FREIE PERSPECTIVE.

FREIE PERSPEKTIVE

IN IHRER

BEGRÜNDUNG UND ANWENDUNG.

VON

GUSTAV AD. V. PESCHKA,

o. ö. Professor am k. k. technischen Institute in Brünn, Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, kaiserl. Dampfkessel-Prüfungs-Commissair, Mitglied wissenschaftl. und gewerbl. Gesellschaften und Vereine etc.

UND

EM. KOUTNY,

Privat-Docent für Perspektive und Schattenlehre am k. k. technischen Institute in Brünn.

HANNOVER.

CARL RÜMPLER.

1868.

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorwort.

Indem wir mit vorliegendem Werke vor die Oeffentlichkeit treten, können wir nicht umhin zu bemerken, dass das Entstehen desselben in eine Zeit fällt, wo der freien Perspektive noch wenig, oder doch nicht jene Aufmerksamkeit zugewendet wurde, als es gegenwärtig der Fall ist.

In der damaligen Ermangelung eines Lehrbuches über „freie Perspektive“, das ein wohlgeordnetes, leichtfassliches, systematisches Ganzes bilden und Gründlichkeit mit Wissenschaftlichkeit eben so sehr, als Einfachheit der Darstellung mit Kürze und Strenge in der Behandlung des Stoffes verbinden soll, entschlossen wir uns zur Herausgabe unserer Vorträge über obgenannten Gegenstand. Was dem Einzelnen jedoch allein, überhäufter Berufspflichten wegen, nicht möglich war, dem dürfte durch das gemeinschaftliche Wirken und durch die gleichmässige Arbeit mit vereinten Kräften entsprochen worden sein.

Nur in wenigen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie findet die Centralprojektion als selbständige Projektionsart eine solche Behandlung, wie sie derselben gebührt. Werden auch hie und da die Grundsätze derselben angeführt, so trifft man doch äusserst selten ein Werk, welches der weiteren Ausbildung dieser Projektionsart den erwünschten Raum gönnen würde.

Bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes und bei der so interessanten Anwendung, die man in neuester Zeit von der Polarprojektion macht, schien es stets auffallend, dass die Untersuchungen über dieses System, welches in seiner Durchführung ein weit grösseres Interesse als die Parallelprojektion bietet, zu den besonderen Seltenheiten gehörten. Erst in neuester Zeit fand die Centralprojektion einige Pflege und eine strengere wissenschaftliche Entwickelung, wobei wir namentlich des ausgezeichneten Werkes von Professor Tilscher, „System der malerisch technischen Perspektive“ und einiger wissenschaftlicher Abhandlungen gedenken. Doch eine selbständige von der Parallelprojektion ganz unabhängige Behandlung der perspektivischen Projektion, von dem Punkte angefangen bis zu den krummen Flächen, ist bisher nicht versucht worden. Die Verfasser glaubten daher im Interesse der Wissenschaft zu wirken, wenn sie sich der Aufgabe unterzogen, die „Freie Perspektive“ als selbständige Projektionsart mit jener Ausführlichkeit systematisch zu behandeln, deren sich bisher nur die Parallelprojektion erfreute. Desshalb konnte die Durchschnittsmethode nur vorübergehend eine kurze Besprechung finden, weil die Verfasser den Grundsatz festhielten, dass die Benützung der Parallelprojektion in der Perspektive nur eine beschränkte sein und nur dort platzgreifen dürfe, wo deren Gebrauch eine bedeutende Vereinfachung der Construktion nach sich zieht.

Der heutige Stand der Wissenschaft erfordert eine streng wissenschaftliche Begründung aller Principien. Es genügt nicht mehr, einem Gegenstande blos die praktische Seite abzugewinnen und die Theorie als unnütz bei Seite zu lassen. So kann sich auch heutzutage der Vortrag über Perspektive an höheren Unterrichtsanstalten nicht mehr auf die blose Darstellung einiger architektonischer Gegenstände nach receptartig gegebenen Regeln beschränken, sondern es muss die Centralprojektion, wenigstens in ihren wichtigsten Theilen, zur Grundlage genommen werden.

Vorliegendes Werk dürfte somit einerseits als Lehrbuch für Jene, die sich eingehender mit der Perspektive vertraut machen wollen, insbesondere daher auch für Lehramtscandidaten, andererseits aber auch als Leitfaden bei den Vorlesungen an technischen Instituten für den Lehrenden sowohl, als für den Schüler mit Nutzen verwendet werden können.

Um jede Schwierigkeit im Studium der freien Perspektive zu beheben, glaubten wir, dem angestrebten Zwecke entsprechend, verpflichtet zu sein, die Grundprincipien der Perspektive möglichst vollständig und ausführlich behandeln und selbst specielle Fälle durch Figuren erläutern zu sollen. Hat sich der Anfänger die vorausgeschickten Grundlehren der Perspektive vollkommen eigen gemacht, so wird er mit Leichtigkeit darauf weiter bauen, und gewiss werden ihm bei den darauf folgenden Anwendungen auch nicht die geringsten Schwierigkeiten erwachsen. Dies diene zur Rechtfertigung, wenn wir mitunter sehr ausführlich wurden.

Dass bereits veröffentlichte Arbeiten dort wo es angezeigt schien oder noch möglich war (das Manuscript unseres Werkes war bereits Ende 1865 in den Händen des Herrn Verlegers) theilweise benützt wurden, ist selbstverständlich, und wurde auch grossentheils auf diese Abhandlungen hingewiesen.

Die Verfasser können nicht umhin, dem Herrn Verleger für die sorgfältige Durchführung und schöne Ausstattung des Werkes, so wie für die besondere Bereitwilligkeit, mit welcher er ihren Wünschen stets entgegenkam, den verbindlichsten Dank auszusprechen.

Indem die Verfasser dieses Werk dem sachverständigen Publikum überliefern, glauben sie umsomehr auf eine freundliche Aufnahme und Beurtheilung desselben hoffen zu dürfen, als bekannt ist, welche Schwierigkeiten bei der Verfassung eines solchen Werkes zu überwinden sind. Dieselben werden allfällige, ihnen gütigst mitgetheilte Ansichten von Fachmännern mit dem grössten Danke entgegennehmen und bei einer späteren Bearbeitung nach Thunlichkeit benützen.

Brünn, im December 1867.

Die Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Grundzüge der freien Perspektive.

Kapitel I.

Einleitung.

Kapitel II.

Perspektivische Darstellung eines Punktes, einer Geraden und einer Ebene.

Kapitel III.

Vermischte Aufgaben.

Kapitel IV.

Theorie der Theilungspunkte.

Kapitel V.

Gegenseitige Beziehungen zwischen Punkten, geraden Linien und Ebenen.

Kapitel VI.

Hilfsconstruktionen bei beschränkter Grösse der Zeichnungsfläche.

Kapitel VII.

Perspektivische Massstäbe und Methode der Quadrate.

Zweiter Abschnitt.

Durch ebene Flächen begränzte Körper.

Kapitel VIII.

Die körperliche Ecke.

Kapitel IX.

Perspektivische Darstellung von Körpern, die von ebenen Flächen begränzt sind.

Kapitel X.

Ebener und gegenseitiger Schnitt von durch ebene Flächen begränzten Körpern.

A. Ebener Schnitt.

Dritter Abschnitt.

Kapitel XI.

Krumme Linien.

Vierter Abschnitt.

Krumme Flächen.

Kapitel XII.

Perspektivische Darstellung krummer Flächen und Tangirungsebenen an dieselben.

Kapitel XIII.

Schnitte krummer Flächen mit Ebenen.

Kapitel XIV.

Darstellung windschiefer Flächen.

Kapitel XV.

Gegenseitiger Schnitt krummer Flächen.

Kapitel XVI.

Verschiedene Aufgaben.

Fünfter Abschnitt.

Kapitel XVII.

Schattenconstruktionen.

Anhang.

Perspektivische Darstellung architektonischer Gegenstände.

Darstellung verschiedener Objekte.

ERSTER ABSCHNITT.
Grundzüge der freien Perspektive.

Kapitel I.
Einleitung.

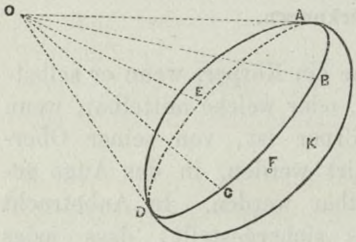
§. 1.
Allgemeine Bemerkungen.

Wenn die Lichttheilchen, welche ein Körper, wenn er selbstleuchtend ist, unmittelbar aussendet, oder welche mittelbar, wenn er ein erleuchteter und matter Körper ist, von seiner Oberfläche nach allen Richtungen reflectirt werden, in das Auge gelangen, so wird uns derselbe sichtbar werden. In Anbetracht der Richtung ist erfahrungsgemäss sichergestellt, dass jedes dieser Lichttheilchen, so lange es in einerlei Mittel bleibt, und auf kein Hinderniss stösst, wodurch es absorbirt oder zurückgeworfen wird, sich beständig in gerader Linie fortbewegt. Diese Gerade nennt man einen Lichtstrahl.

Ein Sehstrahl hingegen ist eine ideale Gerade, welche man sich von dem Auge des Beobachters nach einem Punkte des betrachteten Gegenstandes gezogen denkt. Es heisst hier ausdrücklich von dem Auge des Beobachters, weil man in der Geometrie angewiesen ist, sich auf einen einzigen Augpunkt zu beschränken. In den gewöhnlichen Fällen sind auch die von unseren beiden Sehorganen empfangenen und dem Gehirn mitgetheilten Eindrücke ganz dieselben und bringen daher in unserer Seele auch nur eine und dieselbe Empfindung hervor, so zwar, dass wir die Vorstellung von nur einem einzigen Objecte erhalten. Eine Ausnahme hiervon tritt in dem Falle ein, wo wir dem Körper allzu nahe sind, als dass ein deutliches Sehen möglich wäre. Die deutliche Sehweite beträgt für kleine Gegenstände gewöhnlich 8 bis 12 Zoll. Bringt man einen sehr kleinen Gegenstand in eine Entfernung von etwa einem Zoll vor die Augen, so sieht man ihn doppelt, weil alsdann die beiden Augenaxen sehr schief und entgegengesezt gerichtet sind, also die beiden Eindrücke nicht mehr in einen einzigen verfliessen können. Auf einer convexen Fläche, welche etwa 6 bis 10 Fuss entfernt ist, nimmt man allerdings mit beiden Augen einige Punkte wahr, welche man mit blos einem Auge nicht mehr sehen würde; doch sind diese Verschiedenheiten kaum merkbar, und gehören nur zu den unvermeidlichen Ursachen, welche es uns möglich machen, ein Gemälde auf einer ebenen Fläche von einem Gegenstande im Raume zu unterscheiden.

Eine Folge dieser angeführten Prinzipien ist, dass man von einem fixen Punkte O (Fig. 1), nie die ganze Oberfläche eines isolirt gestellten Körpers K wahrnehmen, und selbst dann nicht übersehen kann, wenn dieselbe in allen ihren Theilen durch mehrere Lichtquellen erleuchtet wäre.

Fig. 1.

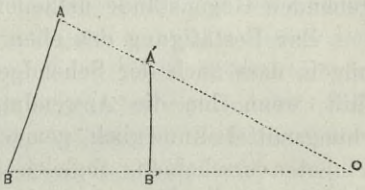


Denkt man sich nämlich aus O alle Sehstrahlen oder Gesichtslinien OA, OB, $OC\ldots\ldots$ gezogen, welche Tangenten an diese Körper-Oberfläche sind, so bilden sie vereint im Allgemeinen einen Kegel, welcher den Körper gleichsam in seiner Leitlinie $ABCDE$ berührt, jenseits welcher aber jeder Punkt der Oberfläche, wie F, unsichtbar sein wird, weil alle von F ausgehenden Lichtstrahlen nicht anders zu dem in O befindlichen Auge gelangen könnten, als indem sie den, als undurchsichtig vorausgesetzten Körper durchdringen würden. Diese Linie $ABCDE$, welche sich gewöhnlich mit dem Punkte O ändert, heisst der scheinbare oder sichtbare Umriss, und ist nichts anderes, als die Reihe der Punkte, die man erhält, wenn man eine im Allgemeinen unbegrenzte Gerade, welche beständig durch O geht, sich so bewegen lässt, dass sie in jeder ihrer Lagen die äussere Umhüllung des Körpers streift, ohne sie je zu durchdringen.

Wichtig erscheint hier auch die Bemerkung, dass man zwar die Richtung, in welcher der von einem bestimmten Punkte eines Gegenstandes ausgehende Lichtstrahl ins Auge gelangt, so wie den Winkel, unter welchem eine der Dimensionen dieses Gegenstandes erscheint, d. i. den Sehwinkel, richtig angeben kann; dass man aber weder die Entfernung, in welcher der Gegenstand sich befindet, noch die absolute Grösse desselben ohne weiteres zu bestimmen vermag.

Erscheint nämlich die Gerade AB, (Fig. 2) irgend eines Gegenstandes dem in O befindlichen Auge unter dem Sehwinkel AOB, so würde auch $A'B'$, für welche der Sehwinkel $A'OB' = AOB$ ist, im Auge das nämliche Bild erzeugen.

Fig. 2.



Diese Behauptung scheint mit der Erfahrung im Widerspruche zu stehen, da wir bei gewöhnlichen Sehweiten über die Entfernung und Form der Körper ziemlich richtig zu urtheilen vermögen, wenn uns dieselben auch unter demselben Gesichtswinkel erscheinen; doch ist hierbei nicht zu vergessen, dass unser diessfälliges Urtheil durch die Vergleichung mit anderen benachbarten Gegenständen geleitet wird, deren Grösse oder Entfernung uns durch unmittelbares Betasten oder durch wirkliche Messung bekannt sind.

Als Richtschnur bei dieser Beurtheilung dient mitunter auch der Umstand, dass ein Körper einen anderen theilweise unsichtbar macht, oder dass er seinen Schatten auf ihn wirft, was zur richtigen Bestimmung ihrer gegenseitigen Lage genügt, oder, dass uns eine dunkle oder eine glänzende Kante sichtbar wird, was auf den Vorsprung einer ersten Grenzfläche vor einer zweiten deutet etc. Für geringe Entfernungen hat man einen Anzeiger in der Muskelanstrengung, welche man machen muss, um beide Augenaxen auf denselben Punkt des betrachteten Gegenstandes zu lenken; je nachdem diese Anstrengung grösser oder kleiner ist, schliesst man auf eine grössere oder geringere Nähe jenes Punktes. Handelt es sich aber um grössere Distanzen, so wird die Veränderung des Winkels jener beiden Axen ganz unmerklich, und kann somit nicht mehr als Anzeiger der Entfernungen dienen. Bei Gegenständen, die auf weitem Felde umher zerstreut liegen, beurtheilt man die Entfernung nach der grösseren oder geringeren Intensität des Lichtes, welches sie zurückwerfen; oder man zählt gleichsam in gewisser Art alle zwischenliegenden Gegenstände, um die Entfernung von dem, welcher insbesondere betrachtet wird, darnach bemessen zu können.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Urtheile, welche man unter Anleitung des Gesichts allein über Entfernungen fällt, viel von gewissen beiläufigen Kenntnissen bedingt seien, die nur durch eine lange Gewohnheit erworben werden konnten. Das Sehen muss gelernt werden; und ein Blindgeborener, der durch die Operation des Staarstiches den Gebrauch seiner Augen erhält, wird anfänglich sehr falsch über die Entfernungen der ihn umgebenden Gegenstände urtheilen.

Zur Bestätigung des eben Gesagten wird die Erwägung genügen, dass auch der Sehendgeborene in ähnliche Irrthümer verfällt, wenn ihm die Anwendung der oben angeführten Vergleichungsmittel unmöglich gemacht ist. Die Fixsterne und die Planeten erscheinen, obgleich ihre Entfernungen ungeheuer verschieden sind, alle auf einer und derselben Kugelfläche liegend, eben weil es an intermediären Punkten fehlt, nach denen man die Verschiedenheit jener Entfernungen beurtheilen könnte. Ebenso wird man auf offenem Meere die Entfernungen sehr schlecht abschätzen, und auf ähnliche Weise auch dann unrichtig urtheilen, wenn man, statt mit freiem Auge, mittelst eines einfachen cylindrischen Rohres ohne Gläser, durch welches man nur einen Gegenstand auf Einmal wahrnehmen kann, in die Weite sieht. Bei grossen perspektivischen Gemälden, die man Panoramas nennt, wähnt man in grosser Distanz von den Gegenständen zu sein, welche sich in einer Nähe von wenigen Klaftern befinden. Diese Täuschung nun, der man sich unmöglich erwehren kann, rührt hauptsächlich daher, dass der Zuschauer aufs sorgfältigste isolirt und seinen Blicken alles verborgen wird, was in unmittelbarer Berührung mit dem Gemälde selbst ist; diese Täuschung verschwindet jedoch augenblicklich, sobald man die Umfassung wahrnimmt, oder Gegenstände erblickt, die, zwischen dem Beschauer und dem Gemälde liegend, dem ersteren die empfangenen Eindrücke berichtigen helfen.

§. 2.

Freie Perspektive, Luft-Perspektive, Polarprojektion.

Auf Grund der Erfahrung und all der angeführten Beobachtungen, welche die Richtigkeit des oben Bemerkten unterstützen, lässt sich der allgemein giltige Satz folgern, dass ein leuchtender oder ein erleuchteter Punkt an jeder Stelle eines und desselben Sehstrahles den nämlichen Eindruck auf das Auge hervorbringt.

Es werden daher auch Linien, welche zwischen denselben

Sehstrahlen enthalten sind, die nämlichen Bilder im Auge erzeugen, so zwar, dass es scheinen wird, als hätten sie die nämliche Grösse und Lage, wenigstens dann, wenn man von den umliegenden Körpern und von der Abnahme der Lichtstärke, die durch grössere, zwischen dem Beobachter und den betrachteten Gegenständen liegende Luftmassen bewirkt wird, gänzlich absieht.

Denkt man sich daher von dem Punkte aus, in welchem sich das Auge des Beobachters befindet, nach allen sichtbaren und bemerkenswerthen Punkten eines Gegenstandes die einzelnen Sehstrahlen gezogen, von welchen die äussersten dem sichtbaren Umrisse angehören, und stellt zwischen das Auge und den betrachteten Gegenstand irgend eine Fläche, welche man die Bildfläche nennt, sucht sodann die Durchschnitte der einzelnen Sehstrahlen mit derselben auf, so bildet die Reihe der in dieser Weise erhaltenen Punkte eine Figur, welche eine getreue Darstellung, gleichsam das Abbild des betrachteten Gegenstandes liefert.

Die Lichtstrahlen, welche die verschiedenen Punkte der Fläche nach dem Auge des Beobachters senden, bilden unter sich die nämlichen Winkel, wie die von den entsprechenden Punkten des betrachteten Gegenstandes ausgehenden Strahlen, daher auch die ersteren im Auge die nämlichen Bilder erzeugen werden, welche von den anderen erzeugt worden wären, und obwohl die absoluten Entfernungen verschieden sind, so wird es das Auge doch nicht empfinden, und besonders dann nicht bemerken, wenn man in den einzelnen Durchschnittspunkten der Fläche mit den Sehstrahlen die nämlichen Farben- uud Lichtabstufungen anordnet, wie sie auf den ihnen entsprechenden Theilen des Gegenstandes sich vorfanden.

Die Wissenschaft nun, welche derlei Abbilder der verschiedenen Gegenstände, die man Perspektiven nennt, herzustellen oder zu construiren lehrt, trägt den Namen „Perspektive“ und zwar: Freie oder Linear-Perspektive, wenn sie bloss auf die Umrisse der darzustellenden Körper Rücksicht nimmt, hingegen Luft-Perspektive, wenn sie auch Farbe und Beleuchtung in ihren Kreis zieht.

Betrachtet man die Umrisse allein, was, wie eben bemerkt, Gegenstand der Freien oder Linear-Perspektive ist, so hat man das, was gewöhnlich unter perspektivischer Zeichnung verstanden wird, und was nichts anderes ist, als die polare Projektion des betrachteten Gegenstandes auf der angenommenen Fläche, vorausgesetzt, dass man das Auge des Beschauers für einen physischen Punkt, d. i. für den Pol gelten lässt, und dass man die Lichtstrahlen schlechtweg für gerade, d. i. für projecirende Linien annimmt. Es ist somit auch die Identität der perspektivischen Zeichnung und der polaren Projektion leicht einzusehen.

§. 3.
Form und Stellung der Bildebene, Gesichtspunkt, Augdistanz.

Wir haben jetzt, wie dieses gewöhnlich vorausgesetzt wird, angenommen, die Bildfläche befinde sich zwischen dem Auge und dem Gegenstande, weil alsdann der Kegel der nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zu ziehenden Sehstrahlen zwischen seiner Spitze und Leitlinie von der Bildfläche geschnitten wird, also eine Perspektive erzeugt, deren allgemeine Dimensionen kleiner sind, als die des Gegenstandes selbst, ein Umstand, welcher für die Darstellung der uns umgebenden Körper, deren natürliche Dimensionen gewöhnlich die Grösse der Bildfläche überragen, von grossem Vortheile ist. Uebrigens können die später anzuführenden Grundsätze für das Verzeichnen der Perspektiven gleich gut auf eine Bildfläche angewendet werden, welche hinter dem Gegenstande aufgestellt ist, oder welche denselben schneidet; nur werden in diesem Falle die Dimensionen der vor der Bildfläche liegenden Theile des Gegenstandes in der Perspektive sich grösser darstellen. Zugleich sei hier bemerkt, dass es nicht gleichgiltig ist, welche Form und Stellung die Bildfläche besitzt, wenn die darauf entworfene Perspektive einen günstigen Eindruck hervorbringen soll, und dass man in den gewöhnlichen Fällen, wo nicht besondere Zwecke zu Grunde liegen, eine ebene und vertikale Fläche als Bildfläche annimmt.

Nicht aber allein die Form und Stellung der Bildfläche, sondern auch die Wahl des Punktes, in welchen man sich das Auge des Beobachters versetzt denkt und welchen man den Gesichtspunkt oder das Auge nennt, üben einen Einfluss auf den Effekt, den eine perspektivische Zeichnung hervorbringen soll.

Man muss diesen Punkt so annehmen, dass man voraussetzen darf, der Beobachter wird denselben für sein Auge wählen.

Gewöhnlich ist es am schicklichsten, den für das Auge bestimmten Punkt auf der Senkrechten anzunehmen, welche man auf die Mitte der Bildebene errichtet, weil dieses die natürliche Stellung ist, welche der Zuschauer einnehmen kann, um die

Perspektive zu betrachten. Man kann jedoch diesen Punkt auch tiefer wählen, je nach der Höhe, in welcher die Bildebene über dem Boden sich befinden soll, und nach der Beschaffenheit des darzustellenden Gegenstandes. Bei architektonischen Gegenständen hat man sich das Auge in einer Höhe von etwa sechs Fuss über dem Boden, auf welchem der Gegenstand aufsteht, zu denken, und darnach die Lage des Gesichtspunktes in Bezug auf die Bildebene anzunehmen. Manchmal kann der Gesichtspunkt mehr rechts oder links gerückt werden, wenn ein wichtiger Grund dafür spricht; wenn z. B. die Hauptsache des darzustellenden Gegenstandes sich nahe am Seitenrahmen befindet.

Was die Entfernung des Gesichtspunktes von der Bildebene betrifft, so hängt dieselbe natürlich von der Art des darzustellenden Gegenstandes, so wie von der Beschaffenheit der einzelnen Theile ab.

Damit jedoch ein recht deutliches Sehen stattfinden und der Beobachter die ganze Fläche der Bildebene, ohne den Kopf zu wenden, übersehen könne, muss der Gesichtspunkt in allen Fällen so weit entfernt von der Bildfläche angenommen werden, dass die Sehstrahlen die Bildebene nicht unter einem Winkel treffen, der kleiner als 45⁰ ist. Wir haben nämlich die Gewohnheit, uns den Gegenständen, welche wir betrachten wollen, beinahe völlig zuzuwenden. Diess ist nothwendig, wenn auf der Netzhaut unseres Auges ein deutliches Bild entstehen und das Sehen uns durch die Anstrengung, welche eine sehr schiefe Axenrichtung der Augen erfordert, nicht beschwerlich werden soll. Wenn daher unsere Blicke sehr schief auf eine perspektivische Zeichnung fallen, so wird dieselbe uns fehlerhaft erscheinen, obgleich sie ganz regelrecht gezeichnet sein kann, die Dimensionen derjenigen Geraden, die nicht parallel mit der Bildebene sind, werden uns übermässig gross vorkommen, obgleich sie ganz genau den gehörigen Gesichtswinkeln entsprechen; alles darum, weil wir nicht gewohnt sind, die Körper auf solche Weise zu betrachten, und weil unser Auge die Länge einer Geraden, welche fast parallel mit der Augenaxe ist, nicht gut zu beurtheilen vermag. Man muss daher eine Wahl vermeiden, die auf solche Resultate führen würde.

Aus den hier angeführten Gründen nimmt man die senkrechte Entfernung des Gesichtspunktes von der Bildebene, welche man die A u g d i s t a n z nennt, beiläufig gleich der ganzen grössten Ausdehnung derselben an.

Eine grössere Entfernung gewährt im Allgemeinen eine bessere Wirkung als eine kleinere, indem letztere leicht nach den Seiten hin für das Auge unangenehme Verziehungen mit sich bringt.

Mitunter jedoch führt man auch perspektivische Zeichnungen aus, für welche der Gesichtspunkt eine solche Lage hat, dass die Sehstrahlen sehr schief auf die Bildebene fallen; man nennt sie verzerrte Perspektiven. Denn ein Beobachter, welcher sich einer solchen Tafel gewohnterweise gerade gegenüberstellt, wird auf derselben nichts als unregelmässige oder unförmliche Umrisse erblicken, welche das dargestellte Bild unkenntlich machen; stellt er sich aber so, dass sein Auge den rechten Gesichtspunkt einnimmt, (was allenfalls durch eine kleine Oeffnung, die in einer Seitenwand angebracht ist, und ihm die umliegenden Körper verbirgt, jedoch die Perspektive sehen lässt, bewirkt werden kann), so wird er ganz anders urtheilen und oft mit Ueberraschung einen anmuthigen Gegenstand gewahren.

§. 4.

Allgemeine Construktionsmethoden. Durchschnittsmethode.

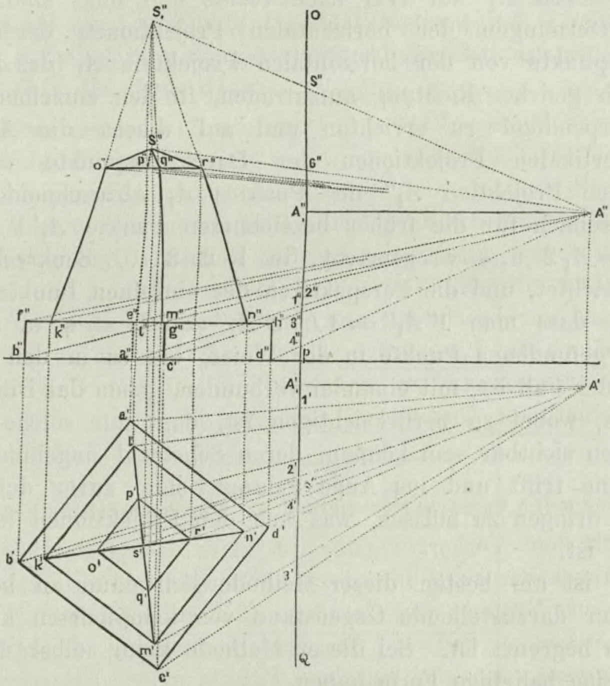
Nach dem Vorhergehenden ist klar, dass die Construktion eines perspektivischen Bildes darauf hinausläuft, die Durchschnittspunkte eines Systems von Geraden, nämlich der Sehstrahlen, mit einer Fläche zu finden. Bei der Bestimmung dieser Durchschnittspunkte, d. i. der einzelnen Punkte einer perspektivischen Zeichnung, kann man folgende zwei Methoden benützen:

1. Die sogenannte Durchschnittsmethode und 2. die Methode der freien Perspektive. Bei Anwendung der Durchschnittsmethode muss der perspektivisch darzustellende Gegenstand durch seine Projektionen auf eine horizontale und vertikale Projektionsebene bestimmt sein. Man hat alsdann nur die Bildfläche und den Gesichtspunkt auf dieselben Projektionsebenen zu beziehen, und die einzelnen Durchschnittspunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche nach den dafür geltenden Regeln zu ermitteln.

Es sei z. B. Fig. 3, $abc \dots S$ ein in seinen beiden Projektionen dargestellter Körper, $A''A'$ das Auge und OPQ die Bildebene, so verbinde man, dem eben Gesagten zufolge, die einzelnen Punkte mit dem Auge durch gerade Linien, und suche deren Durchschnitte mit der Bildebene.

Hier wurden die vier Eckpunkte *a b c d* der unteren Basis, der höchste Punkt S, so wie jener Punkt S_1 gewählt, in welchem

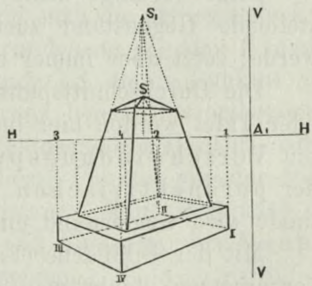
Fig. 3.



die Kanten der vierseitigen Pyramide $kl \dots qr$ zusammenstossen. Die Durchschnitte der den einzelnen Punkten entsprechenden Sehstrahlen (für oben genannte Punkte sonach $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$, $5'5''$, $6'6''$) sind nun zweckmässig in die Bildfläche zu übertragen.

Legt man durch A eine horizontale Ebene, deren vertikale Trace $A'' A_1''$ ist, und eine vertikale, auf der Bildfläche senkrecht stehende Ebene, deren Horizontaltrace $A' A_1'$ ist, und denkt sich die Bildfläche nach Fig. 4 übertragen, so können HH, VV als die Schnitte dieser Ebenen mit der Bildfläche angenommen werden.

Fig. 4.



Es ist nun am zweckmässigsten, zum Uebertragen der einzelnen Durchstosspunkte von Fig. 3 nach Fig. 4 sich dieser beiden zuletzt gezogenen Geraden als Coordinatenaxen zu bedienen. Von A_1 auf HH nach rechts und links sind sonach die Entfernungen der horizontalen Projektionen der Durchschnittspunkte von der horizontalen Projektion A_1' des Punktes A_1 nach gleicher Richtung aufzutragen, in den einzelnen Punkten Perpendikel zu errichten und auf diesen die Abstände der vertikalen Projektionen der Durchstosspunkte von der vertikalen Projektion A_1'' des Punktes A_1 abzuschneiden. Es wurde sonach für die früher bezeichneten Punkte $A_1' 1' = A_1 1$, $A_1' 2' = A_1 2$ u. s. w. gemacht, in 1, 2, 3..... Senkrechte auf HH errichtet, und die Perspektiven der einzelnen Punkte so bestimmt, dass man $1'' A_1'' = 1 I$, $2'' A_1'' = 2 II$ u. s. w. auftrug. Die so gefundenen Punkte in der Weise, wie es in den Projektionen der Fall ist, mit einander verbunden, geben das Bild dieses Körpers, wobei zu berücksichtigen ist, dass nur solche Punkte desselben sichtbar sein können, deren Sehstrahl ungehindert die Bildebene trifft und ins Auge gelangt, ohne zuvor durch den Körper dringen zu müssen, was aus den Projektionen leicht zu ersehen ist.

Es ist am besten, dieser Methode sich dann zu bedienen, wenn der darzustellende Gegenstand von komplizirten krummen Flächen begrenzt ist. Bei dieser Methode kann selbst die Bildfläche eine beliebige Form haben.

§. 5.

Methode der freien Perspektive, Grundbegriffe derselben.

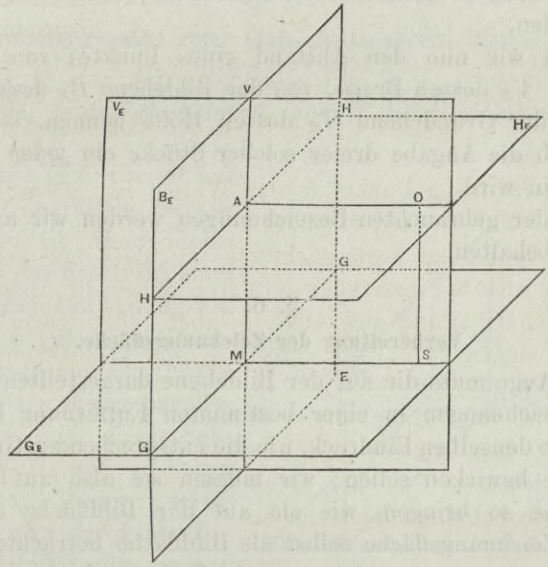
Diese verlangt nicht mehr, dass der perspektivisch darzustellende Gegenstand zuerst durch die Projektionen bestimmt werde; setzt aber immer eine Ebene als Bildfläche voraus.

Die Durchschnittspunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche oder Tafel werden hier indirekt mit Zuhilfenahme der sogenannten Verschwindungspunkte, der Theilungspunkte und der perspektivischen Maasstäbe aufgefunden. Diese Methode wird Gegenstand unserer Betrachtungen sein.

Mit der Bildfläche (Fig. 5), die wir als eine vertikale Ebene voraussetzen, denkt man sich eine zweite horizontale Ebene, die sogenannte Grundriss- oder Grundebene in Verbindung, auf welcher entweder der perspektivisch darzustellende Gegenstand aufruhend gedacht, oder in Bezug auf welche, in Verbindung mit der Bildebene, die Lage dieses Gegenstandes angegeben wird.

Es sei nun, in Fig. 5, B_E die Bildebene und G_E die Grundebene, so heisst man die gemeinschaftliche Durchschnittslinie derselben GG die Grundlinie.

Fig. 5.



Der Punkt O, in welchem man sich das Auge des Beobachters denkt und welcher der Gesichtspunkt heisst, wird auf die Grund- und Bildebene bezogen und zwar nennt man die orthogonale Projektion S des Punktes O auf die Grundebene G_E den Stand- oder Fusspunkt, und den Abstand OS dieses Punktes von der Grundebene die Aughöhe; ferner heisst die orthogonale Projektion A des Punktes O auf die Bildebene der Haupt- oder Augpunkt und der Abstand AO dieses Punktes von der Bildebene die Augdistanz oder kurz Distanz. Man pflegt auch die Gerade OA, hinsichtlich ihrer Lage und Richtung, den Hauptstrahl oder die Gesichtsaxe zu nennen.

Denkt man sich durch den Gesichtspunkt O eine horizontale Ebene H_E gelegt, so heisst diese die Horizontalebene, und ihr Durchschnitt mit der Bildebene HH die Horizontlinie;

und legt man durch O eine Ebene, die sowohl auf der Grund- als auch auf der Bildebene senkrecht steht, also eine vertikale Ebene V_E, so heisst diese die Vertikalebene; ihren Durchschnitt VV mit der Bildebene nennt man die Vertikallinie.

Dem Durchschnittspunkte M der Grundlinie mit der Vertikallinie pflegt man den Namen Grundpunkt beizulegen. Dieser kann als der Anfangspunkt eines Coordinatensystems betrachtet werden, dessen Coordinatenebenen die Bild-, Grund- und Vertikalebene bilden.

Wenn wir nun den Abstand eines Punktes von der Vertikalebene V_E dessen Breite, von der Bildebene B_E dessen Länge, und von der Grundebene G_E dessen Höhe nennen, so ist klar, dass durch die Angabe dreier solcher Stücke ein jeder Punkt bestimmt sein wird.

Die hier gebrauchten Bezeichnungen werden wir auch in der Folge beibehalten.

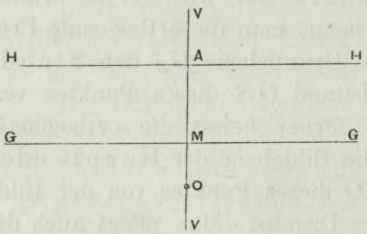
§. 6.

Vorbereitung der Zeichnungsfläche.

Das Auge muss die auf der Bildebene dargestellten perspektivischen Zeichnungen in einer bestimmten Entfernung betrachten, wenn diese denselben Eindruck, wie die entsprechenden Gegenstände im Raume bewirken sollen; wir müssen sie also auf die Zeichnungsfläche so bringen, wie sie auf der Bildfläche erschienen, also die Zeichnungsfläche selbst als Bildfläche betrachten.

Dieses thuen wir auch, wenn wir die Perspektive irgend eines Gegenstandes zu zeichnen haben, und ziehen demnach in der Zeichnungsfläche vor Allem eine horizontale und eine vertikale Linie, die erste als Grundlinie GG, die zweite als Vertikallinie VV betrachtend, wodurch wir zugleich in ihrem Durchschnittspunkte den Grundpunkt M erhalten. Nun tragen wir die Aughöhe auf der Vertikallinie von M nach A auf, wodurch in A der Augpunkt bestimmt ist. Durch A ziehen wir eine horizontale, also eine mit GG parallele Linie und erhalten die Horizontallinie HH.

Fig. 6.



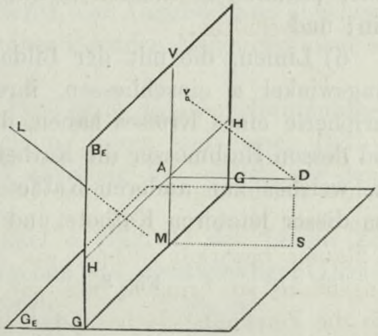
Da sich nun das Auge im Raume befindet, und man selbes bei der Konstruktion benöthigt, so kann man mit demselben um die Horizontallinie HH eine Drehung vornehmen, und es um diese Linie in die Bildebene umlegen. Es sei nun O dieser Punkt, in welchen das umgelegte Auge oder der umgelegte Gesichtspunkt, welchen man auch den Hülfspunkt zu nennen pflegt, zu liegen kommt, so ist klar, dass man denselben erhält, wenn man die Augdistanz auf der Vertikallinie vom Punkte A aufträgt.

§. 7.

Verschwindungspunkt einer Linie, Distanzkreis, Distanzpunkt.

Es sei in der nebenstehenden Fig. 7, L eine unbegrenzte gerade Linie, hinter B_E gelegen, und O der Gesichtspunkt oder das Auge.

Fig. 7.



Denkt man sich von O aus eine mit L parallele Gerade gezogen, so ist diese nichts anderes als der Sehstrahl eines in unendlicher Entfernung auf der Linie L gelegenen Punktes. Sucht man nun den Durchschnittspunkt v dieser parallelen Geraden, oder dieses Sehstrahles mit B_E auf, so heisst dieser der Verschwindungspunkt der Linie L.

Einige Schriftsteller nennen diesen Punkt v den Fluchtpunkt, auch Begegnungs- oder Vertiefungspunkt.

Der Verschwindungspunkt ist also die Perspektive eines in unendlicher Entfernung hinter der Bildebene gelegenen Punktes einer geraden Linie. Derselbe wird demnach erhalten, wenn man durch den Gesichtspunkt einen mit der Geraden parallelen Sehstrahl zieht und dessen Durchschnittspunkt mit der Bildebene aufsucht.

Diesen mit einer geraden Linie L parallelen Sehstrahl Ov wollen wir den Parallelstrahl der Linie L nennen. Aus der hier angeführten allgemeinen Bestimmungsweise des jeweiligen Verschwindungspunktes geht hervor, dass:

1) Linien, die parallel zu einander sind, einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt haben. Es werden demnach auch

die Perspektiven solcher Linien einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, oder in einem Punkte zusammenlaufen.

2) Horizontale Linien, also auch alle Linien, die in der Grundebene liegen, ihren Verschwindungspunkt in der Horizontlinie haben.

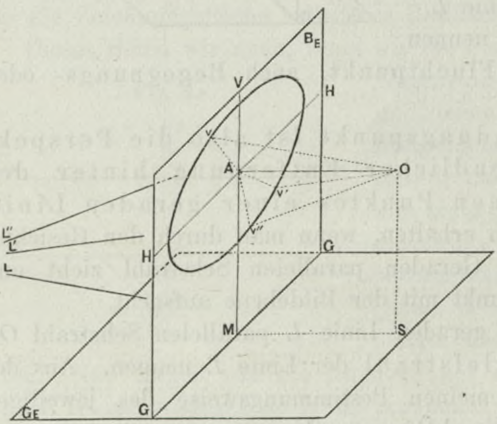
3) Linien, die in der Vertikalebene liegen, oder zu derselben parallel sind, kurz Linien, welche in Ebenen liegen, die senkrecht zur Grundlinie stehen, in der Vertikallinie verschwinden.

4) Linien, die senkrecht zur Bildebene stehen, den Augpunkt zum Verschwindungspunkte haben.

5) Linien, die parallel zur Bildebene liegen, daher auch Linien, die senkrecht zur Grundebene stehen oder in der Bildebene selbst gelegen sind, ihren Verschwindungspunkt in unendlicher Entfernung haben. Sind demnach derlei Linien unter einander parallel, so müssen es auch ihre Perspektiven zu einander sein; und

6) Linien, die mit der Bildebene einen und denselben Neigungswinkel α einschliessen, ihre Verschwindungspunkte in der Peripherie eines Kreises haben, dessen Mittelpunkt der Augpunkt und dessen Halbmesser die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, welches zur anderen Kathete die Augdistanz hat, und sich aus dieser letzteren Kathete und dem derselben gegenüberliegenden Neigungswinkel α construiren lässt.

Fig. 8.

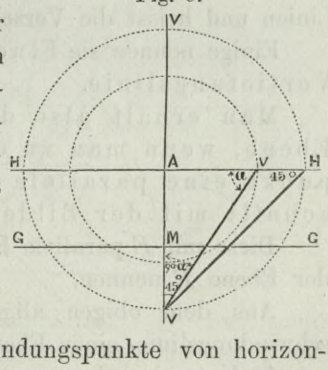


Denn sind (Fig. 8) $L, L', L'' \ldots.$ derlei Linien, die sämmtlich mit der Bildebene den Neigungswinkel α bilden, so brauchen wir bloss von dem Gesichtspunkte O die zugehörigen Parallelstrahlen zu ziehen und ihre Durchschnittspunkte mit der Bildebene aufzusuchen, um die entsprechenden Verschwindungspunkte v, v', $v'' \ldots.$ zu erhalten. Verbinden wir nun diese Verschwindungspunkte mit dem Augpunkte, so bilden diese Verbindungslinien vA, $v'A$, $v''A$.... nichts anderes als die Projektionen der einzelnen Parallelstrahlen auf die Bildebene, demnach sind die Winkel OvA, $Ov'A$, $Ov''A$.... die Neigungswinkel derselben gegen die Bildebene, welche beziehungsweise mit jenen der Linie L, L', L''.... übereinstimmen, und somit auch sämmtlich einander gleich und gleich α sein müssen. Es werden demnach die rechtwinkligen Dreiecke OAv, OAv', OAv''.... alle untereinander kongruent, und somit auch die Abstände der einzelnen Verschwindungspunkte von dem Augpunkte, wie Av, Av', Av''.... sämmtlich unter einander gleich sein, woraus sich also das oben Ausgesprochene ergibt, dass *nämlich die Verschwindungspunkte der mit der Bildebene gleiche Neigungswinkel bildenden Linien, in der Peripherie eines Kreises* v, v', v''.... liegen müssen, dessen Mittelpunkt der Augpunkt und dessen Halbmesser die eine Kathete eines rechtwinklichen Dreieckes ist, das sich aus der anderen, der Augendistanz gleichen Kathete, und dem derselben gegenüberliegenden Neigungswinkel α konstruiren lässt.

Diesen Kreis nun, in dessen Peripherie die Verschwindungspunkte der Linien von gleicher Neigung liegen und dessen Halbmesser von diesem Neigungswinkel abhängig ist, wollen wir den Verschwindungskreis nennen.

Nimmt man den Neigungswinkel α (Fig. 9) der Linien L, L', L''.... gleich 45^0 an; so übergehen die rechtwinkligen Dreiecke OAv, OAv', OAv'',.., zugleich in gleichschenklige, so dass alsdann der Halbmesser des ihnen entsprechenden Verschwindungskreises gleich der Augdistanz sein wird. Einen solchen Verschwindungskreis nennen wir den Distanzkreis und einen jeden Punkt desselben den Distanzpunkt.

Fig. 9.

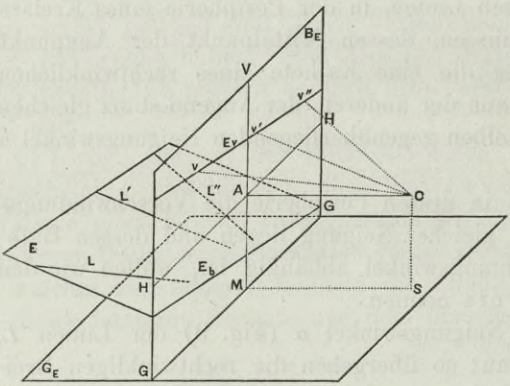


Die wichtigsten Punkte des Distanzkreises sind diejenigen Distanzpunkte, welche in der Horizontal- und Vertikallinie liegen, weil erstere die Verschwindungspunkte von horizontalen und letztere von jenen Linien sind, welche in vertikalen Ebenen liegen, und mit der Bildebene einen Winkel von 45^0 einschliessen.

§. 8.
Verschwindungslinie einer Ebene.

Sei E eine die Bildfläche in der Linie E_b (Fig. 10) schneidende Ebene, folglich E_b die Trace derselben auf der Bildfläche, oder kurz ihre Bildflächtrace. Betrachten wir nun die in dieser Ebene gelegenen Linien L, L'. L'' ...., so werden offenbar die denselben zugehörigen, von O ausgehenden Parallelstrahlen sämmtlich in einer Ebene gelegen sein, welche durch den Gesichtspunkt hindurchgeht und parallel zur Ebene E ist. Demnach werden die einzelnen Verschwindungspunkte v, v', v'' .... der angenommenen Geraden in der Durchschnittslinie E_v dieser parallelen Ebene mit der Bildfläche liegen müssen.

Fig. 10.



Diese Durchschnittslinie E_v, welche, wie leicht einzusehen, mit der Bildflächtrace E_b parallel sein muss, enthält also die Verschwindungspunkte sämmtlicher in der Ebene E gelegener Linien und heisst die **Verschwindungslinie der Ebene.**

Einige nennen sie Fluchtlinie, auch Begegnungs- oder Vertiefungslinie.

Man erhält also die Verschwindungslinie einer Ebene, wenn man zu derselben durch den Gesichtspunkt eine parallele Ebene legt und ihren Durchschnitt mit der Bildebene aufsucht.

Diese mit E parallele Ebene wollen wir die Parallelebene der Ebene E nennen.

Aus dem obigen allgemeinen, zur Bestimmung der Verschwindungslinie einer Ebene dienenden Verfahren ergiebt sich:

1) Untereinander parallele Ebenen haben eine gemeinschaftliche Verschwindungslinie.

2) Für horizontale Ebenen, somit auch für die Grundebene, ist die Horizontallinie die Verschwindungslinie.

3) Für die Vertikalebene und für Ebenen, die zu derselben parallel sind, kurz für die auf der Grundlinie senkrecht stehenden Ebenen, ist die Vertikallinie die Verschwindungslinie.

4) Für Ebenen, die senkrecht zur Bildebene stehen, bildet eine durch den Augpunkt hindurchgehende Linie die Verschwindungslinie. Die Richtung derselben bestimmt, wie bereits oben bemerkt, die Bildflächtrace.

5) Für Ebenen, die zur Bildebene parallel sind, liegt die Verschwindungslinie in unendlicher Entfernung.

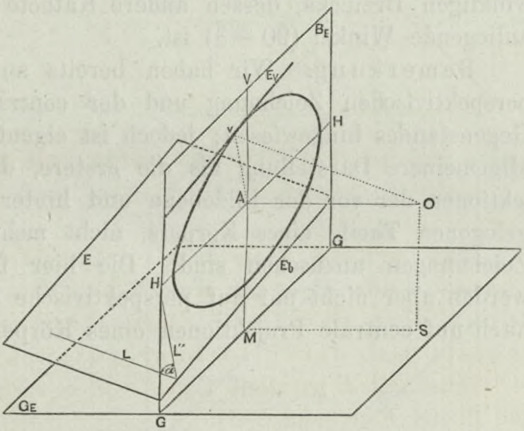
6) Ebenen, die bloss zur Grundlinie parallel laufen, haben eine zur Horizontlinie parallele Verschwindungslinie.

7) Ebenen, die bloss auf der Grundebene senkrecht stehen, haben eine zur Vertikallinie parallele Verschwindungslinie.

8) Die Verschwindungslinien von Ebenen, die alle eine und dieselbe Neigung gegen die Bildebene besitzen, sind Tangenten an den Verschwindungskreis jener Linien, welche die gleiche Neigung gegen die Bildebene haben.

Denn ist E (Fig. 11) eine unter dem Winkel α gegen die Bildfläche geneigte Ebene, und E_b ihre Bildflächtrace, so ist klar, dass wenn man dieselbe und die Bildebene durch eine auf E_b senkrechte Ebene schneidet, die so erhaltenen Durchschnittslinien L und L'', wovon die zweite zugleich die Projektion der ersteren auf der Bildfläche ist, den Neigungswinkel α der Ebene E gegen die Bildebene bilden, welcher gleichzeitig der Neigungswinkel der Geraden L ist. Es hat somit die Ebene E und die Linie L eine gleiche Neigung gegen die Bildfläche.

Fig. 11.



Zieht man nun durch O den Parallelstrahl zu L, so liefert der Durchschnitt desselben den Verschwindungspunkt v, durch welchen die Verschwindungslinie E_v der Ebene E hindurchgehen muss. Verbindet man nun v mit A, so muss Av als Projektion von Ov parallel zu L'' sein, und somit, da L'' senkrecht auf E_b ist, Av senkrecht zu E_v sein. Da nun Av der Halbmesser des Verschwindungskreises aller unter α gegen die Bildebene geneigten Linien ist, so folgt, dass E_v Tangente an diesen Verschwindungskreis sein muss.

Was hier für die Verschwindungslinie E_v der Ebene E gezeigt wurde, hat auch für die Verschwindungslinie jeder anderen unter dem Winkel α gegen die Bildfläche geneigten Ebene seine Richtigkeit, somit das oben Ausgesprochene bewiesen.

Das Gesagte lässt sich auch folgends darthun: Legt man durch den Punkt O Ebenen, die mit der Bildebene den Winkel α bilden, folglich als Parallelebenen aller Ebenen, die mit der Bildfläche den Winkel α einschliessen, angesehen werden können, so besitzen auch diese Ebenen eine gleiche Neigung $(90-\alpha)$ gegen die Gerade OA. Die einhüllende Fläche aller dieser Parallelebenen ist sonach ein auf der Bildfläche senkrechter Kegel von kreisförmiger Basis, dessen Axe OA ist und dessen Durchschnitt mit der Bildebene sonach wieder ein Kreis sein muss. Der Halbmesser desselben ergibt sich als die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete AO und der dieser anliegende Winkel $(90-\alpha)$ ist.

B e m e r k u n g. Wir haben bereits auf die Identität einer perspektivischen Zeichnung und der centralen Projektion eines Gegenstandes hingewiesen; jedoch ist eigentlich die letztere eine allgemeinere Darstellung als die erstere, da die centralen Projektionen der vor der Bildebene und hinter dem Gesichtspunkte gelegenen Theile eines Körpers, nicht mehr als perspektivische Zeichnungen anzusehen sind. Die hier folgenden Grundsätze werden aber nicht nur auf perspektivische Zeichnungen, sondern auch auf centrale Projektionen eines Körpers Anwendung finden.

Kapitel II.

Perspektivische Darstellung eines Punktes, einer geraden Linie und einer Ebene.

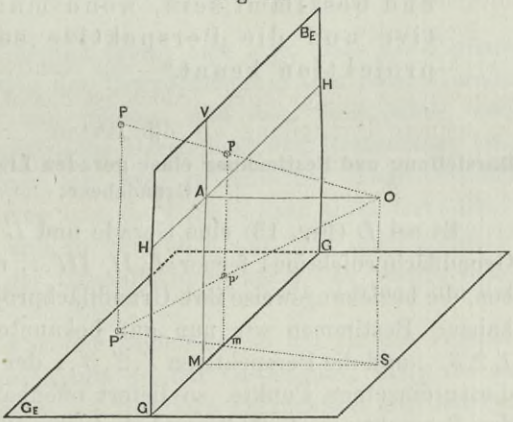
§. 9.

Darstellung und Bestimmung eines Punktes mit Zuhilfenahme der Grundebene.

Ist P (Fig. 12) ein Punkt im Raume, und P' dessen orthogonale Projektion auf der Grundebene, die wir kurz Grundeben- oder Grundflächprojektion von P nennen, so wird derselbe perspektivisch dargestellt sein, wenn man von dem Gesichtspunkte O den ihm zugehörigen Sehstrahl OP zieht und dessen Durchschnittspunkt p mit der Bildebene B_E aufsucht.

Um diesen Durchschnittspunkt zu erhalten, bedenke man, dass derselbe ausser in dem Sehstrahle OP auch in der Durchschnittslinie der denselben zur Grundebene projecirenden Ebene mit der Bildfläche gelegen sein muss. Verbindet man demnach S mit P', so ist dieses offenbar die Trace dieser projecirenden Ebene, und die in m auf die Grundlinie errichtete Senkrechte mp die Durchschnittslinie derselben mit der Bildebene. Es wird daher der Durchschnitt des Sehstrahles OP mit dieser Senkrechten, d. i. der Punkt p, die perspektivische Darstellung oder die Perspektive des Punktes P vorstellen.

Fig. 12.



Auf diese Art ist zwar der Punkt P perspektivisch dargestellt, jedoch noch keineswegs bestimmt, weil bei gegebener Perspektive p der dieselbe liefernde Punkt P noch an jeder willkürlichen Stelle des Strahles Op angenommen werden kann.

Bestimmen wir nun noch die Perspektive von P', so wird diese ausser in dem Sehstrahle OP' auch in der im Punkte m auf die Grundlinie errichteten Senkrechten, also in p' liegen müssen, da die projecirende Ebene des Sehstrahles OP auch OP' in sich enthält, woraus zu ersehen, dass die Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion eines Punktes in einer und derselben auf der Grundlinie senkrecht stehenden Geraden sich vorfinden.

Ferner wird der Punkt P durch seine Perspektive p und durch die Perspektive der Grundflächprojektion p' vollkommen bestimmt sein, da man den die Perspektive p liefernden Punkt auf dem Strahle Op nur dort annehmen kann, wo die in P' auf die Grundebene errichtete Senkrechte denselben schneidet. Der Punkt P' ergiebt sich als Durchschnitt des Sehstrahles Op' mit der Grundebene.

Liegt ein Punkt in der Bildebene, so hat er seine Perspektive der Grundflächprojektion in der Grundlinie; liegt er dagegen in der Grundebene, so fällt dessen Perspektive mit der Perspektive der Grundflächprojektion zusammen.

Aus dem bis jetzt Gesagten folgt nun:

„Ein Punkt wird perspektivisch dargestellt und bestimmt sein, wenn man dessen Perspektive und die Perspektive seiner Grundflächprojektion kennt."

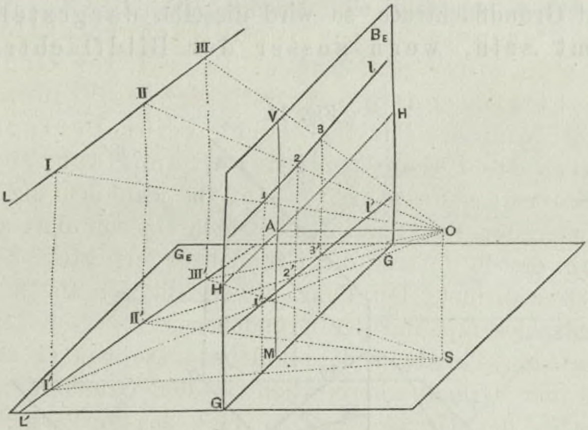
§. 10.

Darstellung und Bestimmung einer geraden Linie mit Zuhilfenahme der Grundebene.

Es sei L (Fig. 13) eine Gerade und L' ihre Grundeben- oder Grundflächprojektion; ferner I, II, III... mehrere Punkte derselben, die beziehungsweise ihre Grundflächprojektion in I', II', III'... haben. Bestimmen wir nun auf bekannte Art die Perspektiven $1, 2, 3$... und die Perspektiven $1', 2', 3'$... der Grundflächprojektionen dieser einzelnen Punkte, so liefert offenbar die Verbindungslinie der Perspektiven 1, 2, 3..., d. i. l, die Perspektive der Geraden L, und die Verbindungslinie der Perspektiven der Grundflächprojektionen $1'$, $2'$, $3'$..., d. i. l', die Perspektive der Grundflächprojektion der Geraden L, wodurch diese Gerade nicht nur perspektivisch dargestellt, sondern auch bestimmt erscheint.

Da nun aber die Sehstrahlen OI, OII, $OIII$... und OI', *OII'*, *OIII'*... in Ebenen liegen, die durch *O* und beziehungsweise durch *L* und *L'* hindurchgehen, so ist klar, dass man *l* und *l'* auch erhält, wenn man durch den Gesichtspunkt *O* und

Fig. 13.



beziehungsweise durch die Gerade *L* und ihre Grundflächprojektion *L'* Ebenen, welche perspektivisch projecirende Ebenen heissen, hindurchlegt, und ihre Durchschnitte mit der Bildebene aufsucht.

Aus dem eben Gesagten ergibt sich also, dass die Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion einer Geraden wieder gerade Linien sein müssen, und dass man daher, wenn es sich um die perspektivische Darstellung und Bestimmung einer Geraden handelt, bloss von zwei in derselben angenommenen Punkten die Perspektiven und die Perspektiven ihrer Grundflächprojektion anzugeben und zu verbinden hat, um die Perspektive und die Perspektive der Grundflächprojektion der vorgegebenen Geraden zu erhalten.

Liegt eine Gerade in der Bildebene, so hat sie die Perspektive ihrer Grundflächprojektion in der Grundlinie; liegt sie dagegen in der Grundebene, so fällt ihre Perspektive mit der Perspektive der Grundflächprojektion zusammen.

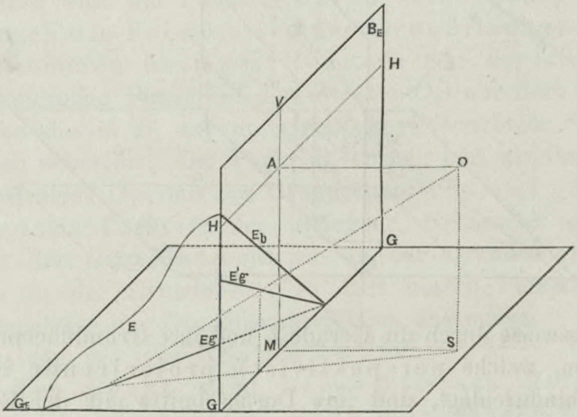
Eine Gerade wird daher perspektivisch dargestellt und bestimmt sein, wenn man ihre Perspektive und die Perspektive ihrer Grundflächprojektion kennt.

§. 11.

Darstellung und Bestimmung einer Ebene mit Zuhilfenahme der Grundebene.

Die Ebene E (Fig. 14) habe E_b und E_g beziehungsweise als Bild- und Grundflächtrace, so wird dieselbe dargestellt und bestimmt sein, wenn ausser der Bildflächtrace E_b

Fig. 14.



noch die Perspektive E'_g der Grundflächtrace angegeben wird; denn alsdann kennt man zwei Linien, welche die Ebene E bestimmen.

Obwohl man, wie leicht einzusehen ist, alle möglichen Ebenen, mit Ausnahme derjenigen, die durch die Grundlinie hindurchgehen, in dieser Art bestimmen könnte, so wird es doch im Allgemeinen besser sein, nicht nur die durch die Grundlinie hindurchgehenden Ebenen, sondern auch alle zu derselben parallelen Ebenen, nur durch die Bildflächtrace (die im ersteren Falle die Grundlinie vorstellt), und durch einen derselben angehörigen Punkt zu bestimmen.

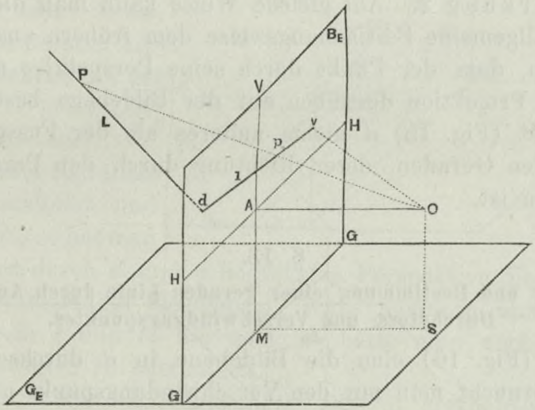
Die hier angeführte Bestimmungsart erfordert die Grundebene, man ist jedoch im Stande, Punkte, Linien und Ebenen auch ohne Anwendung der Grundebene zu bestimmen, welche Bestimmungsweise in Folgendem entwickelt werden wird.

§. 12.

Darstellung und Bestimmung eines Punktes mittelst einer durch denselben geführten Geraden.

Es sei P (Fig. 15) ein Punkt im Raume und L irgend eine durch denselben hindurchgehende, die Bildebene in d schneidende

Fig. 15.



Linie; so ist klar, dass die Perspektive p von P in der Perspektive l von L liegen muss. Bestimmen wir nun auf bekannte Art den Verschwindungspunkt v der Linie L, so liefert offenbar die Verbindungslinie dv die Perspektive l, welche p in sich enthält.

Es lässt sich nun leicht darthun, dass durch p und durch den Durchschnitts- und Verschwindungspunkt, d. i. d und v, der Linie L, der Punkt P vollkommen bestimmt ist; denn der die Perspektive p liefernde Punkt muss in dem durch O und p gezogenen Sehstrahl sowohl, als auch in der durch d parallel mit Ov geführten Geraden L liegen, wesshalb er, als Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden, durch dieselben vollkommen bestimmt ist.

Es ist demnach ein Punkt, ohne Benützung der Grundebene, perspektivisch dargestellt und bestimmt, wenn ausser seiner Perspektive, noch der Verschwindungspunkt und der Durchstosspunkt einer durch den zu bestimmenden Punkt gehenden Geraden mit der Bildebene gegeben ist.

Bemerkung 1. Wird die den Punkt bestimmende Gerade senkrecht auf die Bildfläche gewählt, so fällt ihr Verschwindungspunkt mit dem Augpunkte zusammen, und es wird sodann ihr Durchstosspunkt mit der Bildfläche die orthogonale Projektion des Punktes auf der Bildebene sein.

Hieraus folgt, dass ein Punkt durch seine Perspektive und durch seine orthogonale Projektion auf der Bildebene bestimmt erscheint.

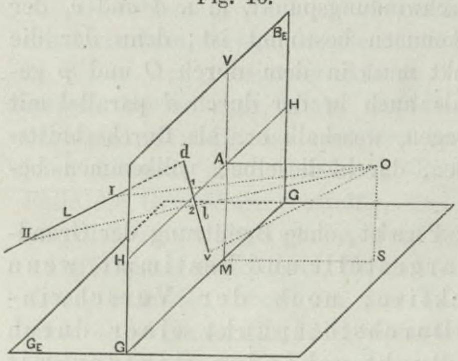
Bemerkung 2. Auf gleiche Weise kann man die in §. 12 gegebene allgemeine Bestimmungsweise dem frühern analog dahin aussprechen, dass der Punkt durch seine Perspektive und durch die schiefe Projektion desselben auf der Bildebene bestimmt ist. Denn es ist (Fig. 15) d nichts anderes als der Fusspunkt der projecirenden Geraden, deren Richtung durch den Parallelstrahl Ov gegeben ist.

§. 13.

Darstellung und Bestimmung einer geraden Linie durch Angabe ihres Durchstoss- und Verschwindungspunktes.

Ist L (Fig. 16) eine die Bildebene in d durchschneidende Linie, so braucht man nur den Verschwindungspunkt v derselben zu ermitteln, um so, durch die Verbindung der Punkte d und v, die Perspektive l der Geraden L zu erhalten. Hierdurch wird aber diese Gerade nicht nur dargestellt, sondern auch bestimmt erscheinen, da sie durch d parallel zu dem durch v bestimmten Parallelstrahle gehen muss.

Fig. 16.

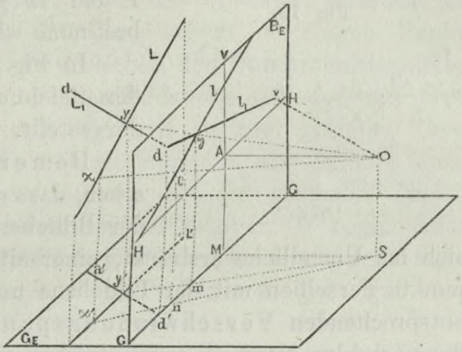


Hieraus folgt, dass zur Bestimmung einer Geraden ausser der Perspektive derselben die Punkte d und v nothwendig sind.

Da aber Linien, die mit der Bildfläche parallel sind, weder die Bildfläche schneiden, noch einen Verschwindungspunkt haben, so pflegt man zur Bestimmung derselben (ausser der Richtung der Perspektive) noch einen ihnen angehörigen Punkt darzustellen und zu bestimmen, was jedenfalls hinreichend ist, indem solche

Linien mit ihren Perspektiven parallel laufen müssen. (Siehe Fig. 17.)

Fig. 17.



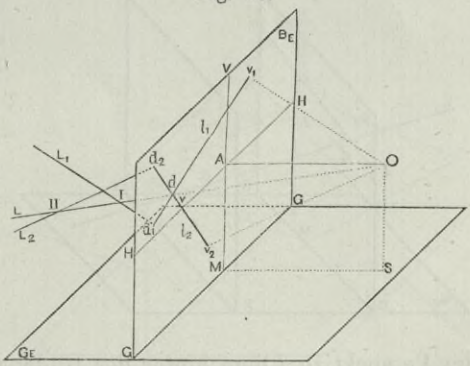
Es wurde hier vorausgesetzt, die Linie L erstrecke sich hinter der Bildebene ins Unendliche, da v, wie bekannt, die Perspektive eines in unendlicher Entfernung hinter der Bildebene auf der Geraden L gelegenen Punktes bezeichnet.

Hat man aber begränzte Linien darzustellen und zu bestimmen, so hat man bloss auf der durch d und v begränzten Perspektive die Perspektiven der Gränzpunkte anzugeben. Wäre demnach unsere Linie L (Fig. 16) in I und II begränzt, so hätte man noch die Perspektiven *1* und *2* zu bestimmen.

Wie die Verschwindungspunkte der zu bestimmenden Geraden bei specieller Lage derselben angenommen werden sollen, ist bereits im §. 7 ausführlich behandelt worden.

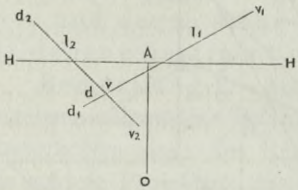
Bemerkung 1. Für Linien, die verlängert durch den Gesichtspunkt gehen, ist die Perspektive ein Punkt, mit welchem ihr Durchschnittspunkt mit der Bildebene, ihr Verschwindungspunkt und die Perspektive eines jeden ihrer Punkte zusammenfallen. Derlei begränzte Linien würden also auf die obige Weise nicht bestimmt werden können. Wollte man sie aber dennoch fixiren und hiebei die Grundebene nicht benützen, so könnte man die Gränzpunkte derselben in der Art darstellen und bestimmen, wie es früher, §. 12, bei einem Punkte zur Sprache gebracht wurde.

Fig. 18.



Ist also L' (Fig. 18) eine solche Gerade, welche in den Punkten I und II zu begränzen ist, so müssen diese durch die Perspektiven $l_1\ v_1\ d_1$ und $l_2\ v_2\ d_2$ der durch diese beiden Punkte I und II geführten Geraden L_1, L_2 bestimmt werden.

Fig. 19.



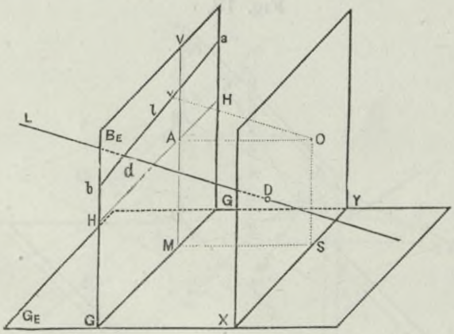
In Fig. 19 ist ein solcher Fall in der Zeichnungsfläche (als Bildebene) dargestellt.

Bemerkung 2. Wir haben gesehen, dass die Perspektive einer hinter der Bildebene gelegenen Geraden, die sich ins Unendliche erstreckt, einerseits von dem Durchschnittspunkte derselben mit der Bildebene und anderseits von dem ihr entsprechenden Verschwindungspunkte begränzt sei, und dass demnach der Name Verschwindungspunkt ganz zweckmässig gewählt ist, da in demselben für den Beobachter eine Gerade zu verschwinden scheint.

Bemerkung 3. Auf gleiche Weise wie im §. 12, Bem. 1, gezeigt wurde, lässt sich auch hier darthun, dass eine Gerade vollkommen bestimmt sei, wenn ausser ihrer Perspektive, die Projektion derselben auf der Bildfläche gegeben ist.

Denken wir uns aber eine Gerade L (Fig. 20), die sich nicht nur hinter, sondern auch vor der Bildebene ins Unendliche erstreckt, so werden ihr Durchschnittspunkt d mit der Bildebene und ihr Verschwindungspunkt v nicht mehr die Gränzpunkte ihrer Perspektive l sein können, da diese auch als eine unendliche, d. i. unbegränzte Gerade erscheinen muss.

Fig. 20.



Nachdem aber bekannt ist, dass die zwischen d und v liegenden Punkte der Perspektive l dem hinter der Bildebene gelegenen, ins Unendliche sich erstreckenden Theile der Geraden L entsprechen, so ist klar, dass die vor d und hinter v befindlichen Punkte der Perspektive l, wie db und va, nur Perspektiven oder centrale

Projektionen jener Punkte sein können; die den vor der Bildebene liegenden, ins Unendliche sich erstreckenden Theil der Geraden L bilden.

Es ist leicht einzusehen, dass die ersteren, nämlich alle vor d liegenden Punkte, die Perspektiven derjenigen Punkte der Geraden L vorstellen, die zwischen den Durchschnittspunkten d und D dieser Geraden mit der Bildebene (d) und mit einer durch den Gesichtspunkt zur Bildebene parallel gelegten Ebene xy, d. i. D, enthalten sind; und die letzteren, nämlich alle hinter v liegenden Punkte, nichts anderes als die centralen Projektionen jener Punkte angeben, welche dem in D beginnenden, vor dieser Ebene xy befindlichen Theile der Geraden L angehören. Man könnte diese centralen Projektionen ganz gut eingebildete oder imaginäre Perspektiven nennen.

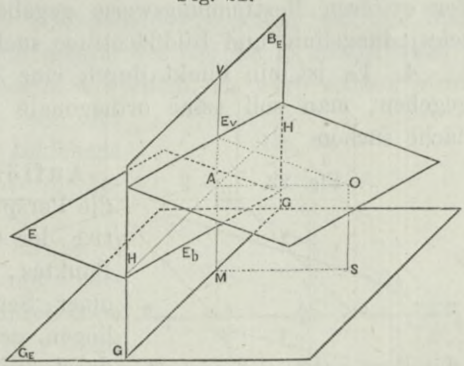
Es ist nöthig, die hier angegebene Bedeutung der in der Perspektive einer Geraden oder in der Verlängerung derselben gelegenen Punkte richtig zu erfassen, um sogleich den Ort bezeichnen zu können, wo die ihnen entsprechenden im Raume befindlichen Punkte gelegen sind.

§. 14.

Darstellung und Bestimmung einer Ebene durch ihre Bildflächtrace und Verschwindungslinie.

Offenbar wird eine die Bildfläche schneidende Ebene E (Fig. 21) schon bestimmt sein, wenn ausser ihrer Bildflächtrace E_b noch die, auf bereits erwähnte Weise bestimmte Verschwindungslinie E_v derselben gegeben ist; denn die Ebene muss durch E_b parallel zu der durch E_v bestimmten Parallelebene hindurchgehen.

