

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

4370

L. inw.

# STATYKA WYKRĘŚLNA

OPRACOWAŁ

ARTUR POPLAWSKI

INŻYNIER DRÓG I MOSTÓW

Z 3-ma tablicami i 163 rysunkami w tekście.

---

Z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących  
na polu naukowem im. D-ra J. Mianowskiego.

---

WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

1917.

Cena 2 rb. 40 kop.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294587



P<sub>0/2</sub>  
60.









STATYKA WYKREŚLNA.







II, 298, c.

# STATYKA WYKREŚLNA

OPRACOWAŁ

ARTUR POPLAWSKI

INŻYNIER DRÓG I MOSTÓW

Z 3-ma tablicami i 163 rysunkami w tekście.

---

Z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących  
na polu naukowem im. D-ra J. Mianowskiego.

---



WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

1917.

Cena 2 rb. 40 kop.

Gepprüft und freigegeben durch die Kais. Deutsche Presseabteilung  
Warschau, den 22/XI 1916. T. № 3558, Dr. № 825.



114370

ODBITO CZCIONKAMI DRUKARNI WL. LAZARSKIEGO  
W WARSZAWIE.  
KLISZE WYKONANE W ZAKŁ. ART.-GRAF. „HELIOS”.

Akc. Nr. 2094/80



# SPIS TREŚCI.

	<i>Str.</i>
<b>Wstęp</b> . . . . .	1
<b>Rozdział I</b> . . . . .	3
<b>Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie</b> . . . . .	3
§ 1. Siły, działające w jednej prostej . . . . .	3
§ 2. Siły, przechodzące przez jeden punkt . . . . .	4
§ 3. Siły, rozrzucone jakkolwiek na płaszczyźnie . . . . .	10
§ 4. Związek między wielobokiem sił i sznurowym . . . . .	18
§ 5. Zmiana bieguna . . . . .	19
§ 6. Układ sił równoległych . . . . .	21
§ 7. Rozkład siły na 3 składowe, działające w danych liniach . . . . .	25
§ 8. Warunki równowagi sił rozrzuconych na płaszczyźnie . . . . .	27
<b>Rozdział II</b> . . . . .	31
§ 1. Momenty statyczne . . . . .	31
§ 2. Składanie momentów . . . . .	33
§ 3. Moment statyczny układu sił na płaszczyźnie . . . . .	35
§ 4. Moment statyczny układu sił równoległych . . . . .	36
§ 5. Moment pary sił . . . . .	38
§ 6. Porównanie warunków równowagi wykreślonych z analitycznymi . . . . .	42
<b>Rozdział III</b> . . . . .	43
<b>Belka prosta</b> . . . . .	43
<b>A. Obciążenie bezpośrednie</b> . . . . .	44
§ 1. Obciążenie stałe siłami skupionemi . . . . .	44
§ 2. Obciążenie stałe — ciągłe . . . . .	50
§ 3. Związek między obciążeniem, siłą poprzeczną i momentem gnącym . . . . .	52
§ 4. Obciążenie stałe jednostajne . . . . .	55
§ 5. Obciążenie stałe jednostajne częściowe . . . . .	61
§ 6. Obciążenie stałe złożone . . . . .	65
Przykład . . . . .	68



	<i>Str.</i>
§ 7. Belka jednym końcem osadzona . . . . .	70
§ 8. Belka wystająca . . . . .	73
§ 9. Obciążenie ruchome. . . . .	77
a) Wpływ obciążenia ruchomego na mo- menty . . . . .	77
b) Największy moment dla obciążenia ru- chomego . . . . .	80
c) Wyznaczenie bezwzględnie największego momentu . . . . .	84
d) Największy moment dla dwóch — trzech i dowolnej ilości ciężarów ruchomych, two- rzających obciążenie symetryczne względem wypadkowej . . . . .	88
e) Momenty dla obciążenia złożonego: sta- łego jednostajnego i ruchomego z sił sku- pionych . . . . .	92
f) Wpływ obciążenia ruchomego na siły poprzeczne. . . . .	93
g) Największe siły poprzeczne dla obciąże- nia ruchomego siłami skupionymi . . . . .	96
h) Siły poprzeczne dla obciążenia ruchome- go jednostajnego . . . . .	98
i) Siły poprzeczne dla obciążenia złożone- go: stałego jednostajnego i ruchomego z sił skupionych. . . . .	99
k) Punkty zwrotne największego momentu. . . . .	101
l) Siły poprzeczne dla obciążenia złożonego: stałego jednostajnego i ruchomego jedno- stajnego. . . . .	104
<b>B. Obciążenie pośrednie . . . . .</b>	<b>106</b>
§ 1. Obciążenie pośrednie stałe siłami skupionymi	106
§ 2. Obciążenie pośrednie stałe jednostajne. . . . .	108
Przykład . . . . .	109
§ 3. Obciążenie pośrednie siłą ruchomą . . . . .	113
§ 4. Obciążenie pośrednie siłami ruchomymi sku- pionymi . . . . .	115
§ 5. Obciążenie pośrednie ruchome jednostajne . . . . .	119
§ 6. Obciążenie pośrednie złożone: stałe jedno- stajne i ruchome jednostajne . . . . .	121
Przykład . . . . .	121



	<i>Str.</i>
<b>Rozdział IV</b> . . . . .	123
<b>Belki kratowe i więzary dachowe</b> . . . . .	123
<b>A. Pojęcia ogólne. Siły wewnętrzne w belkach kratowych. Wyznaczalność statyczna belek kratowych</b> . . . . .	123
<b>B. Wyznaczanie sił wewnętrznych przy obciążeniu stałym</b> . . . . .	128
§ 1. Sposób przecięcia Culmanna i Rittera . . . . .	128
§ 2. Sposób wielobokowy Cremony . . . . .	131
§ 3. Zastosowanie sposobu Cremony do różnych typów belek kratowych . . . . .	139
§ 4. Plany sił dla belek kratowych równoległych . . . . .	147
§ 5. Plany sił dla belek jednym końcem osadzonych: . . . . .	154
1. Belka podwieszona w swobodnym końcu . . . . .	154
2. Belka podparta w swobodnym końcu . . . . .	155
3. Żóraw . . . . .	155
§ 6. Plany sił dla więzarów dachowych . . . . .	159
1 i 2. Dach angielski . . . . .	159
3. Dach belgijski . . . . .	161
4. Dach francuzki (ustrój Polonceau) . . . . .	164
5. Dachy wystające . . . . .	167
6. Parcie wiatru na więzary dachowe . . . . .	171
<b>C. Wpływ obciążenia ruchomego na belki kratowe</b> . . . . .	177
§ 1. Największe natężenia w krzyżulcach dla obciążenia ruchomego . . . . .	183
§ 2. Największe natężenia w krzyżulcach dla obciążenia złożonego . . . . .	192
§ 3. Największe natężenia w słupach dla obciążenia ruchomego . . . . .	192
§ 4. Największe natężenia w słupach dla obciążenia złożonego . . . . .	193
§ 5. Największe natężenia w pasach . . . . .	195
§ 6. Belki kratowe równoległe . . . . .	199
§ 7. Krzyżulce dodatkowe . . . . .	207
Wykreślenie planu sił dla belki kratowej równoległej . . . . .	209
§ 8. Belki kratowe paraboliczne . . . . .	213

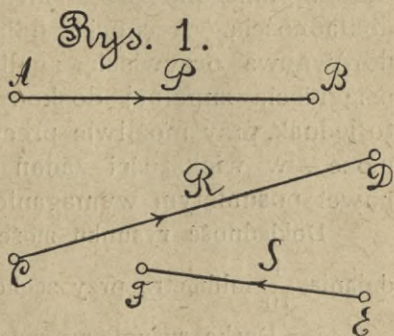


	<i>Str.</i>
<b>Rozdział V</b> . . . . .	221
<b>Obliczanie wykreślne pól figur płaskich</b> . . . . .	221
§ 1. Przekształcanie pól figur płaskich na daną podstawę $a$ . . . . .	221
§ 2. Pole trójkąta, prostokąta, równoległoboku, trapezu, czworokąta i wielokąta . . . . .	222
§ 3. Pole wycinka i odcinka koła. Pole odcinka parabolicznego i trójkątów parabolicznych . . . . .	226
§ 4. Pole ograniczone dowolnymi krzywymi . . . . .	228
§ 5. Obliczanie pól dowolnych figur płaskich za pomocą krzywej całkowej . . . . .	229
<b>Rozdział VI</b> . . . . .	237
<b>Środek sił równoległych i środek ciężkości.</b>	
<b>Moment statyczny pola figury płaskiej</b> . . . . .	237
§ 1. Pojęcia ogólne . . . . .	237
§ 2. Środek ciężkości dowolnej figury płaskiej . . . . .	239
§ 3. Moment statyczny pola figury płaskiej . . . . .	241
§ 4. Środek ciężkości materyalnych linii:	
Środek ciężkości odcinka linii prostej i linii łamanej . . . . .	242
Środek ciężkości linii łamanej, stanowiącej część wielokąta foremnego. Środek ciężkości łuku koła . . . . .	243
§ 5. Środek ciężkości figur płaskich:	
Trójkąt, równoległobok, trapez, czworokąt . . . . .	245
Przykład . . . . .	250
Odcinek paraboliczny i trójkąty paraboliczne . . . . .	252
<b>Rozdział VII</b> . . . . .	256
<b>Moment bezwładności</b> . . . . .	256
§ 1. Pojęcia ogólne . . . . .	256
§ 2. Momenty bezwładności prostokąta (równoległoboku), trójkąta i trójkąta parabolicznego . . . . .	257
§ 3. Moment bezwładności koła . . . . .	260
§ 4. Momenty bezwładności dowolnych figur płaskich. Wzory Culmanna i Mohra. Przykład . . . . .	261



# WSTĘP.

Zadania, należące do **Statyki**, t.j. do nauki o równowadze ciał, podległych działaniu sił, rozwiązuje **Statyka wykreslna** za pomocą konstrukcyi geometrycznych z wyłączeniem rachunku, koniecznego w **Statyce analitycznej**. W tym celu przedstawiamy w statyce wykreslnej siły, jako odcinki linii prostych, a wszelkie działania wykonywamy za pomocą cyrkla i ekierki. Jeżeli przyjmiemy naprz. jako skalę sił:  $1\text{ cm} = 1000\text{ kg}$ , to **wielkość** siły  $P$ , wyrażonej przez odcinek  $AB$ , długości  $4\text{ cm}$ , (rys. 1) wynosić będzie  $4 \times 1000 = 4000\text{ kg}$ ; **linią działania** tej siły będzie linia  $AB$ , punkt zaś jej przyłożenia może być obrany dowolnie na linii  $AB$ . Że jednak, przy takim przedstawieniu siły przez odcinek linii prostej, nie byłoby wiadomem, czy dana siła działa w kierunku od  $A$  ku  $B$ , czy też w kierunku odwrotnym (od  $B$  ku  $A$ ) przeto **kierunek działania siły**, czyli jej **lot**, zaznacza się na tej prostej strzałką, albo niekiedy kolejną liter.



Wobec powyższego rozróżniać należy pojęcia następujące: **wielkość siły**, **kierunek siły**, **linię działania siły** i **kierunek działania siły** (czyli jej **lot**). Znając **kierunek siły** — albo całego układu sił, do niej równoległych — mamy **tylko jeden punkt** (w nieskończoności), przez który te siły przechodzą; dla otrzymania **linii działania siły** należy zatem ustalić jakikolwiek drugi punkt, przez który ta siła przechodzić musi (a oczywiście, mając **linię działania siły**, mamy zarazem i jej **kierunek**). Ale dopiero przez zdecydowanie **kierunku działania tej siły** (czyli jej **lotu**) i wyrażenie jej **wielkości** przez odpowiednią długość odcinka na linii jej działania charakteryzujemy daną siłę ostatecznie.

Do wszystkich sił, uwzględnianych w jednym zadaniu, musi być oczywiście stosowana ta sama skala sił; jeżeliśmy zatem przyjęli powyższą skalę sił:  $1\text{ cm} = 1000\text{ kg}$ , to w tem samym zadaniu siła  $R$ , wyrażona przez odcinek  $CD$ , długości  $5\text{ cm}$  (rys. 1), wyniesie  $5 \times 1000 = 5000\text{ kg}$ , a siła  $S$ , wy-



sząca 3000 kg, będzie przedstawiona w tem samym zadaniu przez odcinek EF, długości  $\frac{3000}{1000} = 3$  cm.

Przy zastosowaniu metody wykreślnej konstrukcyje upraszczają się znacznie i często uogólniają, a przytem stają się zrozumialszemi, skoro każdą siłę wyraża odpowiednia linia prosta, gdy tymczasem w geometryi analitycznej dla przedstawienia tejże siły potrzebne jest całe równanie. Ma wprawdzie metoda rachunkowa tę wyższość nad wykreślną, że posługiwać się może liczbami nieskończenie małemi, lub nieskończenie wielkiemi, ale za to w metodzie wykreślnej możemy mieć do czynienia z całkiem dowolnemi krzywymi i obliczać ograniczone przez nie pola z zupełnie wystarczającą dokładnością. A chociaż dokładność metody wykreślnej nie dorównywa oczywiście analitycznej, wobec niemożliwej do osiągnięcia zupełnej doskonałości ołówka, cyrkla i ekierki, to jednak, przy możliwie precyzyjnym rysunku, odpowiedzieć może — w większości zadań techniki budowlanej — najdalej nawet posuniętym wymaganiom.

Dokładność rysunku może być doprowadzona do uwzględnienia  $\frac{1}{10}$  milimetra przy zachowaniu warunków następujących:

1. Deska rysunkowa musi być starannie wypróbowana.
2. Ekierki muszą być dokładne, wypróbowane co do prostolinijności i prostokątności.
3. Rysować należy ołówkiem twardym (5 H), ostro zatemperowanym, tak, żeby grubość linii nie przekraczała  $\frac{1}{10}$  mm.
4. Podziałka ma być stosowana metalowa — transwersalna, na której jedynie dają się uwzględnić dziesiąte części milimetra.
5. Rysować należy na papierze rysunkowym (np. Watmana), ale nie na tak zwanej siatkówce (czyli papierze milimetrym), na której najczęściej nie są zachowane kąty proste i o dokładnem wykreślaniu na takim papierze nie może być mowy. Zaznaczamy jeszcze, że dokładność, dochodząca rzeczywiście do  $\frac{1}{10}$  mm, może być osiągnięta tylko na papierze, naklejanym na deskę rysunkową. W większości wypadków jednak na takiej dokładności nam nie zależy, zwłaszcza zaś, jeżeli skala rysunku może być wzięta dostatecznie duża.

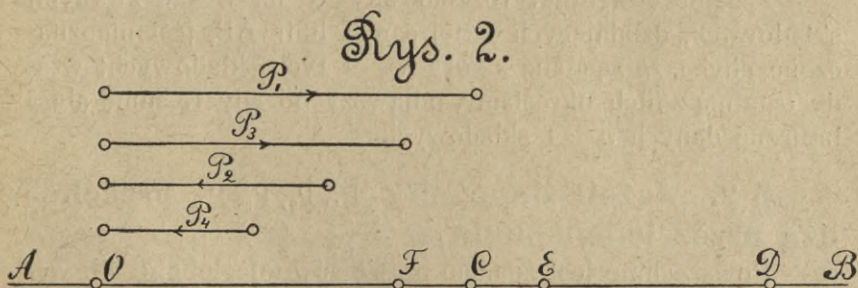


## ROZDZIAŁ I.

# Składanie i rozkładanie sił na płaszczyźnie.

Pod składaniem sił rozumiemy wyznaczanie ich wypadkowej, t. j. siły, mogącej w zupełności zastąpić działanie zbiorowe wszystkich danych sił, nazywanych jej **składowymi**.

§ 1. Jeżeli dane siły  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (rys. 2) działają w tej samej linii prostej AB, ale siły  $P_1$  i  $P_3$



mają lot na prawo (przyjmijmy ten lot za  **dodatni**), a siły  $P_2$  i  $P_4$  — lot odwrotny — na lewo (lot ten uważać będziemy za  **ujemny**), to dla otrzymania **wypadkowej** tych sił odkładamy naprzód siłę  $P_1$  od dowolnego punktu na prostej AB z uwzględnieniem jej lotu, naprz. od O do C i zaraz za nią odkładamy siłę  $P_3$  od C do D; od końca tej ostatniej (t. j. od D) odkładamy w kierunku odwrotnym siłę  $P_2$  (od D do E) i dalej za nią siłę  $P_4$  (od E do F). Otrzymany w ten sposób w rezultacie odcinek OF będzie wypadkową R sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , a lot jej będzie od O ku F. Ten sam rezultat osiągnęlibyśmy oczywiście, odkładając kolejno dane siły na linii AB w jakimkolwiek innym porządku z uwzględnieniem lotu każdej.



Powyższe prawo da się wypowiedzieć jeszcze i tak:

Wypadkowa ilukolwiek sił, działających w jednej prostej, jest równa ich sumie algebraicznej i działa w tejsze prostej, a lot jej jest wskazany przez znak sumy algebraicznej sił danych. Jeżeli np. wielkości sił  $P_1$  i  $P_3$  z lotem dodatnim (na prawo) są 500 i 400 kg, a wielkości sił  $P_2$  i  $P_4$  z lotem ujemnym (na lewo) są 300 i 200 kg, to ich wypadkowa:  $R = P_1 + P_3 - P_2 - P_4 = 500 + 400 - 300 - 200 = +400$  kg i ma lot dodatni (na prawo).

Ponieważ otrzymana powyżej wypadkowa OF sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nie jest  $= 0$ , więc cały układ sił (rys. 2) nie będzie w równowadze, którą osiągnęlibyśmy przez dodanie do owych 4-ch sił jeszcze piątej,  $P_5$ , równej i odwrotnej sile  $R$ , t. j. siły, wyrażonej przez odcinek, długości OF, z lotem ujemnym (na lewo) od F ku O.

Przy składaniu takich 5-u sił  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  dochodzimy, zaczawszy od dowolnego punktu O do tegoż punktu O i to jest dowodem wykreślnym równowagi układu sił, działających w jednej prostej.

**Zadanie odwrotne:** rozkład siły  $R$  na  $n$  tak zwanych składowych, działających w tej samej linii AB, jest nieoznaczone, chyba, że są dane z góry  $n - 1$  tych składowych; wtedy ostatnią z nich określamy, odjawszy od siły  $R$  sumę algebraiczną danych  $n - 1$  składowych.

## § 2. Jeżeli dane siły $P_1, P_2, P_3, P_4$ przechodzą przez jeden punkt.

Powszechnie jest znanem **prawo równoległoboku sił**, według którego wypadkowa  $R$  dwóch sił  $P_1$  i  $P_2$ , wyrażonych przez proste AB i AC (rys. 3), przechodzi przez punkt ich przecięcia A i jest przekątną utworzonego z tych dwóch sił równoległoboku ABDC, a lot jej idzie od A ku D.

Dla otrzymania jednak wypadkowej  $R$  dwóch sił  $P_1$  i  $P_2$  nie trzeba wykreślać całego równoległoboku, gdyż wystarczy wykreślić tak zwany **trójkąt sił**, przeprowadzając przez dowolny punkt  $A_1$  (rys. 4) prostą  $A_1B_1$ , wyrażającą siłę  $P_1$ , a przez jej punkt końcowy  $B_1$  — prostą  $B_1D_1$ , wyrażającą siłę  $P_2$ , (albo też naprzód przez dowolny punkt  $A_2$  (rys. 5) — prostą  $A_2C_2$ , wyrażającą siłę  $P_2$ , a potem przez  $C_2$  — prostą  $C_2D_2$ , wyrażającą siłę  $P_1$ ). Otrzymany w ten sposób odcinek  $A_1D_1$  (albo też  $A_2D_2$ ) będzie szukaną wypadkową co do wielkości,



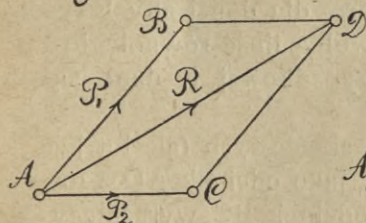
kierunku i lotu (oznaczonego strzałką). Różnić się ona będzie od rzeczywistej wypadkowej  $R$  tylko tem, że linia działania tej ostatniej przechodzi przez punkt  $A$ .

Z powyższego wyprowadzamy ważny wniosek:

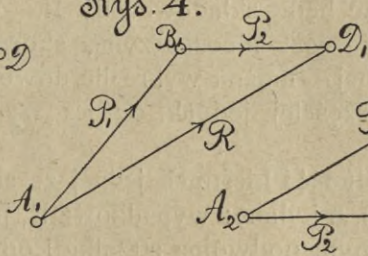
Przy przesuwaniu sił na płaszczyźnie równoległe do ich kierunków nie zmienia się wielkość, kierunek i lot ich wypadkowej, zmienia się jedynie jej linia działania.

Pod działaniem sił  $P_1$  i  $P_2$ , lub też ich wypadkowej  $R$  (rys. 3), punkt  $A$  przesuwać się będzie po linii siły  $R$  w kierunku oznaczonym strzałką, a więc dla utrzymania równowagi trzeba by do sił  $P_1$  i  $P_2$  dołączyć siłę trzecią  $P_3$ , równą sile  $R$ , ale z lotem odwrotnym. Wtedy oczywiście ogólna wypadkowa sił  $P_1, P_2, P_3$  będzie  $= 0$  i siły  $P_1, P_2, P_3$  będą w równowadze. Ta siła  $P_3$ , wyrażona przez odcinek  $DA$ , uzupełni oczy-

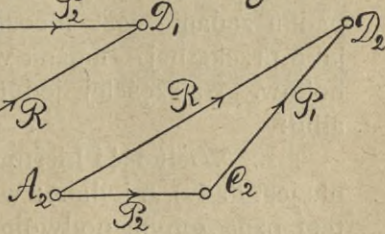
Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

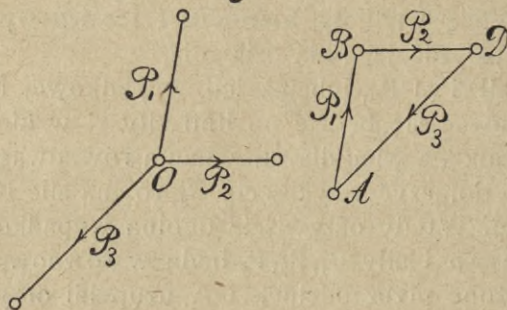


wicie trójkąt  $A_1B_1D_1$  (rys. 4) i  $A_2C_2D_2$  (rys. 5) przy obiegu strzałek jednakowym, z kąd wynika, że jeżeli 3 siły  $P_1, P_2, P_3$  (rys. 6), działające na punkt  $O$ , tworzą przy składaniu kolejnym, z zachowaniem lotu każdej, zamknięty trójkąt sił  $ABD$  z jednakowym obiegiem strzałek, to siły te mają wypadkową  $= 0$ , są zatem w równowadze. Gdyby zaś siła  $P_3$  miała lot odwrotny, czyli od  $A$  ku  $D$ , to (zgodnie z rys. 4 i 5) byłaby wypadkową sił  $P_1$  i  $P_2$ . To samo powiedzieć można oczywiście o każdej z trzech sił  $P_1, P_2, P_3$ , t. j. jeżeli trzy siły  $P_1, P_2, P_3$ , działające na jeden punkt, tworzą przy składaniu kolejnym (rys. 6) zamknięty trójkąt sił z jednakowym obiegiem strzałek, to każda z nich — o ile zmienimy jej lot na odwrotny — może być uważaną za wypadkową dwóch pozostałych. Ztąd wynika również, że jakiegokolwiek 3 siły  $P_1, P_2, P_3$ , działające na jeden punkt  $O$ , mogą być w równowadze tylko wtedy, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie i jeżeli przy składaniu tworzą



trójkąt zamknięty z jednakowym obiegiem strzałek, bo tylko w takim razie każda z tych trzech sił może równoważyć

Rys. 6.

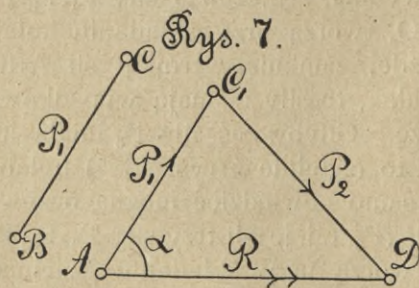


dwie pozostałe (czyli być równą wypadkowej dwóch pozostałych i działać w jej linii, ale z lotem odwrotnym).

**Zadanie odwrotne:** rozkład danej siły  $R$  na dwie składowe, dokonywa się, budując na odcinku  $AD$  (rys. 3), wyrażającym siłę  $R$ , jako na przekątnej, jakikolwiek równoległobok  $ABDC$ , którego boki  $AB$  i  $AC$  wyrażać będą składowe siły  $R$ . W tym ogólnym wypadku zadanie jest nieoznaczone, skoro dla danej siły  $R$  — jako przekątnej — można wykreslić dowolną ilość równoległoboków. Najczęściej jednak, oprócz wypadkowej  $R$  dane są albo:

I. **Wielkość i kierunek jednej ze składowych** (ale lot jej nie jest dany), t. j. dane: wypadkowa  $R$ , jako odcinek  $AD$  z lotem, oznaczonym podwójną strzałką i odcinek  $BC$ , wyrażający siłę  $P_1$  (rys. 7). Drugą — szukaną składową  $P_2$  wyrażać będzie oczywiście odcinek  $C_1D$  (otrzymany przez przeprowadzenie równoległej do  $BC$  przez punkt  $A$ , odłożenie na niej  $AC_1 = BC$  i połączenie  $C_1$  z  $D$ ), a lot tych obu składowych  $P_1$  i  $P_2$  — odwrotny do lotu wypadkowej — oznaczają pojedyncze strzałki. Zadanie to jest równoznaczne z następującem: Dane dwa boki

trójkąta  $AD$ ,  $AC_1$  i kąt między nimi  $\alpha$ , — wykreslić bok trzeci  $C_1D$ .



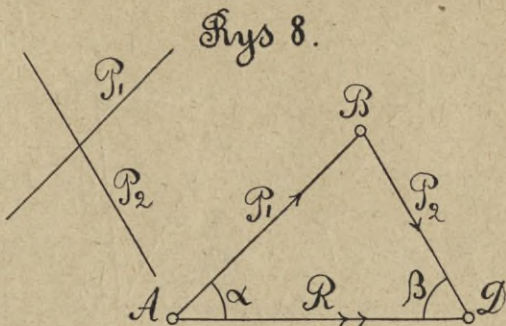
Dane dwa boki trójkąta  $AD$ ,  $AC_1$  i kąt między nimi  $\alpha$ , — wykreslić bok trzeci  $C_1D$ .

II. **Kierunki obu składowych  $P_1$  i  $P_2$**  (ale ich loty nie są dane) (rys. 8): Przeprowadziwszy przez początkowy i końcowy punkt danej siły  $R$ , wyrażonej przez odcinek  $AD$  z lo-

tem, oznaczonym podwójną strzałką i odcinek  $BC$ , wyrażający siłę  $P_1$  (rys. 7). Drugą — szukaną składową  $P_2$  wyrażać będzie oczywiście odcinek  $C_1D$  (otrzymany przez przeprowadzenie równoległej do  $BC$  przez punkt  $A$ , odłożenie na niej  $AC_1 = BC$  i połączenie  $C_1$  z  $D$ ), a lot tych obu składowych  $P_1$  i  $P_2$  — odwrotny do lotu wypadkowej — oznaczają pojedyncze strzałki. Zadanie to jest równoznaczne z następującem: Dane dwa boki



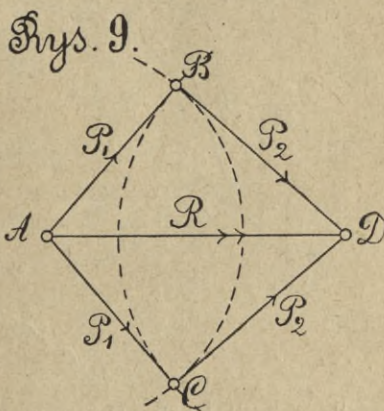
tem, oznaczonym podwójną strzałką, linie w danych kierunkach składowych  $P_1$  i  $P_2$ , otrzymujemy te szukane składowe — wyrażone przez odcinki AB i BD z lotami, oznaczonymi pojedynczą strzałką. Rozwiązanie jest możliwe oczywiście tylko w razie, jeżeli kierunki linii działania składowych nie są jednakowe. Zadanie to jest równoznaczne



z następującem: Dany bok AD i dwa kąty przyległe  $\alpha$  i  $\beta$ , wykreślić pozostałe 2 boki trójkąta: AB i BD.

III. Wielkość obu składowych  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 9): Z początkowego i końcowego punktu A i D danej siły R zakreśliamy łuki koła o promieniach = wielkościom sił  $P_1$  i  $P_2$ , a łącząc otrzymane punkty przecięcia łuków B i C z punktami A i D, otrzymujemy dwa rozwiązania dla szukanych składowych  $P_1$  i  $P_2$ : Składową  $P_1$  wyrażać będzie odcinek AB (a także AC), składową zaś  $P_2$  — odcinek BD (względnie CD). Loty oznaczone są, jak wyżej, strzałkami. Rozwiązanie możliwe jest oczywiście tylko w razie, jeżeli  $P_1 + P_2$  jest nie mniejsze od R.

Jeżeli  $P_1 + P_2 = R$ , to siły  $P_1$ ,  $P_2$  i R leżą w tej samej prostej, bo dwa punkty przecięcia B i C tworzą wtedy jeden punkt styczności na linii AD. Zadanie to jest równoznaczne z wykreśleniem trójkąta z danych trzech



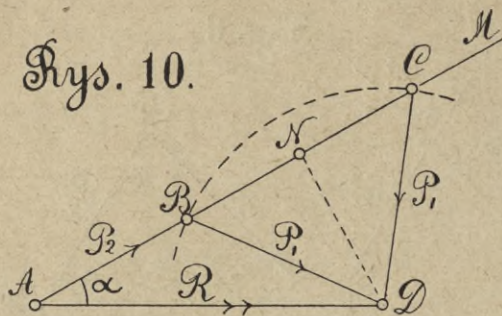
ję boków; — wreszcie

IV. Wielkość jednej składowej  $P_1$  (rys. 10) i kierunek drugiej składowej  $P_2$  (loty ich nie są dane): Z końcowego punktu D danej siły R zakreśliamy łuk koła o promieniu =  $P_1$ , przecinający linię AM, przeprowadzoną przez A w kierunku składowej  $P_2$ , w dwóch punktach B i C, otrzymujemy więc 2 rozwiązania: Szukaną składową  $P_2$  wyrażać będzie



odcinek AB (a także AC), szukany zaś kierunek składowej  $P_1$  daje odcinek BD (wzgl. CD). Loty oznaczone są jak wyżej strzałkami.

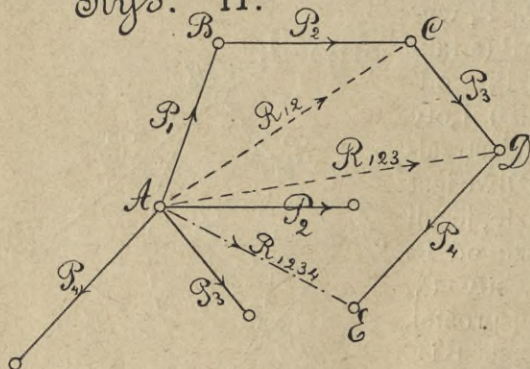
Rys. 10.



Rozwiązanie możliwe jest oczywiście tylko w razie, jeżeli wielkość składowej  $P_1$  nie jest mniejszą od prostopadłej DN, opuszczonej z punktu D na AM. Jeżeli wielkość  $P_1$  jest = tej prostopadłej DN, to otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie. Zadanie to jest równoznaczne z następującem: Dane 2 boki trójkąta i kąt  $\alpha$ , przeciwległy jednemu z nich, — wykreślić bok trzeci.

Dla wyznaczenia wypadkowej **ilukolwiek** sił danych, działających na jeden punkt A, np.  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (rys. 11) składamy naprzód dwie jakiegokolwiek siły  $P_1$  i  $P_2$  za pomocą trójkąta sił ABC i otrzymujemy ich wypadkową  $R_{12}$ , wyrażoną przez odcinek AC, z lotem oznaczonym strzałką; składamy następnie tę wypadkową  $R_{12}$  z trzecią siłą  $P_3$  za pomocą trójkąta sił ACD i otrzymujemy  $R_{123}$ , wypadkową sił  $P_1, P_2, P_3$ , wyrażoną przez odcinek AD, z lotem oznaczonym strzałką. Składając wreszcie tę wypadkową  $R_{123}$  z ostatnią siłą  $P_4$  za pomocą trójkąta sił ADE, otrzymamy wypadkową wszystkich czterech sił  $R_{1234}$ , wyrażoną przez odcinek AE, z lotem oznaczonym strzałką. Tę samą wypadkową  $R_{1234}$  otrzymać możemy również sposobem następującym (rys. 12): Przez dowolny punkt  $A'$  prowadzimy równoległą do siły  $P_1$  i odkładamy w kierunku lotu siły  $P_1$  odcinek  $A'B' = AB$ ; przez punkt  $B'$  prowadzimy równoległą do  $P_2$  i odkła-

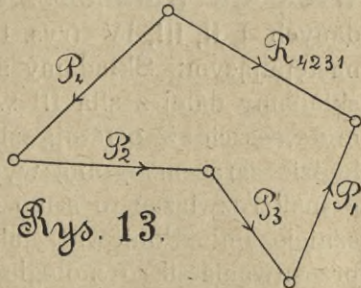
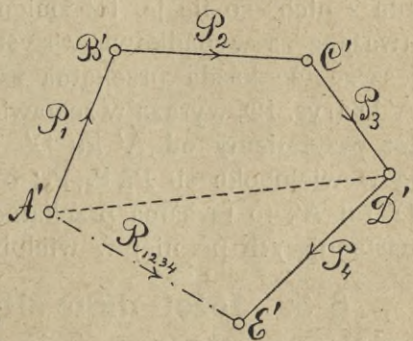
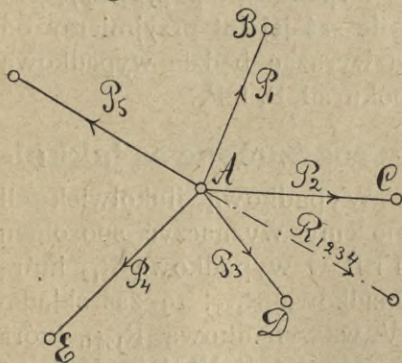
Rys. 11.





damy  $B'C' = AC$ ; przez punkt  $C'$  — równoległą do  $P_3$  i odkładamy  $C'D' = AD$ ; przez punkt  $D'$  — równoległą do  $P_4$  i odkładamy  $D'E' = AE$ . Odcinek  $A'E'$  wyrażać będzie wypadkową  $R_{1234}$ , a lot jej, oznaczony strzałką, idzie od  $A'$  ku  $E'$ . Otrzymany w ten sposób wielobok  $A'B'C'D'E'$ , różniący się od wieloboku  $ABCDE$  (na rys. 11) tylko pominięciem przekątnych  $AC$  i  $AD$ , — więc od niego prostszy — nazywa się **wielobokiem sił**, a bok  $A'E'$ , zamykający wielobok, jest wypadkową wszystkich sił, z lotem, idącym od początkowego punktu pierwszej siły  $P_1$ , t. j.  $A'$ , do końcowego punktu ostatniej siły  $P_4$ , t. j.  $E'$ , a więc **odwrotnym** względem lotu składowych  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Tę samą wypadkową  $R_{1234}$  otrzymamy, składając kolejno te same siły  $P_1, P_2, P_3, P_4$  w jakimkolwiek innym porządku, np.  $P_4, P_2, P_3, P_1$  (rys. 13), bo oczywiście  $R_{4231}$  (otrzymana na rys. 13)  $= R_{1234}$  (z rys. 12).

Rys. 12.



Rys. 13.

Pod działaniem sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , lub też ich wypadkowej  $R_{1234}$  (rys. 12), punkt  $A$  przesuwac się będzie w kierunku tejże wypadkowej. Jeżelibyśmy jednak wypadkową  $R_{1234}$  zastąpili przez siłę  $P_5$  (rys. 12), równą  $R_{1234}$ , ale z lotem odwrotnym, t. j. od  $E'$  ku  $A'$ , to cały układ sił  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  byłby w ró-

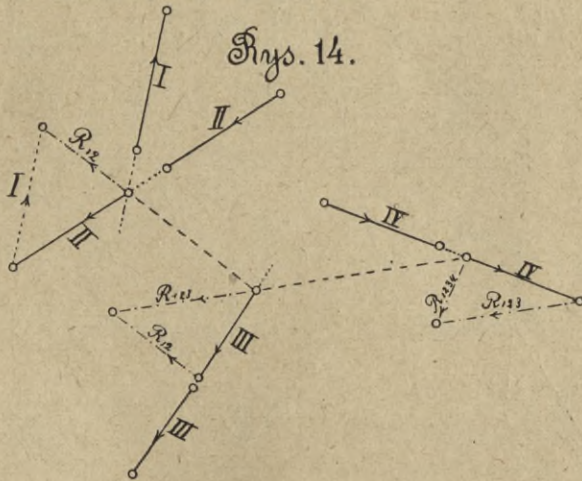


wnowadze, a siła  $P_5$ , wyrażona przez prostą  $E'A'$  (z lotem od  $E'$  ku  $A'$ ), uzupełniłaby wielobok  $A'B'C'D'E'$  **przy jednakowym obiegu strzałek**. Oczywiście jest teraz, że każda siła układu, np.  $P_3$ , jako uzupełniająca wielobok  $D'E'A'B'C'$ , może być uważaną za wypadkową wszystkich pozostałych  $P_1, P_2, P_4, P_5$ , **o ile zmienimy jej lot na odwrotny**. Ztąd wynika, że, jeżeli dowolna ilość sił  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , działających na jeden punkt  $A$  (rys. 12), znajduje się w równowadze, to (ich wypadkowa musi być  $= 0$ , więc) tworzą one — przy składaniu kolejnym — (z zachowaniem lotu każdej) **wielobok zamknięty**, w którym każda z nich — o ile jej lot zmienimy na odwrotny — wyrażać będzie wypadkową wszystkich pozostałych i odwrotnie: Jeżeli dowolna ilość sił, działających na jeden punkt  $A$  (rys. 12), tworzy — przy składaniu kolejnym — (z zachowaniem lotu każdej) wielobok zamknięty, to siły te (mają ogólną wypadkową  $= 0$ , więc) są w równowadze i każda z nich — o ile jej lot zmienimy na odwrotny — może być uważaną za wypadkową wszystkich pozostałych. Zauważmy jeszcze, że każda przekątna **zamkniętego** wieloboku sił np.  $A'D'$  (rys. 12), wyraża w zestawieniu z  $AD$  (rys. 11) — **o ile jej lot przyjmiemy od  $A'$  ku  $D'$  — wypadkową poprzedzających ją w wieloboku sił  $P_1, P_2, P_3$ ; o ile zaś jej lot przyjmiemy od  $D'$  ku  $A'$ , to ta sama przekątna wyrażać będzie wypadkową następujących po niej w wieloboku sił  $P_4$  i  $P_5$** .

**§ 3. Jeżeli dane siły rozrzucone są jakkolwiek na płaszczyźnie.** Wypadkową ilukolwiek sił danych I, II, III, IV (rys. 14) możemy wyznaczyć sposobem następującym: Składamy siły I i II w wypadkową  $R_{12}$ , którą składamy dalej z siłą III w wypadkową  $R_{123}$ ; tę zaś składamy wreszcie z ostatnią siłą IV w wypadkową  $R_{1234}$ , która będzie zarazem ogólną wypadkową sił I, II, III, IV. Możemy jednak rozwiązać to samo zadanie sposobem o wiele praktyczniejszym: Ponieważ, jak dowiedliśmy wyżej (str. 5), od przesuwania sił równoległe do ich kierunków nie zmienia się wielkość, kierunek i lot ich wypadkowej, możemy zatem wyobrazić sobie, że wszystkie siły I, II, III, IV, V (rys. 15) — po odpowiednim równoległym przesunięciu każdej — przechodzą przez jeden punkt, a do takich sił możemy zastosować powyższe prawo wieloboku sił: Przeprowadzamy więc przez dowolny punkt  $Z$  linię równoległą do siły I, odkładamy na



niej wielkość siły I z uwzględnieniem jej lotu (t. j. — od Z do *a*), przez ten końcowy punkt *a* prowadzimy linię równoległą do siły II i t. d., jak na rys. 12, a łącząc wreszcie końcowy punkt *e* odcinka, równoległego do ostatniej siły V, z punktem Z, otrzymujemy wyrażoną przez ten bok zamykający Ze wypadkową sił I, II, III, IV, V, oznaczoną przez 12345, co do jej wielkości, kierunku i lotu (odwrotnego względem lotu sił I, II, III, IV, V). Przytem przekątne otrzymanego wieloboku sił, np. 34, 345 będą, jak wiadomo, wypadkowami sił III i IV (wzgl. III, IV, V). Widzimy zatem, że dla wyznaczenia wypadkowej sił, rozrzuconych na płaszczyźnie, utworzyć należy z tych sił (po odpowiednim równoległym przesunięciu każdej) wielobok sił z jednakowym obiegiem strzałek i bok zamykający tego wieloboku będzie ogólną wypadkową układu sił co do wielkości, kierunku i lotu.

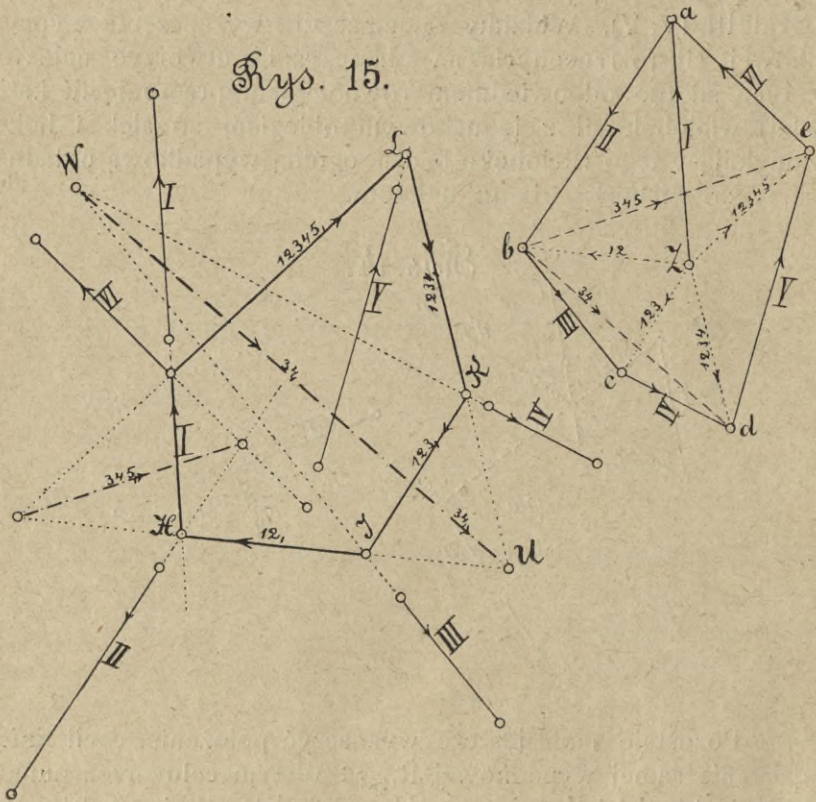


Pozostaje nam jeszcze wyznaczyć położenie, czyli linię działania samej wypadkowej  $R_{12345}$ : W tym celu przez punkt przecięcia sił I i II (t. j. przez H) prowadzimy linię 12<sub>1</sub>, równoległą do otrzymanej w wieloboku sił 12; (będzie to oczywiście linia działania wypadkowej sił I i II); przez punkt przecięcia tejże z siłą III (t. j. przez J) prowadzimy linię 123<sub>1</sub>, równoległą do 123 (czyli linię działania wypadkowej sił I, II, III); przez punkt przecięcia tejże z siłą IV (t. j. przez K) prowadzimy linię 1234<sub>1</sub>, równoległą do 1234 (czyli linię działania wypadkowej sił I, II, III, IV); wreszcie przez punkt przecięcia tejże z siłą V (t. j. przez L) prowadzimy linię 12345<sub>1</sub>, równo-



ległą do 12345 i to będzie linia działania szukanej wypadkowej  $R_{12345}$  wszystkich sił I, II, III, IV, V.

Wobec tego, że w tylko co wykreślonym wieloboku HJKL, składającym się z linii:  $12_1$ ,  $123_1$ ,  $1234_1$  i  $12345_1$ , każdy bok (np.  $1234_1$ ) przedstawia linię działania wypadkowej wszystkich sił, ten bok poprzedzających (czyli I, II, III, IV), wielobok taki nazywa się **wielobokiem wypadkowych**. Przecięcie

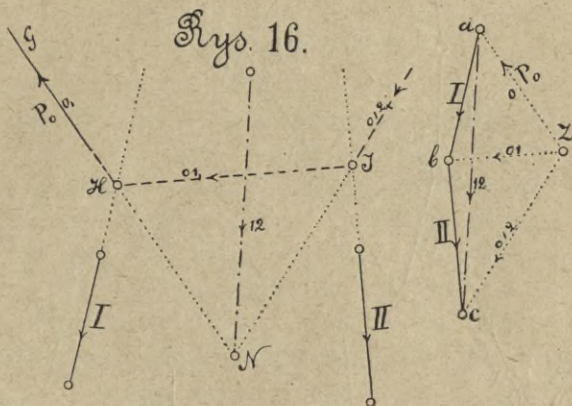


dwóch jakichkolwiek boków tegoż wieloboku (np. boków  $12_1$  i  $1234_1$ ) leży na  $34_1$ , wypadkowej sił (III i IV), znajdujących się między tymi bokami ( $12_1$  i  $1234_1$ ), bo  $1234_1$  (jako wypadkowa sił I, II, III, IV) przechodzić musi przez przecięcie siły  $12_1$  (wypadkowej sił I i II) z  $34_1$  (wypadkową sił III i IV). Oprócz tego punktu U wypadkowa  $34_1$  sił III i IV musi przechodzić również przez przecięcie sił III i IV, (t. j. przez W)



i jest równoległą do odcinka 34, łączącego początkowy punkt  $b$  siły III z końcowym punktem  $d$  siły IV w wieloboku sił.

Wskazany wyżej sposób składania sił nie da się jednak zastosować, jeżeli dane siły, np. I i II (rys. 16), nie przecinają się na tablicy rysunku, lub są do siebie równoległe. W tym wypadku możemy wprawdzie określić wielkość, kierunek i lot wypadkowej za pomocą wykreślonego z dowolnego punktu  $a$  trójkąta sił  $abc$ , jako odcinek  $ac$ , ale, nie mając punktu przecięcia sił I i II, musimy wyznaczyć położenie wypadkowej w inny sposób: Obrany dowolnie punkt  $Z$  łączymy z punktami  $a, b, c$  i dołączamy do sił I i II—jako pomocniczą—siłę  $P_0$ , wyrażoną przez odcinek  $Za$ , nadając jej jakiekolwiek położenie, równoległe do  $Za$ , np.  $GH$ , przecinające siłę I w punkcie  $H$ .

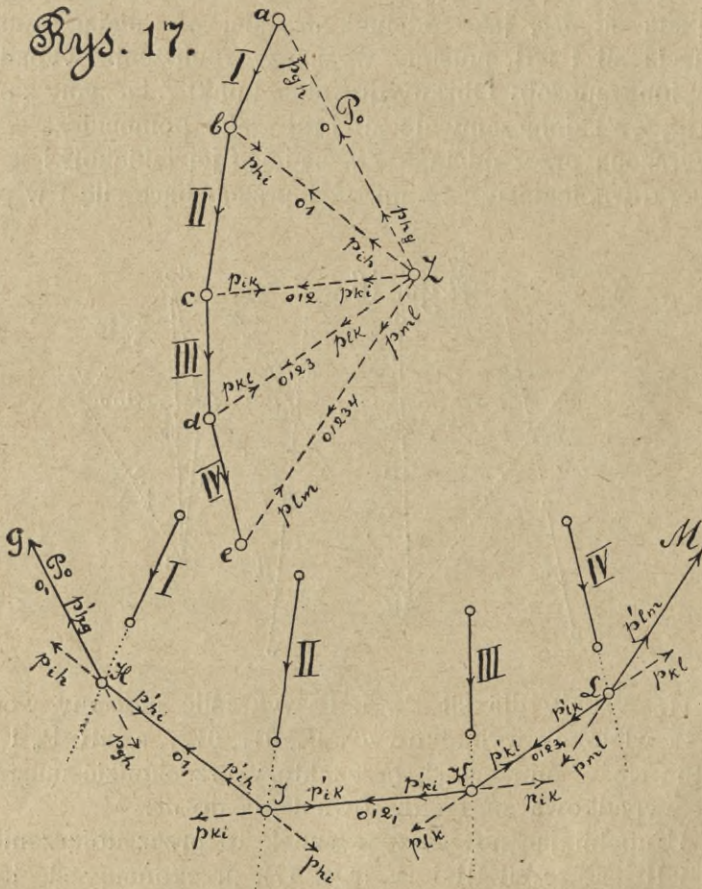


kie H. Wtedy dla sił  $P_0, I, II$  wykreślić możemy według rys. 15 wielobok wypadkowych  $P_0, 01_1, 012_1$ , a siły  $P_0$  i  $012_1$  przetną się w punkcie  $N$ , przez który przechodzić musi szukana wypadkowa sił I i II, równoległa do  $ac$ .

Uzupełniając powyższy rysunek 16 przez dołączenie do sił I i II jeszcze sił III i IV (rys. 17), przekonamy się łatwo, że wyciągnąwszy po łamanej linii  $GHJKLM$  sznur i przyłożwszy w punktach  $H, J, K, L$  siły I, II, III, IV, utrzymujemy cały układ sił I, II, III, IV w równowadze i dla tego wielobok taki ( $GHJKLM$ ) nazywa się **wielobokiem sznurowym** dla sił I, II, III, IV, wywołujących we wszystkich bokach tegoż siły rozciągające. Istotnie, rozważając siły, działające w każdym wierzchołku wieloboku, np. w  $J$ , widzimy, że siła II rozkłada się w kierunkach boków przylegających  $JH$  i  $JK$  na składo-



we  $p_{hi}$  i  $p_{ki}$ , które otrzymujemy z trójkąta sił  $Zbc$  (w wieloboku sił) jako wyrażone przez  $bZ$  i  $Zc$ , z lotem wskazanym przez porządek liter; podobnie siła III daje w wierzchołku K składowe  $p_{ik}$  i  $p_{lk}$ , wyrażone przez  $cZ$  i  $Zd$ , a siła IV — w wierzchołku L — daje składowe  $p_{kl}$  i  $p_{ml}$ , wyrażone przez  $dZ$  i  $Ze$ . Przy tem oznaczeniu jest widocznem, że:  $p_{ik} = -p_{ki}$ ;



$p_{kl} = -p_{lk}$  i t. d., bo każde dwie takie siły (np.  $p_{ik}$  i  $p_{ki}$ ) działają w tej samej linii (JK) i wyrażają się w wieloboku sił przez odcinki ( $cZ$  i  $Zc$ ), równe, ale z lotem odwrotnym. Każde dwie takie siły (np.  $p_{ik}$  i  $p_{ki}$ ) rozciągają oczywiście odpowiedni bok (JK), a przeciwdziałają im powstające w sznurze t. zw. **nateżenia wewnętrzne**, równe im i odwrotne, (oznaczone na bokach JK i KL — rys. 17 — przez  $p'_{ik}$  i  $p'_{ki}$ ,  $p'_{kl}$  i  $p'_{lk}$ ).



Widzimy teraz, że w całym wieloboku sznurowym zachowana jest równowaga, bo w każdym środkowym wierzchołku wieloboku, np. K, jedna składowa  $p_{ik}$  siły zewnętrznej III zniesiona będzie przez natężenie wewnętrzne  $p'_{ki}$ , a drugą składową  $p_{lk}$  zrównoważy natężenie wewnętrzne  $p'_{kl}$ . W dwóch zaś skrajnych wierzchołkach H i L składowe  $p_{gh}$  i  $p_{ml}$  zrównoważone będą przez  $p'_{hg}$  i  $p'_{lm}$ , powstające wskutek przytrzymywania sznura w jakichkolwiek dwóch punktach boków skrajnych (np. G i M).

Aby rozpoznać, czy dany bok wieloboku, np. JK (rys. 17) jest ściskany, czy też rozciągany, rozkładamy każdą z dwóch sił, działających na jego końcach — a więc siłę II na składowe  $p_{ki}$  i  $p_{hi}$ , a siłę III na składowe  $p_{lk}$  i  $p_{ik}$ . Jeżeli składowe, działające w kierunku danego boku — a więc  $p_{ki}$  i  $p_{ik}$  są skierowane **od siebie** (jak na rys. 17), to bok JK jest **rozciągany**, jeżeli zaś — **ku sobie**, to bok JK jest **ściskany**. Tak np. gdyby siły II i III (na rys. 17) działały w kierunku odwrotnym, to idąca w kierunku boku JK składowa siły II miałyby oczywiście lot od J do K, idąca zaś w kierunku tegoż boku składowa siły III miałyby lot od K do J, byłyby więc te składowe skierowane **ku sobie** i bok JK byłby ściskany. Gdyby zaś wszystkie siły I, II, III, IV (rys. 17) działały w kierunkach odwrotnych, to wywoływałyby w bokach HJ, JK, KL siły ściskające, a wtedy wielobok nazywałby się **linią ciśnień**, mającą szerokie zastosowanie w teorii sklepień.

Dowolnie obrany punkt Z wieloboku sił nazywa się **biegunem**, proste, łączące biegun z wierzchołkami wieloboku sił — **promieniami**, wierzchołki wieloboku sznurowego — **węzłami**, a pierwszy i ostatni bok tegoż (GH i ML) — **bokami skrajnymi** lub **zewnętrznymi**.

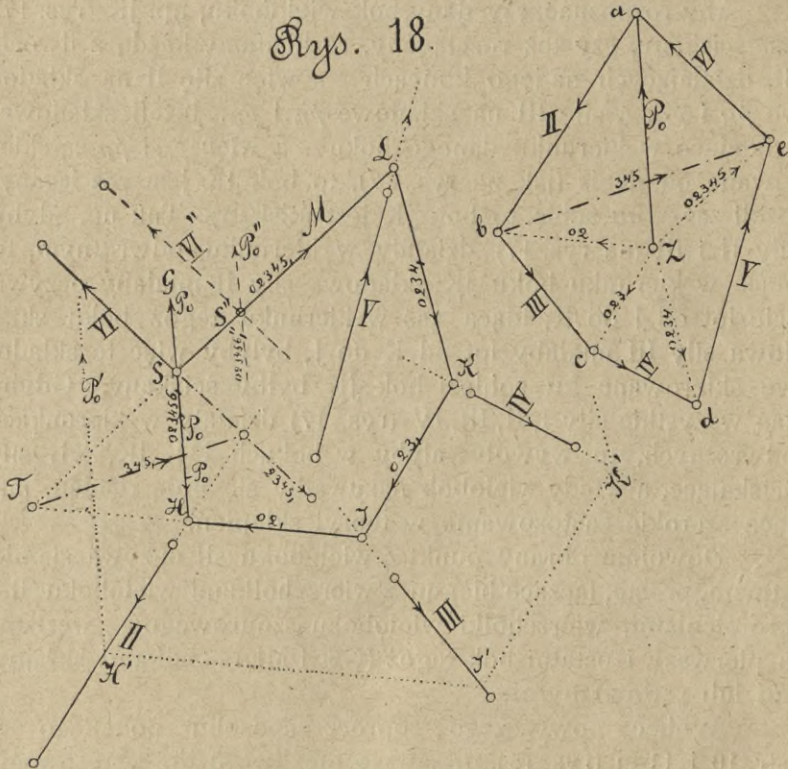
Wobec powyższego — oprócz sposobu podanego na str. 10 i 11-ej (rys. 15), **niezawsze możliwego do zastosowania**, mamy jeszcze dla wyznaczenia wypadkowej danego układu sił II, III, IV, V (rys. 18) sposób następujący:

Zacząwszy od dowolnego punktu *a* odkładamy kolejno jedną za drugą siły II, III, IV, V z zachowaniem lotu każdej i otrzymawszy wielobok sił *abcde*, obieramy dowolnie biegun Z. Dołączamy następnie do układu danego — jako pomocniczą — siłę  $P_0$ , wyrażoną przez odcinek *Za*, nadając jej jakiegokolwiek położenie, równoległe do *Za*, np. GH, przecinając siłę II w punkcie H; przez punkt H prowadzimy HJ, równo-



ległą do  $Zb$  (oznaczymy ją  $02_1$ ); przez punkt przecięcia tejże z siłą III (t. j. przez  $J$ ) prowadzimy  $JK$ , równoległą do  $Zc$  (oznaczymy ją  $023_1$ ); przez punkt przecięcia tejże z siłą IV (t. j. przez  $K$ ) prowadzimy  $KL$ , równoległą do  $Zd$  (czyli  $0234_1$ ) i wreszcie podobnie przez  $L$  — równoległą  $LM$  do  $Ze$  (czyli  $02345_1$ ). Przez punkt przecięcia  $S$  boków skrajnych  $HG$  i  $LM$  przechodzi wypadkowa  $2345_1$  sił II, III, IV, V, a jej wielkość, kierunek i lot dają nam w wieloboku sił odcinek  $ae$ . Tak

Rys. 18.



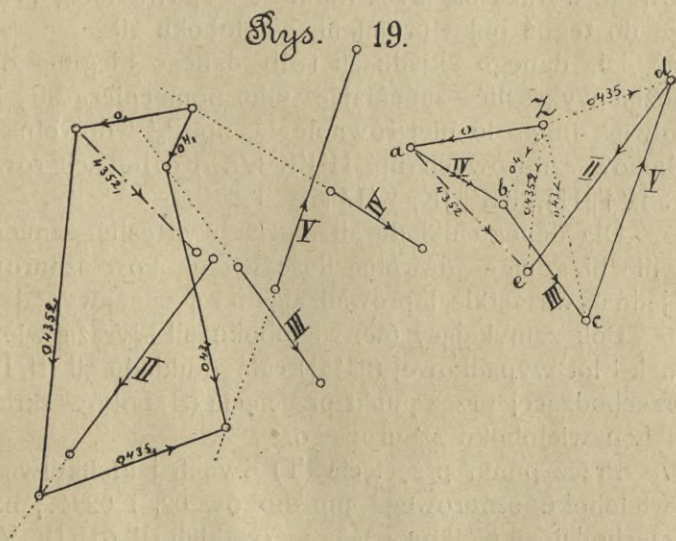
samo oczywiście wypadkowa  $345_1$  sił III, IV, V przechodzi przez punkt przecięcia  $T$  boków skrajnych  $02_1$  i  $02345_1$ , będąc przytem równoległą do  $be$ . Zauważmy jeszcze, że otrzymany wielobok  $GHJKLM$  jest jednocześnie **wielobokiem sznurowym** dla sił II, III, IV, V i zarazem może być uważany (w zestawieniu z rys. 15) za **wielobok wypadkowych** dla sił  $P_0$ , II, III, IV, V, bo rysunek 18-ty różni się od 15-go tylko tem, że siła I z rysunku 15-go jest oznaczona przez  $P_0$  na rysunku 18-ym.



Tym sposobem jest oczywiście, że każdy wielobok wypadkowych dla sił I, II, III, IV, V (rys. 15) jest wielobokiem sznurowym dla sił II, III, IV, V, t.j. po odjęciu od układu siły I i użyciu jej za pomocniczą siłę  $P_0$  (rys. 18) i odwrotnie każdy wielobok sznurowy dla sił II, III, IV, V (rys. 18) jest wielobokiem wypadkowych dla sił  $P_0$ , II, III, IV, V, t. j. po włączeniu pomocniczej siły  $P_0$  do układu sił danych.

Innemi słowy: wielobok wypadkowych jest szczególnym przypadkiem wieloboku sznurowego, otrzymuje się bowiem przez umieszczenie obranego dowolnie na rys. 18 bieguna Z w początkowym punkcie pierwszej siły I, jak to jest rzeczywiście na rys. 15-ym.

Porządek, w jakim składamy siły za pomocą wieloboku sił i sznurowego, jest całkiem dowolny i niema żadnego wpływu na wypadkową. Wielkość, kierunek i lot tejże, określane przez wielobok sił, nie mogą oczywiście zależeć od porządku składania sił, trzeba więc tylko dowieść, że nie zależy od niego również i położenie wypadkowej, określane przez wielobok sznurowy. Połączmy w rys. 19 te same siły II, III, IV, V w innym porządku, niż na rys. 18, np. w porządku: IV, III, V, II



i przy innym biegunie Z, a przekonamy się, że ogólne wypadkowe: na rys. 19— $4352_1$ , a na rys. 18— $2345_1$ , wyrażone co



do wielkości, kierunku i lotu przez odcinek *ae*, pozostają te same na rys. 18 i 19 i co do swego położenia.

Łatwo przekonać się jeszcze, że również wprowadzenie zamiast kilku jakichkolwiek sił, np. III, IV, V (rys. 18) ich wypadkowej  $345_1$  nie wpływa wcale na ogólną wypadkową, wiadomo bowiem, że boki skrajne  $02_1$  i  $02345_1$ , odpowiadające tym siłom III, IV, V, przecinać się muszą na ich wypadkowej  $345_1$  w punkcie T, więc siła  $02_1$  musi dać w połączeniu z wypadkową  $345_1$  ten sam bok skrajny  $02345_1$ , czyli oba te skrajne boki zostaną na swoich miejscach, a zatem nie zajdzie żadna zmiana w całym pozostałym wieloboku sznurowym.

#### § 4. Związek między wielobokiem sił i wielobokiem sznurowym.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są to t. zw. **figury odwrotne**: Każdemu bokowi jednej odpowiada wierzchołek drugiej i na odwrót, a przytem:

1. Boki wieloboku sznurowego są równoległe do promieni wieloboku sił.

2. Boki wieloboku sił są równoległe do sił zewnętrznych, działających w węzłach wieloboku sznurowego.

3. Wielkość natężenia w jakimkolwiek boku wieloboku sznurowego wyraża się przez wielkość odpowiedniego, równoległego do tegoż boku promienia wieloboku sił.

4. Dla danego układu sił i dla danego bieguna Z (rys. 18) można wykreślić—zmieniając tylko pomocniczą siłę  $P_0$  na jakąkolwiek inną, do niej równoległą, np.  $P'_0$ —dowolną ilość wieloboków sznurowych (np.  $H'J'K'L'...$ ) o bokach równoległych:  $H'J' \parallel HJ$ ,  $J'K' \parallel JK$ ,  $K'L' \parallel KL$  i t. d.

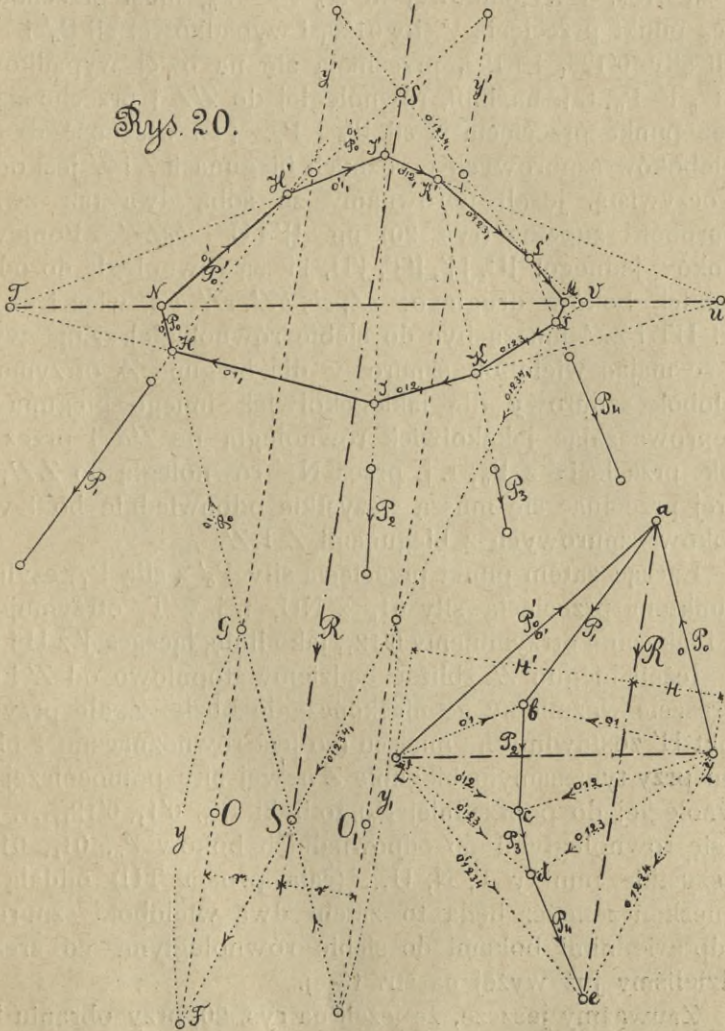
5. Dla danego układu sił można wykreślić—zmieniając położenie bieguna — dowolną ilość wieloboków sznurowych, które jednak wszystkie doprowadzają do tej samej wypadkowej.

6. Bok zamykający (*ae*) wieloboku sił wyraża wielkość, kierunek i lot wypadkowej ( $2345_1$ ) całego układu sił (II, III, IV, V), przechodzącej przez punkt przecięcia (S) boków skrajnych (HS i LS) wieloboku sznurowego.

7. Przez punkt przecięcia (T) dwóch jakichkolwiek boków wieloboku sznurowego (np. boków  $02_1$  i  $02345_1$  na rys. 18) przechodzi wypadkowa  $345_1$  wszystkich sił (III, IV, V), położonych między tymi bokami, a jej wielkość, kierunek i lot wyraża w wieloboku sił odcinek *be*, łączący początkowy punkt siły III z końcowym punktem siły V.



**§ 5. Zmiana bieguna.** Jeżeli dla układu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (rys. 20) przy biegunie  $Z$ , obranym dowolnie, otrzymaliśmy wielobok sznurowy  $HJKL$ , to zmieniając położenie bieguna na jakiegokolwiek inne, np.  $Z'$ , otrzymamy inny wielo-



bok sznurowy  $H'J'K'L'$ , którego każdy bok (np.  $0'1'2'3_1$ ) przecinać się będzie z odpowiednim bokiem wieloboku  $HJKL$  (a więc  $0123_1$ ) na linii prostej  $TU$ , równoległej do linii  $ZZ'$ , łączącej oba bieguny. Aby tego dowieść, zauważmy, że siłę



$0'123_1$  otrzymujemy, dołączając do siły  $0123_1$  siłę, wyrażoną przez odcinek  $Z'Z$  (z lotem od  $Z'$  ku  $Z$ ), a ten odcinek wyraża wypadkową siły  $P'_0$  i siły  $P_0$  z **odwrotnym lotem**, przechodzącą oczywiście przez punkt  $N$  (przecięcia sił  $P'_0$  i  $P_0$ ) i równoległą do  $Z'Z$ , a więc siła  $0'123_1$ , jako ogólna wypadkowa sił  $0123_1$  i wypadkowej sił  $P'_0$  i  $-P_0$ , musi przechodzić przez punkt przecięcia  $V$  siły  $0123_1$  i wypadkowej sił  $P'_0$  i  $-P_0$ , czyli siły  $0'123_1$  i  $0123_1$  przecinają się na owej wypadkowej sił  $P'_0$  i  $-P_0$ , t. j. na linii, równoległej do  $Z'Z$  i przechodzącej przez punkt przecięcia  $N$  sił  $P'_0$  i  $P_0$ . [Ta własność dwóch wieloboków sznurowych o różnych biegunach  $Z$  i  $Z'$  jest odrazu oczywistą, jeżeli porównamy ze sobą dwa tak zwane **czworoboki zupełne** (rys. 20) np.  $JJ'TU$  i  $bcZZ'$ . Ponieważ 5 boków jednego:  $JU, JJ', J'T, J'U, JT$  są równoległe do odpowiednich boków drugiego:  $cZ, cb, bZ', cZ', bZ$ , więc i szóste boki  $UT$  i  $ZZ'$  muszą być do siebie równoległe]. Ztąd wynika, że mając wielobok sznurowy dla bieguna  $Z$ , otrzymamy wielobok sznurowy dla jakiegokolwiek innego bieguna  $Z'$ , przeprowadzając jakąkolwiek równoległą do  $Z'a$  i przez jej punkt przecięcia z  $P_0$ , t. j. przez  $N$ —równoległą do  $ZZ'$ , na której przecinać się muszą wszystkie odpowiednie boki wieloboków sznurowych z biegunami  $Z$  i  $Z'$ .

Łącząc zatem punkt przecięcia siły  $P'_0$  z siłą  $P_1$ , czyli  $H'$  z punktem przecięcia siły  $01_1$  z  $NU$ , t. j. z  $T$ , otrzymujemy  $0'1_1$  i tak samo otrzymujemy  $0'12_1$ , jako linię, łączącą  $J'$  z  $U$  i t. d.

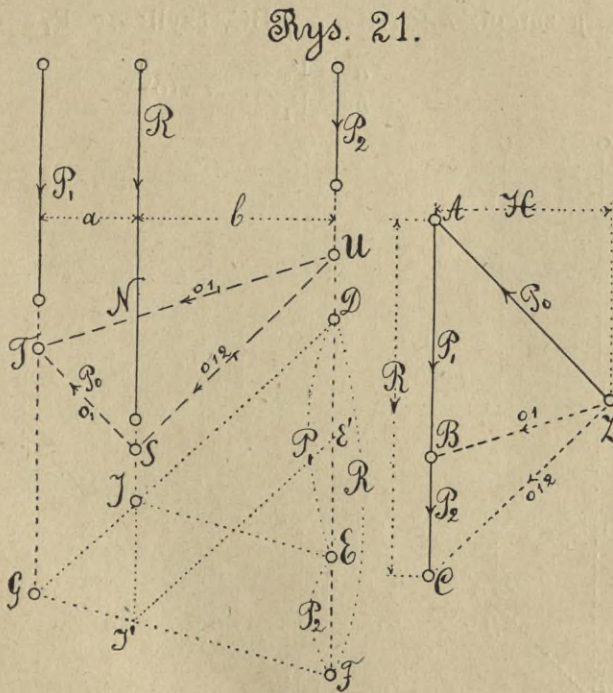
Jeżeli biegun  $Z'$  zbliżać będziemy stopniowo od  $Z'$  ku  $Z$  i wreszcie weźmiemy go nieskończenie blisko  $Z$ , ale przytem punkt  $H'$  zostawimy na miejscu (co jest równoznaczne z obraniem przy tym samym biegunie  $Z$  nowej siły pomocniczej  $P'_0$ , równoległej do poprzedniej  $P_0$ ), to boki  $P'_0, 0'1_1, 0'12_1, \dots$  staną się równoległymi do odpowiednich boków  $P_0, 01_1, 012_1..$  i wszystkie punkty  $T, N, U..$  (cała prosta  $TU$ ) oddalą się w nieskończoność: będą to zatem dwa wieloboki sznurowe z odpowiednimi bokami do siebie równoległymi, co zresztą widzieliśmy już wyżej na str. 18-ej.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli na rys. 20, przy obraniu bieguna  $Z$  z jednej strony wieloboku sił otrzymaliśmy **wielobok sznurowy**, to przeniósłszy biegun na stronę przeciwną tegoż wieloboku sił, np. do  $Z'$ , otrzymamy **linię ciśnienia** (bo rozważając np. bok  $J'K'$  i rozkładając (zgodnie ze str. 14) każdą z dwóch sił  $P_2$  i  $P_3$ , działających na końcach boku  $J'K'$  na składowe,



przekonamy się, że składowe, działające w tym samym boku  $J'K'$ , skierowane są **ku sobie**, dla boku zaś  $JK$  — **od siebie**, więc bok  $J'K'$  jest **ściskany**, a bok  $JK$  — **wyciągany**).

**§ 6. Układ sił równoległych.** Jeżeli mamy w danej płaszczyźnie układ sił do siebie równoległych, to wspólny punkt ich przecięcia leży w nieskończoności, a zatem dla otrzymania np. wypadkowej dwóch sił  $P_1$  i  $P_2$ , równoległych, z jednakowym lotem (rys. 21), lub też dwóch sił  $P_1$



i  $P_2$ , równoległych, o odwrotnych lotach (rys. 22), zastosować należy sposób ogólny, podany na str. 15. Wykreślamy więc wielobok sił  $P_1$  i  $P_2$ , który w danym wypadku będzie prostą  $ABC$ ; wielkość wypadkowej  $R$  wyrażać będzie suma algebraiczna sił  $P_1$  i  $P_2$ , więc dla rys. 21:

$$R = AB + BC = AC, \text{ a dla rys. 22: } R = AB - BC = AC.$$

Aby zaś wyznaczyć położenie wypadkowej (rys. 21 i 22), przyjmujemy dowolnie biegun  $Z$  i siłę, wyrażoną przez odcinek  $ZA$ , dołączamy jako pomocniczą  $P_0$ , nadawszy jej jakie-

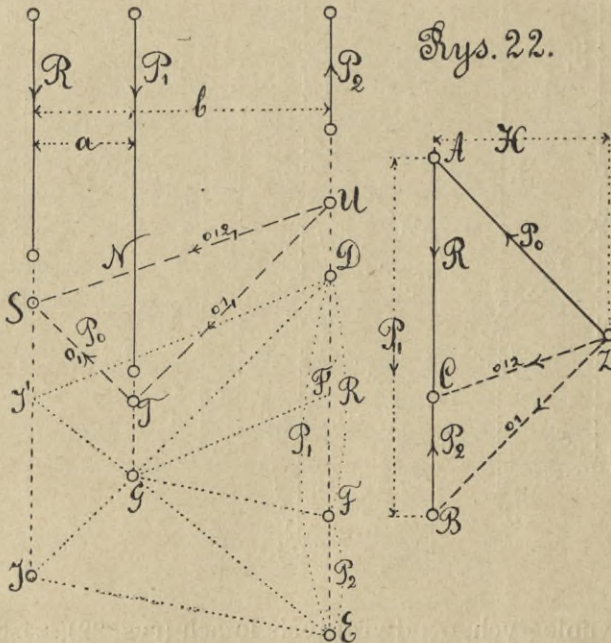


kolwiek położenie równoległe do ZA, np. ST, przecinające siłę  $P_1$  w T; przez T prowadzimy równoległą do ZB, t. j.  $01_1$ , przez punkt przecięcia tejże z siłą  $P_2$  (t. j. przez U) prowadzimy równoległą do ZC (t. j.  $012_1$ ) i szukana wypadkowa R przechodzić będzie przez punkt przecięcia  $0_1$  i  $012_1$  (t. j. przez S) równoległe do  $P_1$  i  $P_2$ .

Określmy jeszcze położenie wypadkowej R analitycznie: Wskutek podobieństwa trójkątów TNS i BZA (rys. 21) otrzymujemy:  $\frac{a}{NS} = \frac{H}{AB}$  i podobnie z trójkątów NUS i BZC:

$$\frac{b}{NS} = \frac{H}{BC}, \text{ a zatem: } a \times AB = b \times BC, \text{ czyli: } a \times P_1 = b \times P_2,$$

więc: 
$$\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1} \dots\dots (o)$$



Rys. 22.

Zupełnie analogicznie, wskutek podobieństwa trójkątów SNT i ACZ (rys. 22), otrzymujemy:  $\frac{a}{NT} = \frac{H}{AC}$  i podobnie z trójkątów NUT i CZB:  $\frac{b-a}{NT} = \frac{H}{BC}$ , a zatem:  $a \times AC = (b-a) \times BC$ , czyli:  $a \times (AC + BC) = b \times BC$ , albo też:  $a \times P_1 = b \times P_2$ , więc:  $\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1}$



Tak więc wypadkowa 2-ch sił równoległych z jednakowym lotem, (rys. 21) przechodzi **między niemi**, wypadkowa zaś 2-ch sił równoległych o odwrotnych lotach (rys. 22) przechodzi **zewnątrz** obu sił, po stronie siły większej, a odległości  $a$  i  $b$  sił składowych  $P_1$  i  $P_2$  od wypadkowej  $R$  są w **obu razach** odwrotnie proporcjonalne do sił  $P_1$  i  $P_2$ .

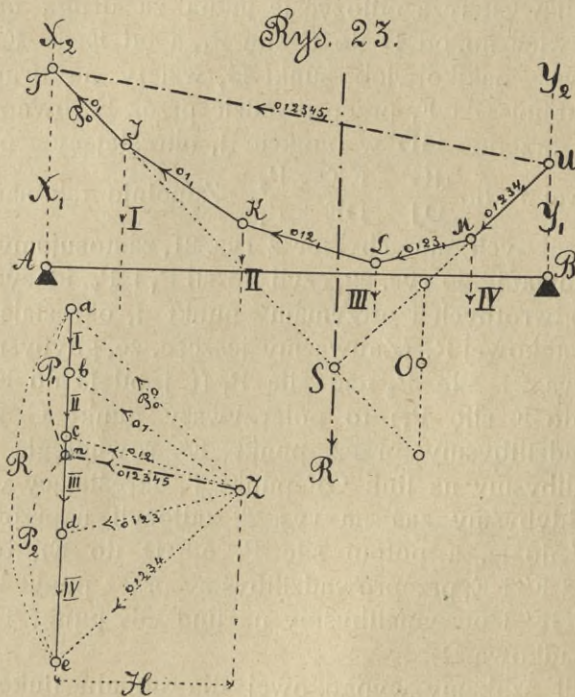
Z równania (o) wynika oczywiście również, że (rys. 21)  $\frac{a}{b} = \frac{TN}{NU} = \frac{P_2}{P_1}$ , a więc dla określenia położenia wypadkowej dwóch sił równoległych  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 21) trzeba jakikolwiek odcinek między temi siłami, np.  $GD$ , podzielić w stosunku  $P_2:P_1$ , czyli wystarcza odłożyć je jedną za drugą na jednej z nich (a więc np. od  $D$  do  $E$  siłę  $P_1$ , a od  $E$  do  $F$  siłę  $P_2$ ) i połączywszy jakikolwiek punkt  $G$ , wzięty na drugiej sile  $P_1$ , z punktami  $D$  i  $F$ , przeprowadzić przez  $E$  równoległą do  $FG$ , która przetnie  $GD$  w punkcie  $J$ , określającym położenie wypadkowej  $R$ , bo  $\frac{JG}{DJ} = \frac{EF}{DE} = \frac{P_2}{P_1}$ . Zupełnie tak samo, używając nawet tych samych liter z rys. 21, zastosujemy powyższe rozumowanie do rys. 22, czyli do sił  $P_1$  i  $P_2$ , idących w kierunkach odwrotnych i otrzymamy punkt  $J$ , określający położenie wypadkowej  $R$ . (Zauważmy jeszcze, że, gdybyśmy odłożyli na rys. 21 siłę  $P_2$  nad siłą  $P_1$  (t. j. od  $D$  do  $E'$  siłę  $P_2$  i od  $E'$  do  $F$  siłę  $P_1$ ) to połączywszy punkt  $G$  z  $D$  i  $F$ , przeprowadzilibyśmy przez punkt  $E'$  równoległą do  $GD$  i otrzymalibyśmy na linii  $GF$  punkt  $J'$ , określający wypadkową  $R$ . Gdybyśmy zaś na rys. 22 odłożyli naprzód siłę  $P_2$  (np. od  $F'$  do  $D$ , a potem siłę  $P_1$  od  $D$  do  $E$ ), to, łącząc punkt  $G$  z  $F'$  i  $E$ , przeprowadzilibyśmy przez punkt  $D$  równoległą do  $GF'$  i otrzymalibyśmy na linii  $GE$  punkt  $J'$ , określający wypadkową  $R$ ).

Jeżeli szukamy wypadkowej dla układu iluokolwiek sił równoległych I, II, III, IV, to zupełnie tak samo, jak wyżej, wykreślamy wielobok sił (rys. 23), stanowiący prostą  $abcde$  i wielobok sznurowy  $JKLM$ , a przez przecięcie  $S$  boków skrajnych  $P_0$  i  $01234_1$  musi przejść wypadkowa  $R = 1234_1$ , której wielkość wyraża odcinek  $ae$ .

Jeżeli zaś odwrotnie — chcemy cały układ sił równoległych I, II, III, IV, lub też otrzymaną ich wypadkową  $R$  (rys. 23), zastąpić przez dwie składowe  $P_1$  i  $P_2$ , działające w danych liniach, np.  $X_1 X_2$  i  $Y_1 Y_2$ , to wystarcza połączyć punkty



przecięcia linii  $X_1 X_2$  z  $P_0$  i  $Y_1 Y_2$  z  $01234_1$  i do otrzymanej w ten sposób prostej TU przeprowadzić równoległą przez biegun  $Z$ . Odcinek  $an$  wyrażać będzie szukaną siłą  $P_1$ , odcinek zaś  $ne$ —siłą  $P_2$ , jak o tem przekonywa porównanie rys. 23 z rys. 21, (na którym należy tylko zastąpić literę B przez  $n$ ). Oczywiście siły  $P_1$  i  $P_2$  zastępują w zupełności siłę  $R$ , albo też cały układ sił I, II, III, IV. Wynika stąd, że dwie siły, równe, ale wprost odwrotne siłom  $P_1$  i  $P_2$ , utrzymują w równowadze układ sił I, II, III, IV. Twierdzenie to znajdzie ważne zastosowanie poniżej—przy obliczaniu belek na 2-ch podporach.



Widzieliśmy już na str. 18-ej, że promienie wieloboku sił, np.  $0,01, 0,12, 0,123 \dots$  (rys. 23) wyrażają natężenia, wywołane w bokach wieloboku sznurowego przez siły zewnętrzne I, II, III, IV. Każde z tych natężeń, rozkładane w kierunku prostopadłym do sił zewnętrznych i w jakimkolwiek innym, daje (w kierunku prostopadłym do sił zewnętrznych) tę samą składową  $H$ , czyli tę samą **poziomą** składową  $H$ , o ile siły zewnętrzne są  **pionowe**. Ta pozioma składowa nazywa się



natężeniem poziomem lub odległością biegunową i oznacza się zwykle literą  $H$ .

**§ 7. Rozkład siły na 3 składowe, działające w danych liniach.** Zgodnie z powyższym (str. 6) można rozłożyć daną siłę na 2 składowe nieskończoną ilością sposobów, a więc tembardziej przy rozkładaniu danej siły na 3 składowe koniecznym jest określić z góry ich linie działania.

Zauważmy jednak, że **1)** jeżeli te 3 dane linie działania składowych przecinają się w jednym punkcie, to a) o ile ten punkt przecięcia **nie** leży na wypadkowej  $R$ —zadanie jest niemożliwe do rozwiązania (bo wypadkowa trzech sił, przechodzących przez jeden punkt, musi przez ten punkt przechodzić) i b) o ile punkt przecięcia danych 3 linii działania leży na wypadkowej  $R$  — zadanie może być rozwiązane w najrozmaitszy sposób, bo każdy czworobok, mający za jeden bok odcinek  $R$ , a trzy pozostałe równoległe do linii działania składowych, będzie odpowiadał zadaniu.

Szczególnym przypadkiem tego rodzaju jest rozkład siły na 3 do niej równoległe, (a więc mające punkt wspólny w nieskończoności). Jeżeli więc mamy belkę obciążoną, opartą na 3-ch podporach, to zasady statyki nie dają nam możliwości określenia, jak się ciężar rozkłada na te 3 punkty i zadanie to rozwiązane być może tylko na zasadzie teorii sprężystości; **2)** jeżeli z tych 3 danych linii działania szukanych składowych **dwie** (np.  $P_1$  i  $P_2$ ) przecinają się w punkcie  $M$ , leżącym na wypadkowej  $R_{123}$ , to zadanie jest niemożliwe do rozwiązania, gdyż wypadkowa  $R_{12}$  tych dwóch składowych  $P_1$  i  $P_2$ , złożona z trzecią składową  $P_3$ , musiałaby dać w rezultacie ogólną wypadkową  $R_{123}$ , przechodzącą przez punkt przecięcia  $R_{12}$  i  $P_3$ . Ale że  $R_{12}$ , jako wypadkowa sił  $P_1$  i  $P_2$ , przecinających się w  $M$  na wypadkowej  $R_{123}$ , nie może mieć (oprócz  $M$ ) drugiego punktu przecięcia z  $R_{123}$ , (a przez punkt  $M$  siła  $P_3$  nie przechodzi), więc zadanie jest nierozwiązalne, a właściwie wypada w tym razie składowa  $P_3 = 0$  i  $R_{123}$  rozkłada się na 2 tylko składowe  $P_1$  i  $P_2$  — i wreszcie **3)** jeżeli żadna z 3-ch danych linii działania szukanych składowych nie przecina się z drugą na wypadkowej  $R$ , to **rozkładamy siłę  $R$  na 3 składowe, działające w danych liniach I, II, III** (rys. 24) sposobem następującym: Punkt przecięcia  $E$  którejkolwiek







**§ 8. Warunki równowagi sił rozrzuconych na płaszczyźnie.** Z podanego powyżej sposobu wyznaczania wypadkowej sił rozrzuconych na płaszczyźnie wynika, że dla równowagi jakiegokolwiek układu sił jest koniecznym, aby utworzony dla tego układu sił—przy jednakowym obiegu strzałek — wielobok sił był zamknięty (bo tylko w tym razie wypadkowa tych sił jest  $= 0$ ). Warunek ten jest więc niezbędnym, ale jest zarazem wystarczającym tylko dla układu sił, przechodzących przez jeden punkt na płaszczyźnie. Dla układu zaś sił rozrzuconych na płaszczyźnie koniecznym jest jeszcze, aby wielobok sznurowy był również zamknięty.

Zauważmy, że wogóle, przy zamkniętym wieloboku sił [t. j. po dodaniu do układu sił II, III, IV, V (rys. 18) siły VI, równej, ale odwrotnego lotu z siłą  $2345_1$ , (wypadkową sił II, III, IV, V), wyrażonej w wieloboku sił przez odcinek  $ea$ ] punkt  $a$  jest zarazem początkowym i końcowym punktem wieloboku sił, a zatem pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego muszą być oba równoległe do  $Za$ , albo też tworzyć jedną prostą. Zależy to od tego, czy dodana siła VI działa w linii owej wypadkowej  $2345_1$ , czy też jest tylko do niej równoległą. 1) Jeżeli siła VI działa w linii wypadkowej  $2345_1$ , to tak, jak wypadkowa  $2345_1$ , przechodzi również i siła VI przez punkt przecięcia  $S$  boków skrajnych, czyli sił  $P_0$  i  $02345_1$ . Ale siła VI, złożona z siłą  $02345_1$ , daje siłę  $023456_1$ , przechodzącą oczywiście przez tenże punkt przecięcia  $S$ ; a ponieważ obie siły  $023456_1$  i  $P_0$  muszą być równoległe do  $Za$  i mają wspólny punkt  $S$ , więc tworzą jedną linię i wielobok sznurowy jest zamknięty. (Jest to zresztą oczywiste i dlatego, że jeżeli układ II, III, IV, V, VI jest rzeczywiście w równowadze, to dołączywszy go do siły  $P_0$ , musimy—po wykreśleniu wieloboków sił i sznurowego — otrzymać w rezultacie tę samą siłę  $P_0$ , a więc wypadkowa  $023456_1$ , musi tworzyć tę samą prostą, co siła  $P_0$  i zamknąć wielobok sznurowy).

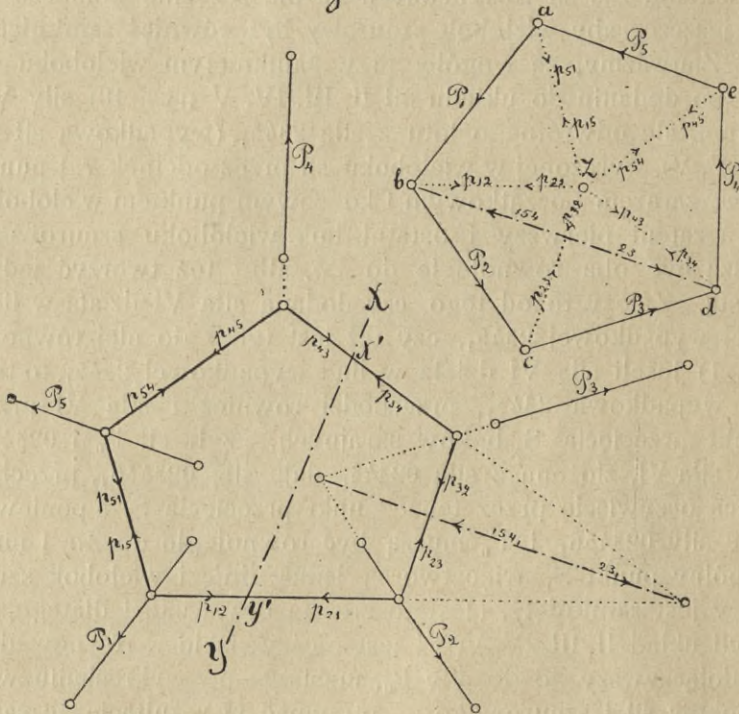
I odwrotnie—jeżeli oba wieloboki: sił i sznurowy są zamknięte, to ostatnia siła  $023456_1$ , którą otrzymaliśmy, jako rezultat dołączenia do siły  $P_0$  układu II, III, IV, V, VI, tworzy jedną siłę z siłą  $P_0$ , czyli układ sił II, III, IV, V, VI, dołączony do siły  $P_0$ , nie wywarł na nią żadnego wpływu, jest więc sam w równowadze. 2) Gdybyśmy jednak, zamiast siły VI, dołączyli do układu II, III, IV, V siłę jej równą i równoległą  $VI''$ ,



to otrzymalibyśmy zamiast punktu S—S'' i zamiast 023456<sub>1</sub>—023456''<sub>1</sub>, równoległą do poprzedniej, ale **niezamykającą** wieloboku sznurowego. Ta siła P<sub>0</sub>'' byłaby równą i równoległą do siły P<sub>0</sub>, a więc dołączenie do siły P<sub>0</sub> układu II, III, IV, V, VI'' wywołałoby przesunięcie siły P<sub>0</sub> w położenie P<sub>0</sub>'' i układu sił II, III, IV, V, VI'' nie możnaby uważać za znajdujący się w równowadze.

Przesunięcie siły P<sub>0</sub> w położenie P<sub>0</sub>'' może być oczywiście osiągnięte także przez dołączenie do siły P<sub>0</sub> dwóch

Rys. 25.



sił: — P<sub>0</sub> i + P<sub>0</sub>'', równych i równoległych, ale odwrotnego lotu. Takie dwie siły nazywamy **parą sił** i wrócimy do nich w następnym rozdziale, a tymczasem zaznaczmy tylko, że układ sił II, III, IV, V, VI'' wywiera ten sam skutek, co **para sił**.

Tak więc w razie równowagi wieloboki sił i sznurowy muszą być zamknięte, a przez to osiągniętą również będzie równowaga sił zewnętrznych z siłami wewnętrznymi, jak tego dowiedziemy zaraz np. dla układu sił P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub> na rys. 25 (na którym zaznaczyliśmy **natężenia wewnętrzne** na obu



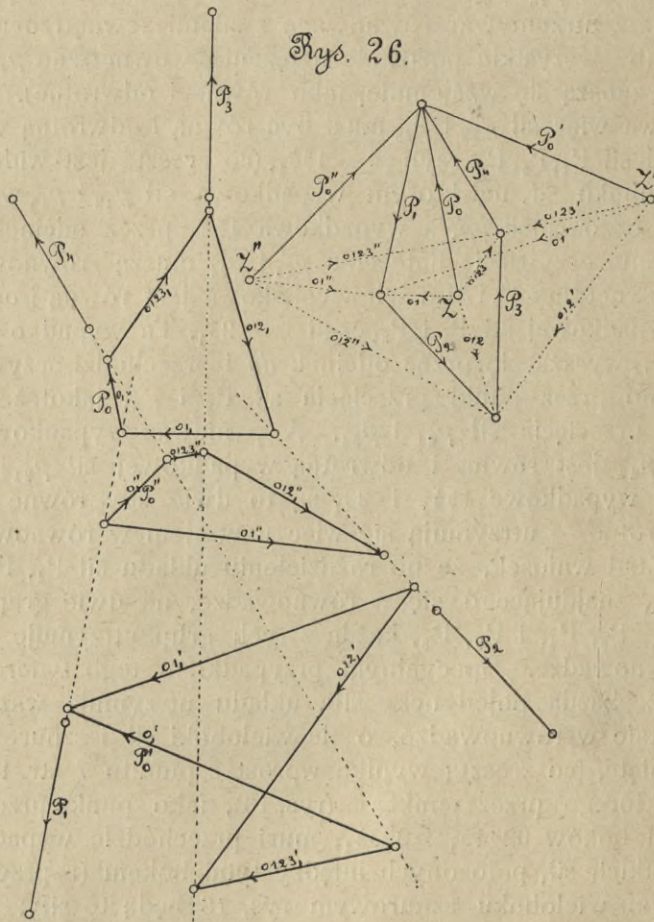
wielobokach, zgodnie ze stron. 14 rys. 17). Jeżeli wyobrazimy sobie, żeśmy przecięli wielobok sznurowy po linii XY i usunęli część prawą, to dla utrzymania w równowadze pozostałej części lewej musimy zastosować w punktach X' i Y' siły równe natężeniom wewnętrznym  $p_{12}$  i  $p_{43}$ . Widzimy więc, że natężenia  $p_{12}$  i  $p_{43}$ , które teraz stały się siłami zewnętrznymi, muszą utrzymywać równowagę z siłami zewnętrznymi  $P_1, P_5, P_4$  (bo wszystkie pozostałe natężenia wewnętrzne  $p_{45}, p_{54}, p_{51}, p_{15}$  znoszą się wzajemnie, jako równe i odwrotne). Wypadkowa więc sił  $p_{12}$  i  $p_{43}$  musi być równą i odwrotną wypadkowej sił  $P_1, P_5, P_4$ , czyli  $= -15_{41}$ , (co zresztą jest widoczne z wieloboku sił, na którym wypadkowa sił  $p_{12}$  i  $p_{43}$  wyraża się przez odcinek  $bd$ , a wypadkowa  $15_{41}$  przez odcinek  $db$ ). Tak samo oczywiście natężenia  $p_{21}$  i  $p_{34}$  muszą zrównoważać siły zewnętrzne  $P_2$  i  $P_3$  i ich wypadkowa jest równą i odwrotną wypadkowej sił  $P_2$  i  $P_3$ , czyli  $= -23_1$ . Ta wypadkowa sił  $p_{21}$  i  $p_{34}$  wyraża się przez odcinek  $db$  i przechodzi oczywiście zarówno przez punkt przecięcia sił  $P_2$  i  $P_3$ , jakoteż przez punkt przecięcia sił  $p_{21}$  i  $p_{34}$ . A ponieważ wypadkowa sił  $p_{12}$  i  $p_{43}$  jest równą i odwrotną wypadkowej sił  $p_{21}$  i  $p_{34}$ , więc i wypadkowe  $15_{41}$  i  $23_1$  są to dwie siły równe sobie i odwrotne — utrzymują się więc nawzajem w równowadze.

Ztąd wniosek, że po rozdzieleniu układu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , znajdującego się w równowadze, na dwie grupy sił, np.  $P_1, P_5, P_4$ , i  $P_2, P_3$ , każda z tych grup utrzymuje drugą w równowadze. Specyjalnym przypadkiem tego twierdzenia jest, że każda pojedyncza siła układu utrzymuje wszystkie pozostałe w równowadze, o ile wieloboki sił i sznurowy są zamknięte, [co zresztą wynika wprost z punktu 7 str. 18, według którego przez punkt L (rys. 18), jako punkt przecięcia dwóch boków  $02345_1$  i  $0234_1$ , musi przechodzić wypadkowa wszystkich sił, położonych między tymi bokami (a przy zamkniętym wieloboku sznurowym rys. 18 będą to siły: VI, II, III, IV) i wyrazi się w wieloboku sił przez odcinek  $ed$ , (łączący początkowy punkt siły VI z końcowym punktem siły IV). Jest to więc oczywiście siła V, ze zmianą tylko jej toku na odwrotny. A zatem siła V, jako równa i odwrotna wypadkowej sił VI, II, III, IV, utrzymuje te wszystkie siły w równowadze].

Zauważmy jeszcze, że obrawszy biegun wewnątrz zamkniętego wieloboku sił (rys. 25), otrzymaliśmy zamknięty wie-



lobok sznurowy, a otrzymalibyśmy zamkniętą linię ciśnień, gdyby siły zewnętrzne  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  działały w odwrotnych kierunkach. Obierając zaś biegun **zewnątrz** zamkniętego wieloboku sił, otrzymujemy zamiast części wieloboku sznurowego — linię ciśnień. Tak np. dla układu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$



(rys. 26) otrzymujemy dla bieguna  $Z$  wielobok sznurowy  $O_1, O_{11}, O_{12}, O_{123}$ ; dla bieguna  $Z'$  —  $O'_1, O'_{11}, O'_{12}, O'_{123}$  — z bokami  $O'_1$  i  $O'_{123}$  **rozciganymi** (zgodnie ze str. 15) a  $O'_1$  i  $O'_{12}$  — **ściskanymi**; dla bieguna zaś  $Z''$  —  $O''_1, O''_{11}, O''_{12}, O''_{123}$  — z bokami  $O''_1, O''_{12}, O''_{123}$  — **rozciganymi** i  $O''_{11}$  — **ściskanym**.

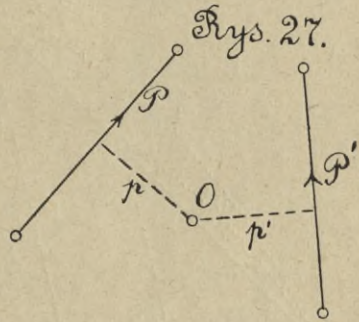


## ROZDZIAŁ II.

**§ 1. Momenty statyczne.** Jeżeli na ciało, mające jeden punkt stały  $O$ , działa siła  $P$ , nie przechodząca przez ten punkt, to usiłuje obracać ciało naokoło tego punktu, a skutek jej działania będzie proporcjonalny do wielkości siły i do jej odległości od owego punktu stałego.

Za miarę więc oddziaływania tej siły  $P$  na punkt  $O$  przyjmujemy **iloczyn z jej wielkości  $P$  przez jej odległość od punktu  $O$**  (rys. 27) i iloczyn ten nazywamy **momentem statycznym** — albo **momentem obrotu** — albo wreszcie krócej — **momentem siły  $P$  względem punktu  $O$** , nazywanego **biegunem momentu**. Odległość  $p$  bieguna  $O$  od siły  $P$  nazywamy **ramieniem momentu**.

Siła  $P$ , mająca lot oznaczony strzałką, wywołuje obrót względem bieguna  $O$  (rys. 27) w kierunku, zgodnym z obiegami wskazówki zegarowej, siła zaś odwrotnego z nią lotu wywoła oczywiście obrót w kierunku przeciwnym biegowi wskazówki zegarowej. Dla odróżnienia tych obu obrotów przyjmujemy **pierwszy** z nich, idący w kierunku, zgodnym



z biegiem wskazówki zegarowej — za  **dodatni**, drugi zaś — za  **ujemny**, a więc moment siły  $P$  względem bieguna  $O$  będzie  **dodatni**, czyli:  $M = +P \cdot p$ ; moment zaś siły  $P'$  względem tegoż bieguna  $O$  będzie  **ujemny**, (wywołuje ona bowiem obrót w kierunku przeciwnym biegowi wskazówki zegarowej) czyli:

$$M' = - P' \cdot p'$$

Z określenia momentu, jako iloczynu  $P \cdot p$ , wynika, że moment siły  $P$  względem bieguna, leżącego na linii siły  $P$ , jest  $= 0$  (bo  $p = 0$ ). Ponieważ siłę wyrażamy najczęściej w kilogramach, a ramię — jako długość — w jednostkach liniowych, np. w metrach, więc za jednostkę momentów przyjmujemy moment siły  $= 1$  kilogr., działającej w odległości od bieguna  $= 1$  metr., czyli t. z. **kilogramometr** i oznaczamy kilogramometrię przez  $\text{kgm}$  (a kilogramy przez  $\text{kg}$ ). Wykreślnie przedsta-

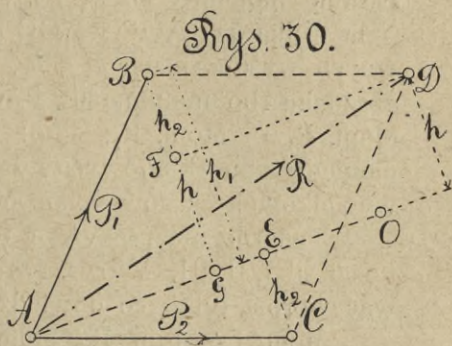
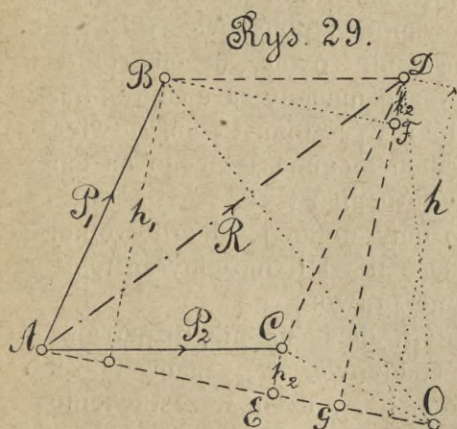






$P_m \cdot p_m$ , równy  $H \cdot h_m$ , wynosić będzie  $6h_m$ —i  $h_m$  mierzyć należy na skali sił, nadając każdej jednostce skali sił wartość 6 jednostek momentów (czyli 6 kilogramometrów). I odwrotnie— jeżeli przyjęliśmy np.  $H = 5$  jednostkom na skali sił, to moment  $P_m \cdot p_m$ , równy  $H \cdot h_m$ , wynosić będzie  $5 h_m$ —i  $h_m$  mierzyć należy na skali długości, nadając każdej jednostce skali długości wartość 5-u jednostek momentów (czyli 5 kgm). W razie zaś przyjęcia  $H$  za jednostkę długości (czy też siły) moment  $P_m \cdot p_m$ , równy  $H \cdot h_m$ , wyrazi się wprost przez  $h_m$ , mierzone na skali sił (wzgl. długości) i każdej jednostce tej skali nadać należy wartość jednej jednostki momentów.

**§ 2. Składanie momentów.** Suma algebraiczna momentów sił rozrzuconych na płaszczyźnie względem dowolnego bieguna równa jest momentowi wypadkowej tych sił względem tegoż bieguna. Dowiedzmy tego przedewszystkiem dla dwóch sił  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 29): Za momenty sił  $P_1$ ,  $P_2$  i  $R$



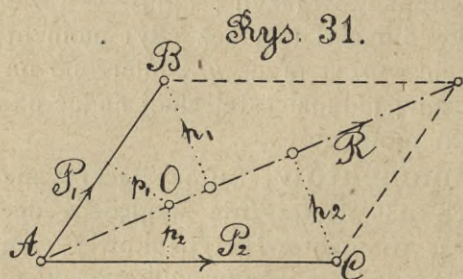
względem bieguna  $O$  uważać możemy podwójne pola trójkątów  $ABO$ ,  $ACO$ ,  $ADO$ , mających wspólną podstawę  $AO$ , a wysokości  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h$ . Trzeba więc tylko dowieść, że  $h_1 + h_2 = h$ . Przeprowadzając przez  $B$  równoległą do  $AO$ , otrzymujemy:  $FG = h_1$  i (na mocy równości trójkątów  $DBF$  i  $CAE$ )  $DF = CE = h_2$ ; a że  $FG + DF = h$ , więc:  $h_1 + h_2 = h$ , a zatem:

$$\text{Mom. } P_1 + \text{Mom. } P_2 = \text{Mom. } R.$$

Gdybyśmy biegun  $O$  obrali nie zewnątrz sił  $P_1$  i  $P_2$ , ale np. w  $O$  (rys. 30), to wspólną podstawą rozpatrywanych trójkątów będzie znowu  $AO$ , a przeprowadziwszy przez  $D$  równoległą do  $AO$ , otrzymamy:  $FG = h$  i  $BF = h_2$ ; a że  $BF +$



+FG =  $h_1$ , więc:  $h_2 + h = h_1$ , czyli:  $h_1 - h_2 = h$ . Przekonywamy się się zatem, że w tym wypadku: Mom.  $P_1$  - Mom.  $P_2$  = Mom. R, ale to tylko potwierdza nasze powyższe twierdzenie, (że suma algebraiczna momentów sił  $P_1$  i  $P_2$  jest równą momentowi wypadkowej R), gdyż moment siły  $P_2$  (wywołującej około bieguna O obrót w kierunku przeciwnym biegowi wskazówki zegarowej) musi być uważany za ujemny i wprowadzony do równania ze znakiem (-).



