879), p. 360;

### 28. Magnetisches Moment. Horizontalintensität. Kompaß.

Gleichung (123) in Nr. 27 ist die Grundlage der *Gauß'schen* Methode<sup>117)</sup> zur Bestimmung magnetischer Momente und der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft. Da aber die in (123') vorkommenden freien Mengen nicht an der Materie haften, ist die Theorie nicht ganz streng. *Dorn*<sup>118)</sup> hat Korrekturen wegen der induzierten Momente angebracht.

Um das Feld eines symmetrisch um eine Achse magnetisierten Magneten (z. B. der Erde) außerhalb der Kugel, die ihn gerade umschließt, darzustellen, wählen wir seinen Mittelpunkt zum Ursprung eines Kugelkoordinatensystems, seine Achse zur Achse desselben. Ist  $R$  die Entfernung des Aufpunktes vom Ursprung,  $\vartheta$  der Winkel, den  $R$  mit der Polarachse bildet, so ist, da  $\psi$  der *Laplaceschen* Gleichung im Außenraum genügt,

$$(124) \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \vartheta) \frac{1}{R^{n+1}},$$

wo  $P_n$  die Kugelfunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung erster Art bedeutet.

Da die magnetische Verteilung in Punkten, die bezüglich der Ebene  $\vartheta = \pi/2$  spiegelbildlich liegen, bis aufs Vorzeichen dieselbe sein soll, so fallen die geraden Indizes in (124) fort, es bleibt

$$(124') \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1} P_{2r+1}(\cos \vartheta) \frac{1}{R^{2(r+1)}},$$

wo die  $C$  gegebene Konstanten sind.

Um zu sehen, inwieweit dieser Magnet durch zwei punktförmige magnetische Mengen  $\pm m$  auf der Magnetachse im Abstande  $\pm l$  vom Mittelpunkt ersetzt werden kann, berechnen wir auch das Potential dieser Anordnung. Es ergibt sich

$$(125) \quad \psi = \frac{m}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2m}{4\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{l^{2r+1}}{R^{2(r+1)}} P_{2r+1}(\cos \vartheta).$$

Die beiden ersten Glieder von (125) sind immer mit denen von (124') durch geeignete Wahl von  $m$  und  $l$  zur Deckung zu bringen, wenn man nämlich setzt

*G. Wiedemann*, Ann. Phys. Chem. (2) 126 (1865), p. 8; *v. Ettingshausen*, Ann. Phys. Chem. (3) 17 (1882), p. 304; *Wien Ber.* (2) 96<sup>2</sup> (1887), p. 777; *Eaton*, Ann. Phys. Chem. (3) 15 (1882), p. 225; *Schuhmeister*, Wien Ber. (2) 83<sup>2</sup> (1881), p. 46; *S. Henrichsen*, Ann. Phys. Chem. (3) 34 (1888), p. 180.

117) *C. F. Gauß*, Werke 5, Göttingen 1877, p. 79; Ostwalds Klassiker Nr. 53.

118) *Dorn*, Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 270.

$$2ml = C_1, \quad 2ml^3 = C_3.$$

Nur wenn man sich auf die beiden ersten Glieder als Näherung beschränkt, sind Pole von bestimmter Lage und Stärke für den Magneten anzugeben.  $C_1 = m$  ist das (freie) magnetische Moment des Magneten<sup>118a)</sup>.

*Gauß* nennt einen Punkt auf der Linie  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$  in der ersten Hauptlage befindlich, in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$  in der zweiten Hauptlage befindlich.

Bildet der um eine vertikale Achse drehbare Magnet mit horizontaler Magnetachse den Winkel  $\varphi$  mit der Horizontalkomponente  $\mathfrak{H}_h$  des gleichförmigen Feldes  $\mathfrak{H}$ , so ist nach (123') das Drehmoment

$$(126) \quad \mathfrak{N} = -|m| \cdot |\mathfrak{H}_h| \cdot \sin \varphi.$$

Die Direktionskraft  $\frac{\mathfrak{N}}{\varphi}$  und damit  $|m| \cdot |\mathfrak{H}_h|$  kann man durch Beobachtung der Schwingungsdauer des Magneten um seine Gleichgewichtslage bestimmen.

Durch die Ablenkungen eines kleinen Hilfsmagneten ergibt sich  $\frac{|m|}{|\mathfrak{H}_h|}$ , so daß man  $m$  und  $\mathfrak{H}_h$  einzeln kennt<sup>119)</sup>.

Bei der Behandlung der Theorie des Kompasses ist es notwendig, den von der Erdkraft in den Eisenteilen des Schiffes induzierten Magnetismus sowie den permanenten Magnetismus der Eisenmassen zu berücksichtigen. Nimmt man die Permeabilität des Eisens bei den schwachen in Betracht kommenden Feldstärken des Erdfeldes als konstant an, so überlagern sich die von den einzelnen Komponenten des Erdfeldes durch Induktion erzeugten Felder einfach. In der Theorie des Schiffsmagnetismus wählt man gewöhnlich die  $x$ -Achse in Richtung der Längsachse des Schiffes (positiv nach vorn), die  $y$ -Achse nach Steuerbord (rechte Seite des Schiffes), die  $z$ -Achse kielwärts. Dann ist an der Stelle des Kompasses

$$(127) \quad \begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R. \end{aligned}$$

$X', Y', Z'$  sind die Komponenten der auf den Kompaß tatsächlich wirkenden Feldstärke,  $X, Y, Z$  die der ungestörten Stärke des Erdfeldes, wie es bei Abwesenheit des Schiffes vorhanden wäre;  $P, Q, R$

118a) Vgl. E. Riecke, Ann. Phys. Chem. (2) 149 (1873), p. 62; (3) 8 (1879), p. 299.

119) Ausführliches über die Theorie des Erdmagnetismus findet man bei E. Mascart, Traité de magnétisme terrestre, Paris 1900.

sind die durch den permanenten Magnetismus hervorgerufenen Feldstärken. Die Größen  $a, b, \dots k$  sind in jedem Schiffe Konstanten, die durch die Verteilung und durch die physikalische Beschaffenheit des weichen Eisens bestimmt sind. (127) ist die von *Poisson*<sup>120)</sup> aufgestellte Grundgleichung der Kompaßtheorie, aus ihr folgen alle für die Nautik wichtigen Beziehungen für die Kompaßabweichungen<sup>121)</sup>.

Führt man in (127)  $\mathfrak{H}'$ , die Horizontalintensität der tatsächlich vorhandenen Feldstärke, ein, nennt man  $\zeta'$  resp.  $\zeta$  den Kompaßkurs resp. magnetischen Kurs des Schiffes, d. h. die östliche Abweichung der Fahrtrichtung vom Norden der Kompaßrose resp. vom magnetischen Meridian und setzt man

$$\xi - \zeta' = \delta,$$

so daß  $\delta$  die östliche Deviation der Nadel aus dem Meridian bedeutet, so gilt, wenn die Koeffizienten  $a$  bis  $k$  unendlich klein sind,  
(128)  $\delta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta' + \mathfrak{D} \sin 2\zeta' + \mathfrak{E} \cos 2\zeta'$ .

$\mathfrak{B} \sin \zeta'$  und  $\mathfrak{C} \cos \zeta'$  wechseln, wenn der Kompaßkurs  $\zeta'$  zwischen 0 und  $2\pi$  variiert, je einmal das Zeichen, deshalb nennt man diese Glieder die semizirkuläre Abweichung;  $\mathfrak{D} \sin 2\zeta'$  und  $\mathfrak{E} \cos 2\zeta'$  wechseln dagegen zweimal das Zeichen, sie heißen die quadrantale Abweichung.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$  sind auf einem Schiffe Konstanten, während  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  mit dem Ort des Schiffes auf der Erde variieren, da sie Funktionen der magnetischen Inklinations und Horizontalintensität sind.

$P, Q$  und  $R$  werden durch permanente Magnete,  $a$  bis  $k$  durch weiche Eisenstäbe in der Nähe des Kompasses kompensiert<sup>122)</sup>.

- 29. Magnetische Doppelschichten<sup>123)</sup>). Für die Theorie der elektrischen Ströme ist eine besondere Art von Magneten wichtig: eine sehr dünne Schale, deren Flächenelemente  $d\sigma$  heißen, von der Dicke  $h$  und der Permeabilität  $\mu$ , sei normal zur Schale magnetisiert. Die Magnetisierung sei  $\mathfrak{M}^e$

120) *Poisson*, Mém. de l'inst. 5 (1824), p. 533; 16 (1838), p. 479.

121) Eingehend behandelt von *F. J. Evans* und *A. Smith*, Admiralty manual for the deviations of the compass (7. Aufl.), London 1901; s. auch *C. H. Wind*, Magneetkracht en electriciteit, Leiden 1903, p. 381—396 und Anm. 119; *E. Rottok*, Die Deviationstheorie und ihre Anwendung in der Praxis (2. Aufl.), Berlin 1903, p. 43; Der Kompaß an Bord, herausgeg. v. d. deutschen Seewarte (2. Aufl.), Hamburg 1906; Lehrbuch der Navigation, herausgeg. vom Reichsmarineamt (2. Aufl.) 1, Berlin 1906, p. 53.

122) Wegen der Lage der Eisenstäbe vgl. die Rechnungen bei *Maxwell*, Treatise 2, Art. 441 und die Abbildungen bei *Wind* (Anm. 121).

123) Vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer*, II A 7 b, Nr. 6.

$$(129) \quad \Phi = \frac{|\mathfrak{M}^e| h}{\mu}$$

heißt die Stärke der Schale. Im folgenden nehmen wir den für die Theorie der elektrischen Ströme einzig interessierenden Fall an, daß  $\Phi$  für die ganze Fläche konstant ist.

Für die wechselseitige Energie der Doppelschicht (Stärke  $\Phi_1$ , Fläche  $\sigma_1$ ) und eines beliebigen Feldes (Stärke  $\mathfrak{H}_2$ ) folgt

$$(130) \quad U = -\Phi_1 \int \mathfrak{B}'_{2n} d\sigma_1.$$

$\mathfrak{B}'$  ist durch (111) definiert.

Dieser Ausdruck ist nur von der Randkurve abhängig. Führt man die freie Magnetisierung  $\mathfrak{M}^e/\mu$  der Doppelschicht ein, so folgt wegen (115') und (117)

$$(131) \quad \psi = \frac{\Phi}{4\pi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \Phi \frac{\alpha}{4\pi},$$

wenn  $\alpha$  der körperliche Winkel ist, unter dem die Doppelschicht vom Aufpunkte aus erscheint.

Aus (131) ergibt sich der konstante Sprung  $\Phi$  des Potentials beim Durchschreiten der Doppelschicht.

Hat man zwei Doppelschichten  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , so ist

$$(132) \quad U = -\Phi_1 \Phi_2 q_{12} = -\Phi_1 \Phi_2 q_{21},$$

wo  $q_{12}$  die Anzahl Erregungslinien sind, die die erste Doppelschicht, wenn  $\Phi_1 = 1$  ist, durch  $\sigma_2$  schickt. Eine für die Theorie der Ströme (wechselseitiger Induktionskoeffizient) wichtige Formel von *F. Neumann* ist

$$(133) \quad q_{12} = q_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s_1 s_2} \frac{(d\mathfrak{s}_1 \cdot d\mathfrak{s}_2)}{r},$$

wo  $s_1$  und  $s_2$  die Randkurven der Doppelschichten sind<sup>124)</sup>.

**30. Kristalle.** Die Anfänge einer theoretischen Behandlung röhren von *Poisson*<sup>125)</sup> her; als dann *Plücker*<sup>126)</sup> die experimentelle Grundlage geschaffen hatte, arbeitete *W. Thomson*<sup>127)</sup> eine Theorie aus, die der in Nr. 21 gegebenen entspricht.

124) Vgl. Fernwirkung Art. *R. Reiff* und *A. Sommerfeld*, V 12, Nr. 5.

125) *Poisson*, Mém. de l'acad. 5 (1821), p. 247, 488; 6 (1823), p. 441; Ann. Phys. Chem. (2) 1 (1824), p. 301; 3 (1825), p. 429.

126) *J. Plücker*, Ann. Phys. Chem. (2) 72 (1847), p. 315.

127) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 177; Reprint Art. 604. Man vgl. auch *A. Beer*, Einleitung in die Elektrostatik, Braunschweig 1865, p. 221; *P. Duhamel*, Anm. 101<sup>a</sup>); *W. Voigt*, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898.

Nach der (109) entsprechenden Formel hat *Stenger*<sup>128)</sup> die Differenz der Permeabilitäten von Kristallen in verschiedenen Richtungen bestimmt.

Sehr viel komplizierter wird das Problem, wenn die Permeabilität  $\mu$  nicht mehr konstant, sondern von der Feldstärke abhängig ist, in den sogenannten ferromagnetischen Kristallen. Für die induzierte Magnetisierung macht *Voigt*<sup>129)</sup> den Ansatz

$$(134) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}'_x &= \mathfrak{H}_x [\mu_1 - 1 + f_1], \\ \mathfrak{M}'_y &= \mathfrak{H}_y [\mu_2 - 1 + f_2], \\ \mathfrak{M}'_z &= \mathfrak{H}_z [\mu_3 - 1 + f_3], \end{aligned}$$

wo die  $f$  Funktionen der Komponenten von  $\mathfrak{H}$  sind und zwar bei zentrisch-symmetrischen Kristallen gerade Funktionen; von diesen nehmen wir an, daß sie sich als Reihen darstellen lassen, die sich z. B. für das reguläre System wesentlich vereinfachen.

Es wird dann nämlich

$$(134') \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}'_x &= \mathfrak{H}_x (\mu - 1 - k_1 \mathfrak{H}_x^2 - k_2 \mathfrak{H}_x^4 - k_3 \mathfrak{H}_x^6 - k_4 \mathfrak{H}_x^8 - k_5 \mathfrak{H}_x^{10} - \dots), \\ \mathfrak{M}'_y &= \mathfrak{H}_y (\mu - 1 - k_1 \mathfrak{H}_y^2 - k_2 \mathfrak{H}_y^4 - k_3 \mathfrak{H}_y^6 - k_4 \mathfrak{H}_y^8 - k_5 \mathfrak{H}_y^{10} - \dots), \\ \mathfrak{M}'_z &= \mathfrak{H}_z (\mu - 1 - k_1 \mathfrak{H}_z^2 - k_2 \mathfrak{H}_z^4 - k_3 \mathfrak{H}_z^6 - k_4 \mathfrak{H}_z^8 - k_5 \mathfrak{H}_z^{10} - \dots). \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung höherer Glieder findet also keine Isotropie mehr statt.

Auf Grund dieser Theorie, die *Voigt* auch auf nicht zentrisch-symmetrische Kristalle mit drei einander gleichwertigen aufeinander senkrechten zweizähligen Achsen erweitert, wird die Influenz in Ellipsoiden berechnet zur Diskussion der Versuche von *Weiß*<sup>129a)</sup>.

**31. Ferromagnetische Körper.** Bei ferromagnetischen Körpern ist  $\mu$  Funktion von  $|\mathfrak{H}|$ . Von diesem Ansatz aus hat *Cohn*<sup>130)</sup> die Theorie entwickelt. Aus den Grundgleichungen der *Maxwell*'schen Theorie folgt, daß

$$(135) \quad W_m = \int dS \int_0^{\mu \mathfrak{H}} (\mathfrak{H} \cdot d\mu \mathfrak{H}) = \int dS \left\{ \mu \mathfrak{H}^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}) \right\}.$$

128) *F. Stenger*, Ann. Phys. Chem. (3) 20 (1883), p. 304; 35 (1888), p. 331.

129) *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1900, p. 331; 1903, p. 17; Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 136; siehe auch *S. Sano*, Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 8; *Wallerant*, Paris C. R. 138 (1901), p. 630.

129a) *P. Weiß*, Paris C. R. 138 (1904), p. 35; 140 (1905), p. 1532 und p. 1587; J. de phys. (3) 5 (1895), p. 435; (4) 3 (1904), p. 194; 4 (1905), p. 469). In diesen Arbeiten finden sich auch thermodynamische Betrachtungen über die Magnetisierung von Kristallen.

130) *E. Cohn*, Elm. Feld, p. 510.

Für das magnetostatische Feld bleiben I<sup>a</sup> und II<sup>a</sup> bestehen. Da aber  $\mu = f(|\mathfrak{H}|)$  ist, so sind die Gleichungen nicht mehr linear, die Superposition zweier Felder findet nicht mehr statt. Aus (135) folgt für die Spannungen

$$(136) \quad X_x = \mu \mathfrak{H}_x^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}), \quad X_y = Y_x = \mu \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y,$$

$$Y_y = \mu \mathfrak{H}_y^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}), \quad Y_z = Z_y = \mu \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z,$$

$$Z_z = \mu \mathfrak{H}_z^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}), \quad Z_x = X_z = \mu \mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x,$$

d. h. auf eine zu  $\mathfrak{H}$  senkrechte Fläche wirkt der normale Zug  $\mu \mathfrak{H}^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}) = \int_0^{\mu \mathfrak{H}} (\mathfrak{H} \cdot d\mu \mathfrak{H})$ , und auf jede zu  $\mathfrak{H}$  parallele Fläche ein normaler Druck  $\int_0^{\mathfrak{H}} (\mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H})$ . Die Hauptspannungen sind also nicht mehr numerisch gleich.

Die Kraft auf die Volumeinheit ist

$$(94_1) \quad \mathfrak{f} = \varrho_m \mathfrak{H} - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{H} d\mathfrak{H}) \operatorname{grad} \mu.$$

Hier sind die Differentiationen von  $\mu$  bei örtlich konstant gedachtem  $\mathfrak{H}$  vorzunehmen.

**32. Hysterese.** Ist die Induktion  $\mathfrak{B}$  nicht durch den augenblicklichen Wert von  $\mathfrak{H}$  gegeben, sondern sind frühere Werte von  $\mathfrak{H}$  maßgebend, so wird, wenn  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  einen Zyklus von Werten angenommen haben, die Energiemenge<sup>131)</sup>

$$(137) \quad \left( \int \right) (\mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}) = - \left( \int \right) (\mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{H})$$

pro Volumeneinheit als Hysteresewärme abgegeben. Hier bedeutet  $\left( \int \right)$ , wie in der Thermodynamik üblich, das über den durchlaufenen Zyklus erstreckte Integral. Diese Größe ist immer positiv, da wachsenden  $\mathfrak{H}$  kleinere  $\mathfrak{B}$  entsprechen als abnehmenden. Eingehend können wir die Hysterese nicht behandeln, einerseits da sie aus dem Rahmen der Statik, dann aber auch, weil sie aus dem der Maxwell'schen Theorie herausfällt. (137) ist die einzige allgemein gültige Beziehung.

131) Warburg, Ann. Phys. Chem. (3) 13 (1881), p. 140.

Man unterscheidet statische Hysterese, Wechselstromhysterese und Rotationshysterese; bei ersterer ändert sich die Feldstärke nur sehr langsam, bei den beiden letzteren im allgemeinen schnell, und zwar bleibt bei der Wechselstromhysterese die Feldrichtung konstant, es variiert nur die Amplitude, während bei der rotierenden Hysterese die Stärke des Feldes konstant bleibt und nur die Richtung sich ändert. Literaturangaben und Kritisches findet man bei *M. Wien*<sup>132</sup>), ein Referat über den Stand der Frage bei *Warburg*<sup>133</sup>).

Weitere Ausführungen über Hysterese bringt der Art. V 17 von *H. du Bois*.

---

132) *M. Wien*, Ann. Phys. Chem. (3) 66 (1898), p. 859.

133) *E. Warburg*, Rapports Congrès internat. de phys. 2, (Paris 1900), p. 509 und Phys. Zeitschr. 2 (1901), p. 367.

(Abgeschlossen im Oktober 1906.)

## V 16. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ELEKTRO- STATISCHEN UND MAGNETOSTATISCHEN ZUSTANDSÄNDERUNGEN EINERSEITS UND ELASTISCHEN UND THERMISCHEN ANDERERSEITS.

von

**F. POCKELS**

IN HEIDELBERG.

### Inhaltsübersicht.

1. Maxwell'sches Spannungssystem im Dielektrikum.
2. Bedeutung der Maxwell'schen Spannungen für die Elektrostriktion.
3. Spannungen, welche durch den Einfluß von Deformationen auf die dielektrischen Konstanten bedingt werden.
4. Elektrostriktion von Flüssigkeiten.
5. Elektrostriktion isotroper fester Körper. Behandlung nach den Methoden der Elastizitätstheorie.
6. Fortsetzung. Energetische Behandlung.
7. Magnetostriktion.
8. Piezoelektrizität und Elektrostriktion azentrischer Kristalle. Allgemeiner Ansatz.
9. Spezialisierung für die einzelnen Kristallgruppen.
10. Anwendung auf besondere Fälle.
11. Polare Pyroelektrizität und reziproker Wärmeeffekt.
12. Molekulartheorien der Pyro- und Piezoelektrizität.
13. Zentrische Pyro- und Piezoelektrizität.
14. Pyro- und Piezomagnetismus.

### Literatur.

*W. Voigt*, Kompendium der theoretischen Physik (Leipzig 1896), 2. Bd., 4. Teil,  
§§ 11—15 u. 20.

*W. Voigt*, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle (Leipzig 1898), §§ 3 u. 6 und Zusätze V—VII u. IX.

*Winkelmanns Handbuch der Physik*, 2. Aufl. (1905), Bd. 4, p. 162—168 (Elektrostriktion von *L. Graetz*) u. p. 766—793 (Pyro- u. Piezoelektrizität von *F. Pockels*); Bd. 5, p. 301—338 (Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik von *F. Auerbach*).

*G. Wiedemann*, Die Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl. (Leipzig 1894), Bd. 2 II Kap. 3, III Kap. 3, Bd. 3 B Kap. 7.

*Th. Liebisch*, Physikalische Krystallographie (Leipzig 1891), Kap. 7 und 10.

*F. Pockels*, Über die durch dielektrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen (Elektrostriktion u. Magnetostriktion), Arch. Math. Phys. (2) 12 (1893), p. 57—95. (Historisch-kritische Übersicht.)

Wichtigste grössere Monographien über Teilgebiete:

*P. Sacerdote*, Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes. Paris, Thèses Nr. 1012. 1899. [Zitiert als *Sacerdote*, Thèse.]

*W. Voigt*, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Kristallen, Göttingen, Abh. Ges. d. Wiss. 36, 1890. [Voigt, Allg. Theorie.]

**1. Maxwellsches Spannungssystem im Dielektrikum.** Der zuerst von *Faraday* ausgesprochenen Vorstellung, daß die scheinbaren Fernwirkungen zwischen elektrisch geladenen Körpern auf einen Spannungszustand im dielektrischen Zwischenmedium zurückzuführen seien, hat *Maxwell*<sup>1)</sup> einen exakten mathematischen Ausdruck gegeben, indem er zeigte, daß sich in der Tat ein Spannungssystem angeben läßt, welches die dem Coulombschen Gesetze entsprechenden ponderomotorischen Kräfte liefert und zugleich der Bedingung genügt, daß sich die Spannungen an jedem von elektrischer Ladung freien Volumelement eines homogenen Dielektrikums das Gleichgewicht halten, — einer Bedingung, ohne welche ein solcher Spannungszustand in einem flüssigen oder gasförmigen Medium gar nicht denkbar wäre. Jenes Spannungssystem besteht in einem *isotropen* Medium aus einem Zug parallel den elektrischen Kraftlinien und einem gleich grossen Druck in allen zu letzteren senkrechten Richtungen; das Maß für diesen Zug bzw. Druck ist  $\frac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}^2$ , wenn  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante,  $\mathfrak{E}$  die elektrische Feldstärke in absolutem elektrostatischem Maße bezeichnet. (Vgl. *H. A. Lorentz*, Maxwell'sche Theorie, V 13, Nr. 22.) Ein ganz analoges Spannungssystem ist den ponderomotorischen Kräften in einem *magnetischen* Felde äquivalent, soweit dieses nur isotrope, nicht ferromagnetische Körper ohne permanenten Magnetismus enthält.

Das allgemeinere Spannungssystem, welches in einem *kristallinischen* Medium (und mit Berücksichtigung der etwaigen Änderung der Dielektrizitätskonstante bzw. magnetischen Permeabilität durch Deformation des Mediums) anzunehmen ist, hat zuerst *H. Hertz*<sup>2)</sup> (für

1) *Maxwell*, Treatise 1, § 105—111.

2) *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 389.

den Fall des *magnetischen* Feldes) aufgestellt; seine Ableitung ist in etwas modifizierter Weise in dem genannten Artikel *Lorentz* V 13, Nr. 23 wiedergegeben. Ein anderer Weg, den zuerst *Helmholtz*<sup>3)</sup>, dann *Kirchhoff*<sup>4)</sup> und *Lorberg*<sup>5)</sup> zur Berechnung der Spannungen in isotropen Körpern mit durch Deformationen veränderlicher Dielektrizitätskonstante eingeschlagen haben, führt in folgender Weise zu dem Spannungssystem in einem kristallinischen Dielektrikum.

Man berechne die durch beliebige, aber stetig verteilte virtuelle Verrückungen  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$ ,  $\delta v_z$  der materiellen Punkte des Dielektrikums erzeugte Variation der elektrischen Energie. Die letztere kann man, indem man zunächst alle etwa vorhandenen Unstetigkeitsflächen des Mediums durch stetige Übergangsschichten und alle flächenhaften Ladungen durch dünne Schichten mit stetig variierender Raumdichte  $\varrho$  ersetzt denkt, durch ein Raumintegral über den ganzen unendlichen Raum darstellen. Eine solche Form ist (vgl. Art. *Gans* über Elektrostatik und Magnetostatik V 15, Nr. 6)  $\frac{1}{2} \int \varrho \varphi dS$ , eine andere  $\frac{1}{2} \int (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) dS$ , wo (gemäß den im Art. *Lorentz* V 13 eingeführten Bezeichnungen)  $\varphi$  das elektrische Potenzial,  $\mathfrak{D} = (\epsilon) \mathfrak{E}$  die elektrische Erregung ist. Für den vorliegenden Zweck ist es nun bequemer, nach dem Vorgange von *Helmholtz* (l. c.) den durch Kombination der beiden vorstehenden gebildeten Ausdruck

$$(1) \quad \int W'_e dS = \int \{\varrho \varphi - \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D})\} dS$$

zu benutzen, weil derselbe infolge der für  $\varphi$  geltenden Differentialgleichung

$$\operatorname{div} (\epsilon) \operatorname{grad} \varphi = - \varrho$$

die Eigenschaft besitzt, bei einer beliebigen Variation des *Potentials allein* ungeändert zu bleiben, wenn man von einem elektrostatischen Gleichgewichtszustande ausgeht. Man kann daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit bei der Berechnung von  $\delta W'_e$  das Potential  $\varphi$  von der Variation ausschließen, oder, mit anderen Worten, das Feld bei der Vornahme der virtuellen Verrückungen  $\delta v$  als ungeändert bleibend ansehen. Die Variation von  $W'_e$  wird sich demgemäß aus drei Teilen zusammensetzen, die hervorrufen: 1) von der Veränderung der elektrischen Raumdichte, die ge-

3) *Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 385; Berlin Sitzungsber. 1881, p. 191.

4) *Kirchhoff*, Berlin Sitzungsber. 1884, p. 137; Ann. Phys. Chem. 24 (1885), p. 52.