Fig. 21.



Ebenen, die zur Bildfläche parallel sind, haben keine Bildflächtrace und keine Verschwindungslinie; man pflegt daher zur Bestimmung derselben einen ihnen angehörigen Punkt darzustellen und zu bestimmen.

Für die Horizontsebene, für die Vertikalebene, so wie für jede durch das Auge gehende Ebene fällt die Verschwindungslinie mit der Bildflächtrace zusammen, wesshalb solche Ebenen schon durch diese Trace bestimmt erscheinen, indem ein weiteres Bestimmungsstück das Auge ist, durch welches sie hindurchgehen.

Wie bei speziellen Lagen der Ebenen die Verschwindungslinien derselben angenommen werden müssen, wurde bereits in §. 8 behandelt.

§. 15.
Gegenseitiger Zusammenhang beider Bestimmungsarten.

In der Folge werden wir die letztere der beiden eben angeführten Darstellungs- und Bestimmungsweisen bei der Durchführung und Auflösung der verschiedenen Probleme voraussetzen, und wollen demnach vor Allem zeigen, wie man aus der ersteren auf die letztere übergehen kann.

Wir werden demnach folgende Aufgaben aufzulösen haben:

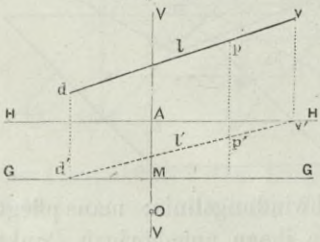
1. Es ist ein Punkt perspektivisch dargestellt und nach der ersteren Bestimmungsweise gegeben, man soll denselben nach der zweiten bestimmen.

2. Es ist eine Gerade perspektivisch dargestellt und nach der ersteren Bestimmungsweise gegeben, man soll deren Verschwindungspunkt und Durchstosspunkt mit der Bildebene bestimmen.

3. Es ist eine Ebene perspektivisch dargestellt und nach der ersteren Bestimmungsweise gegeben, man soll deren Verschwindungslinie und Bildflächtrace suchen.

4. Es ist ein Punkt durch eine dieser Bestimmungsweisen gegeben, man soll seine orthogonale Projektion auf der Bildfläche suchen.

Fig. 22.



Auflösung zu 1. Ist p (Fig. 22) die Perspektive und p' die Perspektive der Grundflächprojektion eines Punktes, welche wie bekannt in einer Senkrechten zur Grundlinie liegen, gegeben, so haben wir bloss durch diesen Punkt irgend eine Linie zu ziehen und ihren Durchschnitt mit der Bildebene, so wie den derselben entsprechenden Verschwindungspunkt zu bestimmen, um den Anforderungen der vorgegebenen Aufgabe Genüge zu leisten.

Die Perspektive l dieser Geraden muss durch p und die Perspektive l' ihrer Grundflächprojektion durch p' gehen. Verlängert man nun l' bis einerseits die Grundlinie in d' und anderseits die Horizontallinie in v' geschnitten wird, so ist offenbar d' die Perspektive der Grundflächprojektion eines Punktes, der nicht nur in der gezogenen Geraden, sondern auch in der Bildebene liegen muss, somit die Perspektive der Grundflächprojektion des Durchschnittspunktes dieser Geraden mit der Bildfläche. Errichtet man demnach in d' eine Senkrechte GG, so ist der Punkt d, in welchem sie l schneidet, die zu d' gehörige Perspektive, also auch der Durchschnittspunkt der gezogenen Geraden mit der Bildebene.

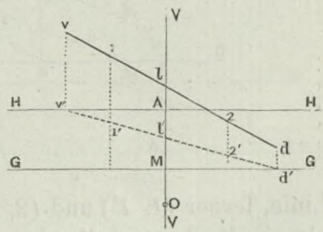
Betrachten wir nun jetzt den Punkt v', so ist klar, dass, nachdem horizontale Linien in der Horizontallinie verschwinden, v' der Verschwindungspunkt der Grundflächprojektion der gezogenen Geraden sein müsse, oder mit anderen Worten, derselbe gibt die Perspektive der Grundflächprojektion eines in unendlicher Entfernung auf der gezogenen Geraden gelegenen Punktes an.

Es wird demnach der Punkt v, wo die in v' auf GG, oder was dasselbe ist, auf HH errichtete Senkrechte die Gerade l trifft, die Perspektive dieses im Unendlichen liegenden Punktes, oder den Verschwindungspunkt dieser Geraden L bestimmen.

Es ist also d und v bestimmt, somit die Aufgabe gelöst.

Sollte p durch seine orthogonale Projektion auf der Bildebene bestimmt werden, so müsste die Gerade l, mithin auch l' bildflächprojecirend angenommen werden. Es wäre sodann p und p' mit A zu verbinden, und der Durchstosspunkt mit der Bildebene auf gleiche Weise wie d zu bestimmen.

Fig. 23.



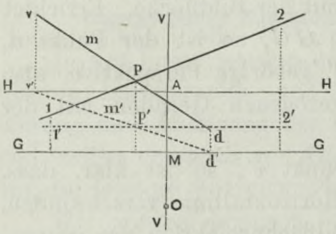
Auflösung zu 2. Es sei l (Fig. 23) die Perspektive und l' die Perspektive der Grundflächprojektion einer durch die Punkte (1, $1'$) und (2, $2'$) begränzten Geraden L, so kann l' verlängert entweder die Grund- und Horizontslinie schneiden, oder mit diesen Linien parallel sein.

Im ersteren Falle durchschneidet die Gerade die Bildfläche, im letzteren dagegen läuft sie mit derselben parallel.

Setzen wir voraus, es trete das Erstere ein, so brauchen wir nur, wie aus dem Obigen einleuchtet, die Punkte d und v vermittelst d' und v' auf bekannte Art zu bestimmen, da wir dadurch den Durchschnittspunkt und den Verschwindungspunkt der gegebenen Geraden erhalten.

Im letzteren Falle hingegen, da wir es mit einer zur Bildfläche parallelen Linie zu thun haben, wird es nothwendig sein, einen in derselben gelegenen Punkt (pp') (Fig. 24) zu bestimmen, zu welchem Zwecke für die durch denselben gezogene Linie (mm') der Durchschnittspunkt d und der Verschwindungspunkt v mit Benützung von d' und v' anzugeben ist.

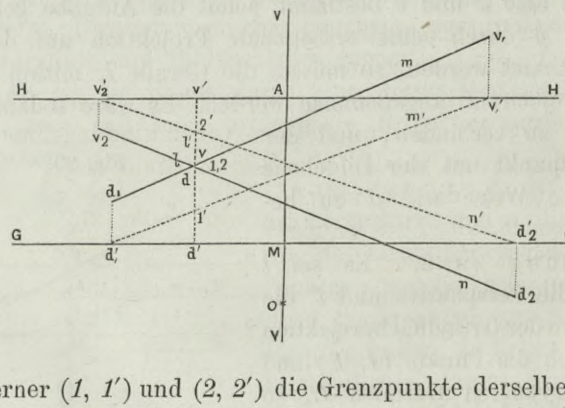
Fig. 24.



Bemerkung. Würde es sich um die Bestimmung einer Linie handeln, die verlängert durch den Gesichtspunkt hindurchgeht und begränzt ist, so werden noch die Gränzpunkte darzustellen und zu bestimmen sein.

Ist demnach der Punkt l (Fig. 25) die Perspektive und die Gerade l' die Perspektive der Grundfláchprojektion einer solchen

Fig. 25.

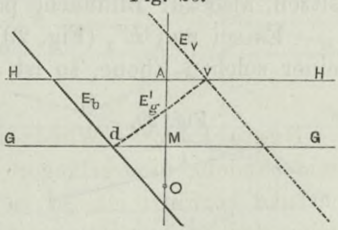


Linie, ferner $(1, 1')$ und $(2, 2')$ die Grenzpunkte derselben, wobei l als ein Punkt und l' als eine durch denselben gehende auf der Grundlinie senkrecht stehende Gerade erscheinen muss, da die diese Gerade zur Grundebene projecirende Ebene durch den Gesichtspunkt hindurchgeht, oder mit andern Worten, weil die durch die Grundflächprojektion und den Gesichtspunkt gehende Ebene in diesem Falle vertikal ist, sich demnach mit der Bildfläche in einer vertikalen Geraden schneiden muss.

Wir brauchen also bloss, nachdem der Durchschnittspunkt d und der Verschwindungspunkt v mit l selbst zusammenfällt, und demnach schon bestimmt ist, nur noch durch $(1, 1')$ und $(2, 2')$ die Linien (m, m') und (n, n') zu ziehen und ihre Durchschnittspunkte d_1, d_2, so wie die zugehörigen Verschwindungspunkte v_1, v_2 auf bereits erörterte Weise zu ermitteln.

Auflösung zu 3. Stellt E_b (Fig. 26) die Bildflächtrace und E'_g die Perspektive der Grundflächtrace irgend einer Ebene E vor, so handelt es sich hier blos um die Bestimmung der Verschwindungslinie derselben. Nachdem aber bekannt ist, dass diese mit der Bildflächtrace parallel sein muss, so wird es nur nöthig sein, einen Punkt derselben zu ermitteln. Ein solcher ist nun offenbar der in der Horizontslinie gelegene Punkt v von E'_g, denn E_g liegt in der Grundebene, verschwindet daher in der Horizontlinie. Nachdem aber E_g auch in der Ebene E liegt, so wird ihr Verschwindungspunkt v ein Punkt der Verschwindungslinie sein. Zieht man demnach durch diesen Punkt v die zur Bildflächtrace Parallele E_v, so ist diese Gerade die gesuchte Veschwindungslinie.

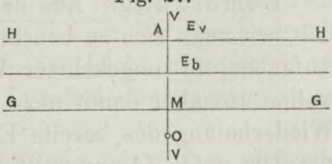
Fig. 26.



Für eine zur Grundebene parallele Ebene, deren Bildflächtrace E_b ist (Fig. 27), ist die Lage der Verschwindungslinie schon bekannt. Dieselbe ist nämlich die Horizontslinie HH.

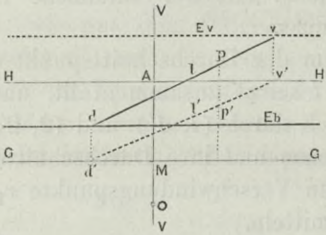
Für die durch die Grundlinie hindurchgehenden, oder bloss zu derselben parallelen Ebenen, welche durch die Bildflächtrace und durch einen ihnen angehörigen Punkt bestimmt sind, muss man behufs der Bestimmung der Verschwindungslinie den Verschwindungspunkt irgend einer in diesen Ebenen gelegenen Geraden auffinden, wo man alsdann durch denselben nur eine Parallele zur Bildflächtrace zu ziehen haben wird.

Fig. 27.



Ist demnach E_b (Fig. 28) die Bildflächtrace irgend einer solchen Ebene, und (p, p') der dieselbe bestimmende Punkt, so liegt offenbar die Verbindungslinie dieses Punktes mit irgend einem Punkte d, d' der Bildflächtrace E_b, d. i. l, l' in dieser Ebene, und die durch den auf bekannte Art bestimmten Verschwindungspunkt v zu E_b gezogene Parallele E_v, gibt die verlangte Verschwindungslinie an.

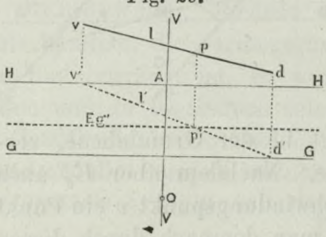
Fig. 28.



Endlich haben wir noch Ebenen zu betrachten, die keine Bildflächtrace und demnach auch keine Verschwindungslinie besitzen, also zur Bildfläche parallel sind.

Es sei nun E'_g (Fig. 29) die Perspektive der Grundflächtrace einer solchen Ebene, so ist, nach dem früher Bemerkten, nur ein in dieser Ebene gelegener Punkt darzustellen und zu bestimmen.

Fig. 29.



Da nun aber ein jeder in dieser Ebene befindliche Punkt seine Grundflächprojektion in der Grundflächtrace derselben haben muss, so ist klar, dass man die Perspektive p eines solchen Punktes beliebig wählen kann, die Perspektive seiner Grundflächprojektion p' hingegen in E'_g angenommen werden muss.

Zur Bestimmung dieses Punktes hat man bloss das bekannte Verfahren anzuwenden, nämlich eine Linie (l, l') durch denselben zu ziehen und ihren Durchschnittspunkt d, so wie den Verschwindungspunkt v anzugeben, um die verlangte Ebene, welche parallel zur Bildfläche sein soll, darzustellen.

Bemerkung. Aus dem hier Angeführten ist auch ersichtlich, wie man sich zu benehmen hätte, wenn die eben behandelten Aufgaben, in umgekehrter Weise gestellt, zu lösen wären. Wir wollen uns aber damit nicht weiter beschäftigen, da es eine blosse Wiederholung des bereits Erörterten wäre.

Die unter (4.) gestellte Aufgabe ist bereits theilweise in (1.) gelöst, doch werden wir in der Folge nochmals auf dieselbe zurückkommen.

Kapitel III.
Verschiedene Aufgaben.

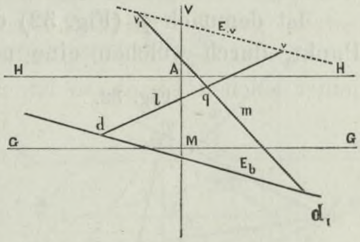
§. 16.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt gegeben, man soll durch denselben irgend eine bestimmte Linie ziehen.

Lösung. Ist p (Fig. 30) die Perspektive dieses Punktes, zu dessen Bestimmung die Gerade l, begränzt durch d und v, angenommen ist, so muss offenbar die Perspektive m einer durch denselben gehenden Geraden durch p gezogen werden, und es handelt sich bloss um die Bestimmung ihres Durchschnittes mit der Bildebene und um die Angabe ihres Verschwindungspunktes.

Fig. 30.



Sind nun für die Lage der zu ziehenden Geraden keinerlei Bedingungen vorgeschrieben, so kann man einen dieser Punkte ganz beliebig wählen. Gewöhnlich wird es der Verschwindungspunkt sein, bei dessen Annahme man jedoch das in §. 7 Gesagte zu berücksichtigen haben wird.

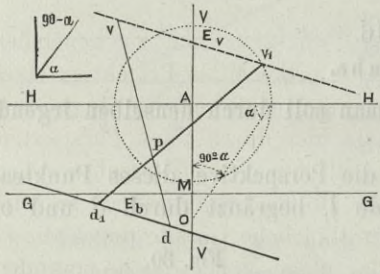
Ist v angenommen, so ergibt sich der Durchstosspunkt durch folgende Betrachtung:

Es liegen nämlich die beiden Linien l und m in einer Ebene, deren Verschwindungslinie E_v die beiden Punkte v und v_1 in sich enthält, und deren Bildflächtrace E_b, durch den Punkt d gehend, parallel zu E_v sein muss. Der Punkt d_1, in welchem E_b die Perspektive m trifft, liegt offenbar in der gezogenen Geraden und in der Bildebene, folglich ist er ihr Durchschnittspunkt. Wollte man d_1 annehmen, so ist leicht einzusehen, wie man sich bei der Bestimmung des Verschwindungspunktes v_1 zu benehmen hätte.

Für Linien, die parallel zur Bildfläche sein sollen, ist weder der Verschwindungspunkt noch der Durchschnittspunkt anzunehmen, da beide in unendlicher Entfernung liegen, und dieselben schon durch den gegebenen Punkt bestimmt sind.

Linien, die einen bestimmten Winkel α (Fig. 31) mit der Bildebene einschliessen sollen, haben den Verschwindungspunkt v_1 in der Peripherie des entsprechenden Verschwindungskreises.

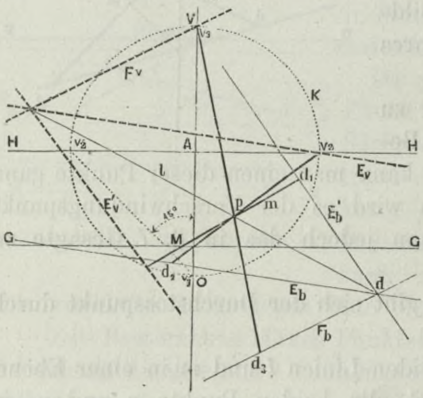
Fig. 31.



Ist $\alpha = 45^0$, so fällt der Verschwindungspunkt in einen Distanzpunkt des Distanzkreises; und zwar für die zur Horizontalebene parallelen Linien in denjenigen, der in der Horizontlinie liegt, und für die zur Vertikalebene Parallelen in die in der Vertikallinie gelegenen Punkte des Distanzkreises.

Ist demnach p (Fig. 32) der durch die Gerade l_d^v bestimmte Punkt, durch welchen eine unter 45^0 gegen die Bildfläche geneigte Gerade gelegt werden soll, so ziehe man mit der Augdistanz als Halbmesser aus A den Distanzkreis K, welcher die Horizontslinie in v_2, v'_2, die Vertikallinie in v_3, v'_3 schneidet.

Fig. 32.



Soll die zu ziehende Gerade horizontal sein, so ist v_2 oder v'_2; soll sie hingegen vertikal sein, so ist v_3 oder v'_3 als deren Verschwindungspunkt anzunehmen, und mit p zu verbinden. Die zugehörigen Durchstosspunkte erhält man auf die oben angegebene Weise, wie dies auch in Fig. 32 bei den Geraden v_2, p, d_2, v_3, p, d_3, so wie bei der beliebig gewählten Geraden v_1, p, d_1 durchgeführt erscheint.

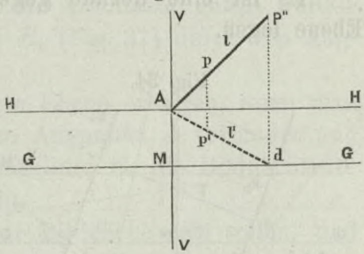
Bemerkung 1. Sollte die Linie, die durch den gegebenen Punkt gelegt werden soll, verlängert durch den Gesichtspunkt gehen, so braucht man den Verschwindungspunkt v_1 und den Durchschnittspunkt d_1 nicht mehr zu ermitteln, indem diese Punkte mit p zusammenfallen.

Bemerkung 2. In dem Falle, wo durch den gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen ist, die auf der Bildebene senkrecht steht, ist der Durchschnittspunkt d_1 derselben nichts anderes, als die orthogonale Projektion dieses Punktes auf der Bildebene. Wir können demnach diesen Durchschnittspunkt d_1 geeigneter mit P'' bezeichnen, da wir den im Raume gelegenen Punkt, dessen Perspektive p ist, P nennen.

Es ist sonach klar geworden, wie man sich zu benehmen hat, wenn es sich darum handelt, die orthogonale Projektion eines Punktes aufzufinden, der in einer gegebenen Geraden liegt.

Soll man aber für einen Punkt, der durch seine Perspektive und die Perspektive seiner Grundflächprojektion gegeben wäre, die orthogonale Projektion auf die Bildfläche auffinden, so wird es nicht nöthig sein, zuerst eine willkürliche Gerade durch diesen Punkt zu ziehen, um alsdann das obige Verfahren anzuwenden, sondern man wird sogleich durch den gegebenen Punkt (p, p') (Fig. 33) eine Linie (l, l') legen, die als projecirende Gerade zur Bildfläche erscheint, für welche also die Perspektive l und die Perspektive ihrer Grundflächprojektion l' im Augpunkte verschwinden.

Fig. 33.



Der auf bekannte Art ermittelte Durchschnittspunkt P'' mit der Bildebene gibt alsdann die verlangte orthogonale Projektion.

Aus dieser Betrachtung geht das schon oben Erwähnte, dass nämlich ein Punkt P durch seine Perspektive p und durch die orthogonale Projektion P'' auf die Bildebene bestimmt werden kann, hervor.

Es ist aber klar, dass die Linie $P''A$ als Perspektive einer durch den Punkt P gehenden Geraden auch p in sich enthalten müsse, und dass man daher, wenn es sich um die Annahme eines Punktes handelt, der durch seine Perspektive p und die orthogonale Projektion P'' bestimmt sein soll, das eine nicht unabhängig von dem anderen wählen könne, sondern dass immer A, p und P'' in einer Geraden enthalten sein müssen.

§. 17.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt gegeben, man soll durch denselben irgend eine Ebene legen.

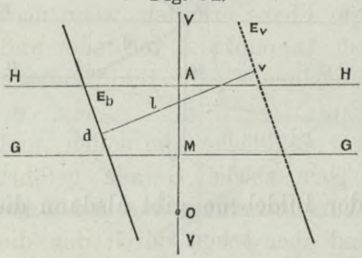
Zieht man durch den Punkt irgend eine Gerade, und legt durch dieselbe eine Ebene, so wird diese auch den Punkt in sich enthalten, und wir werden demnach unmittelbar zur Lösung der folgenden Aufgabe übergehen können.

§. 18.

Aufgabe.

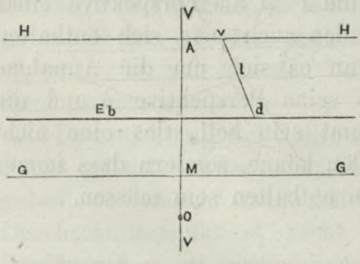
Es ist eine Gerade gegeben, man soll durch dieselbe eine Ebene legen.

Fig. 34.



Lösung. Bezeichnet l (Fig. 34) die Perspektive, d den Durchschnitts- und v den Verschwindungspunkt dieser gegebenen Geraden, so ist klar, dass die Bildflächtrace E_b einer durch diese Gerade gelegten Ebene durch d, und die Verschwindungslinie E_v derselben durch v gehen muss. Ist für die Lage der zu legenden Ebene nichts vorgeschrieben, so wird man E_b oder E_v beliebig wählen können, weil durch eine Gerade die Ebene nicht vollkommen bestimmt ist, in jedem andern Falle aber wird E_v mit Beachtung des in §. 8 Gesagten anzunehmen sein, und zwar:

Fig. 35.



1. Für eine horizontale Ebene (Fig. 35), die jedoch nur dann gelegt werden kann, wenn die Linie selbst horizontal ist, ihr Verschwindungspunkt v also in der Horizontlinie liegt, gibt die Horizontslinie die Verschwindungslinie E_v an.

2. Für die zur Grundlinie senkrecht stehenden Ebenen (Fig. 36), welche nur durch Gerade gelegt werden können, deren Verschwindungspunkt in der Vertikallinie liegt, liefert die Vertikallinie die Verschwindungslinie E_v.

Fig. 36.

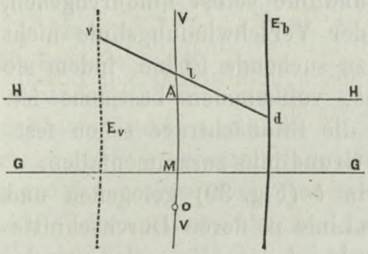
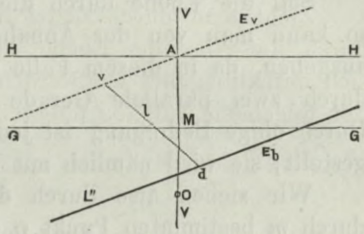


Fig. 37.



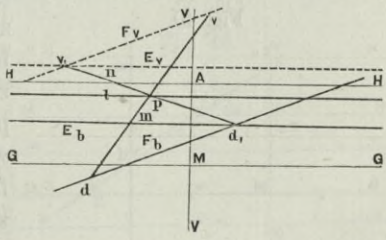
3. Für Ebenen, die senkrecht zur Bildfläche gelegt werden sollen, muss dieVerschwindungslinie E_v (Fig. 37) durch den Augpunkt gehen.

Man wird demnach die verlangte Ebene erhalten, wenn man den Verschwindungspunkt v mit dem Augpunkt A verbindet und zu der so gefundenen Verschwindungslinie E_v die Bildflächtrace E_b durch den Punkt d parallel zieht.

4. Für Ebenen, die parallel zur Bildfläche sein sollen, und die selbstverständlich nur durch eben solche Gerade geführt werden können, lässt sich keine Verschwindungslinie und keine Durchschnittslinie angeben. Sie sind aber schon durch den die gegebene Gerade l bestimmenden Punkt p fixirt.

5. Ist die gegebene Gerade L (Fig. 38) parallel zur Bildebene, so müssen die Bildflächtracen und Verschwindungslinien aller durchgelegten Ebenen parallel zur Perspektive l dieser Geraden sein.

Fig. 38.



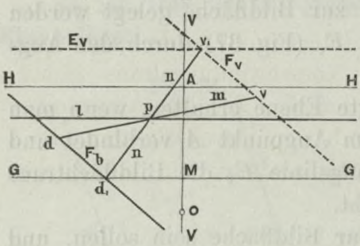
Bei angenommener Verschwindungslinie E_v wird man durch den, die gegebene Gerade l bestimmenden, auf irgend einer Geraden m gelegenen Punkt p, bloss eine Linie n zu ziehen haben, deren Verschwindungspunkt v_1 in E_v angenommen ist. Ihr Durchschnittspunkt d_1 mit der Bildebene wird auf die bekannte Art, nämlich vermittelst der durch m und n hindurchgehenden Ebene (F_b, F_v) bestimmt, da E_b parallel zu E_v sein und durch d_1 hindurchgehen muss.

Würde man umgekehrt die Bildflächtrace E_b annehmen, so wäre das Verfahren zur Bestimmung von E_v dem vorhergehenden ganz ähnlich.

Soll die Ebene durch die Grundlinie selbst hindurchgehen, so kann man von der Annahme der Verschwindungslinie nicht ausgehen, da in diesem Falle die zu suchende Ebene, indem sie durch zwei parallele Gerade geht, vollkommen bestimmt ist. Durch obige Bedingung ist jedoch die Bildflächtrace schon festgestellt; sie wird nämlich mit der Grundlinie zusammenfallen.

Wir ziehen also durch den in l (Fig. 39) gelegenen und durch m bestimmten Punkt p eine Linie n, deren Durchschnittspunkt d_1 in E_b, also in der Grundlinie anzunehmen ist, und bestimmen den ihr entsprechenden Verschwindungspunkt v_1 wieder durch eine die Linien m und n in sich enthaltende Ebene (F_b, F_v). Durch diesen Punkt v_1 ist dann E_v parallel zu E_b zu ziehen.

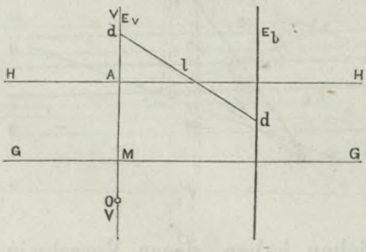
Fig. 39.



6. Soll die Ebene, welche durch eine gegebene Gerade gelegt werden soll, parallel zur Grundlinie sein, so muss auch die Verschwindungslinie und Bildflächtrace derselben parallel zur Grundlinie werden, daher man dieselben beziehungsweise durch den Verschwindungs- und Durchstosspunkt der gegebenen Geraden parallel zur Grundlinie zu ziehen haben wird.

Wäre die gegebene Gerade selbst parallel zur Grundlinie, so ist die zu suchende Ebene unbestimmt, und deren Verschwindungslinie kann somit, wie bereits gezeigt, in beliebiger Entfernung parallel zur Grundlinie gezogen werden, wodurch jedoch gleichfalls ihre Bildflächtrace fixirt erscheint.

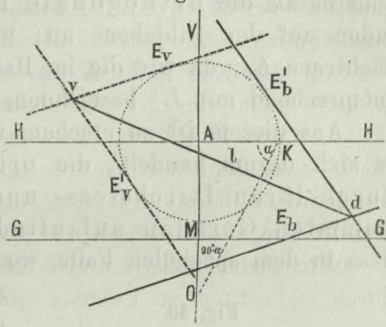
Fig. 40.



7. Für Ebenen, die bloss auf der Grundebene senkrecht stehen (Fig. 40) sollen, ist die Verschwindungslinie und Bildflächtrace parallel zur Vertikallinie anzunehmen.

8. Für Ebenen, die einen bestimmten Neigungswinkel α (Fig. 41) mit der Bildebene einschliessen sollen, müssen, wie bekannt, die Verschwindungslinien Tangenten an den Verschwindungskreis der ebenfalls unter den Winkel α geneigten Linien sein.

Fig. 41.

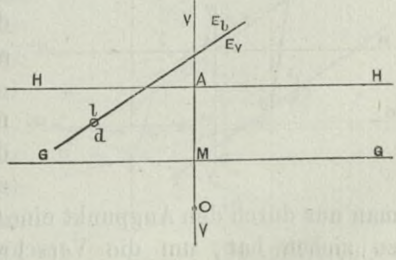


Man wird daher bloss den Halbmesser AK dieses Verschwindungskreises aus dem gegebenen Winkel α und der Augdistanz AO ermitteln (indem man das rechtwinklige Dreieck AOK derart verzeichnet, dass die eine Kathete AO gleich der Augdistanz und der anliegende Winkel $AOK = 90 - \alpha$ genommen wird), und aus dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden l die Tangenten an den Verschwindungskreis ziehen, wodurch man die Verschwindungslinien E_v, E'_v (im Allgemeinen zwei) erhält. Die zu denselben durch den Durchschnittspunkt d gezogenen parallelen Geraden geben alsdann die bezüglichen Bildflächtracen E_b, E'_b.

Damit aber das hier Angeführte möglich sei, darf der Neigungswinkel α der zu legenden Ebenen nicht kleiner sein, als jener der gegebenen Geraden l, was sich daraus zu erkennen gibt, dass bei kleinerem Neigungswinkel der Verschwindungspunkt v der Geraden l innerhalb des entsprechenden Verschwindungskreises zu liegen kömmt, man daher keine Tangenten an denselben ziehen kann, und daher eine den Annahmen entsprechende Lösung unmöglich ist.

Bemerkung 1. Für eine durch den Gesichtspunkt hindurchgehende Linie l (Fig. 42), die als ein Punkt sich darstellt, mit welchem der Durchschnitts- und der Verschwindungspunkt zusammenfällt, fallen auch die Bildflächtrace E_b und die Verschwindungslinie E_v in eine durch l gehende Linie.

Fig. 42.

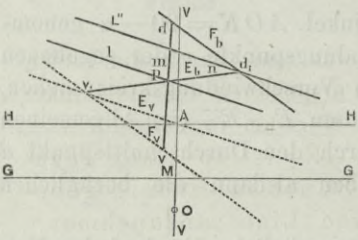


Bemerkung 2. Als wir durch eine Gerade L, welcher

die Perspektive l, der Durchschnittspunkt d und der Verschwindungspunkt v angehörten, eine zur Bildebene *senkrecht stehende Ebene* legten, gab die erhaltene Bildflächtrace E_b nichts anderes als die *orthogonale Projektion* der gegebenen Geraden auf der Bildebene an; wir können demnach diese Bildflächtrace E_b, da wir die im Raume gelegene Gerade L nennen, entsprechend mit L'' bezeichnen.

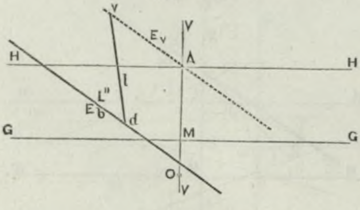
Aus diesem ist zu ersehen, wie man zu verfahren hat, wenn es sich darum handelt, die *orthogonale Projektion einer durch ihren Durchstoss- und Verschwindungspunkt bestimmten Geraden aufzufinden.* Gleichzeitig sei bemerkt, dass in dem speciellen Falle, wo die gegebene Gerade l (Fig. 43) zur Bildfläche parallel ist, und wo demnach zu ihrer Bestimmung noch ein Punkt p auf einer Geraden m angegeben ist, auf eine ganz ähnliche Art die Bildflächtrace und demnach auch die orthogonale Projektion zu bestimmen sei, wie es für die zur Grundlinie parallelen Ebenen gezeigt wurde. Man wird in der durch den Augpunkt parallel zur Perspektive l gezogenen Verschwindungslinie, den Verschwindungspunkt v_1 für eine durch p gezogene Gerade n annehmen, ihren Durchschnittspunkt d_1 mittelst der durch m und n gelegten Ebene F_b, F_v bestimmen, und durch denselben E_b, oder was dasselbe ist, L'' parallel zu E_v ziehen.

Fig. 43.



Bemerkung 3. Wir haben schon früher erwähnt, dass man durch die Perspektive l und die orthogonale Projektion L'' auf der Bildebene eine Gerade L bestimmen könne.

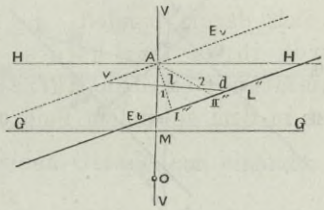
Fig. 44.



Aus diesen beiden Bestimmungsstücken kann auch einfach der Verschwindungs- und Durchstosspunkt ermittelt werden, indem man nur durch den Augpunkt eine Gerade Av parallel zu L'' (Fig. 44) zu ziehen hat, um die Verschwindungslinie E_v einer auf der Bildfläche senkrecht stehenden Ebene zu erhalten, welche L'' zu ihrer Bildflächtrace E_b hat, und durch die Gerade L hindurchgeht; die Punkte, in welchen l die Tracen E_b und E_v durchschneidet, geben den Durchschnittspunkt d und den Verschwindungspunkt v der Linie L an.

Bemerkung 4. Hätte man die orthogonale Projektion einer in I und II begränzten Geraden L (Fig. 45), die durch ihre Perspektive l, durch ihren Durchschnittspunkt d, den Verschwindungspunkt v und durch die Perspektiven der Gränzpunkte, d. i. *1* und *2*, gegeben wäre, zu bestimmen, so müsste man noch auf der Bildflächtrace E_b der zur Bildfläche projecirenden Ebene, d. i. auf der orthogonalen Projektion L'', die orthogonale Projektion I'' und II'' der Gränzpunkte angeben, was man durch die Linien $A1$ und $A2$ erhält, indem diese die Perspektiven der die Punkte I und II zur Bildebene projecirenden Geraden vorstellen.

Fig. 45.



Bemerkung 5. Die Aufgaben: „Es ist in einer gegebenen Linie ein Punkt“, und: „Es ist in einer gegebenen Ebene ein Punkt oder eine Linie anzunehmen“, können umgekehrt der oben angeführten Aufgabe mit Leichtigkeit gelöst werden.

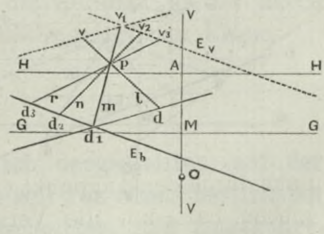
§. 19.

Aufgabe.

„Es ist ein Punkt gegeben, man soll durch denselben zwei oder mehrere sich schneidende Linien ziehen.“

Lösung. Nachdem bekannt ist, wie durch einen gegebenen Punkt eine Linie gezogen werden kann, so wird man durch Wiederholung dieses Verfahrens auch eine beliebige Anzahl solcher Linien erhalten können.

Fig. 46.



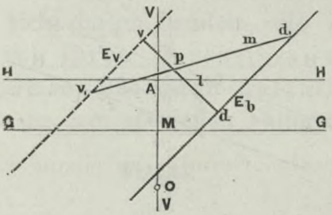
Einfach erhält man (Fig. 46) ein System solcher Linien (die sämmtlich in einer Ebene liegen), wenn man durch die den Punkt p bestimmende Gerade l eine beliebige Ebene legt, und sodann durch p in dieser

Ebene die verlangten Geraden zieht. Jede solche Gerade lässt sich wieder, wie l, zu gleichem Zwecke weiter benützen.

Auf gleiche Weise kann man untersuchen, ob sich zwei gegebene Linien durchschneiden.

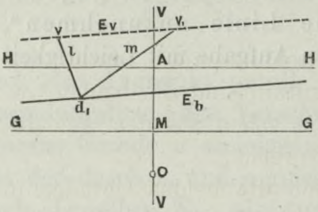
Es sei l (Fig. 47) eine Gerade, die ihren Durchschnittspunkt in d, und ihren Verschwindungspunkt in v hat, und m die andere, bei welcher d_1 und v_1 die gleichnamigen Punkte bezeichnen, so ist klar, dass nur dann ein Durchschneiden der beiden Geraden eintreten kann, wenn sie in einer Ebene gelegen sind, wenn also die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte d und d_1 und der Verschwindungspunkte v und v_1 zu einander parallel sind. Tritt dieses wirklich ein, so ist p das Bild des Durchschnittspunktes, der hier durch zwei gerade Linien bestimmt erscheint.

Fig. 47.



Bemerkung. Ist E_b die Bildflächtrace und E_v die Verschwindungslinie der durch zwei Gerade hindurchgelegten Ebene, so kann sich der Durchschnittspunkt p der Perspektiven der gegebenen Geraden l und m folgends ergeben:

Fig. 48.



a) Es kann p zwischen E_b und E_v fallen, wie sich dieses in Fig. 47 ergab;

b) es kann p in E_b selbst gelegen sein (Fig. 48);

c) es kann p in E_v zu liegen kommen (Fig. 49);

Fig. 49.

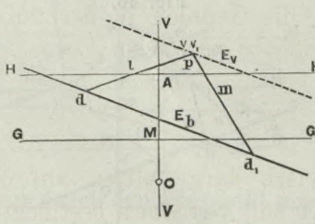
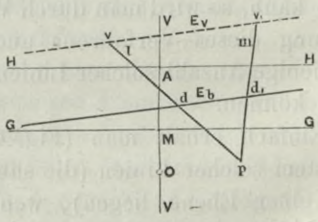


Fig. 50.



d) es kann p diesseits, d. i. vor E_b (Fig. 50), oder

e) es kann p jenseits, d. i. hinter E_v, fallen (Fig. 51); und

f) es kann p in unendlicher Entfernung sich ergeben (Fig. 52),

Fig. 51.

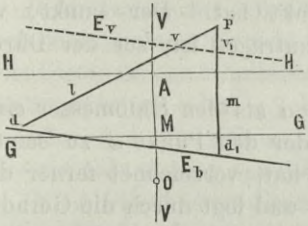
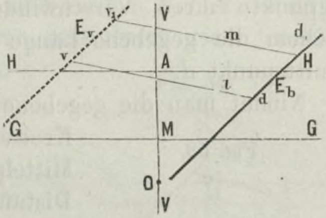


Fig. 52.



d. h. es können die Perspektiven der beiden Geraden zu einander parallel sein.

Nach dem in §. 13, Bem. 2, Gesagten wird es leicht sein, die Lage des Durchschnittspunktes im Raume, in allen hier angeführten Fällen anzugeben, und zwar:

in dem Falle a) liegt derselbe hinter der Bildfläche in einer endlichen Entfernung;

in dem Falle b) durchschneiden sich die Geraden in der Bildfläche;

in dem Falle c) liegt der Durchschnittspunkt hinter der Bildfläche in unendlicher Entfernung, mithin sind die beiden Geraden zu einander parallel, was übrigens schon aus dem gemeinschaftlichen Verschwindungspunkte hervorgeht;

in dem Falle d) durchschneiden sich die beiden Geraden in dem, zwischen der Bildfläche und einer durch den Gesichtspunkt zu derselben parallel gelegten Ebene, enthaltenen Raume;

in dem Falle e) liegt der Durchschnittspunkt vor der Bildfläche, aber ausserhalb dieses Raumes, somit vor der durch den Gesichtspunkt zur Bildfläche parallel gelegten Ebene; und

im Falle f) durchschneiden sich die Geraden in der durch den Gesichtspunkt gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene.

§. 20.

Aufgabe.

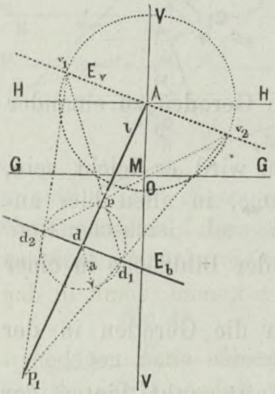
Auf einer gegebenen, perspektivisch dargestellten, auf der Bildfläche senkrecht stehenden Geraden soll von einem bestimmten Punkte aus eine gegebene Länge abgeschnitten, und umgekehrt, für eine in zwei Punkten begränzte Gerade soll die wahre Länge

des zwischen diesen Punkten enthaltenen Theiles aufgefunden werden.

Lösung a. Es sei d (Fig. 53) der Durchschnittspunkt und l die Perspektive der besagten Geraden, welche als solche im Augpunkte ihren Verschwindungspunkt hat. Der Punkt, von welchem die gegebene Länge a aufzutragen ist, sei der Durchschnittspunkt d.

Nimmt man die gegebene Länge a als den Halbmesser eines Kreises an, der den Punkt d zu seinem Mittelpunkte hat, verzeichnet ferner den Distanzkreis, und legt durch die Gerade l irgend eine Ebene E_b, E_v, welche selbstverständlich nur eine zur Bildfläche senkrechte sein kann, so ist klar, dass wenn man die Durchschnittspunkte d_1 und d_2 in welchen die Bildflächtrace E_b von dem aus d beschriebenen Kreise geschnitten wird, mit jenen Punkten v_1 und v_2, in welchen die Verschwindungslinie E_v den Distanzkreis trifft, verbindet, die hier möglichen vier Verbindungslinien $d_1\,v_1$, $d_2\,v_2$, $d_1\,v_2$ und $d_2\,v_1$, die Perspektiven solcher unter 45⁰ gegen die Bildfläche geneigten Linien angeben, welche die gegebene Gerade l in den Punkten p und p_1 durchschneiden, da sie mit derselben in einerlei Ebene liegen.

Fig. 53.

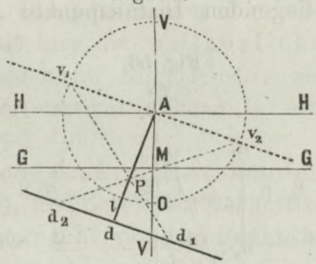


Betrachtet man nun die derart entstandenen und mit einander congruenten Dreiecke, deren Perspektiven durch $d_1\,d\,p$, $d_2\,d\,p$, $d_1\,d\,p_1$ und $d_2\,d\,p_1$ angegeben werden, so sind sie nicht nur rechtwinklig, sondern auch gleichschenklig; woraus folgt, dass die in der Perspektive durch d und p und durch d und p_1 begränzten Stücke der gegebenen Geraden, eine dem Halbmesser des aus d beschriebenen Kreises, oder den andern Katheten $d\,d_1 = d\,d_2 = a$ gleiche Länge besitzen müssen.

Auf diese Art ist man also im Stande auf der Geraden l Punkte, wie p und p_1, anzugeben, die von dem Durchschnittspunkte d eine der gegebenen abzuschneidenden Länge gleiche Entfernung haben. Von diesen Punkten, welche sich immer paarweise ergeben, indem der eine p hinter, und der andere p_1 vor die Bildfläche zu liegen kommt, wird man im Allgemeinen bloss die ersteren benützen.

Aus dem hier Gesagten ersieht man, wie man auch umgekehrt für eine auf der Bildfläche senkrechte, in ihrer Perspektive l durch d und p begränzte Gerade, die wahre Länge ermitteln kann. Man braucht nämlich bloss den Distanzkreis zu verzeichnen, eine Ebene E_b, E_v (Fig. 54) durch die gegebene Gerade zu legen und durch einen, mittelst E_v im Distanzkreise erhaltenen Durchschnittspunkt v_1 oder v_2 die Linie $v_1 p$ oder $v_2 p$ zu ziehen, wodurch sich der Punkt d_1 oder d_2 auf E_b ergibt.

Fig. 54.

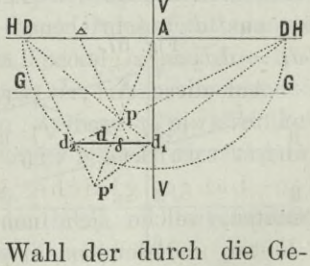


Der Abstand eines dieser Punkte von dem Punkte d, also dd_1 oder dd_2 gibt dann die verlangte wahre Länge des in der Perspektive durch d und p begränzten Stückes der gegebenen Geraden an.

Es entstehen auch hier rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke, deren eine dem zu bestimmenden Stücke gleiche Seite wie dd_1 oder dd_2 in die Bildfläche zu liegen kommt, somit in der wahren Grösse erscheint.

Bemerkung 1. Sowohl beim Abschneiden einer gegebenen Länge, als auch bei der Bestimmung der wahren Grösse einer gegebenen Geraden, wird es nicht nöthig sein, die oben angeführten Kreise ganz zu ziehen; sondern es wird im ersteren Falle, Fig. 53, hinreichen, einen in der Bildflächtrace E_b und einen in der Verschwindungslinie E_v gelegenen Punkt derselben zu bestimmen. Man wird, nachdem die Ebene E_b, E_v hindurchgelegt ist, mit Zuhilfenahme der bekannten Halbmesser, bloss die Punkte d_1, v_1 oder d_2, v_2 oder auch d_1, v_2 oder d_2, v_1 zu bestimmen haben, je nachdem das abzuschneidende Stück hinter oder vor der Bildebene gelegen sein soll.

Fig. 55.

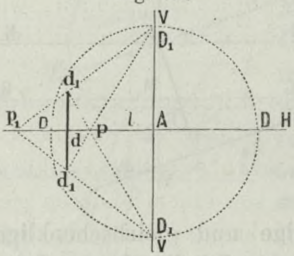


Im zweiten Falle, Fig. 54, dagegen wird es genügen, einen in der Verschwindungslinie gelegenen Punkt des Distanzkreises mittelst der Augdistanz zu ermitteln, d. i. v_1 oder v_2 anzugeben.

Bemerkung 2. Da zumeist die Wahl der durch die Gerade L (Fig. 55) zu legenden Ebene E_b, E_v ganz beliebig ist, wird man sie in den meisten Fällen am zweckmässigsten horizontal legen, wo sodann die in der Horizontslinie liegenden Punkte D des Distanzkreises (Distanzpunkte) zu benützen sind, und die gegebene Länge auf einer zur Horizontslinie parallelen, durch den Durchstosspunkt d gehenden Geraden $d_1 d_2$ aufzutragen sein wird.

Mit gleichem Vortheil könnten auch die in der Vertikallinie liegenden Distanzpunkte D_1 (Fig. 56) benützt werden, welches sogar in dem Falle nothwendig sein wird, wo die gegebene, auf der Bildfläche senkrechte Gerade in der Horizontsebene liegt; denn in diesem Falle wird ihr Bild l die Horizontslinie sein, und bei Anwendung der letzterwähnten Methode würden alle Construktionslinien in eine Gerade DD fallen, folglich nicht benützbar sein.

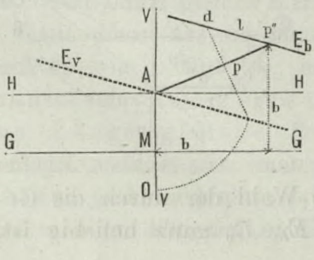
Fig. 56.



Wendet man daher $D_1 D_1$ an, so ist auf der im Durchschnittspunkte d errichteten Vertikalen $dd_1 = dd_2 = a$ aufzutragen, und die weitere Construktion wie früher durchzuführen, woraus sich die Punkte p und p_1 in der verlangten Entfernung ergeben.

Bemerkung 3. Ein Fall, der häufig vorkömmt, ist der, dass die Distanzpunkte D, D oder D_1, D_1 (Fig. 55) ausserhalb der Zeichnungsfläche zu liegen kommen. Man kann sich dann dadurch helfen, dass man dieselbe Construktion, jedoch mit einem aliquoten Theile der Distanz und der Länge des aufzutragenden Stückes durchführt; denn ist $A\Delta = \frac{1}{n} AD$ und $d\delta = \frac{1}{n} dd_1$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ADp und pdd_1, so wie aus den Dreiecken $A\Delta p$ und $p\delta d$, dass die Gerade $\Delta\delta$ auf dA dasselbe Stück dp abschneidet. Ausführlicher wird hierüber in später folgenden Paragraphen gesprochen werden.

Fig. 57.

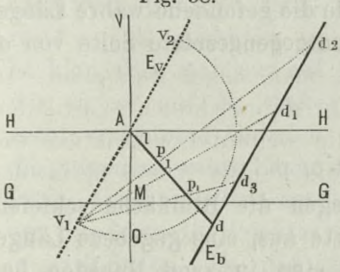


Bemerkung 4. Denkt man sich, wie schon früher erwähnt wurde, ein Coordinatensystem, dessen Ebenen die Grund-, Bild- und Vertikalebene bilden, und bei welchem der Grundpunkt M (Fig. 57) der An-

fangspunkt ist, so wird man leicht, nach dem oben Gezeigten, jeden Punkt P, für welchen man die zugehörige Breite b, Länge l und Höhe h kennt, perspektivisch darstellen können, und zwar wird man, nachdem vermittelst b und h die orthogonale Projektion des gegebenen Punktes auf der Bildebene, d. i. p'' bestimmt wurde, in diesem Punkte p'' eine Senkrechte $p''A$ auf die Bildebene zu errichten haben, und auf derselben die gegebene Länge l abschneiden, wodurch man in p die Perspektive von P erhält. Zum Abschneiden dieser Länge l wurde hier die willkürliche Ebene $E_b\, E_v$ benützt; man wird jedoch im Allgemeinen, wie bereits bemerkt, eine horizontale oder vertikale Ebene in Anwendung bringen.

b) Soll man auf einer zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, deren Perspektive l (Fig. 58), und deren Durchschnittspunkt d ist, nicht von dem Punkte d aus, sondern von einem anderen gegebenen Punkte, z. B. *1*, eine bestimmte Länge abschneiden, so kann dieses folgends geschehen. Nachdem man die wahre Länge dd_1 des perspektivisch dargestellten Stückes $d\,1$ mittelst einer durchgelegten Ebene E_b, E_v und mittelst eines in E_v gelegenen Distanzpunktes v_1 ermittelt hat, trage man von d_1 auf E_b die abzuschneidende Länge auf, und zwar: bei einem links angenommenen Distanzpunkte, wie es hier mit v_1 der Fall ist, entweder rechts oder links von d_1, je nachdem das abzuschneidende Stück hinter oder vor dem gegebenen Punkte *1* gelegen sein soll. Auf diese Art erhält man die beiden Punkte d_2 und d_3, deren Verbindungslinien mit v_1, d. i. $d_2\,v_1$ und $d_3\,v_1$, die Perspektive l der gegebenen Geraden in p und p_1 durchschneiden. Der eine dieser Durchschnittspunkte p liegt hinter, der andere p_1 vor dem Punkte *1*, und ihre Abstände $1p$ und $1p_1$ vom Punkte *1* sind der abzuschneidenden Länge gleich; denn die Entfernungen dp und dp_1 sind beziehungsweise um die abzuschneidende Länge grösser oder kleiner, als die Entfernung $d\,1$.

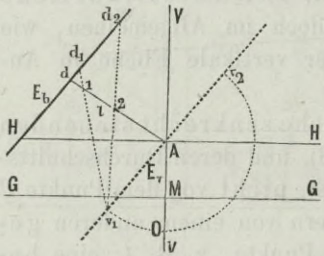
Fig. 58.



Selbstverständlich hätte man auch den in E_v rechts gelegenen Distanzpunkt v_2 zu gleichem Zwecke benützen können.

Handelt es sich um das Umgekehrte, nämlich um die Bestimmung der wahren Länge einer zur Bildebene senkrecht stehenden, dieselbe in d durchschneidenden Geraden, deren Perspektive l (Fig. 59) ist, und deren Gränzen die Punkte 1 und 2 angeben, so wird man, nachdem eine Ebene E_b, E_v durch dieselbe gelegt wurde, von einem der in E_v gelegenen Distanzpunkte v_1 die Linien $v_1 1$ und $v_1 2$ ziehen, wodurch man in E_b die Punkte d_1 und d_2 erhält, deren Abstand $d_1 d_2$ der wahren Länge des gegebenen Stückes 1, 2 gleich ist.

Fig. 59.



Dieser Abstand ist offenbar der Unterschied der wahren Länge der Stücke $d2$ und $d1$. —

Mit Benützung des zweiten in E_v gelegenen Distanzpunktes v_2 würde man auch das Gewünschte erzielen, nur würde die gefundene wahre Länge auf die entgegengesetzte Seite von d fallen.

§. 21.

Aufgabe.

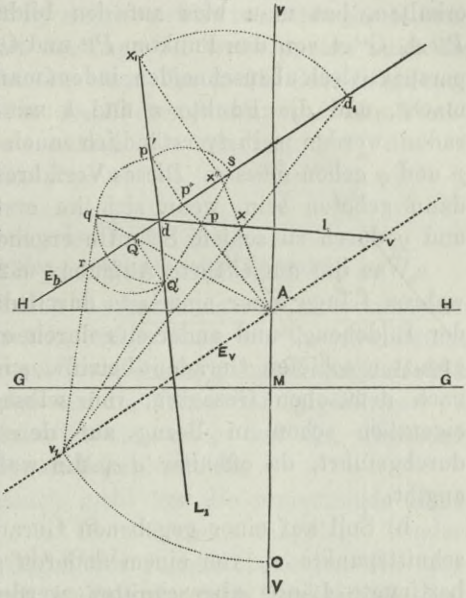
Es ist auf einer gegebenen, gegen die Bildfläche schiefen Geraden, von einem bestimmten Punkte aus, eine gegebene Länge abzuschneiden, und umgekehrt, für eine in zwei Punkten begränzte Gerade, die wahre Länge derselben aufzufinden.

a) Die Gerade L (Fig. 60) habe in l ihre Perspektive, in d den Durchschnitts- und in v den Verschwindungspunkt; es ist vom Punkte d auf derselben eine gegebene Länge a aufzutragen.

Lösung. Legt man durch die gegebene Gerade l eine dieselbe zur Bildfläche projecirende Ebene E_b, E_v, und denkt man sich diese Ebene um ihre Bildflächtrace E_b in die Bildebene umgelegt, so muss auch die gegebene Gerade in dieselbe fallen. Zur Bestimmung ihrer Lage wird, da der Punkt d während des Umlegens unverändert bleibt, nur noch nöthig sein, die Lage irgend eines in der Geraden gelegenen Punktes nach der Umlegung zu bestimmen.

Wir wählen demnach einen willkürlichen, in der gegebenen Geraden gelegenen Punkt, dessen Perspektive x sei, und bestimmen mittelst der Geraden Ax, die nichts anderes als die Perspektive der den Punkt x zur Bildebene projecirenden Geraden vorstellt, die orthogonale Projektion x'' desselben; alsdann suchen wir die wahre Länge der Geraden xx'', d. i. den Abstand des Punktes x von der Bildebene, was nach dem Vorhergehenden (Fig. 60) vermittelst einer durch xx'' hindurchgehenden, beliebig gewählten, projecirenden Ebene geschehen kann, hier aber, der Einfachheit wegen, schon durch Anwendung der Ebene E_b, E_v erreicht wurde. Nachdem nun die den Punkt x zur Bildebene projecirende Gerade auch nach dem Umlegen senkrecht auf E_b verbleibt, so ist klar, dass man nur auf der in x'' auf E_b senkrecht errichteten Geraden die gefundene wahre Länge $x''d_1$ abzuschneiden hat, um die Lage des Punktes x nach dem Umlegen, d. i. den Punkt x_1, zu finden. Es gibt nun die Verbindungslinie dx_1 die Lage der gegebenen, in die Bildfläche umgelegten Geraden, auf welcher man vom Punkte d die gegebene Länge aufzutragen hat, um denjenigen in die Bildebene umgelegten Punkt P' der gegebenen Geraden zu finden, dessen Distanz vom Punkte d der abzuschneidenden Länge gleich ist.

Fig. 60.



Bringen wir nun die Gerade wieder in ihre ursprüngliche Lage, so ist klar, dass die vom Punkte P' auf E_b gefällte Senkrechte zu ihrem Fusspunkt einen Punkt P'' haben wird, der die orthogonale Projektion des zurückgedrehten Punktes P' angeben muss. Die Perspektive dieses Punktes liegt also im Durchschnittspunkte von $P''A$ und der gegebenen Geraden l, also im Punkte p, welch letzterer die verlangte Länge abschneidet.

Dass man ausser dem Punkt p, der hinter der Bildebene liegt, noch einen zweiten vor der Bildebene gelegenen Punkt q, welcher der Bedingung der Aufgabe entspricht, auffinden kann, ist von selbst klar; man braucht nämlich ganz analog wie bei

p zu verfahren, daher zuerst Q' und dann Q'' zu bestimmen, wo man sodann mittelst AQ'' den Punkt q erhält.

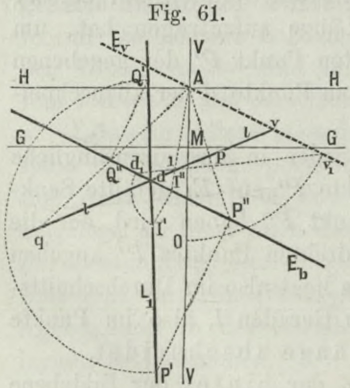
Um eine Controle für die Richtigkeit der Construktion zu erhalten, hat man blos auf den bildflächprojecirenden Geraden $P''A$, $Q''A$ von den Punkten P'' und Q'' die Länge $P'P'' = Q'Q''$ perspektivisch abzuschneiden, indem man $Q''r = Q''Q'$, $P''s = P''P'$ macht, und die Punkte r und s mit v_1 verbindet. Diese Geraden werden selbstverständlich auch durch die beiden Punkte p und q gehen müssen. Dieses Verfahren anzuwenden würde sogar dann geboten sein, wenn sich im ersteren Falle die Punkte p und q durch zu schiefe Schnitte ergeben hätten.

Was die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Bestimmung der wahren Länge einer einerseits durch den Durchschnittspunkt mit der Bildebene, und anderseits durch einen beliebigen Punkt begrenzten schiefen Geraden betrifft, so ist die Lösung derselben, nach dem oben Gesagten, von selbst einleuchtend, und wurde eigentlich schon in Bezug auf den angenommenen Punkt x durchgeführt, da offenbar dx_1 die wahre Länge des Stückes dx angibt.

b) Soll auf einer gegebenen Geraden statt von dem Durchschnittspunkte d, von einem anderen gegebenen Punkte 1, eine bestimmte Länge abgeschnitten werden, so ist folgender Weg einzuschlagen.

Nachdem man wieder die projecirende Ebene $E_b\,E_v$ (Fig. 61) durch die Gerade l_d^v gelegt, drehe man dieselbe um E_b in die Bildfläche, wodurch der Punkt 1 nach $1'$ zu liegen kömmt, und trage auf der umgelegten Geraden vom Punkte $1'$ die abzuschneidende Länge auf. Hiemit werden die Punkte P' und Q' erhalten, welche, indem die Gerade durch das Zurückdrehen die ursprüngliche Lage annimmt, ihre orthogonalen Projektionen in P'' und Q'' besitzen, und deren Perspektiven in den durch die Verbindungslinien AP'' und AQ'' erhaltenen Punkten p und q der Geraden l sich vorfinden. Dass die Punkte p und q diejenigen sind, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen, und dass der

Fig. 61.



eine hinter und der andere vor dem Punkte *1* gelegen ist, erhellt von selbst.

Bei der Bestimmung der wahren Länge einer durch zwei Punkte *1* und *p* (Fig. 61) begrenzten Geraden, wird man sich auf bekannte Art die Lage der Gränzpunkte nach dem Umlegen um die Bildflächtrace einer durch die Gerade gelegten bildflächprojecirenden Ebene $E_b E_v$ ermitteln, d. i. die Punkte I' und P' bestimmen, wo sodann der Abstand $I' P'$ die verlangte wahre Länge angibt.

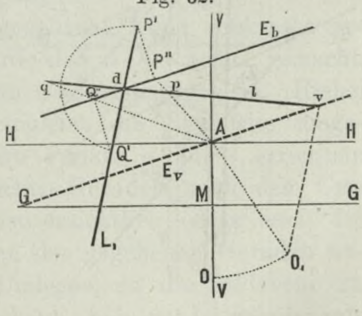
§. 22.

Andere Lösung der vorhergehenden Aufgabe.

Die in §. 21 angeführten Aufgaben lassen eine einfachere Lösung zu, wenn man berücksichtigt, dass die Verschwindungslinie E_v der durch die gegebene Gerade gelegten projecirenden Ebene $E_b E_v$ nichts anderes, als die Trace der zugehörigen Parallelebene vorstellt, welche in sich auch den der gegebenen Geraden entsprechenden Parallelstrahl enthält.

Denkt man sich demnach nicht nur die projecirende Ebene um ihre Bildflächtrace E_b in die Bildebene umgelegt, sondern nimmt man auch das Umlegen der Parallelebene um die zugehörige Trace E_v vor, jedoch so, dass der Sinn der Drehung beim Umlegen der beiden Ebenen derselbe bleibt, so muss offenbar der umgelegte Parallelstrahl zu der umgelegten Geraden parallel sein. Da nun die Lage des umgelegten Parallelstrahles sehr leicht aufzufinden ist, indem man nur den umgelegten Gesichtspunkt (der auch in der Parallelebene enthalten ist) mit dem Verschwindungspunkte der gegebenen Geraden zu verbinden hat, so ist ersichtlich, dass, um die Lage der umgelegten Geraden zu finden, es nur nöthig sei, durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden eine Parallele zur Richtung des umgelegten Parallelstrahles zu ziehen. Was das Umlegen des Gesichtspunktes betrifft, so bemerke man, dass blos im Augpunkte *A* (Fig. 62) auf die Verschwindungslinie E_v der projecirenden Ebene $E_b E_v$

Fig. 62.

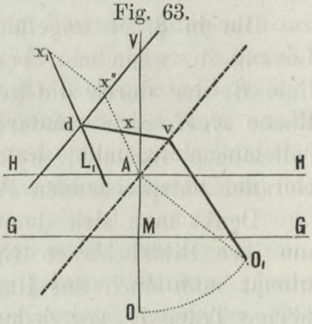


eine Senkrechte $A\,O_1$ zu errichten, und auf dieser die Augdistanz $A\,O = A\,O_1$ vom Augpunkte aus, aufzutragen ist, wodurch man unmittelbar den umgelegten Gesichtspunkt O_1, und in $O_1 v$ den umgelegten Parallelstrahl, mithin auch die Richtung der umgelegten Geraden L_1 erhält. Dieses vorausgesetzt, wird man die oben angeführten Aufgaben auch in nachfolgender Weise lösen können.

Die in §. 21, a) durchgeführte Construktion wird sich insoweit vereinfachen, als man nicht mehr die Distanz eines auf der gegebenen Geraden angenommenen Punktes x von der Bildebene zu bestimmen haben wird. (Siehe Fig. 62.)

Ebenso erfordert auch die im §. 21 angeführte umgekehrte Aufgabe nicht mehr die Bestimmung des Abstandes des zweiten Endpunktes der Geraden von der Bildebene. (Siehe Fig. 63.)

Fig. 63.



In gleicher Weise können die in §. 21, b) behandelten Aufgaben, wie Fig. 64 und Fig. 65 darthun, auf einfacherem Wege gelöst werden.

Fig. 64.

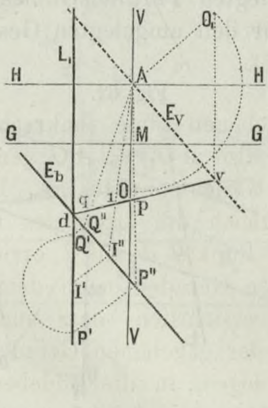
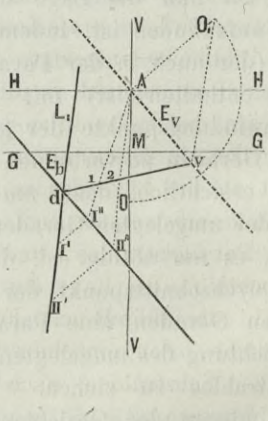


Fig. 65.



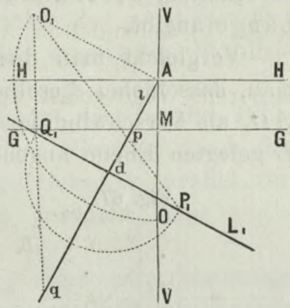
§ 23.

Dritte Lösung derselben Aufgabe.

1. Bei den angeführten Aufgaben wurde zum Behufe der Lösung derselben das Umlegen der gegebenen Geraden um die Bildflächtrace der entsprechenden projecirenden Ebene vorgenommen; man kann aber auch dasselbe erreichen, wenn man die perspektivisch projecirende Ebene der gegebenen Geraden um ihre Durchschnittslinie mit der Bildebene, welche nichts anderes als die Perspektive dieser Geraden ist, in die Bildfläche umlegt. Dieses Verfahren wird nicht nur auf schief gegen die Bildebene gerichtete Gerade, sondern auch für die auf derselben senkrecht stehenden angewendet werden können.

a) Es sei also l (Fig. 66) die Perspektive einer zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, d der Durchschnitts-, A der Verschwindungspunkt derselben, und es soll auf dieser Geraden vom Punkte d eine bestimmte Länge a abgeschnitten, oder umgekehrt, die wahre Länge eines Stückes ermittelt werden, welches einerseits von d und andererseits von einem perspektivisch bestimmten Punkte begränzt ist.

Fig. 66.



Denken wir uns, wie oben bemerkt, die perspektivisch projecirende Ebene in die Bildfläche umgelegt, so ist klar, das der Gesichtspunkt in die im Augpunkt auf der Perspektive l der gegebenen Linie senkrecht gezogene Gerade fallen müsse. Wird also $A O_1 = A O$ gemacht, so gibt O_1 die Lage des umgelegten Gesichtspunktes an. Hiebei bestimmt selbstverständlich $A O_1$ zugleich die Lage des umgelegten Parallelstrahles, und die im Punkte d auf l errichtete Senkrechte L_1 die Lage der gegebenen Geraden nach dem Umlegen in die Bildebene. Ferner ist ersichtlich, dass auch die sämmtlichen, den einzelnen Punkten der gegebenen Geraden angehörigen Sehstrahlen, nach dem Umlegen, in die Bildebene zu liegen kommen.

Dieses festgehalten, ergibt sich die Lösung der obigen Aufgaben sehr einfach; wir brauchen nämlich, um eine bestimmte

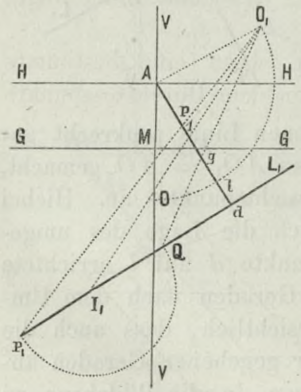
Länge $d Q_1 = d P_1$ abzuschneiden, dieselbe nur auf der umgelegten Geraden L_1 vom Punkte d aufzutragen, wodurch wir den Punkt P_1 erhalten, dessen Verbindungslinie mit O_1, d. i. $O_1 P_1$ nichts anderes als den in die Bildebene umgelegten, dem Punkte P entsprechenden Sehstrahl angibt. Dieser schneidet die Perspektive l der gegebenen Geraden im Punkte p, welcher den auf der Perspektive der Geraden gelegenen Punkt, dessen Abstand von d der gegebenen abzuschneidenden Länge gleich kommt, liefert.

Dass man auch einen zweiten, vor der Bildebene gelegenen Punkt q, welcher der Bedingung der Aufgabe entspricht, auffinden kann, erhellt von selbst.

Die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Bestimmung der wahren Länge einer begränzten Geraden, ist auf gleiche Weise zu lösen. Nur sei bemerkt, dass wenn p die Perspektive des Endpunktes des zu bestimmenden Stückes wäre, man bloss die Linie $O_1 p$ zu ziehen hätte, um vermittelst derselben auf L_1 den Punkt P_1 zu erhalten, dessen Abstand von d, d. i. $d P_1$, die verlangte Länge angibt.

Vergleicht man diese Lösung mit der ersteren, so findet man, dass hiebei dieselben Constructionslinien vorkommen, wenn $A O_1$ als Verschwindungslinie, und L_1 als Bildflächtrace der durch L gelegten Ebene angenommen wird.

Fig. 67.



b) Soll auf einer zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, nicht von ihrem Durchschnittspunkte d aus, sondern von einem gegebenen Punkte 1 eine bestimmte Länge abgeschnitten, oder umgekehrt, die wahre Länge eines in zwei beliebigen Punkten begränzten Stückes aufgefunden werden, so ergibt sich das hier anzuwendende Verfahren von selbst. In der hierher gehörigen Fig. 67 sind p und q diejenigen Punkte, welche die verlangte Länge auf der Linie l abschneiden.

2. Hat man es mit einer zur Bildfläche schief gerichteten Geraden zu thun, so ist der Gang der Lösung derselbe; man wird nämlich vor Allem die Lage des umgelegten Gesichtspunktes, als auch jene der umgelegten Ge-

raden zu bestimmen haben. Was den Gesichtspunkt (das Auge) anbelangt, so bedenke man, dass derselbe beim Umlegen einen Kreisbogen beschreibt, dessen Ebene auf der Perspektive der gegebenen Geraden senkrecht steht, und dessen Halbmesser gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, für welches die eine Kathete gleich der vom Augpunkte auf die Perspektive der Geraden gefällten Senkrechten, und die andere Kathete gleich der Augdistanz ist.

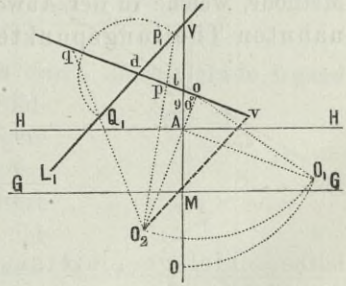
Man wird aber, um die aus dem oben Gesagten sich ergebende Konstruktion für die Bestimmung der Lage des umgelegten Gesichtspunktes vorzunehmen, die Ebene des vom Auge beim Umlegen beschriebenen Kreisbogens in die Bildebene gedreht denken, also in derselben das erwähnte Dreieck mit den angeführten Katheten verzeichnen, auf diese Weise den Halbmesser des besagten Kreisbogens finden, und hiemit die Lage des Gesichtspunktes in der von dem Augpunkte auf die Perspektive der gegebenen Geraden gefällten Senkrechten erhalten.

Nach Durchführung des Gesagten ist bloss der umgelegte Gesichtspunkt mit dem Verschwindungspunkte der gegebenen Geraden zu verbinden, um so die Lage des umgelegten Parallelstrahles zu ermitteln.

Hiedurch ist zugleich auch die Lage der in die Bildebene gedrehten Geraden bestimmt, indem dieselbe durch die von dem Durchstosspunkte der gegebenen Geraden parallel zur Richtung des umgelegten Parallelstrahles gezogene Linie angegeben wird.

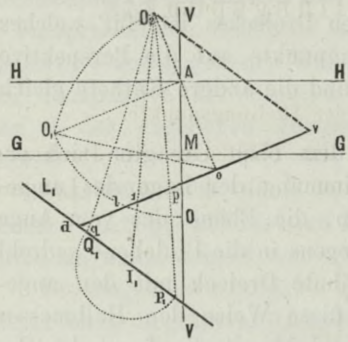
Nach dieser Erläuterung wird man, wenn eine bestimmte Länge auf einer gegebenen Geraden l von dem Durchstosspunkte d (Fig. 68) abzuschneiden ist, vorerst die Lage des umgelegten Gesichtspunktes O_2 und jene der umgelegten Geraden L_1 auffinden, hierauf die gegebene Länge a vom Punkte d auf L_1 auftragen, und so zwei Punkte P_1 und Q_1 erhalten, welche mit Q_2 verbunden, im Durchschnitte p und q dieser Verbindungslinien mit der Perspektive l die Gränzpunkte der abzuschneidenden Stücke liefern.

Fig. 68.



Bei Bestimmung der wahren Länge eines gegebenen Stückes *dp* wird die Verbindungslinie O_2p den Punkt P_1, und somit dP_1 das Verlangte bestimmen.

Fig. 69.



Soll auf einer schiefen Geraden von einem gegebenen Punkte *1* (Fig. 69) eine bestimmte Länge abgeschnitten werden, so bestimme man sich die Lage I_1 dieses Punktes, die derselbe nach dem Umlegen der perspektivisch projecirenden Ebene annimmt, trage alsdann die abzuschneidende Länge auf der umgelegten Geraden L_1 auf, und verbinde die so erhaltenen Punkte P_1 und Q_1 mit O_2 wodurch sich in *l* die beiden Punkte *p* und *q* so ergeben, dass $p1 = q1$ gleich der abzuschneidenden Länge wird.

Der Gang der Lösung für die umgekehrte Aufgabe ergibt sich von selbst.