Jeżeli wreszcie obierzemy biegun O na wypadkowej R sił  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 31), to moment siły R względem O będzie = 0,

więc suma algebraiczna momentów sił  $P_1$  i  $P_2$  musi być = 0. Istotnie momenty sił  $P_1$  i  $P_2$ , przedstawione jako podwójne pola trójkątów AOB i AOC o wspólnej podstawie AO i równych wysokościach  $h_1 = h_2$ , są sobie równe, ale odwrotnego znaku (bo moment siły  $P_2$  uważać musimy za ujemny), t. j. Mom.  $P_1 = -\text{Mom. } P_2$ , albo: Mom.  $P_1 + \text{Mom. } P_2 = 0$ , a więc momenty obu składowych względem bieguna, leżącego na ich wypadkowej, są równe, ale odwrotnego znaku.

Twierdzenie powyższe możemy uogólnić dla dowolnej ilości sił I, II, III, IV (rys. 14): Do sił I i II możemy zastosować wprost tylko co dowiedzione prawo:

Mom. I + Mom. II = Mom.  $R_{12}$ , ale następnie, rozpatrując siły  $R_{12}$  i III, jako składowe wypadkowej  $R_{123}$ , mamy także:

Mom.  $R_{12} + \text{Mom. III} = \text{Mom. } R_{123}$ , czyli w zestawieniu z powyższem równaniem:

$$\text{Mom. I} + \text{Mom. II} + \text{Mom. III} = \text{Mom. } R_{123}.$$

Podobnie otrzymamy dalej:

Mom.  $R_{123} + \text{Mom. IV} = \text{Mom. } R_{1234}$  i uwzględniając poprzednie równanie:

$$\text{Mom. I} + \text{Mom. II} + \text{Mom. III} + \text{Mom. IV} = \text{Mom. } R_{1234}.$$

Oznaczając każdą z tych sił i jej ramię odpowiednio przez  $P_m$  i  $p_m$ , mamy zatem wogóle:

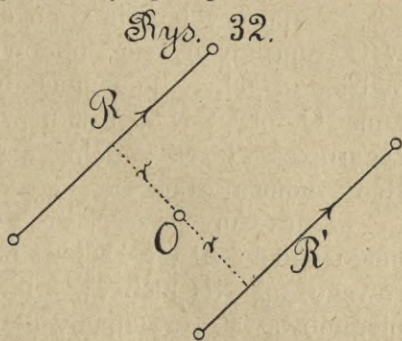
$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + \dots = \Sigma P \cdot p = R \cdot r.$$

W tej sumie algebraicznej wyrazy, odnoszące się do momentów ujemnych, będą miały oczywiście znak (-).

A więc, o ile dla danego układu sił określiliśmy już



wielkość i lot wypadkowej za pomocą wieloboku sił, to jej położenie możemy wyznaczyć **bez wykreślania wieloboku sznurowego** z powyższego równania, w którym dla danego układu sił można uważać za wiadome wszystkie  $P$  i  $p$  (dla dowolnego bieguna  $O$ ). A wprawdzie dla otrzymanego z powyższego równania ramienia  $r$  możemy—przy danym w wieloboku sił kierunku i locie wypadkowej—przeprowadzić **dwie** wypadkowe  $R$  i  $R'$  (rys. 32)—każdą z innej strony bieguna  $O$ —ale, o ile dla  $R.r$  otrzymaliśmy z równania wartość  **dodatnią**—wybrać musimy z dwóch wypadkowych  $R$  i  $R'$ —wypadkową  $R$ , wywołującą około bieguna  $O$  obrót w kierunku zgodnym z biegiem wskazówki zegarowej, t. j. dającą moment  **dodatni**. (W razie zaś otrzymania dla  $R.r$  wartości  **ujemnej**, wybierzemy oczywiście nie  $R$ , lecz  $R'$ ). —



**§ 3. Moment statyczny układu sił na płaszczyźnie.** Na mocy powyższego prawa momentów możemy oznaczyć wykreślnie moment statyczny układu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (rys. 20) rozrzuconych jakkolwiek na płaszczyźnie względem dowolnego bieguna  $O$ . Wykreśliwszy wielobok sił  $abcde$  i wielobok sznurowy  $HJKL$  dla dowolnego bieguna  $Z$ , otrzymujemy przechodzącą przez punkt  $S$  (t. j. przez punkt przecięcia boków skrajnych  $0_1$  i  $01234_1$ ) wypadkową  $R$  sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

Momentem tej wypadkowej (lub też momentem całego układu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) względem danego bieguna  $O$  będzie iloczyn z siły  $R$  przez ramię  $r$ , czyli  $R.r$ . Możemy jednak wyrazić ten moment jeszcze inaczej: Dwa boki skrajne  $0_1$  i  $01234_1$ , określające przez swój punkt przecięcia  $S$  położenie wypadkowej  $R$ , tworzą z prostą, przechodzącą przez  $O$  równoległą do  $R$ , trójkąt  $SGF$ , podobny do trójkąta  $Zae$  w obec równoległości wszystkich trzech boków. Wysokościami tych trójkątów są  $r$  i  $H$  (odległość bieguna  $Z$  od odcinka  $ae$ , wyrażającego wypadkową  $R$ ), a zatem:  $\frac{GF}{r} = \frac{ae}{H}$ , albo, oznaczając odcinek  $GF$  przez  $y$  i zauważając, że  $ae=R$ , otrzymu-



jemy:  $\frac{y}{r} = \frac{R}{H}$ , czyli  $R \cdot r = H \cdot y$ . Tak więc moment układu sił rozrzuconych na płaszczyźnie względem dowolnego bieguna  $O$  jest równy iloczynowi z odległości biegunowej ( $H$ ) przez odcinek ( $y$ ), utworzony przez odpowiadające wypadkowej boki skrajne wieloboku sznurowego na linii, przechodzącej przez biegun  $O$  równoległe do wypadkowej  $R$  (rys. 20).

Wziąwszy biegun  $O$  po drugiej stronie wypadkowej, np. w  $O_1$ , musimy uważać odpowiednie  $y_1$  za **ujemne** i moment będzie  $= -H \cdot y_1$ , bo wypadkowa  $R$  wywołuje względem bieguna  $O_1$  obrót w kierunku przeciwnym biegowi wskazówki zegarowej. Jeżeli zaś biegun  $O$  weźmiemy na wypadkowej  $R$ , to moment staje się  $= 0$  i odpowiednie  $y$  istotnie jest  $= 0$ .

Zauważmy jeszcze, że wyznaczwszy moment tego samego układu sił (rys. 20) za pomocą innego wieloboku sznurowego, np.  $NH'J'K'L'M$ , z innym biegunem  $Z'$  i z odległością biegunową  $H'$ , otrzymamy oczywiście tę samą wielkość momentu:  $M = H' \cdot y' = H \cdot y = R \cdot r$ , bo istotnie na rys. 20:

$$H \cdot y = 12,3 \text{ mm} \times 52,8^{\text{mm}} \approx 650 \text{ mm}^2; \quad H' \cdot y' = 29,8 \text{ mm} \times 21,8 \text{ mm} = \\ = \approx 650 \text{ mm}^2 \quad \text{i} \quad R \cdot r = 64,3 \text{ mm} \times 10,1 \text{ mm} = \approx 650 \text{ mm}^2.$$

W iloczynie  $H \cdot y$  odległość biegunowa  $H$  wyraża (zgodnie ze str. 24) **siłę**, odcinek zaś  $y$  — **długość**; można jednak oczywiście brać  $H$  na skali **długości**, a  $y$  na skali **sił** bez zmiany rezultatu. Jeżeli zaś  $H$  przyjęliśmy = jednostce długości (lub siły) — co, w obec dowolności przy obraniu bieguna  $Z$ , jest zawsze możliwem — to  $y$  daje nam **bezpośrednio** wielkość momentu i mierząc ten odcinek na właściwej skali, t. j. na skali **sił** (wzgl. **długości**), nadać musimy każdej jednostce tej skali wartość jednej jednostki **momentów**.

**§ 4. Moment statyczny układu sił równoległych.** Sposób powyższy, według którego wyrażamy moment, jako iloczyn z odległości biegunowej  $H$  przez odcinek  $y$ , jest szczególnie dogodny przy oznaczaniu momentu sił równoległych (rys. 33). Wielobok sił jest wtedy linią prostą  $abcde$ , a więc odległość biegunowa  $H$  jest **stałą**, bez względu na ilość i wielkość sił danych, moment zaś sił równoległych jest jednakowy względem wszystkich biegunów, leżących na prostej, równoległej do sił, w obec czego możemy nazywać moment sił równoległych **względem bieguna  $O$**  momentem tychże sił **względem linii  $OO_1$** , przechodzącej przez

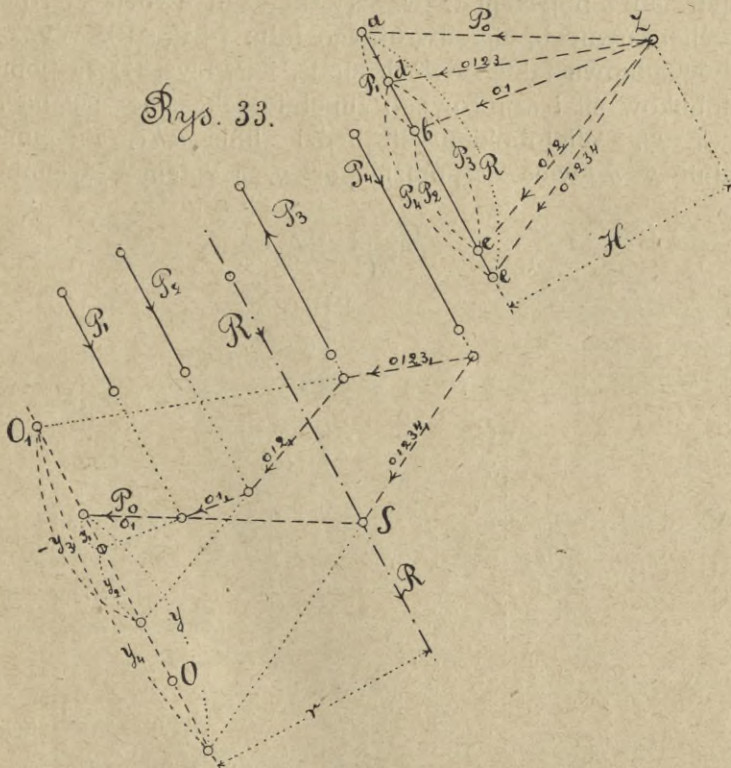


biegun  $O$  równoległe do sił. Wykreśliwszy dla tych sił wielobok sznurowy  $0_1, 01_1, 012_1, 0123_1, 01234_1$ , otrzymujemy moment wypadkowej tych sił względem jakiegokolwiek bieguna  $O$  (lub też linii  $OO_1$ )—równy, jak wiadomo, iloczynowi  $R.r$ —(za pomocą boków skrajnych  $0_1$  i  $01234_1$ , odpowiadających wypadkowej), jako iloczyn  $H.y$ . Istotnie na rys. 33:

$$R.r = 37,4 \text{ mm} \times 32,1 \text{ mm} = \approx 1200 \text{ mm}^2 \quad \text{i}$$

$$H.y = 33,7 \text{ mm} \times 35,6 \text{ mm} = \approx 1200 \text{ mm}^2.$$

I zupełnie tak samo dla siły  $P_1$ , za pomocą odpowiadających jej boków skrajnych  $0_1$  i  $01_1$ , otrzymujemy moment  $H.y_1$ ;



dla siły  $P_2$ —moment  $H.y_2$ ; dla siły  $P_3$ , idącej w kierunku odwrotnym, a więc wywołującej względem bieguna  $O$ , moment ujemny, otrzymujemy za pomocą boków skrajnych  $012_1$  i  $0123_1$  moment— $H.y_3$  i dla siły  $P_4$ —za pomocą  $0123_1$  i  $01234_1$ —otrzymujemy moment  $H.y_4$ . A więc: **Każde dwa boki wieloboku sznurowego układu sił równoległych**, np.  $0_1$  i  $01_1$ , (stanowiące boki skrajne dla sił  $P_1$  i  $P_2$ ) tworzą na linii  $OO_1$ , (prze-



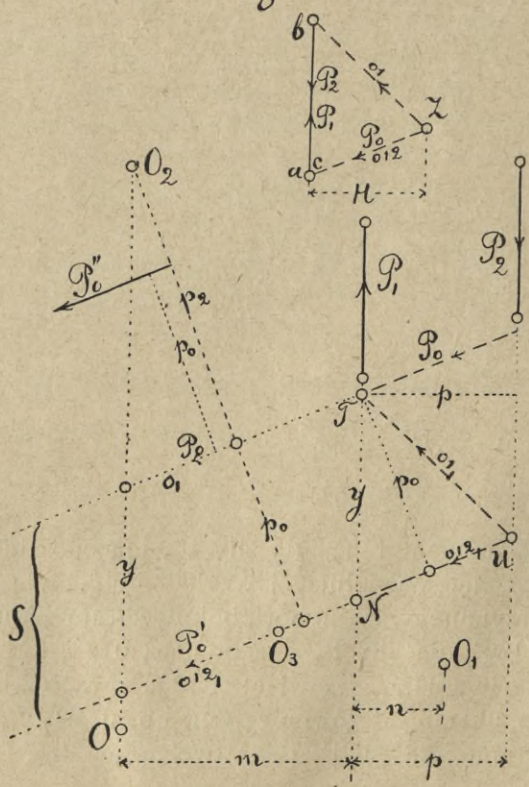
chodzącej przez biegun  $O$  równoległe do układu sił) odcinek (równy oczywiście  $y_1 + y_2$ ), który — pomnożony przez odległość biegunową  $H$  — daje moment wypadkowej sił  $P_1$  i  $P_2$ , (położonych między wspomnianymi bokami  $O_1$  i  $O_1 2_1$ ) względem bieguna  $O$  (lub linii  $OO_1$ ).

Widzimy również z rysunku, że:  $y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = y$ ,  
 a więc:  $H (y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = H \cdot y$ ,

albo też:  $H \cdot y_1 + H \cdot y_2 - H \cdot y_3 + H \cdot y_4 = H \cdot y$ , co jest nowem stwierdzeniem powyższego prawa momentów.

**§ 5. Moment pary sił.** Spotkaliśmy się powyżej (str. 28) z pojęciem t. zw. **pary sił**, czyli dwóch sił równoległych i równych, ale odwrotnego lotu:  $(+P, -P)$ . Wyznamy wypadkową takich dwóch sił  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 34) za pomocą wieloboków sił i sznurowego zupełnie tak samo, jak na rys. 22, str. 22. Wielobokiem sił będzie linia  $abc$ , ale punkt  $c$  upadnie w  $a$ , więc  $Zc$  pójdzie po  $Za$ , a zatem w wieloboku

Rys. 34.





sznurowym bok  $012_1$  będzie równoległym do  $0_1$  i punkt przecięcia  $0_1$  z  $012_1$  (S), a razem z nim i wypadkowa R oddali się cała w nieskończoność, (bo przechodzić musi przez dwa punkty w nieskończoności: punkt przecięcia  $0_1$  i  $012_1$  i punkt przecięcia  $P_1$  z  $P_2$ ). Tak samo **analitycznie**: Z wzoru podanego na str. 22:  $\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1}$  wynika (w obec  $P_1 = P_2$ )  $a = b$ , ale—według wypowiedzianego tamże prawa—wypadkowa dwóch sił równoległych o lotach odwrotnych musi przechodzić **zewnątrz** obu składowych  $P_1$  i  $P_2$ ; te zaś oba warunki mogą być spełnione **jednocześnie** tylko w ten sposób, że wypadkowa, (której wielkość jest:  $R = P_1 - P_2 = 0$ ) musi być w nieskończonej odległości od sił  $P_1$  i  $P_2$ , bo tylko wtedy może być  $a = b$  (rys. 22).

**Wypadkową więc pary sił jest siła nieskończenie mała i działająca w nieskończoności.**

Dla tejże pary sił (+P, -P) otrzymać możemy według powyższego (str. 38) moment M względem dowolnego bieguna O jako iloczyn z odległości biegunowej H przez odcinek  $y$ , utworzony między skrajnymi bokami  $0_1$  i  $012_1$  na linii, przechodzącej przez biegun O równoległe do wypadkowej.

Odcinek ten (rys. 34)—w obec równoległości boków  $0_1$  i  $012_1$ —będzie dla jakiegokolwiek bieguna O równy  $y$ , a więc:  $M = H \cdot y$ , albo, ponieważ (wskutek podobieństwa trójkątów NTU i  $abZ$ )  $\frac{H}{ab} = \frac{p}{y}$ , więc:

$$M = H \cdot y = ab \cdot p = P \cdot p.$$

Określając ten sam moment M **analitycznie**, otrzymujemy dla jakiegokolwiek bieguna O **zewnątrz** pary sił (+P, -P) (rys. 34):  $M = -P_1 \cdot m + P_2 (m + p) = +P \cdot p$  (w obec:  $P_1 = P_2 = P$ ) i podobnie dla bieguna  $O_1$  **wewnątrz** pary sił:

$$M = +P_1 \cdot n + P_2 (p - n) = +P \cdot p.$$

Jeżeli zaś zmienimy lot obu sił P na odwrotny, to i moment zmieni swój znak i będzie =  $-P \cdot p$ .

Widzimy zatem, że **moment pary sił jest dla każdego bieguna = iloczynowi z jednej siły przez odległość między siłami pary**, jest więc wielkością stałą, **niezależną od położenia bieguna**. (Inaczej zresztą być nie może, bo skoro wypadkową pary sił jest nieskończenie mała siła, leżąca w nieskończoności, to ramię jej jest—dla wszystkich biegunów **w skończoności**—nieskończenie wielkie i **jednakowe**, a iloczyn z nieskończenie małej siły przez nieskończenie wielkie ramię daje

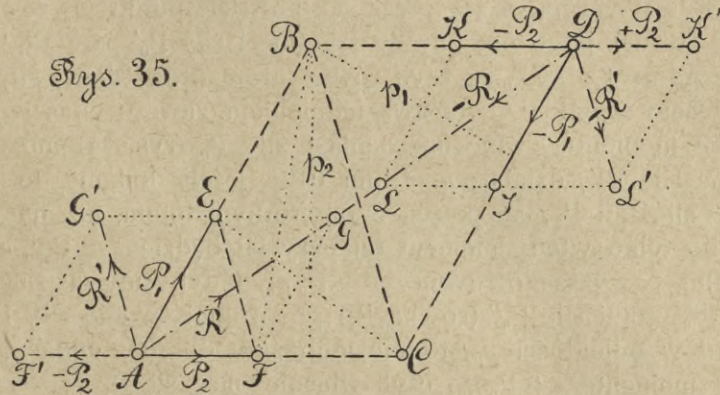


ową skończoną, stałą wielkość  $P.p$ . Dla bieguna zaś w nieskończoności moment pary sił będzie  $= 0$ , bo w tym razie owa nieskończoność mała i nieskończoność odległa siła przechodzi przez bieguna, więc moment jej jest  $= 0$ . Wobec powyższego możemy przyjąć wielkość tego momentu  $P.p$  jako miarę pary sił  $(+P, -P)$ , a rzeczywista wielkość pary sił będzie zawsze równą temuż momentowi, podzielonemu przez stałe — nieskończoność długie ramię. Ztąd wynika, że — niezależnie od wielkości i kierunku sił — każde dwie pary sił, mające jednakowy moment, uważać należy za równe i mogące zastąpić jedna drugą i na odwrót: dwie równe pary sił muszą mieć momenty równe. Na rys. 34 widzimy np., że po dodaniu za pomocą wieloboku sznurowego do siły  $P_0$  pary sił  $P_1$  i  $P_2$  otrzymujemy jako rezultat siłę  $012_1$  (równą sile  $P_0$  według wieloboku sił), którą oczywiście można otrzymać również przez dodanie do tej samej siły  $P_0$  dwóch innych sił: siły odwrotnej do  $P_0$ , czyli  $-P_0$  i siły  $012_1$  (t. j. pary sił:  $-P_0$  i  $012_1$ ), więc rezultat działania tych obu par sił: 1) pary sił  $P_1$  i  $P_2$  i 2) pary sił:  $-P_0$  i  $012_1$  jest jednakowy, a zatem są to 2 pary sił równe i zgodnie z powyższem muszą mieć równe momenty. Istotnie, oznaczając przez  $p$  i  $p_0$  długość prostopadłych opuszczonych z  $T$  na  $P_2$  i  $012_1$ , otrzymujemy moment pary sił  $P_1$  i  $P_2$ :  $P.p$ , a moment pary sił  $-P_0$  i  $012_1$  będzie  $= P_0.p_0$ . W trójkącie UNT:  $NT.p = UN.p_0$ , ztąd:  $\frac{p}{p_0} = \frac{UN}{NT}$ , ale wskutek podobieństwa trójkątów z bokami równoległymi: UNT i Zab mamy:  $\frac{UN}{NT} = \frac{Za}{ab}$ , więc:  $\frac{p}{p_0} = \frac{Za}{ab}$ , czyli:  $\frac{p}{p_0} = \frac{P_0}{P}$ , a ztąd:  $P.p = P_0.p_0$ . Widzimy zatem, że obie pary sił  $P_1$  i  $P_2$  i  $-P_0$  i  $012_1$  mają równe momenty.

Dowiedźmy jeszcze geometrycznie, że dwie pary sił: AE i DJ, czyli  $(+P_1, -P_1)$  i AF i DK, czyli  $(+P_2, -P_2)$ , mające równe momenty (rys. 35), a loty odwrotne, znoszą się wzajemnie. Ponieważ:  $P_1.p_1 = P_2.p_2$ , a siły  $P_1$  i  $P_2$  wyrażają się przez odcinki AE i AF, to:  $AE.p_1 = AF.p_2$ , czyli pola trójkątów AEC i AFB są równowielkie, a zatem (po odjęciu od obu pól trójkątów trójkąta AEF) pole trójkąta EFC = polu trójkąta EFB, ztąd wynika (w obec wspólnej podstawy EF) że EF jest równoległą do BC, więc:  $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$ , czyli:  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{AB}{AC}$ ,



z czego wnosimy, że wypadkowa  $R=AG$  sił  $AE$  i  $AF$  idzie po przekątnej równoległoboku  $ABDC$  i oczywiście tak samo wypadkowa  $DL$  sił  $DJ$  i  $DK$ , więc te obie wypadkowe, jako równe i odwrotne, nawzajem się znoszą. [Gdybyśmy jednak



zmienili lot jednej pary sił na odwrotny, (t. j. wzięli np. zamiast siły:  $+P_2 = AF$  — siłę:  $-P_2 = AF'$ , a zamiast siły:  $-P_2 = DK$  — siłę:  $+P_2 = DK'$ ), otrzymalibyśmy w rezultacie dwie nowe siły  $R' = AG'$  i  $-R' = DL'$ , działające **nie** w jednej linii, równe, równoległe, ale odwrotnego lotu, czyli **nową parę sił**, wypadkową dwóch poprzednich i moment jej byłby równy sumie momentów obu par].

Tak więc dodanie do jakiegokolwiek siły  $P_0$  (rys. 34) pary sił  $P_1$  i  $P_2$  nie wywiera żadnego wpływu na jej wielkość, kierunek i lot (gdyż otrzymujemy w rezultacie siłę  $012_1$  równą i równoległą sile  $P_0$ ), przesuwa ją tylko w położenie równoległe do pierwotnego, w którym moment będzie zwiększony właśnie o moment pary sił. Tak np. przed przesunięciem siły  $P_0$  moment jej względem bieguna  $O_2$  był  $P_0 \cdot p_2$ ; moment zaś tejże siły  $P_0$ , przesuniętej wskutek dołączenia pary sił  $(+P_1, -P_2)$  w położenie  $012_1$  (oznaczmy ją  $P_0'$  — wielkość jej jest  $= P_0$ ), będzie oczywiście  $= P_0' (p_2 + p_0) = P_0 \cdot p_2 + P_0 \cdot p_0$ , czyli, biorąc zamiast  $P_0 \cdot p_0$  równy mu iloczyn  $P \cdot p$ , widzimy, że: **wskutek dodania do siły  $P_0$  pary sił  $P_1$  i  $P_2$  z momentem  $P \cdot p$  siła  $P_0$  przesuniętą została w położenie  $P_0'$ , czyli  $012_1$ , równoległe do pierwotnego  $P_0$ , na odległość:  $p_0 = \frac{P \cdot p}{P_0}$ , a moment jej zwiększył się o moment tej pary sił:  $P \cdot p$ . Zwa-**



żywszy jeszcze, że skoro po dodaniu do siły  $P_0$  pary sił z momentem  $+P_0 p_0$  otrzymujemy siłę  $P_0'$ , to (po odjęciu od siły  $P_0'$  pary sił z momentem  $+P_0 p_0$ , czyli) po dodaniu do siły  $P_0'$  pary sił z momentem odwrotnym  $-P_0 p_0$  otrzymamy siłę  $P_0$ . Innymi słowy: **Zamiast danej siły  $P_0$  możemy wziąć siłę  $P_0'$  jej równą, idącą przez jakikolwiek punkt  $O_3$  równoległe do niej, jeżeli dodamy do tej nowej siły  $P_0'$  parę sił, mającą moment  $= -P_0 p_0$ , czyli równy momentowi danej siły  $P_0$  względem bieguna  $O_3$  (z uwzględnieniem zawsze właściwego znaku momentu), więc np. zamiast siły  $P_0$  (rys. 34) możemy wziąć siłę  $P_0'$ , działającą w linii  $O_1 2_1$ , jeżeli dodamy do niej parę sił  $P_1$  i  $P_2$ , ale każdą z odwrotnym lotem, niż na rys. 34, bo tylko wtedy moment tej pary sił będzie  $= -P_0 p_0$ , czyli według powyższego również  $= -P_0 p_0$ . Gdybyśmy zaś zamiast siły  $P_0$  wzięli siłę  $P_0''$  (równą  $P_0$ ) po drugiej stronie siły  $P_0$  — także w odległości  $p_0$ , to musielibyśmy do niej dodać parę sił z momentem  $+P_0 p_0$ , czyli właśnie parę sił  $P_1$  i  $P_2$  z ich lotem według rys. 34.**

## § 6. Porównanie warunków równowagi wykreślnych z analitycznymi.

Warunki analityczne równowagi sił, działających na płaszczyźnie polegają — jak wiadomo — na tem, że suma algebraiczna składowych danych sił w dwóch przecinających się kierunkach, a także suma algebraiczna momentów statycznych względem każdego dowolnego punktu na płaszczyźnie (wystarczy uwzględnienie 3-ch punktów, nie leżących na jednej prostej) winna być  $= 0$ . Wykreślne zaś warunki równowagi streszczają się (według str. 27) w tem, że wieloboki sił i sznury muszą być zamknięte.

Pierwszy warunek analityczny (suma algebraiczna składowych w 2-ch przecinających się kierunkach) objęty jest właśnie pierwszym warunkiem wykreślnym (zamknięcia wieloboku sił). Jest bowiem oczywiście, że suma algebraiczna składowych sił, tworzących zamknięty wielobok, musi być dla każdego kierunku  $= 0$ , a że równoległe przenoszenie siły nie zmienia wcale wielkości (ani znaku) jej składowych, więc suma algebraiczna składowych sił w położeniu ich rzeczywiście jest również dla każdego kierunku  $= 0$ .

Ten pierwszy warunek równowagi — analityczny, lub wykreślny — jest dla równowagi sił niezbędnym, ale wystarcza-



jącym jest on tylko dla układu sił, przechodzących przez jeden punkt. Dowiedliśmy bowiem (na str. 27 i 28), że dla układu sił rozrzuconych na płaszczyźnie niezbędnem jest również, aby i wielobok sznurowy był zamknięty. Ten drugi warunek wykreślony odpowiada w zupełności drugiemu warunkowi analitycznemu (że suma algebraiczna momentów statycznych względem każdego punktu na płaszczyźnie ma być  $= 0$ ). Bo skoro wypadkowa ogólna wskutek zamknięcia wieloboku sił i sznurowego jest  $= 0$  i nie może (według str. 27 i 28) być sprowadzoną do pary sił, to będzie równym  $0$  dla każdego punktu moment tej wypadkowej, a więc — równa temuż momentowi (zgodnie ze str. 33) — suma algebraiczna momentów wszystkich sił musi być dla każdego punktu  $= 0$ .

## ROZDZIAŁ III.

### Belka prosta.

Pod **belką** (dźwigarem) rozumiemy wogóle część budowli, służącą do przeniesienia na podpory działających na nią sił zewnętrznych. Linję, łączącą środki ciężkości poszczególnych przekrojów, nazywamy osią belki i stale przyjmować będziemy, że siły, obciążające belkę, działają w jej osi.

Belkę, podpartą w dwóch punktach, t. zw. **podporach**, leżącą zazwyczaj poziomo i obciążoną siłami pionowymi, nazywamy **belką prostą**.

Wskutek działania sił pionowych belka wywiera ciśnienie na podpory, w których powstają przez to ciśnienia przeciwdziałające, utrzymujące cały układ w równowadze. Te właśnie przeciwdziałające ciśnienia podpór nazywamy oddziaływaniami podpór, albo **odporami** i oznaczać je będziemy literami  $A_1$  i  $B_1$  (same zaś podpory — literami A i B).

Odpory i siły, obciążające belkę, nazywamy **siłami zewnętrznymi** w przeciwstawieniu do wywoływanych przez nie w belce **sił wewnętrznych**, utrzymujących siły zewnętrzne w równowadze.



Obciążenie, działające wprost na belkę, nazywamy **obciążeniem bezpośrednim**; obciążenie zaś, przechodzące za pomocą konstrukcyi pomocniczych na oddzielne punkty belki, jak np. przy urządzeniu belek poprzecznych i podłużnych w mostach, nazywamy **obciążeniem pośrednim**.

Rozróżniamy także **obciążenie stałe**, np. ciężar własny, i **ruchome** (zienne), działające tylko chwilowo, np. podczas przebiegu pociągu przez most, podczas obciążenia wiazara dachowego śniegiem i t. p.

## A. Obciążenie bezpośrednie.

### § 1. Obciążenie stałe siłami skupionemi.

#### a) Oznaczenie odporów.

Jak powiedziano wyżej — odpory utrzymują w równowadze wszystkie obciążenia pionowe belki; jeżeli zatem wyobrazimy sobie belkę, podpartą w dwóch punktach A i B (rys. 23) i obciążoną siłami pionowemi I, II, III, IV, to jak widziliśmy na str. 24, wszystkie te siły pionowe są utrzymywane w równowadze przez dwie siły, odwrotne siłom  $P_1$  i  $P_2$  i wyrażone przez odcinki  $na$  i  $en$ . Te siły zatem są szukanymi odporami  $A_1$  i  $B_1$ . Tak więc dla oznaczenia odporów  $A_1$  i  $B_1$  belki, obciążonej siłami I, II, III, IV, **wykreślamy dla tych sił wieloboki sił i sznurowy, a przeprowadziwszy przez biegun Z równoległą  $Zn$  do boku TU, zamykającego wielobok sznurowy (łączącego punkty przecięcia boków skrajnych  $0_1$  i  $01234_1$  z pionowemi przez podpory:  $X_1X_2$  i  $Y_1Y_2$ ), otrzymujemy odcinki  $na$  i  $en$ , wyrażające odpory  $A_1$  i  $B_1$ . Oczywiście jest przytem, że wszystkie siły zewnętrzne:  $A_1, I, II, III, IV, B_1$  utrzymują się wzajemnie w równowadze (w obec zamkniętych wieloboków sił:  $nabcden$  i sznurowego: TJKLMUT).**

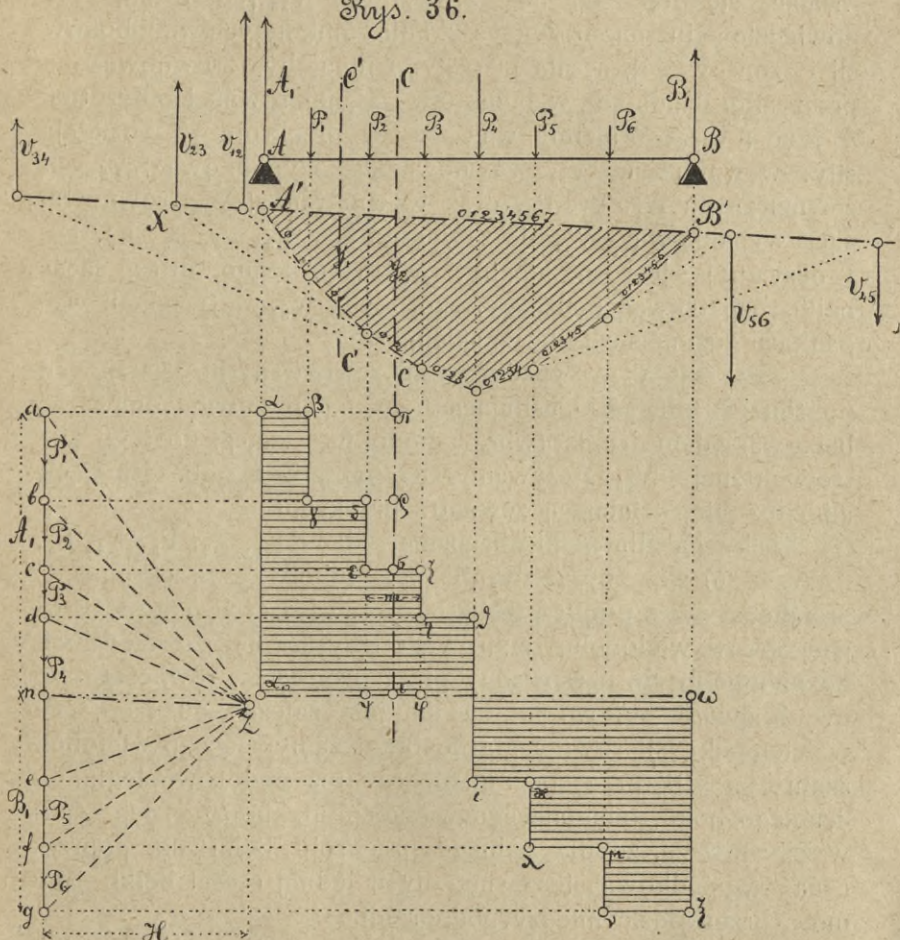
#### b) Siły poprzeczne.

Siły zewnętrzne:  $A_1, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1$  (rys. 36), działające na rozpatrywany przekrój belki CC, usiłują przesunąć część lewą belki pionowo względem części prawej, a prócz tego usiłują wygiąć jedną część belki względem drugiej. Tym obu działaniom przeciwdziałają siły wewnętrzne i utrzymują cały układ w równowadze. Wyobrazmy sobie belkę przeciętą w przekroju CC (rys. 36) i część jej prawą usuniętą, to dla utrzymania pozostałej — lewej części w równo-



wadze musimy na przekrój CC oddziaływać taką siłą zewnętrzną  $V$ , któraby zastąpiła w zupełności siły wewnętrzne, działające poprzednio w przekroju i utrzymujące równowagę układu. Na lewą część belki działają siły zewnętrzne  $A_1, P_1,$

Srys. 36.



$P_2$ , których wypadkowa  $V_{23}$  przechodzi (zgodnie z punktem 7 str. 18) przez punkt przecięcia X boku 012 i zamykającego  $A'B'$  i wyraża się przez odcinek  $nc$ . A więc owa siła  $V$ , mająca te siły zewnętrzne utrzymywać w równowadze, musi być



równą i odwrotną wypadkowej  $V_{23}$ , czyli  $= -V_{23}$  i wyraża się przez odcinek  $cn$ .

Rozważając tak samo część **prawą** — po usunięciu lewej — zauważmy przedewszystkiem, że działające na nią siły zewnętrzne  $P_3, P_4, P_5, P_6, B_1$  dadzą wypadkową, przechodzącą przez punkt przecięcia  $X$  boku 012 i zamykającego  $A'B'$  i wyrażającą się przez odcinek  $cn$ , czyli  $= -V_{23}$  [co zresztą było dowiedzione już na str. 29 (rys. 25) dla zamkniętych wieloboków sił i sznurowego], a siła ta ( $-V_{23}$ ) musi być zrównoważona przez siłę, działającą w przekroju  $CC$ , jej równą i odwrotną, a więc  $+V_{23}$ . Widzimy więc, że w przekroju  $CC$  działają siły: wewnętrzna  $-V_{23}$ , równoważąca wypadkową  $+V_{23}$  sił zewnętrznych  $A_1, P_1, P_2$ , oraz wewnętrzna  $+V_{23}$ , równoważąca wypadkową  $-V_{23}$  sił zewnętrznych  $P_3, P_4, P_5, P_6, B_1$ . I oczywiście jest to zupełnie wszystko jedno, którą część belki rozpatrywać będziemy, skoro siły  $V_{23}$  w tych obu wypadkach różnią się tylko znakiem.

Taką siłę  $V_{23}$ , wypadkową sił zewnętrznych, działających po jednej stronie belki, usiłującą przesunąć pionowo jedną część belki względem drugiej (wbrew niedopuszczającej do tego siły wewnętrznej  $-V_{23}$ ) nazywamy **siłą poprzeczną**, albo **ścinającą**, albo też siłą, działającą zewnątrz przekroju.

Tak więc dla belki obciążonej siłami  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  (rys. 36) **siła poprzeczna** dla jakiegokolwiek przekroju  $CC$  przechodzi przez punkt przecięcia dwóch leżących pod przekrojem boków wieloboku sznurowego i wyraża się przez odcinek na wieloboku sił, ograniczony przez promienie, równoległe do owoch dwóch boków, lot zaś jej jest zależny od tego, czy w wieloboku sił równoległa do boku zamykającego wielobok sznurowy  $A'B'$  przechodzi **nad** — czy też **pod** równoległą do drugiego boku, odcinającego wielkość siły poprzecznej. Zauważmy jeszcze, że dla żadnego przekroju belki siła poprzeczna — wypadkowa sił zewnętrznych jednej części belki — nie może przechodzić między podporami.

Dla ujednostajnienia dalszych rozważań przyjmować będziemy zawsze, jako **siłę poprzeczną danego przekroju belki**, wypadkową lewej grupy sił zewnętrznych i uważać ją będziemy za dodatnią, o ile jej lot będzie szedł do góry (wypadkowa zaś **prawej** grupy sił zewnętrznych jest oczywiście równą poprzedniej, ale odwrotnego lotu i działa w tej samej prostej, co poprzednia, więc ją równoważy).



W obec powyższego dla części belki między podporą A i pierwszą siłą  $P_1$  siła poprzeczna:  $V_{01} = A_1$

między siłą  $P_1$  i  $P_2$  :  $V_{12} = A_1 - P_1$

” ”  $P_2$  i  $P_3$  :  $V_{23} = A_1 - P_1 - P_2$

” ”  $P_3$  i  $P_4$  :  $V_{34} = A_1 - P_1 - P_2 - P_3$

” ”  $P_4$  i  $P_5$  :  $V_{45} = A_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4$

” ”  $P_5$  i  $P_6$  :  $V_{56} = A_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$

” ”  $P_6$  i  $B_1$  :  $V_{67} = A_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 = -B_1$ .

Przyjmując linię poziomą, idącą przez  $n$ , za oś i przeprowadzając przez wszystkie inne punkty wieloboku sił linie poziome między odpowiednimi pionowymi liniami sił (rys. 36) otrzymujemy linię schodową  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$  — t. z. **krzywą sił poprzecznych**, na której siłę poprzeczną dla każdego przekroju belki wyraża odcinek, liczony od przyjętej za oś poziomej przez  $n$  i z której widzimy, że siła poprzeczna zmienia się tylko w punktach działania sił, że zacząwszy od podpory A aż do przekroju, odpowiadającego sile  $P_4$ , jest **dodatnią**, a w tym właśnie przekroju zmienia się odrazu na **ujemną** i że jest to właśnie przekrój z największym odcinkiem  $y$  w wieloboku sznurowym, a poza nim odcinki  $y$  zmniejszają się.

### c) Momenty gnące.

Siły zewnętrzne usiłują — jak wspomnieliśmy wyżej — nie tylko przesuwac, ale również i wyginać jedną część belki względem drugiej w rozpatrywanym przekroju, przeciwdziałają zaś temu powstające w przekroju natężenia wewnętrzne.

Rozpatrując znowu lewą część belki AB (rys. 36), nazywać będziemy **momentem gnącym danego przekroju CC** moment siły poprzecznej  $V_{23}$  (dla tegoż przekroju) **względem jakiegokolwiek punktu** tego przekroju, czyli krócej (zgodnie ze str. 36) **względem tegoż przekroju**. Ten moment siły poprzecznej  $V_{23}$  — wypadkowej sił zewnętrznych  $A_1, P_1, P_2$  — otrzymamy na mocy prawa, wypowiedzianego na str. 37 (rys. 33), jako  $M_2 = H \cdot y_2$  (rys. 36), [bo dwa boki wieloboku sznurowego: 012 i zamykający A'B', tworzą na linii CC odcinek  $y_2$ , który, pomnożony przez odległość biegunową H, daje moment wypadkowej sił  $A_1, P_1, P_2$ , znajdujących się między bokami 012 i zamykającym A'B']. Dla każdego innego przekroju, np. C'C', otrzymamy podobnie, jako moment gnący odpowiadającej temuż przekrojowi C'C' siły  $V_{12}$  względem przekroju C'C':  $M_1 = H \cdot y_1$ . (A jeżeli przyjmiemy jako odległość biegunową H **jednostkę długości**, to momenty gnące dla poszczególnych



przekrojów otrzymywać będziemy wprost jako odpowiednie odcinki pionowe  $y$  wieloboku sznurowego, **mierzone na skali sił**, nadając każdej jednostce skali sił wartość jednostki momentów).

Wobec powyższego nazywamy pole wieloboku sznurowego **połem momentów**, jako dające wielkość momentów dla przekrojów wzdłuż całej belki przy danem obciążeniu.

**d) Związek między siłami poprzecznymi i momentami.**

Wielkość momentów możemy otrzymywać również z krzywej sił poprzecznych, omówionej wyżej: Tak np. moment siły poprzecznej  $V_{23}$  dla przekroju CC wyraża się przez pole:  $\alpha_0 \alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \sigma \alpha_0$ , (bo moment siły  $V_{23}$ , czyli wypadkowej sił  $A_1, P_1, P_2$  względem CC =  $A_1 \times \alpha\pi - P_1 \times \beta\pi - P_2 \times \delta\rho = \alpha\alpha_0 \times \alpha\pi - \beta\gamma \times \beta\pi - \delta\varepsilon \times \delta\rho$ ).

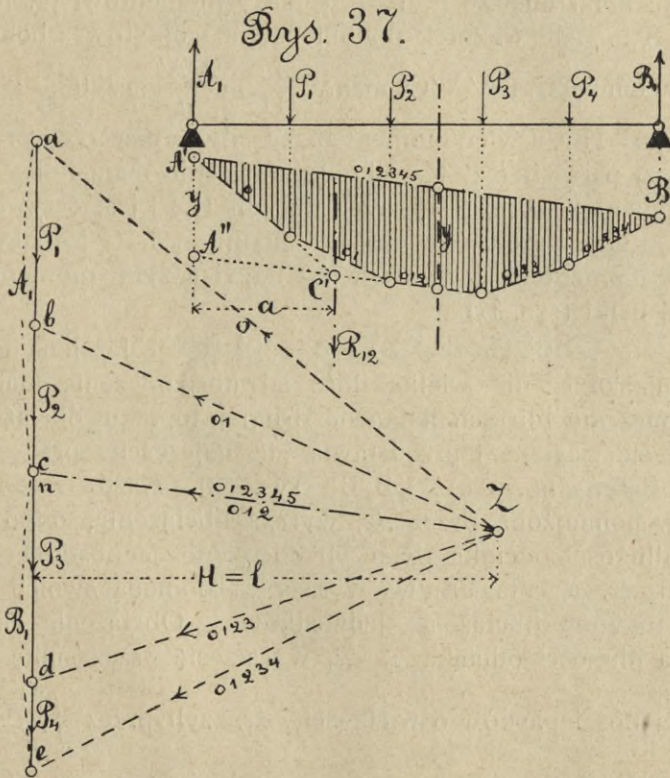
Widzimy nadto, że moment dla przekroju  $\delta\varepsilon$  jest = polu  $\alpha_0 \alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \psi \alpha_0$ , a moment dla przekroju  $\zeta\eta$  jest = polu  $\alpha_0 \alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta \eta \varphi \alpha_0$ , czyli różnica ich =  $\varepsilon\zeta\varphi\psi$ , t. j. iloczynowi  $\varepsilon\zeta \times \varepsilon\psi$ , albo  $\varepsilon\zeta \times V_{23}$ , a więc **różnica momentów** względem przekrojów w dwóch po sobie idących liniach działania sił  $P_1$  i  $P_2$  **równa się iloczynowi z siły poprzecznej** w tymże odstępie ( $V_{23}$ ) **przez odległość wzajemną tych dwóch sił**  $P_1$  i  $P_2$ , czyli:  $M_3 - M_2 = m \times V_{23}$ . Prawo to będzie uogólnione niżej sposobem analitycznym.

Zauważmy jeszcze, że dla wszystkich przekrojów belki między danymi dwiema liniami sił—a więc dla **nieobciążonych części belki**—**krzywa sił poprzecznych przedstawia prostą, równoległą do osi belki**, a **krzywa momentów gnących przedstawia linię prostą**. Przytem dla każdego poszczególnego przekroju belki otrzymujemy **momenty gnące** za pomocą odpowiednich odcinków **między podporami A i B**, gdy tymczasem **siły poprzeczne**  $V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{45}, V_{56}$  wypadają wszystkie **poza podporami A i B z jednej, lub z drugiej strony** (siły zaś **poprzeczne**  $V_{01}$  i  $V_{67}$  działają w **samych podporach A i B**). Widzimy nadto, że siły te:  $V_{12}, V_{23}, V_{34}, \dots$ , określone wyżej co do wielkości, **zmniejszają się jednocześnie** ze zbliżaniem się do środka belki rozpatrywanych przekrojów i **oddalają się coraz bardziej na lewo**, a przeszedłszy przez nieskończoność (i zarazem **znaczenie = 0**, jak to zobaczymy poniżej na rys. 37), wracają z **prawej strony już ze znakiem odwrotnym** ( $V_{45}, V_{56}$ ), t. j. skierowane **na dół** (rys. 36).

Rozważając dla poszczególnych przekrojów belki od podpory A ku podporze B pole momentów (rys. 36), widzimy, że



moment gnący z początku wzrasta, dochodząc od  $o$  (dla przekroju przez podporę A) do **maximum** (przypadającego zawsze pod jakąś siłą — w danym wypadku  $P_4$ ), a następnie zmniejsza się znowu aż do  $o$  (dla przekroju przez podporę B). Widzimy nadto, że wszystkie siły poprzeczne:  $V_{12}$ ,  $V_{23}$ ,  $V_{34}$ ,  $V_{45}$ ,  $V_{56}$  dają względem każdego przekroju belki momenty gnące **dodatnie**, (t. j. z obrotem zgodnym z biegiem wskazówki zegarowej), a więc: dla belki w dwóch końcach podpartej, obciążonej siłami pionowymi, **moment gnący jest dla każdego przekroju belki dodatni**. Zauważmy dalej, że jeżeli (rys. 37) jeden z boków wieloboku sznurowego (012) jest ró-



wnoległy do zamykającego  $A'B'$ , to odpowiednia siła poprzeczna  $V_{23}$ , jako przechodząca przez punkt przecięcia tych 2-ch równoległych boków, a także równoległa do sił zewnętrznych, (czyli mająca dwa punkty w nieskończoności) oddala się cała w nieskończoność i wielkość jej (ograniczona przez promień wieloboku sił 012 i 012345) jest oczywiście  $= 0$ ; siła poprze-



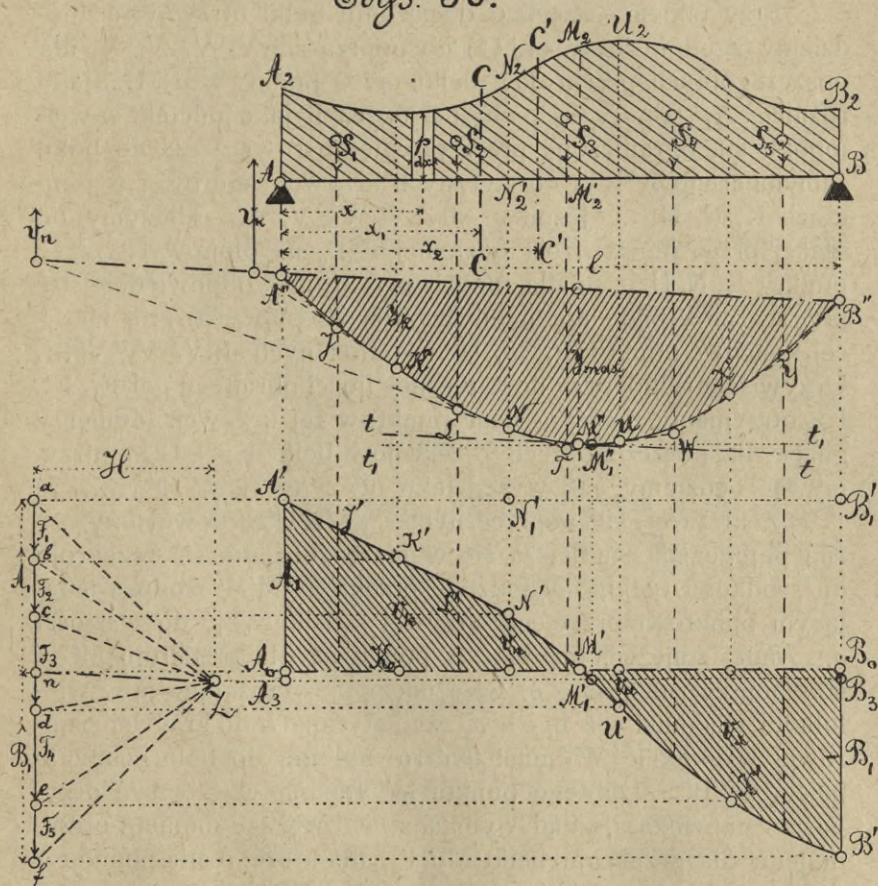
czna  $V_{23}$  staje się więc wtedy siłą nieskończenie małą i działającą w nieskończoności, czyli (zgodnie z powyższem) t. z. parą sił. Istotnie siły  $P_1$  i  $P_2$ , dające wypadkową  $R_{12}$ , równą i odwrotną sile  $A_1$ , tworzą z tą ostatnią parę sił:  $A_1$  i  $R_{12}$ , co zresztą okazuje się również z wieloboku sił i sznurowego dla sił  $A_1$ ,  $P_1$  i  $P_2$ : Wielobok sił  $A_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  jest oczywiście zamknięty (*cab*), a wielobok sznurowy tychże sił  $A_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  daje w rezultacie bok  $A'B'$ , równoległy do  $012$ , t. j. (według str. 28) układ sił sprowadza się do pary sił. A skoro siła poprzeczna dla przekroju belki między siłami  $P_2$  i  $P_3$  wyraża się przez parę sił:  $A_1$  i  $R_{12}$ , to moment gnący dla jakiegokolwiek przekroju belki między  $P_2$  i  $P_3$  będzie = momentowi tej pary sił, t. j.  $A_1 \cdot a$ . Ale wskutek podobieństwa trójkątów z bokami równoległymi *anZ* i  $A'A''C'$  mamy:  $\frac{an}{H} = \frac{A'A''}{a}$ , czyli  $\frac{A_1}{H} = \frac{y}{a}$ , z kąd:  $A_1 \cdot a = H \cdot y$ , a więc moment gnący siły poprzecznej, przedstawiającej parę sił (czy też siłę nieskończenie małą i nieskończenie odległą) wyraża się przez iloczyn  $H \cdot y$  i jest oczywiście dla wszystkich przekrojów między siłami  $P_2$  i  $P_3$  jednakowo wielkim momentem i zarazem jest największym momentem dla całej belki (rys. 37).

**§ 2. Obciążenie stałe — ciągłe.** Jeżeli na belkę działa nieskończenie wielka ilość sił nieskończenie małych i nieskończenie bliskich jedna od drugiej, to takie obciążenie nazywa się **ciągłym** i przedstawia się najczęściej przez t. z. **pole obciążeń** (np.  $A A_2 U_2 B_2 B$  — rys. 38). Każda rzędna  $p$  krzywej, pomnożona przez  $dx$ , wyraża obciążenie, odpowiadające długości odcinka  $dx$ , czyli **obciążenie jednostkowe** dla długości  $dx$ , a cała krzywa wyraża za pomocą swoich rzędnych **zmiennie obciążenie jednostkowe**. Obciążenie zatem belki na długości odcinka  $x_2 - x_1$  wyrazi się przez sumę nierzliczonej ilości pasków o wielkości  $p dx$ , czyli przez  $\int_{x_1}^{x_2} p dx$ , t. j. przez pole między krzywą, rzędnymi  $p_2$  i  $p_1$  (odpowiadającymi  $x_2$  i  $x_1$ ) i osią  $AB$ . Jeżeli każdy z tych pasków  $p dx$  uważać będziemy za pojedynczą (skupioną) siłę, działającą w środku ciężkości paska, to wykreślony dla tych sił wielobok sznurowy o bokach nieskończenie małych przedstawiłby nam krzywą sznurową. Wobec jednak niemożności działania nieskończoną ilością sił, dzielimy pole obciążeń np. na 5 pasków,



(oznaczonych na rys. 38 liniami pionowymi kropkowanymi), obliczamy ich pola  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  i przyjąwszy wielkości tychże za siły pionowe, działające w środkach ciężkości pól:  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5^*$ ), wykreślamy dla nich wieloboki sił i sznurowy z bokiem zamykającym  $A'' B''$ . Ponieważ, jak widzieliśmy wyżej (str. 18), przy wykreślaniu wieloboku sznurowego zastąpienie kilku sił ich wypadkową nie wpływa na pozostałą

Rys. 38.



część wieloboku sznurowego, więc wzięcie zamiast obciążenia ciągłego—pola  $F_1$ —wypadkowej, skupionej w  $S_1$ , nie może wpłynąć na dalszą część wieloboku poza polem  $F_1$ . Znaczący to, że punkt  $K$  leży na krzywej sznurowej, a bok  $JL$  jest

\*) Obliczanie pól figur płaskich i wyznaczanie ich środków ciężkości opisane jest w rozdziałach 5 i 6-ym.



w punkcie K stycznym do owej krzywej sznurowej i tak samo LT jest styczną w N. Każde dwa sąsiednie boki (JL i LT) wieloboku sznurowego są dla odpowiedniej części krzywej sznurowej KN (odpowiadającej polu  $F_2$ ) skrajnymi bokami, przecinającymi się na wypadkowej sił, wyrażonych przez pole  $F_2$ , czyli na linii środka ciężkości  $S_2$  tego pola  $F_2$ . Zwiększając odpowiednio ilość pasków, otrzymujemy dostateczną ilość punktów styczności i stycznych dla wykreślenia krzywej sznurowej.

Przy takim — **ciągłym** obciążeniu belki otrzymywać będziemy (zgodnie ze str. 44 i 45) siły poprzeczne  $V_k, V_n, V_u, V_x$  dla poszczególnych przekrojów belki przez punkty K, N, U... jako różnice:  $A_1 - F_1, A_1 - F_1 - F_2$  i t. d., czyli jako odcinki w wieloboku sił, ograniczone przez promienie równoległe do boku zamykającego  $A''B''$  i do stycznych krzywej sznurowej w punktach K, N, U... Jeżeli te siły  $V_k, V_n, V_u \dots$  odłożymy od idącej przez punkt  $n$  osi poziomej  $A_0B_0$  na pionowych przez punkty K, N, U..., to dla innych przekrojów odpowiednie siły poprzeczne  $V$  będą rzędnymi **krzywej sił poprzecznych**, łączącej końcowe punkty  $K', N', U' \dots$  odłożonych sił  $V_k, V_n, V_u \dots$ . Oczywiście tylko przy dostatecznej ilości obranych pól  $F_1, F_2, F_3 \dots$  otrzymamy należyłą ilość punktów tej krzywej. Momenty gnące dla poszczególnych przekrojów belki K, N, U... otrzymywać będziemy, jak wyżej, jako iloczyny  $H \cdot y_k, H \cdot y_n, \dots$

Z krzywej sił poprzecznych  $A'K'N'U'X'B'$  widzimy, że siła poprzeczna zmniejsza się w miarę zbliżania się przekroju ku środkowi belki, dochodzi w przekroju  $M'M''$ , odpowiadającym punktowi przecięcia krzywej z osią  $A_0B_0$ , do wartości  $o$ , a dalej staje się **ujemną**. A ponieważ dla przekroju  $M'M''$  siła poprzeczna jest  $= o$ , więc odcinek, wyrażający ją w wieloboku sił, musi też być  $= o$ , czyli styczna  $tt$  do krzywej sznurowej w punkcie  $M''$  musi być równoległą do boku zamykającego  $A''B''$ . Dla tego punktu  $M''$  rzędna  $y_{max}$  będzie oczywiście największą, z kąd wynika, że największy moment otrzymujemy dla przekroju belki  $M_2M'_2$ , dla którego siła poprzeczna jest  $= o$ , a właściwie staje się parą sił: jedną z nich jest odpór  $A_1$ , a druga — równa polu  $AA_2M_2M'_2$  — wyraża się, według powyższego, przez odcinek  $an$ , równy, ale odwrotny  $A_1$ .

**§ 3. Związek między obciążeniem, siłą poprzeczną i momentem gnącym.** Dla obciążenia ciągłego można udowodnić analitycznie ważne twierdzenie Szwed-



dlera, dotyczące związku między obciążeniem, siłą poprzeczną i momentem gącym:

Ponieważ w belce na dwóch podporach A i B (rys. 39), obciążonej jedną siłą P, odpory  $A_1$  i  $B_1$  utrzymują równowagę z tą siłą P, więc suma momentów tych trzech sił względem każdego punktu (np. B) musi być = 0, czyli:

Mom.  $A_1$  + Mom. P + Mom.  $B_1$  = 0.

A że moment siły  $B_1$ , przechodzącej przez biegun B, jest = 0, a moment siły P będzie ujemnym, więc  $A_1 \cdot l - P(l-a) = 0$ , z kąd:

$$A_1 = \frac{l-a}{l} P \dots (1).$$

Tak się wyraża odpór  $A_1$  dla belki na 2-ch podporach, obciążonej jedną siłą P.

Dla obciążenia szeregiem sił  $P_1, P_2, P_3, \dots$  otrzymamy odpór jako sumę odporów według wzoru (1), t. j.

$$A_1 = \frac{1}{l} \left\{ (l-a_1) P_1 + (l-a_2) P_2 + (l-a_3) P_3 + \dots \right\} = \frac{1}{l} \sum_1^m (l-a_m) P_m \dots (2).$$

Jeżeli zaś zamiast obciążeń skupionych  $P_1, P_2, P_3, \dots$  mamy obciążenie ciągłe, wyrażone przez krzywą obciążeń:  $p = f(x)$ , a zatem składające się z nieskończonej ilości obciążeń  $pdx$ , to dla każdego  $pdx$ , uważanego za siłę skupioną, otrzymamy według (1) odpowiedni wzór:  $A_1 = \frac{(l-x) pdx}{l}$ ,

a więc całkowity odpór będzie według wzoru (2):

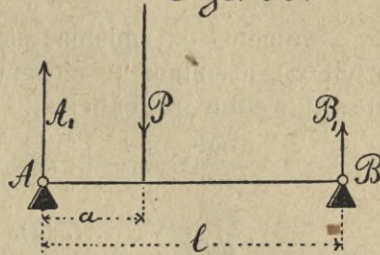
$$A_1 = \frac{1}{l} \int_0^l (l-x) p dx \dots (3).$$

Dla przekroju CC w odległości  $x_1$  (rys. 38) od lewej podpory otrzymamy siłę poprzeczną V po odjęciu od odporu  $A_1$  sumy wszystkich obciążeń z lewej strony przekroju CC, czyli sumy wszystkich  $pdx$ , t. j. całego pola obciążeń aż do przekroju CC:  $\int_0^{x_1} p dx$ , a więc:  $V = A_1 - \int_0^{x_1} p dx \dots (4)$ .

Ze zmianą przekroju (czyli ze zmianą  $x_1$ ) zmieniać się będzie siła V; różniczkując więc równanie (4), w którym przy zmianie  $x_1$  nie zmienia się wcale  $A_1$ , otrzymamy:

$$\frac{dV}{dx} = -p \dots (5)$$

Rys. 39.





Moment siły poprzecznej  $V$  względem przekroju  $CC$  będzie sumą algebraiczną momentów sił, składających tę siłę według powyższego równania (4); a że momentem siły  $A_1$  będzie  $A_1 \cdot x_1$ , a momentem każdej siły  $p dx$  będzie  $(x_1 - x) p dx$ , otrzymamy zatem:

$$M = A_1 \cdot x_1 - \int_0^{x_1} (x_1 - x) p dx \dots \dots (6).$$

Moment ten zmieniać się będzie ze zmianą przekroju  $CC$  (czyli  $x_1$ ), a zmianę tę możemy otrzymać, różniczkując równanie (6) według zmiennej  $x_1$ :

$$\frac{dM}{dx} = A_1 - \int_0^{x_1} p dx, \text{ czyli zgodnie z (4):}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \dots \dots (7).$$

Wzór ten, będący uogólnieniem dla obciążenia ciągłego prawa, wyprowadzonego wykreślnie na str. 48 dla sił skupionych—(wynika bowiem z niego:  $dM = V \cdot dx$ )—wskazuje wyraźnie, że największy moment wypada dla takiego przekroju belki, dla którego siła poprzeczna staje się  $= 0$ , jak to już widzieliśmy wyżej.

Z równań (5) i (7) otrzymujemy:

$$p = - \frac{dV}{dx} = - \frac{d^2M}{dx^2} \dots \dots (8).$$

Tak więc obciążenie jednostkowe jest pierwszą pochodną siły poprzecznej, a drugą pochodną momentu. Ztąd wynika, że dla obciążenia ciągłego krzywa sił poprzecznych jest względem krzywej obciążeń tak zwaną linią całkową, wyrażającą się równaniem, otrzymanem przez całkowanie równania (8):

$$V = - \int p dx + C \dots \dots (9).$$

Krzywa zaś momentów jest względem krzywej sił poprzecznych linią całkową, wyrażającą się równaniem, otrzymanem przez dwukrotne całkowanie równania (8):

$$M = \int V dx + C_1 \dots \dots (10).$$

Oczywiście więc siła poprzeczna  $V$  względem obciążenia  $p$ , jakoteż moment  $M$  względem siły poprzecznej  $V$  mają te same własności (wyłożone w rozdziale 5-ym), które cechują krzywą całkową względem różniczkowej.



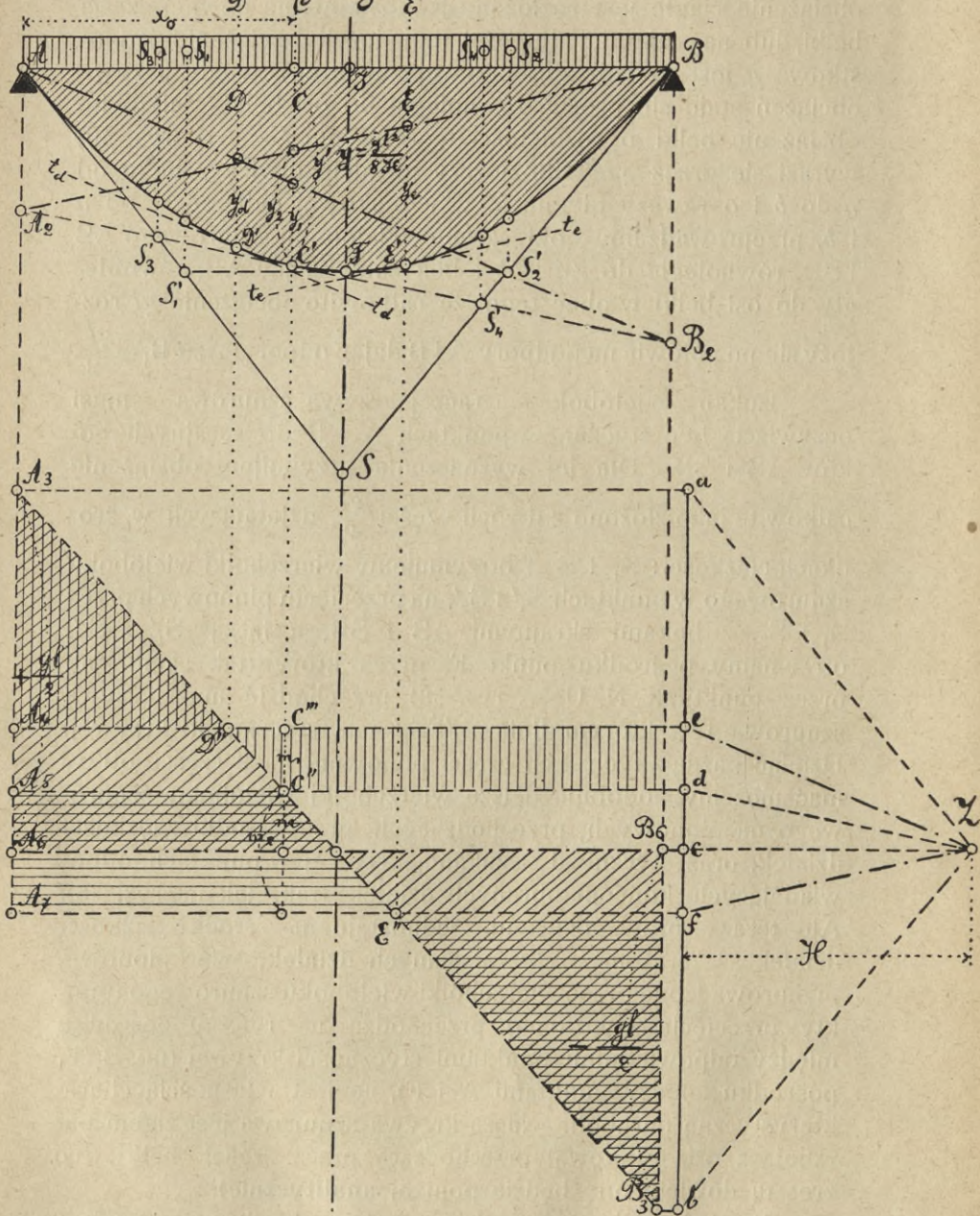
**§ 4. Obciążenie stałe — jednostajne.** Jeżeli obciążenie ciągłe jest rozłożone **jednostajnie** na pewnej części belki, lub na całej jej długości (t. j. jeżeli obciążenie jednostkowe  $g$  jest **stałym** dla krzywej obciążeń), wtedy krzywa obciążeń staje się prostą, równoległą do osi belki. Całkowite obciążenie belki o rozpiętości teoretycznej  $l = AB$  (rys. 40) wyrazi się przez  $g \cdot l$ . Odłożywszy je gdziekolwiek z boku od  $a$  do  $b$  i obrawszy biegun  $Z$  w jednakowej odległości od  $a$  i  $b$ , przeprowadzamy boki skrajne wieloboku sznurowego  $AS$  i  $SB$ , równoległe do  $Za$  i  $Zb$  i bok zamykający  $AB$ , **równoległy** do osi belki w obec tego, że całkowite obciążenie  $g \cdot l$  łoży się po połowie na podpory  $A$  i  $B$ , dając odpory:  $A_1 = B_1 = \frac{g \cdot l}{2}$ .

Szukany wielobok — a raczej krzywa sznurowa — musi oczywiście być styczną w punktach  $A$  i  $B$  do skrajnych boków  $AS$  i  $SB$ . Dla jej wyznaczenia przyjmijmy obciążenie całkowite jako złożone z dwóch części  $\frac{g \cdot l}{2}$ , działających w środkach ciężkości:  $S_1$  i  $S_2$  i otrzymujemy wierzchołki wieloboku sznurowego w punktach  $S_1'$  i  $S_2'$ , na przecięciu pionowych przez  $S_1$  i  $S_2$ , z bokami skrajnymi  $AS$  i  $SB$ , a łącząc  $S_1'$  z  $S_2'$ , otrzymamy pośrodku punkt  $F$ , przez który (tak samo, jak przez punkty  $K, N, U \dots$  rys. 38) przechodzić musi krzywa sznurowa i w którym linia  $S_1'FS_2'$  jest styczną do krzywej. Dzieląc każdą z tych 2-ch części ponownie na 2 części, otrzymać możemy podobnie dalsze wierzchołki wieloboku sznurowego na pionowych, przechodzących przez środki ciężkości działek, oraz styczne do szukanej krzywej w punktach, odpowiadających końcom obranych działek (tak, jak na rys. 38). Ale teraz — przy obciążeniu jednostajnym — **środki ciężkości** działek są zarazem **środkami** samych działek, więc pionowe, przeprowadzone przez wierzchołki wieloboku sznurowego (punkty przecięcia stycznych), przechodzą na rys. 40 **pośrodku** między odpowiednimi punktami styczności krzywej (np.  $S_1S_1'$  pośrodku między punktami  $A$  i  $F$ ), co jest własnością charakterystyczną parabol. Nasza krzywa sznurowa jest zatem **parabolą z osią pionową, przechodzącą przez środek belki**, (co zresztą dowiedzione będzie poniżej analitycznie).

Parabola ta jest oczywiście zupełnie określona już przez 2 styczne  $AS$  i  $SB$  wraz z punktami styczności  $A$  i  $B$  i wykreśla się,

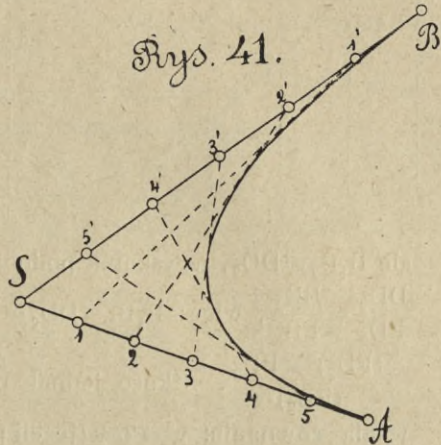


Pris. 40.





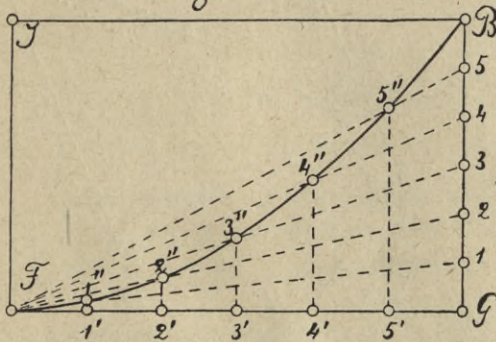
jak wiadomo, dzieląc odcinki AS i SB na jednakową ilość równych części (rys. 41) i łącząc odpowiednie punkty: 1 z 1', 2 z 2', 3 z 3'... liniami prostymi, które będą stycznymi do szukanej paraboli. Również wykreślimy ją, zauważywszy, że połowa długości SJ (rys. 40) daje punkt najniższy paraboli F, a mając wierzchołek paraboli F, oś FJ i jakikolwiek punkt B (rys. 42), dzielimy FG, a także GB na jednakową ilość równych części i łącząc punkty 1, 2, 3, 4... z F, otrzymamy na równoległych do osi przez 1', 2', 3', 4'... dowolną ilość punktów paraboli: 1'', 2'', 3'', 4''... Zauważmy jeszcze, że przy tych samych danych, t. j. wierzchołku F, osi FJ i punkcie B (rys. 43) wyznaczyć możemy punkt paraboli A, jako symetryczny z B względem osi FJ, a inne jej punkty otrzymamy, albo 1) po podzieleniu odcinków JF i FG na jednakową ilość równych części—jako punkty przecięcia linii B5, B4, B3... z równoległymi do osi, przeprowadzonymi przez 5', 4', 3'... czyli punkty 5'', 4'', 3''... , albo też 2) otrzymamy poszczególne punkty paraboli, leżące na prostych, równoległych do osi, np. na prostej CC (rys. 43), sposobem następującym: Łączymy



Rys. 41.

punkt B z F, prowadzimy przez punkt przecięcia z linią CC (t. j. przez D), równoległą do stycznej FB<sub>2</sub>, a przez B równoległą do osi paraboli, łączymy punkt przecięcia tych prostych B<sub>1</sub> z punktem F i na przecięciu prostej B<sub>1</sub>F z prostą CC otrzymujemy szu-

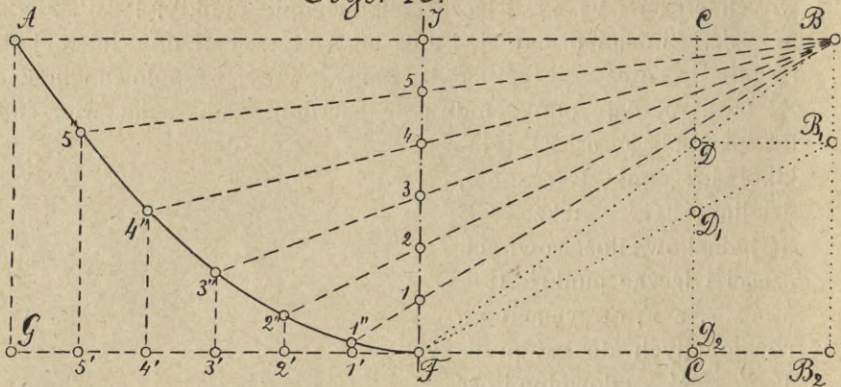
Rys. 42.



kany punkt tejże paraboli D<sub>1</sub>. (Istotnie, wskutek podobieństwa trójkątów D<sub>1</sub>D<sub>2</sub>F i B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>F z bokami równoległymi:  $\frac{D_1D_2}{FD_2} = \frac{B_1B_2}{FB_2}$ ;



Rys. 43.

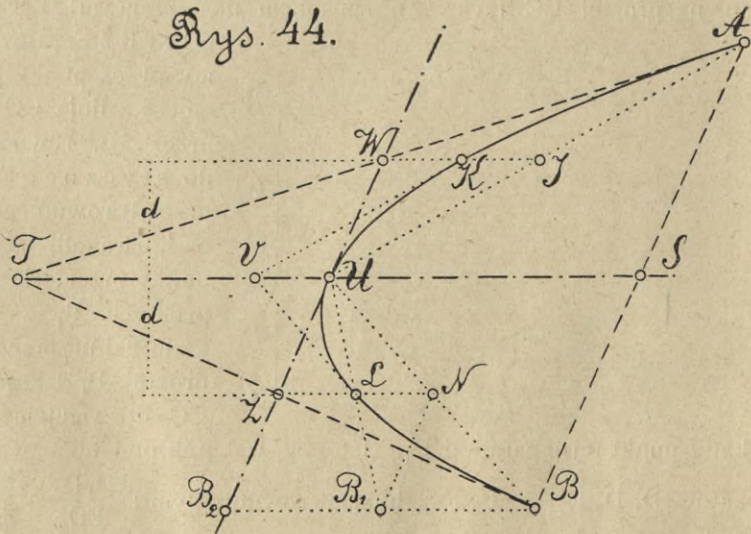


ale  $B_1B_2 = DD_2$ , a wskutek podobieństwa trójkątów  $DD_2F$  i  $BB_2F$ :  
 $\frac{DD_2}{FD_2} = \frac{BB_2}{FB_2}$ , więc:  $B_1B_2 = DD_2 = \frac{BB_2 \times FD_2}{FB_2}$ , a zatem:  $D_1D_2 =$   
 $= \frac{(FD_2)^2 \times BB_2}{(FB_2)^2}$ . Skoro jednak punkt B leży na paraboli, to odpo-  
 wiada równaniu:  $y^2 = 2px$  (jeżeli przyjąć za początek współrzędnych  
 punkt F, za oś  $x - FJ$ , a za oś  $y - FB_2$ ), więc:  $(FB_2)^2 = 2p \cdot BB_2$ ,  
 a zatem:

$$D_1D_2 = \frac{(FD_2)^2}{2p}, \text{ z kąd: } (FD_2)^2 = 2p \times D_1D_2,$$

co oznacza, że punkt  $D_1$ , czyniący zadość równaniu  $y^2 = 2px$ ,  
 leży na paraboli).

Rys. 44.





Sposób ten może być zastosowany nie tylko do stycznej  $FB_2$  w wierzchołku paraboli  $F$ , ale również do każdej innej stycznej, np. do stycznej  $UB_2$  (rys. 44), dla której zupełnie tak samo otrzymujemy na prostej  $NZ$ , równoległej do osi paraboli—za pomocą punktów  $N$  i  $B_1$ —**punkt paraboli**  $L$ , bo równanie  $y^2=2px$  może być—jak wiadomo—zastosowane do przyjętych za współrzędne ukośnokątne  $x$  i  $y$  linii  $US$  i  $UB_2$ .

Zaznaczyć tutaj warto, że z wyżej wspomnianej (str. 55) charakterystycznej własności paraboli, [polegającej na tem, że linie, przeprowadzone przez jakiegokolwiek dwa punkty paraboli  $K$  i  $L$  (rys. 44) równoległe do jej osi, znajdują się w równych odległościach  $d$  od punktu przecięcia  $V$  stycznych w tych dwóch punktach], wynika, że mając dwie styczne  $AT$  i  $BT$ , oraz punkty ich styczności  $A$  i  $B$  (rys. 44), otrzymujemy, łącząc punkt przecięcia stycznych  $T$  ze środkiem ciężkości  $AB$ , t. j. z  $S$ , kierunek osi paraboli  $TS$ , a ponadto punkt środkowy linii  $TS$ , czyli  $U$ , będzie punktem paraboli, styczna zaś w tym punkcie  $U$  będzie równoległą do  $AB$ . Oczywiście jest również, że każda styczna do paraboli, np.  $ZW$ , daje na jednakowo odległych ( $d$ ) od punktu styczności  $U$ , równoległych do osi prostych  $WJ$  i  $ZN$  jednakowe odcinki  $WK = ZL$ .

**Największy moment** (rys. 40) otrzymujemy pośrodku belki i jak wiadomo:  $M_{max} = H \cdot y$ ; ale  $y = \frac{1}{2} SJ$ , a z podobieństwa trójkątów  $JAS$  i  $Zca$  z bokami równoległymi:  $\frac{SJ}{AJ} = \frac{ac}{Zc}$ , t. j.

$$\frac{2y}{\frac{1}{2}l} = \frac{g \frac{l}{2}}{H}, \text{ z kąd: } y = \frac{g l^2}{8H}, \text{ a zatem:}$$

$$M_{max} = H \cdot y = \frac{g l^2}{8} \dots \dots (11).$$

Tak więc **krzywą momentów dla obciążenia jednostajnego jest parabola z osią pionową i strzałką**  $= \frac{g l^2}{8H}$ .

Dla wykreślenia krzywej sił poprzecznych zauważmy, że siłą poprzeczną dla przekroju belki nieskończenie bliskiego podpory  $A$  będzie, jak zawsze, odpór  $A_1$ , siłą zaś poprzeczną dla przekroju belki nieskończenie bliskiego podpory  $B$  jest odpór  $B_1$  z odwrotnym znakiem. Odkładamy więc odpór  $A_1 = \frac{g l}{2}$  od punktu  $A_6$  do  $A_3$  (rys. 40) i odpór  $B_1 = -\frac{g l}{2}$  od punktu  $B_6$  do  $B_3$ , a łącząc  $A_3$  z  $B_3$ , otrzymamy szukaną **krzywą sił poprzecznych jako linię prostą**  $A_3 B_3$ : Istotnie, siła



poprzeczna  $V_x$  dla jakiegokolwiek przekroju belki DD, w odległości  $x$  od podpory wyrazi się, jak wiadomo, jako wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych z lewej strony, czyli:

$$V_x = A_1 - gx = \frac{gl}{2} - gx = \frac{g}{2} (l - 2x) \dots \dots (12),$$

a jest to równanie **prostej**, dające dla:

$$x = 0 \quad V = + \frac{gl}{2}$$

$$x = \frac{l}{2} \quad V = 0$$

$$x = l \quad V = - \frac{gl}{2}.$$

Widzimy teraz, że największemu momentowi pośrodku belki odpowiada siła poprzeczna równa 0, albo raczej siła nieskończenie mała i działająca w nieskończoności, będąca parą sił: wypadkową odporu  $\frac{gl}{2}$  i połowy całkowitego obciążenia, a więc także  $\frac{gl}{2}$ , (zwróconego tylko w stronę przeciwną, niż odpór  $\frac{gl}{2}$ ) działającego na czwartej części belki. Ta para sił daje więc moment:  $\frac{gl}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{gl^2}{8}$ , otrzymany już powyżej we wzorze (11).

**Analitycznie:** Jeżeli belka jest na pewnej części swej długości obciążona **jednostajnie**, to dla tej części belki siłę poprzeczną  $V_x$  i moment  $M_x$  otrzymujemy z wzorów (9) i (10) str. 54, po wstawieniu:  $p = g$  (obciążenie jednostkowe stałe), a zatem z wzoru (9):

$$V_x = - \int g dx + C = - gx + C \dots \dots (13),$$

więc krzywa sił poprzecznych wyraża się linią prostą; a z wzoru (10):

$$M_x = \int V_x dx + C_1 = - \frac{gx^2}{2} + Cx + C_1 \dots \dots (14),$$

więc krzywa momentów jest parabolą.

Z tych dwóch równań — dla  $g = 0$  otrzymujemy:  $V_x = C$  i  $M_x = Cx + C_1$ , z kąd wynika, że dla **nieobciążonych części belki** krzywa sił poprzecznych jest prostą, równoległą do osi belki, a krzywa momentów jest linią prostą, co zresztą widzieliśmy już na str. 48 (rys. 36).



Jeżeli **cała** belka jest obciążona jednostajnie, to odpory:  $A_1 = B_1 = \frac{gl}{2}$ , więc równanie (13) dla  $x=0$  musi dać:  $V = \frac{gl}{2}$ , a zatem:  $C = \frac{gl}{2}$  i

$$V_x = -gx + \frac{gl}{2} = \frac{g}{2}(l - 2x)$$

otrzymane wyżej w równaniu (12).

Równanie zaś (14) musi nam dać dla  $x=0 - M=0$  więc:  $C_1 = 0$ , a że przytem  $C = \frac{gl}{2}$ , więc równanie (14) daje:

$$M_x = -\frac{gx^2}{2} + \frac{glx}{2} = \frac{gx}{2}(l - x) \dots \dots (15).$$

To równanie wyraża, jak wiadomo, parabolę AFB (rys. 40) z osią pionową JF, przechodzącą przez środek belki, dla którego, przy  $x = \frac{l}{2}$  (a więc w punkcie, gdzie, zgodnie z wzorem

$$(12): V = \frac{dM}{dx} = 0): M_{max} = \frac{g \times \frac{l}{2}}{2} (l - \frac{l}{2}) = \frac{gl^2}{8}$$

otrzymane już wyżej jako równanie (11).

### § 5. Obciążenie stałe jednostajne częściowe.

**1.** Jeżeli tylko lewa część belki jest obciążona jednostajnie na długości  $x_0$  (rys. 40), to wiemy z powyższego (str. 55), że części obciążonej AC odpowiada jako krzywa sznurowa (czyli krzywa momentów) — **parabola z osią pionową**, na pozostałej zaś **nieobciążonej** części CB krzywa ta będzie **linią prostą** (zgodnie ze str. 60 i 48). A więc wykreślając wielobok sznurowy w przypuszczeniu, że całe obciążenie  $gx_0$ , wyrażone przez odcinek  $ad$ , jest ześrodkowane w połowie odległości  $x_0$ , czyli na pionowej przez  $S_3$ , otrzymujemy, przeprowadzając przez  $S'_3$  równoległą do  $Zd$ , jako wielobok sznurowy trójkąt  $AS'_3B_2$ , z bokiem zamykającym  $AB_2$ , linia  $AS'_3$  będzie styczną w punkcie A do krzywej sznurowej (paraboli), odpowiadającej obciążeniu  $gx_0$ , linia zaś  $S'_3B_2$  będzie takąż styczną w końcowym punkcie paraboli  $C'$ , (na przecięciu pionowej  $CC$  z  $S'_3B_2$ ), od którego zacząwszy, krzywa momentów będzie linją prostą  $C'B_2$ . Mając dwie styczne w punktach A i  $C'$ , wykreślimy parabolę sposobem wyżej wskazanym (str. 57). Odpór  $A_1$ , otrzymany jako odcinek  $ea$  ( $Ze$  jest równoległą do boku zamykającego  $AB_2$ ), będzie siłą poprzeczną dla



przekroju nieskończenie bliskiego podpory A—odłóżmy go od  $A_4$  do  $A_3$ , przeprowadzając przez  $e$  równoległą do osi belki i przyjmując ją za oś dla krzywej sił poprzecznych, a siła poprzeczna dla przekroju CC będzie:  $ea - ad$ , czyli będzie to siła ujemna, wyrażona przez odcinek  $ed$  i otrzymamy ją jako  $C''C''$ —po przeprowadzeniu przez  $d$  równoległej do osi belki. Krzywą sił poprzecznych otrzymamy jako linię prostą, łączącą  $A_3$  z  $C''$ , dalej zaś—dla nieobciążonej części belki—krzywa ta staje się (zgodnie ze str. 60 i 48) prostą, idącą przez  $C''$  równoległą do osi belki.

Przeprowadzona przez  $e$  równoległa do osi belki, przyjęta za oś krzywej sił poprzecznych, daje na prostej  $A_3 B_3$  punkt  $D''$ , a więc dla przekroju DD siła poprzeczna = 0, jest to zatem przekrój, dający największy moment. Moment ten odpowiada punktowi  $D'$  paraboli, mającemu styczną  $t_d$  równoległą do boku zamykającego  $AB_2$  i wyraża się:  $M_d = H.y_d$ .

**Analitycznie:** Wziąwszy we wzorze (3) str. 53 za górną granicę całki  $x_0$  zamiast  $l$  (w obec tego, że obciążenie jest tylko na długości  $x_0$ ), otrzymujemy:

$$A'_1 = \int_0^{x_0} (l-x) g dx = \frac{g}{l} \left[ lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_0} = \frac{gx_0}{2l} (2l - x_0).$$

Siła poprzeczna dla dowolnego przekroju w odległości  $x_1 < x_0$  od podpory A będzie:

$$V'_{x_1} = A'_1 - gx_1 = \frac{gx_0(2l-x_0)}{2l} - gx_1, \dots\dots (16),$$

a dla przekroju CC, przy  $x_1 = x_0$ , będzie:

$$V'_{x_0} = \frac{gx_0(2l-x_0)}{2l} - gx_0 = -\frac{gx_0^2}{2l} \dots\dots (17),$$

moment zaś dla dowolnego przekroju w odległości  $x_1 < x_0$  od podpory A będzie [według wzoru (16), w którym pierwszą siłę—odpór  $A'_1$ —przyjmujemy jako działającą w podporze A, a drugą  $gx_1$ —jako działającą w połowie długości  $x_1$ ]:

$$M'_{x_1} = \frac{gx_0(2l-x_0)}{2l} \times x_1 - \frac{gx_1^2}{2} \dots\dots (18),$$

dla przekroju zaś CC, przy  $x_1 = x_0$ :

$$M'_{x_0} = \frac{gx_0(2l-x_0)}{2l} \times x_0 - \frac{gx_0^2}{2} = \frac{g}{2l} x_0^2 (l-x_0) \dots\dots (19).$$

Ze zmianą  $x_1$  zmieniać się będzie i moment, osiągnie zaś swoje maximum dla takiego  $x_1$  (oznaczmy je  $x'_1$ ), przy którym  $V_x = 0$ , a więc musi być wtedy według wzoru (16):



$$\frac{g x_0 (2l - x_0)}{2l} - g x'_1 = 0, \text{ z kąd:}$$

$$x'_1 = \frac{x_0 (2l - x_0)}{2l} \dots\dots(20).$$

Wstawiając tę wartość  $x'_1$  zamiast  $x_1$  do równania (18), otrzymamy:

$$M'_{max} = \frac{g x_0^2 (2l - x_0)^2}{(2l)^2} - \frac{g x_0^2 (2l - x_0)^2}{2 \times (2l)^2} = \frac{g x_0^2 (2l - x_0)^2}{8l^2} \dots\dots(21).$$

2. Jeżeli tylko **prawa** część belki jest obciążona jednostajnie na długości  $l - x_0$  (rys. 40), to (postępując zgodnie z powyższem, ale począwszy od prawej strony), przyjmujemy całkowite obciążenie  $g (l - x_0)$ , wyrażone przez odcinek  $db$ , jako ześrodkowane na pionowej przez  $S_4$  i otrzymamy (przeprowadzając przez  $S'_4$  równoległą do  $Zd$  (rys. 40), trójkąt sznurowy  $A_2 S'_4 B$ , a linie  $A_2 S'_4$  i  $BS'_4$  będą stycznymi w punktach  $C'$  i  $B$  do krzywej momentów — paraboli z osią pionową, odpowiadającej obciążeniu części prawej i zupełnie określonej przez te dwie styczne i ich punkty styczności. Od  $A_2$  do  $C'$  krzywa momentów przedstawi linię prostą. Przeprowadzając przez biegun  $Z$  równoległą  $Zf$  do boku zamykającego  $A_2 B$ , a przez punkt  $f$  równoległą do osi belki i przyjmując ją za oś dla krzywej sił poprzecznych, otrzymujemy tę krzywą jako linię  $A_5 C''$ , równoległą do osi, dalej zaś jako linię, łączącą  $C''$  z  $B_3$ . Cała więc krzywa sił poprzecznych przedstawia linię łamaną  $A_5 C'' B_3$ . Linia ta daje na przecięciu z przyjętą za oś  $fA_7$  punkt  $E''$ , w którym siła poprzeczna jest  $= 0$ , a zatem moment dla tego przekroju  $EE$  będzie największy, odpowiadać zaś będzie na paraboli punktowi  $E'$ , mającemu styczną  $t_e$ , równoległą do boku zamykającego  $A_2 B$  i wyraża się:  $M_e = H \cdot y_e$ .

Z powyższego widzimy, że przy obciążeniu **częściowem** belki siły poprzeczne mogą być dla poszczególnych przekrojów **liczebnie większe**, niż przy obciążeniu **całkowitem**, bo np. odcinek  $m_2$  jest większy od  $m$ , a odcinek  $m_1$  jest także **liczebnie większy** od  $m$ ; momenty zaś gnące są dla obciążenia **częściowego** zawsze **mniejsze**, niż dla **całkowitego**. Widzimy nadto z rysunku 40, (a poniżej stwierdzimy to analitycznie), że:  $m_2 - m_1 = m$  i  $y_1 + y_2 = y'$ , co zresztą było do przewidzenia, bo dla każdego przekroju belki suma algebraiczna sił poprzecznych — a także momentów gnących — odpowiadających obciążeniu części **lewej** do przekroju  $CC$  i części **prawej** od przekroju  $CC$ , musi być równa sile poprzecznej — względnie mo-



mentowi gnącemu — odpowiadającym całkowitemu obciążeniu belki.

**Analitycznie:** Tak samo, jak w poprzednim wypadku, otrzymamy teraz z wzoru (3) str. 53, biorąc — w obec obciążenia tylko **prawej** części belki — granice całki  $x_0$  i  $l$ :

$$A''_1 = \frac{1}{l} \int_{x_0}^l (l-x) g dx = \frac{g}{l} \left[ lx - \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^l = \frac{g}{2l} (l-x_0)^2.$$

Siła zaś poprzeczna  $V_x$  będzie dla przekrojów do CC włącznie:

$$V''_{x_0} = A''_1 = \frac{g}{2l} (l-x_0)^2 \dots\dots (22),$$

dla dalszych zaś przekrojów uwzględniać trzeba obciążenie  $g$  na odpowiedniej długości  $x_1-x_0$ , t. j.

$$V''_{x_1} = \frac{g}{2l} (l-x_0)^2 - (x_1-x_0) g \dots\dots (23).$$

Moment dla przekrojów aż do CC włącznie będzie:

$$M''_{x_0} = \frac{g}{2l} (l-x_0)^2 x_0 \dots\dots (24),$$

a dla dalszych, gdzie przybywa obciążenie  $(x_1-x_0) g$ , będzie według wzoru (23), przyjmując pierwszą siłę — odpór  $A''_1$ , jako działającą w podporze A, drugą zaś — w połowie długości  $(x_1-x_0)$ :

$$M''_{x_1} = \frac{g}{2l} (l-x_0)^2 x_1 - \frac{(x_1-x_0)^2}{2} g \dots\dots (25).$$

Moment największy otrzymamy dla takiego  $x_1$  (oznaczamy je  $x''_1$ ), przy którym  $V''_x = 0$ , więc według wzoru (23):

$$\frac{g}{2l} (l-x_0)^2 - (x''_1-x_0) g = 0, \text{ z kąd:}$$

$$x''_1 = \frac{(l-x_0)^2}{2l} + x_0 = \frac{l^2+x_0^2}{2l} \dots\dots (26).$$

Wstawiając tę wartość  $x''_1$  do równania (25) zamiast  $x_1$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} M''_{max} &= \frac{g}{2l} (l-x_0)^2 \frac{l^2+x_0^2}{2l} - \frac{\left( \frac{l^2+x_0^2}{2l} - x_0 \right)^2}{2} \times g = \\ &= \frac{g (l^2-x_0^2)^2}{8l^2} \dots\dots (27). \end{aligned}$$

Tę wartość możemy oczywiście otrzymać wprost z równania (21) wstawiając w nie  $l-x_0$  zamiast  $x_0$ . Wielkość zaś  $x''_1$  daje nam wprost równanie (20), jeżeli tam weźmiemy zamiast  $x_0-(l-x_0)$  i odejmiemy ten rezultat od  $l$ . Podobnież ró-



wnanie (17) daje nam [po wstawieniu zamiast  $x_0 - (l - x_0)$ ] wartość  $V''_{x_0}$ , otrzymaną z równania (22), ale zmienić musimy znak na odwrotny. Zresztą wartość  $V''_{x_0}$  otrzymać możemy również, jako różnicę wartości z równania (12) i równania (17), gdyż oczywiście musi być:  $V''_{x_0} + V'_{x_0} = V_{x_0}$  (jak to już widzieliśmy na rysunku 40:  $m_2 - m_1 = m$ ). Istotnie:

$$V_{x_0} - V'_{x_0} = \frac{g}{2} (l - 2x_0) + \frac{gx_0^2}{2l} = \frac{g}{2l} (l - x_0)^2 = V''_{x_0}.$$

I tak samo zupełnie otrzymamy wartość  $M'_{x_0}$ , wyrażoną równaniem (24), jako różnicę wartości z równań (15) i (19), bo oczywiście musi być:  $M'_{x_0} + M''_{x_0} = M_{x_0}$ , jak to już widzieliśmy na rys. 40:  $y_1 + y_2 = y'$ ). Istotnie:

$$M_{x_0} - M'_{x_0} = \frac{gx_0}{2} (l - x_0) - \frac{g}{2l} x_0^2 (l - x_0) = \frac{gx_0}{2l} (l - x_0)^2 = M''_{x_0}.$$

Zestawienie wzorów (11), (21) i (27) dla momentów gnących, jako też wzorów (12), (17) i (22) dla sił poprzecznych, potwierdza wypowiedziane wyżej prawo, że obciążenie całkowite wywołuje w belce, podpartej w dwóch końcach, największe momenty gnące, ale obciążenie częściowe może wywoływać w poszczególnych przekrojach belki siły poprzeczne większe liczebnie, niż obciążenie całkowite.

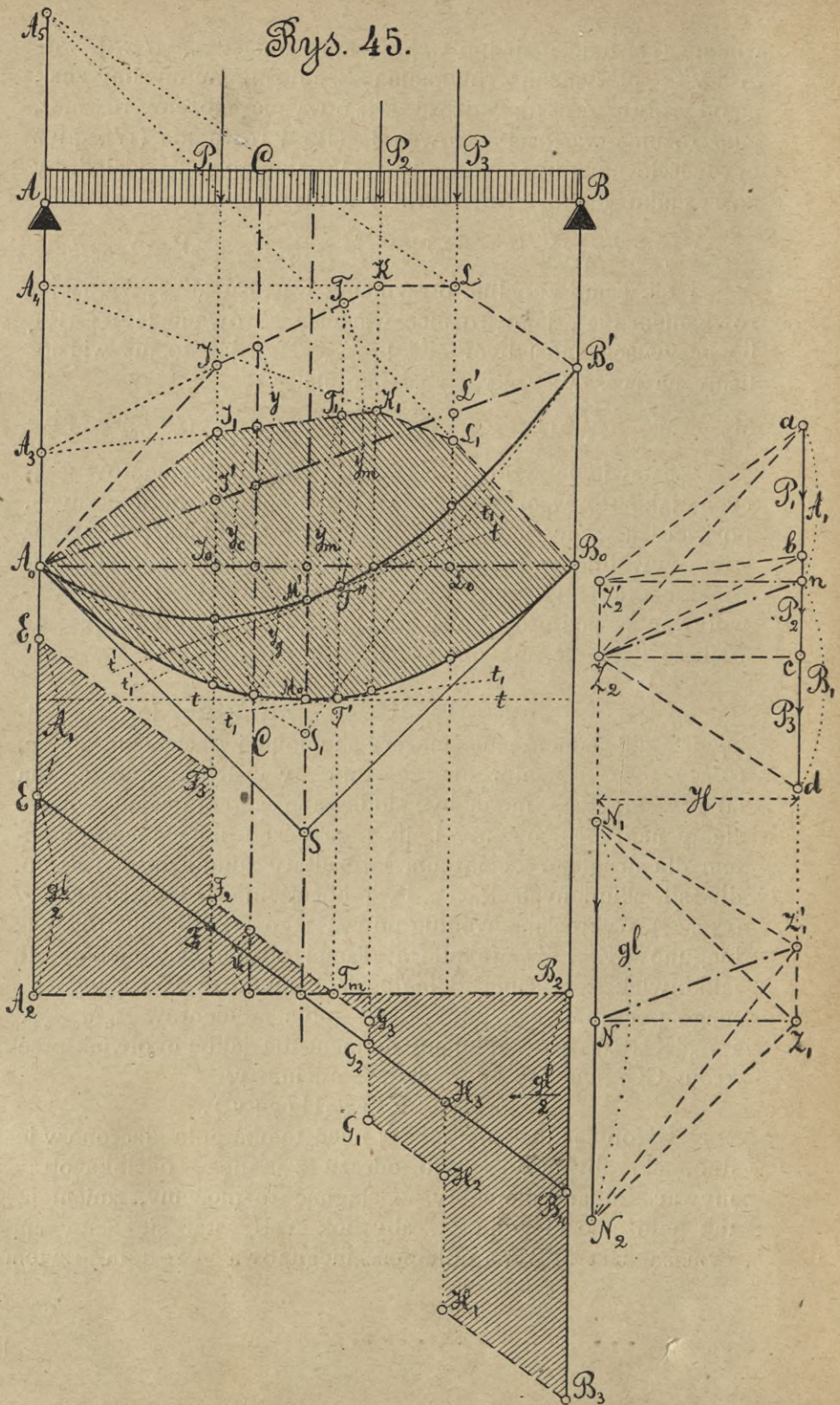
**§ 6. Obciążenie stałe — złożone.** Jeżeli na belkę działają jednocześnie ciężary skupione i obciążenie ciągłe, to wychodząc z założenia, że momenty i siły poprzeczne dla sił równoległych mogą być dodawane algebraicznie, wykreśliśmy najprzód momenty i siły poprzeczne dla jednego—a potem dla drugiego obciążenia i rezultaty sumujemy. Tak np. dla sił skupionych  $P_1, P_2, P_3$  i obciążenia jednostajnego  $gl$  (rys. 45), wykreślając według powyższego—(z obraniem jednak biegunów  $Z_1$  i  $Z_2$  nie po tej samej stronie wieloboków sił, jakkolwiek z tą samą odległością biegunową  $H$  i z tego samego początkowego punktu  $A_0$ )—pola momentów  $A_0 M_0 B_0 A_0$  i  $A_0 JKL B_0' A_0$ , otrzymujemy moment dla jakiegokolwiek przekroju  $CC$ , sumując odpowiednie odcinki  $y$ :

$$M_c = H \cdot y + H \cdot y_g = H (y + y_g).$$

Byłoby jednak dogodniej mieć te oba pola złączone w jedno, tak, aby można było odrazu z jednego odcinka otrzymywać szukane momenty. Osiągnąć to możemy, zmieniając tak położenie bieguna  $Z_2$ , aby bok  $A_0 B_0$  stał się zamykającym zamiast  $A_0 B'_0$ , a odległość biegunowa  $H$  została przytem



Figs. 45.





bez zmiany. Zgodnie ze str. 19, przesuając biegun  $Z_2$  równoległe do pionowej przez  $A_0$ , otrzymujemy nowy wielobok sznurowy, którego wszystkie boki przecinać się będą z odpowiednimi bokami poprzedniego wieloboku sznurowego (o biegunie  $Z_2$ ) na tej pionowej przez  $A_0$ , a więc ostatni bok  $LB'_0$  przetnie linię  $A_0A$  w punkcie  $A_5$ , przez który musi przejść także ostatni bok nowego wieloboku. Łącząc zatem punkt  $A_5$  z  $B_0$ , mamy ostatni bok nowego wieloboku, przecinający kierunek  $P_3$  w  $L_1$ ; łącząc zaś  $L_1$  z  $A_4$  (punktem przecięcia  $KL$  z  $A_0A$ ), otrzymujemy dalszy bok nowego wieloboku  $A_4L_1$ , przecinający kierunek  $P_2$  w  $K_1$ ; łącząc następnie  $K_1$  z  $A_3$ , otrzymujemy  $J_1$  i całe pole momentów  $A_0J_1K_1L_1B_0M_0A_0$ , wspólne dla obu obciążeń, gdyż teraz moment dla przekroju  $CC$  będzie:

$$M_c = H \cdot y_c$$

W obu polach  $A_0J_1K_1L_1B_0A_0$  i  $A_0JKLB'_0A_0$  odpowiednio odcinki, np.  $JJ'$  i  $J_1J_0$ , albo  $LL'$  i  $L_1L_0$ , muszą być równe (jako wyrażające moment dla tego samego przekroju, niezależny od wyboru bieguna) i tak samo całe te oba pola są równowielkie, a pole  $A_0J_1K_1L_1B_0A_0$  może być oczywiście otrzymane, odkładając wprost od osi  $A_0B_0$  (na odpowiednich pionowych) odcinki  $J_0J_1 = J'J$ ;  $L_0L_1 = L'L$  i t. d. Pole tejże wielkości  $A_0JKLB'_0M'A_0 = A_0J_1K_1L_1B_0M_0A_0$  otrzymamy również, odkładając **pionowo** od boku zamykającego  $A_0B'_0$  na dół odpowiednie odcinki paraboli  $A_0M_0B_0$  i łącząc otrzymane punkty — lub też wykreślając nową parabolę (za pomocą dwóch stycznych z punktami ich styczności) sposobem następującym: Przez środek obciążenia  $gl$  w wieloboku sił, t. j. przez  $N$ , prowadzimy równoległą do boku zamykającego  $A_0B'_0$ , przecinającą pionową przez  $Z_1$  w punkcie  $Z'_1$ . Obrawszy ten punkt  $Z'_1$  za nowy biegun, przeprowadzamy przez  $A_0$  i  $B'_0$  równoległe do  $N_1Z'_1$  i  $N_2Z'_1$ , t. j.  $A_0S_1$  i  $S_1B'_0$ , które będą oczywiście — jako boki skrajne nowego wieloboku sznurowego dla obciążenia  $gl$  — stycznymi do szukanej paraboli w punktach  $A_0$  i  $B'_0$ , więc wykreślimy tę parabolę  $A_0M'B'_0$  sposobem, wskazanym na str. 57 rys. 41.