5) *H. Lorberg*, Ann. Phys. Chem. 21 (1884), p. 300.

geben ist durch  $\delta \varphi = -\operatorname{div} \varphi \delta v$ ; 2) davon, daß an eine bestimmte Stelle  $x, y, z$  des Raumes und somit des als unverändert angenommenen Feldes ein anderes Massenelement gelangt, nämlich dasjenige, welches sich vorher am Orte  $x - \delta v_x, y - \delta v_y, z - \delta v_z$  befand; 3) von den Veränderungen, welche die dielektrischen Konstanten  $\varepsilon_{hk}$  (vgl. Art. *Lorentz* V 13, Nr. 8 und 22b) infolge der Verrückungen  $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$  erleiden. Diese Änderungen  $\delta \varepsilon_{hk}$  sind selbst von zweierlei Art. Erstens ändern sich nämlich die  $\varepsilon_{hk}$  durch die *Drehung*  $\delta r = \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\delta v)$ , welche das Massenelement infolge des Verrückungssystems erfährt, weil sie abhängig sind von der Orientierung des Koordinatensystems gegen die elektrischen Symmetrieachsen des Dielektrikums, d. h. gegen diejenigen Richtungen, in bezug auf welche sich die Koeffizienten  $\varepsilon_{hk}$  der symmetrischen linearen Vektorfunktion  $\mathfrak{D} = (\varepsilon) \mathfrak{E}$  auf  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  reduzieren (vgl. Art. *Abraham*: Geometrische Grundbegriffe IV 14 Nr. 22); zweitens werden sie im allgemeinen auch durch die *Deformation* des Massenelements, welche mit dem Verrückungssystem verbunden ist, geändert werden. Diesen etwaigen Einfluss einer Deformation auf die Dielektrizitätskonstanten wollen wir jedoch vorerst von der Betrachtung ausschließen, und die Anteile der gesamten Spannungen, welche dadurch zunächst vernachlässigt werden, nachträglich (in Nr. 3) gesondert untersuchen. Dann sind die  $\delta \varepsilon_{hk}$  also lediglich die durch unendlich kleine *Drehungen*  $\delta r_x, \delta r_y, \delta r_z$  des Massenelements gegen die festen Koordinatenachsen bedingten Änderungen der  $\varepsilon_{hk}$ , für welche man aus deren Transformationsformeln (cf. Art. *Abraham* IV 14, p. 42, 28) leicht findet:

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_{11} &= 2(\varepsilon_{13} \delta r_y - \varepsilon_{12} \delta r_z), \\ \delta \varepsilon_{23} &= (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \delta r_x - \varepsilon_{12} \delta r_y + \varepsilon_{13} \delta r_z,\end{aligned}$$

Dabei bestimmen sich die Drehungskomponenten aus den Verrückungen gemäß den Formeln (vgl. Art. *Abraham* IV 14, Nr. 16):

$$\begin{aligned}\delta r_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_z}{\partial y} - \frac{\partial \delta v_y}{\partial z} \right), \quad \delta r_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_x}{\partial z} - \frac{\partial \delta v_z}{\partial x} \right), \\ \delta r_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_y}{\partial x} - \frac{\partial \delta v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Man erhält nun durch Zusammenfassung der genannten drei Variationen zunächst:

$$\begin{aligned}(2) \quad \delta \int W_e' dS &= \int \{-\varphi \operatorname{div} (\varphi \delta v) + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D})_{\varphi=\text{const}} \cdot \delta v) \\ &\quad - [\mathfrak{E}_x^2 (\varepsilon_{13} \delta r_y - \varepsilon_{12} \delta r_z) + \dots \\ &\quad + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z ((\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \delta r_x - \varepsilon_{12} \delta r_y + \varepsilon_{13} \delta r_z) + \dots] \} dS,\end{aligned}$$

wo der Index  $\varphi = \text{const.}$  bedeutet, daß sich die Differentiation nur auf die  $\varepsilon_{hk}$  erstrecken soll. Indem man nun die Glieder, welche Differentialquotienten der Verrückungen als Faktoren enthalten, durch partielle Integration umformt, kann man die rechte Seite auf die Form  $-\int \{\mathfrak{F}_x \delta v_x + \mathfrak{F}_y \delta v_y + \mathfrak{F}_z \delta v_z\} dS$  bringen, wobei sich ergibt:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \varrho \mathfrak{E}_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D})_{\varphi} = \text{const.} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y) - \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x) \right\}. \end{aligned}$$

Nach dem Energieprinzip und dem Prinzip der virtuellen Verrückungen sind dann  $\mathfrak{F}_x$ ,  $\mathfrak{F}_y$ ,  $\mathfrak{F}_z$  die Komponenten der auf die Volumeinheit des Dielektrikums wirkenden Kraft. Ersetzt man hierin noch  $\varrho$  durch  $\text{div } \mathfrak{D}$  (gemäß Gl. VI' in V 13, Nr. 11), so kann man nach einfacher Umformung (wobei die Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$  zu benutzen ist) schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x), \end{aligned}$$

und die Komponenten der auf die Volumeinheit des Dielektrikums wirkenden ponderomotorischen Kraft sind somit in der Form gewonnen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \mathfrak{F}_y = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ \mathfrak{F}_z = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}, \end{array} \right.$$

wobei gilt

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z), \\ B_y = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x), \\ C_z = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y), \\ B_z = C_y = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y), \\ C_x = A_z = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z), \\ A_y = B_x = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x). \end{array} \right.$$

Diese Darstellung gestattet aber die Deutung, daß die resultierende ponderomotorische Kraft von einem *Spannungszustand* des Dielektrikums herrühre, dessen 6 Komponenten — in der nach

*Kirchhoff* üblichen Weise bezeichnet<sup>6)</sup> (vgl. IV 14, Nr. 19) — die vorstehenden Größen  $A_x, \dots, B_z, \dots$  sind, welche nur von dem Felde und den dielektrischen Konstanten des Mediums an der betrachteten Stelle abhängen, wie es der Vorstellung der Feldwirkung entspricht. — Für isotrope Medien, wo  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$  wird, gehen obige Ausdrücke über in

$$(5') \quad A_x = \frac{\varepsilon}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \dots,$$

$$B_z = \varepsilon \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \dots;$$

das sind aber (wie man sofort erkennt, wenn man eine Koordinatenachse parallel der Feldrichtung legt) in der Tat die Komponenten eines Zuges  $\frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2$  parallel den Kraftlinien und eines gleichgroßen Druckes senkrecht zu denselben, also des für diesen Fall von *Maxwell* abgeleiteten Spannungssystems<sup>7)</sup>. Die Gleichung (3) reduziert sich hier auf

$$(3') \quad \mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon,$$

woraus ersichtlich ist, daß auf das *Immere* eines homogenen isotropen Dielektrikums, sofern es keine wahre Ladung trägt, *keine* ponderomotorische Kraft wirkt.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die vorstehende vollständige Zurückführung der ponderomotorischen Kräfte auf ein System von Spannungen keineswegs *notwendig* ist, um die Erscheinungen der *Elektrostriktion*, d. h. der Deformation dielektrischer Körper im elektrischen Felde, zu erklären, und daß also auch nicht aus diesen Erscheinungen auf die Existenz der Maxwellschen Spannungen geschlossen werden kann. Nach der Fernewirkungstheorie würden die ponderomotorischen Kräfte (3) zum einen Teil herrühren von den nach dem *Coulombschen* Gesetz auf die wahren und die influenzierten oder scheinbaren elektrischen Ladungen ausgeübten Fernewirkungen, zum anderen Teil aber ebenfalls von Spannungen, die jedoch *nur im ponderabeln Dielektrikum* auftreten.

6) Wir weichen hier, um mit der Lorentzschen Darstellung in V 13 Nr. 23 und V 15 Nr. 39 in Übereinstimmung zu bleiben, von der Kirchhoff'schen Bezeichnung allerdings hinsichtlich des *Vorzeichens* ab, indem wir einen *Zug*, nicht einen *Druck*, positiv rechnen.

7) Für den allgemeinen Fall, daß die Erregung nicht in die Feldrichtung fällt, hat *Maxwell* ein Spannungssystem angegeben (Treatise 2, § 641, 642), welches von dem obigen darin abweicht, daß nicht  $B_z = C_y$ ,  $C_x = A_z$ ,  $A_y = B_x$  ist. Diese Abweichung kommt daher, daß *Maxwell* diejenigen Anteile der Spannungen nicht berücksichtigt hat, welche infolge des Zusammenhanges des Mediums aus den auf die Volumelemente ausgeübten Drehungsmomenten  $[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}] dS$  resultieren. (Vgl. auch V 13, Nr. 23, S. 110.)

trikum vorhanden wären<sup>8)</sup>). Diese letzteren Spannungen werden aus den unter (5) angegebenen erhalten, indem man von denselben diejenigen Spannungen subtrahiert, welche nach der Feldwirkungstheorie in dem gleichen Felde im freien Äther anzunehmen wären und aus den Ausdrücken (5) durch Gleichsetzung von  $\mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{E}$  hervorgehen. Speziell in isotropen Medien sind also die auch nach der Fernewirkungstheorie im ponderablen Dielektrikum wirkenden Spannungen gegeben durch

$$(6) \quad A_x' = \frac{\varepsilon - 1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \quad B_z' = C_y' = (\varepsilon - 1) \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z.$$

Beispielsweise folgt aus (4) und (5), daß auf die zu den Kraftlinien senkrechte Grenzfläche zweier verschiedener Dielektrika (unterschieden durch die Indizes <sub>1</sub> und <sub>2</sub>) der Druck

$$-\frac{1}{2} (\varepsilon_1 \mathfrak{E}_1^2 - \varepsilon_2 \mathfrak{E}_2^2) \quad \text{oder} \quad -\frac{\varepsilon_1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \mathfrak{E}_1^2$$

wirkt. Derselbe ist nach der Feldwirkungstheorie die Differenz der Drucke  $-\frac{\varepsilon_1}{2} \mathfrak{E}_1^2$  und  $-\frac{\varepsilon_2}{2} \mathfrak{E}_2^2$ , nach der Fernewirkungstheorie dagegen setzt er sich zusammen aus der Differenz der Drucke  $-\frac{\varepsilon_1 - 1}{2} \mathfrak{E}_1^2$  und  $-\frac{\varepsilon_2 - 1}{2} \mathfrak{E}_2^2$  und aus der durch  $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2)(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$  gegebenen Coulombschen Fernwirkung auf die an der Grenzfläche influenzierte Belegung von der Dichte  $(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$ . Ist die Grenzfläche der Dielektrika dagegen den Kraftlinien parallel, so trägt sie keine influenzierte Ladung, und in der Tat wird dann die Differenz der beiderseitigen Drucke dieselbe, sei es, daß man diese nach (5') oder (6) berechnet, weil das Feld dann auf beiden Seiten der Grenzfläche übereinstimmt.

**2. Die Bedeutung der Maxwellschen Spannungen für die Elektrostriktion.** Wenn es nun auch für die Wirkungen der ponderomotorischen Kräfte gleichgültig ist, ob man dieselben ganz oder nur teilweise auf Spannungen der Dielektrika zurückführt, so hat die erstere Auffassung doch den Vorzug der Einheitlichkeit und grösseren Einfachheit und soll daher im folgenden zugrunde gelegt werden.

Die Einführung des den ponderomotorischen Kräften äquivalenten Spannungssystems erweist sich besonders zweckmäßig zur Berechnung der *Oberflächendrucke*, welche sich ergeben, wenn man die bisher vorausgesetzten stetigen Übergangsschichten unendlich dünn werden,

8) Es ist wohl zu beachten, daß man durch Einführung der scheinbaren elektrischen Ladungen wohl dem Einfluß des Dielektrikums auf das *Feld* vollständig Rechnung tragen kann, aber die ponderomotorischen Kräfte nur insoweit richtig erhält, als es sich um ihre Gesamtwirkungen auf starre Körper handelt.

also in Diskontinuitätsflächen (Trennungsflächen verschiedener Dielektrika oder eines Dielektrikums und eines Konduktors) übergehen läßt. Denn die Komponenten der auf die Flächeneinheit der Grenze zwischen einem Medium (1) und einem anderen (2) wirkenden Kraft  $\mathfrak{F}_{1,2}$  sind einfach gegeben durch

$$(7) \quad \bar{\mathfrak{F}}_{x_{1,2}} = -\bar{A}_{n_1} - \bar{A}_{n_2}, \quad \bar{\mathfrak{F}}_{y_{1,2}} = -\bar{B}_{n_1} - \bar{B}_{n_2}, \quad \bar{\mathfrak{F}}_{z_{1,2}} = -\bar{C}_{n_1} - \bar{C}_{n_2},$$

wo  $n_1, n_2$  die äußeren Normalen für die beiden Medien bedeuten, und  $A_n$  usw. sich in bekannter Weise durch die  $A_x, \dots A_y$  ausdrücken, z. B.  $A_n = A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)$  ist. Bei der Berechnung der  $A_x, \dots$  ist zu berücksichtigen, daß die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke, und für Grenzflächen, die keine wahre Ladung besitzen, auch die normalen der elektrischen Erregung beiderseits übereinstimmen. Ist das angrenzende Medium ein Konduktor, so sind dort  $A_x, \dots A_y$  sämtlich Null zu setzen, und da die Kraftlinien die Konduktoroberfläche senkrecht treffen, so wirkt auf dieselbe die volle Spannung parallel den Kraftlinien, d. i. in einem isotropen Dielektrikum  $\frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2$ , als normaler Zug. Aber auch an Grenzflächen zweier *isotroper Dielektrika*, die keine wahre Flächenladung besitzen, ist der resultierende Oberflächendruck stets *normal* gerichtet, auch wenn die Kraftlinien die Grenzfläche schiefwinklig treffen. Denn legt man die  $x$ -Achse in die Normale  $n_1$  der Oberfläche des Mediums (1), und berücksichtigt, daß dann  $\varepsilon_1 \mathfrak{E}_{x_1} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_{x_2}$  und  $\mathfrak{E}_{y_1} = \mathfrak{E}_{y_2}$ ,  $\mathfrak{E}_{z_1} = \mathfrak{E}_{z_2}$  ist, so erhält man aus (5):

$$\begin{aligned} -(A_{n_1} + A_{n_2}) &= A_{x_2} - A_{x_1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \left( \bar{\mathfrak{E}}_1^2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \bar{\mathfrak{E}}_{n_1}^2 \right) \\ (7') \qquad \qquad \qquad &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \left( \bar{\mathfrak{E}}_2^2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \bar{\mathfrak{E}}_{n_2}^2 \right), \end{aligned}$$

$$B_{n_1} + B_{n_2} = 0, \quad C_{n_1} + C_{n_2} = 0,$$

d. h. es wirkt auf die Grenzfläche ein normaler Druck von vorstehendem Betrage, und zwar ist derselbe von (1) gegen (2) hin gerichtet, wenn  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  ist.

Aus diesem Oberflächendruck erklären sich die bekannten Bewegungstendenzen ungeladener dielektrischer Körper im elektrischen Felde (vgl. Art. Gans über Elektrostatik V 15, Nr. 18, 19). Außer diesen resultierenden Kräften und Drehungsmomenten wird aber ein solcher Körper im allgemeinen *Deformationen* erleiden, und diese sind es, mit denen wir es im vorliegenden Abschnitt allein zu tun haben. Um dieselben zu bestimmen, hat man die durch (4) und (7) gegebenen Volum- und Oberflächenkräfte  $\mathfrak{F}$  bzw.  $\mathfrak{F}_{hk}$  elektrischen Ursprungs als äußere Einwirkungen

in die Bedingungen des elastischen Gleichgewichts einzusetzen; dies ergibt, falls andere äußere Kräfte fehlen, für jeden Punkt im Innern die Gleichungen:

$$(8) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\mathfrak{F}_x,$$

und für jede Stelle der Grenzfläche zweier Medien (1), (2):

$$(9) \quad X_{n_1} + X_{n_2} = \bar{\mathfrak{F}}_{x_{1,2}},$$

worin die  $X_x, \dots X_n, \dots$  die *elastischen* Spannungen bedeuten (über das Vorzeichen vgl. Anm. 6, S. 355).

Man könnte versucht sein, diese Gleichungen einfach durch die Annahme

$$X_x = -A_x, \dots; \quad Y_z = -B_z, \dots$$

zu lösen, also die Deformationen, die wir nach Kirchhoff mit  $x_x, \dots y_z, \dots$  bezeichnen, aus den durch (5) gegebenen  $A_x, \dots, B_z, \dots$  gemäß den Formeln

$$-x_x = s_{11}A_x + s_{12}B_y + s_{13}C_z + s_{14}B_z + s_{15}C_x + s_{16}A_y$$

zu berechnen, wo die  $s_{hk}$  die bei Auflösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie (Gl. (49) in dem Art. Abraham IV 14) nach den Deformationskomponenten auftretenden Koeffizienten sind. Diese Annahme, welche bedeuten würde, daß die Maxwellschen Spannungen in jedem Volumelement des Dielektrikums durch entgegengesetzt gleiche *elastische* Spannungen kompensiert würden, ist aber, von ganz speziellen Fällen abgesehen, deshalb nicht zulässig, weil die so berechneten Deformationskomponenten  $x_x, \dots y_z, \dots$  im allgemeinen nicht denjenigen 6 Bedingungsgleichungen (Gl. (33) im Abrahamschen Art. IV 14, Nr. 18) genügen würden, welche zwischen ihnen zufolge ihrer Definition (ebenda IV 14 (32)) durch die ersten Differentialquotienten der Verrückungen  $v_x, v_y, v_z$  nach  $x, y, z$  stets bestehen müssen; auch würden die ihnen entsprechenden  $v_x, v_y, v_z$  meist mit gewissen für die Oberfläche des Dielektrikums zu stellenden Bedingungen (Befestigungsbedingungen) unvereinbar sein. Für *Flüssigkeiten* ist die Unzulässigkeit der Annahme  $X_x = -A_x$  usw. ohne weiteres klar, da in solchen im Gleichgewichtszustande keine anderen Spannungen *elastischen* Ursprungs, als ein allseitig gleicher Druck, bestehen können, insbesondere also nicht solche, die das *Maxwellsche* Spannungssystem kompensieren würden.

Noch verkehrter wäre es, die Deformationen gemäß den linearen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie aus den Maxwellschen Spannungen  $A_x, \dots$  selbst (statt aus  $-A_x, \dots$ ) zu berechnen. Obgleich dies selbstverständlich ist, da ja die Maxwellschen Spannungen nicht elastischen, sondern elektrischen Ursprungs sind, so scheint ein Hinweis auf dieses mögliche Mißverständnis doch angebracht, da daselbe bisweilen zu Einwänden gegen die Zulässigkeit der Maxwell-schen Anschauung von der Feldwirkung Anlaß gegeben hat<sup>9)</sup>.

**3. Spannungen, welche durch die Veränderlichkeit der dielektrischen Konstanten bedingt werden.** Wie zuerst *Helmholtz*<sup>10)</sup> für Flüssigkeiten, dann *Kirchhoff*<sup>11)</sup> für isotrope feste Körper gezeigt hat, bedürfen die Maxwellschen Spannungen einer Ergänzung, wenn die dielektrischen Konstanten des Mediums sich durch Deformationen desselben ändern würden. Daß eine solche Veränderlichkeit des dielektrischen Verhaltens bei allen ponderablen Körpern existieren wird, ist in hohem Grade wahrscheinlich; für einige Substanzen ist sie auch durch direkte Versuche nachgewiesen worden<sup>12)</sup>.

Man kann nun die Änderungen der dielektrischen Konstanten jedenfalls in erster Annäherung den Deformationskomponenten proportional setzen und demgemäß die 36 Differentialquotienten

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_x} &= \delta_{11}, & \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y_y} &= \delta_{12}, & \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z_z} &= \delta_{1e}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_x} &= \delta_{21}, & \dots & \dots & \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z_z} &= \delta_{26}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_x} &= \delta_{61}, & \dots & \dots & \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z_z} &= \delta_{66} \end{aligned}$$

als neue individuelle Konstanten des Dielektrikums einführen. Bei einem asymmetrischen Kristall sind dieselben sämtlich voneinander unabhängig (insbesondere brauchen, im Gegensatz zum System der Elastizitätskonstanten, die Konstanten mit vertauschten Indizes nicht einander gleich zu sein). Besitzt das Medium Symmetrieeigenschaften, so verringert sich die Zahl der unabhängigen  $\delta_{kk}$ , und zwar ordnen sich

9) So z. B. ancheinend bei *H. Poincaré*, *Electricité et optique*, 1, chap. IV. *Maxwell* selbst warnte ausdrücklich vor diesem Mißverständnis (*Treatise* 1, § 110).

10) Berlin Sitzungsber. 1881, p. 191.

11) Berlin Sitzungsber. 1884, p. 137.

12) So für Kautschuk von *O. M. Corbino* und *F. Cannizzo* (*Rom Linc. Rend.* (5) 7<sup>2</sup> (1898), p. 286) und *A. Lampa* (*Wiener Anz.* 1902, p. 223), für Glas von *Corbino* (*N. Cim.* (4) 4 (1896), p. 240) und *A. Wüllner* u. *M. Wien* (*Ann. Phys.* 11 (1903), p. 619), für Ebonit von *U. Panichi* (*N. Cim.* (4) 8 (1898), p. 89).

die 32 kristallographischen Symmetrieklassen nach dem System dieser Konstanten in 9 verschiedene Gruppen<sup>13)</sup>. Für *isotrope* Körper wird

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_2, \\ \delta_{44} = \delta_{55} = \delta_{66} = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2),$$

während alle übrigen  $\delta_{hk}$  verschwinden; von den beiden übrigbleibenden Konstanten  $\delta_1, \delta_2$  bestimmt die erstere die Änderung der Dielektrizitätskonstante durch eine Dilatation parallel den Kraftlinien, die letztere diejenige durch eine Dilatation senkrecht zu den Kraftlinien.

Berücksichtigt man nun unter Benutzung von (10) bei der in Nr. 1 angegebenen Berechnung von  $\delta W'_e$  die Veränderung der  $\varepsilon_{hk}$  durch die mit den virtuellen Verrückungen  $\delta v$  verbundenen Deformationen und formt die dadurch neu auftretenden Glieder, wie  $-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_x^2\delta_{11}\frac{\partial\delta v_x}{\partial x}, -\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z\delta_{44}\left(\frac{\partial\delta v_y}{\partial z} + \frac{\partial\delta v_z}{\partial y}\right)$  usw., durch partielle Integration um, so kommen zu den ponderomotorischen Kräften  $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$  Anteile hinzu, welche von vornherein die Form haben

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},$$

also als von *Spannungen* herrührend erscheinen. Für diese die *Maxwellschen ergänzenden Spannungen* ergeben sich dabei nachstehende Werte<sup>14)</sup>:

$$(11) \quad A_x = -\frac{1}{2}\{\delta_{11}\mathfrak{E}_x^2 + \delta_{21}\mathfrak{E}_y^2 + \delta_{31}\mathfrak{E}_z^2 + 2\delta_{41}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + 2\delta_{51}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x \\ + 2\delta_{61}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\}, \\ B_z = \Gamma_y = -\frac{1}{2}\{\delta_{14}\mathfrak{E}_x^2 + \delta_{24}\mathfrak{E}_y^2 + \delta_{34}\mathfrak{E}_z^2 + 2\delta_{44}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z \\ + 2\delta_{54}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x + 2\delta_{64}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\},$$

sie sind also, wie die Maxwellschen Spannungen, homogene quadratische Funktionen der Feldkomponenten. Für *isotrope* feste Körper

13) Die Spezialisierung des Konstantensystems  $\delta_{hk}$  für die einzelnen Kristallklassen findet sich z. B. in Voigts Kompendium d. theoret. Physik 1, p. 143—144. Sie ist genau dieselbe, wie für die Konstanten der inneren Reibung (vgl. ibid. 2, p. 136) oder für dasjenige Konstantensystem, welches die Änderungen des optischen Verhaltens durch Deformationen charakterisiert (vgl. F. Pockels, Ann. Phys. Chem. 39 (1889), p. 152, 158).

14) Die allgemeinen Ergänzungsspannungen, jedoch für das *magnetische* Feld und ausgedrückt durch die Komponenten der *Erregung* statt durch diejenigen des Feldes, hat zuerst H. Hertz aufgestellt (Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 393.)

nehmen sie nach dem oben über die  $\delta_{hk}$  gesagten die einfachere Form an:

$$(11') \quad \begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{2}\delta_1 \mathfrak{E}_x^2 - \frac{1}{2}\delta_2(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ B_z &= \Gamma_y = \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)\mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \end{aligned}$$

bestehen also aus einem Druck  $\frac{1}{2}\delta_1 \mathfrak{E}^2$  in der Richtung der Kraftlinien und einem solchen  $\frac{1}{2}\delta_2 \mathfrak{E}^2$  senkrecht zu diesen, oder anders ausgedrückt, in einem *allseitig gleichen Druck*  $\frac{1}{2}\delta_2 \mathfrak{E}^2$  und einem *Zug parallel den Kraftlinien* von der Größe  $\frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)\mathfrak{E}^2$ . Im Gegensatz zu dem Maxwellschen ergibt dieses Spannungssystem auch für das Innere eines *homogenen* isotropen Dielektrikums eine resultierende Volumkraft, nämlich

$$(12) \quad \mathfrak{F}' = -\frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2) \operatorname{grad}(\mathfrak{E}^2)$$

und liefert zu den Oberflächendrucken Beiträge, welche im allgemeinen *nicht* senkrecht zur Oberfläche stehen, und deren X-Komponente ist:

$$(13) \quad \bar{\mathfrak{F}}'_x = \frac{1}{2}\delta_2 \mathfrak{E}^2 \cos(n, X) + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_n.$$

**4. Elektrostriktion von Flüssigkeiten.** Da in Flüssigkeiten irgendwelche Verrückungen der Teilchen die physikalischen Eigenschaften nur vermöge der mit ihnen verbundenen *Dichteänderung* beeinflussen können, so wird  $\delta_2 = \delta_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho}$ , wo  $\vartheta = x_x + y_y + z_z$  die kubische Dilatation bezeichnet; somit erhält man statt der Gl. (11'), wenn der Index an  $\delta_2 = \delta_1$  fortgelassen wird,

$$(11'') \quad A_x = B_y = \Gamma_z = -\frac{1}{2}\delta \mathfrak{E}^2, \quad B_z = \Gamma_x = A_y = 0.$$

Die Ergänzungsspannungen bestehen hier also einfach in einem *allseitig gleichen Drucke*  $p = \frac{1}{2}\delta \mathfrak{E}^2$ . Mit dieser, dem Quadrat der Feldstärke proportionalen Kraft strebt also die Flüssigkeit sich auszudehnen, bzw. falls  $\delta$  negativ ist<sup>15)</sup>, sich zu kontrahieren. Ist nun das Gesamtvolum der Flüssigkeit keiner Beschränkung durch einschließende Wände unterworfen, so wird tatsächlich an jeder Stelle der Flüssigkeit die jenem Expansions- bzw. Kontraktionsbestreben entsprechende Volumänderung, nämlich

$$(14) \quad \vartheta = \frac{\delta}{2} \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{1}{C},$$

15) Dieser Fall ist der wahrscheinlichere, sowohl aus theoretischen Gründen, als nach Analogie mit der z. B. von *W. Cassie* (Phil. Trans. 1890, p. 1), *D. Negreano* (Paris C. R. 114 (1892), p. 345), *F. Ratz* (Zeitschr. phys. Chem. 19 (1896), p. 94), *R. Abegg* (Ann. Phys. Chem. 60, p. 54; 62, p. 256 (1897)) beobachteten Abnahme der Dielektrizitätskonstante durch Temperaturerhöhung.

wo  $C$  der Kompressionsmodul ist, eintreten. Diese Volumänderung ist dann die einzige Wirkung der Ergänzungsspannungen, insbesondere liefern dieselben *keinen Beitrag zu den Oberflächendrucken*, da sie eben an jeder Stelle durch die obiger Dilatation entsprechende *elastische Spannung kompensiert* werden.

Die Versuche, welche angestellt worden sind, um die in Rede stehende Volumänderung von Flüssigkeiten im elektrischen Felde nachzuweisen, haben infolge störender Nebenwirkungen bisher nicht zu sicheren Resultaten geführt<sup>16)</sup>. Für Gase läßt sich die zu erwartende Druck- bzw. Volumänderung im voraus nach Sinn und Größe angeben<sup>17)</sup>; denn bei ihnen ist erfahrungsmäßig  $\epsilon - 1$  proportional der Dichte<sup>18)</sup>, woraus für  $\delta$  der Wert  $-(\epsilon - 1)$  folgt. Ist das Gas in einem Gefäß eingeschlossen, so muß also im elektrischen Felde sein Druck eine Verminderung vom Betrage  $\frac{1}{2}(\epsilon - 1)G^2$  erfahren. Eine solche Druckverminderung, welche mit der so berechneten der Größenordnung nach übereinstimmt, ist an Luft und Kohlensäure auch experimentell nachgewiesen worden<sup>19)</sup>.

**5. Elektrostriktion isotroper fester Körper. Ihre Behandlung nach den Methoden der Elastizitätstheorie.** Für die Vergleichung der Theorie mit Beobachtungen bzw. die Bestimmung der Konstanten  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  kommen praktisch nur solche Fälle in Betracht, wo das Dielektrikum die (relativ zu ihrer Flächenausdehnung dünne) isolierende Zwischenschicht eines *Kondensators* bildet, da nur bei dieser Anordnung die Feldstärke im Dielektrikum groß genug gemacht werden kann, um meßbare Deformationen hervorzubringen. Der weitaus größte Teil der Oberfläche des Dielektrikums wird dann von den Kraftlinien des elektrischen Feldes senkrecht durchsetzt, erleidet also — auch bei Berücksichtigung der Ergänzungsspannungen — nur einen *senkrechten* Druck oder Zug. Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, ob die leitenden „Belegungen“ des Kondensators dem

16) Dagegen will D. Hurmuzescu (Arch. sc. phys. nat. Genève 4 (1897), p. 431) an Eisensalzlösungen im *magnetischen* Felde eine Kontraktion beobachtet haben.

17) D. J. Korteweg, Ann. Phys. Chem. 9 (1880), p. 59; G. Lippmann, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 159.

18) Die analoge Annahme macht G. T. Walker (Aberration and other problems connected with the electromagnetic field, Cambridge 1900) für die magnetische Permeabilität von Flüssigkeiten auf Grund molekulartheoretischer Überlegungen. Er meint eine Bestätigung derselben in gewissen Beobachtungen Quinckes zu finden, welche aber in Wirklichkeit nur die Wirkung des Oberflächendruckes zeigen, also nach dem oben gesagten keinen Schluß auf die Konstante  $\delta$  gestatten.

19) R. Gans, Habilitationsschrift Tübingen 1903.

festen Dielektrikum direkt anliegen oder von demselben durch Luft- oder Flüssigkeitsschichten getrennt sind. Im ersten Falle erleiden die in Rede stehenden Oberflächen des Dielektrikums den Druck  $\frac{\varepsilon - \delta_1}{2} \mathfrak{E}^2$ , im zweiten, wenn  $\varepsilon'$  die Dielektrizitätskonstante der flüssigen oder gasförmigen Zwischenschicht ist, zufolge Gl. (7') und dem in Nr. 4 Gesagten den Zug  $\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon')}{\varepsilon'} + \delta_1 \right) \mathfrak{E}^2$ , wo beidemal  $\mathfrak{E}$  die Feldstärke innerhalb des festen Dielektrikums unmittelbar an seiner Oberfläche bedeutet. Dazu kommt noch die durch (12) gegebene Kraft auf das Innere des Dielektrikums, die nur im Falle eines ebenflächigen Kondensators (wo das Feld homogen ist) verschwindet. Es entsteht nun die Aufgabe, aus den so gegebenen Oberflächen- und Volumkräften die Spannungen und Deformationen im Innern des Dielektrikums zu berechnen, eine Aufgabe, welche rein elastizitätstheoretischer Natur ist. Streng gelöst ist dieselbe nur für den Hohlkugel- und unendlich langen Zylinderkondensator<sup>20)</sup>. Für ersteren möge die Lösung hier für den Fall unmittelbar anliegender Belegungen mitgeteilt werden.