Bemerkung. Die hier unter (2.) gelösten Aufgaben über die schiefe Linie liessen sich auch in der Art, wie im §. 21, mit Benützung des unter (a) in §. 23 Gesagten, durchführen; man wird aber von dieser Verfahrungsart nur dann Gebrauch machen, wenn der Verschwindungspunkt der Linie nicht angegeben ist.

Von den angeführten Verfahrungsarten zur Lösung der unter §. 20 gestellten Aufgabe wird man jedoch keine allzu häufige Anwendung machen, sondern sich vielmehr der unten auseinandergesetzten, durch Einfachheit sich auszeichnenden und interessanten Methode, welche in der Anwendung gewisser Punkte, „der sogenannten Theilungspunkte“ besteht, bedienen.

Kapitel IV.

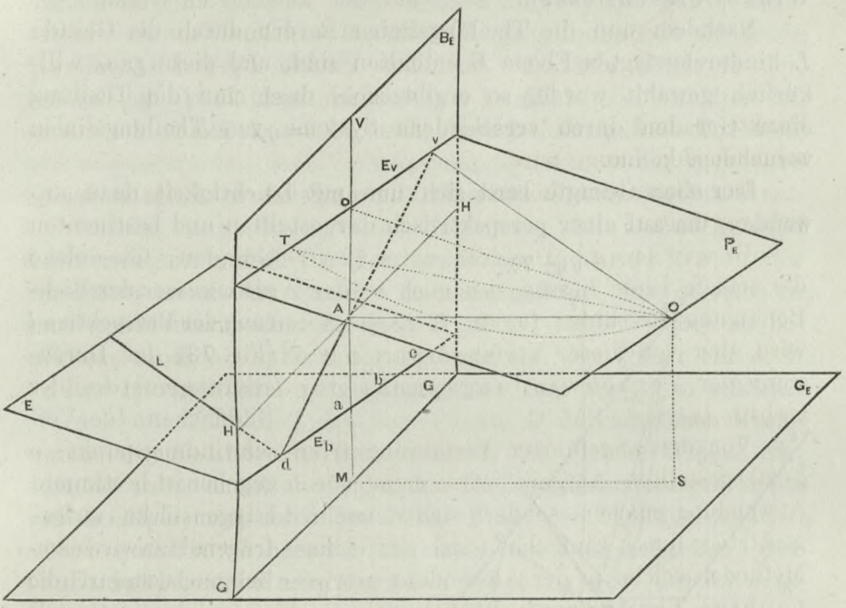
Theorie der Theilungspunkte.

§. 24.

Feststellung des Begriffes der Theilungspunkte.

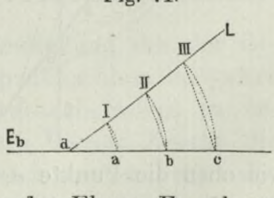
Ist L (Fig. 70) irgend eine die Bildfläche im Punkte d schneidende Gerade, auf welcher von d aus bestimmte Längen-

Fig. 70.



stücke aufzutragen sind, so lege man durch diese Gerade irgend eine Ebene E, schneide auf deren Bildflächtrace E_b die aufzutragenden Längenstücke von d aus in den Punkten a, b, c.. ab (Fig. 70 und Fig. 71, welch' letztere Figur die Ebene E sammt der in ihr enthaltenen Geraden L in die Zeichnungsfläche gelegt vorstellen soll) und nehme an, dass die Linie E_b um den Punkt d in der Ebene E so lange

Fig. 71.

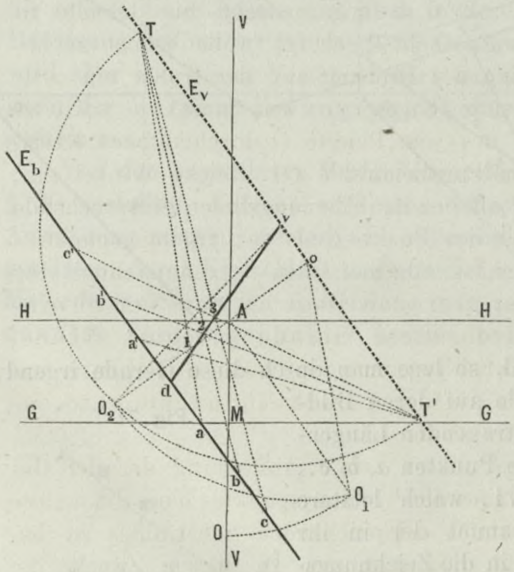


gedrehet werde, bis sie mit L zusammenfällt. Hierdurch werden die Punkte a, b, c...., nachdem sie die ihren Entfernungen entsprechenden Kreisbögen durchlaufen haben, beziehungsweise nach I, II, III.... gelangen, und es ist klar, dass die Sehnen aI, bII, $cIII$.... sämmtlich untereinander parallel sind und zugleich mit E_b und L gleiche Winkel bilden. Daraus ist aber ersichtlich, das man das Auftragen bestimmter Längenstücke auf einer gegebenen Geraden durch ein System paralleler Linien, welche man die Theilungslinien nennt, vornehmen kann, wenn nur diese parallelen Linien eine solche Richtung haben, dass dieselben mit E_b und L gleiche Winkel einschliessen.

Nachdem nun die Theilungslinien in der durch die Gerade L hindurchgelegten Ebene E enthalten sind, und diese ganz willkürlich gewählt wurde, so ergibt sich, dass man die Theilung einer Geraden durch verschiedene Systeme von Theilungslinien vornehmen könne.

Das eben Gesagte lässt sich nun mit Leichtigkeit dazu anwenden, um auf einer perspektivisch dargestellten und bestimmten Geraden, für welche also, ausser der Richtung der Perspektive l (Fig. 72) der Durchschnittspunkt d mit der Bildfläche und der Verschwindungspunkt v gegeben ist, bestimmte Längenstücke aufzutragen. Man wird nämlich, nachdem durch die vorgegebene Gerade eine beliebige Ebene $E_b\,E_v$ gelegt ist, und auf der Bildflächtrace vom Punkte d die verlangten Längenstücke aufgetragen sind (wodurch man wie oben die Punkte a, b, c... erhält) bloss die Perspektiven der Theilungslinien anzugeben haben. Da nun diese von den

Fig. 72.



in der Bildebene liegenden Punkten a, b, c... ausgehen, und als parallele Linien einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt besitzen müssen, so ist es nur nöthig, diesen letzteren zu ermitteln. Dieser Verschwindungspunkt heisst nun, da man durch Anwendung desselben die Theilung einer gegebenen Linie vornehmen kann, der Theilungspunkt.

§. 25.

Bestimmung der Lage des Theilungspunktes.

a) Die Lage des Theilungspunktes, oder des Verschwindungspunktes der parallelen Theilungslinien ergibt sich nun unmittelbar, wenn man bedenkt, dass derselbe durch jenen Punkt angegeben wird, in welchem der den Theilungslinien entsprechende Parallelstrahl die Bildfläche schneidet. Da nun dieser in der, der durchgelegten Ebene zugehörigen Parallelebene enthalten ist, so muss der Theilungspunkt in der Verschwindungslinie E_v liegen, und ausserdem von dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden, in einer der wahren Grösse des diesem Punkte v entsprechenden Sehstrahles gleichen Entfernung sich vorfinden; denn denkt man sich (Fig. 70) den erwähnten Sehstrahl Ov in der Parallelebene um den Punkt v so lange gedreht, bis derselbe in die Verschwindungslinie E_v nach T gelangt (wobei jedoch zu bemerken ist, dass der Sinn der Drehung ein, der früher mit a, b, c.... vorgenommenen, entgegengesetzter sein muss), so schliesst offenbar die Sehne OT des vom Punkte O durchlaufenen Kreisbogens mit E_v und dem Parallelstrahle Ov gleiche Winkel ein; dieselbe erscheint daher als der den Theilungslinien entsprechende Parallelstrahl, und somit der Punkt T als der Theilungspunkt.

Wir können demgemäss allgemein den Satz aufstellen: der Theilungspunkt einer Geraden liegt in der Verschwindungslinie einer durch diese Gerade gelegten Ebene, und ist von dem Verschwindungspunkte der Linie um die wahre Grösse des diesem Verschwindungspunkte zugehörigen Sehstrahles entfernt.

Daraus ist ersichtlich, dass behufs Auffindung des der Geraden l_v^d (Fig. 72) zukommenden Theilungspunktes bloss die wahre Grösse des dem Punkte v entsprechenden Sehstrahles zu bestimmen sein wird, und dass man sich zu diesem Zwecke die Parallelebene um ihre Bildflächtrace, beziehungsweise Verschwindungslinie E_v der hindurchgelegten Ebene, in die Bildfläche gelegt denkt, wodurch auch der zu bestimmende Sehstrahl in dieselbe zu liegen kommt.

Es wird sich hierbei, da der erwähnte Strahl die Verbindungslinie des Gesichtspunktes und des Verschwindungspunktes v bildet, und da der letztere beim Umlegen seinen Ort nicht ändert, bloss um die Lage des in die Bildebene gedrehten Gesichtspunktes O_2 handeln. Dieser ist mit Berücksichtigung des unter §. 23, 2. Gesagten, leicht ermittelt; man hat nämlich bloss die Senkrechte Ao (Fig. 72, siehe Seite 58) auf E_v zu fällen, das rechtwinklige Dreieck oAO_1 über dem Abstand Ao als der einen, und der Augdistanz AO_1 als der zweiten Kathete zu verzeichnen, und die Hypothenuse oO_1 von o nach O_2 aufzutragen, um so in O_2 den umgelegten Gesichtspunkt zu erhalten.

Schneidet man alsdann die Länge vO_2 vom Punkte v auf E_v ab, und zwar entgegengesetzt derjenigen Richtung, auf welcher das Auftragen der abzuschneidenden Längenstücke geschah, so erhält man dadurch im Punkte T den Theilungspunkt, dessen Verbindungslinien mit $a, b, c \ldots$, d. i. $Ta, Tb, Tc \ldots$ (die nichts anderes als die Perspektiven der Theilungslinien angeben), die Perspektive l in den Punkten $1, 2, 3 \ldots$ durchschneidend, die verlangte Theilung bewirken.

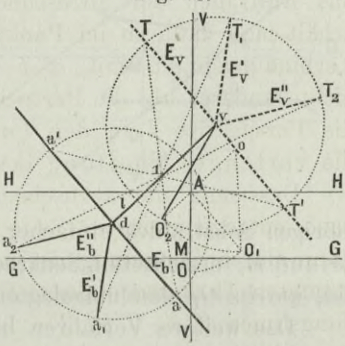
Dass man die abzuschneidenden Längenstücke auf E_b auch nach entgegengesetzter Seite von d auftragen könne, und alsdann durch Benützung des auf ganz gleiche Weise, wie T, bestimmten Theilungspunktes T', und zwar vermittelst der Verbindungslinien $T'a'$, $T'b'$, $T'c' \ldots$, das Gewünschte erreicht, braucht kaum bemerkt zu werden.

Bemerkung 1. Würde man den Theilungspunkt T und die Punkte $a', b', c' \ldots$ oder auch T' und $a, b, c \ldots$, durch Gerade verbinden, so würden diese Verbindungslinien als Perspektiven solcher Theilungslinien erscheinen, welche jene auf der Bildflächtrace aufgetragenen Längenstücke nicht mehr auf dem hinter der Bildfläche, sondern auf dem vor derselben gelegenen Theile der gegebenen Geraden abschneiden.

Bemerkung 2. Aus dem bis jetzt Gesagten ist ersichtlich, dass jeder gegebenen Geraden zwei, in der Verschwindungslinie einer durch diese Gerade gelegten Ebene liegende Theilungspunkte entsprechen, und dass ferner, wie übrigens schon bemerkt wurde, die Theilung einer Geraden durch verschiedene Systeme der Theilungslinien vorgenommen werden kann, indem die Wahl der durch die Gerade gelegten Ebene *willkürlich* zu treffen ist.

Aus dem eben Besprochenen ergibt sich, dass die aufeinander folgenden, in den Verschwindungslinien der willkürlich geführten Ebenen gelegenen Theilungspunkte einer gegebenen Geraden *den Umfang eines Kreises bilden, dessen Halbmesser der wahren Länge des dem Verschwindungspunkte dieser Geraden zugehörigen Sehstrahles gleich, und dessen Mittelpunkt der genannte Verschwindungspunkt ist.* Diesen Kreis nennt man den *Theilungskreis*, und jede durch den Mittelpunkt desselben gezogene Gerade bildet die Verschwindungslinie einer durch die gegebene Gerade gelegten Ebene, deren Bildflächtrace durch den Durchstosspunkt der Geraden parallel zu dieser Verschwindungslinie zu ziehen ist.

Fig. 73.



Zur Erläuterung dessen sei die Perspektive l (Fig. 73) einer Geraden L im Raume gegeben, auf welcher von ihrem Durchschnittspunkte d ein bestimmtes Längenstück abzuschneiden ist.

Man wird, nachdem die willkürliche Ebene $E_b\ E_v$ durchgelegt, und der Theilungspunkt T oder T', wie oben, ermittelt wurde, mit Leichtigkeit den zweiten Endpunkt 1 des abzuschneidenden Längenstückes auffinden können. Dieser Punkt 1 kann, nach dem früher Gesagten, mit Zuhilfenahme jedes beliebigen im Umfange des Theilungskreises gelegenen Punktes bestimmt werden, welchen man von dem Verschwindungspunkte, als Mittelpunkt, mit dem bereits ermittelten Halbmesser $v\,T$ beschrieben hat.

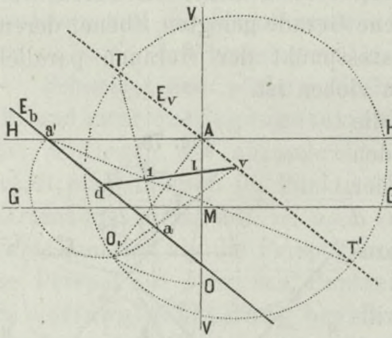
Hat man nämlich irgend einen Punkt T_1 im Umfange des Theilungskreises angenommen, und den diesem Punkte entsprechenden Durchmesser gezogen, so ist durch den Durchschnittspunkt d der gegebenen Geraden eine Parallele zu diesem Radius nach entgegengesetzter Richtung zu ziehen, auf dieser das gegebene Längenstück aufzutragen, wodurch man den Punkt a_1 erhält, welcher mit T_1 verbunden, die Perspektive einer Theilungslinie angibt, welche die gegebene Gerade ebenfalls im Punkte 1 durchschneidet.

Ebenso könnte man einen anderen Punkt T_2 annehmen und ganz analog wie bei T_1 durch die Verbindungslinie $a_2 T_2$ dasselbe erreichen.

Selbstverständlich liegen auch die Punkte a, a_1, a_2.... im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt d der gegebenen Geraden, und dessen Halbmesser der abzuschneidenden Länge gleich ist.

B e m e r k u n g 3. Ist eine Gerade schon in einer Ebene gegeben, so versteht es sich von selbst, dass man auch in dieser Ebene den Theilungspunkt ermitteln wird.

Fig. 74.



Wenn aber Behufs der Theilung einer Linie erst eine Ebene gelegt werden soll, so wird es zumeist am vortheilhaftesten sein, eine zur Bildfläche projecirende Ebene (Fig. 74) zu wählen.

In diesem Falle ergibt sich die wahre Länge $v\, O_1$ des dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden l zugehörigen Sehstrahles einfacher, indem bloss auf der im Augpunkte A auf E_v errichteten Senkrechten die Augdistanz abzuschneiden ist, um in O_1 den umgelegten Gesichtspunkt zu erhalten.

Das weitere Verfahren bleibt dem früheren gleich.

b) Wäre umgekehrt der wahre Abstand eines auf einer Linie gegebenen Punktes *1* (Fig. 74) von ihrem Durchstosspunkte d zu bestimmen, so wird man, wenn irgend eine Ebene, am einfachsten eine projecirende Ebene $E_b\, E_v$, durch die gegebene Gerade gelegt und einer der Theilungspunkte T oder T' aufgefunden worden ist, bloss eine durch den Punkt *1* gehende Theilungslinie $T\,1$ oder $T'\,1$, bis zum Durchschnitte a oder a' mit der Bildflächtrace E_b ziehen, und so in $d\,a$ oder $d\,a'$ den verlangten Abstand in der wahren Länge erhalten.

Die Lösung der Aufgaben: v o n e i n e m b e l i e b i g e n P u n k t e e i n e r G e r a d e n a u f d e r s e l b e n e i n e b e s t i m m t e L ä n g e a b z u s c h n e i d e n, oder die w a h r e G r ö s s e e i n e r b e g r ä n z t e n G e r a d e n a u f z u f i n d e n, unterliegt, nach dem bis jetzt Gesagten, keiner weiteren Schwierigkeit.

§. 26.

Ort des Theilungspunktes für specielle Lagen der zu theilenden Geraden.

Mit Bezug auf das im Allgemeinen über die Lage des Theilungspunktes Gesagten, und mit Berücksichtigung dessen, dass man bei der Bestimmung der Theilungspunkte die der gegebenen Geraden entsprechende projecirende Ebene benützt, wird der Theilungspunkt in den nachstehenden Fällen folgende Lagen annehmen; und zwar:

1. Für Linien *l*, *m*, *n*.... (Fig. 75), die untereinander parallel sind, wird, da dieselben einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt haben, daher die ihnen entsprechenden projecirenden Ebenen eine gemeinschaftliche Verschwindungslinie besitzen, auch ein und derselbe Theilungspunkt *T* zu benützen sein.

Fig. 75.

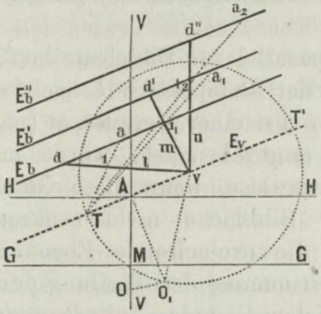
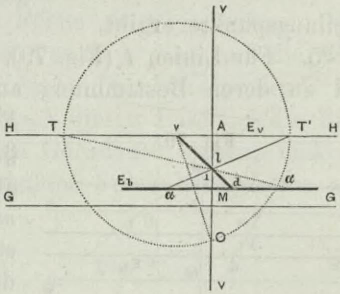


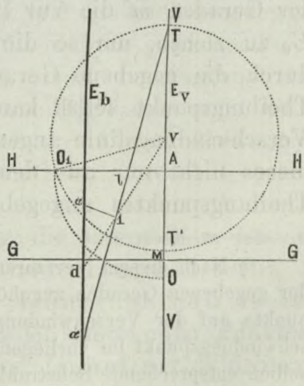
Fig. 76.



2. Für Linien *l* (Fig. 76) die in der Grundebene liegen oder zu derselben parallel sind, wird der Theilungspunkt *T*, *T'* in der Horizontslinie zu suchen sein.

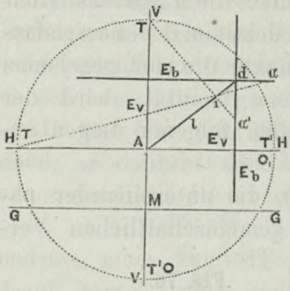
3. Für Linien *l* (Fig. 77) die in der Vertikalebene liegen oder zu derselben parallel sind, kurz, für Linien die in Ebenen liegen, welche senkrecht zur Horizonts- oder zur Grundlinie stehen, wird der Theilungspunkt *T*, *T'* in die Vertikallinie *V V* fallen.

Fig. 77.



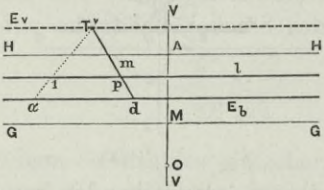
4. Für Linien l (Fig. 78) die senkrecht zur Bildebene stehen, wird gewöhnlich ein in der Horizonts- oder Vertikallinie gelegener Distanzpunkt T, T' als Theilungspunkt benützt. Für derlei Linien fällt der Theilungskreis mit dem Distanzkreise zusammen. Vergleicht man die Lösung der in §. 20 angeführten Aufgabe, wie sie für die zur Bildfläche senkrechten Linien mit Anwendung des Distanzkreises durchgeführt wurde, so wird man finden, dass sie mit jener übereinstimmt, welche sich mit Benützung der im Umfange des Theilungskreises gelegenen Theilungspunkte ergibt.

Fig. 78.



5. Für Linien l (Fig. 79), die parallel zur Bildebene laufen, und zu deren Bestimmung ausser der Perspektive l noch ein Punkt p auf einer Geraden m (nach §. 13) angegeben ist, würde man ausnahmsweise, wenn diese Gerade m zur Bildfläche nicht senkrecht steht, die projecirende Ebene bei der Bestimmung des Theilungspunktes aus dem Grunde nicht benützen, weil die Trace derselben nicht so einfach wie die einer anderen, durch l und m gehenden Ebene E_b E_v ermittelt werden kann. Man braucht nämlich bloss durch den Durchschnittspunkt d und durch den Verschwindungspunkt v der Geraden m die zur Perspektive l parallelen Linien E_b und E_v zu ziehen, um so die Trace und Verschwindungslinie einer durch die gegebene Gerade gehenden Ebene zu erhalten. Der Theilungspunkt selbst kann nun in jedem beliebigen Punkte der Verschwindungslinie angenommen werden, und zwar ergibt sich dieses nicht nur aus dem allgemeinen für die Bestimmung des Theilungspunktes angegebenen Verfahren*), sondern wird auch

Fig. 79.



---

*) Nach diesem Verfahren ist die Länge des dem Verschwindungspunkte der gegebenen Geraden zugehörigen Sehstrahles von diesem Verschwindungspunkte auf der Verschwindungslinie abzuschneiden, und somit, da der Verschwindungspunkt im vorliegenden Falle unendlich weit liegt, und der demselben entsprechende Sehstrahl eine unendliche Länge hat, der Theilungspunkt ganz unbestimmt gelassen.

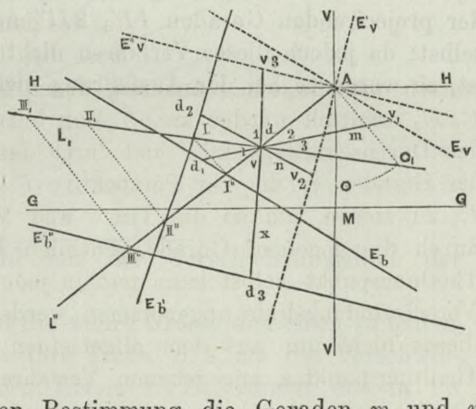
schon aus dem Umstande klar, dass parallele Linien, als welche hier die Bildflächtrace E_b und die gegebene Gerade l erscheinen, durch andere dieselben schneidende Parallelen in gleiche Theile getheilt werden. Als solche Parallele erscheinen hier offenbar sämmtliche Geraden, welche gegen einen Punkt v der Verschwindungslinie E_v gerichtet sind, da sie einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt besitzen.

Man wird aber in einem solchen Falle, wie der hier angeführte, um sich der Annahme eines Punktes zu entheben, gleich den Verschwindungspunkt v der Geraden m als Theilungspunkt benützen.

Will man jedoch zum Behufe der Theilung einer solchen Geraden den Augpunkt selbst gebrauchen, so wird man durch dieselbe eine bildflächprojecirende Ebene zu legen haben. Man wird sonach vor Allem durch den Punkt p eine auf die Bildfläche senkrechte Gerade führen, deren Durchstosspunkt d mit Zuhilfenahme von m bestimmen, durch diesen Punkt d die Bildflächtrace E_b parallel zur gegebenen Geraden l ziehen, und auf dieser die Längen der abzuschneidenden Stücke von d aus auftragen.

Dass unter den zur Bildfläche parallelen Linien auch die auf der Grundebene senkrecht stehenden und die zur Horizontslinie parallelen mitbegriffen sind, versteht sich von selbst.

Fig. 80.



Zum Schlusse sei noch solcher Linien Erwähnung gethan, die verlängert durch den Gesichtspunkt gehen. Eine solche, in den Punkten *1* und *2* begränzte Gerade, zu deren Bestimmung die Geraden m und n dienen, sei l (Fig. 80). Soll die wahre Länge des von *1* und *2* begränzten Stückes angegeben werden, so wird es am geeignetesten sein, die gegebene Gerade sammt den Punkten *1* und *2* um ihre orthogonale Projektion L'' auf der Bildebene, d. i. dA, in die Bildfläche umzulegen. Die Lage der umgelegten Geraden L_1 ergibt sich sehr einfach, da man bloss den umgelegten Gesichtspunkt O_1 mit d zu verbinden hat, und die der umgelegten Gränzpunkte wird erhalten, indem man nur in den vermittelst der projecirenden Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$ erhaltenen orthogonalen Projektionen der Punkte I und II, d. i. I'' und II'', Senkrechte auf L'' errichtet, und so in I_1 und II_1 die gesuchte Länge erhält.

Würde es sich um die Lösung der **umgekehrten Aufgabe** handeln, sollte nämlich von einem gegebenen Punkte 1 ein bestimmtes Stück abgeschnitten, und hiebei der Endpunkt bestimmt werden, so wird man bloss auf der umgelegten Geraden L_1 von dem Punkte I_1 das gegebene Stück abschneiden, so den Punkt III_1 erhalten und alsdann seine orthogonale Projektion III'' ermitteln, durch welche er bestimmt ist. Soll zu seiner Fixirung irgend eine schiefe Gerade gewählt werden, so ziehe man durch III'' die Bildflächtrace E''_b irgend einer projecirenden Ebene $E''_b E''_v$ und in dieser Ebene irgend eine Gerade x, welche durch die, als ein Punkt sich darstellende Perspektive der gegebenen Geraden geht.

Dass man die Lage der umgelegten Geraden auch erhalten kann, wenn man auf den in I'' und II'' über L'' errichteten Senkrechten, die auf irgend eine Art ermittelten wahren Längen der projecirenden Geraden $1I''$, $2II''$ aufträgt, versteht sich von selbst; da jedoch dieses Verfahren nicht so einfach wie das obige ist, so wurde es bei der Ausführung nicht weiter benützt.

Kapitel V.

Gegenseitige Beziehungen zwischen Punkten, geraden Linien und Ebenen.

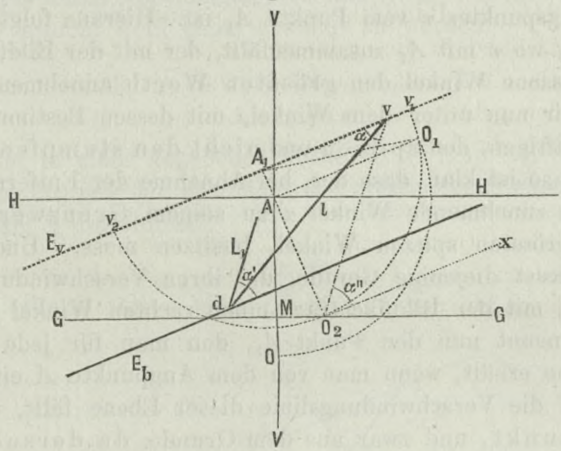
§. 27.

Aufgabe.

Es ist der Winkel zu bestimmen, welchen eine, in einer gegebenen Ebene $E_b\,E_v$ (Fig. 81) liegende Gerade l_d^v mit der Bildflächtrace dieser Ebene einschliesst.

Lösung. Der Winkel, um den es sich hier handelt, ist offenbar demjenigen gleich, welchen der, der gegebenen Geraden

Fig. 81.



entsprechende Parallelstrahl mit der Verschwindungslinie der Ebene bildet.

Man wird demnach, um die wahre Grösse desselben zu finden, bloss die Parallelebene um ihre Trace, d. i. um die Verschwindungslinie E_v der gegebenen Ebene $E_b\,E_v$, sammt den in ihr gelegenen Parallelstrahl in die Bildebene umzulegen haben. Zu diesem Zwecke wird der umgelegte Gesichtspunkt O_2 vermittelst des rechtwinkligen Dreieckes $A\,A_1\,O_1$ auf bekannte Art bestimmt, mit dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden l verbunden, und so in $O_2 v$ der umgelegte Parallelstrahl, also in $O_2 v A_1 = \alpha$ der verlangte Winkel erhalten.

Zieht man durch den Durchschnittspunkt d der gegebenen Geraden eine zu $O_2 v$ parallele Gerade L_1, so gibt diese offenbar die Richtung der um die Bildflächtrace in die Bildebene umgelegten Geraden. Der so erhaltene Winkel α', den L_1 mit E_b bildet, ist dem zu suchenden Winkel α gleich.

Ebenso ist ersichtlich, dass auch die durch den umgelegten Gesichtspunkt O_2 parallel zu E_b oder E_v gezogene Gerade $O_2 x$ mit dem umgelegten Parallelstrahle $O_2 v$ einen Winkel α'' bildet, welcher seiner Grösse nach mit α übereinstimmt.

§. 28.

Nebenaugpunkt, Nebenauge, Nebenaugdistanz, Nebendistanzpunkt.

Aus dem hier Angeführten ist ersichtlich, dass eine in einer Ebene gelegene Gerade einen desto grösseren Winkel mit der Bildflächtrace einschliesst, je kleiner die Entfernung des Verschwindungspunktes v vom Punkte A_1 ist. Hieraus folgt, dass in dem Falle, wo v mit A_1 zusammenfällt, der mit der Bildflächtrace eingeschlossene Winkel den grössten Werth annehmen müsse.

Da wir nun unter dem Winkel, mit dessen Bestimmung wir uns beschäftigen, den spitzen und nicht den stumpfen Winkel verstehen, so ist klar, dass der, bei Abnahme der Entfernung $A_1 v$ an Grösse zunehmende Winkel α zu seinem Grenzwerthe 90^0, als den grössten spitzen Winkel, besitzen muss. Und in der That schliesst diejenige Gerade, die ihren Verschwindungspunkt in A_1 hat, mit der Bildflächtrace einen rechten Winkel ein.

Man nennt nun den Punkt A_1, den man für jede willkürliche Ebene erhält, wenn man von dem Augpunkte A eine Senkrechte auf die Verschwindungslinie dieser Ebene fällt, den Nebenaugpunkt, und zwar aus dem Grunde, da derselbe den Verschwindungspunkt aller auf der Bildflächtrace einer Ebene senkrecht stehenden Linien bildet.

Den Punkt O_2, in welchen der um die Trace der Parallelebene in die Bildebene umgelegte Gesichtspunkt zu liegen kommt, nennt man das Nebenauge, und die Entfernung $O_2 A_1$ wird mit dem Namen Nebenaugdistanz bezeichnet. Jeder Ebene entspricht also ein Nebenaugpunkt, ein Nebenauge und eine Nebenaugdistanz. Wir unterscheiden aber auch noch Nebendistanzpunkte. Es sind dies nämlich diejenigen Punkte, welche die Verschwindungspunkte aller in einer Ebene gelegenen, gegen die Bildflächtrace derselben unter 45^0 geneigten Linien bilden. Dass dieselben von dem Nebenaugpunkte in einer Entfernung $A_1 v_1 = A_1 v_2$ sich vorfinden, die der Nebenaugdistanz $O_2 A_1$ gleich ist, ist leicht einzusehen.

Aus der Bestimmungsart des Nebenaugpunktes, des Nebenauges, der Nebenaugdistanz und der Nebendistanzpunkte ergibt sich, dass für die Grundebene, so wie auch für alle horizontalen Ebenen, für die Vertikalebene und alle zu ihr parallelen, und allgemein, für alle zur Bildfläche senkrecht stehenden Ebenen, der Augpunkt schon der Nebenaugpunkt bleibt, das Nebenauge in einer Entfernung, die der Augdistanz gleich ist, zu liegen kommt, und die Nebendistanzpunkte in dem Umfange des Distanzkreises sich vorfinden, also mit den Distanzpunkten zusammenfallen.

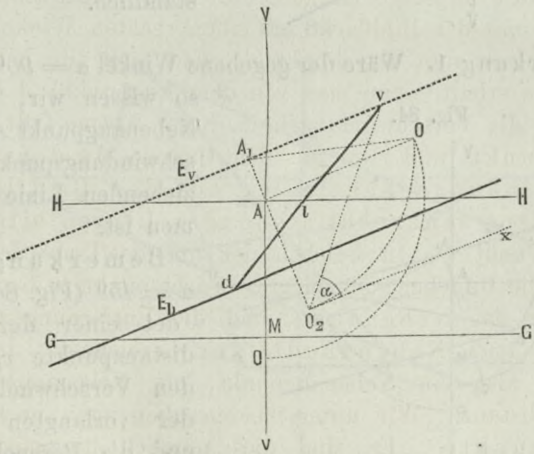
Dass Ebenen, die parallel zur Bildebene sind, folglich keine Verschwindungslinie besitzen, auch keinen Nebenaugpunkt, kein Nebenauge, keine Nebenaugdistanz und keine Nebendistanzpunkte zulassen, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

§. 29.

Aufgabe.

Es ist in einer gegebenen Ebene $E_b E_v$ (Fig. 82) eine Gerade zu ziehen, die mit der Bildflächtrace dieser Ebene einen bestimmten Winkel α einschliesst.

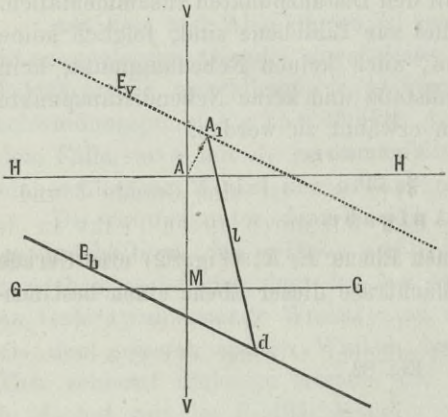
Fig. 82.



Lösung. Da hier selbstverständlich unendlich viele Linien, die jedoch alle zu einander parallel sind, und demnach einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt besitzen, gezogen werden können, so wollen wir noch den Punkt d der Bildflächtrace E_b, von welchem die zu ziehende Linie ausgehen soll, d. i. also den Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Bildebene annehmen, um so die vorliegende Aufgabe näher zu bestimmen.

Die Lösung derselben ergibt sich aus dem Vorhergehenden. Man wird nämlich, nachdem man sich das Nebenauge O_2 der gegebenen Ebene $E_b E_v$ bestimmt hat, gegen die von O_2 aus parallel zu der Bildflächtrace E_b gezogene Gerade $O_2 x$ eine Linie $O_2 v$ unter dem gegebenen Winkel α verzeichnen, und so in v den Verschwindungspunkt der verlangten Linie erhalten. Die Verbindungslinie dv gibt alsdann die Perspektive l der gesuchten Geraden.

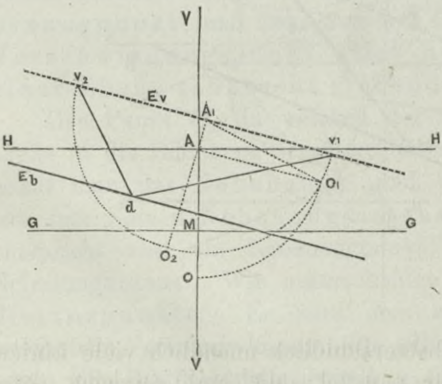
Fig. 83.



Dass es noch eine zweite Linie gibt, welche der Bedingung der Aufgabe entspricht, ist, indem auch gegen die andere Seite der Geraden $O_2 x$ der Winkel α aufgetragen werden kann, von selbst verständlich.

Bemerkung 1. Wäre der gegebene Winkel $\alpha = 90^0$ (Fig. 83), so wissen wir, dass der Nebenaugpunkt A_1 als Verschwindungspunkt der zu ziehenden Linie anzunehmen ist.

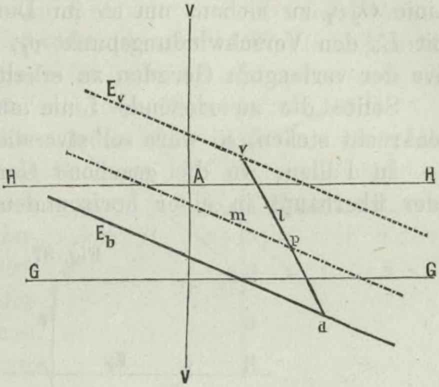
Fig. 84.



Bemerkung 2. Ist $\alpha = 45^0$ (Fig. 84), so bildet einer der Nebendistanzpunkte v_1 oder v_2 den Verschwindungspunkt der verlangten Geraden, und die Perspektive derselben ergibt sich in dv_1 oder dv_2.

Bemerkung 3. Soll endlich $\alpha = O^0$ (Fig. 85), also die Gerade parallel zur Bildflächtrace werden, so wird man bloss durch den in der Ebene auf einer Geraden l_d^v gegebenen Punkt p eine parallele m zu E_b zu ziehen haben, um so die Perspektive der verlangten Geraden zu erhalten.

Fig. 85.



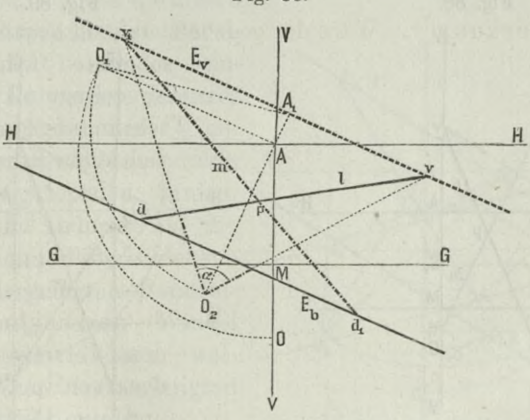
§. 30.

Aufgabe.

In einer Ebene $E_b E_v$ (Fig. 86), ist eine Gerade l und in ihr ein Punkt p gegeben; man soll durch diesen Punkt in derselben Ebene eine zweite Gerade unter einem gegebenen Winkel α zu der ersteren ziehen.

Lösung. Bestimmt man sich das Nebenauge O_2 der gegebenen Ebene $E_b E_v$, so ist offenbar $O_2 v$ der der gegebenen Ge-

Fig. 86.

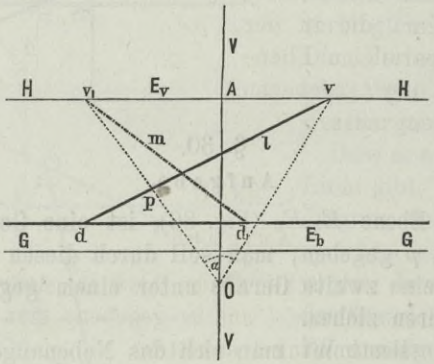


raden entsprechende, in die Bildebene, um E_v, niedergelegte Parallelstrahl. Da nun aber der Parallelstrahl, welcher der zu ziehenden Geraden entspricht, mit $O_2 v$ den Winkel α bilden muss, so hat man bloss durch O_2 gegen $O_2 v$ unter dem Winkel α eine Linie $O_2 v_1$ zu ziehen, um so im Durchschnitte dieser letzteren mit E_v den Verschwindungspunkt v_1, also in $d_1 p v_1$ die Perspektive der verlangten Geraden zu erhalten.

Sollte die zu ziehende Linie auf der gegebenen Geraden senkrecht stehen, so wäre selbstverständlich $\alpha = 90^0$ anzunehmen.

In Fällen, wo die gegebene Gerade l_d^v in der Grundebene, oder überhaupt in einer horizontalen Ebene (Fig. 87); in einer

Fig. 87.



zur Grundlinie (Fig. 88), oder in einer zur Grundebene senkrecht

Fig. 88.

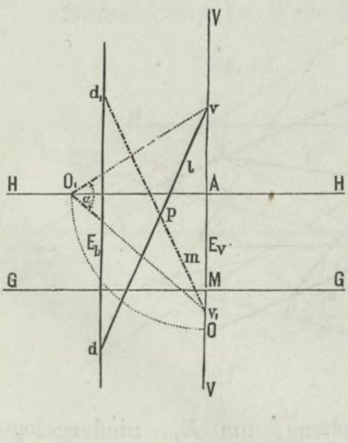
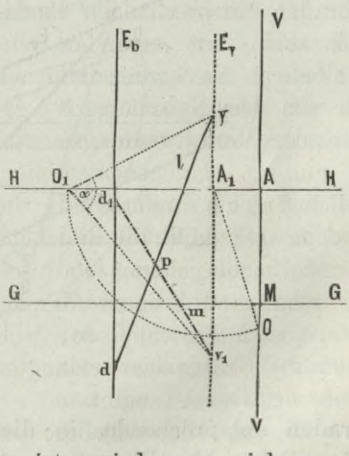
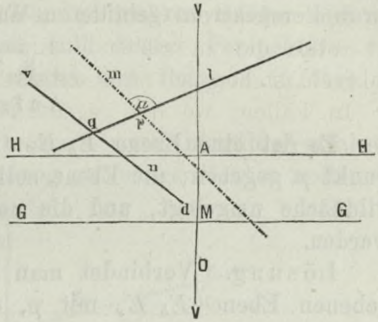


Fig. 89.



stehenden Ebene (Fig. 89) enthalten ist, wird man sich ganz auf dieselbe Weise benehmen. Ist aber die Gerade l (Fig. 90) in der zur Bildfläche parallelen Ebene, zu deren Bestimmung ein Punkt q auf einer Geraden n_d^v gegeben ist, gelegen, so wird unmittelbar die durch den gegebenen Punkt p gegen l unter dem Winkel α gezogene Gerade m, die Perspektive der verlangten Linie angeben. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass die Perspektive einer jeden Figur, die in der zur Bildfläche parallelen Ebene enthalten ist, der gegebenen Figur ähnlich sein muss.

Fig. 90.



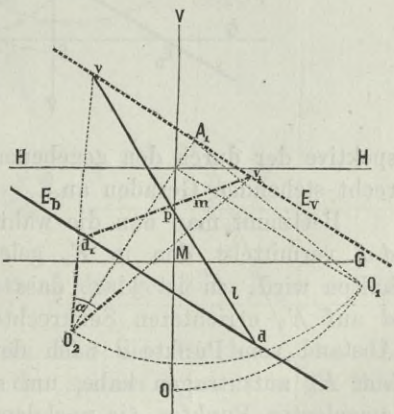
§. 31.

Aufgabe.

Es sind zwei sich schneidende, also in einer Ebene $E_b\, E_v$ (Fig. 91) enthaltene Gerade l und m gegeben; man soll den von ihnen eingeschlossenen Winkel ermitteln.

Lösung. Der Winkel, den zwei Gerade im Raume bilden, ist, wie bereits erwähnt, demjenigen gleich, welchen die diesen Geraden entsprechenden Parallelstrahlen mit einander einschliessen. Es werden demnach die von dem Nebenauge O_2 gegen die Verschwindungspunkte v und v_1 gezogenen Linien, welche nichts anderes als die eben erwähnten, in die Bildebene um E_v niedergelegten Parallelstrahlen sind, einen Winkel $v\,O_2\,v_1 = \alpha$ einschliessen, welcher die Grösse des verlangten Neigungswinkels angibt.

Fig. 91.



Die speciellen Fälle, die sich hiebei, je nach der Lage der Ebene ergeben können, übergehen wir, indem die Lösung derselben ganz so wie im oben angeführten allgemeinen Falle vorzunehmen ist.

Sind die beiden Linien parallel zur Bildfläche, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel unmittelbar durch den von ihren Perspektiven gebildeten Winkel angegeben.

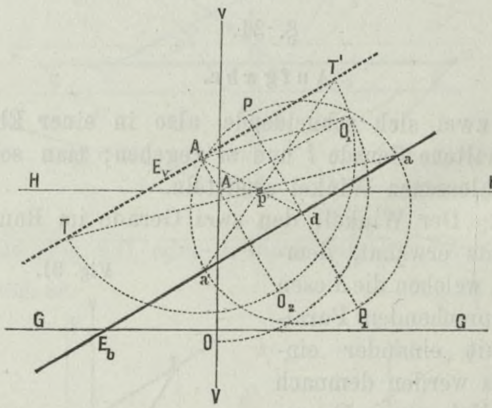
§. 32.

Aufgabe.

Es ist eine Ebene E_b E_v (Fig. 92), und in derselben ein Punkt p gegeben; die Ebene soll um ihre Trace gedreht, in die Bildfläche umgelegt, und die neue Lage des Punktes bestimmt werden.

Lösung. Verbindet man den Nebenaugpunkt A_1 der gegebenen Ebene E_b E_v mit p, so gibt offenbar dpA_1 die Per-

Fig. 92.



spektive der durch den gegebenen Punkt gehenden, auf E_b senkrecht stehenden Geraden an.

Bestimmt man nun die wahre Länge von dp, die in da oder da' vermittelst den in E_v gelegenen Nebendistanzpunkten erhalten wird, so ist klar, dass man bloss auf der im Punkte d auf E_b errichteten Senkrechten dPP_1 den eben gefundenen Abstand vom Punkte d nach der einen oder der anderen Seite von E_b aufzutragen habe, um so in P oder P_1 die Lage des umgelegten Punktes (je nachdem die Ebene nach der Seite des spitzen oder stumpfen Winkels gedreht wurde) zu erhalten.

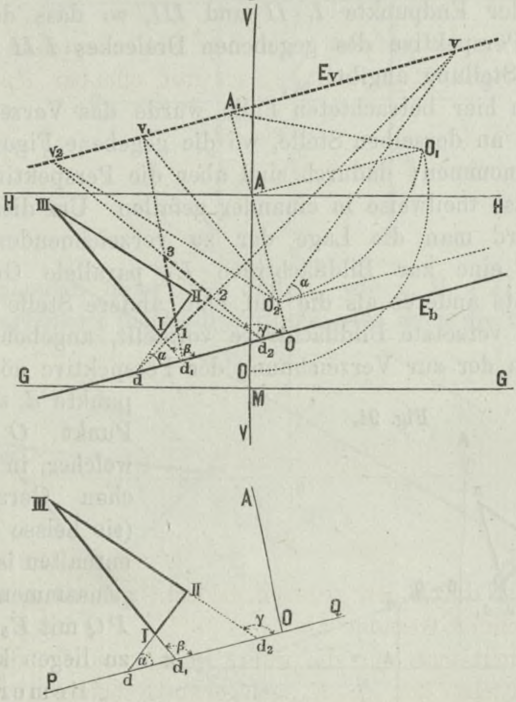
§. 33.

Aufgabe.

Es ist ein um die Bildflächtrace seiner Ebene $E_b E_v$ (Fig. 93) in die Bildebene umgelegtes, also der wahren Grösse nach bekanntes Polygon gegeben; man soll dessen Perspektive verzeichnen, nachdem die Ebene sammt dem Polygon in ihre ursprüngliche Lage zurückversetzt ist.

Lösung. Nachdem für jedes Polygon dasselbe Verfahren, wie für ein Dreieck in Anwendung zu bringen ist, so wollen wir

Fig. 93.



der Einfachheit wegen voraussetzen, die gegebene Figur sei das Dreieck *I II III.*

Vor Allem erlauben wir uns hier die Annahme, dass die gegebene Ebene nach der Seite des spitzen Winkels in die Bildebene umzulegen sei.

1. Schneiden die Verlängerungen der drei Seiten des Dreiecks die Bildflächtrace E_b beziehungsweise in den Punkten d, d_1 und

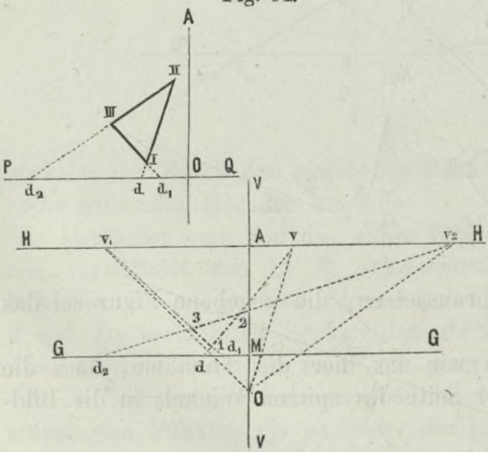
d_2, so bleiben diese Punkte beim Zurückdrehen der Ebene unverändert, und die Perspektiven der verlängerten Seiten werden von denselben ausgehen müssen.

Nachdem aber auch die Neigung der einzelnen Seiten des Dreieckes gegen die Bildflächtrace durch die Winkel α, β und γ gegeben ist, so finden wir auf bekannte Art, mit Hilfe des Nebenauges O_2, die Verschwindungspunkte v, v_1 und v_2, welche den Perspektiven der Dreieckseiten angehören.

Es sind mithin dv, $d_1 v_1$, $d_2 v_2$ die Perspektiven derjenigen Linien, in welche die Seiten des Dreieckes fallen, also die gegenseitigen Durchschnittspunkte *1*, *2* und *3*, beziehungsweise die Perspektiven der Endpunkte *I*, *II* und *III*, so dass das Dreieck *1 2 3* die Perspektive des gegebenen Dreieckes *I II III* in der verlangten Stellung angibt.

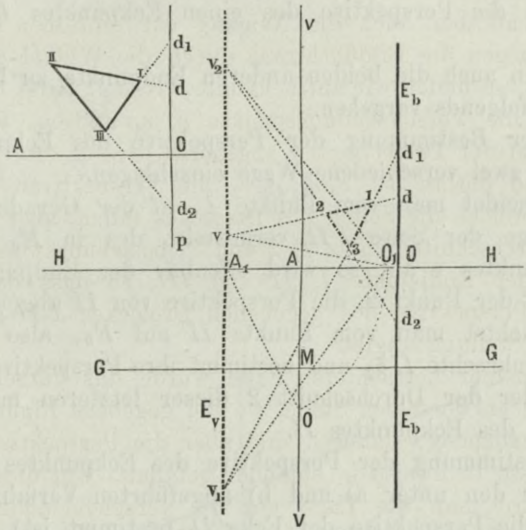
In dem hier betrachteten Falle wurde das Verzeichnen der Perspektive an derselben Stelle, wo die gegebene Figur zu liegen kam, vorgenommen; dadurch sind aber die Perspektive und die wahre Grösse theilweise in einander gefallen. Um dieses zu vermeiden, wird man die Lage der zu verzeichnenden Figur in Bezug auf eine zur Bildflächtrace E_b parallele Gerade PQ, welche nichts anderes als die auf eine andere Stelle der Zeichnungsfläche versetzte Bildflächtrace vorstellt, angeben, und zum Uebertragen der zur Verzeichnung der Perspektive nöthigen Fixpunkte d, d_1, d_2 einen Punkt O benützen, welcher in einer solchen Geraden $A\,O$ (sie heisse Hauptlinie) enthalten ist, die beim Zusammenfallen von PQ mit E_b nach $A_1\,O_2$ zu liegen kömmt.

Fig. 94.



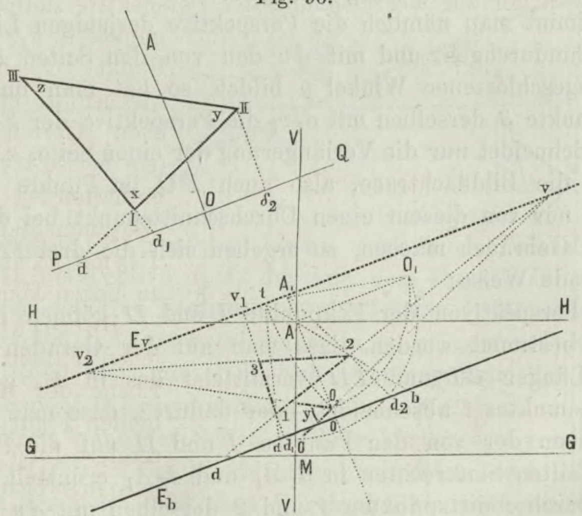
B e m e r k u n g. In jenen Fällen, wo die Ebene der darzustellenden Figur eine besondere Lage hat, wie beispielsweise in Fig. 94, wo sie mit der Grundebene zusammenfällt, oder in Fig. 95, wo sie auf der Grundebene senkrecht steht, bleibt die Lösung dieselbe.

Fig. 95.



2. Schneiden bloss zwei Seiten, wie z. B. *I II* und *I III* (Fig. 96), verlängert die Bildflächtrace, also auch die Gerade *PQ*,

Fig. 96.



innerhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche in den Punkten *d* und d_1, oder will man nur diese zwei Punkte benützen, so wird man, nachdem die Perspektiven jener Seiten, wie oben in dv und $d_1 v_1$ ermittelt worden sind, durch den Durchschnitt derselben blos die Perspektive des einen Eckpunktes I in 1 erhalten.

Um nun auch die beiden anderen Endpunkte zu bestimmen, kann man folgends vorgehen.

Bei der Bestimmung der Perspektive des Eckpunktes II lassen sich zwei verschiedene Wege einschlagen.

a) Schneidet man vom Punkte 1 auf der Geraden dv die wahre Länge der Seite $I\,II$ vermittelst des in E_v gelegenen Theilungspunktes t ab, so wird offenbar der Endpunkt dieser Länge, d. i. der Punkt 2, die Perspektive von II abgeben.

b) Errichtet man vom Punkte II auf E_b, also auch auf PQ, die Senkrechte $II\,\delta_2$ und bestimmt ihre Perspektive in $d_2 A_1$, so ist wieder der Durchschnitt 2 dieser letzteren mit dv die Perspektive des Eckpunktes II.

Bei Bestimmung der Perspektive des Eckpunktes III kann man ausser den unter a) und b) angeführten Verfahrungsarten (da schon die Perspektive der Ecke II bestimmt ist), auch das früher gelöste Problem: durch einen Punkt eine Linie unter einem bestimmten Winkel gegen eine gegebene Gerade zu ziehen, in Anwendung bringen.

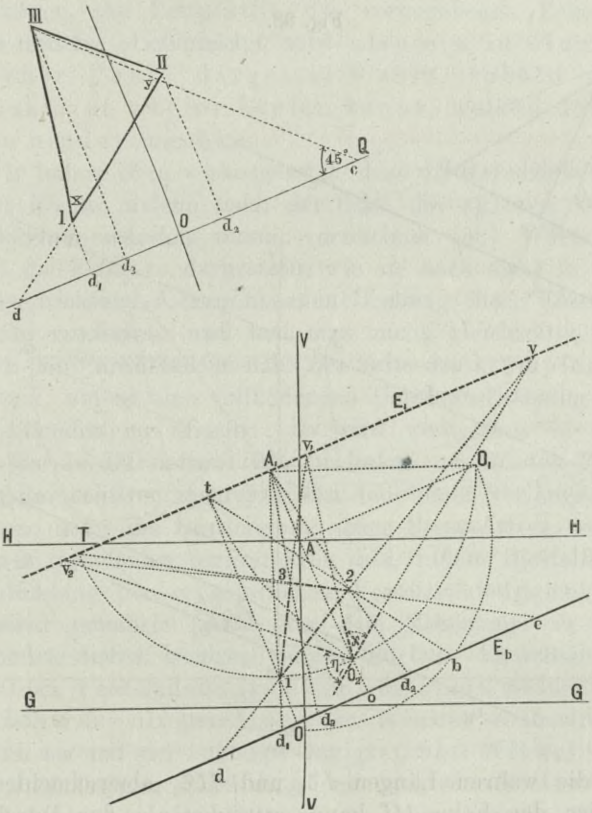
Bestimmt man nämlich die Perspektive derjenigen Linie, die durch 2 hindurchgeht und mit dv den von den Seiten $I\,II$ und $II\,III$ eingeschlossenen Winkel y bildet, so hat man im Durchschnittspunkte 3 derselben mit $d_1 v_1$ die Perspektive der Ecke III.

3. Schneidet nur die Verlängerung der einen Seite, z. B. $II\,I$, (Fig. 97) die Bildflächtrace, also auch PQ im Punkte d, oder will man nur von diesem einen Durchschnittspunkt bei der Construktion Gebrauch machen, so ergeben sich die drei Eckpunkte auf folgende Weise:

Die Perspektiven der Eckpunkte I und II können entweder dadurch bestimmt werden, dass man auf der Geraden dv die wahren Längen $d\,I$ und $I\,II$ vermittelst des in E_v gelegenen Theilungspunktes t abschneidet, oder dadurch, dass man sich die Perspektiven der von den Punkten I und II auf die Bildflächtrace gefällten Senkrechten in $d_1 A_1$ und $d_2 A_1$ ermittelt, und so in den Durchschnittspunkten 1 und 2 derselben mit dv die Perspektive der Ecken I und II erhält.

Was die Perspektive *3* der Ecke *III* betrifft, so ergibt sich diese entweder als Durchschnitt der Perspektiven der durch die Punkte *1* und *2* gehenden, beziehungsweise unter den Winkeln

Fig. 97.

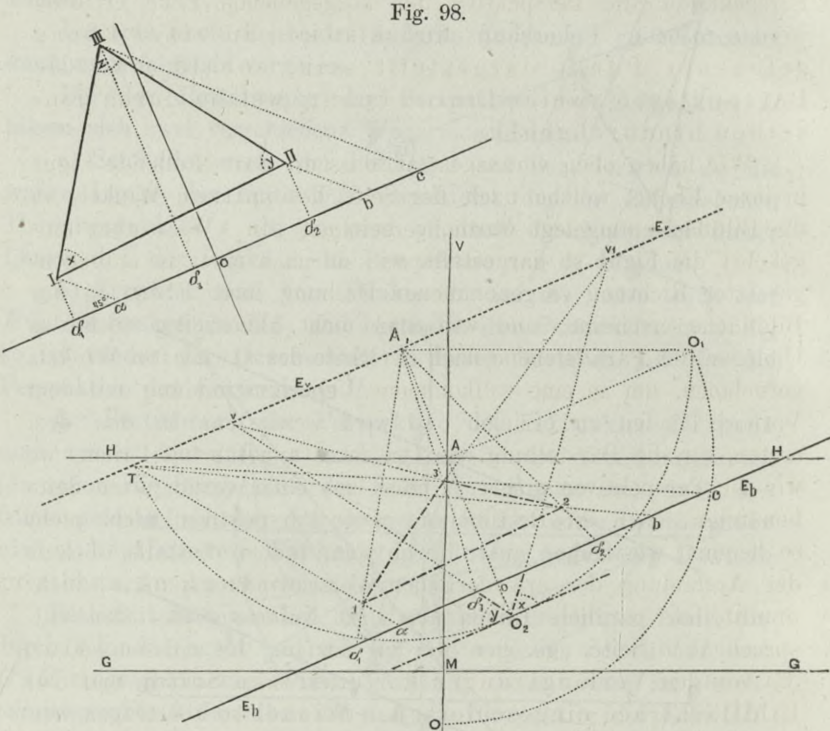


x und y gegen *1 2* geneigten Linien, oder auch dadurch, dass man auf der Perspektive $d_3 A_1$ der von dem Punkte *III* auf die Bildflächtrace gefällten Senkrechten, die Länge $d_3\,III$ vermittelst des der Geraden $d_3 A_1$ entsprechenden, in E_v gelegenen Theilungspunktes T (der hier mit dem Nebendistanzpunkte der Ebene $E_b E_v$ zusammenfällt) abschneidet.

4. Würde keine der Seiten in ihrer Verlängerung innerhalb festgesetzter Gränzen die Bildflächtrace schneiden, oder will man von keinem der noch möglichen Durchschnittspunkte einen konstruktiven Gebrauch machen, so bleibt nichts anderes übrig, als

die Perspektiven wenigstens zweier Ecken, z. B. *I* und *II* (Fig. 98), nach dem im vorigen Falle für die Ecke *III* angegebenen Verfahren zu bestimmen, nämlich auf den Perspektiven $\delta_1 A_1$ und $\delta_2 A_1$, der von *I* und *II* auf die Bildflächtrace gefällten Senk-

Fig. 98.



rechten, die wahren Längen $I\delta_1$ und $II\delta_2$ abzuschneiden. Die Perspektive der Ecke *III* kann entweder als der Durchschnitt der durch *1* und *2*, beziehungsweise unter dem Winkel x und y gegen *1 2* gelegten Geraden, oder analog den beiden Ecken *1* und *2* vermittelst $\delta_3 A_1$ bestimmt werden.

Es ist klar, dass in den hier angeführten Fällen sich die Eckpunkte der Figur als die Durchschnitte zweier durch jeden Eckpunkt hindurchgehenden Linien ergaben; denn selbst in dem Falle, wo zur Bestimmung einer Ecke blos eine Gerade, auf welcher wir von ihrem Durchschnittspunkte aus ein bestimmtes Längenstück abzuschneiden hatten, angenommen war, ist nichts anderes als der Durchschnitt aufgefunden worden, den die gegebene

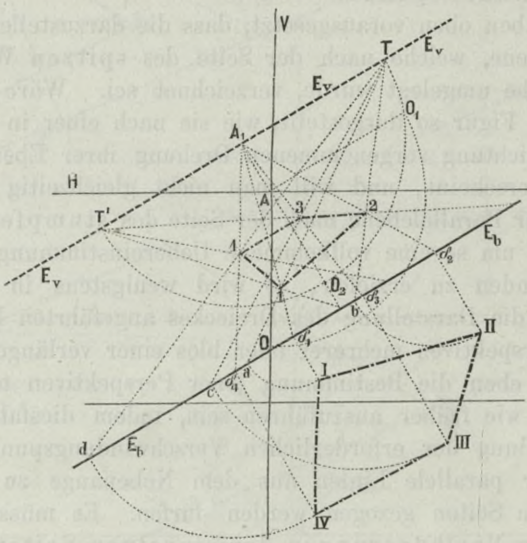
Gerade mit der entsprechenden Theilungslinie lieferte. Es ist demnach leicht einzusehen, dass man durch einen Eckpunkt einer gegebenen Figur auch zwei ganz beliebige Linien ziehen könnte, indem durch die Darstellung derselben im Durchschnitte ihrer Perspektiven, die Perspektive der vorgegebenen Ecke erhalten werden müsste. Ueberhaupt wird also ein in einer Ebene gelegener Punkt dargestellt sein, sobald man die Perspektiven zweier Linien kennt, welche durch denselben hindurchgehen.

Wir haben oben vorausgesetzt, dass die darzustellende Figur in ihrer Ebene, welche nach der Seite des spitzen Winkels in die Bildfläche umgelegt wurde, verzeichnet sei. Wäre aber umgekehrt die Figur so dargestellt, wie sie nach einer in entgegengesetzter Richtung vorgenommenen Drehung ihrer Ebene in der Bildfläche erscheint, und will man nicht gleichzeitig auch das Umlegen der Parallelebene nach der Seite des stumpfen Winkels vornehmen, um so eine vollkommene Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden zu erzielen, so wird wenigstens in den drei ersten, für die Darstellung des Dreieckes angeführten Fällen, wo wir die Perspektiven mehrerer oder blos einer verlängerten Seite benützten, eben die Bestimmung jener Perspektiven nicht mehr so bequem wie früher auszuführen sein, indem diesfalls, behufs der Auffindung der erforderlichen Verschwindungspunkte, nicht unmittelbar parallele Linien aus dem Nebenauge zu den entsprechenden Seiten gezogen werden dürfen. Es müssen sodann die von den Verlängerungen der einzelnen Seiten mit der Bildflächtrace eingeschlossenen Winkel so übertragen werden, dass sie mit der letzteren den gleichen Winkel, jedoch in entgegengesetzter Richtung gemessen, einschliessen.

Bemerkung. Der Fall, wo die Figur um die Trace ihrer Ebene nach der Seite des stumpfen Winkels gedreht wird, gestattet die Verzeichnung der Perspektive unmittelbar. Man wird daher nicht erst veranlasst sein, die gegebene Figur an irgend einer Stelle der Zeichnungsfläche neuerdings verzeichnen zu müssen. Es ist diessfalls nicht möglich, dass, sobald die ganze Figur hinter der Bildebene sich vorfindet, Perspektive und wahre Grösse, so wie in Fig. 93, in einander fallen könnten.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass in dem vierten, bei der Darstellung des Dreiecks angeführten Falle, wenn nämlich die Perspektiven der verlängerten Seiten gar nicht benützt werden, die Verzeichnung der Perspektive einer um die Trace ihrer Ebene nach der Seite des stumpfen Winkels in die Bildebene niedergelegten Figur sogar leichter vorzunehmen sein würde. Da die Verzeichnung unmittelbar an der Stelle, wo die wahre Grösse sich vorfindet, ausgeführt werden kann, wird das Uebertragen der Fusspunkte der von den Ecken auf die Bildflächtrace PQ gefällten Senkrechten hinwegfallen, wie dieses aus Fig. 99 zu

Fig. 99.



ersehen ist, in welcher die Perspektive eines Viereckes *I II III IV* bestimmt wurde. Die Winkel des Viereckes blieben bei der Construktion unbenützt. Bei der Bestimmung der einzelnen Eckpunkte wurde blos von den Coordinaten der letzteren Gebrauch gemacht.

Auf gleiche Weise kann nun jedes beliebige Polygon im Bilde verzeichnet werden. Es sei hier nur noch bemerkt, dass man bei grösserer Augdistanz die Eckpunkte auch mit Benützung eines aliquoten Theiles derselben bestimmen könnte, wie dessen bereits im §. 20, Bem. 3, Erwähnung geschah.

§. 34.

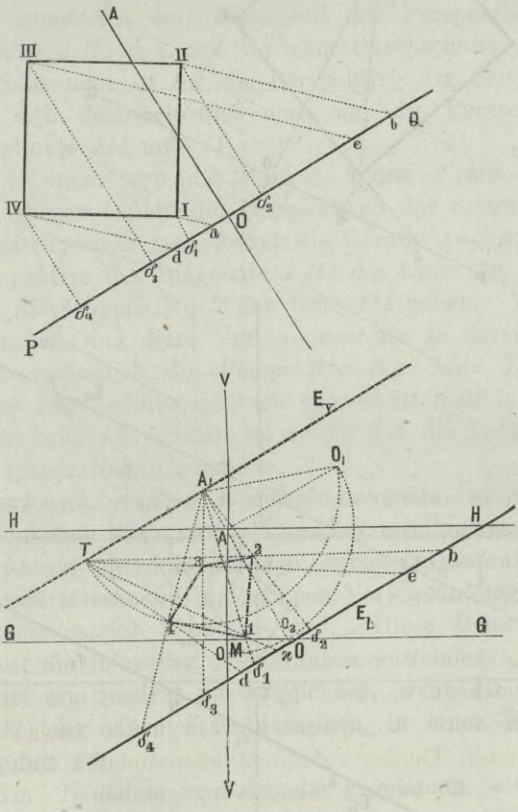
Aufgabe.

In irgend einer Ebene $E_b E_v$ ist ein Quadrat zu verzeichnen.

a) Wenn dasselbe seiner wahren Grösse nach bekannt, und dessen Lage bezüglich der Bildflächtrace PQ (Fig. 100) mittelst der Hauptlinie AO gegeben ist.

Lösung. Abgesehen von den Eigenthümlichkeiten des Quadrates sei vorläufig angenommen, dass es sich um die Darstellung irgend einer ebenen Figur handle. Hiebei wird man die Perspektiven

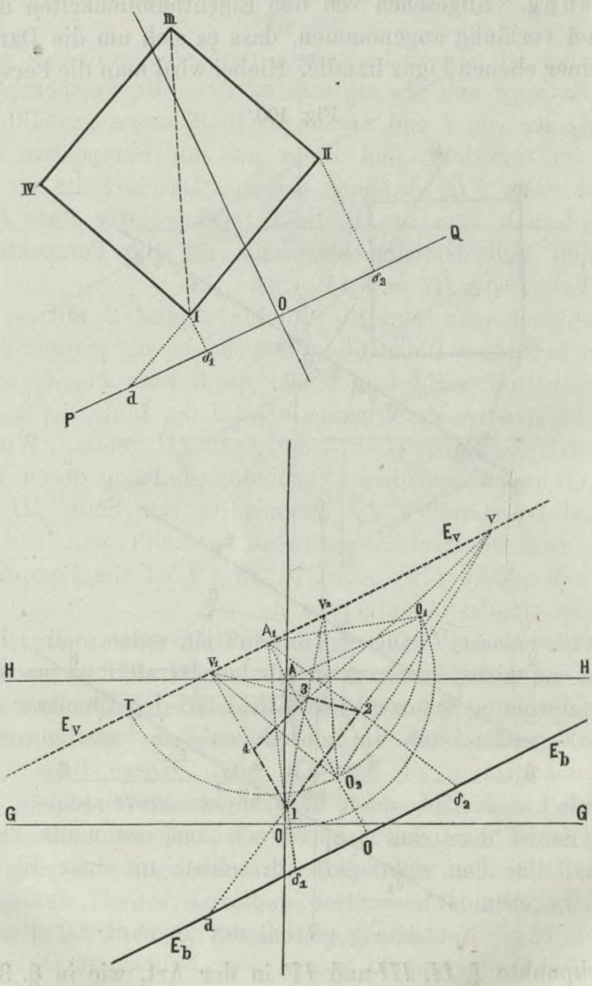
Fig. 100.



der Eckpunkte *I*, *II*, *III* und *IV* in der Art, wie in §. 33 gezeigt wurde, auffinden, und zwar am einfachsten dadurch, dass man jeden Eckpunkt als den Durchschnitt zweier von demselben ausgehenden Linien, wovon die eine senkrecht zur Bildflächtrace und die andere gegen dieselbe unter 45⁰ geneigt ist, darstellt, wie solches in Fig. 100 durchgeführt ist.

Bei dem Quadrate aber kann man kürzer so verfahren, dass man die Verschwindungspunkte je zweier parallelen Seiten und den Verschwindungspunkt der Diagonale bestimmt.

Fig. 101.



Hat man nämlich das Nebenauge O_2 (Fig. 101) der gegebenen Ebene $E_b\,E_v$ ermittelt, so bestimme man die den Seiten

I II und *I IV* entsprechenden, in die Bildebene umgelegten Parallelstrahlen $O_2 v$ und $O_2 v_1$, wodurch man in v den Verschwindungspunkt für *I II* und *III IV* und in v_1 jenen für *I IV* und *II III* erhält. Will man nun auch den Verschwindungspunkt der Diagonale *I III* auffinden, so ist einleuchtend, dass man bloss den Winkel $v O_2 v_1$ zu halbiren habe, indem die Halbirungslinie $O_2 v_2$ offenbar den dieser Diagonale zukommenden Parallelstrahl liefert, und somit v_2 den Verschwindungspunkt für *I III* bestimmt.

Hierbei ist nur zu bemerken, dass $O_2 v_1$ auf $O_2 v$ senkrecht steht. Es wird nun am einfachsten sein, die Perspektiven $\delta_1 A_1$ und $\delta_2 A_1$ der von *I* und *II* auf die Bildflächtrace gefällten Senkrechten zu ermitteln, und diese mit der Perspektive der verlängerten Seite *I II*, d. i. mit dv zum Durchschnitt zu bringen. Dadurch erhält man in *1 2* die Perspektive der Seite *I II*, und es handelt sich demnach blos noch um die Perspektiven der beiden Eckpunkte *III* und *IV*.

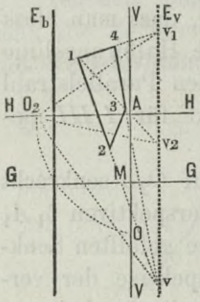
Verbindet man nun die Punkte *1* und *2* mit v_1, so sind offenbar in diesen Linien die Perspektiven der Seiten *I IV* und *II III* enthalten; zieht man ferner die Gerade $1 v_2$, so wird diese als die Perspektive der Diagonale *I III* die Linie $2 v_1$ in *3* durchschneidend, die Perspektive *3* der Ecke *III* geben. Wird nun *3* mit v verbunden, und diese Verbindungslinie, in deren Verlängerung selbstverständlich die Perspektive der Seite *III IV* fällt, mit $1 v_1$ zum Durchschnitt gebracht, so erhält man in *4* die Perspektive der Ecke *IV*. Somit ist in *1 2 3 4* die Perspektive des gegebenen Quadrates aufgefunden.