Dla otrzymania sił poprzecznych wykreślamy naprzód (zgodnie ze str. 59) krzywą sił poprzecznych dla obciążenia jednostajnego (t. j. przyjąwszy za oś np. linię  $A_2B_2$ , odkładamy od  $A_2$  obciążenie  $+ \frac{gl}{2}$ , a od  $B_2$  —  $g \frac{l}{2}$  i otrzymujemy, jako



krzywą sił poprzecznych, prostą  $EB_4$ ). Dla sił zaś skupionych  $P_1, P_2, P_3$  odkładamy otrzymane (zgodnie ze str. 47) siły poprzeczne  $V_{01}, V_{12}, V_{13}$  na odpowiednich pionowych, przyjmując za oś linię  $EB_4$ , a więc od  $E$  odkładamy w górę (wyrażający siłę  $V_{01}=A_1$ ) odcinek  $na$  i przez otrzymany punkt  $E_1$  przeprowadzamy równoległą do  $EB_4$  aż do spotkania w  $F_3$  z pionową  $P_1$  (bo siła poprzeczna dla układu sił skupionych  $P_1, P_2, P_3$  nie zmienia się wcale między  $A$  i  $P_1$ ); na pionowej  $P_1$  od punktu  $F_1$  odkładamy do  $F_2$  (wyrażający siłę  $V_{12}$ ) odcinek  $nb$  (lub też od  $F_3$  do  $F_2$  odcinek  $=P_1$ ) i przeprowadzamy przez  $F_2$  równoległą do  $EB_4$ ; na pionowej  $P_2$  odkładamy od punktu  $G_2$  na dół (wyrażający siłę  $V_{23}$ ) odcinek  $nc$  (lub też od  $G_3$  do  $G_1$  odcinek  $=P_2$ ) i prowadzimy równoległą do  $EB_4$ ; wreszcie na pionowej  $P_3$  od punktu  $H_3$  odkładamy na dół do punktu  $H_1$  (wyrażający siłę  $V_{34}$ ) odcinek  $nd$  (lub też od  $H_3$  do  $H_1$  odcinek  $=P_3$ ) i prowadzimy równoległą do  $EB_4$ . Wykreślona w ten sposób linia łamana  $E_1F_3F_2G_3G_1H_2H_1B_3$  będzie wspólną krzywą sił poprzecznych dla obu obciążeń i siła poprzeczna dla dowolnego przekroju  $CC$  wyrazi się przez wspólny odcinek  $V_c$ . Dla przekroju  $TT_m$  siła poprzeczna staje się  $=0$  — czyli właściwie staje się siłą nieskończenie małą i nieskończenie odległą, lub też parą sił — i punkt ten odpowiada największemu momentowi, o czym zresztą przekonujemy się wykreślnie, otrzymując w punkcie  $T'$  styczną  $t_1$ , równoległą do  $J_1K_1$  i zarazem największy odcinek  $y_m = T'T_1$ , dający:  $M_{max} = H \cdot y_m$ . [Tej samej wielkości odcinek  $y_m$  otrzymujemy oczywiście także, jako  $T''T$ , odpowiadający punktowi  $T''$  paraboli  $A_0M'B'_0$ , w którym styczna  $t'_1$  jest równoległą do boku  $JK$ .]

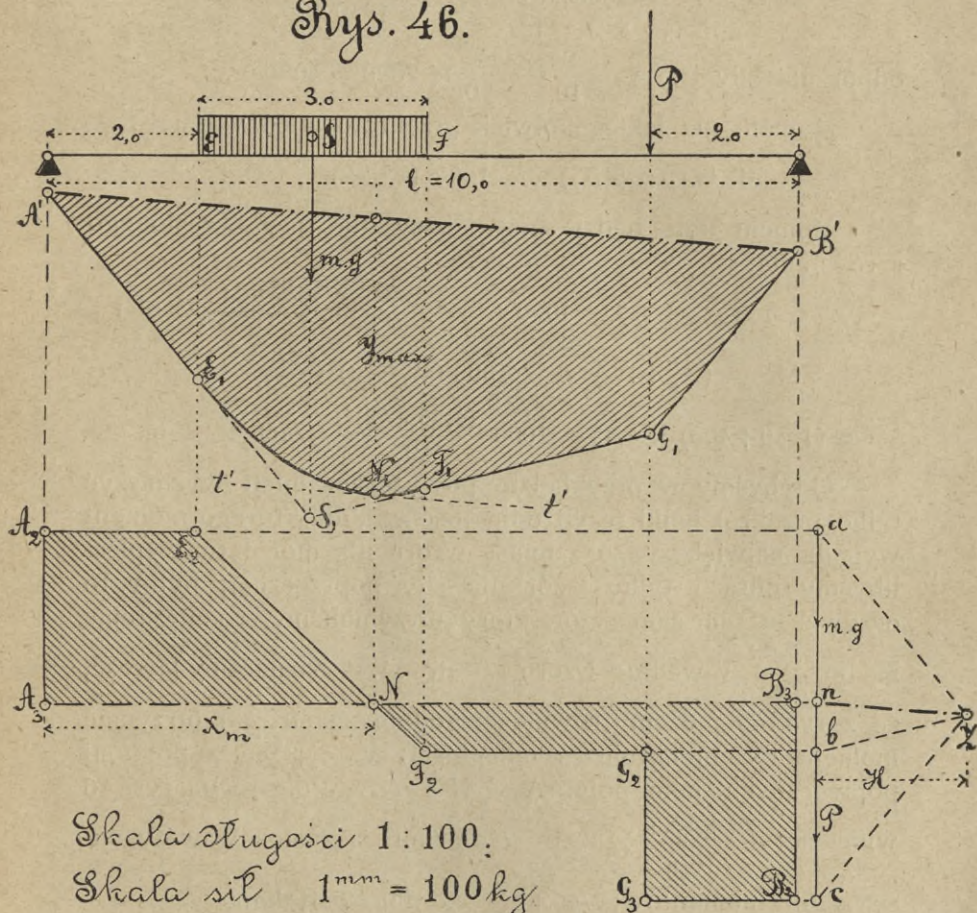
**Przykład:** Obciążenie belki 10,0 m długiej składa się ze stałego jednostajnego  $g=1000$  kg na metr bieżący, działającego na długości  $m=3,0$  m, czyli:  $G=m \cdot g=3 \times 1000=3000$  kg (rys. 46), a prócz tego z siły  $P=2000$  kg. Wyznaczyć największy moment i przekrój belki, odpowiadający temuż.

Skalę długości przyjęliśmy 1:100, czyli 1 mm = 0,1 m, a skalę sił: 1 mm = 100 kg. Odległość biegunową weźmy:  $H=20$  mm. Wielobok sił składać się będzie z siły  $G=ab=3000$  kg, czyli w naszej skali = 30 mm i  $bc=P=2000$  kg, czyli 20 mm. Jeżeli przyjmiemy obciążenie jednostajne ( $G=3000$  kg) jako skupione w środkowym punkcie  $S$ , to wielobokiem sznu-



rowym będzie  $A'S_1G_1B'$ ; ponieważ zaś obciążenie to jest stałym jednostajnym między punktami E i F, więc (zgodnie ze str. 55) otrzymujemy między punktami  $E_1$  i  $F_1$  parabolę, styczną w  $E_1$  i  $F_1$  i wykreślimy ją zgodnie ze str. 57 rys. 41.

Rys. 46.



Skala długości 1 : 100.

Skala sił  $1^{mm} = 100\text{ kg}$

Krzywą sił poprzecznych otrzymamy (zgodnie ze str. 47 i 62) jako linię łamaną  $A_2E_2F_2G_2G_3B_2$ . Daje ona dla punktu N wartość  $= 0$  (t. j. siła poprzeczna staje się parą sił), a odległość tego punktu od podpory A jest na rysunku:  $x_m = 43,5\text{ mm}$ , czyli  $4,35\text{ m}$ ; (rachunek daje także  $4,35\text{ m}$ ). Dla tego przekroju belki moment będzie (zgodnie ze str. 62) największy. I rzeczywiście na pionowej przez N otrzymujemy największą rzę-



dną  $y_{max} = 37,3$  mm i styczna do paraboli w punkcie  $N_1$  jest równoległą do boku zamykającego  $A'B'$ , a wielkość tego momentu będzie:  $M_{max} = H \cdot y_{max} = 20 \times 37,3 \times 0,1 \times 100 = 7460$  kgm.

**Analitycznie** otrzymujemy: **7460,25 kgm**, a mianowicie:

Odpór dla obciążenia stałego jednostajnego:

$$A_g = \frac{3000 (10 - 3,5)}{10} = 1950 \text{ kg},$$

odpór dla siły P:  $A_p = \frac{2}{10} P = \frac{2}{10} \times 2000 = 400$  kg.

Moment dla jakiegokolwiek przekroju między E i F:

$$M_x = (A_g + A_p) x - 1000 (x - 2) \frac{x - 2}{2}.$$

Moment ten będzie największy dla  $x_m$ , określonego z równania:

$$\frac{dM}{dx} = 0 = A_g + A_p - 1000 (x_m - 2), \text{ z kąd: } x_m = 4,35 \text{ m i}$$

$$\begin{aligned} M_{max} &= (A_g + A_p) x_m - 1000 (x_m - 2) \left( \frac{x_m - 2}{2} \right) = \\ &= (1950 + 400) \times 4,35 - 1000 \frac{(4,35 - 2)^2}{2} = 7460,25 \text{ kgm}. \end{aligned}$$

Gdybyśmy w przykładzie powyższym mieli wyznaczyć tylko przekrój belki (czyli odległość  $x_m$ ), dla którego moment wypada największy, to zamiast wzoru dla momentu wypisałibyśmy odrazu tylko wzór dla siły poprzecznej; byłby to oczywiście ten sam wzór, który otrzymaliśmy, różniczkując

$M$ , bo  $\frac{dM}{dx} = V$  według wzoru (7) str. 54. — Zaznaczymy jeszcze,

że z rys. 46 możemy również (zgodnie ze str. 48) otrzymać moment dla przekroju w odległości:  $x_m = 4,35$  m z pola sił poprzecznych, jako pole:  $A_2 E_2 N A_3 A_2$ . Pole to na rys. 46

wyniesie:  $\frac{20 + 43,5}{2} \times 23,5 = 746,1$  mm<sup>2</sup>, a zastosowawszy na-

szą skalę momentów:  $746,1 \times \frac{1}{10} \times 100 = 7461$  kgm.

## § 7. Belka jednym końcem osadzona, zresztą swobodna.

Jeżeli na belkę, osadzoną końcem A (rys. 47), działają siły  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , dające wypadkową R, to dodając w linii pionowej przez A jeszcze dwie siły: +R i -R, widzimy, że na podporę A działa wypadkowa +R i para sił (+R, -R). Dla utrzymania zatem belki w równowadze w podporze A nietylko musi działać równoważący







siłę +R odpór  $A_1$ , ale musi urządzenie tej podpory przeciwdziałać momentowi pary sił  $R.r$ , czyli koniec belki musi być odpowiednio osadzony.

Do tego samego wniosku dojdziemy, wykreślając dla sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  wielobok sił i sznurowy. Wielobok sił (linia prosta  $abcdea$ ) będzie zamknięty, ale wielobok sznurowy da jako ostatni bok (t. j. zamiast zamykającego) linię TS, równoległą do siły pomocniczej  $P_0$ , a więc (zgodnie ze str. 28) układ nasz jest równoznaczny z parą sił ( $-P_0, +P_0$ ), działających w liniach JU i TS, z lotem oznaczonym koleją liter, a moment tej pary sił będzie równy  $R.r$ . Istotnie, zupełnie analogicznie z dowodzeniem na str. 40, z trójkąta UTN:  $TN.r = UN.\rho_0$  [ $\rho_0$  — jest długością prostopadłej, opuszczonej

z T na UN, czyli ramieniem pary sił ( $-P_0, +P_0$ )], ztąd:  $\frac{r}{\rho_0} = \frac{UN}{TN}$ . Ale wskutek podobieństwa trójkątów UTN i Zea:

$$\frac{UN}{TN} = \frac{Za}{ea}, \text{ więc } \frac{r}{\rho_0} = \frac{Za}{ea}, \text{ czyli } \frac{r}{\rho_0} = \frac{P_0}{R}, \text{ a ztąd: } R.r = P_0 \cdot \rho_0.$$

(Jest to zresztą zupełnie oczywiste, że siła  $A_1$ , złożona z siłami  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , których wypadkową jest  $R$ , daje w rezultacie parę sił:  $A_1$  i  $R$  z momentem  $R.r$ ). Dla równowagi koniecznym jest zatem, aby oprócz odporu  $A_1$  przeciwdziałał jeszcze w podporze A moment sił  $= -R.r$ , t. j. koniec belki musi być umocowany.

Siły poprzeczne wykreślimy, jako wypadkowe sił zewnętrznych, działających po lewej stronie belki: W samej podporze A działa siła  $A_1$  i para sił z momentem  $-R.r$ . Te trzy siły dają w rezultacie jedną siłę  $A_1$ , działającą w U, a więc:

$$V_0 = A_1 \text{ (i przechodzi przez U).}$$

Między podporą A i siłą  $P_1$ :  $V_{01} =$  również siła  $A_1$ , działającej w U.

Między siłą  $P_1$  i  $P_2$ :  $V_{12} = A_1 - P_1$  + para sił z momentem  $-R.r$ ,  
czyli = wypadkowej sił:  $A_1$  (działającej w U)  
i  $P_1 =$  siła  $(A_1 - P_1)$ , działającej w U'.

Między siłą  $P_2$  i  $P_3$ :  $V_{23} = A_1 - P_1 - P_2$  + para sił z momentem  $-R.r$ ,  
czyli = siła  $(A_1 - P_1 - P_2)$ , działającej w U''.

Między siłą  $P_3$  i  $P_4$ :  $V_{34} = A_1 - P_1 - P_2 - P_3$  + para sił z mom.  $-R.r$ ,  
czyli = siła  $(A_1 - P_1 - P_2 - P_3)$ , działającej w M.

Wreszcie w przekroju  $P_4$ :  $V_4 = \underline{A_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4}$  + para sił  
para sił z momentem  $+R.r$ .

z mom.  $-R.r$ , czyli 2 pary sił, znoszące się nawzajem, a więc  $= 0$ .



[Łatwo zauważyć, że w danym wypadku wyznaczenie powyższe sił poprzecznych możnaby znacznie uprościć, rozważając nie lewą, lecz prawą część belki, gdyż otrzymujemy np. dla przekroju między siłą  $P_2$  i  $P_3$ :  $V_{23} = -(P_3 + P_4)$ , czyli = =wypadkowej tych sił, przechodzącej przez  $U''$ , równej (ale odwrotnej) otrzymanej wyżej ( $A_1 - P_1 - P_2$ )].

Krzywą sił poprzecznych będzie więc linia schodowa, wykreślona na rys. 47.

Momenty sił poprzecznych dla dowolnego przekroju CC otrzymywać będziemy [zgodnie ze str. 37 (rys. 33) i str. 47 (rys. 36)] za pomocą odcinków między odpowiednimi bokami wieloboku sznurowego, a więc:

Moment siły poprzecznej dla podpory A, czyli moment siły  $V_0$ , działającej w U i równej  $A_1$ :  $M_0 = A_1 \times r = H \cdot y_0$ .

Moment siły poprzecznej między podporą A i siłą  $P_1$ , np.

$$\text{dla przekroju } C_1 C_1 : M_{01} = V_{01} \cdot e_{01} = H \cdot y_{01}$$

$$\text{„ „ } C_2 C_2 : M_{12} = V_{12} \cdot e_{12} = H \cdot y_{12}$$

$$\text{„ „ } C_3 C_3 : M_{23} = V_{23} \cdot e_{23} = H \cdot y_{23}$$

$$\text{„ „ } C_4 C_4 : M_{34} = V_{34} \cdot e_{34} = H \cdot y_{34}.$$

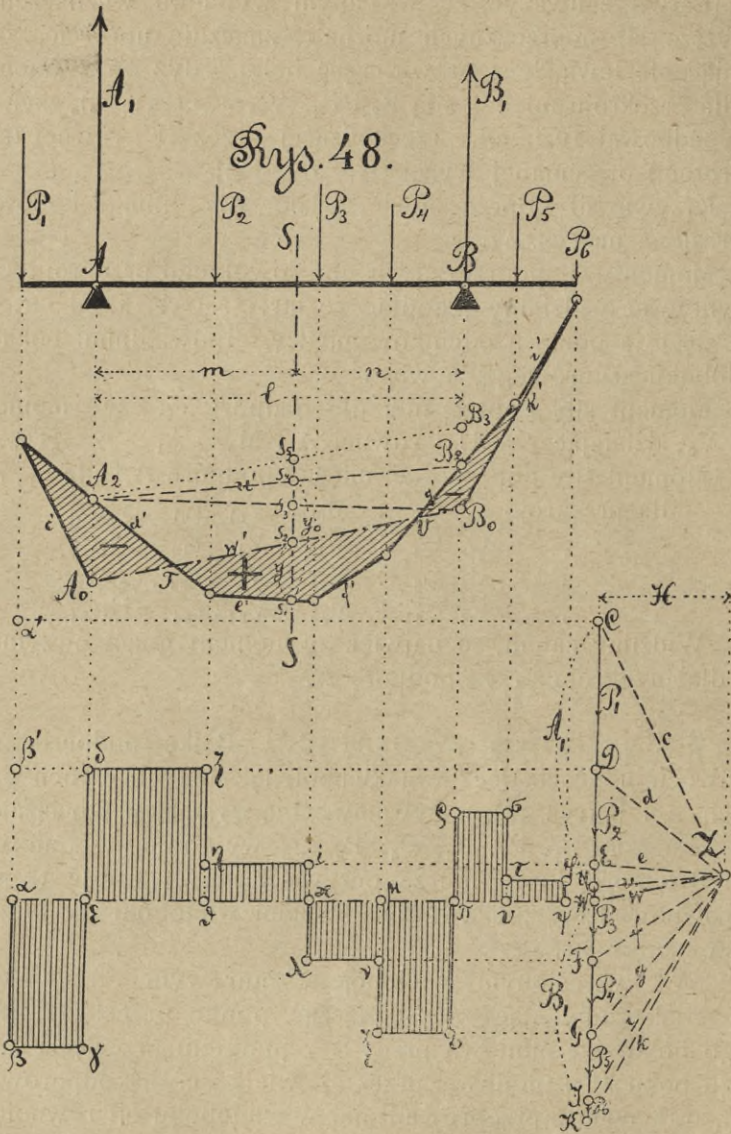
Widzimy zatem, że największy moment gnący otrzymuje się dla przekroju przez podporę A.

**§ 8. Belka wystająca.** Belkę podpartą nie w dwóch końcach, lecz w jakichkolwiek innych dwóch punktach A i B (rys. 48), nazywamy **belką wystającą**. Obciążające tę belkę siły  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  wywołują w punktach A i B odpory, które muszą oczywiście utrzymywać te siły w równowadze, czyli tworzyć z nimi wieloboki sił i sznurowy zamknięte.

W wykreślonym wieloboku sznurowym otrzymujemy jego bok zamykający  $A_0 B_0$ , łącząc punkt przecięcia skrajnego boku  $c'$  z pionową przez A z punktem przecięcia skrajnego boku  $k'$  z pionową przez B, wielkość zaś odporów  $A_1$  i  $B_1$  otrzymamy (przeprowadzając w wieloboku sił równoległą  $w$  do boku zamykającego  $A_0 B_0$  przez biegun Z), jako odcinki WC i KW.

**Siły poprzeczne.** Zgodnie ze str. 46 (rys. 36) siła poprzeczna V dla jakiegokolwiek przekroju SS, czyli wypadkowa sił  $P_1, A_1$  i  $P_2$ , wyrażać się będzie jako odcinek WE w wieloboku sił, ograniczony przez promienie równoległe do boków  $A_0 B_0$  i  $e'$ , a krzywą sił poprzecznych otrzymamy,





przeprowadzając przez punkty C, D, E... wieloboku sił równoległe do osi AB. Za oś najlepiej obrać linię równoległą do AB, idącą przez punkt W i pierwszą siłę  $P_1$  odłożyć w dół, jako odcinek  $\alpha\beta$  (zamiast odcinka  $\alpha'\beta'$ ). Będzie to siła poprzeczna dla przekrojów między  $P_1$  i A. W przekroju przez A przybywa odpór  $A_1$ , jako odcinek  $\gamma\delta = WC$ , więc siła po-



przeczną staje się dodatnią  $i = \varepsilon \delta$ . W przekroju przez  $P_2$  przybywa  $P_2$  (czyli  $\zeta \eta$ ), więc siła poprzeczna staje się  $= \delta \eta$ . W przekroju  $P_3$  przybywa  $P_3$  (czyli  $\nu \lambda$ ), więc siła poprzeczna staje się **ujemną**  $i = \nu \lambda$ ; podobnież dalej przybywają siły  $P_4$ ,  $B_1$ ,  $P_5$  i  $P_6$  i siła poprzeczna staje się kolejno równą odcinkom  $\mu \xi$ ,  $\pi \rho$ ,  $\nu \tau$ , a w przekroju przez  $P_6$  staje się  $= 0$ .

**Momenty.** Zgodnie ze str. 47 (rys. 36) otrzymujemy moment gnący dla jakiegokolwiek przekroju belki SS — czyli moment siły poprzecznej (dla przekroju SS), wypadkowej sił  $P_1$ ,  $A_1$  i  $P_2$  — jako iloczyn:  $M = H \cdot y$  (ponieważ bokami skrajnymi dla tych sił są  $A_0 B_0$  i  $e'$ ). Dla punktów T i V moment jest  $= 0$ , a dla przekrojów na lewo od T i na prawo od V moment staje się ujemnym (bo skoro odcinek  $y$  uważaliśmy za dodatni przy położeniu  $S_1$  **pod** bokiem zamykającym  $A_0 B_0$ , to przy położeniu odwrotnym (np.  $A_2$  **ponad**  $A_0$ ) odcinek  $y$  trzeba uważać za ujemny (jest to zresztą oczywiście, że o ile rozpatrywany przekrój zbliżamy z prawej strony do T — moment siły poprzecznej, wypadkowej sił  $P_1$  i  $A_1$ , przechodzącej przez T i skierowanej ku górze, będąc **dodatnim**, zmniejsza się i dla przekroju przez T staje się  $= 0$ , dalej zaś — dla przekrojów na lewo od T — będzie **ujemnym**). Zauważmy tutaj, że tak samo, jak zawsze, największy moment otrzymujemy w przekroju pod siłą  $P_3$ , dla którego siła poprzeczna przechodzi przez wartość  $0$ , a największe momenty **ujemne** — w przekrojach przez podpory A i B, dla których również siły poprzeczne przechodzą przez wartość  $0$ .

Połączmy punkt  $A_2$  z  $B_2$  i oznaczmy odcinek  $S_4 S_1$  przez  $y_0$ , odległość przekroju SS od A i B przez  $m$  i  $n$ , a momenty odporowe (czyli momenty dla przekrojów przez podpory A i B) przez  $M_a$  i  $M_b$ . Te momenty wyrażą się:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= -H \cdot A_0 A_2 \\ M_b &= -H \cdot B_0 B_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (28).$$

Moment  $M_0$  dla przekroju SS belki zwyczajnej (t. j. w przypadku, że działają na belkę tylko siły  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ , a bokiem zamykającym będzie  $A_2 B_2$ ):  $M_0 = H \cdot y_0$ .

Moment  $M$  dla belki wystającej jest oczywiście mniejszy od  $M_0$ , bo siły  $P_1$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ , obciążając belkę **poza** podporami A i B, przeciwdziałają jej wyginaniu **między** podporami.

Zauważmy jeszcze, że  $S_4 S_2 = S_4 S_3 + S_3 S_2$ , ale wskutek podobieństwa trójkątów  $A_2 S_3 S_4$  i  $A_2 B_0 B_2$ , a także  $B_0 S_2 S_3$



i  $B_0 A_0 A_2$ :  $S_4 S_3 = B_0 B_2 \times \frac{m}{l}$  i  $S_3 S_2 = A_0 A_2 \times \frac{n}{l}$ , więc  
 $S_4 S_2 = A_0 A_2 \times \frac{n}{l} + B_0 B_2 \times \frac{m}{l}$  i na mocy równań (28):  
 $S_4 S_2 = -\frac{1}{H} \left\{ M_a \times \frac{n}{l} + M_b \times \frac{m}{l} \right\}$ .

Ale ponieważ:  $y = S_1 S_4 - S_4 S_2 = y_0 + \frac{1}{H} \left\{ M_a \times \frac{n}{l} + M_b \times \frac{m}{l} \right\}$ , więc mnożąc przez H:

$$H \cdot y = H \cdot y_0 + M_a \times \frac{n}{l} + M_b \times \frac{m}{l}, \text{ czyli:}$$

$$M = M_0 + M_a \times \frac{n}{l} + M_b \times \frac{m}{l} \dots \dots (29).$$

Podobnież dla sił poprzecznych (przeprowadzając przez punkt  $A_2$  linię  $A_2 B_3$ , równoległą do  $A_0 B_0$ , a przez biegun Z linię ZU, równoległą do  $A_2 B_2$ ), otrzymujemy odcinek UE, jako siłę poprzeczną dla przekroju SS w belce zwyczajnej, obciążonej tylko między podporami. Oznaczmy ją  $V_0$ . Z podobieństwa trójkątów ZWU i  $A_2 B_2 B_3$  wynika:  $WU = \frac{H \times B_2 B_3}{l}$ ; ale  $B_2 B_3 = A_0 A_2 - B_0 B_2$ , czyli według wzorów

(28):  $WU = \frac{M_b - M_a}{l}$ ; ponieważ zaś:  $WE = UE + WU$ , więc:

$$V = V_0 + \frac{M_b - M_a}{l} \dots \dots (30).$$

Widzimy zatem, że o ile są dane: pole momentów, siły poprzeczne dla belki zwyczajnej, obciążonej tylko między podporami oraz momenty odporowe  $M_a$  i  $M_b$ , to możemy określić [z wzorów (29) i (30)] momenty i siły poprzeczne dla każdego przekroju belki wystającej.

Jeżeli obciążenie belki wystającej jest poza podporami zupełnie symetryczne (t. j. daje z każdej strony tę samą wypadkową R w odległości np.  $r$  od podpory), to oczywiście wywołany przez nie odpór:  $A'_1 = B'_1 = -R$ . Momenty odporowe będą wtedy oczywiście także równe:  $M_a = M_b = -R \cdot r$ . Oprócz tego wzór (29) da nam:

$$M = M_0 + M_a \left( \frac{n}{l} + \frac{m}{l} \right) = M_0 + M_a,$$

więc moment dla belki wystającej, obciążonej symetrycznie poza podporami, różni się od momentu dla belki zwyczajnej,



obciążonej tylko między podporami, dla każdego przekroju o tę samą wielkość  $M_a$ , (co zresztą wynika i ztąd, że jeżeli do belki zwyczajnej dołączymy poza podporami obciążenie symetryczne, to do momentu, obliczonego dla belki zwyczajnej dodać należy moment, wywołany przez wypadkową  $R$  sił poza podporą  $A$  i przez przyrost odporu  $= -R$ ; będzie to para sił, dająca moment  $-R \cdot r = M_a = M_b$ , jednakowy dla wszystkich przekrojów belki między podporami  $A$  i  $B$ ). Wzór zaś (30) da nam, wobec  $M_a = M_b$

$$V = V_0,$$

czyli siła poprzeczna dla belki wystającej, obciążonej symetrycznie poza podporami, jest równą dla każdego przekroju między podporami sile poprzecznej w belce zwyczajnej, obciążonej tylko między podporami, (co jest zresztą oczywiste wobec powyżej zaznaczonego:  $A'_1 = B'_1 = -R$ ).

Wyznaczanie więc momentów i sił poprzecznych belki wystającej, **obciążonej symetrycznie poza podporami**, sprowadza się do wyznaczenia jedynie momentu odporowego oraz momentów i sił poprzecznych dla belki zwyczajnej (nieobciążonej poza podporami).

Dla belki wystającej, obciążonej jednostajnie (rys. 49), wykreślimy (zgodnie ze str. 55), jako wielobok sznurowy — parabolę  $T S U$  i przeprowadziwszy bok zamykający  $A_0 B_0$ , otrzymamy pole momentów. Przy wykreślaniu sił poprzecznych (tak samo, jak wyżej na str. 74), odłożymy pierwszy otrzymany odcinek  $CD$  od osi  $A_2 B_2$ , odpowiadającej promieniowi równoległemu do boku zamykającego  $A_0 B_0$ . Z lewej strony podpory  $A$  siłę poprzeczną wyrażać będzie (zgodnie ze str. 62) prosta  $\alpha\beta$ ; dalej zaś proste  $\gamma\delta$  i  $\epsilon\zeta$ . Punkt przecięcia  $M$  z osią  $A_2 B_2$  daje oczywiście przekrój belki, dla którego siła poprzeczna staje się  $= 0$ , a raczej parą sił, więc moment będzie tam największy i otrzymamy go, przeprowadzając równoległą do boku zamykającego  $A_0 B_0$  styczną do paraboli w punkcie  $M_1$ .

## § 9. Obciążenie ruchome.

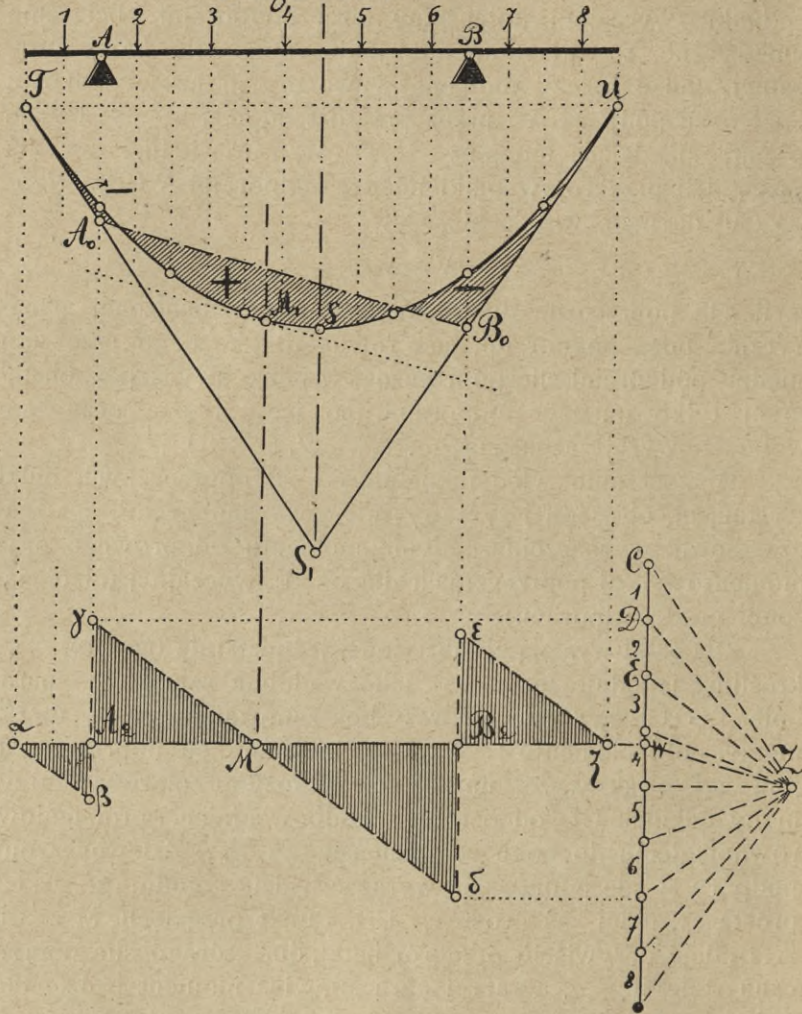
### a) Wpływ obciążenia ruchomego na momenty.

Rozważmy przedewszystkiem, jaki wpływ wywiera na belkę jeden ciężar, przesuwany się po niej:

Wykreślając dla siły  $P$ , obciążającej belkę  $AB$  (rys. 50), trójkąt sznurowy  $A_0 B_0 D$ , otrzymujemy, jak wiadomo, moment



Rys. 49.



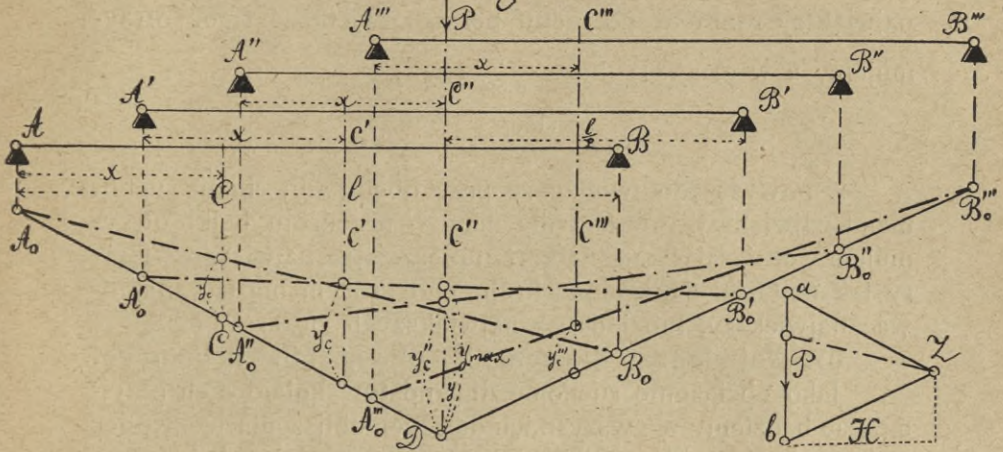
wywołany przez tę siłę dla każdego przekroju belki, np. CC, z wzoru:

$$M = H \cdot y_c$$

Widzimy ztąd, że przy danem położeniu siły \$P\$ na belce \$AB\$ największy moment będzie dla przekroju \$C''C''\$ pod samą siłą \$P\$ (bo odcinek \$y\$ jest oczywiście największy ze wszystkich odcinków w trójkącie \$A\_0B\_0D\$). Przesuwając zaś tę siłę \$P\$ wzdłuż belki—lub też, co na jedno wychodzi, przesuwając



Rys. 50.



jąc tylko belkę AB (np. w położenia  $A'B'$ ,  $A''B''$ ,  $A'''B'''$ , z pozostawieniem siły  $P$  na miejscu), widzimy, że w trójkącie sznurowym zmienia się tylko bok zamykający  $A_0B_0$  (np. na  $A'_0B'_0$ ) a razem z nim odcinek  $y$  i przytem: **Dla danego przekroju belki  $CC$**  (w odległości  $x$  od podpory  $A$ ) odcinek  $y$  (a zatem i moment) wzrasta w miarę zbliżania się siły  $P$  do przekroju ( $y'_c$  jest oczywiście większe od  $y_c$ ) i staje się największym ( $y''_c$ ) z chwilą, kiedy siła  $P$  jest ponad przekrojem, t. j. dla położenia belki  $A''B''$ ; przy dalszem zaś przesuwaniu belki  $y_c$  będzie się zmniejszało ( $y'''_c$  jest oczywiście mniejsze od  $y''_c$ ). **Dla całej zaś belki** odcinek  $y$ , a zatem i moment osiąga swoje maximum z chwilą, kiedy siła  $P$  znajduje się pośrodku belki. Istotnie (zgodnie z wzorem (1) str. 53) dla jakiegokolwiek położenia siły  $P$  w odległości  $x$  od podpory  $A$ :

$$\text{Odpór } A_1 = \frac{P(l-x)}{l}$$

więc moment gnący dla przekroju pod siłą  $P$  będzie:

$$M = A_1 \cdot x = \frac{P(l-x)x}{l} \dots \dots (31)$$

Widzimy ztąd przedewszystkiem, że dla każdego położenia siły  $P$  otrzymujemy moment  **dodatni** (co zresztą wiemy już ze str. 49). Widzimy nadto, że moment ten będzie największy dla:  $l-x=x$  (bo różniczkując równanie (31) i przyjmując pochodną  $=0$ , otrzymujemy:  $\frac{dM}{dx} = P - \frac{2Px}{l} = 0$ , zkąd



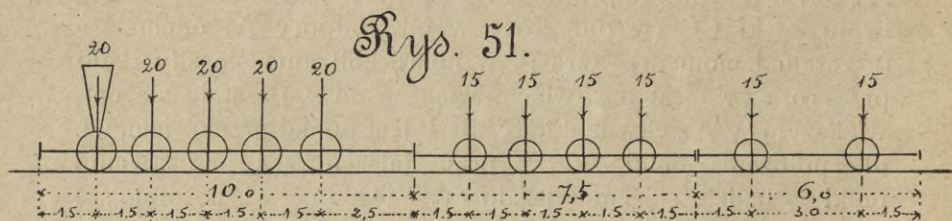
$x = \frac{l}{2}$ ) a więc ciężar  $P$ , przesuwany się po belce, wywołuje największy moment pośrodku belki, a wielkość tegoż otrzymujemy z wzoru (31) dla  $x = \frac{l}{2}$ , czyli:

$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4} \dots \dots (32)$$

Z powyższego wynika, że przy obciążeniu siłami ruchomego największy moment dla danego przekroju belki otrzymujemy, obciążając całą belkę i umieszczając największe ciężary jak najbliżej danego przekroju, nad którym ma się znajdować największy, lub jeden z największych ciężarów.

**b) Największy moment dla obciążenia ruchomego.**

Jako obciążenie ruchome dla mostów kolejowych przyjmować będziemy we wszystkich dalszych obliczeniach — wobec stałego dążenia do zwiększania siły przewozowej, a zatem i obciążeń parowozów — parowozy 5-o osiowe (po 20 tonn na oś), tendry 4-o osiowe (po 15 tonn na oś) i wagony towarowe dwuosiowe (po 15 tonn na oś) według rys. 51. Dla



wywołania największego momentu trzeba ustawiać parowozy tak, aby otrzymać jak najwięcej zbliżonych do siebie najcięższych kół, czyli ustawiać dwa parowozy kominami ku sobie i nad rozważanym przekrojem umieścić jedno z tych najcięższych kół.

Dla określenia zaś, które mianowicie koło trzeba ustawić nad rozważanym przekrojem belki AB (tablica 1-a), aby wywołać w nim największy moment, wykreśliamy dla dwóch parowozów 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 (zwróconych kominami ku sobie), z szeregiem osi wagonów towarowych z prawej strony: 19, 20, 21, 22, 23... wjelobok sił:  $abcde \dots$  i sznurowy:  $A'_n A'_{10} B'_n B'_{10}$  z biegunem Z. (Oprócz tych dwóch parowozów dodany jest na tablicy 1-ej jeszcze



trzeci — z lewej strony:  $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0, 9^0$ , potrzebny nam poniżej, przy wyznaczaniu sił poprzecznych). Przesuwamy następnie ponad wielobokiem sznurowym naszą belkę  $A_6 B_6$  tak, aby zajęła położenia:  $A_6 B_6, A_7 B_7, A_8 B_8, \dots$ , z których każde odpowiada umieszczeniu rozważanego przekroju  $C^{IV}$  pod jednym z kół parowozu ( $C_6^{IV}, C_7^{IV}, C_8^{IV}, C_9^{IV}, C_{10}^{IV}$ ). Rozpiętość teoretyczną belki AB przyjęliśmy na tablicy 1-iej:  $l = 36,0$  m, a rozważany przekrój  $C^{IV}$  — w odległości 12,0 m od podpory A. Otrzymamy przytem boki zamykające  $A'_6 B'_6, A'_7 B'_7, A'_8 B'_8, \dots$ , dające dla przekroju  $C^{IV}$  różne punkty  $C'_6, C'_7, C'_8, \dots$ , a największemu odcinkowi  $y_m^{IV}$ , otrzymanemu pod ciężarem 7, odpowiada oczywiście największy moment, wywołany przez parowozy w przekroju  $C^{IV}$ , czyli:  $M_{max}^{IV} = H \cdot y_m^{IV}$ . Jako skalę przyjęliśmy na tablicy 1-iej dla długości: 1:200, a dla sił: 1 mm = 2 tonny, więc:  $H = 90$  mm =  $90 \times 200 = 18000$  mm = 18,0 m i  $y_m^{IV} = 39,9$  mm =  $39,9 \times 2 = 79,8$  mm, a zatem:  $M_{max}^{IV} = H \cdot y_m^{IV} = 18 \times 79,8 = 1436,4$  tonnometrów (obliczenie analityczne dało 1437,5 tonnometrów).

Można jednak i bez prób powyższych określić, które koło parowozu ustawić należy nad danym przekrojem  $C^{IV}$  dla wywołania w nim największego momentu: w tym celu należy przedewszystkiem ustawić belkę ponad wielobokiem sznurowym **mniej więcej tak**, aby rozważany przekrój był pośrodku największych ciężarów. Jeżeli np. nad rozważanym przekrojem  $C^{IV}$  ustawimy koło 6 (położenie belki będzie wtedy  $A_6 B_6$  i zmieszczą się na niej koła 1 do 18 włącznie), to przez punkt początkowy ciężaru 1 w wieloboku sił (t. j. przez  $a$ ) przeprowadzamy równoległą do belki AB i odłożywszy na niej (długość AB, lub jakąś jej część np.) **połowę długości AB** do punktu J, łączymy ten punkt J z końcowym punktem siły 18, czyli  $u$ ; odłożywszy następnie od punktu  $a$  **połowę długości**  $x = 12,0$  m (czyli  $aN$ ) przeprowadzamy przez otrzymany punkt N równoległą do  $Ju$ , która przetnie w wieloboku sił siłę 7; ustawienie tej siły 7 nad danym przekrojem wywoła w nim największy moment, jak to już otrzymaliśmy **wykreślnie**, a prócz tego zaraz udowodnimy **analitycznie**:

Istotnie, oznaczając przez  $R_1$  i  $R_2$  (rys. 52) wypadkowe siły, leżących po lewej — i po prawej stronie rozważanego przekroju CC, w którym działa siła P, otrzymamy (według wzoru (1) na str. 53) odpory siły P:  $A_p = \frac{P \cdot x_2}{l}$  i  $B_p = \frac{P \cdot x_1}{l}$ ,

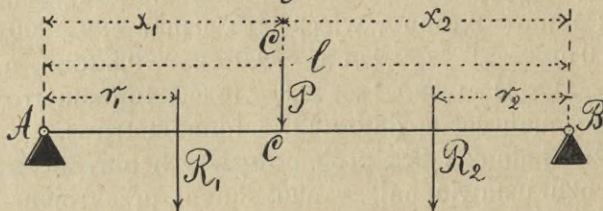


a moment wywołany przez siłę  $P$  w przekroju  $CC$  będzie:  
 $M_p = \frac{P \cdot x_1 \cdot x_2}{l}$ ; siły zaś  $R_1$  i  $R_2$ , dające dla podpór  $B$  i  $A$   
 odpory:  $B_{r_1} = \frac{R_1 r_1}{l}$  i  $A_{r_2} = \frac{R_2 r_2}{l}$ , wywołują w przekroju  $CC$   
 momenty  $M_{r_1} = \frac{R_1 r_1 x_2}{l}$  \*) i  $M_{r_2} = \frac{R_2 r_2 x_1}{l}$ . Całkowity zatem  
 moment dla przekroju  $CC$  będzie:

$$M_c = M_p + M_{r_1} + M_{r_2} = \frac{P x_1 x_2}{l} + \frac{R_1 r_1 x_2}{l} + \frac{R_2 r_2 x_1}{l} \dots\dots (33).$$

Jeżeli moment ten ma być największy, to przy przesunięciu pociągu wlewo, lub wprawo na nieskończenie małą

Rys. 52.



odległość  $dx$  przyrost tego momentu  $dM$  musi być ujemnym. Przesuwając wszystkie ciężary na lewo o  $dx$ , otrzymamy dla siły  $P$  odpór:  $B'_p = \frac{P(x_1 - dx)}{l}$ , dla siły  $R_1$  odpór:

$$B'_{r_1} = \frac{R_1(r_1 - dx)}{l} \text{ i dla siły } R_2 \text{ odpór: } A'_{r_2} = \frac{R_2(r_2 + dx)}{l},$$

moment zatem względem przekroju  $CC$  będzie teraz:

$$M_c + dM_l = \frac{P(x_1 - dx)x_2}{l} + \frac{R_1(r_1 - dx)x_2}{l} + \frac{R_2(r_2 + dx)x_1}{l} =$$

$$= \frac{P x_1 x_2}{l} + \frac{R_1 r_1 x_2}{l} + \frac{R_2 r_2 x_1}{l} + \frac{dx}{l} \{ R_2 x_1 - x_2 (P + R_1) \},$$

$$\text{t. j. } dM_l = \frac{dx}{l} \{ R_2 x_1 - x_2 (P + R_1) \}.$$

Ażeby  $dM_l$  było ujemnym, koniecznym jest:

$$R_2 x_1 < x_2 (P + R_1), \text{ czyli: } \frac{R_2}{P + R_1} < \frac{x_2}{x_1} \dots\dots (34).$$

\*) Dla otrzymania momentu siły  $R_1$  względem przekroju  $CC$  należy wziąć według str. 47 odpór  $B_{r_1}$  (wyrażający siłę poprzeczną — wypadkową sił zewnętrznych z prawej strony przekroju) ze znakiem odwrotnym i moment będzie wtedy dodatnim zgodnie ze str. 49 i 79.



Przesuwając zaś wszystkie ciężary na prawo o  $dx$ , otrzymujemy dla siły  $P$  odpór:  $A''_p = \frac{P(x_2 - dx)}{l}$ , dla sił  $R_1$  i  $R_2$

odpory:  $B''_{r_1} = \frac{R_1(r_1 + dx)}{l}$  i  $A''_{r_2} = \frac{R_2(r_2 - dx)}{l}$ ,

moment zatem względem przekroju  $CC$  będzie:

$$M_c + dM_p = \frac{P(x_2 - dx)x_1}{l} + \frac{R_1(r_1 + dx)x_2}{l} + \frac{R_2(r_2 - dx)x_1}{l} = \\ = \frac{Px_2x_1}{l} + \frac{R_1r_1x_2}{l} + \frac{R_2r_2x_1}{l} + \frac{dx}{l} \{-Px_1 + R_1x_2 - R_2x_1\},$$

$$\text{t. j. } dM_p = \frac{dx}{l} \{-Px_1 + R_1x_2 - R_2x_1\}.$$

Ażeby to  $dM_p$  było ujemnem, koniecznem jest:

$$R_1x_2 < Px_1 + R_2x_1, \text{ czyli: } \frac{R_1}{P + R_2} < \frac{x_1}{x_2} \dots \dots (35).$$

Ponieważ zaś dla konstrukcyi powyższej:

$$\frac{hu}{gh + ag} < \frac{JN}{aN} \quad \text{i} \quad \frac{ag}{gh + hu} < \frac{aN}{JN},$$

a wzory te po wstawieniu do nich wartości:

$$R_2 = hu; \quad P = gh; \quad R_1 = ag; \quad x_2 = 2JN; \quad x_1 = 2aN,$$

zamieniają się w (34) i (35), więc wykreślony sposobem powyższym moment  $M_c$  jest dla przekroju  $CC$  rzeczywiście największym.

Zauważmy jeszcze, że gdybyśmy równoległą do  $Ju$  trafili na punkt między dwiema siłami wieloboku sił (jak to się właśnie zdarzyło na tablicy 3-ej, gdzie równoległa do  $Z_7u$ , przeprowadzona przez punkt  $N_7$ , przeszła przez punkt  $h$ : końcowy punkt siły 7 i początkowy punkt siły 8), znaczyłoby to, że i pod jedną i pod drugą siłą moment dla tego przekroju będzie największy, jak o tem przekonamy się poniżej.

Również zaznaczyć należy, że gdybyśmy dla jakiegokolwiek przekroju po wyznaczeniu (za pomocą wskazanej konstrukcyi) siły, mającej dać największy moment, przekonali się, że belka—po jej odpowiedniem ustawieniu względem tej siły—zawiera inne siły, niż przyjęte pod uwagę w konstrukcyi, to trzeba powtórzyć tę konstrukcyę dla nowego składu sił. Tak np. po przesunięciu belki  $AB$  (tablica 1-a) tak, aby siła 7 znalazła się nad przekrojem  $C^{IV}$ , widzimy, że na belce będą teraz siły od 1 do 19 włącznie. Przy zastosowaniu więc



ponownem poprzedniej konstrukcyi zachowujemy otrzymane tam dla początkowego punktu siły 1 punkty N i J, łączymy zaś punkt J z końcowym punktem siły 19 (t. j.  $v$ ) i prowadzimy przez N równoległą do  $Jv$ , która przecina na wieloboku sił także siłę 7 i dopiero teraz jesteśmy zupełnie pewni, że przez ustawienie siły 7 nad przekrojem  $C^{IV}$  wywołamy tamże największy moment.

Jeżeli wyznaczymy w sposób powyższy dla szeregu przekrojów belki największe momenty (na tablicy 1-ej zrobiliśmy to dla przekrojów I, II, III, IV, V, VI i otrzymaliśmy  $y_m^I, y_m^{II}, y_m^{III}, y_m^{IV}, y_m^V, y_m^{VI}$ ) i odłożywszy je od obranej osi AB, połączymy otrzymane końcowe punkty krzywą, to będzie to **krzywa największych momentów dla obciążenia ruchomego** ALB, a odpowiadający największemu odcinkowi  $y_m^{VI}$  moment będzie **bezwzględnie największym momentem dla obciążenia ruchomego**.

### c) Wyznaczenie bezwzględnie największego momentu.

Jeżeli zależy nam tylko na bezwzględnie największym momencie dla całej belki, to otrzymać go możemy niezależnie od krzywej największych momentów sposobem następującym: Zgodnie z powyższem (str. 49) szukany bezwzględnie największy moment otrzymamy w każdym razie **pod jednym z ciężarów**, przy odpowiednim ich rozmieszczeniu. Jeżeli więc dla **każdego ciężaru** określimy to jego położenie na belce, przy którym moment będzie największy, a także ów moment, to największy z tych wszystkich momentów będzie owym szukany bezwzględnie największym momentem. Nie trudno zaś będzie dowieść, że dla danej grupy ciężarów **otrzymujemy największy moment pod danym ciężarem wtedy, kiedy ten ciężar jest w tej samej odległości od środka belki, co wypadkowa całej grupy ciężarów, mieszczących się na belce**: Jeżeli np. na belce AB (rys. 53) mieszczą się siły  $P_2, P_3, P_4$  i wypadkową ich jest  $R_{234}$ , przechodząca przez S, to przesuważąc belkę AB w obie strony, np. w położenia  $A_2B_2, A_3B_3$ , otrzymujemy na wieloboku sznurowym różne boki zamykające  $A'B', A'_2B'_2, A'_3B'_3$ , z końcowymi punktami, pozostającymi ciągle na liniach JS i SK. Wszystkie te boki zamykające będą stycznymi do parabol z osią pionową i środek każdej z tych stycznych znajdować się będzie na **jednej z nich**  $A'_2B'_2$ , stycznej do parabol w punkcie E, leżącym na piono-







wiek ciężarem, np.  $P_3$ , moment (będący = iloczynowi  $H \cdot y_3$ ), zmienia się przy przesuwaniu belki AB i będzie oczywiście największym w chwili, kiedy belka zajmie położenie  $A_3B_3$ , odpowiadające bokowi zamykającemu  $A'_3B'_3$ , stycznemu do paraboli w punkcie G, leżącym na linii siły  $P_3$ . Przy tem położeniu belki  $A_3B_3$  środek jej będzie oczywiście leżał na linii pionowej, przechodzącej przez środek F stycznej  $A'_3B'_3$ . Ale ten środek F stycznej  $A'_3B'_3$  leży — jak powiedziano wyżej — na linii  $A'_2B'_2$ , czyli FE jest styczną do paraboli, a zatem punkt F, jako przecięcie dwóch stycznych do paraboli w punktach G i E, leży w jednakowej odległości od równoległych do osi paraboli pionowych, przechodzących przez G i E. (Tę własność paraboli zaznaczyliśmy już na str. 59 rys. 44). Dowiedliśmy zatem, że **największy moment pod ciężarem  $P_3$  otrzymujemy wtedy, gdy ciężar  $P_3$  znajduje się w takiej samej odległości od środka belki, jak wypadkowa  $R_{234}$** . Widzimy zarazem, że dla otrzymania takiego największego momentu nie potrzeba wcale wykreślać całej paraboli, skoro zależy nam tylko na otrzymaniu odcinka  $y_3$ . Wystarczy, mając wielobok sznurowy, a zatem i punkt S, przez który przechodzi wypadkowa sił  $P_2, P_3, P_4$ , przyjąć na pionowej, idącej w środku między S i  $P_3$ , środek belki AB, która w ten sposób zajmie położenie  $A_3B_3$ , da bok zamykający  $A'_3B'_3$ , a na przecięciu tegoż z siłą  $P_3$  — punkt styczności G i zarazem odcinek  $y_3$ .

Zauważmy jeszcze, że przy rozmieszczeniu sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  według rysunku 53 belka AB ma na sobie tylko siły  $P_2, P_3, P_4$ , których wypadkową  $R_{234}$  uwzględniliśmy w powyższej konstrukcyi. Gdyby jednak siła  $P_1$  zajmowała np. położenie  $P'_1$ , wtedy, przekonawszy się, że przy położeniu belki  $A_3B_3$  wchodzi na nią siła  $P'_1$  (oprócz uwzględnionych  $P_2, P_3, P_4$ ), wywnioskowalibyśmy ztąd, że należy wziąć **nie** siłę  $R_{234}$ , lecz  $R_{1'234}$ , przechodzącą przez  $S'$ . I oczywiście, idąc dalej według powyższego, otrzymalibyśmy środek belki pośrodku między  $S'$  i  $P_3$ , a zatem położenie tejże belki  $A_0B_0$ , bok zamykający  $A'_0B'_0$  i dla przekroju pod siłą  $P_3$  odcinek  $y'_3 = DG'$ , większy, niż poprzedni:  $y_3 = DG$ . W ten sam sposób możemy łatwo otrzymać największe momenty pod innymi ciężarami, a największy z nich będzie **bezwzględnie** największym momentem.

Najprędzej dojdziemy do celu — określenia bezwzględnie największego momentu — rozstawiając dane ciężary według



wskazówek na str. 80; wyznaczyszy ich wypadkową R, położoną np. między siłami  $P_3$  i  $P_4$ , (rys. 53) otrzymamy bezwzględnie największy moment najprawdopodobniej pod siłą  $P_3$  (lub  $P_4$ ) przy wyżej opisanem położeniu jej na belce, t. j. **takim, przy którym środek belki będzie jednakowo odległy od siły  $P_3$  (lub  $P_4$ ) i siły R.**

Ponieważ przy dowodzeniu tego ostatniego prawa przyjęliśmy z góry za wiadome wspomniane tam własności paraboli, wyprowadzimy zatem to prawo—w obec jego doniosłości—jeszcze analitycznie:

Dla grupy sił  $P_2, P_3, P_4$ , obciążających belkę  $A_2B_2$  (rys. 53), wypadkowa ich  $R_{234}$  daje w podporze A, zgodnie z wzorem (1) str. 53, odpór:

$$A_1 = \frac{l-x-2m}{l} \cdot R_{234}.$$

Moment dla przekroju pod siłą  $P_3$  będzie zatem:

$$M_x = A_1 \cdot x - P_2 \cdot a_2 = \frac{l-x-2m}{l} \cdot R_{234} \cdot x - P_2 a_2.$$

Moment ten osiągnie swoje maximum dla wielkości  $x$ , określonej z równania:  $\frac{dM_x}{dx} = 0$ , czyli, w obec tego, że przy zmianie położenia belki względem sił  $P_2, P_3, P_4$  odległość  $a_2$  siły  $P_2$  od  $P_3$  pozostaje tą samą:

$$\frac{l-x-2m}{l} R_{234} - \frac{R_{234} \cdot x}{l} = 0, \text{ z kąd: } x + m = \frac{l}{2}, \text{ a więc środek}$$

belki AB leży w równej odległości  $m$  od siły  $P_3$  i siły  $R_{234}$ .

Dla obciążenia parowozami (według tablicy 1-ej) belki o rozpiętości teoretycznej  $l=36,0$ m nie potrzebujemy oczywiście szukać największego momentu pod wszystkimi 10-u największymi ciężarami, bo ustawiając belkę pod parowozami tak, aby około środka otrzymać jak najwięcej najcięższych kół, widzimy, że wystarczy wziąć pod uwagę koła 9, 10, 11, 12, 13 i dopiero, gdyby pod kołem 9 moment okazał się większym, niż pod kołem 10 (co nie jest prawdopodobne) spróbować jeszcze koło 8. Dla otrzymania największego momentu pod kołem 10 znajdujemy przedewszystkiem wypadkową ciężarów, mieszczących się na belce, kiedy jej środek jest pod ciężarem 10, (t. j. dla położenia belki  $A_7B_7$ ); wchodzi wtedy na belkę ciężary 1 do 19 włącznie, wypadkowa ich zatem przechodzi przez punkt przecięcia boków wieloboku sznurowego, równoległych do promieni  $Za$  i  $Zv$ , czyli przez punkt  $S_{19}^1$  (tablica 1-a).



Ustawiamy więc belkę (zgodnie ze wskazówką powyższą tak, aby jej środek wypadł w połowie odległości między  $S_{19}^1$  i siłą 10, czyli) w położeniu  $A_m B_m$ , a odpowiedni bok zamykający  $A'_m B'_m$  da nam na pionowej przez 10 punkt  $L_{10}$ , a zatem odcinek  $y_m^{10}$  i największy moment pod siłą 10 jako  $H \cdot y_m^{10}$ . (Ten odcinek  $y_m^{10}$  wypadł równym  $y_m^{VI}$ , otrzymanemu dla położenia środka belki pod kołem 10, bardzo blizkiego do  $A_m B_m$ : Na tablicy 1-ej przy środku belki pod kołem 10 otrzymaliśmy jej położenie  $A_7 B_7$  i bok zamykający  $A'_7 B'_7$  dał pod kołem 10  $y_m^{VI} = y_m^{10}$ ). Przy wykreślanu tym samym sposobem największego momentu dla koła 9 otrzymujemy na belce siły 1 i 18 i wypadkową ich, przechodzącą przez  $S_{18}^1$  (oczywiście— w obec symetrii obciążenia 1 do 18—  $S_{18}^1$  leży w środku między siłami 9 i 10). Środek belki ma zatem być pośrodku między siłą 9 i  $S_{18}^1$ , czyli położenie belki będzie  $A_n B_n$  i otrzymamy za pomocą boku zamykającego  $A'_n B'_n$  punkt  $L_9$  i odcinek  $y_m^9$ , większy od wyżej otrzymanego  $y_9^{VI}$ .

Wyznaczywszy podobnie punkty  $L_8, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}$  i odcinki  $y_m^8, y_m^{11}, y_m^{12}, y_m^{13}, y_m^{14}$ , widzimy, że największym jest  $y_m^{10}$ , a więc  $H \cdot y_m^{10} = H \cdot y_m^{VI}$  jest bezwzględnie największym momentem, (jak to zresztą widzieliśmy już na str. 84).

**d) Największy moment dla dwóch, trzech — i dowolnej ilości ciężarów ruchomych, tworzących obciążenie symetryczne względem wypadkowej.**

Zgodnie ze str. 84 otrzymujemy największy moment dla jakiegokolwiek grupy ciężarów pod jednym z nich i moment ten odpowiada zawsze ustawieniu tego ciężaru w tej samej odległości od środka belki, co wypadkowa całej grupy ciężarów, mieszczących się na belce. A zatem dla dwóch jednakowych ciężarów ruchomych (rys. 54) w odległości wzajemnej  $c$  (mających więc swą wypadkową pośrodku  $c$ ) otrzymamy największy moment pod jednym z nich wtedy, kiedy ciężar ten znajdzie się w odległości  $\frac{c}{4}$  od środka belki.

Istotnie dla położenia koła w odległości  $x$  od podpory  $A$  otrzymujemy (zgodnie z wzorem (2) str. 53) odpór:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{l} \{ (l - a_1) P_1 + (l - a_2) P_2 \} = \frac{P}{l} \{ (l - x) + (l - x - c) \} = \\ &= [2(l - x) - c] \frac{P}{l}, \end{aligned}$$



więc moment dla przekroju w odległości  $x$  od podpory A:

$$M = A_1 \cdot x = [2(l-x) - c] \frac{P}{l} x \dots \dots (36).$$

Różniczkując i przyjmując pochodną = 0:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{P}{l} (-2x + [2(l-x) - c]) = 0,$$

$$\text{z kąd: } x = \frac{2l - c}{4} = \frac{l}{2} - \frac{c}{4} \dots \dots (37),$$

a sam największy moment otrzymamy z równania (36) po wstawieniu  $x$  z wzoru (37):

$$M_{II}^{max} = \frac{P \cdot (2l - c)^2}{8l} \dots \dots (38).$$

Największy moment, wywołany przez pojedynczą siłę P, ustawioną w środku belki, wynosi według wzoru (32) str. 80:

$$M_I^{max} = \frac{P \cdot l}{4}.$$

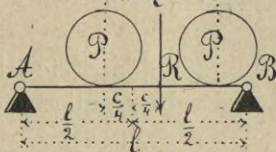
Przy zmniejszaniu się  $l$  i stałej odległości  $c$  zmniejsza się i  $M_{II}^{max}$ , obliczane według wzoru (38) i stanie się  $= M_I^{max}$  dla takiego  $l$ , które czyni zadość równaniu:

$$M_{II}^{max} = M_I^{max}, \text{ czyli:}$$

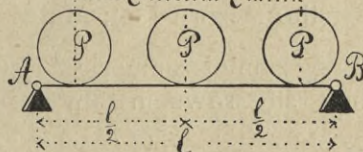
$$\frac{P(2l - c)^2}{8} = \frac{P \cdot l}{4}, \text{ z kąd:}$$

$$l = c + \frac{c}{2} \sqrt{2} = \approx 1,7071 c \dots \dots (39).$$

Rys. 54.



Rys. 55.



Jeżeli w dalszym ciągu będziemy zmniejszali  $l$ , to  $M_{II}^{max}$  stanie się mniejszem od  $M_I^{max}$ , co znaczy, że przy ustawieniu na belce o takiej rozpiętości  $l$  dwóch ciężarów P z wzajemną odległością  $c$  otrzymamy **mniejszy moment**, niż przy ustawieniu **jednego** ciężaru P pośrodku mostu, z kąd wniosek, że **dwie ciężary P o wzajemnej odległości  $c$  dają maximum momentu tylko dla  $l > 1,7071 c$**  i wielkość tego momentu otrzymu-



jemy z wzoru (38), przy ustawieniu kół wskazanem na rys. 54; dla  $l = 1,7071 c$  dają dwa koła, ustawione według rys. 54, największy moment  $= \frac{Pl}{4}$ , t. j. tej samej wielkości, co jedno koło, ustawione w środku belki; wreszcie dla  $l < 1,7071 c$  otrzymujemy największy moment nie dla dwóch—lecz dla jednego koła w środku belki i oczywiście tej samej wielkości  $\frac{Pl}{4}$ .

Dla trzech ciężarów w odległości wzajemnej  $c$  (rys. 55) otrzymujemy podobnie, jak wyżej:

odpór  $A_1 = \frac{1}{l} \{ (l - a_1) P_1 + (l - a_2) P_2 + (l - a_3) P_3 \}$ , a oznaczając przez  $x$  odległość środkowego koła od podpory A:

$$A_1 = [(l - x + c) + (l - x) + (l - x - c)] \frac{P}{l} = 3(l - x) \frac{P}{l}$$

więc moment dla przekroju przez środkowy ciężar P:

$$M = A_1 x - P \cdot c = \frac{3(l - x) P x}{l} - P \cdot c \dots \dots (40)$$

Różniczkując i przyjmując pochodną  $= 0$ , otrzymujemy:

$$-\frac{3x}{l} + \frac{3(l - x)}{l} = 0, \text{ z kąd: } x = \frac{l}{2} \dots \dots (41);$$

samą zaś wielkość największego momentu określimy, wstawiając tę wartość  $x$  do równania momentu (40):

$$M_{III}^{max} = P \cdot \left(\frac{3}{4} l - c\right) \dots \dots (42)$$

Największy moment dla dwóch sił z odległością  $c$  wynosi według wzoru (38):  $M_{II}^{max} = P \cdot \frac{(2l - c)^2}{8l}$ .

Przy zmniejszaniu się  $l$  i stałym  $c$  zmniejsza się i  $M_{III}^{max}$  i stanie się równem  $M_{II}^{max}$  dla takiego  $l$ , dla którego:

$$P \left(\frac{3}{4} l - c\right) = P \frac{(2l - c)^2}{8l}, \text{ z kąd: } l = c + \frac{c}{2} \sqrt{6}, \text{ czyli}$$

$$l = \approx 2,2248 c \dots \dots (43).$$

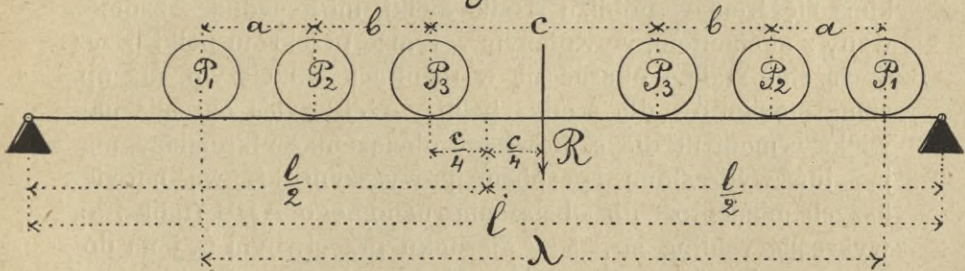
Jeżeli w dalszym ciągu zmniejszać będziemy  $l$ , to  $M_{III}^{max}$  stanie się mniejszem od  $M_{II}^{max}$ , co znaczy, że przy ustawieniu na belce dwóch kół według rys. 54 otrzymamy większy moment, niż przy ustawieniu trzech kół według rys. 55, a zatem trzy ciężary jednakowe o wzajemnej odległości  $c$  dają największy moment przy ustawieniu środkowego ciężaru nad



środkiem belki (rys. 55), jeżeli  $l$  jest  $> 2,2248 c$ , dają ten sam moment, co dwa ciężary, ustawione według rys. 54, przy  $l = 2,2248 c$ , a jeżeli  $l < 2,2248 c$ , to największy moment otrzymujemy nie dla trzech—lecz dla dwóch ciężarów, ustawionych według rys. 54.

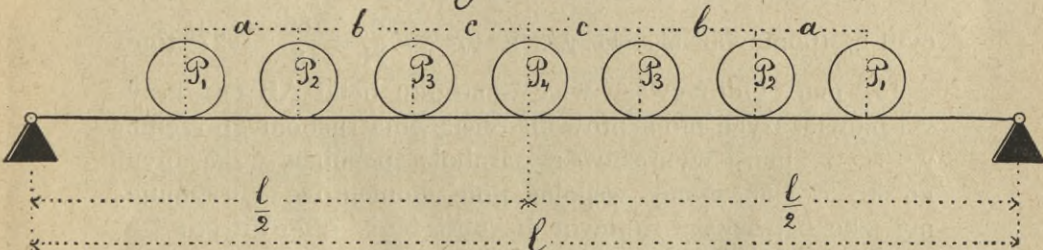
Wzór (37) zastosować można również do 4-ch lub wogóle do parzystej ilości niekoniecznie nawet jednakowych ciężarów, byleby całe obciążenie było symetryczne względem wypadkowej  $R$ , jak np. na rys. 56, gdyż w takim razie otrzy-

Rys. 56.



mamy największy moment dla ciężaru środkowego  $P_3$  przy odległości tegoż od podpory:  $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{4}$  (bo wypadkowa tych ciężarów przechodzi przez środek  $c$ , a środek belki musi być jednakowo odległy od  $P_3$  i od wypadkowej). Zaznaczyć je-

Rys. 57.



dnak należy, że tak, jak powyżej przy pewnym stosunku długości  $l$  do  $c$ —tak samo i teraz—przy pewnym sto-



sunku  $l$  do  $\lambda$  — otrzymujemy maximum momentu przy ustawienu ciężaru  $P_3$  w samym środku belki.

Podobnie przy obciążeniu symetrycznym nieparzystą ilością ciężarów (rys. 57) otrzymujemy najczęściej największy moment, ustawiając środkowy ciężar  $P_4$  w środku belki (bo ten ciężar środkowy jest linią działania wypadkowej całego układu, a więc, zgodnie ze str. 84, na tej samej linii musimy przyjąć środek belki).

**e) Momenty dla obciążenia złożonego: stałego jednostajnego i ruchomego z sił skupionych.**

Otrzymany sposobem powyższym bezwzględnie największy moment dla obciążenia ruchomego, wypadający pod jakimś ciężarem w pobliżu środka belki, może jednak — zsumowany z momentem, wywołanym w tymże przekroju belki przez obciążenie stałe — okazać się w rezultacie mniejszym, niż np. suma momentów dla środka belki. Ażeby więc określić największy moment dla całkowitego obciążenia belki należy, mając już wykreśloną sposobem powyższym krzywą największych momentów dla obciążenia ruchomego ALB (tabl. 1-a), wykreślić według str. 55 w kierunku przeciwnym (t. j. na dół od osi AB, skoro poprzednia krzywa była wykreślona ku górze) krzywą momentów dla obciążenia stałego jednostajnego i dopiero największy z odcinków obu złączonych pól momentów da nam bezwzględnie największy moment dla obciążenia całkowitego belki. Przyjawszy np. na tablicy 1-ej jako obciążenie stałe:  $g = 3$  tonny na metr bieżący, otrzymujemy największy moment pośrodku belki zgodnie z wzorem (11) str. 59:

$$M_0 = \frac{gl^2}{8} = \frac{3 \times 36^2}{8} = 486 \text{ tonnometrów, czyli w skali tabli-}$$

cy 1-ej (ponieważ  $M_0 = H \cdot y_0^{max}$ ):  $y_0^{max} = \frac{M_0}{H} = \frac{486}{18} = 27 \text{ tonn}$

$= 13,5 \text{ mm}$ . Odłożywszy więc w środku belki AB pod krzywą największych momentów dla obciążenia ruchomego rzędną  $y_0^{max} = 13,5 \text{ mm}$  i wykreśliwszy parabolę sposobem wskazanym na str. 57 i 58, mamy wspólne pole momentów i otrzymujemy jako największy moment dla obciążenia całkowitego:

$M_{max} = H (y_m^{VI} + y_0^{max}) = H \cdot y_{max} = 9 \text{ cm} \times 58,5 \text{ mm} =$   
 $9 \times 200 \times 58,5 \times 2 = 210600 \text{ tonnocentymetrów} =$   
 $2106 \text{ tonnometrów}$ . Podobnie otrzymujemy dla innych przekrojów I, II, III, IV, V największe momenty:

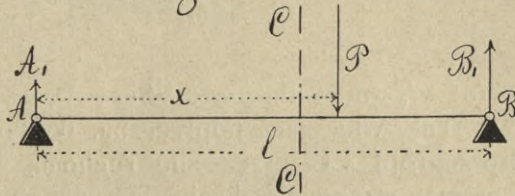


$M_I = H(y_m^I + y_0^I) = H \cdot y_{max}^I$ ;  $M_{II} = Hy_{max}^{II}$  i t. d. Odcinki  $y_{max}$ , proporcjonalne do momentów, mogą być oczywiście przyjmowane za same momenty, o ile zastosujemy do nich skalę: 1 mm = 36 tonnometrów (skoro  $y_{max}$ , wynoszące 58,5 mm, ma wyrażać 2106 tonnometrów). Odkładając te największe momenty dla całkowitego obciążenia od jakiejkolwiek osi właściwych pionowych, otrzymujemy oczywiście **krzywą największych momentów dla obciążenia całkowitego**. (Na tablicy 1-ej odłożyliśmy od osi AB na odpowiednich pionowych odcinkach:  $y_{max}^I, y_{max}^{II}, y_{max}^{III} \dots$  wyrażające największe momenty w powyższej skali: 1 mm = 36 tonnometrów i otrzymaliśmy krzywą AL'B, w której oczywiście największa rzędna  $y_{max}$  wyraża bezwzględnie największy moment dla obciążenia całkowitego).

**f) Wpływ obciążenia ruchomego na siły poprzeczne.**

Jeżeli na belkę AB (rys. 58) w odległości  $x$  od podpory A działa siła P, to dla każdego przekroju belki **na lewo** od siły

Rys. 58.



P siła poprzeczna  $V_c$  będzie według str. 47 równa odporowi  $A_1$ , czyli według wzoru (1) str. 53:

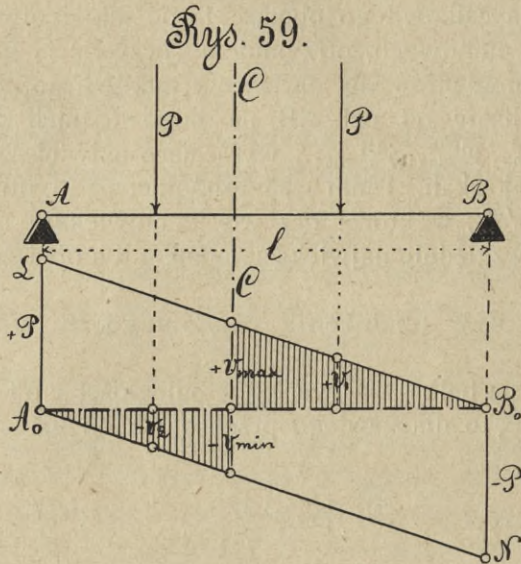
$$V_c = A_1 = \frac{P(l-x)}{l},$$

będzie więc zawsze **dodatnią**, zwiększać się będzie przy przesuwaniu siły P po belce jednocześnie ze zmniejszaniem się  $x$  i będzie dla danego przekroju CC największą w chwili, kiedy siła P zbliży się jak najbardziej z **prawej strony** do tegoż przekroju CC. Powyższe równanie, dające dla  $x=0$ :  $V_0=P$ , a dla  $x=l$ :  $V_l=0$ , wyraża prostą LB<sub>0</sub> (rys. 59). Zupełnie tak samo dla każdego przekroju belki CC **na prawo** od siły P (rys. 60) siła poprzeczna będzie, według str. 47:

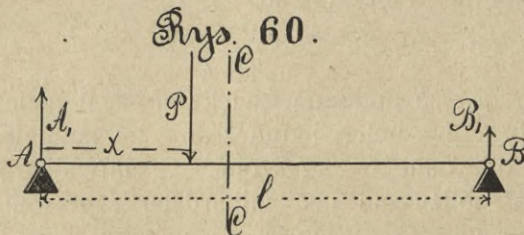
$$V'_c = A_1 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l} = -B_1, \text{ będzie zatem}$$



ujemną i tem większą przy przesuwaniu się siły  $P$  po belce, im większe jest  $x$ , największą zaś będzie dla danego przekroju  $CC$  w chwili, kiedy siła  $P$  zbliży się jak najbardziej z lewej strony do tegoż przekroju  $CC$ . Równanie powyższe,



dające dla  $x=0$ :  $V'_0=0$ , a dla  $x=l$ :  $V'_l=-P$ , wyraża prostą  $A_0N$  (rys. 59). Tak więc siła poprzeczna, wywołana w jakimkolwiek przekroju  $CC$  przez siłę ruchomą  $P$  (rys. 59), działającą z **prawej strony** przekroju, jest **dodatnią** i wyraża się przez odcinek  $V_1$  pod siłą  $P$ , między prostą  $A_0B_0$  i pro-



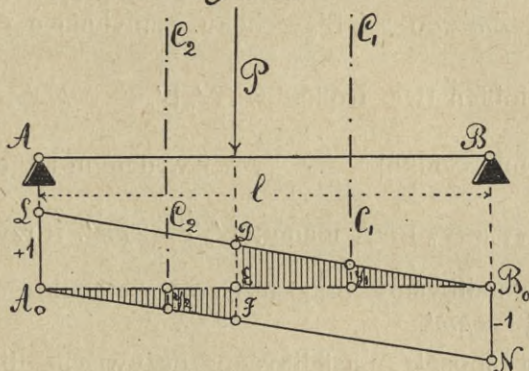
stą  $LB_0$ , siła zaś poprzeczna, wywołana w jakimkolwiek przekroju  $CC$  przez siłę ruchomą  $P$ , działającą z **lewej strony** przekroju, jest **ujemną** i wyraża się przez odcinek  $-V_2$  pod siłą  $P$ , między prostymi  $A_0B_0$  i  $A_0N$ . Oczywiście jest teraz, że skoro siła ruchoma  $P$ , wchodząc na dany przekrój  $CC$



z **prawej** strony, wywołuje w nim siłę  $V_{max}$  **dodatnią**, a wcho-  
dząc nań z **lewej** strony, wywołuje w nim siłę  $V_{min}$  **ujemną**,  
to w samym przekroju CC przeskakuje siła poprzeczna  $V$   
przez znaczenie  $= 0$ , a więc dla przekroju CC **moment**, wy-  
wołany przez siłę ruchomą  $P$ , będzie **największy** w chwili,  
kiedy siła  $P$  jest nad przekrojem CC, co zresztą widzieliśmy  
już na str. 79.

Jeżeli zamiast siły  $P$  odłożymy od punktu  $A_0$  w górę  
(rys. 61) i od punktu  $B_0$  na dół odcinek  $= 1$ , to linie  $LB_0$

Rys. 61.



i  $NA_0$  będą t. z. **liniami wpływowymi**, a pola  $B_0DE$  i  $A_0EF$ —  
polami wpływowymi dla sił poprzecznych, które otrzymywać  
będziemy dla każdego przekroju, np.  $C_1C_1$  i  $C_2C_2$ , jako ilo-  
czyny:  $P \cdot y_1$  i  $-P \cdot y_2$ . O liniach wpływowych mówić bę-  
dziemy w dalszych rozdziałach.

Ponieważ każda pojedyncza siła  $P$  (rys. 59) wywołuje  
w danym przekroju — o ile działa z prawej strony — siłę po-  
przeczną **dodatnią**, — o ile zaś działa z lewej strony — siłę po-  
przeczną **ujemną** i każda z tych sił poprzecznych jest tem  
większą, im bliżej jest siła  $P$  danego przekroju i im większą  
jest siła  $P$ , więc:

Największą siłę poprzeczną  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dodatnią} \\ \text{ujemną} \end{array} \right\}$  dla danego prze-  
kroju belki otrzymujemy, obciążając belkę tylko z  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewej} \end{array} \right\}$   
strony przekroju i rozkładając przytem siły, obciążające belkę,  
tak, aby największe ciężary były jak najbliżej tegoż przekroju.



**g) Największe siły poprzeczne dla obciążenia ruchomego siłami skupionemi.**

Przyjąwszy jako obciążenie ruchome pociąg, podany na tablicy 1-ej, ustawiamy zgodnie z powyższem — dla wywołania w przekroju D belki  $A_0B_0$  (tabl. 1-a) **największej siły poprzecznej dodatniej** — parowóz i tender z prawej strony przekroju, zaczawszy od najcięższych kół 10, 11, 12, 13, 14.... (cały zaś parowóz z lewej strony — czyli koła 9, 8, 7, 6.... — odrzucamy zupełnie), a wykreśliwszy dla tych sił wielobok sznurowy  $A'_0T_2B'_nB'_6$ , wyznaczymy — zgodnie ze str. 46 — **największą siłę poprzeczną dodatnią dla przekroju D**, jako odcinek  $km'$  w wieloboku sił, przeprowadzając przez biegun  $Z$  równoległą  $Zm'$  do  $A'_0B'_0$  — boku zamykającego wielobok sznurowy.

$Z$  podobieństwa trójkątów  $A'_0B'_0T$  i  $km'Z$  z bokami równoległymi wynika:  $\frac{km'}{kZ} = \frac{B'_0T}{A'_0T}$  i w danym razie, ponieważ

$kZ = H = \frac{1}{2}l$ , a  $A'_0T = l$ , mamy:  $B'_0T = 2km'$ . (Przyjąwszy zaś

$H = l$ , otrzymalibyśmy przy nowym wieloboku sznurowym wprost:  $B'_0T = km'$ ).

W ten sposób musielibyśmy oczywiście dla każdego przekroju belki, dla którego szukamy siły poprzecznej, wykreślać oddzielny wielobok sznurowy. Zwróćmy jednak uwagę na to, że uwzględniając **nie** prawą część ruchomego obciążenia tablicy 1-ej, lecz **lewą** część tegoż, czyli koła 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, otrzymujemy przy położeniu belki  $A''_0B''_0$  **dla przekroju  $D_1$**  — ponad tymże przekrojem — (w nowym wieloboku sznurowym  $A''_nA''_{10}T$ ) odcinek  $T_1T'_1 = TB'_0$  i przytem jest widocznem, że zarazem dla każdego innego przekroju, np.  $D_2$ , otrzymamy nad tymże przekrojem odpowiedni mu odcinek  $T_2T'_2$ , a jeżeli jeszcze dla wykreślanego wieloboku sznurowego przyjmiemy:  $H' = l$  (jak to jest rzeczywiście wzięte z lewej strony tablicy z biegunem  $Z'$ ), to otrzymany wielobok sznurowy  $\alpha Z'$  będzie zarazem **krzywą największych sił poprzecznych dodatnich** dla całej belki, o ile do parowozu z tendrem: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 dodamy jeszcze parowóz 1<sup>0</sup>, 2<sup>0</sup>, 3<sup>0</sup>, 4<sup>0</sup>, 5<sup>0</sup>, 6<sup>0</sup>, 7<sup>0</sup>, 8<sup>0</sup>, 9<sup>0</sup>. (Wielobok sznurowy  $\alpha Z'$  tablicy 1-ej jest wykreślony właśnie dla tych sił: 9, 8, 7, 6... 1<sup>0</sup>, 2<sup>0</sup>, 3<sup>0</sup>... 8<sup>0</sup>, 9<sup>0</sup> z odległością biegunową  $H = kZ' = l$ ). Otrzymujemy



wtedy jako największą siłę poprzeczną dodatnią — dla przekroju przez podporę A — odcinek  $k_a$ .

Widzimy więc, że dla otrzymania krzywej największych sił poprzecznych **dodatnich** należy wykreślić wielobok sznurowy dla ciężarów, rozstawionych na całej belce ( $A''_0B''_0$ ) w taki sposób, aby największe ciężary były jak najbliżej podpory  $B''_0$  (jeden z nich — najcięższy — na samej podporze  $B''_0$ ), przyjąć odległość biegunową  $H=l$  (biegun  $Z'$ ) i ten wielobok sznurowy  $aZ'$  będzie krzywą największych sił poprzecznych **dodatnich** dla belki  $A''_0B''_0$ , bo np. dla przekroju  $D_1$  tej belki otrzymujemy odcinek  $T''_1T'''_1=km'$ , t. j. (według str. 96) równy największej sile poprzecznej dla przekroju D belki  $A_0B_0$ , czyli również dla przekroju  $D_1$  belki  $A''_0B''_0$ . Ta największa siła poprzeczna dla przekroju  $D_1$  odpowiada oczywiście (zgodnie ze str. 96) obciążeniu ruchomemu, zajmującemu całą prawą część belki od przekroju  $D_1$  do podpory  $B''_0$ .

Krzywą zaś największych sił poprzecznych **ujemnych**  $ka'$  otrzymamy oczywiście z krzywej  $aZ'$  zupełnie tak samo na tablicy 1-ej, jak na rys. 59 otrzymuje się  $A_0N$  z wyznaczonej poprzednio  $LB_0$ . Największą siłę poprzeczną **ujemną** będzie oczywiście wyrażał odcinek  $Z'a'$ , równy liczebnie odcinkowi  $k_a$ .

Zauważmy jeszcze, że dla belki krótszej, niż dwa parowozy razem z tendrami, największe siły poprzeczne otrzymać można **nie** dla parowozów ustawionych jeden za drugim (jak z lewej strony tablicy 1-ej parowozy 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 i  $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0, 9^0$ ), lecz dla parowozów, zwróconych kominami ku sobie (jak z prawej strony tablicy 1-ej parowozy 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 i 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18). Tak np. przy długości belki  $l=20,0$  m i nadaniu jej położenia  $A_1B_1$ , dla przekroju E, odległego o  $x=3,0$  m od podpory A, siła poprzeczna **dodatnia** będzie największą wtedy, kiedy belka zajmie względem parowozów położenie  $A_1B_1$ , a przekrój E stanie pod kołem 5, bo tender 4, 3, 2, 1 nie będzie wtedy na belce i siła poprzeczna dla przekroju E będzie oczywiście większa, niż przy jakimkolwiek innym położeniu belki. Zauważmy jednak, że dla przekroju odległego od podpory więcej, niż 4,0 m (jest to odległość pierwszego koła tendra od ostatniego koła parowozu), przy nadaniu belce np. położenia  $A_2B_2$ , pierwsze koło tendra 4 wejdzie już na belkę i zmniejszy siłę poprzeczną **dodatnią**, która w obec tego może się

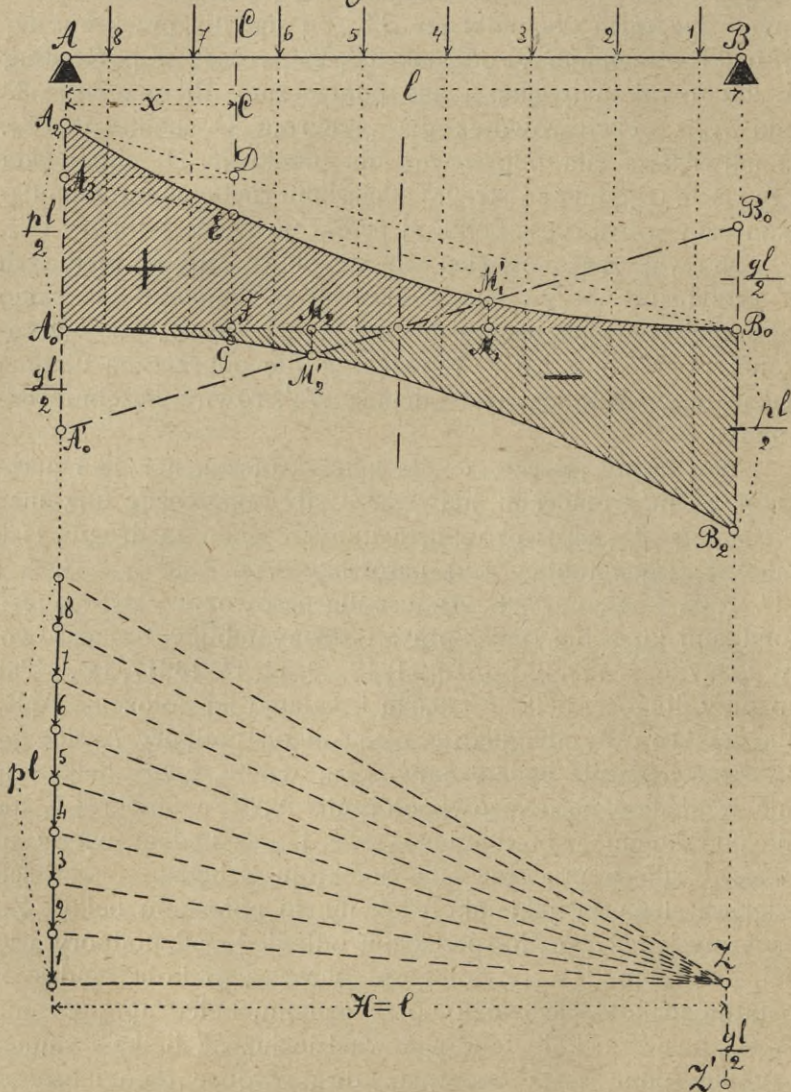


okazać mniejszą, niż przy ustawieniu parowozów kominami w tę samą stronę.

**h) Siły poprzeczne dla obciążenia ruchomego jednostajnego.**

Biorąc zamiast obciążenia ruchomego jednostajnego  $pl$  kilka oddzielnych sił skupionych  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$  (rys. 62),

Drys. 62.





możemy wykreślić według str. 97 (t. j. biorąc  $H=l$ ) wielobok sznurowy dla belki całkowicie obciążonej, czyli—w obec obciążenia jednostajnego—parabolę  $A_2EB_0$  z osią pionową i wierzchołkiem  $B_0$ . Dla jakiegokolwiek przekroju CC największa siła poprzeczna  **dodatnia** będzie (zgodnie ze str. 97) = FE i odpowiadać będzie obciążeniu ruchomemu od C do B, a odcinek  $A_0A_2$  będzie oczywiście  $=\frac{pl}{2}$ , bo dla przekroju przez podporę A największa siła poprzeczna, odpowiadająca obciążeniu całej belki, jest (zgodnie ze str. 59) = odporowi  $A_1 = \frac{pl}{2}$ .

Parabola  $A_2EB_0$  będzie więc **krzywą największych sił poprzecznych dodatnich**. Wykreślić ją możemy jednym ze sposobów, wskazanych na str. 57, a każdy poszczególny jej punkt, np. punkt E, dający największą siłę poprzeczną dla jakiegokolwiek przekroju CC, może być wyznaczony odrazu według str. 58 rys. 43 (t. j. łącząc  $B_0$  z  $A_2$ , otrzymujemy na pionowej przez C punkt D; idąca przez ten punkt równoległa do AB daje punkt  $A_3$ , a przecięcie linii  $A_3B_0$  z pionową przez C jest szukanym punktem paraboli E). Jako krzywą największych sił poprzecznych **ujemnych** otrzymamy oczywiście podobnie parabolę  $A_0GB_2$  z osią pionową, przechodzącą przez podporę A i dającą na podporze B odcinek  $B_0B_2 = -\frac{pl}{2}$ . Największą siłą poprzeczną **ujemną** dla jakiegokolwiek przekroju CC będzie więc odcinek FG, odpowiadający obciążeniu ruchomemu od C do A.

**Analitycznie:** Dla przekroju CC (w odległości  $x$  od podpory A) największa siła poprzeczna  **dodatnia**  $V_c$ , przy obciążeniu od C do B (rys. 62), będzie, zgodnie ze str. 64, wzór (22):

$$V_c = A_1 = \frac{p(l-x)^2}{2l}$$

Jest to równanie paraboli z osią pionową, przechodzącą przez podporę B, dające dla  $x=0$ :  $V_{max} = \frac{pl}{2}$ , a dla  $x=l$   $V_b = 0$ .

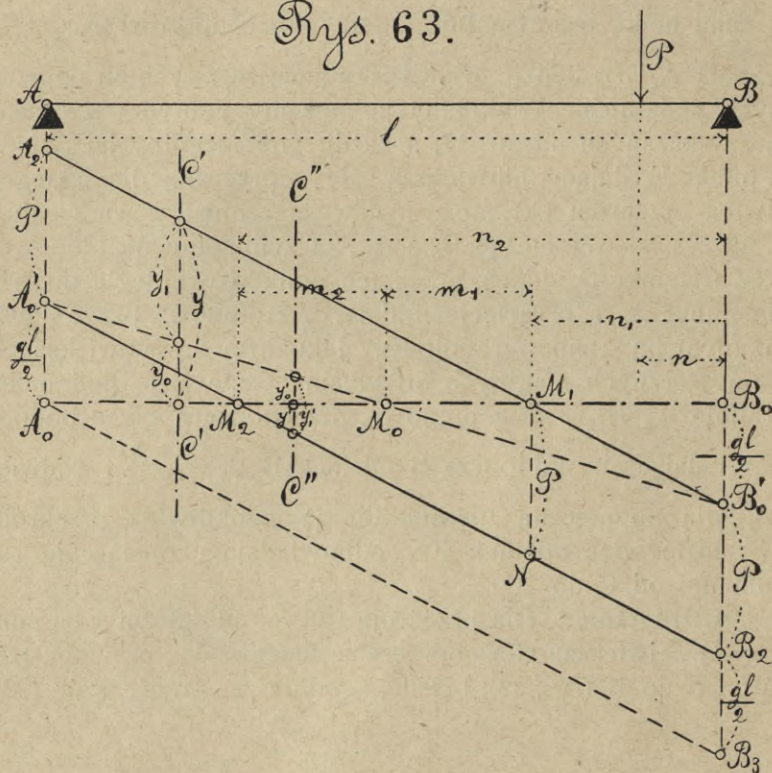
**i) Siły poprzeczne dla obciążenia złożonego: stałego jednostajnego i ruchomego z sił skupionych.**

Dla obciążenia stałego jednostajnego otrzymujemy według str. 59 (rys. 40) jako krzywą sił poprzecznych linię pro-



stą  $A'_0B'_0$  (rys. 63) z odcinkiem  $= +\frac{gl}{2}$  nad podporą A i  $-\frac{gl}{2}$  pod podporą B. Dołączmy do tego obciążenia stałego jeszcze pojedynczą **ruhomą** siłę P, wprowadzoną przez prawą podporę B i posuwającą się ku lewej—A. Linią sił poprzecznych  **dodatnich** dla tej ruchomej siły P będzie według str. 93 (rys. 59) prosta  $LB_0$ , dająca nad podporą A odcinek  $=P$ , a na podporze B odcinek  $=0$ .

Rys. 63.



Dla złączenia zatem obu powyższych pól sił poprzecznych przyjmujemy linię  $A'_0B'_0$  jako oś dla tej linii sił poprzecznych dodatnich, odkładamy od  $A'_0$  do  $A_2$  (rys. 63) siłę P i łącząc  $A_2$  z  $B'_0$ , otrzymamy linię największych sił poprzecznych  **dodatnich**  $A_2B'_0$  i dla każdego przekroju belki, np.  $C'C'$ , największą siłę poprzeczną  **dodatnią**, jako odcinek:  $y=y_0+y_1$ , odpowiadający chwili, kiedy siła P, posuwając się z prawej strony ku lewej, dochodzi do przekroju  $C'C'$ . Tak samo



oczywiście dla ciężaru ruchomego  $P$ , wchodzącego na belkę przez podporę  $A$  i przesuwanego się na prawo, otrzymamy linię największych sił poprzecznych **ujemnych**  $A'_0B_2$  i np. dla przekroju  $C''C''$  największą siłą poprzeczną ujemną będzie odcinek:  $-y' = -y'_1 + y'_0$ , odpowiadający chwili, kiedy siła  $P$ , posuwając się z lewej strony ku prawej, dochodzi do przekroju  $C''C''$ .

**k) Punkty zwrotne największego momentu.**

Dla przekrojów belki między podporą  $A$  i punktem  $M_2$  (rys. 63) otrzymujemy siły poprzeczne tylko  **dodatnie**, a w punkcie  $M_2$ , dla którego siła poprzeczna **ujemna**, wywołana przez ruchomą siłę  $P$ , zbliżającą się z lewej strony do przekroju przez  $M_2$ , dorównywa sile poprzecznej (dodatniej) od ciężaru własnego, otrzymujemy siłę poprzeczną  $= 0$  i tak samo w punkcie  $M_1$  siła poprzeczna (przy obciążeniu ruchomą siłą  $P$ , dochodzącą z prawej strony do punktu  $M_1$ ) będzie  $= 0$ . Między punktami  $M_2$  i  $M_1$  siła poprzeczna może być dodatnią—lub ujemną, zależnie od obciążenia ruchomego z prawej—lub z lewej strony, zaś poza punktem  $M_1$  aż do podpory  $B$  siła poprzeczna będzie ciągle ujemną.

Dla obciążenia stałego jednostajnego całej belki siła poprzeczna jest (zgodnie ze str. 60) pośrodku belki  $= 0$ , a moment—największy. Jeżeli jednak na belkę wchodzi z prawej strony siła  $P$  (rys. 63), to siła poprzeczna dla każdego przekroju z lewej strony siły  $P$  zwiększa się o odpór  $\frac{Pn}{l}$ , wywołany w podporze  $A$  przez siłę  $P$ , zgodnie z wzorem (1) str. 53, więc dla środka belki siła poprzeczna nie będzie już  $= 0$ , a zatem i punkt największego momentu (nazwijmy go  $M$ ) nie będzie już w środku belki, lecz przesunie się na prawo w kierunku ku sile  $P$  na taką odległość  $m$ , aby zwiększony o  $g \cdot m$  ciężar własny belki mógł zupełnie zneutralizować ów przyrost siły poprzecznej  $\frac{Pn}{l}$  i doprowadzić ją znowu do wartości  $= 0$ , przy której jedynie otrzymujemy największy moment.

Siła poprzeczna dla jakiegokolwiek przekroju między  $M_0$  i  $B_0$  (rys. 63), odległego o  $m$  od środka belki (ciągle w przypuszczeniu, że ruchomy ciężar  $P$  znajduje się na prawo od przekroju), wyraża się przez:

$$V = A_1 = \frac{gl}{2} + \frac{Pn}{l} - g \left( \frac{l}{2} + m \right) \dots \dots (44)$$



więc będzie  $= 0$  dla takiego przekroju CC, w którym:

$$V_c = \frac{gl}{2} + \frac{Pn}{l} - g \left( \frac{l}{2} + m_c \right) = 0, \text{ z kąd:}$$

$$m_c = \frac{Pn}{gl} \dots \dots (45)$$

Na taką odległość  $m_c$  przesuwa się punkt największego momentu M po wejściu ciężaru P na belkę, na odległość  $n$  od podpory B. (W szczególnym przypadku, gdy  $P=gl$ , to z równania (45)  $\dots \dots m_c = n$ . Jeżeli zaś  $P = \frac{gl}{2}$ , to  $m_c = \frac{n}{2}$ .

Im większe zatem jest P, tem szybciej M zbliża się ku niemu). Z wzoru (45) wynika, że im większe jest  $n$ , tem większe będzie  $m_c$ , więc przy przesuwaniu ciężaru P dalej w lewo punkt M zbliża się ku niemu, a spotyka go w punkcie  $M_1$ , dla którego:

$$m_1 + n_1 = \frac{l}{2} \dots \dots (46),$$

a że przytem otrzymujemy z wzoru (45):  $m_1 = \frac{Pn_1}{gl}$ ,

$$\text{więc: } \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{Pl}{2(P+gl)} \dots \dots (47) \\ n_1 = \frac{gl^2}{2(P+gl)} \dots \dots (48) \end{array} \right.$$

Oczywiście ten punkt  $M_1$  jest punktem przecięcia prostej  $A_2B'_0$  z  $A_0B_0$ , bo odkładając jeszcze (rys. 63)  $\frac{gl}{2}$  od  $B_2$  do  $B_3$  i łącząc  $B_3$  z  $A_0$ , mamy wskutek podobieństwa trójkątów z bokami równoległymi  $M_2M_1N$  i  $A_0B_0B_3$  a także  $M_1B_0B'_0$  i  $A_0B_0B_3$ :

$$\frac{M_2M_1}{M_1N} = \frac{A_0B_0}{B_0B_3}, \text{ t. j. } \frac{2m_1}{P} = \frac{l}{\frac{gl}{2} + P + \frac{gl}{2}}, \text{ czyli wzór (47).}$$

$$\frac{M_1B_0}{B_0B'_0} = \frac{A_0B_0}{B_0B_3}, \text{ t. j. } \frac{n_1}{\frac{gl}{2}} = \frac{l}{\frac{gl}{2} + P + \frac{gl}{2}}, \text{ czyli wzór (48).}$$

Przy dalszem jednak przesuwaniu na lewo ciężaru P poza punkt  $M_1$  siła poprzeczna wzrasta zgodnie z wzorem (44)—zarówno wskutek zwiększania się  $n$ , jakoteż i zmniejszania się  $m$ —więc punkt największego momentu M musi się cofać i **nie dać się wyprzedzić ciężarowi P**, bo wtedy (dla wyprzedzonego już przez ciężar P przekroju) siła poprzeczna zwiększyłaby się odrazu o całe—P i przeskoczyłaby przez



wartość  $\alpha$ . Po dojściu w ten sposób do punktu  $M_2$  (symetrycznego z  $M_1$  względem środka belki) siła poprzeczna  $V_2$  będzie według wzoru (44):

$$V_2 = \frac{gl}{2} + \frac{P \cdot n_2}{l} - g \left( \frac{l}{2} - m_2 \right);$$

ale w obec symetrii punktu  $M_1$  z  $M_2$ :  $\begin{cases} n_2 = n_1 + 2m_1 \\ m_2 = m_1 \end{cases}$

i uwzględniając wzory (47) i (48):

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{P(n_1 + 2m_1)}{l} + gm_1 = \frac{P}{l} \left[ \frac{gl^2}{2(P+gl)} + \frac{Pl}{P+gl} \right] + \frac{gPl}{2(P+gl)} = \\ &= \frac{P}{P+gl} \left[ \frac{gl}{2} + P + \frac{gl}{2} \right] = \frac{P}{P+gl} (P+gl) = +P; \end{aligned}$$

więc w chwili przejścia ciężaru  $P$  poza punkt  $M_2$  siła poprzeczna  $V_2$  dla tegoż (wyprzedzonego już przez siłę  $P$ ) przekroju  $M_2$ , zwiększona o  $-P$ , będzie właśnie  $= 0$ , czyli punkt największego momentu zostanie w  $M_2$ , podczas gdy ciężar  $P$  mija ten przekrój, a następnie przy przesuwaniu się dalszem (w lewo) ciężaru  $P$  (i zarazem odpowiedniemi zwiększaniem się siły poprzecznej) punkt największego momentu  $M$  musi przesuwać się z powrotem ku środkowi belki, aby przez zwiększanie się ciężaru własnego neutralizować dalsze zwiększanie się siły poprzecznej  $V$  i sprowadzać ją do zera. W chwili zejścia ciężaru  $P$  z belki punkt  $M$  wraca oczywiście na środek belki  $M_0$ .

Podobnie — jeżeli na most wjeżdża pociąg z prawej strony, to punkt największego momentu  $M$  przesuwa się w stronę pociągu od środka mostu aż do spotkania z pierwszym kołem w pewnym punkcie  $M_1$ , poczem cofa się i dochodzi w odwrotnym kierunku do jakiegoś punktu  $M_2^0$  (nie leżącego jednak symetrycznie z punktem  $M_1$  względem środka mostu, lecz nieco bliżej tegoż środka, gdyż obciążenie pociągiem nie jest symetryczne). Po przejściu pociągu punkt  $M$  cofa się znowu i wraca na środek mostu w chwili, kiedy schodzi z tegoż mostu ostatnie koło. Jeżeli zaś pociąg wjeżdża na most z lewej strony, to punkt  $M$  idzie ku niemu aż do spotkania w punkcie  $M_2$ , symetrycznym względem środka mostu z punktem  $M_1$ , cofa się następnie i dochodzi w odwrotnym kierunku do punktu  $M_1^0$ , symetrycznego z  $M_2^0$ , a wreszcie wraca na środek mostu w chwili zejścia z tegoż ostatniego koła.



Te granice odchylenia punktu największego momentu, czyli **punkty zwrotne** największego momentu, otrzymujemy wykreślić, przeprowadzając (tablica 1-a), jak wyżej na rys. 63, krzywą sił poprzecznych dla obciążenia jednostajnego jako prostą  $g'ZZ'_1$ , a odłożone od tej linii w górę odcinki pionowe, otrzymane na krzywej  $Z'_\alpha$ , dadzą nam **krzywą największych sił poprzecznych dodatnich** (dla obciążenia złożonego)  $Z'_1Z_{1\alpha_1}$ , której przecięcie z osią  $kZ'$  będzie punktem  $M_1$ . Tak samo odłożone od tejże linii  $g'ZZ'_1$ , na dół odcinki pionowe krzywej  $k'_\alpha$  dałyby **krzywą największych sił poprzecznych ujemnych** (dla obciążenia złożonego)  $g'a'_1$  i na przecięciu tejże z osią  $kZ'$  — punkt  $M_2$ . Zamiast odkładać otrzymane poprzednio odcinki pionowe krzywej  $Z'_\alpha$  od linii  $g'ZZ'_1$  moglibyśmy odrazu wykreślić krzywą  $Z'_1Z_{1\alpha_1}$ , jako wielobok sznurowy, przyjąwszy tylko zamiast bieguną  $Z'$  — biegun  $Z'_1$ .