Sind  $r_i, r_a$  die Radien der inneren und äußeren Belegung,  $\varphi_i, \varphi_a$  deren Potentiale, so ist die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{C}{r^2},$$

folglich nach (12) die auf das Innere der dielektrischen Kugelschale wirkende Volumkraft:

$$(15) \quad \mathfrak{F}_r = (\delta_1 + \delta_2) \frac{C^2}{r^5};$$

außerdem wirkt, wie aus (5') und (11') folgt, auf die innere bzw. äußere Begrenzung der normale, gegen das Dielektrikum hin gerichtete Druck:

$$(16) \quad \mathfrak{F}_i = \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta_1) \frac{C^2}{r_i^4}, \quad \mathfrak{F}_a = \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta_1) \frac{C^2}{r_a^4}.$$

Aus den allgemeinen elastischen Gleichgewichtsbedingungen eines isotropen Körpers:

$$-\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \mathcal{A} v_x$$

folgt im vorliegenden Falle, wo nach Symmetrie nur radiale Verkürzungen  $v_r = \varrho$  vorhanden sind, welche gleich  $\frac{dU(r)}{dr}$  gesetzt werden

20) *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 24 (1885), p. 70; *P. Sacerdote*, Journ. de phys. (3) 8 (1899), p. 464; Thèse, p. 14.

können,

$$-\int \mathfrak{F}_r dr = \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \vartheta$$

oder, da hier  $\vartheta = \frac{d\varrho}{dr} + \frac{2\varrho}{r}$  und somit  $\Delta U = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} = \vartheta$  ist,

$$\vartheta = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \varrho)}{dr} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ A + \int_{r_i}^r \mathfrak{F}_r dr \right\}.$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich nun:

$$\varrho = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ \frac{1}{3} Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r r^2 dr \int_{r_i}^r \mathfrak{F}_r dr \right\}$$

oder nach Einsetzen von  $\mathfrak{F}_r$  aus (15):

$$(17) \quad \varrho = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} \left\{ \frac{1}{3} Ar + \frac{B}{r^2} - \frac{(\delta_1 + \delta_2) C^2}{4r^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} - \frac{r^3 - r_i^3}{3r_i^4} \right] \right\},$$

worin  $A, B$  Integrationskonstanten bezeichnen, die aus der Oberflächenbedingung für  $r = r_i$

$$-(R_r)_i = -(\lambda + 2\mu) \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_i - 2\lambda \left( \frac{\varrho}{r} \right)_i = \bar{\mathfrak{F}}_i = \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta_1) \frac{C^2}{r_i^4}$$

und der analogen für  $r = r_a$  zu bestimmen sind. Diese Berechnung vereinfacht sich erheblich in dem (wie oben gesagt) praktisch allein wichtigen Falle, daß  $r_a - r_i$  sehr klein gegen  $r_i$  ist. Dann kann man in genügender Näherung setzen

$$\varrho = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{1}{3} Ar + \frac{B}{r^2} \right),$$

$$\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ \frac{1}{3} A - \frac{2B}{r^3} - (\delta_1 + \delta_2) C^2 \frac{r_i - r}{r_i^5} \right\}$$

und erhält:

$$A = -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_i^4} (\varepsilon + \delta_1 + 2\delta_2),$$

$$B = -\frac{\lambda + 2\mu}{12\mu} \frac{C^2}{r_i} (2\varepsilon + \delta_2 - \delta_1).$$

Führt man statt der Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  den Elastizitätsmodul  $E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$  und das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation  $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$  ein, und berücksichtigt, daß in der jetzt eingehaltenen Annäherung  $\frac{C}{r_i^2} = \frac{\varrho_i - \varrho_a}{d}$  wird, wo  $d$  die Dicke der Kugelschale bezeichnet, so findet man für die relative Zunahme

des inneren Radius schießlich<sup>21)</sup>:

$$(17') \quad \frac{\varrho_i}{r_i} = \left( \frac{\varphi_i - \varphi_a}{d} \right)^2 \cdot \frac{1}{2E} \left\{ \varepsilon - \nu \delta_1 + (1 - \nu) \delta_2 \right\}$$

und für die Dilatation des Dielektrikums in radialer Richtung:

$$(18) \quad \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_i = - \left( \frac{\varphi_i - \varphi_a}{d} \right)^2 \frac{1}{2E} \left\{ \varepsilon(1 + 2\nu) - \delta_1 + 2\delta_2 \right\};$$

in allen tangentialen Richtungen ist die Dilatation durch  $\frac{\varrho}{r}$  gegeben. Aus der Beobachtung<sup>22)</sup> leicht zugänglichen Vergrößerung des inneren Volumens:  $4\pi r_i^2 \varrho_i$  könnte man hiernach eine Kombination der Konstanten  $\delta_1$  und  $\delta_2$  berechnen; indessen sind die vorliegenden Messungen an Kugelkondensatoren zu einer solchen Berechnung nicht verwertbar, teils weil sie durch Nebenwirkungen (wie Leitfähigkeit des als Dielektrikum verwendeten Glases) zu stark beeinflußt sind, teils wegen der Unsicherheit der Kenntnis vom elastischen Verhalten der benutzten Glaskugeln.

Es ist hervorzuheben, daß die Näherungsausdrücke (17') und (18) die tangentiale und transversale Dilatation des Dielektrikums nicht nur im Falle eines *Kugelkondensators* geben, sondern überhaupt für jeden geschlossenen Kondensator von sehr geringer, konstanter Dicke mit direkt anliegenden Belegungen Gültigkeit besitzen<sup>23)</sup>. In der Tat ergeben sich jene Ausdrücke (18) und (17') für die Dilatationen direkt aus dem auf ein scheibenförmiges Element des Dielektrikums

21) Diese Näherungsformel ist schon vor *Kirchhoff's* Arbeit durch eine speziellere Betrachtung von *D. J. Korteweg* abgeleitet (*Ann. Phys. Chem.* 9 (1880), p. 48).

22) Derartige Beobachtungen sind zuerst von *E. Dutet* angestellt worden (*Paris C. R.* 87 (1878), p. 828, 960, 1036; 88 (1879), p. 1260), sodann in großer Zahl von *G. Quincke* (*Ann. Phys. Chem.* 10 (1880), p. 165; 19 (1883), p. 573) und neuerdings mit noch sorgfältigerer Vermeidung der Fehlerquellen von *A. Wüllner* und *M. Wien* (*Ann. Phys.* 9 (1902), p. 1217).

23) Ohne allgemeine Begründung ist dieser Satz ausgesprochen von *P. Sacerdote*, *J. d. phys.* (3) 8 (1899), p. 468; *Thèse* p. 30. Wenn die Belegungen von der festen dielektrischen Schale durch eine Flüssigkeitsschicht von gleicher Dielektrizitätskonstante getrennt sind, wie es bei gewissen Versuchen von *L. T. More* (*Phil. Mag.* (5) 50 (1900), p. 198; (6) 6 (1903), p. 1; (6) 10 (1905), p. 676) der Fall war, so sind die Deformationen in entsprechender Weise aus den Ergänzungsspannungen allein zu berechnen. Es ist also ein Irrtum, wenn *More* aus den negativen Resultaten jener Versuche schließen will, daß die *Maxwellschen* Spannungen überhaupt nicht auf die ponderable Materie wirkten. Abgesehen davon, scheinen seine Beobachtungen übrigens infolge der angewandten Messungsmethode auch an sich nicht zuverlässig zu sein (vgl. *M. Cantone*, *N. Cim.* (5) 7 (1904), p. 126).

wirkenden Druck  $\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta_1)\mathfrak{E}^2$  parallel und Zug  $\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta_2)\mathfrak{E}^2$  senkrecht zu den Kraftlinien, sofern sich jedes solche Element unabhängig von den angrenzenden entsprechend deformieren kann; das ist aber bei konstanter Dicke der dielektrischen Schale ersichtlich der Fall, da dann die angegebene Dilatation in tangentialer Richtung überall die gleiche ist. Demnach wird die Formel (17') auch angewendet werden dürfen, um die relative Änderung des Durchmessers und der Länge eines sehr dünnwandigen, an den Enden irgendwie geschlossenen Zylinderkondensators zu berechnen, dessen innere und äußere Oberfläche in ihrer ganzen Ausdehnung mit Belegungen versehen sind. Für einen solchen Kondensator muß demnach zwischen den relativen Änderungen der Länge  $l$  und des inneren Volumens  $v$  die Beziehung bestehen

$$(19) \quad \frac{\delta v}{v} = 3 \frac{\delta l}{l},$$

woraus ersichtlich ist, daß die Messungen der Volum- und Längenänderung zur gesonderten Bestimmung der Konstanten  $\delta_1$  und  $\delta_2$  nicht ausreichen, da sie beide nur die Kombination  $(1 - v)\delta_2 - v\delta_1$  liefern, welche die Änderung der Dielektrizitätskonstante durch einseitigen Zug senkrecht zu den Kraftlinien bestimmt. Zur Ermittelung von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  selbst müßte etwa noch die (durch Gl. (18) bestimmte) Dickenänderung gemessen werden, wie es von Cantone versucht worden ist<sup>24)</sup>.

Fraglich kann es erscheinen, ob vorstehendes Resultat auch noch für Zylinderkondensatoren gilt, deren Belegungen nicht die ganze Oberfläche bedecken, und die an einem oder beiden Enden offen sind, wie sie bei vielen Beobachtungen angewandt wurden. Hier würde die strenge Berücksichtigung der Verhältnisse an den Rändern der Belegungen auf große analytische Schwierigkeiten führen.

**6. Fortsetzung. Energetische Behandlung.** In Fällen wie der zuletzt erwähnte verdient die zuerst von Lippmann und Korteweg<sup>25)</sup>, neuerdings systematisch von Sacerdote (in seiner These) auf Probleme der Elektrostriktion angewandte energetische Behandlungsmethode den Vorzug, welche auf die vollständige Lösung des elastischen Problems verzichtet und nur auf die angenäherte Berechnung gewisser direkt beobachtbarer Gesamtänderungen (z. B. derjenigen des inneren oder

24) M. Cantone und Fr. Sozzani, Milano Rend. Istit. Lomb. (2) 33 (1900), p. 1059; 34 (1901), p. 251. An Platten aus einer Harz- und Schellackmischung hat L. T. More die Dickenänderung allein, und zwar bei nicht anliegenden Belegungen, zu messen versucht, jedoch mit negativem Resultat (Phil. Mag. (6) 10 (1905), p. 676).

25) D. J. Korteweg, Ann. Phys. Chem. 12 (1881), p. 647; G. Lippmann, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 144.

äußerem Volumens oder der Länge des Kondensators) ausgeht. Als Beispiel für diese Methode sei hier die Berechnung der Längenänderung eines Zylinderkondensators mit anhaftenden Belegungen mitgeteilt.

Es sei  $e$  die Ladung,  $\varphi$  das Potential der einen Belegung, während die andere auf dem Potential Null erhalten wird; ferner  $q$  der auf den Zylinderkondensator ausgeübte äußere longitudinale Zug,  $dl$  dessen ganze Längenänderung. Unter Voraussetzung konstant gehaltener Temperatur kann der Zustand des Kondensators als eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $\varphi$  und  $q$  angesehen werden. Die zur Erzielung einer Ladungs- und Längenänderung aufzuwendende Arbeit ist

$$\begin{aligned} dA &= \varphi de + qdl = \varphi \left( \frac{\partial e}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial e}{\partial q} dq \right) + q \left( \frac{\partial l}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial l}{\partial q} dq \right) \\ &= \left( \varphi \frac{\partial e}{\partial \varphi} + q \frac{\partial l}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left( \varphi \frac{\partial e}{\partial q} + q \frac{\partial l}{\partial q} \right) dq. \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muß die rechte Seite ein vollständiges Differential sein; die Bedingung hierfür ist:

$$(20) \quad \frac{\partial l}{\partial \varphi} = \frac{\partial e}{\partial q}$$

oder, wenn man die Kapazität  $K = \frac{e}{\varphi}$  einführt:

$$(20') \quad \frac{\partial l}{\partial \varphi} = \varphi \frac{\partial K}{\partial q}.$$

In erster Annäherung kann  $\frac{\partial K}{\partial q}$  jedenfalls als unabhängig von  $\varphi$  angesehen werden; dann ergibt sich die durch die Ladung des Kondensators auf die Potentialdifferenz  $\varphi$  hervorgebrachte Längenänderung:

$$(21) \quad \delta l = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial K}{\partial q}.$$

Nun ist, wenn  $l'$  die Länge des belegten Teiles des Kondensators bezeichnet, in großer Annäherung (nämlich bei Vernachlässigung der „Streuung“ der Kraftlinien):  $K = \frac{2\pi l' \epsilon}{\log \frac{r_a}{r_i}}$ , und da  $\frac{r_a}{r_i}$  bei der Dehnung

des Hohlzylinders durch einseitigen Zug ungeändert bleibt, so folgt hieraus

$$\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{l'} \frac{\partial l'}{\partial q} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial q}$$

oder bei Einführung des Elastizitätsmodulus  $E$  und der S. 360 definierten Konstanten  $\delta_1, \delta_2$ :

$$(22) \quad \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{E\pi(r_a^2 - r_i^2)} \left\{ 1 + \frac{\delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu}{\varepsilon} \right\}.$$

Bei sehr geringer Wanddicke  $r_a - r_i = d$  des Zylinderkondensators ist nun  $K = \frac{\pi(r_a + r_i)l'\varepsilon}{d}$ , somit nach (22):

$$(22') \quad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{l'}{d^2 E} (\varepsilon + \delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu),$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (21) erhält man

$$(23) \quad \frac{\delta l}{l'} = \left(\frac{\varphi}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2E} (\varepsilon + \delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu).$$

Man sieht, daß in dem Falle, wo die Belegungen des Kondensators sich nahezu über die ganze Länge des Zylinders erstrecken, dieses Resultat mit demjenigen übereinstimmt, welches nach dem S. 365 besprochenen *Sacerdoteschen* Satze aus Gl. (17') für einen beliebig gestalteten, geschlossenen, dünnwandigen Kondensator folgt. Die vorstehende Ableitung läßt aber erkennen, daß es für die Gültigkeit dieses Resultates bei nicht geschlossenen Zylinderkondensatoren wesentlich ist, daß die Belegungen an der Dilatation der dielektrischen Zwischenschicht teilnehmen, also auch für tangentiale Inanspruchnahme an derselben haften. Diese Bedingung war nun bei den meisten Beobachtungen an offenen Zylinderkondensatoren in der Tat erfüllt, und daher wurde auch, wenn die Volum- und Längenänderung gleichzeitig gemessen wurden, die Relation (19) gut bestätigt gefunden<sup>26)</sup>.

Für eine weitergehende Prüfung der Theorie kommen nur die Beobachtungen von *Wüllner* und *M. Wien* in Betracht, welche an einer Reihe zylindrischer Glaskondensatoren sowohl die Volumänderung durch Elektrostriktion, als auch die Kapazitätsänderung durch longitudinalen Zug bestimmt haben<sup>27)</sup>. Aus beiden Bestimmungen läßt sich nach dem S. 366 und 368 gesagten, wenn noch  $E$  und  $\varepsilon$  durch besondere Beobachtungen ermittelt sind, die Konstantenkombination  $\delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu$  ableiten, und es wurden für dieselbe auf beiden Wegen negative Werte von der gleichen Größenordnung gefunden, wodurch also die Theorie der Elektrostriktion bis zu einem gewissen Grade bestätigt wird. Die entgegengesetzten Resultate von *Cantone* und *Sozzani*<sup>28)</sup>, welche aus Messungen der Längenänderung von Glas-

26) Z. B. G. Quincke, Ann. Phys. Chem. 10 (1880), p. 515.

27) A. Wüllner und M. Wien, Ann. Phys. 9 (1902), p. 1217; 11 (1903), p. 619.

28) M. Cantone, Rom Rend. Acc. Linc. (4) 4<sup>1</sup> (1888), p. 344, 471; M. Cantone und Fr. Sozzani, Rend. Istit. Lomb. (2) 33 (1900), p. 1059; 34 (1901), p. 251; M. Cantone, ibid. 37 (1904), p. 164; Nuovo Cim. (5) 7 (1904), p. 126.

Zylinderkondensatoren für obige Größe *positive* Werte (entsprechend einer *Zunahme* der Dielektrizitätskonstante durch Zug senkrecht zu den Kraftlinien) fanden, dürften sich durch tatsächlich verschiedenes Verhalten verschiedener Glassorten erklären, welches auch schon aus den sehr verschiedenen numerischen Werten von  $(\delta_2(1 - \nu) - \delta_1\nu)\frac{1}{\varepsilon E}$  hervorgeht, die *Willner* und *Wien* für verschiedene Glassorten erhalten.

**7. Magnetostriktion.** Die ponderomotorischen Kräfte, welche im *magnetischen* Felde  $\mathfrak{H}$  auftreten, lassen sich für Körper, deren magnetische Permeabilität  $\mu$  als unabhängig von der Feldstärke angesehen werden kann, in völlig analoger Weise ableiten und auf Spannungen zurückführen, wie es für die Kräfte im elektrischen Felde oben in Nr. 1 und 3 durchgeführt worden ist. In einem homogenen isotropen Körper liefern jene Spannungen die zu (12) analoge Volumkraft  $-\frac{1}{4}(\pi_1 + \pi_2) \operatorname{grad}(\mathfrak{H}^2)$ , wo  $\pi_1\lambda$  und  $\pi_2\lambda$  die Änderungen von  $\mu$  durch die Dilatation  $\lambda$  parallel bzw. senkrecht zu den Kraftlinien bestimmen. Ferner erleidet die Oberfläche des Körpers, wenn er von Luft oder einer isotropen Flüssigkeit umgeben ist, deren Permeabilität gleich 1 gesetzt werden kann, zufolge (7') und (13) pro Flächeneinheit die Kraftkomponenten:

$$(24) \quad \bar{\mathfrak{F}}_x = \frac{\mu - 1}{2} \{ \bar{\mathfrak{H}}^2 + (\mu - 1) \bar{\mathfrak{H}}_n^2 \} \cos(n, X) \\ + \frac{\pi_2}{2} \bar{\mathfrak{H}}^2 \cos(n, X) + \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} \bar{\mathfrak{H}}_x \bar{\mathfrak{H}}_n,$$

wo  $\bar{\mathfrak{H}}$  die Feldstärke innerhalb des betrachteten Körpers an seiner Oberfläche,  $n$  deren äußere Normale bedeutet.

Die Bestimmung der *Deformation*, welche diese Kräfte hervorbringen, hat *Kirchhoff*<sup>29)</sup> für den Fall einer *Kugel*, die in ein homogenes Magnetfeld gebracht wird, vollständig durchgeführt. Dieser Fall ist deshalb besonders einfach zu behandeln, weil das Magnetfeld innerhalb der Kugel homogen ist, nämlich

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{3 H^0}{2 + \mu},$$

wenn  $H^0$  die Intensität des ursprünglichen homogenen Feldes ist, in welches die Kugel hineingebracht wurde. Daher fallen die Volumkräfte fort, und bei Zugrundelegung eines Koordinatensystems, dessen

29) *Kirchhoff*, Berlin Sitzungsber. 1884, p. 1155 Ann. Phys. Chem. 25 (1885), p. 601; Ges. Abh. Nachtrag, p. 124.

$X$ -Achse parallel der Feldrichtung und dessen Nullpunkt der Kugelmittelpunkt ist, werden die Oberflächenkräfte nach (24):

$$(25) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{F}}_x &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{ \frac{(\mu-1)^2}{2} \left(\frac{\bar{x}}{R}\right)^3 + \frac{\mu-1+\pi_1}{2} \frac{\bar{x}}{R} \right\}, \\ \bar{\mathfrak{F}}_y &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{ \frac{(\mu-1)^2}{2} \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{R^3} + \frac{\mu-1+\pi_2}{2} \frac{\bar{y}}{R} \right\}. \end{aligned}$$

$R$  bedeutet den Kugelradius.  $\bar{\mathfrak{F}}_z$  ist analog zu  $\bar{\mathfrak{F}}_y$  gebildet. Nach den Gleichungen der Elastizitätstheorie ergeben sich hieraus für die Verrückungen irgend eines in der  $XY$ -Ebene liegenden Punktes der Kugel Ausdrücke von der Form

$$(26) \quad \begin{aligned} v_x &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{ \frac{(\mu-1)^2}{2} [a_1 x^3 + b_1 y^2 x + c_1 R^2 x] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu-1+\pi_2}{2} a_2 x + \frac{\pi_1-\pi_2}{2} a_3 x \right\}, \\ v_y &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{ \frac{(\mu-1)^2}{2} [a_1' x^2 y + b_1' y^3 + c_1' R^2 y] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu-1+\pi_2}{2} a_2 y + \frac{\pi_1-\pi_2}{2} b_3 y \right\}, \end{aligned}$$

wo  $a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1', a_2, a_3, b_3$  gewisse Verbindungen der Elastizitätskonstanten bezeichnen. *Kirchhoff* wendet diese Ausdrücke an, um die Deformation einer Eisenkugel im homogenen Magnetfelde zu berechnen, wobei er annimmt, daß die beiden letzten Glieder in der Klammer gegen das erste, mit  $(\mu-1)^2$  proportionale, zu vernachlässigen seien. Abgesehen von der Bedenklichkeit dieser Vernachlässigung (da direkte Beobachtungen beim Eisen auf sehr große Werte von  $\pi_1$  und  $\pi_2$  schließen lassen) ist aber diese Anwendung der vorstehenden Formeln schon deshalb nicht statthaft, weil die bei ihrer Ableitung (analog zu der in Nr. 1 und 3 gegebenen für die Elektrostriktion) vorausgesetzte Darstellung der Energie bei „ferromagnetischen“ Körpern nicht gilt<sup>30)</sup>. Denn bei solchen ist die magnetische Energie der Volumeinheit nach der Maxwellschen Theorie wegen der Abhängigkeit der Permeabilität  $\mu$  von  $\mathfrak{H}$  nicht durch  $\frac{1}{2}\mu\mathfrak{H}^2$  gegeben, sondern durch<sup>31)</sup>:

30) Aus demselben Grunde können die Formeln, welche *Cantone* für die Magnetostriktion eines *Rotationsellipsoide* in einem zu seiner Rotationsachse parallelen Felde durch Übertragung der *Kirchhoff'schen* Behandlungsweise entwickelt hat [Rom Mem. Accad. Linc. (4) 6 (1890), p. 485], auf dessen Beobachtungen an Ellipsoiden aus Eisen und Nickel nicht angewendet werden. Übrigens sind diese Formeln auch an sich unrichtig wegen eines Fehlers in der Lösung des elastischen Problems.

31) Vgl. *E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, p. 512. Siehe auch Art. 15, Nr. 31.

$$W_m = \int_0^{\mathfrak{B}} (\mathfrak{H} d\mathfrak{B}) = (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) - \int_0^{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B} d\mathfrak{H}).$$

Daraus folgen für die Maxwellschen Spannungen in einem ferromagnetischen Medium ohne Hysteresis an Stelle der analog zu (5') gebildeten die nachstehenden Ausdrücke<sup>31)</sup>:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_x)_m = \mathfrak{B}_x \mathfrak{H}_x - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d\mathfrak{H}), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (B_z)_m = (C_y)_m = \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{B}_z \mathfrak{H}_y), \end{array} \right.$$

und für die durch die Abhängigkeit des magnetischen Verhaltens von Deformationen bedingten Spannungen<sup>32)</sup>:

$$(28) \quad (A_x)_m = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d\mathfrak{H}), \dots (B_z)_m = (\Gamma_y)_m = - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d\mathfrak{H}),$$

wo die Differentiationen bei konstant gehaltenem  $\mathfrak{H}$  auszuführen sind,

— Im Falle eines *isotropen* Mediums nehmen diese Ausdrücke die Form\*) an:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_x)_m = \mu \mathfrak{H}_x^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} \mu \mathfrak{H} d\mathfrak{H} \\ \quad = + \int_0^{\mu \mathfrak{H}} \mathfrak{H}_x d(\mu \mathfrak{H}_x) - \int_0^{\mathfrak{H}} \mu (\mathfrak{H}_y d\mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_z d\mathfrak{H}_z), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (B_z)_m = (C_y)_m = \mu \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z, \end{array} \right.$$

$$(28') \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_x)_m = - \int_0^{\mathfrak{H}} \{ \pi_1 \mathfrak{H}_x d\mathfrak{H}_x + \pi_2 (\mathfrak{H}_y d\mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_z d\mathfrak{H}_z) \}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (B_z)_m = (\Gamma_y)_m = \int_0^{\mathfrak{H}} \frac{\pi_2 - \pi_1}{2} (\mathfrak{H}_z d\mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_y d\mathfrak{H}_z), \end{array} \right.$$

wo  $\mu$  und  $\pi_1, \pi_2$  Funktionen von  $|\mathfrak{H}|$  sind.

32) S. Sano, Phys. Ztschr. 3 (1902), p. 401; F. Koláček, Ann. Phys. 13 (1904), p. 1; R. Gans, ibid. p. 634.

\*) Ebenso wie wir statt  $(\mathfrak{H} \mathfrak{H})$  kürzer  $\mathfrak{H}^2$  schreiben, werden wir  $\mathfrak{H} d\mathfrak{H}$  statt  $(\mathfrak{H} d\mathfrak{H})$  schreiben.

Insgesamt wirkt hiernach parallel den Kraftlinien der Zug:

$$(29) \quad q = \int_0^{\mu H} \tilde{H} d(\mu \tilde{H}) - \int_0^{\tilde{H}} \pi_1 \tilde{H} d\tilde{H}$$

und senkrecht zu den Kraftlinien der Druck:

$$(30) \quad p = \int_0^{\tilde{H}} \mu \tilde{H} d\tilde{H} + \int_0^{\tilde{H}} \pi_2 \tilde{H} d\tilde{H}.$$

Der mit Rücksicht auf die Beobachtungen wichtigste Spezialfall der Magnetostriktion ist die Längen- und Volumänderung eines dünnen Stabes oder Drahtes, der in ein homogenes Magnetfeld mit seiner Längsrichtung parallel zu dessen Kraftlinien hineingebracht wird. (Dieser Fall kann am einfachsten dadurch realisiert werden, daß man den Stab in der Achse eines langen Solenoids aufstellt, durch das man einen galvanischen Strom leitet.)

Die strenge Lösung dieses Problems, bei welcher auf die Gestalt der Stabenden und den davon mit abhängigen Kraftlinienverlauf da-selbst Rücksicht zu nehmen wäre, ist noch nicht gegeben. Eine an-nähernde Behandlung hat Koláček<sup>32)</sup> in der Weise durchgeführt, daß er dem Stabe die Gestalt eines sehr gestreckten Rotationsellipsoids zuschreibt. Will man nur die, der Beobachtung allein zugängliche, gesamte Längen- und Volumänderung berechnen, — worauf sich schließlich auch Koláček beschränkt —, so braucht man indessen gar keine spezielle Annahme über die Gestalt der Stabenden zu machen, sofern nur die Querdimensionen des Stabes sehr klein gegen seine Länge sind. Dann wird nämlich das Magnetfeld durch die Anwesenheit des Stabes nur auf einem relativ kleinen Teil seiner Länge merklich modifiziert und zwar in der Weise, als wenn bei unveränderter Permeabilität des von dem Stabe eingenommenen Raumes an den Stabenden zwei Pole von der Stärke  $(\mu - 1)H^0 f$  angebracht wären, wo  $H_0$  die ursprüngliche Feldstärke und  $f$  der Stabquerschnitt ist. Daraus folgt, daß die Dilatation des Stabes sich bestimmt aus einem longitudinalen äußeren Zug  $\tilde{F}_l$ , der gleich ist der Differenz der mit der ursprünglichen Feldstärke berechneten Werte von  $q$  im Luftraum und im Stabe, vermehrt um die vom Felde  $H^0$  auf die fingierten magnetischen Pole ausgeübten Kraft pro Querschnittseinheit, sowie aus einem radialen Zug  $\tilde{F}_r$ , auf die Mantelfläche gleich der Differenz der Werte von  $p$  innerhalb und außerhalb des Stabes. Man findet in dieser Weise

$$(31) \quad \tilde{F}_l = \int_0^{H^0} (\mu - 1 + \pi_1) \tilde{H} d\tilde{H}, \quad \tilde{F}_r = \int_0^{H^0} (\mu - 1 + \pi_2) \tilde{H} d\tilde{H};$$

ohne den Einfluß von Deformationen auf  $\mu$  würde also eine allseitig

gleiche Dilatation des Stabes resultieren und  $\frac{\delta v}{v} = 3 \cdot \frac{\delta l}{l}$  sein. Die Beobachtungen haben gezeigt, daß diese Beziehung keineswegs besteht, und daß die Glieder mit  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  sogar von überwiegendem Einfluß sind. Die Ausdrücke für die relative Längen- und Volumänderung, die sich aus obigem  $\tilde{\mathfrak{F}}_l$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}_r$  nach der Elastizitätstheorie berechnen, kann man folgendermaßen schreiben:

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\delta l}{l} = \frac{\tilde{\mathfrak{F}}_l - 2\nu\tilde{\mathfrak{F}}_r}{E} = \frac{1-2\nu}{E} \int_0^{H^0} (\mu-1) \mathfrak{H} d\mathfrak{H} + \int_0^{H^0} \frac{\partial \mu}{\partial q_l} \mathfrak{H} d\mathfrak{H}, \\ \frac{\delta v}{v} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \int_0^{H^0} (\mu-1) \mathfrak{H} d\mathfrak{H} + \int_0^{H^0} \left( \frac{\partial \mu}{\partial q_l} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial q_r} \right) \mathfrak{H} d\mathfrak{H}, \end{cases}$$

wobei  $q_l$ ,  $q_r$  einen longitudinalen bzw. radialen äußeren Zug bedeutet, und vorausgesetzt ist, daß die Elastizitätskonstanten nicht merklich von  $\mathfrak{H}$  abhängen (andernfalls müßte  $\frac{1-2\nu}{E}$  mit unter das Integralzeichen gesetzt werden). Diese Formeln sind identisch mit denen, die Koláček a. a. O. für einen Stab von sehr gestreckt ellipsoidischer Form gefunden hat. Sie lassen sich übrigens auch durch eine rein energetische Behandlungsweise des Problems ableiten<sup>33)</sup>. Dieselbe ergibt z. B. zwischen der gesamten Längenänderung eines beliebig gestalteten Stabes im Magnetfelde einerseits und der Änderung seines gesamten longitudinalen magnetischen Momentes  $M$  durch einen gleichgerichteten Zug vom Gesamtbetrage  $Q$  andererseits die Beziehung:

$$(33) \quad \frac{\delta l}{\partial H^0} = \frac{\partial M}{\partial Q},$$

woraus dann für einen dünnen zylindrischen Stab als Näherung die erste Gleichung (32) folgt. Ebenso ergibt diese Methode für die Änderung des Gesamtvolums durch die Magnetisierung und des magnetischen Moments durch allseitigen Druck  $P$  unmittelbar die Relation:

$$(34) \quad \frac{\partial v}{\partial H^0} = - \frac{\partial M}{\partial P},$$

welche auf (32<sup>3</sup>) führt. Auch die Torsion eines longitudinal magnetisierten Drahtes läßt sich analog behandeln; es gilt, wenn  $T$  das Torsionsmoment,  $\tau$  der Torsionswinkel ist:

33) F. Koláček, Ann. Phys. 14 (1904), p. 177. Zuerst ist diese Betrachtungsweise wohl von J. J. Thomson angewendet worden in seinen Vorlesungen über „Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie“ Cambridge 1888 (Übers. Leipzig 1890), Kap. 4.

$$(35) \quad \frac{\partial \tau}{\partial H^0} = \frac{\partial M}{\partial T}.$$

Der experimentellen Prüfung<sup>34)</sup> sind diese Formeln, welche die beobachtbaren Gesamtwirkungen zueinander in Beziehung setzen, natürlich leichter zugänglich, als diejenigen der vollständigen Theorie.