Bemerkung. Diese Construktionsweise wäre besonders dann zu empfehlen, wenn zur bildlichen Darstellung eines Objektes die Verzeichnung mehrerer ähnlich liegender Quadrate erforderlich wäre, weil sodann die gefundenen Verschwindungspunkte für alle Quadratseiten zu benützen sind. Diese Bemerkung lässt sich auch auf die folgenden Paragraphen anwenden.

b) Es ist ein Quadrat zu verzeichnen, wenn die Perspektive *1 2* (Fig. 102) **der einen Seite desselben, in einer Ebene** $E_b E_v$ **liegend gegeben ist.**

Lösung. Nachdem man den der gegebenen Seite zugehörigen Verschwindungspunkt v mit dem Nebenauge O_2 verbunden, und so den der Seite *1 2* entsprechenden, in die Bildebene umgelegten Parallelstrahl $O_2 v$ erhalten hat, wird man sich auf dieselbe Weise, wie im vorhergehenden Falle, zu benehmen haben, um auch die Perspektiven der beiden anderen Eckpunkte zu bestimmen. Dieses wollen wir, da das Verfahren bei jeder Lage einer die Bildfläche schneidenden Ebene das nämliche bleibt, für eine vertikale Ebene durchführen. Man wird auf $O_2 v$ die Linie $O_2 v_1$ senkrecht errichten, und den Winkel $v O_2 v_1$ durch die Gerade $O_2 v_2$ halbiren. Auf diese Art wird in v_1 der Verschwindungspunkt der beiden Seiten, die sich an die gegebene Seite *1 2* anschliessen, und in v_2 der Verschwindungspunkt der von *1* ausgehenden Diagonale erhalten. Verbindet man nun die Punkte *1* und *2* mit v_1, und den Punkt *1* mit v_2, so wird die Linie $2 v_1$, welche sich mit $1 v_2$ in dem Punkte *3* durchschneidet, die Perspektive des dritten Eckpunktes bestimmen, und die verlängerte Gerade $3 v$ mit $1 v_1$ zum Durchschnitt in *4* gebracht, jene des vierten Eckpunktes des durch die gegebene Seite *1 2* bestimmten Quadrates angeben.

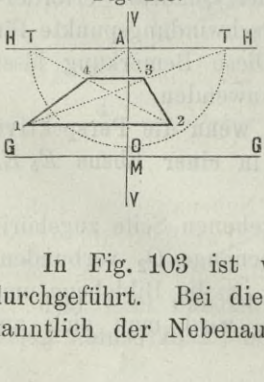
Fig. 102.



Ist die Seite des darzustellenden Quadrates parallel zur Bildfläche, also auch parallel zur Bildflächtrace der gegebenen Ebene $E_b E_v$ gelegen, so ist die Construktion der Perspektive noch einfacher, indem alsdann der Nebenaugpunkt A_1, als Verschwindungspunkt der beiden an die Ecken *1* und *2* sich anschliessenden Seiten erscheint, und die Verschwindungspunkte der von *1* und *2* ausgehenden Diagonalen mit den Nebendistanzpunkten der gegebenen Ebene zusammenfallen.

Hierbei kann man entweder blos einen Eckpunkt als den Durchschnitt der Perspektiven der einen Seite und der entsprechenden Diagonale ermitteln, und den anderen vermittelst der durch diesen Eckpunkt parallel zur gegebenen Seite gezogenen Linie auffinden, oder beide Eckpunkte aus den Durchschnitten der Perspektiven der Seiten mit den entsprechenden Diagonalen bestimmen.

Fig. 103.



In Fig. 103 ist vorliegende Aufgabe in der Grundebene durchgeführt. Bei dieser speciellen Lage der Ebene geht bekanntlich der Nebenaugpunkt in den Augpunkt über, und die

Nebendistanzpunkte werden mit den in der Horizontslinie gelegenen Distanzpunkten zusammenfallen.

§. 35.

Aufgabe.

In einer Ebene $E_b E_v$ ist die Perspektive *1 2* der einen Seite eines regelmässigen Polygons, oder allgemein, eines der Form und Grösse nach bekannten Vieleckes gegeben, man soll das Polygon perspektivisch darstellen.

Lösung. Hiebei wird man sich die gegebene Ebene um ihre Bildflächtrace in die Bildebene umgelegt denken, und die Lage der gegebenen Seite auf bekannte Art ermitteln.

Am einfachsten wird man zum Ziele gelangen, wenn man eine Gerade parallel zur Bildflächtrace an einer beliebigen Stelle der Zeichnungsfläche zieht, die Lage der Hauptlinie annimmt, und die umgelegte Seite in der Stellung gegen die gewählte Gerade und die Hauptlinie verzeichnet, welche sie beziehungsweise gegen die Bildflächtrace und Hauptlinie einnimmt. Hierauf verzeichne man über der so bestimmten Seite das gegebene Vieleck.

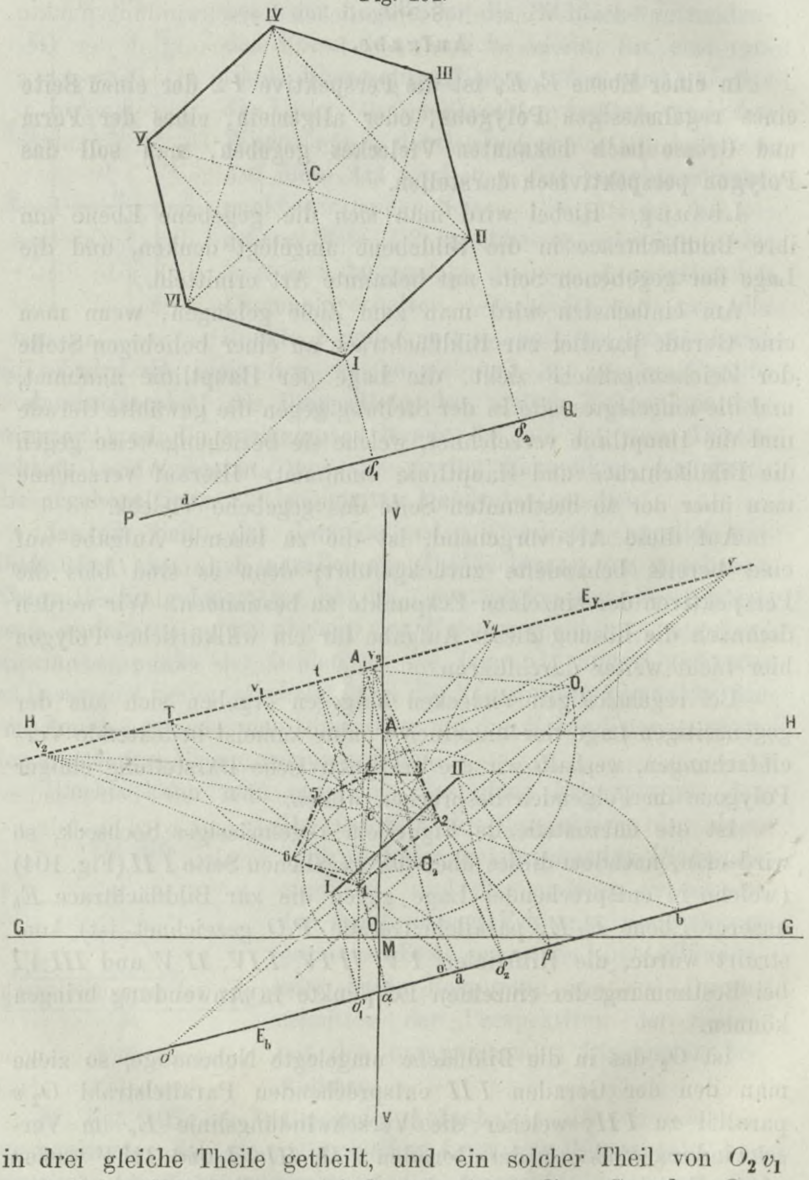
Auf diese Art vorgehend, ist die zu lösende Aufgabe auf eine bereits behandelte zurückgeführt; denn es sind blos die Perspektiven der einzelnen Eckpunkte zu bestimmen. Wir werden demnach die Lösung dieser Aufgabe für ein willkürliches Polygon hier nicht weiter durchführen.

Bei regelmässigen Vielecken hingegen ergeben sich aus der gegenseitigen Lage der einzelnen Punkte zumeist bedeutende Vereinfachungen, weshalb wir die perspektivische Darstellung einiger Polygone im Folgenden besprechen wollen.

Ist die darzustellende Figur ein regelmässiges Sechseck, so wird man, nachdem dieses über der gegebenen Seite *I II* (Fig. 104) (welche in entsprechender Lage gegen die zur Bildflächtrace E_b unserer Ebene $E_b E_v$ parallele Gerade *P O* gezeichnet ist) konstruirt wurde, die Hilfslinien *I V*, *II IV*, *I IV*, *II V* und *III VI* bei Bestimmung der einzelnen Eckpunkte in Anwendung bringen können.

Ist O_2 das in die Bildfläche umgelegte Nebenauge, so ziehe man den der Geraden *I II* entsprechenden Parallelstrahl $O_2\, v$ parallel zu *I II*, welcher die Verschwindungslinie E_v im Verschwindungspunkte v der Geraden *I II*, *III VI* und *IV V* treffen wird. Errichtet man weiters in O_2 auf $O_2\, v$ die Senkrechte $O_2\, v_1$, so erhält man in derselben den Verschwindungspunkt v_1 der Geraden *II IV* und *I V*. Wird endlich der rechte Winkel $v\,O_2\,v_1$

Fig. 104.



in drei gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil von $O_2\,v_1$ nach links übertragen, so erhält man durch diese Geraden $O_2\,v_3$,

$O_2 v_4$ und $O_2 v_2$ die Verschwindungspunkte v_3, v_4 und v_2, welche beziehungsweise den Linien *I IV*, *II III* und *V VI*, — *I III* und *IV VI*, — *I VI*, *II V* und *III IV* zukommen.

Sind auf diese Weise die sämmtlichen Verschwindungspunkte festgestellt, so übertrage man den Durchstosspunkt *d* der Geraden *I II* nach δ in die Bildflächtrace, ziehe die Perspektive δv dieser Geraden und bestimme die Endpunkte derselben, d. i. *1* und *2*, mittelst des dem Punkte *v* zugehörigen Theilungspunktes *t* oder nach einer andern bereits bekannten Methode.

Auf Grundlage dessen kann nun die Bestimmung der Perspektiven der noch fehlenden vier Eckpunkte des Sechseckes sehr leicht vorgenommen werden. Man wird nämlich jede dieser Ecken als den Durchschnitt zweier Linien darstellen, die entweder von den gegebenen Punkten *1* und *2* oder von den erst zu bestimmenden Punkten ausgehen. Auf diese Art wurde in Fig. 104 die Ecke *V* als der Durchschnitt der Perspektiven der beiden Linien *I V* und *II V* in *5* bestimmt; die Ecke *IV* ergab sich in *4* nicht nur auf die der Ecke *V* analoge Weise, indem man nämlich die beiden Linien *II IV* und *I IV* zum Durchschnitt brachte, sondern auch mittelst der ihrer Lage nach bekannten Geraden *V IV*, die von einer der oberwähnten Linien *II IV* oder *I IV* getroffen wird. Die Ecken *VI* und *III* sind als die Durchschnitte der Linien *I VI*, *V VI*, *III VI*, *IV VI*, beziehungsweise *II III*, *IV III*, *VI III*, *I III*, von welchen blos je zwei zu benützen sind, in *6* und *3* aufgefunden worden.

Dass man für den Fall, als einige der hier angewendeten Verschwindungspunkte ausserhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche fallen, sich leicht durch Abschneiden der betreffenden Längen behelfen kann, ist selbstverständlich und wird in folgendem Beispiele durch die Anwendung klar werden.

§. 36.

Aufgabe.

Eine Aneinanderreihung gleicher Polygone ist perspektivisch darzustellen.

a) Es sei in Fig. 105 a, ein aus regelmässigen sechseckigen Tafeln bestehender Fussboden perspektivisch so darzustellen, dass eine Seite der Sechsecke parallel zur Bildfläche ist.

Wird *P Q* (Fig. 105 b) in der Bildebene liegend vorausgesetzt, so folgt aus der bekannten Eigenschaft des Sechsecks, dass die Diagonale PN gleich der doppelten Seitenlänge MN, folglich $PS = SN = MN = \ldots$ und $PR = RS = SU = UN = \ldots$

Fig. 105 a.

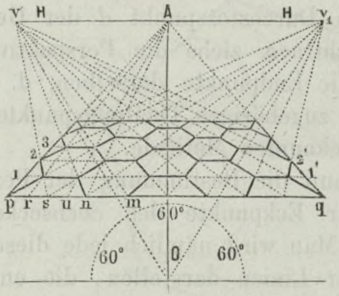
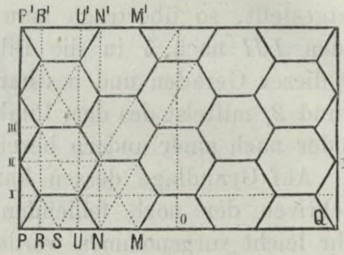


Fig. 105 b.



ist. Ebenso ist ersichtlich, dass sämmtliche Punkte der aneinander gereihten Polygone in auf PQ senkrechten Geraden PP', RR', UU' .... liegen, deren Bilder mithin im Augpunkte verschwinden werden, und dass die zur Bildfläche parallelen Seiten in gleichen Abständen von einander hinter der Bildebene sich befinden.

Werden sonach die Punkte P, R, S.... in die Bildflächtrace nach p, r, s... übertragen, und diese Punkte mit dem Augpunkte A verbunden, so haben wir für die Bestimmung jedes einzelnen Eckpunktes eine durch denselben gehende Gerade als Bild des bezüglichen Perpendikels PP'.... erhalten.

Bestimmen wir nun die Perspektiven *1*, *2*, *3*.... der Punkte *I*, *II*, *III*.... derart, dass wir auf einem dieser Perpendikel, z. B. auf pA, Punkte bestimmen, welche in gleichen Abständen wie PI.... auf einander folgen und ziehen durch diese Punkte die zur Bildflächtrace Parallelen II', $II\,II'$...., so haben wir hiemit ein zweites System von Linien erhalten, welches, im Durchschnitte mit den erst gefundenen, sämmtliche Eckpunkte liefert. Letztere sind nur noch entsprechend mit einander zu vereinen.

Ebenso lassen sich die Verschwindungspunkte v und v_1 der gegen die Bildebene unter einem Winkel von 60^0 geneigten Sechseckseiten anwenden, wodurch alsdann die Auffindung der Punkte *1*, *2*, *3*.... entfällt.

b) In Fig. 106 a ist ein aus regelmässigen Achtecken bestehender Fussboden so dargestellt, dass eine Achteckseite gleichfalls parallel zur Bildebene vorausgesetzt wurde.

Berücksichtigt man, dass sodann zwei Seiten zur Bildebene senkrecht und die andern vier unter 45° gegen dieselbe geneigt sind, so wird die Construktion sich von selbst ergeben, und aus

Fig. 106 a.

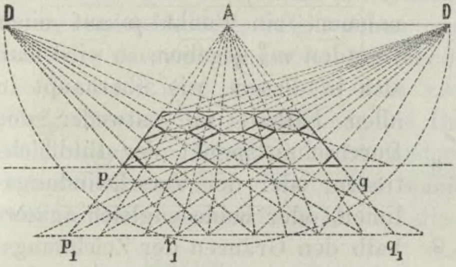


Fig. 106 b.

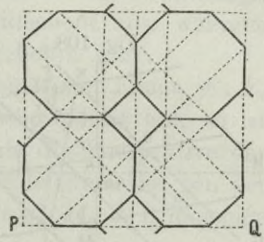


Fig. 106 b leicht zu entnehmen sein. Daselbst liegt die Seite PQ, deren Bild pq ist, im Abstande $p_1 r_1$ hinter der Bildebene.

Bemerkung. Handelt es sich um die Bestimmung der wahren Grösse eines durch seine Perspektive gegebenen Polygons, so ist nur seine Ebene mit sämmtlichen darin gelegenen Eckpunkten in die Bildebene umzulegen.

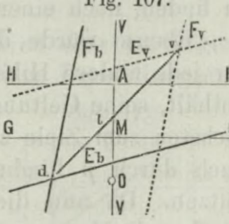
§. 37.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt zweier Ebenen zu bestimmen.

Lösung. Ist $E_b E_v$ (Fig. 107) die eine, und $F_b F_v$ die andere Ebene, deren Durchschnitt bestimmt werden soll, so ist klar, dass der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt d der beiden Bildflächtracen E_b, F_b einen in der Bildebene gelegenen Punkt der zu bestimmenden Durchschnittslinie liefert.

Fig. 107.

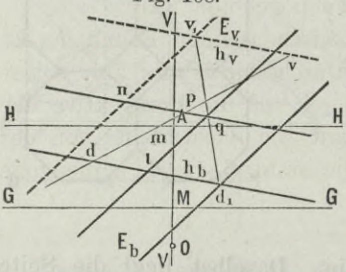


Ebenso ergibt sich der Verschwindungspunkt der zu suchenden Geraden als Durchschnitt der beiden Verschwindungslinien E_v, F_v; denn die gerade Durchschnittslinie gehört beiden Ebenen an, folglich muss auch ihr Verschwindungspunkt v in jeder der beiden Verschwindungslinien gelegen sein. Es ist somit die Verbindungslinie l der beiden Punkte v und d der zu suchende Durchschnitt.

Das eben Ausgesprochene findet in so lange seine Anwendung, als die zum Schnitt zu bringenden Ebenen die Bildebene schneiden.

Wäre jedoch eine der beiden Ebenen parallel zur Bildfläche (Fig. 108), und zur Bestimmung derselben, wie wir früher annahmen, ein Punkt p auf einer Geraden m_d^v gegeben, so wird man sich in diesem, wie überhaupt in allen Fällen, wo entweder der Durchschnittspunkt der Bildflächtracen, oder der Verschwindungslinien, oder beide zugleich ausserhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche fallen, dadurch helfen, dass man beide Ebenen durch andere schneidet, und in den Durchschnittspunkten der so erhaltenen Schnittlinien, Punkte des verlangten Durchschnitts erhält.

Fig. 108.



Die zu dem eben genannten Zwecke dienenden Ebenen sind also Hilfsebenen, welchen beliebige Lagen gegeben werden können. In den Fällen aber, wo schon die Grundebene als solche anwendbar ist, wird man es selbstverständlich nicht unterlassen, dieselbe zu benützen.

Im obigen Beispiele, wo wir es mit einer zur Bildfläche parallelen und durch den Punkt p bestimmten Ebene zu thun haben, erscheint es jedoch nicht immer zweckmässig, die Grundebene selbst als Hilfsebene zu benützen, indem man, um den Durchschnitt derselben mit der zur Bildfläche parallelen Ebene zu finden, noch einer zweiten Hilfsebene benöthigen würde.

Ebenso würde das hier von der Grundebene Gesagte auch für jede andere Hilfsebene, welche die Gerade m_d^v in sich nicht enthält, seine Geltung haben. Wir werden demnach, um am einfachsten zum Ziele zu gelangen, eine durch die Gerade m_d^v, also auch durch p hindurchgelegte Ebene $h_b h_v$, als Hilfsebene benützen. Da nun diese Ebene die zur Bildfläche parallele Ebene in der durch p zu h_b parallel gezogenen Geraden n, und die Ebene $E_b E_v$ in der Geraden $d_1 v_1$ schneidet, so muss in dem diesen Durchschnittslinien gemeinschaftlichen Punkte q ein Punkt des verlangten Durchschnittes l sich ergeben, welch' letzterer parallel zu E_b zu ziehen sein wird.

In diesem Falle, wo schon für die Richtung der Durchschnittslinie eine Bedingung, nämlich die, dass sie parallel zu E_b sein müsse, vorlag, so wie auch in allen anderen Fällen, wo etwas Aehnliches eintritt, wie z. B. dort, wo sich blos der Durchschnitt der Bildflächtracen, oder blos der der Verschwindungslinien ermitteln lässt, reicht schon eine Hilfsebene aus, während sonst die Anwendung zweier Hilfsebenen geboten wäre.

Bemerkung 1. Sucht man zwischen einer Ebene $E_b\,E_v$ (Fig. 109) und der Grundebene die Durchschnittslinie auf, so ist die Perspektive derselben nichts anderes, als die Perspektive der Grundebentrace E'_g. Wir sehen somit wie leicht es ist von der zweiten Darstellungsart, §. 14, auf die erste, §. 11, d. i. diejenige

Fig. 109.

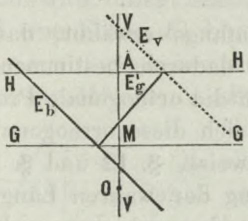
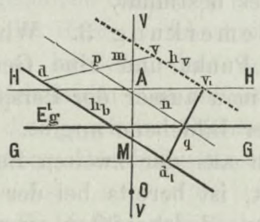


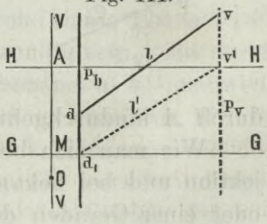
Fig. 110.



überzugehen, wo die Ebene durch die Bildflächtrace und die Perspektive der Grundflächtrace bestimmt wird. Dass es auch hier mitunter nöthig sein dürfte, Hilfsebenen anzuwenden, ist von selbst klar. So wurde z. B. in Fig. 110 für die zur Bildfläche parallele und durch den auf m_a^v gelegenen Punkt p bestimmte Ebene die Perspektive der Grundflächtrace E'_g, die zu der Grundlinie parallel sein muss, vermittelst der durch m_a^v gelegten Ebene $h_b\,h_v$ ermittelt.

Bemerkung 2. Ebenso einfach wird es sein zu zeigen, wie man von der im §. 12 und §. 13 behandelten Darstellungsart, einer Geraden und eines Punktes, auf die andere in §. 9 und §. 10 besprochene Darstellungsart, bei welcher man die Perspektive und die Perspektive der Grundebenprojektion angibt, zurückkommen kann.

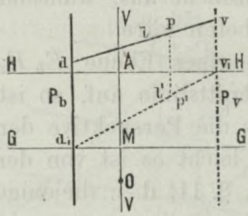
Fig. 111.



Ist nämlich l_a^v (Fig. 111) eine Gerade, so hat man blos durch dieselbe eine zur Grundebene projecirende Ebene $p_b\,p_v$ zu legen, und den Durchschnitt derselben mit der Grundebene zu bestimmen, um so in l' die Perspektive der Grundflächprojektion der Geraden l_d^v zu erhalten.

Wäre aber die Perspektive p (Fig. 112) eines Punktes auf einer Geraden l_d^v, die zu seiner Bestimmung dient, gegeben, und man wollte die Perspektive seiner Grundflächprojektion erhalten, so wird es nur nöthig sein, die Perspektive der Grundflächprojektion l' dieser Geraden, welche man mittelst $p_b p_v$ ermittelt hat, von einer durch p zur Grundlinie senkrecht gezogenen Geraden in p' zu durchschneiden, indem eben dieser Punkt p' die verlangte Perspektive der Grundflächprojektion des gegebenen Punktes bestimmt.

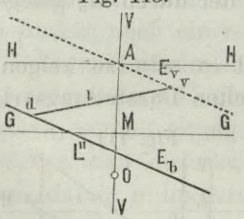
Fig. 112.



Bemerkung 3. Wir haben anfangs erwähnt, dass man einen Punkt und eine Gerade auch dadurch bestimmen kann, wenn man ausser der Perspektive noch die orthogonale Projektion auf der Bildebene angibt. Wie man sich diese orthogonale Projektion aus der zweiten Bestimmungsweise, §. 12 und §. 13, ermittelt, ist bereits bei der Bestimmung der wahren Länge einer Geraden durchgeführt worden, es ist demnach nur noch anzudeuten, wie man das Umgekehrte zu bewerkstelligen hat, d. i. wie man aus der gegebenen Perspektive und der orthogonalen Projektion auf die zweite Darstellungsart übergehen könne.

Bei einer Geraden, die durch ihre Perspektive l (Fig. 113) und ihre orthogonale Projektion L'' bestimmt ist, hat man ihren Durchschnittspunkt mit der Bildebene in dem Punkte d, in welchem die Perspektive l von der orthogonalen Projektion L'' geschnitten wird, zu suchen, da L'' zugleich die Bildflächtrace E_b einer zur Bildfläche senkrechten, die gegebene Gerade enthaltenden Ebene bestimmt. Der Verschwindungspunkt v dieser Geraden wird sich nun in l und in der Verschwindungslinie E_v dieser Ebene, welche durch A hindurchgeht und zu E_b parallel ist, ergeben.

Fig. 113.



Wie man sich bei gegebener Perspektive der Grundflächprojektion und bei bekannter orthogonaler Projektion eines Punktes oder einer Geraden die entsprechende Perspektive ermitteln kann, dürfte hier übergangen werden können, indem die dabei auszuführenden Construktionen, bei welchen man den Durchschnitt zweier Geraden oder zweier Ebenen zu bestimmen hat, einer weiteren Erklärung nicht bedürfen.

Die Grundflächprojektion und die orthogonale Projektion eines Punktes auf die Bildebene liegen immer in der zur Grundlinie senkrecht stehenden Ebene, es ist somit leicht einzusehen, in welcher Beziehung die Perspektive der Grundflächprojektion und die orthogonale Projektion zu einander stehen müssen.

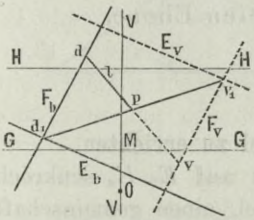
§. 38.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt einer Geraden l_d^v mit einer Ebene $E_b E_v$ zu construiren.

Lösung. Legt man durch die gegebene Gerade l_d^v (Fig. 114) irgend eine Ebene $F_b F_v$, und bestimmt ihren Durchschnitt $d_1 v_1$ mit $E_b E_v$, so ist klar, dass derjenige Punkt, in welchem die eben aufgefundene Schnittlinie die gegebene Gerade trifft, den verlangten Durchschnittspunkt p angibt.

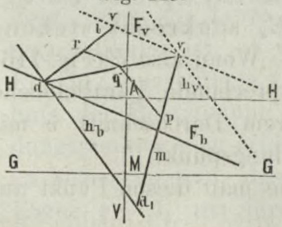
Fig. 114.



Was die Wahl dieser Hilfsebene anbelangt, so ist darauf zu sehen, dass sich die Bildflächtracen und Verschwindungslinien noch innerhalb der Zeichnungsfläche treffen, und dass der Hilfsschnitt $d_1 v_1$ die gegebene Gerade unter einem Winkel schneide, der dem Winkel von 90^0 möglichst nahe kommt.

In dem Falle, wo man den Durchschnitt einer Geraden l_d^v (Fig. 115) mit einer zur Bildfläche parallelen Ebene (zu deren Bestimmung ein Punkt p auf einer Geraden $m_{d'}^{v'}$ gegeben ist) zu bestimmen hat, wird es, nachdem man durch l_d^v eine Ebene $F_b F_v$ legte, noch nothwendig sein, eine durch $m_{d'}^{v'}$ gehende Hilfsebene $h_b h_v$ anzuwenden. Hiebei ist es zweckmässig für die Ebene $F_b F_v$ die Verbindungslinie der Punkte v und v_1 als Verschwindungslinie anzunehmen, und für die Ebene $h_b h_v$ die Gerade $d d_1$ als Bildflächtrace zu benützen.

Fig. 115.



Bei einer solchen Annahme wird nämlich dv_1 unmittelbar die Durchschnittslinie der beiden Ebenen $h_b h_v$ und $F_b F_v$ angeben. Nachdem nun die durch p bestimmte, zur Bildfläche parallele Ebene durch $h_b h_v$ in der zur Bildflächtrace h_b parallelen Geraden pq geschnitten wird, so ist klar, dass die Gerade qr, welche durch q parallel zu F_b gezogen wird, die Durchschnittslinie der Ebene $F_b F_v$ mit der zur Bildfläche parallelen Ebene vorstellt. Diese letztere Durchschnittslinie begegnet nun der Geraden l_d^v im Punkte r; es ist somit dieser Punkt der verlangte Durchschnittspunkt.

Bemerkung. Jede der Geraden dv, dv_1, $d_1 v_1$ wird durch r, q, p in proportionale Theile getheilt, und dies würde auch für jede andere Gerade gelten, deren Durchschnitt mit der durch p gehenden Ebene gesucht werden sollte. Man kann dies umkehren und sagen: alle Punkte, welche die Perspektiven von geraden Linien (nämlich ihre Längen zwischen dem Durchschnitts- und Verschwindungspunkte) in proportionale Theile theilen, liegen in einer zur Bildfläche parallelen Ebene.

§. 39.

Aufgabe.

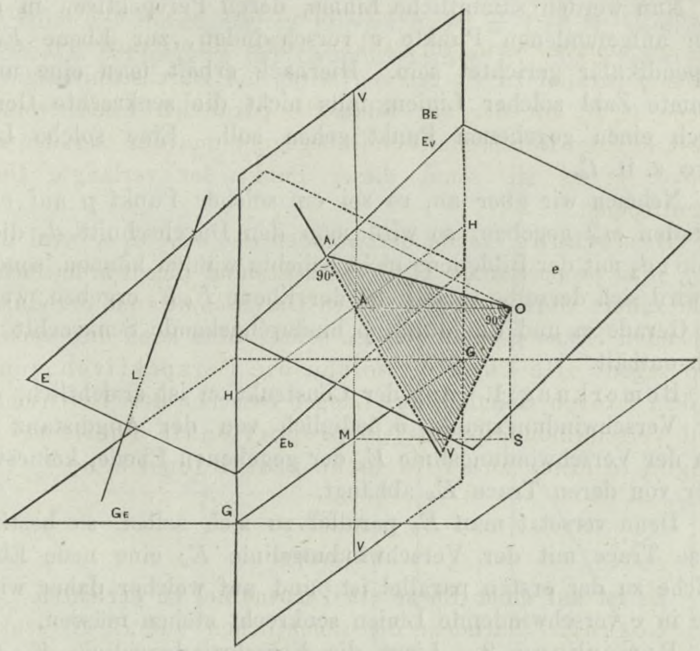
Es ist auf einer Ebene ein Perpendikel zu errichten.

Lösung. Nachdem die sämmtlichen auf $E_b\ E_v$ senkrecht stehenden Linien, als untereinander parallel, einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt besitzen, so wird es sich bei der Lösung der vorliegenden Aufgabe vor Allem um den Ort dieses Verschwindungspunktes handeln. Dieser ergibt sich sehr einfach, wenn man bedenkt, dass derselbe nichts anderes als der Durchschnitt des entsprechenden Parallelstrahles, d. i. einer durch das Auge hindurchgehenden, auf der Parallelebene der gegebenen Ebene $E_b E_v$ senkrecht stehenden Geraden mit der Bildfläche ist. Wenn also E (Fig. 116) die gegebene Ebene und e die ihr entsprechende Parallelebene ist, so bestimmt die Gerade Ov in ihrem Durchschnitt v mit der Bildebene den verlangten Verschwindungspunkt.

Es wird nur noch zu zeigen sein, wie man diesen Punkt auf der Zeichnungsfläche erhält.

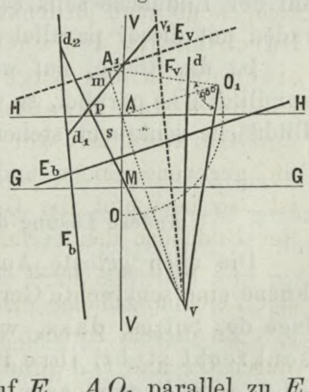
Zu diesem Zwecke betrachten wir die Ebene vOA_1, die wir durch Ov und OA hindurchlegen, und welche demnach die Linie vA zu ihrer Bildflächtrace haben wird. Diese Ebene steht auf der Parallelebene e und der Bildfläche B_E senkrecht, somit auch auf ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, d. i. auf der Ver-

Fig. 116.



schwindungslinie E_v. Daraus geht hervor, dass die Trace $v A A_1$ auf E_v senkrecht sein muss, und dass somit der Nebenaugpunkt einer Ebene, der Augpunkt und der Verschwindungspunkt der auf ihr senkrecht stehenden Linien in einer und derselben Geraden enthalten sind. Nachdem ferner die Linie $O v$ gegen $O A_1$ perpendikulär ist, so wird, um die in Fig. 117 ausgeführte Construktion behufs der Bestimmung des Verschwindungspunktes v zu erläutern, blos noch zu bemerken sein, dass man sich die Ebene $v\,O\,A_1$ um ihre Bildflächtrace $A_1 v$ in die Bildebene umgelegt zu denken hat.

Fig. 117.



Es wurde sonach $A_1 v$ senkrecht auf E_v, $A\,O_1$ parallel zu E_v

gezogen, auf $A O_1$ von A nach O_1 die Augdistanz aufgetragen, und in O_1 auf $A_1 O_1$ die Senkrechte $O_1 v$ gefällt, welche $A_1 A v$ in dem zu bestimmenden Verschwindungspunkte v trifft.

Nun werden sämmtliche Linien, deren Perspektiven in dem eben aufgefundenen Punkte v verschwinden, zur Ebene $E_b E_v$ perpendikulär gerichtet sein. Hiernach erhält man eine unbestimmte Zahl solcher Linien, falls nicht die senkrechte Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Eine solche Linie wäre z. B. l_d^v.

Nehmen wir aber an, es sei ein solcher Punkt p auf einer Geraden $m_{d_1}^{v_1}$ gegeben, so wird man den Durchschnitt d_2 dieser Linie $v d_2$ mit der Bildebene nicht beliebig wählen können, sondern es wird sich derselbe vermittelst der Ebene $F_b F_v$ ergeben, welche die Gerade m und die durch p hindurchgehende Senkrechte s in sich enthält.

B e m e r k u n g 1. Aus der Construktion ist ersichtlich, dass der Verschwindungspunkt v lediglich von der Augdistanz und von der Verschwindungslinie E_v der gegebenen Ebene, keineswegs aber von deren Trace E_b abhängt.

Denn versetzt man E_b parallel zu sich selbst, so bestimmt diese Trace mit der Verschwindungslinie E_v eine neue Ebene, welche zu der ersten parallel ist, und auf welcher daher wieder alle in v verschwindende Linien senkrecht stehen müssen.

B e m e r k u n g 2. Liegt die Verschwindungslinie E_v nahe dem Augpunkt, so fällt der Verschwindungspunkt v weit hinaus, und er fällt in unendliche Entfernung, wenn die Verschwindungslinie der Ebene durch den Augpunkt geht, weil dann die Ebene auf der Bildfläche senkrecht steht, daher die zu suchenden Geraden mit dieser parallel sind.

Ist die Ebene, auf welche die Senkrechte zu errichten ist, zur Bildfläche parallel, so wird die zu ziehende Gerade auch auf der Bildfläche senkrecht stehen, daher im Augpunkte verschwinden.

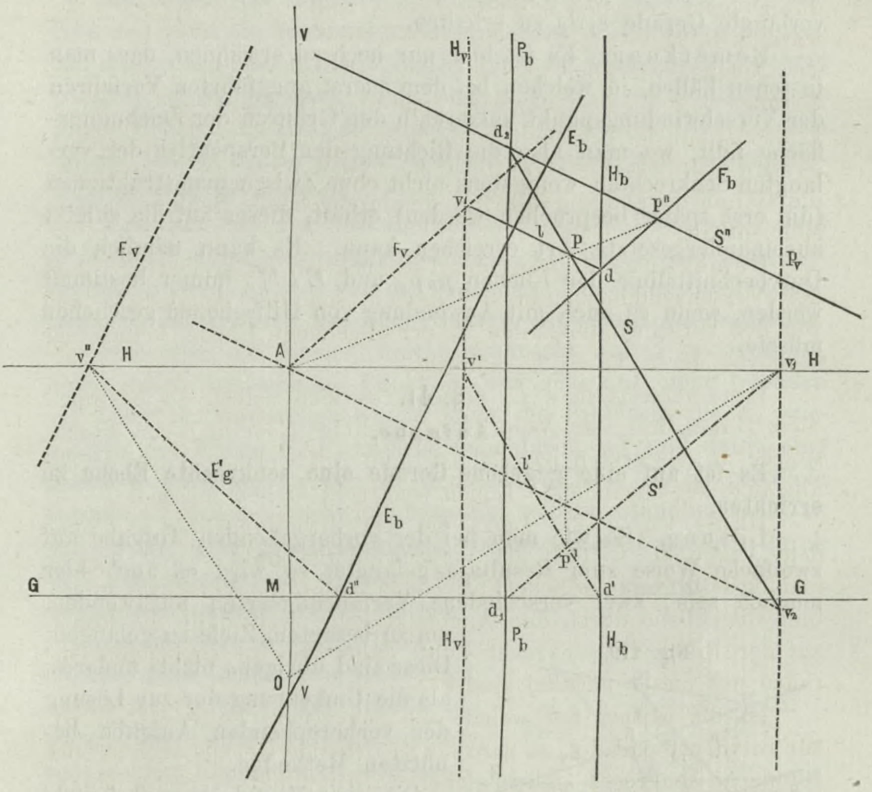
§. 40.

Andere Lösung der vorhergegangenen Aufgabe.

Die eben gelöste Aufgabe, durch einen Punkt p auf eine Ebene eine senkrechte Gerade zu errichten, kann auch auf Grundlage des Satzes, dass, w e n n e i n e G e r a d e a u f e i n e r E b e n e s e n k r e c h t s t e h t, i h r e P r o j e k t i o n e n a u f d e n T r a c e n d i e s e r E b e n e s e n k r e c h t s e i n m ü s s e n, durchgeführt werden.

Ist also $E_b\,E_v$ die gegebene Ebene und p der durch die Gerade l_d^v bestimmte Punkt, und hat man die Bildflächprojektion p'' (Fig. 118) und die Perspektive der Grundflächprojektion p' mit Hilfe der durchgelegten Ebenen $F_b\,F_v$ und $H_b\,H_v$ aufgesucht, ferner die Perspektive der Grundflächtrace E'_g der Ebene $E_b\,E_v$

Fig. 118.



auf bekannte Art ermittelt, so wird die Bildflächprojektion S'' der verlangten Senkrechten durch p'' geometrisch senkrecht gegen die Bildflächtrace E_b zu ziehen sein. Die Perspektive S' der Grundflächprojektion dieser Senkrechten kann natürlich nur perspektivisch senkrecht gegen E'_g gezogen werden, wesshalb man sich veranlasst sieht, ihren Verschwindungspunkt v_1 mittelst des der Grundebene entsprechenden, in die Bildebene umgelegten Parallelstrahles $O\,v_1$ zu bestimmen.

Kennt man sonach die Bildflächprojektion S'' und die Perspektive der Grundflächprojektion S' des durch p zu ziehenden Perpendikels, so unterliegt es auch keiner weiteren Schwierigkeit, die Perspektive S desselben aufzufinden. Man hat nämlich nur die durch S' gelegte, zur Grundfläche projecirende Ebene $p_b p_v$ mit der durch S'' gehenden und auf der Bildebene senkrecht stehenden Ebene $E'_b E'_v$ zum Durchschnitt zu bringen, um die verlangte Gerade $v_2 d_2$ zu erhalten.

Bemerkung. Es ist hier nur noch zu erwähnen, dass man in jenen Fällen, in welchen bei dem zuerst angeführten Verfahren der Verschwindungspunkt ausserhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche fällt, wo man also die Richtung der Perspektive der verlangten Senkrechten wenigstens nicht ohne Zwischenconstruktionen (die erst später besprochen werden) erhält, dieses auf die zuletzt auseinandergesetzte Art erreichen kann. Es kann nämlich die Durchschnittslinie der Ebenen $p_b p_v$ und $E'_b E'_v$ immer bestimmt werden, wenn es auch mit Anwendung von Hilfsebenen geschehen müsste.

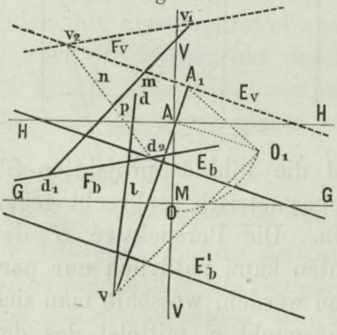
§. 41.

Aufgabe.

Es ist auf eine gegebene Gerade eine senkrechte Ebene zu errichten.

Lösung. So wie man bei der vorhergehenden Aufgabe auf zweifache Weise zum Resultate gelangte, so wird es auch hier möglich sein, zwei verschiedene Verfahrungsarten anzuwenden, um zu besagtem Ziele zu gelangen. Diese sind übrigens nichts anderes, als die Umkehrung der zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe benützten Methoden.

Fig. 119.



Die eine Verfahrungsart beruht darauf, dass die Verschwindungslinie einer Ebene, welche auf einer Geraden l_d^v (Fig. 119) senkrecht steht, mag diese Ebene durch was immer für einen Punkt hindurchgehen, sich durch das bei O_1 rechtwinklige Dreieck $v O_1 A_1$ ergibt. Wird nämlich v mit A verbunden, so ist dies die orthogonale Projektion des dem Punkte v

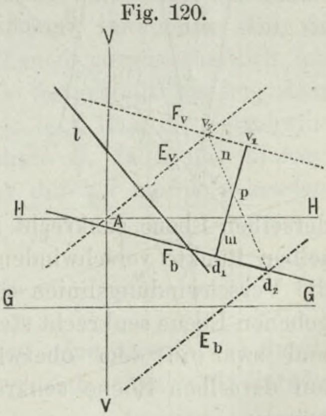
entsprechenden Parallelstrahls auf der Bildebene, wesshalb die Verschwindungslinie der zu suchenden Ebene senkrecht auf Av stehen muss. Der Nebenaugpunkt A_1 derselben wird einfach erhalten, wenn $A O_1$ senkrecht auf Av gezogen, gleich der Augdistanz $A O$ gemacht, und die Gerade $A_1 O_1$ bis zum Durchschnitte A_1 mit Av, durch O_1 senkrecht auf $v O_1$ geführt wird.

Auf diese Art ergibt sich die Verschwindungslinie E_v, und falls nun nicht ein bestimmter Punkt gegeben wäre, durch welchen die senkrechte Ebene hindurchgehen soll, so könnte jede beliebige parallel zu E_v gezogene Linie, wie z. B. E'_b, als Bildflächtrace dieser Ebene angenommen werden, weil unendlich viele Ebenen, welche jedoch sämmtlich zu einander parallel sind, obiger Bedingung Genüge leisten.

Aus dem bei der vorhergehenden Aufgabe Bemerkten, dass nämlich der Verschwindungspunkt einer auf einer Ebene senkrecht stehenden Geraden blos von der Verschwindungslinie dieser Ebene abhängt, ist übrigens das eben Gesagte gleichfalls einleuchtend.

Soll aber die Ebene, welche senkrecht auf l_d^v zu legen ist, durch einen bestimmten Punkt p, der sich auf einer Geraden $m_{d_1}^{v_1}$ befindet, hindurchgehen, so kann die Bildflächtrace E_b vermittelst der Ebene $F_b F_v$, welche man durch $m_{d_1}^{v_1}$ und durch eine durch p gehende, zu der zu suchenden Ebene $E_b E_v$ parallele Gerade $n_{d_2}^{v_2}$ (deren Verschwindungspunkt selbstverständlich in E_v zu wählen ist) ganz genau bestimmt werden. Sie ist nämlich durch den Durchstosspunkt d_2 der eben erwähnten Geraden $n_{d_2}^{v_2}$ zu führen.

Fig. 120.



Ist die Gerade l (Fig. 120), auf welche eine senkrechte Ebene zu fällen ist, parallel zur Bildfläche, so wird die Verschwindungslinie der senkrechten Ebene durch den Augpunkt A gehen müssen, und zugleich auf der Richtung der Perspektive l senkrecht erscheinen. Soll nun diese Ebene durch einen auf $m_{d_1}^{v_1}$ gelegenen Punkt p gehen, so ergibt sich, wie oben, mit Hilfe der Ebene $F_b F_v$ die Bildflächtrace E_b.

Die zweite Verfahrungsart bei der Lösung der hier gestellten Aufgabe fordert vor Allem die orthogonale Projektion der gegebenen Geraden und des gegebenen Punktes auf der Bildfläche, ferner die Perspektiven der entsprechenden Grundflächprojektionen.

Bemerkung. Da jedoch die Durchführung der hier nothwendigen Construktionen eine blose Wiederholung des bereits in §. 40 Erörterten wäre, so kann dieselbe, unter Hinweisung auf das dort Gesagte, übergangen werden.

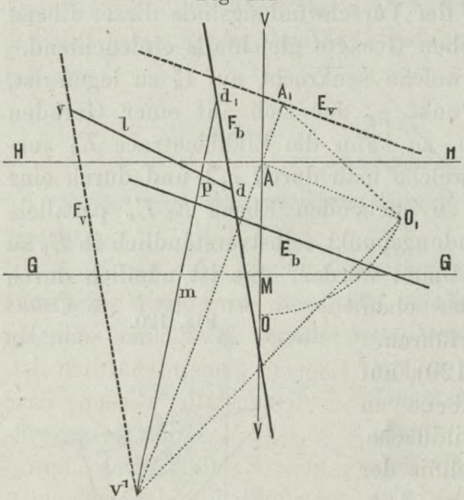
§. 42.

Aufgabe.

Es ist durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die auf einer anderen Ebene senkrecht steht.

Um diese Aufgabe zu lösen, wird man sich in der gegebenen Geraden l_d^v einen Punkt p (Fig. 121) annehmen, durch diesen eine Senkrechte $m_{d_1}^{v_1}$ zur gegebenen Ebene $E_b\,E_v$ ziehen, und hierauf in der Ebene $F_b F_v$, welche die Geraden l und m in sich enthält, das gewünschte Resultat finden.

Fig. 121.



Dass man von der Geraden m blos (nach §. 39) den Verschwindungspunkt v' zu suchen, und denselben mit v zu verbinden hat, um die Verschwindungslinie der zu suchenden Ebene zu erhalten, ist selbstverständlich.

Bemerkung. Nachdem alle auf einer und derselben Ebene senkrecht stehenden Geraden in einem und demselben Punkte verschwinden, so ist leicht einzusehen, dass auch die Verschwindungslinien sämmtlicher Ebenen, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht stehen, sich in einem bestimmten Punkte, und zwar in dem oberwähnten Verschwindungspunkte v' der auf derselben Ebene senkrecht stehenden Geraden durchkreuzen müssen.

§. 43.

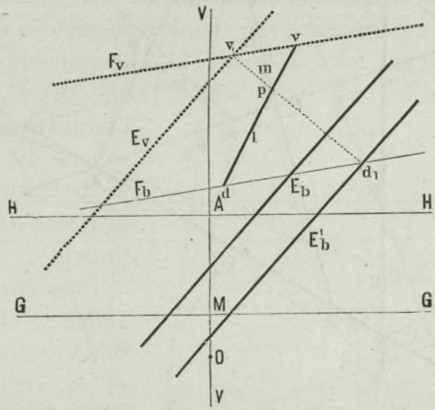
Aufgabe.

Es ist durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden, und eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene zu führen.

Wegen der bereits bekannten Lösung der ersten Aufgabe, soll blos der letzteren Erwähnung geschehen.

Lösung. Ist p (Fig. 122) der gegebene, auf l_d^v gelegene

Fig. 122.



Punkt, und $E_b E_v$ die gegebene Ebene, so wird blos ein Punkt d_1 der Bildflächtrace der fraglichen Ebene zu suchen sein, da die Verschwindungslinie E_v beiden Ebenen gemeinschaftlich ist. Dieser Punkt d_1 kann einfach dadurch festgestellt werden, dass man durch p irgend eine Gerade $m_{d_1}^{v_1}$ so legt, dass ihr Verschwindungspunkt v_1 in die Verschwindungslinie E_v fällt, und hierauf deren Durchstosspunkt d_1 mit Hilfe der durch l und m gehenden Hilfsebene $F_b F_v$ aufsucht.

§. 44.

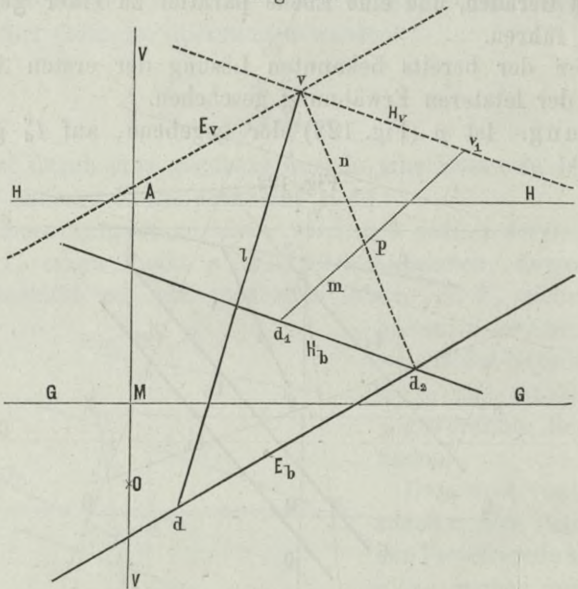
Aufgabe.

Es ist: a) durch einen Punkt und eine Gerade, b) durch zwei parallele Gerade und c) durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene zu legen.

Die beiden ersten Aufgaben können eine gemeinschaftliche Lösung finden, indem es am zweckmässigsten erscheint, die erstere auf die zweite zurückzuführen; die dritte hingegen kann, als schon mehrfach angewendet, hier übergangen werden.

Ist also l_d^v (Fig. 123) die gegebene Gerade und p der auf

Fig. 123.



der Linie $m_{d_1}^{v_1}$ gelegene Punkt, so führe man durch denselben die Gerade $n_{d_2}^v$ parallel zu l_d^v und bestimme deren Durchstosspunkt d_2, so wird $d d_2$ die Bildflächtrace E_b, und E_v durch v parallel zu $d d_2$ gezogen, die Verschwindungslinie der gesuchten Ebene $E_b E_v$ sein.

§. 45.

Aufgabe.

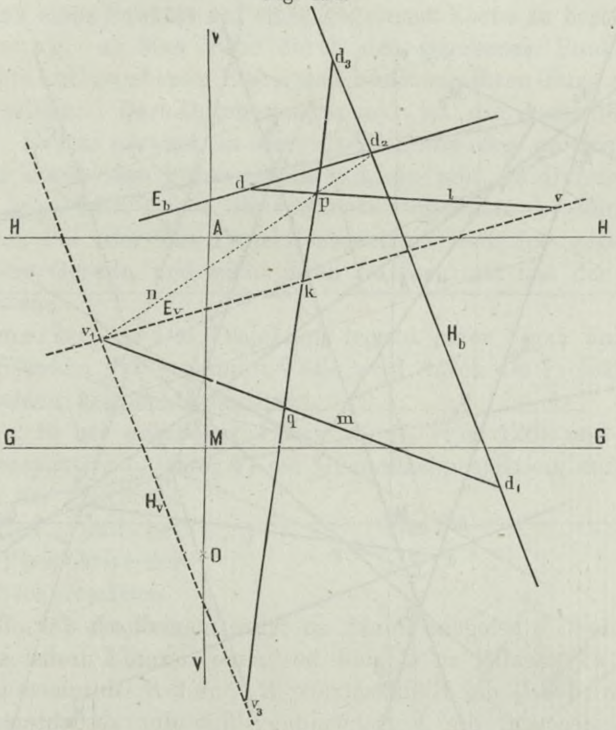
Es sind zwei Punkte gegeben, man soll die Verbindungslinie dieser beiden Punkte bestimmen.

Lösung. Seien die besagten Punkte p und q (Fig. 124) auf den Geraden l_d^v und $m_{d_1}^{v_1}$ gelegen, so wird der Verschwindungspunkt v_3 und der Durchstosspunkt d_3 der Verbindungslinie k zu suchen sein.

Zu diesem Zwecke verbinde man einen der beiden Punkte, z. B. p, mit dem Verschwindungspunkte v_1 der zweiten Geraden, und bestimme den Durchstosspunkt d_2 dieser Geraden n mit

Hilfe der durch l und n gelegten Ebene $E_b E_v$. Nachdem nun n zu m parallel ist, und die Gerade k beide Linien durchschneidet, so werden offenbar diese drei Geraden in einer Ebene $H_b H_v$

Fig. 124.



liegen, deren Bildflächtrace durch $d_2 d_1$ gehend, die Gerade k in dem zu suchenden Durchstosspunkte d_3 trifft.

Ebenso schneidet die durch v_1 parallel zu H_b gezogene Verschwindungslinie H_v die Gerade k im fraglichen Verschwindungspunkte v_3.

§. 46.

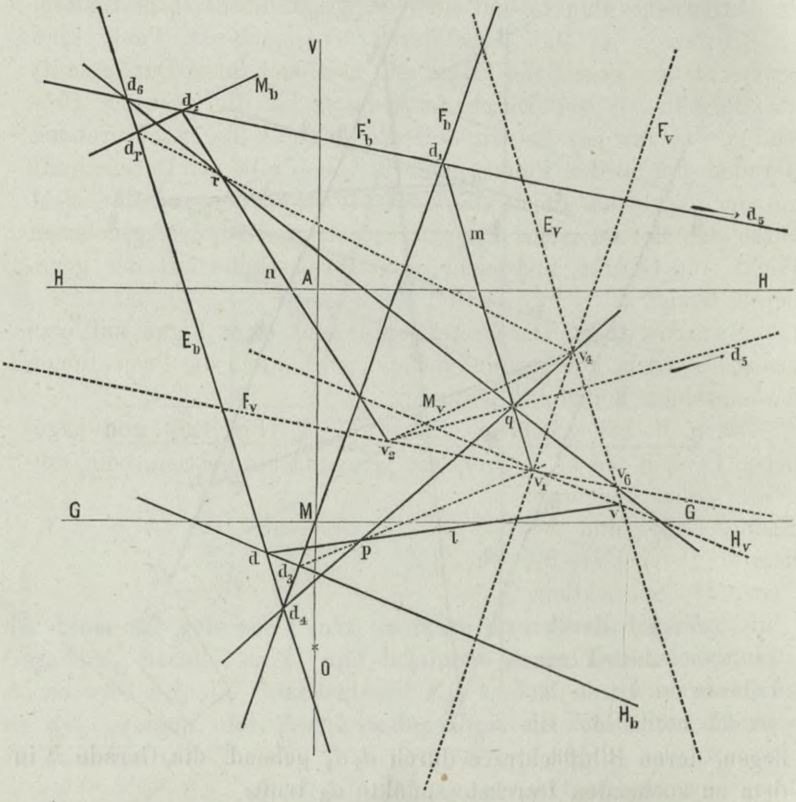
Aufgabe.

Es ist durch drei gegebene Punkte eine Ebene zu legen.

Lösung. Sind p, q und r (Fig. 125) die drei Punkte, welche beziehungsweise in den Geraden l_d^v, $m_{d_1}^{v_1}$, $n_{d_2}^{v_2}$ liegen, so bestimme man nach §. 45 die Verbindungslinie pq der Punkte p und q in $v_4 d_4$, so wie die Verbindungslinie qr der Punkte q und r in

$v_6 d_6$. Die Bildflächtrace E_b und die Verschwindungslinie E_v der zu suchenden Ebene sind sodann durch Vereinigung der Durchstosspunkte $d_4 d_6$ und der Verschwindungspunkte $v_4 v_6$ gegeben.

Fig. 125.



Der Umstand, dass E_b parallel zu E_v sein muss, bietet eine Controle für die Genauigkeit der durchgeführten Construktionen.

Einfacher jedoch gelangt man zum Ziele, wenn anstatt der zweiten Geraden rq jene Linie bestimmt wird, welche durch den Punkt r geht, und zu der eben bestimmten Geraden pq parallel ist. Letztere erhält man sonach, wenn r mit v_4 verbunden und ihr Durchstosspunkt d_r mit Zuhilfenahme der Geraden n mittelst der Ebene $M_v M_b$ aufgesucht wird.

Die Punkte d_4 und d_r mit einander vereint, werden die Bildflächtrace der zu suchenden Ebene geben, deren Verschwindungslinie E_v durch v_4 parallel zu E_b zu ziehen ist.

§. 47.

Aufgabe.

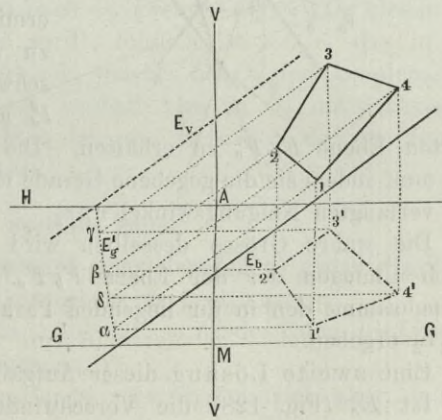
Es ist a) die orthogonale, b) die schiefe und c) die centrale Projektion eines Punktes auf einer gegebenen Ebene zu bestimmen.

Lösung. a) Man ziehe durch den gegebenen Punkt eine Senkrechte zur gegebenen Ebene und bestimme ihren Durchschnitt mit derselben. Der Durchschnittspunkt ist die gesuchte Projektion. b) Die parallel zu der als Richtung der projecirenden Geraden durch den Punkt geführte Linie gibt im Durchschnitt mit der gegebenen Ebene die verlangte Projektion. c) Man zieht durch den Pol oder das Projektionscentrum und den gegebenen Punkt eine Gerade, und sucht ihren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene.

Bemerkung. Die Projektion irgend einer Figur auf eine Ebene in jedem der genannten Fälle wird durch die Projektionen der einzelnen Eckpunkte bestimmt.

Ist z. B. bei gegebener Ebene $E_b E_v$ (Fig. 126) und gegebener Perspektive (*1*, *2*, *3*, *4*) die Grundflächprojektion, oder umgekehrt, bei gegebener Ebene $E_b E_v$ und bekannter Perspektive der Grundflächprojektion (*1'*, *2'*, *3'*, *4'*) die Perspektive einer Figur zu bestimmen, so hat man einerseits blos die orthogonalen Projektionen der einzelnen Eckpunkte auf der Grundebene, und andererseits die schiefen Projektionen dieser Punkte auf der Ebene $E_b E_v$ zu ermitteln, wobei die die Richtung der projecirenden Geraden bestimmende Linie auf der Grundebene senkrecht steht. — In beiden Fällen wurden die nöthigen Durchschnittspunkte der entsprechenden projecirenden Geraden in der Art bestimmt, dass man durch diese zur Bildfläche parallele Ebenen legte. Solche Hilfsebenen sind am zweckmässigsten

Fig. 126



zu wählen, weil durch dieselben die Grundebene parallel zur Grundlinie, und die Ebene $E_b E_v$ parallel zur Bildflächtrace geschnitten wird.

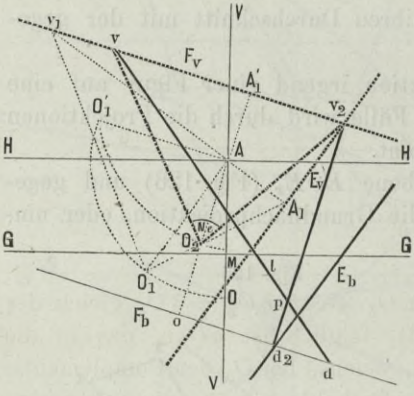
§. 48.

Aufgabe.

Es ist der Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen.

Lösung. Ist l_d^v (Fig. 127) die gegebene Gerade, so wird man durch dieselbe eine senkrechte Ebene $F_b F_v$ zur gegebenen Ebene $E_b E_v$ legen, und in dem Durchschnitte der beiden die orthogonale Projektion der Geraden auf der Ebene $E_b E_v$, also den zweiten Schenkel des verlangten Neigungswinkels erhalten.

Fig. 127.



Wir haben demnach den Verschwindungspunkt v_1 aller auf der Ebene $E_b E_v$ senkrecht stehenden Geraden zu ermitteln, und diesen mit v zu verbinden, um die Verschwindungslinie F_v der durch l_d^v auf $E_b E_v$ senkrecht geführten Ebene $F_b F_v$ zu erhalten. Die Durchschnittslinie $d_2 v_2$ gibt nun, indem sie die gegebene Gerade $d v$ im Punkte p schneidet, den verlangten Neigungswinkel $v p v_2$.

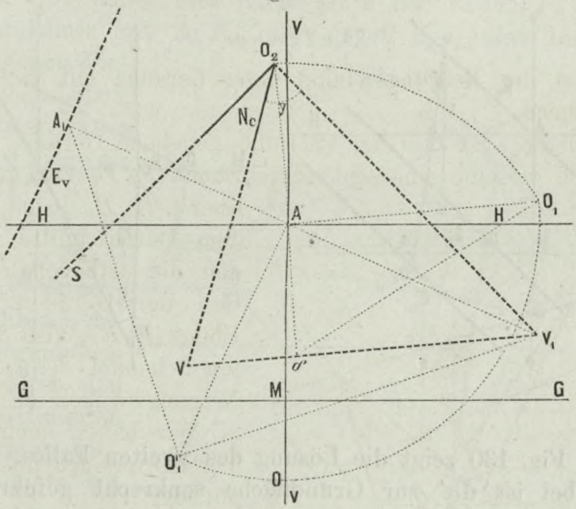
Die wahre Grösse desselben wird sich auf bekannte Art durch Umlegen der der Ebene $F_b F_v$ entsprechenden Parallelebene, sammt den in ihr liegenden Parallelstrahlen v und v_2, in $v O_2 v_2$ ergeben.

Eine zweite Lösung dieser Aufgabe wäre folgende:

Ist E_v (Fig. 128) die Verschwindungslinie der gegebenen Ebene, und v der Verschwindungspunkt der gegebenen Geraden, so bestimme man, wie im vorhergehenden Fall, den Verschwindungspunkt v_1 der auf E_v senkrechten Geraden.

Bedenkt man, dass die den Punkten v und v_1 zugehörigen Parallelstrahlen den Complementswinkel des zu suchenden Neigungswinkels miteinander bilden, so folgt, dass man den ersteren erhält, wenn man das Dreieck, dessen Ecken das Auge im Raume und die beiden Verschwindungspunkte v und v_1 sind, um die Bildflächtrace seiner Ebene, d. i. um $v v_1$, in die Bildebene umlegt.

Fig. 128.



Hiebei fällt das Auge nach O_2 (wenn $\delta O_2 = \delta O_1$ gleich der Nebenaugdistanz gemacht wird), folglich ist $v O_2 v_1$ das in die Bildebene niedergelegte Dreieck, welches bei O_2 den Complementswinkel $y = 90 - N_e$ enthält, weshalb blos in O_2 die Senkrechte $O_2 S$ auf $O_2 v_1$ zu errichten ist, um in $v O_2 S$ den verlangten Neigungswinkel zu erhalten.

Specielle Fälle.

Es ist der Neigungswinkel einer Geraden a) gegen die Bildebene, und b) gegen die Grundebene zu bestimmen.

Was diese beiden Fälle anbelangt, so ist der Gang der Lösung derselbe wie im Vorhergehenden.

Die graphischen Operationen vereinfachen sich aber, indem hier durch die gegebene Gerade l_d^v im ersten Falle eine projecirende Ebene zur Bildfläche, und im zweiten eine auf der Grundebene senkrecht stehende Ebene zu legen ist.

Der erste Fall ist in Fig. 129 durchgeführt. Hiebei ist $E_b E_v$ die projecirende Ebene. Die wahre Grösse des Neigungswinkels, der hier von der Geraden dv und der Bildflächtrace E_b eingeschlossen wird, ist in $A v O_1 = v O_1 E'_b = N_b$ dargestellt, und würde sich nach der zweiten Lösungsweise unmittelbar durch Verzeichnung des Dreiecks $A v O_1$ ergeben.

Fig. 129.

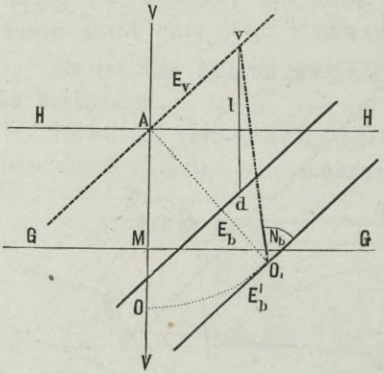
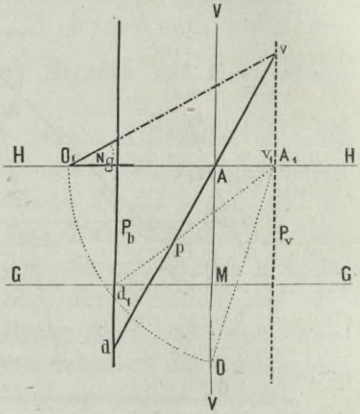


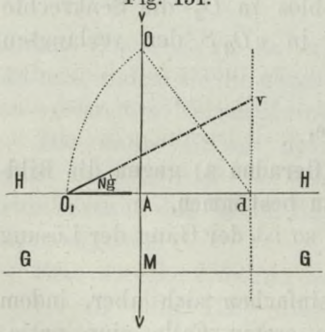
Fig. 130.



Die Fig. 130 zeigt die Lösung des zweiten Falles.

Hiebei ist die zur Grundfläche senkrecht geführte Ebene $P_b P_v$, welche die Grundebene in $d_1 v_1$ schneidet. Diese Durchschnittslinie trifft $d v$ im Punkte p; es ist somit $v p v_1$ der Neigungswinkel, dessen wahre Grösse sich in $v O_1 v_1 = N_g$ ergibt.

Fig. 131.



Einfacher noch gelangt man zur Lösung derselben Aufgabe, wenn man sich der zweiten Methode bedient.

Ist nämlich v (Fig. 131) der Verschwindungspunkt der gegebenen Geraden, und O der in der Vertikallinie liegende Distanzpunkt, so hat man blos $v d$ senkrecht auf die Horizontslinie zu ziehen, die Länge $d O$ nach $d O_1$ zu übertragen und O_1 mit v zu verbinden, um in $v O_1 d = N_g$ den verlangten Neigungswinkel zu erhalten.

§. 49.

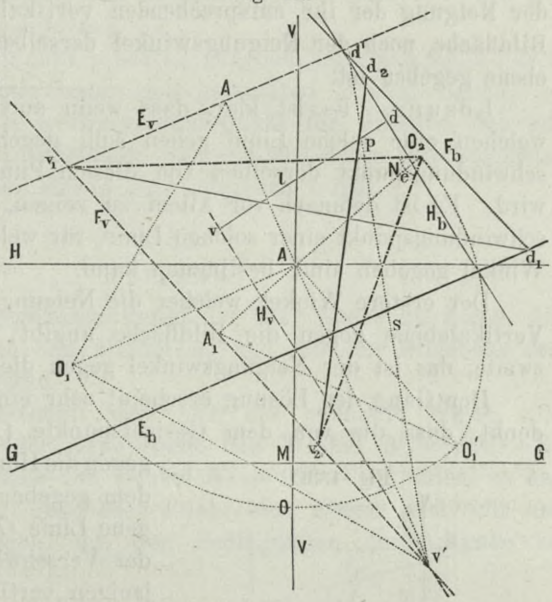
Aufgabe.

Es ist durch einen Punkt p (Fig. 132) eine Gerade unter einem bestimmten Winkel gegen eine Ebene $E_b E_v$ zu ziehen.

Lösung. Damit die gestellte Aufgabe eine bestimmte werde, muss noch eine anderweitige Bedingung, z. B. die gegeben sein, dass die Gerade in der durch den Punkt p gehenden, senkrecht auf $E_b E_v$ geführten Ebene $F_b F_v$ enthalten sei.

Man wird daher blos durch p in der Ebene $F_b F_v$ gegen ihre Schnittlinie mit $E_b E_v$, also gegen $d_1 v_1$ eine Linie unter dem gegebenen Winkel zu ziehen haben. Zur Bestimmung des Punktes p diene die Gerade l_d^v.

Fig. 132.



Ist also $F_b F_v$ die durch p geführte auf $E_b E_v$ senkrecht stehende Ebene, deren Verschwindungslinie F_v durch den vorerst bestimmten Verschwindungspunkt v' aller auf $E_b E_v$ senkrechten Geraden beliebig gezogen werden kann, so werden sich diese beiden Ebenen $E_b E_v$ und $F_b F_v$ in der Geraden $v_1 d_1$ schneiden, welche mit der zu führenden Linie den gegebenen Winkel N_e einschliessen soll. Nachdem aber auch die diesen beiden Geraden entsprechenden Parallelstrahlen, welche in der Parallelebene F_v liegen, denselben Winkel bilden, so wird man blos diese Parallelebene um deren Trace F_v in die Bildfläche umzulegen, das niedergelegte Auge O_2 mit v_1 zu verbinden, und an $O_2 v_1$ in O_2 den Winkel N_e zu verzeichnen haben, dessen so gefundener Schenkel $O_2 v_2$ den umgelegten Parallelstrahl der zu bestimmenden Linie vorstellt, und F_v im Verschwindungspunkte v_2 dieser Geraden schneidet. Der Durchschnittspunkt d_2 derselben liegt offenbar in der Bildflächtrace F_b der angenommenen Ebene $F_b F_v$.

§ 50.

Aufgabe.

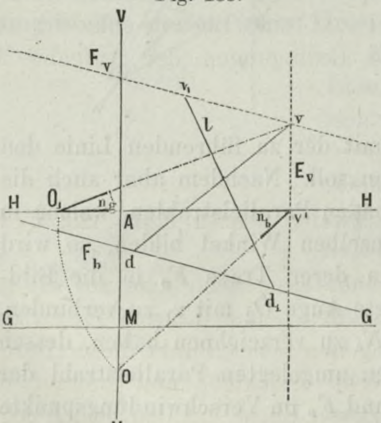
Es ist eine Linie derart zu ziehen, dass ihre Grundfläch-projektion mit der Grundebene, und sie selbst mit der Grundfläch-projektion einen bestimmten Winkel einschliesst; oder mit anderen Worten: Es ist eine Linie zu finden, für welche ausser der Neigung der ihr entsprechenden vertikalen Ebene gegen die Bildfläche, noch der Neigungswinkel derselben gegen die Grundebene gegeben ist.

Lösung. Es ist klar, dass wenn auch der Punkt, durch welchen eine solche Linie gehen soll, gegeben wäre, der Verschwindungspunkt derselben von diesem Punkte nicht abhängen wird. Es ist demnach vor Allem zu zeigen, wie man den Verschwindungspunkt einer solchen Linie, für welche die oberwähnten Winkel gegeben sind, bestimmen kann.

Der erstere Winkel, welcher die Neigung der entsprechenden Vertikalebene gegen die Bildfläche angibt, heisse n_b und der zweite, das ist der Neigungswinkel gegen die Grundebene, n_g.

Der Gang der Lösung erscheint sehr einfach, wenn man bedenkt, dass die von dem Gesichtspunkte (Auge) O (Fig. 133) gegen die Horizontslinie HH unter dem gegebenen Winkel n_b gezogene Linie Ov' in v' einen Punkt der Verschwindungslinie E_v derjenigen vertikalen Ebene angibt, welche die verlangte Gerade in sich enthält. Man findet nämlich in der Verschwindungslinie E_v, welche senkrecht auf der Grundebene steht, die Trace der entsprechenden Parallelebene, die demnach auch den der zu ziehenden Geraden zugehörigen Parallelstrahl in sich enthalten muss. Denkt man sich also diese Parallelebene sammt dem Auge in die Bildebene umgelegt, wobei das Auge nach O_1 und der Parallelstrahl, welcher dem Durchschnitte der oberwähnten vertikalen Ebene mit der Grundebene angehört, nach $O_1 v'$ zu liegen kommt, so wird es nur nöthig sein, eine

Fig. 133.



Linie $O_1 v$ gegen $O_1 v'$ unter dem Winkel n_g zu ziehen, um im Punkte v den Verschwindungspunkt von Linien, welche der Aufgabe Genüge leisten, zu erhalten.

Da der Neigungswinkel n_g von der Geraden und dem Durchschnitte der durch dieselbe gelegten vertikalen Ebene mit der Grundfläche gebildet wird, so ist die Linie $O_1 v$ der Parallelstrahl der verlangten Geraden, und muss als solcher mit $O_1 v'$ den gegebenen Winkel n_g bilden.

Wäre nun ein Punkt p auf $l^{v}_{d_1}$ gegeben, und man sollte durch denselben eine Linie unter den genannten Winkel ziehen, so hätte man blos als Verschwindungspunkt für dieselbe den gefundenen Punkt v anzunehmen, während sich deren Durchschnittspunkt d mittelst der Ebene $F_b F_v$ ergeben würde.

§. 51.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene zu legen, die mit der Grundebene den Winkel n_g und mit der Bildebene den Winkel n_b einschliesst.

Lösung. Bestimmt man sich auf bekannte Weise eine Linie, welche mit der Grundebene den Winkel $N_g = 90^0 - n_g$ und mit der Bildebene den Winkel $N_b = 90^0 - n_b$ bildet, so hat man blos durch den gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf diese Linie zu legen, um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen.

§. 52.

Aufgabe.

Es ist der Neigungswinkel zweier Ebenen $E_b E_v$ und $F_b F_v$ zu bestimmen.