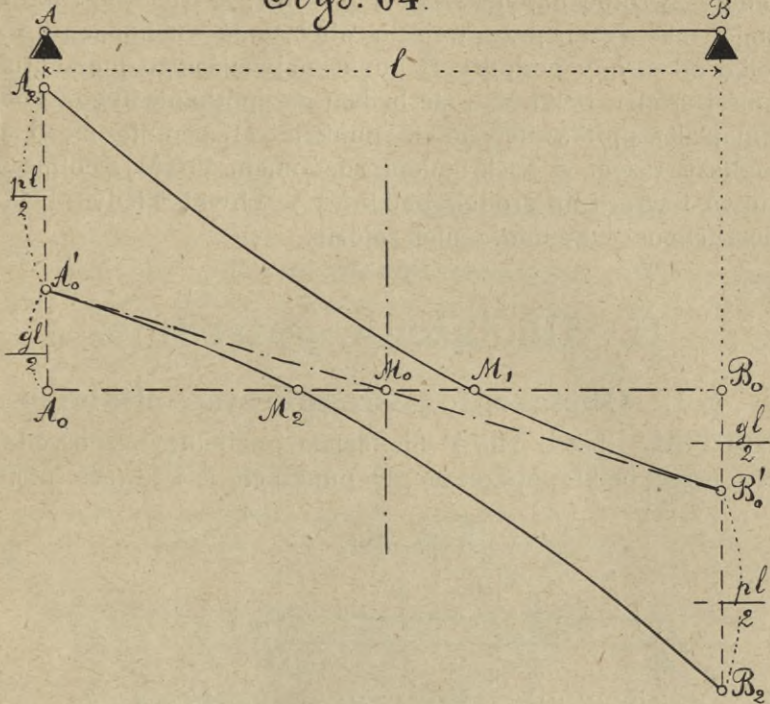
Zauważmy jeszcze, że punkty zwrotne  $M_2$  i  $M_1$  otrzymać możemy również wprost z normalnego położenia krzywych  $\alpha Z'$  i  $k'_\alpha$  (tabl. 1-a), odkładając od  $k$  na dół odcinek  $+\frac{gl}{2}$  i od  $Z'$  w górę odcinek  $-\frac{gl}{2}$  i łącząc otrzymane końcowe punkty  $n'$  i  $Z''$  prostą  $n'ZZ''$ , przecinającą krzywe  $\alpha Z'$  i  $k'_\alpha$  w punktach  $M'_1$  i  $M'_2$ , leżących na pionowych przez  $M_1$  i  $M_2$  (bo suma algebraiczna odcinków, wyrażających siłę poprzeczną na krzywych  $\alpha Z'$  i  $k'_\alpha$  i na prostej  $n'Z''$ , jest dla pionowych przez  $M'_1$  i  $M'_2$  oczywiście  $= 0$ ).

### 1) Siły poprzeczne dla obciążenia złożonego: stałego jednostajnego i ruchomego jednostajnego.

Krzywą największych sił poprzecznych dla obciążenia złożonego: stałego jednostajnego  $g.l$  i ruchomego jednostajnego  $p.l$  otrzymujemy w podobny sposób, jak wyżej dla obciążenia jedną tylko ruchomą siłą  $P$ . Wykreśliwszy jako krzywą sił poprzecznych dla obciążenia stałego jednostajnego linię prostą  $A'_0B'_0$  (rys. 64), zgodnie ze str. 59 rys. 40, odkładamy od niej pionowo  $A'_0A_2 = +\frac{pl}{2}$  i inne odcinki paraboli  $A_2EB_0$  (z rys. 62) i otrzymamy parabolę  $A_2M_1B'_0$  — krzywą największych sił poprzecznych **dodatnich** (dla obciążenia złożonego); i tak samo, odkładając odcinek  $B'_0B_2 = -\frac{pl}{2}$  i inne odcinki paraboli  $A_0GB_2$  (z rys. 62), otrzymamy parabolę  $A'_0M_2B_2$  — krzywą największych sił poprzecznych **ujemnych**



Rys. 64.



(dla obciążenia złożonego). Oczywiście zamiast odkładać na rys. 64 odcinki paraboli, otrzymanej poprzednio na rys. 62, możemy odrazu wykreślić parabolę  $A_2M_1B'_0$ , wzięwszy tylko zamiast bieguna Z (na rys. 62) biegun  $Z'$  w odległości  $= \frac{gl}{2}$  pod Z.

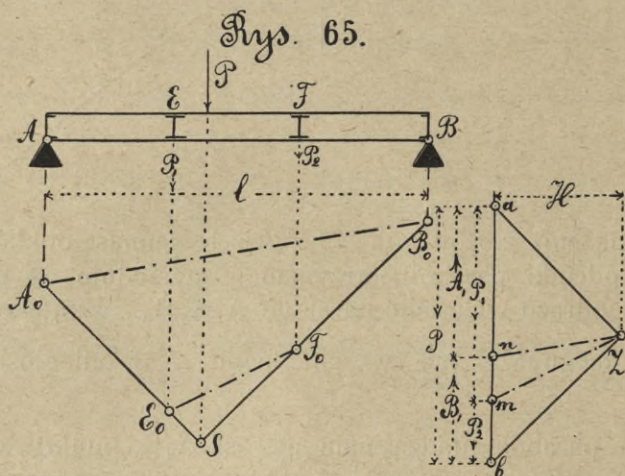
Te parabole dadzą nam na osi  $A_0B_0$  punkty zwrotne największego momentu  $M_1$  i  $M_2$  (które zresztą wyznaczyć możemy i bez odkładania odcinków paraboli—sposobem wskazanym na str. 104—na pionowych przez punkty  $M'_2$  i  $M'_1$  (rys. 62), otrzymane jako punkty przecięcia parabol  $A_2EB_0$  i  $A_0GB_2$  z linią  $A'_0B'_0$ , tworzącą odcinki:  $A_0A'_0 = +\frac{gl}{2}$  i  $B_0B'_0 = -\frac{gl}{2}$ ). I zupełnie tak samo, jak na rys. 63, na długości od  $A_0$  do  $M_2$  otrzymujemy tylko siły poprzeczne dodatnie, a od  $M_1$  do  $B_0$ —tylko siły poprzeczne ujemne i jedynie między punktami  $M_2$  i  $M_1$  siła poprzeczna może



przechodzić przez wartość  $o$ , punkty  $M_2$  i  $M_1$  są to zatem punkty zwrotne największego momentu; a więc zupełnie tak samo, jak wyżej, przy wejściu obciążenia ruchomego  $p$  na belkę od strony podpory B punkt największego momentu  $M$  opuści środek belki  $M_0$  i iść będzie na spotkanie tegoż obciążenia, ale spotkawszy je w punkcie  $M_1$ , cofnie się i doszedłszy razem z obciążeniem ruchomem do  $M_2$ , cofnie się znowu i wróci na środek belki  $M_0$  w chwili, kiedy obciążenie ruchome zupełnie z niej zejdzie.

## B. Obciążenie pośrednie.

§ 1. Obciążenie pośrednie stałe siłami skupionymi. Jeżeli siła  $P$  nie działa na belkę bezpośrednio, lecz przez belki poprzeczne w punktach E i F (rys. 65), to



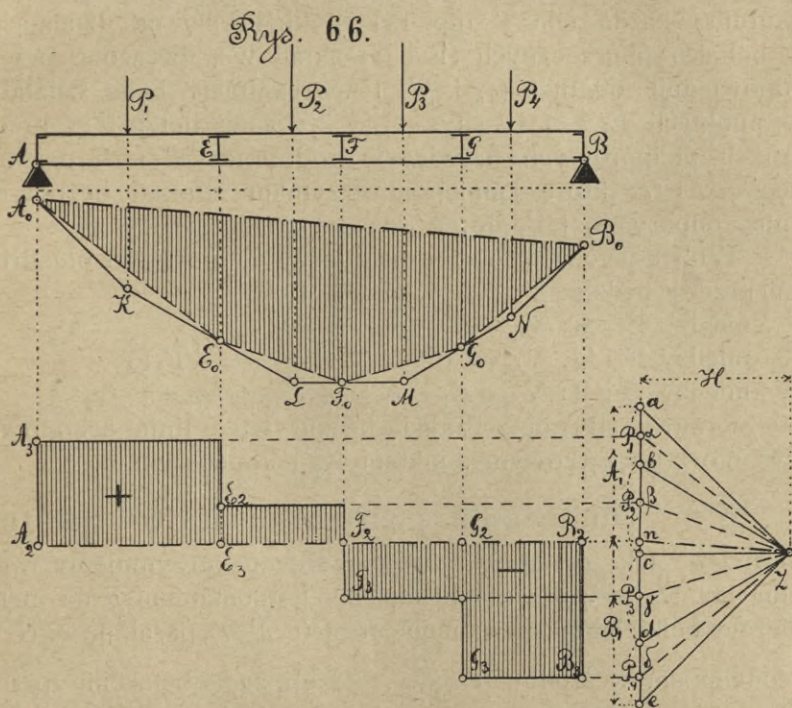
belki w E i F są w stosunku do siły  $P$  jakby podporami, więc rozłożmy ją na składowe  $P_1$  i  $P_2$ , działające w E i F, wykreślając trójkąt sznurowy  $E_0SF_0$  i prowadząc przez biegun  $Z$  równoległą do boku zamykającego  $E_0F_0$ ; siła  $P_1$  będzie  $=am$ , siła zaś  $P_2=mb$  i obie te siły oddziaływać będą już bezpośrednio na belkę AB. Przedłużając zaś  $SE_0$  i  $SF_0$  do spotkania z pionowami przez podpory A i B i prowadząc przez  $Z$  równoległą do boku zamykającego  $A_0B_0$ , otrzymujemy, jak wiadomo, odpory  $A_1$  i  $B_1$  jako odcinki  $na$  i  $bn$ . Są to oczywiście odpory zarówno dla sił  $P_1$  i  $P_2$ , jak i dla



pojedynczej siły  $P$ , bo (zgodnie ze str. 18) zastąpienie sił  $P_1$  i  $P_2$  ich wypadkową  $P$  nie ma wpływu na dalszy przebieg wieloboku sznurowego poza siłami  $P_1$  i  $P_2$  (więc  $E_0A_0$  i  $F_0B_0$  są przedłużeniami  $SE_0$  i  $SF_0$ ).

**a) Momenty.**

Z porównania pola momentów ( $A_0SB_0$ ) dla siły  $P$  i pola momentów ( $A_0E_0F_0B_0$ ) dla sił  $P_1$  i  $P_2$  widzimy, że przy bezpośrednim działaniu siły  $P$  na belkę moment jest w ogóle większy, niż przy działaniu pośrednim, ale w przekrojach  $E$  i  $F$  momenty są dla obu obciążeń jednakowe. Wobec tego można bardzo łatwo z wieloboku sznurowego  $A_0KLMNB_0$  (rys. 66) dla sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , działających bezpośrednio,



otrzymać wielobok sznurowy dla sił działających pośrednio; trzeba tylko połączyć ze sobą punkty przecięcia pionowych przez  $E, F, G$  z bokami wieloboku sznurowego  $A_0KLMNB_0$  i otrzymamy nowy wielobok sznurowy  $A_0E_0F_0G_0B_0$  (krzywą momentów dla obciążenia pośredniego), z którego widzimy, że dla wszystkich przekrojów między belkami poprzecznymi



momenty są większe dla obciążeń bezpośrednich i że, jak przy obciążeniu bezpośredniem największy moment przypada zawsze, zgodnie ze str. 49, pod jakimś ciężarem — podobnie przy obciążeniu pośredniem największy moment przypada zawsze pod jedną z belek poprzecznych E, F, G.

**b) Siły poprzeczne** otrzymywać będziemy, zgodnie ze str. 47, jako odcinki na wieloboku sił, ograniczone promieniami  $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma \dots$  i promieniem  $Z_n$ , równoległymi do odpowiednich boków nowego wieloboku sznurowego  $A_0E_0F_0G_0B_0$  i boku zamykającego  $A_0B_0$ , przyczem te siły poprzeczne zmieniać się będą **nie** w przekrojach pionowych przez siły, lecz w przekrojach, odpowiadających wierzchołkom nowego wieloboku sznurowego, czyli belkom poprzecznym E, F, G. Istotnie — każda siła P (np.  $P_3$ ) rozkłada się na działające w belkach poprzecznych (F i G) składowe, wyrażone przez odpowiednie odcinki ( $c_\gamma$  i  $\gamma d$ ) i w rezultacie będą działały w punktach E, F i G siły  $\alpha_\beta, \beta_\gamma, \gamma\delta$  a w belkach poprzecznych podporowych (a więc w podporach A i B) działać będą  $a_\alpha$  i  $\delta e$ , które zmniejszą otrzymane dla sił bezpośrednich odpory  $A_1$  i  $B_1$  do:  $A'_1 = A_1 - a_\alpha$  i  $B'_1 = B_1 - \delta e$ .

Wobec tego siła poprzeczna między podporą A i przekrojem przez E będzie:  $V_{ae} = A_1 - a_\alpha = +A_2A_3$

między E i F:  $V_{ef} = A_1 - a_\alpha - \alpha_\beta = +E_2E_3$

między F i G:  $V_{fg} = A_1 - a_\alpha - \alpha_\beta - \beta_\gamma = -F_2F_3$

między G i B:  $V_{gb} = A_1 - a_\alpha - \alpha_\beta - \beta_\gamma - \gamma\delta = -G_2G_3$

Krzywą sił poprzecznych będzie więc linia schodowa (rys. 66) z początkowym punktem  $A_3$  i końcowym  $B_3$ .

## § 2. Obciążenie pośrednie stałe — jedno-

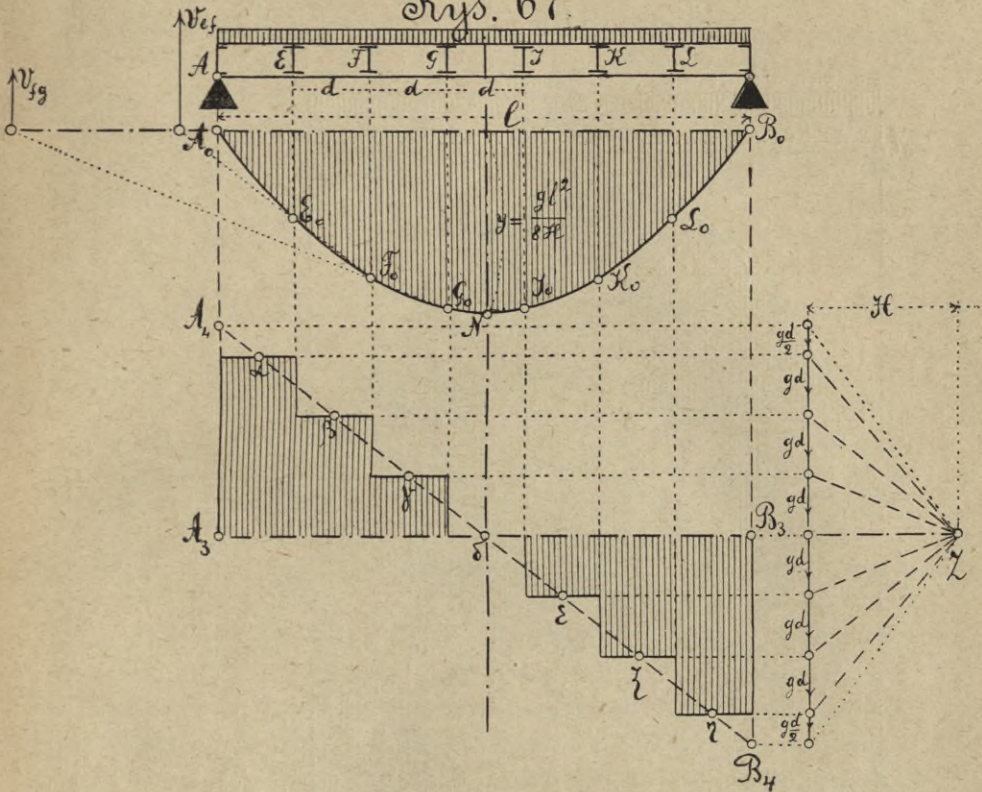
**stajne.** Dla obciążenia **bezpośredniego** otrzymujemy według str. 55 przy obciążeniu stałym — jednostajnym  $g$  na metr bieżący belki, jako krzywą momentów (rys. 67), parabolę  $A_0NB_0$

z odcinkiem w środku  $y = \frac{gl^2}{8H}$ . Jeżeli zaś obciążenie prze-

chodzi na belkę przez belki poprzeczne E, F, G, J, K, L, to łącząc ze sobą punkty przecięcia paraboli z pionowymi przez E, F, G, J, K, L, otrzymamy szukaną krzywą momentów jako wielobok  $A_0E_0F_0G_0J_0K_0L_0B_0$ , wpisany w parabolę  $A_0NB_0$ . Jeżeli punkty E, F, G, J... dzielą belkę AB na równe odstępki ( $d$ ), to zamiast wykreślać parabolę (rys. 67), dojdziemy prędzej do celu, wykreślając wielobok sznurowy dla sił



Rys. 67.

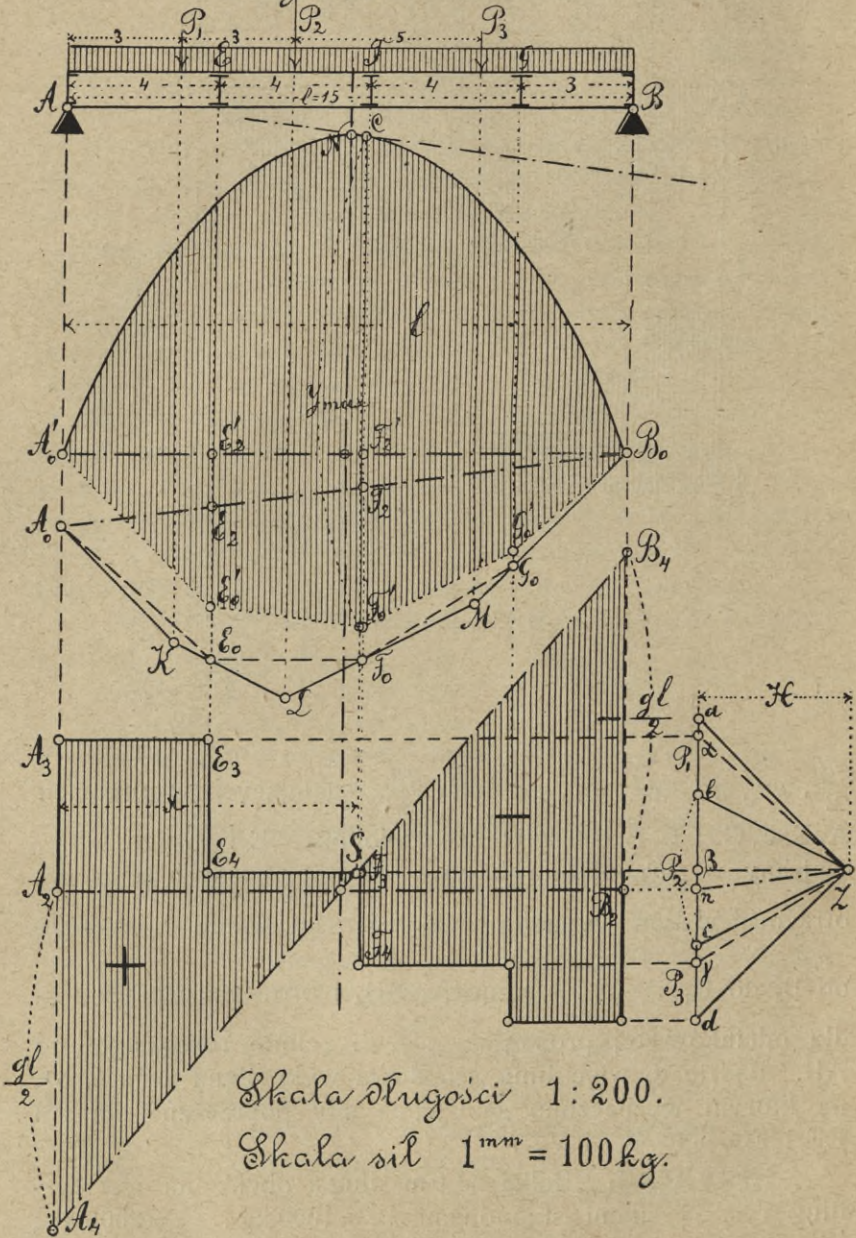


$\frac{gd}{2}$ ,  $gd$ ,  $gd$ ,  $gd$ ,  $gd$ ,  $gd$ ,  $gd$ ,  $\frac{gd}{2}$ , działających w punktach A, E, F, G, J, K, L, B (czyli tenże wielobok  $A_0E_0F_0G_0J_0K_0L_0B_0$ , wpisany w parabolę), a krzywą sił poprzecznych możemy otrzymać w tym wypadku, odkładając od  $A_3$  do  $A_4 \dots + \frac{gl}{2}$ , od  $B_3$  do  $B_4 \dots - \frac{gl}{2}$ , łącząc  $A_4$  z  $B_4$  i prowadząc przez środki odcinków tej prostej  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta \dots$  linie równoległe do AB. Będzie to więc linia schodowa wykreślona na rys. 67, na której wyznaczone są i same siły poprzeczne dla pól EF i FG jako  $V_{ef}$  i  $V_{fg}$ .

**Przykład.** Belka 15,0 m długa, obciążona jest według rys. 68 siłami skupionymi  $P_1 = 1000$  kg,  $P_2 = 2000$  kg,  $P_3 = 1000$  kg (działającymi na belkę za pośrednictwem belek poprzecznych E, F, G), a prócz tego — jednostajnie (ciężar



Rys. 68.





własny)  $g = 600 \frac{kg}{m.b.}$ . Wyznaczyć największy moment, przekrój belki, odpowiadający temuż i krzywą sił poprzecznych.

Skalę długości przyjęliśmy 1:200 (zaleca się przerysować w skali 1:100), skalę sił: 1 mm = 100 kg. Odległość biegunową wzięliśmy:  $H = 20$  mm. Wielobok sznurowy dla sił skupionych będzie, zgodnie ze str. 107, rys. 66,  $A_0E_0F_0G_0B_0$  z bokiem zamykającym  $A_0B_0$ . Dla obciążenia jednostajnego krzywa momentów będzie (według str. 55) parabolą o naj-

większej rzędnej  $y = \frac{gl^2}{8H} = \frac{600 \times 15^2}{8 \times 20 \times \frac{1}{5}} = 4218,75$  kg, czyli 42,2 mm,

którą odkładamy od punktu środkowego linii  $A'_0B_0$  do punktu N i wykreślamy parabolę  $A'_0NB_0$ . Zastąpmy otrzymany wielobok sznurowy  $A_0E_0F_0G_0B_0$  z bokiem zamykającym  $A_0B_0$  przez wielobok  $A'_0E'_0F'_0G'_0B_0$  z bokiem zamykającym  $A'_0B_0$  sposobem opisanym na str. 67, odkładając  $E_0E'_0 = E_2E'_2$ ,  $F_0F'_0 = F_2F'_2$  i t. d., a otrzymamy wspólne pole momentów  $A'_0E'_0F'_0G'_0B_0NA'_0$  i największy moment wypadnie dla przekroju, dającego na paraboli punkt C, w którym styczna jest równoległa do boku  $E'_0F'_0$  wieloboku sznurowego (zgodnie ze str. 68). Położenie tego przekroju otrzymać można dokładniej, wykreślając dla sił skupionych krzywą sił poprzecznych  $A_3E_3F_3G_3B_3$  według str. 108 (rys. 66), t. j. przeprowadzając przez biegun Z promienie równoległe do  $A_0E_0$ ,  $E_0F_0$ ..., a przez punkty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... równoległe do osi  $A_2B_2$  i odkładając od końcowych punktów przyjętej za oś linii  $A_2B_2$

(poziomej przez  $n$ ) odcinki:  $A_2A_4 = \frac{gl}{2}$  i  $B_2B_4 = -\frac{gl}{2}$ . Siłę

poprzeczną = 0 (a właściwie przedstawiającą parę sił) otrzymujemy dla punktu S, na przecięciu  $A_4B_4$  z poziomą  $E_4F_3$  i ten punkt odpowiada największemu momentowi. Odległość tego punktu od podpory A wynosi na rysunku:  $x = 39,7$  mm, czyli 7,94 m (rachunek daje:  $x = 7,944$  m), a największy moment:  $M_{max} = H \cdot y_{max} = 20 \times 64,9$  mm  $\times \frac{1}{5} \times 100 = 25960$  kgm (rachunek daje 25934,25 kgm).

Zauważmy jeszcze, że, gdyby obciążenie jednostajne  $g$  działało na belkę także za pośrednictwem belek poprzecznych, to otrzymalibyśmy zamiast paraboli (zgodnie ze str. 108) wielobok z wierzchołkami na paraboli, na pionowych pod belkami poprzecznymi E, F, G i największy moment wypadłby



wtedy oczywiście dla przekroju pod belką poprzeczną F. Odpowiedni temu pionowemu przekrojowi punkt paraboli wyznaczylibyśmy łatwo, nie wykreślając całej paraboli, sposobem, podanym na str. 57 (rys. 43), poczem otrzymalibyśmy właściwy odcinek  $\gamma$ , a z nim i największy moment.

**Analitycznie:**

Odpór  $A_1$  dla sił  $P_1, P_2, P_3$ , jeżeli działają bezpośrednio (według wzoru (2) str. 53):

$$A_1 = \frac{1}{15} \{ 1000 \times 12 + 2000 \times 9 + 1000 \times 4 \} = \frac{34000}{15} \text{ kg}$$

Składowe siły  $P_1$  dla podpory A i belki poprzecznej E:

$$P_1^a = \frac{1}{4} \times 1000 = 250 \text{ kg}; P_1^e = \frac{3}{4} \times 1000 = 750 \text{ kg.}$$

Składowe siły  $P_2$  dla belek poprzecznych E i F:

$$P_2^e = 1000 \text{ kg}, P_2^f = 1000 \text{ kg},$$

więc na belkę poprzeczną E działają siły:

$$P_1^e + P_2^e = 750 + 1000 = 1750 \text{ kg.}$$

Odpór  $A'_1$  przy uwzględnieniu belek poprzecznych:

$$A'_1 = A_1 - P_1^a = \frac{34000}{15} - 250.$$

Moment dla jakiegokolwiek przekroju belki między belkami poprzecznymi E i F przy obciążeniu jednostajnym (według wzoru (15) str. 61):

$$M_0 = \frac{gx(l-x)}{2}, \text{ więc moment ogólny dla tegoż przekroju:}$$

$$M_x = A'_1 x - 1750(x-4) + \frac{gx(l-x)}{2}.$$

Moment ten będzie największy dla  $x$ , określonego z wzoru:

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = A'_1 - 1750 + \frac{gl}{2} - gx, \text{ z kąd, w obec:}$$

$$A'_1 = \frac{34000}{15} - 250, g = 600 \text{ i } l = 15:$$

$$x = 7,944 \text{ m i}$$

$$M_x^{max} = \left( \frac{34000}{15} - 250 \right) \times 7,944 - 1750 \times 7,944 +$$

$$+ 4 \times 1750 + \frac{600}{2} \times 7,944 \times 7,056 = 25934,25 \text{ kgm.}$$

Stosując do tego przykładu uwagę końcową w przykładzie na str. 70, otrzymamy dla największego momentu za pomocą pola sił poprzecznych:



$M_x^{max} = \text{polu } A_4 A_3 E_3 E_4 S A_4 = \frac{65,2+17,5}{2} \times 39,7 -$   
 $- 17,5 (39,7 - 20) = 1296,85 \text{ mm}^2$ , a zastosowawszy naszą skalę  
momentów:

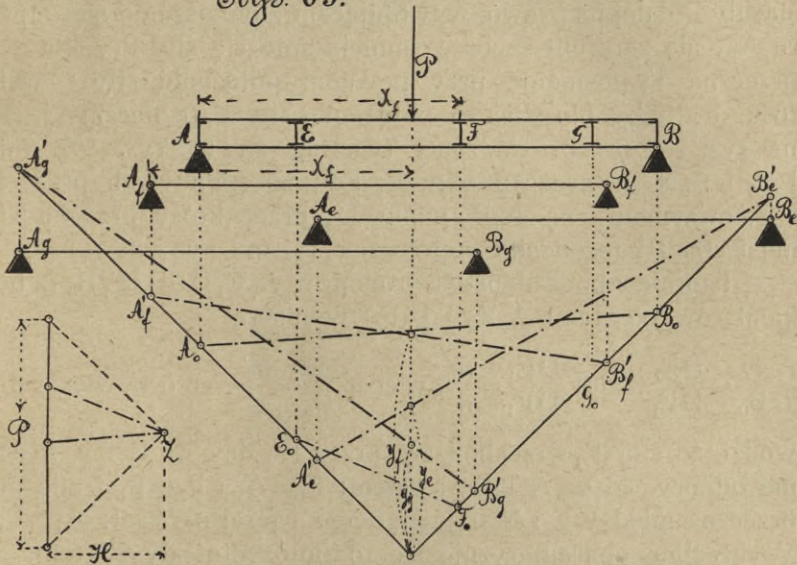
$$M_x^{max} = 1296,85 \times \frac{1}{5} \times 100 = 25937 \text{ kgm.}$$

### § 3. Obciążenie pośrednie siłą ruchomą.

#### a) Momenty:

Przy przesuwaniu pojedynczej siły P po belce AB (rys. 69) największy moment otrzymać możemy (zgodnie ze

Rys. 69.



str. 108) tylko dla jednego z wierzchołków ( $E_0$ ,  $F_0$  lub  $G_0$ ) wieloboku sznurowego  $A_0 E_0 F_0 G_0 B_0$  i to wtedy, kiedy nad tym wierzchołkiem umieścimy siłę P (bo wierzchołki K, L, M, N pod siłami  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  (rys. 66) dają większe odcinki  $y$ , niż wierzchołki  $E_0$ ,  $F_0$ ,  $G_0$ ). A zatem, ustawiając siłę P kolejno nad E, F, G, albo też przesuwając odpowiednio belkę AB tak, aby siła P wypadła nad E, F i G (rys. 69), otrzymujemy za pomocą boków zamykających  $A'_e B'_e$ ,  $A'_f B'_f$ ,  $A'_g B'_g$  odpowiednie odcinki  $y_e$ ,  $y_f$ ,  $y_g$  i największy z nich da największy moment:

$$M = H \cdot y_f.$$



### b) Siły poprzeczne.

Jeżeli siła ruchoma  $P$  przesuwa się wprost po belce  $AB$  od  $A$  ku  $B$  (rys. 60), to siła poprzeczna dla przekrojów na prawo od siły  $P$  jest, jak wiadomo (str. 93):  $V = A_1 - P$ , jest ujemną i wyraża się prostą  $A_0N$  (rys. 59). Jeżeli natomiast siła ruchoma  $P$  działa przez belki poprzeczne  $E$  i  $F$  (rys. 65), to siła poprzeczna  $V_{ef}$  (dla przekrojów belki między  $E$  i  $F$  czyli dla pola  $EF$ ) będzie także (zgodnie ze str. 108)  $= A_1 - P$ , ale tylko, dopóki siła  $P$  pozostaje na lewo od punktu  $E$ , z chwilą zaś, kiedy siła  $P$  przejdzie poza punkt  $E$ , siła poprzeczna  $V_{ef}$  będzie  $= A_1 - P_1$  (rys. 65), bo siła  $P$  rozłoży się na składowe  $P_1$  i  $P_2$  w punktach  $E$  i  $F$ . Przy przesuwanie się siły  $P$  dalej na prawo, wywołującem zmniejszanie się odporu  $A_1$ , ale zarazem szybsze zmniejszanie się siły  $P_1$ , siła poprzeczna  $V_{ef}$  osiągnie przy pewnem położeniu siły  $P$  wartość  $= 0$ . Aby określić to położenie siły  $P$  (oznaczymy je  $P'$  na rys. 70) przeprowadzamy (według str. 93, rys. 59) linie  $LB_0$  i  $A_0N$ , a łącząc punkty  $E_1$  i  $F_1$  na pionowych przez  $E$  i  $F$ , otrzymamy na  $A_0B_0$  punkt  $D$ , przez który przechodzić musi siła  $P$ , jeżeli siła poprzeczna  $V_{ef}$  ma być  $= 0$ .

Istotnie z podobieństwa trójkątów  $A_0E_1D$  i  $DF_1B_0$  (z bokami równoległymi  $A_0E_1$  i  $B_0F_1$ ) wynika:

$$\frac{A_0D}{DB_0} = \frac{DE_1}{DF_1}, \text{ ale: } \frac{DE_1}{DF_1} = \frac{m'}{n'}, \text{ więc } \frac{A_0D}{DB_0} = \frac{m'}{n'}, \text{ co oczywiście do-}$$

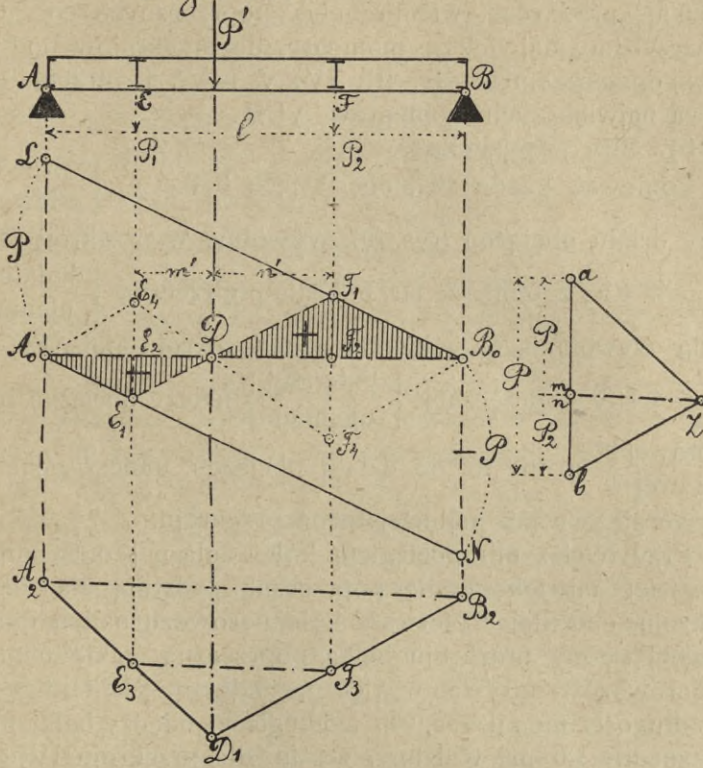
wodzi, że siła  $P$ , przechodząca przez  $D$ , daje w  $E$  i  $F$  te same odpory, co w  $A$  i  $B$ , a zatem:  $P_1 = A_1$  i  $P_2 = B_1$  i siła poprzeczna między  $E$  i  $F$  staje się  $= 0$ , a raczej parą sił:  $A_1 - P_1$ . Wykreślenie charakteryzuje się to położenie siły  $P'$  tem, że  $A_2B_2$  — bok zamykający zbudowanego dla siły  $P'$  trójkąta sznurowego  $A_2D_1B_2$  — będzie równoległym do  $E_3F_3$  i punkt  $m$  upadnie na  $n$  (rys. 65 i 70).

Przy dalszem przesuwanie się siły  $P$  poza punkt  $D$  i szybszem zmniejszaniu się siły  $P_1$ , niż odpór  $A_1$ , siła poprzeczna staje się dodatnią, a zatem każda siła z prawej strony punktu  $D$  wywołuje w przekrojach całego pola  $EF$  siłę poprzeczną **dodatnią** (bo  $P_1$  będzie mniejsze od  $A_1$ ), każda zaś siła z lewej strony punktu  $D$  — siłę poprzeczną **ujemną**.

Punkt  $D$  można w obec tego nazwać **działem obciążeń** dla pola  $EF$ , a może on być wyznaczony przez jakiegokolwiek **dwie** równoległe, przeprowadzone przez  $A_0$  i  $B_0$ , np.  $A_0E_4$



Rys. 70.



i  $B_0F_4$ , bo linia, łącząca otrzymane na pionowych przez E i F punkty  $E_4$  i  $F_4$ , przetnie  $A_0B_0$  także w punkcie D.

Dla każdego przekroju między E i F otrzymujemy siłę poprzeczną, wywołaną przez siłę P (rys. 70), jako odcinek pod siłą P, między prostą  $A_0B_0$  i  $E_1F_1$ .

#### § 4. Obciążenie pośrednie siłami ruchomymi skupionymi.

##### a) Momenty.

Jeżeli cała grupa ciężarów skupionych działa na belkę przez belki poprzeczne, to zgodnie ze str. 107 momenty dla przekrojów pod belkami poprzecznymi są też same, co dla obciążenia bezpośredniego. Aby więc otrzymać największy moment, wystarczy wyznaczyć największe momenty przy danej grupie ciężarów dla obciążenia bezpośredniego, odłożyć



je od jakiejś osi i będzie to krzywa największych momentów. Tak np. na tablicy 1-ej dla mostu o rozpiętości teoretycznej  $l=36,0$  m, przy rozstawieniu belek poprzecznych co  $3,0$  m, wyznaczyliśmy największe momenty dla przekrojów pod belkami poprzecznymi I, II, III, IV, V i VI i otrzymaliśmy krzywą największych momentów ALB.

**b) Siły poprzeczne.**

Ponieważ każda siła, obciążająca belkę z  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewej} \end{array} \right\}$  strony działu obciążeń (rys. 70), wywołuje w przekrojach całego pola EF, zgodnie ze str. 114, siłę poprzeczną  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dodatnią,} \\ \text{ujemną,} \end{array} \right\}$  to dla wywołania w jakimkolwiek przekroju pola EF największej siły poprzecznej  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dodatniej} \\ \text{ujemnej} \end{array} \right\}$  należy obciążyć belkę z  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewej} \end{array} \right\}$  strony aż do działu obciążeń, umieszczając największe ciężary jak najbliżej tegoż przekroju.

Przy obciążeniu pociągiem kolei żelaznej otrzymujemy najczęściej największą siłę poprzeczną **dodatnią** dla danego przekroju, ustawiając pierwsze koło parowozu nad najbliższą z **prawej strony** przekroju belką poprzeczną; takie ustawienie parowozów nazywamy więc **normalnem**. Na tablicy 1-ej, przy długości mostu  $=36,0$  m i odległości między belkami poprzecznymi  $=3,0$  m, widzimy, że np. dla przekroju IV, przy położeniu normalnem, oznaczonem przez 9, 8, 7, 6, 5, otrzymujemy siłę poprzeczną, zgodnie ze str. 97, jako odcinek:  $V_{IV} = \beta_{\eta} = 44,0$  mm  $= 88$  tonn. Jeżeli zaś przesuniemy na lewo pierwsze koło parowozu 9, tak, żeby drugie koło 8 stanęło nad przekrojem IV (położenie to oznaczone jest na tablicy przez: 9<sub>1</sub>, 8<sub>1</sub>, 7<sub>1</sub>, 6<sub>1</sub>, 5<sub>1</sub>), to otrzymujemy większy odcinek:

$$V'_{IV} = \gamma_{\theta} = 49,6 \text{ mm} = 99,2 \text{ tonn.}$$

Należy jednak uwzględnić, że ciężar koła 9—a raczej osi parowozu—rozkłada się na belki poprzeczne III i IV na składowe  $P_{III}$  i  $P_{IV}$ , a składową  $P_{III}$ , wynoszącą oczywiście:  $P_{III} = \frac{20^t \times 1,5}{3,0} = 10$  tonn, trzeba odjąć od  $V'_{IV}$ , poczem siła poprzeczna będzie:

$$V''_{IV} = V'_{IV} - P_{III} = 99,2 - 10,0 = 89,2 \text{ tonn.}$$

Teraz dopiero widzimy, że dla przekroju IV otrzymamy przy ustawieniu drugiego koła (8) nad belką IV (t. j. przy



położeniu kół  $9_1, 8_1, 7_1, 6_1, 5_1$ ) istotnie większą siłę poprzeczną, niż przy położeniu normalnym 9, 8, 7, 6, 5. Oczywiście pierwsze koło ( $9_1$ ) znalazło się tylko przypadkiem pośrodku między belkami poprzecznymi III i IV; gdyby jednak tak nie było, to zamiast obliczania składowej  $P_{III}$  możemy wykreślić bardzo prostym sposobem siłę  $V''_{IV}$ : na pionowej przez III (tablica 1-a) odkładamy do punktu  $\varepsilon$  siłę 9 (oznaczymy ją przez P) i łącząc ten punkt  $\varepsilon$  z punktem  $\beta$ , otrzymujemy (na pionowej przez siłę  $9_1$ ) odcinek  $\gamma\delta = P \cdot \frac{e}{d} = P_{III}$  i siłę  $V''_{IV}$ , jako odcinek:  $\gamma\delta - \gamma\delta = \delta\theta = 44,6 \text{ mm} = 89,2 \text{ tonn}$ .

Dodajmy jeszcze, że przy większej odległości między belkami poprzecznymi, np.  $d' = \kappa\lambda = 4,0 \text{ m}$  (tablica 1-a), trzeba by uwzględniać oprócz położenia normalnego z kołem 9 nad belką poprzeczną  $\lambda$ , dającego siłę poprzeczną jako odcinek  $\lambda\pi$  — jeszcze dwa inne, odpowiadające położeniu kół 8 i 7 nad tą samą belką poprzeczną  $\lambda$ , t. j. rozmieszczeniu sił, oznaczoneму na tablicy 1-ej przez  $9_2, 8_2$  i  $9_3, 8_3, 7_3$ . Pierwszemu odpowiadają: punkt  $\mu$  i odcinek  $\mu\rho$ , (otrzymane zupełnie tak samo, jak wyżej punkt  $\delta$  i odcinek  $\delta\theta$ ); odpowiednią zaś rozmieszczeniu  $9_3, 8_3, 7_3$  siłę poprzeczną otrzymujemy w danym razie — (przy równych odstępach  $e = 1,5 \text{ m}$  między kołami parowozu i równych obciążeniach kół) — jako odcinek  $\nu\sigma$  na pionowej przez  $9_3$ , prowadząc przez środkowy (między  $i$  i  $h$ ) punkt  $h'$  równoległą do osi belki i łącząc otrzymany na pionowej przez  $\kappa$  punkt  $\xi$  z punktem  $\lambda$ . Istotnie, rozkładając ciężary  $9_3$  i  $8_3$  — oznaczymy je przez P — na składowe, działające w belkach poprzecznych  $\kappa$  i  $\lambda$ , otrzymujemy dla  $\kappa$ :

$$P \times 2 \frac{e}{d'} + P \frac{e}{d'} = 3 P \frac{e}{d'}$$

odcinek zaś  $\tau\nu = \xi\kappa \times \frac{\tau\lambda}{\kappa\lambda} = 1,5 P \times 2 \frac{e}{d'} = 3 P \frac{e}{d'}$ .

Odcinek ten ( $\tau\nu$ ), wyrażający siłę, działającą w punkcie  $\kappa$  (z lewej strony rozpatrywanego przekroju przez siłę  $9_3$ ) trzeba odjąć od siły poprzecznej dla tegoż przekroju, wywołanej w belce przez siły  $9_3, 8_3, 7_3, 6_3, 5_3$ , t. j. od odcinka  $\tau\sigma$ , otrzymamy więc:  $\tau\sigma - \tau\nu = \nu\sigma$ .

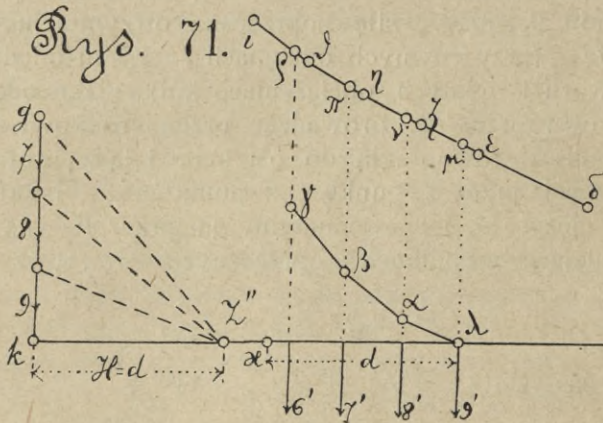
Największy z trzech odcinków:  $\lambda\pi, \mu\rho, \nu\sigma$ , czyli  $\mu\rho$ , będzie szukaną największą siłą poprzeczną dla przekrojów między belkami poprzecznymi  $\kappa$  i  $\lambda$ , t. j.

$$V_{max} = \mu\rho = 58 \text{ mm} = 58 \times 2 = 116 \text{ tonn}$$



Wykreślona powyżej linia łamana  $\lambda\mu\nu$  (tablica 1-a) jest wielobokiem sznurowym dla sił 9, 8, 7, ustawionych w porządku odwrotnym względem  $9_3, 8_3, 7_3$ , t. j. w porządku  $9'_3, 8'_3, 7'_3$  przy odległości biegunowej:  $H'' = d'$ . Istotnie,  $\lambda\mu$  jest równoległą do  $Z''i$ , skoro  $ki = \kappa\varphi$  i  $H'' = d' = \kappa\lambda$ ; przeprowadzając zaś poziomą przez  $h$  i łącząc punkt  $\psi$  z  $\lambda$ , mamy:  $\varphi\xi = \xi\psi$ , więc punkt  $\nu$  jest w środku odcinka  $\nu\chi$ , a w obec równych odstępów  $e$  między pionowemi przez  $\lambda, \mu$  i  $\nu$  —  $\nu\chi = 2\mu\omega$ , a zatem  $\mu\omega = \nu\chi$ , z kąd wynika, że  $\mu\nu$  jest równoległe do  $\omega\chi$ , które musi być równoległe do  $Z''h$  (w obec  $kh = \kappa\psi$  i  $H'' = \kappa\lambda$ ). Skoro zaś  $\lambda\mu$  i  $\mu\nu$  są równoległe do  $Z''i$  i  $Z''h$ , to  $\lambda\mu\nu$  jest wielobokiem sznurowym, (co zresztą wynika i ztąd, że odcinek  $\tau\nu$  wyrażać musi siłę poprzeczną, wywołaną w belce o rozpiętości  $\kappa\lambda$  przez ciężary  $9_3, 8_3, 7_3$ , otrzymuje się więc wykreślić za pomocą wyżej opisanego wieloboku sznurowego).

A zatem przy większych odstępach między belkami poprzecznymi, odpowiadających kilku ruchomym ciężarom, np. przy  $d = \kappa\lambda = 5,0$  m (rys. 71), okazuje się najbardziej celowem



wykreślić odrazu dodatkowy wielobok sznurowy o odległości biegunowej  $H = d$ , z ustawieniem kół  $9', 8', 7', 6'$ , czyli wielobok  $\lambda\alpha\beta\gamma$  i największy z odcinków  $\lambda\mu, \alpha\nu, \beta\pi, \gamma\rho$  między tym wielobokiem i krzywą największych sił poprzecznych  $i\theta\eta\xi\varepsilon\delta$  — czyli w danym razie  $\alpha\nu$  — będzie szukaną największą siłą poprzeczną. Największy ten odcinek musi oczywiście odpowiadać jednemu z wierzchołków dodatkowego wieloboku sznurowego  $\lambda\alpha\beta\gamma$ , z kąd wynika, że największa siła po-



przeczną dodatnią dla jakiegokolwiek przekroju odpowiada zawsze położeniu jakiegoś koła pociągu (idącego od podpory B ku A) — w danym wypadku koła 8' — **nad punktem**  $\lambda$ , t. j. nad najbliższą z prawej strony przekroju belką poprzeczną i w obec tego — przy małych odstępach między belkami poprzecznymi ( $d$ ) — wystarczy rozpatrywać oprócz położenia normalnego (z kołem 9 ponad punktem  $\lambda$ ) tylko położenia, odpowiadające ustawieniu drugiego, lub trzeciego koła ponad tymże punktem  $\lambda$ .

## § 5. Obciążenie pośrednie ruchome jednostajne.

### a) Momenty.

Ponieważ największy moment otrzymujemy przy całkowitem obciążeniu belki, więc wyznaczamy go zgodnie ze str. 108 (rys. 67).

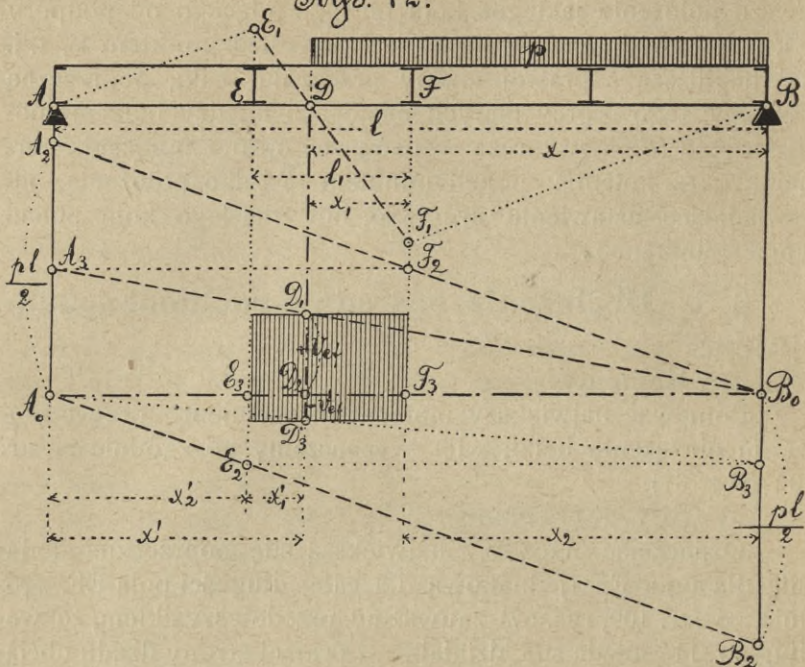
### b) Siły poprzeczne.

Oznaczając przez  $V_{ef}$  największą siłę poprzeczną dodatnią dla pola EF (jednakową dla całej długości pola EF, zgodnie ze str. 109, rys. 67) zauważmy przedewszystkiem, że według str. 114 każda siła, działająca z prawej strony działu obciążeń (rys. 70), zwiększa siłę poprzeczną dodatnią dla pola EF. Wyznaczywszy więc za pomocą dwóch równoległych przez A i B (rys. 72) i punktów  $E_1$  i  $F_1$  (według str. 114) ten dział obciążeń w punkcie D, obciążamy belkę z prawej strony aż do punktu D i jak zaraz dowiedzimy, największą siłę poprzeczną dla pola EF otrzymamy, odkładając od  $A_0$  do  $A_2$  odcinek  $+\frac{pl}{2}$ , łącząc  $A_2$  z  $B_0$ , przeprowadzając przez  $F_2$  równoległą do AB i łącząc  $A_3$  z  $B_0$ . Odcinek  $D_2D_1$  będzie szukaną siłą poprzeczną  $V_{ef}$ . Istotnie, dla otrzymania siły poprzecznej  $V_{ef}$  należy od odporu  $A_1$  odjąć tę siłę, która wskutek obciążenia części pola EF na długości  $x_1$  przechodzi na belkę poprzeczną E. Wspomniany odpór  $A_1$  otrzymamy według wzoru (22) str. 64:  $A_1 = \frac{px^2}{2l}$ , a na belkę poprzeczną E przechodzi podobnie:  $\frac{px_1^2}{2l_1}$ , więc:  $V_{ef} = \frac{p}{2} \left( \frac{x^2}{l} - \frac{x_1^2}{l_1} \right)$ , ale dla działu obciążeń D mamy zgodnie z wzorem na str. 114:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{ED}{DF}, \text{ z kąd } \frac{AD+DB}{DB} = \frac{ED+DF}{DF}, \text{ czyli: } \frac{l}{x} = \frac{l_1}{x_1},$$



Rys. 72.



a zatem:  $V_{ef} = \frac{p}{2} \left( \frac{x^2}{l} - \frac{x_1 x}{l} \right)$ , czyli:

$$V_{ef} = \frac{px}{2l} (x - x_1) \dots \dots (49).$$

Wskutek zaś podobieństwa trójkątów  $D_1D_2B_0$  i  $A_3A_0B_0$ , a także trójkątów:  $F_2F_3B_0$  i  $A_2A_0B_0$ :

$$D_2D_1 = \frac{D_2B_0 \times A_0A_3}{A_0B_0} \text{ i } A_0A_3 = F_3F_2 = \frac{F_3B_0 \times A_0A_2}{A_0B_0}, \text{ więc}$$

$$D_2D_1 = \frac{D_2B_0 \times F_3B_0}{(A_0B_0)^2} \times A_0A_2 = \frac{x \cdot (x - x_1) pl}{l^2} = \frac{px}{2l} (x - x_1) = V_{ef}.$$

Możemy jednak otrzymać dogodniejszy wzór dla  $V_{ef}$ :

Ponieważ  $\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1}$ , więc:  $\frac{x - x_1}{l - l_1} = \frac{x}{l}$ , t. j.  $V_{ef} = \frac{px}{2l} (x - x_1) =$

$$= \frac{p}{2(l - l_1)} (x - x_1)^2 \text{ i oznaczając: } x - x_1 = x_2, \text{ otrzymujemy:}$$

$$V_{ef} = \frac{px_2^2}{2(l - l_1)} \dots \dots (50).$$

Największą siłę poprzeczną ujemną dla jakiegokolwiek pola EF otrzymamy przy symetrycznym rozłożeniu belek poprzecznych względem środka belki wprost równą i odwrotną



odpowiedniej sile poprzecznej  **dodatniej** dla pola, położonego symetrycznie po drugiej stronie środka belki.

Przy  **niesymetrycznym** rozkładzie belek poprzecznych jak na rys. 72 musimy dla każdego pola przeprowadzić konstrukcję powyższą, a więc największa siła poprzeczna  **ujemna** dla pola EF będzie:

$$V'_{ef} = -\frac{p x' (x' - x'_1)}{2l}, \text{ czyli: } V'_{ef} = -\frac{p x'^2_2}{2(l-l_1)} \dots \dots (51)$$

i wyrazi się przez odcinek  $D_2D_3$ , otrzymany zupełnie tak samo, jak odcinek  $D_2D_1$ .

## § 6. Obciążenie pośrednie złożone: stałe jednostajne i ruchome jednostajne.

a)  **Momenty** otrzymują się największe przy całkowitem obciążeniu belki, a więc według str. 108.

### b) Siły poprzeczne.

Po wykreśleniu według powyższego (rys. 72) sił poprzecznych dla pól AE, EF, FG..., t. j.  $V_{ae}$ ,  $V_{ef}$ ,  $V_{fg}$ ... (rys. 73), przyjmąwszy za oś linię  $A_0B_0$ , odkładamy od  $A_0$  na dół  $+\frac{gl}{2}$ , a od  $B_0$  w górę  $-\frac{gl}{2}$  i przez punkty środkowe pól AE, EF, FG..., leżące na linii  $A_2B_2$ , prowadzimy, zgodnie ze str. 109, równoległe do osi  $A_0B_0$  i otrzymamy krzywą sił poprzecznych dla obciążenia stałego jednostajnego. Największa siła poprzeczna dodatnia, wywołana przez obciążenie złożone dla jakiegokolwiek pola EF, wyrazi się przez odcinek  $V^{max}_{ef} = V_{ef} + V^{g}_{ef}$ , z uwzględnieniem znaków (odcinki  $V_{ef}$  są  **dodatnie** od osi  $A_0B_0$  w  **górę**, odcinki zaś  $V^{g}_{ef}$  —  **odwrotnie**).

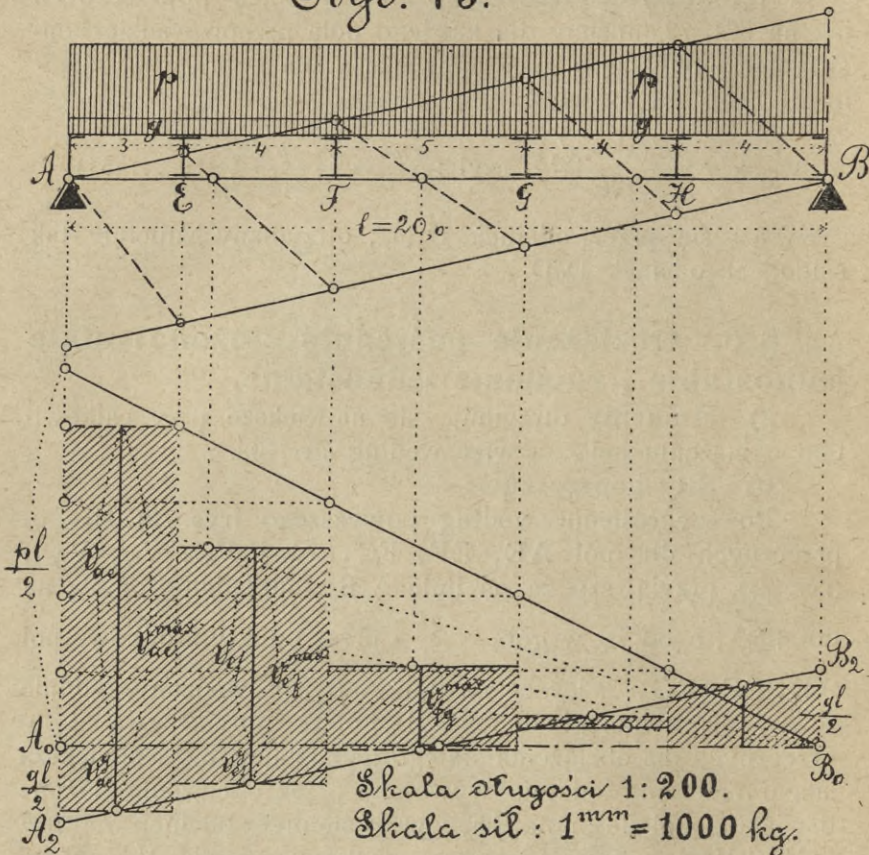
**Przykład:** Obciążenie belki 20,0 m długiej (rys. 73) jest 1) stałe jednostajne  $g=1000$  kg na metr bieżący i 2) ruchome jednostajne  $p=5000$  kg na metr bieżący. Wyznaczyć największe siły poprzeczne dodatnie.

Skalę dla długości przyjęliśmy 1:200, skalę dla sił 1 mm = 1000 kg.

Wykreśliwszy sposobem powyższym największe siły poprzeczne dodatnie dla pól AE, EF, FG... jako odcinki  $V_{ae}$ ,  $V_{ef}$ ,  $V_{fg}$ ... i siły poprzeczne dla obciążenia stałego jednostajnego  $V^{g}_{ae}$ ,  $V^{g}_{ef}$ ,  $V^{g}_{fg}$ ..., otrzymujemy wykreślenie największe siły poprzeczne dodatnie:



Rys. 73.



$V_{ae}^{max} = V_{ae} + V_{ae}^s = 51,0 \text{ mm} = 51000 \text{ kg}$  (rachunkowo z wzorów (50) str. 120 i (12) str. 60 otrzymujemy także 51000 kg).

$V_{ef}^{max} = V_{ef} + V_{ef}^s = 31,4 \text{ mm} = 31400 \text{ kg}$  (rachunkowo: 31406,25 kg).

$V_{fg}^{max} = 11,15 \text{ mm} = 11150 \text{ kg}$  (rachunkowo: 11166,7 kg).

$V_{gh}^{max} = V_{gh} + V_{gh}^s$  (ujemne) =  $-1,5 \text{ mm} = -1500 \text{ kg}$  (rachunkowo:  $-1500 \text{ kg}$ ).

$V_{hb}^{max} = V_{hb}^s$  (ujemne) =  $-8,0 \text{ mm} = -8000 \text{ kg}$  (rachunkowo:  $-8000 \text{ kg}$ ).



## ROZDZIAŁ IV.

### Belki kratowe i więzary dachowe.

#### A) Pojęcia ogólne. Siły wewnętrzne w belkach kratowych. Wyznaczalność statyczna belek kratowych.

Belką kratową nazywamy w ogóle układ sztywny z prętów prostych, leżących w jednej płaszczyźnie i tworzących sieć trójkątów z wierzchołkami na zewnętrznym obwodzie układu (rys. 79 i 80 na str. 136 i 138). Wierzchołki tych trójkątów nazywamy **węzłami**; szereg prętów, ograniczających belkę z góry — **pasem górnym**, z dołu — **pasem dolnym**; pręty między pasami, o ile są  **pionowe**, nazywamy **słupami**, idące zaś w innych kierunkach — **krzyżulcami**.

W dalszych obliczeniach przyjmować będziemy zawsze, że siły zewnętrzne działają na belkę kratową w płaszczyźnie tejże belki i tylko w poszczególnych węzłach, — że węzły nie mogą zmieniać położenia wzajemnego i że pręty połączone są pomiędzy sobą w węzłach spółśrodkowo, przegubowo i bez tarcia. Wskutek tego może w każdym pręcie działać tylko siła podłużna w kierunku jego osi, każda bowiem siła, działająca **nie** w osi pręta, wywołałaby obrót tegoż około sworznia. O ile więc jest zachowana równowaga, to siły działają w osiach prętów, są to więc jedynie siły ściskające, lub wyciągające.

Ciężar własny belki kratowej może być przyjmowany z dostateczną dokładnością jako jednostajny na całej długości belki i zgodnie z powyższem — działający w poszczególnych jej węzłach. Ciężar własny każdego pola między 2-ma węzłami rozłoży się zatem w połowie na każdy z tych wę-







trzne muszą być w równowadze, dają zatem wielobok sił i sznurowy zamknięte), uważać więc będziemy zawsze odpory, jako dane. Zauważmy jeszcze, że w danym wypadku, kiedy i na same podpory działają siły zewnętrzne ( $\frac{P}{2}$ ), nie wpłyną one wcale na kształt wieloboku sznurowego, którego bokiem zamykającym będzie zawsze ta sama linia pozioma  $A'B'$  (rys. 74), bo wykreślając wielobok sznurowy z uwzględnieniem owych sił  $\frac{P}{2}$ , możemy przyjąć jako bok skrajny linię, idącą przez  $A'$  równoległą do promienia wieloboku sił  $aZ$ , a następnym bokiem będzie linia także przez  $A'$  równoległa do  $bZ$  i bokiem zamykającym będzie oczywiście  $A'B'$  — a bez uwzględniania siły  $\frac{P}{2}$  otrzymujemy odrazu, jako bok skrajny, linię przez  $A'$  równoległą do  $bZ$  z tym samym bokiem zamykającym  $A'B'$  i za odpory uważać możemy:  $A'_1 = B'_1 = fb = 3,5 P$ . Ten zmniejszony, istotnie działający odpór nazywają niekiedy **odporem czynnym** w zestawieniu z odporem całkowitym:  $A_1 = B_1 = fa = 4P$ , który otrzymujemy przy uwzględnieniu obciążeń  $\frac{P}{2}$  na podporach.

Jeżeli belkę kratową (rys. 74) przetniemy w jakimkolwiek kierunku, np. po linii  $aa$ , i usuniemy część **prawą** belki, to dla utrzymania w równowadze pozostałej części **lewej** trzeba w punktach przecięcia zastosować takie siły zewnętrzne, któreby zastąpiły w zupełności oddziaływanie usuniętej części prawej, a więc utrzymywały równowagę z siłami zewnętrznymi, działającymi w pozostałej części belki. Siły te nazywać będziemy **siłami wewnętrznymi**, albo **natężeniami** prętów — w przeciwstawieniu do **sił zewnętrznych**: obciążeń i odporów.

Ponieważ jednak siły zewnętrzne jednej części belki muszą utrzymywać równowagę z siłami zewnętrznymi drugiej części, więc jeżeli w razie usunięcia części **prawej** muszą działać (dla utrzymania w równowadze pozostałej części **lewej**) w prętach 24, 25 i 35 siły wewnętrzne  $T_1, T_2, T_3$ , to w razie usunięcia części **lewej** muszą działać (dla utrzymania w równowadze pozostałej części **prawej**) w prętach 24, 25 i 35 siły wewnętrzne  $T'_1, T'_2, T'_3$ , równe, ale odwrotne siłom  $T_1, T_2, T_3$ . Siły zatem wewnętrzne utrzymują równowagę z siłami zewnętrznymi, a oprócz tego utrzymują także równowagę pomiędzy sobą.



Siły wewnętrzne (natężenia) działające w pasie **górnym** belki kratowej oznaczać będziemy przez  $G$ , w pasie **dolnym** — przez  $D$ , w **słupach** — przez  $S$ , w **krzyżulcach** zaś przez  $K$ .

Podobnie jak powyżej (str. 46) postanowiliśmy rozpatrywać zawsze jako siłę poprzeczną danego przekroju belki wypadkową **lewej** grupy sił zewnętrznych,—tak samo w dalszym ciągu rozpatrywać zawsze będziemy **lewą** część belki kratowej, t. j. oznaczać będziemy, np. dla przekroju  $\beta\beta$  (rys. 74), natężenia wewnętrzne  $G$ ,  $K$  i  $D$ , zastępujące oddziaływanie **usuniętej** części **prawej** na **pozostałą lewą** część belki; zaznaczona strzałka przy sile  $G$ , idąca **ku przekrojowi**  $\beta\beta$ , charakteryzuje natężenie  $G$  (działające **na lewą** część belki) jako **ściskające**; natężenia zaś  $K$  i  $D$ , oznaczone strzałkami, idącymi **od przekroju**  $\beta\beta$ , muszą być oczywiście uważane za natężenia **wyciągające**. (Siłą poprzeczną  $V_\beta$  dla przekroju  $\beta\beta$  będzie—zupełnie tak samo, jak dla belki prostej—wypadkowa sił zewnętrznych, działających z lewej strony przekroju  $\beta\beta$ , czyli sił  $A_1, P_1, P_3, P_5$ ). Podobnież dla przekroju ukośnego  $\gamma\gamma$  (rys. 74) natężenia wewnętrzne przeciętych prętów:  $T_1, S, D$ , zastępujące oddziaływanie usuniętej części **prawej** na pozostałą **lewą** część belki, zaznaczone są odpowiednimi strzałkami:  $D$ —strzałką, idącą **od** przekroju  $\gamma\gamma$ —jako natężenie **wyciągające**,  $T_1$  i  $S$ —strzałkami, idącymi **ku** przekrojowi  $\gamma\gamma$ —jako natężenia **ściskające**. (Siłą zaś poprzeczną  $V_\gamma$  dla przekroju  $\gamma\gamma$  będzie oczywiście również  $V_\beta$ , jako wypadkowa sił:  $A_1, P_1, P_3, P_5$ ). Że w pasie **górnym** i **słupach** belki kratowej rys. 74 otrzymamy istotnie **ściskanie**, w pasie zaś **dolnym** — **wyciąganie**, dowiedzione będzie poniżej.

Dla połączenia sztywnego (czyli dla utrzymania w położeniu stałym) jakichkolwiek **3 punktów** (nie leżących na jednej prostej), konieczne są **3 pręty**, **każdy zaś dalszy punkt** położony w tejże płaszczyźnie wymaga dla połączenia sztywnego z poprzednimi — **nowych 2-ch prętów**, w ogóle zatem dla połączenia sztywnego  $m$  **punktów** (czyli węzłów) potrzeba:  $3+2(m-3)=2m-3$  **prętów**.

Z analitycznych warunków równowagi sił, działających na płaszczyźnie (str. 42) dają się wyprowadzić 3 równania równowagi (**dwa** — dotyczące składowych sił w dwóch przecinających się kierunkach i **trzecie** — dotyczące momentów), którym siły te muszą czynić zadość; dla sił jednak, przecho-



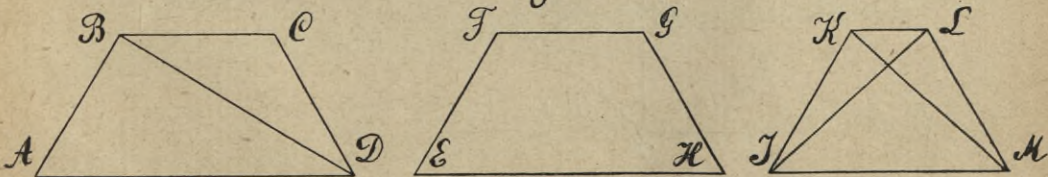
dzających przez jeden punkt, otrzymujemy oczywiście tylko  **dwa**  równania, dotyczące składowych sił w dwóch przecinających się kierunkach. A ponieważ w każdym węźle zachowaną być musi równowaga między działającymi tam siłami zewnętrznymi i natężeniami wewnętrznymi, więc dla każdego węzła otrzymamy  **dwa**  równania równowagi sił, czyli w ogóle dla  $m$  węzłów —  $2m$  równań między siłami zewnętrznymi i natężeniami. Uwzględnić jednak należy, że siły zewnętrzne muszą być  **między sobą**  w równowadze (gdyż w przeciwnym razie cała belka musiałaby się poruszyć), trzeba zatem dla nich ułożyć obowiązujące (zgodnie z powyższem)  **trzy**  równania równowagi, którym siły zewnętrzne muszą czynić zadość i dopiero reszta równań, t. j.  $2m - 3$ , posłuży nam do określenia natężeń w prętach. A więc, jeżeli ilość prętów  $n$  jest właśnie  $= 2m - 3$ , to mamy akurat dostateczną ilość równań dla określenia natężeń i taką belkę nazywamy  **statycznie wyznaczalną** .

Jeżeli zaś ilość prętów  $n < 2m - 3$ , to mamy więcej równań, niż prętów, więc pozostała ilość  $2m - 3 - n$  równań daje nam warunki, które dla równowagi muszą być spełnione. W tym wypadku niema zatem sztywnego układu prętów i belkę taką nazywamy  **chwiejną** . Jeżeli wreszcie  $n > 2m - 3$ , to mamy mniej równań, niż prętów, nie możemy więc określić  **przy pomocy statyki**  natężeń we wszystkich prętach, nazywamy zatem taką belkę  **statycznie niewyznaczalną** .

Tak więc cechą statycznej wyznaczalności jest:  $n = 2m - 3$  i np. belka ABCD (rys. 75) jest  **statycznie wyznaczalną** , bo  $n = 5$ ,  $m = 4$ , więc:  $n = 2m - 3$ ; belka EFGH jest belką  **chwiejną** , bo:  $n = 4$ ,  $m = 4$ , więc:  $n < 2m - 3$ , wreszcie belka JKLM jest  **statycznie niewyznaczalną** , bo:  $n = 6$ ,  $m = 4$ , więc:  $n > 2m - 3$ .

Dla każdej  **statycznie wyznaczalnej**  belki można określić analitycznie natężenia we wszystkich prętach, o wiele jednak praktyczniejsze są opisane poniżej sposoby wykreślne.

Rys. 75.



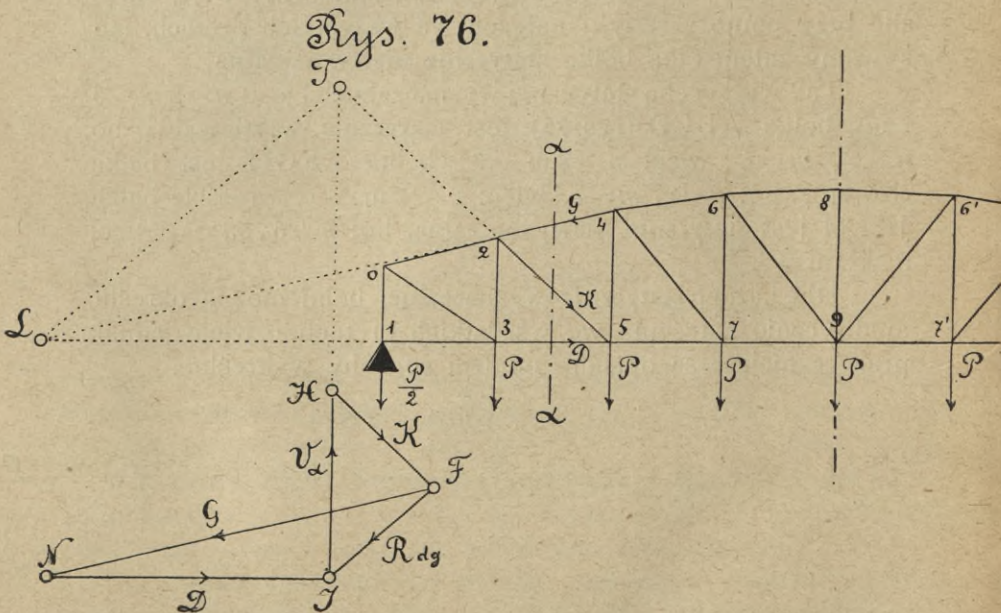


## B) Wyznaczanie sił wewnętrznych przy obciążeniu stałym.

Siły wewnętrzne, wywoływane w poszczególnych prętach belek kratowych, wyznaczać możemy sposobem przecięć według Culmanna lub Rittera, albo też sposobem wielobokowym Cremony.

### § 1. Sposób przecięć Culmanna i Rittera.

Jeżeli zależy nam na wyznaczeniu sił wewnętrznych nie we wszystkich — lecz tylko w kilku prętach belki kratowej, to prędzej wiodą do celu sposoby Culmanna i Rittera. Zaznaczyliśmy już na str. 125, że przeciąwszy belkę (rys. 76) po jakiegokolwiek linii  $aa$  i usunąwszy część prawą, musimy dla utrzymania pozostałej części lewej w równowadze zastosować w przeciętych prętach 24, 25 i 35 takie siły  $G$ ,  $K$  i  $D$ , któreby zastąpiły oddziaływanie usuniętej części prawej, utrzymując równowagę z siłami zewnętrznymi części lewej:  $A_1$ ,  $\frac{P}{2}$  i  $P$ , t. j. z ich wypadkową (siłą poprzeczną)  $V_a = A_1 - \frac{P}{2} - P$ .





Ta siła poprzeczna  $V_\alpha$  przechodzi, zgodnie ze str. 46, przez punkt przecięcia boku CE wieloboku sznurowego (rys. 74) z bokiem zamykającym tegoż  $A'B'$ , t. j. przez punkt S. Idąc dalej

**1. Sposobem Culmanna**—dla wyznaczenia natężeń G, K i D (rys. 76) utrzymujących równowagę z siłą  $V_\alpha$ , rozkładamy wykreślnie siłę  $V_\alpha$  na 3 składowe, działające w liniach G, K i D—czyli (zgodnie ze str. 26 rys. 24), łączymy punkt T (t. j. punkt przecięcia jednego z kierunków [K] z siłą  $V_\alpha$ ) z punktem przecięcia L dwóch pozostałych kierunków D i G, przeprowadzamy przez końcowe punkty siły  $V_\alpha$  (t. j. przez H i J) linie w kierunku K i LT (czyli HF i JF), a przez punkty J i F—równoległe do D i G i otrzymujemy szukane składowe siły  $V_\alpha$  jako odcinki FH, NF i JN. Natężenia zaś K, G i D, utrzymujące równowagę z siłą  $V_\alpha$ , będą oczywiście równe i odwrotne tym składowym, t. j.  $K=HF$ ,  $G=FN$  i  $D=NJ$ , przyczem lot każdego z nich—oznaczony порядkiem liter—wykazuje, w zastosowaniu do przekroju  $\alpha\alpha$ , że natężenie G (zastępujące oddziaływanie usuniętej części prawej na lewą), jako skierowane ku przekrojowi  $\alpha\alpha$ , jest **ściskającym**, natężenia zaś K i D, skierowane od przekroju  $\alpha\alpha$ , są **wyciągające**. (Oczywiście moglibyśmy tak samo zacząć od punktu przecięcia siły G, lub D, z siłą  $V_\alpha$  i połączyć go z punktem przecięcia dwóch pozostałych kierunków, a otrzymalibyśmy te same składowe siły poprzecznej  $V_\alpha$ ).

**2. Sposób Rittera**, czyli sposób momentów statycznych, oparty jest na podanym na str. 42 jednym z warunków równowagi sił, rozrzuconych na płaszczyźnie, że suma algebraiczna momentów statycznych tychże sił względem każdego punktu na płaszczyźnie musi być  $=0$ . Ponieważ zaś siły wewnętrzne G, D i K utrzymują równowagę z siłą poprzeczną V, więc suma algebraiczna momentów tych 4-ch sił (względem każdego punktu na płaszczyźnie) musi być  $=0$ . Biorąc ten dowolny punkt kolejno:

I—w punkcie przecięcia sił D i K, t. j. w E (rys. 77), otrzymamy:

Mom. V + Mom. G + Mom. D + Mom. K  $=0$ , a że względem punktu E momenty sił D i K są  $=0$ , więc:  $V \cdot v_5 + G \cdot g = 0$ , zkad:

$$G = - \frac{V \cdot v_5}{g} \dots\dots (52)$$







Podobnież możemy określić natężenie w każdym pręcie belki, np. w słupie 45 (rys. 74), przecinając belkę ukośnie po  $\gamma\gamma$  i rozkładając otrzymaną, jak wyżej, siłę poprzeczną  $V_\gamma$  (wypadkową sił zewnętrznych  $A_1, P_1, P_3, P_5$  z lewej strony przekroju  $\gamma\gamma$ ) na trzy składowe, działające w prętach  $G_{24}, S_{45}$  i  $D_{57}$ , sposobem Culmanna, lub Rittera. Stosując sposób Culmanna, otrzymamy teraz, zamiast poprzedniego (rys. 76) punktu T, punkt przecięcia słupa 45 z siłą  $V_\gamma$  — w nieskończoności, a więc linia TL, łącząca ten punkt przecięcia T w nieskończoności z punktem przecięcia prętów  $G_{24}$  i  $D_{57}$ , będzie linią, idącą przez L równolegle do siły  $V_\gamma$ , którą zatem rozłożyć trzeba na dwie składowe, działające w liniach do niej równoległych:  $S_{45}$  i  $LL''$  (rys. 74). Szukane natężenie  $S_{45}$  otrzymuje się odrazu, jako odcinek WU, na linii  $V_\gamma$  (rys. 74), odkładając siłę  $V_\gamma$  gdziekolwiek na linii  $S_{45}$  (np. jako odcinek MN) i łącząc punkty M i N z punktem L, bo wskutek podobieństwa trójkątów LWU i LNM:

$$\frac{MN}{UW} = \frac{a+b}{a}, \text{ albo: } \frac{MN-UW}{UW} = \frac{a+b-a}{a}, \text{ czyli: } \frac{MN-UW}{UW} = \frac{b}{a},$$

z kąd wnosimy, że odcinki UW i  $(MN-UW)$ , rozpatrywane jako siły, działające w liniach  $S_{45}$  i  $LL''$ , są składowymi siły  $MN=V_\gamma$ , skoro są odwrotnie proporcjonalne do odległości  $a$  i  $b$ , — a to zgodnie ze str. 22-a.

Zauważmy tutaj, że natężenie w krzyżulcu (K) będzie = 0, jeżeli siła poprzeczna  $V_\alpha$  (rys. 76), utrzymująca równowagę z siłami G, K i D, przechodzi przez punkt przecięcia G i D, t. j. przez L, — na mocy punktu 2 str. 25.

## § 2. Sposób wielobokowy Cremony.

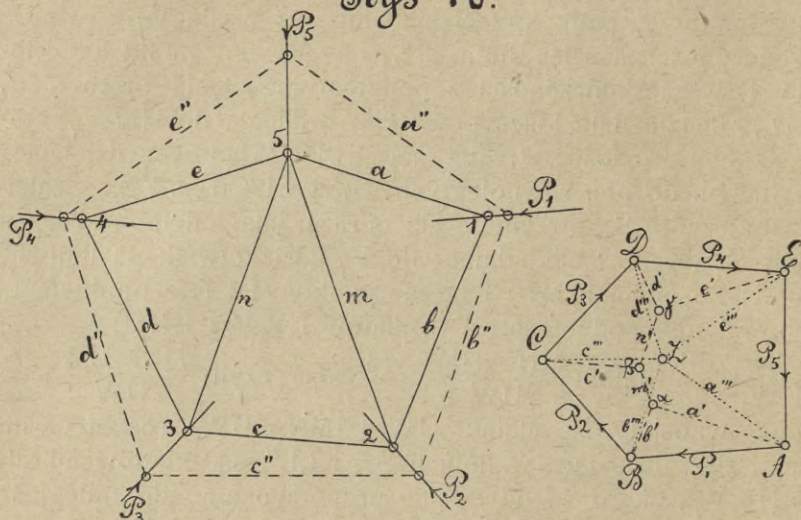
Jeżeli obliczać mamy natężenia we wszystkich prętach belki kratowej, to najdogodniejszym jest sposób wielobokowy Cremony. Polega on na wykreśleniu t. z. planu sił i oparty jest na wspomnianej już wyżej zasadzie, że dla belki kratowej, znajdującej się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych, muszą te siły zewnętrzne być pomiędzy sobą w równowadze, a prócz tego w każdym węźle belki siły wewnętrzne, wywołane w prętach, muszą utrzymywać równowagę z siłami zewnętrznymi, działającymi w tymże węźle, tworzą więc z niemi zamknięty wielobok sił.

Przypuśćmy, że na belkę kratową (rys. 78), w kształcie pięcioboku  $abcde$ , działają siły zewnętrzne  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ,



$P_5$  w węzłach 1, 2, 3, 4, 5. (Zauważmy, że ilość prętów  $n=7$ , a ilość węzłów  $m=5$ , więc:  $n=2m-3$ , a zatem belka jest statycznie wyznaczalna). Siły zewnętrzne muszą być pomiędzy sobą w równowadze, więc wielobok sił ABCDE i sznurowy:  $a''b''c''d''e''$ , wykreślone na rysunku, są zamknięte.

Rys 78.



Ponieważ w każdym węzle ma być utrzymana równowaga sił zewnętrznych z siłami wewnętrznymi, zaczawszy więc np. od węzła 1, w którym schodzi się siła zewnętrzna  $P_1$  z dwiema nieznanymi siłami wewnętrznymi w prętach  $a$  i  $b$ , rozłożmy siłę  $P_1$  na wieloboku sił w tych dwóch kierunkach, t. j. przeprowadzmy przez końcowe punkty siły  $P_1$  (A i B) w wieloboku sił równoległe do prętów  $a$  i  $b$ , a otrzymamy odcinki  $a'$  i  $b'$ , wyrażające szukane siły wewnętrzne w prętach  $a$  i  $b$ . (Zaznaczmy, że przeprowadzając przez A równoległą do  $a$  i przez B równoległą do  $b$  — nie zaś odwrotnie: przez A równoległą do  $b$ , a przez B równoległą do  $a$  — zastosowaliśmy tem samem zasadę, wyłożoną niżej, na str. 134, punkt 3). Przechodząc do węzła 2, w którym siła zewnętrzna  $P_2$  spotyka się ze znaną już siłą wewnętrzną w pręcie  $b$  i z nieznanymi siłami w prętach  $c$  i  $m$ , widzimy, że na wieloboku sił do siły  $P_2$  jest już dołączona siła  $b'$ , więc przez końcowe punkty tych dwóch sił, t. j. przez C i  $a$ , prowadzimy linie, równoległe do  $c$  i  $m$  i otrzymujemy odcinki



$c'$  i  $m'$ , wyrażające natężenia w prętach  $c$  i  $m$ . (Zaznaczmy, że przeprowadzając przez punkt przecięcia  $a'$  i  $b'$ , czyli przez  $\alpha$ , równoległą do  $m$ , a przez  $C$  równoległą do  $c$ —nie zaś odwrotnie przez  $\alpha$  równoległą do  $c$  i przez  $C$  równoległą do  $m$ —zastosowaliśmy przez to zasadę, wyłożoną niżej, na str. 134, punkt 4). Idąc dalej do węzła 3, w którym znowu mamy—oprócz znanych sił:  $P_3$  i natężenia w pręcie  $c$ —dwie nieznanne siły w prętach  $d$  i  $n$ , przeprowadzamy linie do nich równoległe przez końcowe punkty złączonych na wieloboku sił  $P_3$  i  $c'$ , czyli przez punkt  $\beta$  linię równoległą do  $n$  (a nie do  $d$ ) i przez punkt  $D$  linię równoległą do  $d$ —i otrzymujemy odcinki  $n'$  i  $d'$  jako natężenia w prętach  $n$  i  $d$ . Idąc wreszcie do węzła 4, spotykamy tam jedną tylko nieznaną siłę w pręcie 45, która musi utrzymywać równowagę z siłami:  $P_4$  i natężeniem pręta  $d$ ; łącząc więc końcowe punkty sił  $P_4$  i  $d'$ , czyli  $E$  i  $\gamma$ , otrzymujemy odcinek  $e'$ , wyrażający natężenie w pręcie  $e$  i jest to zarazem próbą dokładności rysunku, że odcinek ten powinien być równoległym do pręta  $e$ . Natężenia w prętach  $m$  i  $n$  otrzymaliśmy różne od zera, więc pręty te są konieczne przy danym kształcie belki. Jeżeli jednak nadamy belce kształt wieloboku sznurowego  $a''b''c''d''e''$ , to wszystkie natężenia wyrażą się, zgodnie ze str. 18, przez promienie wieloboku sił  $a''', b''', c''', d''', e'''$ , linia łamana  $m'n'$  zniknie zupełnie (punkty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  upadną na  $Z$ ), a zatem natężenia  $m$  i  $n$  będą  $=0$ , więc pręty te ( $m''$  i  $n''$ ) będą całkiem zbyteczne, bo i bez nich zachowaną będzie równowaga, co zresztą jest znaną własnością (str. 13) wieloboku sznurowego.

Zauważmy jeszcze, że we wszystkich prętach belki, przy wskazanym kierunku sił zewnętrznych otrzymamy siły wewnętrzne prętów **ściskające**, bo rozważając oddziaływania na jakikolwiek pręt, np.  $b$ , dwóch sił zewnętrznych  $P_1$  i  $P_2$ , widzimy z wieloboku sił, że  $P_1$  daje w kierunku  $b$  składową  $\alpha B$ , a siła  $P_2$  daje w tymże kierunku  $b$  składową  $B_\alpha$ , więc siły te, działające w tym samym pręcie  $b$  i idące **ku sobie**, wywołują (str. 15) **ściskanie** pręta  $b$ .

Przy wykreślaniu planów sił jeszcze racjonalniejszą okazuje się charakterystyka natężeń oparta na zasadzie, że skoro w danym węźle, np. w węźle 2, siły, na ten węzeł działające (czyli w wieloboku sił:  $P_2$ ,  $c'$ ,  $m'$ ,  $b'$ ), muszą być w równowadze, więc w obec lotu siły  $P_2$ , idącego od  $B$  ku  $C$ , lot siły  $c'$  będzie  $C_\beta$ , lot siły  $m'$ — $\beta\alpha$ , lot siły  $b'$ — $\alpha B$ , a loty te,



przeniesione na węzeł 2, jako skierowane ku węzłowi, charakteryzują ściskanie.

W wykreślonym powyżej planie sił, wobec równowagi, panującej w każdym węźle, każdemu węzłowi, a więc i każdej sile zewnętrznej odpowiada zamknięty wielobok z wywołanych przez nią nateżeń w prętach (np. sile  $P_3$  odpowiada wielobok  $D\gamma\beta C$ ) i w ten sposób siły zewnętrzne utrzymują istotnie równowagę z nateżeniami w prętach. Widoczne jest teraz, że jak siły zewnętrzne, tak samo i nateżenia we wnętrzu utrzymują pomiędzy sobą równowagę, bo każdy odcinek, wyrażający w wieloboku sił nateżenie jakiegokolwiek pręta, wchodzi tam dwa razy i z odwrotnym lotem. (Tak np. odcinek  $a'$ , wyrażający nateżenie w pręcie  $a$ , jako część składowa wieloboku siły  $P_1$ , czyli trójkąta  $B_aA$ , ma lot  $aA$ , ale jako część składowa wieloboku siły  $P_5$ , czyli  $A_{\alpha\beta\gamma}E$ , ma lot  $A\alpha$ ).

Wobec powyższego możemy w następujący sposób zestawić zasady, na których się opiera wykreślanie planu sił — i cechy charakterystyczne tegoż:

1. Siły zewnętrzne, działające na belkę kratową, utrzymują pomiędzy sobą równowagę, tworzą zatem wielobok sił i sznurowy zamknięte.

2. Siły zewnętrzne, działające na belkę kratową, utrzymują równowagę z siłami wewnętrznymi (nateżeniami) w prętach.

Z dwóch powyższych punktów wynika bezpośrednio, że siły wewnętrzne utrzymują równowagę pomiędzy sobą, o czem zresztą wiemy już z powyższego.

3. Wykreślanie planu sił rozpoczynamy od takiego węzła (np. od węzła 1), w którym oprócz siły zewnętrznej ( $P_1$ ) spotykamy tylko 2 pręty ( $a$  i  $b$ ) z nieznanymi nateżeniami i rozkładamy siłę zewnętrzną ( $P_1$ ) w kierunku tych 2 prętów, prowadząc przytem przez punkt przecięcia dwóch sąsiednich sił zewnętrznych ( $P_1$  i  $P_5$ , czyli przez punkt  $A$ ) w wieloboku sił równoległą ( $a'$ ) do pręta ( $a$ ), łączącego te dwie siły ( $P_1$  i  $P_5$ ) w belce.

4. Przechodząc do takiego sąsiedniego węzła (2), w którym spotykamy znowu tylko 2 pręty ( $m$  i  $c$ ) z nieznanymi nateżeniami, przeprowadzamy przez punkt przecięcia dwóch tylko co otrzymanych nateżeń ( $a'$  i  $b'$ , czyli przez punkt  $\alpha$ ) równoległą (do  $m$ , t. j.) do tego z 2-ch szukanych nateżeń ( $m$  i  $c$ ), które z tamtymi dwoma ( $a$  i  $b$ ) tworzy trójkąt (125) w belce kratowej.



Przy ścisłem zastosowaniu powyższych 2-ch zasad każdym **trzem** prętom (np.  $n$ ,  $d$ ,  $e$ ), tworzącym w belce **trójkąt**, odpowiadają w planie sił **trzy** odcinki ( $n'$ ,  $d'$ ,  $e'$ ), przechodzące przez **jeden** punkt ( $\gamma$ ), a przytem **każde** natężenie wchodzi w planie sił **tylko raz jeden** i takie jedynie plany sił nazywami planami Cremony.

5. Boki planu sił są równoległe do prętów belki kratowej.

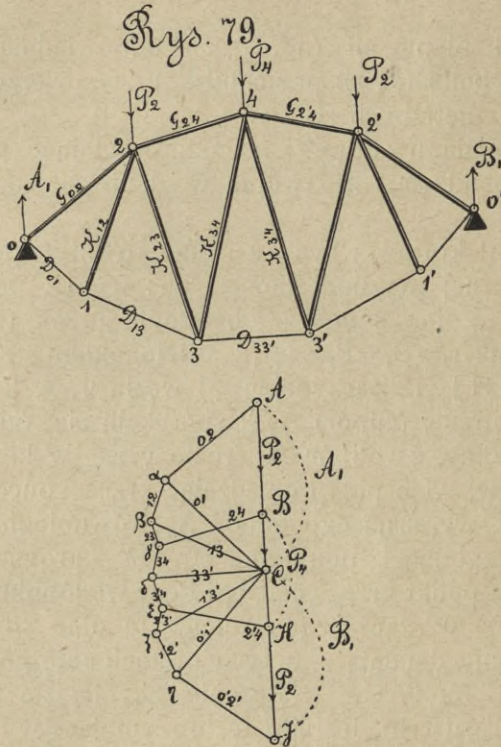
6. Boki planu sił (np.  $b'$ ,  $c'$ ), odpowiadające prętom **zewnątrznym** belki ( $b$ ,  $c$ ), przechodzą przez wierzchołki wieloboku sił zewnętrznych (B i C).

7. Boki planu sił ( $m'$  i  $n'$ ), odpowiadające prętom **wewnętrznym** belki ( $m$  i  $n$ ), tworzą w planie sił ciągłą łamaną linię ( $\alpha\beta\gamma$ ).

Dla belki kratowej rys. 79 mamy również spełniony warunek statycznej wyznaczalności, bo:  $n = 15$ ,  $m = 9$ , więc  $n = 2m - 3$ . Wobec symetrii obciążenia przez trzy siły  $P_2$ ,  $P_4$ ,  $P_2$ , odpór  $A_1 = B_1 = P_2 + \frac{1}{2}P_4$ . Wielobokiem sił będzie linia prosta CABHJC. Zaczynając od węzła 0, w którym działa siła zewnętrzna (odpór)  $A_1$  i spotykają się tylko 2 pręty 02 i 01, widzimy, że odpór  $A_1$  rozłoży się w kierunku tych dwóch prętów, więc przeprowadzając przez końcowe punkty odcinka CA, wyrażającego odpór  $A_1$ , równoległe do 02 i 01 (przyczem — zgodnie z punktem 3 str. 134 — prowadzimy przez A, jako przez punkt przecięcia  $A_1$  i  $P_2$  w wieloboku sił, równoległą do pręta 02, łączącego w belce te obie siły zewnętrzne), otrzymamy działające w tych prętach natężenia  $G_{02}$  i  $D_{01}$ , jako odcinki  $A_\alpha$  i  $\alpha C$ . (Natężenie  $G_{02}$  będzie **ściskającym**, a  $D_{01}$  — **wyciągającym**, bo siły te, utrzymujące w równowadze siłę  $A_1$ , skierowaną w górę, muszą mieć loty  $A_\alpha$  i  $\alpha C$ , a lot  $A_\alpha$ , przeniesiony na węzeł 0 i skierowany **ku** niemu, charakteryzuje **ściskanie**, lot zaś  $\alpha C$  — skierowany **od** węzła 0 — **wyciąganie**). Przechodząc następnie (**nie** do węzła 2, gdzie schodzą się oprócz znanych sił  $P_2$  i  $G_{02}$  jeszcze **trzy** nieznanne — w prętach 21, 23 i 24, lecz) do węzła 1, gdzie oprócz tylko co wyznaczonej siły  $D_{01}$  spotykamy **dwie** tylko nieznanne siły w prętach 13 i 12, przeprowadzamy przez końcowy punkt  $\alpha$  (odcinka  $C_\alpha$ ) równoległą do 12 (zgodnie z punktem 4 str. 134, bo  $\alpha$  jest punktem przecięcia  $G_{02}$  i  $D_{01}$ , tworzących z szukaną siłą  $K_{12}$  trójkąt w belce kratowej), a przez początkowy punkt C równoległą do 13 i otrzymujemy natężenia  $K_{12}$  i  $D_{13}$ , wy-



rażone przez odcinki  $\alpha\beta$  i  $\beta C$ . A ponieważ w trójkącie sił  $\alpha\beta C$  siła  $D_{01}$ , jako wyciągająca, ma — przy rozważaniu węzła 1 — lot od węzła, czyli  $C\alpha$ , więc  $K_{12}$  musi mieć lot  $\alpha\beta$ , czyli ku węzłowi 1, jest zatem siłą ściskającą, a  $D_{13}$  musi mieć lot  $\beta C$ , czyli od węzła 1, jest zatem siłą wyciągającą. Przechodząc dalej do węzła 2, mamy tam działające trzy znane siły:



$P_2$ ,  $G_{02}$ ,  $K_{12}$  i dwie szukane  $K_{23}$  i  $G_{24}$ ; przeprowadzając więc przez końcowy punkt siły  $K_{12}$ , czyli  $\beta$ , (znowu zgodnie z punktem 4 str. 134) równoległą do 23, (a nie do 24), a przez końcowy punkt  $P_2$  (czyli B) — równoległą do 24, otrzymujemy  $G_{24} = B\gamma$  i  $K_{23} = \gamma\beta$ . I znowu ze względu na to, że  $P_2$  skierowana jest na dół, siły  $G_{24}$  i  $K_{23}$  muszą mieć loty:  $B\gamma$  i  $\gamma\beta$ , co, w zastosowaniu do węzła 2, charakteryzuje ściskanie w tych obu prętach. Idąc dalej do węzła 3 ze znanymi siłami  $D_{13}$  i  $K_{23}$ , otrzymujemy podobnie odcinki  $\gamma\delta$  i  $\delta C$  jako natężenia:  $K_{34}$  (ściskanie) i  $D_{33'}$  (wyciąganie). Dalej iść nie potrzebujemy, bo wskutek symetrii obciążenia i belki otrzymujemy



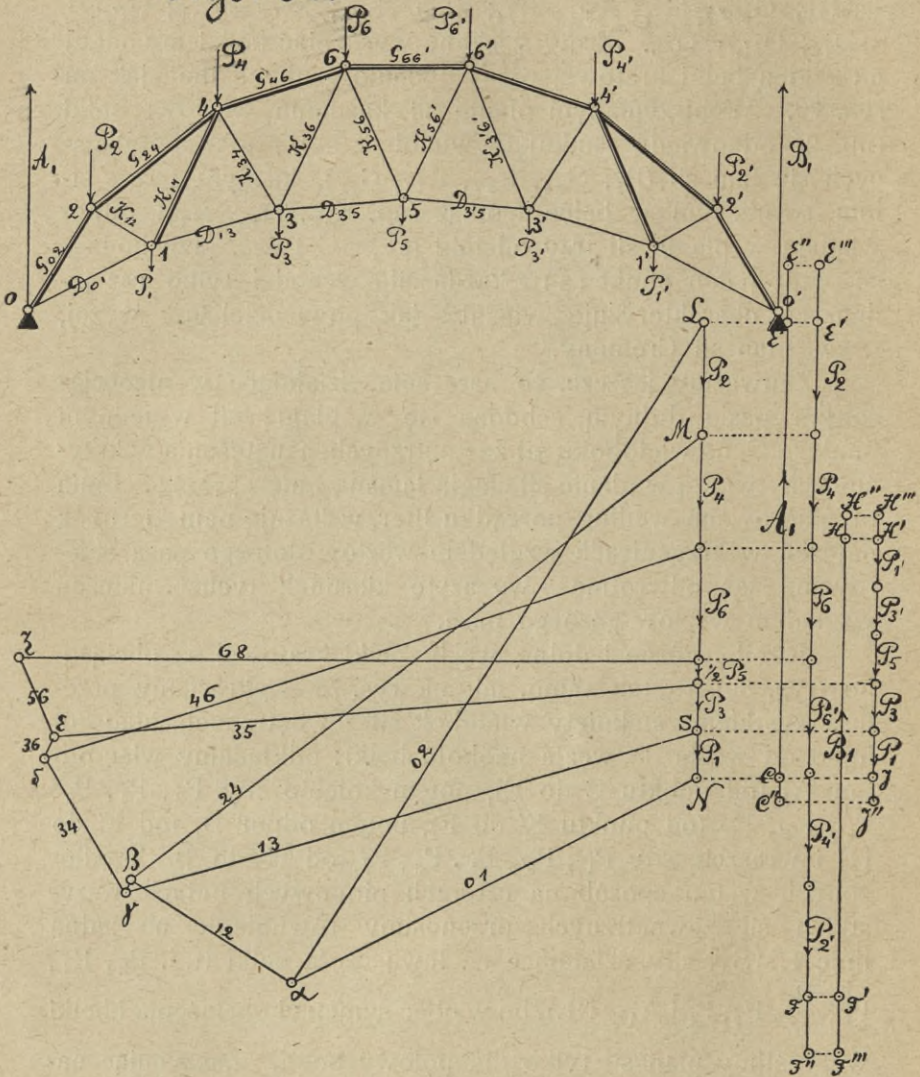
z prawej strony oczywiście te same siły wewnętrzne:  $G_{2'4} = G_{24}$ ;  $G_{0'2'} = G_{02}$ ;  $K_{3'4} = K_{34}$ ;  $K_{2'3'} = K_{23}$ ;  $K_{1'2'} = K_{12}$ ;  $D_{1'3'} = D_{13}$ ;  $D_{0'1'} = D_{01}$ . Pręty ściskane wyróżniać będziemy odąd na szkicu belki kratowej przez dodanie grubych linii, jak na rys. 79. W otrzymanym planie sił każdemu węzłowi belki (np. 2) odpowiada zamknięty wielobok  $AB\gamma\beta\alpha A$  spotykających się tam sił ( $P_2, G_{24}, K_{23}, K_{12}, G_{02}$ ), każdym trzem siłom, tworzącym w belce trójkąt (np.  $K_{12}, D_{13}, K_{23}$ ), odpowiadają w planie siły trzy odcinki ( $\beta\alpha, \beta C$  i  $\beta\gamma$ ), przechodzące przez jeden punkt ( $\beta$ ) i każda siła wchodzi tylko raz jeden, co charakteryzuje właśnie, jak powiedzieliśmy wyżej, t. zw. plan sił Cremony.

Zauważmy jeszcze, że natężenia, działające w **nieobciążonym** pasie dolnym, schodzą się w planie sił w jednym punkcie C, na wieloboku sił zewnętrznych, a natężenia w krzyżulcach tworzą w planie sił ciągłą łamaną linię  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$ . Linia ta, skierowana według porządku liter, wskazuje nam kierunek natężeń w krzyżulcach względem węzłów **dolnego** pasa, skierowana zaś odwrotnie — wskazuje kierunek tychże natężeń względem węzłów **górnego** pasa.

Jeżeli i górne i dolne węzły belki kratowej są obciążone (rys. 80), to tak samo, jak na rys. 78, wykreślamy przedewszystkiem zamknięty wielobok sił zewnętrznych, idąc kolejno od węzła do węzła naokoło belki: odkładamy więc odpór  $A_1$  (od punktu C do E), potem kolejno siły  $P_2, P_4, P_6, P_6', P_4', P_2'$  (od punktu E' do F), potem odpór  $B_1$  (od F' do H) i wreszcie siły  $P_1', P_3', P_5, P_3, P_1$  (od H' do J). Z odłożonych w ten sposób na czterech pionowych liniach wszystkich sił zewnętrznych przenosimy równolegle na jedną linię LMSN siły, działające na lewą część belki (t. j.  $P_2, P_4, P_6, \frac{P_5}{2}, P_3, P_1$  i  $A_1 = NL$ ), bo w obec symetrii obciążenia i belki wykreślimy plan sił tylko dla połowy belki. Zaczynając następnie od węzła 0, w którym działają siły  $A_1, G_{02}$  i  $D_{01}$  i uwzględniając punkt 3 str. 134, przeprowadzamy przez L (punkt przecięcia sił zewnętrznych  $A_1$  i  $P_2$ ) równoległą do pręta 02 (łączycego w belce te dwie siły zewnętrzne), a przez punkt N równoległą do pręta 01 i otrzymujemy  $G_{02} = \alpha L$  i  $D_{01} = \alpha N$ . (Lot  $L\alpha$  natężenia  $G_{02}$ , otrzymany w obec skierowania w górę siły  $A_1$  i idący **ku** węzłowi 0, wykazuje **ściskanie**, lot zaś  $\alpha N$  — idący **od** węzła 0 — **wyciąganie**). Prze-



Rys. 80.



chodząc do węzła 2 (w którym oprócz znanego już natężenia  $G_{02}$  działa jeszcze siła  $P_2$  i dwa nieznanne natężenia  $K_{12}$  i  $G_{24}$ ) i uwzględniając punkt 4 str. 134, przeprowadzamy przez  $\alpha$  (punkt przecięcia tylko co otrzymanych natężeń  $L_\alpha$  i  $\alpha N$  w prętach 02 i 01) równoległą do pręta 12 (tworzącego w belce trójkąt z 02 i 01), a przez M (końcowy punkt siły  $P_2$ ) — równoległą do pręta 24 i otrzymujemy:  $K_{12} = \beta \alpha$  (wyciąganie)



i  $G_{24} = M_{\beta}$  (ściskanie). Idąc następnie do węzła 1, przeprowadzamy przez  $\beta$  (punkt przecięcia natężeń  $\alpha\beta$  i  $M_{\beta}$  w prętach 12 i 24) równoległą do pręta 14, tworzącego w belce trójkąt z 12 i 24, a przez S (początkowy punkt siły  $P_1$ )—równoległą do pręta 13 i otrzymamy:  $K_{14} = \beta\gamma$  (ściskanie) i  $D_{13} = \gamma S$  (wyciąganie). Idąc dalej kolejno do węzłów 4, 3, 6, wyznaczymy podobnie pozostałe natężenia. Ściszanym będzie tylko cały pas górny, krzyżulec 14 i symetryczny z nim 1'4'.

Gdybyśmy przyjęli, że na podpory działają połowy sił, obciążających węzły środkowe, t. j. że np. na każdą podporę działa siła  $\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ , to odłożylibyśmy  $\frac{1}{2}P_1$  od punktów C, H, H' i J do punktów C'', H'', H''', J'' a także  $-\frac{1}{2}P_2$  od punktów E, E', F, F' do E'', E''', F'', F''' i oczywiście nie wywarłyby te siły żadnego wpływu na wykreślony wyżej plan sił, bo otrzymalibyśmy wtedy wprawdzie zwiększony odpór  $= C''E''$ , ale byłby to **odpór całkowity** (str. 125), a **odpór czynny**, wchodzący w planie sił, zostałby ten sam, co poprzednio:  $A_1 = NL$ .