Auf die überaus zahlreichen *Beobachtungen* über Magnetostriktion ferromagnetischer Metalle und über den Einfluß elastischer Deformationen auf die Magnetisierung kann hier nicht eingegangen werden; es sei dafür z. B. auf die Darstellung von *F. Auerbach* in Winkelmanns Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. V, p. 301, verwiesen.

### 8. Piëzoelektrizität und Elektrostriktion azentrischer Kristalle.

**Allgemeiner Ansatz.** An Turmalin, Quarz und einer Anzahl anderer Substanzen, deren Kristalle durch das Fehlen eines Zentrums der Symmetrie ausgezeichnet sind, wurde zuerst von *J. und P. Curie*<sup>35)</sup> die Erscheinung der sog. *Piëzoelektrizität*, d. h. der Erregung elektrischer Momente durch äußeren Druck, beobachtet. Eine allgemeine mathematische Theorie dieser Erscheinungen entwickelte *W. Voigt* in der eingangs zitierten Abhandlung, indem er die Annahme zu Grunde legte, daß die an irgend einer Stelle des Kristalles erregten elektrischen Momente lineare Funktionen der Deformationskomponenten sind<sup>36)</sup>, deren Form der krystallographischen Symmetrie entspricht. *Lippmann* zeigte für einen speziellen Fall auf Grund des Energieprinzips, daß die Piëzoelektrizität das Auftreten von Deformationen im elektrischen Felde zur Folge haben muß, welche sich mit der Feldrichtung umkehren<sup>37)</sup>. Die allgemeinen Gesetze dieser Deformationen wurden dann von *F. Pockels*<sup>38)</sup> unter Zugrundelegung der *Voigtschen* Theorie abgeleitet.

34) Eine solche ist neuerdings in weitem Umfange ausgeführt worden von *K. Honda* und *T. Terada* (Phys. Zeitschr. 7 (1906), p. 465).

35) *J. und P. Curie*, Paris C. R. 91 (1880), p. 294, 383. Die Bezeichnung Piëzoelektrizität stammt von *W. Hankel* (Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 12 (1881), p. 462).

36) Die Proportionalität der elektrischen Momente mit dem Druck wurde am Quarz und Turmalin von *F. Nachtikal* (Gött. Nachr. 1899, p. 109) in weiten Grenzen geprüft und sehr annähernd bestätigt gefunden.

37) *G. Lippmann*, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 164; Journ. phys. (1) 10 (1881), p. 391. Beobachtet und gemessen wurden solche umkehrbare Deformationen zuerst an Quarz von *J. und P. Curie*, Paris C. R. 93 (1881), p. 1137, 95 (1882), p. 914, wobei sich sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Werten ergab. Aus den von *Kundt* (Ann. Phys. Chem. 18 (1883), p. 228) und *Röntgen* (Ann. Phys. Chem. 18, p. 213, 534) entdeckten Änderungen des *optischen* Verhaltens im elektrischen Felde kann hingegen nicht mit Sicherheit auf die

Beide Arten von Erscheinungen, die piëzoelektrischen und die eben erwähnten reziproken, lassen sich in ihrem Zusammenhange am besten darstellen, indem man die freie Energie der Volumeinheit ( $\omega$ ) eines gleichzeitig homogenen Drucken und einem homogenen elektrischen Felde ausgesetzten, nichtleitenden Kristalles bei konstanter Temperatur als Funktion der sechs Deformationskomponenten  $x_x, \dots, y_z, \dots$  und der elektrischen Feldkomponenten  $E_x, E_y, E_z$  betrachtet<sup>39)</sup>. Die Entwicklung von  $\omega$  nach Potenzen dieser Größen beginnt mit Gliedern, welche in den  $x_x, \dots, y_z, \dots$  quadratisch sind und zusammen die elastische potentielle Energie  $\chi$  darstellen, und solchen, die in den  $E_x, E_y, E_z$  quadratisch sind und der zur Hervorbringung der elektrischen Momente der Volumeinheit (oder Polarisationen, vgl. den Art. *H. A. Lorentz* über Maxwellsche Theorie V 13 Nr. 13)  $P_x, P_y, P_z$  bei verschwindender Deformation aufzuwendenden Arbeit  $\psi$  entsprechen. Zufolge der Grundannahme der Elastizitätstheorie ist

$$(36) \quad \begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} c_{11} x_x^2 + c_{12} x_x y_y + \dots + c_{16} x_x x_y \\ & + \frac{1}{2} c_{22} y_y^2 + \dots + c_{26} y_y x_y \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{2} c_{66} x_y^2. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(37) \quad \psi = -\frac{1}{2} \{ (\varepsilon_{11} - 1) E_x^2 + (\varepsilon'_{22} - 1) E_y^2 + (\varepsilon'_{33} - 1) E_z^2 \\ + 2\varepsilon'_{23} E_y E_z + 2\varepsilon'_{31} E_z E_x + 2\varepsilon'_{12} E_x E_y \},$$

da die bei Influenzierung der  $P_x, P_y, P_z$  geleistete Arbeit allgemein durch  $-\int (P_x dE_x + P_y dE_y + P_z dE_z)$  gegeben ist\*) und folglich

$$(P_x)_d = (\varepsilon'_{11} - 1) E_x + \varepsilon'_{12} E_y + \varepsilon'_{13} E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial E_x},$$

sein muß; hierin bedeuten die  $\varepsilon'_{hk}$  die Dielektrizitätskonstanten bei verschwindender Deformation und sind mit den gewöhnlichen  $\varepsilon_{hk}$  also

Deformationen geschlossen werden, da erstere den letzteren zwar qualitativ, aber nicht quantitativ entsprechen; vgl. *F. Pockels*, Göttingen Abh. Ges. d. Wiss. 39 (1894).

38) *F. Pockels*, N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. 7 (1890), p. 224.

39) Diese Art der Behandlung findet sich zuerst, jedoch z. T. fehlerhaft, bei *P. Duhem* (*Leçons sur l'électricité et le magnétisme* 2 (1892), p. 467), dann bei *E. Riecke*, Göttinger Nachr. 1893, p. 3—13, und *W. Voigt*, Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4, oder Ann. Phys. Chem. 55 (1894), p. 701, sowie in dessen Kompendium der theoretischen Physik 2, p. 104.

\*) Daß diese Arbeit *negativ* ist, hängt mit der Tatsache zusammen, daß ein dielektrischer Körper nach dem Gebiete größter Feldstärke hingezogen wird. Vgl. Art. *Gans* V 15 Nr. 19.

nur dann identisch, wenn die elektrische Erregung nicht von Deformationen begleitet ist.

Bei Kristallen ohne Symmetriezentrum, bei denen eine Umkehrung aller drei Koordinatenrichtungen mit einer Änderung des Ausdrückes für die Energie verbunden sein kann, wird der letztere nun auch Produkte der  $x_x, \dots, y_z, \dots$  und  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  enthalten können. Indem man die höheren Glieder der Entwicklung, z. B. diejenigen von der Form

$$-\frac{1}{2} \{ (\mathfrak{E}_x^2 (\delta_{11} x_x + \dots + \delta_{16} x_y) + \dots + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z (\delta_{41} x_x + \dots + \delta_{46} x_y) + \dots),$$

welche die in Nr. 3 d. Art. behandelten Erscheinungen geben würden, vernachlässigt, um die für azentrische Kristalle charakteristischen Vorgänge für sich zu betrachten, erhält man demnach folgenden Ansatz:

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \omega = \chi + \psi - \mathfrak{E}_x (e_{11} x_x + e_{12} y_y + e_{13} z_z + e_{14} y_z + e_{15} z_x + e_{16} x_y) \\ \quad - \mathfrak{E}_y (e_{21} x_x + \dots + \dots + e_{24} y_z + \dots + \dots) \\ \quad - \mathfrak{E}_z (e_{31} x_x + \dots + \dots + e_{34} y_z + \dots + \dots). \end{array} \right.$$

Da allgemein  $-\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{E}_x}, -\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{E}_y}, -\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{E}_z}$  die gesamten elektrischen Momente  $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ , ferner  $\frac{\partial \omega}{\partial x_x}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial y_z}, \dots$  die gesamten inneren Spannungen  $E_x, \dots, H_z, \dots$  sind, so folgt, wenn man noch die bei verschwindenden Deformationen influenzierten Momente mit  $(\mathfrak{P}_x)_d, (\mathfrak{P}_y)_d, (\mathfrak{P}_z)_d$  und die bei verschwindendem elektrischen Feld auftretenden (rein elastischen) Spannungen mit  $X_x, \dots, Y_z, \dots$  bezeichnet,

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_x = (\mathfrak{P}_x)_d + e_{11} x_x + e_{12} y_y + e_{13} z_z + e_{14} y_z + e_{15} z_x + e_{16} x_y, \\ \mathfrak{P}_y = (\mathfrak{P}_y)_d + e_{21} x_x + \dots + \dots + e_{24} y_z + \dots + \dots, \\ \mathfrak{P}_z = (\mathfrak{P}_z)_d + e_{31} x_x + \dots + \dots + e_{34} y_z + \dots + \dots; \end{array} \right.$$

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} E_x = X_x - (e_{11} \mathfrak{E}_x + e_{21} \mathfrak{E}_y + e_{31} \mathfrak{E}_z), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ H_z = Y_z - (e_{14} \mathfrak{E}_x + e_{24} \mathfrak{E}_y + e_{34} \mathfrak{E}_z), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{array} \right.$$

Das erste Gleichungssystem bildet die Grundlage der Voigtschen Theorie der Piezoelektrizität. Es ist dazu zu bemerken, daß die ersten Glieder der rechten Seite, welche die *influenzierten* Momente darstellen, im allgemeinen auch dann nicht verschwinden, wenn auf den Kristall nur mechanisch eingewirkt wird; denn im allgemeinen erfährt jedes Volumenelement dann elektrische Einwirkungen von allen übrigen (Selbstinfluenzierung des Kristalls), welche sich erst berechnen lassen, wenn die Form des Kristallstückes und die ganze Versuchsanordnung gegeben ist.

Bezeichnet man, wie in der Elastizitätstheorie üblich, mit  $c_{hk}$  bzw.  $s_{hk}$  die elastischen Konstanten, welche als Koëffizienten in den linearen Ausdrücken der elastischen Spannungen durch die Deformationen bzw. in den Ausdrücken der Deformationen durch die Spannungen auftreten, wobei

$$\sum_1^6 c_{hk} s_{hk} = 1, \quad \sum_1^6 c_{hk} s_{ik} = 0$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (40)

$$(41) \quad \begin{cases} x_x = \xi_x + d_{11} \mathfrak{E}_x + d_{21} \mathfrak{E}_y + d_{31} \mathfrak{E}_z, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_z = \eta_z + d_{14} \mathfrak{E}_x + d_{24} \mathfrak{E}_y + d_{34} \mathfrak{E}_z, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

wo

$$(42) \quad d_{hk} = \sum_1^6 e_{hi} s_{ki}$$

gesetzt ist, und  $\xi_x, \dots, \eta_z, \dots$  ebenso aus den gesamten Spannungen  $\Xi_x, \dots$  abgeleitet sind, wie  $x_x, \dots, y_z, \dots$  aus den rein elastischen  $X_x, \dots$ , also:

$$(43) \quad \xi_x = \Xi_x s_{11} + H_y s_{12} + \dots + \Xi_y s_{16}.$$

Es bedeuten  $\xi_x, \dots, \eta_z, \dots$  mithin die Deformationen, welche durch die Spannungen  $\Xi_x, \dots$  bei fehlender elektrischer Einwirkung hervorgerufen würden,  $x_x - \xi_x, \dots, y_z - \eta_z, \dots$  dagegen diejenigen, welche bei fehlender mechanischer Einwirkung lediglich durch ein elektrisches Feld erzeugt werden, vorausgesetzt, daß sich die so bestimmten Deformationen jedes Volumenelementes ungehindert durch die benachbarten herstellen können (was freilich nur in besonderen Fällen, z. B. bei homogenem elektrischen Felde, zutrifft).

Ferner erhält man aus den Formeln (39) durch Einsetzen von (41) und Berücksichtigung von (43):

$$(44) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = (\mathfrak{P}_x)_s + (d_{11} \Xi_x + d_{12} H_y + d_{13} Z_z + d_{14} H_z + d_{15} Z_x + d_{16} \Xi_y) \\ \mathfrak{P}_y = (\mathfrak{P}_y)_s + (d_{21} \Xi_x + \dots + \dots + d_{24} H_z + \dots + \dots) \\ \mathfrak{P}_z = (\mathfrak{P}_z)_s + (d_{31} \Xi_x + \dots + \dots + d_{34} H_z + \dots + \dots); \end{cases}$$

darin ist

$$(45) \quad \begin{cases} (\mathfrak{P}_x)_s = (\mathfrak{P}_x)_d + \mathfrak{E}_x \Sigma d_{1h} e_{1h} + \mathfrak{E}_y \Sigma d_{1h} e_{2h} + \mathfrak{E}_z \Sigma d_{1h} e_{3h} \\ = \mathfrak{E}_x (\varepsilon'_{11} - 1 + \Sigma d_{1h} e_{1h}) + \mathfrak{E}_y (\varepsilon'_{12} + \Sigma d_{1h} e_{2h}) \\ \quad + \mathfrak{E}_z (\varepsilon'_{13} + \Sigma d_{1h} e_{3h}) \\ = \mathfrak{E}_x (\varepsilon_{11} - 1) + \mathfrak{E}_y \varepsilon_{12} + \mathfrak{E}_z \varepsilon_{13} \end{cases}$$

und bedeutet das bei verschwindenden Spannungen influenzierte Moment parallel der X-Achse. Aus vorstehender Gleichung und den analogen für  $(\mathfrak{P}_y)_s$ ,  $(\mathfrak{P}_z)_s$  ist zugleich der Unterschied zwischen den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_{hk}$  bei verschwindender Deformation und denjenigen  $\epsilon_{hk}$  bei verschwindenden Spannungen (den Dielektrizitätskonstanten im gewöhnlichen Sinne) ersichtlich; praktisch kommt dieser Unterschied wegen der Kleinheit der Produkte der Größen  $d$  und  $e$  in den bisher bekannten Fällen allerdings nicht in Betracht.

**9. Spezialisierung für die einzelnen Kristallgruppen.** Die allgemeinen Ausdrücke (39) oder (44) für die Komponenten des elektrischen Moments, welche 18 dem Kristall eigentümliche Konstanten<sup>40)</sup> (die „piëzoelektrischen Konstanten“  $e_{hk}$  bzw. „piëzoelektrischen Moduln“  $d_{hk}$  nach Voigts Bezeichnung) enthalten, erfahren eine mehr oder weniger beträchtliche Vereinfachung, wenn der Kristall Symmetrieeigenschaften besitzt und das Koordinatensystem diesen entsprechend gewählt wird; denn es ergeben sich dann aus der Forderung, daß die skalare Funktion  $\omega$  beim Übergang zu einem kristallographisch gleichwertigen Koordinatensystem gleiche Koeffizienten behalten muß, eine Anzahl von Bedingungsgleichungen zwischen den Konstanten  $e_{hk}$  bzw.  $d_{hk}$ .<sup>41)</sup> Das Vorhandensein eines Zentrums der Symmetrie schließt die hier betrachtete piëzoelektrische Erregung überhaupt aus, da  $\mathfrak{P}$  als polarer Vektor (vgl. Artikel Abraham über geometrische Grundbegriffe IV 14, Nr. 21) bei Umkehrung aller Koordinatenachsen sein Vorzeichen wechselt, die Deformations- oder Spannungskomponenten aber dabei unverändert bleiben. Nachstehende Zusammenstellung gibt für die azentrischen Kristallgruppen die spezielle Form der linearen Ausdrücke, welche nach dem Ansatz (44) die durch mechanische Einwirkung primär erregten elektrischen Momente  $\mathfrak{P}'_x = \mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_s$  usw. als Funktionen der Spannungen darstellen. (Letztere werden in diesem Falle, nämlich bei verschwindendem elektrischen Feld, nach (40) mit den  $X_x, \dots, Y_z, \dots$  identisch.) Jeder Kristallgruppe sind die Symbole der für sie wesentlichen Symmetrieelemente hinzugefügt, wobei  $A_x^n$  bzw.  $S_x^n$  eine in die X-Richtung fallende  $n$ -zählige Symmetriearchse bzw. eine ebensolche Spiegeldrehungsachse,  $E_x$  eine zur X-Achse senkrechte Sym-

40) Eine Untersuchung von Voigt (Göttinger Nachr. 1900, p. 364) über den Charakter dieser Konstanten zeigt, daß sich dieselben durch Kombination eines Vektors, eines Tensors und einer gerichteten Größe 3. Ordnung darstellen lassen. (Siehe auch IV 14, Nr. 23 c.)

41) Über die allgemeinen Prinzipien dieser Symmetriebetrachtungen vgl. IV 14. III

metrieebene bezeichnet; aus diesen Symbolen ist zugleich die spezielle Wahl des Koordinatensystems in den einzelnen Fällen ersichtlich.

1. *Triklines System*, Hemiëdrie. Allgemeine Gleichungen (44).

2. *Monoklines System*, Hemiëdrie.  $E_z$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{11} X_x + d_{12} Y_y + d_{13} Z_z + d_{16} X_y,$$

$$\mathfrak{P}'_y = d_{21} X_x + d_{22} Y_y + d_{23} Z_z + d_{26} X_y,$$

$$\mathfrak{P}'_z = d_{34} Y_z + d_{35} Z_x.$$

3. *Monoklines System*, Hemimorphie.  $A_z^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14} Y_z + d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{24} Y_z + d_{25} Z_x,$$

$$\mathfrak{P}'_z = d_{31} X_x + d_{32} Y_y + d_{33} Z_z + d_{36} X_y.$$

4. *Rhombrisches System*, Hemiëdrie.  $A_z^2 A_x^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{25} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_z = d_{36} X_y.$$

5. Desgl., Hemimorphie.  $A_z^2 E_x$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{24} Y_z,$$

$$\mathfrak{P}'_z = d_{31} X_x + d_{32} Y_y + d_{33} Z_z.$$

#### *Tetragonales System.*

6. Enantiomorphe Hemiëdrie.  $A_z^4 A_x^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}'_y = -d_{14} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_z = 0.$$

7. Hemimorphe Hemiëdrie.  $A_z^4 E_x$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{15} Y_z, \quad \mathfrak{P}'_z = d_{31}(X_x + Y_y) + d_{33} Z_z.$$

8. Hemimorphe Tetartoëdrie.  $A_z^4$ . Superposition der Ausdrücke 6. und 7.

9. Sphenoidische Hemiëdrie.  $S_z^2 A_x^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{14} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_z = d_{36} X_y.$$

10. Sphenoidische Tetartoëdrie.  $S_z^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14} Y_z + d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}'_y = -d_{15} Y_z + d_{14} Z_x,$$

$$\mathfrak{P}'_z = d_{31}(X_x - Y_y) + d_{36} X_y.$$

#### *Rhomboëdrisches System.*

11. Enantiomorphe Hemiëdrie.  $A_z^3 A_x^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{11}(X_x - Y_y) + d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}'_y = -d_{14} Z_x - 2d_{11} X_y, \quad \mathfrak{P}'_z = 0$$

12. Hemimorphe Hemiëdrie.  $A_z^3 E_x$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{15} Z_x - 2d_{22} X_y, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{22}(Y_y - X_x),$$

$$\mathfrak{P}'_z = d_{31}(X_x + Y_y) + d_{33} Z_z.$$

13. Tetartoëdrie.  $A_z^3$ . Superposition der Ausdrücke 11. und 12.

*Hexagonales System.*

14. Enantiomorphe Hemiëdrie.  $A_z^6 A_x^2$ . — Wie Gruppe 6.  
 15. Hemimorphe Hemiëdrie.  $A_z^6 E_x$ . — Wie Gruppe 7.  
 16. Hemimorphe Tetartoëdrie.  $A_z^6$ . — Wie Gruppe 8.  
 17. Hemiëdrie mit dreizähliger Achse.  $A_z^3 E_z A_x^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{11}(X_x - Y_y), \quad \mathfrak{P}'_y = -2d_{11}X_y, \quad \mathfrak{P}'_z = 0.$$

18. Tetartoëdrie mit dreizähliger Achse.  $A_z^3 E_z$ .  
 $\mathfrak{P}'_x = d_{11}(X_x - Y_y) - 2d_{22}X_y, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{22}(X_x - Y_y) + 2d_{11}X_y,$   
 $\mathfrak{P}'_z = 0.$

*Reguläres System.*

19. Hemimorphe Hemiëdrie.  $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2$  und  
 20. Tetartoëdrie.  $A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$ .

$$\mathfrak{P}'_x = d_{14}Y_z, \quad \mathfrak{P}'_y = d_{14}Z_x, \quad \mathfrak{P}'_z = d_{14}X_y.$$

Für die enantiomorphe Hemiëdrie verschwinden hier trotz Fehlens eines Zentrums der Symmetrie sämtliche piezoelektrische Moduln.

Die linearen Ausdrücke, welche nach (39) die durch gegebene *Deformationen* erregten Momente  $\mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_d$  usw. darstellen, spezialisieren sich für die einzelnen Kristallgruppen in derselben Weise, wie die Ausdrücke (44), mit dem einzigen Unterschied, daß in den Fällen, wo die *Z*-Achse eine dreizählige Symmetriearchse ist, an Stelle von  $X_y$  nicht  $x_y$ , sondern  $\frac{1}{2}x_y$  zu setzen ist.

**10. Anwendung auf besondere Fälle.** Die für die Beobachtung wichtigste Art piezoelektrischer Erregung ist diejenige durch die homogene d. h. im ganzen Kristall konstante Deformation, welche durch *einseitigen Druck* (ausgeübt auf die Endflächen eines prismatischen Kristallstücks) hervorgebracht wird. Hierauf können die Formeln (44) direkt Anwendung finden; denn hier sind  $E_x, \dots, H_z, \dots$  unmittelbar gegeben, nämlich, wenn  $P$  die Größe des Druckes,  $v_1, v_2, v_3$  seine Richtungskosinus sind:

$$(46) \quad E_x = -v_1^2 P, \quad \dots \quad H_z = -v_2 v_3 P.$$

Um das piezoelektrische Verhalten eines Kristalls zu veranschaulichen, kann man die aus (44) und (46) für  $P = 1$  und alle möglichen Druckrichtungen erhaltenen Momente als Vektoren von einem Punkte aus auftragen und die von deren Endpunkten erfüllte Oberfläche konstruieren. Diese „piezoelektrische Fläche“ ist für spezielle Kristallgruppen (die hemimorphe Hemiëdrie des rhomboedrischen und des regulären Systems) von *E. Riecke*<sup>42)</sup> und *W. Voigt*<sup>43)</sup>, sodann

42) *E. Riecke*, Göttinger Nachr. 1891, p. 223.

allgemein von *F. Bidlingmaier*<sup>44)</sup> untersucht worden. Letzterer zeigte, daß dieselbe in den meisten Fällen einem besonderen Typus der *Steinerschen Fläche* angehört. Sie ist vom 4. Grade und besitzt 3 Doppelgerade, die einen Punkt gemeinsam haben; sie verläuft ganz innerhalb des durch die Endpunkte der letzteren bestimmten Tetraeders, dessen Seitenflächen sie in Ellipsen berührt, und kann mit Hilfe des Doppelgeradenkreuzes in einfacher Weise konstruiert werden (vgl. § 12 der *Bidlingmaierschen Dissertation*). Das Doppelgeradenkreuz und das zugehörige Tetraeder muß der Symmetrie der Kristallgruppe entsprechen, und hierdurch ist die piëzoelektrische Fläche für jede Gruppe (abgesehen von den noch willkürlich bleibenden Parametern) ihrer Natur nach angebar. In den Gruppen des tetragonalen Systems mit Ausnahme derjenigen mit Spiegelachse, sowie in allen Gruppen des hexagonalen Systems, wo ein solches mit der Symmetrie verträgliches Tetraeder nicht möglich ist, entartet die piëzoelektrische Fläche zu einem (in Bezug auf den Ausgangspunkt der Konstruktion exzentrischen) Rotationsellipsoid oder (wie z. B. bei der Gruppe 11, welcher der Quarz angehört) zu einer Kreisscheibe. In allen übrigen Fällen kann sie aus der *regulären* Steinerschen Fläche durch Dehnung, Drehung, Parallelverschiebung und Kollineation abgeleitet werden.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die piëzoelektrische Fläche für sich allein zur Charakteristik des piëzoelektrischen Verhaltens bei einseitigem Druck nicht ausreicht, sondern daß noch die Zuordnung ihrer Punkte zu den die Druckrichtung repräsentierenden Punkten der Halbkugel hinzugefügt werden muß. In der Tat besitzt auch die allgemeinste, den symmetrieloßen Kristallen zukommende piëzoelektrische Fläche nur 15 Parameter, während die Anzahl der „piëzoelektrischen Moduln“  $d_{hk}$  in diesem Falle 18 beträgt. Nur in höher symmetrischen Gruppen wird die Anzahl der Flächenkonstanten gleich derjenigen der Moduln.

Für die hemimorph-hemiëdrische und tetartoëdrische Gruppe des *regulären Systems* ist die Gleichung der Fläche, bezogen auf die hier den Würfelnormalen parallelen Doppelgeraden als Koordinatenachsen:

$$(47) \quad \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = - P d_{14},$$

und die Zuordnung ihrer Punkte zu den Richtungskosinus von  $P$  ist durch die Proportion gegeben:

43) *W. Voigt*, Vers. d. Naturf. u. Ä. 1891, II. Teil, p. 36—39.

44) *F. Bidlingmaier*, Diss. Göttingen 1900 (Geometrischer Beitrag zur Piëzoelektrizität der Kristalle).

$$(48) \quad x : y : z = \frac{1}{\nu_1} : \frac{1}{\nu_2} : \frac{1}{\nu_3},$$

woraus folgt, daß die beiden Ebenen, welche durch die Richtung von  $P$  einerseits, durch diejenige von  $\mathfrak{P}$  andererseits und durch eine der Koordinatenachsen hindurch gelegt werden, mit einer der durch die letztere hindurchgehenden Koordinatenebenen komplementäre Winkel bilden. Liegt die Druckrichtung in einer Koordinatenebene, so fällt  $\mathfrak{P}$  in die zu dieser senkrechte Symmetriearchse.

Eine andere geometrische Darstellung der piezoelektrischen Erregung durch einseitigen Druck hat *W. Voigt* angegeben<sup>45)</sup>. Sie beruht auf dem aus den Grundformeln (44) in Verbindung mit (46) leicht ersichtlichen Satze, daß der Druck  $P$ , welcher in beliebigen Richtungen wirken muß, um ein vorgeschriebenes Moment nach einer der 3 Koordinatenachsen zu erzeugen, durch das Quadrat des der Druckrichtung parallelen Radiusvektors je einer zentralen Fläche 2. Grades gegeben wird, deren Gestalt und Lage durch die piezoelektrischen Moduln vollständig bestimmt ist, während ihre absoluten Lineardimensionen der Quadratwurzel aus dem vorgeschriebenen Moment  $\mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_s$ , bzw.  $\mathfrak{P}_y - (\mathfrak{P}_y)_s$ , oder  $\mathfrak{P}_z - (\mathfrak{P}_z)_s$  proportional sind. Diese 3 Flächen zweiten Grades, deren jede durch 6 Parameter bestimmt ist, sind ausreichend zur vollständigen Charakterisierung des piezoelektrischen Verhaltens. Man kann z. B. durch Aufsuchung der *Schnittpunkte* dreier solcher Flächen diejenigen Drucke nach Größe und Richtung bestimmen, welche ein vorgeschriebenes Gesamtmoment erzeugen.

Dieselben Flächen 2. Grades können auch zur Veranschaulichung des reziproken Phänomens dienen; die reziproken Quadrate ihrer Radienvektoren geben nämlich die in deren Richtung durch ein bestimmtes, je einer Koordinatenachse paralleles elektrisches Feld erzeugte lineare Dilatation<sup>46)</sup>.

Da der Beobachtung an einseitig gepreßten rechtwinkligen Prismen nicht das Gesamtmoment, sondern die Komponenten nach den Prismenkanten, welche zugleich die auf den Prismenflächen auftretende freie elektrische Flächendichte messen, unmittelbar zugänglich sind, so hat auch die geometrische Darstellung dieser Komponenten Interesse, insbesondere der Komponente  $\mathfrak{P}'_i$  nach der Druckrichtung. Die Oberflächen, deren Radiusvektor  $r$  dieses *longitudinale Moment*  $\mathfrak{P}'_i$  für konstante Größe und alle möglichen Richtungen des Druckes repräsent-

45) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 63 (1897), p. 376; Kristallphysik, p. 105 ff.

46) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 63 (1897), p. 380.

tiert, sind von *Voigt* für die besonders interessanten Gruppen 11., 12. und 19. (oder 20) der obigen Aufzählung untersucht und durch Modelle dargestellt worden<sup>47)</sup>. Im Falle der regulären Gruppe 19. hat diese Fläche die Gleichung:

$$(49) \quad \mathfrak{P}'_i = -3d_{14}P\nu_1\nu_2\nu_3 \quad \text{oder} \quad r^4 = -3d_{14}Px\text{yz};$$

sie besteht aus vier geschlossenen Flächenstücken, die nur im Nullpunkt zusammenhängen, in den abwechselnden Oktanten liegen und natürlich symmetrisch in bezug auf die in dem betreffenden Oktanten liegende dreizählige Symmetriearchse (Oktaëdernormale) sind. Von ähnlichem Typus, und ebenfalls nur der absoluten Größe nach von der Substanz des Kristalls abhängig, ist die  $\mathfrak{P}'_i$ -Fläche bei der Gruppe 11., deren bekanntester Repräsentant der *Quarz* ist; hier gilt:

$$(50) \quad \mathfrak{P}'_i = d_{11}P\nu_1(\nu_1^2 - 3\nu_2^2) \quad \text{oder} \quad r^4 = d_{11}Px(x^2 - 3y^2),$$

und die Fläche besteht aus drei geschlossenen, nur im Nullpunkt zusammenhängenden Stücken, welche in bezug auf die XY-Ebene und je eine der drei durch die Hauptachse (Z-Achse) und die zweizähligen Symmetriearchsen gehenden Ebenen symmetrisch sind. Bei der Gruppe 12. endlich, welcher der *Turmalin* angehört, erhält man

$$(51) \quad \mathfrak{P}'_i = -P\{d_{22}\nu_2(\nu_2^2 - 3\nu_1^2) + (d_{31} + d_{15})\nu_3(1 - \nu_3^2) + d_{33}\nu_3^2\}$$

und wird die Fläche  $r = \mathfrak{P}'_i$  also aus derjenigen für 11. dadurch erhalten, daß man dem durch (50) gegebenen Radiusvektor noch eine vom Neigungswinkel gegen die Hauptachse allein abhängige Strecke hinzufügt; die Gestalt der Fläche ist hier von der Substanz des Kristalls abhängig. Für einen Vertreter der monoklinen Gruppe 3., die Weinsäure, hat *T. Tamari*<sup>48)</sup> die sämtlichen acht piëzoelektrischen Moduln bestimmt und die Fläche des longitudinalen Moments diskutiert.

Die experimentelle Bestätigung der vorstehenden Formeln der *Voigtschen Theorie* ist durch elektrometrische Messungen der auf den Flächen einseitig gepreßter Prismen auftretenden freien Ladungen von *J. und P. Curie*<sup>49)</sup> und von *Riecke* und *Voigt*<sup>50)</sup> an Quarz und Turmalin, sowie von *Pockels*<sup>51)</sup> an dem regulär tetartoëdrischen Natriumchlorat erbracht worden.

47) *W. Voigt*, Vers. d. Naturf. u. Ä. 1891, II, p. 36. — Katalog math. Modelle usw., München 1892, p. 385.

48) *T. Tamari*, Physik. Ztschr. 6 (1905), p. 379.

49) *J. u. P. Curie*, Paris C. R. 92 (1881), p. 186; 93 (1882), p. 204; Journ. de phys. (2) 1 (1882), p. 245.

50) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 45 (1892), p. 523.

51) *F. Pockels*, Göttingen Abh. Ges. d. Wiss. 39 (1894), II. § 4,

Außer für den Fall der homogenen Deformation durch einseitigen Druck ist die primäre piëzoelektrische Erregung noch für gewisse Fälle *ungleichförmiger* Deformation untersucht werden, so für die Biegung und Torsion eines Zylinders<sup>52)</sup> und für die Deformation eines solchen durch gewisse auf die Mantelfläche ausgeübte Drücke<sup>53)</sup>. Da in diesen Fällen die elektrischen Momente nicht mit einer Oberflächenbelegung allein äquivalent sind, so muß, um die beobachtbaren elektrischen Wirkungen des deformierten Kristallzyinders zu finden, das *Potential* der erregten elektrischen Verteilung berechnet werden. *Voigt* hat gezeigt<sup>54)</sup>, wie diese Aufgabe für einen unendlich langen Kreiszyylinder auch mit Berücksichtigung der sekundären Wirkungen (Selbstinfluenz und Elektrostriktion) streng gelöst werden kann, und hat u. a. den für die Erklärung gewisser Beobachtungen<sup>55)</sup> wichtigen Satz gefunden, daß ein solcher Zylinder von beliebiger kristallographischer Orientierung, wenn überhaupt, durch longitudinalen Druck oder Zug stets so erregt wird, daß sich seine Peripherie in zwei Hälften, und durch gleichförmige Biegung oder Drillung so, daß sie sich in vier gleiche Teile von entgegengesetztem gleichem elektrischen Verhalten teilt.

**11. Polare Pyroelektrizität und reziproker Wärme-Effekt.** Schon lange vor Entdeckung der Piëzoelektrizität war die Erscheinung bekannt, daß gewisse Kristalle (wie der Turmalin) infolge von Temperaturänderung elektrisch erregt werden, welche Eigenschaft man *Pyroelektrizität* nennt<sup>56)</sup>. Als eigentlich pyroelektrisch sind aber nach *Voigt* nur diejenigen Kristalle zu bezeichnen, welche bei *gleichförmiger*, d. h. im ganzen Kristall konstanter Temperaturänderung elektrisch erregt werden. Sofern diese Erregung eine *polare* ist, wie in diesem Abschnitt vorausgesetzt werden soll, kann sie nur bei gewissen azentrischen Kristallgruppen auftreten, nämlich bei den Gruppen 1. und 2. der in Nr. 9 gegebenen Aufzählung und bei denjenigen mit einer ausgezeichneten polaren Symmetriearchse. *Ungleichförmige* Temperaturänderung kann hingegen dadurch, daß sie Spannungen verursacht, bei allen piëzoelektrischen Kristallen elektrische Erregung hervorrufen, und es ist die unter solchen Umständen beobachtete Elektrizitätsentwicklung vielfach auch als Pyroelektrizität bezeichnet worden.

52) *W. Voigt*, Allg. Theorie usw. § 6—9.

53) *C. Somigliana*, Ann. di mat. (2) 20 (1892).

54) *W. Voigt*, Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4.

55) *W. C. Röntgen*, Ann. Phys. Chem. 39 (1890), p. 16.

56) *W. Hankel*, dem man ausgedehnte Beobachtungen auf diesem Gebiete verdankt, gebrauchte die Bezeichnung *Thermoelektrizität*, welche aber wegen ihrer anderweitig schon festgelegten Bedeutung nicht zur Annahme gelangte.

Theoretisch behandelt ist diese scheinbare pyroelektrische Erregung von Voigt<sup>57)</sup> für den Fall oberflächlicher Erwärmung oder Abkühlung einer Kristallkugel, für welchen Beobachtungen an Quarz nach dem Kundtschen<sup>58)</sup> Bestäubungsverfahren von Röntgen<sup>59)</sup> vorlagen.

Die primären *wahren* pyroelektrischen Momente, d. h. diejenigen, welche nicht von den die Temperaturänderung begleitenden Deformationen herrühren, sondern rein thermischen Ursprungs sind<sup>60)</sup>, lassen sich im allgemeinsten Falle für hinreichend kleine Temperaturänderungen  $\tau$  durch die Formeln

$$(52) \quad \mathfrak{P}_x = r_1 \tau, \quad \mathfrak{P}_y = r_2 \tau, \quad \mathfrak{P}_z = r_3 \tau$$

darstellen. Die Konstanten  $r$  reduzieren sich in der Gruppe 2. auf zwei und in allen hemimorphen Gruppen auf eine einzige.

Im allgemeinen werden sich solche wahre pyroelektrische Momente mit scheinbaren, durch Deformationen hervorgerufenen, überlagern. Um dies zu berücksichtigen, stelle man die Momente in Erweiterung des Ansatzes (44) als Funktionen der *Spannungen* und der Temperaturänderung dar; dabei tritt letztere mit anderen Koeffizienten  $p_1, p_2, p_3$  multipliziert auf, welche mit den  $r_h$  durch die Relationen

$$(53) \quad p_h = \sum_k a_k e_{hk} + r_h$$

verbunden sind, worin die  $a_k$  die thermischen Deformationen des Kristalls ( $a_1, a_2, a_3$  die Ausdehnungskoeffizienten parallel den Koordinatenachsen,  $a_4, a_5, a_6$  die Änderungen der Winkel zwischen letzteren für 1° Temperaturerhöhung) bedeuten. Die Konstanten  $p_h$  (die für dieselben Kristallgruppen verschwinden, bzw. sich auf eine oder zwei reduzieren, wie die  $r_h$ ) werden als die „pyroelektrischen Konstanten“

57) W. Voigt, Allg. Theorie usw. § 11 und 12; Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4, p. 26.

58) A. Kundt, Ann. Phys. Chem. 20 (1883), p. 592. Diese Methode ist sehr geeignet zur qualitativen Untersuchung der Pyroelektrizität.

59) W. C. Röntgen, Ann. Phys. Chem. 19 (1883), p. 513.

60) Das Vorhandensein wahrer Pyroelektrizität ist durch Messungen von W. Voigt am Turmalin nachgewiesen (Göttinger Nachr. 1898, Nr. 2; Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 1030), wobei sich ergab, daß 20% der ganzen beobachteten Erregung „wahre“, 80% „falsche“ Pyroelektrizität waren. Es ist übrigens bemerkenswert, daß bei allen bisher daraufhin untersuchten pyroelektrischen Kristallen das Vorzeichen der Erregung mit demjenigen übereinstimmt, welches sich gemäß dem piëzoelektrischen Verhalten aus der thermischen Deformation bestimmt (vgl. J. u. P. Curie, Paris C. R. 91 (1880), p. 294; W. C. Röntgen, Ann. Phys. Chem. 19 (1883), p. 513); daraus folgt, daß jedenfalls immer die „falsche“ Pyroelektrizität überwiegt.

schlechthin bezeichnet, weil sie die unter gewöhnlichen Umständen (nämlich bei verschwindenden Spannungen) auftretende pyroelektrische Erregung bestimmen.

Mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik läßt sich zeigen<sup>61)</sup>), daß mit ihrem Vorhandensein ein *umkehrbarer Wärmeeffekt* verknüpft ist, nämlich eine Temperaturänderung des bei ausgeschlossenem Wärmeaustausch in ein elektrisches Feld gebrachten Kristalles vom Betrage

$$(54) \quad \tau = -\frac{T}{\mathfrak{J}cs} (p_1 \mathfrak{E}_x + p_2 \mathfrak{E}_y + p_3 \mathfrak{E}_z),$$

falls  $T$  die absolute Temperatur,  $\mathfrak{J}$  das mechanische Wärmeäquivalent,  $c$  die spezifische Wärme,  $s$  die Dichte des Kristalls ist. Diesen „elektrokalorischen Effekt“ haben *Straubel*<sup>62)</sup> und *Fr. Lange*<sup>63)</sup> am Turmalin experimentell nachgewiesen und ihn nach Vorzeichen und absoluter Größe in Übereinstimmung mit vorstehendem theoretischen Resultat gefunden.

Es sei hier noch erwähnt, daß auch für *isotrope* oder zentrisch-symmetrische kristallinische Dielektrika nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik eine Wärmewirkung der elektrischen Erregung zu folgern ist<sup>64)</sup>), sofern die Dielektrizitätskonstanten sich mit der Temperatur ändern; diese Wirkung ist aber dem Quadrate der Feldstärke proportional, kehrt sich also nicht mit der Richtung des Feldes um.

**12. Molekulartheorien der Piëzo- und Pyroelektrizität.** Zur Erklärung der Pyroelektrizität des Turmalins nahm Lord *Kelvin*<sup>65)</sup> an, daß die Moleküle desselben ein mit der Temperatur veränderliches, permanentes elektrisches Moment besitzen, daß also ein solcher Kristall das elektrische Analogon zu einem permanenten Magneten sei. Diese Vorstellung hat *Riecke*<sup>66)</sup> auf alle piëzo- und pyroelektrisch erregbaren Kristalle ausgedehnt, indem er jedes Molekül von einem System positiver und negativer elektrischer Pole umgeben annimmt, welche in den (als isotrope Kugeln behandelten) Molekülen selbst elektrische Momente influenzieren. Durch die mit elastischen oder thermischen Deformationen verbundenen gegenseitigen Lagenänderungen der Moleküle ändern sich auch die influenzierten Momente,

61) Lord *Kelvin*, Math. phys. papers 1, p. 316, 1877.

62) *R. Straubel*, Göttinger Nachr. 1902, Heft 2.

63) *Fr. Lange*, Diss. Jena 1905.

64) *G. Lippmann*, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 171.

65) Lord *Kelvin*, Nichols Cyclopaedia of Phys. Sc. 1860; Math. phys. papers 1, p. 315.

66) *E. Riecke*, Göttingen Abhandl. d. Ges. d. Wiss. 38, 1892.

und diese den Deformationen proportional zu setzenden Änderungen sind es nach der Rieckeschen Theorie, welche die beobachtbaren piëzo- oder pyroelektrischen Wirkungen verursachen; denn die etwa schon im Normalzustande vorhandenen permanenten Momente selbst wären durch eine kompensierende elektrische Oberflächenbelegung des Kristalls der Wahrnehmung entzogen. Riecke hat gezeigt, daß man auf Grund dieser Hypothese zu den allgemeinen Grundgleichungen der Voigtschen Theorie gelangt, wenn man den einzelnen azentrischen Kristallgruppen je nach ihrer Symmetrie eins der folgenden fünf Polysysteme oder gewisse Kombinationen derselben zuschreibt:

I. Das *einachsige* Polysystem, aus zwei entgegengesetzt gleichen Polen bestehend (für sich allein ausreichend in den Gruppen 1, 2, 3, 5, 7 und 15).

II. Das *trigonale* Polysystem: abwechselnd entgegengesetzte Pole in den Ecken eines regulären Sechsecks, dessen Mittelpunkt mit dem des Moleküls zusammenfällt (allein ausreichend für Gruppe 17).

III. Das *dihexagonale* Polysystem: abwechselnd + und — Pole in den Ecken zweier regulärer Zwölfecke, die in zwei parallelen Ebenen liegen und um 30° gegeneinander gedreht sind.

IV. Das *ditetragonale* Polysystem, analog dem vorigen, nur mit Achtecken statt Zwölfecken gebildet.

V. Das *tetraedrische* Polysystem, vier + und vier — Pole in den Ecken eines Würfels, die gleichnamigen die Ecken je eines regulären Tetraeders bildend (in den Gruppen 4, 9, 19, 20 allein auftretend).

Da diese Polysysteme zum Teil höhere Symmetrie besitzen, als die Kristalle der betreffenden Gruppe, und da ihre Wahl überhaupt einigermaßen willkürlich erscheint, so hat Voigt die Molekulartheorie der Piëzoelektrizität in der Weise abgeändert, daß er über die Polysysteme selbst zunächst keine spezielle Annahme macht, aber ihnen *Potentiale* zuschreibt, welche die Symmetrie der Kristallgruppe besitzen<sup>67)</sup>. Spezielle solche Potentiale erhält man nach dem Bildungsgesetz<sup>68)</sup>

$$(55) \quad \psi = \kappa \frac{\partial^r \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial l_0^\alpha \partial l_1^\beta \partial l_2^\gamma \dots},$$

d. h. durch wiederholte Differentiation des Newtonschen Elementarpotentials nach bestimmten Richtungen  $l_0, l_1, \dots$  Entsprechende Polysysteme lassen sich leicht angeben; außerdem, daß sie der krystallographischen Symmetrie vollständig entsprechen, erscheint es als ein

67) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1893, p. 649.

68) Vgl. Art. Meyer-Burkhardt über Potentialtheorie II A 7 b Nr. 4, p. 470.

Vorzug, daß sie selbst kein permanentes elektrisches Moment besitzen (sofern  $\nu \geq 2$ , was immer der Fall ist). Denn durch gewisse Beobachtungen<sup>69)</sup> ist wahrscheinlich gemacht, daß ein solches selbst bei dem stark pyroelektrischen Turmalin nicht in merklicher Intensität existiert, bzw. nur von solcher Größenordnung ist, daß es bei einer von der gewöhnlichen nicht sehr verschiedenen Temperatur verschwinden würde.

*Voigt* hat (l. c. p. 669) noch eine von der vorstehenden etwas abweichende molekulartheoretische Erklärung der Pyro- und Piëzoelektrizität gegeben, welche sich der Vorstellung der Elektronentheorie von der Konstitution der Atome besser einfügt, indem sie die *ganze* elektrische Wirkung der Moleküle ihren „Polysystemen“ zuschreibt und annimmt, daß sich die einzelnen „elektrischen Pole“ (Elektronen) des selben Moleküls infolge einer Temperaturänderung oder elastischen Deformation des Kristalls *gegeneinander verschieben*, und zwar verschieden gelagerte Pole in verschiedener Weise. Auch nach dieser Vorstellung können also durch Deformationen elektrische Momente erregt werden, wenn im Normalzustande des Kristalls keine solchen vorhanden sind, und sie führt ebenfalls zu den von der allgemeinen *Voigtschen Theorie* (vgl. Nr. 8) vorausgesetzten und durch die Erfahrung bestätigten linearen Beziehungen zwischen diesen Momenten und den sie erzeugenden Deformationen oder Spannungen.

**13. Zentrische Pyro- und Piëzoelektrizität<sup>70)</sup>.** Nach der zuletzt erörterten Molekularvorstellung ist zu erwarten, daß auch *zentrisch symmetrische* Kristalle einer pyro- und piëzoelektrischen Erregung fähig sein können, da ja auch ihre Moleküle mit Polysystemen behaftet sein werden, die durch Temperaturänderung und Deformation verändert werden können. Nur müssen hier die Polysysteme, der Kristallsymmetrie entsprechend, bei jeder Temperatur selbst zentrisch symmetrisch sein und dies auch im deformierten Kristall bleiben, da ja die Deformation eines Volumelements ein zentrisch symmetrischer Vorgang ist.

Die Moleküle werden hier also niemals elektrische Momente gewöhnlicher Art besitzen, und ihre elektrische Wirkung im Außenraum wird demnach ganz anderen Gesetzen folgen, als bei polar erregten Körpern. Das Potential eines solchen Polysystems ist allgemein durch eine Reihe von Gliedern von der Form (55) mit *gerader Anzahl*  $\nu$  der Differentiationen darstellbar und reduziert sich in hinreichend großer

69) *W. Voigt*, Göttinger Nachr. 1896, Heft 3; Ann. Phys. Chem. 60 (1896), p. 368.

70) *W. Voigt*, Göttinger Nachr. 1905, p. 394.

Entfernung — also jedenfalls außerhalb des Kristalls — auf die Glieder mit  $\nu = 2$ . Diese kann man auf die Form bringen:

$$(56) \quad \psi_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ m_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_1^2} + m_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_2^2} + m_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_3^2} \right\},$$

wo  $l_1, l_2, l_3$  drei zueinander senkrechte Richtungen, und  $m_1, m_2, m_3$  Konstanten sind, welche die Natur eines Tensortripels mit den Achsenrichtungen  $l_1, l_2, l_3$  besitzen. Man kann obiges Potential deuten als dasjenige eines Polsystems aus je vier gleichstarken, paarweise entgegengesetzten Polen, die in der Reihenfolge  $+++ -$  oder  $-++-$  auf den Geraden  $l_1, l_2, l_3$  angeordnet sind; die  $m_1, m_2, m_3$ , welche Voigt als Momente 2. Ordnung bezeichnet, sind dann die Produkte aus der Ladung des einzelnen Poles und den beiden Abständen eines der äußeren Pole von den beiden mittleren (welche letzteren man übrigens auch in einen Doppelpol vereinigt denken kann). Drückt man die Differentialquotienten von  $\frac{1}{r}$  nach den  $l_h$  durch diejenigen nach den Koordinaten aus, so erhält man

$$(56') \quad 4\pi \psi_2 = m_{11} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \cdots + \cdots + 2m_{23} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \cdots + \cdots,$$

woraus ersichtlich ist, daß ein zentrisches Polsystem hinsichtlich seiner Wirkung in großer Entfernung durch *sechs* Parameter charakterisiert wird. — Das Potential eines Kristallstücks, dessen Moleküle derartige Polsysteme enthalten, ist also gegeben durch das Raumintegral

$$(57) \quad \Psi_2 = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ M_{11} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \cdots + \cdots + 2M_{23} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \cdots \right\} dS,$$

wo die  $M_{hk}$  die „Momente 2. Ordnung“ bezogen auf die Volumeinheit sind. Durch zweimalige partielle Integration kann man dasselbe umgestalten in

$$(57') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_2 = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ [\bar{M}_{11} \cos(n, x) + \bar{M}_{12} \cos(n, y) + \bar{M}_{13} \cos(n, z)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cdots + \cdots \right\} d\sigma \\ \quad - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \left( \frac{\partial \bar{M}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{13}}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \cdots + \cdots \right\} \frac{d\sigma}{r} \\ \quad + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \frac{\partial M_{13}}{\partial z} \right) + \cdots + \cdots \right\} \frac{dS}{r}. \end{array} \right.$$

Das zweite Oberflächen- und das Raumintegral stellen gewöhnliche Newtonsche Potentiale einer Oberflächenbelegung und einer räumlich verteilten Ladung dar, die aber im Falle homogener Erregung (wie sie durch gleichförmige Temperaturänderung bzw. homogene Deformation

erzeugt würde) verschwinden; das erste Oberflächenintegral hingegen bedeutet das Potential einer die Oberfläche des Kristalls bedeckenden *elektrischen Doppelschicht*, die analog ist den in der Magnetostatik betrachteten magnetischen Doppelflächen (vgl. Art. *Gans* V 15, Nr. 29), von denen sie sich aber dadurch unterscheidet, daß die Richtung ihres elektrischen Moments nicht senkrecht zur Oberfläche ist, da dessen Komponenten:

$$\frac{1}{4\pi} \{ \bar{M}_{11} \cos(n, x) + \bar{M}_{12} \cos(n, y) + \bar{M}_{13} \cos(n, z) \} \text{ usw.}$$

nicht proportional mit  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$ ,  $\cos(n, z)$  sind.

*Temperaturänderungen* werden nun eine für die Beobachtung bemerkbare Erregung der betrachteten Art hervorbringen, sobald die Momente 2. Ordnung  $M_{11}, \dots M_{12}$  Funktionen der Temperatur sind. Die Richtungen  $l_1, l_2, l_3$  sind in diesem Falle bei Kristallen von rhombischer oder höherer Symmetrie als kristallographisch ausgezeichnete Richtungen von vornherein bekannt. Wählt man dieselben als Koordinatenachsen, so wird aus (57):

$$(58) \quad \Psi_2 = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ M_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + M_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\} dS.$$

Man erkennt hieraus, daß bei regulären Kristallen, wo nach Symmetrie bei gleichförmiger Erwärmung stets  $M_1 = M_2 = M_3$  sein muß,  $\Psi_2$  im Außenraum verschwindet, so daß also bei regulären Kristallen (wie bei isotropen Körpern) eigentliche zentrische Pyroelektrizität nicht vorkommen kann. Bei allen Kristallen des rhomboedrischen, hexagonalen und tetragonalen Systems erfordert die Symmetrie, wenn man die Z-Achse in die ausgezeichnete Symmetriechse legt, die Gleichheit von  $M_1$  und  $M_2$ , und es wird bei homogener Erregung (d. h. im ganzen Kristall gleicher Temperaturänderung):

$$(59) \quad \begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{1}{4\pi} (M_3 - M_1) \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} (M_3 - M_1) \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Bei einem von lauter gleichartigen Flächen begrenzten Kristallpolyeder (z. B. einem Rhomboeder) tragen danach alle Flächen eine gleiche Doppelbelegung. Führt man in jeder Kristallfläche ein Achsenystem  $\xi, \eta$  ein, dessen  $\xi$ -Achse in deren Hauptschnitt (der Ebene  $(n, z)$ ) liegt, so ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \cos(n, z) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \cos(\xi, z),$$

und man erhält aus (59)

$$(60) \quad \Psi_2 = \frac{M_3 - M_1}{4\pi} \sum \left\{ \cos^2(n, z) \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma \right. \\ \left. + \cos(n, z) \cos(\xi, z) \iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\xi d\eta \right\},$$

wo die Summe über alle Flächen zu erstrecken ist. Der erste Teil der Summe ist das Potential einer den ganzen Kristall umgebenden, überall gleichen *gewöhnlichen* Doppelbelegung, welches im Außenraum Null ist; der zweite Teil läßt sich aber durch partielle Integration in *Randintegrale* überführen und stellt also das Potential *linearer Ladungen der Kanten* dar. Man hat hier also einen Fall, wo *linienförmig* verteilte elektrische Ladungen in der Natur vorkommen können. Ähnliches ergibt sich auch für Prismen *rhom-bischer* Kristalle, deren Prismenkanten einer Symmetriearchse parallel sind; außer linearen Ladungen dieser Kanten, die bei den zur X-, Y-, Z-Achse parallelen Prismen mit  $M_3 - M_2$ ,  $M_1 - M_3$ ,  $M_2 - M_1$  proportional (und für die vier Kanten desselben Prismas abwechselnd entgegengesetzt) sind, treten hier allerdings noch Doppelbelegungen der Endflächen auf.

*Beobachtungen* über zentrisch symmetrische pyroelektrische Erregung sind in großer Zahl beschrieben worden, doch handelt es sich dabei in den meisten Fällen um Kristalle, die nachweislich aus azentrisch erregbaren Teilen in zentrischer Gruppierung zusammengesetzt sind, wodurch das elektrische Verhalten des ganzen Kristalls scheinbar zentrisch symmetrisch wird. Eigentliche zentrische Pyroelektrizität ist jedoch durch Beobachtungen von *Voigt*, die an passend geschliffenen Präparaten angestellt wurden, für Kalkspat, Dolomit, Topas, Baryt und Cölestin wahrscheinlich gemacht<sup>70)</sup>.

Es ist danach zu erwarten, daß auch *zentrische Piözoelektrizität* existiert. Die Gesetze derselben erhält man nach Analogie derjenigen der azentrischen Piözoelektrizität, indem man die auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogenen elektrischen Momente 2. Ordnung  $M_{11}, \dots M_{12}$  linearen Funktionen der Deformations- oder Spannungskomponenten gleichsetzt, also entweder

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11} = \alpha_{11}x_x + \alpha_{12}y_y + \alpha_{13}z_z + \alpha_{14}y_z + \alpha_{15}z_x + \alpha_{16}x_y, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

oder

$$(61') \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11} = \beta_{11}X_x + \beta_{12}Y_y + \beta_{13}Z_z + \beta_{14}Y_z + \beta_{15}Z_x + \beta_{16}X_y, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Die Zahl der konstanten Parameter dieser Ansätze, welche im

allgemeinen 36 beträgt, reduziert sich wegen der Tensornatur der  $M_{hk}$  durch Einführung der Symmetrieeigenschaften in analoger Weise, wie die der Konstanten der inneren Reibung oder der in Nr. 3 eingeführten Konstanten  $\delta_{hk}$  (vgl. Anm. 13). Es folgt daraus unter anderem, daß zentrische Piëzoelektrizität auch bei regulären Kristallen und isotropen Körpern möglich sein würde. Die Anwendung des obigen Ansatzes (61') auf Prismen rhombischer Kristalle, deren Längsrichtung einer kristallographischen Symmetriearchse parallel ist, ergibt, daß durch *longitudinalen Druck* deren Längskanten abwechselnd entgegengesetzte Ladungen annehmen (analog wie bei der pyroelektrischen Erregung). Die Existenz dieser zentrischen piëzoelektrischen Erregung hat Voigt durch Versuche an Topas, Baryt und Cölestin, sowie an Kalkspat, wahrscheinlich gemacht.

**14. Pyro- und Piëzomagnetismus.** *Magnetische Erscheinungen*, welche der Pyro- und Piëzoelektrizität analog wären, sind mit Sicherheit bisher nicht nachgewiesen. Wenn sie überhaupt existieren, so sind sie zum Teil bei anderen Symmetriegruppen zu erwarten, als die analogen elektrischen Erscheinungen, weil das magnetische Feld die Natur eines *axialen* Vektors (vgl. Art. Abraham IV C 14, Nr. 3) besitzt, und sich daher bei der magnetischen Erregung den kristallographischen Symmetrieelementen ein *Zentrum der Symmetrie* superponiert. *Pyromagnetismus*, d. h. ein von der Temperatur abhängiges permanentes magnetisches Moment, könnten nach Symmetrie außer den triklinen und monoklinen Kristallen nur diejenigen rhomboëdrischen, hexagonalen und tetragonalen besitzen, bei welchen sowohl zur ausgezeichneten Symmetriearchse parallele Symmetrieebenen, als zu ihr senkrechte zweizählige Achsen fehlen (also z. B. die Kristalle der *paramorph-hemiëdrischen Gruppen*). *Piezomagnetismus* hingegen könnte bei allen Gruppen, mit Ausnahme der Holoëdrie, enantiomorphen und hemimorphen Hemiëdrie des regulären Systems, vorkommen. Es sind hinsichtlich des piëzomagnetischen Verhaltens aber nur acht verschiedene Gruppen zu unterscheiden. Die entsprechenden Konstantensysteme sind von W. Voigt aufgestellt worden<sup>71)</sup>. Durch die von demselben an verschiedenen Kristallen angestellten Versuche konnten bisher mit Sicherheit nur obere Grenzwerte für die etwa vorhandenen pyro- und piëzomagnetischen Momente nachgewiesen werden.

71) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1901, p. 1—19; Ann. Phys. 9 (1902), p. 94.





Soeben erschien:

# GLEICHGEWICHTE DER STEREOOMEREN

von

**W. MEYERHOFFER**

WEIL. PROF. DR.

MIT EINEM BEGLEITWORT VON

PROF. DR. J. H. VAN 'tHOFF

UND 28 FIGUREN IM TEXT

[IV u. 71 S.] gr. 8. 1906. geh. M. 2.40.

Dieser letzten Arbeit meines vieljährigen Mitarbeiters und Freundes möchte ich ein Wort auf den Weg mitgeben.

Einmal zeigt sie den eigentümlichen Charakterzug Meyerhoffers, aufgenommene Probleme hartnäckig zu verfolgen. Die 1892 gleichzeitig deutsch und französisch erschienene Stereochemie war seine erste größere zusammenfassende Arbeit; die jetzt, 14 Jahre später, erschienene Veröffentlichung auf demselben Gebiet sollte die letzte sein. Sie berührt dasjenige in der Stereochemie, was allgemein auch den Nichtchemiker interessiert, nämlich die Frage, ob die optische Aktivität eine Lebensäußerung ist, auf welchen Standpunkt sich bekanntlich Pasteur stellte. Die Entdeckung, daß die Trennung der entgegengesetzt aktiven

Isomeren und damit die Ausscheidung derselben eine Temperaturfrage ist und mit einer bei bestimmter Temperatur eintretenden Umwandlungerscheinung zusammenhängt, brachte die Erscheinung in anderes Licht, und die vorliegende Arbeit gibt die Gesetze, welche diese Umwandlungerscheinung beherrschen. Dieselben bringen die Ausscheidung von optisch aktiven Verbindungen in nahen Zusammenhang mit der Spaltung von Doppelsalzen.