Lösung. Es ist einleuchtend, dass, wenn man auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Ebenen $E_b E_v$ und $F_b F_v$ durch einen willkürlich angenommenen Punkt dieser Durchschnittslinie eine Ebene senkrecht errichtet, und hierauf die Durchschnittsgeraden dieser letzteren Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen aufsucht, diese so erhaltenen Schnittlinien einen Winkel bilden werden, welcher dem Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen gleich ist, und dessen Scheitel in den angenommenen Punkt fällt.

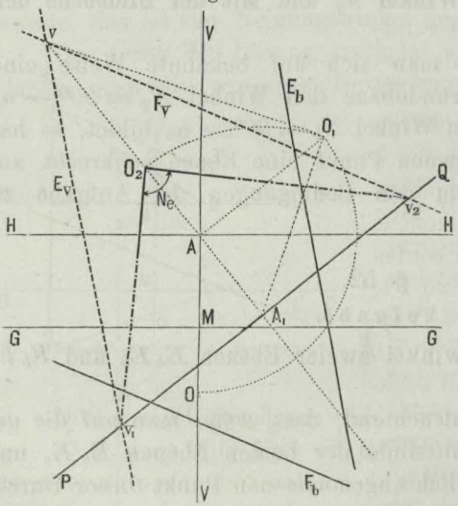
Aus diesem ist ersichtlich, in welcher Art und Weise die graphische Durchführung für die Lösung vorliegender Aufgabe zu geschehen hat.

Berücksichtigt man, dass die beiden Parallelebenen, welche den gegebenen Ebenen zugehören, denselben Neigungswinkel haben, so wird sich die Construktion desselben einfacher gestalten.

Zuvor sei jedoch noch bemerkt, dass bei unveränderter Lage des Auges der Neigungswinkel zweier Ebenen von den Bildflächtracen derselben unabhängig ist, indem die entsprechenden Parallelebenen blos durch das Auge und die Verschwindungslinien bestimmt werden. So lange also diese Stücke unverändert bleiben, kann sich auch weder der von den Parallelebenen gebildete Winkel noch der ihm gleiche Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen ändern, wenn auch die Bildflächtracen der Ebenen parallel zu sich selbst beliebig verschoben werden.

Ist nun v (Fig. 134) der Durchschnittspunkt der Verschwindungslinien E_v und F_v der beiden gegebenen Ebenen, so ist offenbar die Gerade vA die Bildflächprojektion des Durchschnittes der beiden Parallelebenen.

Fig. 134.



Legt man nun durch das Auge eine Ebene senkrecht auf jenen Durchschnitt, so muss ihre Trace PQ rechtwinklig zu vA sein. Ein Punkt A_1 dieser Trace wird gefunden, wenn man auf den in vO_1 umgelegten Durchschnitt der beiden Parallelebenen im Punkte O_1 die Linie O_1A_1 senkrecht errichtet. (Siehe §. 41.)

Die genannte Ebene, deren Trace PQ den Verschwindungslinien E_v und F_v in den Punkten v_1 und v_2 begegnet, schneidet die beiden Parallelebenen nach zwei Geraden, welche das Auge mit v_1 und v_2 verbinden, und welche mit $v_1 v_2$ ein Dreieck bilden, wovon letztere Linie die Grundlinie, $O_1 A_1$ die Höhe, und A_1 der Fusspunkt derselben ist. Dieses Dreieck um PQ in die Bildfläche nach $v_1 O_2 v_2$

umgelegt, liefert, gegenüber von $v_1 v_2$, die Grösse des gesuchten Neigungswinkels N_e.

Bemerkung. Würde man das Anfangs angedeutete Verfahren bei Lösung dieser Aufgabe zur Ausführung bringen, so würde die Verschwindungslinie derjenigen Ebene, welche man durch einen in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie angenommenen Punkt senkrecht auf diese Gerade führt, nach PQ fallen müssen, und es sind demnach die Linien $O_2 v_1$ und $O_2 v_2$ zugleich die umgelegten Parallelstrahlen derjenigen Geraden, welche als Durchschnitte der erwähnten senkrechten Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen gefunden wurden.

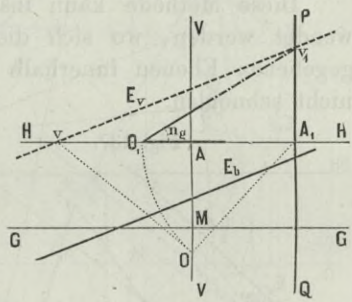
§. 53.

Aufgabe.

Es ist der Neigungswinkel einer Ebene gegen die Grundebene zu bestimmen.

Lösung. Vorliegende Aufgabe kann als specieller Fall der eben gelösten betrachtet werden.

Fig. 135.



Man wird, da die Grundebene in der Horizontslinie verschwindet, diese letztere als die Verschwindungslinie der zweiten Ebene betrachten. Ist demnach $E_b\, E_v$ (Fig. 135) die gegebene Ebene, $v\,O$ der in die Bildebene umgelegte Durchschnitt der beiden Parallelebenen E_v, HH, und PQ die mittelst $O A_1$ bestimmte Trace derjenigen Ebene, welche durch das Auge hindurchgeht und senkrecht auf der Grundflächtrace der gegebenen Ebene steht, also den Neigungswinkel in sich enthält, so wird, $A_1\, O$ nach $A_1\, O_1$ übertragen, in O_1 der Scheitel des verlangten Neigungswinkels liegen, und letzterer in $v_1\, O_1\, A_1 = n_g$ in der wahren Grösse erscheinen.

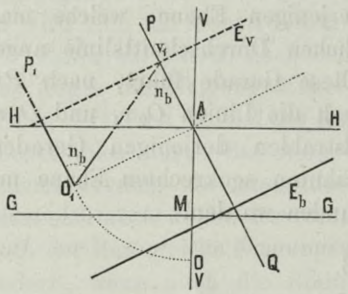
§. 54.

Aufgabe.

Es ist der Neigungswinkel einer gegebenen Ebene gegen die Bildebene zu bestimmen.

Lösung. Da der Bildebene eine in unendlicher Entfernung gelegene Verschwindungslinie zukömmt, so wird dieser Fall am zweckmässigsten derart zu behandeln sein, dass man den Neigungswinkel der Parallelebene E_v (Fig. 136) mit der Bildebene, und nicht, wie früher angenommen wurde, den Neigungswinkel der beiden Parallelebenen aufsucht. Es ist sodann PQ die Trace der durch das Auge senkrecht auf E_v (das ist die Durchschnittslinie der beiden Ebenen) geführten Ebene, folglich O_1 das um PQ umgelegte Auge, und $O_1 v_1 Q = n_b$ der gewünschte Neigungswinkel.

Fig. 136.



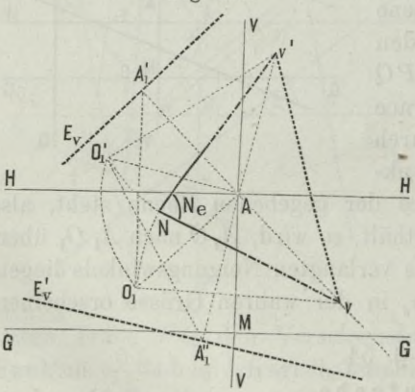
Würde man jedoch beide Parallelebenen benützen, so würde sich der Neigungswinkel in $v_1 O_1 P_1$, wie leicht einzusehen, ergeben.

§. 55.

Andere Methode zur Bestimmung des Neigungswinkels zweier Ebenen.

Diese Methode kann insbesondere dort mit Vortheil angewendet werden, wo sich die Verschwindungslinien E_v E'_v der gegebenen Ebenen innerhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche nicht schneiden.

Fig. 137.



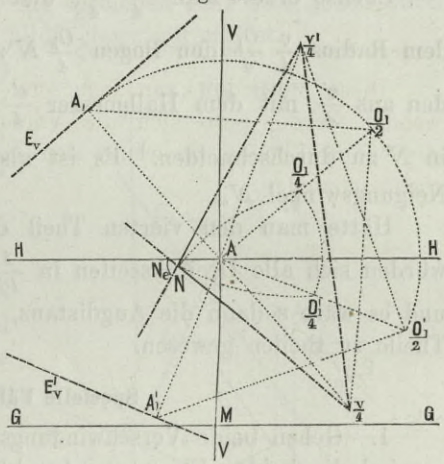
Denkt man sich durch das Auge zwei Gerade senkrecht auf die gegebenen Ebenen gelegt, so sind, nach §. 39, v und v' (Fig. 137) die Verschwindungspunkte derselben, mithin vv' die Verschwindungslinie jener Ebene, welche auf der Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen senkrecht steht, und durch die senkrecht geführten Geraden geht. Diese beiden Geraden schliessen ebenfalls den zu suchenden Neigungswinkel ein, und bilden mit vv' ein Dreieck, dessen eine Seite vv', und die beiden andern Seiten die Abstände des Auges von den Punkten v und v', also die Längen $O_1 v$ und $O'_1 v'$ sind. Wird dieses Dreieck über $v v'$ verzeichnet, indem man aus v' mit dem Radius $v' O'_1$ den Bogen $O'_1 N$ beschreibt, und diesen von v als Mittelpunkt mit dem Bogen $N O_1$, dessen Radius $v O_1$ ist, in N durchschneidet, so ergibt sich das Dreieck $v N v'$, und in N der zu suchende Winkel N_e.

Bemerkung. Wird das Dreieck $v N v'$, anstatt mit den ganzen Längen der Seiten, blos mit aliquoten Theilen derselben verzeichnet, so wird ein ähnliches Dreieck erhalten, das wieder in N den verlangten Winkel N_e gibt.

Dies ist insbesondere dann nothwendig anzuwenden, wenn, wie dies fast immer der Fall, eine grössere Augdistanz vorkömmt, oder die Entfernung der Verschwindungslinien von dem Augpunkte gering ist.

Sind also $E_v E'_v$ (Fig. 138) die Verschwindungslinien zweier Ebenen, deren Neigungswinkel gesucht werden soll, so bestimme man anstatt den Verschwindungspunkten $v v'$ der auf diesen Ebenen senkrechten Linien, z. B. blos jene Punkte $\frac{v}{4}$, $\frac{v'}{4}$, welche sich in einem Abstande von A befinden, der einem aliquoten Theil von $A v$ und $A v'$ gleich ist. Dieser aliquote Theil ist am zweckmässigsten als Quadratzahl zu wählen, also etwa zu $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ ... anzunehmen, da in diesem Falle die Auffindung der Punkte $\frac{v}{4}$, $\frac{v'}{4}$ sehr einfach erfolgt.

Fig. 138.



Denn trägt man auf der zu $A A_1$ Senkrechten $\frac{A O_1}{2}$ anstatt der Distanz $A O$ blos einen aliquoten Theil, hier $\frac{A O}{2}$ auf, verbindet A_1 mit $\frac{O_1}{2}$, und errichtet wie vorher in $\frac{O_1}{2}$ auf $A_1 \frac{O_1}{2}$ eine Senkrechte $\frac{O_1}{2} \frac{v}{4}$, so trifft diese die Gerade $A A_1$ in einem Punkte

$\frac{v}{4}$, dessen Entfernung vom Augpunkte A gleich $\frac{1}{n^2} Av$ ist, hier also $\frac{1}{4}$ vom Abstande Av des Verschwindungspunktes v vom Augpunkt beträgt. Wiederholt man dasselbe mit der Ebene E'_v, so findet man einen ähnlich liegenden Punkt $\frac{v'}{4}$, und es muss sonach auch $\frac{v}{4}\frac{v'}{4} = \frac{1}{4} vv'$ sein, wie dies aus den ähnlichen Dreiecken $A \frac{v}{4} \frac{v'}{4}$ und Avv' erhellt.

Es handelt sich nur noch um den n^2sten, hier also um den vierten Theil der beiden andern Dreiecksseiten. Diese Theile werden gefunden indem man $\frac{O_1}{4} A$ dem $n$ten Theile der bereits benützten Distanz $\frac{1}{n} AO$ gleich macht, hier also $A \frac{O_1}{2}$ in $\frac{O_1}{4}$ halbirt, und die Gerade $\frac{O_1}{4} \frac{v}{4}$ zieht, welche das zu suchende Längenstück gibt.

Ebenso erhält man $\frac{O'_1}{4} \frac{v'}{4}$, und hat somit nur aus $\frac{v}{4}$ mit dem Radius $\frac{v}{4} \frac{O_1}{4}$ den Bogen $\frac{O_1}{4} N$ zu beschreiben, und ihn mit den aus $\frac{v'}{4}$ mit dem Halbmesser $\frac{v'}{4} \frac{O'_1}{4}$ gezogenen Bogen $N \frac{O'_1}{4}$ in N zu durchschneiden. Es ist alsdann $\frac{v}{4} N \frac{v'}{4}$ der verlangte Neigungswinkel N_e.

Hätte man den vierten Theil der Augdistanz gewählt, so würden sich alle Dreiecksseiten in $\frac{1}{16}$ ihrer Länge ergeben haben, und es wäre sodann die Augdistanz, statt wie hier in 4, in 16 Theile zu theilen gewesen.

Specielle Fälle.

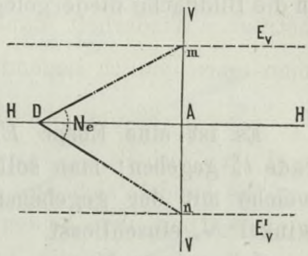
1. Gehen beide Verschwindungslinien durch den Augpunkt, so sind die beiden Ebenen senkrecht auf der Bildfläche, und es ist sonach ihr Neigungswinkel gleich jenem Winkel, den die beiden Tracen mit einander einschliessen.

2. Sind beide Ebenen parallel zur Horizontslinie, so geben die in der Vertikallinie liegenden Punkte m und n (Fig. 139) der beiden Verschwindungslinien, mit dem Distanzpunkte D verbunden, die beiden Schenkel des Neigungswinkels N_e. Denn die Schnittlinie beider Ebenen ist parallel zur Horizontslinie, folglich die darauf senkrecht durch das Auge gelegte Ebene, die Vertikal-

ebene, welche sammt den Schnittlinien in die Bildfläche gelegt, das umgelegte Auge als Scheitel im Distanzpunkte D gibt.

3. Wären überhaupt die Verschwindungslinien $E_v E'_v$ zu einander parallel, so würde sich der Scheitel des Neigungswinkels im Distanzkreise, und zwar in der durch das Auge parallel mit $E_v E'_v$ gelegten Geraden ergeben, und je ein Punkt der Schenkel würde sich im Durchschnitte der durch den Augpunkt auf $E_v E'_v$ senkrecht geführten Geraden mit den Verschwindungslinien E_v und E'_v vorfinden.

Fig. 139.

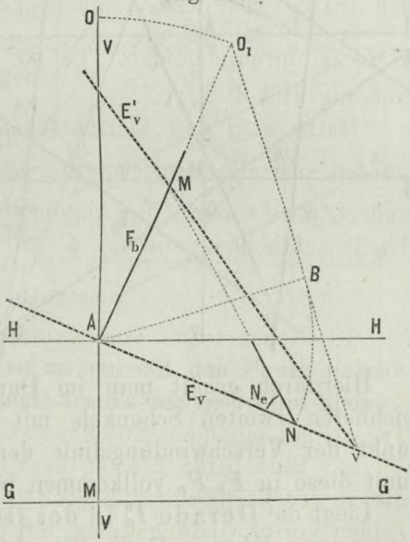


4. Ist eine der beiden Ebenen parallel zur Bildfläche, so ist der Neigungswinkel der gegebenen Ebenen dem Neigungswinkel der andern Ebene mit der Bildfläche gleich und demnach als solcher zu bestimmen.

5. Endlich wollen wir als speciellen Fall noch jenen durchführen, wo die eine Ebene bildflächprojecirend ist.

In diesem Falle (Fig. 140) muss die orthogonale Projektion der Schnittlinie in die Verschwindungslinie E_v der bildflächprojecirenden Ebene fallen, wo sich dann der Winkel N_e, wie allgemein gezeigt wurde, so ergibt, dass der eine Schenkel in die Verschwindungslinie E_v der auf die Bildfläche senkrechten Ebene fällt.

Fig. 140.



In Fig. 140 ist ferner, gegenüber der in §. 52 durchgeführten Lösung, die Abänderung getroffen worden, dass man jene auf die Schnittlinie der beiden Ebenen E_v, E'_v senkrechte Ebene nicht durch das Auge, sondern so führte, dass ihre Bildflächtrace F_b durch den Augpunkt geht.

Es ist sodann die aus A auf den umgelegten Parallelstrahl $O_1 v$ geführte Senkrechte AB die Höhe des Dreieckes ANM, welches bei N den verlangten Neigungswinkel N_e, gebildet von den beiden in die Bildfläche niedergelegten Schnittlinien MN und AN, enthält.

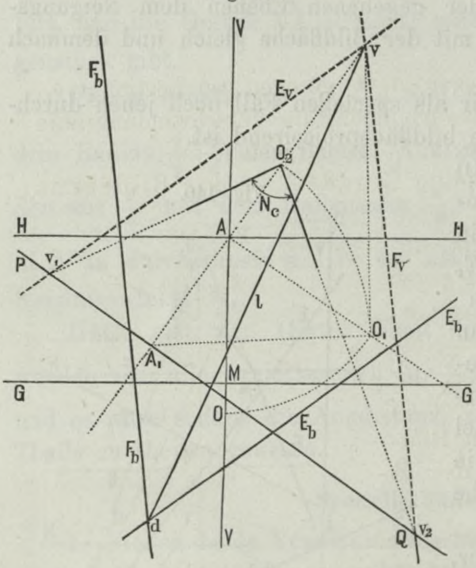
§. 56.

Aufgabe.

Es ist eine Ebene $E_b\,E_v$, (Fig. 141) und in ihr eine Gerade l_d^v gegeben; man soll durch die letztere eine Ebene legen, welche mit der gegebenen Ebene einen bestimmten Neigungswinkel N_e einschliesst.

Lösung. Man hat hier die Construktionen der vorhergehenden Aufgabe in verkehrter Ordnung durchzuführen, um die Verschwindungslinie der verlangten Ebene zu erhalten. Es wird also blos auf die in vA projecirte und nach $v\,O_1$ umgelegte Durchschnittslinie durch das Auge eine senkrechte Ebene (mittelst $O_1 A_1$) PQ zu führen, hierauf die Durchschnittsgerade der gegebenen Parallelebene in die Bildfläche nach $O_2 v_1$ umzulegen, und an diese Linie, als den einen Schenkel des Neigungswinkels, der gegebene Winkel N_e aufzutragen sein.

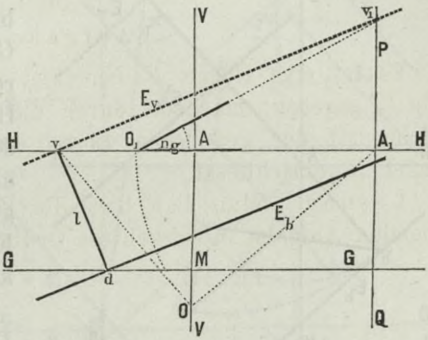
Fig. 141.



Hierdurch erhält man im Durchschnittspunkte v_2 des verzeichneten zweiten Schenkels mit der Trace PQ einen neuen Punkt der Verschwindungslinie der verlangten Ebene, und hat somit diese in $F_b\,F_v$ vollkommen bestimmt.

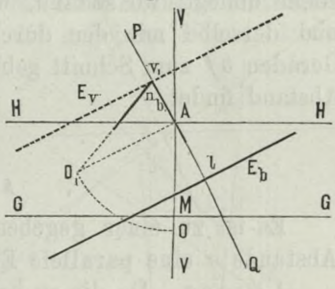
Liegt die Gerade l_d^v in der Grundebene, und soll durch diese eine Ebene $E_b\,E_v$ (Fig. 142) gelegt werden, die mit der Grundebene einen gegebenen Winkel n_g bildet, so ist hiebei auch der Durchschnitt der Parallelebene, welche der zu bestimmenden Ebene angehört, mit der Parallelebene der Grundfläche, d. i. der Horizontsebene, welcher in vA seine Bildflächprojektion hat, und in vO in die Bildebene umgelegt erscheint, bekannt.

Fig. 142.



Legt man demnach auf jene Durchschnittslinie mit Hilfe der Geraden OA_1 eine senkrechte Ebene PQ durch das Auge, und denkt sich diese in die Bildebene umgelegt, so hat man, nachdem das Auge nach O_1 zu liegen kömmt, in $O_1 A_1$ den einen Schenkel des Neigungswinkels. Wird nun der andere Schenkel $O_1 v_1$ unter dem gegebenen Winkel n_g gegen $A_1 O_1$ gezogen, so bestimmt v_1, mit dem gegebenen Punkte v verbunden, die Verschwindungslinie der verlangten Ebene, welche in $E_b E_v$ dargestellt ist.

Fig. 143.



Der Fall, wo die gegebene Gerade l in der Bildebene liegt, wo also eine Ebene, deren Bildflächtrace gegeben erscheint, unter einem bestimmten Winkel gegen die Bildfläche geführt werden soll, ist in Fig. 143 versinnlicht. Daselbst stellt PQ die Trace einer auf der gegebenen Geraden l senkrechten Ebene vor. Wird diese in die Bildebene umgelegt, so gelangt das in ihr liegende Auge nach O_1, und es ist sodann die Linie $O_1 v_1$ unter dem gegebenen Winkel n_b gegen PQ zu ziehen, um den Punkt v_1 zu erhalten, welcher die Verschwindungslinie E_v der gesuchten Ebene $E_b E_v$ bestimmt.

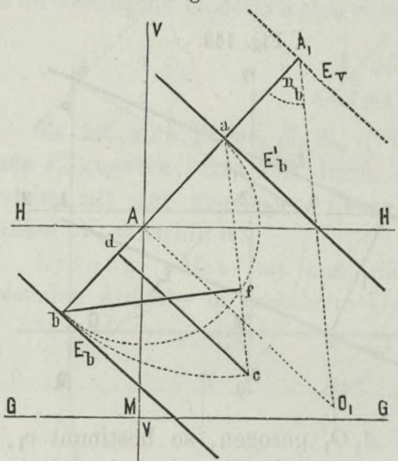
§. 57.

Aufgabe.

Es ist der Abstand zweier parallelen Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E_v$ zu bestimmen.

Lösung. Denkt man sich durch den Augpunkt A (Fig. 144) eine auf E_b senkrechte Ebene, deren Trace bA_1 ist, gelegt, und von b eine Gerade senkrecht auf die andere Ebene $E'_b E_v$ bis zum Durchschnitte x (im Raume) mit derselben gefällt, und diesen Durchschnittspunkt mit a verbunden, so bilden diese drei Geraden ab, ax, bx ein bei x rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse ab ist, und worin der dem Abstande bx gegenüberliegende Winkel dem Neigungswinkel n_b der gegebenen Ebene mit der Bildfläche gleich kömmt.

Fig. 144.



Construirt man ein solches Dreieck acd, indem man z. B. ac parallel zu $A_1 O_1$ zieht, $ac = ab$ macht, und cd senkrecht auf ab fällt, so ist cd der zu suchende Abstand.

Auch erhält man denselben, wenn man das obengenannte rechtwinklige Dreieck abx um seine Hypothenuse ab in die Bildebene umlegt, wo sodann, wenn über ab ein Kreis beschrieben, und derselbe mit der durch b senkrecht auf $A_1 O_1$ geführten Geraden bf zum Schnitt gebracht wird, man in bf den fraglichen Abstand findet.

§. 58.

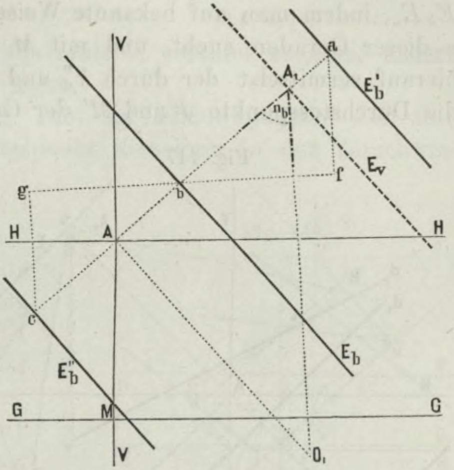
Aufgabe.

Es ist zu einer gegebenen Ebene $E_b E_v$ in einem gegebenen Abstande a eine parallele Ebene zu führen.

Lösung. Da die zu bestimmende Ebene dieselbe Verschwindungslinie E_v wie die gegebene Ebene haben muss, so wird es sich nur um die Bestimmung der Bildflächtrace E'_b, eigentlich blos um die Bestimmung eines Punktes derselben, handeln. Zur Auffindung des letzteren sind blos die Construktionen der vorhergegangenen Aufgabe in umgekehrter Weise durchzuführen; denn dortselbst war der Abstand ab der beiden Tracen nebst dem Winkel n_b gegeben, und der Abstand bf beider Ebenen zu suchen, während im jetzigen Falle der gegebene Abstand a, der Winkel n_b bekannt, und ab zu suchen ist. Man wird also auf dem umgelegten

Schenkel $A_1\,O_1$ (Fig. 145) von b aus eine Senkrechte errichten, auf dieser den gegebenen Abstand $a = bf$ nach f auftragen, und fa parallel zu $A_1\,O_1$ ziehen, welch' letzt gezogene Gerade die Trace bA_1 in einem Punkte a der zu suchenden Bildflächtrace E'_b schneidet.

Fig. 145.



Es ist einleuchtend, dass noch eine zweite Ebene $E''_b\,E_v$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und dass sich deren Bildflächtrace E''_b im gleichen Abstande, jedoch auf der entgegengesetzten Seite der gegebenen Trace E_b vorfindet.

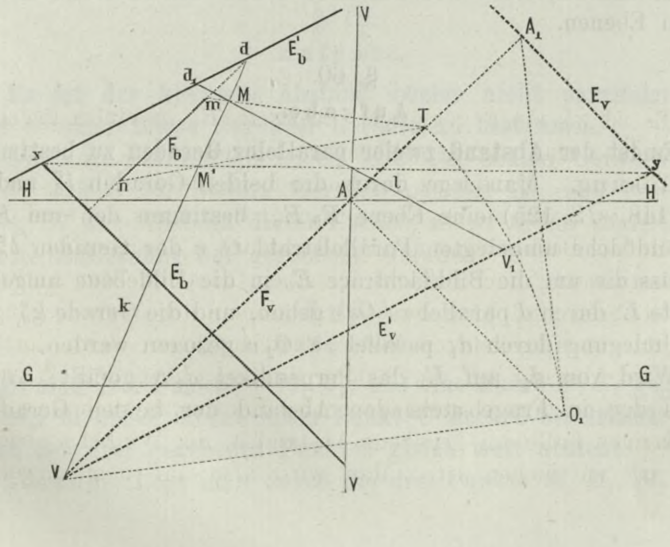
§. 59.

Aufgabe.

Es ist der Abstand eines Punktes von einer Ebene zu bestimmen.

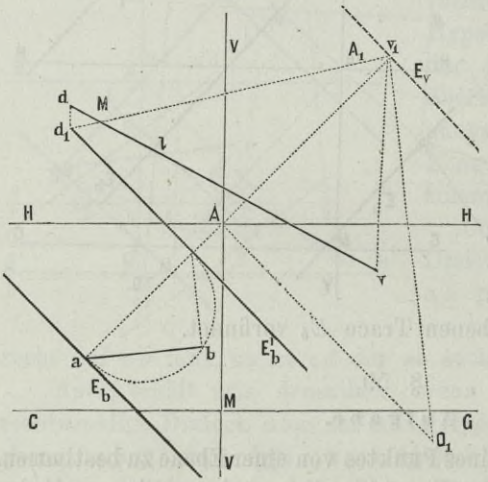
Lösung. Ist $E_b\,E_v$ (Fig. 146) die gegebene Ebene, M der

Fig. 146.



Punkt, welcher durch die Gerade $l_{d_1}^v$ bestimmt ist, so lege man durch denselben eine Gerade k_d^v senkrecht auf die gegebene Ebene $E_b E_v$, indem man auf bekannte Weise den Verschwindungspunkt v dieser Geraden sucht, und mit M verbindet. Bestimmt man hierauf vermittelst der durch k_d^v und $l_{d_1}^v$ gelegten Ebene $E'_b E'_v$ die Durchstosspunkte d und M' der Geraden k_d^v, beziehungsweise mit der Bildebene und der Ebene $E_b E_v$, und legt durch die Gerade k_d^v die bildflächprojecirende Ebene $F_b F_v$; bestimmt ferner den Theilungspunkt T der Geraden k_d^v, und mit Hilfe desselben die wahre Länge mn des perspektivischen Bildes MM', so liefert mn den zu suchenden Abstand.

Fig. 147.



Eine andere Lösung wäre folgende:

Man lege durch den gegebenen Punkt M (Fig. 147) eine zu $E_v E_b$ parallele Ebene $E'_b E_v$, und bestimme auf bekannte Weise den Abstand ab der beiden Ebenen.

§. 60.

Aufgabe.

Es ist der Abstand zweier paralleler Geraden zu bestimmen.

Lösung. Man lege durch die beiden Geraden l_d^v und $k_{d_1}^v$ (Fig. 148, s. S. 125) eine Ebene $E_b E_v$, bestimme den um E_v in die Bildfläche umgelegten Parallelstrahl $O_2 v$ der Geraden $l_d^v k_{d_1}^v$, so muss die um die Bildflächtrace E_b in die Bildebene umgelegte Gerade L' durch d parallel zu $O_2 v$ gehen, und die Gerade $k_{d_1}^v$ nach der Umlegung durch d_1 parallel zu $O_2 v$ gezogen werden.

Wird von d_1 auf L' das Perpendikel $d_1 \Delta$ gefällt, so gibt dieses den in Frage stehenden Abstand der beiden Geraden l und k.

§. 61.

Aufgabe.

Es ist durch eine gerade Linie l_d^v parallel zu einer andern Geraden $k_{d_1}^{v_1}$ eine Ebene zu legen.

Lösung. Da $k_{d_1}^{v_1}$ (Fig. 149) zur Ebene parallel sein soll, so muss der Verschwindungspunkt derselben in der Verschwin-

Fig. 148.

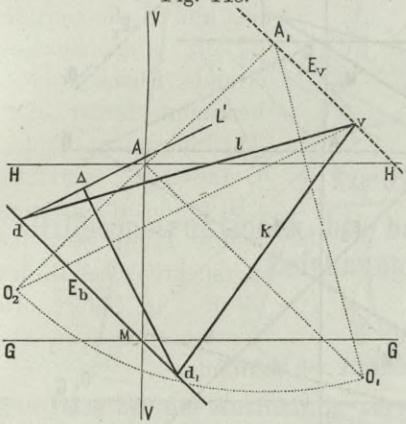
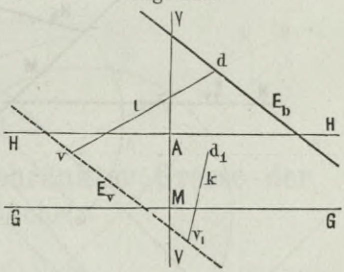


Fig. 149.



dungslinie E_v der Ebene $E_b\,E_v$ liegen. Die Verschwindungslinie wird demnach erhalten, wenn man v mit v_1 verbindet. Die Bildflächtrace E_b dieser Ebene ist durch d parallel zu E_v zu ziehen.

§. 62.

Aufgabe.

Es ist der kürzeste Abstand zweier nicht paralleler und nicht in einer Ebene liegender Geraden zu bestimmen.

Lösung. Man lege durch jede der beiden Geraden eine Ebene, welche zur andern Geraden parallel ist, und bestimme nach §. 57 den Abstand dieser Ebenen, so ist dieser zugleich die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden.

§. 63.

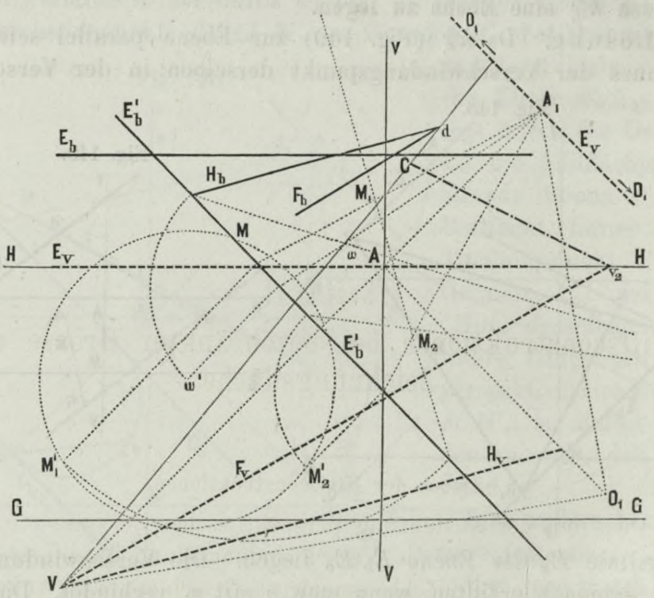
Aufgabe.

Es sind drei Punkte $M\,M_1\,M_2$, und eine Ebene $E_b\,E_v$ gegeben, man soll in dieser Ebene einen Punkt C derart bestimmen, dass er von den drei gegebenen Punkten gleich weit absteht.

Lösung. Legt man durch die drei Punkte M, M_1, M_2 eine

Ebene $E'_b\,E'_v$ (Fig. 150) und dreht dieselbe um die Bildflächtrace E'_b in die Bildebene, so gelangen diese Punkte nach M, M'_1, M'_2. Ist ferner w' der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die

Fig. 150.



drei Punkte M, M'_1, M'_2 geht, und w die Perspektive des in die Ebene $E'_b\,E'_v$ zurückgeführten Mittelpunktes, so hat man blos w mit dem Verschwindungspunkte v aller auf $E'_b\,E'_v$ senkrechten Geraden zu verbinden, und den Durchschnitt C dieser Verbindungslinie mit der gegebenen Ebene $E_b\,E_v$ aufzusuchen, um den gewünschten Punkt zu erhalten, welcher gleichsam als Mittelpunkt einer Kugel zu betrachten ist, deren Oberfläche die drei gegebenen Punkte enthält.

Hiemit sei die Reihe von Aufgaben geschlossen, welche die Grundlage der perspektivischen Projektionslehre bilden, und gewiss hinreichend Gelegenheit geboten haben dürften, sich mit den Eigenthümlichkeiten und dem Charakter dieser Projektionsmethode vertraut zu machen.

Wenn auch vielleicht das Verständniss der Construktionen dem Anfänger einige Schwierigkeiten verursachte, so dürften diese denn doch durch die systematische Aneinanderreihung des Stoffes, durch die allmählige Ueberführung vom Einfacheren zum Umständlicheren, und durch den Vergleich mit der orthogonalen Projektionsart, indem wir gleichsam blos dieselben Gedanken in anderer Sprache ausdrückten, sehr herabgemindert worden sein.

So wie jedoch jede Sprache ihre Eigenthümlichkeiten hat, die sich wörtlich in keiner andern wiedergeben lassen, so zeigt sich auch hier in dem projektiven Ausdruck der Grössen sowohl, als auch in der Behandlungsart eine gewisse specifische Verschiedenheit.

Kapitel VI.

Hilfsconstruktionen bei beschränkter Grösse der Zeichnungsfläche.

§. 64.

Zweck der Hilfsconstruktionen.

Dass bei der Ausführung perspektivischer Zeichnungen häufig Fälle vorkommen, wo die Verschwindungs- und Theilungspunkte, und der in die Bildfläche umgelegte Gesichtspunkt (Auge) entweder sämmtlich oder doch theilweise ausserhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche fallen, unterliegt keinem Zweifel; es wird demnach die Aufgabe vorliegen, die Mittel oder Hilfsconstruktionen aufzusuchen, welche es möglich machen, auch unter diesen Umständen zu gleichem Resultat zu gelangen, wie wenn alle diese Punkte auf der Zeichnungsfläche sich vorfänden.

Diese Hilfsconstruktionen beruhen auf der zweckmässigen Anwendung von geometrischen Sätzen, deren Gebrauch durch die in den §§. 66 bis 69 folgenden vier Aufgaben der Hauptsache nach erläutert werden soll.

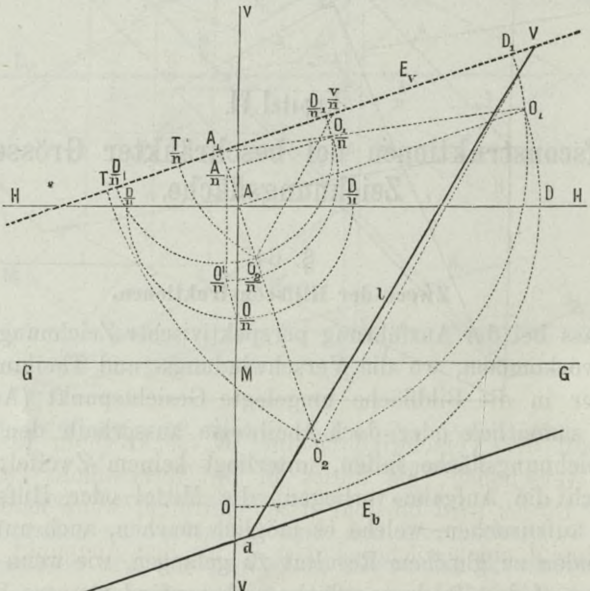
§. 65.

Aliquote Theile der Augdistanz, der Entfernung des Verschwindungs- und Theilungspunktes vom Aug- und Nebenaugpunkt.

Vor Allem sei hier bemerkt, dass in den Fällen, wo der umgelegte Gesichtspunkt ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt, wo also die Augdistanz nicht ganz aufgetragen werden kann, irgend ein aliquoter Theil dieser Distanz benützt werden könne, wie dies bereits in §. 20 angedeutet wurde. Wird also der $n$te Theil der Augdistanz benützt, so wollen wir den Endpunkt des aufgetragenen Stückes, um das Ausgeführte auf den ersten Blick ersichtlich zu machen, mit $\frac{O}{n}$ bezeichnen.

Ist demnach $A\frac{O}{n} = \frac{1}{n} A\,O$ (Fig. 151) und wird aus A mit dem Halbmesser $A\frac{O}{n}$ ein Kreis beschrieben, so schneidet dieser

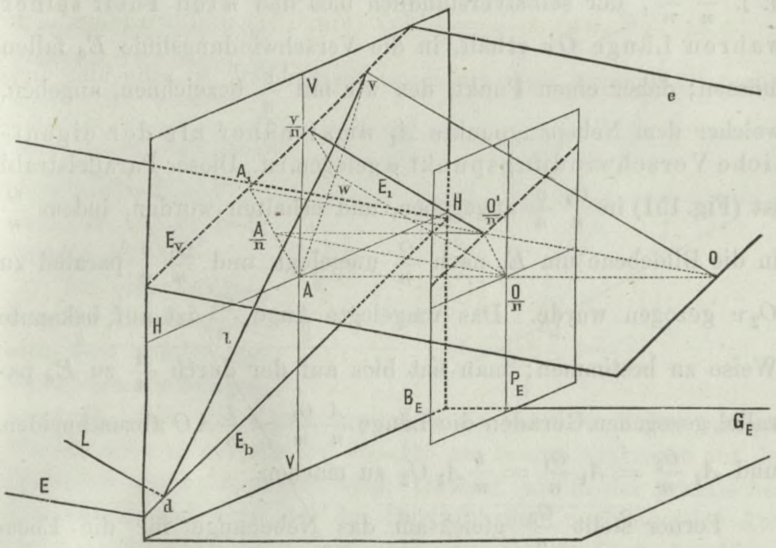
Fig. 151.



die Horizontslinie in zwei Punkten $\frac{D}{n}$, deren Entfernung vom Augpunkte A dem $n$ten Theil des Abstandes der Distanzpunkte vom Augpunkte gleich ist, so dass $A\frac{D}{n} = \frac{1}{n} AD$ wird.

Es ist ferner ersichtlich, dass der irgend einer Geraden L (Fig. 152), welche in der Ebene $E_b\,E_v$ liegt, entsprechende Parallelstrahl Ov, falls dieser parallel zu sich selbst so weit verschoben wird, dass er seinen Anfang in $\frac{O}{n}$ nimmt, (unter Beibehaltung derselben Lage des Augpunktes A) aus der Parallelebene e, die ihre Trace in E_v hat, heraustreten würde, den Fall ausgenommen, wo die Ebene E auf der Bildebene senkrecht steht. Um diesem vorzubeugen, denken wir uns das Auge $\frac{O}{n}$, welches sich nun in einer $n$mal kleineren Entfernung von der Bildebene befindet, in der durch dasselbe geführten

Fig. 152.



und auf der Verschwindungslinie E_v senkrechten Ebene E_1 so lange verschoben, bis dieses in die vorerwähnte Parallelebene fällt. Dieses wird offenbar dann eintreten, wenn man statt des Punktes A einen solchen Punkt $\frac{A}{n}$ als den Augpunkt betrachtet, der von dem Nebenaugpunkte A_1 eine $n$mal kleinere Entfernung, als der Punkt A besitzt; denn die beiden Dreiecke $A_1 A O$ und $A_1 \frac{A}{n} \frac{O'}{n}$ sind ähnlich und in Folge dessen ist

$$\frac{A_1 \frac{A}{n}}{A A_1} = \frac{\frac{A}{n} \frac{O'}{n}}{O A} = \frac{A \frac{O}{n}}{A O} = \frac{1}{n}.$$

Einen solchen, gleichsam versetzten Augpunkt, bezeichnen wir mit $\frac{A}{n}$, um sogleich darauf hinzuweisen, dass derselbe einer $n$mal kleineren Augdistanz angehört.

Besagte Construktion ist auch (Fig. 151) in der Bildfläche durchgeführt. Es ist daselbst $\frac{O'}{n}$ das in die Bildebene umgelegte

Auge, und $\frac{A}{n}$ der dieser neuen Stellung des Auges entsprechende Augpunkt.

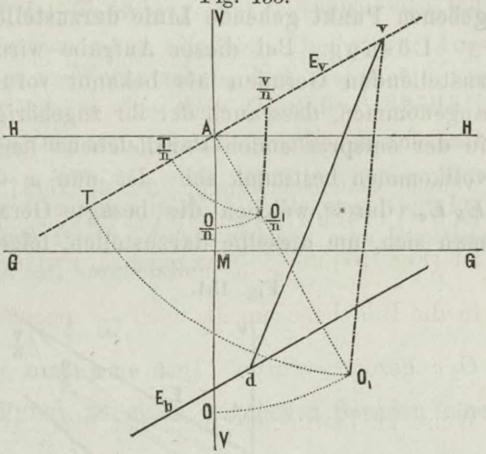
Vermöge dieser Annahme wird der Durchschnittspunkt mit der Bildebene des von $\frac{O'}{n}$ (Fig. 152) ausgehenden Parallelstrahles, d. i. $\frac{v}{n}\frac{O'}{n}$, der selbstverständlich blos den $n$ten Theil seiner wahren Länge Ov erhält, in die Verschwindungslinie E_v fallen müssen; daher einen Punkt, den wir mit $\frac{v}{n}$ bezeichnen, angeben, welcher dem Nebenaugpunkte A_1 $n$mal näher als der eigentliche Verschwindungspunkt v gelegen ist. Dieser Parallelstrahl ist (Fig. 151) in $\frac{O_2}{n}\frac{v}{n}$ angegeben, und erhalten worden, indem $\frac{O}{n}$ in die Bildebene um E_v nach $\frac{O}{n}$ umgelegt, und $\frac{O_2}{n}\frac{v}{n}$ parallel zu $O_2 v$ gezogen wurde. Das umgelegte Auge $\frac{O_2}{n}$ ist auf bekannte Weise zu bestimmen; man hat blos auf der durch $\frac{A}{n}$ zu E_v parallel gezogenen Geraden die Länge $\frac{A}{n}\frac{O_1}{n} = \frac{1}{n} A O$ abzuschneiden, und $A_1 \frac{O_2}{n} = A_1 \frac{O_1}{n} = \frac{1}{n} A_1 O_2$ zu machen.

Ferner stellt $\frac{O_2}{n}$ gleichsam das Nebenauge für die Ebene $E_b E_v$, und $A_1 \frac{O_2}{n}$ die Nebenaugdistanz unter der Bedingung vor, dass das erstere in einem $n$mal kleineren Abstande von der Bildebene, und die letztere $n$mal verkleinert gedacht wird. Auch kann hier noch der Nebendistanzpunkte $\frac{D_1}{n}$, welche dem Nebenaugpunkte A_1 $n$mal näher als die eigentlichen Nebendistanzpunkte D_1 liegen, Erwähnung geschehen.

Schliesslich sei bemerkt, dass derjenige Punkt, welchen man in E_v, durch das Auftragen des dem Punkte $\frac{v}{n}$ entsprechenden Parallelstrahles nach $\frac{v}{n}\frac{T}{n}$ erhält, analog den bereits eingeführten Bezeichnungen (da derselbe in einer $n$mal kleineren Entfernung von dem Nebenaugpunkte als der wahre Theilungspunkt T sich vorfindet) mit $\frac{T}{n}$ benannt wird. Es ist hiernach in Fig. 151 $A_1 \frac{T}{n} = \frac{A_1 T}{n}$.

In dem Falle, wo $E_b E_v$ (Fig. 153) senkrecht auf der Bildebene ist, tritt, wie bereits erwähnt, der Parallelstrahl bei verkleinerter Augdistanz und derselben Lage des Augpunktes aus der entsprechenden Parallelebene nicht heraus, folglich auch ein Verschieben des Augpunktes A, um hiedurch die Punkte $\frac{v}{n}$ und $\frac{T}{n}$ in der Verschwindungslinie E_v zu erhalten, nicht nothwendig ist.

Fig. 153.



Bei einer solchen Lage der Ebene ergeben sich dem zufolge gewisse Vereinfachungen, wesshalb, falls die durch eine Gerade gehende Ebene unserer Willkür anheim gestellt ist, dieselbe am besten senkrecht auf der Bildebene anzunehmen sein wird. Obwohl, wie in der praktischen Anwendung und auch bei der Durchführung nachfolgender Aufgaben leicht einzusehen sein wird, die schiefe Lage der Ebene fast gänzlich übergangen werden könnte, so wollen wir dennoch, um unseren Betrachtungen die Allgemeinheit nicht zu benehmen, auch letztern Fall der Besprechung unterziehen.

Endlich sei noch hinzugefügt, dass man die uneigentlichen Verschwindungs-, Distanz- und Theilungspunkte dem Werthe der Zahl n entsprechend benennt; so heissen dieselben z. B. für $n = 2$ oder $n = 4$, welche Werthe die gebräuchlichsten sind, beziehungsweise halbe oder viertel Verschwindungs-, Distanz- und Theilungspunkte. Was aber die Lösungsarten betrifft, die in der Anwendung dieser halben, viertel oder allgemein $n$tel Verschwindungs-, Distanz- und Theilungspunkte bestehen, so beruhen diese auf den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke, mit deren Hilfe auch jede nachfolgende Construktion, bei welcher derlei Punkte benützt werden, leicht zu erklären ist..

Hievon geschah auch schon in §§. 20 und 55 Erwähnung.

Dieses vorausgeschickt gehen wir zur Lösung derjenigen Aufgaben über, auf welche wir bereits im §. 64 hingewiesen haben.

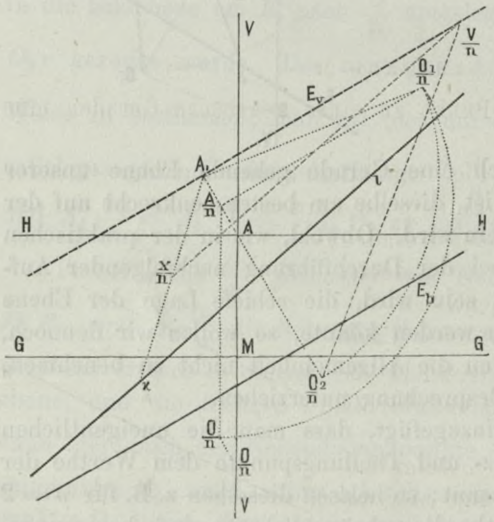
§. 66.

Aufgabe 1.

Es ist eine ihrer Richtung nach bekannte, durch einen gegebenen Punkt gehende Linie darzustellen.

Lösung. Bei dieser Aufgabe wird die Richtung der darzustellenden Geraden als bekannt vorausgesetzt, d. h. es wird angenommen, dass auch der ihr zugehörige Parallelstrahl, welcher in der entsprechenden Parallelebene liegt, seiner Richtung nach vollkommen bestimmt sei. Ist nun x der Punkt in der Ebene $E_b\,E_v$, durch welchen die besagte Gerade gehen soll, so wird man sich, um dieselbe darzustellen, folgends zu benehmen haben.

Fig. 154.



a) Bei der Annahme, dass nicht die ganze, sondern blos der $n$te Theil der Augdistanz benützt werden kann, bestimmt man sich das Nebenauge $\frac{O_2}{n}$ (Fig. 154), zieht durch dasselbe den seiner Richtung nach bekannten Parallelstrahl $\frac{O_2}{n}\frac{v}{n}$, wodurch man $\frac{v}{n}$ erhält. Der Punkt x wird mit A_1 verbunden, die Verbindungslinie $A_1\,x$ in n Theile so getheilt, dass $A_1\,\frac{x}{n} = \frac{1}{n}\,A_1\,x$ wird, und alsdann zu der Linie $\frac{x}{n}\,\frac{v}{n}$ durch den gegebenen Punkt x die Gerade l geometrisch parallel gezogen.

Die Linie l bestimmt die Perspektive der durch x gehenden Geraden, da ihre Ebene bekannt ist.

Bemerkung. Mitunter wird es möglich sein, trotzdem das umgelegte Auge O_2 ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt, den wahren Verschwindungspunkt v durch das $n$fache Auftragen des

Abstandes $A_I \frac{v}{n}$ zu erhalten, welcher Verschwindungspunkt sodann zu benützen am zweckmässigsten sein wird.

b) Kann zwar die ganze Augdistanz aufgetragen, aber der Punkt v nicht mehr auf der Zeichnungsfläche erhalten werden, so wird man bei der Annahme eines aliquoten Theiles der Augdistanz ganz so wie früher zu Werke gehen, doch gestattet dieser Fall, indem derselbe mit dem in der eben folgenden Aufgabe 2 in vollkommene Uebereinstimmung gebracht werden kann, noch andere Verfahrungsarten. Man hat sich dann blos unter dem Parallelstrahle die Perspektive einer in $E_b E_v$ gelegenen Geraden, und unter x den gegebenen Punkt, durch welchen eine Parallele zu der ersteren zu ziehen ist, vorzustellen.

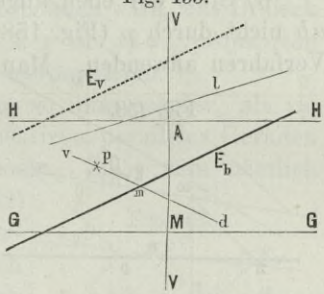
§. 67.

Aufgabe 2.

Es ist durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen.

Lösung. Ist p (Fig. 155) der Punkt auf der Geraden $m\overset{v}{d}$, durch welchen eine Linie perspektivisch parallel zu der gegebenen, in $E_b E_v$ liegenden Geraden l gezogen werden soll, so reducirt sich diese Aufgabe auf jene, bei welcher durch einen Punkt eine Linie nach dem unzulänglichen Durchschnittspunkte zweier Geraden (l und E_v) zu ziehen ist.

Fig. 155.



Diese Aufgabe lässt mehrere Lösungsarten zu, wovon einige hier angeführt werden sollen.

a) Man ziehe durch p (Fig. 156 und 157) irgend eine Gerade ab und eine zu ihr Parallele $\alpha\beta$ in beliebiger Entfernung, trage $\alpha\beta$ vom Punkte b auf l auf, mache also $b\alpha' = \alpha\beta$, verbinde a mit α' und ziehe durch p eine Parallele $p\pi'$ zu $a\alpha'$.

Trägt man nun $\alpha'\pi'$ vom Punkte α auf $\alpha\beta$ nach π auf, so wird die Verbindungslinie n der Punkte p und π nach dem unzugänglichen Durchschnitte der beiden Geraden l und E_v gerichtet sein.

Der Beweis für die Richtigkeit folgt einfach aus dem Umstande, dass, falls sich die Linien l, n und E_v in einem Punkte schneiden, die Proportion

$$ab : \alpha\beta = ap : \alpha\pi$$

Fig. 156.

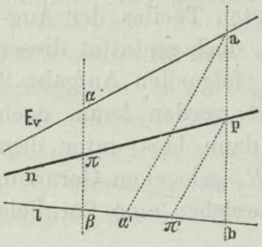
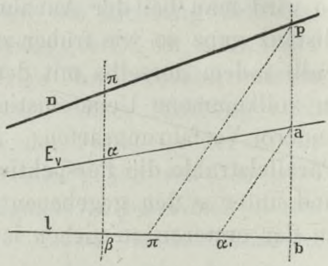


Fig. 157.



bestehen muss; dieser Bedingung ist aber durch obige Construktion Genüge geleistet, denn aus den ähnlichen Dreiecken $a b \alpha'$ und $p b \pi'$ folgt:

$$ab : \alpha' b = ap : \alpha' \pi'$$

und nachdem $\alpha' b = \alpha\beta$ und $\alpha' \pi' = \alpha\pi$ ist, so sind beide Proportionen übereinstimmend, und folglich die Richtigkeit des Verfahrens dargethan.

b) Statt der eben angeführten Construktion kann man, wenn ab nicht durch p (Fig. 158 und Fig. 159) gelegt wird, folgendes Verfahren anwenden. Man ziehe irgend eine Gerade $\alpha\beta$ parallel

Fig. 158.

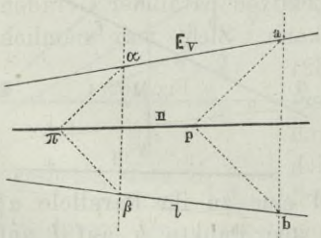
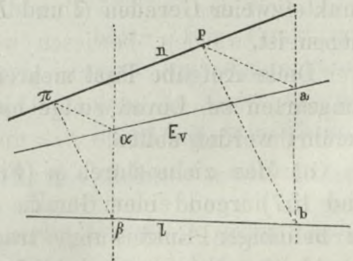


Fig. 159.



zu ab, verbinde die Endpunkte a und b mit p und ziehe zu diesen Verbindungslinien beziehungsweise die Geraden $\alpha\pi$ und $\beta\pi$ parallel. Ihr Durchschnittspunkt π gibt alsdann einen in der verlangten Geraden n gelegenen Punkt, was in Anbetracht der Aehnlichkeit der Dreiecke abp und $\alpha\beta\pi$ auch schon daraus hervorgeht, dass man $\alpha\beta\pi$ als die Projektion eines zur Grundfläche

abp einer Pyramide, welche ihre Spitze in dem unzugänglichen Punkte v hat, parallel geführten Schnittes ansehen kann.

c) Man kann, nachdem durch p (Fig. 160 und Fig. 161) die beliebige Linie ab gezogen, und die Punkte p und b mit irgend einem Punkte c der Linie E_v verbunden wurden, eine Gerade

Fig. 160.

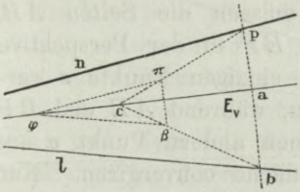
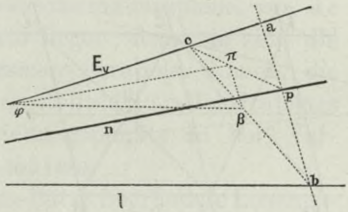


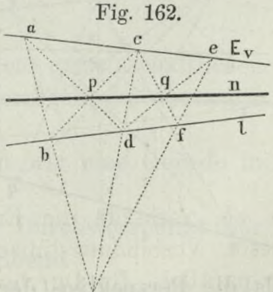
Fig. 161.



$\pi\beta$ geometrisch parallel zu ab, und hierauf $\beta\varphi$ parallel zu l ziehen, um so in der Linie $\pi\varphi$ die Richtung der verlangten Geraden zu erhalten. Denn, wird die Gerade n parallel zu $\pi\varphi$ gezogen, so muss diese nach dem unzugänglichen Durchschnitte v der beiden Linien l und E_v laufen. Als Rechtfertigung der Construktion führen wir etwas Aehnliches wie im vorigen Falle an, nämlich: dass, wenn der Punkt v vorhanden wäre, das Dreieck pbv als ein mit der Grundfläche $\pi\beta\varphi$ der in $\pi\beta\varphi c$ projecirten Pyramide paralleler Schnitt betrachtet werden kann.

d) Die nun folgende Lösung ist um so interessanter, als sie durch die Sätze, welche über die Perspektiven paralleler Geraden aufgestellt wurden, bewiesen werden kann. Zieht man nämlich zwei beliebige, im Punkte p (Fig. 162) sich schneidende Linien ad und bc, und verbindet ihre Endpunkte a, b, c und d durch die Geraden ab und cd, so werden sich diese in irgend einem Punkte s treffen. Durch diesen Punkt s ziehe man beliebig eine dritte schneidende Linie sfe, so bestimmt diese ein zweites Viereck $cdef$, dessen Diagonalen sich in q begegnen. Nun ist pq die gesuchte Linie n, d. i. diejenige, welche nach dem gemeinschaftlichen Punkte v der beiden Linien l und E_v gerichtet ist. Ebenso könnte man noch weitere Punkte derselben Geraden pq auf-

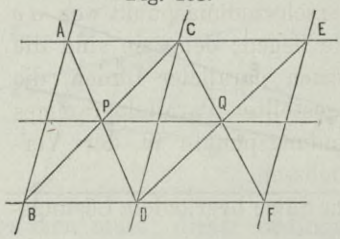
Fig. 162.



finden, wenn man durch den Punkt s eine neue schneidende Linie zöge.

Um diese Construktion zu rechtfertigen, bemerke man, dass die beiden Vierecke $abcd$ und $cdef$ als die Perspektiven zweier Parallelogramme $ABCD$ und $CDEF$ (Fig. 163) betrachtet werden können, die hier so gewählt wurden, dass keine ihrer Seiten mit der Bildebene parallel ist; denn alsdann müssen die Seiten AB, CD und EF in der Perspektive in einem einzigen Punkte s verschwinden, während AE und BF gegen einen andern Punkt v auf der Bildfläche convergiren. Nun ist die Gerade PQ, welche die Mittelpunkte dieser Parallelogramme verbindet, mit AE und BF parallel, folglich muss auch ihre Perspektive pq, welche durch die Durchschnittspunkte p und q der Diagonalen auf der Bildfläche bestimmt wird, gegen jenen Punkt v gerichtet sein.

Fig. 163.



Wenn der gegebene Punkt p (Fig. 164) ausserhalb der beiden gegebenen Geraden l und E_v liegt, so ist die Auflösung nicht mehr so einfach. Hat man die beiden schneidenden Linien pba und pdc willkürlich gewählt und die Diagonalen des Viereckes $abcd$ gezogen, welch' letztere sich im Punkte s schneiden, so verbinde man diesen Punkt s mit p und betrachte die Linie $pfse$

Fig. 164.

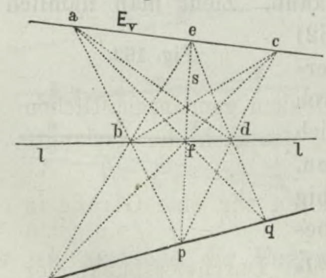
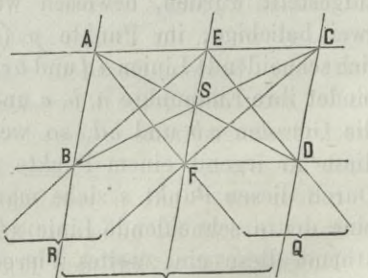


Fig. 165.



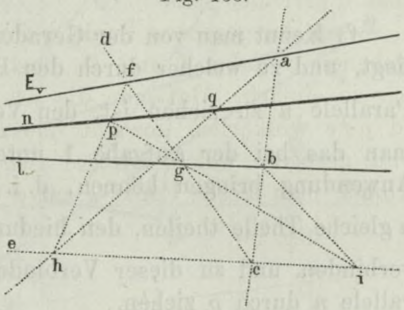
als die Perspektive der Geraden EF, welche das durch $abcd$ dargestellte Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 165) in zwei perspektivisch gleiche Parallelogramme $abef$ und $efcd$ theilt. Denn ef geht durch den Mittelpunkt des Parallelogrammes und ist parallel mit den Seiten ab und cd, da sie mit letzteren einen und denselben Punkt p als Verschwindungspunkt gemein hat. Zieht man nun die Diagonalen af und ed der partiellen Parallelogramme, so müssen erstere im Raume zu einander parallel sein, und in der Perspektive in einem Punkte q zusammentreffen.

Ebenso werden auch die Diagonalen eb und cf, welche im Raume parallel sind, auf der Bildfläche in einem Punkte r sich begegnen. Die vier Punkte r, p, q und v (der Verschwindungspunkt von ac und bd) müssen in einer geraden Linie liegen; denn sie sind die Verschwindungspunkte von vier Systemen paralleler Linien, die alle in der Ebene des durch $abcd$ dargestellten Parallelogrammes liegen, und demnach ihre Verschwindungspunkte in der Verschwindungslinie dieser Ebene haben müssen.

e) Eine andere durch perspektivische Sätze begründete Lösungsart ist folgende:

Betrachtet man l und E_v (Fig. 166) als die Perspektiven zweier Parallelen, deren Ebene die beliebige Gerade abc als Trace hat, und die gleichfalls willkürliche Gerade cd als Durchschnitt dieser Ebene mit einer zweiten, in welcher der Punkt p liegt, (deren Trace ce übrigens willkürlich angenommen werden kann) und denkt man sich ferner durch p und durch je eine der beiden Geraden E_v und l Ebenen gelegt, so muss ihr Durchschnitt zu beiden Geraden parallel sein, also seine Perspektive nach dem gemeinschaftlichen Verschwindungspunkte v gerichtet sein, demnach die verlangte Gerade angeben.

Fig. 166.



Indem wir f mit p verbinden, erhalten wir eine Gerade in der durch p und E_v gelegten Ebene.

Hiernach ist h auf der Trace ce der Durchstosspunkt der Geraden, und folglich ah die Trace jener Ebene.

Die Verbindungslinie von g und p hat i als Fusspunkt, und liegt in der durch l und p gelegten Ebene, wesshalb bi die Trace dieser letzteren ist.

Der Durchschnittspunkt q der beiden Tracen und der gegebene Punkt p gehören beiden Ebenen an, es ist also pq die gesuchte Linie n.

Für den Fall, als der Punkt p ausserhalb der beiden Geraden l und E_v fällt, ist die Construktion in Fig. 167 durchgeführt.

Fig. 167.

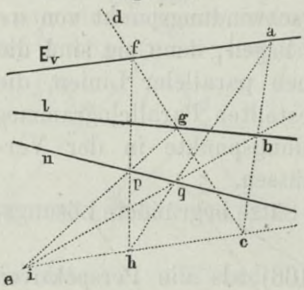
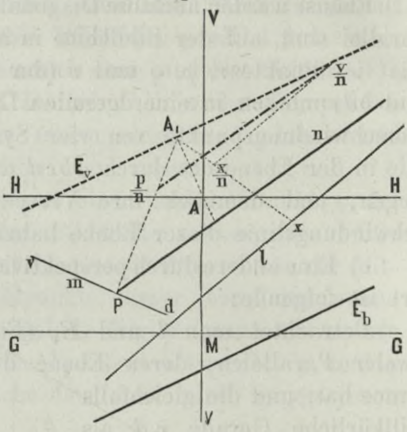


Fig. 168.



f) Kennt man von der Geraden l, welche in der Ebene $E_b E_v$ liegt, und zu welcher durch den Punkt p auf m_d^v (Fig. 168) die Parallele n zu ziehen ist, den Verschwindungspunkt $\frac{v}{n}$, so wird man das bei der Aufgabe 1 unter a) angeführte Verfahren in Anwendung bringen können, d. i. man wird die Linie $A_1 p$ in n gleiche Theile theilen, den hiedurch erhaltenen Punkt $\frac{p}{n}$ mit $\frac{v}{n}$ verbinden, und zu dieser Verbindungslinie eine geometrische Parallele n durch p ziehen.

Bemerkung. Wäre $\frac{v}{n}$ nicht gegeben, so könnte man, um diese Construktion anzuwenden, denselben mittelst der vom Punkte $\frac{x}{n}$ ausgehenden zu l parallelen Geraden $\frac{x}{n}\frac{v}{n}$ bestimmen, wie es in der Fig. 168 angezeigt ist.

Auch ist ersichtlich, dass die durch die Gerade l geführte Ebene $E_b E_v$ auf die angewendeten Construktionen keinen Einfluss übt.

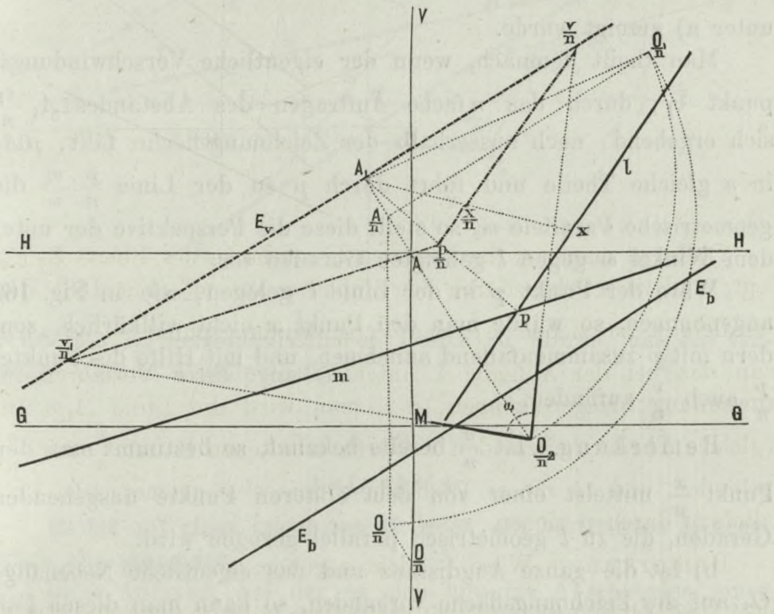
§. 68.

Aufgabe 3.

Es ist durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, dass sie eine gegebene Gerade schneidet und mit ihr einen bestimmten Winkel einschliesst.

Lösung. Es sei p (Fig. 169) der Punkt in der Ebene $E_b\ E_v$, durch welchen eine Linie m unter einem bestimmten Winkel ω gegen die in derselben Ebene gelegene Gerade l zu ziehen ist.

Fig. 169.



a) In dem Falle, wo blos der n te Theil der Augdistanz auf der Zeichnungsfläche zu benützen möglich ist, wird man sich, falls für die gegebene Gerade der Verschwindungspunkt $\frac{v}{n}$ nicht bekannt ist, denselben vorerst bestimmen. Zu diesem Zwecke wird die Verbindungslinie irgend eines in der Geraden l angenommenen Punktes x mit dem Nebenaugpunkte A_1 in n gleiche Theile getheilt, also $A_1 \frac{x}{n} = \frac{1}{n} A_1 x$ gemacht, und durch $\frac{x}{n}$ eine

Linie geometrisch parallel zu l gezogen. Der Durchschnitt dieser Parallelen mit E_v gibt den Punkt $\frac{v}{n}$. Bestimmt man weiters das Nebenauge $\frac{O_2}{n}$, so erhält man hiedurch den verkürzten Parallelstrahl $\frac{O_2}{n}\frac{v}{n}$, und zieht man nun gegen diesen eine Gerade unter dem verlangten Winkel ω, so wird dieselbe die Verschwindungslinie E_v in einem Punkte durchschneiden, welcher Durchschnitt den Verschwindungspunkt $\frac{v_1}{n}$ der zu ziehenden Geraden bestimmt. Nun ist blos durch den Punkt p eine Linie zu ziehen, deren Verschwindungspunkt $\frac{v_1}{n}$ bekannt ist, was bereits in Aufgabe 1 unter a) gezeigt wurde.

Man theilt demnach, wenn der eigentliche Verschwindungspunkt v_1, durch das $n$fache Auftragen des Abstandes $A_1 \frac{v_1}{n}$ sich ergebend, noch ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt, $p A_1$ in n gleiche Theile und führt durch p zu der Linie $\frac{p}{n}\frac{v_1}{n}$ die geometrische Parallele m, so stellt diese die Perspektive der unter dem Winkel ω gegen l geneigten Geraden vor.

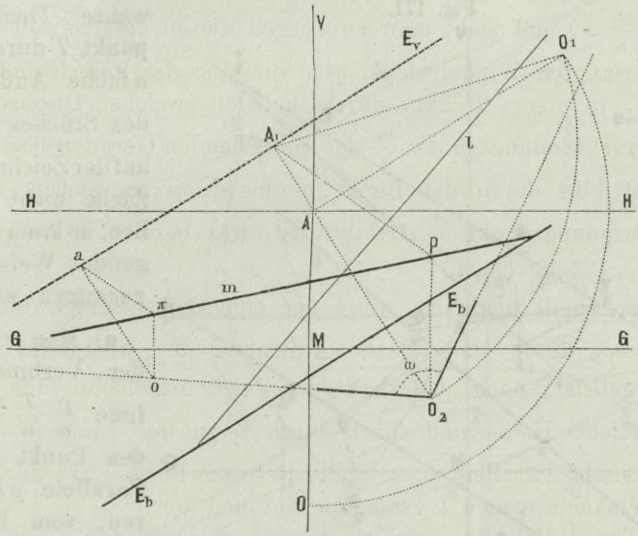
Wäre der Punkt p in der Linie l gelegen, wie in Fig. 169 angenommen, so würde man den Punkt x nicht willkürlich, sondern mit p zusammenfallend annehmen, und mit Hilfe des Punktes $\frac{p}{n}$ auch $\frac{v}{n}$ auffinden.

Bemerkung. Ist $\frac{v}{n}$ bereits bekannt, so bestimmt man den Punkt $\frac{x}{n}$ mittelst einer von dem ersteren Punkte ausgehenden Geraden, die zu l geometrisch parallel gezogen wird.

b) Ist die ganze Augdistanz und das eigentliche Nebenauge O_2 auf der Zeichnungsfläche vorhanden, so kann man diesen Fall nicht nur durch die Annahme eines $n$mal näher gelegenen Gesichtspunktes auf den eben betrachteten zurückführen, sondern auch bei der Durchführung desselben unter Benützung des bei der Aufgabe 2 Angeführten sich folgends benehmen.

Durch das Nebenauge O_2 (Fig. 170) wird eine Linie nach dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Geraden l und der Verschwindungslinie E_v gezogen, hiedurch der Parallelstrahl von l erhalten, und sodann gegen denselben eine Gerade unter dem Winkel ω geführt. Diese Gerade gibt offenbar den Parallelstrahl der zu ziehenden Linien an, und es wird nur noch nöthig sein, durch p eine Linie gegen den diesem Strahle und der Verschwin-

Fig. 170.



dungslinie E_v gemeinschaftlichen Punkt zu führen, um die verlangte Gerade m zu erhalten.

§. 69.

Aufgabe 4.

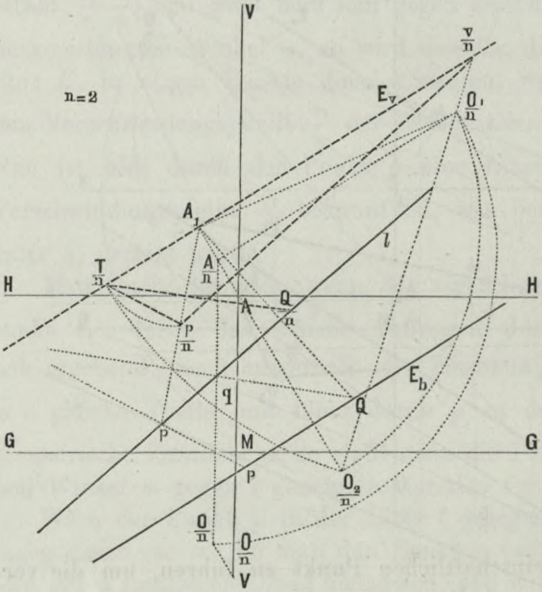
Es ist auf einer gegebenen Geraden ein bestimmtes Längenstück abzuschneiden.