Zauważmy jeszcze, że moglibyśmy również wykreślić oddzielny plan sił dla obciążonych tylko **górných** węzłów (jak to miało miejsce dla rys. 79), a oddzielny—dla obciążonych tylko **dołnych**—i zsumować algebraicznie otrzymane natężenia. Podobny sposób zastosujemy poniżej, na str. 150—154, dla belek kratowych na rysunkach 89, 90, 91, 92, 93, 94.

### § 3. Zastosowanie sposobu Cremony do różnych typów belek kratowych.

Zacznijmy od typów najprostszych:

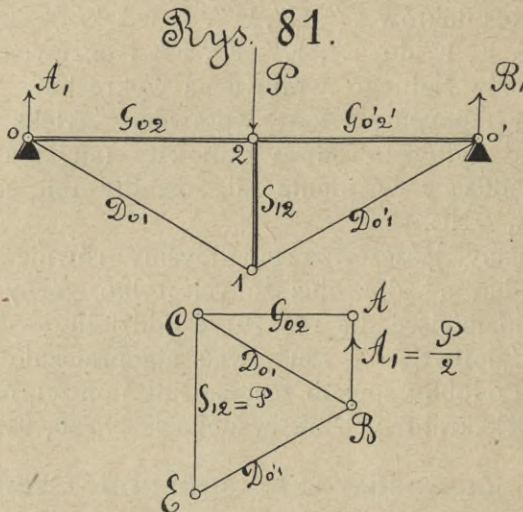
**1. Belka wzmocniona** (rys. 81), obciążona pojedynczą siłą P. Odpór  $A_1 = B_1 = \frac{P}{2}$ .

W węźle 0 działa siła  $A_1$  oraz nieznanne siły  $G_{02}$  i  $D_{01}$ ; odłożywszy więc siłę  $A_1$  od B do A, prowadzimy (stosując tutaj punkt 3 str. 134) przez A równoległą do pręta 02, a przez B równoległą do 01 i otrzymamy szukane siły:  $G_{02} = AC$  i  $D_{01} = CB$ . Przeszedłszy do węzła 1, w którym spotykamy siły  $D_{01}$ ,  $D_{0'1}$  i  $S_{12}$ , przeprowadzamy (stosując tutaj punkt 4 str. 134) przez końcowe punkty  $D_{01}$  (czyli przez C i B) równoległe do  $S_{12}$  i  $D_{0'1}$ , przecinające się w punkcie E i dające:  $S_{12} = CE$  i  $D_{0'1} = EB$ . W obec symetrii belki i obciąż-



żenia będzie:  $D_{01} = D_{0'1}$  i  $S_{12} = 2 A_1 = P$ , a oczywiście także:  $G_{0'2} = G_{02}$ .

Ponieważ z sił, działających w węźle 0, odpór  $A_1$  skierowany jest w górę, więc utrzymujące z nim równowagę  $G_{02}$  i  $D_{01}$  iść będą: siła  $G_{02}$  od A ku C, czyli ku węzłowi 0—jest zatem ściskającą; siła zaś  $D_{01}$ —od C ku B, czyli od węzła 0—jest zatem wyciągającą; dla węzła zaś 1—siła  $D_{01}$ , jako wyciągająca, idzie od węzła, czyli od B ku C, więc  $S_{12}$  musi iść od C ku E, czyli ku węzłowi 1—jest zatem siłą ściskającą; siła zaś  $D_{0'1}$ —od E do B, czyli od węzła 1, jest zatem siłą wyciągającą.



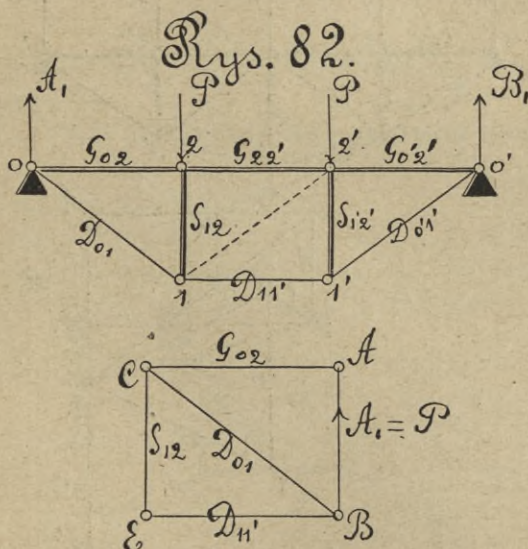
Jeżeli obciążenie belki jest jednostajne, to wywołuje w pasie górnym oprócz natężenia ściskającego, jeszcze wyginanie, które uwzględnić należy przy obliczaniu wytrzymałości belki.

2. Przedstawiona na rys. 82 belka podwójnie wzmocniona jest według str. 127 belką chwiejną, ze zbyt małą ilością prętów, bo  $n=8$ ,  $m=6$ , więc:  $n < 2m - 3$ . Ażeby więc była zachowana równowaga, musi być spełniony warunek, odpowiadający zbyticznemu równaniu, otrzymanemu w obec:  $2m - 3 - n = 1$ . W danym wypadku jednak—przy belce symetrycznej i symetrycznie obciążonej—można wyznaczyć działające w prętach natężenia. (Uzupełniając belkę prętem 12', otrzymalibyśmy w nim natężenie  $= 0$ , więc okazuje



się on całkiem zbytecznym, jest natomiast niezbędny przy **niesymetrycznym** obciążeniu, lub belce). Odpór  $A_1 = B_1 = P$ .

Zaczynając od węzła 0, przeprowadzamy przez końcowe punkty odłożonego odporu BA (uwzględniając punkt 3 str. 134) równoległe do  $G_{02}$  i  $D_{01}$  i oczywiście  $G_{02} = AC$  i  $D_{01} = CB$ . Przechodząc do węzła 1, otrzymamy na mocy znanego już natężenia  $D_{01}$  utrzymujące z niem równowagę natężenia:  $S_{12} = CE = AB = A_1 = P$  i  $D_{11'} = EB = G_{02}$ . (Prowadząc przez C równoległą do 12, a przez B równoległą do 11', uczyniliśmy zadość punktowi 4 str. 134). Wreszcie w węzle 2 — w obec tożsamości kierunków sił  $G_{02}$  i P z kierunkami sił  $G_{22'}$  i  $S_{12}$  — musi być:  $G_{22'} = G_{02} = G_{0'2'} = D_{11'}$ . Natężenia  $D_{01}$ ,  $D_{11'}$  i  $D_{0'1'}$  będą wyciągające, wszystkie inne — ściskające.



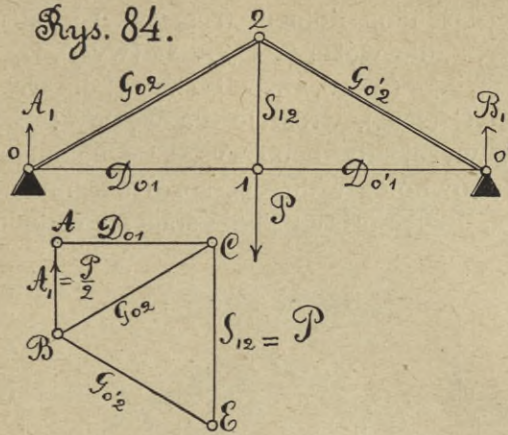
**3.** Dla belki potrójnie wzmocnionej (rys. 83), obciążonej symetrycznie siłami P, otrzymamy podobnie: Odpór  $A_1 = B_1 = P + \frac{P}{2}$ . Wielobokiem sił będzie linia CABEFC.

Zaczynając od węzła 0, otrzymujemy (stosując jak zawsze punkt 3 str. 134):  $G_{02} = A\alpha$  i  $D_{01} = \alpha C$ . Idziemy dalej nie do węzła 1, gdzie spotkalibyśmy 3 natężenia nieznanne, lecz do węzła 2 i (uwzględniając punkt 4 str. 134) otrzymamy:  $S_{12} = \beta\alpha = P$  i  $G_{24} = B\beta = G_{02}$ , co zresztą jest oczywiste w obec tożsamości kierunków sił  $G_{02}$  i P z kierunkami sił  $G_{24}$  i  $S_{12}$ .





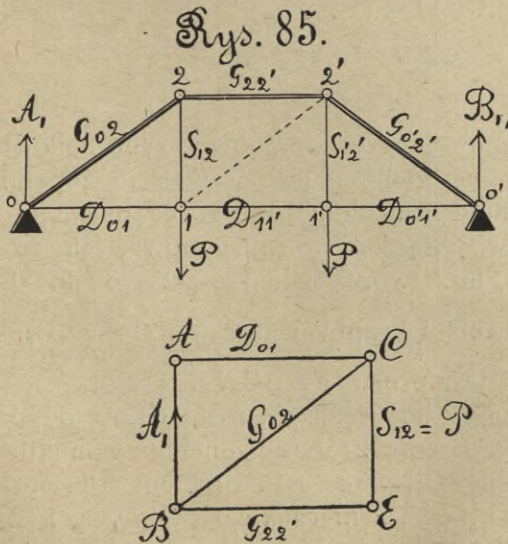




W pasie górnym otrzymujemy **ściskanie**, w pozostałych prętach — **wyciąganie**.

5. Dla belki **podwójnie wzmocnionej** (rys. 85), do której zastosować należy uwagę, dotyczącą belki rys. 82 na str. 140, otrzymamy:  $A_1 = B_1 = P$ .

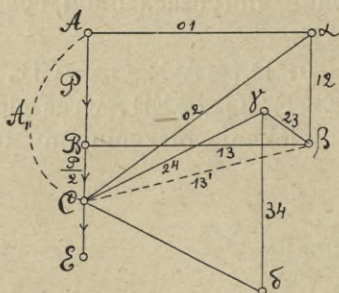
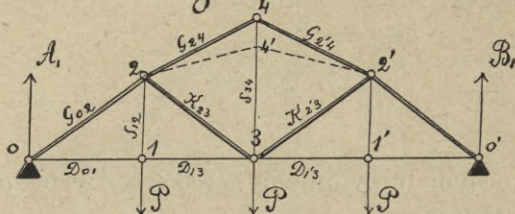
Zaczynając od węzła 0:  $D_{01} = AC$ ;  $G_{02} = CB$ , a przechodząc do węzła 2:  $S_{12} = CE = P$ ;  $G_{22'} = EB$ , wreszcie dla węzła 1 musi być:  $D_{11'} = D_{01}$ . Ściskanie otrzymujemy tylko w pasie górnym.





6. Podobnie otrzymamy dla belki **potrójnie wzmo-  
cnionej** z obciążeniem dolnym (rys. 86), rozpatrując kolejno  
węzły: 0, 1, 2, 3, dla węzła 0:  $D_{01} = A\alpha$  (wyc.),  $G_{02} = \alpha C$  (ścis.);  
dla węzła 1:  $S_{12} = \beta\alpha$  (wyc.),  $D_{13} = B\beta$  (wyc.); dla węzła 2:  $K_{23} = \beta\gamma$   
(ścis.) i  $G_{24} = \gamma C$  (ścis.), wreszcie dla węzła 4:  $S_{34} = \gamma\delta$  (wyc.).  
I tutaj — jak wyżej dla belki rys. 83 — nadając prętowi 24  
kierunek 24', równoległy do  $C\beta$ , sprowadzamy natężenia  $K_{23}$   
i  $K_{2'3}$  do zera, a więc pręty 23 i 2'3 stają się całkiem zbyteczne.

Rys. 86.



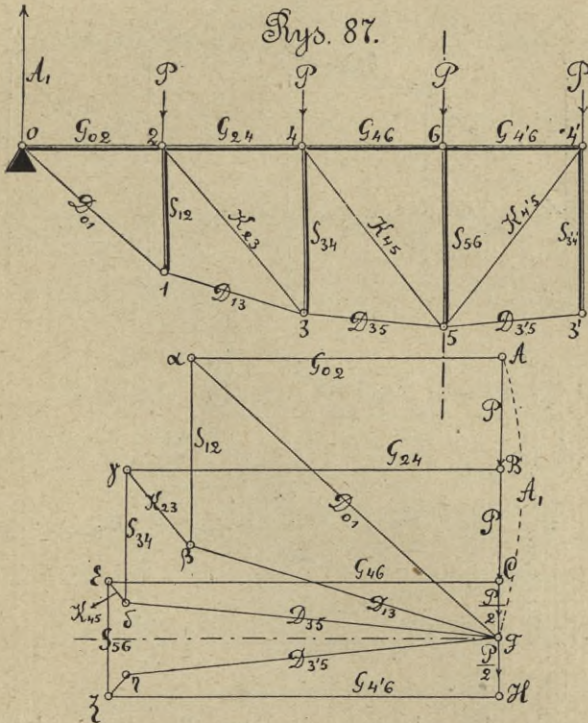
Zauważmy jeszcze, że w powyższych belkach kratowych  
wyznaczenie natężeń nie jest oczywiście zupełnie dokładne,  
bo prostolinijne pasy dolne, lub górne nie stanowią oddziel-  
nych prętów, połączonych przegubowo, jak to przyjęliśmy  
w założeniu, lecz tworzą jednolite sztywne belki.

7. Dla belki kratowej na rys. 87:  $A_1 = B_1 = \frac{5P}{2}$ . Wie-  
lobokiem sił jest prosta FABCH...

Zaczynając od węzła 0, rozkładamy odpór  $A_1$  w kie-  
runkach  $G_{02}$  i  $D_{01}$  (z uwzględnieniem punktu 3 str. 134)  
i otrzymujemy  $G_{02} = A\alpha$ , z kierunkiem ku węzłowi, a więc  
ściskanie i  $D_{01} = \alpha F$ , z kierunkiem od węzła, a więc wyciąga-



nie. Przechodząc nie do węzła 2, gdzie spotkalibyśmy 3 nieznane natężenia  $S_{12}$ ,  $K_{23}$ ,  $G_{24}$ , lecz do węzła 1 i rozkładając tam natężenie wyciągające  $D_{01}$  (a więc idące od węzła, czyli wyrażone przez odcinek  $F_\alpha$ ) w kierunkach  $S_{12}$  i  $D_{13}$  (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134), przeprowadzamy przez  $\alpha$  równoległą do  $S_{12}$ , a przez  $F$  równoległą do  $D_{13}$  i otrzymujemy:  $S_{12} = \alpha\beta$  i  $D_{13} = \beta F$ . Idąc dalej do węzła 2, otrzymamy:  $G_{24} = B\gamma$  i  $K_{23} = \gamma\beta$ ; następnie w węźle 3:  $S_{34} = \gamma\delta$  i  $D_{35} = \delta F$ ; w węźle 4:  $G_{46} = C\varepsilon$  i  $K_{45} = \varepsilon\delta$ , a wreszcie w węźle 6, w obec tożsamości kierunków  $G_{46}$  i  $G_{4'6}$ :  $S_{56} = \zeta\varepsilon = P$  i  $G_{4'6} = H\zeta = G_{46}$ .

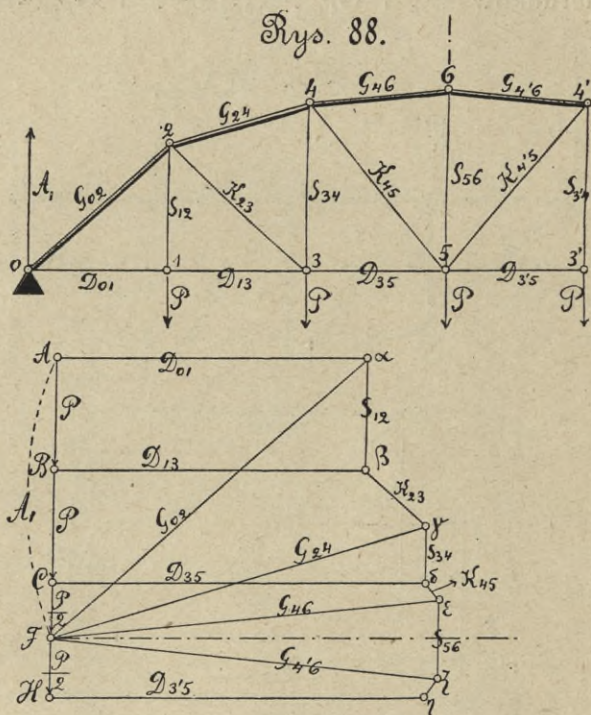


(Moglibyśmy oczywiście zakończyć również rozważaniem węzła 5 i doszlibyśmy za pomocą odcinków  $\eta F$  i  $\zeta\eta$ , równoległych do  $D_{3'5}$  i  $K_{4'5}$  i równych — wskutek symetrii belki i obciążenia —  $\delta F$  i  $\varepsilon\delta$ , do tej samej siły:  $S_{56} = \varepsilon\zeta = P$ ). Ściskanie otrzymujemy w pasie górnym i słupach.

8. Dla belki na rys. 88 będzie również:  $A_1 = B_1 = \frac{5P}{2}$  i zaczynając od węzła 0, otrzymamy (z uwzględnieniem punktu



3 str. 134):  $D_{01} = A\alpha$ ,  $G_{02} = \alpha F$ . Przechodząc zaś do węzła 1 (nie do węzła 2, gdzie mielibyśmy 3 nieznane natężenia), otrzymujemy, w obec znanych sił  $D_{01}$  i  $P$  (stosując punkt 4 str. 134):  $D_{13} = B\beta = D_{01}$  i  $S_{12} = \beta\alpha = P$  (co jest zresztą oczywiste w obec tożsamości kierunków  $D_{01}$  z  $D_{13}$  i  $P$  z  $S_{12}$ ). Dalej dla węzła 2 otrzymujemy:  $K_{23} = \beta\gamma$  i  $G_{24} = \gamma F$ ; dla węzła 3:  $D_{35} = C\delta$  i  $S_{34} = \delta\gamma$ ; dla węzła 4:  $K_{45} = \delta\varepsilon$  i  $G_{46} = \varepsilon F$ ; dla węzła 6:  $S_{56} = \varepsilon\zeta$ . Ściskanie otrzymujemy tylko w pasie górnym.



Na tych obu planach sił (rys. 87 i 88) widzimy ponownie, że przy ścisłym zastosowaniu zasad str. 134 otrzymujemy normalny plan Cremony, w którym każdemu węzłowi belki (np. 3 na rys. 88) odpowiada zamknięty wielobok (BC $\delta$  $\gamma$  $\beta$ B) spotykających się tam sił ( $P$ ,  $D_{35}$ ,  $S_{34}$ ,  $K_{23}$ ,  $D_{13}$ ); każdym trzem siłom, tworzącym w belce trójkąt (np.  $K_{23}$ ,  $G_{24}$ ,  $S_{34}$  na rys. 88) odpowiadają w planie sił trzy odcinki ( $\gamma\beta$ ,  $\gamma F$ ,  $\gamma\delta$ ) przechodzące przez jeden punkt ( $\gamma$ ); każde natężenie wchodzi w planie sił tylko raz jeden; natężenia, działa-



jące w **nieobciążonych** pasach (a więc  $D_{01}, D_{13}, D_{35} \dots$  na rys. 87 i  $G_{02}, G_{24}, G_{46} \dots$  na rys. 88), schodzą się w planie sił w jednym punkcie (F) na wieloboku sił zewnętrznych; natężenia, działające w krzyżulcach i słupach, tworzą ciągłą, łamaną linię  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$  i linia ta, skierowana w porządku liter, wskazuje kierunek natężeń w krzyżulcach i słupach względem węzłów pasa  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dolnego dla rys. 87} \\ \text{górnego „ „ 88} \end{array} \right\}$ , skierowana zaś odwrotnie wskazuje kierunek natężeń względem węzłów pasa  $\left\{ \begin{array}{l} \text{górnego dla rys. 87} \\ \text{dolnego „ „ 88} \end{array} \right\}$ .

Zauważmy tutaj, że przy niejakej wprawie w wykreślaniu planów sił niema potrzeby przechodzić myślą od węzła do węzła, lecz od razu, przeprowadziwszy np. na rys. 87 i 88 przez punkty A, B, C... równoległe do **obciążonych** — a przez punkt F równoległe do **nieobciążonych** pasów, przez otrzymany zaś punkt  $\alpha$  równoległą do słupów, czyli pionową  $\alpha\beta$ , otrzymujemy punkt  $\beta$ , a przeprowadziwszy przezeń równoległą do  $K_{23}$ , otrzymujemy  $\gamma$  i tak naprzemian, prowadząc równoległe do krzyżulców i słupów, otrzymujemy kolejno punkty  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$  i szukane natężenia.

## § 4. Plany sił dla belek kratowych równoległych.

### 1. Belki kratowe równoległe ze słupami.

Przypuśćmy, że całe obciążenie belek (rys. 89 i 90) jest rozłożone w pasach dolnych jednostajnie, to na każdy węzeł środkowy przypada obciążenie P, na każdy zaś węzeł krańcowy (podpory) przypadnie po  $\frac{P}{2}$ . Całkowity odpór:  $A_1 = B_1 = \frac{6P}{2} = 3P$ . Wielobokiem sił będzie prosta: HABCFJ...

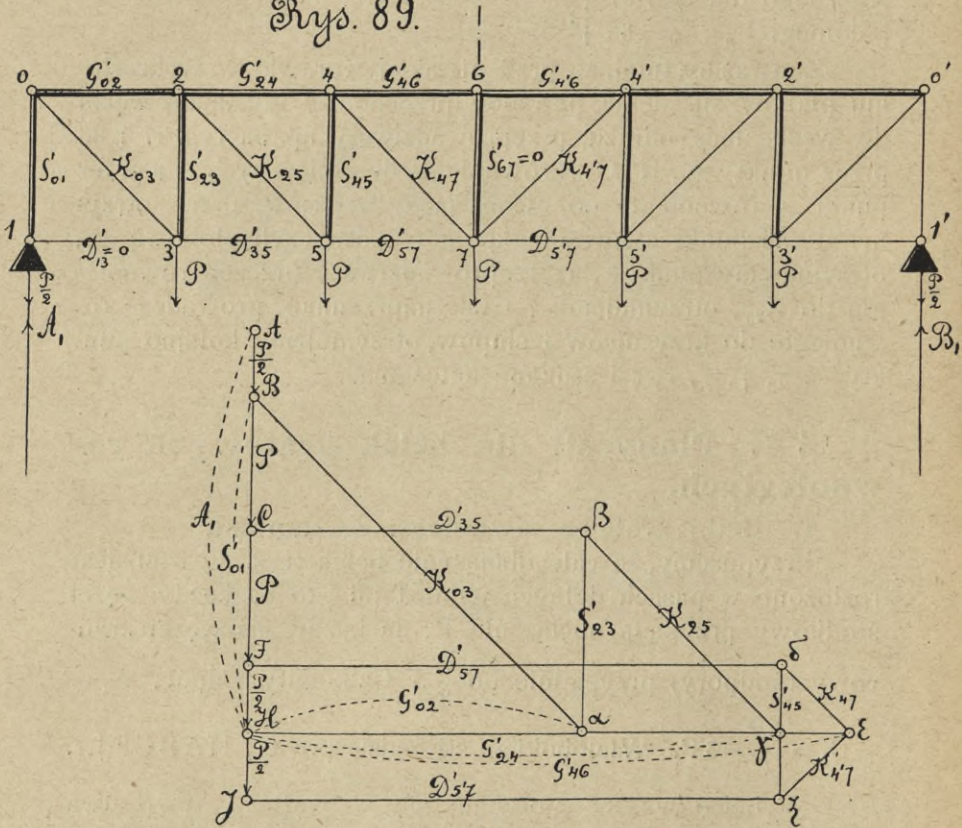
W belce rys. 89 spotykają się w węźle 1 tylko dwa prostopadłe do siebie pręty 01 i 13, a zatem odpór  $A_1$  przejdzie wprost przez słup podporowy na węzeł 0, zmniejszony jednak o działające bezpośrednio na węzeł 1 obciążenie  $\frac{P}{2}$ . Słup 01 będzie więc ściskany siłą:  $S_{01} = A_1 - \frac{P}{2} = 2\frac{1}{2}P$ , w pręcie zaś 13 natężenie będzie oczywiście  $= 0$ . W obec tego



możnaby bez naruszenia równowagi usunąć zupełnie pręty 13 i 01, przeniósłszy podporę do węzła 0, co okazuje się bardzo celowym przy urządzeniu na moście jazdy górnej.

Zaczynając wykreślanie planu sił od węzła 0, gdzie spotykamy dwa tylko nieznanne natężenia  $G'_{02}$  i  $K_{03}$ , rozkładamy działającą na ten węzeł siłę  $A_1 - \frac{P}{2}$ , wyrażoną przez odcinek HB w kierunku tych natężeń (z uwzględnieniem punktu 3

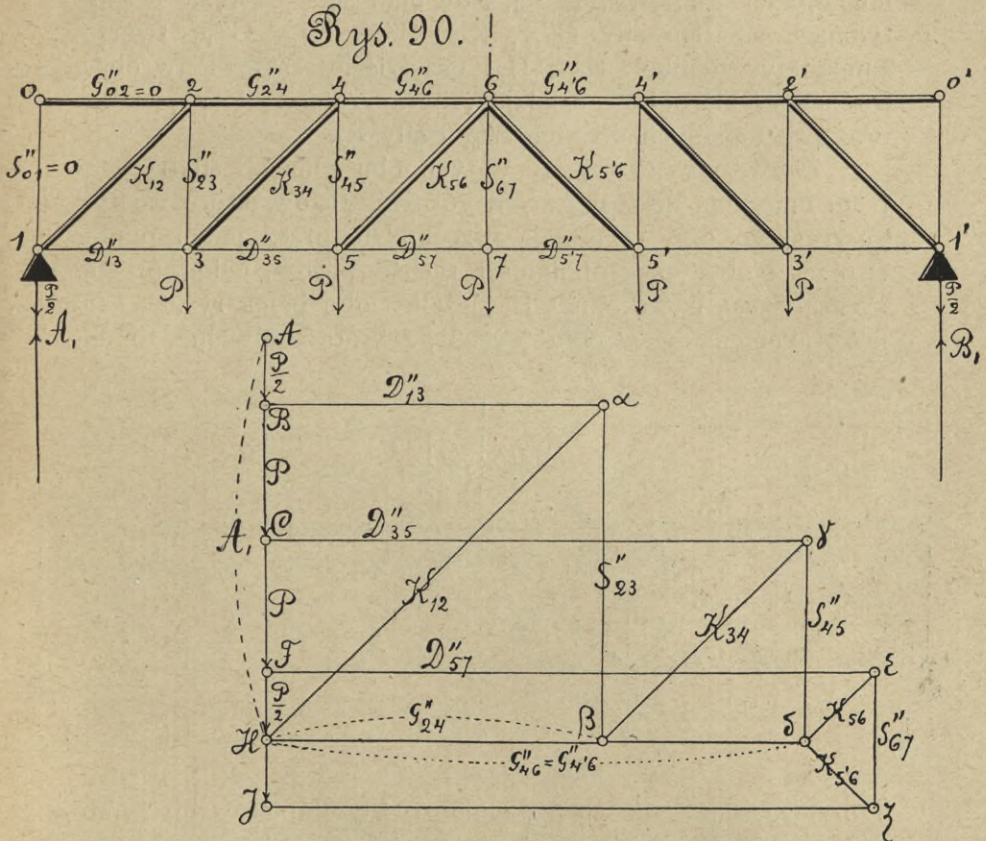
Rys. 89.



str. 134) i otrzymujemy:  $K_{03} = B\alpha$  i  $G'_{02} = aH$  (a w obec siły HB, skierowanej w górę, lot  $K_{03}$  będzie  $B\alpha$ , t. j. od węzła 0, charakteryzuje więc wyciąganie, lot zaś  $G'_{02}$  będzie  $aH$ , t. j. ku węzłowi 0, charakteryzuje więc ściskanie). Idąc dalej do węzła 3 (nie do węzła 2, gdzie są 3 siły nieznanne) rozkładamy działające nań: siłę zewnętrzną P, czyli BC i znaną nam



już siłę  $K_{03}$  w kierunkach 35 i 23 (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134) i otrzymamy w obec skierowania siły  $P$  na dół:  $D'_{35} = C\beta$  z lotem od węzła 3 (a więc wyciąganie) i  $S'_{23} = \beta\alpha$  z lotem ku węzłowi 3 (a więc ściskanie). Idąc dalej do węzła 2, otrzymujemy podobnie, rozkładając schodzące się tam dwie znane siły  $G'_{02}$  i  $S'_{23}$  (wyrażone teraz dla węzła 2, jako ściskające, a więc skierowane ku węzłowi) przez odcinki  $H\alpha$  i  $\alpha\beta$  (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134) w kierunkach



25 i 24 —  $K_{25} = \beta\gamma$  (wyciąganie) i  $G'_{24} = \gamma H$  (ściskanie). Idąc dalej do węzła 5, otrzymujemy:  $D'_{57} = F\delta$  (wyciąganie) i  $S'_{45} = \delta\gamma$  (ściskanie). Dalej dla węzła 4:  $K_{47} = \delta\varepsilon$  (wyciąganie) i  $G'_{46} = \varepsilon H$  (ściskanie). Przechodząc następnie do węzła 6, widzimy, że w obec tożsamości kierunków  $G'_{46}$  i  $G'_{4'6}$  natę-

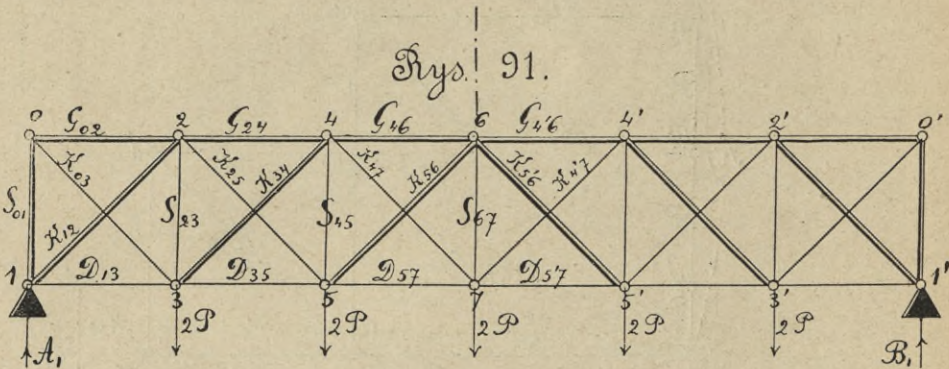


żenie  $S'_{67}$  musi być  $=0$ , więc pręt 67 mógłby być całkiem usunięty. (W ostatnim węźle 7 tworzą spotykające się tam siły  $P$ ,  $D'_{57}$ ,  $K_{47}$ ,  $K_{47}$ ,  $D'_{57}$  zamknięty wielobok  $FJ\zeta\delta F$ , przez co się sprawdza, że natężenie  $S'_{67}$  jest istotnie  $=0$ ).

W belce rys. 90 w słupie podporowym i pierwszym pręcie pasa górnego natężenia będą oczywiście  $=0$ , w obec czego oba te pręty mogą być usunięte, a są potrzebne tylko przy urządzeniu jazdy górnej. Zaczynając plan sił od węzła 1 i przechodząc dalej kolejno do węzłów 2, 3, 4, 5, 6, otrzymujemy tak samo, jak wyżej, cały plan sił. W węźle 6 spotykające się tam siły  $G''_{46}$ ,  $K_{56}$ ,  $S''_{67}$ ,  $K_{56}$ ,  $G''_{46}$  tworzą zamknięty wielobok  $H\delta\epsilon\zeta\delta H$  i oczywiście:  $S''_{67} = P$  (w obec tożsamości kierunków działających w węźle 7 sił  $D'_{57}$ ,  $D''_{57}$  oraz prostopadłych do nich  $S''_{67}$  i siły  $P$ ).

Zauważmy jeszcze, że w tych obu planach sił (rys. 89 i 90) natężenia nieobciążonych górnych pasów, które według powyższego (str. 137) mają przechodzić przez jeden punkt, tworzą, wobec prostoliniowości tychże pasów, jedną prostą, przechodzącą przez punkt H. Jeżeli z obu belek rys. 89 i 90 utworzymy jedną—według rys. 91, z kratą podwójną, to na-

Rys. 91.



rzuca się sam przez się zupełnie zresztą dopuszczalny wniosek, że o ile dla tej nowej belki przyjmiemy obciążenie z obu poprzednich razem (t. j. na każdy węzeł środkowy po  $2P$ , a na podporowe po  $P$ ), to dla otrzymania natężeń w każdym pręcie pasów i w każdym słupie trzeba sumować otrzymane powyżej natężenia, w krzyżulcach zaś pozostawić je bez zmiany. Przytem, ponieważ w belce rys. 89 otrzymaliśmy w słupach ściskanie, a w belce rys. 90—wyciąganie, więc trzeba



brać sumy algebraiczne (ściskanie przyjmować będziemy jako ujemne).

W obec powyższego natężenia ściskające w pasie górnym belki rys. 91 wynosić będą:

$$G_{02} = G'_{02} + G''_{02} = G'_{02} + o = G'_{02}$$

$$G_{24} = G'_{24} + G''_{24}$$

$$G_{46} = G'_{46} + G''_{46}.$$

W pasie dolnym natężenia wyciągające:

$$D_{13} = D'_{13} + D''_{13} = o + D''_{13} = D''_{13}$$

$$D_{35} = D'_{35} + D''_{35}$$

$$D_{57} = D'_{57} + D''_{57}.$$

W słupach:

$$S_{01} = -S'_{01} + S''_{01} = -2\frac{1}{2}P + o = -2\frac{1}{2}P$$

$$S_{23} = -S'_{23} + S''_{23} = -(P + \frac{P}{2}) + (2P + \frac{P}{2}) = +P$$

$$S_{45} = -S'_{45} + S''_{45} = -\frac{P}{2} + (P + \frac{P}{2}) = +P$$

$$S_{67} = -S'_{67} + S''_{67} = -o + P = +P.$$

W krzyżulcach działać będą wyznaczone wyżej natężenia wyciągające  $K_{03}$ ,  $K_{25}$ ,  $K_{47}$  i ściskające  $K_{12}$ ,  $K_{34}$ ,  $K_{56}$ .

**2. Weźmy jeszcze belkę kratową równoległą bez słupów** (rys. 92), obciążoną jednostajnie w pasie górnym: w każdym węźle środkowym siłą  $P$ , a w każdym podporowym siłą  $\frac{P}{2}$ . Odpór całkowity  $A_1 = B_1 = \frac{4P}{2} = 2P$  przejdzie

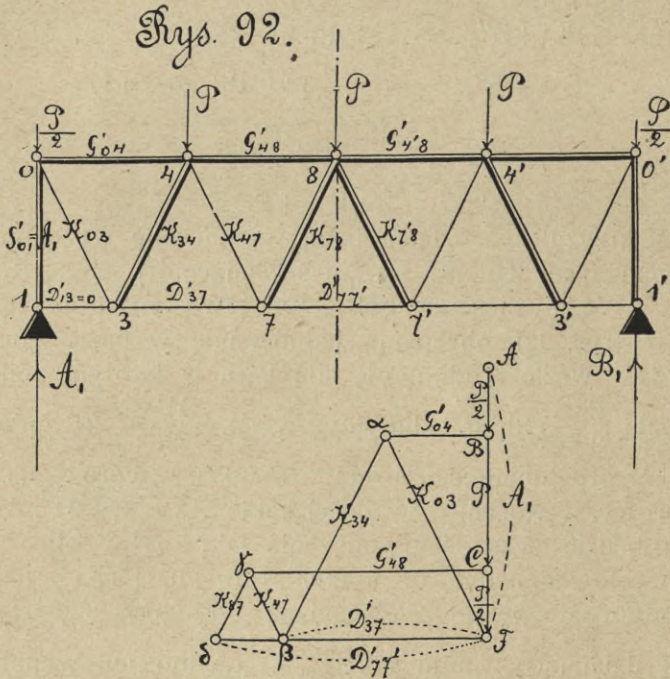
w obec prostopadłości pręta 13 do 01 wprost na słup podporowy, w którym wywoła ściskanie  $S'_{01} = A_1 = 2P$ . W pręcie 13 będzie oczywiście natężenie  $D'_{13} = o$ , w obec czego byłoby celowem usunięcie zupełnie prętów 01 i 13 i przeniesienie podpory do węzła 0. Zaczynając od tegoż węzła 0, widzimy, że działające w nim siły  $S'_{01}$  i  $\frac{P}{2}$ , albo ich wypadkowa

$A_1 - \frac{P}{2}$ , wyrażona przez odcinek FB, musi być utrzymana

w równowadze przez nieznanne siły w prętach 04 i 03, a więc przeprowadziwszy (z uwzględnieniem punktu 3 str. 134) przez końcowe punkty FB równoległe do 03 i 04, otrzymamy szukane natężenia:  $K_{03} = \alpha F$  i  $G'_{04} = B\alpha$ . (Lot  $\alpha F$  charakteryzuje względem węzła 0 wyciąganie, lot zaś  $B\alpha$  — ściskanie). Idąc dalej do węzła 3, w którym w obec  $D'_{13} = o$  wyznaczoną już siłą  $K_{03}$  muszą utrzymywać w równowadze natężenia w prę-



tach 34 i 37, otrzymamy te natężenia, przeprowadzając przez końcowe punkty odcinka  $F\alpha$  (wyrażającego wyciągające natężenie  $K_{03}$  względem węzła 3), czyli przez  $F$  i  $\alpha$  (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134) równoległe do 37 i 34, t. j.  $D'_{37} = \beta F$  i  $K_{34} = \alpha\beta$  (odcinek  $\beta F$  charakteryzuje względem węzła 3 wyciąganie, odcinek zaś  $\alpha\beta$  — ściskanie). W węźle 4 trzy siły znane  $G'_{04}$ ,  $K_{34}$  i  $P$  pozwolą nam wyznaczyć dwie szukane  $G'_{48}$  i  $K_{47}$ , jako odcinki  $C\gamma$  i  $\gamma\beta$  i wreszcie w węźle 7 otrzymamy pozostałe dwie nieznanne siły  $K_{78}$  i  $D_{77'}$ , jako (tworzące wielobok zamknięty z  $F\beta$  i  $\beta\gamma$ ) odcinki  $\gamma\delta$  i  $\delta F$ .



Zupełnie tak samo wykreślimy plan sił dla belki kratowej rys. 93, w której odpór  $A_1 = B_1 = 2P$  i oczywiście natężenie w słupie podporowym  $S'_{01} = 0$ , a więc i  $G'_{02} = 0$  (te oba pręty są zatem konstrukcyjnie zbyteczne). Zaczynając od węzła 1, gdzie siły  $A_1$ ,  $K_{12}$ ,  $D'_{15}$  muszą utrzymywać równowagę, otrzymujemy:  $K_{12} = A\alpha$  (ściskanie) i  $D'_{15} = \alpha C$  (wyciąganie). W węźle 2, w obec działającej tam siły  $P$  i określonej już  $K_{12}$ , wyrażonej dla węzła 2 jako odcinek  $\alpha A$ , otrzy-







wyżej, sumując natężenia w pasach i słupach, a zachowując bez zmiany natężenia w krzyżulcach. Otrzymamy zatem dla belki rys. 94:

Natężenia w pasie górnym (ściskanie):

$$G_{02} = G'_{04} + G'_{02} = G'_{04} + 0 = G'_{04}$$

$$G_{24} = G'_{04} + G'_{26}$$

$$G_{46} = G'_{48} + G'_{26}$$

$$G_{68} = G'_{48} + G'_{66'}$$

Natężenia w pasie dolnym (wyciąganie):

$$D_{13} = D'_{13} + D'_{15} = 0 + D'_{15} = D'_{15}$$

$$D_{35} = D'_{37} + D'_{15}$$

$$D_{57} = D'_{37} + D'_{59}$$

$$D_{79} = D'_{77'} + D'_{59}$$

Natężenie w słupie:

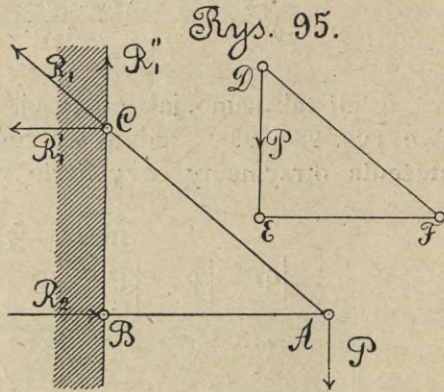
$$S_{01} = S'_{01} + S''_{01} = -A_1 + 0 = -2P.$$

W krzyżulcach działać będą wyznaczone wyżej natężenia ściskające  $K_{12}$ ,  $K_{34}$ ,  $K_{56}$ ,  $K_{78}$  i wyciągające  $K_{03}$ ,  $K_{25}$ ,  $K_{47}$ .

## § 5. Plany sił dla belek jednym końcem osadzonych.

### 1. Belka podwieszona w swobodnym końcu (rys. 95).

Jeżeli belka AB, obciążona siłą P, jest podtrzymana za pomocą pręta AC, to siła zewnętrzna P, odłożona jako odcinek DE, rozłoży się w kierunkach AB i AC na składowe, wyrażone w trójkącie sił DEF przez FE (siła ściskająca pręt AB) i DF (siła wyciągająca pręt CA). Dla utrzymania równowagi musi w punkcie C działać siła zewnętrzna  $R_1$ , równa i odwrotna sile wyciągającej pręta AC, w punkcie zaś B — siła zewnętrzna  $R_2$ , równa i odwrotna sile ściskającej pręta AB. Siły zewnętrzne  $R_1$ ,  $R_2$ , P są oczywiście w równowadze pomiędzy sobą.



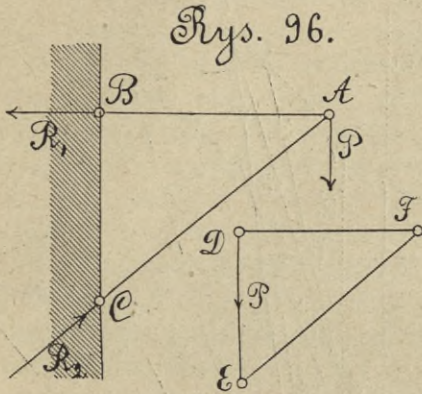
Umocowanie pręta AC w ścianie w kierunku poziomym ( $R'_1$  zamiast  $R_1$ ) wywołałoby ściskanie w kierunku CB, któ-



remu zatem przeciwdziałaćby musiała siła zewnętrzna  $R''_1$  (pionowa składowa siły  $R_1$ ), przyczem oczywiście  $R'_1 = -R_2$  i  $R''_1 = -P$ .

## 2. Belka podparta w swobodnym końcu (rys. 96).

Odwrotnie będzie dla wspornika BAC. Siła zewnętrzna  $P = DE$  rozłoży się w kierunkach AC i AB na składowe,



wyrażone w trójkącie sił DEF przez FE (siła ściskająca pręt AC) i DF (siła wyciągająca pręt BA). Dla utrzymania równowagi musi w punkcie C działać siła  $R_2$  (równa i odwrotna sile ściskającej pręta AC) w punkcie zaś B—siła zewnętrzna  $R_1$ , równa i odwrotna sile wyciągającej pręta BA). Siły zewnętrzne  $R_1$ ,  $R_2$  i  $P$  są oczywiście w równowadze.

Wsporniki kratowe będą rozpatrywane razem z więzarami dachowymi.

## 3. Żóraw.

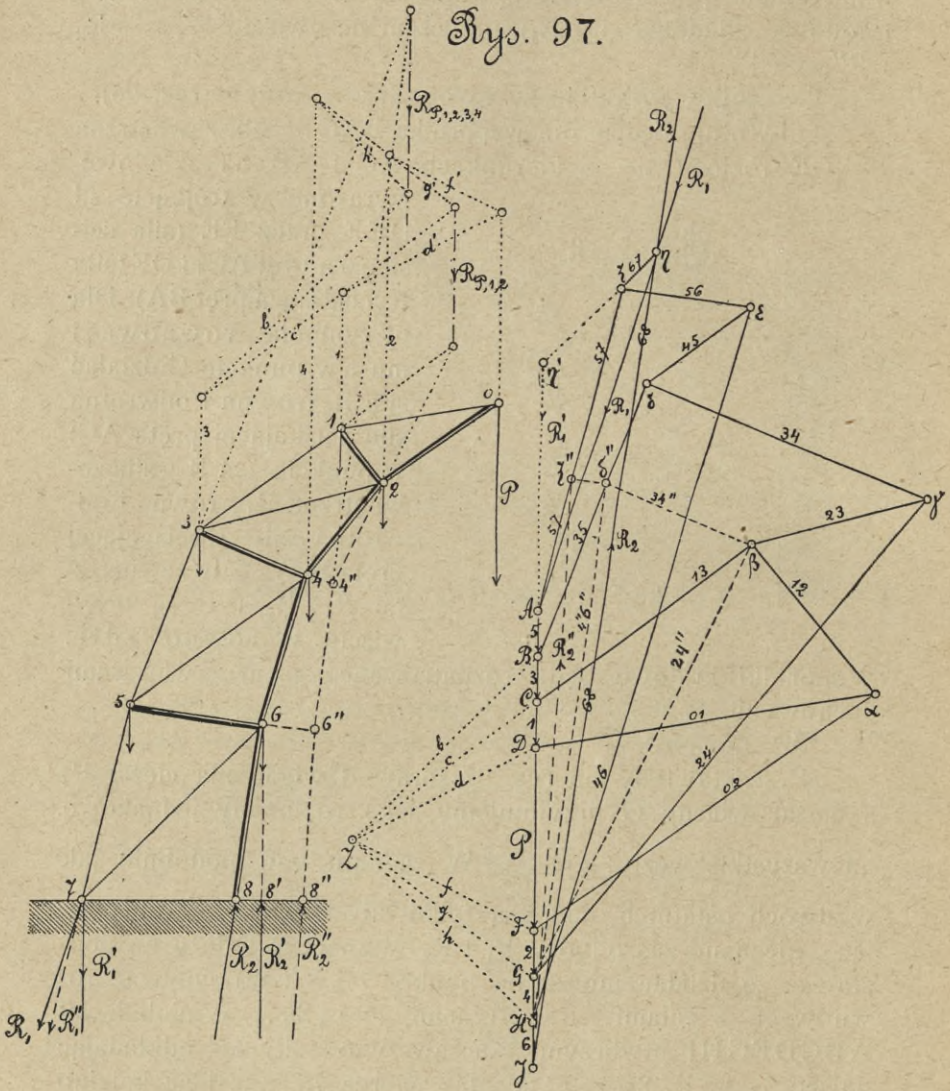
Przedstawiony na rys. 97 żóraw dźwigać ma ciężar  $P$ , a ciężar własny  $G$  przyjmujemy, jako rozłożony jednakowo na wszystkie węzły:  $g = \frac{G}{6}$ . W zadaniu tem, podobnie jak

w dwóch ostatnich, dane są tylko siły zewnętrzne obciążające, nieznane zaś odpory  $R_1$  i  $R_2$  wyznaczyć należy na podstawie, że działać muszą na punkty 7 i 8 i utrzymywać równowagę z siłami wewnętrznymi  $P$  i  $\Sigma g$ . Wielobok sił ABCDFGHJ utworzymy, zaczawszy od siły 5 i odkładając dalsze 3, 1,  $P$ , 2, 4, 6 tak, jak na rys. 78, t. j. idąc kolejno od węzła do węzła naokoło belki kratowej. (Nieznane odpory  $R_1$  i  $R_2$  będą musiały zamknąć ten wielobok.)

Zaczynając od węzła 0, widzimy, że siły w prętach 01 i 02, utrzymujące równowagę z siłą  $P$ , wyrażone będą (przy uwzględnieniu punktu 3 str. 134) w planie sił przez odcinki  $F_a$  (ściskanie) i  $aD$  (wyciąganie). Przechodząc do węzła 1, widzimy, że działająca w nim siła 1, wyrażona przez odcinek  $CD$ , utrzymywana jest w równowadze przez natężenia w prę-



Rys. 97.



tach 01, 12, 13, więc siły te utworzą (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134) wielobok zamknięty  $CD\alpha\beta C$ , w którym szukane nateżenia w prętach 12 i 13 wyrażone będą przez  $\alpha\beta$  (ściskanie) i  $\beta C$  (wyciąganie). Idąc dalej do węzła 2, w którym nateżenia prętów 02, 12, 23 i 24 muszą równoważyć siłę zewnętrzną, działającą w węzle 2, wyrażoną przez  $FG$ , otrzymamy podobnie nateżenie w 24 jako odcinek  $G\gamma$



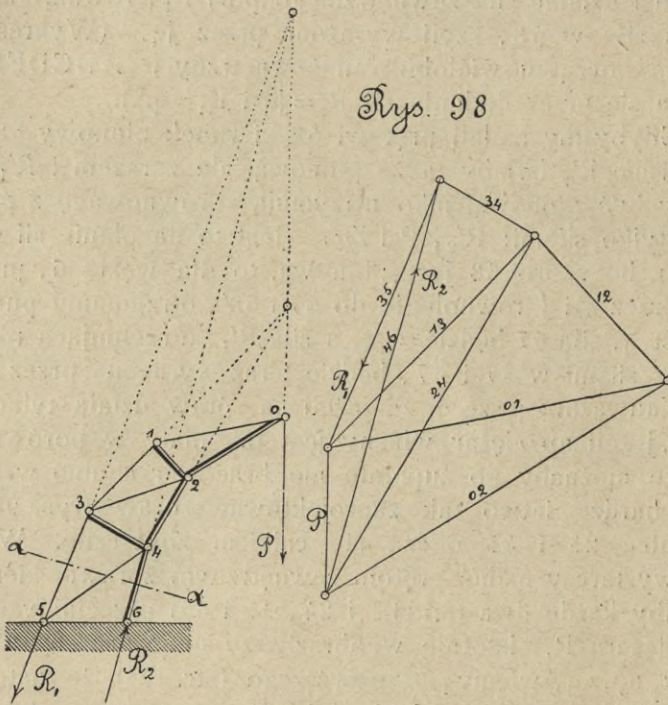
(ściskanie) i natężenie w 23 jako  $\gamma\beta$  (wyciąganie). Tak samo dalej, przechodząc kolejno do węzłów 3, 4, 5, 6, otrzymujemy natężenia: dla węzła 3, w 34 i 35 —  $\gamma\delta$  (ściskanie) i  $\delta B$  (wyciąganie); dla węzła 4: w 46 i 45 —  $H_2$  (ściskanie) i  $\varepsilon\delta$  (wyciąganie); dla węzła 5: w 57 i 56 —  $\zeta A$  (wyciąganie) i  $\varepsilon\zeta$  (ściskanie); dla węzła 6: w 68 i 67 —  $J_\eta$  (ściskanie) i  $\eta\zeta$  (wyciąganie). Przechodząc wreszcie do węzła 7, widzimy, że dla równowagi musi tam działać siła zewnętrzna (odpór)  $R_1$ , równa, ale odwrotna wypadkowej sił wyciągających w prętach 57 i 67, a więc wyrażona przez odcinek  $\eta A$ . W punkcie zaś 8, w obec jednej tylko (ściskającej) siły w pręcie 68, musi działać siła zewnętrzna (odpór)  $R_2$ , równa, ale odwrotna sile w 68, czyli wyrażona przez  $J_\eta$ . (Wykreślony więc na początku wielobok sił zewnętrznych ABCDFGHJ zamyka się przez dodanie sił  $R_2 = J_\eta$  i  $R_1 = \eta A$ ).

Gdybyśmy nadali prętowi 68 kierunek pionowy 68', to oczywiście  $R'_2$  byłaby także pionową, ale zarazem i  $R'_1$  musiałaby być pionową, jako utrzymująca równowagę z pionowymi tylko siłami:  $R'_2$ , P i  $\Sigma g$ . (Jest to na planie sił oczywiście, bo skoro 68 jest pionową, to dla węzła 6, prowadząc przez  $\zeta$  i J równoległe do 67 i 68', otrzymamy punkt  $\eta'$  zamiast  $\eta$ , siła 67 będzie  $=\eta'\zeta$ , a siła  $R'_1$ , utrzymująca równowagę z siłami w 57 i 67, będzie teraz wyrażona przez  $\eta' A$ ).

Zauważmy jeszcze, że jeżeli na żóraw działa tylko siła P (t. j. jeżeli np. ciężar własny jest tak mały w porównaniu z P, że możnaby go zupełnie nie brać w rachubę) w takim razie bardzo łatwo tak zaprojektować żóraw (rys. 98), że krzyżulce 23 i 45 okażą się całkiem zbyteczne. W tym celu wystarczy nadać prętom zewnętrznym żórawia kierunek taki, aby każde dwa (np. 13 i 24, 35 i 46) przecinały się na linii ciężaru P. Istotnie, wyobraziwszy sobie przecięcie przez żóraw np.  $aa$ , wiemy z powyższego (str. 125), że natężenia w przeciętych prętach 35, 45 i 46 muszą utrzymywać równowagę z siłą zewnętrzną P, która jest zatem równa, ale odwrotna ich wypadkowej. Skoro jednak siła P przechodzi przez punkt przecięcia **dwóch** składowych, działających w 35 i 46, to (według str. 25) **trzecia** jej składowa (idąca w kierunku 45, nie przechodzącym przez ów punkt przecięcia P, 35 i 46) musi być  $= 0$ . Gdybyśmy zaś uważali za konieczne uwzględnić i ciężar własny, jak na rys. 97, to dla otrzymania w danym krzyżulcu 23 natężenia  $= 0$  wystarczy np. nadać prętowi



24 kierunek  $G\beta$ , t. j.  $24''$ , bo wtedy siły  $24''$ , 12 i 02 dają razem z siłą 2 zamknięty wielobok  $G\beta\alpha FG$ , więc siła  $23 = 0$ . Punkt przecięcia nowego kierunku  $24''$  z 13 leży oczywiście na wypadkowej sił P, 1, 2, t. j. na  $R_{P,1,2}$ . Tak samo dla otrzymania w krzyżulcu  $4''5$  natężenia  $= 0$ , trzeba nadać prętowi  $4''6''$  kierunek  $H\delta''$  (punkt  $\delta''$  jest punktem przecięcia linii  $34''$ , równoległej do 34, przeprowadzonej przez  $\beta$ , z linią  $B\delta$ , równoległą do 35) i punkt przecięcia nowego kierunku  $4''6''$  z 35 leży oczywiście na wypadkowej sił P, 1, 2, 3, 4. (Istotnie, wyznaczwszy przez wykreślenie wieloboku sznuro-



wego  $b'c'd'f'g'h'$  z biegunem Z, wypadkową sił P, 1, 2 —  $R_{P,1,2}$  i wypadkową sił P, 1, 2, 3, 4 —  $R_{P,1,2,3,4}$ , widzimy, że 13 i  $24''$  przecinają się na  $R_{P,1,2}$ , a 35 i  $4''6''$  — na  $R_{P,1,2,3,4}$ . Wreszcie dla otrzymania również w krzyżulcu  $6''7$  natężenia  $= 0$  wystarczy nadać prętowi  $6''8''$  kierunek  $J\zeta''$ . Odpory  $R''_1$  i  $R''_2$  będą oczywiście  $= \zeta''A$  i  $J\zeta''$  i będą przedłużeniami 57 i  $6''8''$ .



## § 6. Plany sił dla wiązarów dachowych.

Wiązarem dachowym nazywamy parę krokwi, tworzących po odpowiednim połączeniu belkę kratową, przyjmującą na siebie oprócz ciężaru własnego całego ustroju dachowego jeszcze obciążenie śniegiem i wiatrem.

Ciężar własny całego dachu przyjmuje się najczęściej jako obciążenie pionowe, rozłożone jednostajnie na całej powierzchni rzutu poziomego (czyli planu) dachu i jest oczywiście zależny od rodzaju pokrycia dachu, od kąta nachylenia dachu do poziomu oraz od ustroju i rozstawienia wiązarów dachowych. Obciążenie śniegiem przyjmujemy zazwyczaj jako rozłożone jednostajnie na całej powierzchni dachu i wynoszące 75 kg na 1 m<sup>2</sup> planu. Parcie wiatru rozpatrzemy oddzielnie.

Oznaczając przez  $l$  rozpiętość teoretyczną wiązara dachowego, przez  $a$  — odstęp między wiązarami dachowymi i przez  $p$  — obciążenie jednostajne ciężarem własnym i śniegiem na 1 m<sup>2</sup> planu dachu, otrzymujemy obciążenie całkowite  $Q$ , przypadające na jeden wiązar dachowy:  $Q = p \cdot a \cdot l$ .

Jeżeli rozpiętość teoretyczna  $l$  dzieli się w punktach węzłowych na  $n$  równych pól, to na każde pole (a więc na każdy węzeł środkowy) przypada:  $P = \frac{p \cdot a \cdot l}{n}$ , a na skrajne półpola (a więc na każdy węzeł podporowy) po:  $P_0 = \frac{p \cdot a \cdot l}{2n}$ .

Rozpatrzmy kolejno najczęściej spotykane ustroje wiązarów dachowych:

### 1. Wiązar dachowy angielski (rys. 99).

Stosując powyższe oznaczenia, przyjmijmy jako dane:

$$l = 24,0 \text{ m};$$

$$a = 5,0 \text{ m};$$

$$n = 8;$$

$$p = 133 \text{ kg na m}^2 \text{ planu dachu};$$

$$Q = p \cdot a \cdot l = 133 \times 5 \times 24 = 16000 \text{ kg};$$

$$P = \frac{p \cdot a \cdot l}{n} = \frac{16000}{8} = 2000 \text{ kg}; \quad P_0 = \frac{1}{2} P = 1000 \text{ kg}.$$

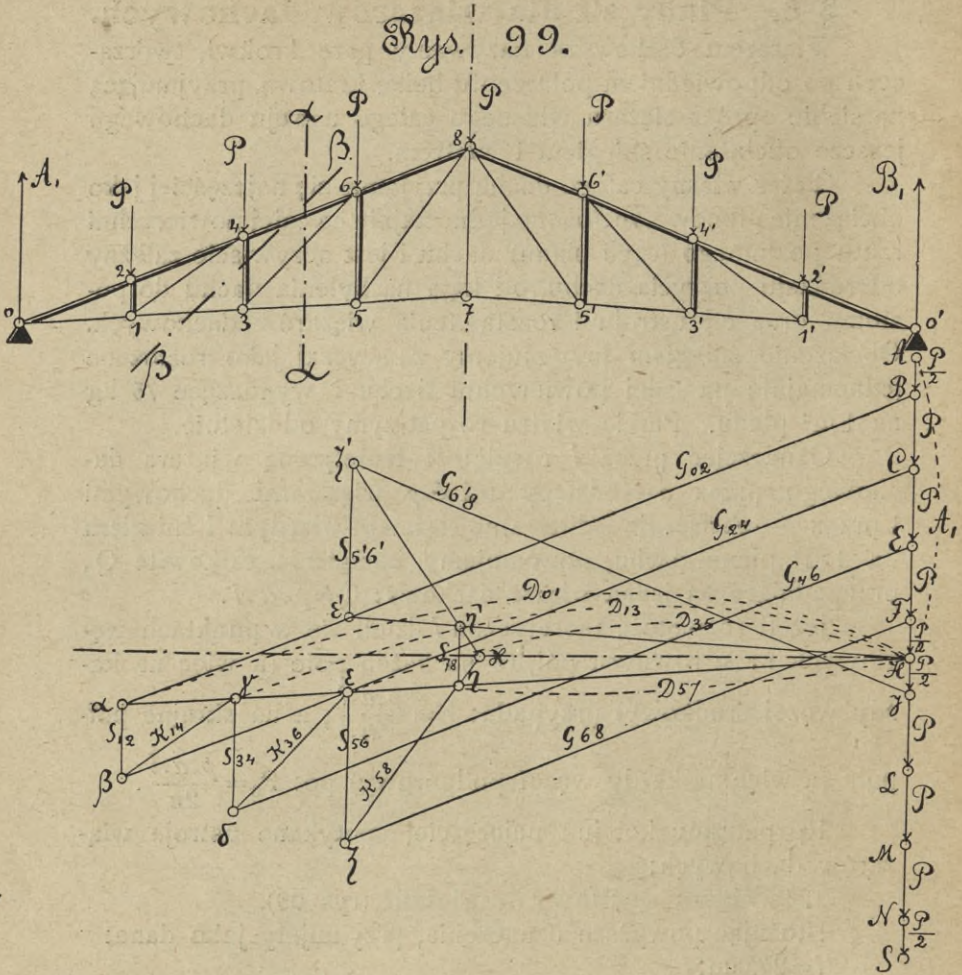
$$\text{Odpory: } A_1 = B_1 = \frac{1}{2} Q = 8000 \text{ kg}.$$

Wielobokiem sił będzie prosta HASH.

Plan sił wykreślimy zupełnie tak samo, jak dla belki kratowej rys. 79: Zaczynając od węzła 0, otrzymujemy dla działających tam sił:  $(A_1 - \frac{1}{2}P)$ ,  $G_{02}$  i  $D_{01}$  (z uwzględnieniem jak zawsze punktu 3 str. 134) trójkąt sił  $B_aH$ , z którego, ze



Rys. 99.



względę na skierowanie do góry siły ( $A_1 - \frac{1}{2}P$ ), wynika:  $G_{02} = B_\alpha$  (ściskanie) i  $D_{01} = \alpha H$  (wyciąganie). Idąc dalej do węzła 2, w którym działają siły  $G_{02}$ ,  $P$ ,  $G_{24}$  i  $S_{12}$ , przeprowadzamy przez punkt przecięcia  $G_{02}$  z  $D_{01}$ , czyli przez  $\alpha$  (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134) równoległą do 12, a przez końcowy punkt siły  $P$ , czyli przez  $C$ , równoległą do 24 i otrzymujemy:  $S_{12} = \beta\alpha$  (ściskanie) i  $G_{24} = C\beta$  (ściskanie), a więc  $S_{12} = P$  i  $G_{24} = G_{02}$  (co zresztą było z góry do przewidzenia w obec tożsamości kierunków sił  $G_{02}$  i  $P$  z kierunkami sił  $G_{24}$  i  $S_{12}$ ). Idąc dalej do węzła 1, otrzymujemy podobnie:  $K_{14} = \beta\gamma$  (wyciąganie) i  $D_{13} = \gamma H$  (wyciąganie). Dalej dla wę-



zła 4:  $S_{34} = \delta \gamma$  (ścis.);  $G_{46} = E \delta$  (ścis.). Dla węzła 3:  $K_{36} = \delta \varepsilon$  (wyc.);  $D_{35} = \varepsilon H$  (wyc.). Dla węzła 6:  $S_{56} = \zeta \varepsilon$  (ścis.);  $G_{68} = F \zeta$  (ścis.). Dla węzła 5:  $K_{58} = \zeta \eta$  (wyc.);  $D_{57} = \eta H$  (wyc.). Dla węzła 7:  $S_{78} = \eta \eta'$  (wyc.);  $D_{57} = \eta' H$  (wyc.). W obec symetrii obciążenia i belki otrzymane natężenie  $D_{57}$  jest oczywiście  $= D_{57}$  i tak samo można wyznaczyć natężenia  $K_{5'8}$  i  $G_{6'8}$  jako równe  $K_{58}$  i  $G_{68}$ , łącząc punkt  $\zeta'$ , symetryczny z punktem  $\zeta$  (względem linii poziomej przez H) z punktami  $\eta'$  i J. Próba dokładności wykreślonego planu sił będzie, że siły  $K_{58}$ ,  $G_{68}$ , P,  $G_{6'8}$ ,  $K_{5'8}$  i  $S_{78}$ , utrzymujące równowagę w węźle 8, tworzą zamknięty wielobok sił  $\eta \zeta F J \zeta' \eta' \eta$ . **Sciskanie** otrzymujemy w pasie górnym i słupach z wyjątkiem środkowego słupa 78.

W wykreślonym planie sił tak samo, jak w poprzednich (rys. 92 i 93), natężenia nieobciążonego prostoliniowego dolnego pasa tworzą jedną prostą  $H_a$ , natężenia zaś w krzyżulcach i słupach — jedną łamaną linię  $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta \eta$ .

Zauważmy tutaj, że natężenie w słupie środkowym ( $S_{78}$ ) możemy sprowadzić do zera, o ile zamiast linii łamanej 57 i 75' weźmiemy prostą poziomą 55', gdyż otrzymujemy wtedy przy rozpatrywaniu węzła 5 zamiast punktu  $\eta$  punkt  $\kappa$  na linii poziomej przez H, a zatem (w obec symetrii belki i obciążenia) odcinek  $\eta \eta'$ , wyrażający  $S_{78}$ , stanie się  $= 0$ .

**2. Dla więzara dachowego angielskiego z krzyżulcami skierowanymi na dół** względem środka więzara (rys. 100) otrzymujemy oczywiście w pierwszych dwóch prętach pasa dolnego 01 i 13 natężenia sobie równe, a natężenie w słupie 12:  $S_{12} = 0$ , więc ten pręt — na rysunku wykropkowany — jest zupełnie zbyteczny. Idąc kolejno do węzłów 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, wyznaczymy, jak wyżej, natężenia w poszczególnych prętach więzara. **Sciskanie** otrzymujemy w pasie górnym i krzyżulcach.

**3. Więzar dachowy belgijski** (rys. 101) różni się tem od angielskiego (rys. 99), że zamiast słupów ma krzyżulce, prostopadłe do pasa górnego.

Przyjmijmy jako dane:

$$l = 20,0 \text{ m};$$

$$a = 4,0 \text{ m};$$

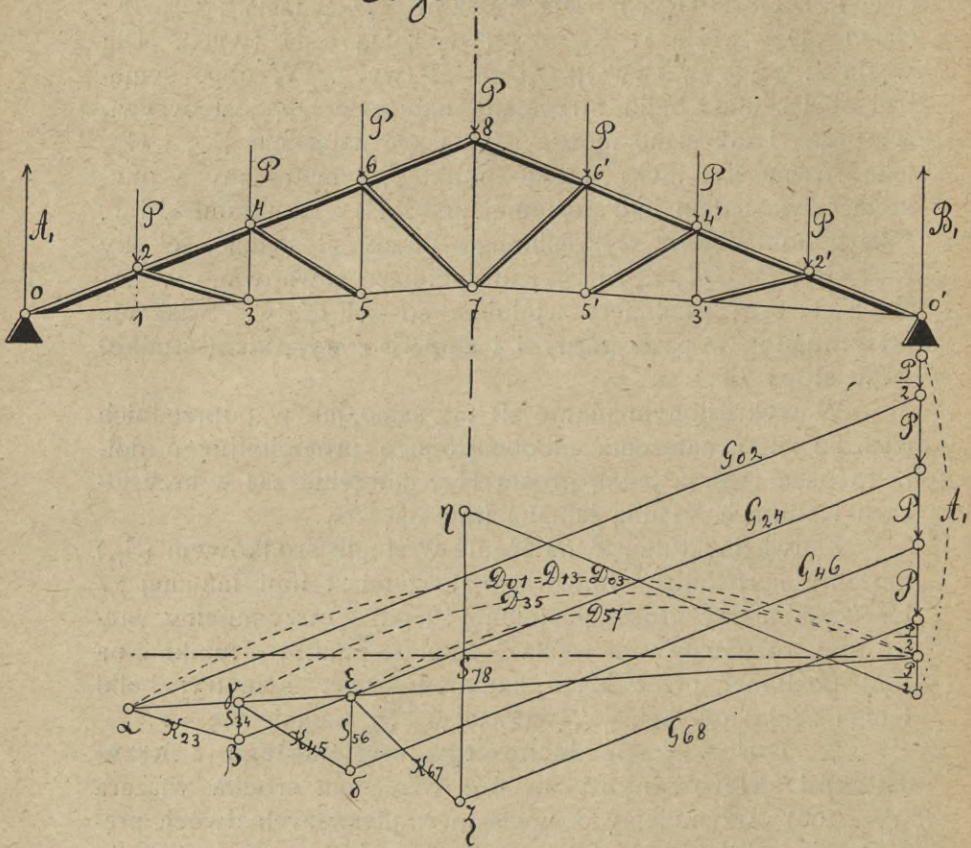
$$n = 8;$$

$$p = 160 \text{ kg na m}^2 \text{ planu dachu};$$

$$Q = p \cdot a \cdot l = 160 \times 4 \times 20 = 12800 \text{ kg};$$



Rys. 100.



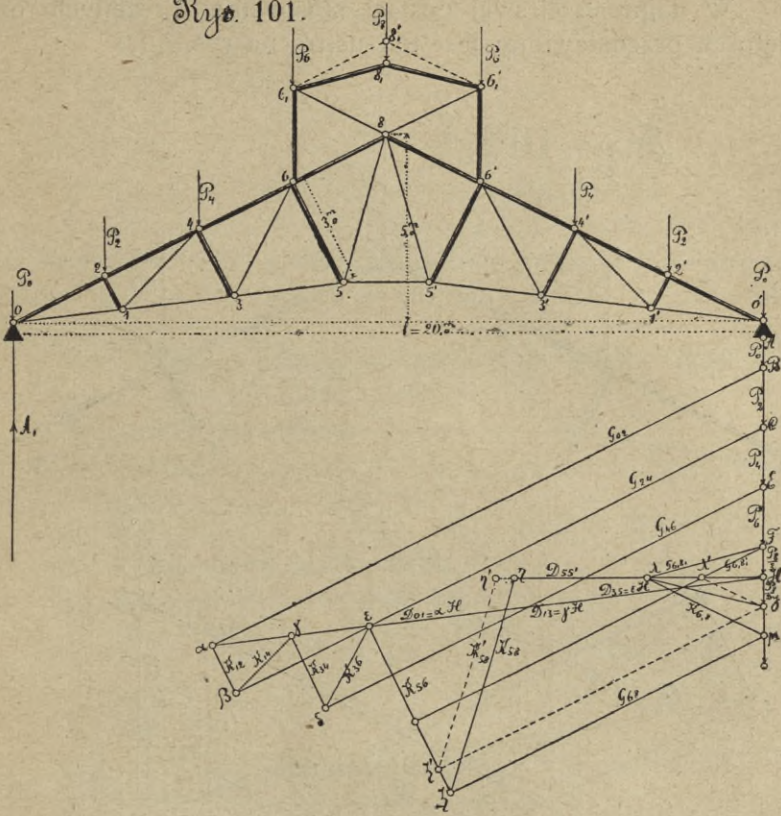
$$P = \frac{p \cdot a \cdot l}{n} = \frac{12800}{8} = 1600 \text{ kg}; P_0 = \frac{1}{2} P = 800 \text{ kg}.$$

$$\text{Odpory: } A_1 = B_1 = \frac{1}{2} Q = 6400 \text{ kg}.$$

Plan sił wykreślamy tak samo, jak dla rys. 99. W węźle 0 siła ( $A_1 - P_0$ ) rozłożona w kierunkach 02 i 01 daje:  $G_{02} = B_\alpha$  (ścis.);  $D_{01} = \alpha H$  (wyc.). Dla węzła 2:  $K_{12} = \beta \alpha$  (ścis.);  $G_{24} = C_\beta$  (ścis.). Dla węzła 1:  $K_{14} = \beta \gamma$  (wyc.);  $D_{13} = \gamma H$  (wyc.). Dla węzła 4:  $K_{34} = \delta \gamma$  (ścis.);  $G_{46} = E\delta$  (ścis.). Dla węzła 3:  $K_{36} = \delta \varepsilon$  (wyc.);  $D_{35} = \varepsilon H$  (wyc.). Dalej jednak, w węźle 6 — w obec tego, że rozpatrywany wiązdar dachowy (rys. 101) ma naddasze — spotkalibyśmy 3 nieznane siły, przechodzimy więc do węzła 8<sub>1</sub>, w którym natężenia  $G_{8,6_i}$  i  $G_{8,6'_i}$  utrzymują równowagę z siłą  $P_8$ , tworzą więc w planie sił zamknięty trójkąt  $F\lambda J$  i oczywiście:  $G_{6,8,1} = \lambda F$  (ściskanie), a  $G_{6',8,1} = J\lambda$  (ściskanie); przechodząc zaś do węzła 6<sub>1</sub>, mamy w nim (utrzy-



Rys. 101.



mające równowagę) siły  $P_6$ ,  $G_{6,8}$ ,  $K_{6,8}$  i  $S_{6,6}$ , tworzą więc one w planie sił zamknięty wielobok  $EF\lambda\mu E$ , z którego  $K_{6,8} = \lambda\mu$  (wyciąganie) i  $S_{6,6} = \mu E$  (ściskanie). Przechodząc teraz do węzła 6, otrzymujemy dla (utrzymujących tam równowagę) sił  $K_{3,6}$ ,  $G_{4,6}$ ,  $S_{6,6}$ ,  $G_{6,8}$ ,  $K_{5,6}$  zamknięty wielobok  $\varepsilon\delta E\mu\zeta\varepsilon$ , z którego:  $G_{6,8} = \mu\zeta$  (ściskanie) i  $K_{5,6} = \zeta\varepsilon$  (ściskanie). Wreszcie dla węzła 5 z siłami  $D_{3,5}$ ,  $K_{5,6}$ ,  $K_{5,8}$ ,  $D_{5,5'}$  otrzymamy zamknięty wielobok  $H\varepsilon\zeta\eta H$ , z którego:  $K_{5,8} = \zeta\eta$  (wyciąganie) i  $D_{5,5'} = \eta H$  (wyciąganie).

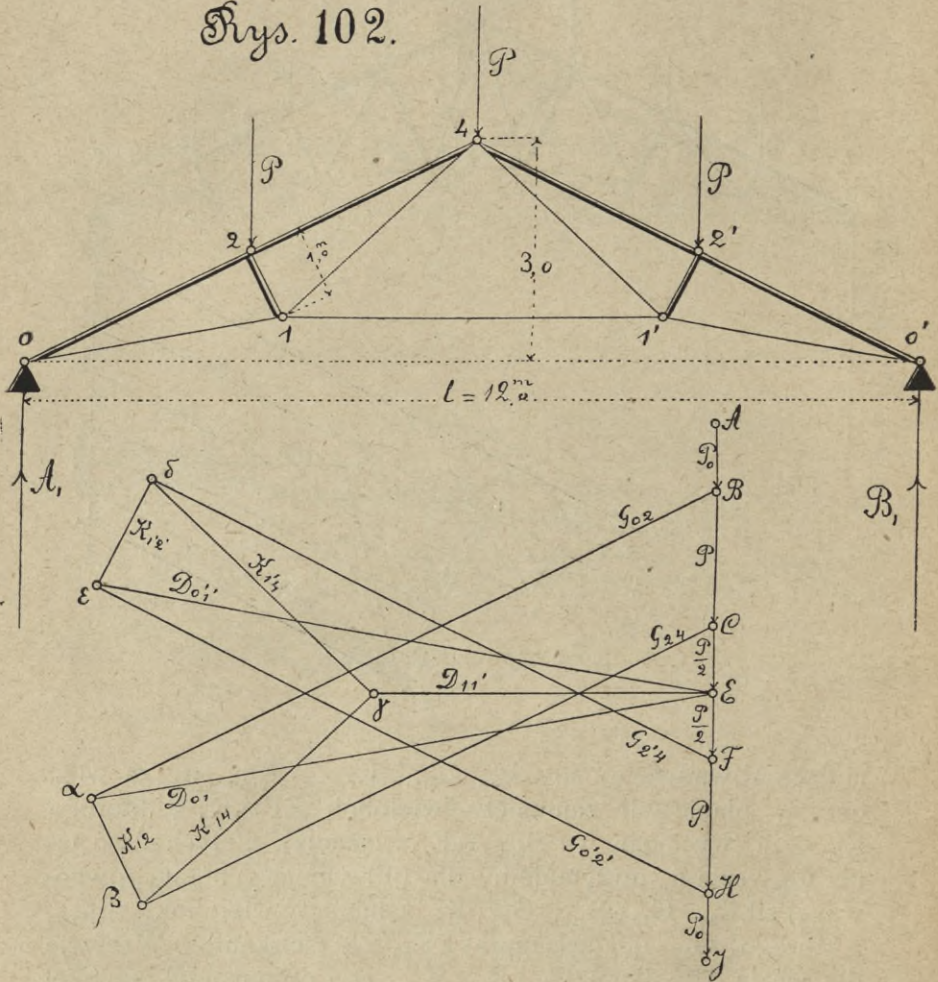
Jeżeli pręty  $86_1$  i  $86'_1$  są przedłużeniem pasa górnego, a pręty  $6_1 8'_1$  i  $6'_1 8'_1$  — równoległe do tegoż, to natężenia  $G_{6,8}$  i  $K_{6,8}$  będą sobie równe i  $S_{6,6}$  będzie  $= 2P$  (bo wtedy otrzymamy zamiast punktu  $\lambda - \lambda'$ , zamiast  $\lambda\mu - \lambda'\mu'$ , zamiast punktu  $\zeta - \zeta'$  i zamiast  $\eta - \eta'$ , a więc będzie:  $S_{6,6} = E J = 2P$ ).



4. Wiązar dachowy francuzki (Ustrój Polonceau).

W najprostszej swej postaci, stosowanej do małych rozpiętości, przedstawiony jest ten ustrój na rys. 102.

Rys. 102.



Przyjmijmy jako dane:

$$l = 12,0 \text{ m};$$

$$a = 4,0 \text{ m};$$

$$n = 4;$$

$$p = 150 \text{ kg na m}^2 \text{ planu dachu};$$

$$Q = p \cdot a \cdot l = 150 \times 4 \times 12 = 7200 \text{ kg};$$



$$P = \frac{p \cdot a \cdot l}{n} = \frac{7200}{4} = 1800 \text{ kg};$$

$$P_0 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ kg};$$

$$\text{Odpory: } A_1 = B_1 = \frac{7200}{2} = 3600 \text{ kg}.$$

Wielobokiem sił będzie prosta EABCFHJE.

Wykreślenie planu sił uskuteczniemy, przechodząc kolejno węzły 0, 2 i 1, a węzeł 4 da nam próbę dokładności rysunku, bo wielobok spotykających się tam sił:  $CF\delta\gamma\beta C$  musi być zamknięty.

Do większych rozpiętości stosowany bywa bardzo często złożony ustrój Polonceau (tablica 2-a).

Przyjmijmy jako dane:

$$l = 16,0 \text{ m};$$

$$a = 5,0 \text{ m};$$

$$n = 8;$$

$$p = 120 \text{ kg na m}^2 \text{ planu dachu};$$

$$Q = p \cdot a \cdot l = 120 \cdot 5 \cdot 16 = 9600 \text{ kg};$$

$$P_2 = P_4 = P_6 = P_8 = P = \frac{p \cdot a \cdot l}{8} = \frac{9600}{8} = 1200 \text{ kg};$$

$$P_0 = \frac{1200}{2} = 600 \text{ kg};$$

Skalę długości weźmiemy 1:100;

Skalę sił — 1 mm = 1 tona;

$$\text{Odpory: } A_1 = B_1 = \frac{Q}{2} = \frac{9600}{2} = 4800 \text{ kg} = 4 \text{ P}.$$

Wielobokiem sił będzie prosta: HABCEF...

Zaczynając wykreślanie planu sił od węzła 0, otrzymujemy dla działających tam sił:  $(A_1 - P_0)$ ,  $G_{02}$  i  $D_{01}$  trójkąt sił:  $B_a H$ , z którego, ze względu na idącą w górę siłę  $(A_1 - P_0)$ :  $G_{02} = B_a$  (ściskanie),  $D_{01} = a H$  (wyciąganie). Idąc dalej do węzła 2, otrzymujemy dla działających tam sił:  $P_2$ ,  $G_{24}$ ,  $K_{12}$   $G_{02}$  zamknięty wielobok  $BC\beta a B$ , z którego:  $K_{12} = \beta a$  (ściskanie) i  $G_{24} = C\beta$  (ściskanie). Idąc dalej do węzła 1, otrzymujemy podobnie:  $K_{14} = \beta\gamma$  (wyciąganie) i  $D_{13} = \gamma H$  (wyciąganie). Idąc jednak następnie, czy do węzła 4, czy też do węzła 3, spotykamy tam po 3 nieznanne natężenia, więc zwykłym sposobem nie możemy ich otrzymać. Najprędzej dojdziemy do celu, określając sposobem Rittera natężenie w jakimkolwiek przecięciu, np.  $D_{33}$ : Wyobrazivszy sobie przecięcie



wiązara po linii  $\alpha\alpha$  (tablica 2-a) i usuniętą część prawą, przyrównujemy do zera sumę algebraiczną momentów siły poprzecznej dla przekroju  $\alpha\alpha$  (czyli wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część wiazara) i utrzymujących ją w równowadze natężeń w trzech przeciętych prętach:  $G_{68}$ ,  $K_{58}$  i  $D_{33}'$ . Biorąc za biegun momentów węzeł 8, otrzymujemy momenty sił  $G_{68}$  i  $K_{58}$  równe zeru, a więc:

Moment  $A_1$ —mom.  $P_0$ —mom.  $P_2$ —mom.  $P_4$ —mom.  $P_6$  +  
 +mom.  $D_{33}' = 0$ , czyli:  $A_1 \cdot \frac{l}{2} - P_0 \cdot \frac{l}{2} - P_2 \cdot \frac{3}{8}l - P_4 \cdot \frac{1}{4}l - P_6 \cdot \frac{1}{8}l +$   
 $+ D_{33}' \cdot h = 0$ , z kądem w obec  $A_1 = 4P$ ,  $P_0 = \frac{P}{2}$ ,  $P_2 = P_4 = P_6 = P$

otrzymujemy:

$$D_{33}' = -\frac{P \cdot l}{h}$$

i oczywiście natężenie  $D_{33}'$ , mające moment ujemny względem bieguna 8, a więc działające od przekroju  $\alpha\alpha$ , jest natężeniem wyciągającym.

Mając już natężenie  $D_{33}'$ , możemy przejść do węzła 3, w którym siły  $D_{13}$ ,  $K_{34}$ ,  $K_{35}$  i  $D_{33}'$ , utrzymujące między sobą równowagę, tworzyć muszą zamknięty wielobok sił. Odłożywszy zatem od punktu H, w którym, zgodnie ze str. 137, przecinać się muszą wszystkie natężenia nieobciążonego dolnego pasa, odcinek, wyrażający natężenie  $D_{33}'$  (czyli  $\eta H$ ), przeprowadzamy (z uwzględnieniem punktu 4 str. 134), równoległą do  $K_{34}$  przez punkt  $\gamma$  (jako punkt przecięcia natężeń  $K_{14}$  i  $D_{13}$ , tworzących z natężeniem  $K_{34}$  trójkąt w wiazarze), a przez punkt  $\eta$  równoległą do  $K_{35}$  i otrzymujemy punkt przecięcia  $\delta$  i zarazem  $K_{34} = \gamma\delta$  (ściskanie) i  $K_{35} = \delta\eta$  (wyciąganie). Dalej, już jak zwykle, idziemy do węzłów 4 i 5, mających po 2 nieznanne siły i wreszcie w węźle 6 otrzymamy jako próbę, że odcinek  $F\zeta$ , tworzący zamknięty wielobok  $F\zeta\epsilon EF$  z siłami  $K_{56}$ ,  $G_{46}$  i  $P_6$  będzie równoległy do 68 i wyraża natężenie  $G_{68}$ . [Możemy również, nie odwołując się do sposobu Rittera, dojść do celu drogą poniższego rozumowania: Rozkładając w węźle 6 siłę  $P_6 = EF$  w kierunku pręta 65 i górnego pasa, otrzymujemy siłę  $K_{56}$  jako odcinek  $x\epsilon$  (ściskanie), odcinek zaś  $Fx$  da nam oczywiście różnicę natężeń w prętach 46 i 68 górnego pasa, t. j.  $G_{46} - G_{68}$ . Zupełnie tak samo, rozkładając dalej w węźle 5 siłę  $K_{56}$  (czyli odcinek  $Ex$ ) w kierunkach pręta 45 oraz 35 i 58, otrzymamy siłę  $K_{45}$ , jako odcinek  $xu$  (wyciąganie), odcinek zaś  $xu$  da nam różnicę natężeń:



$K_{58}—K_{35}$ . Mając zaś  $K_{45}$ , idziemy do węzła 4, przeprowadzamy przez końcowy punkt złożonych sił  $P_4, G_{24}$  i  $K_{14}$  (czyli przez punkt  $\gamma$ ), równoległą do  $K_{45}$ , odkładamy wyrażającą tę siłę odcinek  $\alpha E$  (do punktu  $\alpha$ ), przez końcowy punkt  $\alpha$  prowadzimy równoległą do  $K_{34}$  (czyli  $\alpha\beta$ ), a przez  $E$ —równoległą—do  $G_{46}$  i otrzymujemy:  $K_{34}=\varepsilon\alpha$  (ściskanie) i  $G_{46}=E\varepsilon$  (ściskanie). Ale siłę  $K_{34}$  (czyli odcinek  $\varepsilon\alpha$ ) przeniesiemy równoległe—do położenia  $\delta\gamma$  (bo, zgodnie z punktem 4 str. 134, przeszedłszy od węzła 1 do węzła 4, musimy przez punkt przecięcia  $\gamma$ —otrzymanych dla węzła 1—natężeń  $K_{14}$  i  $D_{13}$  przeprowadzić równoległą do natężenia  $K_{34}$ , tworzącego z nimi trójkąt w wiązarze). Następnie idziemy już drogą zwykłą kolejno do węzłów 3 i 5, mających po 2 nieznane natężenia].

### 5. Dachy wystające.

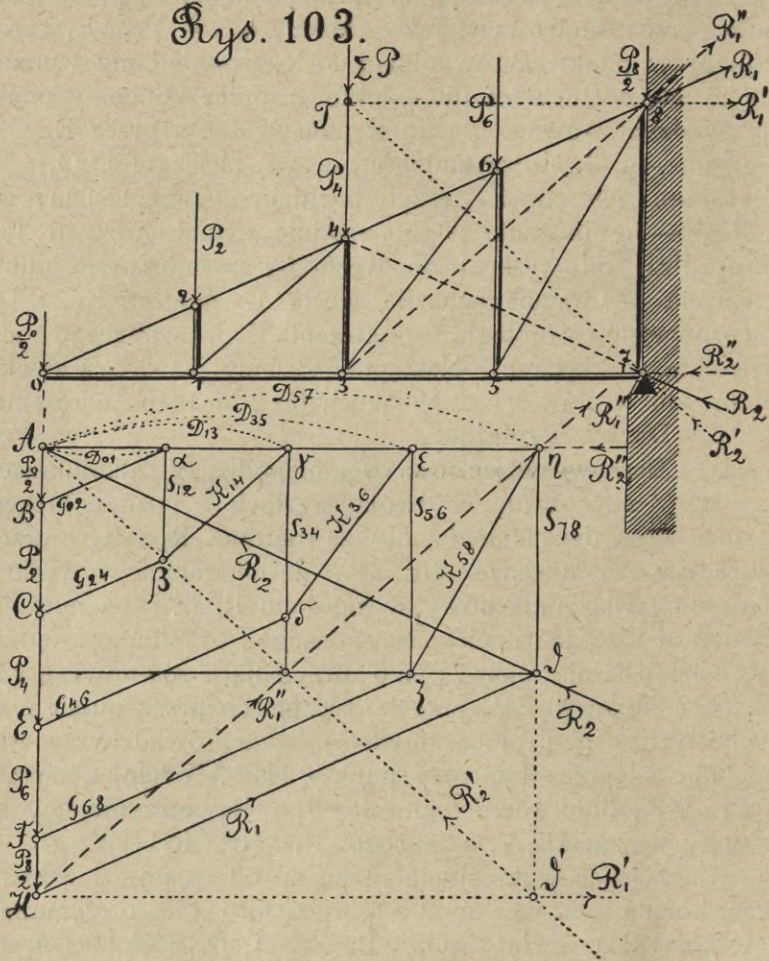
a) **Dach wystający** (rys. 103), niepodparty na kolumnach, musi być umocowany w dwóch węzłach 7 i 8, w których w obec tego działać będą siły zewnętrzne  $R_1$  i  $R_2$  i utrzymywać w równowadze siły  $\Sigma P$ . Jeżeli zatem w węźle 8 zakotwimy wiązar dachowy w kierunku  $R_1$  (t. j. nadamy sile zewnętrznej  $R_1$  kierunek pasa górnego), to siła zewnętrzna  $R_2$ , działająca na punkt 7, jako utrzymująca równowagę z  $R_1$  i z wypadkową sił  $\Sigma P$ , przechodzić będzie przez punkt przecięcia tychże (t. j. przez punkt 4). Przeprowadziwszy więc w planie sił przez końcowe punkty  $H$  i  $A$  odcinka, wyrażającego  $\Sigma P$ , linie równoległe do  $R_1$  i  $R_2$ , otrzymujemy zamknięty trójkąt  $H\delta A$ , z którego:  $R_1=H\delta$  i  $R_2=\delta A$ .

Zaczynając wykreślanie planu sił od węzła 0 i przechodząc kolejno do węzłów 2, 1, 4, 3, 6, 5 i 8, otrzymujemy natężenia: dla węzła 0:  $G_{02}=B\alpha$  (wyc.);  $D_{01}=\alpha A$  (ścis.); dla węzła 2 (tak samo, jak na str. 160 i 161, rys. 99):  $S_{12}=\beta\alpha$  (ścis.)  $=P_2$ ,  $G_{24}=C\beta$  (wyc.)  $=G_{02}$ ; dla węzła 1:  $K_{14}=\beta\gamma$  (wyc.),  $D_{13}=\gamma A$  (ścis.); dla węzła 4:  $S_{34}=\delta\gamma$  (ścis.),  $G_{46}=E\delta$  (wyc.); dla węzła 3:  $K_{36}=\delta\varepsilon$  (wyc.),  $D_{35}=\varepsilon A$  (ścis.); dla węzła 6:  $S_{56}=\zeta\varepsilon$  (ścis.),  $G_{68}=F\zeta$  (wyc.); dla węzła 5:  $K_{58}=\zeta\eta$  (wyc.),  $D_{57}=\eta A$  (ścis.). Wreszcie w węźle 8, w obec znanej już siły zewnętrznej  $R_1=\overline{H\delta}$ , otrzymujemy  $S_{78}$  jako (zamykający wielobok  $\eta\zeta F H \delta$ ) odcinek  $\delta\eta$  (ścis.), równoległy do pręta 87 (próba rysunku).

Jeżeli w węźle 8 zakotwimy wiązar **poziomo**, to otrzymamy dla węzła 8:  $R'_1=H\delta'$  (wyc.);  $S_{87}=\delta'\eta$  (ścis.). Dla węzła 7:  $R'_2=\delta' A$  (ścis.) i oczywiście siła  $R'_2$  przejdzie przez punkty 7 i T (punkt przecięcia siły  $R'_1$  z wypadkową sił  $\Sigma P$ ).



Rys. 103.

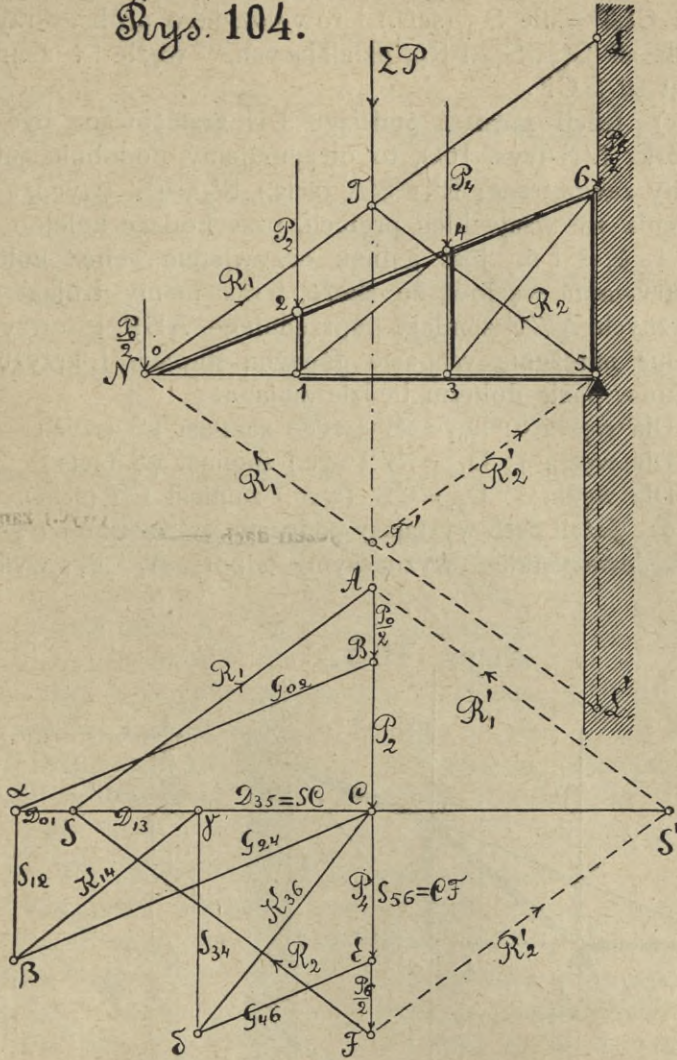


Jeżeli wreszcie zakotwimy więzary w węzle 8 w kierunku  $H_7$ , to otrzymamy  $R''_1 = H_7$  (wyc.), natężenie w pręcie 78 stanie się oczywiście  $= 0$ , a  $R''_2 = \eta A$  (ścis.) i działac będzie poziomo.

b) Jeżeli zamiast zakotwienia więzara w węzle 6 (rys. 104), podtrzymamy węzeł N za pomocą podciągu LN, to wywołamy siłę zewnętrzną  $R_1$ , która musi utrzymywać równowagę z siłami  $R_2$  i wypadkową sił  $\Sigma P$ , a więc przez punkt przecięcia tej siły  $R_1$  z siłą  $\Sigma P$  (t. j. przez T) musi przechodzić siła  $R_2$  i te 3 siły utworzą zamknięty trójkąt AFS, z którego wynika:  $R_1 = SA$  (wyc.), a  $R_2 = FS$  (ścis.).



Rys. 104.



Zaczynając wykreślenie planu sił od węzła 0, otrzymujemy zamknięty wielobok  $SAB\alpha S$  działających tam sił:  $R_1$ ,  $\frac{P_0}{2}$ ,  $G_{02}$  i  $D_{01}$  i oczywiście:  $G_{02} = B\alpha$  (ścis.),  $D_{01} = \alpha S$  (wyc.). Idąc dalej kolejno do węzłów 2, 1, 4, 3, 6, 5, otrzymamy dla węzła 2:  $S_{12} = \beta\alpha$  (ścis.),  $G_{24} = C\beta$  (ścis.); dla węzła 1:  $K_{14} = \beta\gamma$  (wyc.);  $D_{13} = \gamma S$  (ścis.); dla węzła 4:  $S_{34} = \delta\gamma$  (ścis.),  $G_{46} = \varepsilon\delta$  (ścis.); dla węzła 3:  $K_{36} = \delta C$  (wyc.),  $D_{35} = \delta C$  (ścis.); dla wę-



zła 6 wypada, jako próba, że bok FC, zamykający wielobok  $C_{35}F$  = sile  $S_{56}$  (ścis.) i również, jako próbę, otrzymujemy dla sił  $D_{35}$ ,  $S_{56}$  i  $R_2$ , działających w węźle 5 — zamknięty trójkąt sił SCF.

c) Jeżeli zamiast podciągu LN zastosowaną być może podpórka L'N (rys. 104), to otrzymujemy podobnie, jak wyżej, siły zewnętrzne:  $R'_1 = S'A$  (ścis.),  $R'_2 = FS'$  (wyc.), a także natężenia we wszystkich prętach, przechodząc kolejno węzły 0, 2, 1, 4, 3 i 6. Jest jednak oczywiście i bez kolejnego rozpatrywania węzłów, że skoro teraz mamy trójkąt sił zewnętrznych AS'F zamiast poprzedniego ASF, to otrzymamy te same natężenia w pasie górnym, słupach i krzyżulcach, a tylko w pasie dolnym będzie zmiana:

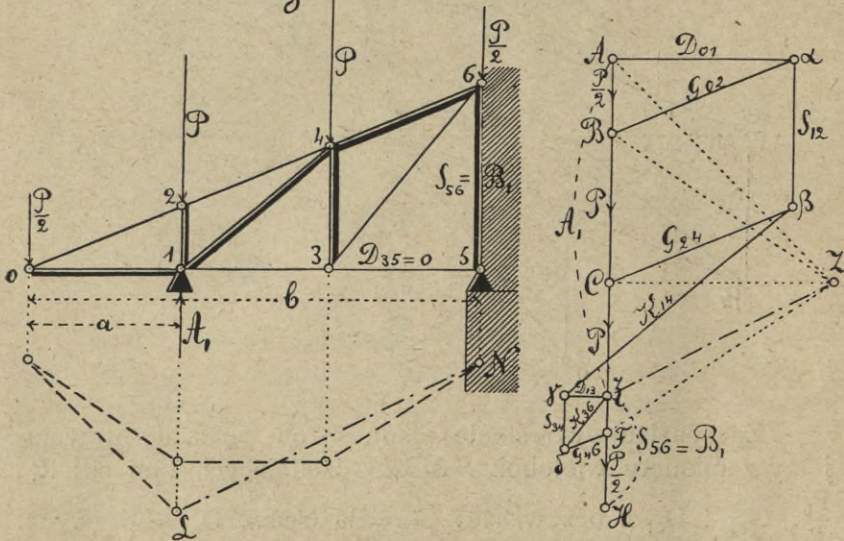
Dla węzła 0:  $D_{01} = \alpha S'$  (wyc.) zamiast  $\alpha S$  (wyc.)

Dla węzła 1:  $D_{13} = \gamma S'$  (wyc.) zamiast  $\gamma S$  (ścis.)

Dla węzła 3:  $D_{35} = CS'$  (wyc.) zamiast  $CS$  (ścis.).

d) Jeżeli dach wystający podparty jest kolumną (rys. 105), to przedewszystkiem wyznaczmy odpory  $A_1$  i  $B_1$ , wykreśla-

Rys. 105.



jąc, jak wiadomo, wielobok sznurowy z bokiem zamykającym LN, łączącym ze sobą punkty przecięcia boków skrajnych wieloboku z pionowymi przez podpory i prowadząc przez



biegun Z linię  $Z\zeta$ , równoległą do LN. [W danym wypadku odcinek  $C\zeta = \frac{3}{4}CF = \frac{3}{4}P$ , a więc otrzymujemy:  $A_1 = \zeta A = \frac{P}{2} + P + \frac{3}{4}P = 2\frac{1}{4}P$ , co było do przewidzenia i bez wykreslania wieloboku sznurowego, bo na kolumnę w węzle 1 przechodzi oczywiście:

- 1) cała siła  $P$ , działająca w węzle 2,
- 2) połowa siły  $P$ , działającej w węzle 4,
- 3) siła  $\frac{P}{2}$ , działająca w węzle 0, rozkłada się na ko-

lumnę w węzle 1 i podporę w węzle 5 zgodnie ze str. 22, t. j. na składowe  $P_1$  i  $P_2$ , czyniące zadość równaniu (o) str. 22, czyli:  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{a}{b}$  i  $\frac{P}{2} = P_1 - P_2$ , z kądem, w obec  $b = 3a$ , otrzymujemy:  $P_1 = \frac{3}{4}P$ , a zatem:  $A_1 = P + \frac{P}{2} + \frac{3}{4}P = 2\frac{1}{4}P$ ].

Zaczynając następnie wykreslanie planu sił od węzła 0, otrzymujemy tam:  $D_{01} = \alpha A$  (ścis.),  $G_{02} = B\alpha$  (wyc.). Dla węzła 2:  $S_{12} = \beta\alpha$  (ścis.),  $G_{24} = C\beta$  (wyc.). Dla węzła 1 (w którym działają siły:  $A_1$ ,  $D_{01}$ ,  $S_{12}$  i nieznane  $K_{14}$  i  $D_{13}$ ):  $K_{14} = \beta\gamma$  (ścis.),  $D_{13} = \gamma\zeta$  (wyc.); dla węzła 4:  $S_{34} = \delta\gamma$  (ścis.),  $G_{46} = F\delta$  (ścis.). Dla węzła 3 otrzymujemy zamknięty trójkąt sił  $\zeta\gamma\delta$ , w którym  $\delta\zeta$  jest równoległą do  $K_{36}$ , w obec czego  $K_{36} = \delta\zeta$  (wyc) i  $D_{35} = 0$ . Dla węzła 6 otrzymujemy jako próbę zamknięty wielobok sił  $\zeta\delta FH\zeta$  z bokiem zamykającym  $H\zeta$ , równoległym do  $S_{56}$ , w obec czego:  $S_{56} = H\zeta$  (ścis.) =  $B_1$ .

## 6. Parcie wiatru na wiązary dachowe.

W naszych okolicach parcie wiatru można przyjmować = 120 kg na metr kwadratowy powierzchni, prostopadłej do kierunku wiatru, nachylonego do horyzontu najczęściej pod kątem  $10^\circ$ , tworzącego zatem z pochyłą powierzchnią dachu (rys. 106) kąt =  $\alpha + 10^\circ$  czyli:  $w' = 120$  kg na  $m^2$  powierzchni AE, a zatem na metr kwadratowy pochyłej powierzchni samego dachu, czyli AC, wypadnie:

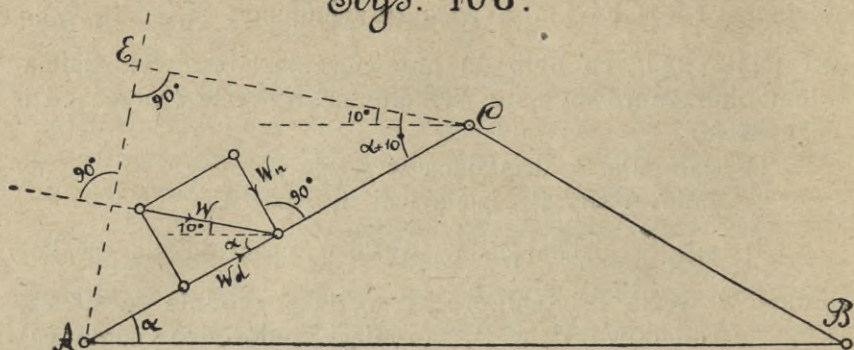
$$w = w' \times \frac{AE}{AC} = w' \sin(\alpha + 10^\circ) \dots \dots (55)$$

Rozkładając tę siłę  $w$  na składową  $w_n$ , działającą prostopadłe do powierzchni dachu i  $w_d$  — działającą w kierunku dachu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} w_n &= w \sin(\alpha + 10^\circ) \dots \dots (56) \\ w_d &= w \cos(\alpha + 10^\circ). \end{aligned}$$



Srys. 106.