Dann aber macht sich noch eine gewisse Neigung zum Abstrakten, welche ebenfalls charakteristisch bei Meyerhoffer war, geltend, und ich möchte dem Leser empfehlen, sich dadurch nicht abschrecken zu lassen, besonders wo sich diese Eigentümlichkeit im Anfang zeigt. Die im ersten Kapitel gegebene Definition vom Gleichgewicht kann man sich vielleicht für später aufheben. Auch die mathematischen Entwickelungen kurz nachher auf S. 6 verdecken den überaus durchsichtigen Charakter des nachfolgenden. Derselbe ist wesentlich dadurch erzielt, daß die Maximaltension sowohl der Behandlung wie der graphischen Darstellung zugrunde liegt. Pietätshalber habe ich vorgezogen, dies alles einleitend zu bemerken und keine Änderungen vorzunehmen, die vielleicht der Autor nicht gebilligt hätte.

J. H. van 't Hoff.



### Bestell-Zettel.

Bei .....

Buchhandlung in .....  
bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner  
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

**W. Meyerhoffer, Gleichgewichte der Stereo-  
meren.** Mit einem Begleitwort von J. H. VAN 'THOFF  
und 28 Figuren im Text. [IV u. 71 S.] gr. 8. 1906.  
geh. M. 2.40.

Ferner: .....

Ort und Wohnung:

Unterschrift:

# Inhaltsverzeichnis.

## Gleichgewichte der Stereomeren.

	Seite
I. Gleichgewicht und Stabilität . . . . .	1
II. Die räumliche Darstellung der Gleichgewichte anhydrischer Stereo- meren und ihre drei Projektionen . . . . .	3
1. Die Kurve der <i>pt</i> -Fläche . . . . .	3
2. Die Kurve der ( <i>d</i> + <i>l</i> ) <i>p</i> -Fläche . . . . .	7
3. Die Kurven der ( <i>d</i> + <i>l</i> ) <i>t</i> -Fläche . . . . .	8
A. Schmelzerscheinungen bei Tartraten . . . . .	9
B. Labile Schmelzerscheinungen bei Tartraten . . . . .	10
C. Schmelzpunkte der Tartrate bei Existenz eines Racemats .	11
D. Schmelzerscheinungen der Tartrate bei Existenz von Pseudoracematen . . . . .	13
E. Schmelzerscheinungen der Racemate bei Anwesenheit von Mischkristallen . . . . .	15
III. Der Zustand der Stereomeren in flüssigen Phasen . . . . .	15
1 Flüssige Stereomeren. Existieren Racemkörper in flüssigem Zustande? Siedepunkte von Stereomeren . . . . .	15
2 Lösungen von Stereomeren. Gefrierpunkte . . . . .	20
A. Methoden der Thermochemie, der Leitfähigkeit und der Volumchemie . . . . .	20
B. Gefrierpunkte . . . . .	22
IV. Löslichkeit kristallwasserfreier Stereomeren . . . . .	27
V. Umwandlungerscheinungen bei kristallwasserhaltigen Stere- meren . . . . .	38
1. Methoden zur Bestimmung der Racematbildungstemperaturen .	38
2. Räumliche und graphische Darstellung der Löslichkeitsergeb- nisse . . . . .	40
3. Liste der untersuchten Racematbildungstemperaturen . . . .	40
VI. Gleichgewichte bei mehreren asymmetrischen Kohlenstoffatomen .	46
VII. Methoden zur Spaltung von Racematen . . . . .	50
1. Spaltung ohne chemische Änderung . . . . .	50
A. Spaltung durch Temperaturänderung, wobei das Stabilitäts- gebiet des Tartratgemisches erreicht wird . . . . .	50
B. Durch Überschmelzung oder Übersättigung . . . . .	50
C. Spaltung durch Einwirkung eines aktiven Lösungsmittels .	54
2. Spaltung durch chemische Änderung . . . . .	56
A. Vertilgung der einen Tartratmodifikation durch lebende Organismen . . . . .	56
B. Spaltung durch Einführung eines zweiten asymmetrischen Atoms . . . . .	58
Anhang: Asymmetrische Synthese . . . . .	64
VIII. Diagnostik eines Inaktivums . . . . .	64
1. Schmelzpunkte . . . . .	64
2. Dichte . . . . .	66
3. Löslichkeit und Aktivität . . . . .	67
4. Thermochemische Methoden . . . . .	68
5. Brunis Methode der Kryohydrate . . . . .	69
6. Tensionen . . . . .	71

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

---

**Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré, Membre de l'Institut. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann in München. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 4.80.

Wenige Forscher sind sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik mit gleichem Erfolge tätig gewesen wie der Verfasser des vorliegenden Werkes. Niemand war daher mehr als er berufen, sich über das Wesen der mathematischen Schlüsseisen und den erkenntnistheoretischen Wert der mathematischen Physik im Zusammenhange zu äußern. Und wenn auch in diesen Gebieten die Ansichten des einzelnen zum Teil von subjektiver Beanlagung und Erfahrung abhängen, werden doch die Entwicklungen des Verfassers überall ernste und volle Beachtung finden, um so mehr, als er sich bemüht, auch einem weiteren, nicht ausschließlich mathematischen Leserkreise verständlich zu werden, und als ihm dies durch passende und glänzend durchgeführte Beispiele in hohem Maße gelingt. Die Erörterungen erstrecken sich auf die Grundlagen der Arithmetik, die Grundbegriffe der Geometrie, die Hypothesen und Definitionen der Mechanik und der ganzen theoretischen Physik in ihrer neuesten Entwicklung sowohl als in ihrer klassischen Form. Um dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegenzukommen, sind der deutschen Ausgabe durch den Herausgeber zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die teils einzelne Stellen des Werkes näher erläutern, teils durch literarische Angaben dem Leser die Mittel zu weiterem Studium der besprochenen Fragen an die Hand geben.

**Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré, Membre de l'Institut. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 3.60.

Das Werk hat ähnliche Ziele wie das oben angezeigte „Wissenschaft und Hypothese“, bietet aber ein für sich abgeschlossenes Ganze.

Der geistvolle Verfasser gibt im ersten Teil eine Darlegung seiner Anschaunungen, wie in uns die Vorstellungen von Raum und Zeit entstanden sein könnten. Der zweite Teil enthält eine Darstellung des gegenwärtigen Standes der Physik und der besonders durch die neuen Untersuchungen über Elektrizität hervorgerufenen Krisis, in der die früher für vollständig gesichert gehaltenen Prinzipien ins Wanken geraten sind, und die merkwürdigerweise auf die philosophischen Anschaunungen der Zeit zurückgewirkt haben. Auch der Laie wird sich aus dieser Darstellung eine richtige Vorstellung von dem Inhalt der Fragen, um die es sich dabei handelt, bilden können. Der dritte Teil endlich mündet wieder in den Ausgangspunkt ein und kehrt zu der durch den Titel des Werkes gestellten Frage nach dem Wert der Wissenschaft zurück, indem er das Verhältnis der Wissenschaft zur Wirklichkeit einer Untersuchung unterwirft.

Die der deutschen Ausgabe beigefügten Anmerkungen haben teils den Zweck, Einzelheiten, die dem deutschen Leser vielleicht weniger zur Hand sind, zu erläutern, teils die behandelten Fragen noch aus einem etwas anderen Gesichtspunkt zu betrachten.

**Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften.** Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin von Prof. Dr. B. Weinstein. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 9.—

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, vornehmlich die Naturwissenschaften. Zunächst wird der Inhalt der Grundlagen untersucht und aus ihm ein System der Grundlagen abgeleitet. Darauf folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, die für die Ermittlung der Grundlagen maßgebend sind. Nach Beschreibung der Art, wie bei Gewinnung von Grundlagen vorgegangen wird, folgt eine Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt, wobei insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache kommen. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen. Insbesondere werden die Begriffe der Zeitcharakter, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit behandelt, und im Anschluß an diese wird das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache dargelegt. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Weltherhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen. Trotz strenger Wissenschaftlichkeit ist das Buch gemeinverständlich geschrieben, alle philosophischen Auseinandersetzungen sind durch Beispiele erläutert, und überall, wo eingehenderes Wissen erforderlich war, ist dieses zur Mitteilung gelangt. Großer Wert ist auf beste Sprache gelegt. Das Buch ist für die weitesten Kreise bestimmt. Es soll dem Gebildeten eine tiefere Einsicht in das Wesen der Wissenschaften und in den Wert der Wissenschaften vermitteln.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN  
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XXIL HEFT

---



Soeben erschien:

# BRIEFWECHSEL ZWISCHEN C. G. J. JACOBI UND M. H. JACOBI

HERAUSGEGEBEN VON

**W. AHRENS**  
IN MAGDEBURG

MIT ZWEI BILDNISSEN

[XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh. M. 6.90, in Leinwand geb. M. 7.50

Aus dem Vorwort des Herausgebers.

Der glückliche Umstand, daß von C. G. J. Jacobi eine ausgedehnte Korrespondenz vorlag mit einem ihm durch die engsten Bande des Blutes wie des Geistes verknüpften Manne, der selbst eine hervorragende Stellung in der wissenschaftlichen Welt einnahm, schien mir nicht ungenutzt bleiben zu dürfen. Zwar sind viele der wichtigsten Stellen des vorliegenden Briefwechsels, insbesondere solche, welche die wissenschaftliche Entwicklung C. G. J. Jacobis betreffen, in dem bekannten Werk Koenigsbergers bereits veröffentlicht. Auf besonderen wissenschaftlichen Wert wird daher diese Publikation keinen Anspruch machen dürfen; man wird sie jedoch, wie ich hoffe, soweit es sich um C. G. J. Jacobi handelt, als eine nicht wertlose biographische Ergänzung zu dem Koenigsbergerschen Werk und andernteils als eine Vorarbeit für eine bisher nicht existierende, von anderer Seite jedoch geplante Biographie M. H. Jacobis ansehen. Wenn der Umstand, daß dem Briefwechsel der fachwissenschaftliche Charakter in der Hauptsache abgeht, vielleicht dazu beitragen möchte, den großen Mathematiker auch dem weiteren Publikum etwas näher

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

**Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré, Membre de l'Institut. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann in München. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 4. 80.

Wenige Forscher sind sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik mit gleichem Erfolge tätig gewesen wie der Verfasser des vorliegenden Werkes. Niemand war daher mehr als er berufen, sich über das Wesen der mathematischen Schlussweisen und den erkenntnistheoretischen Wert der mathematischen Physik im Zusammenhange zu äußern. Und wenn auch in diesen Gebieten die Ansichten des einzelnen zum Teil von subjektiver Beanlagung und Erfahrung abhängen, werden doch die Entwicklungen des Verfassers überall ernste und volle Beachtung finden, um so mehr, als er sich bemüht, auch einem weiteren, nicht ausschließlich mathematischen Leserkreise verständlich zu werden, und als ihm dies durch passende und glänzende durchgeführte Beispiele in hohem Maße gelingt. Die Erörterungen erstrecken sich auf die Grundlagen der Arithmetik, die Grundbegriffe der Geometrie, die Hypothesen und Definitionen der Mechanik und der ganzen theoretischen Physik in ihrer neuesten Entwicklung sowohl als in ihrer klassischen Form. Um dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegenzukommen, sind der deutschen Ausgabe durch den Herausgeber zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die teils einzelne Stellen des Werkes näher erläutern, teils durch literarische Angaben dem Leser die Mittel zu weiterem Studium der besprochenen Fragen an die Hand geben.

**Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré, Membre de l'Institut. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 3. 60.

Das Werk hat ähnliche Ziele wie das oben angezeigte „Wissenschaft und Hypothese“, bietet aber ein für sich abgeschlossenes Ganze.

Der geistvolle Verfasser gibt im ersten Teil eine Darlegung seiner Anschaunungen, wie in uns die Vorstellungen von Raum und Zeit entstanden sein könnten. Der zweite Teil enthält eine Darstellung des gegenwärtigen Standes der Physik und der besonders durch die neuen Untersuchungen über Elektrizität hervorgerufenen Krisis, in der die früher für vollständig gesichert gehaltenen Prinzipien ins Wanken geraten sind, und die merkwürdigerweise auf die philosophischen Anschaunungen der Zeit zurückgewirkt haben. Auch der Laie wird sich aus dieser Darstellung eine richtige Vorstellung von dem Inhalt der Fragen, um die es sich dabei handelt, bilden können. Der dritte Teil endlich mündet wieder in den Ausgangspunkt ein und kehrt zu der durch den Titel des Werkes gestellten Frage nach dem Wert der Wissenschaft zurück, indem er das Verhältnis der Wissenschaft zur Wirklichkeit einer Untersuchung unterwirft.

Die der deutschen Ausgabe beigefügten Anmerkungen haben teils den Zweck, Einzelheiten, die dem deutschen Leser vielleicht weniger zur Hand sind, zu erläutern, teils die behandelten Fragen noch aus einem etwas anderen Gesichtspunkt zu betrachten.

**Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften.** Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin von Prof. Dr. B. Weinstein. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. M. 9.—

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, vornehmlich die Naturwissenschaften. Zunächst wird der Inhalt der Grundlagen untersucht und aus ihm ein System der Grundlagen abgeleitet. Darauf folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, die für die Ermittlung der Grundlagen maßgebend sind. Nach Beschreibung der Art, wie bei Gewinnung von Grundlagen vorgegangen wird, folgt eine Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt, wobei insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache kommen. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen. Insbesondere werden die Begriffe der Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit behandelt, und im Anschluß an diese wird das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache dargelegt. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Weiterhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen. Trotz strenger Wissenschaftlichkeit ist das Buch gemeinverständlich geschrieben, alle philosophischen Auseinandersetzungen sind durch Beispiele erläutert, und überall, wo eingehenderes Wissen erforderlich war, ist dieses zur Mitteilung gelangt. Großer Wert ist auf beste Sprache gelegt. Das Buch ist für die weitesten Kreise bestimmt. Es soll dem Gebildeten eine tiefere Einsicht in das Wesen der Wissenschaften und in den Wert der Wissenschaften vermitteln.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN  
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XXII. HEFT

---



Soeben erschien:

# BRIEFWECHSEL ZWISCHEN C. G. J. JACOBI UND M. H. JACOBI

HERAUSGEgeben von

**W. AHRENS**  
IN MAGDEBURG

MIT ZWEI BILDNissen

[XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh. M. 6.90, in Leinwand geb. M. 7.50

Aus dem Vorwort des Herausgebers.

Der glückliche Umstand, daß von C. G. J. Jacobi eine ausgedehnte Korrespondenz vorlag mit einem ihm durch die engsten Bande des Blutes wie des Geistes verknüpften Manne, der selbst eine hervorragende Stellung in der wissenschaftlichen Welt einnahm, schien mir nicht ungenutzt bleiben zu dürfen. Zwar sind viele der wichtigsten Stellen des vorliegenden Briefwechsels, insbesondere solche, welche die wissenschaftliche Entwicklung C. G. J. Jacobis betreffen, in dem bekannten Werk Koenigsbergers bereits veröffentlicht. Auf besonderen wissenschaftlichen Wert wird daher diese Publikation keinen Anspruch machen dürfen; man wird sie jedoch, wie ich hoffe, soweit es sich um C. G. J. Jacobi handelt, als eine nicht wertlose biographische Ergänzung zu dem Koenigsbergerschen Werk und andernteils als eine Vorarbeit für eine bisher nicht existierende, von anderer Seite jedoch geplante Biographie M. H. Jacobis ansehen. Wenn der Umstand, daß dem Briefwechsel der fachwissenschaftliche Charakter in der Hauptsache abgeht, vielleicht dazu beitragen möchte, den großen Mathematiker auch dem weiteren Publikum etwas näher

zu bringen, so würde ich gerade dies mit Freuden begrüßen, da der in seinen Interessen, seinem Wissen und Treiben so vielseitige und überall bedeutende Mann auch außerhalb der Fachkreise weit größeres Interesse verdiente. Daß die Korrespondenz zweier Männer, die beide große Stellungen in der Wissenschaft und angesehene Positionen in zweien der größten Akademien inne hatten, wohl als ein nicht unwichtiger Beitrag zur Gelehrtengeschichte angesehen werden darf, kam für den Entschluß, den Briefwechsel zu veröffentlichen, weiter in Betracht. Das nahe verwandtschaftliche Verhältnis der beiden Briefschreiber, die ungezwungene Art, mit welcher sich beide infolgedessen aussprechen, erhöht naturgemäß den psychologischen Wert der Briefe; sie spiegeln denn auch in der Tat beider Charaktere, die in mancher Beziehung recht verschieden waren, vorzüglich wider und erhöhen durch den so entstehenden Kontrast den Reiz der Lektüre.

An dieser Stelle mag es gestattet sein, ein Wort über das Verhältnis der beiden Brüder zueinander einzuflechten. .... Hochinteressant ist es zu sehen, welches Interesse und welches Verständnis C. G. J. Jacobi den praktisch-technischen Aufgaben entgegenbringt und mit wie unerbittlicher Hartnäckigkeit und Schärfe er den Bruder gerade auf die praktisch-utilitarischen Forderungen, diese in richtigem Sinne verstanden, hinweist, er, der Mann der reinen Theorie, derselbe Mann, der den Mut hatte, in der englischen Industrie-Metropole zu allgemeinem Entsetzen den Satz aufzustellen, „es sei die Ehre der Wissenschaft, keinen Nutzen zu haben“, er, der sich schwerlich jemals mit naturwissenschaftlichen oder gar technischen Fragen näher hatte beschäftigen, hierfür insbesondere in seiner Studienzeit neben dem offiziellen Studium der Philologie und Philosophie und dem privaten der Mathematik nichts hatte übrig haben können.

Bei Veranstaltung dieser Herausgabe erfreute ich mich gütiger Unterstützung von verschiedenen Seiten. In erster Linie gebührt mein Dank Fräulein Margarethe Jacobi in Cannstatt, die . . . mich auch durch weitere Briefe, unter denen ich insbesondere zwei für die Anmerkungen verwertete Kollektionen von Briefen C. G. J. Jacobis an seine Frau, nämlich von der italienischen Reise (1843/44) und von der Marienbader Reise (1839), hervorhebe, freundlichst unterstützte. Ein reiches Material an Briefen und sonstigen Dokumenten, unter denen ich namentlich ein Tagebuch M. H. Jacobis, sowie seine Dienstliste anfühe, stellte mir dessen Enkel, Herr P. N. v. Jacobi in Petersburg, aus seinem Familienarchiv, gütigst zur Verfügung.

Die Anhänge enthalten außer dem Verzeichnis der Schriften M. H. Jacobis (Anhang IV) zunächst als Anhang I die Widmung an Friedrich Wilhelm IV. aus den Opuscula mathematica C. G. J. Jacobis. Der Wiederabdruck (Anhang II) eines auch wohl in Fachkreisen durchweg unbekannten Artikels aus den „Grenzboten“, der eine, wenn auch gewiß nicht in allen Punkten treffende, so doch nicht uninteressante Schilderung von C. G. J. Jacobi als Lehrer und Politiker gibt, dürfte wohl als zweckmäßig anerkannt werden.

Dem Briefwechsel beigegeben sind die Porträts der beiden Brüder Jacobi. Das von Moritz J. ist nach einer bereits an anderem Orte publizierten Photographie hergestellt. Dagegen ist das hier beigegebene Porträt von C. G. J. Jacobi bisher nicht veröffentlicht.

Briefe müssen natürlich so weit erläutert werden, daß dem Leser nicht, wie bei vielen derartigen Briefausgaben der Fall ist, fortwährend Rätsel aufgegeben werden. Man wird jedoch mit Recht finden, daß zahlreiche Anmerkungen keineswegs unbedingt notwendig waren: Tritt in dem Koenigsbergerschen Werk das biographische Moment mehr zurück, so mußte es in diesem Buche, sollte es eine Ergänzung zu jenem bilden, besonders stark hervortreten. Dieser Gesichtspunkt mußte vornehmlich für die Anmerkungen in Frage kommen, in denen ich daher ein umfangreiches, oft anekdotenhaftes, bald hier, bald dort am Wege aufgelesenes Material unterzubringen bemüht war.

Im gleichen Verlage erschien:

# CARL GUSTAV JACOB JACOBI

von  
**LEO KOENIGSBERGER**

## FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DER HUNDERTSTEN WIEDERKEHR  
SEINES GEBURTSTAGES

MIT EINEM BILDNIS IN HELIOGRAVÜRE  
UND DEM FAKSIMILE EINES BRIEFS

[XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand gebunden M. 16.—

„Die vorliegende Biographie Jacobis ist eine derart hervorragende Leistung, daß man wünschen möchte, Herr Koenigsberger möchte sich entschließen, auch das Leben und das geistige Schaffen des unvergleichlichen Gauß in ähnlicher Weise darzustellen.“ (Prof. Dr. G. Holzmüller.)

„Durch dieses Werk, das geradezu als ein Muster einer Lebensbeschreibung gelten kann, hat sich der Verfasser den größten Dank aller seiner Fachgenossen verdient.“

(Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung. 1905. Nr. 106.)

„Für den Fachmann ist es ein Genuß, durch den oft humorvollen Briefwechsel unter jene mathematische Tafelrunde der dreißiger Jahre versetzt zu werden, die mit Jacobi als ihrem König das mathematische Leben jener Zeit beherrschten. Nur einer steht in unnahbarer Reserve seitwärts, der deus matheseos Gauß. Die dramatisch spannende Entdeckungsgeschichte der elliptischen Funktionen hat durch zahlreiche Auszüge aus dem hochinteressanten Briefwechsel der Beteiligten eine lebendige Darstellung erhalten. Kurz, wir dürfen das Buch als eine schöne Bereicherung der biographischen Literatur begrüßen und den Freunden der Mathematik aufs beste empfehlen.“

(Mittelungen der Deutschen Gesellschaft für Medizin u. Naturwissenschaften. 1905. Nr. 14.)

# CARL GUSTAV JACOB JACOBI.

Rede zu der von dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904

von

**Leo Koenigsberger.**

Mit einem Bildnis C. G. J. Jacobis. [40 S.] 4. 1904. geh. M. 1.20.

Von W. Ahrens erschienen im gleichen Verlage:

## C. G. J. Jacobi als Politiker.

### Ein Beitrag zu seiner Biographie.

[45 S.] gr. 8. 1907. geh. M. 1.20.

Daß C. G. J. Jacobi sich in der Revolutionsära politisch betätigt hat, ist in Fachkreisen wohl allgemein bekannt. Eine eingehendere und anschauliche Schilderung dieser kurzen Lebensperiode, in welcher der berühmte Mathematiker im Vordergrunde des politischen Lebens der preußischen Hauptstadt stand, existierte bisher nicht. Der Verfasser dieser Schrift gibt eine solche, wobei er sich auf die einschlägige, insbesondere auch die Tagesliteratur stützt und daneben vielfachen Gebrauch von dem gleichzeitig erschienenen „Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi“ macht

## Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte.

[X u. 522 S.] gr. 8. 1904 In Leinwand geb. M. 8.—

„Eine recht große Zahl von Zitaten knüpft an die Namen Gauß und Jacobi an.“

(Aus dem Vorwort des Verfassers.)

„Ich kann mir nicht anders denken, als daß dieses Buch jedem Mathematiker eine wahre Freude bereiten wird. Es ist zwar keineswegs bestimmt und auch nicht geeignet, in einem Zuge durchgelesen zu werden, und doch, als ich es zum ersten Male in die Hände bekam, konnte ich mich gar nicht wieder davon losreißen, und seit ich es unter meinen Büchern stehen habe, ziehe ich es gar oft hervor, um darin zu blättern.“ (Friedr. Engel, Literarisches Zentralblatt. 1905. Nr. 5.)

„... Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen“ hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Büchermann“ bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Begibt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein. ... Gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen. Man lernt abwägen zwischen verschiedenen Richtungen und Schulen, und manches ungerechte Urteil wird durch das Buch korrigiert.“ (Prof. Dr. Holzmüller in der Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen, 16. Jahrg., p. 30 f.)

„Mit einiger Phantasie kann man dem Buche den Stoff und die Anregung für mehr als ein Drama entnehmen, dessen Handlung und Durchführung spezifisch mathematisch ist — der Schadenfreude gar nicht zu gedenken, welche es bereitet, große Geister in kleinen Dingen auch klein zu sehen, und der Genugtuung, daß die allergrößten auch in kleinen Dingen niemals kleinlich waren.“

(Monatshefte für Mathematik und Physik. 1905.)

„C'est un vrai complément de toutes les histoires des mathématiques, que personne ne regrettera d'avoir mis dans sa bibliothèque.“ (P. Mansion, Mathesis 1905, p. 266.)

„Die in der deutschen, ja in der Weltliteratur noch vorhanden gewesene Lücke wird durch das vorliegende Buch in der glücklichsten Weise ausgefüllt. ... Wir können diese Besprechung mit dem aufrichtigen Wunsche beschließen, daß das vortreffliche, auch äußerlich entsprechend ausgestattete Buch in Laienkreisen nicht minder wie in denen der Fachgelehrten sich bald der allgemeinsten Verbreitung erfreuen möge.“ (Münchner Allgemeine Zeitung. 1905. Nr. 268.)

## Mathematische Unterhaltungen und Spiele.

[X u. 428 S.] gr. 8 1901.

In Originalband mit Zeichnung von P. Bürck. M. 10.—

Auch geheftet in 2 Teilen zu je M. 5.—

„... Die äußerst schwierige Aufgabe, diese Dinge so zu behandeln, daß nicht nur der Laie mit Verständnis folgen kann, sondern daß auch das Interesse des Mathematikers von Fach gefesselt wird, hat der Verfasser in einer Weise gelöst, die der höchsten Anerkennung wert ist.“ (Friedr. Engel, Literarisches Zentralblatt, Juli 1901.)

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

# DIE TECHNISCHE MECHANIK

ELEMENTARES LEHRBUCH  
FÜR MITTLERE MASCHINENTECHNISCHE FACHSCHULEN  
UND HILFSBUCH FÜR STUDIERENDE HÖHERER  
TECHNISCHER LEHRANSTALTEN

VON

**P. STEPHAN**

REGIERUNGSBAUMEISTER  
OBERLEHRER AN DER KGL. HÖHEREN MASCHINENBAUSCHULE ZU POSEN

## I. TEIL: MECHANIK STARRER KÖRPER

MIT 255 FIGUREN IM TEXT

[VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. Mk. 7.—

## II. TEIL: FESTIGKEITSLEHRE UND MECHANIK DER FLÜSSIGEN UND GASFÖRMIGEN KÖRPER

MIT 200 FIGUREN IM TEXT

[VIII u. 332 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. Mk. 7.—



Das vorliegende Buch schließt sich größtenteils dem Lehrplan für die preußischen höheren Maschinenbauschulen an und versucht, die technische Mechanik mit Hilfe elementarer Rechnungen in möglichst knapper Form darzustellen. Um die Tragweite und die Anwendung der einzelnen Sätze zu zeigen, wurde ihnen eine große Anzahl ausführlich durchgerechneter Beispiele beigegeben, die, soweit möglich, der Praxis entnommen und häufig so gewählt wurden, daß sich daran eine weitere Diskussion anschließen kann, wie es bei einigen Beispielen auch ange deutet ist.

Diese Beispiele und einige wenige kurze Teile, die in der Fachschule bei der ersten Durcharbeitung des Ganzen über-

schlagen werden dürften, machen das Buch auch als Übungsbuch und Repetitorium für Studierende technischer Hochschulen brauchbar; es enthält etwa das Minimum dessen, was ein Student im Vorexamen wissen muß, und annähernd das Maximum dessen, was in einer höheren Maschinenbauschule mit Erfolg durchgearbeitet werden kann.

In dem zweiten Teil wird die Mechanik elastischer fester Körper in der für den Techniker besonders wichtigen Form der Festigkeitslehre, darauf die Mechanik flüssiger Körper, soweit sie für Maschinentechniker von Bedeutung ist, und schließlich die der gasförmigen entwickelt. Während die meisten elementaren Lehrbücher der Festigkeitslehre die einfachen Beanspruchungsfälle mit großer Ausführlichkeit erörtern, aber auf die überwiegend vorkommenden der zusammengesetzten Beanspruchung nur in einem, gewöhnlich recht kurzen, Anhang eingehen, werden hier gerade letztere, soweit sie mit den Hilfsmitteln der elementaren Mathematik zugänglich gemacht werden können, an Hand vieler der maschinentechnischen Praxis entnommenen Beispiele eingehend besprochen. In einigen Fällen müßten naturgemäß Näherungsrechnungen angegeben werden, die aber im Ergebnis von den genauen, nur mit Hilfe der höheren Mathematik durchzuführenden wenig abweichen. Der Abschnitt über gasförmige Körper ist ebenfalls rein mit Rücksicht auf die maschinentechnischen Anwendungen bearbeitet worden und bietet am Schluß neben den theoretischen Rechnungen über die Gasmaschine auch die Berechnungsgrundlagen der Dampfturbine in zeichnerischer Weise mit Hilfe des Boulvinschen Diagrammes.“

### Aus Urteilen über den I. Teil:

„Das Hilfsbuch wird dem Lehrplan für höhere Maschinenbauschulen durchaus gerecht. Besonders schätzenswert ist die Beigabe zahlreicher ausführlich durchgerechneter Beispiele zu den einzelnen Lehrsätzen, welche das Buch als Übungsbuch für Studierende sehr geeignet machen. Bemerkenswert ist ferner, daß Verfasser sich bemüht hat, die Bezeichnungen für die in den Formeln gebrauchten Größen aus dem Taschenbuch der „Hütte“ zu übernehmen.“ (Literaturblatt zu Glasers Annalen für Gewerbe und Bauwesen. 56. Band. Heft 1.)

„... So bestand die Aufgabe des Verfassers darin, aus dem großen sonst behandelten Stoff das auszuwählen, was für Maschinentechniker wichtig ist und elementar behandelt werden kann, und hauptsächlich die Anwendung der Lehrsätze auf maschinentechnische Beispiele zu zeigen. Diese Aufgabe hat der Verfasser in gelungener Weise gelöst. Die Lehrsätze sind in einfacher klarer Sprache vorgetragen und stets durch Zahlenbeispiele illustriert. In letzterer Hinsicht kann auch ein Studierender einer technischen Hochschule, der sich in die Anfangs-

gründe der technischen Mechanik einarbeiten und sich durch Lösen von Zahlenbeispielen üben will, manchen Nutzen ziehen. In den Zahlenbeispielen, unter denen zahlreiche dem Gebiet der Maschinenelemente und Hebezeuge entnommen sind, liegt für die Schüler der Hauptwert des Buches; mit der technischen Anwendung und der konkreten Zahl haben sie ja späterhin stets zu tun. Erfahrungskoeffizienten sind in reichlicher Menge zu finden...