Diese Aufgabe, bei der es sich um das Abschneiden eines bestimmten Längenstückes auf einer in einer Ebene $E_b\,E_v$ gelegenen Geraden l handelt, wird unter der Annahme, dass das abzuschneidende Längenstück von einem auf der gegebenen Geraden liegenden Punkte p mit Hilfe der Theilungspunkte vorgenommen werden soll, folgends zu lösen sein.

a) Bei einem aliquoten Theile der Augdistanz wird man, nachdem das Nebenauge $\frac{O_2}{n}$ (Fig. 171) ermittelt und der Verschwindungspunkt $\frac{v}{n}$, falls dieser nicht schon bekannt ist, mittelst

$\frac{p}{n}$ aufgefunden wurde, den Theilungspunkt $\frac{T}{n}$ leicht erhalten, indem man $\frac{v}{n}\frac{T}{n} = \frac{v}{n}\frac{O_2}{n}$ macht.

Fig. 171.



Würde sich der wahre Theilungspunkt T durch das $n$fache Auftragen des Stückes $A_1 \frac{T}{n}$ auf der Zeichnungsfläche nicht ergeben, so kann in folgender Weise vorgegangen werden.

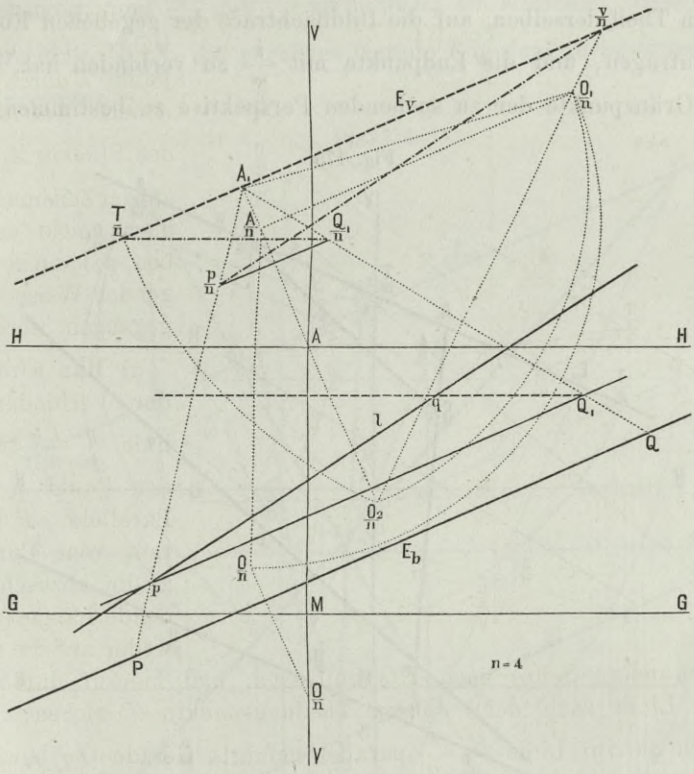
α) Man wird zu der Verbindungslinie $\frac{p}{n}\frac{T}{n}$ durch den Punkt p die Parallele pP führen, vom Punkte P die abzuschneidende Länge (entweder auf die eine oder andere Seite) nach PQ auftragen, und hierauf durch Q eine Linie nach dem wahren Theilungspunkte T ziehen, was durch die zur Linie $\frac{Q}{n}\frac{T}{n}$ parallel geführte Gerade Qq bewirkt wird. Die beiden Punkte p und q haben dann eine dem PQ gleiche Entfernung von einander.

β) Wäre, nachdem man den Punkt P (Fig. 172) als Durchschnitt von A_1p mit E_b bestimmt hat, nicht möglich die ganze abzuschneidende Länge PQ auf E_b aufzutragen, so kann man vorerst auf einer durch p zu dieser Trace E_b parallel gezogenen Geraden vom Punkte p die Länge PQ in pQ_1 abschneiden.

Zum Behufe dessen wird man die Gerade $\frac{p}{n}\frac{Q_1}{n}$ parallel zu E_b ziehen, von $\frac{p}{n}$ den $n$ten Theil der Länge nach $\frac{Q_1}{n}$ auftragen und letzteren Punkt mit A_1 verbinden, welche Gerade auf

$p\,Q$ das betreffende Stück $p\,Q$ perspektivisch gleich $P\,Q$ abschneidet.

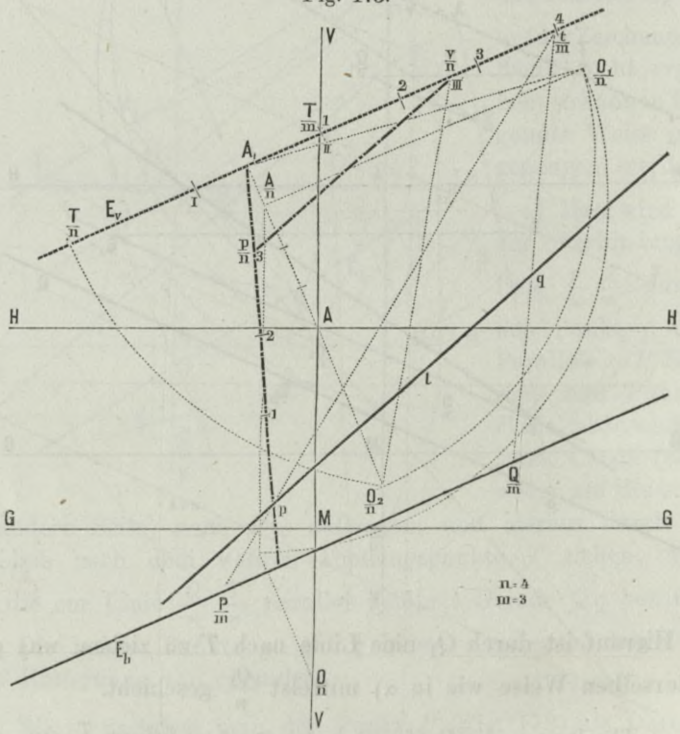
Fig. 172.



Hierauf ist durch Q_1 eine Linie nach T zu ziehen, was ganz in derselben Weise wie in α) mittelst $\frac{Q_1}{n}$ geschieht.

γ) Theilt man die Entfernung der Punkte $\frac{v}{n}$ und $\frac{T}{n}$ (Fig. 173) in eine bestimmte Anzahl m gleicher Theile, und trägt hierauf den Abstand des dem Punkte $\frac{v}{n}$ zunächst liegenden Theilungspunktes $\frac{T}{m}$ vom Nebenaugpunkte A_1, d i. $A_1\frac{T}{m}$, von diesem Punkte A_1 ausgehend, n mal gegen den Punkt $\frac{v}{n}$ oder $\frac{T}{n}$, je nachdem $\frac{T}{m}$ zwischen A_1 und $\frac{v}{n}$ oder zwischen A_1 und $\frac{T}{n}$ liegt, auf, so erhält man auf diese Weise einen Punkt $\frac{t}{m}$, welcher derart benützt werden kann, dass man blos aliquote Theile der gegebenen Längenstücke, und zwar im vorliegenden Falle den m ten Theil derselben, auf die Bildflächtrace der gegebenen Ebene aufzutragen, und die Endpunkte mit $\frac{t}{m}$ zu verbinden hat, um die Gränzpunkte der zu suchenden Perspektive zu bestimmen.

Fig. 173.

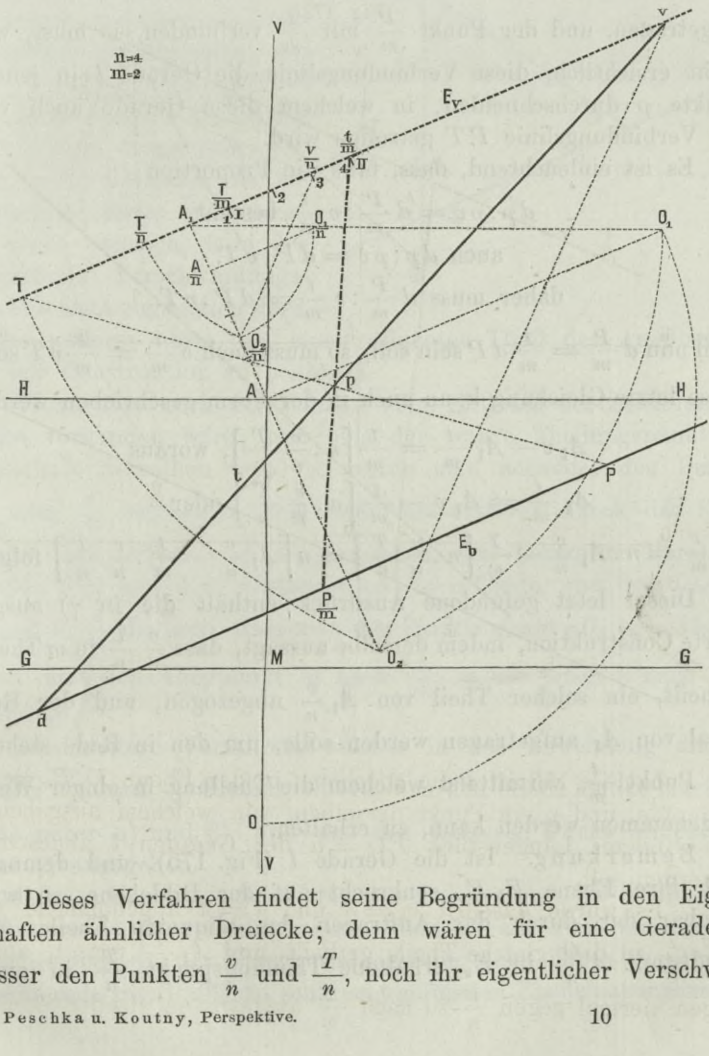


In Fig. 173 ist l die gegebene, in der Ebene $E_b\,E_v$ liegende Gerade, und p ein Punkt derselben, von welchem ausgehend ein bestimmtes Längenstück $PQ = a$ der Geraden l abgeschnitten werden soll.

Es wurde daselbst $m = 3$ und $n = 4$ angenommen, mithin $\frac{v}{n}\,\frac{T}{n}$ in drei gleiche Theile getheilt, und $A_1\,\frac{T}{m}$ von A_1 angefangen viermal gegen $\frac{v}{n}$ zu nach $\frac{t}{m}$ aufgetragen, da der Theilpunkt

$\frac{T}{m}$ zwischen A_1 und $\frac{v}{n}$ gelegen ist. Wird also $\frac{t}{m}$ mit p verbunden, von $\frac{P}{m}$ aus auf E_b das Stück $\frac{P}{m}\frac{Q}{m} = \frac{1}{m} PQ$ aufgetragen, und $\frac{Q}{m}$ mit $\frac{t}{m}$ verbunden, so schneidet diese Theilungslinie $\frac{t}{m}\frac{Q}{m}$ die gegebene Gerade l in dem zu bestimmenden Endpunkte q.

Fig. 174.



Dieses Verfahren findet seine Begründung in den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke; denn wären für eine Gerade l, ausser den Punkten $\frac{v}{n}$ und $\frac{T}{n}$, noch ihr eigentlicher Verschwindungspunkt v, ihr Durchschnittspunkt d mit der Bildfläche, und ihr wahrer Theilungspunkt T (Fig. 174), vorhanden, so würde der durch das $n$fache Auftragen von $A_1 \frac{T}{m}$ erhaltene Punkt $\frac{t}{m}$ auf E_v so gelegen sein, dass sein Abstand von v gleich dem $m$ten Theil der Entfernung der beiden Punkte v und T, also $v\frac{t}{m} = \frac{1}{m} v T$ wäre. Wird aber auf der Trace E_b vom Punkte d auch blos der $m$te Theil einer abzuschneidenden Länge $d P$ nach $d \frac{P}{m}$ aufgetragen, und der Punkt $\frac{P}{m}$ mit $\frac{t}{m}$ verbunden, so muss, wie leicht ersichtlich, diese Verbindungslinie die Gerade l in jenem Punkte p durchschneiden, in welchem diese Gerade auch von der Verbindungslinie $P T$ getroffen wird.

Es ist einleuchtend, dass, falls die Proportion

$$dp : pv = d\frac{P}{m} : v\frac{t}{m} \text{ besteht,}$$

$$\text{auch } dp : pv = dP : vT,$$

$$\text{daher muss } d\frac{P}{m} : v\frac{t}{m} = dP : vT.$$

Weil nun $d\frac{P}{m} = \frac{1}{m} dP$ sein soll, so muss auch $v\frac{t}{m} = \frac{1}{m} vT$ sein. Diese letzte Gleichung kann auch in der Form geschrieben werden

$$A_1 v - A_1 \frac{t}{m} = \frac{1}{m}\left[n \,.\, \frac{v}{n}\frac{T}{n}\right], \text{ woraus}$$

$$A_1 \frac{t}{m} = A_1 v - \frac{1}{m}\left[n \,.\, \frac{v}{n}\frac{T}{n}\right] \text{ oder}$$

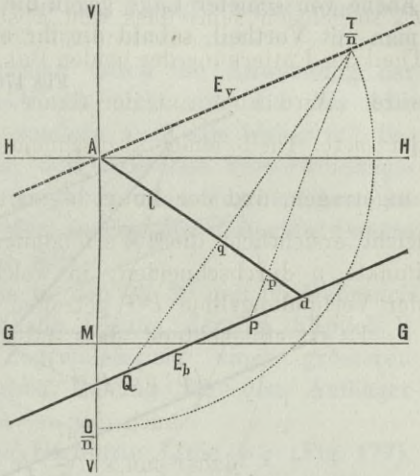
$$A_1 \frac{t}{m} = n \,.\, A_1 \frac{v}{n} - \frac{1}{m}\left[n \,.\, \frac{v}{n}\frac{T}{n}\right] = n\left[A_1 \frac{v}{n} - \frac{1}{m} \,.\, \frac{v}{n}\frac{T}{n}\right] \text{ folgt.}$$

Dieser letzt gefundene Ausdruck enthält die in γ) ausgeführte Construktion, indem derselbe aussagt, dass $\frac{v}{n}\frac{T}{n}$ in m Theile getheilt, ein solcher Theil von $A_1 \frac{v}{n}$ abgezogen, und der Rest $n$mal von A_1 aufgetragen werden solle, um den in Rede stehenden Punkt $\frac{t}{m}$, vermittelst welchem die Theilung in obiger Weise vorgenommen werden kann, zu erhalten.

B e m e r k u n g. Ist die Gerade l (Fig. 175), und demnach auch ihre Ebene $E_b E_v$ senkrecht auf der Bildebene, so wird offenbar der durch das Auftragen des aliquoten Theiles der Augdistanz $A\frac{O}{n}$ in E_v erhaltene Theilungspunkt $\frac{T}{n}$ in einen

n mal näher gelegenen Distanzpunkt fallen, und das unter γ) angeführte Verfahren, falls $m = n$ angenommen wird, sich äusserst einfach gestalten, indem der Punkt $\frac{t}{m}$ nach $\frac{T}{n}$ zu liegen kömmt.

Fig. 175.



In Fig. 175 wurde von dem auf l gelegenen Punkte p auf der Geraden l ein n mal so grosses Längenstück abgeschnitten, als dasjenige, was von P nach Q aufgetragen ist.

b) Ist auch zur Benützung der ganzen Augdistanz auf der Zeichnungsfläche der erforderliche Raum vorhanden, so bleibt dennoch, falls der eigentliche Verschwindungspunkt v nicht zugänglich wäre, nichts anderes übrig, als einen aliquoten Theil der Augdistanz bei der Construktion zu benützen.

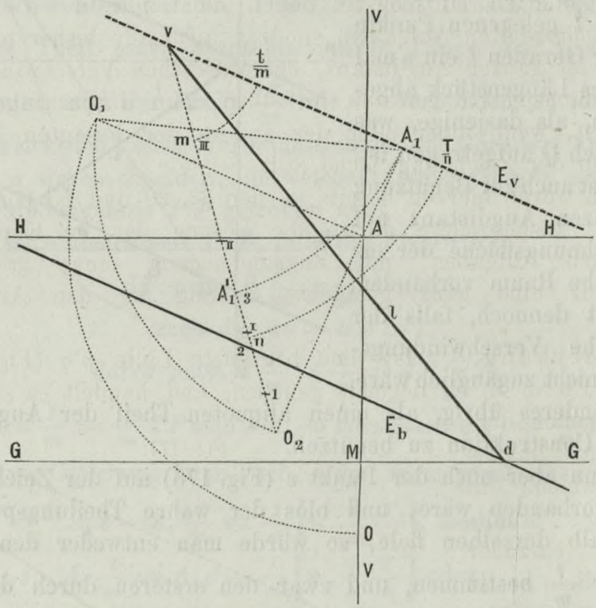
Wenn aber noch der Punkt v (Fig. 176) auf der Zeichnungsfläche vorhanden wäre, und blos der wahre Theilungspunkt T ausserhalb derselben fiele, so würde man entweder den Punkt $\frac{T}{n}$ oder $\frac{t}{m}$ bestimmen, und zwar den ersteren durch das Eintheilen der Differenz $A'_1 O_2$ (zwischen dem bekannten Parallelstrahle $v O_2$ und dem Abstande $v A$) in n Theile, und den letzteren, d. i. $\frac{t}{m}$ dadurch, dass man den Parallelstrahl $v O_2$ in m Theile theilt und den Theilpunkt m nach $\frac{t}{m}$, so wie jenen n nach $\frac{T}{n}$ überträgt.

Das weitere Verfahren, welches in der Anwendung dieser Punkte $\frac{T}{n}$ und $\frac{t}{m}$ besteht, wurde, was den ersten Punkt betrifft, in a) unter α) und β), und was den letzteren Punkt anbelangt unter γ) angegeben.

Bemerkung 1. Schon bei der Bestimmung der Theilungspunkte wurde darauf hingewiesen, dass es am zweckmässigsten sei, dieselben in der Verschwindungslinie einer durch die gegebene Gerade zur Bildfläche senkrecht geführten Ebene anzunehmen.

In den meisten Fällen wird auch jene Linie, auf welcher ein bestimmtes Längenstück abzuschneiden ist, in einer solchen Ebene enthalten sein. Aber auch dann, wenn die Linie in einer Ebene von schiefer Lage gegen die Bildfläche sich vorfindet, kann man mit Vortheil, sobald die ihr entsprechende und dieselbe zur

Fig 176.



Bildfläche projecirende Ebene mit Leichtigkeit sich ergibt, vorerst diese bestimmen, und die Construktion in derselben ausführen, da die projecirenden Ebenen, wie schon früher erwähnt, einige Vereinfachungen in der Construktion zulassen. Nachdem nun bei der Aufgabe 4 die schiefe Ebene immer durch eine zur Bildfläche senkrecht stehende ersetzt werden kann; ferner die Aufgaben 3 und 2 auch ohne Anwendung des nach $\frac{A}{n}$ verschobenen Augpunktes sich lösen lassen, und nur bei der Aufgabe 1, welche bei schiefer Lage der Ebene in der Praxis der Perspektive nur äusserst selten vorkömmt, von dem verschobenen Augpunkte $\frac{A}{n}$ mitunter Gebrauch gemacht werden muss, so ist es gerechtfertigt, warum wir früher bemerkten, dass die schiefe Lage der Ebene einer minder ausführlichen Besprechung unterzogen werden könne.

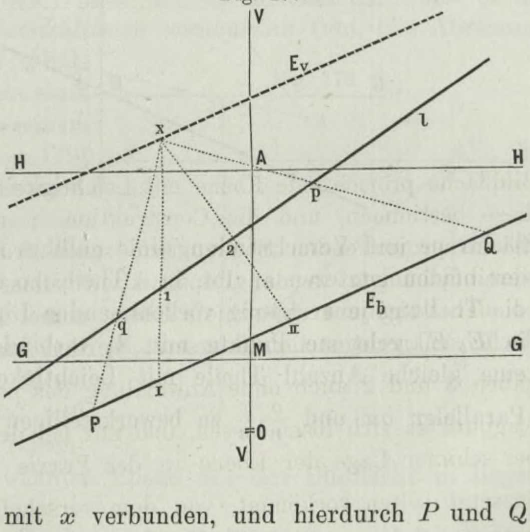
Bemerkung 2. Aus dem bei der Aufgabe 4 Angeführten ist auch ersichtlich, wie man das Umgekehrte dieser Aufgabe, d. i. die Bestimmung der wahren Länge unter denselben Umständen vornehmen kann.

Ferner sei erwähnt, dass man durch die Anwendung der oben angeführten Hilfsconstruktionen nicht nur die vier hier speciell behandelten Aufgaben, sondern auch alle bisher mit Benützung der ganzen Augdistanz, der wirklichen Verschwindungs- und Theilungspunkte gelösten Aufgaben dann durchzuführen im Stande ist, wenn einer oder der andere der besagten Punkte ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt.

Auch wurde hiervon bereits in den §§. 20 und 55 Gebrauch gemacht. Insbesondere dürfte die Lösung der im Kapitel V enthaltenen Aufgaben, mit Zugrundelegung einer grösseren Augdistanz eine ganz geeignete Uebung für den Anfänger bilden.

Bemerkung 3. Ist eine begränzte Linie $p\,q$ (Fig. 177), in einer Ebene $E_b\,E_v$ liegend, gegeben, und handelt es sich um das Eintheilen derselben in Längenstücke, welche ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben sollen, so ist es ganz gleichgiltig, ob der wahre Theilungspunkt aufgefunden werden kann oder nicht; denn man kann jeden beliebigen Punkt x der Verschwindungslinie E_v zur Theilung verwenden.

Fig. 177.



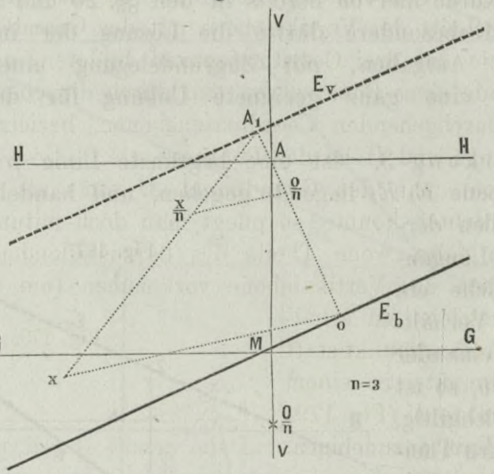
Werden nämlich die Punkte p und q mit x verbunden, und hierdurch P und Q auf E_b erhalten, so wird man nur $P\,Q$ nach dem vorgegebenen Verhältnisse zu theilen, und die entsprechenden Theilpunkte I, II etc. mit x zu verbinden haben, um so in den Durchschnitten der zugehörigen Verbindungslinien mit $p\,q$, d. i. in den Punkten

1, *2* etc., diejenigen Punkte zu erhalten, welche die verlangte Theilung auf der gegebenen Geraden pq bewirken.

Zur Rechtfertigung des Gesagten genügt es auf den Umstand aufmerksam zu machen, dass die sämmtlichen von den Theilpunkten *I*, *II* etc. ausgehenden und in x verschwindenden Linien zu einander parallel sind.

Bemerkung 4. Endlich sei noch bemerkt, dass in jenen Fällen, wo man mit dem $n$ten Theile der Augdistanz arbeitet, es am zweckmässigsten sein wird, vor Allem die Linie $A_1 o$ (Fig. 178), welche durch den Augpunkt A senkrecht auf die Bild-

Fig. 178.



flächtrace und Verschwindungslinie geführt ist, und den Abstand der beiden letzteren angibt, in n Theile zu theilen, indem sodann die Theilung jener häufig vorkommenden Linien, welche beliebige in $E_b E_v$ gelegene Punkte mit A_1 verbinden, wie $x A_1$ etc., in eine gleiche Anzahl Theile mit Leichtigkeit durch die beiden Parallelen ox und $\frac{o}{n}\frac{x}{n}$ zu bewerkstelligen ist.

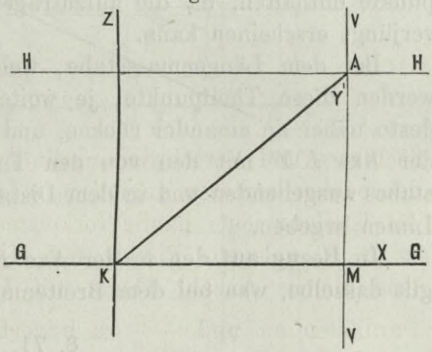
Kapitel VII.
Perspektivische Massstäbe und Methode der Quadrate.

§. 70.
Construktion der perspektivischen Massstäbe.

Schon in §. 20 wurde bemerkt, dass man einen Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf drei ihrer Lage nach bekannte Coordinatenaxen gegeben sind, perspektivisch darstellen könne. Wir nahmen nämlich den Grundpunkt M als den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems an, so dass die Grundlinie, der Durchschnitt der Vertikalebene mit der Grundebene, und die Vertikallinie die drei Coordinatenaxen bildeten, und benannten die Abstände eines Punktes von den durch die eben angegebenen Axen hindurchgehenden Coordinatenebenen, beziehungsweise mit Breite, Länge und Höhe des Punktes.

Wiewohl man den Grundpunkt M stets als den Anfangspunkt betrachten könnte, so pflegt man doch mitunter, und zwar namentlich dann, wenn Theile des darzustellenden Objektes zu beiden Seiten der Vertikalebene vorkommen (um alle Abscissen gleich bezeichnet zu erhalten), den Anfangspunkt statt im Grundpunkte in einem andern Punkte K (Fig. 179) der Grundlinie anzunehmen. Es wird sodann die eine Coordinatenaxe KX in die Grundlinie, die zweite KY' in den Durchschnitt einer durch K parallel zur Vertikalebene geführten Ebene mit der Grundebene, und die dritte KZ in den Durchschnitt der eben erwähnten Ebene mit der Bildfläche zu liegen kommen.

Fig. 179.



Diese Annahme, durch welche die Wahl des Anfangspunktes dem jeweiligen Bedürfnisse angepasst werden kann, wollen wir hier voraussetzen, um drei Massstäbe zu construiren, nach welchen die gegebenen Coordinaten der durch dieselben festgestellten

Punkte auf den Coordinatenaxen aufzutragen, und mit Hilfe derer die Perspektiven der einzelnen Punkte zu bestimmen sind.

Was diese drei Abstände der Punkte von den Coordinatenebenen anbelangt, so wollen wir dieselben in Uebereinstimmung mit dem früher Angegebenen, beziehungsweise mit den Worten: „Breite, Länge und Höhe des Punktes“ bezeichnen, und darnach auch entsprechend einen Breiten-, Längen- und Höhenmassstab unterscheiden. Diese drei Massstäbe werden nach Leroy auch mit den Namen: Front-, Flieh- und Höhenmassstab bezeichnet; wobei sich die Bezeichnung Fliehmassstab dadurch rechtfertigt, dass man die auf der Grundlinie senkrecht stehenden Ebenen Fliehebenen zu nennen pflegt.

Was nun die Construktion dieser Massstäbe anbelangt, so ist diese eine höchst einfache, und besteht blos darin, dass man auf den bezüglichen Axen KX, KY' und KZ (Fig. 180) diejenige Einheit, in der man die Coordinaten der Punkte eines darzustellenden Körpers angibt, in genügender Zahl aufträgt, und die hierdurch erhaltenen Theilpunkte, welche man der Reihe nach mit *1*, *2*, *3*...., b (Breite), l (Länge), h (Höhe) bezeichnet, auf denselben ersichtlich macht.

Der Breitenmassstab, welcher mit der Axe KX zusammenfällt, wird durchgehend in gleicher Entfernung gelegene Theilpunkte enthalten, da die aufzutragende Einheit an keiner Stelle verjüngt erscheinen kann.

Bei dem Längenmassstabe, welcher in die Axe KY' fällt, werden diese Theilpunkte, je weiter sie von K entfernt sind, desto näher an einander rücken, und sich als Durchschnittspunkte der Axe KY' mit den von den Theilpunkten des Breitenmassstabes ausgehenden und in dem Distanzpunkte D verschwindenden Linien ergeben.

In Bezug auf den in der Axe KZ gelegenen Höhenmassstab gilt dasselbe, was bei dem Breitenmassstabe bemerkt wurde.

§. 71.

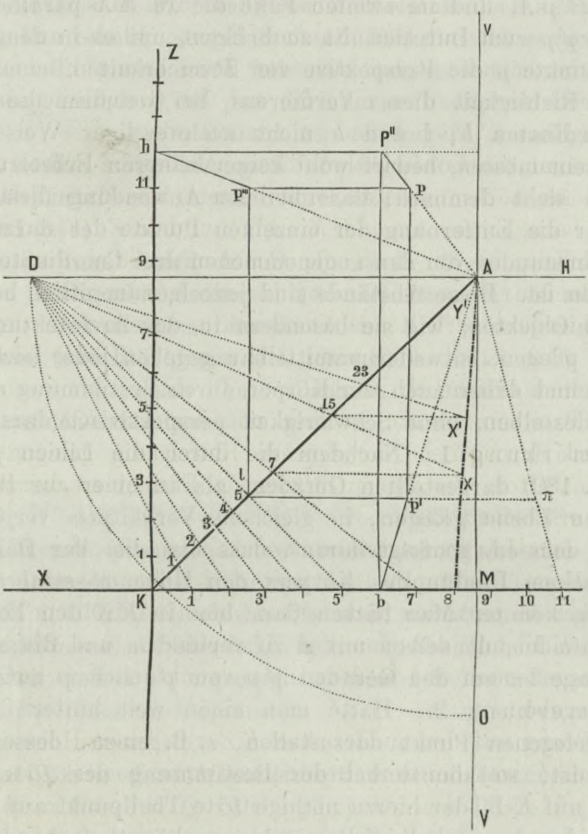
Gebrauch perspektivischer Massstäbe.

Es erübrigt noch, die Anwendung dieser Massstäbe für die perspektivische Darstellung von Punkten zu zeigen.

Zur Erläuterung nehmen wir an, dass die Perspektive p (Fig. 180) eines Punktes P aufzufinden sei, dessen Breite $x = b$, dessen Länge $y = l$, und dessen Höhe $z = h$, in Bezug auf die bei der Construktion der drei Massstäbe angewandte Einheit gegeben ist.

Hat man in den Axen KX, KY' und KZ die drei Theilpunkte b, l und h aufgefunden, so wird sich die verlangte Perspektive p als der Durchschnitt der durch diese Theilpunkte beziehungsweise parallel zur Vertikal-, Bild- und Grundebene ge-

Fig. 180.



führten Ebenen ergeben, und es wird somit blos jener Durchschnitt zu bestimmen sein.

Dieses kann, nachdem die Durchschnittslinie pp' der beiden ersteren Ebenen, welche offenbar eine vertikale Gerade sein muss, mittelst des Durchschnittspunktes p' ihrer Grundflächtracen bp' und lp', aufgefunden, und dadurch zugleich die Grundflächprojektion des darzustellenden Punktes in p bestimmt wurde, entweder mit Benützung der Bildflächprojektion P'', die sich als der Durchschnitt der Bildflächtracen bP'' und hP'' ergibt, oder mit Benützung der Projektion p''' auf die zur Grundlinie senkrechte Coordinatenebene, welcher Punkt als Durchschnitt der beiden Geraden lp''' und hp''' erhalten wird, geschehen.

Man hat nämlich im ersten Falle eine zur Axe KY' parallele Gerade $P''pA$, und im zweiten Falle die zu KX parallele Linie $p'''p$ mit $p'p$ zum Durchschnitt zu bringen, um so in dem Durchschnittspunkte p die Perspektive von P zu erhalten.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens, bei welchem die Werthe der Coordinaten b, l und h nicht nothwendiger Weise ganze Zahlen sein müssen, bedarf wohl keiner näheren Erörterung.

Man sieht demnach, dass bei der Anwendung dieser Massstäbe nur die Entfernung der einzelnen Punkte des darzustellenden Gegenstandes von den angenommenen drei Coordinatenebenen zu messen ist. Diese Abstände sind jedoch, namentlich bei regelmässigen Objekten, wie sie besonders in der Architektur vorzukommen pflegen, entweder unmittelbar gegeben, oder leicht abzunehmen, und daher auch der Körper durch Bestimmung einzelner Punkte desselben, ohne Schwierigkeit perspektivisch darzustellen.

Bemerkung 1. Nachdem die durch die Linien $p'p$ und lp' (Fig. 180) dargestellten Geraden, als in einer zur Bildfläche parallelen Ebene gelegen, in gleichem Verhältniss verjüngt erscheinen müssen, so folgt daraus, dass man bei der Darstellung der einzelnen Punkte des Körpers den Höhenmassstab gänzlich entbehren könnte. Man hätte sodann blos in KX den Theilpunkt 11 aufzufinden, denselben mit A zu verbinden, und die so erhaltene Länge $l\pi$ auf der Geraden $p'p$ von p' nach p aufzutragen.

Bemerkung 2. Hätte man einen weit hinter der Bildfläche gelegenen Punkt darzustellen, z. B. einen, dessen Länge $y = 15$ ist, so könnte bei der Bestimmung des 15ten Theilpunktes auf KY' der hierzu nöthige 15te Theilpunkt auf KX entweder schon ausserhalb fallen, oder es könnte unbequem sein, falls derselbe noch vorhanden wäre, ihn zu benützen. In diesem Falle kann man jene Zahl, welche die Länge des darzustellenden Punktes angibt, als die Summe von zwei oder mehreren kleineren Zahlen betrachten, hier z. B. 15 in 8 und 7 zerlegen.

Diese Zerlegung kann selbstverständlich verschieden geschehen, muss aber so vorgenommen werden, dass die Theilpunkte auf KX, welche mit den Zahlen der angenommenen Addenden versehen sind, innerhalb der Zeichnungsfläche fallen.

Wird nun der eine Theilpunkt, z. B. *8*, mit dem Augpunkte A, der andere, d. i. *7*, mit dem Distanzpunkte D verbunden, und sodann durch den, mittelst der letzteren Verbindungslinie $7D$ in KY' erhaltenen Theilpunkt 7 eine Parallele $7x$ zu KX bis zum Durchschnitte x mit der Geraden $8A$ gezogen, so wird $7x$ die Perspektive einer Länge von *8* Einheiten vorstellen, welche in einer Entfernung $K7$ hinter der Bildfläche sich vorfindet. Der Punkt x mit D verbunden, bestimmt nun eine Linie, welche im Durchschnitte mit KY' den verlangten Theilpunkt *15* angeben wird; denn die Linie xD ist unter 45^0 gegen $7x$ und gegen $7Y'$ geneigt, also die Entfernung *7*, *15* perspektivisch gleich $7x$ oder gleich *8* Einheiten; demnach auch $K7 + 7\ 15 = 15$ Einheiten sein wird.

Würde man durch *15* die Parallele $15x'$ zu KX ziehen, und den hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkt x' mit D verbinden, so erhielte man hierdurch in KY' den Theilpunkt *23*. Hieraus ist ersichtlich, wie man vorzugehen hätte, wenn die Zahl, welche die Länge eines Punktes angibt, in mehr als zwei Zahlen zerlegt werden müsste.

§. 72.

Die Augdistanz als Einheit des Längenmassstabes.

Bei den hier angestellten Betrachtungen haben wir die dem Breiten-, Längen- und Höhenmassstabe zu Grunde gelegte Einheit ganz willkürlich gewählt. Nehmen wir aber, wenigstens für den Längenmassstab, die Augdistanz als die Einheit an, so wird man finden, dass bei Voraussetzung dieser Einheit die erhaltenen Theilpunkte einem interessanten, leicht aufzufindenden Gesetze unterliegen.

Um dieses in seiner Allgemeinheit kennen zu lernen, denken wir uns auf einer Geraden L, welche perspektivisch durch l_d^v (Fig. 181) dargestellt und bestimmt ist, einen Punkt P_n, der hinter der Bildfläche n mal so weit entfernt ist, als das Auge vor derselben liegt, für welchen also die Entfernung dP_n von dem Durchschnittspunkte d gleich $n . Ov$ ist, und bestimmen seine Perspektive mittelst des Sehstrahles OP_n in p_n, so ist ersichtlich, dass die beiden Dreiecke Ovp_n und P_ndp_n einander ähnlich sind, und dass demnach die Proportion

$$vp_n : dp_n = Ov : P_n d$$

bestehen müsse. Nachdem nun aber

$$dP_n = n \,.\, Ov$$

ist, so wird auch

$$vp_n : dp_n = 1 : n, \text{ oder}$$

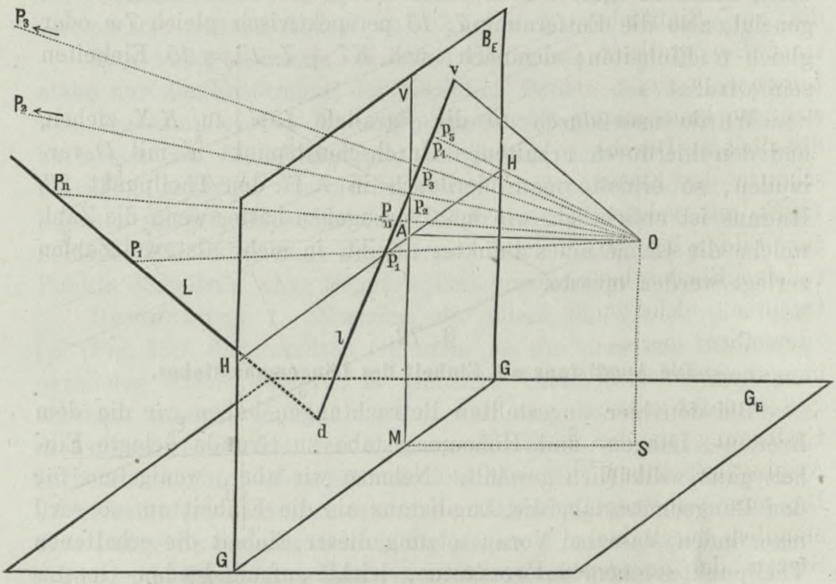
$$vp_n : dp_n : vp_n + dp_n = 1 : n : 1 + n, \text{ oder}$$

$$vp_n : dp_n : dv = 1 : n : 1 + n$$

und demnach

$$vp_n = \frac{1}{n+1} \,.\, dv \text{ und } dp_n = \frac{n}{n+1} \,.\, dv$$

Fig. 181.



Dieses Ergebniss sagt aus, dass mit der Zunahme von n, also bei grösser werdender Entfernung des hinter der Bildfläche gelegenen Punktes P_n die Perspektive p_n sich nach einem bestimmten, durch die eben erhaltenen Gleichungen ausgedrückten Gesetze ununterbrochen dem Punkte v nähert.

Setzen wir in obige Gleichungen für n der Reihe nach die aufeinander folgenden Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ und suchen die entsprechenden Werthe von vp_n und dp_n, so ergiebt sich

für $n = 1$; $vp_1 = {}^1\!/_2\, dv$ und $dp_1 = {}^1\!/_2\, dv$

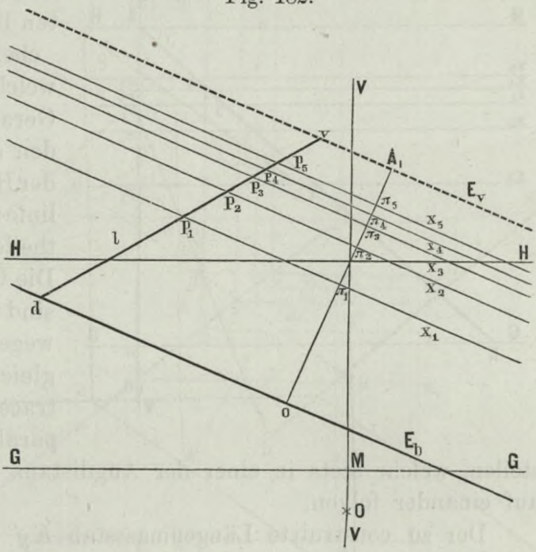
„ $n = 2$; $vp_2 = {}^1\!/_3\, dv$ „ $dp_2 = {}^2\!/_3\, dv$

für $n = 3$; $vp_3 = {}^1/_4 dv$ und $dp_3 = {}^3/_4 dv$
„ etc. etc. „ etc. . . . .

woraus ersichtlich ist, dass für eine beliebige Gerade L, durch das Eintheilen ihrer Perspektive l_d^v in 2, 3, 4 . . . . gleiche Theile, in p_1, p_2, p_3 . . . . Theilpunkte erhalten werden, welche solchen Punkten der Geraden L im Raume entsprechen, die von der Bildebene in einer Entfernung gleich der 1, 2, 3 . . . . fachen Augdistanz liegen.

Wenn man nun durch die Linie l_d^v (Fig. 182) irgend eine Ebene $E_b E_v$ legt, und durch die auf die eben angegebene Weise erhaltenen Theilpunkte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ die zur Bildflächtrace E_b parallelen Linien $x_1, x_2, x_3 \ldots$ zieht, so kann man dieselben als Durchschnitte der Ebene $E_b E_v$ mit solchen zur Bildfläche parallelen Ebenen betrachten, welche von derselben beziehungsweise eine 1, 2, 3 . . . mal so grosse Entfernung als die Augdistanz haben. Da nun selbstverständlich durch das System der gezogenen Parallelen x_1, x_2, x_3 . . . . auch der senkrechte Abstand $A_1\, o$ in den Punkten π_1, π_2, π_3 . . . . in demselben Verhältnisse, wie l in den Punkten p_1, p_2, p_3 . . . ., getheilt wird, so kann man die letzteren Theilpunkte, statt unmittelbar die Gerade l einzutheilen, auch als die Durchschnitte der Linie l mit solchen zwischen $E_b E_v$ gelegenen Linien erhalten, welche auf der Entfernung $A_1\, o$ Längenstücke $A_1 \pi_1$, $A_1 \pi_2$, $A_1 \pi_3$ . . . . gleich ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_4$ . . . . des Abstandes Ao abschneiden.

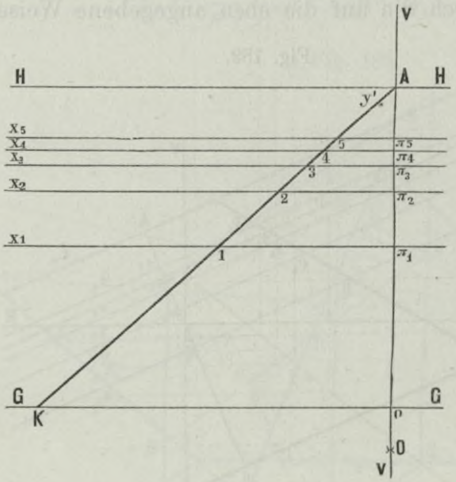
Fig. 182.



Um das hier erzielte Resultat zur Construktion eines Längenmassstabes, dem die Augdistanz als Einheit zu Grunde liegt, zu benützen, haben wir nur einen speciellen Fall der Lage der geraden Linie ins Auge zu fassen.

Wir nehmen nämlich an, dass die Gerade L auf der Bildfläche senkrecht stehe, in der Grundebene gelegen sei, und dass der in der Grundlinie als Anfangspunkt angenommene Punkt K den Durchschnitt der Geraden mit der Bildfläche angäbe, mithin die Gerade L in die Y Axe übergehe. Unter solcher Voraussetzung stellt Fig. 183 den Längenmassstab $Ky'A$ vor. Es sind hiernach *1*, *2*, *3*.... die aufeinander folgenden mit den früheren Punkten $p_1, p_2, p_3 \cdots$ identischen, den bekannten Bedingungen entsprechenden Theilpunkte, welche vermittelst der Geraden $x_1, x_2, x_3 \ldots$, die den senkrechten Abstand der Horizonts- und Grundlinie in oberwähnter Weise theilen, erhalten wurden. Die Geraden $x_1, x_2, x_3 \cdots$ sind hauptsächlich desswegen angegeben, um zugleich die Grundflächtracen von zur Bildfläche parallelen Ebenen darzustellen, welche stets in einer der Augdistanz gleichen Entfernung auf einander folgen.

Fig. 182.



Der so construirte Längenmassstab Ky' zeigt deutlich, dass diejenigen in der Grundebene oder in einer zur Bildfläche parallelen Ebene gelegenen Punkte, deren Längen der *1*, *2*, *3*... fachen Augdistanz gleich sind, ihre Perspektiven, oder beziehungsweise die Perspektiven ihrer Grundflächprojektionen in den auf einander folgenden Geraden x_1, x_2, x_3.... haben müssen.

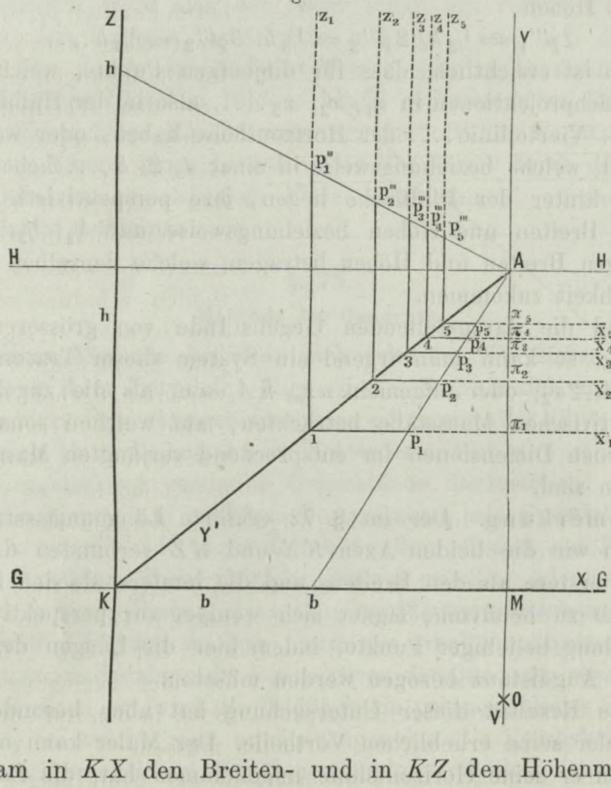
Es sind demnach die perspektivisch auf dem Längenmassstabe abgeschnittenen Längen der Punkte n i c h t i h r e m w i r k l i c h e n oder geometrischen Masse proportional, sondern es tritt bei zunehmender Entfernung des Punktes von der Bildebene, oder bei zunehmender Länge des Punktes, eine g e r e g e l t e A b n a h m e in den perspektivisch dargestellten Längen ein.

Es fällt nämlich, wie ersichtlich, für eine Länge *1*, *2*, *3*.... Augdistanzen der perspektivische Endpunkt derselben beziehungsweise nach *1*, also in die Halbirungslinie, — nach *2*, d. i. in die obere Drittellinie, — nach *3*, also in die obere Viertellinie der Horizontshöhe, etc. etc.

Nicht nur die Längen, sondern auch die Breiten und Höhen der Punkte nehmen in geregelter Weise ab.

Denkt man sich nämlich im Punkte K auf die Axe KX (Fig. 184) eine Senkrechte KZ errichtet, um auf diese Weise

Fig. 184.



gleichsam in KX den Breiten- und in KZ den Höhenmassstab zu erhalten, und trägt man auf diesen Axen die wirkliche Breite und Höhe irgend eines Punktes P auf, so dass die erstere nach $Kb = b$, die letztere nach $Kh = h$ fällt, und verbindet sodann die beiden Punkte h und b mit dem Augpunkte A, so wird man in den Durchschnitten der Linie bA mit den auf einander folgenden Geraden x_1, x_2, $x_3 \ldots$ die Punkte p'_1, p'_2, $p'_3 \ldots$, und in den Durchschnitten der Linie hA mit den in den Punkten $1, 2, 3 \ldots$ auf die Grundebene senkrecht errichteten Geraden z_1, z_2, $z_3 \ldots$ die Punkte p'''_1, p'''_2, $p'''_3 \ldots$ erhalten. Die ersteren Punkte sind offenbar die Endpunkte der perspektivisch dargestellten Breiten, während die letzteren die Gränzen der dargestellten Höhen bilden.

Nachdem nun, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt, die Breiten

$$1p'_1 = {}^1\!/_2 b,\ 2p'_2 = {}^1\!/_3 b,\ 3p'_3 = {}^1\!/_4 b \ldots$$

und die Höhen

$$1p'''_1 = {}^1\!/_2 h,\ 2p'''_2 = {}^1\!/_3 h,\ 3p'''_3 = {}^1\!/_4 h \ldots$$

sind, so ist ersichtlich, dass für diejenigen Punkte, welche ihre Grundflächprojektionen in x_1, x_2, $x_3 \ldots$, also in der Halbirungs-, Drittel-, Viertellinie.... der Horizonthöhe haben, oder was dasselbe ist, welche beziehungsweise in einer $1, 2, 3 \ldots$ fachen Augdistanz hinter der Bildfläche liegen, ihre perspektivisch dargestellten Breiten und Höhen beziehungsweise nur $^1\!/_2$, $^1\!/_3$, $^1\!/_4 \ldots$ derjenigen Breiten und Höhen betragen, welche denselben in der Wirklichkeit zukommen.

Sind die darzustellenden Gegenstände von grösserer Ausdehnung, so kann man irgend ein System dieser Tracen, z. B. $2z_2$, $2A$, $2x_2$, oder allgemein nz_n, nA, nx_n als die zugehörigen perspektivischen Massstäbe betrachten, auf welchen sonach die gemessenen Dimensionen im entsprechend verjüngten Masse aufzutragen sind.

Bemerkung. Der im §. 72 erklärte Längenmassstab mit welchem wir die beiden Axen KX und KZ verbunden dachten, um die erstere als den Breiten- und die letztere als den Höhenmassstab zu benützen, eignet sich weniger zur perspektivischen Darstellung beliebiger Punkte, indem hier die Längen derselben auf die Augdistanz bezogen werden müssten.

Das Resultat dieser Untersuchung hat aber besonders für den Maler seine erheblichen Vortheile. Der Maler kann nämlich, nachdem er seine Horizontslinie angenommen hat, die Lage der perspektivisch darzustellenden Gegenstände, welche das von ihm auszuführende Bild fassen soll, je nach ihrer Entfernung von der Bildfläche, die er mit der Augdistanz vergleicht, hinreichend genau nach obigen Erörterungen, wenn selbst nur nach dem Augenmasse, ermitteln, und zugleich sich nicht nur leicht die nothwendigen Anhaltspunkte verschaffen, welcher er bei der perspektivischen Darstellung der auf der Bildfläche senkrecht stehenden Dimensionen (Längen) bedarf, sondern derselbe wird auch in der Lage sein, die Breiten- und Höhenmasse der Gegenstände ziemlich genau anzugeben, indem er weiss, dass diejenigen Objekte, welche in dem halben, dritten, vierten.... Theile der Horizontshöhe auf dem Bilde anzuordnen sind, von ihren wirklichen Ausmassen nur beziehungsweise den halben, dritten, vierten Theil zu erhalten haben.

Darnach kann also der Maler leicht ein richtiges Massverhältniss der dargestellten Objekte einhalten, und sich auf diese Weise blos durch das einfache Messen ohne zu construiren, von den in perspektivischen Bildern häufig vorkommenden Verstössen gegen die richtige Massbestimmung, die oft aus Bequemlichkeit oder aus Mangel eines Lineals, oder überhaupt durch die Scheu, eine Construktion auf dem Bilde vorzunehmen, vernachlässigt wird, leicht befreien.

§. 73.

Methode der Quadrate.

Dieser Methode bedienen sich mitunter die Maler bei der Skizzirung ihrer Entwürfe. Hier sei dieselbe, als sich unmittelbar an die obigen Bemerkungen anschliessend, nur in aller Kürze berührt.

Diese Methode besteht im Folgenden. Hat man viele kleine und unregelmässig vertheilte Gegenstände darzustellen, so kann man die Ebene, auf welcher sie aufruhen, als Grundebene betrachten und diese in lauter Quadrate, deren Seiten zur Bildflächtrace derselben Ebene beziehungsweise parallel oder senkrecht sind, so getheilt denken, dass die Grundflächprojektionen der darzustellenden Objekte in dem hierdurch erhaltenen Netze liegend erscheinen, und sodann die Perspektiven der Quadrate verzeichnen.

Auf diese Art wird die Bildfläche in perspektivische Quadrate getheilt, in welche man annäherungsweise die Perspektiven der Grundflächprojektionen der Gegenstände vertheilen kann. Hierdurch erhält man den Grundriss der darzustellenden Gegenstände in der Perspektive, welchen man auch den perspektivischen Grundriss nennt, und mit dessen Hilfe die Darstellung der Objekte sehr erleichtert wird. Dieses Verfahren ist übrigens zu einfach, als dass es einer weiteren Auseinandersetzung bedürfte.

ZWEITER ABSCHNITT.

Durch ebene Flächen begränzte Körper.

Kapitel VIII.

Die körperliche Ecke.

§. 74.

Allgemeine Bemerkungen.

Schneiden sich drei Ebenen in einem Punkte, so schliessen dieselben eine körperliche Ecke ein.

Die von je zwei Schnittlinien der drei Ebenen gebildeten Winkel nennt man die Kantenwinkel, während die von je zwei dieser Ebenen eingeschlossenen Winkel die Seiten- oder Flächenwinkel der Ecke genannt werden.

Es hat somit jedes körperliche Dreieck drei Kanten- und drei Flächenwinkel, und wird im Allgemeinen durch drei dieser genannten sechs Stücke bestimmt sein.

Fällt man von irgend einem Punkte Ebenen senkrecht auf jede der drei Kanten, so bilden diese Ebenen wieder eine körperliche Ecke, welche der besonderen Eigenschaft wegen, dass die Kantenwinkel derselben die Seitenwinkel der ersteren Ecke und umgekehrt zu *180⁰* ergänzen, die Supplementar-Ecke heisst.

Ist das perspektivische Bild einer körperlichen Ecke gegeben, so können, nach den vorhergegangenen Sätzen, die Winkel, welche je zwei Kanten mit einander einschliessen, so wie die Neigungswinkel je zweier Ebenen, also alle sechs Bestimmungsstücke der Ecke gefunden werden.

Aus den sechs Bestimmungsstücken einer körperlichen Ecke können ebenso viele Combinationen zu je drei Stücken gebildet werden, wonach sich folgende Anflösungsfälle ergeben.

Es können entweder:

1. drei Kantenwinkel,

2. zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel,
3. zwei Kantenwinkel und ein gegenüberliegender Flächenwinkel,
4. drei Flächenwinkel,
5. ein Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel, oder endlich
6. zwei Flächenwinkel und ein gegenüberliegender Kantenwinkel gegeben, und die fehlenden Stücke zu suchen sein.

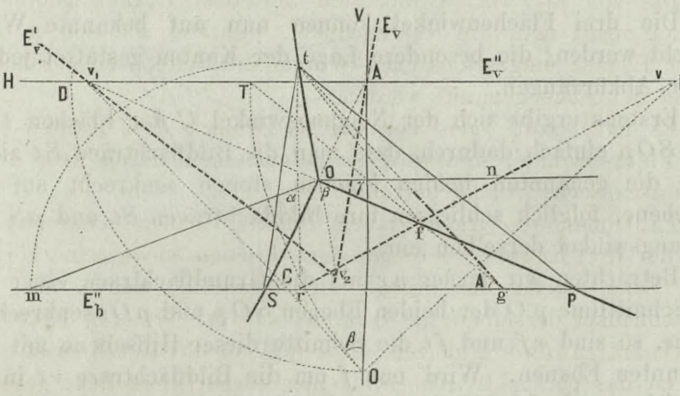
§. 75.

Aufgabe.

Est ist die körperliche Ecke perspektivisch darzustellen und aufzulösen, wenn drei Kantenwinkel gegeben sind.

Lösung. Der Einfachheit wegen sei vorausgesetzt, dass die Ecke mit einer Seitenfläche, z. B. mit jener in der Horizontalebene $E''_b\, E''_v$ (Fig. 185) liege, deren Kanten den Winkel β ein-

Fig. 185.



schliessen, und dass die eine Kante SO senkrecht auf der Bildebene sei.

Nachdem man sich die beiden andern Seitenflächen um die bezüglichen horizontalen Kanten in diese Horizontalebene umgelegt, und die Perspektiven der sich so aneinanderreihenden Kantenwinkel mOS, SOp und pOn in der Horizontalebene verzeichnet hat, so wähle man auf der Kante mO einen Punkt, und zwar am zweckmässigsten den Durchstosspunkt m derselben mit der

Bildebene, und schneide auf der Kante nO ein Längenstück nO perspektivisch ab, welches der Kantenlänge mO gleich ist.

Werden die beiden Seitenflächen mOS und nOp, beziehungsweise um SO und pO, so lange gedreht, bis die Kanten mO und nO zusammenfallen, so ist ersichtlich, dass auch die beiden Punkte m und n zusammentreffen werden. Legt man daher durch m und n Ebenen, beziehungsweise senkrecht auf OS und Op, und sucht die Perspektiven ihrer horizontalen Tracen, so sind diese mp (indem hier die erstere dieser beiden Ebenen die Bildebene selbst ist) und nr (welch' letztere perspektivisch senkrecht auf Op zu ziehen ist).

Nun ist offenbar r ein Punkt des Schnittes dieser beiden Ebenen, welche, als Vertikalebenen, sich in einer vertikalen Geraden rt schneiden müssen.

Der Punkt m beschreibt bei seiner Drehung einen Kreis, der, als in der Bildebene liegend, sein eigenes perspektivisches Bild ist, folglich im Durchschnitte mit dem Perpendikel rt einen Punkt t der Kante Ot gibt, welcher zugleich der Durchstosspunkt dieser Kante mit der Bildebene ist.

Die drei Flächenwinkel können nun auf bekannte Weise gesucht werden; die besondere Lage der Kanten gestattet jedoch einige Abkürzungen.

Erstens ergibt sich der Neigungswinkel C der Flächen tOS und SOp einfach dadurch, dass man die Bildflächtrace St zieht; denn die genannten beiden Flächen stehen senkrecht auf der Bildebene, folglich schliessen ihre Bildflächtracen St und pS den Neigungswinkel derselben ein.

Betrachten wir ferner nr als die Grundflächtrace einer auf der Schnittlinie pO der beiden Ebenen SOp und pOt senkrechten Ebene, so sind rf und ft die Schnitte dieser Hilfsebene mit den genannten Ebenen. Wird nun f um die Bildflächtrace rt in die Bildebene gedreht (was vermittelst des Theilungspunktes T der Geraden rfv geschieht), bis f nach g gelangt, so ist tgr der zu suchende Flächenwinkel A.

Was endlich den dritten Seitenwinkel B anbelangt, den die Flächen SOt und pOt einschliessen, so sind Av_2 (durch A parallel zu St) und $v_1 v_2$ (durch den Verschwindungspunkt v_1 der Kante pO parallel zu pt) die Verschwindungslinien E_v und E'_v der beiden Seitenflächen, deren Neigungswinkel B sich auf die im §. 52 behandelte Weise ergeben wird.

Auf dieselbe Art wäre vorzugehen, wenn die körperliche Ecke eine beliebige Lage im Raume hätte, nur würde sich die Schnittlinie rt nicht vertikal, und das Bild des Kreises als Ellipse darstellen.

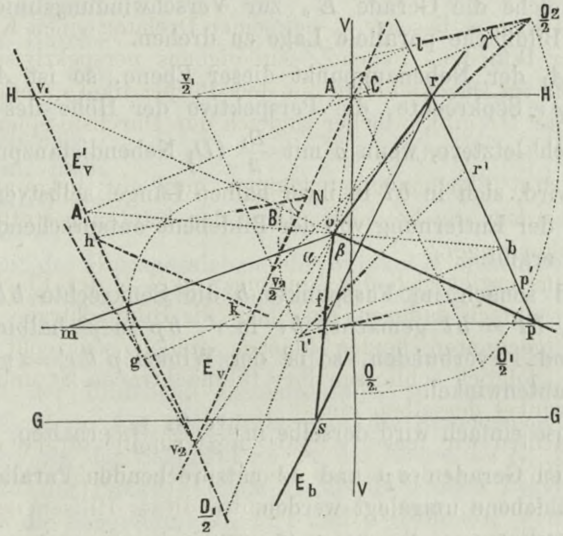
§. 76.

Aufgabe.

Es ist die körperliche Ecke darzustellen und aufzulösen, wenn zwei Kantenwinkel α und β und der eingeschlossene Seitenwinkel C gegeben sind.

Lösung. Man lege wieder, der Einfachheit halber, die Kante so (Fig. 186), in welcher der Scheitel des Seitenwinkels

Fig. 186.



liegt, senkrecht auf die Bildfläche und die Fläche sop horizontal. Die durch die Kante so gehende zweite Seitenfläche muss sonach senkrecht auf die Bildebene stehen, daher ihre Verschwindungslinie E_v durch den Augpunkt so zu ziehen sein wird, dass sie mit der Horizontslinie HH den Winkel C bildet. Die Bildflächtrace E_b dieser Ebene ist daher durch den Durchstosspunkt s der Kante os parallel mit E_v zu ziehen.

Ist som die Perspektive des in die Grundebene umgelegten Kantenwinkels α, so nehme man irgend einen Punkt m der Kante

$m o$ an, und drehe diesen um $s o$ als Drehungsaxe so lange, bis er in die Ebene $E_b E_v$ fällt. Zu diesem Ende lege man durch m eine auf $s o$ senkrechte Ebene, deren Grundflächtrace $m p$ ist, und welche, da sie parallel zur Bildebene ist, sich mit der Ebene $E_b E_v$ in einer zu E_v parallelen Geraden $f r$ schneiden wird.

Der Punkt m beschreibt bei der Drehung einen Kreisbogen parallel zur Bildebene, dessen Perspektive also wieder ein Kreis vom Radius $m f$ ist, und sich mit $f r$ in einem Punkte r der dritten Kante $r o$ schneidet.

Bei der Bestimmung der übrigen Stücke wird man in ähnlicher Weise, wie in der vorhergegangenen Aufgabe vorgehen.

Zum Behufe der Bestimmung des Kantenwinkels $p o r$ wird es am zweckmässigsten sein, denselben um die Trace $p r$ seiner Ebene, welche die Gerade E'_v zur Verschwindungslinie hat, in eine zur Bildfläche parallele Lage zu drehen.

Ist A_1 der Nebenaugpunkt dieser Ebene, so ist $A_1 o b$, als die auf $p r$ Senkrechte, die Perspektive der Höhe des Dreiecks $r p o$, welch' letztere, wenn o mit $\frac{D_1}{2}$ (D_1 Nebendistanzpunkt) verbunden wird, sich in $b l$ in ihrer halben Länge, selbstverständlich in einem der Entfernung von der Bildebene entsprechenden Masse verjüngt, ergibt.

Wird sonach im Fusspunkte b die Senkrechte $b l'$ auf $b r$ errichtet, $b l' = b l$ gemacht, $b r$ in r', $b p$ in p' halbirt, und l' mit p' und r' verbunden, so ist der Winkel $p' l' r' = \gamma$ der verlangte Kantenwinkel.

Ebenso einfach wird derselbe in $\frac{v_1}{2} \frac{O_2}{2} \frac{v_2}{2}$ erhalten, wenn die den beiden Geraden $o p$ und $o t$ entsprechenden Parallelstrahlen in die Bildebene umgelegt werden.

Den Winkel A, den die beiden Ebenen $s o p$ und $p o r$ bilden, erhält man, wenn durch s eine senkrechte Ebene auf $o p$ geführt, und diese, wie im vorigen Beispiele, um ihre vertikale Bildflächtrace sammt den darin liegenden Schnittlinien in die Bildfläche gedreht wird.

Auf gleiche Weise, wie vorhergehend, erhielte man den Flächenwinkel B, welcher in $h N v_2$ gefunden wurde.

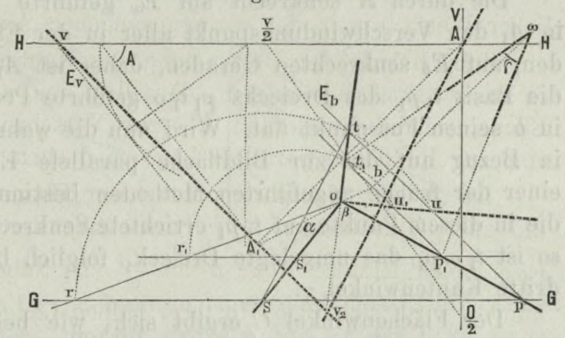
§. 77.

Aufgabe.

Es ist eine körperliche Ecke darzustellen und aufzulösen, wenn zwei Kantenwinkel und ein gegenüberliegender Seitenwinkel gegeben sind.

Lösung. Legen wir die Ebene *sop* (Fig. 187), in welcher der Winkel β liegt, horizontal, und stellen die Kante *so*, an welcher sich der Seitenwinkel nicht befindet, senkrecht auf die Bildebene, verzeichnen an *so* den in die Horizontalebene umgelegten Winkel α, wenn möglich bis zum Durchschnitte r des Schenkels or mit der Bildebene, und legen, nach §. 56, durch po eine Ebene $E_b E_v$, welche mit der Horizontalebene den Winkel A einschliesst, so sind die nothwendigen Vorbereitungen zur Lösung der vorliegenden Aufgabe getroffen.

Fig. 187.



Führt man durch s eine auf so senkrechte Ebene, welche hier mit der Bildebene zusammenfällt, so schneidet diese die Ebene $E_b E_v$ in E_b, und dreht man die Seitenebene ros um so so lange, bis der Schenkel ro in die Ebene $E_b E_v$ gelangt, so beschreibt der Punkt r einen in der Bildebene liegenden Kreis rtu, der die Schnittlinie E_b in t und u schneidet, welch' letztere sich als Punkte der zu suchenden dritten Kante ergeben, woraus erhellt, dass diese Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zulässt, in dem Falle jedoch, als der Kreis die Gerade E_b nur berührt, oder gar nicht trifft, blos eine, resp. keine Auflösung gestattet.

Würde sich der Punkt r nicht mehr auf der Zeichnungsfläche ergeben, so könnte man ebenso einfach irgend einen Punkt r_1 der Geraden ro wählen, und mit demselben eine gleiche Construktion durchführen.

Es wäre sodann $r_1 p_1$ die horizontale Trace einer zur Bildfläche parallelen Ebene, und $p_1 t_1$, parallel zu pt, die Schnittlinie derselben mit der Ebene $E_b E_v$.

Die Gerade $p_1 t_1$ wird von dem aus s_1 mit dem Radius $r_1 s_1$ gezogenen Kreise in den beiden Punkten t_1 und u_1 geschnitten, welche mit o verbunden die dritten Kanten der beiden hier möglichen körperlichen Dreiecke geben.

Der Kantenwinkel top kann wieder gefunden werden, indem man seine Ebene um die Trace E_b in die Bildfläche, oder um $p_1 t_1$ in eine zur Bildfläche parallele Ebene umlegt.

Die durch A senkrecht auf E_v geführte Gerade $A A_1$ gibt in A_1 den Verschwindungspunkt aller in der Ebene $E_b E_v$ liegenden, auf E_b senkrechten Geraden, daher ist $A_1 ob$ das von o auf die Basis $t_1 p_1$ des Dreiecks $p_1 t_1 o$ geführte Perpendikel, welches in b seinen Fusspunkt hat. Wird nun die wahre Länge desselben in Bezug auf die zur Bildfläche parallele Ebene nach irgend einer der früher angeführten Methoden bestimmt und von b auf die in diesem Punkte auf $t_1 p_1$ errichtete Senkrechte $b\omega$ übertragen, so ist $t_1 \omega p_1$ das umgelegte Dreieck, folglich bei ω der gesuchte dritte Kantenwinkel γ.

Der Flächenwinkel C ergibt sich, wie bei allen jenen Auflösungsfällen, wo die Bestimmungsstücke eine solche Lage wie die hier angenommene gegen die Bildebene haben, indem man die Punkte t und s verbindet, wobei $tsp = C$ den gewünschten Seitenwinkel darstellt.

Der Flächenwinkel B ist auf die allgemeine Art zu bestimmen.

Die Fälle 4, 5 und 6 können auf die soeben behandelten zurückgeführt werden, indem man die entsprechende Supplementarecke construirt und von einem Punkte innerhalb derselben Perpendikel auf die Ebenen der Supplementarecke fällt; diese bilden sodann die drei Kanten der zu suchenden Ecke.

Bei den Fällen 4 und 6 sind dies wohl die einfachsten Auflösungen; der Fall 5 jedoch lässt sich einfacher direkt, d. h. ohne Zuhilfenahme der Supplementarecke lösen.

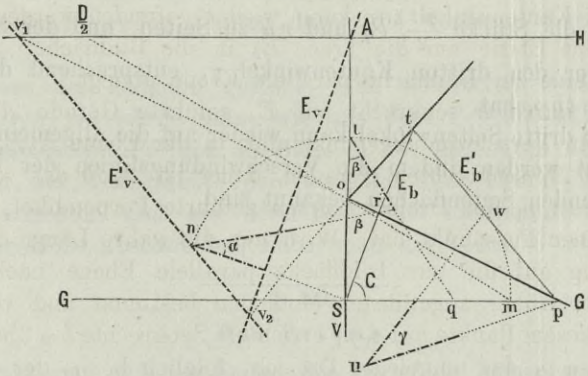
§. 78.

Aufgabe.

Es ist eine körperliche Ecke perspektivisch darzustellen und aufzulösen, wenn ein Kantenwinkel und die anliegenden Flächenwinkel gegeben sind.

L ö s u n g. Denken wir uns die körperliche Ecke in gleicher Lage gegen die Bildebene, wie in allen bereits behandelten Fällen, und in o (Fig. 188), als Scheitel, den gegebenen Kantenwinkel Sop verzeichnet, so werden wir blos an die beiden Kanten oS und op die Ebenen $E_b\ E_v$, $E'_b\ E'_v$ unter den gegebenen

Fig. 188.



Winkeln gegen die Grundebene zu legen, und deren Durchschnitt zu bestimmen haben, um die dritte Kante ot der Ecke zu erhalten.

Da oS senkrecht auf der Bildebene steht, so ergibt sich die erste dieser beiden Ebenen einfach dadurch, dass man die Verschwindungslinie E_v durch A unter dem gegebenen Flächenwinkel C gegen die Horizontslinie zieht. Die zweite Ebene muss auf die bekannte Weise, nach §. 56, ermittelt werden.

Hiermit wäre die körperliche Ecke dargestellt. Behufs ihrer Auflösung wird es sich um die Grösse der zwei Kantenwinkel Sot und top und den von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel handeln.

Die Auffindung der Kantenwinkel betreffend ist es am zweckmässigsten, die einzelnen Flächen um deren Schnittlinien tS, Sp und pt mit der Bildebene, in dieselbe umzulegen.

Nachdem So senkrecht auf der Bildebene, daher auch senkrecht auf St und Sp steht, so sind die Dreiecke Spo und Sto bei S rechtwinklig, und die eine Kathete derselben ist die wahre Grösse des Abstandes oS, dessen halbe Länge durch Verbinden von o mit $\frac{D}{2}$ in Sm erhalten wird.

Verzeichnet man sonach Dreiecke mit den halben Seitenlängen (des beschränkten Raumes wegen), so enthält das eine Dreieck Srn bei n den Kantenwinkel α, und das andere Slq bei l den Winkel β.

Die Hypothenusen lq und rn dieser beiden Dreiecke, sind offenbar gleich den halben wahren Längen der Kanten op und ot und können zur Verzeichnung des dritten Dreiecks pto dienen, welches die Stücke $\frac{pt}{2}$, lq und rn zu Seiten, und der Seite $\frac{pt}{2}$ gegenüber den dritten Kantenwinkel γ, entsprechend der Perspektive top, hat.

Der dritte Seitenwinkel kann wieder auf die allgemeine Weise bestimmt werden, indem die Verschwindungslinien der ihn einschliessenden Seitenflächen bekannt sind.

Kapitel IX.

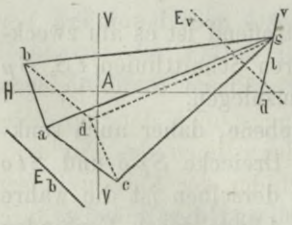
Perspektivische Darstellung von Körpern, die von ebenen Flächen begränzt sind.

§. 79.

Die Pyramide.

Das perspektivische Bild einer Pyramide wird durch das Bild der Basis und durch die Perspektiven der sich in einem Punkte, der Spitze, vereinigenden Kanten gegeben sein.

Fig. 189.