Ta ostatnia siła, działająca w kierunku dachu AC, nie wywiera żadnego wpływu na konstrukcję, w obec stosunkowo małego tarcia wiatru o dach, nie potrzebuje więc być uwzględnianą. Dla siły zaś  $w_n$  otrzymujemy z wzoru (56), w połączeniu z wzorem (55):

$$w_n = w' \sin^2 (\alpha + 10^\circ), \text{ czyli w obec } w' = 120 \text{ kg}$$

$$w_n = 120 \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Taki wzór przyjmuje Müller—Breslau, w obec jednak doświadczeń Lössla, stwierdzających, że parcie wiatru jest proporcjonalne do samego  $\sin (\alpha + 10^\circ)$ , nie zaś do kwadratu tegoż, godniejszym polecenia jest wzór:

$$w_n = 120 \sin (\alpha + 10^\circ) \dots \dots (57)$$

stosowany przez Thulliego, Förstera i innych. We wzorze tym  $w_n$  oznacza parcie wiatru prostopadłe do powierzchni dachu na 1 metr kwadratowy tejże pochyłej powierzchni, a kąt  $\alpha$  jest kątem nachylenia dachu do poziomu. Niekiedy stosowany bywa również wzór:

$$w_n = 150 \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Dla wiązara dachowego z górnym pasem wielobocznym  $abcde$  (rys. 107) wypada dla każdego boku inne parcie wiatru:  $w_n^{ab}$ ,  $w_n^{bc}$ ,  $w_n^{cd}$ ,  $w_n^{de}$ , a obliczenie tychże parć dokonywa się wykreślnie bardzo łatwo sposobem następującym: Zakreślamy z dowolnego punktu O koło o promieniu  $r = 120 \text{ kg}$ , w jakiejkolwiek skali sił, np.  $1 \text{ mm} = 2 \text{ kg}$ , czyli  $r = 60 \text{ mm}$ ; przez O prowadzimy promień poziomy ON i drugi — pod kątem  $10^\circ$  do poprzedniego, t. j. OL, a także promienie równo-



ległe do boków  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $de$  pasa górnego; opuszczając zaś prostopadłe z otrzymanych końcowych punktów  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  na prostą  $OL$ , otrzymujemy szukane siły:

$$w_n^{ab} = 120 \sin (\alpha_1 + 10^\circ) = b'b''$$

$$w_n^{bc} = 120 \sin (\alpha_2 + 10^\circ) = c'c''$$

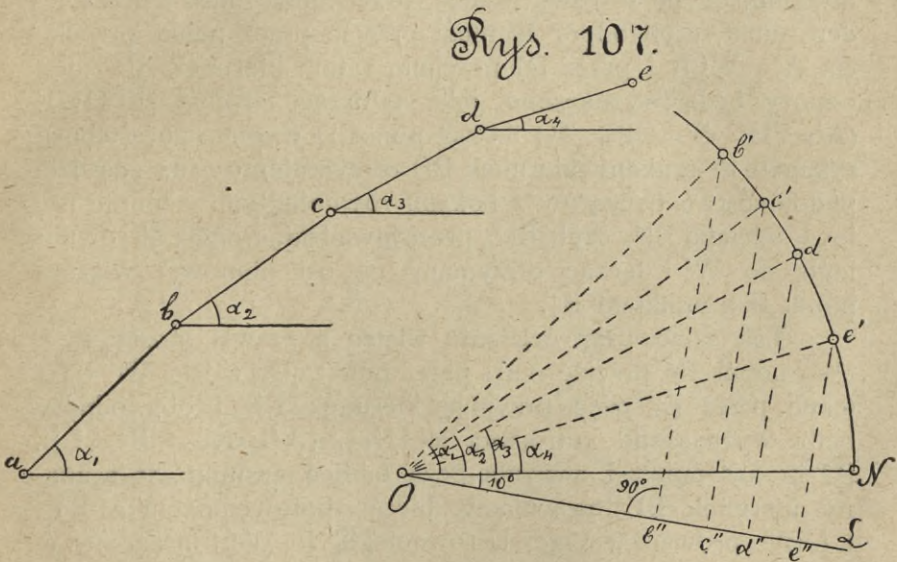
$$w_n^{cd} = 120 \sin (\alpha_3 + 10^\circ) = d'd''$$

$$w_n^{de} = 120 \sin (\alpha_4 + 10^\circ) = e'e''$$

Parcie wiatru na całą powierzchnię dachu  $F$  będzie oczywiście:  $W = w_n \cdot F$ , więc na jeden wiązar dachowy, przy odstępach między wiązarami  $= a$ , przypadnie: (rys. 106)

$$W = w_n \cdot a \cdot AC \dots \dots (58).$$

Rys. 107.



Na każdy węzeł środkowy (np. 2, 4, 6 na rys. 103) przypadnie po  $w_n \cdot a \cdot m$  (jeżeli  $m$  oznacza długość  $02 = 24 = 46 = 68$ ), a na każdy węzeł skrajny — po  $\frac{1}{2} w_n \cdot a \cdot m$ .

Dla wiazara zaś dachowego wielobocznego (rys. 107) całkowite parcie wiatru na jeden wiązar składać się będzie z parę poszczególnych, odpowiadających bokom  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $de$ , t. j.:  $a(b'b'' \cdot ab)$ ,  $a(c'c'' \cdot bc)$ ,  $a(d'd'' \cdot cd)$ ,  $a(e'e'' \cdot de)$ ; na każdy więc węzeł środkowy, np.  $c$ , przypadnie:

$$w_c = \text{wypadkowej dwóch sił: } \left. \begin{array}{l} a(c'c'' \cdot \frac{1}{2} bc) \text{ i } a(d'd'' \cdot \frac{1}{2} cd) \dots \\ \text{na węzły zaś skrajne: } \left\{ \begin{array}{l} w_a = a(b'b'' \cdot \frac{1}{2} ab) \dots \dots \\ w_e = a(e'e'' \cdot \frac{1}{2} ae) \dots \dots \end{array} \right\} \end{array} \right\} (59).$$



Wyznaczenie natężeń wywoływanych przez parcie wiatru w poszczególnych prętach wiażara dachowego rozpoczynamy, jak zawsze, od wyznaczenia odporów, co nie przedstawia trudności w obec tego, że najczęściej jedna podpora wiażara dachowego jest urządzona jako ruchoma (a druga — jako stała), z kąd wynika, że kierunek odporu na podporze ruchomej może być **tylko pionowy**, a mając ten kierunek, wykreślamy łatwo (przy danym kierunku i wielkości parcia wiatru  $W$ ) oba odpory:

Przy działaniu wiatru z lewej strony (t. j.  $W^l$ ) na powierzchnię dachu  $AC$  (rys. 108) i przy danym — **pionowym** — kierunku odporu  $A^l$  na podporze ruchomej  $A$ : siły  $W^l$ ,  $A^l$  i  $B^l$ , utrzymujące się w równowadze, przechodzić muszą przez jeden punkt, czyli odpór  $B^l$  musi przejść przez punkt przecięcia  $A^l$  i  $W^l$  (t. j. przez  $D$ ), przyjmie zatem kierunek  $BD$  i oba odpory będą wyznaczone, jako tworzące trójkąt sił  $HGF$  ( $A^l = FH$  i  $B^l = GF$ ). [O ile zaś punkt  $D$  wypada poza tablicą rysunku, to szukany kierunek  $BD$  otrzymujemy — na zasadzie podobieństwa trójkątów z bokami równoległymi — biorąc połowę odcinka  $BN$ , czyli  $BM$ , przeprowadzając przez  $M$  równoległą do  $W^l$  i łącząc otrzymany na osi pionowej wiażara punkt  $S$  z punktem  $B$ ].

Tak samo, przy działaniu wiatru z prawej strony (t. j.  $W^p$ ) odpór  $B^p$  przejść musi przez punkt przecięcia  $W^p$  i  $A^p$  (czyli przez  $E$ ), więc przyjmie kierunek  $EB$  i oba odpory będą wyznaczone z trójkąta sił  $JKL$  ( $A^p = KL$  i  $B^p = LJ$ ). [O ile zaś punkt  $E$  wypada poza tablicą rysunku, to szukany kierunek  $BE$  otrzymamy, biorąc połowę odcinka  $BT$ , t. j.  $BU$ , prowadząc przez  $U$  równoległą do  $W^p$  i łącząc otrzymany na osi pionowej wiażara punkt  $V$  z punktem  $B$ ].

Dla wiażara dachowego z wielobocznym pasem górnym należy oczywiście wyznaczyć naprzd za pomocą wieloboku sznurowego wypadkową określonych z wzorów (59) poszczególnych parć wiatru  $w_a, w_b, w_c, w_d, w_e$ .

Jeżeli obie podpory wiażara dachowego są urządzone jako stałe, to właściwe odpory nie są statycznie wyznaczalne.

Dla przykładu wykreślmy plan sił dla parcia wiatru na wiażar dachowy ustroju złożonego Polonceau (tablica 2-ga), dla którego wyznaczyliśmy już powyżej (str. 165—167) natężenia przy obciążeniu pionowym.

Parcie wiatru obliczymy według wzoru (57) str. 172, któ-







$$W = w_n \cdot a \cdot AC, \text{ gdzie } AC = \text{długości krokwi, czyli} = \\ = \sqrt{8^2 + 2,70^2} = 8,44, \text{ więc: } W = 57,6 \times 5 \times 8,44 = 2430,7 \text{ kg.}$$

Na każdy zatem węzeł środkowy przypadnie ztąd:  $\frac{W}{4} = 607,7 \text{ kg}$ , możemy jednak przyjąć jako obciążenie węzłów środkowych:  $w_2 = w_4 = w_6 = 600 \text{ kg}$ , zwłaszcza, że zastosowaliśmy do obliczenia parcia wiatru najsurowszy wzór (57) str. 172. W węzłach krańcowych przyjmiemy oczywiście:  $w_0 = w_8 = \frac{600}{2} = 300 \text{ kg}$ .

Dla wykreślenia planu sił, odpowiadającego temu obciążeniu, musimy przedewszystkiem wyznaczyć odpory  $A_1$  i  $B_1$ :

Siły  $w_0, w_2, w_4, w_6$  i  $w_8$ , prostopadłe do powierzchni dachu, dają wypadkową  $W$ , także prostopadłą do dachu, przechodzącą przy działaniu wiatru z lewej strony przez węzeł 4 i wynoszącą:  $W' = 4 \times 600 = 2400 \text{ kg}$ .

Przyjmując lewą podporę za ruchomą, wykreślamy sposobem wskazanym na str. 174 kierunki obu odporów  $A_1'$  i  $B_1'$  i otrzymawszy te odpory z trójkąta sił  $A'N'H'$  (tablica 2-ga) jako odcinki  $H'A'$  i  $N'H'$ , wykreślamy plan sił tak samo, jak zawsze: Zaczynając od węzła 0, otrzymujemy dla działających tam sił  $w_0'$ ,  $G_{02}$ ,  $D_{01}$ ,  $A_1'$  (z uwzględnieniem punktu 3 str. 134) wielobok sił:  $A'B'a'H'A'$ , z którego ze względu na znany kierunek sił  $A_1'$  i  $w_0'$  wynika:  $G_{02} = B'a'$  (ścis.),  $D_{01} = a'H'$  (wyc.). Dla węzła 2 otrzymujemy w obec tożsamości kierunków  $G_{02}$  i  $w_2'$  z  $G_{24}$  i  $K_{12}$ :  $G_{24} = G_{02}$  (ścis.),  $K_{12} = \beta'a' = w_2'$  (ścis.). Następnie dla węzła 1:  $K_{14} = \beta'\gamma'$  (wyc.),  $D_{13} = \gamma'H'$  (wyc.). Dalej dla węzła 4 — w obec symetrii obciążenia  $w_4'$  względem spotykających się w tym węźle prętów:  $G_{46} = G_{24} = G_{02}$  (ścis.),  $K_{45} = K_{14}$  (wyc.),  $K_{34} = \delta'\gamma'$  (ścis.). Dla węzła 3:  $K_{35} = \delta'\eta'$  (wyc.),  $D_{33'} = \eta'H'$  (wyc.). Dla węzła 5:  $K_{56} = \epsilon'\zeta'$  (ścis.)  $= w_5'$ ;  $K_{58} = \zeta'\eta'$  (wyc.). W węźle 6 wskutek tożsamości kierunków  $G_{46}$  i  $w_6'$  z  $G_{68}$  i  $K_{56}$ :  $G_{68} = G_{46}$  (ścis.). Idąc dalej do węzła 8, otrzymujemy, przeprowadzając przez  $N'$  równoległą do  $G_{6'8}$ , a przez  $\eta'$  równoległą do  $K_{5'8}$ , wielobok działających tam sił:  $F'N'\delta'\eta'\zeta'F'$ , z którego wynika:  $K_{5'8} = \delta'\eta'$  (wyc.),  $G_{6'8} = N'\delta'$  (ścis.). Zauważmy teraz, że wskutek działania wiatru tylko z lewej strony węzły 6', 4', 2' nie będą wcale obciążone, a więc natężenia wywołane przez wiatr z lewej strony w prętach 5'6', 4'5', 3'4', 1'4', 1'2' będą  $= 0$ , natężenie



$G_{6'8}$  będzie działało na całej długości prawego górnego pasa, czyli  $G_{6'8} = G_{4'6'} = G_{2'4'} = G_{0'2'} = G_{0'8}$ , a  $K_{5'8}$  — na całej długości  $3'8$ , czyli  $K_{5'8} = K_{3'5'} = K_{3'8}$ . Istotnie, wyobrazivszy sobie przecięcie wiązara po linii  $\beta\beta$  (tablica 2-a), widzimy, że (po usunięciu części lewej) natężenia przeciętych prętów:  $D_{33'}$ ,  $K_{3'8}$  i  $G_{0'8}$  muszą oczywiście utrzymywać równowagę z jedną siłą zewnętrzną pozostałej części prawej — odporem  $B_1^l$ , tworzą zatem wielobok zamknięty sił  $H'\gamma'\delta'N'H'$  (dający dla sił  $K_{3'8}$  i  $G_{0'8}$  też same odcinki  $\gamma'\delta'$  i  $\delta'N'$ , które otrzymaliśmy wyżej dla sił  $K_{5'8}$  i  $G_{6'8}$ ), natężenia zaś  $D_{0'1'}$  i  $G_{0'8}$ , utrzymujące podobnie równowagę z odporem  $B_1^l$ , tworzą zamknięty trójkąt sił  $H'\delta'N'$ , z którego otrzymujemy ostatnie nieznanne natężenie:  $D_{0'1'} = H'\delta'$  (wyc.), działające na całej długości  $0'3'$  (t. j.  $D_{0'1'} = D_{1'3'} = D_{0'3'}$ ).

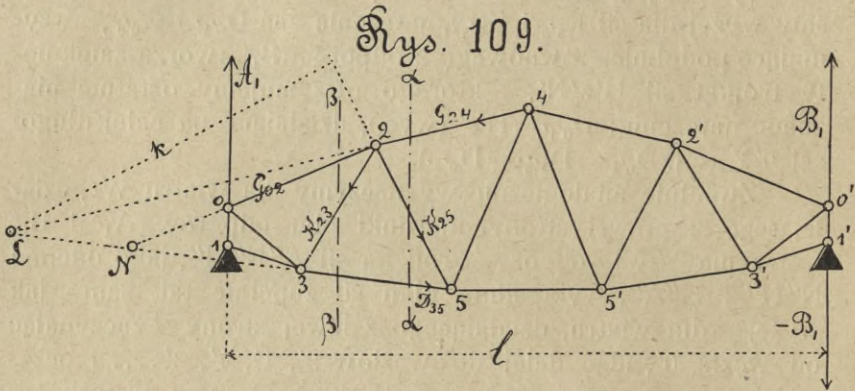
Zupełnie analogicznie wyznaczymy dla wiatru  $W^p$ , działającego z prawej strony, kierunki obu odporów  $A_1^p$  i  $B_1^p$  i otrzymawszy te odpory z trójkąta sił  $A''N''H''$ , jako odcinki  $N''H''$  i  $H''A''$ , wykreślimy plan sił zupełnie tak samo, jak wyżej — dla wiatru, działającego z lewej strony — zaczynając od węzła  $0'$ , idąc dalej do węzłów  $2'$ ,  $1'$ ,  $4'$ ,  $3'$ .... i oczywiście otrzymamy teraz natężenia równe zeru w prętach 56, 45, 34, 14 i 12. Sumując odpowiednio wyznaczone w ten sposób natężenia, wywołane parciem wiatru, z wyznaczonymi poprzednio (str. 165—167) natężeniami, wywołanymi obciążeniem pionowym, otrzymujemy największe natężenia (zestawione na tablicy 2-ej), według których obliczać należy przekroje poszczególnych prętów.

## C. Wpływ obciążenia ruchomego na belki kratowe.

Ponieważ obciążenie ruchome może zmieniać swoje położenie na belce kratowej, więc należy określić, przy jakim rozmieszczeniu tegoż wywołane być mogą w poszczególnych prętach największe natężenia, czyli określić, jakie obciążenie będzie **najniebezpieczniejsze** dla poszczególnych prętów. Z góry zaznaczymy, że obciążenie **całkowite** belki niekoniecznie jest owem **najniebezpieczniejszym**, jak o tem przekonamy się niezwłocznie.



Rozpatrzmy przedewszystkiem wpływ obciążenia ruchomego, np. pojedynczej siły  $P_p$ , działającej gdziekolwiek z **prawej** strony danego przekroju  $aa$  (rys. 109), na natężenia w przeciętych prętach. Natężenia te ( $G_{24}$ ,  $K_{25}$  i  $D_{35}$ ), **działające na lewą część belki**, muszą, jak wiadomo (str. 128), utrzymywać równowagę z siłą poprzeczną — wypadkową sił zewnętrznych, działających na tę samą **lewą część** belki, t. j. (w tym razie, w obec obciążenia tylko z prawej strony) — z odporem  $A_1$



(zgodnie ze str. 47), a więc suma algebraiczna momentów tych 4-ch sił ( $G_{24}$ ,  $K_{25}$ ,  $D_{35}$  i  $A_1$ ) względem dowolnego punktu musi być  $= 0$ . Biorąc za ten dowolny punkt —  $L$ , przecięcie sił  $G_{24}$  i  $D_{35}$ , otrzymamy oczywiście:

$$\text{Mom. } A_1 + \text{mom. } K_{25} = 0,$$

z kąąd wynika, że siły  $A_1$  i  $K_{25}$  mają względem bieguna  $L$  momenty z odwrotnym znakiem, a skoro odpór  $A_1$ , działający w górę, daje moment **ujemny**, to natężenie  $K_{25}$  musi dać moment  **dodatni**, działa zatem **od** przekroju  $aa$  i jest siłą **wyciągającą**. Tak samo, biorąc za biegun punkt przecięcia sił  $G_{24}$  i  $K_{25}$ , czyli węzeł 2:

$$\text{mom. } A_1 + \text{mom. } D_{35} = 0,$$

z kąąd wynika, że moment  $D_{35}$  względem węzła 2, odwrotny momentowi odporu  $A_1$ , musi być **ujemny**, więc natężenie  $D_{35}$ , jako działające **od** przekroju  $aa$ , będzie siłą **wyciągającą**. Biorąc zaś za biegun węzeł 5:

$$\text{mom. } A_1 + \text{mom. } G_{24} = 0,$$

z kąąd wynika, że moment siły  $G_{24}$  musi być (względem węzła 5) **ujemny**, a siła  $G_{24}$ , działająca **ku** przekrojowi  $aa$  — **ściskająca**.



Jeżeli obciążenie ruchome działa tylko z lewej strony przekroju  $\alpha\alpha$ , np. jako siła pojedyncza  $P_1$ , to siła poprzeczna (jako wypadkowa odporu  $A_1$  i  $P_1$ ) jest zgodnie ze str. 93  $= -B_1$  i działa w linii tegoż odporu  $B_1$ . Obecnie więc zamiast równań powyższych otrzymamy:

Mom.  $(-B_1) + \text{mom. } K_{25} = 0$ , czyli:  $\text{mom. } B_1 = \text{mom. } K_{25}$   
(dla bieguna L).

Mom.  $(-B_1) + \text{mom. } D_{35} = 0$ , czyli:  $\text{mom. } B_1 = \text{mom. } D_{35}$   
(dla bieguna w węźle 2).

Mom.  $(-B_1) + \text{mom. } G_{24} = 0$ , czyli:  $\text{mom. } B_1 = \text{mom. } G_{24}$   
(dla bieguna w węźle 5).

Wynika ztąd, że 1) natężenie  $K_{25}$ , dające dla bieguna L taki sam moment, jak siła  $B_1$ , t. j. **ujemny**, działa teraz **ku** przekrojowi  $\alpha\alpha$ , jest zatem **ściskaniem**, 2) natężenie  $D_{35}$ , dające dla bieguna w węźle 2 moment jednakowy z  $B_1$  — **ujemny**, działa **od** przekroju  $\alpha\alpha$ , jest więc **wyciąganiem** i 3) natężenie  $G_{24}$ , dające dla bieguna w węźle 5 moment **ujemny**, działa **ku** przekrojowi  $\alpha\alpha$ , jest więc **ściskaniem**.

Widzimy zatem, że obciążenie ruchome z **prawej strony** przekroju  $\alpha\alpha$  wywołuje:

w pasie górnym ( $G_{24}$ ) — **ściskanie**,  
w krzyżulcu ( $K_{25}$ ) — **wyciąganie**,  
w pasie dolnym ( $D_{35}$ ) — **wyciąganie**.

Obciążenie zaś z **lewej strony** wywołuje:

w pasie górnym ( $G_{24}$ ) — **ściskanie**,  
w krzyżulcu ( $K_{25}$ ) — **ściskanie**,  
w pasie dolnym ( $D_{35}$ ) — **wyciąganie**.

Podobnież dla przekroju  $\beta\beta$ , przy obciążeniu z **prawej strony** otrzymamy natężenie  $K_{23}$  — **ściskające** (bo odpór  $A_1$  ma względem bieguna N moment **ujemny**, więc  $K_{23}$  musi mieć moment  **dodatni** i działać **ku** przekrojowi  $\beta\beta$ ), a przy obciążeniu z **lewej strony** otrzymamy natężenie  $K_{23}$  — **wyciągające** (bo odpór  $B_1$  ma względem bieguna N moment **ujemny**, więc i natężenie  $K_{23}$  musi mieć moment **ujemny** i działać **od** przekroju  $\beta\beta$ ).

Z powyższego wynika, że obciążając belkę całkowicie (t. j. **jednocześnie** z prawej i z lewej strony przekroju  $\alpha\alpha$ ), wywołujemy **największe** natężenie w **pasach**, ale w krzyżulcu **25 największe wyciąganie** wywołamy, obciążając belkę **tylko z prawej strony** przekroju  $\alpha\alpha$  (bo dołączywszy obciążenie z **lewej** — wywołalibyśmy w nim **ściskanie** i zmniejszy-



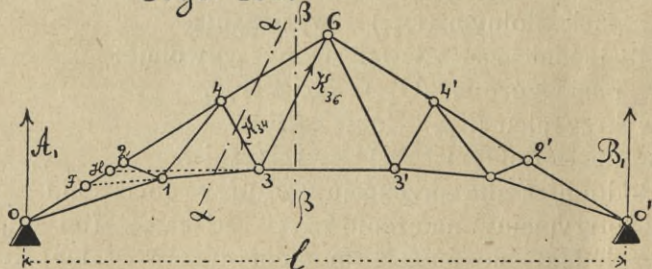
libyśmy przez to owo wyciąganie), a największe ściskanie wywołamy w tymże krzyżulcu 25, obciążając belkę **tylko z lewej strony** przekroju  $\alpha\alpha$ ; w krzyżulcu zaś 23 — wprost przeciwnie: **największe wyciąganie** otrzymamy, obciążając belkę **tylko z lewej strony** przekroju  $\beta\beta$ , a **największe ściskanie** — obciążając belkę **tylko z prawej strony** przekroju  $\beta\beta$ . Tak więc dla otrzymania największego natężenia w pasach należy obciążyć całą belkę, a dla otrzymania największego natężenia w danym krzyżulcu — obciążyć trzeba belkę jednostronnie.

Prawo to, wyprowadzone dla belki kratowej rys. 109, stosuje się — jak o tem łatwo przekonać się drogą takiego samego, jak powyższe, rozumowania — do całej, najliczniejszej grupy belek kratowych, w których każdy przekrój, np.  $\alpha\alpha$  i  $\beta\beta$ , daje punkty przecięcia odpowiednich prętów pasów (L i N) poza rozpiętością teoretyczną belki.

Dla pozostałych jednak belek kratowych największe natężenia w krzyżulcach otrzymujemy, tak samo, jak w pasach, przy całkowitem obciążeniu belki:

Tak np. dla drugiej grupy belek kratowych (rys. 110), w których każdy przekrój (np.  $\alpha\alpha$ ,  $\beta\beta$ ) daje punkt przecięcia

Rys. 110.



odpowiednich prętów pasów (F, H) w granicach rozpiętości teoretycznej belki, otrzymamy dla przekroju  $\alpha\alpha$ , przy obciążeniu z **prawej strony** przekroju, biorąc za biegun punkt F:

$$\text{mom. } A_1 + \text{mom. } K_{34} = 0,$$

a zatem natężenie  $K_{34}$  musi dawać względem bieguna F moment **ujemny** (skoro odpór  $A_1$  daje moment **dodatni**), czyli działać będzie **ku** przekrojowi  $\alpha\alpha$ , a zatem będzie **ściskaniem**; przy obciążeniu zaś z **lewej strony** otrzymamy jak wyżej:

$$\text{mom. } (-B_1) + \text{mom. } K_{34} = 0, \text{ czyli } \text{mom. } B_1 = \text{mom. } K_{34},$$

a zatem natężenie  $K_{34}$ , dające względem bieguna F moment jednakowy z  $B_1$ , czyli **ujemny**, będzie i **teraz** działało ku prze-



krojowi  $\alpha\alpha$ , więc będzie także **ściskaniem**. Podobnie dla przekroju  $\beta\beta$  otrzymamy  $K_{36}$  (biegun H) jako siłę **wyciągającą** przy obciążeniu **tak z prawej, jak i z lewej strony**. A zatem dla tych belek kratowych otrzymujemy **największe natężenia w całej belce** (t. j. tak w pasach, jak i w krzyżulcach) przy **całkowitem obciążeniu belki**.

Dla trzeciej wreszcie grupy belek kratowych (rys. 99), w których oba prostolinijne pasy przecinają się **na samych podporach** (czyli w węzłach 0 i 0'), otrzymamy dla rozpatrywanego przekroju  $\alpha\alpha$ , przy obciążeniu z **prawej strony**, natężenie w krzyżulcu  $K_{36} = 0$  (bo siłą poprzeczną będzie odpór  $A_1$ , przechodzący przez punkt przecięcia pasów, więc, biorąc węzeł 0 za biegun momentów, będziemy mieli w równaniu momentów dla sił  $K_{36}$ ,  $G_{46}$ ,  $D_{35}$  i  $A_1$  momenty ostatnich trzech sił równe zeru, a zatem  $\text{mom. } K_{36} = 0$ , czyli  $K_{36} = 0$ , jak to widzieliśmy już zresztą na str. 131). Tak samo oczywiście otrzymamy dla przekroju  $\beta\beta$ , przy obciążeniu z **prawej strony**, natężenie w słupie  $S_{34} = 0$ . Przy obciążeniu zaś z **lewej strony** przekroju  $\alpha\alpha$  siła poprzeczna  $= -B_1$ , a więc dla bieguna w węźle 0:

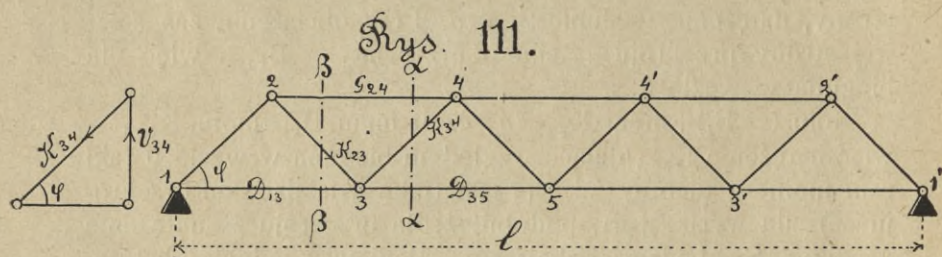
$\text{Mom. } (-B_1) + \text{mom. } K_{36} = 0$ , czyli  $\text{mom. } B_1 = \text{mom. } K_{36}$ , więc natężenie  $K_{36}$ , dające względem bieguna w węźle 0 taki sam moment **ujemny** jak  $B_1$ , jest (jako działające od przekroju  $\alpha\alpha$ ) siłą **wyciągającą**; podobnie dla przekroju  $\beta\beta$  natężenie w słupie  $S_{34}$  będzie **ściskającym**. Ponieważ jednak obciążenie jednostronne (ze strony lewej) nie da oczywiście większego natężenia w krzyżulcach i słupach belki rys. 99, niż obciążenie całkowite (w obec tego, że obciążenie ze strony prawej wywołuje w krzyżulcach i słupach natężenie  $= 0$ ), można więc powiedzieć, że **i dla tych belek otrzymujemy przy całkowitem obciążeniu największe natężenia w całej belce** (t. j. w pasach, krzyżulcach i słupach).

Zauważmy jeszcze, że w rozpatrywanych belkach dwóch ostatnich grup (rys. 110 i 99) w krzyżulcach **wznoszących się w górę** względem środka belki (np. 14 i 36 na rys. 110) otrzymujemy **wyciąganie**, a w krzyżulcach **spadających** — **ściskanie**. We wszystkich zatem krzyżulcach belki rys. 99 otrzymujemy **wyciąganie**, w słupach zaś — **ściskanie**, we wszystkich zaś słupach belki rys. 100 (rozumując jak powyżej) otrzymujemy **wyciąganie**, a w krzyżulcach — **ściskanie**, jak to widzieliśmy już na str. 161 i oznaczyliśmy grubymi liniami.



Ta prawidłowość co do rodzaju natężeń w krzyżulcach belek kratowych omawianych dwóch grup (rys. 110, 99 i 100) wynika ztąd, że dla tych belek przecięcia pasów pozostają w **granicach** rozpiętości teoretycznej belki, a linia działania siły poprzecznej, warunkująca właśnie rodzaj natężeń krzyżulców i słupów, wypada zawsze (jak wiadomo ze str. 48) **poza podporami**, z jednej lub drugiej strony. Tymczasem dla belek kratowych najliczniejszej pierwszej grupy (rys. 109) przecięcia pasów (L i N) wypadają **poza** rozpiętością teoretyczną belki, a siła poprzeczna (w zależności od zmiany obciążeń) wypada to z jednej, to z drugiej strony tych punktów przecięcia, wskutek czego w poszczególnych krzyżulcach powstaje naprzemian to ściskanie, to wyciąganie i żadnej prawidłowości co do rodzaju natężeń być nie może.

Jedynie dla **belek kratowych równoległych**, np. rys. 111, stanowiących przypadek szczególny grupy pierwszej (bo punkt



przecięcia równoległych pasów leży poza rozpiętością teoretyczną belki — w nieskończoności), mieć będziemy pewną prawidłowość w rodzaju natężeń krzyżulców, otrzymujemy bowiem np. dla przekroju  $\alpha\alpha$  i siły poprzecznej  $V_{34}$  utrzymującej ją w równowadze siły  $G_{24}$ ,  $K_{34}$ ,  $D_{35}$ , z których  $K_{34}$  musi być, w obec kierunków  $G_{24}$  i  $D_{35}$  prostopadłych do  $V_{34}$ , równą  $-\frac{V_{34}}{\sin \varphi}$ , jest zatem skierowaną **ku** przekrojowi  $\alpha\alpha$ , czyli siłą **ściskającą**. Podobnie oczywiście dla przekroju  $\beta\beta$ :  $K_{23} =$   $=$  będzie  $-\frac{V_{23}}{\sin \varphi}$  i jako skierowana **od** przekroju  $\beta\beta$ , będzie siłą **wyciągającą**. Tak więc krzyżulec 23 — **spadający** — jest **wyciąganym**, krzyżulec zaś 34 — **wznoszący się** — jest **ściskany** (jak to zresztą widzieliśmy już powyżej i oznaczyliśmy grubymi liniami na rys. 89, 90, 92 i 93). Powtórzy się to dla



wszystkich tych krzyżulców, dla których odpowiednia siła poprzeczna  $V$  działa z lewej strony i będzie miało miejsce aż do takiego przekroju, dla którego linia działania siły  $V$  dojdzie w lewo do nieskończoności, a sama siła  $V$  jednocześnie osiągnie znaczenie  $=0$ , zgodnie ze str. 49, rys. 37. (Jest to jak wiadomo punkt największego momentu). Zaczawszy od tego przekroju i dalej dla całego odstęp  $M_2 M_1$  (rys. 62, 63 i 64, str. 98 — 105), w obrębie którego (przy odpowiednim obciążeniu) siła poprzeczna może stawać się równą zeru, rodzaj natężeń w krzyżulcach nie może wykazywać żadnej prawidłowości, w obec czego prawo powyższe można wypowiedzieć tak:

W belkach kratowych równoległych — w granicach poza odstępem  $M_2 M_1$  — krzyżulce, spadające ku punktowi największego momentu, są wyciągane, wznoszące się zaś ku niemu — ściskane.

Zastosowawszy to prawo do belek rys. 89 i 90, widzimy, że słupy na rys. 89 i krzyżulce na rys. 90 będą ściskane, słupy zaś na rys. 90 i krzyżulce na rys. 89 — wyciągane, z zastrzeżeniem jednak, że stosuje się to tylko do krzyżulców i słupów poza odstępem  $M_1 M_2$ , w granicach którego — (w zależności od chwilowego obciążenia) — krzyżulce i słupy będą na przemian to ściskane, to wyciągane. Dla tych belek kratowych otrzymaliśmy istotnie na str. 148 i 149 (zaznaczone grubymi liniami) — ściskanie w słupach pierwszej — i w krzyżulcach drugiej, ale — w obec uwzględnienia dla tychże belek jedynie obciążenia stałego, wskazanego na rys. 89 i 90 — odstęp  $M_1 M_2$  stał się jednym punktem pośrodku belki i zastrzeżenie powyższe okazuje się w tym razie zbytecznym.

## § 1. Największe natężenia w krzyżulcach dla obciążenia ruchomego.

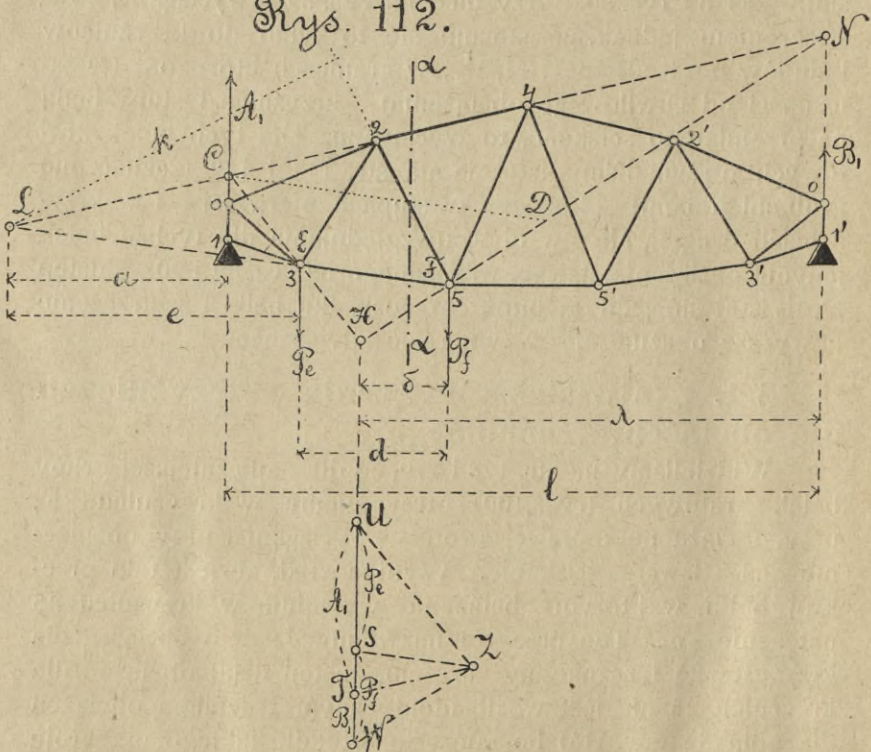
Widzieliśmy na str. 178 i 179, że dla najliczniejszej grupy belek kratowych (rys. 109) otrzymujemy w krzyżulcu 25, przy obciążeniu z prawej strony — wyciąganie, przy obciążeniu zaś z lewej — ściskanie. Wynika ztąd, że jest taki przekrój belki, w którym obciążenie wywołuje w krzyżulcu 25 natężenie  $=0$ . Ten przekrój nazwiemy działem obciążeń dla krzyżulca 25 i zaznaczmy zarazem, że ten dział obciążeń dla krzyżulca 25 nie jest wcale identycznym z działem obciążeń dla pola 35 (str. 114), bo tam szło o to, dla jakiego przekroju



siła poprzeczna jest  $= 0$  — a właściwie sprowadza się do pary sił —, a tutaj idzie o **natężenie w krzyżulcu**, które jest proporcjonalne do **momentu** siły poprzecznej, jak to widzieliśmy w sposobie Rittera (str. 130, wzór 54), a więc dla siły poprzecznej równej  $0$  i nieskończenie odległej (czyli stanowiącej parę sił) nie jest wcale  $= 0$ , a raczej może być  $= 0$  **tylko** w tym razie, jeżeli odległość  $k$  w tym wzorze (54) jest nieskończenie wielką, czyli, jeżeli punkt przecięcia pasów  $L$  (rys. 109) leży w nieskończoności, t. j. dla **belek kratowych równoległych**.

Przypuścimy, że w danej belce jest urządzona jazda dolna, to obciążenie ruchome może działać tylko w węzłach dolnych, a wszelkie obciążenie, przypadające między węzłami, przechodzi na nie za pomocą belek podłużnych i poprzecznych. Przedłużając w obie strony pręt 24 (rys. 112) i łącząc punkty  $C$  i  $N$  z węzłami  $E$  i  $F$ , otrzymujemy punkt  $H$  jako **dział obciążeń** dla krzyżulca 25. Istotnie, odłóżmy ja-

Rys. 112.





kąkolwiek siłę  $P$ , działającą w  $H$ , jako odcinek  $UW$  i przeprowadźmy przez  $U$  i  $W$  równoległe do  $CH$  i  $HN$ , a przez otrzymany punkt  $Z$ —równoległe do  $CN$  i  $EF$ , czyli  $ZT$  i  $ZS$ . Rozpatrując  $EHF$  jako trójkąt sznurowy z bokiem zamykającym  $EF$ , widzimy, że siła  $P$  rozkłada się w węzłach  $E$  i  $F$  na:  $P_e = US$  i  $P_f = SW$ , a z trójkąta sznurowego  $CHN$  z bokiem zamykającym  $CN$  otrzymujemy podobnie odpowiadające sile  $P$  odpory:  $A_1 = TU$  i  $B_1 = WT$ . Dla sił zaś  $A_1$ ,  $P_e$ ,  $P_f$ ,  $B_1$  wielobokiem sznurowym będzie  $CEFNC$  i—zgodnie z punktem 7 str. 18—wypadkowa sił  $A_1$  i  $P_e$ , czyli siła poprzeczna  $V_a$  dla przekroju  $aa$ , przechodzi przez punkt przecięcia boków skrajnych dla tych sił (t. j. boków  $EF$  i  $CN$ ) czyli przez  $L$ . Skoro jednak siła poprzeczna  $V_a$  przechodzi przez punkt przecięcia 24 i 35, to na mocy str. 131, albo też równania (54) str. 130, natężenie  $K_{25}$  musi być  $= 0$ .

Określmy jeszcze dział obciążeń dla krzyżulca 25 **analitycznie**:

Siła  $P$ , przechodząca przez dział obciążeń  $H$ , rozkłada się w węzłach  $E$  i  $F$  na składowe  $P_e$  i  $P_f$ , a pierwsza z nich:

$$P_e = \frac{\delta}{d} P \dots \dots (60).$$

Taż sama siła  $P$  wywołuje odpory  $A_1$  i  $B_1$ , przy czem:

$$A_1 = \frac{\lambda}{l} P \dots \dots (61)$$

więc siła poprzeczna  $V_a$ , wywołana przez siłę  $P$ , będzie wypadkową sił  $A_1$  i  $P_e$  i według wzoru (54) str. 130:

$$K_{25} = \frac{-\text{Mom. siły poprzecznej względem } L}{k} = \\ = -\frac{A_1 \cdot a - P_e \cdot e}{k} = -\frac{a}{k} \left( A_1 - P_e \frac{e}{a} \right).$$

Ponieważ ilości  $k$  i  $a$  są stałe, więc natężenie  $K_{25}$  może być  $= 0$  tylko w razie, jeżeli:  $A_1 - P_e \cdot \frac{e}{a} = 0$ , czyli:

$$\frac{A_1}{P_e} = \frac{e}{a}.$$

Równanie to wyraża oczywiście, zgodnie ze str. 22, że wypadkowa sił  $A_1$  i  $P_e$ , czyli siła  $V_a$  przechodzi przez punkt  $L$ , (o czem było już wyżej), a w zestawieniu z wzorami (60) i (61):

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{e}{a} \dots \dots (62).$$



Takiemu warunkowi odpowiadać muszą wchodzące do tego wzoru wielkości, jeżeli natężenie krzyżulca  $K_{25}$  ma być  $= 0$ , t. j. jeżeli punkt H ma być dla tego krzyżulca działem obciążeń. Łatwo się przekonać, że dla punktu H, wyznaczonego w sposób opisany, warunek ten jest właśnie spełniony: Istotnie, przeprowadzwszy przez C równoległą do EF (rys. 112), otrzymamy punkt D i wskutek podobieństwa trójkątów LNF i CND:  $\frac{LC}{LN} = \frac{FD}{FN}$ . Ale:  $\frac{LC}{LN} = \frac{a}{a+l}$  i  $\frac{FD}{FN} = \frac{CE}{EH} = \frac{e-a}{d-\delta}$ , więc

równanie powyższe daje:

$$\frac{a}{a+l} = \frac{HF \times \frac{e-a}{d-\delta}}{FN}, \text{ gdzie } \frac{HF}{FN} = \frac{\delta}{\lambda-\delta}, \text{ więc: } \frac{a}{a+l} = \frac{\delta}{\lambda-\delta} \times \frac{e-a}{d-\delta},$$

zskąd:  $(a+l)(e-a)\delta = a(d-\delta)(\lambda-\delta)$ , czyli:

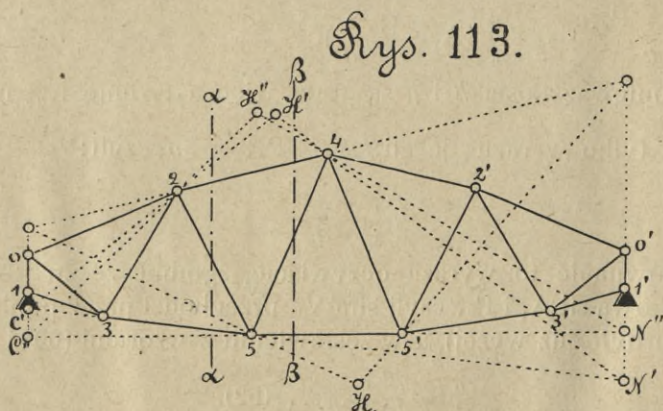
$$a\delta e - a^2\delta + l\delta e - la\delta - ad\lambda + a\delta d + a\delta\lambda - a\delta^2 = 0,$$

$$\text{albo: } a[\delta \underbrace{(e-a-l+d+\lambda-\delta)}_{=0} - d\lambda] + l\delta e = 0,$$

więc:  $ad\lambda = l\delta e$ , zskąd:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\delta}{a} \cdot \frac{e}{a}.$$

Całkiem analogiczną będzie konstrukcja powyższa w razie urządzenia w belce kratowej jazdy górnej: jeżeli np. w belce rys. 113 mogą być obciążone tylko węzły górne, to dział obciążeń dla krzyżulca 25 otrzymamy w punkcie H', przedłużając w obie strony pręt 35 i łącząc punkty C' i N' z węzłami 2 i 4. Dla krzyżulca zaś 45 działem obciążeń bę-





dzie punkt H'', otrzymany tak samo, jak H', przez przedłużenie pręta 55' i połączenie punktów C'' i N'' z węzłami 2 i 4.

Z powyższego widzimy, że dla wywołania największego natężenia w jakimkolwiek krzyżulcu (np. 25, rys. 112) należy obciążyć belkę tylko z  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewej} \end{array} \right\}$  strony do działu obciążeń, przez co wywołamy największe  $\left\{ \begin{array}{l} \text{wyciąganie} \\ \text{ściskanie} \end{array} \right\}$ , a w krzyżulcu 45 — wywołamy wprost odwrotnie największe  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ściskanie} \\ \text{wyciąganie} \end{array} \right\}$ .

Stosuje się to jednak tylko do obciążenia ruchomego **jednostajnego**; dla obciążenia ruchomego ciężarami skupionymi będzie inaczej: Przypuśćmy, że urządzona jest w belce rys. 114 jazda dolna i że mamy określić **największe ściskanie** w krzyżulcu 36. Otrzymamy je, zgodnie ze str. 180, przy obciążeniu ruchomem, zajmującym prawą stronę belki. Ale dokądkolwiek doprowadzimy obciążenie ruchome z prawej strony poza węzeł 5, część tegoż między węzłami 5 i 3 rozłoży się za pomocą belek podłużnych i poprzecznych na te węzły i da w węźle 3 jakąś składową  $P_3$ . Siła zatem poprzeczna dla przekroju  $aa$  (czyli wypadkowa sił zewnętrznych, działających z lewej strony) będzie wypadkową odporu  $A_1$  (przy obciążeniu całej prawej strony) i  $P_3$ .

Stosując tutaj wzór (54) str. 130, mamy dla punktu przecięcia 46 i 35, t. j. dla punktu L:  $K_{36} = \frac{-V \cdot v}{k}$ , moment zaś siły poprzecznej  $V \cdot v$  względem L będzie oczywiście:

$$= A_1 \cdot a - P_3 \cdot e,$$

a w obec tego, że wielkości  $k$ ,  $a$  i  $e$  są stałe, największe ściskanie  $K_{36}$  otrzymamy wtedy, kiedy różnica:  $A_1 \cdot a - P_3 \cdot e$  będzie największa. Siła  $P_3$  działa oczywiście w węźle 3, napisawszy jednak:

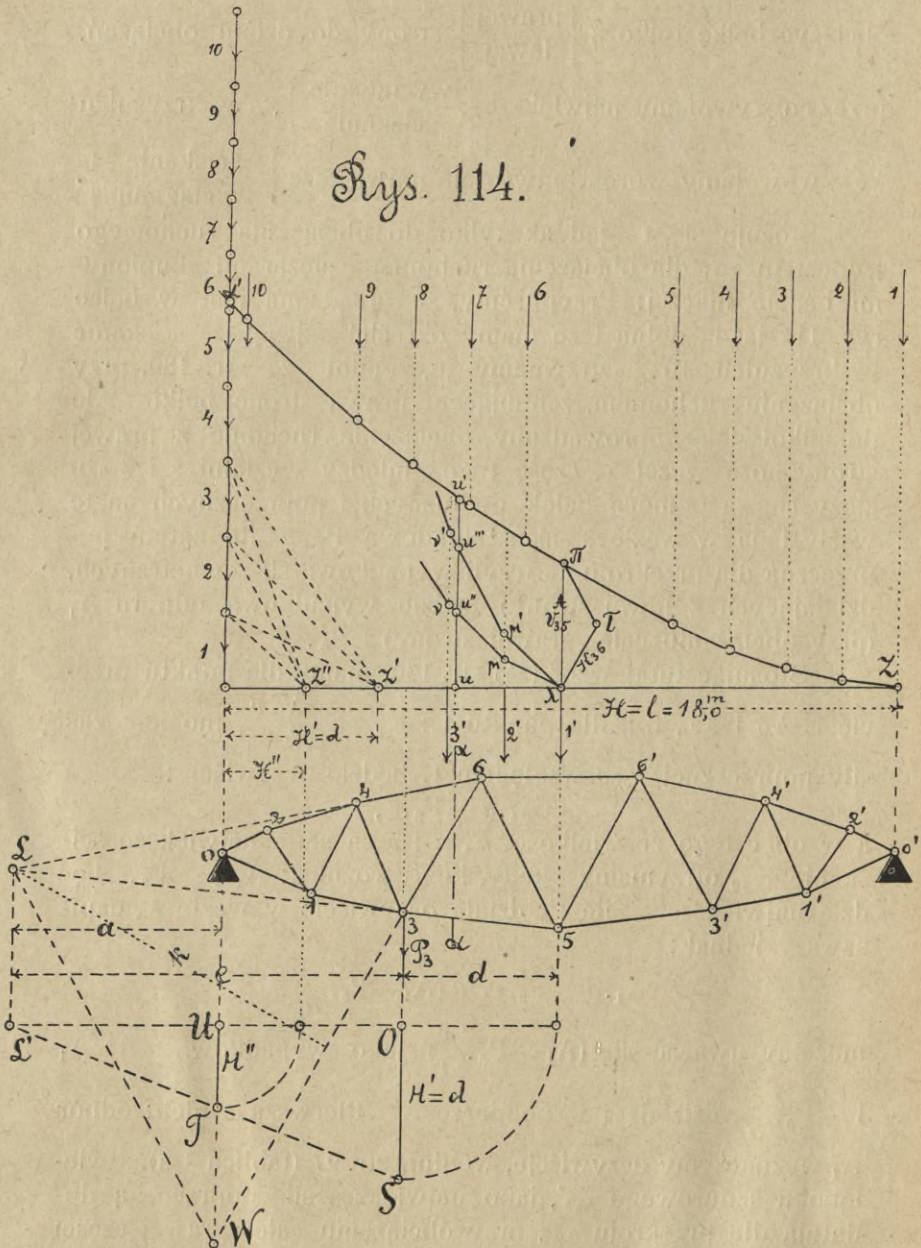
$$A_1 \cdot a - P_3 \cdot e = a \left( A_1 - P_3 \cdot \frac{e}{a} \right),$$

możemy uważać siłę  $\left( A_1 - P_3 \cdot \frac{e}{a} \right)$  jako wypadkową sił  $A_1$  i  $-P_3 \cdot \frac{e}{a}$ , działającą w podporze A. Pierwszą z nich: odpór  $A_1$  wyznaczmy oczywiście, według str. 97 (tablica 1-a), z wieloboku sznurowego  $Za'$ , jako największą siłę poprzeczną dodatnią dla przekroju  $aa$ , przy obciążeniu całej prawej części



belki aż do przekroju  $\alpha\alpha$ , ustawiliśmy koła parowozów w porządku, wskazanym na rys. 114: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i obrawszy za odległość biegową:  $H=l$ ; będzie to zatem

Rys. 114.





odcinek  $uu'$ , odpowiadający przekrojowi  $\alpha\alpha$ . Druga zaś siła —  $P_3$ , może być zupełnie tak samo uważana—co do absolutnej wielkości—jako odpór dla beleczki o rozpiętości  $d$ , przy obciążeniu jej prawej strony, a więc przyjąwszy za odległość biegunową  $H' = d$  i biegun  $Z'$ , wykreślimy mały wielobok sznurowy  $\lambda_{\mu\nu}$  dla kół parowozu ustawionych w położeniu  $1', 2', 3'$  [tak samo, jak na str. 118 (tabl. 1-a) koła parowozu  $9'_3 8'_3 7'_3$  względem belki poprzecznej  $\kappa\lambda$ ] i siła  $P_3 = uu'$ .

Ponieważ jednak nie zależy nam na samej sile  $P_3$ , lecz na sile  $P_3 \cdot \frac{e}{a}$ , więc zamiast wykreślać otrzymany tylko co wielobok  $\lambda_{\mu\nu}$ , wykreślimy odrazu wielobok  $\lambda_{\mu'\nu'}$  ze zmniejszoną odległością biegunową  $H'' = d \times \frac{a}{e}$ , (którą otrzymujemy wykreślnie, jako odcinek TU, zakresłając z jakiegokolwiek punktu na kierunku  $P_3$ , np. O, koło promienia  $d$  i łącząc punkt S z punktem przecięcia poziomej przez O i pionowej przez L, czyli L'). Szukaną siłą  $P_3 \times \frac{e}{a}$  będzie oczywiście odcinek  $uu''$ , wypadkową zaś tych dwóch sił, czyli siłą:  $A_1 - P_3 \cdot \frac{e}{a}$ , działającą w podporze A, będzie odcinek  $u'''u'$ . A zatem dla przekroju  $\alpha\alpha$ :  $K_{36} = -\frac{a \cdot u'''u'}{k}$ .

Największy z tych wszystkich odcinków  $u'''u'$  między węzłami 3 i 5 (oznaczymy go  $V_{35}^A$  — jest to zatem maximum wypadkowej sił  $A_1$  i  $-P_3 \cdot \frac{e}{a}$ , działającej w podporze A), odpowiada oczywiście jednemu z wierzchołków dolnego wieloboku sznurowego  $\lambda_{\mu'\nu'}$  i określa przekrój  $\beta\beta$ , do którego obciążywszy belkę z prawej strony, wywołamy w krzyżulcu 36 największe ściskanie. (W danym wypadku ten przekrój  $\beta\beta$  przechodzi przez węzeł 5, bo największym z odcinków jest  $\lambda\pi$ , t. j.  $V_{35}^A = \lambda\pi$ ). Samo zaś największe ściskanie  $K_{36}$  dla obciążenia ruchomego, zajmującego prawą stronę belki aż do węzła 5, otrzymamy wykreślnie, jako odcinek  $\tau\lambda$ , rozkładając siłę  $V_{35}^A$ , czyli  $(A_1 - P_3 \cdot \frac{e}{a})$ , działającą w podporze A — w kierunkach  $K_{36}$ ,  $G_{46}$  i  $D_{35}$ , czyli prowadząc przez końcowe punkty  $\lambda$  i  $\pi$  odcinka  $V_{35}^A$  równoległe do 36 i linii, łączącej L z W (punktem przecięcia 36 z linią działania siły  $V_{35}^A$ , czyli z pionową przez podporę A).







z powyższem, musimy dla mniejszej paraboli wziąć odległość biegunową, zmniejszoną w stosunku  $\frac{a}{e}$ , czyli zwiększyć w tym stosunku odcinek  $\frac{pd}{2}$ , t. j. wykreślić parabolę  $\mu\epsilon\alpha$  z odcinkiem  $\frac{pd}{2} \times \frac{e}{a} = \gamma\alpha$ . (Ten zwiększony odcinek  $\gamma\alpha$  otrzymujemy odra-  
zu na pionowej przez 3, odkładając od  $\kappa$  do  $\sigma$  odcinek  $\frac{pd}{2}$  i łącząc  $\sigma$  z L'). A ponieważ największe ściskanie otrzymamy według str. 187 dla obciążenia, doprowadzonego z prawej strony do działu obciążeń H, więc na pionowej przez H musimy otrzymać największy odcinek  $V_{35}^A$  między dwiema parabolami, w obec czego potrzebne są tylko dwa punkty  $\eta$  i  $\epsilon$ , leżące na tych parabolach, a otrzymujemy je sposobem wskazanym na str. 57, rys. 43. Ale nawet punkt  $\epsilon$ , a zatem i cała parabola  $\mu\epsilon\alpha$  okaże się zbyteczną, bo wielkość odcinka  $V_{35}^A$  otrzymamy również na pionowej przez 5, jako  $\mu\nu$ , łącząc punkt paraboli  $\eta$  z punktem  $\rho$ . Istotnie, skoro punkty  $\eta$  i  $\epsilon$  są wykreślone sposobem wspomnianym, to wskutek podobieństwa trójkątów mamy:

$$\frac{\vartheta\eta}{\vartheta\rho} = \frac{\kappa\chi}{\kappa\rho}; \text{ ale: } \vartheta\rho = \lambda; \kappa\rho = l; \kappa\chi = \vartheta\pi = \frac{\vartheta\rho \times \kappa\xi}{\kappa\rho} = \frac{\lambda \times \frac{pd}{2}}{l} = \frac{\lambda p}{2}; \text{ więc:}$$

$$\vartheta\eta = \frac{\lambda^2 \cdot p}{2l}.$$

Tak samo:

$$\frac{\vartheta\epsilon}{\vartheta\mu} = \frac{\gamma\beta}{\gamma\mu}; \text{ ale: } \vartheta\mu = \delta; \gamma\mu = d; \gamma\beta = \vartheta\zeta = \frac{\vartheta\mu \times \gamma\alpha}{\gamma\mu} = \frac{\delta \times \frac{pd}{2} \times \frac{e}{a}}{d}; \text{ więc:}$$

$$\vartheta\epsilon = \frac{\delta^2 \cdot p \cdot e}{2d \cdot a},$$

a zatem:  $\epsilon\eta = \vartheta\eta - \vartheta\epsilon = \frac{p}{2} \left( \frac{\lambda^2}{l} - \frac{\delta^2}{d} \times \frac{e}{a} \right);$   
wstawiając zaś zamiast  $\frac{\delta}{d} \times \frac{e}{a}$  równe mu według wzoru (62) str. 185 —  $\frac{\lambda}{l}$ , otrzymujemy:  $\epsilon\eta = \frac{p}{2} \cdot \frac{\lambda}{l} (\lambda - \delta).$

Podobnie:  $\mu\nu = \frac{\mu\rho \cdot \kappa\chi}{\kappa\rho} = \frac{(\lambda - \delta) \times \frac{\lambda p}{2}}{l} = \frac{p}{2} \cdot \frac{\lambda}{l} (\lambda - \delta),$   
więc:  $\epsilon\eta = \mu\nu.$

Tak więc, dla otrzymania największego ściskania  $K_{36}$  przy obciążeniu ruchomem jednostajnem wystarcza wyznaczyć



(sposobem str. 184) dział obciążeń H, odłożyć na podporze A  $\alpha\xi = \frac{\rho l}{2}$ , połączyć  $\xi$  z  $\rho$ , przeprowadzić przez punkt przecięcia tej linii z pionową przez H (t. j. przez  $\pi$ ) linię poziomą, połączyć  $\chi$  z  $\rho$  i odcinek  $\mu\nu$  będzie siłą poprzeczną  $V_{35}^A$ , którą rozłożymy tak, jak wyżej na str. 189, rys. 114 (t. j. prowadząc  $\mu\tau$  równoległe do  $K_{36}$  i  $\nu\tau$  równoległe do LW) i otrzymamy największe ściskanie  $K_{36}$  dla obciążenia ruchomego jednostajnego jako odcinek  $\tau\mu$ .

## § 2. Największe natężenia w krzyżulcach dla obciążenia złożonego.

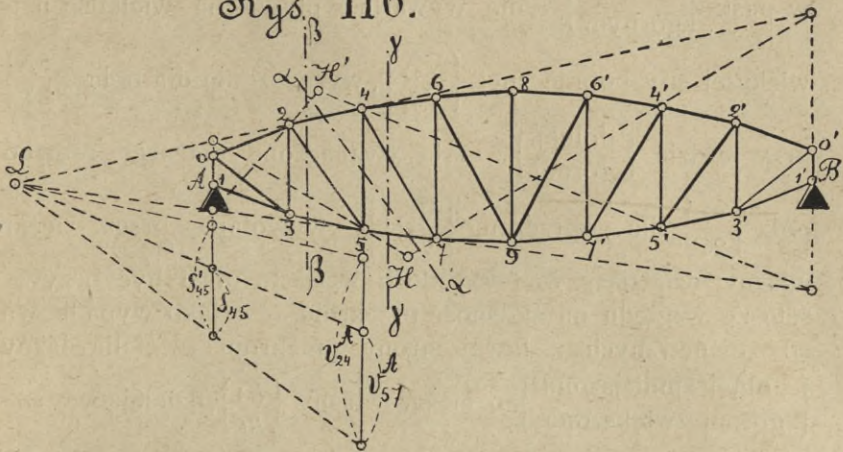
Otrzymane w sposób powyższy największe natężenia w krzyżulcach dla obciążenia ruchomego uzupełnić należy przez uwzględnienie wpływu ciężaru własnego. Wyznaczywszy więc siłę poprzeczną  $V_{36}^g$ , wywołaną przez ciężar własny dla przekroju  $\alpha\alpha$  (rys. 114), [będzie to, w obec jazdy dolnej, siła poprzeczna dla pola 35, otrzymana tak samo, jak (na rys. 67 str. 109) siła poprzeczna  $V_{fg}$  dla pola FG], rozkładamy ją, jak powyżej, w kierunkach: krzyżulca 36 i linii łączącej punkt L z punktem przecięcia  $V_{36}^g$  z kierunkiem krzyżulca 36, a dołączywszy otrzymane w ten sposób  $K_{36}^g$  do powyższego  $K_{36}$ , otrzymamy szukane największe natężenie w krzyżulcu 36 —  $K_{36}^{max}$ .

## § 3. Największe natężenia w słupach dla obciążenia ruchomego

wyznacza się zupełnie tak samo, jak w krzyżulcach, przeprowadziwszy przez dany słup 45 (rys. 116) przekrój ukośny  $\alpha\alpha$ . Dla obciążenia jednostajnego działem obciążeń będzie przy jeździe  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dolnej} \\ \text{górnej} \end{array} \right\}$  wyznaczony tak, jak wyżej (str. 184 i 186, rys. 112 i 113) punkt  $\left\{ \begin{array}{l} H \\ H' \end{array} \right\}$ ; po wyznaczeniu zaś działającej w podporze A największej siły poprzecznej  $\left\{ \begin{array}{l} V_{57}^A \\ V_{24}^A \end{array} \right\}$  dla jazdy  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dolnej} \\ \text{górnej} \end{array} \right\}$  (zgodnie z rys. 114 dla obciążenia ruchomego z sił skupionych, a z rys. 115 dla obciążenia ruchomego jednostajnego) otrzymujemy odrazu — według str. 131 (rys. 74) — na pionowej przez



Rys. 116.



podporę A wskazane na rys. 116 natężenie  $\left\{ \begin{matrix} S_{45} \\ S'_{45} \end{matrix} \right\}$ , odkładając gdziekolwiek na linii  $S_{45}$  odcinek  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^A \\ V_{24}^A \end{matrix} \right\}$  i łącząc końcowe jego punkty z punktem L przecięcia prętów 24 i 57.

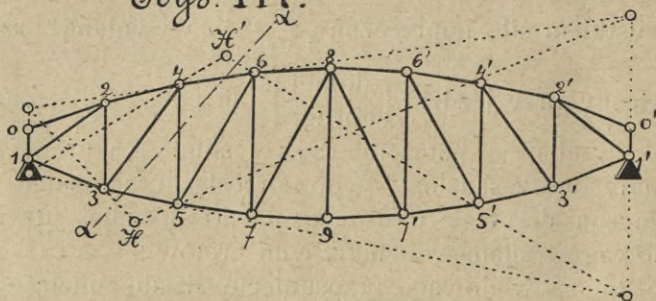
#### § 4. Największe natężenia w słupach dla obciążenia złożonego.

Do otrzymanego sposobem powyższym natężenia  $S_{45}$  w słupie dla obciążenia ruchomego dołączyć należy natężenie  $S_{45}^g$ , wywołane przez ciężar własny, t. j. wyznaczyć przedewszystkiem siłę poprzeczną  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^g \\ V_{24}^g \end{matrix} \right\}$ , wywołaną przez ciężar własny przy jeździe  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej} \\ \text{górnej} \end{matrix} \right\}$  dla pola  $\left\{ \begin{matrix} 57 \\ 24 \end{matrix} \right\}$ . Zaznaczyć jednak trzeba, że natężenie  $S_{45}$  w słupie 45 (rys. 116) wykreślamy na zasadzie, że po przecięciu ukośnym  $\alpha\alpha$  siła poprzeczna dla tego ukośnego przekroju musi utrzymywać równowagę z siłami wewnętrznymi prętów 24, 45 i 57. Skośność ta spowodowała przesunięcie działu obciążeń, który dla przekrojów pionowych  $\left\{ \begin{matrix} \gamma\gamma \\ \beta\beta \end{matrix} \right\}$  przez pola  $\left\{ \begin{matrix} 57 \\ 24 \end{matrix} \right\}$  dla jazdy  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej} \\ \text{górnej} \end{matrix} \right\}$  byłby (rys. 116) w punkcie  $\left\{ \begin{matrix} H_1, \text{ na lewo od } H \\ H'_1, \text{ na prawo od } H' \end{matrix} \right\}$ ,



a poza tem — w obec działania obciążenia ruchomego tylko w pasie  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnym} \\ \text{górnym} \end{matrix} \right\}$  — nie wywarła wpływu na wielkość największej siły poprzecznej  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^A \\ V_{24}^A \end{matrix} \right\}$ , wyznaczonej dla pola  $\left\{ \begin{matrix} 57 \\ 24 \end{matrix} \right\}$  przy jeździe  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej} \\ \text{górnjej} \end{matrix} \right\}$ . Ale wyznaczona dla tego samego pola  $\left\{ \begin{matrix} 57 \\ 24 \end{matrix} \right\}$  siła poprzeczna  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^g \\ V_{24}^g \end{matrix} \right\}$ , wywołana przez ciężar własny, działający we wszystkich węzłach, musi być oczywiście ze względu na skośność przekroju  $\alpha\alpha$  — jako wypadkowa sił zewnętrznych z lewej strony przekroju  $\alpha\alpha$  — dla jazdy  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej zmniejszona} \\ \text{górnjej zwiększona} \end{matrix} \right\}$  o ciężar własny  $\left\{ \begin{matrix} g_4 \\ g_5 \end{matrix} \right\}$ , działający w węźle  $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \right\}$ , a więc — jako skierowana w górę — wyniesie teraz  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^g + g_4 \\ V_{24}^g - g_5 \end{matrix} \right\}$  dla jazdy  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej} \\ \text{górnjej} \end{matrix} \right\}$ . Otrzymaną w ten sposób dodatkową siłę poprzeczna  $\left\{ \begin{matrix} V_{57}^g + g_4 \\ V_{24}^g - g_5 \end{matrix} \right\}$  rozłożyć trzeba w kierunku prętów 24, 45 i 57 sposobem wskazanym na str. 131, rys. 74, a uzupełnione przez dołączenie składowej w kierunku 45 natężenie  $S_{45}$  będzie największem natężeniem  $S_{45}^{max}$ . Zupełnie tak samo rozumując, przekonamy się, że dla belki tego samego typu (rys. 117), ale z odwrotnymi krzyżulcami

Rys. 117.



(wznoszącymi się ku środkowi belki) — w obec inaczej idącego teraz przekroju  $\alpha\alpha$  — przy urządzeniu jazdy  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej zwiększyć} \\ \text{górnjej zmniejszyć} \end{matrix} \right\}$



należy siłę poprzeczną  $\left\{ \begin{matrix} V_{35}^g \\ V_{46}^g \end{matrix} \right\}$  dla ciężaru własnego, wyznaczoną dla pola  $\left\{ \begin{matrix} 35 \\ 46 \end{matrix} \right\}$ , o ciężar własny  $\left\{ \begin{matrix} g_4 \\ g_5 \end{matrix} \right\}$ , działający w węźle  $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \right\}$ , a więc jako skierowana w górę wyniesie ona teraz  $\left\{ \begin{matrix} V_{35}^g - g_4 \\ V_{46}^g + g_5 \end{matrix} \right\}$  dla jazdy  $\left\{ \begin{matrix} \text{dolnej} \\ \text{górnjej} \end{matrix} \right\}$ . Siłę tę rozłożyć trzeba w kierunkach prętów 46, 45 i 35—jak wyżej—a uzupełnione przez dołączenie składowej w kierunku 45 natężenie  $S_{45}$  będzie największem natężeniem  $S_{45}^{max}$ .

### § 5. Największe natężenia w pasach.

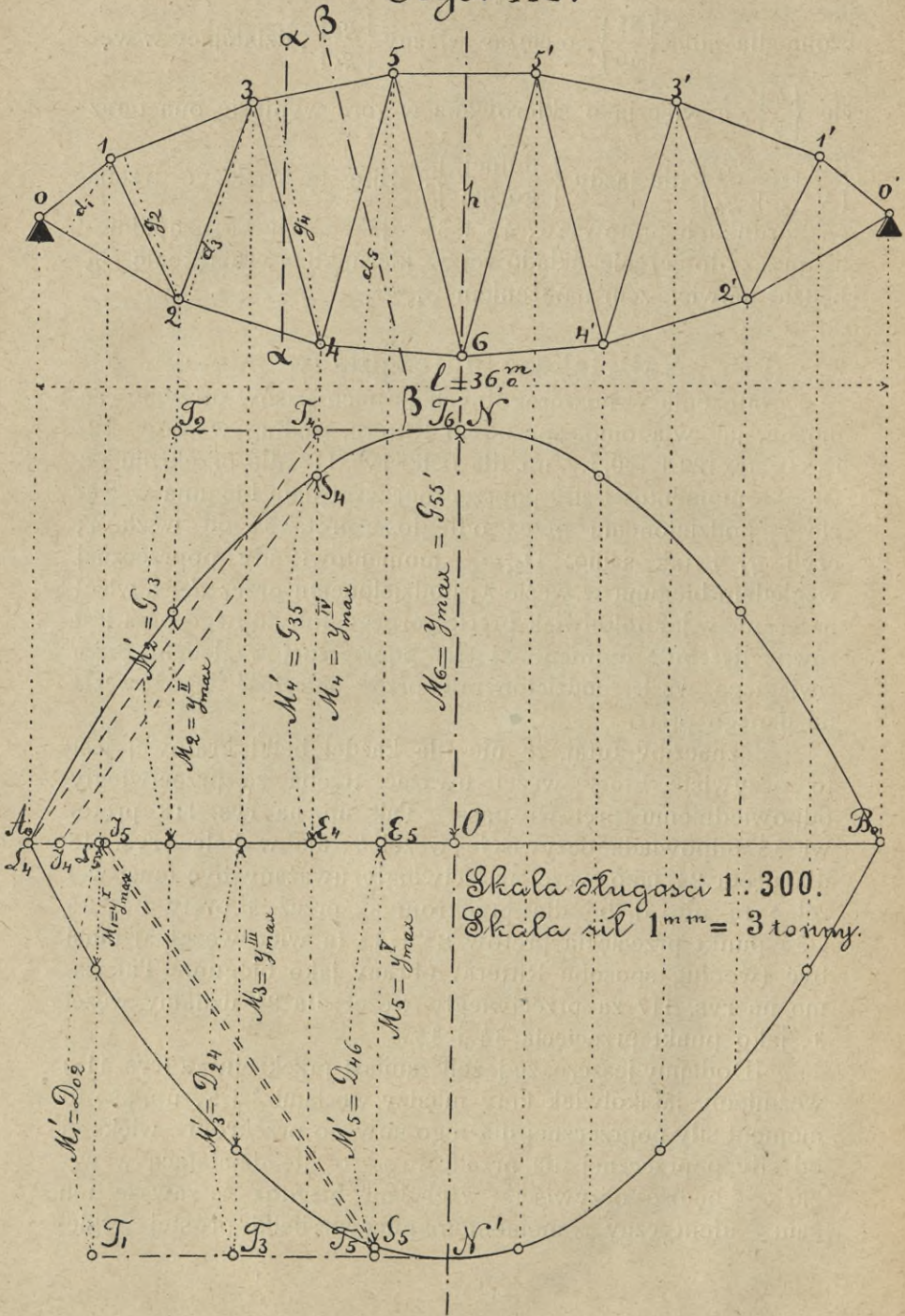
Natężenia w poszczególnych prętach pasów otrzymywać można, jak wiadomo, sposobem Rittera, według wzorów (52) i (53) str. 129 i 130, t. j. np. dla belki rys. 118, dla przekroju  $\alpha\alpha$ :  $G_{35} = -$  momentowi siły poprzecznej względem bieguna w węźle 4, podzielonemu przez odległość pręta 35 od węzła 4, czyli  $g_4$  i tak samo:  $D_{24} = -$  momentowi siły poprzecznej względem bieguna w węźle 3, podzielonemu przez  $d_3$ , a więc: **natężenie w jakimkolwiek pręcie górnego, lub dolnego pasa jest równe liczebnie momentowi siły poprzecznej względem przeciwnego węzła, podzielonemu przez odległość tegoż węzła od danego pręta.**

Zaznaczmy tutaj, że nie dla każdej belki kratowej jest to oczywiście, **który** węzeł uważać trzeba za przeciwny odpowiedniemu prętowi pasa. Tak np. na rys. 118 prętowi 35 odpowiada oczywiście węzeł 4, ale w belce rys. 116 dla pręta 24 jako węzeł przeciwny uważany być musi węzeł 5 (a **nie** 3), bo dla przekroju  $\beta\beta$  przez 3 pręty 24, 25 i 35 punkt przecięcia prętów 25 i 35 (a więc węzeł 5) musi być (według sposobu Rittera) obrany jako biegun. Tak samo na rys. 117 za przeciwny węzeł dla 24 uznamy węzeł 3, jako punkt przecięcia 34 i 35.

[Dodajmy jeszcze, że jeżeli zamiast przekroju  $\alpha\alpha$  (rys. 118) weźmiemy jakikolwiek inny między węzłami 3 i 5, np.  $\beta\beta$ , to moment siły poprzecznej dla tego nowego przekroju—większej od siły poprzecznej dla przekroju  $\alpha\alpha$  o siłę, działającą w węźle 4—będzie oczywiście **względem bieguna 4** zawsze ten sam—identyczny z momentem gnącym belki prostej wzglę-



rys. 118.





dem przekroju przez punkt 4 (str. 47), t. j. z momentem sił zewnętrznych dla tegoż węzła].

Największe natężenie w pasach wywołane zostaje, jak wiadomo (str. 180), przez całkowite obciążenie belki. Dla otrzymania zatem największych natężeń w poszczególnych prętach pasów należy wyznaczyć największe momenty dla właściwych węzłów, rozmieszczając odpowiednio ruchome obciążenie belki według wskazówek na str. 80 i 81, tabl. 1-a, na której dla belki o rozpiętości teoretycznej:  $l=36,0$  m wyznaczyliśmy największe momenty  $y^I_{max}$ ,  $y^{II}_{max}$ ,  $y^{III}_{max}$ ... dla przekrojów I, II, III, IV, V, VI przy obciążeniu całkowitem. Więc np., skoro rozpiętość belki rys. 118 jest także  $l=36,0$  m, a węzły 1, 2, 3, 4, 5, 6 odpowiadają przekrojom I, II, III, IV, V, VI tabl. 1-ej, to odłożywszy rzędne  $y^I_{max}$ ,  $y^{II}_{max}$ ... jako momenty  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ..., dla których skalą będzie według str. 93:  $1\text{ mm}=36$  tonnometrów, otrzymujemy krzywą największych momentów  $A_0NB_0$  i natężenie w dowolnym przecię pasa, np.  $G_{35}$ , będzie:  $G_{35} = \frac{M_4}{g_4} = \frac{51,9 \times 36}{10,66} = 175,3$  tonnometrów.

Przyjąwszy zaś jeden z momentów — zazwyczaj środkowy — a więc  $M_6$ , za natężenie  $G_{55}'$ , które jest  $= \frac{M_6}{h}$ , zmieniliśmy

przez to w tym samym stosunku  $\frac{1}{h}$  skalę rysunku; skoro zaś

$M_6=ON$  było odłożone w skali  $1\text{ mm}=36$  tonnometrów, to obecna skala będzie:  $1\text{ mm} = \frac{36\text{ tonnometrów}}{h\text{ metrów}} = \frac{36}{12} = 3$  tonny. Ta sama skala musi być już oczywiście stosowaną do pozostałych

natężeń, a więc np. natężenie  $D_{46}$ , równe  $\frac{M_5}{d_5}$ , nie może być

wyrażone przez odcinek:  $M_5 = E_5 S_5$ , lecz przez odcinek

$M'_5 = \frac{M_5}{d_5} \times h = E_5 T_5$ , który otrzymamy wykreślnie, odkładając

od  $E_5$  do  $J_5$  i  $L_5$  długości  $d_5$  i  $h$  i prowadząc przez  $L_5$  równoległą do  $J_5 S_5$ . Tak samo wyznaczymy natężenie  $G_{35}$  jako

$M'_4 = E_4 T_4 = \frac{M_4}{g_4} \times h$ , otrzymane przez odłożenie  $E_4 J_4 = g_4$ ,

$E_4 L_4 = h$  i przeprowadzenie równoległej przez  $L_4$  do  $J_4 S_4$ .

Wyznaczone w ten sposób punkty  $T_5$ ,  $T_4$ ,  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $T_1$  określają krzywą największych natężeń pasa górnego  $NT_4 T_2$  i dolnego —  $N' T_5 T_3 T_1$ . Krzywe największych natężeń w pa-



sach przedstawiają zazwyczaj linię prostą łamaną, bo natężenia w poszczególnych prętach nie są jednakowe, — zwiększają się ku środkowi belki. W danym jednak wypadku (rys. 118) krzywe te są liniami prostymi, równoległymi do osi  $A_0B_0$ , a więc natężenia w poszczególnych prętach obu pasów są jednakowe (z wyjątkiem, wskazanym poniżej). Rezultat ten osiągnięty został przez odpowiedni dobór wysokości:  $d_5, g_4, d_3, g_2, d_1$ , możliwy oczywiście tylko w tym razie, jeżeli kształt belki kratowej nie jest dany, a dana jest tylko jej wysokość pośrodku ( $h$ ) i postawiony np. warunek, aby odstępki poziome między węzłami były równe: wychodząc bowiem z założenia, że przy wysokości  $h$  natężenie  $G_{55}$ , (w pręcie 55') będzie  $= \frac{M_6}{h}$  i wyrażone przez odcinek  $M_6$ , wszystkie zaś inne natężenia w pasach mają być = temuż  $M_6$ , widzimy, że np. z wzoru dla natężenia  $D_{46}$ :  $D_{46} = \frac{M_5}{d_5}$  — o ile za  $d_5$  weźmiemy odcinek  $E_5J_5$ , wykreślony przez odłożenie:  $E_5L_5 = h$  i przeprowadzenie przez  $S_5$  równoległej do  $T_5L_5$ , t. j.  $d_5 = E_5J_5 = \frac{E_5L_5}{E_5T_5} \times E_5S_5 = \frac{h}{M_6} \times M_5$  — otrzymamy:  $D_{46} = \frac{M_6}{h}$ . (Podobnie z wzoru dla natężenia:  $G_{35} = \frac{M_4}{g_4}$  — o ile za  $g_4$  weźmiemy odcinek  $E_4J_4$ , wykreślony przez odłożenie  $E_4L_4 = h$  i przeprowadzenie przez  $S_4$  równoległej do  $T_4L_4$ , t. j.  $g_4 = E_4J_4 = \frac{E_4L_4}{E_4T_4} \times E_4S_4 = \frac{h}{M_6} \times M_4$  — otrzymamy  $G_{35} = \frac{M_6}{h}$ ). Przy danej wysokości belki  $h$  i równych odstępach między węzłami mamy ustalone odrazu położenie węzłów 6, 5 i 5'; położenie węzła 4 określimy za pomocą wyznaczonego już  $d_5$ , położenie węzła 3 za pomocą  $g_4$ , a wyznaczywszy w powyższy sposób jeszcze  $d_3, g_2$  i  $d_1$ , wykreślimy podobnie kolejno węzły 2, 1 i 0 i nadamy belce kształt taki (rys. 118), przy którym natężenia w obu pasach będą jednakowe: w pasie **dolnym** — dla wszystkich prętów, w pasie zaś **górnym** — z wyjątkiem pręta skrajnego 01, dla którego natężenie nie będzie równe pozostałym w obec tego, że pręt ten powstał jako połączenie węzła 1 z węzłem 0, a nie przez zastosowanie powyższej konstrukcji.

Na podobnych zasadach oparty został obecnie rzadko stosowany ustrój belek kratowych Pauli'ego, według którego



zbudowano w drugiej połowie ubiegłego stulecia szereg piękných mostów o znacznych rozpiętościach, np. most między Zurychem i Bazyleą przez Aar o 5-u przęsłach, z największym 60-metrowym pośrodku, most przez Ren pod Moguncją, którego 4 największe otwory liczą po 90 metrów, a największa wysokość belki kratowej pośrodku wynosi 15 metrów.

## § 6. Belki kratowe równoległe.

Belki kratowe równoległe należą do najczęściej stosowanych w praktyce mostowej. Widzieliśmy już kilka typów tych belek (rys. 89, 90, 91, 92, 93 i 94). Z pomiędzy belek ze słupami typ na rys. 90 ze **ściskany**mi krzyżulcami stosuje się niemal wyłącznie do mostów drewnianych, dla żelaznych zaś praktyczniejszy jest typ rys. 89, bo jest to celowe, że pręty **ściskane** (słupy), a więc podlegające (zależnemu od długości pręta) wyboczeniu, są **krótsze** od **wyciąganych** krzyżulców.

Rozpatrzmy kolejno, jakie zachodzą dla belek równoległych uproszczenia przy wyznaczaniu największych natężeń w pasach, krzyżulcach i słupach.

**a) W pasach:** Dla belek kratowych równoległych wysokość jest stała na całej długości, więc rzędne krzywej największych momentów mogą oczywiście być uważane — przy odpowiedniej zmianie skali — wprost za natężenia w poszczególnych prętach pasów, a zatem np. dla belki kratowej równoległej o rozpiętości teoretycznej:  $l = 36,0$  m (rys. 119) i wysokości:  $h = 4,0$  m, dla której moment największy pośrodku belki jest według str. 92, tablicy 1-ej:  $M_{max} = H \cdot y_{max} = 18 \times 58,5 \times 2 = 2106$  tonnometrów, otrzymamy największe natężenie  $G_{55}$  w pasie górnym:

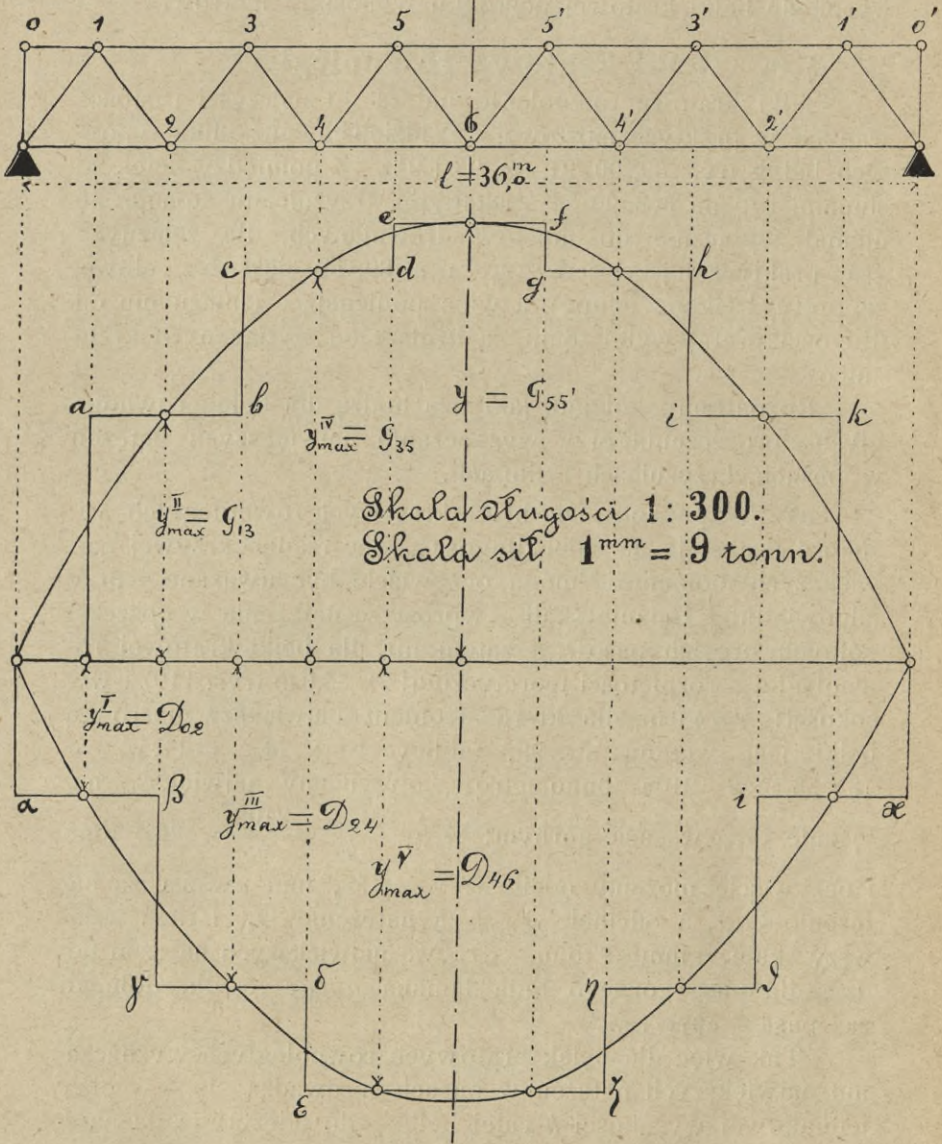
$$G_{55}' = \frac{M_{max}}{h} = \frac{2106}{4} = 526,5 \text{ tonn}$$

i oczywiście możemy odcinek:  $y_{max} = 58,5$  mm uważać za natężenie  $G_{55}'$ , a odcinek  $y_{max}^V$  za natężenie  $D_{46}$  i t. d., wzięwszy skalę:  $1 \text{ mm} = 9 \text{ tonn}$ . Krzywą największych natężeń będzie dla pasa górnego linia łamana  $abcde\dots$ , dla dolnego zaś pasa —  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots$

Tak więc dla belek kratowych równoległych wyznaczenie największych natężeń w pasach sprowadza się — w obec jednakowej wysokości  $h$  całej belki — do odczytywania natężeń wprost z krzywej największych momentów z zastosowaniem tylko odpowiedniej skali.



Rys. 119.





**b) W krzyżulcach:** Dla wyznaczenia największego natężenia w krzyżulcu 47 belki rys. 120a, wykreślamy przedewszystkiem największą siłę poprzeczną  $V_{47}$  według

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{str. 187, 188 i 189 rysunek 114} \\ \text{str. 190, 191 i 192 rysunek 115} \end{array} \right\} \text{ dla obciążenia ruchomego}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{z ciężarów skupionych} \\ \text{jednostajnego} \end{array} \right\}$  z tą tylko różnicą, że dla belki równoległej rys. 120a punkt przecięcia L prętów 46 i 57 będzie w nieskończoności, a zatem:  $a=e$ , więc: **1)** dla obciążenia ruchomego z ciężarów skupionych odległość biegunowa

$H'' = d \times \frac{a}{e} = d$  i  $V_{57}$  (albo  $V_{47}$ ) otrzymuje się zupełnie tak

samo, jak  $V_{35}^A$  na rys. 114. (ale wszystkie wieloboki dodatkowe będą identyczne) i **2)** dla obciążenia ruchomego jednostajnego otrzymamy obecnie jako dział obciążeń punkt H, oczywiście na tej samej pionowej linii tak dla jazdy dolnej, jak dla górnej — a wzór (62) str. 185 da teraz, w obec  $e=a$ :

$\frac{\lambda}{l} = \frac{\delta}{d}$ , albo:  $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{l}{d}$ , z kąd wynika, że w tym samym stosunku będą do siebie odpory  $A_1$  i  $P_5$  dla belek o rozpiętości  $l$  i  $d$ , wywołane przez obciążenie odstępów  $\lambda$  i  $\delta$  (bo według

wzoru (22) na str. 64 odpór  $A_1 = \frac{g\lambda^2}{2l}$  i  $P_5 = \frac{g\delta^2}{2d}$  więc:

$$\frac{A_1}{P_5} = \frac{\lambda^2}{\delta^2} \times \frac{d}{l} = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{l}{d}.$$

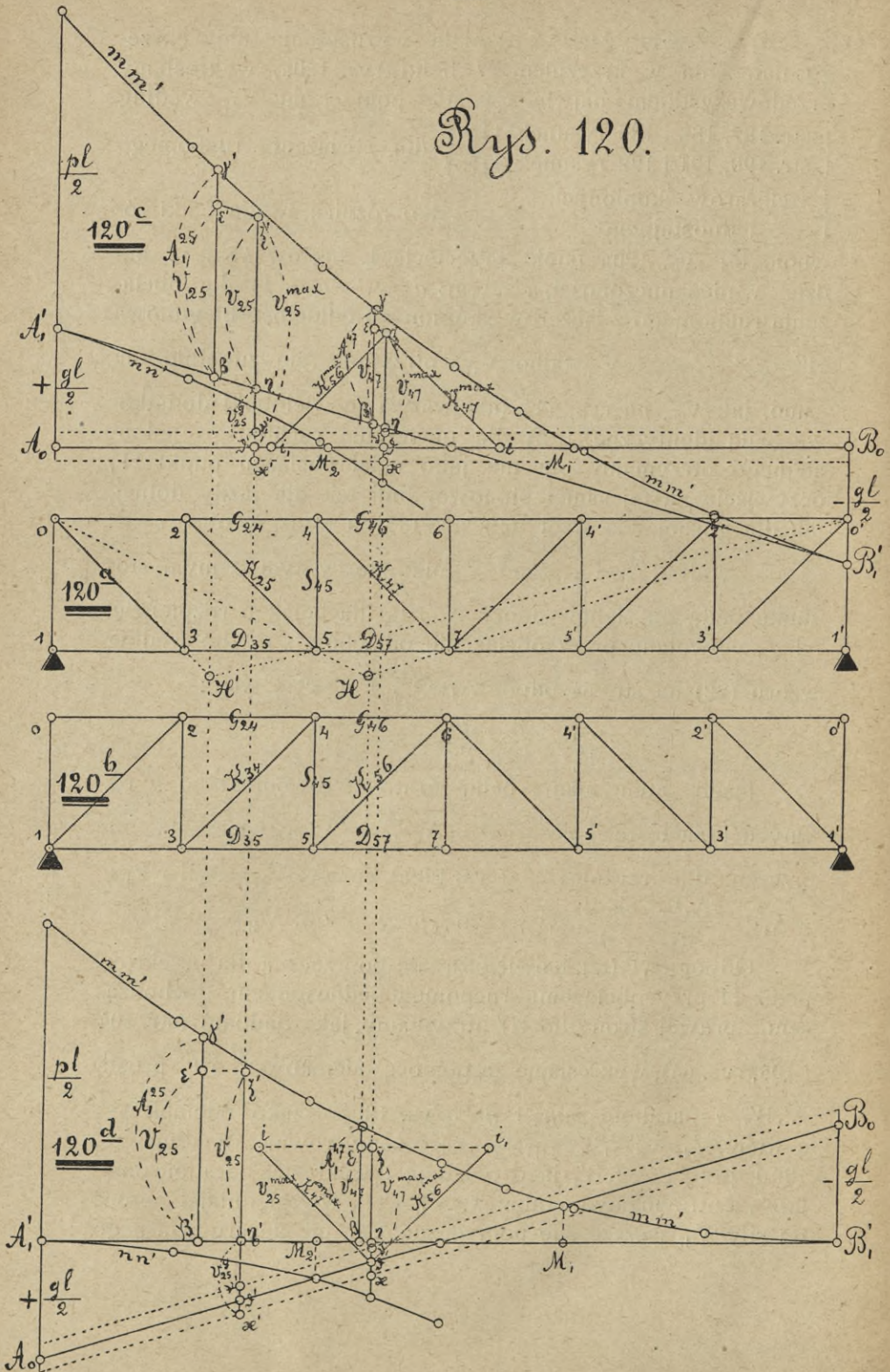
Jeżeli zatem mamy belkę kratową równoległą o  $n$  równych polach, to  $\frac{d}{l} = \frac{1}{n}$  i  $P_5 = A_1 \frac{d}{l} = \frac{A_1}{n}$ , a więc siła poprzeczna dla krzyżulca 47 (rys. 120a) będzie:  $V_{47} = A_1^{47} - P_5 = A_1^{47} - \frac{A_1^{47}}{n} = \frac{n-1}{n} A_1^{47}$ , czyli (przy  $n=6$ ):  $V_{47} = \frac{5}{6} A_1^{47}$ .

Odpór  $A_1^{47}$  (t. j. największą siłę poprzeczną dla przekroju przez H przy obciążeniu ruchomem jednostajnem, dochodzącem z prawej strony do H) otrzymamy, jak wiadomo (str. 104 i 105, rys. 64), wykreślając za pomocą odcinków  $\frac{gl}{2}$  i  $\frac{pl}{2}$  prostą

$A'_1B'_1$  i parabole  $mm'$  i  $nn'$  (rys. 120c) — jako odcinek  $\beta_\gamma$ , a więc:  $V_{47} = \frac{5}{6} A_1^{47} = \frac{5}{6} \beta_\gamma = \beta_\varepsilon$ . [Możemy również według rys. 120d przyjąć  $A'_1B'_1$  jako poziomą i wykreślić parabole  $mm'$  i  $nn'$ , a otrzymamy podobnie:  $V_{47} = \beta_\varepsilon$ ]. Uwzględniając oprócz tej siły  $V_{47}$  jeszcze siłę poprzeczną  $V_{s_{47}}$  od ciężaru własnego



# Rys. 120.





dla pola krzyżulca 47, którą otrzymujemy, zgodnie ze str. 109, rys. 67, jako odcinek  $\vartheta\eta$  pośrodku tegoż pola, dodajemy te obie siły, prowadząc (rys. 120c i d) przez  $\varepsilon$  równoległą do  $A'_1B'_1$  i otrzymaną siłę  $V_{47}^{max}=\vartheta\zeta$  rozkładamy w kierunkach  $K_{47}$  i równoległych do siebie pasów, czyli prowadzimy równoległą przez  $\zeta$  (a na rys. 120d — przez  $\vartheta$ ) do 47 i odcinek  $\zeta i$  (względnie  $i\vartheta$ ) będzie szukanym największym natężeniem w krzyżulcu:  $K_{47}^{max}$ . Dla belki kratowej równoległej z krzyżulcami wznoszącymi się ku środkowi belki (rys. 120b) otrzymamy oczywiście tak samo:  $V_{56}^{max}=V_{47}^{max}=\vartheta\zeta$  i  $K_{56}^{max}$  — jako odcinek  $\zeta i_1$  (względnie  $i_1\vartheta$ ).

Przy obciążeniu ruchomem z ciężarów skupionych dołączamy do wyznaczonej za pomocą wieloboków sznurowych  $V_{47}$  siłę  $V_{47}^s$  i podobnie jak wyżej otrzymujemy  $K_{47}^{max}$ .

**c) W słupach:** Największe natężenie w słupach belk kratowych równoległych wyznacza się najprościej przy rozważaniu równowagi sił, działających w odpowiednim wę-

źle. Tak np. przy jeździe  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dolnej rys. 120a} \\ \text{górnej rys. 120a} \\ \text{dolnej rys. 120b} \\ \text{górnej rys. 120b} \end{array} \right\}$  dla rozpatry-

wanego **nieobciążonego** ruchomymi siłami węzła  $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right\}$  działa-

jące tam siły  $\left\{ \begin{array}{l} K_{47}, S_{45}, G_{24}, G_{46} \\ K_{25}, S_{45}, D_{35}, D_{57} \\ K_{34}, S_{45}, G_{24}, G_{46} \\ K_{56}, S_{45}, D_{35}, D_{57} \end{array} \right\}$  muszą być w równo-

wadze, w obec zaś prostopadłego kierunku słupów do pasów, natężenie  $S_{45}$  musi być **równe, ale odwrotne** pionowej

składowej natężenia  $\left\{ \begin{array}{l} K_{47} \\ K_{25} \\ K_{34} \\ K_{56} \end{array} \right\}$ , obliczonej na str. 201, t. j.  $S_{45} =$

$= \left\{ \begin{array}{l} V_{47} \\ V_{25} \\ V_{34} \\ V_{56} \end{array} \right\}$ , a jeżeli oprócz obciążenia ruchomego uwzględnia-



my także ciężar własny:  $S_{45}^{max} = \begin{Bmatrix} V_{47}^{max} \\ V_{25}^{max} \\ V_{34}^{max} \\ V_{56}^{max} \end{Bmatrix}$ . Przytem, skoro

krzyżulec  $\begin{Bmatrix} 47 \\ 25 \\ 34 \\ 56 \end{Bmatrix}$ , jako  $\begin{Bmatrix} \text{spadający} \\ \text{spadający} \\ \text{wznoszący się} \\ \text{wznoszący się} \end{Bmatrix}$  ku środkowi belki, jest

zgodnie ze str. 183  $\begin{Bmatrix} \text{wyciąganym} \\ \text{wyciąganym} \\ \text{ściskany} \\ \text{ściskany} \end{Bmatrix}$ , to natężenie  $S_{45}^{max}$  jest

$\begin{Bmatrix} \text{ściskaniem} \\ \text{ściskaniem} \\ \text{wyciąganiem} \\ \text{wyciąganiem} \end{Bmatrix}$ .

O ile ciężar własny przyjmiemy jako rozłożony na wszystkie (górne i dolne) węzły belki, to w rozważanym wyżej

węźle  $\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$  przybywa do działających tamże sił jeszcze ten ciężar

własny węzła, a po dołączeniu w węźle  $\begin{Bmatrix} \text{górnym } 4 \\ \text{dolnym } 5 \\ \text{górnym } 4 \\ \text{dolnym } 5 \end{Bmatrix}$  ciężaru

$\begin{Bmatrix} g_4 \\ g_5 \\ g_4 \\ g_5 \end{Bmatrix}$  natężenie  $\begin{Bmatrix} \text{ściskające} \\ \text{ściskające} \\ \text{wyciągające} \\ \text{wyciągające} \end{Bmatrix}$  w słupie 45 oczywiście

$\begin{Bmatrix} \text{zwiększy} \\ \text{zmniejszy} \\ \text{zmniejszy} \\ \text{zwiększy} \end{Bmatrix}$  się o ten ciężar  $\begin{Bmatrix} g_4 \\ g_5 \\ g_4 \\ g_5 \end{Bmatrix}$  i wyniesie zatem

$\begin{Bmatrix} V_{47}^{max} + g_4 \\ V_{25}^{max} - g_5 \\ V_{34}^{max} - g_4 \\ V_{56}^{max} + g_5 \end{Bmatrix}$ . Zauważmy jeszcze, że przy obciążeniu jedno-

stajnem ciężary własne węzłów bywają przyjmowane zazwyczaj jednakowe dla danego pasa; jeżeli więc odłożymy w obie



strony od osi  $A_0B_0$  (rys. 120c i d) odcinki = ciężarowi własnemu węzła ( $g_n$ ), to natężenie w słupie  $S_{45}^{max}$  otrzymamy dla

$$\text{jazdy} \left\{ \begin{array}{l} \text{dolnej} \\ \text{górnjej} \\ \text{dolnej} \\ \text{górnjej} \end{array} \right\} \text{ jako odcinek} \left\{ \begin{array}{l} x \zeta = V_{47}^{max} + g_4 \\ y' \zeta' = V_{25}^{max} - g_5 \\ y' \zeta' = V_{34}^{max} - g_4 \\ x \zeta = V_{56}^{max} + g_5 \end{array} \right\}.$$

Przedstawiając na jednym rysunku—121—te 4 wypadki, z oznaczeniem dla każdego z nich obciążenia ruchomego, dochodzącego do właściwego działu obciążeń  $H$ , wyprowadzamy z powyższego wniosek następujący:

Natężenie w słupie 45 jest równe liczebnie pionowej

$$\text{składowej natężenia w sąsiednim krzyżulcu} \left\{ \begin{array}{l} 47 \\ 25 \\ 34 \\ 56 \end{array} \right\}, \text{ spotykającym}$$

się z tym słupem na nieobciążonym siłami ruchomymi pasie,

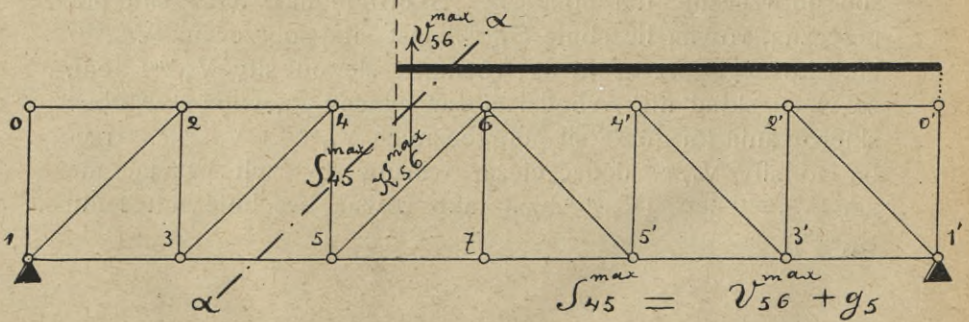
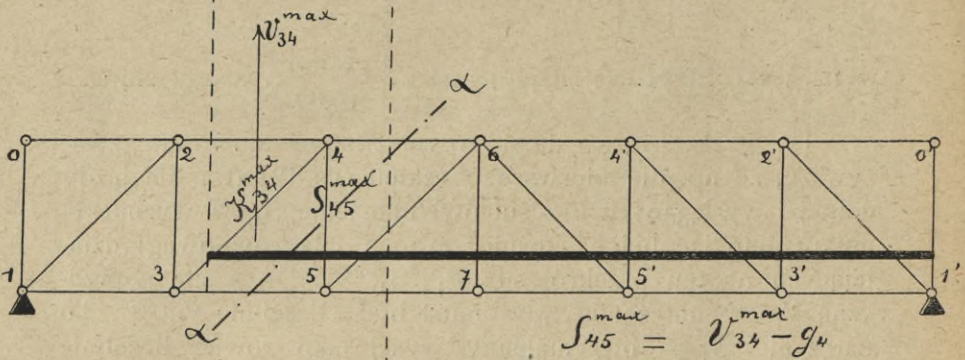
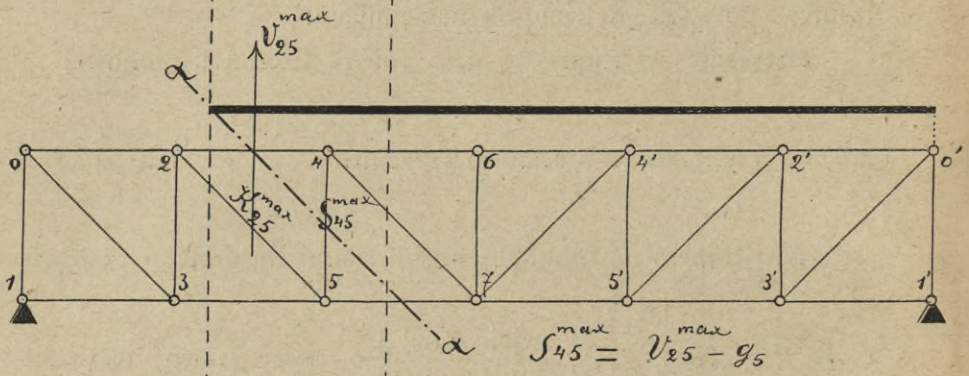
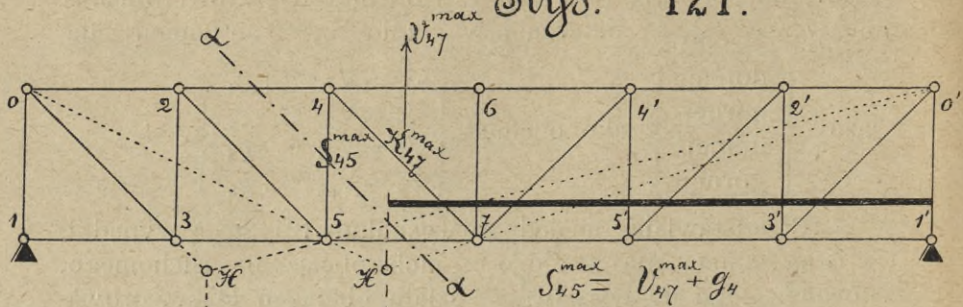
$$\text{czyli w węźle} \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \text{zwiększonej} \\ \text{zmniejszonej} \end{array} \right\} \text{ o ciężar własny tegoż}$$

węzła, jeżeli krzyżulec znajduje się z  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewej} \end{array} \right\}$  strony słupa.

[Powyższe prawo da się również łatwo udowodnić, zważywszy, że np. dla pierwszego szkicu rys. 121 (t. j. dla jazdy **dolnej** i **wyciąganych** krzyżulców) natężenie  $S_{45}^{max}$  wyznaczamy, przecinając belkę skośnie po  $\alpha\alpha$ . Dla równowagi działających na ten przekrój sił  $G_{24}$ ,  $S_{45}^{max}$  i  $D_{57}$  z siłą poprzeczną  $V_{\alpha\alpha}^{max}$  natężenie  $S_{45}^{max}$  musi być = liczebnie  $V_{\alpha\alpha}^{max}$ . To natężenie  $S_{45}^{max}$  otrzymaliśmy **wyżej** jako równe liczebnie pionowej składowej natężenia w krzyżulcu  $K_{47}$ , czyli  $V_{47}^{max}$ , siłę poprzeczną dla pola 47. Skoro jednak **teraz** siłą poprzeczną, równą liczebnie  $S_{45}^{max}$ , jest siła poprzeczna  $V_{\alpha\alpha}^{max}$  dla **skośnego przekroju**  $\alpha\alpha$ , różniąca się od siły  $V_{47}^{max}$  tem, że w jej skład nie wchodzi ciężar własny  $g_4$ , więc — w obec skierowania ku górze sił poprzecznych  $V_{47}^{max}$  i  $V_{\alpha\alpha}^{max}$  — trzeba do siły  $V_{47}^{max}$  **dodać** ciężar własny  $g_4$ , czyli przyjąć nie siłę  $V_{47}^{max}$ , lecz  $(V_{47}^{max} + g_4)$  jako równą liczebnie natężeniu  $S_{45}^{max}$ ].



Rys. 121.