... Das Buch kann den Lehrern und Schülern höherer Maschinenbauschulen und mittlerer technischer Lehranstalten warm empfohlen werden.“ (Dinglers Polytechnisches Journal. 86. Jahrgang. Heft 22.)

„... Gut eignet es sich für den Studierenden, bzw. Lehrer der Mathematik. Diese werden mit interessanten Kapiteln der angewandten Mathematik bekannt und, was mehr ist, sie werden an einer großen Anzahl gut gewählter Beispiele mit dem Stoffe vertraut. Es wird dadurch auch manches wertvolle Korn für die Lehrstunde abfallen...“

(Zeitschrift für das Realschulwesen. 31. Jahrgang. Nr. 7.)

„Jede technische Schule hat ihren Lehrer der Mechanik, und dieser ist bemüht, ein den Erfordernissen der Schule angemessenes Buch zu verfassen. Der Stoff ist daher auch allseitig erschöpft, und es erfüllt nur, bezüglich der Form und Wiedergabe denselben zu einem nützlichen und leicht verständlichen Werke zusammenzufassen. Dies ist dem Autor des vorliegenden Bandes in hohem Grade gelungen. Seine Abhandlung ist kurz, bündig, treffend; die Einteilung sowie die Figuren sind übersichtlich; die begleitenden 190 Beispiele sind sehr gut gewählt. Nebstdem enthält das Buch eine Menge von der Praxis entnommenen nützlichen Angaben. Da auch die Ausstattung sehr vollkommen ist, muß das Lehrbuch als ein sehr gediegenes bezeichnet werden.“

(Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. 1904. Nr. 41.)

„... Besonders hervorzuheben sind die 190 größtenteils der Praxis entnommenen, ausführlich durchgerechneten Beispiele, sowie das ausführliche Sachregister. Alles in allem kann das Buch zur Einführung in die technische Mechanik wohl empfohlen werden. Auch der Matematiker und Physiker wird es mit Interesse studieren, und der Lehrer kann manches darin finden, was zur Belebung des Unterrichtes mit Aufgaben aus der Praxis verwendet werden kann.“

(Dr. Robert Mayr in der Bayerischen Zeitschrift für Realschulwesen.)

„Einen besonderen Vorzug der Darstellung bildet die Klarheit und Schärfe der Disposition sowohl des Werkes im ganzen wie seiner einzelnen Abschnitte. Gleich in der Einleitung wird der Gegenstand in leicht verständlicher und scharf umrisssener Form festgelegt und gegen die Phoronie einerseits, gegen die Physik andererseits abgegrenzt. Es folgt, knapp aber anschaulich begründet, die Gliederung des Stoffes in fünf Hauptabschnitte und die Festsetzung des Einteilungsgrundes für ihre Unterabteilungen, von denen zunächst die Statik, dann nach einem einleitenden Abschnitt über die geometrische Bewegungslehre des Massenpunktes die Dynamik des letzteren bzw. starrer Systeme behandelt wird. Diese Anordnung darf man vom Standpunkte der Methode aus um so mehr billigen, als trotz der durch letztere begründeten Voranstellung der Statik vor den rein geometrischen Teil der Mechanik der systematische Aufbau des Ganzen klar erkennbar bleibt.“

Von mustergültiger Klarheit und Schärfe, wie Plan, Anlage und Gliederung des Buches selbst, sind auch die gegebenen Definitionen so-

wohl der Sachen als der Methoden und der nach denselben durchgeführten Beispiele. Sie sichern dem Buche eine weit ausgedehntere Verwendbarkeit als der eines „elementaren Lehrbuches für mittlere maschinentechnische Fachschulen und eines Hilfsbuches für Studierende höherer technischer Lehranstalten“, sie eignen es vielmehr auch zu einem vorzüglichen Hilfsmittel für den physikalischen Unterricht an höheren, namentlich realistischen Schulen. Auch dieser wird sich, wo er kann, gern der einfachen Erklärungen und Methoden des Verfassers bedienen, weil sie ihm neben dem Vorteile möglichst bequemer praktischer Verwendung noch den didaktischen Gewinn leicht fasslicher, alle überflüssigen Einzelheiten ausschaltender Darstellung bieten.

Ferner kann auch ihm die reiche, nahe am 200 Nummern umfassende Sammlung vollständig entwickelter und durchgeführter Beispiele als Muster schulgemäßer Darstellung in Ausdruck und Form und als Fundgrube aus dem Leben geprägter und darum das Interesse der Schüler packender Aufgaben empfohlen werden. Viele davon machen so wenig technische Voraussetzungen, daß sie glatt in den Primaunterricht übernommen werden können. Vor allem gilt dies natürlich von den Beispielen aus der reinen Phoronie; sie verdienen Berücksichtigung seitens der Schule namentlich auch deshalb, weil sie durch die Einführung und Benutzung graphischer Methoden und durch die grundsätzliche Durchführung des absoluten Maßsystems hervorragend geeignet erscheinen, die Hilfsmittel der neueren Technik dem weiteren Kreise der Gebildeten verständlich und zugänglich zu machen. Aber auch viele Aufgaben der eigentlichen mechanischen Abschnitte lassen sich, sei es sachlich, sei es nur methodisch, für den Unterricht auf der obersten Klasse wohl verwerten.“

Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich.

(M. Schuster im Pädagogischen Archiv. 1905. Heft 3.)

## Inhalt des I. Teiles.

### Mechanik starrer Körper.

	Seite
<b>Erste Abteilung. Grundlehren und Statik des Massenpunktes . . . . .</b>	1—18
<b>I. Abschnitt. Einleitung. 1. Gegenstand der Mechanik . . . . .</b>	1—3
<b>II. Abschnitt. Grundlehren von den Kräften. 3. Begriff und Bestimmung der Kraft. 4. Vergleichung der Kräfte . . . . .</b>	3—5
<b>III. Abschnitt. Statik des Massenpunktes. a) Kräfte, die an einem Punkt angreifen und in derselben Ebene wirken. 6. Zusammensetzung von Kräften, welche in dieselbe Wirkungslinie fallen. 7. Satz vom Parallelogramm der Kräfte. 8. Zerlegung von Kräften. 9. Gleichgewichtsbedingungen. b) Kräfte, die an einem Punkt angreifen und nach beliebigen Richtungen im Raum wirken. 10. Satz vom Parallelepiped der Kräfte. 11. Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften, die in demselben Punkt angreifen. 12. Gleichgewichtsbedingungen . . . . .</b>	5—18
<b>Zweite Abteilung. Statik starrer Körper . . . . .</b>	19—193
<b>IV. Abschnitt. Starre, frei bewegliche Körper. a) In einer Ebene wirkende Kräfte. 13. An einem Punkt an-</b>	

greifende Kräfte. 14. An verschiedenen Punkten angreifende Kräfte. 15. Sätze vom statischen Moment. 16. Rechnerische Bestimmung der Mittelkraft beliebiger, in einer Ebene wirkender Kräfte. 17. Kräftepaare. 18. Gleichgewichtsbedingungen für beliebige in einer Ebene wirkende Kräfte. b) Nach beliebigen Richtungen im Raum wirkende Kräfte. 19. In verschiedenen Ebenen liegende Kräftepaare. 20. Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Raume. 21. Zusammensetzung und Mittelpunkt paralleler Kräfte im Raume. 22. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. c) Der Schwerpunkt. 23. Schwerkraft, Gewicht, Schwerpunkt. 24. Spezifisches Gewicht, Gewichts- und Krafteinheit, Dichtigkeit. 25. Allgemeine Schwerpunktsätze. 26. Schwerpunkte von Linien: Gerade Linie, Gebrochene Linie, Dreiecksumfang, Parallelogrammumfang, Kreisbogen. 27. Schwerpunkte von Flächen: Dreiecksfläche, Parallelogramm, Paralleltrapez, Beliebiges Viereck, Beliebiges Vieleck, Kreissektor, Kreissegment, Ellipsenhälfte, Parabelfläche, Fläche der Kugelzone und Kugelkalotte, Mantel der Pyramide und des Kegels. 28. Schwerpunkte von Körpern: Dreiseitige Pyramide, Beliebige Pyramide und Kegel, Prisma und Zylinder mit parallelen Endflächen, Kugelsektor, Kugelsegment. 29. Die Guldinsche Regel. 30. Zeichnerische Ermittlung des Schwerpunktes . . . . .	19—80
<b>V. Abschnitt.</b> Statik starrer Körper von beschränkter Beweglichkeit. a) Widerstände fester Stützpunkte eines starren Körpers. 31. Auf einer Fläche festgehaltener materieller Punkt. 32. Gleichgewicht eines starren Körpers mit einem festen Stützpunkt. 33. Der Hebel. 34. Hebelwagen. 35. Starrer Körper mit zwei Stützpunkten. 36. Starrer Körper mit drei Stützpunkten. b) Unterstützung eines starren Körpers durch feste Flächen. 37. Stabilität eines auf einer Ebene ruhenden starren Körpers. 38. Die gleitende Reibung. 39. Die schiefe Ebene. 40. Bewegung in Keilnuten. 41. Der Keil. c) Um eine Achse drehbare Körper. 42. Das Rad an der Welle. 43. Die Rolle, Flaschenzüge. 44. Die Zapfenreibung. 45. Der Rollwiderstand. 46. Die Reibradser. 47. Die Schraube. 48. Das Schneckenrad. . . . .	80—168
<b>VI. Abschnitt.</b> Statik seilartiger, unelastischer Körper. 49. Die Seilreibung. 50. Die Bandbremse. 51. Riemen- und Seiltriebe. 52. Die Seilsteifigkeit und Kettenreibung. 53. Wirkungsgrad der Flaschenzüge. 54. Die Gleichgewichtslage eines freihängenden Seiles . . . . .	168—193
<b>Dritte Abteilung.</b> Statik starrer Körpersysteme . . . . .	194—218
<b>VII. Abschnitt.</b> Statik starrer Stabverbindungen. 55. Verbindung zweier Gelenkstäbe. 56. Verbindung dreier Gelenkstäbe. 57. Dreiecksfachwerke . . . . .	194—212
<b>VIII. Abschnitt.</b> Bewegliche Stabverbindungen. 58. Die Briefwage und die Roberval'sche Tafelwage. 59. Die Brückenwage. 60. Kniehebelpresse und Steinzange. . . . .	213—218
<b>Vierte Abteilung.</b> Dynamik des Massenpunktes . . . . .	219—293
<b>IX. Abschnitt.</b> Geometrische Bewegungslehre des Massenpunktes. 61. Bahn und Bewegung eines Punktes. 62. Gleichförmige Bewegung. 63. Ungleichförmige Bewegung.	

	Seite
64. Gleichförmig veränderte Bewegung. 65. Oscillationsbewegung. 66. Zusammensetzung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. 67. Normal- und Tangentialbeschleunigung . . . . .	219—246
<b>X. Abschnitt.</b> Grundlehren der Dynamik. 68. Das Beharrungsvermögen. 69. Zusammenhang zwischen Kraft, Beschleunigung und Masse. 70. Mechanische Arbeit, Leistung. 71. Das Arbeitsvermögen . . . . .	246—264
<b>XI. Abschnitt.</b> Die Bewegung des Massenpunktes. 72. Der freie Wurf. 73. Bewegung auf einer horizontalen Ebene. 74. Bewegung auf einer schiefen Ebene. 75. Bewegung auf einer vorgeschriebenen krummlinigen Bahn. 76. Bewegung im wagerechten Kreise. 77. Bewegung im lotrechten Kreise. Mathematisches Pendel . . . . .	264—293
<b>Fünfte Abteilung.</b> Dynamik starrer Körper . . . . .	294—339
<b>XII. Abschnitt.</b> Allgemeine Sätze und fortschreitende Bewegung. 78. Innere Kräfte, d'Alemberts Satz. 79. Satz von der Arbeit. 80. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes	294—300
<b>XIII. Abschnitt.</b> Drehbewegung. 81. Arbeitsvermögen eines Körpers bei der Drehung um eine feste Achse. 82. Allgemeine Sätze über Trägheitsmomente. 83. Bestimmung von Trägheitsmomenten homogener Gebilde: Gerader Stab, Rechteckige Platte, Dreieckige Platte, Kreisförmige Platte, Kugel, Gerader Kreiskegel. 84. Die Winkelbeschleunigung. 85. Das physische Pendel. 86. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung . . . . .	300—324
<b>XIV. Abschnitt.</b> Der Stoß. 87. Allgemeine Bemerkungen. 88. Der gerade, zentrische Stoß. 89. Der schiefe, zentrische Stoß. 90. Der exzentrische Stoß . . . . .	324—339
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	340

## Inhalt des II. Teiles.

**Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.**

<b>Erste Abteilung.</b> Mechanik elastischer fester Körper	1—180
<b>I. Abschnitt.</b> Die einfachen Beanspruchungsfälle.	
1. Nichtstarre Körper. 2. Elastische feste Körper. 3. Zugbeanspruchung. 4. Druckbeanspruchung. 5. Schubbeanspruchung. 6. Allgemeine Sätze über Biegungsbeanspruchung. 7. Trägheits- und Widerstandsmomente: Allgemeine Sätze, Rechteck, Dreieck, Kreis, Ellipse. 8. Der Freiträger. 9. Der auf zwei Stützen liegende Träger. 10. Träger gleicher Biegungsfestigkeit. 11. Durchbiegung des Freiträgers. 12. Durchbiegung des auf zwei Stützen liegenden Trägers. 13. Auf zwei Stützen gelagerter, eingespannter Träger. 14. Prismatischer Träger auf drei Stützen. 15. Biegung aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzter Träger. 16. Verdrehungsbeanspruchung. 17. Zerknickungsbeanspruchung . .	1—96

	Seite
<b>II. Abschnitt. Zusammengesetzte Beanspruchungen.</b>	
18. Zug oder Druck und Biegung, wenn die Formänderungen klein bleiben. 19. Zug oder Druck und Biegung bei erheblichen Formänderungen. 20. Biegung durch Kräfte, die in verschiedenen Ebenen wirken. 21. Biegung und Knickung. 22. Schubspannungen und Normalspannungen. 23. Zug- bzw. Druck- und Verdrehungsbeanspruchung. 24. Biegungs- und Verdrehungsbeanspruchung . . . . .	96—144
<b>III. Abschnitt. Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.</b> 25. Exzentrische Zug- oder Druckbeanspruchung	144—155
<b>IV. Abschnitt. Plattenförmige Körper und Gefäße.</b>	
26. Ebene kreisförmige Platte. 27. Ebene elliptische Platte. 28. Ebene quadratische Platte. 29. Ebene rechteckige Platte. 30. Ebene Zylinderböden mit Krempung. 31. Dünnewandige Gefäße unter innerem Druck. 32. Dünnewandige Gefäße unter äußerem Druck. 33. Schnell umlaufende Gefäße . . . . .	155—180
<b>Zweite Abteilung. Mechanik flüssiger Körper</b> . . . . .	181—243
<b>V. Abschnitt. Statik flüssiger Körper.</b> 34. Allgemeine Eigenschaften flüssiger Körper. 35. Gleichgewicht einer von allen Seiten fest umschlossenen Flüssigkeit. 36. Flüssigkeitsspiegel, Bodendruck. 37. Seitendruck. 38. Auftrieb. 39. Stabilität schwimmender Körper. 40. Gleichgewicht bewegter Flüssigkeiten . . . . .	181—203
<b>VI. Abschnitt. Dynamik flüssiger Körper.</b> a) Ausfluß aus Gefäßen. 41. Ideeller Ausfluß durch eine Bodenöffnung. 42. Ideeller Ausfluß aus Seitenöffnungen. 43. Entleerung von Gefäßen. 44. Wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und -Menge. 45. Rückwirkung ausflußender Flüssigkeiten. 46. Stoßdruck der Flüssigkeiten. b) Bewegung in Rohrleitungen. 47. Hydraulischer Druck. 48. Einfluß plötzlicher Querschnittsänderungen. 49. Leitungswiderstand in zylindrischen Rohren. c) Einwirkung auf feste in der Flüssigkeit befindliche Körper. 50. Druck strömender Flüssigkeiten gegen ruhende Körper. 51. Widerstand bewegter Körper in Flüssigkeiten . . . . .	203—243
<b>Dritte Abteilung. Mechanik der Gase und Dämpfe</b> . . . . .	244—283
<b>VII. Abschnitt. Gleichgewicht der Gase.</b> 52. Eigenschaften der Gase, spezifisches Volumen. 53. Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz. 54. Gasgemische. 55. Spezifische Wärme, mechanisches Wärmeäquivalent. 56. Isothermische Zustandsänderung. 57. Adiabatische Zustandsänderung. 58. Polytropische Zustandsänderung. 59. Kreisprozeß. 60. Der Carnotische Kreisprozeß. 61. Entropie; das Wärmediagramm . . . . .	244—320
<b>VIII. Abschnitt. Gleichgewicht der Dämpfe.</b> 62. Entstehung und Eigenschaft der Dämpfe. 63. Das Boulvinsche Wärmediagramm . . . . .	283—301
<b>IX. Abschnitt. Dynamik der Gase und Dämpfe.</b> 64. Ausfluß aus einer ebenen Wandöffnung. 65. Widerstandsverluste in Rohrleitungen. 66. Ausströmung aus Düsen . . . . .	301—320
<b>Anhang. Tabellen</b> . . . . .	321
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	327

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik.  
Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von  
**Dr. Heinrich Weber und Dr. Joseph Wellstein,**

Professoren an der Universität Straßburg.

In 3 Bänden.

**I. Elementare Algebra und Analysis.**

Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Figuren im Text.  
[XVIII u. 539 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. M. 9.60.

**II. Elemente der Geometrie.**

Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. M. 12.—

**III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. [U. d. Pr.]**

Das Werk verfolgt das Ziel, den künftigen Lehrer auf einen wissenschaftlichen Standpunkt zu stellen, von dem aus er imstande ist, das, was er später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu erfassen und damit den Wert dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung zu erhöhen. — Das Ziel dieser Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfanges der Elementar-Mathematik zu ersehen oder in der Einkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand, sondern in einer strengen Begründung und leicht fasslichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst, als für den Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben jenen fundamentalen Betrachtungen auch eine für den praktischen Gebrauch nützliche, wohlgeordnete Zusammenstellung der wichtigsten Algorithmen und Probleme darin finden werden.



**Bestellzettel.**

Bei der \_\_\_\_\_

Buchhandlung in \_\_\_\_\_

bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

**P. Stephan, Die technische Mechanik.** In 2 Teilen.

I. Teil. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text.  
[VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. M. 7.—

II. Teil. Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Mit 200 Figuren im Text. [VIII u. 332 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. M. 7.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:



Soeben erschien:

# VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL- RECHNUNG

von

**EMANUEL CZUBER**

O. ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU WIEN

In 2 Bänden. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage.

I. Band. Differentialrechnung. Mit 115 Figuren im Text.  
[XIV u. 560 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. M. 12.—

II. Band. Integralrechnung. Mit 87 Figuren im Text.  
[VIII u. 532 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. M. 12.—

Bei der Abfassung dieses Werkes hat sich der Verfasser als Ziel gesteckt, eine Darstellung der theoretischen Grundlagen der Infinitesimalrechnung in organischer Verbindung mit deren Anwendungen, insbesondere den geometrischen, von solchem Umfange zu geben, als es einerseits für das Studium jener angewandten Disziplinen, in denen die Mathematik den Grund zu legen hat, erforderlich ist, und als es andererseits die Vorbereitung für das Eintreten in Spezialgebiete der Analysis voraussetzt. Er hatte in erster Linie die Bedürfnisse der Technischen Hochschulen im Auge, wo eine so geartete Behandlung des Gegenstandes allein am Platze ist, glaubt aber, daß auch Studierende der Mathematik im engeren Sinne von dem Buche mit Nutzen werden Gebrauch machen können; denn die reichliche Bedachtnahme auf die Anwendung der theoretischen Sätze soll nicht bloß dazu dienen, das Interesse an dem Gegenstande, das ja hier vorausgesetzt werden muß, wach zu erhalten, sie ist vielmehr geeignet, das Verständnis der Theorie zu fördern und zu vertiefen. — Bei der Auswahl und Behandlung der Beispiele wurde der Grundsatz festgehalten, daß es sich darum handelt, die theoretischen Sätze an denselben zu mannigfacher, durchsichtiger Anwendung zu bringen, durch sie aber auch zur Vermehrung des Wissensstoffes beizutragen. Zahlreiche Textfiguren unterstützen den Vortrag.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage hat die Gesamtanlage des Werkes eine Änderung nicht erfahren, da mir weder die Urteile der Kritik noch die eigenen seither gemachten Erfahrungen eine solche als notwendig erscheinen ließen. Hingegen ist alle Sorgfalt darauf verwendet worden, den Inhalt abzurunden und den Zwecken, für welche das Buch bestimmt ist, vollkommener anzupassen; wo es angezeigt schien, die Darstellung präziser zu gestalten und die Ergebnisse schärfer zu formulieren. Von größeren Erweiterungen des Inhalts seien erwähnt im I. Bande die hyperbolischen Funktionen, der Begriff der Funktion einer komplexen Variablen; im II. Bande die Eulerschen Integrale, die Fourierschen Reihen, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen, die Sätze von Green. Die Einfügung historischer und literarischer Notizen wird manchem willkommen sein; auch die ziemlich zahlreichen, an passenden Stellen vorgelegten Probleme dürften zur Verwendbarkeit des Buches beitragen. So hoffe ich, die Absichten, welche mir bei der Anlage des Werkes vorschwebten, der Verwirklichung näher gebracht zu haben.

Wien.

**E. Czuber.**

## Urteile.

„Auf dieses Werk, welches zu den besten seiner Art zu zählen ist, möchte ich die Aufmerksamkeit der Leser ganz besonders hinlenken. Obgleich das Werk in erster Linie für die Studierenden an technischen Hochschulen bestimmt ist, kann es doch auch den Mathematik-Studierenden der Universitäten warm empfohlen werden, da es den Anfänger in vor trefflicher Weise in die Infinitesimalrechnung einzuführen geeignet ist. Nicht minder aber sei das Werk Denen empfohlen, welche seit einer längeren Reihe von Jahren sich nicht mit der Infinitesimalrechnung beschäftigt haben und nun sofort eine modernen Anforderungen in bezug auf Strenge genügende Darstellung derselben kennen lernen wollen. Überall tritt in dem Werke das Bestreben des Herrn Verfassers zu Tage, den strengeren Untersuchungen, durch welche in den letzten Jahrzehnten die Analysis bereichert worden ist, Rechnung zu tragen und sich auf den Boden der modernen Forschung zu stellen, soweit dies in einem für Anfänger bestimmten Buche tunlich und durchführbar ist. Infolgedessen

findet man überall ein tieferes Eindringen in solche theoretische Be trachtungen, mit denen jetzt auch der Anfänger möglichst schnell vertraut werden muß. Um in dieser Beziehung nur einige Punkte hervorzuheben, nenne ich die Einführung der Irrationalzahlen nach Dedekind-Cantor, die Sätze über stetige und unstetige Funktionen, über den vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten, dann besonders den Abschnitt über Reihen mit variablen Gliedern, die exakte Darstellung der Theorie der Extremwerte für Funktionen von mehreren Veränderlichen, und anderes mehr. Dabei sei aber betont, daß anderseits jedes Übermaß fast durchweg glücklich vermieden ist und solche subtile Untersuchungen, für welche der Anfänger noch kein Interesse und Verständnis haben kann und welche erst dem bereits mit der Infinitesimalrechnung Vertrauteren von Nutzen und Wert sein können, nicht in das Werk aufgenommen sind. Ferner ist, was für den Anfänger nicht weniger wertvoll ist, auf die geometrische Interpretation der Formeln und Sätze ein Hauptgewicht gelegt und den Anwendungen, welche fast durchweg der Geometrie entnommen sind, ein breiter Raum gewährt. Ebenso ist die Auswahl der Beispiele, bei welchen gleichartige möglichst vermieden sind, eine recht geschickte, da jedes neue Beispiel den Leser in seinem Wissen fördert . . .“ (Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 1900. Heft 1.)

„Was ferner beide Bände vorteilhaft vor anderen ähnlichen Büchern auszeichnet, das ist die vorzügliche Auswahl und die klare Behandlung der zahlreichen, zum Teile völlig neuen Beispiele, welche namentlich die geometrischen Anwendungen der Methoden erläutern; und nach dieser Richtung kann nach Ansicht des Referenten gerade den Technikern niemals zu viel geboten werden. Für sie ist auch namentlich das Kapitel über Massenanziehung und Potential im 4. Abschluß des II. Bandes von besonderem Werte, sowie die Anwendungen der Differentialgleichungen, deren Theorie man in gedrängtem Rahmen wohl kaum irgendwo besser dargestellt finden dürfte.“ (A. v. Braumnühl in den Blättern für das bayrische Gymnasialschulwesen.)

„. . . Die Klarheit und Präzision der Darstellung, die strengwissenschaftliche Behandlung der einzelnen Partien, die stete Rücksichtnahme auf die Anwendungen, namentlich auf die Geometrie, welche wir gelegentlich der Besprechung des ersten Bandes mit Anerkennung hervorheben mußten, zeichnet auch diesen Band aus. Es ist das vorliegende Buch nicht nur im Sinne des Technikers, sondern auch des Fachmannes, der Mathematik um ihrer selbst willen betreibt, verfaßt; der ausgezeichnete Autor hat in allen Teilen seiner Entwicklungen gestrebt, jeder Theorie mehrere Seiten abzugeben, so z. B. hat er in der Lehre von den Differentialgleichungen die geometrische Bedeutung derselben stets im Auge gehabt . . .“

„So scheiden wir von einem Werke, das uns schöne Stunden geistigen Genusses bereitet hat, und dies nicht nur wegen des reichen und gut gewählten Inhaltes, sondern wegen der überall lichtvollen Darstellung, die dem Buche sein besonderes Gepräge verleiht. Der Verfasser zeigt sich gerade darin als ausgezeichneter akademischer Lehrer, der auch mancher spröden Materie Leben zu geben vermag. Das Buch ist für die Hochschule geschrieben; es soll den in die Tiefen der Mathematik Eindringenden, dem Techniker auch ein verlässlicher Ratgeber bei späteren Detailforschungen sein, die es anbahnt. Daß es dem Autor gelungen ist, sein Buch in jeder Beziehung nützlich zu gestalten, wird ihm wohl jeder zugeben, der sich mit demselben beschäftigt hat. Möge der Verbreitungskreis der Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von Prof. Czuber ein recht großer sein.“

(Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. 1899. Heft 12.)

## Inhaltsverzeichnis.

### I. Teil. Differential-Rechnung.

#### Erster Abschnitt.

##### Variable und Funktionen.

§ 1. Entwicklung des Zahlbegriffs . . . . .	S. 1—11
§ 2. Variable . . . . .	S. 13—15
§ 3. Funktionen . . . . .	S. 15—39

#### Zweiter Abschnitt.

##### Differentiation von Funktionen einer Variablen.

§ 1. Der Differentialquotient und das Differential . . . . .	S. 42—49
§ 2. Allgemeine Sätze über Differentiation . . . . .	S. 52—57
§ 3. Differentialquotienten der elementaren Funktionen . . . . .	S. 58—74
§ 4. Allgemeine Sätze über den Zusammenhang einer Funktion mit ihrem Differentialquotienten . . . . .	S. 78—84
§ 5. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale . . . . .	S. 85—90
§ 6. Transformation der unabhängigen Variablen . . . . .	S. 94—97

#### Dritter Abschnitt.

##### Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen.