Ist demnach $abcd$ (Fig. 189) die in der Ebene $E_b E_v$ gelegene Basis, und S die durch die Gerade l_d^v bestimmte Spitze der Pyramide, so hat man diese einfach mit den Eckpunkten des Basispolygons zu verbinden, um die einzelnen Kanten zu erhalten. Beim Verbinden ist überdies noch zu berücksichtigen, welche von den so erhaltenen Kanten sichtbar oder gedeckt erscheinen. In unserem Beispiele sind die Basiskanten bd und cd, mithin ebenfalls die

Kante $d\,S$ gedeckt. Dies ist leicht zu erkennen, wenn man die Lage der Basisebene und die der Spitze richtig beurtheilt; hier z. B. zeigt die Verschwindungslinie E_v an, dass die Basisebene eine Neigung gegen die Bildfläche nach oben zu hat, und dass, weil die Bildflächtrace E_b unter E_v liegt, man auf die Ebene von oben sieht. Da ferner der Punkt S über der Basisebene liegt, so sind die nach rückwärts, also hinter den äussersten Begränzungen liegenden Kanten durch die vorderen Seitenflächen gedeckt.

Wäre die Aufgabe gestellt, eine senkrechte Pyramide zu construiren, so würde man, wie aus dem Begriffe selbst folgt, ein regelmässiges Polygon als Basis in der gegebenen Ebene verzeichnen, im Mittelpunkte der Basis auf diese Ebene eine Senkrechte errichten und auf derselben, vom Fusspunkte aus, die gegebene Höhe abschneiden, wobei man die Spitze S erhielte.

§. 80.

Das Prisma.

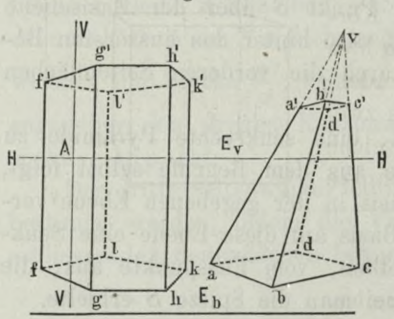
Denkt man sich die Spitze der Pyramide immer weiter von der Basis entfernt, so werden die Kantenwinkel an der Spitze immer kleiner, bis sie schliesslich bei unendlicher Entfernung der Spitze von der Basisebene, d. i. bis die Kanten zu einander parallel werden, und die Pyramide in ein Prisma übergeht, gleich Null sind. Hieraus folgt, dass ein Prisma perspektivisch so wie die Pyramide dargestellt wird, nur dass beim Prisma der Verschwindungspunkt der parallelen Kanten die Spitze des Bildes ist.

Der eben besprochene Uebergang von der Pyramide zum Prisma ist insbesondere für die perspektivische Darstellung dieser Körper von Vortheil, da hieraus hervorgeht, dass sämmtliche Constructionen bei beiden Körpern in gleicher Weise durchzuführen sind und sich bei Prismen aus dem Umstande, dass die Spitze als Verschwindungspunkt zu betrachten ist, noch besondere Vereinfachungen ergeben.

Ist also $a\,b\,c\,d$ (Fig. 190) die in der Ebene $E_b\,E_v$ gelegene Basis eines Prisma, v der Verschwindungspunkt der parallelen Prismenkanten, so werden die Verbindungslinien des Punktes v mit a, b, c und d die perspektivischen Bilder der Kanten liefern.

Das Prisma ist gewöhnlich begränzt, und dies zumeist durch eine zur Basis parallele Ebene, wo dann die parallelen Kanten eine gleiche Länge besitzen. Tragen wir also auf jeder Kante ein gleiches Stück perspektivisch auf, so wird die obere Begränzungsfigur $a'b'c'd'$ erhalten, von welcher $c'd'$ und $a'd'$ gedeckt sind. Von der Auffindung der oberen Basis wird erst in der Folge die Rede sein.

Fig. 190.



In derselben Figur wurde durch $hfgkl\ h'f'g'k'l'$ ein zweites Prisma perspektivisch dargestellt, bei welchem der Verschwindungspunkt der parallelen Kanten in unendliche Entfernung fällt, d. h. dessen Kanten eine zur Bildfläche parallele Lage haben. In diesem speciellen Falle sind sonach auch die Perspektiven der Prismenkanten zu einander parallel.

Stehen die einzelnen Kanten, somit auch die Seitenflächen senkrecht auf der Basisebene, so ist das Prisma ein senkrechtes, dessen Construktion aus dem eben Gesagten folgt. In Fig. 190 wurde das Prisma $lfghk\ l'f'g'h'k'$ als solches dargestellt, indem die Basisebene horizontal und die Kanten vertikal angenommen wurden.

Regelmässige Körper.

A. *Das Hexaeder.*

Das Hexaeder oder der Würfel ist von sechs congruenten Quadraten begränzt, wovon je zwei zusammenstossende Flächen auf einander senkrecht stehen.

§. 81.

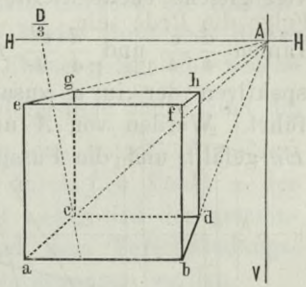
Aufgabe.

Es ist ein Würfel darzustellen, wenn dessen Kantenlänge gegeben ist.

Lösung. Am einfachsten wird ein Würfel perspektivisch dargestellt, wenn derselbe mit einer Seitenfläche auf einer horizontalen Ebene aufsteht, und eine Seitenfläche zur Bildebene parallel ist. Ist also ab (Fig. 191) die Perspektive einer zur Bildfläche parallelen Würfelkante, so gibt das über derselben verzeichnete Quadrat $abcd$ die eine Seitenfläche des Würfels.

Nachdem die vier in den Seiten dieses Quadrates aufstehenden Seitenflächen vertikal sind, so werden, wenn man über ab und cd die zur Bildfläche parallelen Quadrate $abef$ und $cdgh$ verzeichnet, durch dieselben die sämmtlichen acht Ecken des Körpers gefunden sein. Es ist mithin blos e mit g und f mit h zu verbinden, um die Bilder der noch fehlenden zwei Kanten des Würfels zu erhalten, welche bei richtiger Construktion im Augpunkte verschwinden müssen.*)

Fig. 191.



§. 82.

Aufgabe.

Es ist ein Würfel, dessen Basis in einer beliebigen Ebene liegt, aus seiner Kantenlänge zu verzeichnen.

Lösung. Es sei $E_b E_v$ (Fig. 192) die gegebene Ebene und $ABCD$ die um E_b in die Bildfläche umgelegte, in $E_b E_v$ liegende Seitenfläche des Würfels.

Vor Allem suche man den Verschwindungspunkt v der auf $E_b E_v$ senkrechten Geraden, welcher jedoch in diesem Falle zu weit ausser die Bildfläche fällt, als dass er direkt benützt werden könnte. Es wurde sonach $\frac{v}{4}$ in der Weise bestimmt, dass auf der durch A parallel zu E_v gezogenen Geraden die Länge $A\frac{O_1}{2}$ gleich der halben Augdistanz aufgetragen, $\frac{O_1}{2}$ mit A_1 verbunden und $\frac{O_1}{2}\frac{v}{4}$ senkrecht auf $A_1\frac{O_1}{2}$ errichtet wurde, welch' letzt gezogene Gerade sich mit $A_1 A$ im Punkte $\frac{v}{4}$ so schneidet, dass $A\frac{v}{4} = \frac{1}{4} A v$ ist.

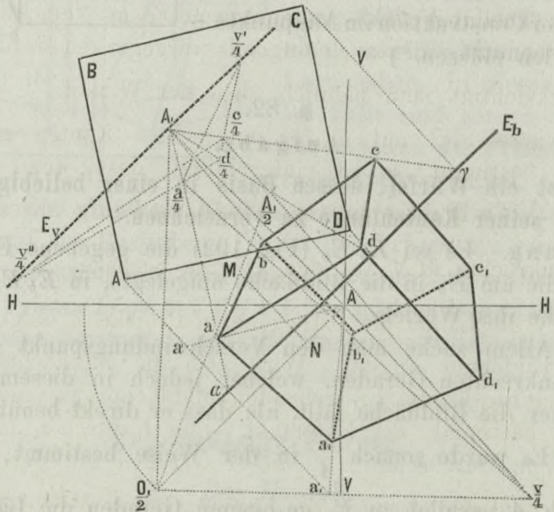
Weiters verzeichne man die Perspektive $abcd$ des in $E_b E_v$ liegenden Quadrates $ABCD$, und zwar am zweckmässigsten in der Weise, dass man die Viertelverschwindungspunkte $\frac{v'}{4}$ und

---

*) Um richtige perspektivische Bilder zu erhalten, musste die Distanz grösser als gewöhnlich angenommen werden, weshalb bei den Polyedern mit der Halben-, Drittel- oder Vierteldistanz gearbeitet werden wird.

$\frac{v''}{4}$, so wie die Ecke d bestimmt, d mit A_1 verbindet, $d A_1$ in vier gleiche Theile theilt, so dass $A_1 \frac{d}{4} = \frac{1}{4} A_1 d$ ist, sodann die Linien $\frac{d}{4} \frac{v'}{4}$ und $\frac{d}{4} \frac{v''}{4}$ zieht und zu diesen durch d die Perspektiven der in d zusammenstossenden Quadratseiten parallel führt. Werden von A und C die Perpendikel $A\alpha$ und $C\gamma$ auf E_b gefällt und die Fusspunkte α und γ mit A_1 verbunden, so

Fig. 192.



schneiden diese Geraden die eben gefundenen Perspektiven in den Endpunkten c und a derselben, so wie die Geraden $\frac{d}{4} \frac{v'}{4}$ und $\frac{d}{4} \frac{v''}{4}$ in den Punkten $\frac{c}{4}$ und $\frac{a}{4}$. Diese Punkte mit $\frac{v'}{4}$ und $\frac{v''}{4}$ verbunden, bestimmen die Richtungen der Perspektiven ab und bc, welch' letztere sonach durch a und c beziehungsweise parallel zu $\frac{a}{4} \frac{v'}{4}$ und $\frac{c}{4} \frac{v''}{4}$ zu ziehen sind, und im Durchschnitte b die Perspektive des Punktes B liefern.

Werden nun die vier Punkte $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{4}$, $\frac{c}{4}$ und $\frac{d}{4}$ mit $\frac{v}{4}$ verbunden, so sind hiermit die Richtungen der Perspektiven jener vier Kanten gegeben, welche auf $E_b E_v$ senkrecht stehen. Diese

Perspektiven sind mithin durch a, b, c und d parallel zu obigen Verbindungslinien zu ziehen.

Um endlich auf den letzt gefundenen Geraden die Kantenlänge abzuschneiden, kann auf bekannte Weise durch jede dieser vier Geraden eine bildflächprojecirende Ebene gelegt (für welche $A_1 A \frac{v}{4}$ die gemeinschaftliche Verschwindungslinie bleibt, und die Bildflächtrace erhalten wird, indem man den betreffenden Fusspunkt, z. B. a mit A_1 verbindet und durch den Punkt α der Bildflächtrace E_b eine Parallele zu $A_1 A$ zieht) und der gemeinschaftliche Theilungspunkt, entsprechend dem Verschwindungspunkte v, benützt, oder auch folgends vorgegangen werden.

Berücksichtigt man nämlich, dass der Winkel $\frac{A_1}{2} \frac{O_1}{2} A$ den Neigungswinkel der auf $E_b E_v$ senkrechten Kanten gegen die Bildebene bestimmt, so ist einleuchtend, dass, wenn auf dem Schenkel $\frac{O_1}{2} \frac{A_1}{2}$ die Kantenlänge $\frac{O_1}{2} M = AB$ aufgetragen, und aus M die Senkrechte MN auf den zweiten Schenkel $A \frac{O_1}{2}$ errichtet wird, $\frac{O_1}{2} N$ die Länge der orthogonalen Projektion obiger Kanten auf der Bildebene angibt. Wird also die Bildflächtrace $\alpha a'_1$ einer durch die Kante $a a_1$ gehenden bildflächprojecirenden Ebene wie oben bestimmt, der Endpunkt a der Kante $a a_1$ mit A verbunden, vom Durchschnitte a' dieser Geraden mit der Bildflächtrace $\alpha a'_1$ auf der letzteren die Länge $a' a'_1 = N \frac{O_1}{2}$ aufgetragen und a'_1 mit A verbunden, so schneidet diese Verbindungslinie die Kantenrichtung $a a_1$ in dem zu suchenden Endpunkte a_1.

Ist auf diese Weise ein Punkt der untern Basis des Würfels gegeben, so kann dieselbe mit Benützung der Verschwindungspunkte der obern in $E_b E_v$ gelegenen Seitenfläche, oder durch weiteres Abschneiden der Kantenlängen auf den Kantenrichtungen $b b_1$, $c c_1$ und $d d_1$ gefunden werden.

Bemerkung, Ist das um E_b in die Bildebene umgelegte Quadrat $ABCD$ daselbst verzeichnet, so ist ersichtlich, dass die aus den einzelnen Eckpunkten desselben auf E_b senkrecht errichteten Geraden zugleich die Bildflächtracen der betreffenden bildflächprojecirenden Ebenen angeben.

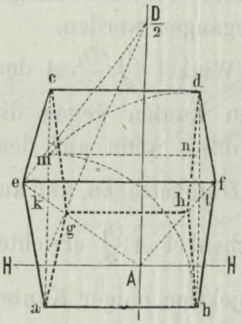
§. 82.

Aufgabe.

Es ist die Perspektive eines Würfels zu construiren, wenn derselbe mit einer Kante derart auf einer Horizontalebene steht, dass die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Flächen einen gleichen Winkel mit der Horizontalebene einschliessen.

Lösung. Wenn die horizontale Kante parallel zur Bildfläche und *ab* (Fig. 193) als die Perspektive derselben angenommen wird, so ist die gegenüberstehende parallele Kante *cd* in einer der Diagonale einer Quadratseitenfläche gleichen Höhe über derselben gelegen, indem sich in *a* und *b* senkrecht auf die Bildfläche die beiden Quadrate *aceg* und *bdfh* anreihen, deren in *a* und *b* zusammenstossenden Seiten, der Annahme zufolge, gleich geneigt sind, weshalb die Diagonalen *ac* und *bd* vertikal sein müssen. Beschreibt man also über *ab* das Quadrat *abmn* und überträgt dessen Diagonale *bm* von *a* nach *c* und von *b* nach *d*, so ist *bd* die oberste Kante.

Fig. 193.



Weiters sind die beiden obgenannten Quadrate zu verzeichnen, deren Diagonalen *eg* und *fh* horizontal und senkrecht auf die Bildfläche sind.

Man wird also *ac* und *bd* in *k* und *l* halbiren, die Richtungen ***Ak*** und ***Al*** dieser Diagonalen ziehen, und auf denselben nach vorn und rückwärts die halbe Diagonalenlänge *ak* abschneiden, wodurch man die letzten vier Eckpunkte des Würfels erhält.

Zum Abschneiden dieser Längenstücke können zumeist die in der Vertikallinie gelegenen Distanzpunkte am vortheilhaftesten benützt werden.

Bemerkung. Die Seiten der letztgefundenen zwei Quadrate sind in vertikalen Ebenen gelegen und gegen die Bildfläche unter 45^0 geneigt, wesshalb ihre Verschwindungspunkte mit den in der Vertikallinie gelegenen Distanzpunkten zusammenfallen, was eine Controle für die Richtigkeit der durchgeführten Construktion bietet. Ebenso müssen *cd*, *ef* und *gh* parallel zur Horizontslinie sein.

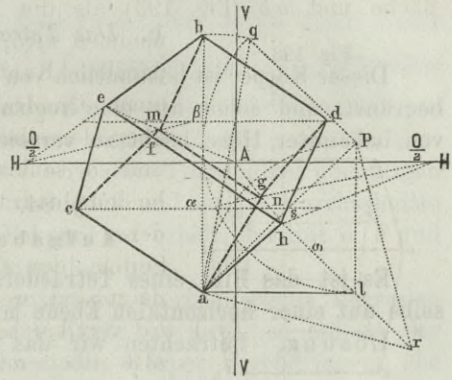
§. 83.

Aufgabe.

Es ist das Bild eines Würfels zu zeichnen, wenn eine Axe desselben vertikal steht.

Lösung. Ist ab (Fig. 194) die Lage der vertikalen Axe und a der Fusspunkt derselben, ferner al die Perspektive einer Kantenlänge, welche in der durch ab gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene liegt, so ist bekannt, dass die Diagonale eines Würfels gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei, dessen eine Kathete die Kantenlänge, und die andere Kathete die Diagonale des über der Kantenlänge beschriebenen Quadrates ist. Wird demnach über al ein Quadrat verzeichnet, pq senkrecht auf dessen Diagonale ap errichtet und der Kantenlänge al gleich gemacht, endlich aq von a nach b übertragen, so ist b die oberste Ecke des Würfels.

Fig. 194.



Die übrigen sechs Ecken liegen je drei in einer Ebene, so dass diese beiden Höhenebenen die Axe ab in drei gleiche Theile $a\alpha = \alpha\beta = \beta b$ theilen.

Da vorliegender Körper regelmässig ist, so müssen je drei in einer Ebene liegende Ecken sich als die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks ergeben, dessen Seiten der Diagonale einer Würfelfläche gleich sind, indem je zwei dieser Ecken in einer Seitenfläche, und zwar einander gegenüber liegen.

Wird also über ap ein gleichseitiges Dreieck apr beschrieben, so ist dieses in die beiden Höhenebenen derart zu übertragen, dass die Mittelpunkte in die Axe ab fallen, und dass jenes in der Höhe β eine um 180^0 verkehrte Stellung gegen das andere hat, sonst jedoch beliebig gelegt werden kann. Hier wurde eine Seite senkrecht, mithin die entsprechende Dreieckshöhe parallel zur Bildfläche angenommen.

Ist also $\omega s = \frac{1}{3} sr$, so mache man $an = \beta m = s\omega$, $ac = \beta d = \omega r$, verbinde m und n mit A und schneide auf diesen bildflächprojecirenden Geraden, von n und m aus, nach vorn und rückwärts, die halbe Dreiecksseite $as = sp$ ab, wodurch man die übrigen sechs Ecken c, d, e, f, g, und h erhält.

Bei einer solchen Stellung der Hilfsdreiecke werden die Kanten ac, bd, fg und eh zur Bildfläche parallel sein, mithin auch deren Perspektiven parallel zu einander erscheinen müssen.

b. *Das Tetraeder.*

Dieser Körper ist bekanntlich von vier gleichseitigen Dreiecken begränzt, und somit als eine regelmässige dreiseitige Pyramide von bekannter Höhe leicht zu verzeichnen.

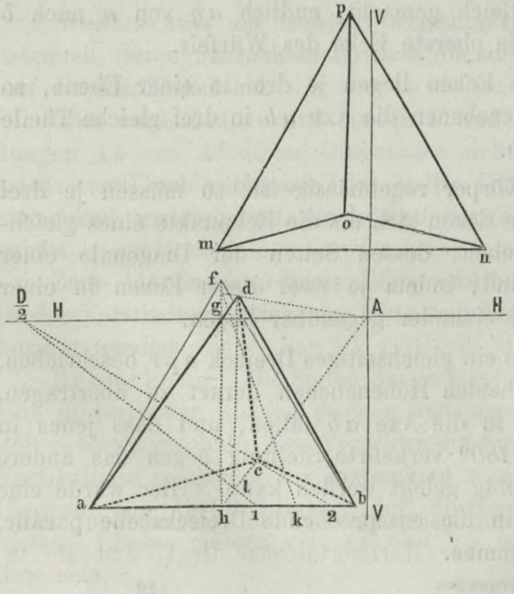
§. 84.

Aufgabe.

Es ist das Bild eines Tetraeders zu construiren, wenn dasselbe auf einer horizontalen Ebene mit einer Seitenfläche aufruht.

Lösung. Betrachten wir das Tetraeder als Pyramide, so ist zunächst das Bild der Basis, also das eines regelmässigen Dreiecks darzustellen. Ist also $a\,b$ (Fig. 195) die Perspektive einer Tetraederkante, der wir eine zur Bildfläche parallele Lage geben wollen, so denke man sich die horizontale Dreiecksfläche abc um $a\,b$ so lange gedreht, bis sie parallel zur Bildebene wird und somit als gleichseitiges Dreieck abf erscheint, dessen Höhe fh auf der Horizon-

Fig. 195.



talen hc perspektivisch aufgetragen, die dritte Ecke c der Basis abc bestimmt.

Theilen wir diese Höhe hc perspektivisch in drei gleiche Theile, so ist der erste Theilpunkt l der Fusspunkt der aus der vierten Ecke d gefällten Vertikalen dl, und es wird sich nur noch darum handeln, die Höhe ld aufzufinden und entsprechend im Bilde aufzutragen. Diese Höhe ist jedoch leicht gefunden, indem sie als die eine Kathete hg eines rechtwinkligen Dreieckes erscheint, dessen Hypothenuse die Höhe hf einer Dreiecksseitenfläche afb, und die andere Kathete hk der dritte Theil dieser Höhe ist. Wird also $hk = \frac{1}{3} hf$ gemacht und die Senkrechte hf aus k mit der Länge hf als Hypothenuse durchschnitten, so ist hg die Höhe des Tetraeders in der durch ab gehenden Vertikalebene, welche auf das in l errichtete Perpendikel übertragen wird, indem man g mit A verbindet und so im Durchschnitte von gA mit ld den vierten Eckpunkt d erhält, der mit a, b und c verbunden, das Bild des Tetraeders gibt.

Da die Ecke c in einer unter der Horizontsebene liegenden Horizontalebene und hinter der Kante ab liegt, so müsste der aus c gehende Sehstrahl vorerst den Körper durchdringen, ehe er in das Auge gelangt; es sind sonach c, also auch die drei in c sich vereinigenden Kanten, unsichtbar.

Bemerkung. In Fig. 195 wurde noch ein zweites Tetraeder in gleicher Weise, jedoch auf einer über dem Auge sich befindlichen Horizontalebene aufruhend und mit der Ecke o nach vorn gerichtet, dargestellt, daher in diesem Bilde alle Kanten sichtbar erscheinen.

Wäre das Tetraeder mit einer Ecke auf einer Horizontalebene aufstehend so darzustellen, dass alle in dieser Ecke zusammenstossenden Flächen mit der Horizontalebene einen gleichen Winkel einschliessen, so wäre die gleiche Construktion durchzuführen, nur würde das Tetraeder in verkehrter Stellung erscheinen, d. i. man hätte die Höhe ld von l aus nach unten aufzutragen.

§. 85.

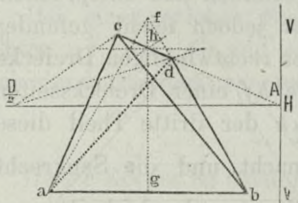
Aufgabe.

Es ist ein Tetraeder perspektivisch so darzustellen, dass eine seiner Kanten in einer Horizontalebene liegt, und die in

derselben zusammenstossenden Flächen eine gleiche Neigung gegen die Horizontalebene haben.

Lösung. Lassen wir die besagte Kante ab (Fig. 196) überdies noch parallel zur Bildfläche sein, so liegt die oberste Kante cd ebenfalls horizontal, jedoch auf der ersteren, also auch auf der Bildfläche, senkrecht und es wird sich demnach blos um den vertikalen Abstand dieser beiden Kanten handeln. Derselbe ergibt sich als die Kathete gh des rechtwinkligen Dreiecks ghb, dessen Hypothenuse die Höhe fg einer Dreiecksfläche und dessen andere Kathete gb die halbe Kantenlänge ist.

Fig. 196.



Durchschneidet man demnach das im Halbirungspunkte g der Kante ab errichtete Perpendikel fg aus b mit einem Kreisbogen, dessen Radius der Höhe fg einer Seitenfläche afb gleichkommt, so ist h der Halbirungspunkt der oberen auf der Bildfläche senkrecht stehenden Tetraederkante, auf welcher, wenn von h nach c und d die halbe Kantenlänge perspektivisch aufgetragen wird, sich die Ecken c und d ergeben, welche mit a und b verbunden die übrigen Kanten des Tetraeders in der gewünschten Lage liefern.

c. *Das Oktaeder.*

Das Oktaeder ist von acht gleichseitigen Dreiecken begränzt, von welchen je vier in einer Ecke zusammenstossen, also eine regelmässige vierseitige Pyramide bilden.

§. 86.

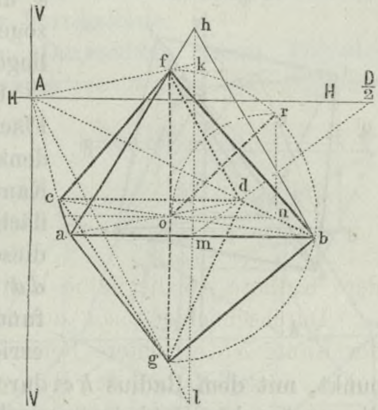
Aufgabe.

Es ist ein Oktaeder derart darzustellen, dass eine Axe desselben vertikal steht.

Lösung. Betrachten wir das Oktaeder als zwei congruente, regelmässige, vierseitige Pyramiden, welche ein gemeinschaftliches Quadrat als Basis haben, so kann die Höhe derselben als die Kathete mk (Fig. 197) eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden werden, dessen Hypothenuse bk der Höhe mh einer Seitenfläche abh des Oktaeders, und dessen zweite Kathete bm der halben Kantenlänge gleich ist.

Ist sonach $abcd$ das über der Oktaederkante ab verzeichnete Quadrat, und o dessen Mittelpunkt, so hat man von o auf der in diesem Punkte errichteten Vertikalen die Perspektive der eben bestimmten Höhe nach oben und unten aufzutragen, was einfach dadurch bewerkstelligt wird, dass man die Länge mk nach abwärts, d. i. nach ml überträgt und die Punkte k und l mit A verbindet. Die so erhaltenen Punkte f und g geben, mit a, b, c und d verbunden, die noch fehlenden acht Kanten des Polyeders.

Fig. 197.



Bemerkung. Berücksichtigt man, dass die beiden Ecken f und g, ebenso wie b und c, oder a und d, einander gegenüberliegen, so folgt, dass fg auch der Diagonale eines über der Kantenlänge beschriebenen Quadrates gleich sei. Die Punkte f und g können daher auch erhalten werden, wenn man durch o eine zu ab parallele Gerade on bis zum Durchschnitte mit ac und bd führt, über dieser so erhaltenen Länge ein Quadrat verzeichnet, und dessen halbe Diagonale von o nach f und g überträgt.

§. 87.

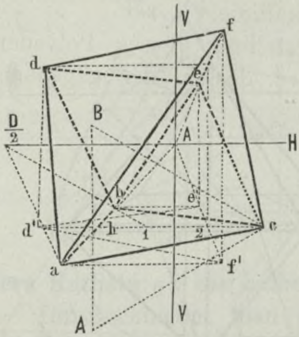
Aufgabe.

Es ist ein Octaeder, mit einer Seitenfläche in einer Horizontalebene liegend, zu verzeichnen.

Lösung. Construiren wir die Perspektive der Dreiecksfläche abc (Fig. 198) in einer Horizontalebene derart, dass die eine Seite ab senkrecht auf die Bildebene, daher die Höhe ch parallel zu derselben zu liegen kommt, so ist die gegenüberstehende Fläche gleichfalls horizontal, jedoch gegen die untere Fläche um 180^0 verkehrt, daher wir die Perspektive ihrer Projektion auf die Basisebene erhalten, wenn wir ein gleiches Dreieck $d'e'f'$, um 180^0 gegen das erstere gedreht, jedoch mit Beibehaltung desselben Mittelpunktes, verzeichnen. Am einfachsten ergibt sich dies, wenn man die Höhe hc in drei gleiche Theile theilt, und einen Theil auf der Verlängerung der Geraden ch von h nach d'

aufträgt, woselbst sich in d' die Spitze, und im zweiten Theilpunkte 2 der Halbirungspunkt der auf die Bildebene senkrechten Seite $e'f'$ ergibt, deren Endpunkte e' und f' in den durch a und b gezogenen Horizontalen be' und af' liegen.

Fig. 198.



Um nun die Entfernung der beiden Flächen abc und def zu bestimmen, denke man sich in h eine auf die Kante ab senkrechte, also zur Bildfläche parallele Ebene geführt, so wird dieselbe das rechtwinklige Dreieck $dd'h$ enthalten, dessen Spitze d gefunden wird, indem man die in d' errichtete Vertikale aus h, als Mittelpunkt, mit dem Radius hc durchschneidet, wodurch sich in dd' die gewünschte Entfernung ergibt.

Schliesslich hat man von d als Spitze das der horizontalen Projektion $d'e'f'$ entsprechende Dreieck def zu verzeichnen, und die sechs Ecken gehörig unter einander zu verbinden, um die Perspektive des Oktaeders zu erhalten.

d. *Das Dodekaeder.*

Dieser Körper ist von zwölf congruenten regelmässigen Fünfecken begränzt, von welchen je zwei einander gegenüberstehende in zwei parallelen Ebenen, jedoch in verkehrter Stellung gegen einander, sich befinden.

§. 88.

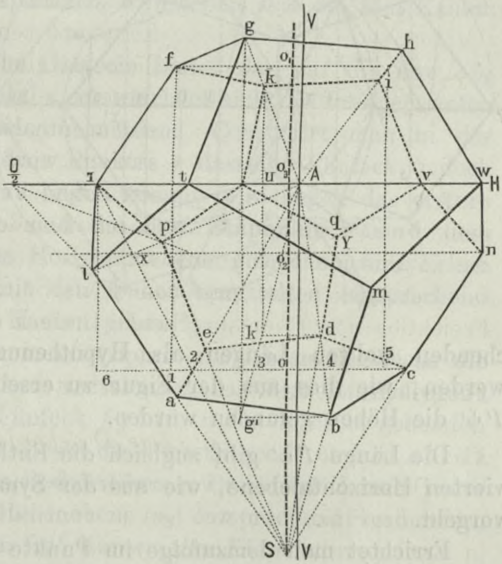
Aufgabe.

Es ist das Bild eines Zwölfflächners zu construiren, wenn derselbe mit einer seiner Begränzungsflächen in einer horizontalen Ebene liegend angenommen wird.

Lösung. Die zwanzig Ecken des Dodekaeders liegen in vier parallelen, hier also horizontalen Ebenen, deren Entfernungen von einander leicht zu ermitteln sind. Je fünf in einer Horizontalebene befindliche Ecken bestimmen ein regelmässiges Fünfeck, von welchen die in den beiden äussersten Ebenen liegenden einander gleich sind und die Dodekaederkante zur Seite haben, während die in den beiden mittleren Höhenebenen gelegenen, ebenfalls congruenten Fünfecke mit einer Sehne des ersteren Fünfecks als Seite zu verzeichnen sein werden und, so wie die beiden obigen, eine um *180⁰* gegen einander verwendete Lage haben. Die Mittelpunkte der diesen Fünfecken umschriebenen Kreise liegen sämmtlich in einer Vertikallinie.

Behufs der perspektivischen Darstellung dieses Polyeders verzeichne man vorerst die Perspektive des in der gegebenen Horizontalebene liegenden Fünfecks $abcde$ (Fig. 199) und zwar am einfachsten so, dass eine Seite ae desselben senkrecht auf die Bildebene, somit die dieser Seite entsprechende Höhe $c\,2$ parallel zur Bildfläche sei. Bezieht man nun die weitere Construktion auf diese Linien $c\,2$, d. h. will man bei der Construktion so verfahren, wie wenn diese Höhe in der Bildebene, folglich der entsprechende Körper zur Hälfte vor und hinter der Bildebene gelegen wäre, so verzeichne man ein Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 200), welches dieselbe Höhe $2'\gamma = 2c$ hat, und dessen Mittelpunkt O ist.

Fig. 199.

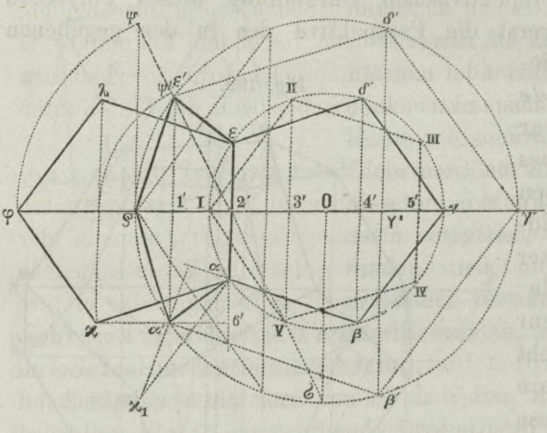


Beschreibt man nun aus O einen Kreis, dessen Radius so gesucht wurde, dass das eingeschriebene Fünfeck die Diagonale $\beta\delta$ des ersteren zur Seite hat, so wird das in diesem Kreise parallel zu $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ verzeichnete Fünfeck $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ die Lage der in der ersten Höhe liegenden fünf Eckpunkte geben. In demselben Kreis ein Fünfeck, jedoch um *180⁰* gedreht verzeichnet, stellt die Lage der fünf Eckpunkte in der zweiten Höhenebene vor, so wie das zu $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ congruente Fünfeck *I II III IV V* die oberste Seitenfläche gibt.

Verbindet man die Punkte α, α', ρ, ε'. ε in der Weise, wie sie der Reihe nach aufeinander folgen, so stellt dies die Projektion des an die Seite $\alpha\varepsilon$ stossenden Fünfecks vor, welches in $\alpha\varepsilon\lambda\varkappa\varphi$ um $\alpha\varepsilon$ in die Basisebene umgelegt verzeichnet ist.

Aus dieser Projektion ist es nun sehr einfach, die Abstände der einzelnen Höhenebenen von einander oder von der Basisebene zu ermitteln; denn es ist $\rho\,2'$ die Projektion von $2'\varphi$ und $2'\,1'$ die Projektion von $2'4'$, somit die Höhen der beiden Punkte ρ und α' aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken $2'\,1'\,\psi'$ und $2'\rho\,\psi$, welche die genannten Projektionen als die einen Katheten und die entsprechenden wahren Längen als Hypothenusen besitzen, erhalten werden, wie dies aus der Figur zu ersehen ist, wo in $\rho\,\psi$ und $1'\psi'$ die Höhen gefunden wurden.

Fig. 200.



Die Länge $1'\psi'$ gibt zugleich die Entfernung der dritten und vierten Horizontalebene, wie aus der Symetrie des Körpers hervorgeht.

Errichtet man demzufolge im Punkte 6 (Fig. 199), nachdem zuvor $2\,6 = 2'\rho$ gemacht wurde, das Perpendikel $r\,6$ und trägt darauf die gefundene Höhe $r\,6 = \rho\,\psi$ auf, so ergibt sich der Punkt r, welcher mit 2 verbunden die Höhe des in $a\,e$ anstossenden Fünfecks liefert. Da nun diese Gerade $r\,2$ parallel zur Bildebene ist, und mit $2\,c$ in einer Ebene liegt, so wird man auf derselben von r aus das Stück $13'$ (Fig. 200) nach x aufzutragen, diesen Punkt mit dem Augpunkte zu verbinden, und auf dieser Geraden $A\,x$ die Stücke $x\,l$ und $x\,p$ gleich der halben Fünfeckssehnenlänge $\frac{1}{2}\,\beta\,\delta$ abzuschneiden haben, um die beiden Ecken l und p des Körpers, und dessen Seitenfläche $a\,l\,r\,p\,e$, so wie auch die auf die Bildfläche senkrechte Seite $l\,p$ jenes Fünfecks $l\,p\,m\,q\,n$ zu erhalten, welches die Lagen der bezeichneten fünf Eckpunkte in der zweiten Horizontalebene fixirt und dem Polygone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ (Fig. 200) entspricht. Als Höhe dieses Fünfecks wurde $1'\gamma'$ gefunden, welches Stück sonach auf der durch x gezogenen Horizontalen nach n aufgetragen, den Eckpunkt n des Polyeders liefert. Macht man ferner $xy = 1'y'$ und zieht die auf die Bildebene Senkrechte yA, so hat man auf derselben von y aus nach vorn und rückwärts die Stücke $my = qy$, gleich der halben Sehne $\delta'y'$ abzuschneiden, um die übrigen zwei in dieser Ebene liegenden Eckpunkte m und q zu erhalten. Verbindet man entsprechend die so erhaltenen Eckpunkte mit den Basispunkten, so ergeben sich die fünf Kanten al, bm, cn, dq und ep.

Eine beachtenswerthe Controle bietet der auf die Axe oo_1 nach S übertragene Punkt σ, in welchem sich die letztgenannten Kanten verlängert vereinigen müssen. Construirt man in der Höhe des bereits gefundenen Punktes r dasselbe Fünfeck, jedoch so, dass in r eine Ecke zu liegen kömmt (also gegen das erstere um 180^0 verwendet), so sind die fünf Eckpunkte $rtuvw$ desselben die in der dritten Horizontalebene gelegenen fünf Ecken des Polyeders, welche mit den früher ermittelten entsprechend verbunden, weitere zehn Kanten geben.*)

Trägt man endlich vom Mittelpunkte o_3 dieses Fünfecks die Höhe oo_2 nach o_1 auf und verzeichnet das dem Basispolygone entgegengesetzt liegende Fünfeck $fghik$ in der durch o_1 gehenden Horizontalebene, so bildet dieses die höchstliegende und zu $abcde$ parallele Seitenfläche des Dodekaeders. Diese Ecken mit jenen der vorher bestimmten Höhenebene o_3 entsprechend verbunden, geben die noch fehlenden fünf Kanten des Körpers.

Auch hier ist wieder zu bemerken, dass diese letzteren fünf Kanten verlängert in einem Punkte S_1 der Axe oo_1 sich vereinigen müssen, wobei $o_1 S_1 = oS$ ist.

§. 89.

Aufgabe.

Es ist ein Dodekaeder perspektivisch darzustellen, wenn eine Kante desselben horizontal und parallel zur Bildebene ist, und die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seitenflächen eine gleiche Neigung gegen die Horizontalebene besitzen.

---

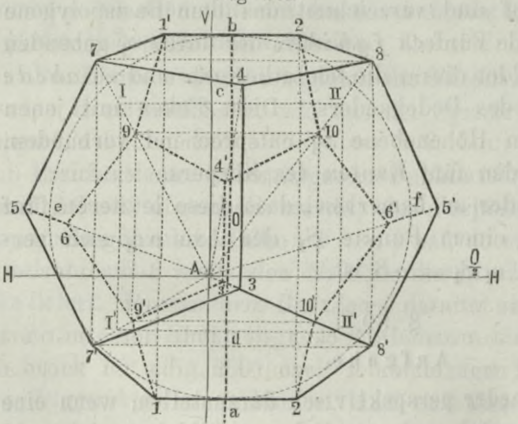
*) Sollte, wie dies in Fig. 199 der Fall ist, diese Ebene der Horizontsebene sehr nahe liegen, so lässt sich zum Behufe der Auffindung der fünf Eckpunkte, jede andere Horizontalebene aushilfsweise benützen.

Lösung. Denken wir uns das in Fig. 199 dargestellte Dodekaeder auf der Kante *cn* in eben angegebener Weise aufgestellt, so ist die gegenüberliegende Kante *rf* vertikal über derselben gelegen. Die Kanten *ih* und *ae* stehen dann senkrecht auf der Bildebene, die durch sie gelegte Ebene halbirt die durch die Halbirungspunkte der Kanten *rf* und *cn* gezogene Vertikallinie und der Abstand dieser Kanten *ih* und *ae* ist jenem der Kanten *rf* und *cn* gleich. Die Kanten *mt* und *qu* sind sodann vertikale Gerade in demselben Abstande und gleichfalls symetrisch gegen die Mittellinie und gegen die Kanten *rf* und *cn* gelegen.

Endlich befinden sich die noch übrigen acht Ecken *l*, *p*, *g*, *k*, *b*, *d*, *v*, *w* in den Eckpunkten eines Würfels, der mit einer Seitenfläche zur Bildebene, und mit einer Kante parallel zu *cn* liegt, dem Polyeder eingeschrieben ist, und die Diagonale einer Fünfecksseitenfläche zur Kante hat.

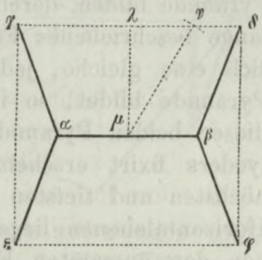
Aus dem eben Gesagten folgt, dass sich die vorliegende Construktion auf die durch *12* (Fig. 201), d. i. auf die Perspektive der gegebenen Kante, gelegte Vertikalebene beziehen lässt. Es handelt sich hier vorzugsweise um die Höhe der beiden Punkte *7'* und *8'*, welche sich einfach ermitteln lässt. Wird nämlich $\alpha\beta$ (Fig. 202) gleich *12* (Fig. 201) gemacht, über dieser Seite ein regelmässiges Fünfeck beschrieben, und mit der Diagonale desselben als Seite ein Quadrat $\gamma\delta\varepsilon\varphi$ so verzeichnet, dass $\alpha\beta$ parallel zu einer Seite des Quadrates ist und der Halbirungspunkt μ von $\alpha\beta$ mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ die Projektion eines durch die drei Seiten $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$, $\beta\delta$ und die Diagonale $\gamma\delta$ begränzten Theiles des Fünfecks, und wird $\mu\nu$, als die wahre Grösse der dem Theile $\mu\lambda$ entsprechenden Höhe, von μ nach ν als Hypothenuse aufgetragen, so ergibt sich

Fig. 201.



durch die Kathete $\lambda\nu$ die gewünschte Höhe. Tragen wir also diese Höhe $\lambda\nu$ auf der im Halbirungspunkte a der Kante *12* (Fig. 201) errichteten Vertikalen von a nach d auf, so ist d der Mittelpunkt der horizontalen Würfelseitenfläche *7' 8' 9' 10'*, welcher Würfel sich nun aus der bekannten Fünfecksdiagonale $\gamma\delta$ (Fig. 202) als Kante in *7 8 9 10 7' 8' 9' 10* ergibt; denn $dc = \gamma\delta$ gemacht, wird in c den Mittelpunkt der oberen Würfelseitenfläche geben, so wie aus der Symetrie des Polyeders folgt, dass man nur noch das Stück ad von c nach b aufzutragen habe, um den Halbirungspunkt b der oberen Kante, also in *1' 2'* diese selbst zu erhalten.

Fig. 202.



Wird ab in O halbirt, so ist O der Mittelpunkt des Körpers, und es müssen sich, der gegebenen Erklärung gemäss, die Halbirungspunkte e und f der auf der Bildfläche senkrechten Kanten *5 6* und *5' 6'* in der durch O gezogenen Horizontalen ef befinden. Da jedoch ef parallel zur Bildfläche ist und mit ab in einerlei Ebene liegt, so hat man blos $Oa = Of = Oe$ zu machen, in f und e die Perpendikel fA und eA auf die Bildebene zu errichten und auf diesen nach vorn und rückwärts die halbe Kantenlänge $1a$ aufzutragen, um die Perspektiven der Kanten *5 6* und *5' 6'* zu erhalten.

Die Kanten *3 4* und *3' 4'* endlich werden gefunden, wenn man in derselben Entfernung Ob von O, jedoch in der durch die Axe ab gehenden, bildflächprojecirenden Ebene die beiden Vertikalen *3 4* und *3' 4'* zieht, und auf denselben die Kantenlänge so aufträgt, dass die Endpunkte gleich weit über und unter der durch O gehenden Horizontalebene zu liegen kommen.

Auf diese Art hat man alle Ecken des Polyeders bestimmt, welche entsprechend mit einander verbunden, das zu suchende Bild dieses Körpers geben.

e. *Das Ikosaeder.*

Das Ikosaeder ist von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begränzt, wovon je fünf in einer Ecke zusammenstossen.

§. 90.

Aufgabe.

Es ist die Perspektive eines Ikosaeders in einer solchen Stellung zu verzeichnen, dass die Verbindungslinie von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten vertikal wird.

Lösung. Berücksichtigt man, dass die fünf in der unteren Ecke zusammenstossenden Dreiecke eine regelmässige fünfseitige Pyramide bilden, deren Basis ein horizontales über der Kantenlänge beschriebenes Fünfeck ist, und dass an der oberen Ecke sich eine gleiche, jedoch gegen die untere um *180*^{0} gedrehte Pyramide bildet, so ist ersichtlich, dass durch die Darstellung dieser beiden Pyramiden die sämmtlichen zwölf Ecken des Polyeders fixirt erscheinen und ferner, dass die zwischen dem höchsten und tiefsten Eckpunkte liegenden zehn Ecken in zwei Horizontalebenen liegen, deren Entfernungen von einander und von den äussersten Ecken sich nach Obigem leicht bestimmen lassen.

Ist $\alpha\beta$ (Fig. 203) die Perspektive der gegebenen Ikosaederkante, welche in einer durch die vertikale Axe des Körpers gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene liegt, so verzeichne man über dieser Länge $\alpha\beta$ ein Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ und ein Dreieck $\alpha\beta\varphi$.*) Es ist sodann, wenn α und β mit dem Mittelpunkte ω des Fünfecks verbunden werden, $\alpha\beta\omega$ die Projektion der Dreiecksfläche $\alpha\beta\varphi$, woraus sich die Höhe $\omega\pi$ der über der untern Ecke befindlichen fünf Eckpunkte ergibt. Werden ferner die Bögen $\gamma\varepsilon$ und $\delta\varepsilon$ in α' und β' halbirt, so wird $\alpha'\beta'$ die Projektion einer

---

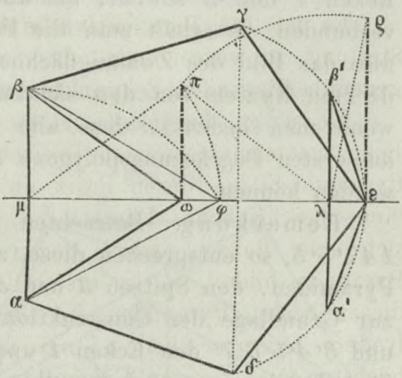
*) Die Kantenlänge $\alpha\beta$ wurde in Fig. 203 desshalb so angenommen, wie sie sich bildlich unter der Voraussetzung, dass die gegebene Kante in einer durch die vertikale Axenlinie zur Bildfläche parallelen Ebene liegt, darstellt, weil es am zweckdienlichsten erscheint, die weitere Construktion auf diese Axe zu beziehen.

Wäre also die Axe fixirt, und die wahre Länge der Ikosaederkante gegeben, so hätte man nur durch den Fusspunkt der Axe eine zur Bildfläche parallele Gerade zu ziehen, und auf derselben eine Länge so zu bestimmen, dass sie der gegebenen Kantenlänge entspricht. Die so gefundene Länge ist sodann jene Fünfecks- und Dreiecksseite, welche, wie oben gezeigt, zu benützen ist.

Ein gleiches Verfahren wäre in allen vorhergehenden und nachfolgenden Fällen anzuwenden, wenn die Construktion auf eine bestimmte, zur Bildfläche parallele Vertikalebene bezogen werden sollte.

Seite jenes Fünfecks darstellen, welches von den nächsten fünf Eckpunkten gebildet wird. Hiernach ist $\alpha' \beta' \varepsilon$ die Projektion einer zwischen den beiden Horizontalebenen liegenden Dreiecksfläche, woraus der Abstand dieser beiden Ebenen zu bestimmen ist. Dieser wird durch die zweite Kathete $\varepsilon \rho$ des rechtwinkligen Dreiecks $\lambda \varepsilon \rho$ erhalten, dessen eine Kathete $\varepsilon \lambda$ die Projektion der Dreieckshöhe und dessen Hypothenuse diese Höhe $\mu \pi = \lambda \pi$ ist.

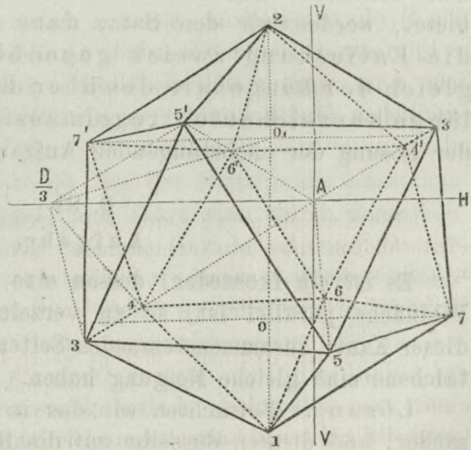
Fig. 203.



Hat man auf diese Weise die einzelnen Höhen ermittelt, so werden dieselben auf jener Vertikalen, welche die Axe vorstellt, derart aufzutragen sein, dass von der angenommenen unteren Ecke *1* (Fig. 204) angefangen, die Länge $o\,1 = \omega \pi$ (Fig. 203 und 204), $o\, o_1 = \varepsilon \rho$ und $o_1\, 2 = \omega \pi$ gemacht wird.

Verzeichnet man in den, den Punkten o und o_1 zugehörigen Horizontalebenen die Fünfecke *3 4 5 6 7* und *3' 4' 5' 6' 7'* auf die Weise, dass das zweite Fünfeck eine um *180⁰* verwendete Lage gegen das erstere erhält, und dass die Mittelpunkte derselben nach o und o_1 fallen, so sind sämmtliche Ecken des darzustellenden Körpers gefunden.

Fig. 204.



In Fig. 204 wurde eine Seite des Fünfecks senkrecht zur Bildebene angenommen, welche Annahme den Vortheil einer leichteren Verzeichnung der Perspektiven dieser Polygone bietet. So ergeben sich alsdann z. B. die Ecken 7 und 7' einfach dadurch, dass man die Länge $\omega\varepsilon$ (Fig. 203) von o_1 und o (Fig. 204) nach *7* und *7'* überträgt.

Werden die so erhaltenen Eckpunkte mit den zugehörigen Ecken *1* und *2* sowohl, als auch entsprechend unter einander verbunden, so erhält man die Perspektiven sämmtlicher Kanten, also das Bild des Zwanzigflächners. Hiebei werden sich die gedeckten Kanten von den sichtbaren leicht unterscheiden lassen, wenn man bedenkt, dass alle Eckpunkte, welche hinter dem äussersten Begränzungspolygone *137'23'7* liegen, nicht gesehen werden können.

Bemerkung. Betrachten wir die Fünfecke *24'766'* und *147'5'5*, so entsprechen diese, als Basen der anfangs erwähnten Pyramiden, den Spitzen *3* und *3'* in derselben Weise, wie jene zur Grundlage der Construktion verwendeten Fünfecke *34567* und *3'4'5'6'7'* den Ecken *1* und *2*. Weil nun *7* und *1*, so wie *7'* und *2* in einer und derselben zur Bildfläche parallelen Ebene liegen, von welcher wir bei der vorigen Construktion ausgiengen, so müssen die Sehnen *17'* und *27* in Bezug auf diese Ebene in ihrer wahren Länge erscheinen, also der Diagonale $\gamma\delta$ (Fig. 203) gleich sein, und weil die Kanten *17* und *27'* einander gegenüberliegen, so wird diese Diagonale die wahre Entfernung der beiden Kanten angeben. Abgesehen davon, dass diese Eigenschaft eine beachtenswerthe Controle für die Richtigkeit der Arbeit bietet, werden wir den Satz, dass bei einem Ikosaeder die Entfernung zweier gegenüberstehender Kanten gleich der Diagonale des über der gegebenen Kantenlänge verzeichneten regelmässigen Fünfecks ist, bei der Lösung der nächstfolgenden Aufgabe anwenden.

§. 91.

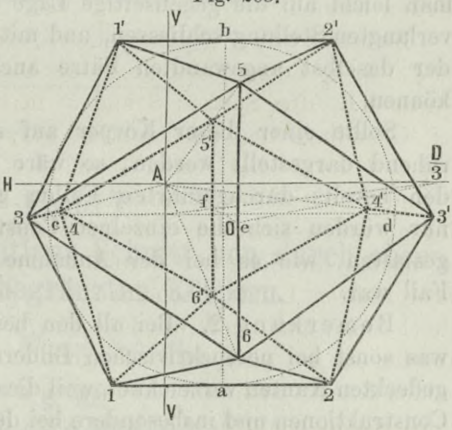
Aufgabe.

Es ist ein Ikosaeder, dessen eine Kante horizontal und zur Bildfläche parallel ist, so zu verzeichnen, dass die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seitenflächen gegen die Horizontalebene eine gleiche Neigung haben.

Lösung. Betrachten wir das in Fig. 204 dargestellte Ikosaeder, und denken dasselbe auf die Kante *17* gestellt, so wird die Kante *27'* vertikal über derselben in einem bekannten Abstande (siehe Bem. §. 90) liegen. Die Kanten *34* und *3'4'*, in einer durch den Mittelpunkt des Körpers gehenden Horizontalebene befindlich, stehen senkrecht auf der Bildfläche und sind so wie jene *55'* und *66'*, welche in einer auf der Bildfläche senkrechten Ebene vertikal stehen, ebenfalls in diesem Abstande von einander gelegen. Diesen sechs Kanten entsprechen zwölf Ecken, wesshalb die ganze Construktion sich nur darauf beschränken wird, diese Kanten zu verzeichnen.

Ist *12* (Fig. 205) die Perspektive der gegebenen horizontalen Kante, so wird — indem wieder die Construktion auf die durch diese Kante zur Bildfläche parallel gelegte Ebene bezogen, also gleichsam angenommen wird, dass ein Ikosaeder von der Kantenlänge *12*, zur Hälfte vor und hinter der Bildebene gelegen, darzustellen ist — die Länge *12* als in der Bildfläche liegend vorausgesetzt werden können.

Fig. 205.



Ist *a* der Halbirungspunkt der Kante *12* und *ab* das in diesem Punkte errichtete Perpendikel, so wird auf diesem (nach §. 90), die Diagonale $\gamma\delta$ (Fig. 203) des über $12 = \alpha\beta$ verzeichneten Fünfecks $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ aufzutragen sein, um den Halbirungspunkt *b* der gegenüberliegenden Kante, also in *1'2'* diese Kante selbst zu erhalten.

Halbirt man *ab* in *O*, so ist dies der Mittelpunkt einer dem Polyeder umschriebenen Kugel, und führt man durch denselben die horizontale, zur Bildfläche parallele Gerade *cd*, und die zur Bildfläche Senkrechte *efA*, so sind auf diesen beiden Geraden die Stücke $oc = od = oa$ und *oe* gleich *of* perspektivisch gleich *oa* abzuschneiden, um die Halbirungspunkte jener vier Kanten zu erhalten, von welchen die zwei ersteren auf die Bildfläche senkrecht, und die letzteren vertikal sind. Schneidet man nun auf diesen so gezogenen Kantenrichtungen von deren Halbirungspunkten nach beiden Seiten die halbe Kantenlänge ab, indem die Stücke *c3*, *c4*, *d3'*, *d4'*, *e5*, *e6*, *f5'* und *f6'* perspektivisch gleich *a1* gemacht werden, so erhält man acht Eckpunkte, welche untereinander und mit *1*, *2*, *1'*, *2'* entsprechend verbunden, den Körper in der verlangten Stellung perspektivisch darstellen.

Bemerkung 1. Nach dem bisher über das Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder Gesagten wird es dem Anfänger auch keine Schwierigkeiten machen, das Oktaeder auf einer Kante, das Dodekaeder auf einer Ecke aufstehend und das Ikosaeder mit einer Seitenfläche in einer Horizontalebene liegend, perspektivisch darzustellen.

Aus den bisher verzeichneten Bildern dieser Körper wird man leicht auf die gegenseitige Lage der einzelnen Ecken in der verlangten Stellung schliessen, und mit gehöriger Berücksichtigung der daselbst angewandten Sätze auch deren Höhen bestimmen können.

Sollte einer dieser Körper auf einer beliebigen Ebene aufruhend dargestellt werden, so wäre in derselben Weise, wie in den bereits durchgeführten Fällen gezeigt wurde, vorzugehen, nur würden sich die einzelnen Construktionen nicht so einfach gestalten, wie es bei der Annahme einer Horizontalebene der Fall war.

Bemerkung 2. Bei all den besprochenen Körpern wurden, was sonst bei perspektivischen Bildern selten geschieht, auch die gedeckten Kanten verzeichnet, weil diese bei weiter vorzunehmenden Construktionen und insbesondere bei der perspektivischen Schattenbestimmung nothwendig sind.

Hat man jedoch die Absicht, blos ein Bild des Gegenstandes zu entwerfen, so wie sich derselbe dem Beschauer darstellt, so wird man die gedeckten Kanten bei der Verzeichnung nicht zu berücksichtigen, also auch jene Eckpunkte der in den einzelnen Höhenebenen gelegenen Polygone, welche nicht sichtbar werden (was immer leicht zu beurtheilen ist), nicht aufzusuchen haben.

Bemerkung 3. Steht ein Polyeder mit einer Kante, welche jedoch nicht zur Bildfläche parallel angenommen werden soll, auf einer Horizontalebene, und ist die Perspektive dieser Kante gegeben, so kann auch in einem solchen Falle die Construktion auf eine durch den Halbirungspunkt dieser Kante zur Bildfläche parallele Ebene bezogen werden.

Es wird alsdann die Kante perspektivisch zu halbiren und der Halbirungspunkt a als in der Bildebene liegend zu denken sein. Zieht man nun durch a eine horizontale, zur Bildfläche parallele Gerade, und schneidet auf derselben eine Länge $\alpha\beta$

derart ab, dass man die Endpunkte der gegebenen Kante mit dem ihrem Verschwindungspunkte entsprechenden Theilungspunkte verbindet, so wird $\alpha\beta$ jenes Längenstück angeben, welches so wie die Perspektivenlänge der in den Aufgaben §§. 89 und 91 zur Bildfläche parallel gewählten horizontalen Kante *12* zu benützen ist.

Selbstverständlich werden auch die in den einzelnen Höhenebenen zu verzeichnenden Polygone eine der angenommenen Kantenrichtung entsprechende Stellung erhalten müssen.

Kapitel X.

Ebener und gegenseitiger Schnitt von durch ebene Flächen begränzten Körpern.

A. *Ebener Schnitt.*

§. 92.

Allgemeine Bemerkungen.

Was den Schnitt irgend eines von ebenen Flächen begränzten Körpers mit einer Ebene anbelangt, so lassen sich behufs der Construktion folgende allgemeine Regeln aufstellen.

1. Man bestimme die Durchschnitte der einzelnen Kanten mit der gegebenen Ebene, und verbinde je zwei in einer Seitenfläche liegende Schnittpunkte mit einander.

Zur Bestimmung dieser Durchschnittspunkte wird durch jede Kante eine Ebene gelegt werden müssen. Was die Wahl dieser letzteren betrifft, so ist vorzugsweise darauf zu achten, dass die Kanten von den Schnittlinien der Hilfsebenen mit der schneidenden Ebene nicht unter zu spitzen Winkeln getroffen werden. Ferner ist zu bemerken, dass von den in Anwendung gebrachten Hilfsebenen zumeist nicht die Bildflächtrace und Verschwindungslinie, wie dies bisher fast durchgehends der Fall gewesen, zu benützen sein wird, sondern, dass es grösstentheils vortheilhaft erscheint, hievon blos dasjenige Bestimmungsstück der Ebene zu wählen, welches leichter aufgefunden werden kann, und als zweites

Bestimmungsstück die Trace der betreffenden Ebene auf der Basisebene des Körpers anzunehmen.

2. Zu gleichem Ziele gelangt man, wenn durch jede Seitenfläche eine Ebene gelegt, deren Schnitt mit der gegebenen Ebene aufgesucht, und von diesem nur das innerhalb der Begränzungen der Seitenfläche liegende Stück benützt wird.

Bei Anwendung dieser Methode wird ebenfalls zu berücksichtigen sein, dass die Basisebene des Körpers (falls eine vorhanden ist) mit Vortheil benützt werden könne, indem die Trace einer Ebene auf der Basisebene bereits ein Bestimmungsstück liefert, wodurch das Auffinden der Bildflächtrace oder der Verschwindungslinie entfallen kann.

3. Oft wird es zweckmässig erscheinen, beide Methoden vereint anzuwenden. Hiebei wird es nur darauf ankommen, unter den zu schneidenden Flächen und Kanten eine geeignete Wahl zu treffen. Diese wird von der gegenseitigen Lage der Flächen und Kanten gegen einander und gegen die Bildfläche abhängen und bei einiger Uebung keinen Schwierigkeiten unterliegen.

Zu berücksichtigen ist, dass man bei Anwendung der Methode 2) je eine Seitenfläche übergehen kann, indem durch die Schnitte jener zwei Flächen, welche an diese Seitenfläche anstossen, sich auch die zwei Endpunkte der Schnittlinie der letzteren ergeben.

§. 93.

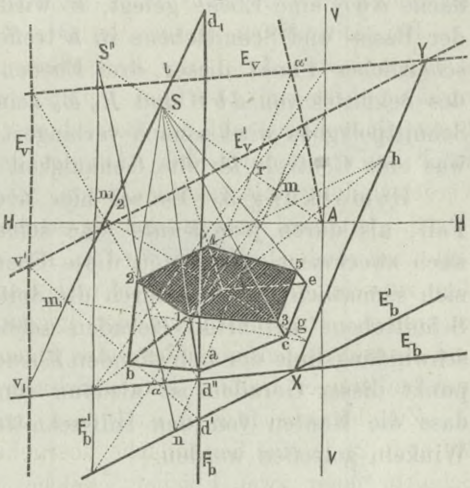
Aufgabe.

Es ist der Schnitt einer Pyramide mit einer Ebene nach Methode 1) zu bestimmen.

Lösung. Sei $E'_b E'_v$ (Fig. 206) die Basisebene einer fünfseitigen Pyramide $abcdeS$, deren Spitze S durch die Gerade $l^{v_1}_{d_1}$ bestimmt ist, und $E_b E_v$ die schneidende Ebene, so lege man durch die Kante Sa eine auf die Bildfläche senkrechte Ebene, welche einfach dadurch erhalten wird, dass man durch die Spitze S das Perpendikel $S'' SA$ auf die Bildebene führt, den Durchschnitt S'' desselben mit der Bildebene vermittelst der Geraden $l^{v_1}_{d_1}$, so wie jenen m mit der Basisebene sucht, und m mit a verbindet. Es ist sodann ma die Trace dieser Hilfsebene auf der Basisebene, welche die Bildflächtrace E'_b in n trifft, daher n mit S'' verbunden, die Bildflächtrace nS'' der zu suchenden Ebene gibt, während die aus A mit $n S''$ Parallele $A \alpha'$ die Verschwindungslinie bestimmt.

Ist ferner r der Durchschnittspunkt der Geraden $S'' S A$ mit der Ebene $E_b E_v$, so wird die Gerade αr, welche r mit dem Durchschnitte α der beiden Bildflächtracen E_b und $S'' n$ verbindet und offenbar gegen den Verschwindungslinien E_v und $A \alpha'$ angehörigen Punkt α' gerichtet ist, den Schnitt der Hilfsebene mit der schneidenden Ebene angeben und die Kante $a S$ in dem zu suchenden Punkte *1* treffen.

Fig. 206.



Führt man diese Construktion in gleicher Weise bis zur letzten Kante fort, so erhält man die Schnittpunkte *1* bis *5*, welche mit einander verbunden das Schnittpolygon geben.

Versucht man jedoch dasselbe Verfahren bei den Kanten $c S$ oder $d S$, so ergeben sich Hilfsschnitte, welche den betreffenden Kanten unter sehr spitzen Winkeln begegnen, daher die Punkte ungenau bestimmen. In solchen Fällen wird man zu beliebigen Hilfsebenen seine Zuflucht nehmen, indem man statt $S'' S A$ eine andere durch S gehende Gerade, z. B. $l_{d_1}^{v_1}$ benützt, und die Construktion im Uebrigen auf gleiche Weise, wie früher, durchführt.

Es wurden zu diesem Behufe die Durchschnitte m_1 und m_2 der Geraden $l_{d_1}^{v_1}$ mit der Basis- und der schneidenden Ebene vermittelst der durchgelegten Vertikalebene $F_b F_v$ bestimmt und, um z. B. den Schnitt der Kante c zu erhalten, m_1 mit c verbunden, wodurch sich in $m_1 c$ die Trace der bezüglichen Hilfsebene auf der Basisebene und zugleich in g ein Punkt des Durchschnittes mit der schneidenden Ebene ergab. Es ist somit $m_2 g$ dieser letztere selbst, welcher die Kante $c S$ in dem zu suchenden Eckpunkte *3* des Schnittpolygons trifft.

Ebenso können auch die übrigen Punkte mit Benützung von durch $l_{d_1}^{v_1}$ gehenden Hilfsebenen gefunden werden.

Bemerkung 1. Nachdem der obere Theil der Pyramide gleichsam als weggeschnitten und abgenommen gedacht wurde, und die Stellung der Schnittebene eine solche ist, dass man von oben darauf sieht, so erscheint die ganze Schnittfigur sichtbar.

Bemerkung 2. Denkt man sich durch irgend eine Seitenfläche $d\,b\,S$ eine Ebene gelegt, so wird diese die Schnittlinie $X\,Y$ der Basis- und Schnittebene in h treffen, wesshalb h ein gemeinschaftlicher Punkt dieser drei Ebenen, folglich auch ein Punkt des Schnittes von $d\,b\,S$ und $E_b\,E_v$ sein muss. Die Seite $4\;2$ des Schnittpolygons wird sonach verlängert durch den Punkt h gehen, was eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit bietet.

Bemerkung 3. Es sei hier noch erwähnt, dass für den Fall, als durch jede Kante eine schiefe Ebene gelegt wird, es auch zweckmässig erscheint, diese Ebenen so zu wählen, dass sie sich sämmtlich in einer durch die Spitze parallel zur Basis- oder Schnittebene geführten Geraden schneiden. Der in der Verschwindungslinie der betreffenden Ebene liegende Verschwindungspunkt dieser Geraden ist alsdann von Vorhinein so zu wählen, dass die Kanten von den Hilfsschnitten unter nicht zu spitzen Winkeln getroffen werden.

§. 94.

Aufgabe.

In einer Ebene $E'_b\,E'_v$ (Fig. 207) ist die Basis $a\,b\,c\,d\,e\,f$ einer sechsseitigen Pyramide und in S deren Spitze gegeben; man soll den Durchschnitt derselben mit einer Ebene $E_b\,E_v$ nach Methode 2) bestimmen.

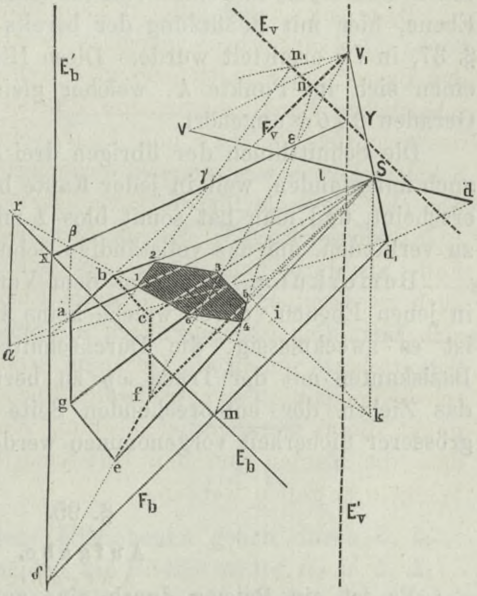
Lösung. Wenn durch drei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seitenflächen Ebenen gelegt werden sollen, so wird vorerst eine zweckmässige Wahl der ersteren vorzunehmen sein, worüber deren gegenseitige Lage entscheidet.

Im vorliegenden Falle werden die Flächen $a\,g\,S$, $b\,c\,S$ und $e\,f\,S$ am geeignetesten erscheinen, weil sich die Verschwindungs- und Durchstosspunkte der zugehörigen Basiskanten noch auf der Zeichnungsfläche ergeben.

Beginnen wir mit der Seitenfläche $S\,e\,f$, so ist δ der Durchstosspunkt, v_1 der Verschwindungspunkt der Kante $e\,f$, und $v_1\,S$ die durch S zu $e\,f$ parallel gezogene Gerade, deren Durchstosspunkt d_1 mit Zuhilfenahme der die Spitze S bestimmenden Linie l_d^v auf bekannte Art gefunden wird.

Es ist sonach $d_1 \delta$ die Bildflächtrace und $v_1 n$, parallel zu $d_1 \delta$, die Verschwindungslinie der durch efS gelegten Ebene $F_b F_v$, welche sich mit der schneidenden Ebene $E_b E_v$ in der Geraden mn begegnet, von welcher Schnittlinie blos das zwischen den Kanten eS und fS liegende Stück *45* als Seite des Schnittpolygons beizubehalten ist.

Fig. 207.



Auf dieselbe Weise wird die Ebene der Seitenfläche Scb und ihr Durchschnitt mit $E_b E_v$ bestimmt, von welchem das innerhalb bcS liegende Stück *23* eine zweite Seite der Schnittfigur liefert.

Auf die Seitenfläche agS übergehend, wird die Bildflächtrace ar der durchgelegten Ebene zu E'_b parallel sein, weil die Basiskante eine zur Bildfläche parallele Lage hat. Die Trace ar trifft die Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene im Punkte r, und wird ag bis β, d. i. bis zum Durchschnitte mit der Schnittlinie XY der beiden Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$ verlängert, so muss β auch ein Punkt des zu suchenden Hilfsschnittes $r\beta$ sein, von welchem blos das der Seitenfläche agS angehörige Stück *16* zu benützen ist.

Bei der letzt gesuchten Seite *16* ist der Uebelstand eingetreten, dass die Punkte r und β zu nahe an einander fielen, wodurch die Richtung ihrer Verbindungslinie nicht mit der erforderlichen Genauigkeit erhalten wurde. In solchen Fällen ist es am zweckmässigsten, von der Bildflächtrace ar ganz abzusehen und die Trace der betreffenden Seitenfläche sowohl, als auch die der Schnittebene auf einer andern Ebene P zu bestimmen, welche am einfachsten durch einen bestimmten Punkt gehend, parallel zur Bildfläche angenommen wird. Im vorliegenden Falle wurde diese Hilfsebene P durch den Scheitel S gelegt, die Schnitte derselben mit agS und $E_b E_v$ gesucht und im Vereinigungspunkte der Schnittlinien ein anderer Punkt des Hilfsschnittes $r\beta$ gefunden. Der Schnitt der Ebene P mit der Seitenfläche agS ist eine durch S parallel zu ag gezogene Gerade Sk, während jener von P und $E_b E_v$ mit Zuhilfenahme einer neuen durch S gehenden Ebene, hier mit Benützung der bereits vorhandenen $F_b F_v$, nach §. 37, in ik ermittelt wurde. Diese Hilfstracen Sk und ik vereinen sich im Punkte k, welcher gleichfalls der zu suchenden Geraden $\beta\,16\,k$ angehört.

Die Schnittlinien der übrigen drei Seitenflächen sind hiemit auch aufgefunden, weil in jeder Kante bereits ein Punkt bestimmt erscheint, und man hat somit blos *1* mit *2*, *3* mit *5* und *4* mit *6* zu verbinden, um das vollständige Schnittpolygon zu erhalten.

Bemerkung. Auch bei dem Verbinden der Schnittpunkte in jenen Ebenen, durch welche keine Hilfsebenen gelegt wurden, ist es zweckmässig, die Durchschnittspunkte der betreffenden Basiskanten mit der Trace xy zu berücksichtigen, da hiedurch das Ziehen der entsprechenden Seite des Schnittpolygons mit grösserer Sicherheit vorgenommen werden kann.

§. 95.

Aufgabe.

Es ist ein Prisma durch eine zur Horizontslinie parallele Ebene zu schneiden.

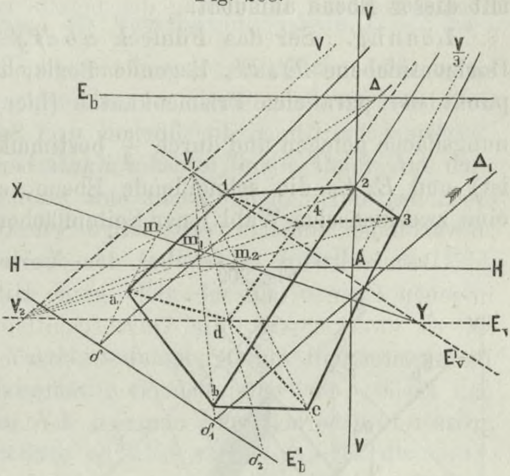
Lösung. Ist $E'_b E'_v$ (Fig. 208) die Basisebene, $abcd$ die Basis, v (ausserhalb der Zeichnungsfläche) der Verschwindungspunkt der parallelen Prismenkanten und $E_b E_v$ die Schnittebene, so kann durch die Kante av eine bildflächprojecirende Ebene gelegt werden, deren Verschwindungslinie Av ist und deren Bildflächtrace durch die orthogonale Projektion des Punktes a auf der Bildebene parallel zu Av gehen muss. Der Schnitt dieser Hilfsebene mit $E_b E_v$ würde sodann die Kante av in dem zu suchenden Schnittpunkte derselben treffen.