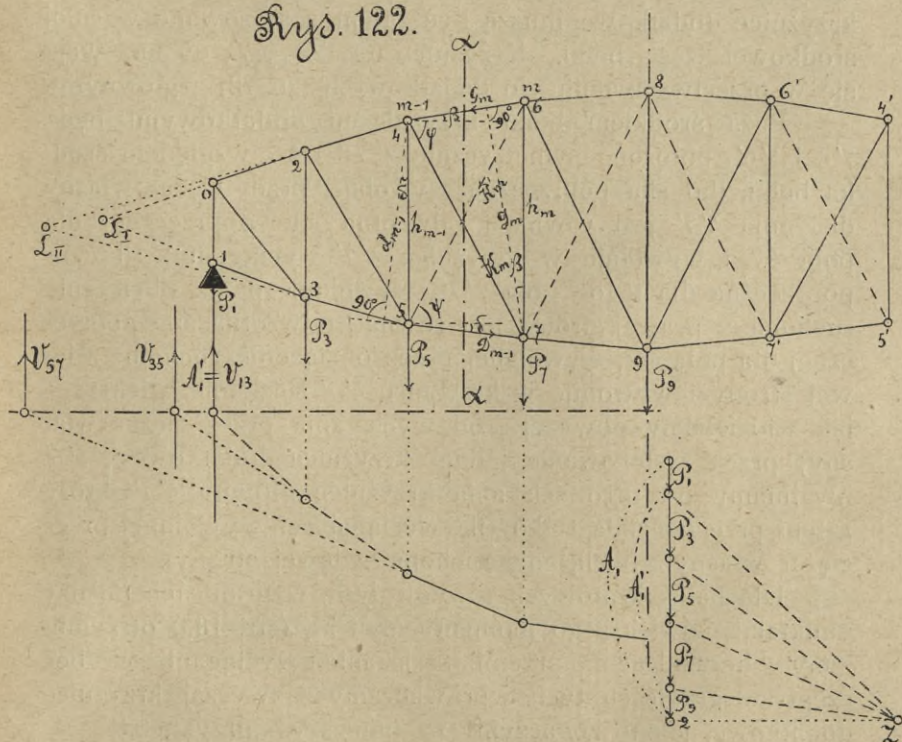




### § 7. Krzyżulce dodatkowe.

Weźmy pod uwagę belkę kratową ze słupami (rys. 122) z jazdą dolną i wyznaczmy dla działającego na nią ciężaru własnego położenie siły poprzecznej  $V_{13}$ ,  $V_{35}$ ,  $V_{57}$  za pomocą wieloboku sznurowego, a także punkty przecięcia odpowiednich prętów pasów  $L_I$ ,  $L_{II}$ , t. j. 02 z 13, 24 z 35 i t. d. Punkty te wypadają z lewej strony odpowiednich sił poprzecznych  $V_{13}$ ,  $V_{35}$ , wskutek czego (przecinając belkę np. po  $aa$  dla krzyżulca 47, widzimy, że) krzyżulce będą wyciągane. Jeżeli nadto obciążymy jeszcze całą **prawą** stronę belki ciężarami ruchomymi, aż do właściwego krzyżulca 47, to wywołamy w nim także wyciąganie, bo siła poprzeczna (w tym razie odpór  $A_1^p$ ) znowu będzie z prawej strony odpowiedniego punktu przecięcia pasów; jeżeli jednak obciążymy tylko **lewą** stronę belki, to otrzymamy siłę poprzeczną ujemną i będzie nią, jak wiadomo, odwrotny odpór  $B_1$ , wywołujący w tym krzyżulcu 47 oczywiście **ściskanie**. O ile ściskanie to będzie większe od wywołanego przez ciężar własny wyciągania,

Rys. 122.





otrzymamy w rezultacie w krzyżulcu **ściskanie**, a więc będzie ten krzyżulec naprzemian ściskany i wyciągany w zależności od obciążenia ruchomego. Przypuśćmy, że np. dla krzyżulca 47 otrzymaliśmy w rezultacie ściskanie. Jeżeli krzyżulec ten ma przekrój **płaski**, to nie może przeciwdziałać **ściskaniu**, w obec czego należy zastosować w tem polu oprócz krzyżulca 47 jeszcze t. z. **krzyżulec dodatkowy 56**, o przekroju również płaskim, łączący węzły 5 i 6. O ile w krzyżulcu 47 siły zewnętrzne wywołują **wyciąganie**, krzyżulec dodatkowy 56 nie odgrywa żadnej roli i dopiero, kiedy krzyżulec 47 pod wpływem ściskania zostaje wygięty i przestaje pracować—wtedy siły, wywołujące w nim ściskanie, spotykają się z przeciwdziałaniem krzyżulca dodatkowego 56, na który działają **wyciągająco** (jak to jest oczywiście przy rozpatrywaniu przekroju  $\alpha\alpha$ ). Ponieważ wywołane przez ciężar własny belki siły poprzeczne **dotądnie** zmniejszają się ku środkowi belki, a wywołane obciążeniem lewej części belki siły poprzeczne **ujemne**—przeciwnie—wzrastają, więc poza krzyżulcem 47 wszystkie dalsze aż do środka belki będą również ściskane, krzyżulce dodatkowe muszą być zatem zastosowane w całej środkowej części belki. Krzyżulce 03, 25, 47, 69 nazywają się w przeciwstawieniu do **dotadkowych** (56, 78)—**głównymi**.

Poza środkiem belki krzyżulcami dodatkowymi będą 7'8 i 5'6', położone symetrycznie z 78 i 56 względem środka belki, (bo siła poprzeczna wywołana przez ciężar własny dla pola 4'7' jest równa i odwrotna sile poprzecznej dla pola 47 i wywołuje w krzyżulcu 4'7' wyciąganie; siła zaś poprzeczna dla tegoż pola 4'7', wywołana przez obciążenie ruchome z prawej strony, jest równa i odwrotna sile poprzecznej dla pola 47, wywołanej przez obciążenie ruchome z lewej strony i wywołuje w krzyżulcu 4'7' ściskanie, **większe**—jak widzieliśmy powyżej—od wyciągania przez ciężar własny; przez zastosowanie jednak krzyżulca dodatkowego 5'6' uwalniamy od tego ściskania krzyżulec główny 4'7', który zatem przeciwdziała tylko sile wyciągającej, wywołanej przez ciężar własny i obciążenie ruchome z lewej strony).

Dla belek kratowych **równoległych**, w granicach między punktami największego momentu  $M_2$  i  $M_1$  (str. 183) otrzymujemy w krzyżulcach naprzemian ściskanie i wyciąganie, w obec czego w granicach tych wprowadzamy zazwyczaj krzyżulce dodatkowe, jak to zobaczymy na poniższym przykładzie.



## Wykreślenie planu sił dla belki kratowej równoległej z jazdą dolną. (Tablica 3-a).

Dane: Rozpiętość teoretyczna belki:  $l=36,0$  m; długość pola:  $d=4,5$  m; wysokość belki:  $h=4,5$  m. Obciążenie ruchome — dwa parowozy z wagonami towarowymi według rys. 51, str. 80. Ciężar własny mostu:  $g=3$  tonny na metr bieżący mostu.

Wykreślmy wielobok sznurowy dla 2-ch parowozów, zwróconych kominami ku sobie, t. j. w położeniu: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 i 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 z dodaniem kilku osi wagonów towarowych: 19, 20, 21, 22, 23, zupełnie tak samo i w tej samej skali, jak na tablicy 1-ej (t. j. skala długości 1:200 i skala sił: 1 mm = 2 tonny) — z tą tylko różnicą, że odległość biegunową  $H$  weźmiemy odrazu:  $H = kZ = l = 36,0$  m.

### 1. Natężenia w pasach.

Ponieważ obciążenie ruchome nie działa na belkę bezpośrednio, lecz przez belki podłużne i poprzeczne, rozstawione co 4,5 m w węzłach belki, więc dla wykreślenia natężeń w pasach trzeba wyznaczyć największe momenty dla przekrojów przez węzły 3, 5, 7, 9. Największy moment pośrodku belki, wywołany przez ciężar własny, wynosi według str. 92:  $M_0 = 486$  tonnometrów, ale teraz przy  $H = l = 36,0$  m:  $y^0_{max} = \frac{M_0}{H} = \frac{486}{36} = 13,5$  tonn = 6,75 mm, więc skala dla momentów będzie:  $1 \text{ mm} = \frac{486}{6,75} = 72$  tonnometrom. Odkładając tę największą rzędną  $y^0_{max}$  w środku belki AB, wykreślamy według str. 57, rys. 43 punkty paraboli, odpowiadające przekrojom przez węzły 3, 5, 7, 9 i otrzymujemy w ten sposób rzędne  $y^0_3, y^0_5, y^0_7$ , określające krzywą momentów dla ciężaru własnego. Dla obciążenia ruchomego wykreślimy największe momenty dla tychże przekrojów sposobem opisanym na str. 80 i 81, przesuwając belkę nad wielobokiem sznurowym tak, aby najcięższe koła 5, 6, 7, 8, 9, 10 wypadły nad rozpatrywanym przekrojem. Po kilku próbach otrzymamy największy odcinek  $y_3$ , dający największy moment dla węzła 3, ustawiając nad nim koło 6 [bo zmieszczą się wtedy na belce, zajmującej położenie  $A_3B_3$ , koła od 5 do 21 włącznie, a linia przeprowadzona przez punkt  $N_3$  ( $eN_3 = A_33$ ) równoległe do  $Z_3x$  przetnie na wieloboku sił ciężar 6]. Tak samo największy



odcinek  $y_5$  (a więc największy moment dla węzła 5) otrzymamy przy położeniu belki  $A_5B_5$ , ustawiając koło 8 nad tym węzłem [bo przy kołach 4 do 20 włącznie, mieszczących się na belce  $A_5B_5$ , linia, idąca przez  $N_5$  ( $dN_5=A_5$ ) równoległe do  $Z_5w$ , przecina ciężar 8]. Dla węzła 7, ustawiając belkę w położeniu  $A_7B_7$  (t. j. kołem 7 nad węzłem 7) i przeprowadzając przez punkt  $N_7$  równoległą do  $Z_7u$ , widzimy, że przejdzie ona przez punkt  $h$ , co według str. 83 oznacza że zarówno dla koła 7, jak 8, moment jest największy. Istotnie dla obu położeni belki:  $A_7B_7$  i  $A_9B_9$  (z węzłem 7 pod kołami 7 i 8) otrzymujemy tej samej wielkości odcinki  $y_7=y_8$ . Dla węzła 9 otrzymamy podobnie  $y_9$  pod kołem 10 (linia, idąca przez  $N_9$  równoległe do  $Z_9v$ , przecina ciężar 10).

Odcinki  $y_9, y_7, y_5, y_3$ , odłożone ponad odcinkami  $y_{max}^0, y_7^0, y_5^0, y_3^0$ , dadzą krzywą największych momentów dla pasa **górnego**  $abcdef\dots$ , a dla pasa **dolnego**  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\dots$  i wyrażają (zgodnie ze str. 199) natężenia w pasach, o ile zastosujemy do nich odpowiednią skalę, w danym wypadku, w obec:

$$h=4,5 \text{ m} - \text{skalę } 1 \text{ mm} = \frac{72}{4,5} = 16 \text{ tonn.}$$

Otrzymane w ten sposób natężenia w poszczególnych prętach pasów wypisujemy **na pierwszym** schematycznym rysunku belki dla obciążenia ruchomego i ciężaru własnego, a **na drugim** — największe natężenia dla całkowitego obciążenia belki.

## 2. Natężenia w krzyżulcach.

Wielobok sznurowy  $aZ$  wykreślony dla sił 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,  $1^0, 2^0, 3^0, 4^0\dots$  z odległością biegunową  $H=l$  jest, według str. 96 i 97, krzywą największych sił poprzecznych dodatnich dla belki w położeniu  $kZ$ . Dla jakiegokolwiek krzyżulca, np. 47, otrzymujemy właściwą siłę poprzeczną, zgodnie ze str. 201, wykreślając wielobok dodatkowy  $\lambda_{\mu\nu}$  dla sił 9, 8, 7 w położeniu  $9', 8', 7'$  z odległością biegunową  $d=Z''k$ , a w obec jednakowych odległości między kołami 9, 8, 7 i jednakowych obciążeń tychże kół wykreślić możemy ten wielobok  $\lambda_{\mu\nu}$  zupełnie tak samo, jak to opisane na str. 118 [t. j. łącząc punkt  $Z''$  z punktami  $i$  i  $h'$  i prowadząc przez  $\lambda$  równoległą do  $Z''i$ , a przez otrzymany punkt  $\mu$  równoległą do  $Z''h'$ ]. Największy z trzech odcinków  $\lambda_\pi, \mu_\rho, \nu\sigma$  (a więc  $\mu_\rho$ ) będzie szukaną siłą poprzeczną  $V_{47}$  dla krzyżulca 47, a rozkładając tę siłę według str. 203 w kierunku 47 i poziomym, otrzymujemy  $\tau_\mu$  jako natężenie  $K_{47}$ , wywo-



łane w krzyżulcu 47 przez obciążenie ruchome. Odkładając następnie od dowolnie przyjętej osi  $A_1B_1$  odcinki  $A_1\beta$  i  $B_1\gamma$  równe  $\frac{gl}{2} = \frac{3 \times 36}{2} = 54$  tonnom, czyli w naszej skali = 27 mm i łącząc ze sobą punkty  $\beta$  i  $\gamma$ , otrzymujemy, zgodnie ze str. 203, siłę poprzeczną  $V_{47}^g$  dla krzyżulca 47, wywołaną przez ciężar własny, jako odcinek  $\delta_s$  pośrodku pola 46 i odpowiednie natężenie  $K_{47}^g$  jako odcinek  $\zeta\delta$ . Tak samo otrzymujemy oczywiście natężenia w innych krzyżulcach, czyli  $K_{03}$ ,  $K_{25}$ ,  $K_{69}$ . (Natężenie  $K_{03}$ , wychodzące poza tablicę rysunku, skierowaliśmy w stronę przeciwną, nie zmieniając przez to oczywiście jego liczebnej wielkości:  $K_{03} = \varphi\psi$ ).

Ponieważ krzyżulce 6'9, 4'7', 2'5', 0'3' **prawej** części belki są zupełnie symetryczne z odpowiednimi krzyżulcami—**lewą**, natężenia w nich zatem są równe określonym wyżej, a odpowiadają obciążeniu ruchomemu, zajmującemu **lewą** część belki, bo widoczne jest, że krzywa najmniejszych sił poprzecznych — **ujemnych** —  $k_x$  (wykreślona zgodnie ze str. 97, tablica 1-a) daje np. dla krzyżulca 4'7' siłę poprzeczną  $\mu'_{\rho'}$ , a zatem  $K_{4'7'} = \tau'\mu' = \tau\mu = K_{47}$ .

Zauważmy przytem, że natężenie wywołane przez obciążenie  $\left\{ \begin{array}{l} \text{prawej} \\ \text{lewą} \end{array} \right\}$  części belki w krzyżulcach  $\left\{ \begin{array}{l} 03, 25, 47, 69 \\ 0'3', 2'5', 4'7', 6'9 \end{array} \right\}$

będzie **wyciąganiem** w obec  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dodatnich} \\ \text{ujemnych} \end{array} \right\}$  sił poprzecznych, np.

$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\rho} \\ \mu'_{\rho'} \end{array} \right\}$  dla krzyżulca  $\left\{ \begin{array}{l} 47 \\ 4'7' \end{array} \right\}$ . Ale dla krzyżulca 6'9 otrzy-

mamy oczywiście **przy obciążeniu prawej części belki** siłę poprzeczną **dodatnią**  $V_{6'9}$  i **ujemną**  $V_{6'9}^g$  (od ciężaru własnego), w rezultacie zaś — **dodatnią** siłę poprzeczną ( $V_{6'9} - V_{6'9}^g$ ), która wywoła w krzyżulcu 6'9 oczywiście **ściskanie**; jeżeli więc krzyżulce mają (jak to bywa zazwyczaj) przeciwdziałać tylko siłom wyciągającym, to koniecznym jest zastosować krzyżulec dodatkowy 87', w którym powyższa siła poprzeczna (dodatnia) wywoła natężenie **wyciągające**. Dla krzyżulca 4'7' otrzymamy **przy obciążeniu prawej części belki** siłę poprzeczną ( $V_{4'7'} - V_{4'7'}^g$ ), w rezultacie **ujemną**, wywołującą w tym krzyżulcu **wyciąganie**; krzyżulec więc dodatkowy 6'5' (wykropkowany) okazuje się całkiem zbytecznym. Teraz widzimy, że wyznaczając według str. 104, tabl. 1-a punkty zwrotne naj-



większego momentu  $M_2$  i  $M_1$  (leżące na pionowych przez  $M'_2$  i  $M'_1$ , punkty przecięcia krzywych  $Z_\alpha$  i  $k_\alpha$  z prostą  $m'm''$ , łączącą końcowe punkty odcinków  $=\frac{1}{2}gl$ , odłożonych od punktów  $k$  i  $Z$ ) otrzymujemy poza granicami odstępów  $M_2M_1$  w krzyżulcach spadających ku punktom  $M_2$  i  $M_1$  wyciąganie (zgodnie ze str. 183 i 208).

Wyznaczone natężenia w krzyżulcach:  $K_{03}$ ,  $K_{25}$ ,  $K_{47}$ ,  $K_{69}$ , wywołane przez obciążenie ruchome, oraz  $K^s_{03}$ ,  $K^s_{25}$ ,  $K^s_{47}$ ,  $K^s_{69}$ , wywołane przez ciężar własny, wypisaliśmy na pierwszym schematycznym rysunku belki, na drugim zaś — największe natężenia w krzyżulcach.

### 3. Natężenia w słupach.

Zgodnie ze str. 205 natężenie w jakimkolwiek słupie 45 jest równe liczebnie pionowej składowej natężenia sąsiedniego krzyżulca 47, spotykającego się z tym słupem na nieobciążonym siłami ruchomymi pasie, czyli w węźle 4, zwiększonej o ciężar własny tegoż węzła, ponieważ krzyżulec znajduje się z prawej strony słupa. A więc natężenie  $S_{45} = V_{47} + V^s_{47} + g_4$ .

W danym razie, o ile przyjmiemy ciężar własny jako rozłożony w  $\frac{1}{3}$  na górne — i w  $\frac{2}{3}$  na dolne węzły, możemy napisać:

$$S_{45} = V_{47} + V^s_{47} + \frac{1}{3}gd$$

i zamiast ostatnich dwóch wyrazów wziąć odcinek  $\delta'_{\varepsilon'}$ , odległy od  $\delta_\varepsilon$  o  $\frac{1}{3}d$ , bo skoro  $A_1\beta = \frac{gl}{2}$ , to:  $\delta'_{\varepsilon'} = \delta_\varepsilon + \frac{1}{3}gd$ .

[Moglibyśmy oczywiście również przeprowadzić według str. 205 (rys. 120) w odległości  $\frac{1}{3}gd = (\frac{1}{3} \times 3 \times 4,5)$  tonn, czyli 2,25 mm od  $\beta_7$  — licząc tę odległość pionowo — linię równoległą do  $\beta_7$  i otrzymalibyśmy odrazu np. odcinek  $\delta_{\varepsilon''} = \delta'_{\varepsilon'} = V^s_{45}$ . Ten sposób jest znacznie dogodniejszy, jeżeli jak na rys. 120 wyznaczamy odrazu całe  $S_{45}^{max}$ ].

Podobnie otrzymamy natężenia we wszystkich innych słupach, z wyjątkiem słupa podporowego 01, dla którego obciążenie węzła będzie mniejsze, niż dla każdego z pozostałych, t. j.  $\frac{1}{6}gd$ , a więc:

$S_{01} = V_{03} + V^s_{03} + \frac{1}{6}gd$  i dwa ostatnie wyrazy dają oczywiście odcinek  $V^s_{01}$ , odległy od  $V^s_{03}$  o  $\frac{1}{6}d$ .

Wyznaczone w ten sposób natężenia w słupach wypisujemy na schematycznych rysunkach belki.

Wszystkie obliczone powyżej natężenia dotyczą całego mostu, składającego się z dwóch belek kratowych, więc na każdą z nich przypada tylko połowa każdego z tych natężeń.



### § 8. Belki kratowe paraboliczne.

Widzieliśmy wyżej (str. 198), że przez odpowiedni dobór kształtu belki kratowej można osiągnąć jednakowe natężenia we wszystkich prętach obu pasów (z wyjątkiem tylko skrajnego pręta). Obecnie postaramy się przez nadanie odpowiedniego kształtu belce kratowej osiągnąć inne — pożądane rezultaty:

Dla belki kratowej ze słupami (rys. 122) po wprowadzeniu właściwego oznaczenia węzłów i przeprowadzeniu przekroju  $aa$  otrzymujemy jako jeden z warunków równowagi siły poprzecznej  $V_m$  z siłami w przeciętych prętach:  $G_m$ ,  $K_m$ ,  $D_{m-1}$ , że (zgodnie ze str. 42) suma składowych poziomych tych sił musi być  $= 0$ , a więc (w obec ściskania  $G_m$  i wyciągania  $K_m$  i  $D_{m-1}$ , oznaczonych odpowiednimi strzałkami):

$$G_m \cos \beta - K_m \cos \varphi - D_{m-1} \cos \delta = 0, \text{ z kąd:}$$

$$K_m \cos \varphi = G_m \cos \beta - D_{m-1} \cos \delta \dots \dots (63);$$

ale zgodnie ze str. 195:

$$G_m = \frac{M_m}{g_m}, \text{ gdzie: } g_m = h_m \cos \beta$$

$$\text{ i } D_{m-1} = \frac{M_{m-1}}{d_{m-1}}, \text{ gdzie: } d_{m-1} = h_{m-1} \cos \delta, \text{ więc:}$$

$$K_m \cos \varphi = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \dots \dots (64).$$

[Dla krzyżulca odwrotnego 56 byłoby dla tegoż przekroju  $aa$  (w obec ściskania  $K'_m$ ):

$$G_m \cos \beta + K'_m \cos \psi - D_{m-1} \cos \delta = 0$$

$$\text{ i w rezultacie: } K'_m \cos \psi = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m}].$$

Przy obciążeniu stałym jednostajnym  $g$  moment dla jakiegokolwiek przekroju w odległości  $x_m$  od podpory wyraża się (str. 61, wzór 15):

$$M_m = \frac{g x_m (l - x_m)}{2},$$

$$\text{ a zatem: } K_m \cos \varphi = \frac{g}{2} \left[ \frac{x_m (l - x_m)}{h_m} - \frac{x_{m-1} (l - x_{m-1})}{h_{m-1}} \right].$$

Jeżeli nadamy belce kratowej kształt taki, przy którym wysokości  $h_m, h_{m-1} \dots$ , odpowiadać będą warunkowi:

$$\frac{x_m (l - x_m)}{h_m} = \frac{x_{m-1} (l - x_{m-1})}{h_{m-1}} = \dots = \frac{x (l - x)}{h} = C \dots \dots (65),$$

to w belce takiej natężenia w krzyżulcach, wywołane przez



obciążenie stałe jednostajne, będą = 0. Tą wielkością stałą C możemy rozporządzać dowolnie; jeżeli więc np. postawimy warunek, że wysokość belki pośrodku ma być z góry określona = f, to dla  $x = \frac{l}{2}$  równanie powyższe da:

$$C = \frac{l^2}{4f} \text{ i przejdzie w równanie: } \frac{x(l-x)}{h} = C = \frac{l^2}{4f}, \text{ z kąd:}$$

$$h = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \dots \dots (66).$$

Takiemu warunkowi ma odpowiadać zmienna wysokość h, jeżeli w krzyżułcach nateżenia mają być = 0.

Przyjawszy za oś x linię podpór AB (rys. 123), widzimy, że h wyraża rzędną paraboli ze strzałką f i z osią pionową, przechodzącą przez środek belki. O ile więc za pas 

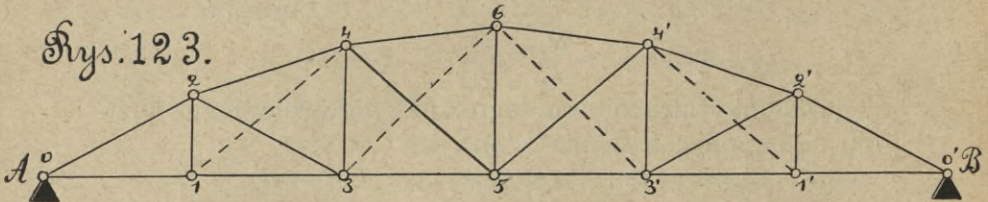
{	dolny	}
{	górny	}

weźmiemy linię AB, a węzły pasa 

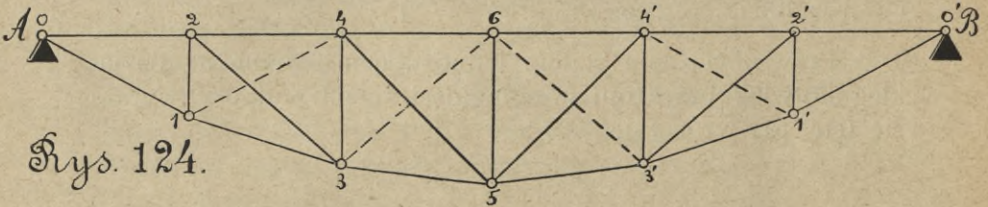
{	górnego	}
{	dolnego	}

 na tej paraboli (rys. 123 i 124), to nateżenia w krzyżułcach, wywołane przez obciążenie stałe jednostajne, będą = 0. Wysokość belki pośrodku ( $h_{max}$ ) — o ile niema środkowego słupa — będzie oczy-

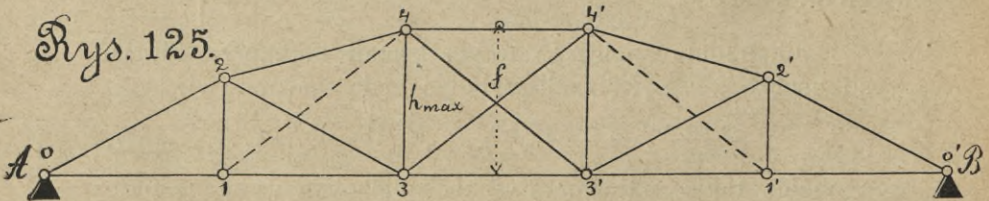
Rys. 123.



Rys. 124.



Rys. 125.





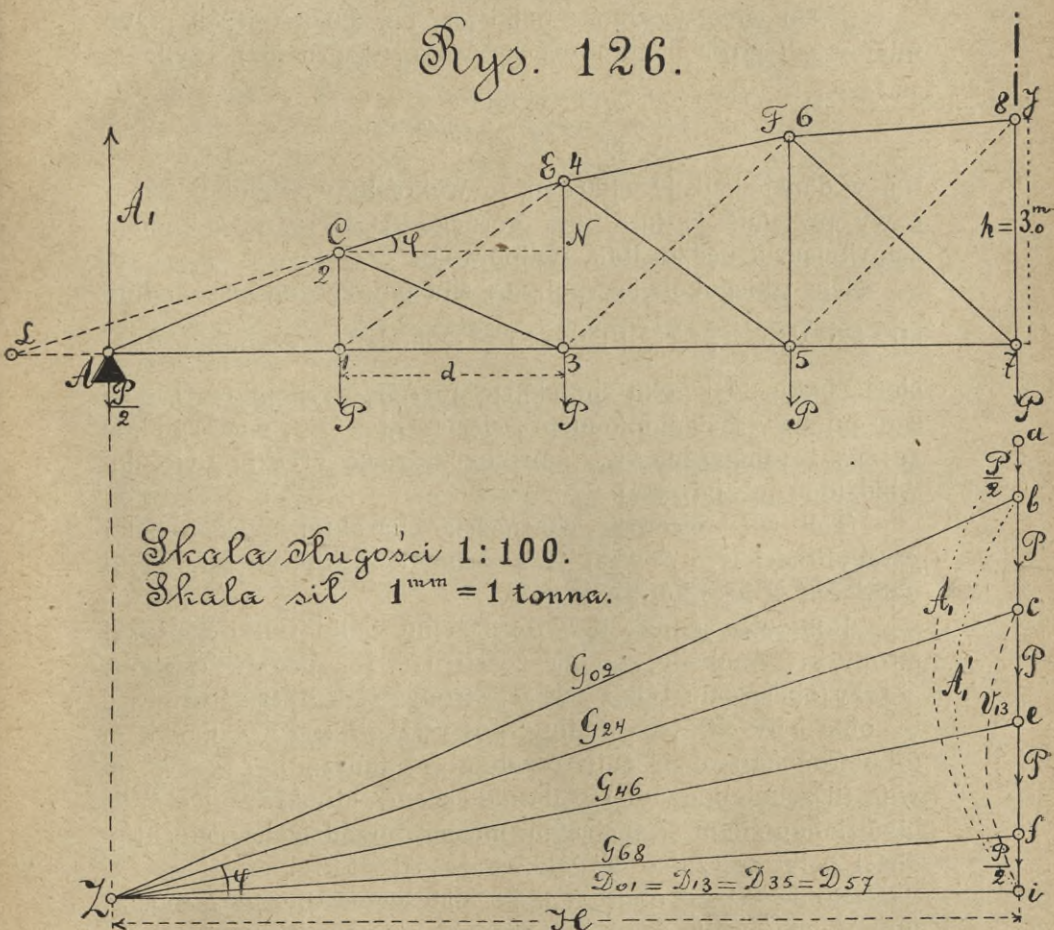
wiście **mniejszą od  $f$** , określoną z równania (66), lub też otrzymaną wykreślić (rys. 125) jako rzędną paraboli sposobem str. 57, rys. 43.

Zauważmy jeszcze, że moglibyśmy nadać **jednemu** z pasów kształt całkiem dowolny, byleby **drugi** odpowiadał równaniu (66) co do poszczególnych wysokości słupów ( $h$ ).

Belki kratowe, których węzły jednego, lub obu pasów, leżą na paraboli, nazywamy **parabolicznymi**. Zazwyczaj cała belka paraboliczna jest podzielona na równej długości pola i ma wtedy różne godne zaznaczenia własności:

Weźmy belkę paraboliczną o rozpiętości  $l=24,0$  m w skali 1:100 (rys. 126), podzieloną na 8 pól ( $d=3,0$  m) pod działa-

Rys. 126.





niem obciążenia stałego jednostajnego:  $g = 5$  tonn na metr bieżący. Obciążenie całej belki wynosi zatem:

$\Sigma P = 5 \times 24 = 120$  tonn, a obciążenie jednego pola:

$P = g \cdot d = 5 \times 3 = 15$  tonn. Obciążenie więc każdego dolnego węzła wyniesie:  $P = 15$  tonn, a w węzłach podporowych działają siły:

$\frac{P}{2} = 7,5$  tonn. Odłożywszy te siły  $P$  w danej skali

1 mm = 1 tona, możemy wykreslić wielobok sznurowy (zgodnie ze str. 108, rys. 67) i wierzchołki tego wieloboku leżeć będą na paraboli (z osią pionową), której strzałka będzie zgodna ze str. 59:

$$f = \frac{g l^2}{8H} \dots \dots (67).$$

Jeżeli więc wysokość belki jest np. 3,0 m i jeżeli przyjmiemy odległość biegunową  $H$  według wzoru (67), czyli:

$$H = \frac{g l^2}{8f} = \frac{5 \times 24^2}{8 \times 3} = 120 \text{ tonn},$$

t. j. w danej skali:  $H = 120$  mm, to wykreslony wielobok sznurowy przyjmie kształt pasa górnego ACEFJ..., a bokiem zamykającym będzie linia podpór AB.

Dla jakiegokolwiek pola 13 siłą poprzeczną jest według str. 47:  $V_{13} = A_1 - \left(\frac{P}{2} + P\right) = ic$  i przechodzi przez punkt przecięcia boku 24 i boku zamykającego AB, czyli przez L. Ten sam punkt L jest punktem przecięcia  $D_{13}$  i  $G_{24}$ , więc zgodnie ze str. 131 natężenie  $K_{23}$  musi być = 0, co zresztą było dowiedzione już powyżej.

Tak więc pierwszą własnością charakterystyczną belki parabolicznej jest, że przy jednostajnym obciążeniu całej belki natężenia w krzyżulcach są = 0.

Ponieważ jednak przy obciążeniu belki tylko z prawej strony otrzymujemy, zgodnie ze str. 179,  $K_{23}$  jako wyciąganie, a przy obciążeniu tylko z lewej strony — jako ściskanie, więc te obie siły [dające według powyższego przy całkowitem (obustronnem) obciążeniu rezultat = 0], muszą być sobie równe (liczebnie), a zatem, o ile nie chcemy, aby krzyżulce przeciwdziałały siłom ściskającym, musimy urządzić na całej długości belki krzyżulce dodatkowe 14, 36, 58...

Ponieważ w obec  $K_{23} = 0$  natężenia  $D_{13}$  i  $G_{24}$  muszą utrzymywać równowagę z siłą poprzeczną  $V_{13}$  (wyrażoną



przez odcinek *ic*), pręty zaś pasa **górnego** 02, 24, 46, 68 są równoległe do odpowiednich promieni *Zb*, *Zc*, *Ze*, *Zf*, a pręty **dolnego** pasa — **poziome**, jest więc oczywiste, że każda siła poprzeczna da składową poziomą = *H* (odległości biegunowej), czyli:

$$D_{01} = D_{13} = D_{35} = \dots = H.$$

Dla belki rys. 124 przy obciążeniu całkowitem jednostajnym węzłów **górných** otrzymalibyśmy tak samo:

$$G_{02} = G_{24} = G_{46} = \dots H.$$

A więc **drugą** własnością charakterystyczną belek parabolicznych jest, że **natężenia wywołane w całym pasie poziomym** przez obciążenie jednostajne całej belki są **jednakowe i równe odległości biegunowej** *H*.

Składowemi siły poprzecznej w kierunku prętów górnego pasa, czyli natężeniami  $G_{02}$ ,  $G_{24}$ ,  $G_{46}$ ... będą promienie *Zb*, *Zc*, *Ze*..., ale przeprowadziwszy np. przez *C* poziomą *CN* i oznaczywszy przez  $g_{24}$  długość pręta 24, mamy:

$$G_{24} = Zc = \frac{H}{\cos \varphi}, \text{ czyli } G_{24} = H \times \frac{CE}{CN} = H \times \frac{g_{24}}{d}.$$

Toż samo otrzymalibyśmy dla dolnego pasa belki rys. 124 (przy obciążeniu całkowitem jednostajnym węzłów górných), a więc **trzecią** własnością charakterystyczną belek parabolicznych jest, że **natężenia w poszczególnych prętach pasa parabolicznego** są przy obciążeniu jednostajnym całej belki **proporcjonalne do długości tychże prętów**. Natężenia w pasie parabolicznym można zatem wprost przyjąć jako równe długościom odpowiednich prętów z zastosowaniem tylko odpowiedniej skali: w tym razie np., ponieważ na rys. 126:  $H = 120 \text{ mm} = 12,0 \text{ m}$ , a  $d = 3,0 \text{ m}$ , mamy:

$$G_{46} = H \times \frac{g_{46}}{d} = 12 \times \frac{g_{46}}{3} = 4 g_{46}, \text{ a więc przyjąć można także:}$$

$G_{46} = g_{46}$  przy skali  $1 \text{ mm} = 4 \text{ tonny}$ , ponieważ skala sił na rysunku 126 jest  $1 \text{ mm} = 1 \text{ tona}$ .

Weźmy pod uwagę siły, działające na jakikolwiek węzeł pasa dolnego, np. 3:  $S_{34}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{35}$ ,  $K_{32}$  i *P*. Przy obciążeniu całkowitem belki:  $K_{32} = 0$ , więc pozostałe utrzymują pomiędzy sobą równowagę, a w obec tożsamości kierunków 13 z 35 i 34 z siłą *P* musi być oczywiście:  $D_{13} = D_{35}$  (co widzieliśmy wyżej) i  $S_{34} = P$ .

Dla belki rys. 124 przy obciążeniu jednostajnym węzłów górných byłoby także:  $S_{34} = P$ , a więc: **czwartą** własnością







$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$  i  $\frac{y_2}{l-x_2} = \frac{y}{l-x}$ , z kąd po usunięciu  $y$  otrzymujemy:

$$x = \frac{l x_1 y_2}{x_1 y_2 + y_1 (l - x_2)} \dots \dots (71).$$

Punkty  $x_1, y_1$  i  $x_2, y_2$ , jako leżące na paraboli, czynią zadość równaniu (66) na str. 214, t. j. równaniu:  $\eta = \frac{4f}{l^2} \zeta (l - \zeta)$ , a więc:

$$y_1 = \frac{4f}{l^2} x_1 (l - x_1) \dots \dots (72),$$

$$y_2 = \frac{4f}{l^2} x_2 (l - x_2) \dots \dots (73)$$

i wstawiając te wielkości do równania (71):

$$x = \frac{l x_2}{x_2 + (l - x_1)} = \frac{l x_2}{l + (x_2 - x_1)} \dots \dots (74).$$

Przeprowadzając przez  $E'$  poziomą  $E'F'$ , otrzymujemy:

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1}{x_0 + x_1}$ , a po uwzględnieniu wzorów (72) i (73):

$$\frac{x_2 (l - x_2) - x_1 (l - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 (l - x_1)}{x_0 + x_1} \text{ i ztąd:}$$

$$x_0 + x_1 = \frac{(x_2 - x_1) x_1 (l - x_1)}{x_2 (l - x_2) - x_1 (l - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1) x_1 (l - x_1)}{(x_2 - x_1) (l - [x_2 + x_1])}, \text{ czyli:}$$

$$x_0 + x_1 = \frac{x_1 (l - x_1)}{l - (x_2 + x_1)} \dots \dots (75),$$

a więc:  $x_0 = \frac{x_1 (l - x_1)}{l - (x_2 + x_1)} - x_1$ , czyli:

$$x_0 = \frac{x_1 x_2}{l - (x_2 + x_1)} \dots \dots (76).$$

(Zauważmy tutaj, że z wzoru (76) otrzymujemy:

$x_0 (l - [x_2 + x_1]) - x_1 x_2 = 0$ , czyli:  $x_0 l + x_0^2 - x_0^2 - x_0 (x_2 + x_1) - x_1 x_2 = 0$ , albo:  $x_0 (l + x_0) = x_0 (x_0 + x_1) + x_2 (x_0 + x_1)$ , z kąd:

$$x_0 (l + x_0) = (x_0 + x_1) (x_0 + x_2),$$

co wyraża inwolucję 3 par punktów: 1)  $A$  i  $B$ , 2)  $E$  i  $F$ , 3)  $L$  i  $\infty$ . Gdybyśmy przyjęli to z góry za wiadome, uprościlibyśmy znacznie obliczenie powyższe).

W równaniu (68) wielkość  $q$  określi się z wzoru:

$$q = LF \sin \varphi = (x_0 + x_2) \frac{E'E}{E'F} = (x_0 + x_2) \frac{y_1}{k} = (x_0 + x_2) \frac{4f x_1 (l - x_1)}{k l^2},$$

ale na mocy wzoru (76):  $x_0 + x_2 = \frac{x_1 x_2}{l - (x_2 + x_1)} + x_2 = \frac{x_2 (l - x_2)}{l - (x_2 + x_1)}$ ,



$$\text{więc: } q = \frac{x_2(l-x_2)}{l-(x_2+x_1)} \times \frac{4fx_1(l-x_1)}{kl^2}.$$

Wstawiając określone powyżej wielkości do równania (68):

$$K \frac{4fx_1x_2(l-x_1)(l-x_2)}{kl^2[l-(x_1+x_2)]} = \frac{p(l-x)^2}{2l} \frac{x_1x_2}{l-(x_1+x_2)} - \frac{p(x_2-x)^2x_1(l-x_1)}{2(x_2-x_1)[l-(x_1+x_2)]}, \text{ ztąd:}$$

$$K = \frac{kp l^2}{8f} \left\{ \frac{(l-x)^2}{l(l-x_1)(l-x_2)} - \frac{(x_2-x)^2}{(x_2-x_1)x_2(l-x_2)} \right\}.$$

Usuwaając ztąd  $x$  na mocy wzoru (74):

$$\begin{aligned} K &= \frac{kp l^2}{8f} \left\{ \left[ \frac{l-x_2}{l+(x_2-x_1)} \right]^2 - \frac{\left[ x_2 - \frac{l x_2}{l+(x_2-x_1)} \right]^2}{(x_2-x_1)x_2(l-x_2)} \right\} = \\ &= \frac{kp l^2}{8f} \left\{ \frac{l^2(l-x_1)^2}{l(l-x_1)(l-x_2)[l+(x_2-x_1)]^2} - \frac{x_2^2(x_2-x_1)^2}{(x_2-x_1)x_2(l-x_2)[l+(x_2-x_1)]^2} \right\} = \\ &= \frac{kp l^2}{8f} \left\{ \frac{l(l-x_1) - x_2(x_2-x_1)}{(l-x_2)(l+x_2-x_1)^2} \right\} = \frac{kp l^2}{8f} \left\{ \frac{(l-x_2)(l+x_2-x_1)}{(l-x_2)(l+x_2-x_1)^2} \right\} = \\ &= \frac{kp l^2}{8f(l+x_2-x_1)}, \text{ czyli:} \\ K &= \frac{kp l^2}{8f(l+d)} \dots\dots (77). \end{aligned}$$

Tak więc największe natężenie wyciągające w krzyżulcu (K) belki parabolicznej przy obciążeniu ruchomem jednostajnym  $p$  jest proporcjonalne do długości tegoż krzyżulca ( $k$ ) i wyraża się wprost przez tę długość przy zastosowaniu odpowiedniej skali sił. A zatem np. dla belki o rozpiętości teoretycznej  $l=24,0$  m;  $p=9$  tonn na metr bieżący;  $d=3,0$  m i wysokości belki:  $f=6,0$  m, rys. 127:

$$K = \frac{kp l^2}{8f(l+d)} = \frac{k \cdot 9 \cdot 24^2}{8 \cdot 6 \cdot (24+3)} = 4k,$$

więc można przyjąć natężenie w każdym krzyżulcu  $K=k$ , o ile przyjmiemy, że każdemu metrowi długości  $k$  odpowiadają 4 tonny, czyli przy skali długości rys. 127: 1:200 — 1 cm = 8 tonnom. Dla rysunku 126 wypada tak samo: 1 cm = 8 tonnom, w obec dwa razy mniejszej wysokości belki i skali długości 1:100.



Zauważmy jeszcze, że największe **ściskanie** w tymże krzyżulcu 45 (rys. 127) będzie oczywiście równe liczebnie otrzymanemu wyżej **wyciąganiu**, bo według powyższego przy jednostajnym obciążeniu całej belki parabolicznej natężenie w krzyżulcu musi być  $=0$ , więc suma natężeń przy obciążeniach jednostronnych (ze strony lewej i prawej) musi być  $=0$ . (Ten sam wniosek wyprowadzić można zresztą i z tego, że do otrzymanego wzoru (77) dla  $K$  nie wchodzi żadna wielkość, charakteryzująca obciążenie z prawej, lub lewej strony).

## ROZDZIAŁ V.

### Obliczanie wykresłne pól figur płaskich.

#### § 1. Przekształcanie figur płaskich na daną podstawę $a$ .

Ponieważ w statyce wykresłnej mamy do czynienia przeważnie z liniami, obliczenie przeto wykresłne pola danej figury płaskiej, mającej np.  $F \text{ cm}^2$ , polega na tem, że przyjmąwszy jako podstawę jakąkolwiek długość  $a \text{ cm}$  (t. z. podstawę przekształceń), szukamy odcinka  $f$  takiej długości, aby iloczyn  $a \cdot f = F$ , t. j. szukanemu polu danej figury płaskiej. Jeżeli mamy zatem kilka figur płaskich  $F_1, F_2, F_3 \dots$  i znajdziemy takie odpowiednie odcinki  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , że:

$$a \cdot f_1 = F_1$$

$$a \cdot f_2 = F_2$$

$$a \cdot f_3 = F_3$$

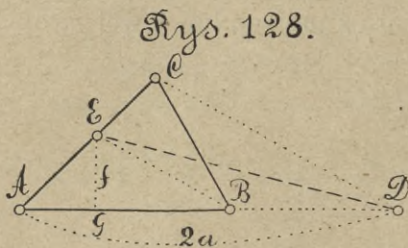
.....

to odcinki te:  $f_1, f_2, f_3 \dots$  będą oczywiście proporcjonalne do danych pól  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , mogą więc je zastępować w rachunkach wykresłnych, a obliczanie powyższe nazywamy przekształcaniem pól  $F_1, F_2, F_3 \dots$  na daną podstawę  $a$ .



## § 2. Pole trójkąta, prostokąta, równoległoboku, trapezu, czworokąta i wielokąta.

**Trójkąt.** Pole trójkąta jest, jak wiadomo,  $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ . Dla obliczenia wykreslnego pola trójkąta ABC (rys. 128), czyli dla przekształcenia trójkąta ABC na daną podstawę  $a$ , odkładamy na linii podstawy trójkąta odcinek  $AD=2a$ , łą-



czyamy D z C i przez B prowadzimy równoległą do CD, poczem, opuszczając z E prostą na AD, otrzymujemy szukany odcinek  $f$  jako długość tej prostopadłej EG (bo oczywiście trójkąt ECB jest równoważny trójkątowi EDB, skoro po przyjęciu

za ich podstawę linii BE, mają one swe wierzchołki C i D na linii CD równoległej do podstawy BE, ale w takim razie trójkąty ABC i ADE, powstające z poprzednich przez dodanie do każdego z nich tego samego trójkąta AEB, są także równoważne, więc pole trójkąta ABC = polu trójkąta ADE  $= 2a \times \frac{1}{2} f = a \cdot f$ ). Jeżeli za podstawę  $a$  przyjęliśmy jednostkę długości, np. 1 cm, to  $f$  otrzymane w centymetrach **linijnych** daje nam oczywiście odrazu pole trójkąta ABC w centymetrach **kwadratowych**.

Jeżeli zaś chcemy dany trójkąt ABC (rys. 128) zastąpić innym, mającym daną wysokość  $f$ , to należy tylko przeprowadzić równoległą do podstawy AB w odległości  $= f$ , a otrzymawszy jej punkt przecięcia z linią AC (lub jej przedłużeniem, o ile dane  $f$  jest większe od wysokości trójkąta ABC) połączyć ten punkt E z punktem B, a przeprowadziwszy przez C równoległą do EB, otrzymamy w ten sposób podstawę AD szukanego trójkąta ADE, równoważnego trójkątowi ABC, jak to widzieliśmy wyżej. Oczywiście, jeżeli dana wysokość  $f$  jest = dwom jednostkom długości, np. 2 cm, to długość AD otrzymana w centymetrach **linijnych** daje nam odrazu pole trójkąta ABC w centymetrach **kwadratowych**.

**Prostokąt** ABCD o podstawie  $b$  i wysokości  $h$  (rys. 129) przekształcamy na podstawę  $a$ , przeprowadzając przez D równoległą do EB, bo:  $b : a = h' : h$ , więc:  $b \cdot h = a \cdot h'$ .



**Równoległobok.** Pole równoległoboku (rys. 130) jest jak wiadomo  $= b \cdot h$ , czyli podwójnemu trójkątowi:  $2 \times \frac{1}{2} b \cdot h$ .

Równoległobok ABCD składa się z dwóch równych trójkątów ABD i BDC, więc przekształca się go na podstawę  $a$  zupełnie tak samo, jak trójkąt, t. j. łącząc punkt E z punktem B i prowadząc przez D równoległą do EB, przy czem otrzymujemy punkt G i prostopadłą opuszczoną na AD jest szukanym odcinkiem  $f$ , t. j.  $a \cdot f = b \cdot h$

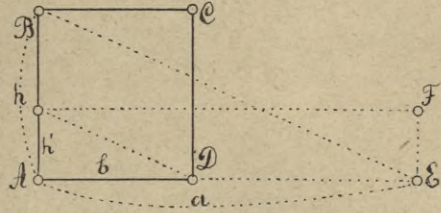
(bo, przeprowadziwszy linie BD i GE, otrzymujemy zupełnie tak samo, jak wyżej, dwa równoważne trójkąty ABD i AGE, a zatem i równoważne równoległoboki  $b \cdot h$  i  $a \cdot f$ ). Jeżeli

podstawę  $a$  przyjmie my  $= 1$  cm, to odcinek  $f$ , otrzymany w centymetrach lini jnych, daje nam od razu pole równoległoboku ABCD w centymetrach kwadratowych.

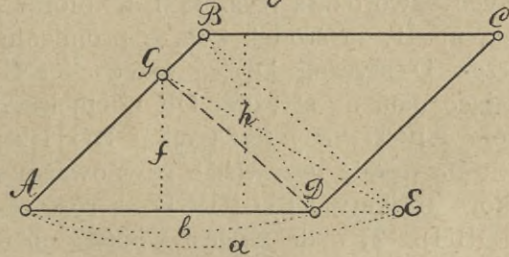
**Trapez.** Pole trapezu ABCD (rys. 131) jest, jak wiadomo, równe:  $h \times \frac{AD+BC}{2}$ . (Jest to zresztą od razu widoczne

po przeprowadzeniu przez środek CD równoległej do AD — w obec równości trójkątów CFK i DFH). Pole trapezu jest więc równoważne poł u równoległoboku ABKH, przekształca się zatem na podstawę  $a$  tak samo, jak równoległobok ABKH.

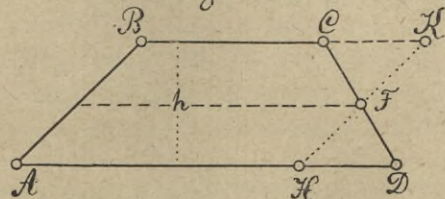
Rys. 129.



Rys. 130.



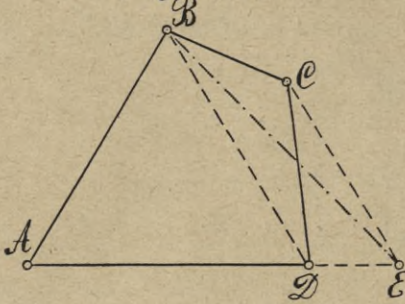
Rys. 131.





**Czworokąt.** Przekształcenie jakiegokolwiek czworokąta ABCD (rys. 132) na podstawę  $a$  można skutecznie, zastępując przedtem czworokąt ABCD równoważnym mu trójkątem ABE (otrzymanym przez przeprowadzenie CE równoległe do przekątnej BD i połączenie B z E, bo trójkąty BCD i BED są równoważne, a po dołączeniu do każdego z nich trójkąta ABD otrzymujemy czworokąt ABCD, lub też

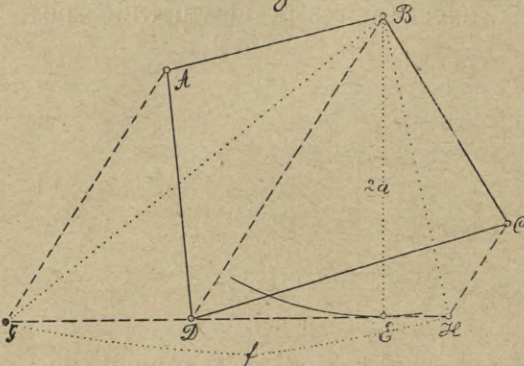
Rys. 132.



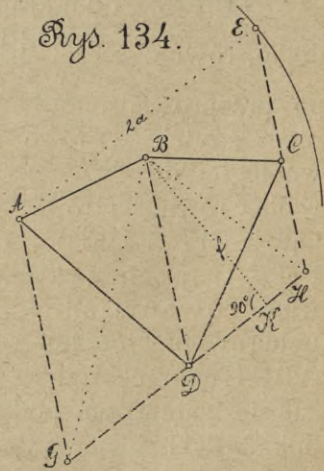
trójkąt ABE). Trójkąt zaś ABE przekształcamy sposobem powyższym na podstawę  $a$ .

Można jednak odrazu przekształcić dany czworokąt ABCD na podstawę  $a$ : **1)** O ile  $2a$  jest **mniejsze od obu** przekątnych czworokąta (rys. 133), to biorąc jakikolwiek wierzchołek, np. B, za środek koła o promieniu  $2a$ , przeprowadzamy przez D styczną DE, a przez A i C równoległe do BD, dające nam na stycznej DE odcinek  $GH =$ szukanemu  $f$ , t. j. pole  $ABCD = a \cdot f$  (bo trójkąt BGH z podstawą  $f$  i wysokością  $2a$  będzie oczywiście równoważny czworokątowi ABCD, skoro trójkąty ABD i BCD są równoważne trójkątom GBD i DBH). **2)** o ile  $2a$  jest **większe od obu** przekątnych czworokąta (rys. 134), to również, przyjmując jakikolwiek wierzcho-

Rys. 133.



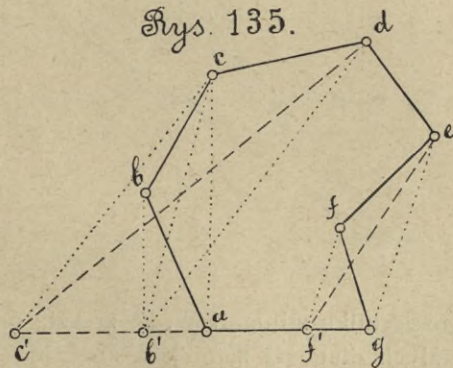
Rys. 134.





łek, np. A, za środek koła o promieniu  $2a$  i przeprowadziwszy przez A i C równoległe do przekątnej BD, otrzymujemy na przecięciu z kołem punkt E, na linii zaś przeprowadzonej przez D równoległe do AE otrzymujemy odcinek  $GH=2a$ , długość zaś prostopadłej BK, opuszczonej z B na linię GH, będzie szukanim odcinkiem  $f$  (bo trójkąt BGH z podstawą  $GH=2a$  i wysokością  $f$  będzie oczywiście równoważnym czworokątowi ABCD, skoro trójkąty ABD i BCD są równoważne trójkątom GBD i DBH). 3) Jeżeli wreszcie  $2a$  jest mniejsze od jednej przekątnej, np. AC (rys. 133), ale większe od drugiej — BD, to oczywiście można zastosować zarówno sposób pierwszy, jak i drugi, obierając tylko właściwy punkt za środek koła, t. j. punkt A, lub C dla sposobu pierwszego, a punkt B, lub D dla sposobu drugiego.

**Wielokąt.** Chcąc dany wielokąt  $abcdefg$  (rys. 135) przekształcić na podstawę  $a$ , zamieniamy go naprzód na czworokąt sposobem następującym: łączymy punkt  $a$  z  $c$ , prowadzimy przez  $b$  równoległą do  $ac$  i ponieważ trójkąty  $cba$  i  $cb'a$  są równoważne, więc zamiast siedmiokąta  $abcdefg$  możemy wziąć sześciokąt  $b'cdefg$ ; łącząc dalej punkt  $b'$  z  $d$  i prowadząc przez  $c$  równoległą do  $db'$ , otrzymujemy punkt  $c'$  i w obec



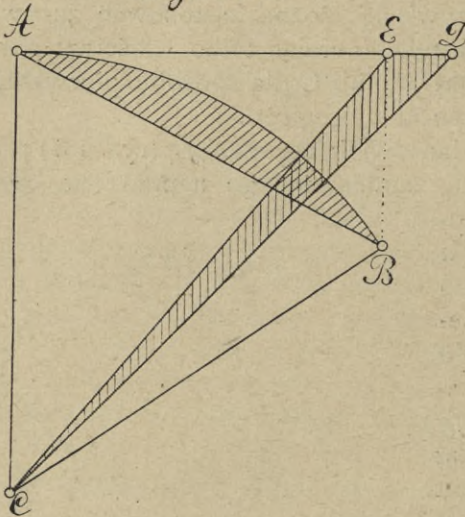
dwóch równoważnych trójkątów  $b'cd$  i  $b'c'd$  możemy nasz sześciokąt  $b'cdefg$  zastąpić pięciokątem  $c'defg$ . Łącząc następnie punkt  $e$  z  $c'$  i prowadząc przez  $d$  równoległą do  $ec'$ , otrzymalibyśmy na podstawie  $ag$  punkt  $d'$  zamiast  $d$ ; ale że ten punkt  $d'$  wyznaczylibyśmy niedokładnie (jako punkt przecięcia dwóch prostych, tworzących ze sobą kąt bardzo ostry), więc lepiej będzie połączyć  $e$  z  $g$  i prowadząc przez  $f$  równoległą do  $eg$ , otrzymamy wierzchołek  $f'$  zamiast  $f$  i dany siedmiokąt zastąpimy równoważnym mu czworokątem  $c'def'$ , który przekształcimy powyższym sposobem na podstawę  $a$ .



### § 3. Pole wycinka i odcinka koła. Pole odcinka parabolicznego i trójkątów parabolicznych.

**Pole wycinka koła** (rys. 136) jest, jak wiadomo = iloczynowi z długości łuku AB przez połowę promienia koła, otrzymujemy je więc wykreślnie jako pole trójkąta CAD, odkładając od punktu A po stycznej wyprostowany łuk AB

Rys. 136.



(w tym celu bierzemy w cyrkiel jakąś tak małą część łuku, że można ją uważać za równą cięciwie i odkładamy ją tyle razy na stycznej, ile razy się mieści na łuku, dołączwszy na stycznej jeszcze pozostałą resztę łuku, mniejszą od tej odkładanej długości, o ile odkładana długość nie mieści się bez reszty w długości łuku; w większości wypadków wystarcza wziąć tę odkładaną dłu-

gość = kilku milimetrom, bo zresztą odkładanie wielokrotne bardzo małych długości zmniejsza znacznie dokładność wykreślenia).

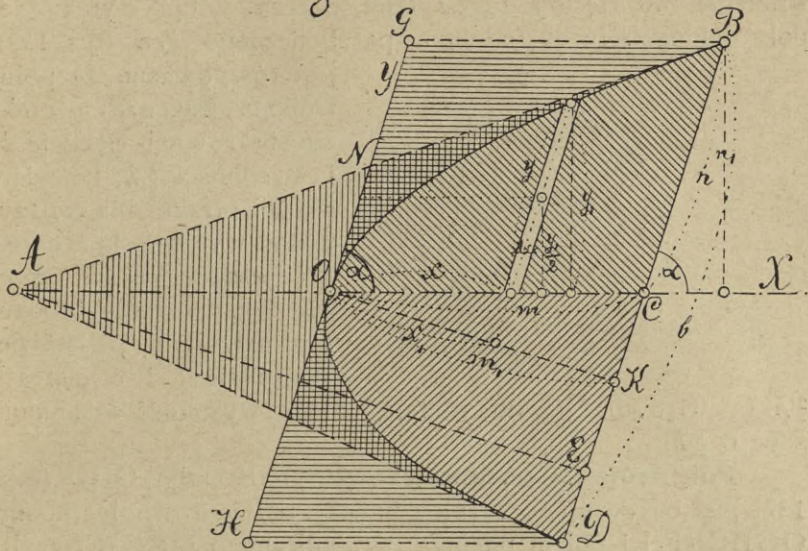
**Pole odcinka koła** (rys. 136) otrzymujemy oczywiście jako różnicę wycinka ABC i trójkąta ABC, a więc przeprowadziwszy przez B równoległą do CA i zauważywszy, że wycinek koła ABC jest równoważny trójkątowi ADC, a trójkąt ABC — trójkątowi AEC, widzimy, że odcinek AB = wyc. ABC — trójk. ABC = trójk. ADC — trójk. AEC = trójkątowi EDC.

#### Odcinek i trójkąt paraboliczny.

Parabola odgrywa, jak widzieliśmy wyżej, w statyce wykreślnej znacznie ważniejszą rolę, niż koło, wyznaczmy więc jeszcze pole odcinka parabolicznego DOB (rys. 137) i trójkątów parabolicznych OGB, OHD, ABO i ADO.



Rys. 137.



Biorąc punkt O za początek spólrzędnych ukośnokątnych X, Y, mamy, jak wiadomo, dla każdego punktu paraboli równanie:

$$y^2 = 2px \dots\dots (78).$$

Pole OBC możemy przyjąć jako złożone z nieskończonej ilości pasków równoległych do osi Y o podstawie  $dx$  i długości skośnej  $y$ , a więc pole każdego paska:  $=y_1 \cdot dx = =y \sin \alpha dx$ . Sumując te paski w odpowiednich granicach  $x$ ,

otrzymamy całe pole OBC:  $F = \int_{x=0}^{x=m} y \sin \alpha dx$ , czyli, uwzględniając równanie (78):

$$F = \int_{x=0}^{x=m} \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} \sin \alpha dx = \sqrt{2p} \sin \alpha \left| \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^m = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \sin \alpha m^{\frac{3}{2}},$$

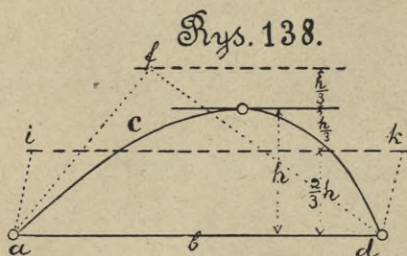
ale że dla punktu B (ze spólrzędzonymi ukośnokątnymi:  $x=m$ ,  $y=n$ ), leżącego na paraboli, mamy z równania (78):  $n^2 = 2pm$ , więc, wprowadzając jeszcze:  $m \sin \alpha = m_1$ , otrzymamy:

$$F = \frac{2}{3} m \cdot n \cdot \sin \alpha = \frac{2}{3} m_1 \cdot n \dots\dots (79).$$

Ponieważ zaś (zgodnie ze str. 59)  $BC = CD$ , to całe pole  $DOB = \frac{2}{3} m_1 \cdot 2n = \frac{2}{3} m_1 \cdot b$ , a więc pole odcinka parabo-



licznego  $DOB = 2F =$  iloczynowi z cięciwy  $b$  przez  $\frac{2}{3}$  wysokości  $m_1$ , wyznaczonej jako odległość (prostokątna) stycznej, równoległej do cięciwy  $b$ , od tejże cięciwy. Ztąd wynika, że pole jakiegokolwiek odcinka parabolicznego  $acd$  (rys. 138)



jest równoważne 1) polu trójkąta (np.  $afd$ ) o podstawie równej cięciwie  $b$  i wysokości  $\frac{4}{3}h$ , (a więc dla jej otrzymania należy ponad wysokością  $h$  odłożyć jeszcze  $\frac{1}{3}h$ ), a także 2) polu równoległoboku (np.  $aikd$ ) o podstawie = cięciwie  $b$  i wysokości

$\frac{2}{3}h$  (a więc dla jej otrzymania należy wysokość  $h$  zmniejszyć o  $\frac{1}{3}h$ ).

**Pole trójkąta parabolicznego** OGB, albo OHD (rys. 137) jest oczywiście = różnicy między polem równoległoboku OGBC ( $F_1$ ) i polem odcinka parabolicznego OBC ( $F$ ), czyli:

$$F_2 = F_1 - F = m_1 \cdot n - \frac{2}{3} m_1 \cdot n = \frac{1}{3} m_1 \cdot n = \frac{1}{3} m \cdot n \cdot \sin \alpha.$$

Ponieważ zaś trójkąty AON i NGB są równe (mają bowiem kąty równe i zgodnie ze str. 59, rys. 44:  $AO = OC = GB$ ), więc trójkąt paraboliczny ABO jest równoważny trójkątowi parabolicznemu OGB, wszystkie zatem cztery trójkąty paraboliczne OGB, OHD, ABO i ADO są równoważne i pole każdego:

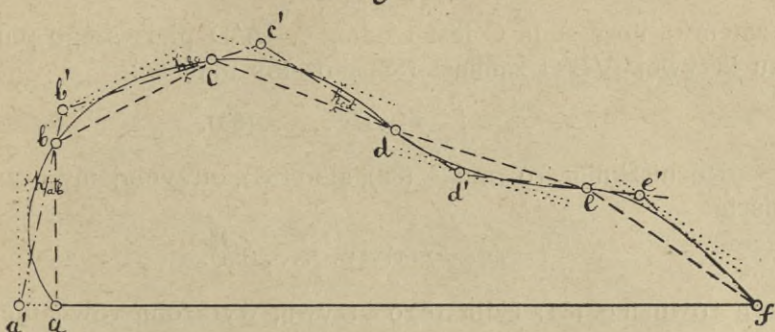
$$F_2 = \frac{1}{3} m \cdot n \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} m_1 \cdot n \dots \dots (80).$$

#### § 4. Pole ograniczone dowolnymi krzywami.

Przy obliczaniu wykreślmem takich pól (np. rys. 139) dzielimy daną krzywą — o ile możności — na płaskie odcinki i przyjmujemy je za odcinki paraboliczne, które zastępujemy kolejno równoważnymi im trójkątami, uważając, aby każdy nowy wierzchołek trójkąta leżał na przedłużeniu boku poprzedniego. Więc np. dzieląc krzywą  $abcdef$  (rys. 139) na odcinki  $ab, bc, cd, de, ef$ , łączymy punkt  $a$  z  $b$ , przeprowadzamy styczną równoległą do  $ab$ , dającą wysokość odcinka  $h_{ab}$ , przez punkt oddalony od tej stycznej o  $\frac{1}{3}h_{ab}$  prowadzimy równoległą do  $ab$  i na jej przecięciu z  $af$  otrzymamy punkt  $a'$ , którym zastąpimy punkt  $a$ , bo trójkąt  $d'ab$  jest



Rys. 139.



równoważny odcinkowi z cięciwą  $ab$ , przyjętemu za paraboliczny. Wyznaczywszy następnie wysokość  $h_{bc}$  drugiego odcinka ( $bc$ ), przeprowadzamy linię równoległą do  $bc$  (w odległości od niej o  $\frac{1}{3}h_{bc}$ ), która przetnie przedłużenie linii  $a'b$  w punkcie  $b'$  i ten punkt zastąpi punkt  $b$  (bo połączywszy punkt  $b'$  z  $c$ , zastąpić możemy odcinek z cięciwą  $bc$  równoważnym mu trójkątem  $bb'c$ ). Idąc tak samo dalej, zastępujemy odcinki z cięciwami  $cd$ ,  $de$ ,  $ef$ , równoważnymi im trójkątami  $cc'd$ ,  $dd'e$ ,  $ee'f$  i w ten sposób całe pole  $abcdef$  będzie zastąpione równoważnem mu polem  $a'b'c'd'e'f$ , ograniczonym linią łamaną, więc możemy powyższym sposobem (str. 225, rys. 135) zastąpić je czworobokiem, a ten ostatni przekształcić na podstawę  $a$  według str. 224, rys. 133 i 134).

### § 5. Obliczanie pól dowolnych figur płaskich za pomocą krzywej całkowej.

Obliczanie pól dowolnych figur płaskich dokonywane być może nie tylko sposobem powyższym, ale również za pomocą wykreślenia t. zw. **krzywej całkowej**.

Mając jakąkolwiek krzywą  $AB$  (rys. 140) z równaniem ogólnem:

$$y=f(x)\dots\dots(81),$$

wykreślimy drugą krzywą  $A'B'$ , której równanie będzie:

$$\eta = \int_{x_0}^x f(x) dx + C \dots\dots(82),$$

t. j. taką krzywą, której każda rzędna, np.  $\eta = B'E$ , jest = wyrażonemu przez całkę powyższą polu  $DABE$  (ograniczonemu rzę-







[t. j. jeżeli:  $y=f(x)=m=\text{const}$ ], to równanie (83) krzywej całkowej będzie:

$$\eta - \eta_0 = \int_{x_0}^x m dx = m \int_{x_0}^x dx = m(x - x_0),$$

czyli będzie równaniem prostej  $A'G$ , przechodzącej przez punkt  $A'$  i tworzącej z osią  $x$  kąt  $\varphi_0$ , dla którego  $tg \varphi_0 = m$ , czyli równoległej do  $L_0A$ , jeżeli np.  $y=f(x)=m=DA$  i  $DL_0 =$  jednostce długości. [Dla tego też krzywa sił poprzecznych, która zgodnie ze str. 54 jest względem krzywej obciążeń krzywą całkową, wyraża się dla obciążenia stałego jednostajnego (czyli dla krzywej obciążeń:  $y=f(x)=g=\text{const}$ ) jako linia prosta  $A_3B_3$  (rys. 40 na str. 56)]. **3)** Jeżeli równanie (81) jest równaniem jakiegokolwiek prostej, czyli:  $y=ax+b$ , to równanie krzywej całkowej (83) będzie:

$$\begin{aligned} \eta - \eta_0 &= \int_{x_0}^x (ax+b) dx = \left| a \frac{x^2}{2} + bx \right|_{x_0}^x = \\ &= \frac{ax^2}{2} + bx - \frac{ax_0^2}{2} - bx_0, \text{ czyli:} \\ \eta - \eta_0 &= \frac{ax^2}{2} + bx + C, \end{aligned}$$

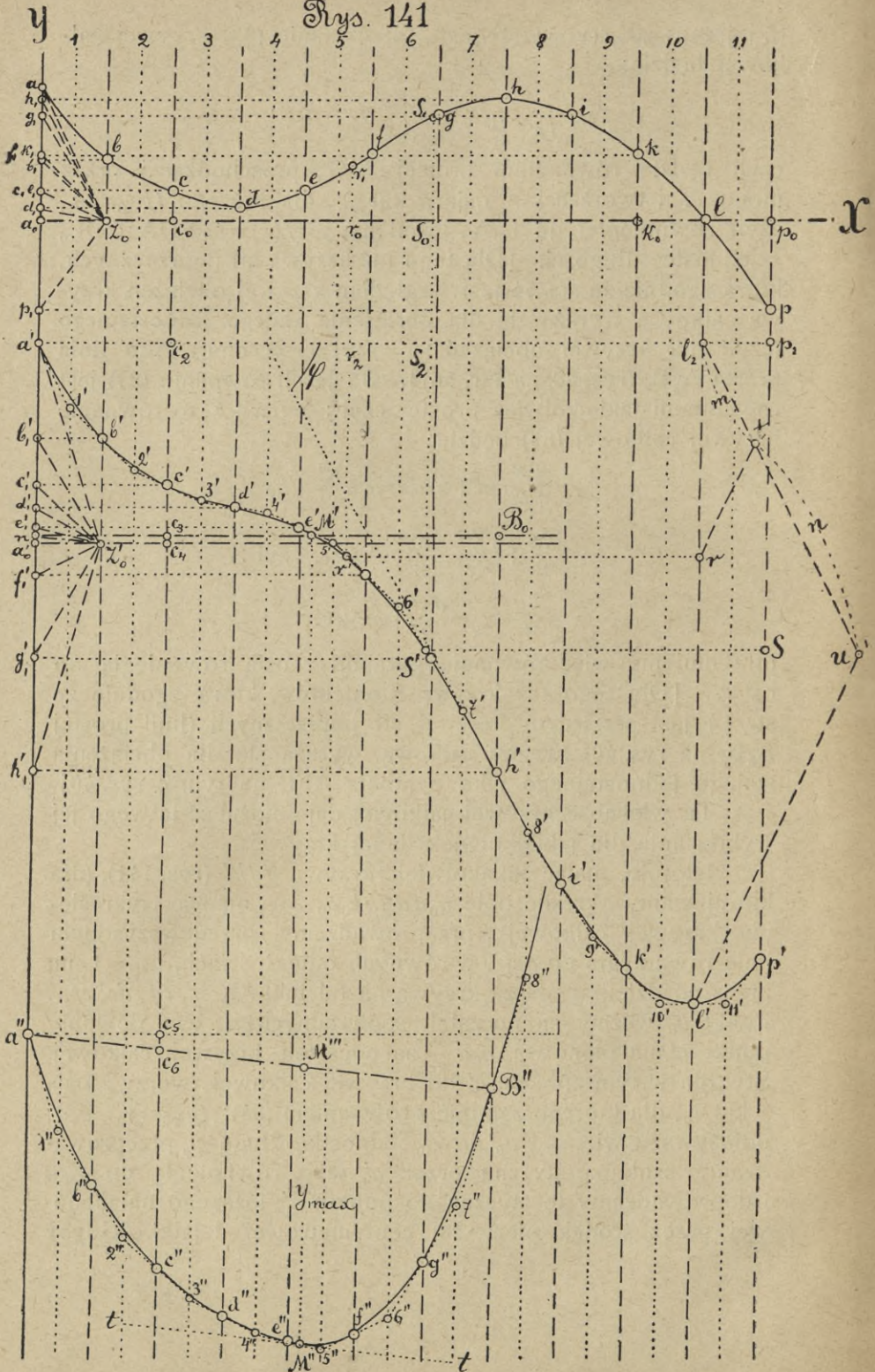
otrzymujemy więc równanie paraboli z osią równoległą do osi  $\eta$ . [Dla tego też krzywa momentów, która zgodnie ze str. 54 jest względem krzywej sił poprzecznych (linii prostej  $A_3B_3$  na rys. 40) krzywą całkową, wyraża się dla obciążenia stałego jednostajnego jako parabola  $AFB$  na tymże rys. 40].

Ta własność krzywej całkowej daje możność łatwego jej wykreślenia dla jakiegokolwiek danej krzywej:

Istotnie, mając jakąkolwiek krzywą *adhk* (rys. 141), (dla której mamy określić pole  $a_0adhkk_0a_0$  za pomocą wykreślenia krzywej całkowej), przeprowadzamy przedewszystkiem linie równoległe do osi  $y$  w równych odległościach, np. = 1 cm, przez co dzielimy naszą krzywą na odcinki  $ab, bc, cd, de, ef...$  Punkt  $a_0$  weźmy za początek współrzędnych  $x, y$ , a dowolny punkt  $a'$  na pionowej  $a_0a$  — za początek krzywej całkowej. Styczna w tym punkcie  $a'$  do krzywej całkowej tworzy z osią  $x$  kąt  $\varphi_0$ , dla którego zgodnie z równaniem (84):  $tg \varphi_0 = y_0 = a_0a$ ; odłożywszy więc od  $a_0$  do  $Z_0$  jednostkę długości, przeprowadzamy szukaną styczną przez  $a'$  jako równoległą do  $Z_0a$  i doprowadzamy tę styczną do punktu  $1'$ , leżącego na pionowej przez środek pierwszej centymetrowej działki. Gdyby



Phys. 141





punkty  $a$  i  $b$  łączyła nie krzywa, lecz prosta, to tej prostej odpowiadałaby (zgodnie z powyższem) między odpowiednimi punktami krzywej całkowej:  $a'$  (już znanym) i  $b'$  (szukanym)—parabola z osią pionową. Jedną zaś z własności paraboli—zaznaczoną już na str. 59, rys. 44—jest, że linia  $VS$ , równoległa do osi paraboli, przeprowadzona przez punkt przecięcia  $V$  dwóch stycznych w punktach  $K$  i  $L$ , jest jednakowo oddaloną ( $d$ ) od punktów  $K$  i  $L$ ; tym punktem przecięcia stycznych jest w naszym wypadku (rys. 141) właśnie punkt  $1'$ , a styczną  $1'b'$  otrzymamy, przeprowadzając przez  $1'$  linię, tworzącą kąt  $\varphi_1$  z osią  $x$ , a więc równoległą do  $b_1Z_0$  (bo  $tg\varphi_1 = y_1 = bZ_0 = a_0b_1$ ). Ta styczna określa oczywiście na pionowej przez  $b$  punkt  $b'$ , leżący na krzywej całkowej. I zupełnie tak samo, przedłużając tę styczną  $1'b'$  do pionowej przez środek drugiej działki, czyli do  $2'$  i przeprowadzając przez  $2'$  linię, tworzącą z osią  $x$  kąt  $\varphi_2$ , a więc równoległą do  $c_1Z_0$  (bo  $tg\varphi_2 = y_2 = c_0c = a_0c_1$ ), otrzymamy punkt  $c'$  krzywej całkowej.

Tak więc dla danej krzywej różniczkowej  $abcd\dots$  wykreślamy krzywą całkową sposobem następującym: Przeprowadzamy linie równoległe do osi  $y$  w odległości wzajemnej 1 (lub  $\frac{1}{2}$ ) cm i przez punkty przecięcia tych pionowych z krzywą  $abcd\dots$  prowadzimy linie równoległe do osi  $x$ , przecinające oś  $y$  w punktach  $b_1, c_1, d_1, e_1\dots$ . Odkładamy od  $a_0$  do  $Z_0$  długość = 1 i przez dowolny punkt  $a'$  na linii  $aa_0$  prowadzimy równoległą do  $aZ_0$  do spotkania w punkcie  $1'$  z pionową, przechodzącą przez środek pierwszej centymetrowej działki (nazwijmy ją pionową 1); przez ten punkt  $1'$  prowadzimy równoległą do  $Z_0b_1$  do spotkania w punkcie  $2'$  z następną pionową (czyli pionową 2); przez ten punkt  $2'$  prowadzimy równoległą do  $Z_0c_1$  do spotkania w punkcie  $3'$  z pionową 3 i t. d.

Oczywiście tylko punkty  $a', b', c' \dots$  będą punktami krzywej całkowej, więc będzie to tylko przybliżona krzywa całkową, ale przy dostatecznie małej odległości między punktami  $a, b, c, d \dots$  możemy wykreślić dokładnie krzywą całkową, mając oprócz punktów  $a', b', c', d'$  jeszcze styczne w tychże punktach:  $a'1', 1'2', 2'3', 3'4' \dots$ . Każda rzędna krzywej całkowej, wykreślonej w sposób powyższy na zasadzie równania (84), np.  $\eta = c_0c'$ , będzie zgodnie z równaniem (83), powstającym z całkowania

$$(84): \eta = \eta_0 + \int_{x_0=0}^{x=a_0c_0} f(x) dx = c_0c_2 + c_2c', \text{ a jeżeli za oś krzywej całko-}$$



wej przyjmiemy linię poziomą przez  $a'$ , to  $\eta' = \int_{x_0=0}^{x=a_0c_0} f(x) dx = c_2c'$ ,

czyli będzie = polu  $a_0acc_0a_0$ , t. j. jeśli ta rzędna  $\eta'$ , zmierzona na skali, użytej do wykreślenia krzywej całkowej, ma  $n$  jednostek **długości**, to pole  $a_0acc_0a_0$  mieć będzie  $n$  jednostek **kwa-dratowych**. (Gdybyśmy zamiast odłożyć  $a_0Z_0$  = jednostce długości, czyli 1 cm, odłożyli np.  $a_0Z_0 = 5$  cm, przez co rzędna  $\eta'$  wypadłaby 5 razy za mała, to szukane pole  $a_0acc_0a_0$  byłoby  $= \eta' \times 5 \text{ cm}^2$ ).

Widzimy teraz, że otrzymana dla obciążenia ciągłego (str. 51, rys. 38) krzywa sił poprzecznych  $A'M'B'$  jest istotnie krzywą całkową względem krzywej obciążeń  $A_2U_2B_2$  (różniczkowej), bo po przyjęciu dla niej za oś linii poziomej przez  $A'$ , czyli  $A'B'_1$ , jej rzędne, np.  $N'_1N' = F_1 + F_2 =$  polu  $AA_2N_2N'_2A$ , zupełnie tak samo, jak rzędne krzywej  $a'b'c'd'e' \dots$  (rys. 141), np.  $c_2c' =$  polu  $a_0acc_0a_0$ .

Widzimy również, że jeżeli wykreśloną w powyższy sposób krzywą całkową  $a'b'c'd'e' \dots$  (rys. 141) przyjmiemy za różniczkową i wykreślimy dla niej nową krzywą całkową  $a''b''c''d''e'' \dots$ , to taką samą krzywą całkową dla krzywej  $A'M'B'$  (rys. 38), przyjętej za różniczkową, będzie krzywa momentów  $A''M''B''$ , otrzymana jako wielobok sznurowy dla sił  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , działających w liniach pionowych przez  $J', L' \dots$  z tą tylko różnicą, że na rys. 141 rzędne krzywej  $a''b''c''d''e'' \dots$  liczą się od poziomej przez  $a''$  (na rysunku zaś 38—od  $A''B''$ ) i dają pola krzywej różniczkowej  $a'b'c'd'e' \dots$ , ograniczone osią poziomą  $a'_0Z'_0$  (na rysunku zaś 38—linią  $nB_0$ , nie przechodzącą przez biegun  $Z$ ); możemy jednak i na rysunku 141 liczyć te rzędne od skośnej  $a''B''$  i w takim razie wyrażać one będą pola ograniczone osią poziomą  $nB_0$ , idącą przez punkt  $n$ , otrzymany (na rys. 141) przez przeprowadzenie równoległej do  $a''B''$  przez  $Z'_0$ , tak samo, jak otrzymaliśmy na rysunku 38 punkt  $n$ , przeprowadzając przez  $Z$  równoległą do  $A''B''$ . [Istotnie, zgodnie z powyższem (str. 230) linii  $a'_0c_4$ , przyjętej za oś spółrzędnych przy wykreślaniu krzywej całkowej  $a''b''c'' \dots$ , odpowiada na krzywej całkowej linia  $a''c_5$ , linii zaś  $nc_3$ , równoległej do osi  $x$  (wyrażonej przez równanie  $y = f(x) = m = a'_0n$ ), odpowiada linia  $a''B''$ , tworząca z osią  $x$  kąt  $\phi_0$ , dla którego  $tg \phi_0 = m = a'_0n$ , z kąd wynika, że rzędna  $c_5c_6$  wyraża pole  $a'_0nc_3c_4a'_0$ , a że rzędna



$c_5c''$  wyraża pole  $a'_0a'd'c_4a'_0$ , więc rzędna  $c_6c''$ , jako różnica rzędnych  $c_5c''$  i  $c_5c_6$ , wyrażać będzie różnicę pól  $a'_0a'd'c_4a'_0$  i  $a'_0nc_3c_4a'_0$ , czyli pole  $na'c'c_3n$ ].

Tak więc każda rzędna krzywej całkowej  $a''c''B''$ , liczona od linii  $a''B''$ , daje, pomnożona przez jednostkę długości, pole ograniczone krzywą różniczkową  $a'b'c'd'...$  i osią poziomą  $nc_3$  i zupełnie tak samo każda rzędna krzywej momentów (rys. 38), np.  $y_k$ , daje, pomnożona przez odległość biegunową  $H$ , moment względem przekroju  $KK'$ , czyli pole  $A_0A'K'K_0$ , jak to widzieliśmy na str. 48. Podobnież największą rzędną  $y_{max}$  krzywej całkowej  $a''M''B''$  na rys. 141 (wzgl.  $A''M''B''$  na rys. 38) otrzymujemy na pionowej przez  $M'$  [punkt przecięcia osi  $nB_0$  z krzywą różniczkową  $a'M'h'$  (wzgl.  $A'M'B'$ )], a styczna  $tt'$  do krzywej  $a''M''B''$  (wzgl.  $A''M''B''$ ) w punkcie  $M''$  jest równoległa do boku zamykającego  $a''B''$  (wzgl.  $A''B''$ ). Łatwo zauważyć przytem, że pionowa przez punkt  $M'$  dzieli pole ograniczone krzywą  $a'M'h'$  (wzgl.  $A'M'B'$ ) i osią  $nB_0$  na dwie równoważne części  $na'M'n$  i  $M'B_0h'M'$  (wzgl.  $A_0A'M'A_0$  i  $M'B_0B'M'$ ), bo pole  $na'M'n$  (wzgl.  $A_0A'M'A_0$ ) wyraża się na krzywej całkowej według powyższego rzędną tej krzywej na pionowej  $M'M'$ , równą  $y_{max}$  i tak samo całkowite pole  $na'M'h'B_0n$  (wzgl.  $A_0A'M'B'B_0A_0$ ), składające się z położonej ponad osią  $nB_0$ , a więc  **dodatniej**  części do punktu  $M'$  i z  **ujemnej** — w dalszym ciągu od punktu  $M'$ , wyraża się przez rzędną krzywej całkowej na pionowej  $B_0B''$ , równą  $0$ , z kąd wynika, że pole  **dodatnie**   $na'M'n$  (wzgl.  $A_0A'M'A_0$ ) jest równoważne polu  **ujemnemu**   $M'B_0h'M'$  (wzgl.  $M'B_0B'M'$ ).

Krzywa całkową nie tylko daje możność określenia pola, ograniczonego krzywą różniczkową i osią  $x$ , ale wskazuje również, w jaki sposób pole to wzrasta, bo wyobrazivszy je sobie jako składające się z nieskończonej ilości elementów prostokątnych o podstawie  $dx$  i wysokości  $y$ , widzimy (rys. 141), że rzędne krzywej całkowej wzrastają tem szybciej, im większe są te elementy  $ydx$  i odwrotnie. Jest to  **pierwsza**  własność krzywej całkowej.  **Drugą**  jej własnością jest, że punktom najniższym, np.  $d$  (rys. 141) i najwyższym, np.  $h$ , krzywej różniczkowej odpowiadają na krzywej całkowej punkty zwrotne  $d'$  i  $h'$  (bo jeżeli  $y$  jest w punkcie  $h$  maximum, to na mocy równania (84):  $\frac{d\eta}{dx} = tg\varphi = y$ , więc  $tg\varphi$  musi być maximum, czyli punkt  $h'$  jest punktem zwrotnym).  **Trzecią**  zaś własno-



ścią krzywej całkowej jest, że punktom przecięcia osi  $x$  z krzywą różniczkową, np.  $l$  (rys. 141), odpowiadają najniższe, np.  $l'$ , (lub też najwyższe) punkty krzywej całkowej (bo skoro  $y=0$ , to z równania (84):  $\frac{d\eta}{dx} = tg\varphi = y=0$ , więc kąt  $\varphi=0$  i styczna jest równoległa do osi  $x$ , czyli jest to minimum, lub maximum dla krzywej całkowej). Wszystkie te 3 własności widzimy stwierdzone na rys. 38, na którym, jak wiadomo z powyższego, linia  $A'B'$  jest krzywą całkową dla różniczkowej  $A_2B_2$ , linia zaś  $A''NB''$  jest całkową dla różniczkowej  $A'B'$ ; a więc najniższym i najwyższym punktem krzywej różniczkowej  $A_2B_2$  (np.  $U_2$ ), odpowiadają na krzywej całkowej  $A'B'$  punkty zwrotne tejże krzywej ( $U'$ ); punktowi zaś przecięcia z osią  $x$  (t. j. z linią poziomą  $A_3B_3$ , idącą przez  $Z$ ) krzywej różniczkowej  $A'B'$ , czyli punktowi  $M'_1$ , odpowiada punkt  $M''_1$  na krzywej całkowej  $A''NB''$ , w którym styczna do tej krzywej  $t_1t_1$  jest równoległa do osi  $x$ ; skoro jednak na rysunku tym liczymy rzędne krzywej całkowej  $A''NB''$  od linii  $A''B''$ , odpowiadającej—jak widzieliśmy wyżej—linii  $nA_0B_0$ , to otrzymamy teraz, na przecięciu tej osi  $A_0B_0$  z krzywą różniczkową  $A'B'$ , punkt  $M'$  i odpowiadający mu na krzywej całkowej  $A''NB''$  punkt  $M''$ , w którym styczna  $tt$  jest równoległa do  $A''B''$  i rzędna  $y_{max}$  — największa.

Najpraktyczniej jest narysować raz na zawsze na oddzielnym papierze szereg linii pionowych w jak najmniejszej odległości jedna od drugiej, a wyrysowawszy następnie linię różniczkową na przezroczystym papierze, nakłada się ją na papier poliniowany pionowo i odrazu wykreśla linię całkową.

Krzywa całkową, wykreślona z należyłą dokładnością, daje możliwość podzielenia pola krzywej różniczkowej na części w danym stosunku. Jeżeli np. chcemy podzielić całe pole  $a_0adhpp_0a_0$  (rys. 141) na dwie równoważne części (część pola pod osią  $a_0l$  uważać należy za ujemną), to wystarcza przez środek rzędnej  $p_2p'$ , wyrażającej, jak wiadomo, pole  $a_0adhpp_0a_0$ , czyli przez  $S$ , przeprowadzić równoległą do osi  $a'l$ , a pionową  $S'S_1$ , przeprowadzoną przez otrzymany na krzywej  $a'l$  punkt  $S'$ , podzieli pole  $a_0adhpp_0a_0$  na dwie równoważne części (bo według str. 234 pole  $a_0aS_1S_0a_0 = S_2S' = = \frac{1}{2}p_2p' = \frac{1}{2}$  pola  $a_0adhpp_0a_0$ ).

Jeżeli zaś chcemy np. pole  $a_0adhla_0$  podzielić na dwie części w stosunku  $m$  do  $n$ , to odłożyć należy na jakiejkol-



wiek prostej, idącej przez punkt  $l_2$ ,  $m$  jednostek długości do punktu  $t$ , a dalej  $n$  jednostek do punktu  $u$ , połączyć  $u$  z  $l'$ , przeprowadzić przez  $t$  równoległą do  $ul'$ , a przez otrzymany na linii  $ll'$  punkt  $r$  przeprowadzić równoległą do osi  $a'p_2$  i punktowi  $r'$  na przecięciu z krzywą  $a'l'$  odpowiadać będzie przekrój pionowy  $r'r_1$ , dzielący pole  $a_0adhla_0$  w żądanym stosunku  $m:n$  (bo tak samo, jak wyżej, pole  $a_0adhla_0 = l_2l'$ , pole zaś  $a_0ar_1r_0a_0 = r_2r' = l_2r$ , więc różnica tych pól, czyli pole  $r_0r_1hlr_0$  będzie  $= l_2l' - l_2r = r'l'$ ; a skoro  $\frac{l_2r}{r'l'} = \frac{m}{n}$ , to i  $\frac{\text{pole } a_0ar_1r_0a_0}{\text{pole } r_0r_1hlr_0} = \frac{m}{n}$ ).

## ROZDZIAŁ VI.

### Środek sił równoległych i środek ciężkości. Moment statyczny pola figury płaskiej.

#### § 1. Pojęcia ogólne.

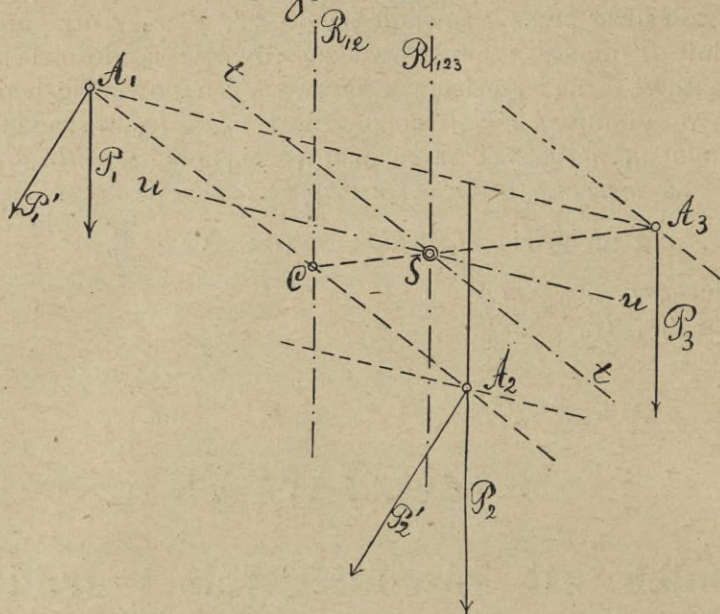
Jeżeli każdą z sił równoległych  $P_1, P_2, P_3$  (rys. 142) obracać będziemy naokoło jakiegoś punktu stałego  $A_1, A_2, A_3$ , na niej leżącego, tak przytem, żeby pozostawały do siebie równoległymi i nie zmieniały swej wielkości, to można łatwo dowieść, że wypadkowa tych sił  $R$  obracać się będzie również naokoło jednego jakiegoś punktu  $S$ , na niej leżącego, który nazywamy środkiem sił równoległych  $P_1, P_2, P_3$ . Istotnie weźmy naprzód dwie tylko siły  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 142), to zgodnie ze str. 23 wypadkowa tych sił  $R_{12}$  dzieli każdą linię  $A_1A_2$  między temi siłami w stosunku odwrotnym do sił  $P_1$  i  $P_2$ , czyli:

$$\frac{A_1C}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1},$$

więc jeżeli siły  $P_1$  i  $P_2$  obracać będziemy naokoło jakichkolwiek, leżących na tych siłach punktów  $A_1, A_2$  i nadamy im nowe położenia  $P'_1, P'_2$  (nie zmieniając wielkości sił), to wy-



Rys. 142.



padkowa ich  $R'_{12}$  będzie oczywiście co do wielkości równą poprzedniej  $R_{12}$  i podzieli tę skośną linię  $A_1A_2$  także w stosunku  $\frac{A_1C}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1}$ , a zatem przejdzie przez ten sam punkt  $C$  i przy obrocie sił  $P_1$  i  $P_2$  około punktów  $A_1, A_2$  wypadkowa ich  $R_{12}$  obraca się około punktu  $C$ , środka tych 2-ch sił równoległych. Jeżeli następnie złączymy tę wypadkową  $R_{12}$  z nową siłą  $P_3$  w wypadkową  $R_{123}$ , to podobnie, jak wyżej, przy obrocie tych 2-ch sił  $R_{12}$  i  $P_3$  około punktów  $C$  i  $A_3$  otrzymamy na przecięciu linii  $CA_3$  z siłą  $R_{123}$  punkt  $S$ , który będzie środkiem wszystkich 3-ch sił równoległych i przy ich obrocie około punktów  $A_1, A_2, A_3$  wypadkowa ich  $R_{123}$  obracać się będzie około tego punktu  $S$ . Że ten punkt  $S$  będzie istotnie środkiem dwóch sił  $R_{12}$  i  $P_3$  i zarazem środkiem wszystkich 3-ch sił  $P_1, P_2, P_3$ , możemy łatwo dowieść sposobem następującym: Obróćmy siły  $P_1, P_2, P_3$  około punktów  $A_1, A_2, A_3$  na taki kąt  $\alpha$ , aby siły  $P_1$  i  $P_2$  zajęły obie linie  $A_1A_2$ , a siła  $P_3$  zajmie oczywiście linię równoległą do  $A_1A_2$ , idącą przez  $A_3$ . Sprowadzamy przez to trzy siły  $P_1, P_2, P_3$  do dwóch sił:  $(P_1+P_2)$  i  $P_3$ , a wypadkowa tych dwóch



sił działać będzie zgodnie ze str. 23 w linii  $tt$ , otrzymanej przez podzielenie odcinka  $A_1A_3$  w stosunku  $P_3:(P_1+P_2)$ . Obróćmy siły  $P_1, P_2, P_3$  jeszcze dalej, tak, aby  $P_1$  zajęła linię  $A_1A_3$  (razem z  $P_3$ ), a siła  $P_2$  linię równoległą do  $A_1A_3$ , idącą przez  $A_2$ , to wypadkowa tych dwóch sił:  $(P_1+P_3)$  i  $P_2$ , otrzymana jak wyżej, działać będzie w linii  $uu$  i widzimy, że przecięciem tych linii  $tt$  i  $uu$  jest otrzymany wyżej punkt  $S$ —jest on zatem środkiem wszystkich 3-ch sił  $P_1, P_2, P_3$ . Toż samo stosuje się oczywiście do dowolnej ilości sił równoległych.

Z powyższego wynika ogólne prawo, według którego środek sił równoległych znajduje się jako punkt przecięcia wypadkowej danego układu sił z wypadkową układu w nowym położeniu, po obróceniu każdej siły około jakiegoś punktu na niej leżącego, przy jednym dla wszystkich kącie odchylenia—tak, aby układ pozostał układem sił równoległych.

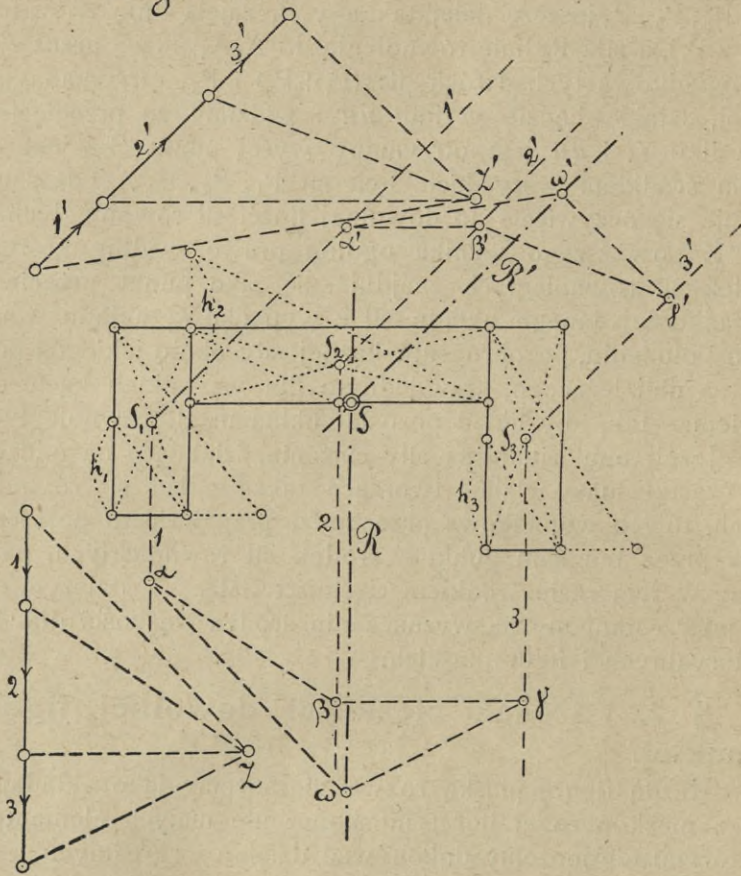
Jeżeli temi siłami są siły ciężenia, działające na oddzielne części masy ciała i tworzące także układ sił równoległych, to ich wypadkowa przechodzi przy każdym położeniu ciała przez ten sam punkt — środek sił równoległych, nazywany w tym razie **środkiem ciężkości ciała**. W dalszym ciągu poprzestaniemy na wyznaczaniu środka ciężkości dla linii materyalnych i figur płaskich.

## § 2. Środek ciężkości dowolnej figury płaskiej.

Każdą figurę płaską rozważać możemy jako składającą się z nieskończonej ilości nieskończenie małych elementów, z którymi nie możemy dokonywać działań wykreslnych, a nie zmienimy rezultatu, łącząc te elementy w oddzielne grupy (tak samo, jak nie zmieniliśmy rezultatu powyżej, łącząc (rys. 142) siłę  $P_1$  z siłą  $P_2$  w wypadkową  $R_{12}$  i potem dopiero dołączając do tej ostatniej siłę  $P_3$ ), więc dane pole figury płaskiej dzielimy na kilka możliwie prostych części, których środki ciężkości są łatwe do określenia i przypuściwszy, że w tych środkach ciężkości działają siły równe (lub proporcjonalne) wielkości tych oddzielnych części, znajdujemy dla tych sił środek ciężkości, który oczywiście będzie zarazem środkiem ciężkości całej figury. Tak np. całe pole  $F$  figury płaskiej (rys. 143) podzielimy na 3 prostokąty, których środki ciężkości leżą oczywiście w środkowych punktach  $S_1, S_2, S_3$ , a więc możemy przypuścić, że w tych punktach działają siły



Rys. 143.



równe polom tych prostokątów  $F_1, F_2, F_3$ , które przekształcimy (według str. 222) na dowolną podstawę  $a$ . Otrzymane przytem odcinki  $h_1, h_2, h_3$ , proporcjonalne polom  $F_1, F_2, F_3$ , uważamy za siły 1, 2, 3, działające w punktach  $S_1, S_2, S_3$  i wyznaczamy ich wypadkową  $R$  za pomocą wieloboku sznurowego  $\alpha\beta\gamma\omega$ .

Obracając następnie te siły naokoło punktów  $S_1, S_2, S_3$  i nadając im jakiegokolwiek inne położenia  $1', 2', 3'$ , wyznaczamy znowu za pomocą nowego wieloboku sznurowego  $\alpha'\beta'\gamma'\omega'$  położenie ich wypadkowej  $R'$ , a punkt przecięcia tych dwóch wypadkowych  $R$  i  $R'$  będzie szukanim środkiem ciężkości  $S$  całej figury. Dla pewności i sprawdzenia dobrze jest wyzna-

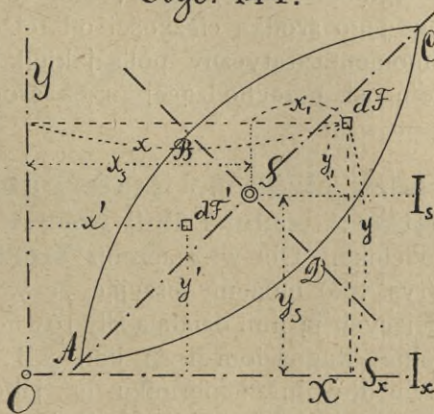


czyć wypadkową jeszcze dla trzeciego kierunku, która przejść musi przez ten sam punkt  $S$ . (Gdybyśmy na rys. 143 przyjęli dla sił  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  kierunek poziomy, uniknęlibyśmy przez to rysowania nowego wieloboku sił, mogąc odrazu wykreślać boki nowego wieloboku sznurowego  $\alpha''\beta''\gamma''\omega''$  prostopadłe do promieni pierwszego wieloboku sił).

### § 3. Moment statyczny pola figury płaskiej.

Jeżeli przyjmiemy, że w środku ciężkości  $S$  pola  $F$  figury płaskiej (rys. 143), jako też w środkach ciężkości  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  pól  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , działają siły równe tymże polom  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , to moment siły  $F$  względem jakiejkolwiek linii  $x$  (o ile wyobrazimy sobie wszystkie siły  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  obrócone około punktów  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  o taki kąt, że stały się równoległymi do osi  $x$ ) będzie równy iloczynowi z siły  $F$  przez jej odległość od osi  $x$ , a także — sumie momentów sił  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  względem tejże osi  $x$  i nazywać go będziemy momentem statycznym pola  $F$  względem osi  $x$ , a według powyższego będzie on równy sumie momentów statycznych oddzielnych pól  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  względem tejże osi  $x$ . I podobnie, jeżeli wyobrazimy sobie, że pole  $F$  dowolnej figury płaskiej, np.  $ABCD$  (rys. 144), składa się z nieskończonej ilo-

Rys. 144.



ści nieskończenie małych elementów  $dF$ , to moment statyczny pola  $F$  względem dowolnej osi  $x$  (oznaczymy go przez  $S_x$ ), będzie równy iloczynowi z pola  $F$  przez odległość  $y_s$



środku ciężkości tegoż pola  $F$  od osi  $x$  oraz równy sumie momentów oddzielnych elementów  $dF$  danego pola względem osi  $x$ , czyli możemy napisać:

$$S_x = F \cdot y_s = \sum^m y_m dF_m \dots \dots (85).$$

A więc, obliczywszy dla danego pola  $F$  jego moment statyczny  $S_x$  i  $S_y$  względem dwóch jakichkolwiek osi  $x$  i  $y$ , otrzymujemy położenie środka ciężkości tegoż pola (spółrzędne  $x_s$  i  $y_s$ ), bo:

$$S_x = F \cdot y_s, \text{ więc: } y_s = \frac{S_x}{F},$$

$$S_y = F \cdot x_s, \text{ „ } x_s = \frac{S_y}{F}.$$

Dla figur płaskich, mających oś symetrii, środek ciężkości leży oczywiście na tej osi (bo oś symetrii jest linią działania wypadkowej całego układu sił równoległych, rozłożonych względem niej symetrycznie), a więc zamiast dwóch wieloboków sznurowych wykreślamy tylko jeden (dla jakiegokolwiek kierunku sił równoległych, byleby przecinającego oś symetrii), wyznaczamy wypadkową i środek ciężkości otrzymamy jako punkt przecięcia tej wypadkowej z osią symetrii. Jeżeli zaś figura płaska ma **dwie** osie symetrii (jak na rys. 144), to środek ciężkości leży oczywiście na ich przecięciu  $S$ , więc wyznaczać go nie potrzeba.

Z powyższego określenia momentu statycznego pola  $F$  figury płaskiej względem danej osi  $x$ , jako iloczynu z pola  $F$  przez odległość jego środka ciężkości od tejże osi, wynika oczywiście, że moment statyczny pola jakiegokolwiek figury płaskiej względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości tegoż pola, jest  $= 0$ .