§ 1. Partielle Differentialquotienten und Differentiale. Das totale Differential . . . . .	S. 100—110
§ 2. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale . . . . .	S. 112—118
§ 3. Differentiation zusammengesetzter und impliziter Funktionen . . . . .	S. 122—139
§ 4. Transformation der Variablen . . . . .	S. 140—154

#### Vierter Abschnitt.

##### Reihen.

§ 1. Reihen mit konstanten Gliedern . . . . .	S. 159—191
§ 2. Reihen mit variablen Gliedern . . . . .	S. 194—214
§ 3. Die Formeln und Reihen von Taylor und Maclaurin . . . . .	S. 215—241
§ 4. Die elementaren Funktionen einer komplexen Variablen . . . . .	S. 244—259
§ 5. Die unbestimmten Formen . . . . .	S. 261—277

#### Fünfter Abschnitt.

##### Maxima und Minima der Funktionen.

§ 1. Maxima und Minima der Funktionen einer Variablen . . . . .	S. 280—299
§ 2. Maxima und Minima der Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen . . . . .	S. 302—316
§ 3. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer abhängigen Variablen . . . . .	S. 317—321

## Sechster Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die  
Untersuchung von Kurven und Flächen.

## A. Ebene Kurven.

§ 1. Die Tangente und die Normale . . . . .	S. 330—357
§ 2. Asymptoten . . . . .	S. 359—372
§ 3. Gestaltung einer Kurve in der Umgebung eines Punktes . . . . .	S. 375—381
§ 4. Verhalten zweier Kurven in der Umgebung eines gemeinsamen Punktes . . . . .	S. 384—391
§ 5. Länge eines Kurvenbogens. Bogendifferential . . . . .	S. 394—397
§ 6. Krümmung ebener Kurven . . . . .	S. 399—417
§ 7. Die singulären Punkte ebener Kurven . . . . .	S. 419—431
§ 8. Einhüllende Kurven . . . . .	S. 433—439

## B. Raumkurven und krumme Flächen.

§ 1. Tangente und Normalebene einer Raumkurve. Die erste Krümmung oder Flexion . . . . .	S. 446—455
§ 2. Oskulationsebenen einer Raumkurve. Die zweite Krümmung oder Torsion . . . . .	S. 458—474
§ 3. Tangenten und Tangentialebenen, Normalen und Normalebenen einer krummen Fläche . . . . .	S. 476—486
§ 4. Einhüllende Flächen . . . . .	S. 490—503
§ 5. Die Polarfläche einer Raumkurve . . . . .	S. 507—516
§ 6. Krümmung von Kurven auf krummen Flächen . . . . .	S. 520—535
§ 7. Spezielle Kurven auf krummen Flächen . . . . .	S. 539—559

## II. Teil. Integral-Rechnung.

## Erster Abschnitt.

## Grundlagen der Integral-Rechnung.

§ 1. Das bestimmte und das unbestimmte Integral . . . . .	S. 1—22
§ 2. Grundformeln und -Methoden der Integral-Rechnung . . . . .	S. 24—35

## Zweiter Abschnitt.

## Unbestimmte Integrale.

§ 1. Integration rationaler Funktionen . . . . .	S. 39—53
§ 2. Integration irrationaler Funktionen . . . . .	S. 57—81
§ 3. Integration transzenter Funktionen . . . . .	S. 83—104

## Dritter Abschnitt.

## Einfache und mehrfache bestimmte Integrale.

§ 1. Wertbestimmung und Schätzung bestimmter Integrale . . . . .	S. 106—121
§ 2. Erweiterung des Integralbegriffs . . . . .	S. 122—138
§ 3. Integration unendlicher Reihen . . . . .	S. 144—149
§ 4. Differentiation durch Integrale definierter Funktionen . . . . .	S. 157—164
§ 5. Integration durch Integrale definierter Funktionen. Das Doppelintegral . . . . .	S. 170—191
§ 6. Drei- und mehrfache Integrale . . . . .	S. 195—202
§ 7. Analytische Anwendungen . . . . .	S. 204—220

## Vierter Abschnitt.

## Anwendungen der Integral-Rechnung.

§ 1. Quadratur ebener Kurven . . . . .	S. 224—249
§ 2. Rektifikation von Kurven . . . . .	S. 250—254
§ 3. Kubatur krummflächig begrenzter Körper . . . . .	S. 260—276
§ 4. Quadratur kurummer Flächen . . . . .	S. 277—293
§ 5. Massen-, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen . . . . .	S. 294—301
§ 6. Die Sätze von Green . . . . .	S. 308—312
§ 7. Das Potential . . . . .	S. 315—335

## Fünfter Abschnitt.

## Differentialgleichungen.

## A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung. Allgemeines . . . . .	S. 338—343
§ 2. Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	S. 347—380
§ 3. Singuläre Lösungen . . . . .	S. 384—388
§ 4. Geometrische Anwendungen . . . . .	S. 392—401
§ 5. Simultane Differentialgleichungen . . . . .	S. 402—405
§ 6. Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	S. 407—414
§ 7. Lineare Differentialgleichungen . . . . .	S. 419—438
§ 8. Integration durch Reihen . . . . .	S. 439—441
§ 9. Variationsrechnung . . . . .	S. 447—466

## B. Partielle Differentialgleichungen.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	S. 468—495
§ 2. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	S. 497—531

Bestell-Zettel.

Bei.....

Buchhandlung in.....

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner  
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

**E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integral-**  
rechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage.  
I. Band. Differentialrechnung. geb. M. 12.—  
II. Band. Integralrechnung. geb. M. 12.—

Ferner:.....

Ort und Wohnung:

Unterschrift:

Von Emanuel Czuber erschien ferner im gleichen Verlage:  
**Geometrische Wahrscheinlichkeiten u. Mittelwerte.**

Mit 115 Textfiguren. [VII u. 244 S.] gr. 8. 1884. geh. n. Mk. 6.80.

Das vorliegende Buch ist der erste Versuch einer systematischen Darstellung der geometrischen Wahrscheinlichkeiten und der damit eng zusammenhängenden geometrischen Mittelwerte. Der erste Teil, „Geometrische Wahrscheinlichkeiten“, zerfällt in drei Abschnitte, welche der Reihe nach willkürlich angenommene Punkte (in Linien, in Flächen, im Raume), willkürlich gezogene Geraden (in der Ebene, im Raume) und willkürlich gelegte Ebenen zum Gegenstande haben. Im zweiten Teile, „Geometrische Mittelwerte“ betitelt, ist von einer weiteren Gliederung des Stoffes Umgang genommen worden; die Probleme sind hier nach den zu ihrer Lösung verwendeten Methoden geordnet.

### **Theorie der Beobachtungsfehler.**

Mit 7 Textfiguren. [XIV u. 418 S.] gr. 8. 1891. geh. n. Mk. 8.—

Eine zusammenfassende Darstellung der wissenschaftlichen Grundlagen der Fehlertheorie und der auf sie gegründeten Ausgleichsrechnung, wie sie dieses Buch zu geben versucht, soll einem doppelten Zwecke dienen: den Mathematiker in dieses durch Metaphysik und Analyse gleich interessante Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung einführen und demjenigen, den praktische Probleme mit der Ausgleichsrechnung, diesem unerlässlich gewordenen Bindeglied zwischen Beobachtungen einerseits und den aus ihnen gefolgerten Resultaten andererseits, zusammenführen, ein möglichst umfassendes Bild ihrer Entwicklung nach der theoretischen Seite bieten. Die technische Ausführung der Rechnungen bei Lösung spezieller Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Anwendung fällt hiernach nicht in den Rahmen des Buches.

### **Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.**

A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VII, 2.  
[VIII u. 279 S.] gr. 8. 1899. geh. n. Mk. 8.—

Die Schrift stellt sich die Aufgabe, den Entwicklungsgang der Wahrscheinlichkeitstheorie bis zu ihrem heutigen Stande in knappen Zügen zu zeichnen und auf die Anwendungsgebiete so weit einzugehen, als es sich dabei um theoretische Fragen handelt. Der philosophischen Seite des Gegenstandes wird mehr Aufmerksamkeit zugewendet, als dies sonst in mathematischen Schriften zu geschehen pflegt. Es erwies sich als zweckmäßig, nicht den historischen Gang, sondern die sachliche Gliederung zur Grundlage der Anordnung zu wählen. So werden denn der Reihe nach die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie; ihre Anwendung auf die Ergebnisse wiederholter Versuche; die Wahrscheinlichkeit der Ursachen beobachteter Ereignisse und das Schließen auf zukünftige Ereignisse; die Beurteilung vom Zufall abhängiger Vor- und Nachteile; die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Zeugenaussagen und Entscheidungen von Gerichtshöfen, auf die Resultate von Messungen, endlich auf die Statistik behandelt.

Von Emanuel Czuber erschien ferner im gleichen Verlage:

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.

I. Hälfte. [304 S.] gr. 8. 1902. geh. n. M. 12.—

II. Hälfte. [XV u. 290 S.] gr. 8. 1903. geh. n. M. 12.—

Beide Teile zusammengeb. n. M. 24.—

Der Verfasser bietet in dem vorliegenden Buche eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer hauptsächlichsten Anwendungsbiete: Fehlerausgleichung, mathematische Statistik und Lebensversicherungsrechnung.

In dem grundlegenden ersten Teil wird auf die fundamentalen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen; eine große Auswahl von Problemen, darunter selbstverständlich die klassischen, ist dazu bestimmt, in den Geist der Wahrscheinlichkeitssätze und ihren richtigen Gebrauch einzuführen.

Der zweite Teil begründet die Fehlertheorie und die aus ihr entstehende Methode der kleinsten Quadrate; Beispiele aus verschiedenen Wissenschaftszweigen geben eine zureichende Vorstellung von der Verwendung dieses wichtigen Instruments zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen.

Im dritten Teil werden die modernen Hilfsmittel der wissenschaftlichen Beurteilung und Ausnutzung von Erfahrungstatsachen auf statistischem Gebiete erörtert; die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung stehen im Vordergrunde der Betrachtung.

Der vierte Teil erklärt das Wesen und behandelt alle belangreichen Probleme der Lebensversicherungsrechnung; um auch einen Einblick in die Auswertung der hier maßgebenden Formeln und die auftretenden Zahlwerte zu gewähren, sind Tabellen und Rechnungsbeispiele in größerer Zahl eingefügt.

---

„Gegenüber den bisher veröffentlichten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehe ich einen wesentlichen Fortschritt in der gegenwärtigen Darstellung darin, daß auf einem verhältnismäßig beschränkten Raume die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung und die modernen Anwendungen gleichzeitig dargestellt werden.“

Als einen Fortschritt in der Disposition betrachte ich es ferner, daß die auf eine endliche Anzahl von Möglichkeiten sich beziehenden Wahrscheinlichkeiten und die sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten in einem und demselben Abschnitte, nämlich in I „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ dargestellt sind.“

(Zeitschrift für Mathematik und Physik. 51. Band. Nr. 3.)

„Eine so eingehende, klare und selbst für einen in der Mathematik nicht gerade besonders Beslagenen durchweg leicht verständliche Bearbeitung, wie sie der bekannte Wiener Mathematiker ihr hier hat zu teil werden lassen, hat u. W. die Wahrscheinlichkeitsrechnung bisher noch nicht erfahren. Jedenfalls hat der Verfasser ein Standardwerk geschaffen, das in keiner Bibliothek, vor allem auch in keiner Versicherungsbibliothek fehlen darf und wird.“

(Annalen des gesamten Versicherungswesens. 34. Jahrgang. Nr. 7.)



Soeben erschien:

# VORLESUNGEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER GERADEN LINIE, DES PUNKTES UND DES KREISES IN DER EBENE

von  
**OTTO HESSE.**

VIERTE AUFLAGE

REVIDIERT UND ERGÄNZT VON

**S. GUNDELFINGER.**

[VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. 6 Mark.

Das vorliegende klassische Lehrbuch dient dem Studium der Geometrie, sowohl auf der Schule als auf der Universität.

Die behandelten Gegenstände, sowie die notwendigen Voraussetzungen sind der Sphäre des Schulunterrichts entnommen. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die siebente Vorlesung. Sie durfte indes nicht wegbleiben, weil sie ein sprechendes Zeugnis ablegt für den innigen Zusammenhang der Geometrie mit der Algebra.

Die Vorlesungen sind wesentlich akademische. Darum beschränken sie sich nicht auf die in der Schule gezogenen Grenzen, sondern geben in erweitertem Rahmen ein Bild der Wissenschaft in ihrer jetzigen Form.

Ihre Aufgabe ist gefällig anzuregen und zu weiteren Entdeckungen zu ermuntern. Dabei können sie aber doch dem Zuhörer oder Leser die Mühe der Arbeit und des Nachdenkens nicht ersparen, ohne die man weder in der Wissenschaft noch in dem Leben Gewinn und Befriedigung hat.

In der vorliegenden vierten Auflage hat der Herausgeber zahlreiche Änderungen und Zusätze im Texte gemacht und einige Ergänzungen am Schluß des Buches für sich beigefügt.

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Vorlesung: Einleitung. S. 1.

Das Wesen der analytischen Geometrie. — Das Koordinatensystem. — Ausdruck der Entfernung zweier Punkte voneinander. — Der Flächeninhalt eines Dreiecks. — Ausdruck des Winkels, den zwei gerade Linien bilden.

## II. Vorlesung: Die gerade Linie. S. 15.

Die Gleichung der geraden Linie in der allgemeinen und in der Normalform. — Der senkrechte Abstand eines Punktes von einer geraden Linie. — Die geraden Linien, welche die Winkel halbieren, die zwei gerade Linien bilden. — Sätze über Dreiecke.

## III. Vorlesung: Harmonische Linien. Linien der Involution. S. 29.

Das anharmonische und das harmonische Verhältnis von zwei Linienpaaren. — Die Involution von drei Linienpaaren. — Allgemeinere Sätze über Dreiecke. — Konstruktion von harmonischen Linienpaaren und Linienpaaren der Involution.

## IV. Vorlesung: Der Punkt. S. 48.

Definition der Linienkoordinaten und der Gleichung eines Punktes. — Die Gleichung des Punktes in der allgemeinen und in der Normalform. — Der Punkt, welcher eine begrenzte gerade Linie halbiert oder auf ihrer Verlängerung im Unendlichen liegt.

## V. Vorlesung: Harmonische Punkte. Punkte der Involution. S. 57.

Das anharmonische und das harmonische Verhältnis von zwei Punktepaaren auf einer geraden Linie. — Die Involution von drei Punktepaaren. — Allgemeinere Sätze über Dreiecke. — Konstruktion von harmonischen Punktepaaren und Punktepaaren der Involution.

## VI. Vorlesung: Zur Involution. S. 72.

Die Bedingungsgleichung der Involution in sieben verschiedenen Formen. — Sätze über Punktepaare auf einer geraden Linie.

## VII. Vorlesung: Die Auflösung biquadratischer Gleichungen. S. 83.

Unter Voraussetzung des Satzes, daß die ganzen symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung sich rational durch die Koeffizienten in der Gleichung darstellen lassen, gibt diese Vorlesung eine geometrische Anschauung von der Auflösung biquadratischer Gleichungen.

## VIII. Vorlesung: Linienpaare und Punktepaare. S. 95.

Die entwickelte Gleichung eines Linienpaars und eines Punktepaars. — Notwendige Bedingungen dazu. — Ausdruck für den Winkel, den ein Linienpaar einschließt. — Ausdrücke für harmonische Linienpaare und Linienpaare der Involution. — Länge der von einem Punktepaare begrenzten geraden Linie. — Ausdrücke für harmonische Punktepaare und Punktepaare der Involution.

## IX. Vorlesung: Transformation der Koordinaten und die orthogonalen Substitutionen. S. 106.

Lineare Koordinaten-Transformation. — Transformation rechtwinkliger Koordinatensysteme. — Orthogonale Substitutionen. — Elliptische Koordinaten-Transformation.

X. Vorlesung: Orthogonale Substitutionen, welche eine gegebene homogene Funktion der zweiten Ordnung zweier Variablen auf die Quadrate zweier anderen Variablen zurückführen. S. 126.

XI. Vorlesung: Homogene Koordinaten. Dreieckkoordinaten. S. 140.

Homogene Koordinaten. — Dreieckkoordinaten. — Linienpaare, welche von drei Punkten in einer geraden Linie ausgehen. — Punktepaare auf drei von einem und demselben Punkte ausgehenden geraden Linien.

XII. Vorlesung: Das Pascalsche und das Brianchonsche Sechseck. S. 157.

Die 60 Pascalschen Sechsecke mit denselben 6 Ecken und die 60 Brianchonschen Sechsecke, welche dieselben 6 geraden Linien als Seiten haben.

XIII. Vorlesung: Der Kreis. S. 183.

Normalform und allgemeine Form der Gleichung des Kreises. — Die Schnittpunkte einer geraden Linie und eines Kreises. — Harmonische Pole eines Kreises. Pol und Polare. Die Gleichung der letzteren. — Konstruktion der Polare. — Die Gleichung des Tangentenpaars von einem Punkte an den Kreis. — Die Kreisgleichung in Linienkoordinaten. — Harmonische Polaren des Kreises. — Die Gleichung des Poles. — Die Gleichung des Punktepaars, in welchem eine gerade Linie einen Kreis schneidet.

XIV. Vorlesung: Das System von Kreisen, welche durch die Schnittpunkte zweier Kreise gehen. S. 194.

Die Gleichung des Systems von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden. — Die gemeinschaftliche Sekante des Systems von Kreisen. — Grenzpunkte des Systems der Kreise. — Ein zweites System von Kreisen schneidet das gegebene System senkrecht. — Elegantere Form der Gleichung der Polare. — Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise. — Die Gleichung des Tangentenpaars an zwei Kreisen. — Analytischer Ausdruck für das System von Kreisen, welche das gegebene System senkrecht schneiden.

XV. Vorlesung: Das System von Kreisen, welche von einem Kreise senkrecht geschnitten werden. Das Problem der Berührung eines Kreises an drei gegebenen Kreisen. S. 214.

Das System von Kreisen, deren Gleichungen aus den Gleichungen von drei gegebenen Kreisen linear zusammengesetzt sind. — Das Zentrum der gemeinschaftlichen Sekanten von drei Kreisen. — Ein Kreis schneidet das System senkrecht. — Die vier Ähnlichkeitsachsen von drei Kreisen. — Das Problem der Berührung eines Kreises an drei gegebenen Kreisen.

### Zusätze des Herausgebers.

[1]	S. 8—9. Beweis der Zeichenregel für den Inhalt eines Dreiecks	230
[2]	S. 28. Gl. 4). Über das „Abstandsverhältnis“ einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt zweier anderen Geraden geht . . . . .	231
[3]	S. 32 Z. 3. Geometrische Bedingung, unter welcher das Geradenpaar, welches zu zwei Paaren von Geraden gleichzeitig harmonisch liegt, reell oder imaginär ist . . . . .	231
[4]	S. 44 Z. 3. Lineare Relation zwischen vier linearen Ausdrücken in Determinantenform . . . . .	232

[5]	S. 76. Fußnote. Über die Ableitung der sieben Bedingungsgleichungen der Involution durch die Theorie der Determinanten . . . . .	232
[5a]	Zum Schluß der 6. Vorlesung. Über die analytische Bedingung, unter welcher das Punktepaar, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren harmonisch liegt, reell oder imaginär wird. Anwendung auf die zwei Doppelpunktepaare zweier gegebenen Involutionen . . . . .	234
[6]	S. 98. Nähtere Behandlung eines Geradenpaars mit unendlich ferner Spurze . . . . .	237
[7]	Über eine Anwendung der Sätze 21) und 31) in Vorlesung 8) . . . . .	238
[8]	S. 129. Einfachere Darstellung der Formeln für bestimmte orthogonale Substitutionen . . . . .	238
[9]	S. 136. Darstellung der reziproken Funktion von $2(a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2) - (x^2 + y^2)$ in Determinantenform . . . . .	239
[10]	Beweis der Gleichungssysteme 21) und 22) auf S. 173. Schlußbemerkung zur 12. Vorlesung . . . . .	239
[11]	S. 190. Ein unendlich fernes Punktepaar kann als ein Kreis mit zwei Zentren aufgefaßt werden . . . . .	241
[12]	S. 197. In einem Kreisbüschel gibt es im allgemeinen drei ausartende Geradenpaare. Cosinus des Winkels zweier Kreise . . . . .	241
[12a]	S. 203. Konstruktion des Punktepaars (Strahlenpaars), welches zu zwei gegebenen Punktepaaren (Strahlenpaaren) harmonisch liegt . . . . .	243
[13]	S. 216 Z. 19. Beweis des S. 216 Z. 19 gegebenen Satzes . . . . .	245
[14]	S. 219. Glchg. 9). Bemerkung über orthogonale Kreise, die gleichzeitig konzentrisch sind . . . . .	245
[15]	Zu S. 224—229. Über das Taktionsproblem des Apollonius . . . . .	245



### BESTELL-ZETTEL.

Bei ..... Buchhandlung

in ..... bestellt der Unterzeichnete hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

**O. Hesse**, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage von **S. Gundelfinger**. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. 6 Mark.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:



I. Teil.

Vorwort zu Band V von A. Sommerfeld in München.  
Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 1.

A. Einleitung.

- \*1. Maß und Messen: C. Runge in Göttingen.
- \*2. Gravitation: J. Zenneck in Braunschweig.

B. Thermodynamik.

- \*3. Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik: G. H. Bryan in Bangor, Wales.
- \*4. Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung: E. W. Hobson - Cambridge u. H. Dießelhorst - Berlin.
- \*5. Technische Wärmetheorie: M. Schröter in München und L. Prandtl in Göttingen.

C. Molekularphysik.

- \*6. Chemische Atomistik: F. W. Hinrichsen in Aachen und L. Mamlock in Dresden nebst zwei Beiträgen von E. Study in Bonn.
- \*7. Kristallographie: Th. Liebisch in Göttingen, A. Schoenflies in Königsberg i. Pr. und O. Mügge in Königsberg i. Pr.
- \*8. Kinetische Theorie der Materie: L. Boltzmann (†) und J. Nabl in Wien.
- \*9. Kapillarität: H. Minkowski in Göttingen.
- 10. Die Zustandsgleichung mit besonderer Berücksichtigung graphischer Methoden: H. Kamerlingh-Onnes in Leiden.
- 11. Physikalische und Elektrochemie: J. H. van't Hoff in Berlin.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 2.

D. Elektrizität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektrizitätslehre.

- \*12. Standpunkt d. Fernwirkung, die Elementargesetze: R. Reff in Stuttgart und A. Sommerfeld in München.
- \*13. Maxwellselektromagnetische Theorie: H. A. Lorentz in Leiden.

- \*14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie: H. A. Lorentz in Leiden.

Mathematische Spezialausführungen  
zur Elektrizitätslehre.

- \*15. Elektrostatis und Magnetostatis: R. Gans in Tübingen.
- \*16. Beziehungen zwischen elektrostatischer und magnetischer Zustandsänderungen einerseits und elastischen und thermischen andererseits: F. Pockels in Heidelberg.
- 17. Stationäre und langsam veränderliche Felder: P. Debye in München und H. Dubois in Berlin.
- 18. Rasch veränderliche Felder: M. Abraham in Göttingen.
- 19. Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus: H. Dießelhorst in Berlin.
- 20. Elektrotechnik: N. N.
- 23a. Allgemeine Methoden.
- 23b. Starkstromtechnik.
- 23c. Schwachstromtechnik.

Physikalische Grundlegung der Optik.

- 21. Ältere Theorie: A. Wangerin in Halle a. S.
- 22. Elektromagnetische Lichttheorie: W. Wien in Würzburg.
- 23. Hineinspielen der Molekularphysik und der Elektronentheorie in die Optik: W. Wien in Würzburg nebst zwei Beiträgen: Magnetooptik: H. A. Lorentz in Leiden u. Spektralanalyse: C. Runge in Göttingen.

Mathematische Spezialausführungen  
zur Optik.

- 24. Strahlenoptik und optische Instrumente: S. Finsterwalder in München.
- 25. Wellenoptik (Interferenz und Beugung): N. N.
- 26. Kristalloptik: F. Pockels in Heidelberg.

E. Schlusswort.

- 27. Allgemeine physikalische Anschauungen und Methoden: A. Sommerfeld in München und G. Mie in Greifswald.

## Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik (herausg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) Ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesebezugliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigeleistet die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. P. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, L. Henneberg, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, E. Lampe, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, Otto Meissner, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, K. Petr, S. Pincherle, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, E. Study, Th. Vahlen, A. Wangerin, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr.-Maraunenhof, Herzog Albrechtallee 17.



## Alle Gebiete des Wissens

zu pflegen ist dem Einzelnen heute nicht mehr möglich, aber an einem Punkte sich über den engen Kreis, in den ihn heute meist der Beruf einschließt, zu erheben, an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens zu gewinnen, sollte jeder versuchen. Wege dazu zeigt:

### B. G. Teubners Allgemeiner Katalog

eine reich illustrierte, durch ausführliche Inhaltsangaben, Proben, Besprechungen eingehend über jedes einzelne Werk unterrichtende Übersicht aller derjenigen Veröffentlichungen des Verlages, die von allgemeinem Interesse für die weiteren Kreise der Gebildeten sind. Der Katalog liegt in folgenden Abteilungen vor, die jedem Interessenten auf Wunsch umsonst und postfrei übersandt werden:

- |                                                                                                              |                                            |                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1. Allgemeines (Sammelwerke, Zeitschriften, Bildungswesen).                                                  | 4. Geschichte. Kulturgeschichte. Kunst.    | 8. Volkswirtschaft. Handel und Gewerbe. Fortbildungsschulwesen. |
| 2. Klassisches Altertum (Literatur, Sprache, Mythologie, Religion, Kunst, Geschichte, Recht und Wirtschaft). | 5. Deutsche Sprache und Literatur.         | 9. Pädagogik.                                                   |
| 3. Religion. Philosophie.                                                                                    | 6. Neuere fremde Literaturen und Sprachen. | 10. Mathematik. Technik. Naturwissenschaften.                   |
|                                                                                                              | 7. Länder- u. Völkerkunde.                 | Vollständige Ausgabe.                                           |

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Förpl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. ABRAHAM. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 448 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. M. 12.— II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. ABRAHAM. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. M. 10.—

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. (Erweiterter Sonderabdruck aus „Bibliotheca Mathematica“ 3. Folge. VII. Band.) [45 S.] gr. 8. 1907. geh. n. M. 1.20.

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 268 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 7.40.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 8.40.

Czuber, Dr. Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8.

I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. In Leinw. geb. n. M. 12.— II. — Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 532 S.] 1906. In Leinw. geb. n. M. 12.—

Durége, Dr. H., weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 9.—, in Leinw. geb. n. M. 10.—

Felgentraeger, Dr. W., technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Eichungskommission, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. M. 8.—

Fischer, Dr. Otto, Professor an der Universität Leipzig, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 14.—

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 4.20, in Leinw. geb. n. M. 5.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. M. 2.80.

Gauss', C. F., Werke. Weiterführung der von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstalteten Gesamtausgabe von Gauss' Werken.

VII. Band: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) [680 S.] 4. 1906. kart. n. M. 30.—

Hesse, Dr. O., weil. Professor am Kgl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von Dr. S. Gundelfinger, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 6.—

Jacobi, C.G.J., und M.H. Jacobi, Briefwechsel. Herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XXII. Heft. Mit 2 Bildnissen. [XX u. 282 S.] gr. 8. 1907. geh. n. M. 6.90, in Leinw. geb. n. M. 7.50.

**Lorentz, Dr. H. A.**, Professor an der Universität Leiden, Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band, 1. Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 10.—

[Die 2. (Schluß-)Lieferung des I. Bandes erscheint im Frühjahr 1907.]

Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 3. 20.—

**Love, A. E. H.**, M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Oxford, Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe, Assistent an der Technischen Hochschule zu Danzig. Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. M. 16.—

**Meyerhoffer, Dr. W.**, weil. Professor an der Universität Berlin, Gleichgewichte der Stereoisomeren. Mit einem Begleitwort von Professor Dr. J. H. van 't Hoff in Berlin. Mit 28 Figuren im Text. [IV u. 71 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 2. 40.

**Neumann, Franz**, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. VonderMühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumauns aus dem 86. Lebensjahr in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. M. 36.—

**Nielsen, Dr. Niels**, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 12.—

Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 3. 60.

**Osgood, Dr. W. F.**, Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 150 Figuren im Text. [XII u. 642 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. M. 15. 60.

**Pockels, Dr. F.**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 16.—

**Poincaré, Henri**, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 4. 80.

der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 3. 60.

**Stoltz, Dr. Otto**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. J. Anton Gmeiner, Professor an der Universität Innsbruck, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik“ nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stoltz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. M. 15.—

**Thomson, J. J.**, D. Sc. Lid. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 18.—, in Leinw. geb. n. M. 19.—

**Weinstein, Dr. B.**, Professor an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 9.—

**Wilezynski, E. J.**, A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projektive differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. M. 10.—

**Zeuthen, Dr. H. G.**, Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 18. und 17. Jahrhundert. Deutsch von RAPHAEL MEYER. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. M. 16.—, in Leinw. geb. n. M. 17.—

# Encyklopädie der Elementar-Mathematik

Ein Handbuch für Lehrer  
Heinrich Weber,  
Professor in Straßburg

- In drei Bände
- I. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet mit 280 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] gr. 8. 1906.]
  - II. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] gr. 8. 1906.]
  - III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. [Erscheint im April 1907.]

Das Werk verfolgt das Ziel, den künftigen Lehrern auf einen wissenschaftlichen Standpunkt zu stellen, von dem aus er imstande ist, das, was er später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu erfassen, und damit den Wert dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung zu erhöhen. — Das Ziel dieser Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfangs der Elementar-Mathematik zu ersehen oder in der Einkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand, sondern in einer strengen Begründung und leicht faßlichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst, als für den Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben jenen fundamentalen Betrachtungen auch eine für den praktischen Gebrauch nützliche, wohlgeordnete Zusammenstellung der wichtigsten Algorithmen und Probleme darin finden werden.

„Zwei Momente müssen hervorgehoben werden, die dem Buche das Gepräge verleihen. Das eine liegt darin, daß die grundlegenden Fragen der Geometrie eine eingehende Behandlung erfahren, in einem Umfange, wie er in zusammenfassenden Werken sonst nicht anzutreffen ist . . . Das zweite Moment ist in dem Umstände zu erblicken, daß die Verfasser es nicht darauf angelegt haben, eine pragmatische Vorführung des üblichen Vorrats an geometrischen Sätzen, Konstruktionen und Rechnungen zu geben, sondern daß es ihnen mehr darum zu tun war, an ausgewähltem Material die wissenschaftlichen Methoden der Geometrie zur Geltung zu bringen und überall auf die Grundfragen einzugehen. Ist so die theoretische Seite, namentlich in einigen Abschnitten, stark zum Ausdruck gekommen, so ist doch auch auf die praktischen Bedürfnisse Rücksicht genommen, die freilich erst mit dem dritten Bande ihre endgültige Befriedigung finden sollen; doch ist dafür an verschiedenen Stellen, so in der Trigonometrie und in der analytischen Geometrie, schon vorgearbeitet worden . . . So darf der Inhalt des zweiten Bandes der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik“ als ein sehr reichhaltiger bezeichnet werden, der über die Grenzen dessen, was an der Schule geboten werden kann, erheblich hinausführt, der aber auch — und das ist noch wichtiger und offenkundig der Hauptzweck des Werkes — eine Vertiefung des geometrischen Wissens vermittelt. Jüngere Lehrer der Mathematik werden das Buch gewiss oft mit Nutzen zu Rate ziehen, namentlich wenn sie im Unterrichte zu prinzipiell wichtigen Fragen kommen, um sich über die leitenden Gedanken zu orientieren.“

„Eines verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: das ist die reiche Ausstattung mit schönen, sehr instruktiv geschilderten Figuren. Der schwierigen Vorstellung der verschiedenen Formen sphärischer Dreiecke kommen die stereographischen Bilder der Euler'schen, Möbius'schen und Study'schen Dreiecke sehr zu statten.“

(Zeitschrift für das Real Schulwesen. 31. Jahrg. Heft 5.)

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



L

II-351575

Druk. o. J. Zam. 556. 10.000.

## EINLADUNG ZUM IV. INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESS VOM 6.—11. APRIL 1908 IN ROM.

Der Ausschuß für die Vorbereitung  
des IV. internationalen Mathematiker-Kongresses:

P. Blaserna, Präsident. G. Castelnuovo, Generalsekretär. V. Reina, Kassier.  
V. Cerruti. A. Di Legge. G. Pittarelli. A. Seila. A. Tonelli. V. Volterra.

Wegen Progra

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299016

n Kongreß bezüglichen  
en an

Italien).