#### § 4. Środek ciężkości materalnych linii.

**Środek ciężkości odcinka linii prostej** leży oczywiście w środku odcinka. Dla wyznaczenia **środku ciężkości linii łamanej** (rys. 145) możemy przyjąć, że w środkach  $G$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  składających ją linii działają siły równoległe, równe, lub proporcjonalne długościom tych linii  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD \dots$ , naprzód w jednym dowolnym kierunku, np. jako  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , a potem w drugim, np. jako  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  i wyznaczwszy za pomocą 2-ch wieloboków sznurowych (jak na rys. 143) wypadkowe  $R$  i  $R'$ , otrzymujemy środek ciężkości jako punkt przecięcia  $R$  i  $R'$ .



Dla wyznaczenia **środk**a ciężkości dowolnej krzywej wpisujemy w nią wielobok o jak najmniejszych bokach i środek ciężkości tegoż wieloboku przyjmujemy za środek ciężkości krzywej.

Dla wyznaczenia **środk**a ciężkości linii łamanej, stanowiącej część wielokąta foremnego ACDEFB (rys. 146), zauważmy przedewszystkiem,

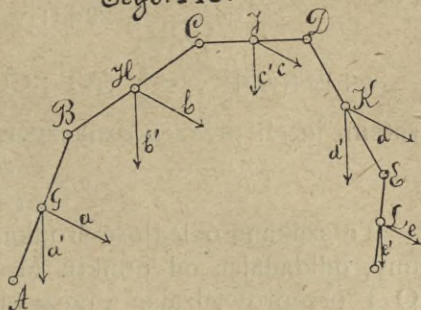
że szukany środek ciężkości musi leżeć na osi symetrii OM. Jeżeli długości boków AC, CD, DE... przyjmijemy jako siły pionowe, działające w środkach ciężkości L, N, M... i obrócimy te siły tak, że staną się równoległe do osi  $x$ , to moment ich wypadkowej R względem osi  $x$  będzie równy sumie momentów tych sił względem osi  $x$ , więc:

$$R \cdot y_s = AC \cdot y_l + CD \cdot y_n + DE \cdot y_m + \dots,$$

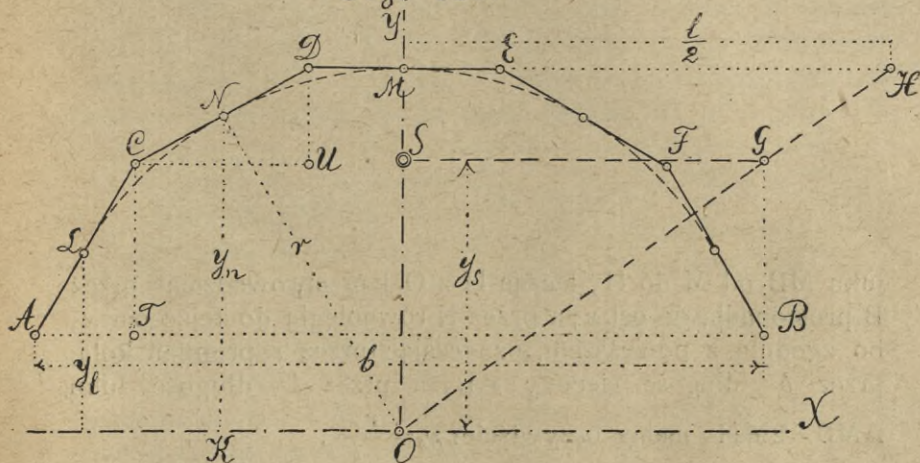
a w obec:  $AC = CD = DE = \dots = a$ , i  $R = \Sigma a = l$  (długości całego obwodu AMB):

$$l \cdot y_s = a (y_l + y_n + y_m + \dots),$$

Rys. 145.



Rys. 146.





$$\text{zkałd: } y_s = \frac{a}{l} (y_l + y_n + y_m + \dots).$$

Przeprowadzając przez C równoległą do osi  $x$ , mamy w obec podobieństwa trójkątów CDU i NOK:

$$\frac{y_n}{r} = \frac{CU}{CD=a}, \text{ zkałd: } y_n = \frac{r \cdot CU}{a}, \text{ więc:}$$

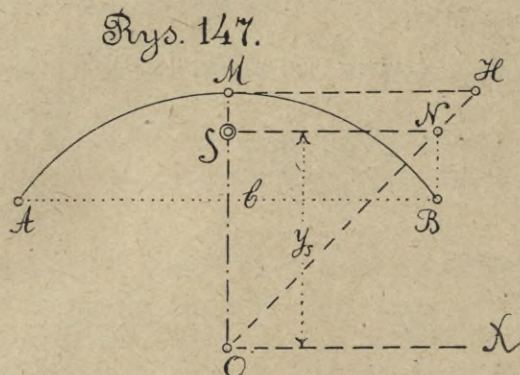
$$y_l + y_n + y_m + \dots = \frac{r}{a} (AT + CU + DE + \dots) = \frac{r}{a} \cdot AB,$$

a zatem, jeżeli przez  $b$  oznaczymy długość AB:

$$y_s = \frac{r \cdot b}{l}.$$

Tę szukaną odległość środka ciężkości  $y_s$  od osi  $x$  otrzymamy, odkładając od punktu M do H długość  $\frac{1}{2}l$ , łącząc H z O i przeprowadzając przez punkt B prostopadłą BG do osi  $x$ , dającą w przecięciu z linią OH punkt G w odległości  $y_s$  od osi  $x$ , a środek ciężkości S będzie punktem przecięcia idącej przez punkt G równoległej do osi  $x$  z osią symetrii OM (bo:  $\frac{OS}{OM} = \frac{SG}{MH}$ , czyli  $\frac{OS}{r} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}l}$ , zkałd:  $OS = \frac{r \cdot b}{l} = y_s$ ).

Na mocy powyższego wyznaczmy **środek ciężkości łuku koła** AMB (rys. 147), odkładając długość wyprostowanego



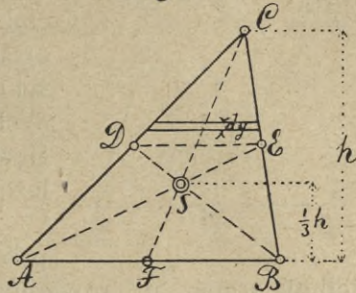
łuku MB od M do H, łącząc H z O i przeprowadzając przez B prostopadłą do osi  $x$ , a przez N równoległą do tejże osi  $x$ , bo zgodnie z powyższym, oznaczając przez  $r$  promień koła, przez  $b$  — długość cięciwy AB, a przez  $l$  — długość łuku  $AMB = 2MH$ , mamy oczywiście:  $y_s = \frac{r \cdot b}{l}$ .



### § 5. Środek ciężkości figur płaskich.

**Trójkąt.** Rozpatrując trójkąt (rys. 148) jako złożony z równoległych do podstawy pasków o nieskończenie małej wysokości  $dy$ , widzimy że linia CF, łącząca wierzchołek C ze środkiem podstawy AB, przechodzi przez środek każdej linii (np. DE), równoległej do podstawy, więc na tej linii CF leżą środki wszystkich pasków, a także środek ciężkości całego trójkąta. (Bo jeżeli przyjmiemy pola poszczególnych pasków za siły równoległe, działające w ich środkach ciężkości, to dla całej grupy pasków, mających swe środki ciężkości na jednej prostej — środek ciężkości musi na niej leżeć).

Rys. 148.

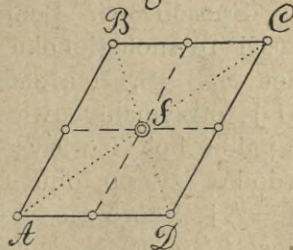


Ponieważ to samo stosuje się zarówno do każdej z 3-ch podstaw trójkąta, więc środek jego ciężkości jest punktem przecięcia 3-ch linii, łączących wierzchołki ze środkami boków przeciwległych. Linia DE jest oczywiście (w obec  $AD=DC$  i  $BE=EC$ ) równoległa do AB i przytem  $DE = \frac{1}{2} AB$  (bo:  $\frac{DC}{AC} = \frac{DE}{AB}$ ). W obec zaś podobieństwa trójkątów DSE i ASB:  $\frac{AS}{SE} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$ , więc:  $AS=2SE$  i  $SE = \frac{1}{3} AE$ .

Stosuje się to oczywiście do każdej z 3-ch linii: AE, BD i CF, a więc np.  $SF = \frac{1}{3} CF$ , z kąd wynika, że **środek ciężkości trójkąta** (rys. 148) **leży na linii, łączącej jakikolwiek wierzchołek (C) ze środkiem (F) boku przeciwległego (AB) na trzeciej części odległości od tegoż środka (F), albo też (o ile przyjmiemy np. bok AB za podstawę trójkąta) na  $\frac{1}{3}$  wysokości h.**

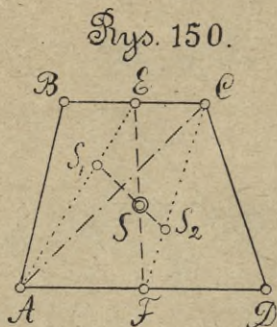
**Równoległobok.** Środek ciężkości równoległoboku (rys. 149) musi leżeć — podobnie jak w trójkącie — na linii, łączącej środki boków BC i AD, a także na linii, łączącej środki boków AB i CD, więc leży na przecięciu tych linii, czyli również na przecięciu przekątnych AC i BD.

Rys. 149.



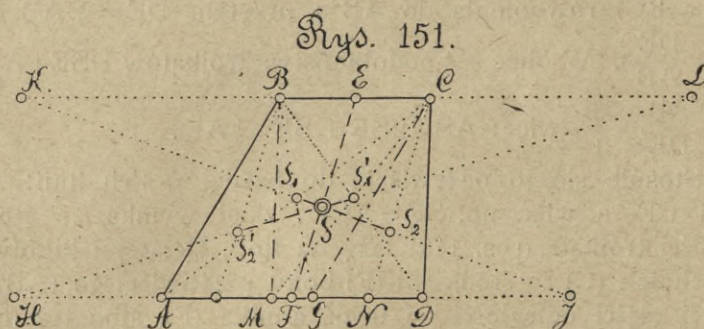


**Trapez. Sposób 1-y.** Rozpatrując trapez (rys. 150) jako składający się z nieskończonej ilości równoległych do podstawy AD pasków o nieskończonej małej wysokości, widzimy, że środki ciężkości tych pasków leżą wszystkie na linii, łączącej środki równoległych boków trapezu BC i AD, więc na tejże



linii musi leżeć środek ciężkości całego trapezu, a przeprowadzając jeszcze linię AC i odkładając na odcinkach EA i FC trzecią ich część, otrzymujemy  $S_1$  i  $S_2$ , środki ciężkości trójkątów ABC i ACD, składających trapez, w obec czego środkiem ciężkości trapezu będzie punkt S, leżący na przecięciu linii  $S_1S_2$  z EF.

**Sposób 2-gi.** Przeprowadzając przez C (rys. 151) równoległą do BA, dzielimy trapez na równoległobok ABCG i trójkąt GCD, a więc zgodnie z powyższem środek ciężkości trapezu S będzie punktem przecięcia linii  $S_1S_2$ , łączącej środki ciężkości równoległoboku i trójkąta, z linią EF.

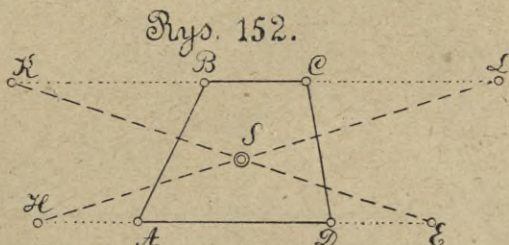


**Sposób 3-ci.** Ponieważ  $S_1$  (rys. 151) jest środkiem ciężkości równoległoboku, leżącym na przecięciu przekątnych, więc  $S_1B = S_1G$ , a zatem przedłużywszy  $S_1S_2$  do punktów K i J, otrzymamy dwa równe trójkąty  $KBS_1$  i  $S_1GJ$  (bo mają jeden bok i wszystkie 3 kąty równe), więc:  $KB = GJ$ , a dodawszy po obu stronach  $BC = AG$ , otrzymujemy:  $KC = AJ$ . Skoro zaś  $S_2$  jest środkiem ciężkości trójkąta GCD, więc:  $CS_2 = 2S_2N$ , a wskutek podobieństwa trójkątów  $KCS_2$



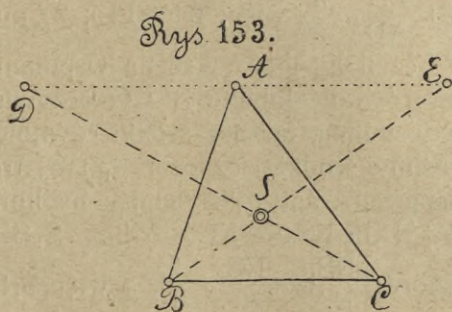
i  $NS_2J$  otrzymujemy:  $KC=2NJ=GD+2DJ$ , więc:  $AJ=GD+2DJ$ , z ką:  $AG=DJ$ ; ale  $AG=BC$ , a zatem:  $DJ=BC$ , a  $KB=GJ=GD+DJ=GD+AG=AD$ .

Podobnie, podzieliwszy trapez linią równoległą do  $CD$  na równoległobok  $BCDM$  i trójkąt  $ABM$ , otrzymujemy na przecięciu linii  $S'_1S'_2$  z  $EF$  punkt  $S$ , a przedłużywszy  $S'_1S'_2$ , będziemy mieli  $HA=BC$  i  $CL=AD$ . Ztąd wynika, że dla wyznaczenia środka ciężkości trapezu odkładamy od punktów  $B$  i  $C$  (rys. 152) w obie strony odcinki  $=AD$ , a od punktów



$A$  i  $D$  — odcinki  $=BC$ , i linie, łączące otrzymane punkty  $K$  i  $L$  z punktami  $H$  i  $E$ , dają w przecięciu szukany środek ciężkości  $S$ .

[Wynika ztąd oczywiście, że dla trójkąta — jako szczególnego przypadku trapezu, w którym górna podstawa  $=0$  (rys. 153) — otrzymujemy środek ciężkości, odkładając w obie

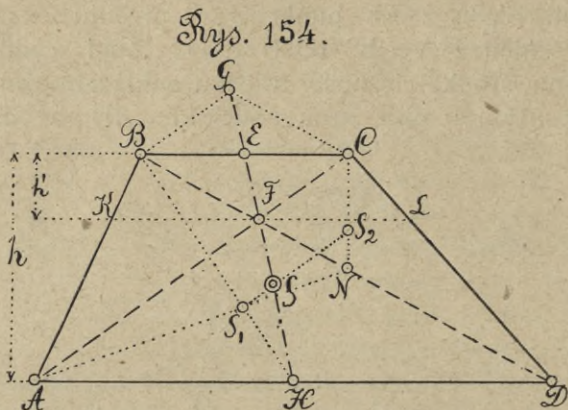


strony od wierzchołka, równoległe do podstawy, długość tej-że podstawy  $BC$  i łącząc końcowe punkty  $D$  i  $E$  z punktami  $C$  i  $B$  — na przecięciu tych prostych  $DC$  i  $EB$ ].

**Sposób 4-y.** Wreszcie możemy otrzymać środek ciężkości trapezu sposobem następującym:



Przez punkty B i C (rys. 154) prowadzimy równoległe do przekątnych AC i BD; linia, łącząca ich punkt przecięcia G z punktem przecięcia przekątnych F, daje na podstawie AD punkt H, od którego odłożywszy na tej linii HG trzecią



część całej długości HG, otrzymujemy środek ciężkości trapezu S.

Istotnie, zauważmy przedewszystkiem, że 1) punkt przecięcia przekątnych F leży na linii, łączącej środki równoległych jej boków (przeprowadziwszy bowiem przez F równoległą do AD, mamy wskutek podobieństwa trójkątów KBF i ABD, a także FCL i ACD:

$$\frac{KF}{AD} = \frac{h'}{h} \text{ i } \frac{FL}{AD} = \frac{h'}{h}, \text{ więc: } KF = FL); \text{ 2) punkt przecięcia}$$

linii BC i GF, czyli E, leży także na wspomnianej linii (bo w utworzonym równoległoboku BFCG oczywiście  $BE = EC$ ), więc linia GF jest linią, łączącą środki równoległych boków trapezu. Określmy środki ciężkości  $S_1$  i  $S_2$  trójkątów ABD i BCD, składających trapez, odkładając na liniach NA i NC odcinki:  $NS_1 = \frac{1}{3} NA$  i  $NS_2 = \frac{1}{3} NC$ , to linia  $S_1S_2$  jest równoległa do AC (skoro:  $\frac{NS_1}{NA} = \frac{NS_2}{NC} = \frac{1}{3}$ ), a więc  $S_1S_2$  jest równo-

legła zarazem i do BG. Linia  $S_1S_2$  przechodzić musi przez środek ciężkości trapezu, a że ten środek leży na linii, łączącej środki równoległych boków trapezu, więc trzeba tylko dowieść, że punkt przecięcia linii  $S_1S_2$  z linią GH, czyli punkt S, leży na prostej GH w odległości od H =  $\frac{1}{3} GH$ . Istotnie skoro  $S_1$  jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to  $HS_1 = \frac{1}{3} HB$ ,

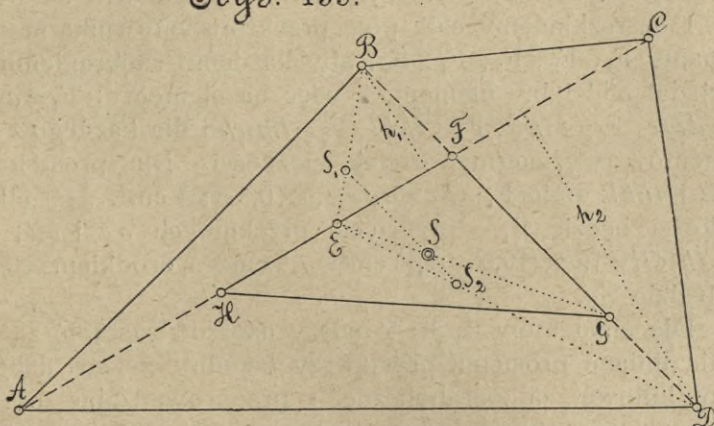


a że  $S_1S$  jest równoległa do  $BG$ , więc z podobieństwa trójkątów  $S_1SH$  i  $BGH$  wynika:  $HS = \frac{1}{3}HG$ .

Najprostszy z tych wszystkich sposobów jest sposób 3-ci (rys. 152), a jest zarazem najdokładniejszy, jeżeli linie  $KE$  i  $HL$  przecinają się pod dość dużym kątem i dają dokładnie punkt  $S$  (bo sposób ten wymaga tylko odłożenia dwóch boków trapezu bez określania środka tychże boków).

**Czworokąt.** Przeprowadzamy przekątne  $AC$  i  $BD$  (rys. 155) i dla trójkątów  $ABC$  i  $ACD$  znajdujemy środki ciężkości  $S_1$  i  $S_2$  (łącząc środek przekątnej  $AC$ , t. j.  $E$ , z punktami  $B$  i  $D$  i odkładając  $ES_1 = \frac{1}{3}EB$  i  $ES_2 = \frac{1}{3}ED$ ). Na linii  $S_1S_2$  musi oczywiście leżeć środek ciężkości czworokąta, a oprócz

Rys. 155.



tego, zgodnie ze str. 248, linia  $S_1S_2$  jest równoległa do  $BD$ . Zauważmy, że punkt  $S$  musi dzielić odcinek  $S_1S_2$  odwrotnie proporcjonalnie do  $F_1$  i  $F_2$ , pól trójkątów  $ABC$  i  $ACD$  (bo możemy sobie wyobrazić w punktach  $S_1$  i  $S_2$  ześrodkowane siły równoległe, równe tym polom  $ABC$  i  $ACD$ ), więc:

$$\frac{S_1S}{SS_2} = \frac{F_2}{F_1} \text{ i w obec wspólnej podstawy } AC \text{ tych obu trójkątów: } \frac{S_1S}{SS_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{h_2}{h_1}, \text{ a zatem także (ze względu na: } \frac{h_2}{h_1} = \frac{FD}{FB} \text{)}$$

$$\frac{S_1S}{SS_2} = \frac{FD}{FB}; \text{ jeżeli zaś odłożymy } DG = FB \text{ (więc: } GB = FD \text{),}$$

$$\text{to: } \frac{S_1S}{SS_2} = \frac{FD}{FB} = \frac{GB}{DG}, \text{ z kąd (w obec } S_1S_2 \text{ równoległej do } BD \text{)}$$



wynika, że punkty G, S i E leżą na jednej prostej, czyli punkt S leży na przecięciu prostej GE z  $S_1S_2$ . A skoro  $ES_2 = \frac{1}{3}ED$ , to i  $ES = \frac{1}{3}EG$ , więc jeżeli jeszcze odłożymy  $AH = FC$  (a zatem  $HE = EF$ , bo  $AE = EC$ ) i połączymy H z G, to w trójkącie HGF punkt S będzie na trzeciej części linii EG, łączącej wierzchołek G ze środkiem podstawy HF, więc jest to środek ciężkości trójkąta HGF. Ztąd wynika prosty sposób wyznaczenia środka ciężkości czworokąta ABCD:

Odkładamy na przekątnej AC:  $AH = FC$ , a na przekątnej BD —  $DG = FB$  i środek ciężkości S trójkąta HGF jest szukanym środkiem ciężkości czworokąta ABCD.

**Przykład.** Określmy środek ciężkości przekroju kątownika nierównoramienneo o profilu normalnym  $100 \times 50 \times 10$  mm.

Wyrysowawszy ten kątownik w wielkości naturalnej (rys. 156), rozkładamy całe pole przekroju kątownika na takie elementy  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , aby każdemu zaokrągleniu odpowiadał oddzielny element, a więc na elementy:  $F_1 = abcd$ ,  $F_2 = defc$ ,  $F_3 = eihg$ ,  $F_4 = ihkl$ ,  $F_5 = lmnk$  i dla każdego z tych elementów wyznaczmy środek ciężkości. Dla prostokątów  $abcd$  i  $ihkl$ : pole  $F_1 = dc \times ad = 5,0 \times 0,5 = 2,5$  cm<sup>2</sup>, a środkiem ciężkości będzie  $S_1$  — przecięcie przekątnych  $ac$  i  $bd$ ; pole  $F_4 = ih \times il = 1,0 \times (10,0 - 2,5)$  cm<sup>2</sup> = 7,5 cm<sup>2</sup>, a środkiem ciężkości będzie  $S_4$ .

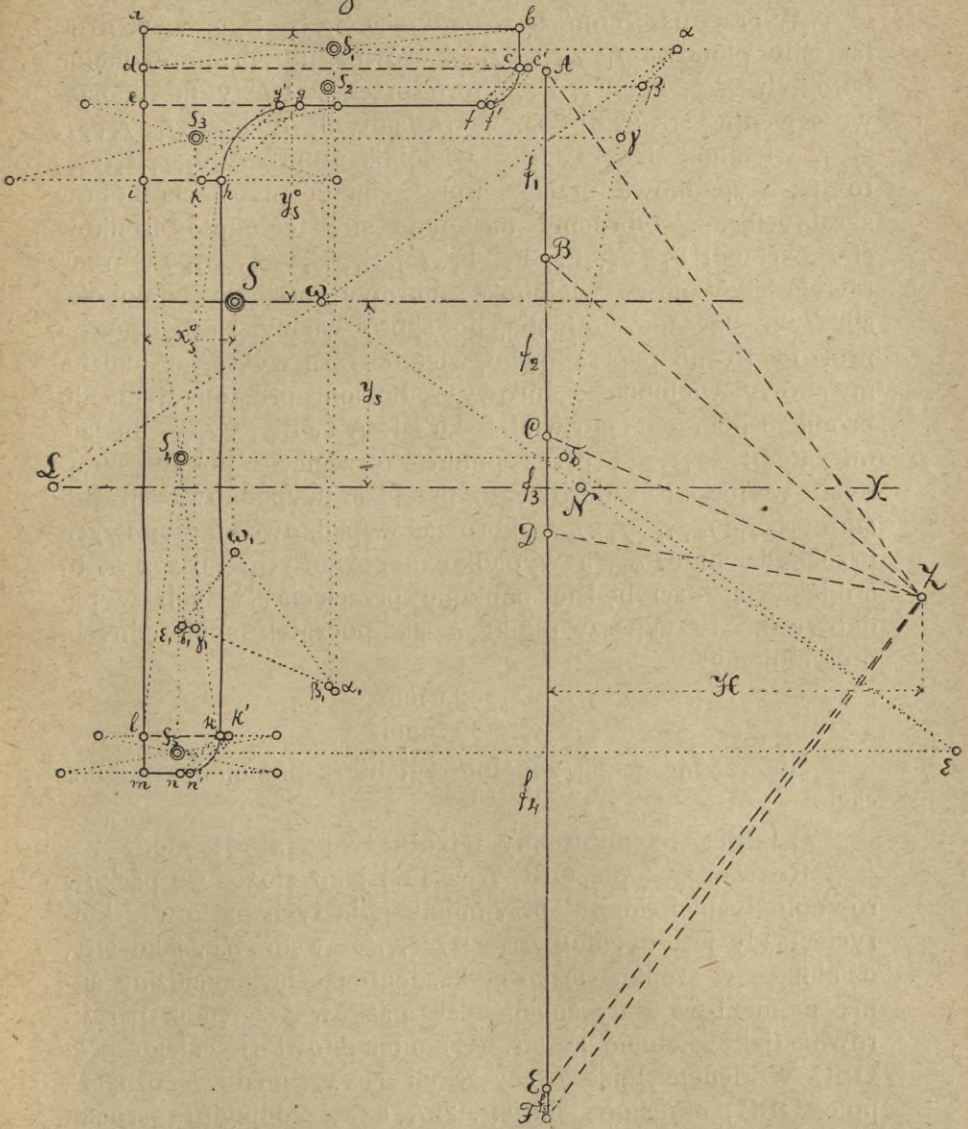
Dla elementów 2, 3 i 5 należy naprzód zastąpić zaokrąglenia liniami prostymi, przyjmawszy (zgodnie ze str. 228) odcinki kołowe za paraboliczne i przeprowadzając np. dla elementu  $eihg$  styczną, równoległą do cięciwy  $hg$  i na  $\frac{2}{3}$  wysokości odcinka linię równoległą do tej stycznej, a równoległobok  $h'hgg'$  będzie zgodnie ze str. 228 równoważny odcinkowi parabolicznemu z cięciwą  $hg$ , więc zamiast pola  $eihg$  wziąć można trapez  $eih'g'$  (bo w ten sposób od trapezu  $eihg$  odjęliśmy zamiast odcinka z cięciwą  $hg$  — równoważny mu równoległobok  $h'hgg'$ ). Środek ciężkości  $S_3$  otrzymanego trapezu  $eih'g'$  wyznaczyliśmy według sposobu 3-go (str. 247), odkładając od punktów  $e$  i  $g'$  podstawę  $ih'$ , a od  $i$  i  $h'$  —  $eg'$  i t. d. Tak samo zamiast  $defc$  otrzymamy  $def'c'$ , a zamiast  $lmnk$  —  $lmn'k'$  i wyznaczmy ich środki ciężkości  $S_2$  i  $S_5$ .

Pole trapezu  $def'c'$  wyniesie:

$$F_2 = \frac{5,13 + 4,63}{2} \times 0,5 = 2,44 \text{ cm}^2$$



Rys. 156.



Pole trapezu  $eih'g'$ :  $F_3 = \frac{1,75 + 0,75}{2} \times 1,0 = 1,25 \text{ cm}^2$

" "  $lmn'k'$ :  $F_5 = \frac{1,13 + 0,63}{2} \times 0,5 = 0,44 \text{ cm}^2$

Cały zatem przekrój kątownika będzie:



$F = F_1 + F_2 + F_4 + F_5 = 2,5 + 2,44 + 1,25 + 7,5 + 0,44 = 14,13 \text{ cm}^2$   
(w tablicach podane jest:  $F = 14,1 \text{ cm}^2$ ).

W przypuszczeniu, że w punktach  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  działają siły pionowe  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ , równe, lub proporcjonalne polom  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , które przekształcamy na podstawę  $a$  według str. 222 i 223, wykreślamy dla tych sił  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  wielobok sił ABCDEF i wielobok sznurowy  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \varepsilon_1 \omega_1$ , to ich wypadkowa przejdzie przez punkt przecięcia boków skrajnych  $\omega_1$ . Obróćmy następnie siły te około środków ciężkości pól  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , t. j.  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , o  $90^\circ$  i wykreślimy nowy wielobok sznurowy; nowego wieloboku sił wykreślać nie potrzeba, bo skoro wiemy, że będzie on prostopadły do poprzedniego, więc od razu wykreślać będziemy nowy wielobok sznurowy z bokami prostopadłymi do promieni poprzedniego wieloboku sił: AZ, BZ, CZ..., będzie on zatem:  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\omega$  i przez punkt  $\omega$  (przecięcie boków skrajnych wieloboku sznurowego) przejdzie wypadkowa sił **poziomych**  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ . Skoro zaś wypadkowa sił **pionowych** przechodzi przez  $\omega_1$ , a wypadkowa **poziomych** — przez  $\omega$ , to środek ciężkości będzie punktem przecięcia S tych wypadkowych. Przyjąwszy punkt  $a$  za początek współrzędnych, otrzymujemy:

$$x_s^0 = 12,0 \text{ mm},$$

$$y_s^0 = 36,7 \text{ mm}.$$

Współrzędne te są zupełnie zgodne z podaniami w tablicach.

### Odcinek paraboliczny i trójkąty paraboliczne.

Rozważając pole OBC (rys. 137) jako złożone z pasków równoległych do osi  $y$ , przyjmijmy pola tych pasków, z których każdy jest (według str. 227)  $= y_1 dx = y \sin \alpha dx$ , jako siły, działające w środku ciężkości każdego paska i znajdziemy sumę momentów statycznych tych pasków względem osi  $y$ , równą (jak wiadomo ze str. 241) momentowi  $S_y$  całego pola OBC względem tejże osi  $y$ , czyli  $= F \cdot x_s$ , gdzie  $F$  oznacza pole OBC, określone na str. 227, a  $x_s$  — odległość środka ciężkości tegoż pola od osi  $y$ . Moment statyczny paska  $y \sin \alpha dx$  względem osi  $y$  będzie oczywiście  $y \sin \alpha dx \cdot x_1 = = y \sin \alpha dx \cdot x \sin \alpha = \sin^2 \alpha y x dx$ , a uwzględnivszy równanie paraboli (78) na str. 227, otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha \int 2p x^{\frac{3}{2}} dx. \text{ Sumując te wszystkie oddzielne mo-}$$



menty statyczne, otrzymujemy:

$$S_y = \int_{x=0}^{x=m} \sin^2 \alpha \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} dx = \sin^2 \alpha \sqrt{2p} \left| \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_0^m = \frac{2}{5} \sin^2 \alpha \sqrt{2p} \cdot m^{\frac{5}{2}},$$

a że dla punktu B, leżącego na paraboli:  $n^2 = 2pm$ , więc:

$$S_y = \frac{2}{5} m^2 n \sin^2 \alpha = \text{według powyższego F. } x_s,$$

$$\text{z kąd: } x_s = \frac{S_y}{F} = \frac{\frac{2}{5} m^2 n \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3} mn \sin \alpha} = \frac{3}{5} m \sin \alpha,$$

albo też:  $x_s = \frac{3}{5} m_1$ . (Oczywiście możemy także napisać:  $x_s = \frac{3}{5} m$ , o ile mierzyć będziemy tę odległość  $m$  w kierunku równoległym do osi  $x$ , a nie prostopadłym do osi  $y$ , t. j. przy ukośnokątnym układzie współrzędnych).

Podobnie znajdziemy odległość  $y_s$  środka ciężkości pola OBC od osi  $x$ :

Moment statyczny każdego paska względem osi  $x$ :  $y \sin \alpha dx \cdot \frac{1}{2} y_1$  (bo odległość środka paska od osi  $x$  jest  $\frac{1}{2} y_1$ ), ale  $y_1 = y \sin \alpha$  i sumując wszystkie te momenty, otrzymujemy:

$$S_x = \int_{x=0}^{x=m} y \sin \alpha dx \cdot \frac{1}{2} y \sin \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{2} \int_{x=0}^{x=m} y^2 dx, \text{ czyli, uwzględniając ró-}$$

wnanie parabol:  $y^2 = 2px$ ,

$$S_x = \frac{\sin^2 \alpha}{2} \int_{x=0}^{x=m} 2px dx = \sin^2 \alpha p \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^m = \sin^2 \alpha p \frac{m^2}{2};$$

ale zgodnie z powyższem:  $n^2 = 2pm$ , więc:

$$S_x = \frac{1}{4} mn^2 \sin^2 \alpha = \text{według powyższego F. } y_s,$$

$$\text{z kąd: } y_s = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{1}{4} mn^2 \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3} mn \sin \alpha} = \frac{3}{8} n \sin \alpha, \text{ czyli: } y_s = \frac{3}{8} n_1. \text{ (Oczywiście}$$

możemy także napisać:  $y_s = \frac{3}{8} n$ , o ile mierzyć będziemy tę odległość  $n$  w kierunku równoległym do osi  $y$ , t. j. przy spółrzednych ukośnokątnych).

Moment statyczny  $S_y^{\text{II}}$  równoległoboku OGBC (rys. 137) względem osi  $y$ :

$$S_y^{\text{II}} = m_1 n \cdot \frac{1}{2} m_1 = \frac{1}{2} m_1^2 \cdot n = \frac{1}{2} m^2 n \sin^2 \alpha.$$

Moment statyczny  $S_y^{\text{I}}$  trójkąta parabolicznego OGB (stanowiącego różnicę równoległoboku OGBC i pola OBC) względem osi  $y$ :

$$S_y^{\text{I}} = S_y^{\text{II}} - S_y = \frac{1}{2} m^2 n \sin^2 \alpha - \frac{2}{5} m^2 n \sin^2 \alpha = \frac{1}{10} m^2 n \sin^2 \alpha,$$

więc odległość środka ciężkości trójkąta parabolicznego OGB od osi  $y$ , otrzymana na mocy równania:  $S_y^{\text{I}} = F_2 \cdot x_s$ :



$$x_s = \frac{S_y^I}{F_2} = \frac{\frac{1}{10} m^2 n \sin^2 \alpha}{\frac{1}{3} m n \sin \alpha} = \frac{3}{10} m \sin \alpha = \frac{3}{10} m_1,$$

albo:  $x_s = \frac{3}{10} m$  (przy spólrzędnych ukośnokątnych).

Moment statyczny  $S_x^{II}$  równoległoboku OGBC względem osi  $x$ :

$$S_x^{II} = m_1 n \cdot \frac{1}{2} n_1 = \frac{1}{2} m n^2 \sin^2 \alpha.$$

Moment statyczny  $S_x^I$  trójkąta parabolicznego OGB względem osi  $x$ :

$$S_x^I = S_x^{II} - S_x = \frac{1}{2} m n^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} m n^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} m n^2 \sin^2 \alpha,$$

więc odległość środka ciężkości trójkąta parabolicznego OGB od osi  $x$ :

$$y_s = \frac{S_x^I}{F_2} = \frac{\frac{1}{4} m n^2 \sin^2 \alpha}{\frac{1}{3} m n \sin \alpha} = \frac{3}{4} n \sin \alpha = \frac{3}{4} n_1,$$

albo:  $y_s = \frac{3}{4} n$  (przy spólrzędnych ukośnokątnych).

Moment statyczny  $S_y^{IV}$  trójkąta ABC względem osi  $y$  wynosi według powyższego:

$$S_y^{IV} = m n_1 \cdot \frac{1}{3} m_1 = \frac{1}{3} m^2 n \sin^2 \alpha.$$

Moment statyczny  $S_y^{III}$  trójkąta parabolicznego ABO względem osi  $y$ :

$S_y^{III} = S_y^{IV} - S_y = \frac{1}{3} m^2 n \sin^2 \alpha - \frac{2}{5} m^2 n \sin^2 \alpha = -\frac{1}{15} m^2 n \sin^2 \alpha,$   
więc odległość środka ciężkości:

$$x_s = \frac{S_y^{III}}{F_2} = \frac{-\frac{1}{15} m^2 n \sin^2 \alpha}{\frac{1}{3} m n \sin \alpha} = -\frac{1}{5} m \sin \alpha = -\frac{1}{5} m_1,$$

albo:  $x_s = -\frac{1}{5} m$  (przy spólrzędnych ukośnokątnych).

Tak samo moment statyczny  $S_x^{IV}$  trójkąta ABC względem osi  $x$ :

$$S_x^{IV} = m n_1 \cdot \frac{1}{3} n_1 = \frac{1}{3} m n^2 \sin^2 \alpha.$$

Moment statyczny  $S_x^{III}$  trójkąta parabolicznego ABO względem osi  $x$ :

$S_x^{III} = S_x^{IV} - S_x = \frac{1}{3} m n^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} m n^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{12} m n^2 \sin^2 \alpha,$   
więc odległość środka ciężkości:

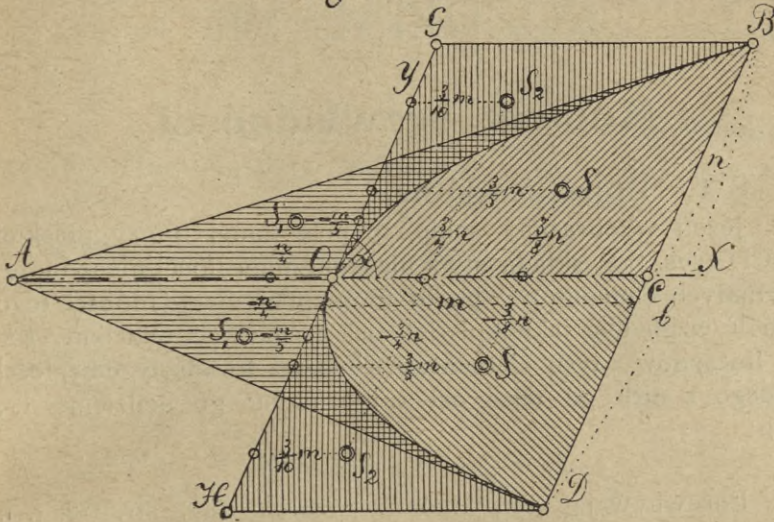
$$y_s = \frac{S_x^{III}}{F_2} = \frac{\frac{1}{12} m n^2 \sin^2 \alpha}{\frac{1}{3} m n \sin \alpha} = \frac{1}{4} n \sin \alpha = \frac{1}{4} n_1,$$

albo:  $y_s = \frac{1}{4} n$  (przy spólrzędnych ukośnokątnych).

Obliczone powyżej wielkości pól odcinków i trójkątów parabolicznych oraz spólrzędne ich środków ciężkości, bardzo często potrzebne w praktyce, zestawiliśmy poniżej zgodnie z rys. 157.



Rys. 157.



1. Pole  $OBC = ODC = \frac{2}{3} m \cdot n \sin \alpha$ .
2. Pole  $OBD = \frac{2}{3} m \cdot b \sin \alpha$ .
3. Pole  $OGB = OHD = ABO = ADO = \frac{1}{3} m n \sin \alpha$ .
4. Spółrzędne **ukośnokatne** środka ciężk. pola OBC:  $\begin{cases} x_s = \frac{3}{5} m \\ y_s = \frac{3}{8} n \end{cases}$
5. " " " " " ODC:  $\begin{cases} x_s = \frac{3}{5} m \\ y_s = -\frac{3}{8} n \end{cases}$
6. " " " " " OBD:  $\begin{cases} x_s = \frac{3}{5} m \\ y_s = 0 \end{cases}$
7. " " " " " OGB:  $\begin{cases} x_s = \frac{3}{10} m \\ y_s = \frac{3}{4} n \end{cases}$
8. " " " " " OHD:  $\begin{cases} x_s = \frac{3}{10} m \\ y_s = -\frac{3}{4} n \end{cases}$
9. " " " " " ABO:  $\begin{cases} x_s = -\frac{1}{5} m \\ y_s = \frac{1}{4} n \end{cases}$
10. " " " " " ADO:  $\begin{cases} x_s = -\frac{1}{5} m \\ y_s = -\frac{1}{4} n \end{cases}$



## ROZDZIAŁ VII.

### Moment bezwładności.

#### § 1. Pojęcia ogólne.

Jeżeli wyobrazimy sobie, że pole danej figury płaskiej ABCD (rys. 144) składa się z nieskończonej ilości nieskończenie małych elementów  $dF$ , to **momentem bezwładności** tego pola  $F$  względem jakiegokolwiek osi  $x$  nazywać będziemy **sumę iloczynów z tych elementów  $dF$  przez kwadraty odległości każdego z nich od tejże osi  $x$  i oznaczać go będziemy  $I_x$** , czyli:

$$I_x = \sum_m y_m^2 dF_m \dots \dots (86).$$

Porównyując ten wzór z wzorem (85) str. 242, t. j. z wzorem:  $S_x = \sum_m y_m dF_m$ , widzimy, że wzór dla momentu bezwładności  $I_x$  różni się od wzoru dla momentu statycznego  $S_x$  tylko tem, że w ostatnim mamy  $y_m$  zamiast  $y_m^2$ . Zauważmy jednak odrazu, że nie możemy dla  $I_x$  zastosować pierwszej części wzoru (85), bo  $I_x$  nie jest równe  $F \cdot y_s^2$ . Istotnie, oznaczając przez  $y_1$  rzędną dowolnego elementu  $dF$  względem środka ciężkości  $S$  (rys. 144), możemy napisać według wzoru (86):

$$I_x = \sum y^2 dF = \sum (y_s \pm y_1)^2 dF = \sum y_s^2 dF \pm 2 \sum y_s y_1 dF + \sum y_1^2 dF$$

i ponieważ  $y_s$  jest wielkością stałą:

$$I_x = y_s^2 \sum dF \pm 2 y_s \sum y_1 dF + \sum y_1^2 dF,$$

ale skoro:  $\sum dF = F$ , a  $\sum y_1 dF$ , wyrażająca moment statyczny pola  $F$  względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości  $S$ , jest zgodnie ze str. 242 = 0, trzeci zaś wyraz:  $\sum y_1^2 dF$  wyraża moment bezwładności pola  $F$  względem osi równoległej do osi  $x$  i przechodzącej przez środek ciężkości  $S$  tegoż pola (oznaczymy go przez  $I_s$ ), otrzymujemy zatem:

$$I_x = I_s + F \cdot y_s^2 \dots \dots (87),$$

t. j. moment bezwładności pola  $F$  względem dowolnej osi  $x$  = momentowi bezwładności tegoż pola względem osi równoległej do osi  $x$  i przechodzącej przez środek ciężkości pola + iloczyn z tegoż pola przez kwadrat odległości wzajemnej tych obu osi.



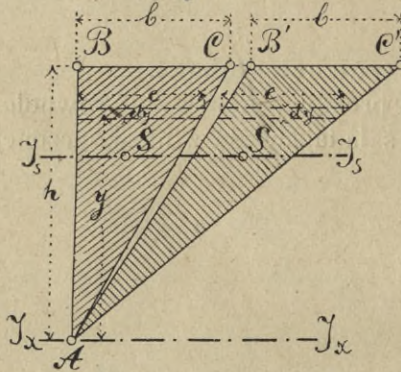




równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek ciężkości.

**Trójkąt.** Rozważając trójkąt ABC, lub AB'C' (rys. 159), jako składający się z nieskończonej ilości nieskończenie ma-

Rys. 159



łych pasków poziomych  $dF$ , z których każdy  $= e \cdot dy = \frac{b \cdot y}{h} dy$ , otrzymujemy moment bezwładności  $I_x$  względem osi  $x$ :

$$I_x = \Sigma y^2 dF = \Sigma y^2 \cdot \frac{b \cdot y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_{y=0}^{y=h} y^3 dy = \frac{b}{h} \left| \frac{y^4}{4} \right|_{y=0}^{y=h}, \text{ czyli:}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{4} \dots \dots (90);$$

a że według wzoru (87):  $I_x = I_s + F \cdot y_s^2$ , więc:

$$I_s = I_x - F \cdot y_s^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{2}{9}bh^3, \text{ czyli:}$$

$$I_s = \frac{bh^3}{36} \dots \dots (91).$$

Tak się wyraża moment bezwładności trójkąta o podstawie  $b$  i wysokości  $h$  względem osi, równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek ciężkości.

**Trójkąt paraboliczny.**

Rozważając trójkąt paraboliczny ABC, lub AB'C' (rys. 160), jako składający się z nieskończonej ilości nieskończenie małych pasków  $dF$ , z których każdy — przy spólrzędnych ukośnokątnych  $x$  i  $y$  — będzie:  $dF = x \cdot dy_1$ , otrzymujemy:

$$I_x = \Sigma y_1^2 dF = \Sigma y_1^2 \cdot x \cdot dy_1.$$

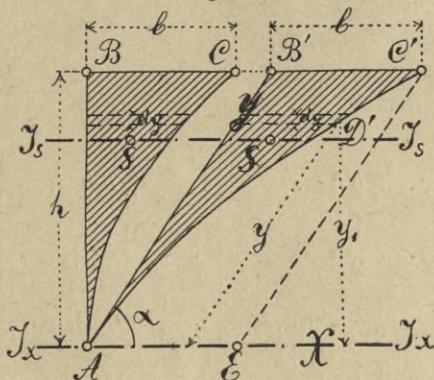


Ale punkty  $C'$  i  $D'$  leżą na paraboli, czynią więc za-  
 dość równaniu:  $y^2 = 2px$ , a zatem:

$$C'E^2 = 2p \cdot AE, \text{ czyli: } 2p = \frac{C'E^2}{AE} = \frac{h^2}{b \sin^2 \alpha}, \text{ więc: } y^2 = \frac{h^2}{b \sin^2 \alpha} x$$

i wstawiając otrzymane ztąd  $x$  do wzoru dla  $I_x$ :

*Rys. 160.*



$$I_x = \Sigma y_1^2 \frac{b \sin^2 \alpha}{h^2} y^2 dy_1,$$

a że:  $y^2 \sin^2 \alpha = y_1^2$ , więc:

$$I_x = \Sigma y_1^4 \frac{b}{h^2} dy_1 = \frac{b}{h^2} \Sigma y_1^4 dy_1 = \frac{b}{h^2} \int_{y_1=0}^{y_1=h} y_1^4 dy_1 = \frac{b}{h^2} \times \frac{h^5}{5}, \text{ czyli:}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{5} \dots \dots (92).$$

Stosując jeszcze wzór (87) z uwzględnieniem wzoru (80)  
 str. 228 i wzoru na str. 254-ej, t. j. wzorów:

$F = \frac{1}{3} mn \sin \alpha = \frac{1}{3} bh$  i  $y_s = \frac{3}{4} n \sin \alpha = \frac{3}{4} h$ , otrzymamy:

$$I_s = I_x - F \cdot y_s^2 = \frac{bh^3}{5} - \frac{1}{3} b \cdot h \cdot \left(\frac{3}{4} h\right)^2, \text{ czyli:}$$

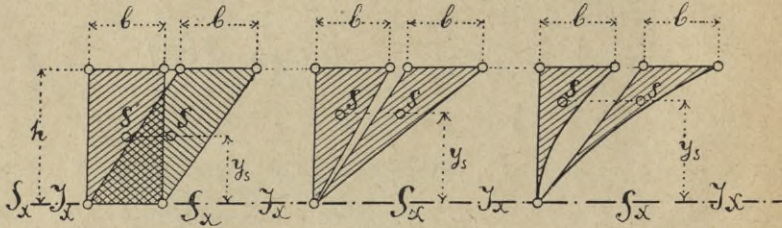
$$I_s = \frac{bh^3}{80} \dots \dots (93).$$

Tak się wyraża moment bezwładności trójkąta parabolicznego o podstawie  $b$  i wysokości  $h$  względem osi, równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek ciężkości.



Zestawienie rezultatów powyższych dla prostokąta, trójkąta i trójkąta parabolicznego jest bardzo ciekawe i łatwe do zapamiętania:

Rys. 161.



Pole . . . . .	$b h$	$\frac{1}{2} b h$	$\frac{1}{3} b h$
Odległość $y_s$ środka ciężkości od osi $x$ . . . . .	$\frac{1}{2} h$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{3}{4} h$
Moment statyczny $S_x$ względem osi $x$ . . . . .	$\frac{1}{2} b h^2$ (str. 254)	$\frac{1}{3} b h^2$ (str. 254)	$\frac{1}{4} b h^2$ (str. 254)
Moment bezwładności $I_x$ względem osi $x$ . . . . .	$\frac{1}{3} b h^3$ (str. 257)	$\frac{1}{4} b h^3$ (str. 258)	$\frac{1}{5} b h^3$ (str. 259)

### § 3. Moment bezwładności koła.

Moment bezwładności koła względem jakiejkolwiek średnicy, którą przyjmiemy za oś  $x$  (rys. 162), określimy, rozważając koło, jako składające się z nieskończonej ilości pasków (o długości  $2x$  i wysokości nieskończenie małej  $=dy$ ), równoległych do osi  $x$ :

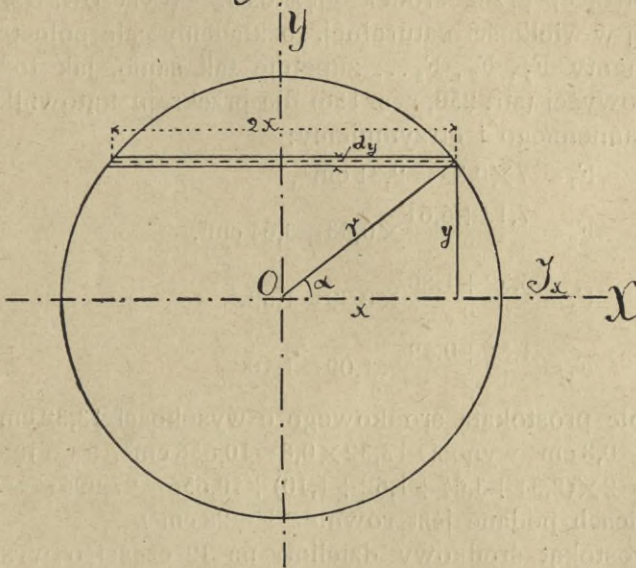
$$I_x = \sum y^2 dF = \sum y^2 \cdot (2x \cdot dy) = 2 \int_{y=-r}^{y=+r} y^2 x dy.$$

Wprowadzając nową zmienną — kąt  $\alpha$ , przyczem  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ , z kądem:  $dy = r \cos \alpha d\alpha$  i wprowadzając jako nowe granice, odpowiadające poprzednim:  $y = +r$  i  $y = -r$ , granice:  $\alpha = +\frac{\pi}{2}$  i  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , otrzymujemy:

$$I_x = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \alpha r \cos \alpha r \cos \alpha d\alpha = 2 r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha =$$



Rys. 162.



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 4\alpha}{2} \, d\alpha = \\
 &= \frac{r^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\alpha) \, d\alpha = \frac{r^4}{4} \left[ \alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}, \text{ czyli:} \\
 I_x &= \frac{\pi r^4}{4} \dots \dots (94).
 \end{aligned}$$

**§ 4. Momenty bezwładności dowolnych figur płaskich. Wzory Culmanna i Mohra.**

Podobnie otrzymywać można momenty bezwładności rozmaitych figur geometrycznych, a momenty bezwładności figur geometrycznych złożonych oblicza się na podstawie wzoru (86) str. 256 jako sumę momentów bezwładności oddzielnych części składowych względem tej samej osi. Metodę wykreślną stosujemy w praktyce wtedy, kiedy prowadzi prędzej do celu, niż analityczna.



**Przykład.** Wyznamy wykreślnie moment bezwładności  $I_s$  przekroju  $\square$  N 18 (rys. 163) względem osi poziomej  $SS$ , przechodzącej przez środek ciężkości. Wyrysowawszy ten przekrój w wielkości naturalnej, rozkładamy całe pole tegoż  $F$  na elementy  $F_1, F_2, F_3 \dots$  zupełnie tak samo, jak to zrobiliśmy powyżej (str. 250, rys. 156) dla przekroju kątownika nierównoramiennego i otrzymujemy:

$$F_1 = 7 \times 0,33 = 2,31 \text{ cm}^2,$$

$$F_2 = \frac{7,13 + 6,61}{2} \times 0,53 = 3,64 \text{ cm}^2,$$

$$F_3 = \frac{6,52 + 1,80}{2} \times 0,39 = 1,62 \text{ „}$$

$$F_4 = \frac{1,51 + 0,49}{2} \times 1,09 = 1,10 \text{ „}$$

Pole prostokąta środkowego o wysokości 13,32 cm i szerokości 0,8 cm wynosi  $13,32 \times 0,8 = 10,656 \text{ cm}^2$ , a zatem całe pole  $F = 2 \times (2,31 + 3,64 + 1,62 + 1,10) + 10,656 = 27,996 = \approx 28 \text{ cm}^2$  (w tablicach podane jest również  $F = 28 \text{ cm}^2$ ).

Prostokąt środkowy dzielimy na 12 części o wysokości 1,11 cm i przekształcając wszystkie elementy na podstawę  $a$ , napiszemy dla każdego z nich, np. dla elementu  $F_2$ , zgodnie ze str. 221:

$$F_2 = a \cdot f_2 \dots \dots (95)$$

i oczywiście:  $\sum_m F_m = F = a \sum_m f_m$ .

Przyjmując zaś np. za podstawę:  $a = 2 \text{ cm}$ , otrzymamy:

$$f_1 = f_{20} = \frac{F_1}{a} = \frac{2,31}{2} = 1,155 \text{ cm},$$

$$f_2 = f_{19} = \frac{F_2}{a} = \frac{3,64}{2} = 1,82 \text{ „}$$

$$f_3 = f_{18} = \frac{F_3}{a} = \frac{1,62}{2} = 0,81 \text{ „}$$

$$f_4 = f_{17} = \frac{F_4}{a} = \frac{1,10}{2} = 0,55 \text{ „}$$

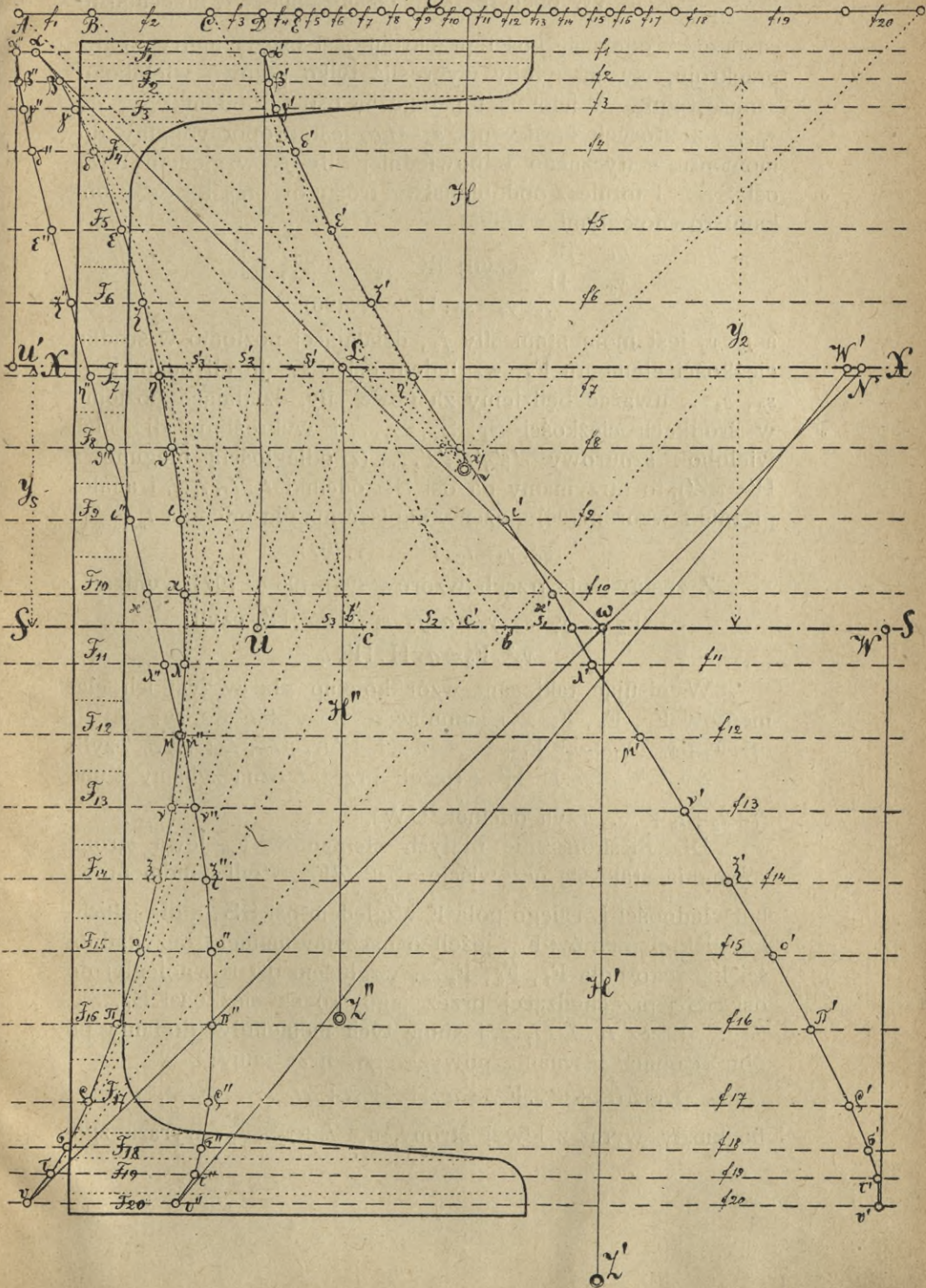
$$f_5 = f_6 = f_7 = \dots = f_{16} = \frac{F_5}{a} = \frac{1,11 \times 0,8}{2} = 0,444 \text{ cm}$$

i oczywiście:  $\sum_m f_m = \frac{F}{a} = \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}$ .

Przyjawszy  $f_1, f_2, f_3 \dots$  za siły, działające poziomo w środkach ciężkości  $S_1, S_2, S_3 \dots$  elementów  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , wykreślamy dla nich wielobok sił  $ABCDE \dots$  i wielobok



# Fig. 163.





sznurowy  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\dots$  z odległością biegunową  $H = \frac{1}{2} \sum_m f_m$ , czyli  $H = \frac{14}{2} = 7$  cm. (W obec tego, że oś pozioma SS, przechodząca przez środek ciężkości przekroju, jest osią symetrii tegoż przekroju, wystarczyłoby wykreślić tylko połowę wieloboku sznurowego). Wielobok ten daje na osi SS odcinki  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , z których każdy, np.  $s_2 = bc$ , jest proporcjonalny do momentu statycznego odpowiedniej siły  $f_2$  względem tejże osi SS. Istotnie z podobieństwa trójkątów  $bc\beta$  i  $BCZ$  z bokami równoległymi wynika:

$$\frac{bc}{y_2} = \frac{BC}{H}, \text{ czyli: } BC \cdot y_2 = bc \cdot H, \text{ t. j.}$$

$$f_2 \cdot y_2 = s_2 \cdot H \dots \dots (96),$$

a  $f_2 \cdot y_2$  jest momentem siły  $f_2$ , działającej poziomo w środku ciężkości elementu  $F_2$ , względem osi SS. Jeżeli odcinki  $s_1, s_2, s_3, \dots$  uważać będziemy za nowe siły, działające poziomo w środkach ciężkości  $S_1, S_2, S_3, \dots$  i wykreślimy dla nich wielobok sznurowy  $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon'\zeta'\dots$  (z odległością biegunową  $H' = \omega Z'$ ), to otrzymamy na osi SS odcinki  $t_1, t_2, t_3, \dots$  i analogicznie z wzorem (96) możemy napisać np. dla odcinka  $t_2 = b'c'$ :

$$s_2 \cdot y_2 = t_2 \cdot H' \dots \dots (97).$$

Z zestawienia trzech wzorów (95), (96) i (97) wynika:

$$F_2 \cdot f_2 \cdot y_2 \cdot s_2 \cdot y_2 = a \cdot f_2 \cdot s_2 \cdot H \cdot t_2 \cdot H', \text{ czyli:}$$

$$y_2^2 \cdot F_2 = a \cdot H \cdot H' \cdot t_2.$$

Wypisując taki sam wzór kolejno dla wszystkich elementów  $F_1, F_2, F_3, \dots$  i sumując te wszystkie wzory:

$$y_1^2 \cdot F_1 + y_2^2 \cdot F_2 + y_3^2 \cdot F_3 + \dots = a \cdot H \cdot H' (t_1 + t_2 + t_3 + \dots), \text{ czyli:}$$

$$\sum_m y_m^2 \cdot F_m = a \cdot H \cdot H' \cdot t \text{ (jeżeli przez } t \text{ oznaczyliśmy sumę } t_1 + t_2 + t_3 + \dots, \text{ czyli odcinek UW).}$$

**Dla nieskończenie małych elementów  $F_m$**  lewa strona równania staje się oczywiście  $= \sum_m y_m^2 dF_m$ , czyli = momentowi bezwładności  $I_s$  całego pola  $F$  względem osi SS, a dla jakichkolwiek elementów  $F_m$ , jeżeli oznaczymy moment bezwładności każdego pola  $F_1, F_2, F_3, \dots$  względem osi równoległej do osi SS i przechodzącej przez jego środek ciężkości  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , przez  $i_1, i_2, i_3, \dots$  i sumę tych momentów dodamy po obu stronach równania powyższego, otrzymamy:

$$I_s = \sum_m (i_m + y_m^2 \cdot F_m) = a \cdot H \cdot H' \cdot t + \sum_m i_m \dots \dots (98),$$

bo każdy wyraz z lewej strony, np.  $i_2 + y_2^2 \cdot F_2$ , wyraża zgo-



dnie z wzorem (87) str. 256, moment bezwładności pola  $F_2$  względem osi poziomej  $SS$ , cała zaś suma — sumę momentów bezwładności poszczególnych pól  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , czyli moment bezwładności  $I_s$  całego przekroju względem tejże osi.

Przy wyznaczaniu momentów bezwładności figur płaskich dzielimy je najczęściej na paski tak małej wysokości, że momenty bezwładności ( $i_1, i_2, i_3 \dots$ ) samych pasków względem osi, przechodzących przez ich środki ciężkości, można zupełnie odrzucać. Obrawszy np. wysokość paska  $h=5$  mm, otrzymujemy przy znacznej nawet szerokości tegoż  $b=100$  mm:

$i = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 0,5^3}{12} = \approx 0,1 \text{ cm}^4$ . W obec tego przy dostatecznie małej wysokości pasków możemy wzór poprzedni napisać tak:

$$I_s = \sum_m y_m^2 \cdot F_m = a \cdot H \cdot H' \cdot t \dots (99).$$

Jest to wzór wyprowadzony przez Culmanna.

W danym wypadku (rys. 163), przy znacznie większej wysokości pasków środkowych = 1,11 cm, ale małej ich szerokości = 0,8 cm, moment bezwładności każdego z nich będzie:

$$i_5 = i_6 = \dots = \frac{0,8 \times 1,11^3}{12} = \approx 0,08 \text{ cm}^4; \text{ dla pasków } F_4 \text{ i } F_{17}$$

otrzymamy:  $i_4 = i_{17} = \approx 0,1 \text{ cm}^4$ ; dla pasków pozostałych momenty bezwładności będą znacznie mniejsze, w obec czego suma wszystkich 20 momentów bezwładności  $i_1 + i_2 + i_3 \dots$  wyniesie:

$$\sum i_m = \approx 1,7 \text{ cm}^4, \text{ a z wzoru (98) otrzymamy:}$$

$$I_s = a \cdot H \cdot H' \cdot t + \sum i_m = 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9,66 + 1,7 = 1354,1 \text{ cm}^4.$$

(W tablicach podany jest  $I_s = 1354 \text{ cm}^4$ ).

Tak więc dla otrzymania momentu bezwładności jakiegokolwiek figury płaskiej względem osi, przechodzącej przez jej środek ciężkości, należy podzielić figurę na paski  $F_1, F_2, F_3 \dots$  równoległe do osi, wykreślić wielobok sznurowy  $\alpha\beta\gamma\delta \dots$  dla sił  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , proporcjonalnych do pól  $F_1, F_2, F_3 \dots$  i działających równoległe do osi w środkach ciężkości pasków  $S_1, S_2, S_3 \dots$ , wykreślić następnie drugi wielobok sznurowy  $\alpha'\beta'\gamma'\delta' \dots$  dla sił równych odcinkom  $s_1, s_2, s_3 \dots$ , działających w środkach ciężkości pasków  $S_1, S_2, S_3 \dots$  i moment bezwładności otrzymamy z wzoru (99), z zastrzeżeniem jednak, że wysokość pasków musi być dostatecznie mała. Z równań (95) i (96) wynika również:



$$F_2 \cdot f_2 \cdot y_2 = a \cdot f_2 \cdot s_2 \cdot H,$$

a skracając przez  $f_2$  i mnożąc obie strony przez  $y_2$ , a potem sumując dla wszystkich pasków  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , otrzymamy:

$$\sum_m y_m^2 \cdot F_m = a \cdot H \cdot \sum_m s_m \cdot y_m.$$

Suma  $\sum_m s_m \cdot y_m$  wyraża dwukrotnie wzięte pole (oznaczymy je przez  $F_0$ ) ograniczone wielobokiem sznurowym  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\omega\alpha$ , bo pole każdego z poszczególnych trójkątów, składających  $F_0$ , np.  $bc\beta$ , jest  $= \frac{1}{2} \cdot bc \cdot y_2 = \frac{1}{2} s_2 \cdot y_2$ , więc możemy napisać:

$$I_s = \sum_m y_m^2 \cdot F_m = 2aH \cdot F_0 \dots \dots (100).$$

Jest to wzór wyprowadzony przez Mohra i oczywiście stosuje się do niego również zastrzeżenie powyższe co do dostatecznie małej wysokości poszczególnych pasków.

Wzór ten daje moment bezwładności  $I_s$  bez wykreślenia drugiego wieloboku sznurowego, natomiast jednak trzeba obliczać pole  $F_0$ . Tak np. dla przekroju kątownika nierównoramiennego  $100 \times 50 \times 10$  mm (rys. 156), dla którego wzięliśmy  $a = 1$  cm,  $H = 5$  cm, obliczywszy pole  $F_0 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\omega\alpha = \approx 10,54$  cm<sup>2</sup>, otrzymamy według wzoru (100):

$$I_s = 2aH \cdot F_0 = 2 \times 1 \times 5 \times 10,54 = 105,4 \text{ cm}^4.$$

Porównyując ten rezultat z podanym w tablicach  $I_s = 141$  cm<sup>4</sup>, widzimy znaczną różnicę, pochodzącą ztąd, że na rys. 156 wzięliśmy wysokość paska  $F_4$  bardzo znaczną  $= 7,5$  cm, w tym więc razie nie wolno było lekceważyć odpowiedniego

$i_4 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,0 \times 7,5^3}{12} = 35,15$  cm<sup>4</sup> i przekonywamy się istotnie, że  $105,4 + 35,15 = 140,55$  cm<sup>4</sup>, a dodawszy jeszcze sumę  $i_1 + i_2 + i_3 + i_5 = \approx 0,3$  cm<sup>4</sup>, otrzymujemy rezultat bardzo bliski wykazanego w tablicach (141 cm<sup>4</sup>).

Najczęściej przyjmujemy pierwszą odległość biegunową  $H = \frac{1}{2} \sum_m f_m$ , a w takim razie:  $2aH = 2a \times \frac{1}{2} \sum_m f_m = a \sum_m f_m = F$ , więc równanie (100) daje:

$$I_s = \sum_m y_m^2 \cdot F_m = F \cdot F_0 \dots \dots (101).$$

Oczywiście wzór ten stosować można tylko w razie, jeżeli  $H = \frac{1}{2} \sum_m f_m$  i z zastrzeżeniem powyższem co do wysokości poszczególnych pasków.

W danym wypadku (rys. 163) pole  $F_0$ , czyli  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\omega\alpha$ , wynosi według obliczenia  $\approx 48,29$  cm<sup>2</sup>, a że odległość biegunową  $H$  wzięliśmy  $= \frac{1}{2} \sum_m f_m$ , więc według wzoru (101):



$I_s = F \cdot F_0 = 28 \times 48,29 = 1352,1 \text{ cm}^4$ ; dodając zaś tak, jak wyżej, w obec dość znacznej wysokości pasków  $1,7 \text{ cm}^4$ , otrzymujemy zgodnie z tablicami  $I_s = \approx 1354 \text{ cm}^4$ .

Zauważmy jeszcze, że za pomocą wzorów Culmanna (99) i Mohra (100) i (101) możemy otrzymywać momenty bezwładności nie tylko względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości S, ale również względem jakiegokolwiek innej osi. Dla wyznaczenia np. momentu bezwładności  $I_x$  przekroju [ (rys. 163) względem osi  $x$  zapomocą wzoru (99) należy po otrzymaniu, jak wyżej, pierwszego wieloboku sznurowego  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\dots$  z odległością biegunową  $H$  (dla sił  $f_1, f_2, f_3\dots$ , działających równolegle do danej osi przez środki ciężkości pasków  $F_1, F_2, F_3\dots$ ) wykreslić drugi wielobok sznurowy  $\alpha''\beta''\gamma''\delta''\varepsilon''\zeta''\dots$  (z odległością biegunową  $H'' = LZ''$ ) dla odcińków  $s'_1, s'_2, s'_3\dots$ , utworzonych na danej osi  $x$  przez poprzedni wielobok  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\dots$ , poczem otrzymamy według wzoru (99):

$$I_x = a \cdot H \cdot H'' \cdot t', \text{ czyli, ponieważ } t' = U'W' = 12,86 \text{ cm,}$$

$$I_x = 2 \times 7 \times 10 \times 12,86 = 1800,4 \text{ cm}^4;$$

po dodaniu zaś, jak wyżej,  $1,7 \text{ cm}^4$ :  $I_x = \approx 1802 \text{ cm}^4$ .

Rezultat ten możemy sprawdzić za pomocą wzoru (87) str. 256, który daje dla osi  $x$ , odległej o 4 cm od osi równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości S:

$$I_x = I_s + F \cdot y_s^2 = 1354 + 28 \times 4^2 = 1354 + 448 = 1802 \text{ cm}^4.$$

Dla zastosowania zaś wzoru (100), lub (101), należy zamiast pola  $F_0$  wziąć pole  $F'_0$ , ograniczone wielobokiem  $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\dots$  i osią  $x$ , a zatem różnica ( $F'_0 - F_0$ ) stanowi trójkąt  $\omega LN$ , którego pole = na rys. 156 —  $\frac{7,06 \times 2,5}{2} = \approx 8,83 \text{ cm}^2$ , a na rys. 163 —

$$\frac{8,0 \times 4}{2} = 16 \text{ cm}^2. \text{ Stosując więc w pierwszym wypadku wzór}$$

(100), widzimy, że moment bezwładności  $I_x$  będzie większy od  $I_s$  o:  $2aH \times 8,83 = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 8,83 = 88,3 \text{ cm}^4$ . (Istotnie moment bezwładności  $I_x$  jest według wzoru (87) str. 256 większy od  $I_s$

o  $F \cdot y_s^2$ , czyli o:  $14,13 \times 2,5^2 = 88,3 \text{ cm}^4$ ). Dla rysunku 163 możemy natomiast, w obec  $H = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n f_m$  zastosować wzór (101)

i zwiększenie momentu bezwładności wyniesie:  $F \cdot (F'_0 - F_0) = = 28 \cdot 16 = 448 \text{ cm}^2$ , które otrzymaliśmy już wyżej.





## Zauważone omyłki druku.

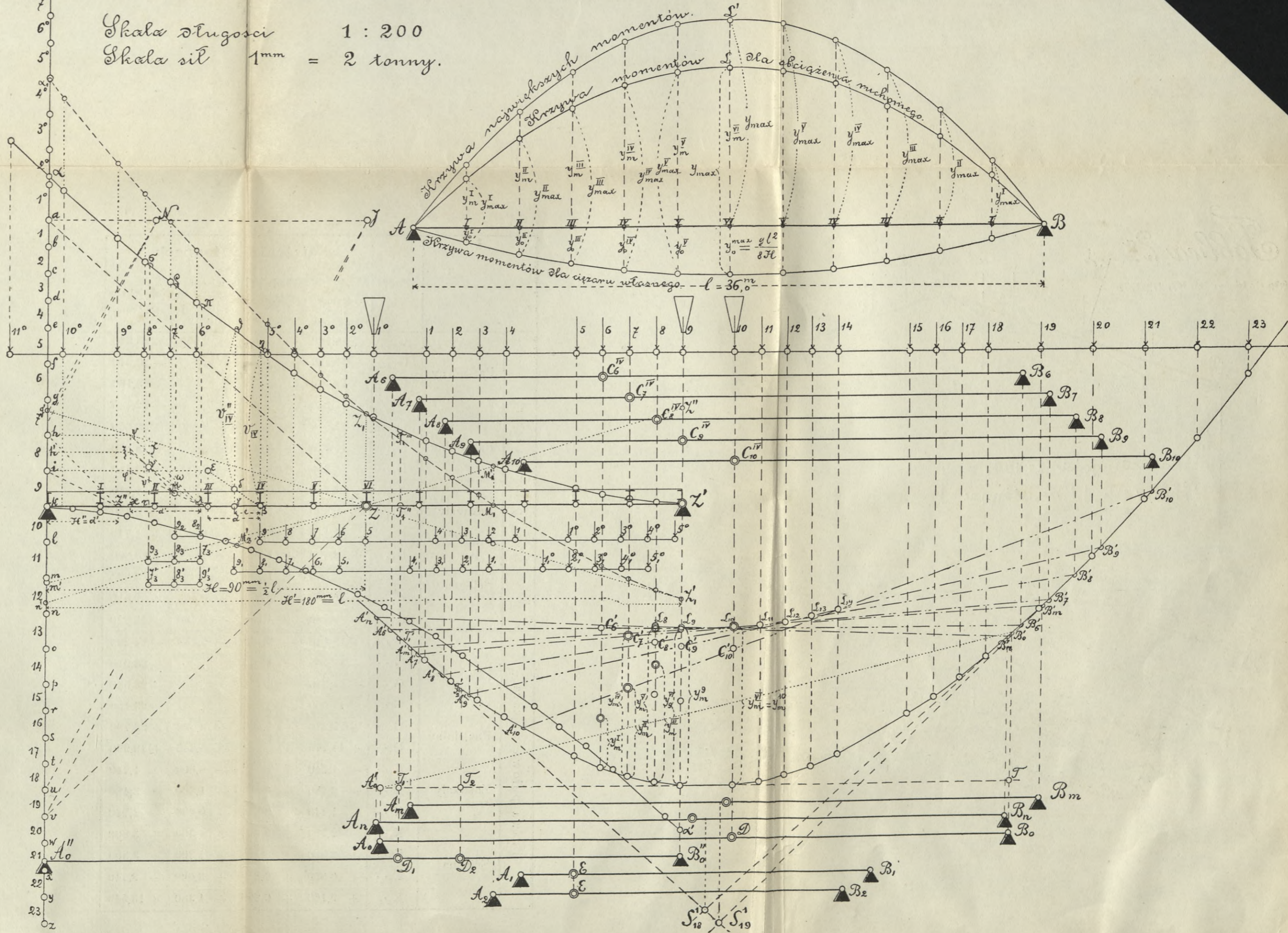
Str.	29	wiersz 4	od góry	zamiast „X' i Y'“	ma być „Y' i X'“.
„	36	„	18	„	po „52,8“ ma być „mm“.
„	40	„	4	od dołu	zamiast „równowielkie“
„	67	„	20	od góry	l ma być „równoważne“.
„	108	„	23	„	zamiast „E <sub>2</sub> E <sub>3</sub> “ ma być „E <sub>3</sub> E <sub>2</sub> “.
„	144	„	3	„	„ <sup>3</sup> “ „ <sup>4</sup> “.
„	152	„	6	od dołu	zamiast „więc“ ma być „również“.
„	174	„	6	„	po wyrazie „odpory“ dodać: „dla parcia wiatru“.
„	181	„	17	„	po wyrazie „będzie“ dodać: „dla obciążenia z lewej strony“.
„	181	„	4	„	po wyrazie „ściskanie“ dodać: „z wyjątkiem środkowego słupa 78“.
„	197	„	18	od góry	zamiast „tonnometrów“ ma być „tonn“.
„	218	„	9	„	po wyrazie „natężenie“ dodać: „wyciągające“.
„	238	„	4	od dołu	zamiast „na“ ma być „o“.
„	240	„	10	„	„polom“ ma być „do pól“.



# Tablica 1<sup>a</sup>

(odp. str. tekstu: 80, 81, 83, 84, 87, 88, 92, 93, 96, 97, 104, 116-119, 127-129, 197, 199, 209)

Skala długości 1 : 200  
 Skala sił 1<sup>mm</sup> = 2 tonny.

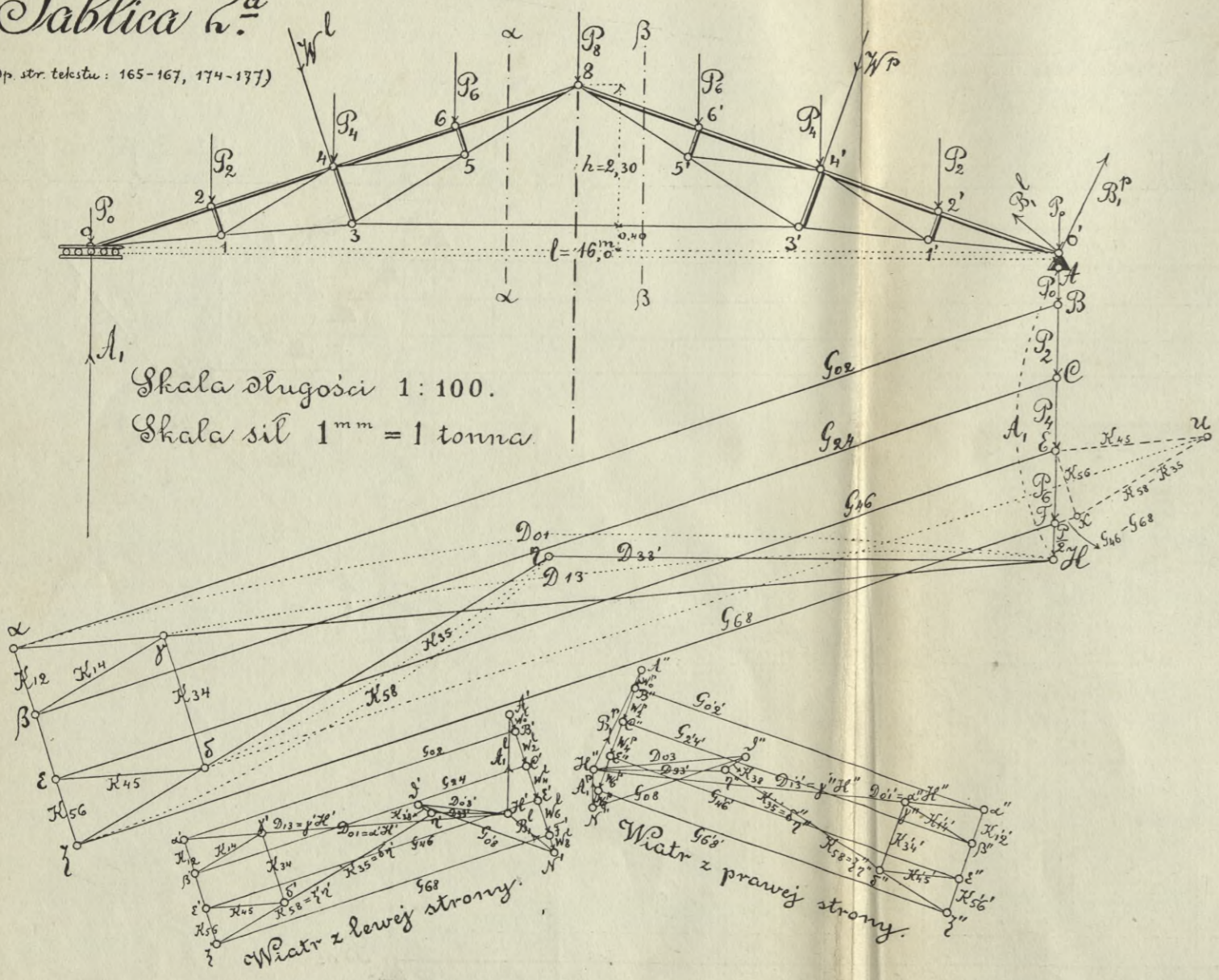


Tablica 1-a



# Tablica 2<sup>a</sup>

(odp. str. tekstu: 165-167, 174-177)



Skala długości 1:100.  
Skala sił 1<sup>mm</sup> = 1 tona

	Pręt	Nateżenia w tonnach.				
		Dla obciążenia ciężarem własnym i śniegiem.	Dla parcia wiatru		Największe nateżenia.	
			z lewej strony	z prawej strony		
Lewa połowa wiazara.	Pas górny	G <sub>02</sub>	- 18,140	- 5,780	- 2,660	- 23,920
		G <sub>24</sub>	- 17,760	"	"	- 23,540
		G <sub>46</sub>	- 17,380	"	"	- 23,160
		G <sub>68</sub>	- 17,000	"	"	- 22,780
	Pas dolny	D <sub>01</sub>	+ 17,270	+ 5,380	+ 2,500	+ 22,650
		D <sub>13</sub>	+ 14,770	+ 4,080	"	+ 18,850
		D <sub>33'</sub>	+ 8,350	+ 1,270	+ 2,180	+ 10,530
	Zastrzały	K <sub>12</sub>	- 1,140	- 0,600	0	- 1,740
		K <sub>34</sub>	- 2,280	- 1,200	0	- 3,480
		K <sub>56</sub>	- 1,140	- 0,600	0	- 1,740
	Ściągna	K <sub>14</sub>	+ 2,500	+ 1,300	0	+ 3,800
		K <sub>45</sub>	+ 2,500	+ 1,300	0	+ 3,800
K <sub>35</sub>		+ 6,660	+ 2,850	+ 0,400	+ 9,510	
K <sub>58</sub>		+ 9,160	+ 4,150	+ 0,400	+ 13,310	
Prawa połowa wiazara.	Pas górny	G <sub>0'2'</sub>	- 18,140	- 2,400	- 6,150	- 24,290
		G <sub>2'4'</sub>	- 17,760	"	"	- 23,910
		G <sub>4'6'</sub>	- 17,380	"	"	- 23,530
		G <sub>6'8'</sub>	- 17,000	"	"	- 23,150
	Pas dolny	D <sub>0'1'</sub>	+ 17,270	+ 1,500	+ 6,520	+ 23,790
		D <sub>1'3'</sub>	+ 14,770	"	+ 5,220	+ 19,990
		D <sub>3'5'</sub>	+ 8,350	"	+ 2,180	+ 10,530
	Zastrzały	K <sub>1'2'</sub>	- 1,140	0	- 0,600	- 1,740
		K <sub>3'4'</sub>	- 2,280	0	- 1,200	- 3,480
		K <sub>5'6'</sub>	- 1,140	0	- 0,600	- 1,740
	Ściągna	K <sub>1'4'</sub>	+ 2,500	0	+ 1,300	+ 3,800
		K <sub>4'5'</sub>	+ 2,500	0	+ 1,300	+ 3,800
K <sub>3'5'</sub>		+ 6,660	+ 0,280	+ 3,080	+ 9,740	
K <sub>5'8'</sub>		+ 9,160	+ 0,280	+ 4,380	+ 13,540	



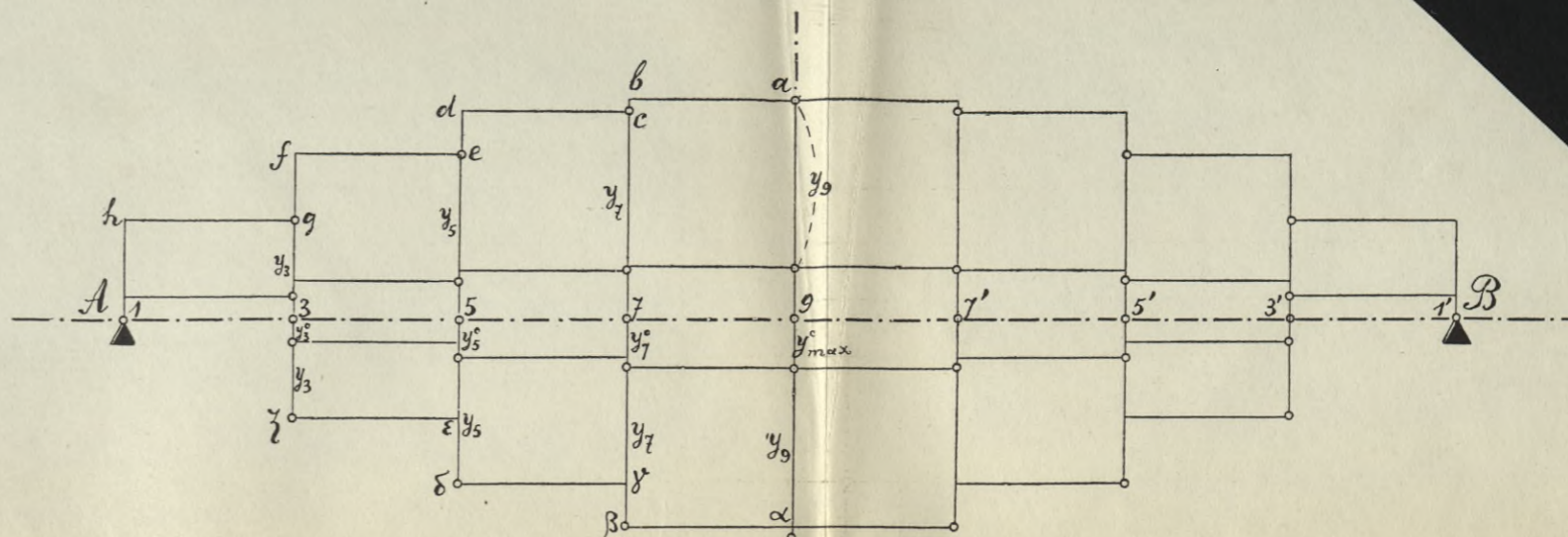


# Tablica 3<sup>a</sup>

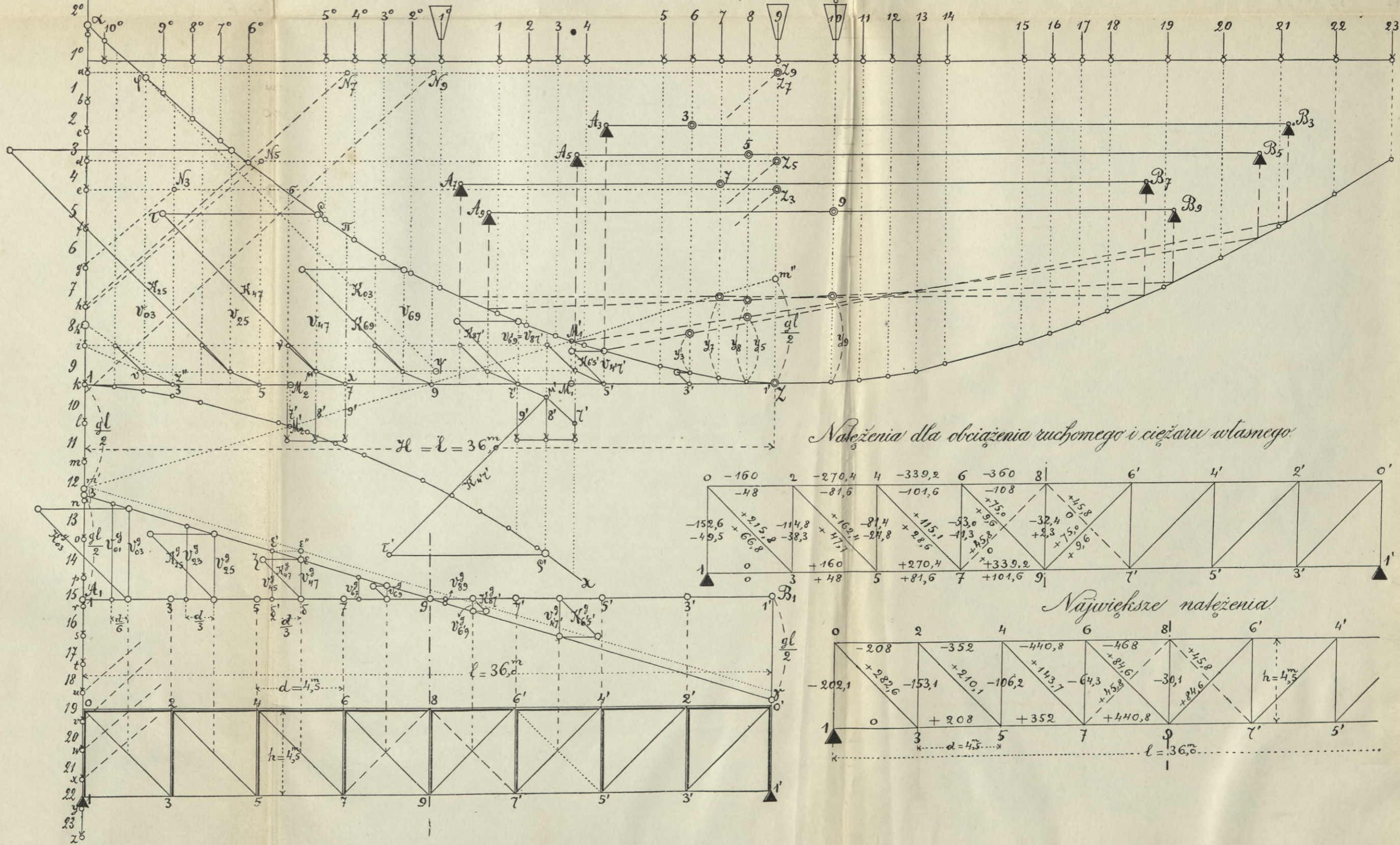
(odp. str. tekstu: 83, 209-212).

Skala długości 1:200.

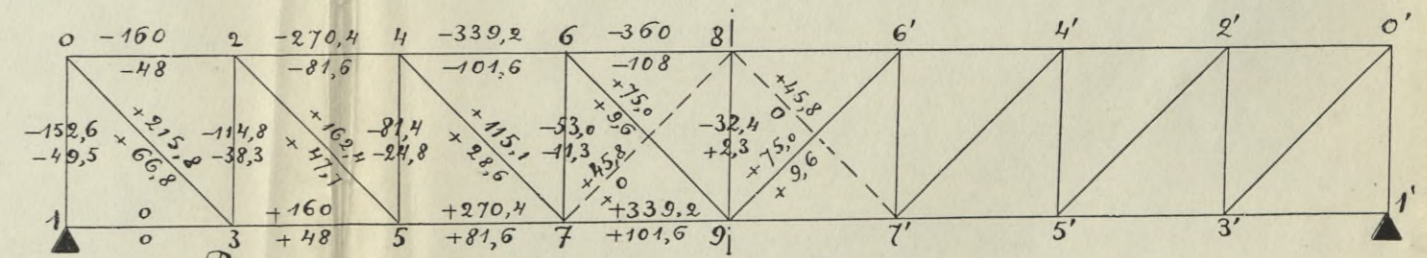
Skala sił 1<sup>mm</sup> = 2 tonny.



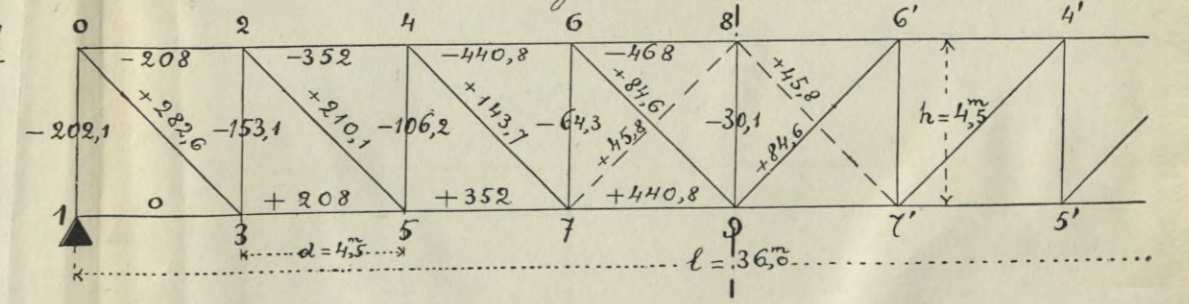
Tablica 3-a



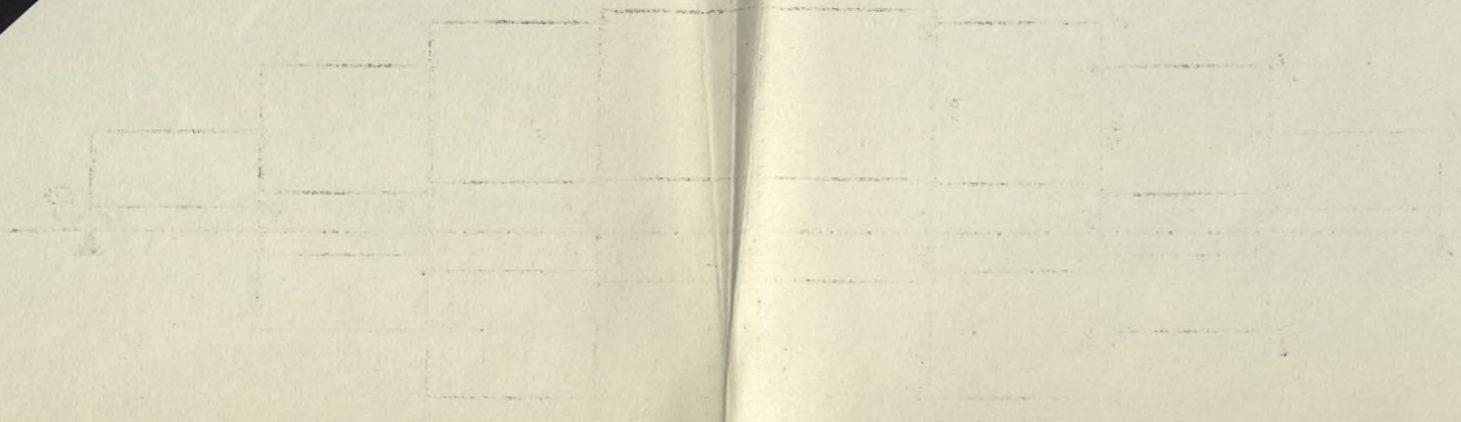
Należenia dla obciążenia ruchomego i ciężaru własnego.



Największe należenia







*Faint handwritten text, possibly a signature or title, and some illegible printed text.*





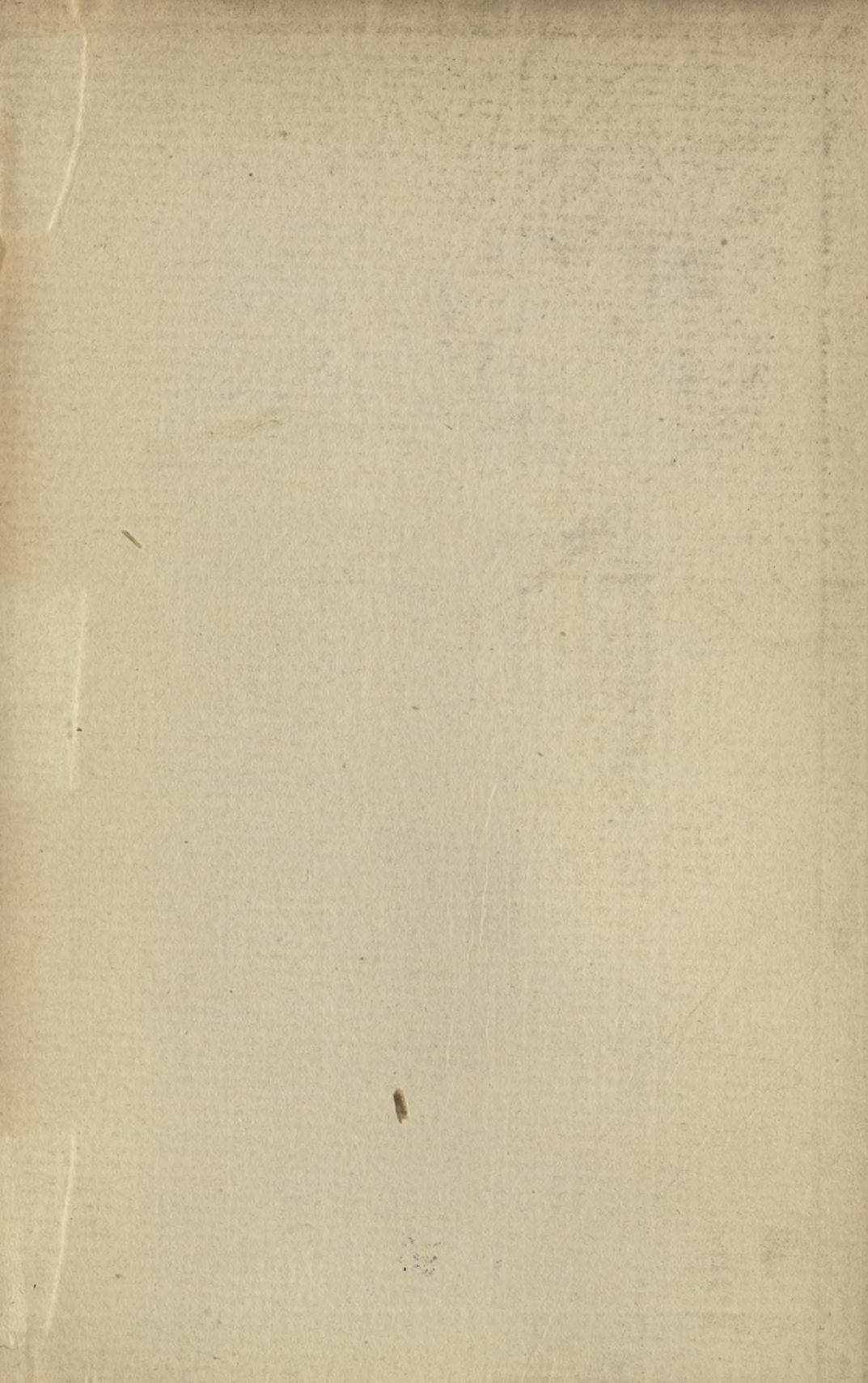
## Matematyka.

- Autenrieth Ed.** Mechanika techniczna. Podręcznik nauki statyki i dynamiki dla inż. mech. i inż. budow. Przełożył z upoważ. autora Stanisław Patschke. (15 $\frac{1}{2}$ ×24) 1900, XI+613, z 327 fig. w tekście. . . . . 2.40
- Baraniecki M. A.** Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. (14 $\frac{1}{2}$ ×23) 1885, XVI+131, drzew. 63. —40
- Danielewicz A. B.** Metoda najmniejszych kwadratów (16×23) 1904, X+185+X. . . . . 1.20
- Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. 1895, 335 tab. X. . . . . —10
- Z dziedziny statystyki matematycznej (16×23) 1884. 30. —10
- Dedekind Ryszard.** Ciągłość a liczby niewymierne. Z czwartego nie zmienionego wydania przełożył St. Straszewicz. (16×24), 1914, VIII+17. . . . . —45
- Dzieje myśli, Tom I zes. 2.** Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucji pojęć w mineralogji. Zarys rozwoju matematyki a) rozwój arytmetyki i algebry do końca XVI w., b) zarys rozwoju geometrii w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia, c) rozwój matematyki od początku XVII w. W opr. Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego, 1911, 279, z 33 ilustr. . . . . 1.50
- Enriques F.** Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej. Tom I-szy: Krytyka Podstaw. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz. (17×25) 1914, IV+331. . . . . 1.50
- Feldblum M.** Geometria wykreslna (16×23 $\frac{1}{2}$ ) 1902, XVI+325, z 172 rys. w tekście. . . . . 2.—
- Folkierski Wł.** Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Wyd. 2-gie znacznie zmienione (16×24) Tom. I 1904, XII+574+55 fig. . . . . 2.40
- Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Wyd. 2-gie znacznie zmienione (16×27) Tom II. 1909, XI+630+101 fig. 2.40
- Gauss Karol Fryderyk.** Rozważania ogólne o powierzchniach krzywych, z orginału łacińskiego przełożył Stefan Finkelkraut, objaśnieniami i uwagami opatrzył Juliusz Rudnicki, z przedmową Kazimierza Żorawskiego, wydał Władysław Wojtowicz. (15×24), 1913, 71. —75



<b>Goslewski Wl.</b> Rachunek prawdopodobieństwa (16×23 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ) 1906, X+265. . . . .	2.—
<b>Hardy G. H. M. A.</b> Wykłady elementarne z dziedziny analizy, przełożył Wl. Wojtowicz. (18×25) 1916, XV+492. . . . .	3.—
<b>Kowalczyk J.</b> O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich (19×26) 1901, XII 624+3 tabl. . . . .	7.50
<b>Majewski Wincenty.</b> Geometria praktyczna. Podręcznik dla rzemieślników (15×22) 1903, 301. (Karton) . . . . .	—75
<b>Malanowicz J.</b> Kreślenie geometryczne i jego praktyczne zastosowania (12×17) 1907, XI+176+45 tab. i 346 rys. (Karton.)	—60
— Kreślenie i zdobienie geometryczne. Kurs pierwszy; Wyd. 2-gie (20×26) 1912, VIII+110+11+45 tab.+215 rys. (Karton)	—60
— Rzuty geometryczne (Geometria wykreslna dostosowana do potrzeb przemysłu i rzemiosł) 1913, II+110+2+269 rys.	—75
<b>Pieri Mario.</b> Geometria elementarna oparta na pojęciach „Punktu“ i „Kuli“, z oryginału włoskiego przełożył Stefan Kwietniewski. (18×24), 1915, 152. . . . .	1.—
<b>Poradnik dla Samouków.</b> Wskazówki metodyczne dla studujących poszczególne nauki. Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego. Wyd. nowe. T. 1-szy w opracowaniu J. Łukasiewicza, Z. Janiszewskiego, St. Kwietniewskiego, St. Mazurkiewicza, W. Sierpińskiego i St. Zaremby. (15×23), 1915, XXXIX+618, z 34 fig. w tekście i I tabl. . . . .	2.40
<b>Prace matematyczno-fizyczne</b> wydaw. przy współdziałaniu Wl. Natansona, J. Puzyny, M. Smoluchowskiego, S. Zaremby, K. Żorawskiego przez S. Dicksteina. Tom XXVII. (16+24), 1916, 277, fig. 10. . . . .	3.—
<b>Rozmarynowicz Teofil.</b> Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy w zastosowaniu do urzędzenia kas emeryt. Wyd. Bolesław Danielewicz (16 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ×23), 1886, IV+53. (—60) . . . . .	—10
<b>Schur F.</b> Podręcznik geometrii analitycznej przeł. T. Łopuszański, (16×24) 1901, X+246+1 nlb.+76 fig. . . . .	1.—
<b>Sierpiński W. dr.</b> Teoria liczb niewymiernych. Wykłady uniw. (14 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ×22 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ), 1910, 4 nlb.+149. . . . .	—75
— Zarys teorii mnogości (16×24 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ) 1912, VIII+158. . . . .	—90
— Teoria liczb (kurs uniwersytecki) (16 24), 1914, XIV+412	1.80
<b>Steiner J.</b> Konstrukcje geometryczne wykonane za pomocą linii prostej i stałego koła; przełożył Stefan Kwietniewski. (17×24) 1915, VIII+69, rys. 25. . . . .	—45
<b>Szczepański Józef.</b> Stopień wyższy matematyki elementarnej i początki rachunku nieskończonościowego. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich i dla samouków (14 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ×22), 1906, 450. . . . .	1.50
(karton) . . . . .	1.60
<b>Wektor.</b> Czasopismo matem.-fiz. Red. Wład. Wojtowicz; w Warszawie 5, — z przesyłką 6 zeszyt pojedynczy. . . . .	—75
<b>Witwiński Romuald.</b> O układach odwracalnych powierzchni potrójnie ortogonalnych. Odbitka z tomu XXVII-go Prac matematyczno-fizycznych. (18×25), 1915, 52+10 fig. . . . .	—75
<b>Zaremba Stanisław.</b> Wstęp do analizy. Część 1-sza. Pojęcie do wodu matematycznego oraz inne wiadomości pomocnicze. (17×24), 1915, 124. . . . .	—60







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294587