Abgesehen davon, dass sich bei der Anwendung solcher Hilfsebenen in den meisten Fällen schiefe Schnitte ergeben, bieten dieselben keinen besonderen Vortheil, daher es zumeist gerathen erscheint, willkührlich gewählte Hilfsebenen anzuwenden, wie dies in den vorliegenden Aufgaben auch durchgeführt wurde.

Am einfachsten wird die Construktion, wenn diese Hilfsebenen sämmtlich zu einander parallel gelegt werden, in welchem Falle man folgends vorzugehen hat.

Wählt man in der Verschwindungslinie E'_v einen Punkt v_1 als den Verschwindungspunkt der Tracen aller parallelen Hilfsebenen auf der Basisebene, so sind $v_1\delta$, $v_1\delta_1$, $v_1\delta_2 \ldots$ die Tracen der durch av, bv, $dv \ldots$ gelegten Hilfsebenen und es ist vv_1 die diesen Ebenen gemeinschaftliche Verschwindungslinie, welche verlängert von der Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene im Punkte v_2 getroffen wird. Die Bildflächtracen $\delta\Delta$, $\delta_1\Delta_1 \ldots$ dieser Hilfsebenen gehen durch δ, $\delta_1 \ldots$ parallel mit vv_1 und schneiden die Bildflächtrace E_b in Δ, $\Delta_1 \ldots$, wesshalb Δv_2, $\Delta_1 v_2 \ldots$ die Hilfsschnitte mit der Schnittebene $E_b E_v$ sind, welche den entsprechenden Kanten in 2, 3 ... begegnen.

Fig. 208.



Die Bildflächtracen der Hilfsebenen aufzusuchen ist zumeist nicht nothwendig, indem die Punkte m, m_1, $m_2 \ldots$, in welchen die Tracen $v_1\delta$, $v_1\delta_1$, $v_1 c \ldots$ von der Durchschnittslinie XY der Basis- und Schnittebene getroffen werden, ebenfalls den zu suchenden Schnittlinien angehören, daher letztere durch v_2 und die benannten Punkte m hindurchgehen müssen. Indessen bietet grösstentheils die Aufsuchung der Bildflächtracen keine Schwierigkeiten und eine grössere Genauigkeit.

Es ist ersichtlich, dass der Punkt v_1 so zu wählen sein wird, dass sich die in v_2 verschwindenden Hilfsschnitte mit den einzelnen Kanten nicht unter zu spitzen Winkeln treffen, was in Vorhinein leicht beurtheilt werden kann.

Aus der Lage der schneidenden Ebene $E_b E_v$ folgt, dass das Schnittpolygon gedeckt ist, daher die rückwärts liegenden Seiten desselben punktirt anzugeben sind.

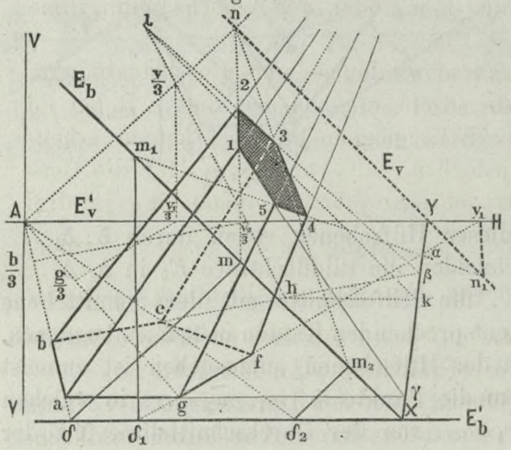
§. 96.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt eines Prisma mit einer Ebene derart zu bestimmen, dass man die Durchschnitte einzelner Seitenflächen mit dieser Ebene aufsucht.

Lösung. Sei das Fünfeck $abcfg$ (Fig. 209) die in der Horizontalebene $E'_b E'_v$ liegende Basis, v der Verschwindungspunkt der parallelen Prismenkanten (hier ausserhalb der Zeichnungsfläche gelegen und durch $\frac{v}{3}$ bestimmt, so dass $A\frac{v}{3} = \frac{1}{3}Av$ ist) und $E_b E_v$ die schneidende Ebene, so wird wieder vorerst eine zweckmässige Wahl jener Seitenflächen, durch welche Ebenen gelegt werden sollen, zu treffen sein. Am geeignetsten erscheinen diejenigen Seitenflächen, bei welchen die Verschwindungs- und Durchstosspunkte der zugehörigen Basiskanten noch auf die Zeichnungsfläche fallen, oder mit andern Worten, deren Basiskanten verlängert, die Bildflächtrace und Verschwindungslinie, oder wenigstens eine der beiden, noch innerhalb den Grenzen der Zeichnungsfläche schneiden. Hier sind es die Basiskanten ab und fg, durch deren Seitenflächen, dem Obigen zufolge, die Hilfsebenen zu legen sein werden.

Fig. 209.



Beginnen wir mit der Seitenfläche abv, so steht die durchgelegte Ebene senkrecht auf der Bildebene, weil ab in A verschwindet, und es ist demgemäss $A\frac{v}{3}v$ die Verschwindungslinie und δm (parallel zu Av) die Bildflächtrace derselben. Der Durchschnittspunkt m der Bildflächtracen δm und E_b mit jenen n der Verschwindungslinien Av und E_v verbunden, liefert den Hilfsschnitt mn, von welchem das Stück 12, innerhalb abv, eine Seite des Schnittpolygons gibt.

Auf die Seitenfläche gfv übergehend, ist zur Bestimmung der Richtung der Verschwindungslinie dieser Fläche offenbar Av_1 von A aus im Punkte $\frac{v_1}{3}$ in drei gleiche Theile zu theilen und $\frac{v_1}{3}$ mit $\frac{v}{3}$ zu verbinden. Es gibt sodann die Gerade $v_1 n_1$, durch v_1 parallel zu $\frac{v}{3}\frac{v_1}{3}$ gezogen, die Verschwindungslinie, $\delta_1 m_1$, parallel zu $v_1 n_1$, die Bildflächtrace dieser Seitenfläche und $m_1 n_1$ den Hilfsschnitt mit der schneidenden Ebene, von welchem das innerhalb der Seitenfläche fgv liegende Stück 45 zu benützen sein wird. Schneidet die verlängerte Seite fg die Trace XY der schneidenden Ebene auf der Basisebene noch innerhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche, so ist dieser Punkt α der Schnittlinie $m_1 n_1$ angehörig, wesshalb zur Auffindung derselben die Bestimmung der Bildflächtrace $\delta_1 m_1$ oder der Verschwindungslinie $v_1 n_1$ entfallen kann.

Bei Kanten, deren Verschwindungs- und Durchstosspunkte sich noch auf der Zeichnungsfläche ergeben, wie dies z. B. bei fg der Fall ist, bietet der in XY gelegene Punkt α keinen erheblichen Vortheil. Würde jedoch v_1, also auch $v_1 n_1$, für die Construktion nicht benützbar sein, so könnte einfach Ag in drei gleiche Theile getheilt und $\frac{g}{3}\frac{v_1}{3}$ parallel zu fg gezogen werden, um den Punkt $\frac{v_1}{3}$ und durch denselben die Richtung $\frac{v}{3}\frac{v_1}{3}$ der Bildflächtrace $\delta_1 m_1$ zu erhalten, welch' letztere, nachdem α bereits gefunden, zur Fixirung der Schnittlinie $m_1 \alpha$ ausreicht.

Nun wird es hier genügen, noch den Durchschnitt der Kante cv zu bestimmen, was vermittelst der durchgelegten bildflächprojecirenden Ebene $A\frac{v}{3}$, $Ac\delta_2$, $\delta_2 m_2$, $m_2 n$ in der Zeichnung durchgeführt ist. Es wurde jedoch daselbst auch die Seitenfläche bcv auf obige Weise mit $E_b E_v$ zum Schnitt gebracht, um zu zeigen, wie man sich zu benehmen habe, wenn sich weder der Durchstosspunkt noch der Verschwindungspunkt einer Basiskante auf der Zeichnungsfläche ergibt, wie dies eben bei der Kante bc der Fall ist.

Die verlängerte Kante bc trifft XY in einem Punkte β der zu suchenden Schnittlinie. Wird bA im Punkte $\frac{b}{3}$ in drei gleiche Theile getheilt, so dass $A\frac{b}{3} = \frac{1}{3}Ab$ ist und $\frac{b}{3}\frac{v_2}{3}$ parallel zu bc

gezogen, so ist auch $A\frac{v_2}{3} = \frac{1}{3} A v_2$, d. i. gleich dem dritten Theile des Abstandes des unzugänglichen Verschwindungspunktes v_2 der Kante bc vom Augpunkte A, und $\frac{v}{3}\frac{v_2}{3}$ die Richtung der Verschwindungslinie und Bildflächtrace der durch bcv gelegten Ebene. Wird nun eine zur Bildfläche parallele Ebene in beliebiger Entfernung von der ersteren angewendet, also deren Trace hk auf der Basisebene durch irgend einen Punkt, z. B. durch den Schnittpunkt h der Geraden bc und $\frac{v}{3}\frac{v_2}{3}$ parallel zu E'_b gehend angenommen, so wird offenbar kl, parallel zu E_b, der Hilfsschnitt mit $E_b E_v$, und hl, parallel zu $\frac{v}{3}\frac{v_2}{3}$, (bei obiger Annahme mit $\frac{v}{3}\frac{v_2}{3}$ zusammenfallend), der Hilfsschnitt mit der Seitenfläche bcv sein, folglich der beiden gemeinschaftliche Punkt l ebenfalls der zu suchenden Schnittlinie βl, durch welche die Seite 23 des Schnittpolygons bestimmt ist, angehört.

§. 97.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt eines Oktaeders mit einer Ebene zu bestimmen.

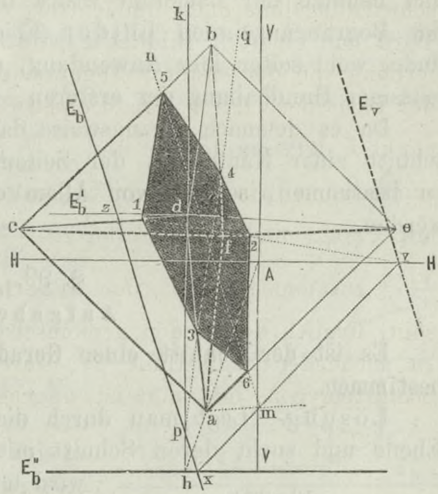
Lösung. Das Oktaeder $abcdef$ (Fig. 210) stehe mit einer Axe senkrecht auf der Bildebene, und mit der zweiten parallel zu derselben; die schneidende Ebene sei $E_b E_v$.

Zur Bestimmung dieses Schnittes werden wir drei Ebenen legen, wovon jede derselben durch je zwei Axen des Körpers geht. Die erste, durch ab und df gehend, ist vertikal und senkrecht auf der Bildebene, hat hk zur Bildflächtrace, und die Vertikallinie VV zur Verschwindungslinie; es ist folglich pq der Schnitt derselben mit $E_b E_v$, welcher die in dieser Hilfsebene liegenden Kanten ad und bf in den Punkten 3 und 4 trifft. Die durch die Axen df und ce gelegte Ebene ist horizontal, hat E'_b zur Bildflächtrace und die Horizontslinie zur Verschwindungslinie; es begegnet mithin der Hilfsschnitt yz den in dieser Ebene liegenden Kanten cd und ef in den Punkten 1 und 2.

Wird endlich durch die beiden Axen ab und ce eine Ebene gelegt, welche in diesem Falle parallel zur Bildfläche ist, so muss am deren Trace auf der Grundebene E''_b sein, während ihr

Schnitt mn mit der Ebene $E_b E_v$ zu E_b parallel ist. Da nun die Grundflächtrace xy der gegebenen Ebene $E_b E_v$ von jener am der Hilfsebene in m getroffen wird, so ist der Hilfsschnitt mn, welcher die Kanten bc und ab in den Punkten *5* und *6* schneidet, durch m zu führen. Werden nun je zwei in einer Seitenfläche liegende Punkte mit einander verbunden, so erhält man in *123456* das gewünschte Resultat.

Fig. 210.



B e m e r k u n g. Aus dem eben Besprochenen ist ersichtlich, dass es nicht zweckmässig gewesen wäre die Durchschnitte der Kanten einzeln zu bestimmen, sondern, dass man hier mit Axenebenen am einfachsten und schnellsten zum Ziele gelangte. Als allgemeine Regel lässt sich diess jedoch nicht aufstellen, hingegen wird es bei gehöriger Berücksichtigung der Stellung des Körpers, so wie seiner geometrischen Eigenschaften nicht schwer fallen, eine zweckmässige Wahl der Hilfsebenen zu treffen. Insbesondere werden die bei der Darstellung des Körpers benützten Höhenebenen zu berücksichtigen sein, weil ihre Bildflächtracen und Verschwindungslinien bekannt sind, und weil die in denselben erhaltenen Punkte des Schnittpolygons zur richtigen Beurtheilung des letzteren im Vorhinein beitragen.

B. *Gegenseitiger Schnitt.*

§. 98.

Allgemeine Bemerkungen.

Zum Behufe der Bestimmung des Schnittes zweier durch ebene Flächen begränzter Körper kann wieder auf mehrfache Weise vorgegangen werden, und zwar:

1. Suche man die Durchschnitte der Kanten des einen Körpers mit den Seitenflächen des zweiten und umgekehrt, und verbinde

sodann je zwei in denselben Ebenen gelegene Schnittpunkte miteinander.

2. Bestimme man die Schnittlinie von je einer Seitenfläche des einen mit den entsprechenden Seitenflächen des andern Körpers und benütze nur dasjenige Stück derselben, welches innerhalb der Begränzungslinien beider Flächen liegt. Diese Methode findet wohl selten ihre Anwendung, da man zumeist, bei zweckmässiger Handhabung der ersteren, einfacher zum Ziele gelangt.

Da es demnach vorzugsweise darauf ankömmt, den Durchschnitt einer Kante mit der Seitenfläche des zweiten Körpers zu bestimmen, so soll vor Allem diese Aufgabe hier erörtert werden.

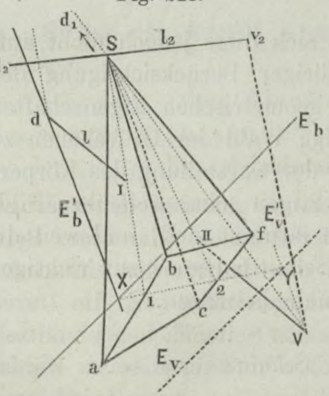
§. 99.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt einer Geraden mit einer Pyramide zu bestimmen.

Lösung. Legt man durch die Gerade l_d^v (Fig. 211) eine Ebene und sucht deren Schnitt mit der Pyramide $abcfS$, so wird letzterer die gegebene Gerade in den zu suchenden Punkten schneiden. Nachdem sonach die Wahl der Hilfsebene beliebig ist, wird diese am zweckmässigsten so angenommen werden, dass sie durch die Spitze der Pyramide geht. In diesem Falle wird der Scheitel der Pyramide bereits einen Punkt der Schnittfigur liefern, welche aus Geraden besteht, die sich im Scheitel vereinen.

Fig. 211.



Legt man sonach durch die Gerade l_d^v und die Spitze S eine Ebene $E'_b E'_v$ und sucht deren Trace XY auf der Basisebene $E_b E_v$ der Pyramide, so schneidet erstere das Basispolygon in den Punkten *1* und *2*, mithin die Ebene $E'_b E'_v$ die Pyramide in den Kanten $1S$ und $2S$, welche in den Begegnungspunkten *I* und *II* mit der Geraden l_d^v den Ein- und Austritt derselben bestimmen.

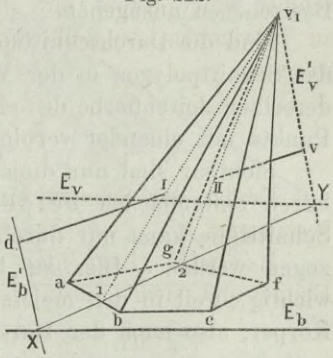
§. 100.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt einer Geraden mit einem Prisma zu bestimmen.

Lösung. Ist die Basis $abcfg$ (Fig. 212) des Prisma in der Ebene $E_b E_v$ gelegen, und v_1 der Verschwindungspunkt der parallelen Kanten desselben, ferner l_d^v die gegebene Gerade, so lege man durch dieselbe eine Ebene $E'_b E'_v$ parallel zu den Prismenkanten, welche daher die Verbindungslinie der beiden Punkte v und v' zur Verschwindungslinie E'_v und die durch d zu E'_v parallel gezogene Gerade E'_b zur Bildflächtrace hat. Bestimmt man den Schnitt XY der beiden Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$, so trifft dieser die Basis in den Punkten *1* und *2*, daher das Prisma von der Hilfsebene in den Geraden $1 v_1$ und $2 v_1$ geschnitten wird. Wo die letzteren die gegebene Gerade treffen, ergeben sich die zu suchenden Schnittpunkte *I* und *II*.

Fig. 212.



§. 101.

Wahl der Hilfsebene.

Wenden wir das soeben Gefundene auf den gegenseitigen Durchschnitt zweier Pyramiden, zweier Prismen, oder einer Pyramide mit einem Prisma an, so folgt, dass behufs der einfachsten Lösung dieser Aufgaben es am zweckmässigsten sei, die Durchschnitte der Kanten mit den betreffenden Seitenflächen vermittelst schneidender Hilfsebenen zu bestimmen und diese so zu wählen, dass sie im ersten Falle durch beide Pyramidenspitzen, somit durch deren Verbindungslinie gehen, im zweiten Falle hingegen parallel zu den Kanten beider Prismen, endlich im dritten Falle durch die Pyramidenspitze gehen und parallel zu den Prismenkanten sind, sich also sämmtlich in einer durch die Spitze parallel zu den Prismenkanten geführten Geraden schneiden.

Liegen die Basen der beiden Körper in einer Ebene, so suche man im ersten und dritten Falle den Durchschnitt der besagten Geraden mit der gemeinschaftlichen Basisebene; durch diesen so erhaltenen Schnittpunkt werden sodann die Tracen der Hilfsebenen auf der Basisebene zu ziehen sein. Im zweiten Falle ermittle man die Richtung der Trace einer zu den Kanten beider Prismen parallelen Ebene auf der Basisebene und führe die Tracen sämmtlicher Hilfsebenen zu dieser parallel.

Liegen die Basen in verschiedenen Ebenen, so sind die Durchschnittspunkte der den Hilfsebenen gemeinschaftlichen Geraden, beziehungsweise die Richtungen der Tracen, auf beiden Basisebenen anzugeben.

Sind die Durchschnittspunkte aller Kanten gefunden, so wird das Schnittpolygon in der Weise erhalten, dass man je zwei in derselben Seitenfläche des einen und des andern Körpers liegende Punkte mit einander verbindet.

Sichtbar sind nur diejenigen Schnittpunkte, welche in sichtbaren Seitenflächen beider Körper liegen, und eine sichtbare Schnittlinie kann nur durch zwei sichtbare Schnittpunkte gezogen werden. Dies zu bestimmen ist insbesondere desshalb wichtig, weil in den meisten Fällen blos der sichtbare Theil der Körper, also auch der Durchschnittslinie zu zeichnen ist.

§. 102.

Aufgabe.

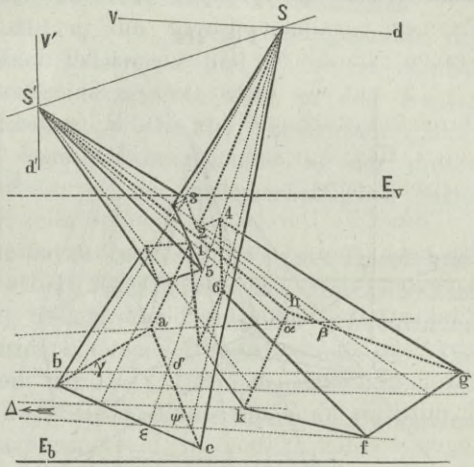
Es ist der Durchschnitt zweier Pyramiden zu bestimmen, deren Basen in einer Ebene $E_b E_v$ liegen.

Lösung. Ist $abcS$ (Fig. 213) die eine, $fghkS'$ die andere Pyramide, deren Scheitel S und S' durch die Geraden vSd und $v'S'd'$ bestimmt sind, so verbinde man die beiden Spitzen durch eine Gerade SS', suche den Durchschnitt Δ (fällt hier ausserhalb der Zeichnungsfläche) derselben mit der Basisebene*) und lege durch denselben die Tracen der schneidenden Hilfsebenen auf der Basisebene.

*) Es wäre hier nicht zweckmässig den Durchschnittspunkt Δ der Geraden SS' mit der Ebene $E_b E_v$ nach der allgemeinen Methode, §. 38, aufzusuchen, welche vorerst die Bestimmung der Geraden SS' nach §. 45 erheischt. In unserem Falle dürfte man am einfachsten zum Ziele gelangen, wenn man durch jeden der beiden Scheitel eine zur Bildfläche parallele Gerade so führt, dass sie auch zu einander parallel sind, die Durchstosspunkte derselben mit der Basisebene durch Zuhilfenahme der die betreffenden Spitzen fixirenden Geraden aufsucht, und die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte mit der Geraden SS' zum Durchschnitt bringt.

Vorerst ziehe man die Tracen der beiden Grenzebenen, d. s. solche, innerhalb welchen die Schnittfigur liegt, deren Tracen mithin durch Δ so zu führen sein werden, dass sie die eine Basis berühren, während sie die andere schneiden.

Fig. 213.



Beginnen wir sofort mit jener Hilfsebene, deren Trace Δa ist, so bestimmt dieselbe die Schnittpunkte der Kante $a S$ mit der Pyramide S'; denn in der Kante $a S$ wird die Pyramide S, und in $\alpha S'$ und $\beta S'$ die Pyramide S' geschnitten, daher sich im Durchschnitte dieser Geraden die Punkte *1* und *2* des Schnittpolygons ergeben.

Rückt man nun mit der schneidenden Ebene zum nächsten Basiseckpunkte vor, hier also nach Δg, so wird die Pyramide S in den Geraden γS und δS geschnitten, welche im Durchschnitte mit der Kante $g S$ den Ein- und Austrittspunkt derselben, d. i. *3* und *4*, bestimmen. Da nun die Punkte 2 und *3* in denselben Seitenflächen, nämlich in $g h S'$ und $a b S'$ liegen, so sind sie auch mit einander zu verbinden; und weil diese beiden Ebenen gedeckt sind, so wird auch die Seite *23* des Schnittpolygons nicht sichtbar sein. Aus demselben Grunde sind auch die Punkte *2* und *4* zu vereinen.

Auf gleiche Weise wurden die Durchschnittspunkte der Kanten $b S$, $k S'$ und $f S'$ gesucht und entsprechend mit einander verbunden, wodurch sich die zu suchende Durchdringungsfigur ergab.

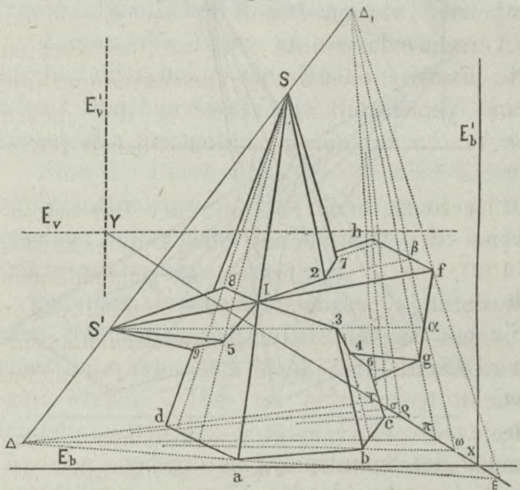
§. 103.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt zweier Pyramiden zu construiren, deren Basen in verschiedenen Ebenen liegen, und blos der sichtbare Theil der beiden Körper zu verzeichnen.

Lösung. Sind hfg und $dabc$ (Fig. 214) als die sichtbaren Theile der Basen, in den Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$ gelegen, und ist SS' die Verbindungslinie der beiden Spitzen, so suche man vorerst die Durchstosspunkte Δ und Δ_1 dieser Geraden mit den Basisebenen, so wie den Schnitt XY dieser letzteren. Die Tracen einer jeden Hilfsebene auf den Basisebenen werden beziehungsweise durch die Punkte Δ und Δ_1 gehen und sich in einem Punkte der Geraden XY treffen müssen.

Fig. 214.



Sucht man wieder die Gränzebenen, so findet man hier (in Bezug auf den sichtbaren Theil), dass beide Pyramiden in den Kanten aS und fS' gleichzeitig berührt werden, dass sich sonach das Eintritts- mit dem Austrittspolygon im Durchschnittspunkte I der besagten Kanten bindet. Die nächste Schnittebene ist $\Delta\,\omega\,\Delta_1$, welche die Pyramide S in der Kante bS und jene S' in den Geraden $\alpha S'$ und $\beta S'$ schneidet, daher in *2* und *3* die Durchstosspunkte der Kante bS mit der Pyramide S' gibt.

Auf gleiche Weise werden nun die Ebenen $\Delta\pi\Delta_1$, $\Delta\rho\Delta_1$, $\Delta\sigma\Delta_1$ und $\Delta\tau\Delta_1$ durch die aufeinanderfolgenden Eckpunkte der beiden Körper der Reihe nach gelegt und die Punkte *4*, *5*, *6* ... *9* erhalten, welche mit einander gehörig verbunden, das gewünschte Schnittpolygon geben.

Es ist hier noch darauf aufmerksam zu machen, dass auch die Construktion blos den sichtbaren Theil des Schnittes gibt, indem man endlich zu Ebenen, wie $\Delta\sigma\Delta_1$ und $\Delta\tau\Delta_1$, gelangt, welche für die betreffende Kante blos einen, oder auch keinen Durchschnittspunkt im sichtbaren Theile des zweiten Körpers liefern.

§. 104.

Aufgabe.

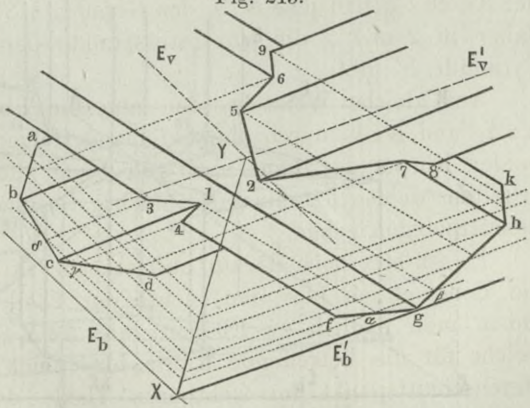
Es ist der Durchschnitt zweier Prismen zu bestimmen.

Lösung. Sind v und v_1 die Verschwindungspunkte der parallelen Kanten der beiden Prismen P und P_1, so ist offenbar die Gerade $v v_1$ die Verschwindungslinie aller zu den Kanten der Prismen parallelen Ebenen, welche die Verschwindungslinie E_v der Basisebene im Verschwindungspunkte v_2 der diesen Ebenen entsprechenden Tracen auf der gemeinschaftlichen Basisebene trifft.

Der Punkt v_2 ist hier so zu benützen, wie der Durchstosspunkt Δ in Fig. 213 bei der Bestimmung des Durchschnittes zweier Pyramiden (§. 102), indem die Tracen der schneidenden Hilfsebenen sämmtlich durch v_2 gezogen werden müssen. Die weitere Construktion ist mit der im §. 102 behandelten übereinstimmend, wenn man v und v_1 als die Spitzen dieser als Pyramiden gedachten Prismen ansieht.

Sind die Basen der beiden Prismen in verschiedenen Ebenen gelegen, so verfahre man nach §. 103, indem man dieselben als Pyramiden behandelt, deren Spitzen in unendlicher Entfernung liegen. Die Verbindungslinie der beiden Verschwindungspunkte v und v_1 wird die Verschwindungslinien E_v und E'_v der beiden Basisebenen in den Punkten v_2 und v_3 schneiden, welche nichts anders als die Verschwindungspunkte der Tracen der Hilfsebenen auf den bezüglichen Basisebenen sind. Die beiden Tracen einer Hilfsebene müssen sich wieder in einem Punkte des Durchschnittes XY der Basisebenen begegnen.

Fig. 215.



In Fig. 215 ist der Fall durchgeführt, wo die Kanten beider Prismen zur Bildfläche parallel sind. Aus der Lage der Prismenkanten folgt, dass die Hilfsebenen parallel zur Bildfläche gelegt werden müssen, und demnach die Basisebenen in Geraden schneiden, welche zu den Bildflächtracen parallel laufen. Die einzelnen Hilfsschnitte der Prismen sind parallel zu den Kanten und begegnen sich in den zu suchenden Durchschnittspunkten.

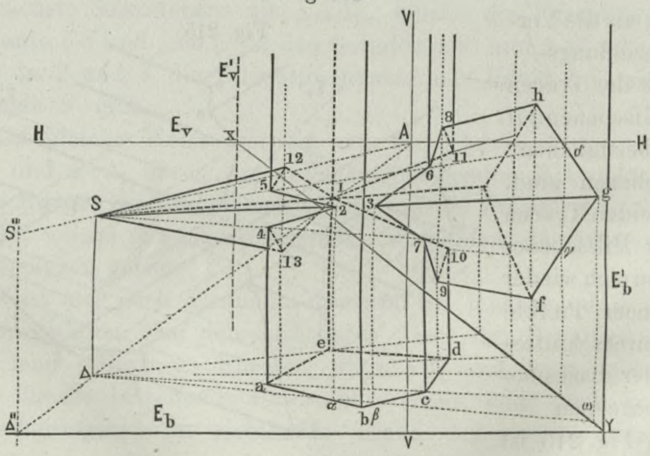
§. 105.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt einer Pyramide mit einem Prisma zu construiren.

Lösung. Was den Schnitt einer Pyramide mit einem Prisma anbelangt, so ist darüber nur zu bemerken, dass derselbe ebenso wie der Schnitt zweier Pyramiden bestimmt wird; denn denkt man sich das Prisma als Pyramide mit der Spitze im Verschwindungspunkte der parallelen Kanten, so besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe einfach darin, dass man die beiden Spitzen durch eine Gerade verbindet (deren Verschwindungspunkt in diesem Falle durch jenen der Prismenkanten bereits bestimmt ist), die Durchschnittspunkte derselben mit den Basisebenen sucht, und durch diese Punkte die Tracen der einzelnen Hilfsebenen auf den Basisebenen führt, wovon je zwei zusammengehörige Tracen sich in einem Punkte der Durchschnittslinie der beiden Basisebenen vereinen müssen.

Fig. 216.



Als Beispiel wurde in Fig. 216 ein auf einer Horizontalebene $E_b\,E_v$ senkrecht stehendes fünfseitiges Prisma $a\,b\,c\,d\,e$ mit einer vierseitigen Pyramide $fghkS$, deren Basis in einer vertikalen, jedoch gegen die Bildfläche schiefen Ebene $E'_b E'_v$ liegt, zum Schnitt gebracht.

Die durch die Spitze S (welche durch ihre orthogonale Projektion S'' auf die Bildebene bestimmt ist) zu den Prismenkanten parallel gezogene Gerade $S\Delta$ trifft die Basisebene $E_b E_v$ im Punkte Δ und ist zur Basisebene $E'_b E'_v$ der Pyramide parallel, wesshalb die Tracen auf dieser letzteren vertikal sind.

Jede die beiden Körper nach Geraden schneidende Ebene wird daher als horizontale Trace eine durch Δ gehende Gerade haben, und dort, wo diese die Schnittlinie xy der Ebenen $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$ schneidet, wird die Vertikaltrace parallel zu E'_b, also vertikal zu ziehen sein. Die weiteren Construktionen zur Bestimmung der Durchschnittpunkte der einzelnen Kanten sind einestheils aus der Figur ersichtlich, andererseits aber nach dem Vorhergegangenen bekannt, daher sie keiner näheren Erklärung bedürfen.

DRITTER ABSCHNITT.

Kapitel XI.

Krumme Linien.

§. 106.

Allgemeine Bemerkungen.

Um die Perspektive einer krummen Linie zu finden, wird man im Allgemeinen die Perspektiven einzelner Punkte derselben zu bestimmen und dieselben mit einander zu verbinden haben. Da wir hiemit die Bestimmung der Perspektiven von Kurven auf jene einzelner Punkte zurückführen, so folgt, dass, sowie der Punkt (Kap. II) auch die Kurve auf verschiedene Weise fixirt werden könne. Es wird sonach ausser der Perspektive der Kurve entweder noch die Perspektive ihrer Projektion auf der Grund- oder auf einer andern Ebene, oder ihre Bildflächprojektion und dergl. anzugeben sein, um die Kurve im Raume vollkommen zu bestimmen. Ebenso ist einleuchtend, dass unendlich viele Kurven im Raume dasselbe perspektivische Bild unter der Voraussetzung geben, dass dieselben auf der Oberfläche eines Kegels liegen, welcher die Perspektive der krummen Linie zur Leitlinie und das Auge zur Spitze hat. Das hier Gesagte gilt allgemein, sowohl für ebene als auch für Raumkurven, doch ergibt sich für erstere die wesentliche Vereinfachung, dass zu deren Bestimmung ausser ihrer Perspektive kein zweites Bild erforderlich ist, da eine ebene Kurve vollkommen fixirt erscheint, wenn ausser ihrer Perspektive die Ebene der Kurve gegeben ist.

Die Verzeichnung der Perspektive einer ebenen Kurve kann in der Art, wie die eines ebenen Polygons vorgenommen werden, indem einzelne Punkte der krummen Linie durch ihre Coordinaten in Bezug auf die Bildflächtrace ihrer Ebene, oder durch Bestimmung einzelner Sehnenlängen, oder durch anderweitig an die Kurve gezogene Linien übertragen werden.

Für Raumkurven wird es zumeist am zweckmässigsten sein, sich vorerst die Perspektiven ihrer Grundflächprojektionen und die einer Vertikalprojektion zu verzeichnen, um sodann einzelne Punkte der Perspektive der Kurve als Durchschnitte der betreffenden projecirenden Perpendikel zu erhalten.

Hat jedoch die ebene oder Raumkurve besondere Eigenschaften, so wird man diese in vielen Fällen zur Construktion des perspektivischen Bildes mit Vortheil benützen können.

Ist an die Perspektive einer Kurve in einem gegebenen Punkte derselben eine Tangente zu führen, so wird nur die dem Punkte im Raume entsprechende Tangente in die Perspektive zu übertragen sein. Da ein Punkt der zu suchenden Tangente, d. i. der Berührungspunkt, gegeben ist, so ist selbstverständlich, dass blos noch ein zweiter Punkt derselben zu bestimmen sein wird, zu welchem Behufe, je nach Umständen, entweder der Durchstosspunkt der Tangente mit der Bildebene, oder mit einer zur Bildfläche parallelen Ebene und dergl., oder ihr Verschwindungspunkt gesucht werden kann.

Wir wollen nun die Perspektiven der wichtigsten krummen Linien bestimmen, und in erster Reihe den Kreis einer eingehenderen Betrachtung unterziehen.

Der Kreis.

§. 107.

Aufgabe.

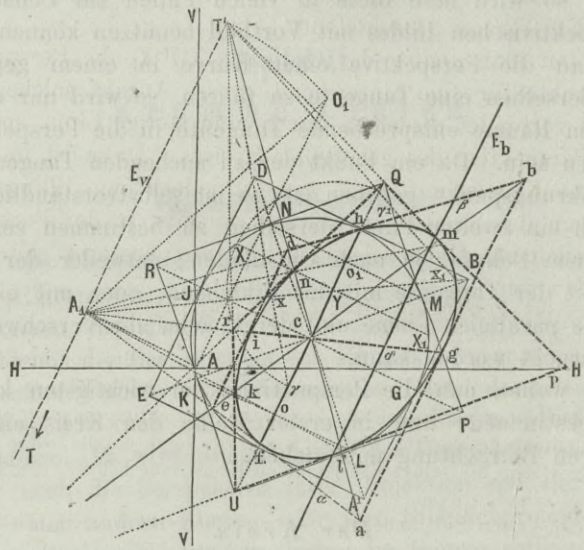
Es ist die Perspektive eines in einer gegebenen Ebene liegenden Kreises von bestimmtem Halbmesser zu verzeichnen.

Lösung. a) Es sei $E_b E_v$ (Fig. 217) die Ebene des Kreises, c die Perspektive seines Mittelpunktes und $\delta\beta = \delta\alpha$ der Radius des Kreises, welcher daselbst von dem Fusspunkte δ der aus c auf die Bildflächtrace E_b gefällten Senkrechten $A_1\delta$ nach α und β übertragen wurde.

Würde der gegebene Mittelpunkt um die Bildflächtrace der Ebene $E_b E_v$ in die Bildebene umgelegt, und daselbst der Kreis verzeichnet, so ist einleuchtend, dass man blos die Perspektiven einer Reihe nahe aneinander im Umfange des Kreises gelegener Punkte zu bestimmen und durch eine stetige Kurve zu verbinden hätte, um so die Perspektive des Kreises zu erhalten.

b) Denkt man sich die Ebene des Kreises nicht in die Bildebene, sondern in eine zu derselben parallele Lage gebracht, indem man den zur Bildebene, also auch zur Bildflächtrace E_b parallelen Durchmesser als Drehungsaxe für die Kreisebene wählt, so wird sich die Perspektive des Kreises in dieser zur Bildfläche

Fig. 217.



parallelen Lage, da die Perspektive einer zur Bildfläche parallelen Figur dieser selbst ähnlich ist, wieder als Kreis ergeben, welcher jedoch im Verhältnisse seines Abstandes von der Bildebene verjüngt oder vergrössert erscheint, je nachdem sich der Mittelpunkt hinter oder vor der Bildebene befindet.

Um das Gesagte zur Ausführung zu bringen, ermittle man vor Allem das perspektivische Bild des als Drehungsaxe anzunehmenden, zur Bildfläche parallelen Durchmessers, zu welchem Zwecke auf der durch c zu E_b parallel gezogenen Geraden UQ, beiderseits von c, vermittelst der Linien $A_1\,\delta$, $A_1\,\alpha$ und $A_1\,\beta$, die Länge des gegebenen Halbmessers $\alpha\,\delta = \beta\,\delta$ abzuschneiden ist. Hiernach erhält man in fch den perspektivischen Durchmesser und in dem über demselben beschriebenen Kreise $fGhJ$ die Perspektive des darzustellenden Kreises in der zur Bildfläche parallelen Lage.

Wird nun in diesem Kreise irgend eine Ordinate XYX_1 senkrecht auf fh angenommen, so können die Perspektiven x und x_1 der in die ursprüngliche Lage zurückversetzten Eckpunkte X und X_1 auch hier einfach gefunden werden, wenn man die Längen $YX = YX_1$ nach $Y\gamma = Y\gamma_1$ aufträgt, die Punkte γ so wie γ_1 mit den der Geraden XYX_1 entsprechenden Theilungspunkten T und T', welche hier mit den Nebendistanzpunkten der Ebene $E_b E_v$ zusammenfallen, verbindet, und mit der Perspektive $A_1 Y$ der Geraden XYX_1 zum Durchschnitt bringt.

Bestimmt man analog der Ordinate XYX_1 die Perspektiven der Endpunkte für eine hinreichend grosse Anzahl solcher Ordinaten und verbindet dieselben durch eine stetige Linie, so erhält man die Perspektive des gegebenen Kreises. Diese ist im Allgemeinen eine Kegelschnittslinie, zumeist jedoch eine Ellipse*), da solche Lagen des Kreises, in welchen derselbe in der Perspektive als Parabel oder Hyperbel erscheint, nur äusserst selten vor-

---

*) Dass die Perspektive eines Kreises im Allgemeinen eine Linie der zweiten Ordnung sein muss, folgt daraus, dass ein Kegel, dessen Leitlinie eine Linie der zweiten Ordnung (hier ein Kreis) ist, wieder nur in einer Linie der zweiten Ordnung durch eine Ebene geschnitten werden könne.

Nachdem daher ein Kegel von kreisförmiger Leitlinie in einer jeden der Kegelschnittslinien geschnitten werden kann, so folgt daraus, dass man als das perspektivische Bild eines Kreises einen Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel oder Parabel erhalten kann.

Was den ersten Fall anbelangt, so muss bemerkt werden, dass, da ein Kegel mit kreisförmiger Leitlinie nur durch zwei verschiedene Lagen von Ebenen nach Kreisen geschnitten werden kann, wovon die eine Lage durch die Basisebene bestimmt ist, die Perspektive eines Kreises, ausser einer zweiten besondern Lage der Kreisebene, nur dann ein Kreis wird, wenn er in einer zur Bildfläche parallelen Ebene liegt.

Ist die Ebene des Kreises gegen die Bildfläche geneigt, und reicht die Peripherie desselben nicht weiter als bis zu der durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegten Ebene, so wird das Bild eine Ellipse sein, da in diesem Falle alle Kegelerzeugenden gegen die Bildfläche geneigt sind, also von ihr geschnitten werden. Würde der Kreis die durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegte Ebene blos berühren, so wäre seine Perspektive eine Parabel, weil die schneidende Ebene (die Bildebene) parallel zu einer Tangirungsebene an den Kegel wird; und schneidet endlich die erwähnte Parallelebene den Kreis, so wird das Bild desselben eine Hyperbel werden, weil diese Ebene sodann zwei Erzeugende des Kegels enthält, die Bildfläche demnach zu zwei Erzeugenden des Strahlenkegels parallel ist, und daher nur eine Hyperbel als Schnittfigur geben kann.

Geht die Ebene des Kreises durch das Auge, so ist sein perspektivisches Bild eine gerade Linie, indem die Bilder aller in einer solchen Ebene liegenden Punkte sich in der Bildflächtrace derselben ergeben.

kommen. Wir werden uns auch blos mit der perspektivischen Darstellung solcher Kreise befassen, deren Perspektive eine Ellipse wird und auf die Lösung der andern Fälle nur in aller Kürze hinweisen.

c) In der Praxis der Perspektive pflegt man dem darzustellenden Kreise ein Quadrat zu umschreiben, dessen Seiten auf der Bildflächtrace senkrecht stehen, beziehungsweise zu ihr parallel laufen. Ein solches, um den darzustellenden Kreis beschriebenes Quadrat wird sich, nachdem die Ebene $E_b E_v$ in die zur Bildfläche parallele Lage gebracht wurde, in $A' B D E$ ergeben, und die Diagonalen desselben werden den Kreisumfang in den vier Punkten K, L, M und N durchschneiden.

Die Perspektive $a b d e$ des Quadrates $A' B D E$ in der Ebene $E_b E_v$ ergibt sich nun sehr einfach, indem die zur Bildflächtrace E_b parallelen Seiten auch in ihrer Perspektive zu derselben parallel sind, ferner, die auf der Bildflächtrace senkrecht stehenden Linien, durch f und h gehend, im Nebenaugpunkte A_1 verschwinden und die Diagonalen durch den Mittelpunkt c gegen die Nebendistanzpunkte T und T' zu ziehen sind.

Denkt man sich weiters über dem parallel zur Bildfläche gedrehten Kreis ein zweites Quadrat $P Q R U$ so verzeichnet, dass dessen Seiten gegen die Bildflächtrace E_b unter 45^0 geneigt sind, so wird dasselbe den Kreis in den vier Punkten K, L, M und N berühren, daher die Perspektiven dieser in die Ebene $E_b E_v$ zurückversetzten Quadratseiten, durch die in der Drehungsaxe gelegenen Eckpunkte Q und U gehend, in den Nebendistanzpunkten T und T' verschwinden und die Kreisperspektive tangiren müssen.

Die so gefundenen Quadratseiten $r Q$, $p Q$, $p U$ und $r U$ schneiden sich mit den Richtungen $c T$ und $c T'$ der Diagonalen des ersten Quadrates $a b d e$ in k, l, m und n, d. i. in den Perspektiven der Punkte K, L, M und N, in welch' ersteren gleichzeitig die Berührung mit den letzt gefundenen Quadratseiten erfolgt.

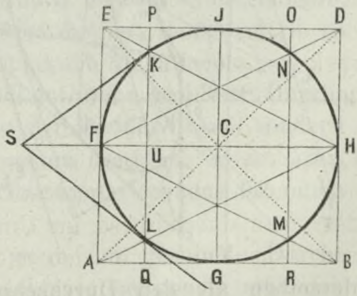
Auf diese Weise haben sich in f, g, h, i und k, l, m, n die Perspektiven der Berührungspunkte des Kreises mit den Seiten der umschriebenen Quadrate $a b d e$ und $U r Q p$ ergeben, so dass man durch diese im Umfange der Kreisperspektive gelegenen acht Punkte in den meisten Fällen die Ellipse mit hinreichender Genauigkeit verzeichnen kann, und dies um so mehr, als die Perspektiven der Quadratseiten die Tangenten der Kreisperspektive in diesen acht Punkten liefern.

Bemerkung. Was die Beziehung zwischen dem Punkte c und der Geraden E_v betrifft, so wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass ersterer, obwohl Perspektive des Kreismittelpunktes, nicht auch Mittelpunkt der Ellipse ist, weil die Tangenten ae und bd in den Punkten f und h nicht parallel sind, also fh kein Durchmesser ist, während aus eben besagtem Grunde gi ein Durchmesser sein wird. Denkt man sich nun um den Kreis beliebige Paare von parallelen Tangenten und die Durchmesser, welche die Berührungspunkte verbinden, gezogen, so gehen deren Perspektiven alle durch c, die Perspektiven der Tangentenpaare aber convergiren gegen ihre in E_v liegenden Verschwindungspunkte. Wenn man sich daher aus einem Punkte der Verschwindungslinie E_v zwei Tangenten an die Ellipse gezogen und ihre Berührungspunkte durch eine Sehne verbunden denkt, so geht diese durch c. Rückt nun der Verschwindungspunkt auf der Geraden E_v so fort, dass die in demselben sich vereinigenden zwei Geraden die Ellipse berühren, so dreht sich die Sehne der Berührungspunkte um den Punkt c, welcher desshalb in der ebenen Geometrie der Pol und E_v die ihm zugehörige Polare heisst.

d) Wäre in einer Ebene $E_b E_v$ nicht der Mittelpunkt, sondern der Durchmesser fh selbst parallel zur Bildflächtrace E_b, durch seine Perspektive gegeben, so wird, nachdem man fh in c halbirt und so die Perspektive des Kreismittelpunktes aufgefunden hat, das Verfahren ganz dasselbe bleiben können, wie das unter b) und c) angeführte.

Wir wollen jedoch für diesen Fall noch eine andere Verfahrungsart, die sich übrigens auch für den vorhergehenden ganz gut eignet, anführen, bei welcher es nicht nöthig ist, den darzustellenden Kreis in eine zur Bildfläche parallele Lage zu bringen. Man wird auch hier acht im Umfange der Perspektive des Kreises gelegene Punkte bestimmen können, und zu diesem Zwecke von folgender Eigenschaft des Kreises Gebrauch machen.

Fig. 218.



Ist $ABDE$ (Fig. 218) ein um einen Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, beschriebenes Quadrat, AH eine Diagonale des

Halbquadrates, die den Kreisumfang in L schneidet, und wird LQ senkrecht auf AB errichtet, so ist vermöge einer bekannten Eigenschaft des Kreises, wenn wir dessen Halbmesser mit R bezeichnen:

$$AL \,.\, AH = R^2,$$

oder

$$AL \,.\, \overline{AH}^2 = AH \,.\, R^2$$

und ferner

$$\overline{AH}^2 = 4R^2 + R^2 = 5R^2,$$

woraus sich ergibt

$$5AL \,.\, R^2 = AH \,.\, R^2,$$

oder

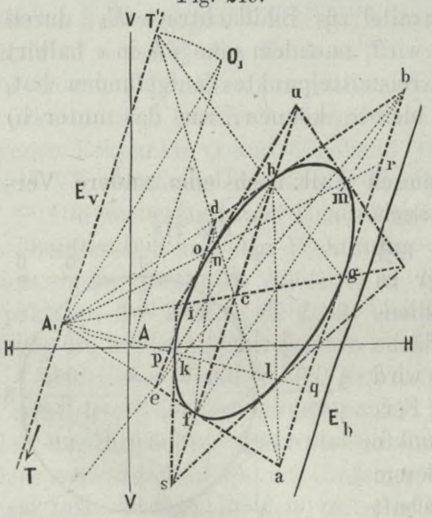
$$AL = \frac{1}{5} AH,$$

demnach auch

$$AQ = \frac{1}{5} AB.$$

Aus der letzten Relation ist ersichtlich, dass man einen im Umfange des Kreises gelegenen Punkt L erhält, wenn man die durch den Punkt Q, in welchem auf AB der fünfte Theil abgeschnitten wird, parallel zu AE gezogene Gerade QP mit der Diagonale AH zum Durchschnitte bringt. Analog dem Punkte L werden sich auch noch drei andere Punkte K, M und N im Umfange des Kreises als die Durchschnitte der entsprechenden Geraden mit den Diagonalen ergeben.

Fig. 219.



Construirt man demnach vor Allem das perspektivische Bild des um den Kreis, von welchem die Perspektive hf (Fig. 219) des zur Bildfläche parallelen Durchmessers gegeben ist, beschriebenen Quadrates $a\,b\,d\,e$, zu welchem Zwecke wir jeden Eckpunkt desselben als den Durchschnitt der einen Seite mit der entsprechenden Diagonale darstellen, bestimmen sodann die vier Berührungspunkte des Quadrates mit dem Kreise in f, g, h, i und ermitteln sofort in der Art, wie es aus dem Obigen hervorgeht, die Perspektiven der vier Punkte K, L, M und N, d. i. die Punkte k, l, m und n, so wird man im Stande sein, vermittelst der so erhaltenen acht Punkte und vier Tangenten wenigstens kleinere Ellipsen hinreichend genau zu verzeichnen.

Ebenso einfach wie die Punkte k, l, m und n lassen sich auch in diesen Punkten die Tangenten an die Kreisperspektive ermitteln.

Ist LS (Fig. 218) die in L an den Kreis gezogene Tangente, und schneidet dieselbe den verlängerten Durchmesser FH in S, so ist bekanntlich

$$LU^2 = CU \,.\, US = \frac{3}{5} R \,.\, US.$$

Nun ist jedoch

$$\overline{UL}^2 = R^2 - \overline{UC}^2 = R^2 - \frac{9}{25} R^2 = \frac{16}{25} R^2,$$

daher

$$UL = \frac{4}{5} R$$

und

$$\frac{16}{25} R^2 = \frac{3}{5} R \,.\, US,$$

woraus

$$US = \frac{16}{15} R$$

oder

$$SF = US - UF = \frac{16}{15} R - \frac{2}{5} R = \frac{2}{3} R$$

folgt.

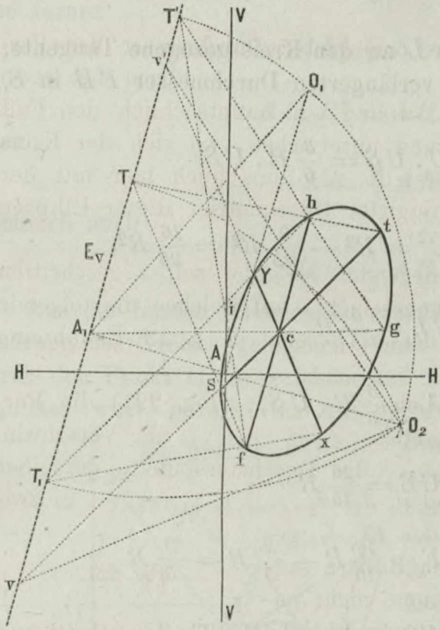
Wird mithin fh (Fig. 219) in drei gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil auf der Verlängerung dieses Durchmessers von den Endpunkten f und h desselben nach s und u aufgetragen, so werden blos u und s beziehungsweise mit m, n und k, l zu verbinden sein, um die fraglichen Tangenten zu erhalten.

Bemerkung 1. Wäre der in einer Ebene gegebene Durchmesser eines Kreises nicht parallel zu der Bildflächtrace, sondern hätte er eine beliebige schiefe Lage gegen dieselbe, so ist klar, dass man die bisher angeführten Verfahrungsarten auch für einen solchen Fall anwenden könnte.

Die Ausführung jedoch ist — wenn der gegebene Durchmesser nicht zufällig auf der Bildflächtrace senkrecht steht — schon nicht mehr so einfach, weil die im vorhergehenden Fall zur Bildfläche parallelen Geraden jetzt eine gegen die Bildfläche schiefe Lage annehmen, man also die angeführten Operationen nur mit Zuhilfenahme der entsprechenden Verschwindungs- und Theilungspunkte durchführen kann.

Es sei hier noch bemerkt, dass man diese Aufgabe auch nach den in c) und d) besprochenen Lösungsarten, bei welchen wir von dem zur Bildflächtrace parallelen Durchmesser ausgingen, durchführen kann. Ist nämlich st (Fig. 220) der gegebene Durchmesser, so ist es leicht, denselben mittelst des entsprechenden, in E_v gelegenen Theilungspunktes T in c zu halbiren, alsdann durch c eine Parallele zu E_v zu ziehen und auf dieser durch Anwendung des schon bestimmten Theilungspunktes T vom Punkte c aus zwei Stücke cf und ch abzuschneiden, die beziehungsweise den Radien cs und ct gleich sind, was einfach durch die beiden Theilungslinien Tsf und Tht bewerkstelligt wird.

Fig. 220.



Ist auf diese Weise in fh die Perspektive des zur Bildebene parallelen Durchmessers bestimmt, so wird der weitere Gang der Durchführung derselbe sein, wie er in den bereits betrachteten Fällen eingehalten wurde.

B e m e r k u n g 2. Selbstverständlich kann auch die Eigenschaft des Kreises, dass jeder Punkt der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit entfernt ist, zur Bestimmung beliebig vieler Punkte der Perspektive benützt werden.

Zieht man nämlich durch den schon bestimmten Mittelpunkt c (Fig. 220) beliebige Linien, und schneidet auf diesen, beiderseits von c, vermittelst des ihnen entsprechenden, in E_v gelegenen Theilungspunktes Längenstücke ab, welche dieselbe wahre Länge wie fc und hc besitzen, so werden in den Endpunkten derselben Punkte der Kreisperspektive erhalten.

In Fig. 220 ist xy ein solcher Durchmesser, T_1 der zugehörige Theilungspunkt, mittelst welchem xc und yc beziehungsweise den Stücken fc und hc perspektivisch gleich gemacht wurden.

§. 108.

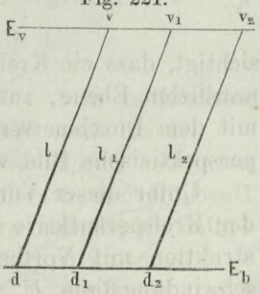
Auffindung eines Paares conjugirter Durchmesser der Perspektive eines Kreises.

a) Wie bereits erwähnt, wollen wir hauptsächlich den Fall einer eingehenderen Erörterung unterziehen, wo sich der Kreis perspektivisch als *Ellipse* darstellt, also uns auch hier mit der Auffindung eines Paares conjugirter Durchmesser dieser Ellipsen befassen.

Bevor zur Lösung vorliegender Aufgabe selbst geschritten wird, sei noch ein Satz vorangeschickt, auf welchen die folgende Construktion beruht, und dessen bereits in §. 19 Erwähnung geschah.

Sind nämlich die Parallelen l_1, l_2 .... (Fig. 221) die Perspektiven verschiedener Geraden, v, v_1, v_2 .... die Verschwindungspunkte und d, d_1, d_2 .... die Durchstosspunkte derselben mit der Bildebene, und sind d, d_1, d_2 ...., v, v_1, v_2 .... in zwei zu einander parallelen Geraden E_b, E_v gelegen, so werden die diesen Bildern entsprechenden Geraden im Raume nicht parallel sein können, weil sie verschiedene Verschwindungspunkte haben, sondern müssen sich, weil sie sämmtlich in einer Ebene $E_b\,E_v$ liegen, schneiden. Es frägt sich nun um den Ort dieses Durchschnittspunktes.

Fig. 221.



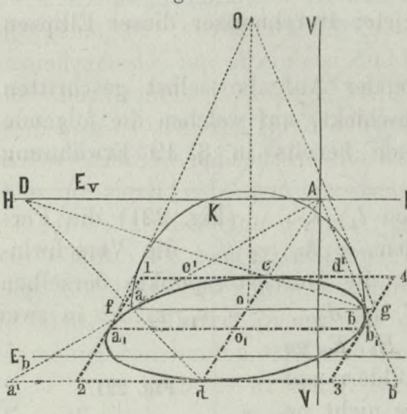
Denken wir uns zu diesem Behufe durch das Auge und durch die einzelnen Linien l, l_1, l_2 .... Ebenen gelegt, so werden sich diese offenbar in einer Geraden G schneiden, welche durch das Auge geht und zu den Perspektiven l, l_1, l_2 ...., also auch zur Bildebene parallel ist. In dieser Geraden muss sonach der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt liegen. Der letztere befindet sich jedoch auch in der den gegebenen Geraden entsprechenden

Ebene $E_b E_v$, folglich im Durchschnitte derselben mit der Geraden G.

Hieraus folgt der Satz: Linien, die in einer und derselben Ebene liegen und parallele Perspektiven haben, ohne jedoch selbst zur Bildfläche parallel zu sein, schneiden sich in einem Punkte jener Ebene, welche durch das Auge parallel zur Bildfläche geht; die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von der Bildfläche ist somit der Augdistanz gleich.

Es sei $E_b E_v$ (Fig. 222) eine horizontale Ebene und a', b', c', d' die Perspektive eines dem Kreise umschriebenen Quadrates, dessen Seiten parallel, beziehungsweise senkrecht zur Bildebene sind, folglich a, b, c, d die Perspektiven der vier Berührungspunkte und $a b$ das perspektivische Bild des zur Bildfläche parallelen Durchmessers. Wird nun über $a b$ ein Kreis K beschrieben, so kann, wie schon aus dem vorhergegangenen Paragraphen ersichtlich ist, die Kreisperspektive mit Hilfe des Kreises K gefunden werden, indem man berücksichtigt, dass ein Kreis vom Radius $a o$, welcher in einer zu $E_b E_v$ parallelen Ebene, zur Hälfte vor und hinter der Bildfläche, also mit dem Durchmesser $a b$ in der Bildebene selbst liegt, dasselbe perspektivische Bild wie der ursprünglich gegebene Kreis liefert.

Fig. 222.

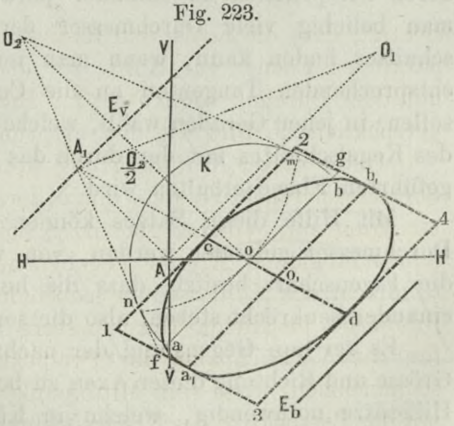


Unter dieser Voraussetzung werden wir bei der Bestimmung der Kreisperspektive stets einen derart gelegenen Kreis zur Construktion mit Vortheil benützen können, indem wir die Verschwindungslinie E_v der gegebenen Kreisebene beibehalten, die Bildflächtrace E_b derselben jedoch in die Perspektive $a b$ des zur Bildfläche parallelen Durchmessers versetzen und den hiedurch für die Verzeichnung der Perspektive erforderlichen Hilfskreis so annehmen, dass sein Mittelpunkt in der Bildebene liegt und mit der Perspektive des Kreismittelpunktes zusammenfällt, während sein Durchmesser durch die Länge der Perspektive $a b$ gegeben ist.

Es ist sodann in Fig. 222 K der in die Bildfläche gedrehte Hilfskreis, mit Zuhilfenahme dessen die nachfolgende Construktion durchgeführt wird.

Da nun die Tangenten $a'b'$ und $c'd'$ zu einander parallel sind, so muss cd ein Durchmesser der in Frage stehenden Ellipse sein, dessen conjugirter Durchmesser $a_1 b_1$ eine zu ab oder zu E_b parallele Richtung hat. Die Tangenten in den Endpunkten a_1 und b_1 dieses letztern werden sonach parallel zu cd sein, jedoch in der Kreisebene liegen, folglich werden auch, nach dem oben Angeführten, die diesen Tangenten entsprechenden Geraden im Raume, so wie der Durchmesser cd, Linien sein, die sich in einer Entfernung D (Augdistanz) von der Bildfläche schneiden und wovon die beiden ersteren den Kreis berühren. Drehen wir demnach das Ganze um ab in die Bildfläche, so muss die dem Bilde cd entsprechende Linie senkrecht auf ab erscheinen. Wird auf dieser nach oO die Augdistanz D aufgetragen, und werden aus O die Tangenten an den Kreis gezogen, so sind diese die den zu suchenden Tangenten entsprechenden Geraden, welche ab in f und g treffen. Drehen wir nun den Kreis in seine frühere Lage zurück, so bleibt f und g ungeändert; es müssen demnach die gesuchten zwei Tangenten 12 und 34 durch f und g parallel zu cd gezogen werden. Endlich hat man nur noch cd zu halbiren und durch o_1 eine zu E_b parallele Gerade bis zum Durchschnitte a_1 und b_1 mit den letzt gefundenen Tangenten zu ziehen, um in $a_1 b_1$ die zweite Achse zu erhalten.

Fig. 223.



b) Liegt der Kreis nicht, wie hier angenommen, in einer horizontalen, sondern in einer beliebigen Ebene $E_b E_v$, so wird diese Auflösungsweise sich von der eben durchgeführten nicht wesentlich unterscheiden.

Es wurde hier gleichfalls die Perspektive ab (Fig. 223) des zu E_b parallelen Durchmessers, ferner der auf E_b senkrechte Durchmesser cd, gesucht und durch diesen ein Durchmesser der Perspektive erhalten, da die Tangenten in c und d parallel sind. Wird über ab der Hilfskreis K beschrieben, und dieser um ab in die Bildfläche umgelegt, so muss cd auf E_b senkrecht erscheinen und durch o gehen. Auf dieser Senkrechten $o O_2$ hat man, um jene zwei im Bilde parallelen Tangenten zu finden, nicht die Distanz, sondern die Nebenaugdistanz $A_1 O_1$ von o nach O_2 aufzutragen und wie früher aus O_2 die beiden Tangenten $O_2 m$, $O_2 n$ an K zu führen, welch' letztere die Drehungsachse ab in den beiden Punkten f und g treffen. Werden nun durch f und g die zu cd parallelen Geraden 13 und 24 gezogen, so schneiden dieselben auf der durch den Halbirungspunkt o_1 von cd parallel zu E_b geführten Richtung der zweiten Axe die Länge $a_1 b_1$ derselben ab.

Bemerkung. In den meisten Fällen ist die Augdistanz zu gross, als dass man bequem den Punkt O_2 benützen könnte. In diesem Falle kann man $\frac{1}{2} A_1 O_1$ bestimmen, diese Länge von o nach $\frac{O_2}{2}$ auftragen und aus $\frac{O_2}{2}$ mit dem Halbmesser $o\frac{O_2}{2}$ den Kreis mon beschreiben, welcher den erstern K in m und n trifft. In den Berührungspunkten m und n sind die Tangenten senkrecht auf die entsprechenden Radien zu ziehen.

§. 109.

Durchmesser der Perspektive eines Kegelschnittes.

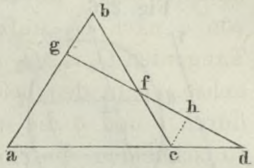
Aus der bereits besprochenen Eigenschaft solcher Linien, deren Perspektiven zu einander parallel sind, folgt auch, dass man beliebig viele Durchmesser der Perspektive eines Kegelschnittes finden kann, wenn man nur den Punkt, wo sich die entsprechenden Tangenten an die Curve (im Raume) schneiden sollen, in jener Geraden wählt, welche als Durchschnitt der Ebene des Kegelschnittes mit der durch das Auge zur Bildfläche parallel geführten Ebene erhalten wird.

Mit Hilfe dieses Satzes können beliebige Paare conjugirter Durchmesser gefunden werden, von welchen jedenfalls ein Paar die Eigenschaft besitzt, dass die betreffenden Durchmesser auf einander senkrecht stehen, also die senkrechten Hauptaxen liefern.

Es sei nun Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung, die Grösse und Richtung dieser Axen zu bestimmen. Hiezu sind einige Hilfssätze nothwendig, welche in Kürze hier angeführt werden sollen.

1. Jede Transversale gd (Fig. 224) schneidet die drei Seiten eines Dreiecks so, dass das Produkt dreier nicht zusammenstossender Abschnitte einander gleich ist, d. h. dass $ag.bf.cd = bg.cf.ad$.

Fig. 224.



Beweis. Wird ch parallel zu ab gezogen, so ist $\Delta adg \infty \Delta cdh$ und

$$\Delta bfg \infty \Delta cfh,$$

daher

$$cd : ad = ch : ag$$

und

$$bf : fc = gb : ch.$$

Diese beiden Proportionen multiplicirt und in eine Gleichung verwandelt, geben:

$$ag.bf.cd = ad.cf.bg$$

oder

$$\frac{ag.bf.cd}{ad.cf.bg} = 1.$$

2. Setzt man einen Kreis $bfdg$ (Fig. 225) und zwei Sehnen gf und bd desselben in Perspektive, wovon die eine gf parallel zur Bildflächtrace AX ist, so wird auch ihre Perspektive $g'f'$ zu AX parallel sein müssen.

Betrachten wir das Dreieck $ac'c$, so wird dasselbe von den Transversalen Ob und Od geschnitten. Es muss sonach:

$$\frac{ab'.Oc'.bc}{b'c'.Oc.ab} = 1$$

und

$$\frac{ad'.Oc'.cd}{c'd'.Oc.ad} = 1$$

sein.

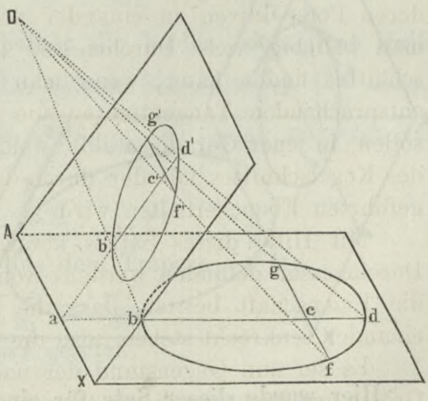
Ferner ist bekannt, dass:

$$\frac{c'f'}{cf} = \frac{Oc'}{Oc}; \quad \frac{c'g'}{cg} = \frac{Oc'}{Oc}$$

und

$$\frac{cf.cg}{bc.cd} = 1.$$

Fig. 225.



Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so ergibt sich nach entsprechender Abkürzung:

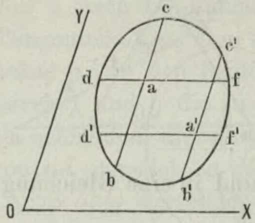
$$\frac{c'f'.c'g'.ab'.ad'}{b'c'.c'd'.ab.ad} = 1$$

oder es ist:

$$\frac{c'f' \cdot c'g'}{b'c' \cdot c'd'} = \frac{ab \cdot ad}{ab' \cdot ad'}.$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dass die Sehne gf durch was immer für einen Punkt der Sehne bd gezogen werden kann, ohne dass sich das Verhältniss $\frac{c'f' \cdot c'g'}{b'c' \cdot c'd'}$ ändert, da der zweite Theil der Gleichung constant ist.

Fig. 226.

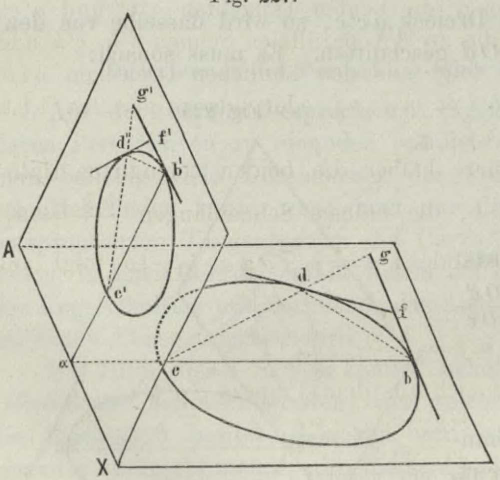


Es gilt also der Satz:

Wenn man in der Ebene eines Kegelschnittes zwei beliebige Richtungen OX und OY (Fig. 226) als fix annimmt, und zu diesen parallele Sehnen bc, $b'c'$, df, $d'f'$ zieht, so ist immer $\frac{ad \cdot af}{ab \cdot ac}$, d. i. der Quotient aus den Produkten der Abschnitte der Sehnen, eine für die angenommenen Richtungen constante Grösse.

3. Zieht man (Fig. 227) einen zu AX senkrechten Durchmesser bc des Kreises bcd und in den Endpunkten b und c desselben die zwei zu AX parallelen Tangenten, so wie irgend eine beliebige Tangente df in d, und verbindet diesen Punkt d mit b und c, so ist das Dreieck bdg rechtwinklig, und da $fb = fd$ ist, muss auch $fb = fg$ sein.

Fig. 227.



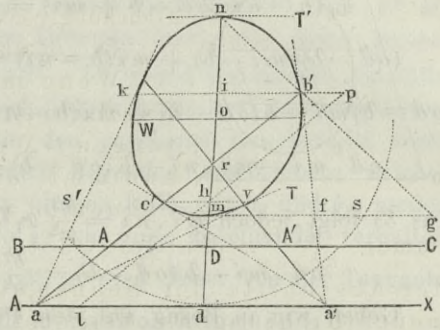
In der Perspektive ist offenbar $b'c'$ der zur Richtung $b'g'$ conjugirte Durchmesser, wesshalb ebenfalls $f'b' = f'g'$ sein muss.

Hier wurde dieser Satz für einen Kreis entwickelt, er lässt sich jedoch auf gleiche Weise für jede Kegelschnittslinie durchführen.

4. Wie anfangs angeführt wurde, schneiden sich je zwei Tangenten an einen Kegelschnitt, welche den in den Endpunkten eines conjugirten Durchmessers seiner Perspektive gezogenen Tangenten entsprechen, in einer Geraden, welche sich als der Durchschnitt einer durch das Auge parallel zur Bildfläche gelegten Ebene mit der Ebene des Kegelschnittes ergibt.

Ist die Zeichnungsfläche die Ebene des Kegelschnittes, AX (Fig. 228) der letztgenannte Durchschnitt, ferner a und a' die Punkte, aus welchen an die Curve diejenigen Tangenten zu ziehen sind, welche im Bilde den in den Endpunkten zweier conjugirten Diameter gezogenen Tangenten entsprechen, so lässt sich nachweisen, dass das Produkt der Abstände $ad \,.\, a'd$ für jedes conjugirte Diameterpaar constant ist.

Fig. 228.



Beweis. Es sei mn der Durchmesser der zu AX parallelen Sehnen. Zieht man aus a' die beiden Tangenten $a'b'$ und $a'c'$, ferner durch b' und c' die zu AX parallelen Sehnen $b'k$, $c'h$ und verbindet n mit b', so folgt aus den ähnlichen Dreiecken nib' und nmg, dass $mg : b'i = mn : ni$ oder, da $mg = 2mf$ ist, dass $2mf : b'i = mn : ni$.

Setzen wir der Kürze halber die beiden conjugirten Halbaxen $oW = a$, $om = b$, die halben Sehnenlängen $\frac{b'k}{2} = x_1$, $\frac{c'v}{2} = x_2$ und die Abstände $a'd = \rho_1$, $ad = \rho_2$, so folgt aus obiger Proportion

$$mf = \frac{b \,.\, x_1}{ni} \,\ldots\ldots (1$$

Andererseits ergibt sich aus dem Trapeze $da'b'i$

$$\frac{mf - x_1}{\rho_1 - x_1} = \frac{mi}{di},$$

oder aus *1*) den Werth für mf gesetzt

$$\frac{\frac{b \,.\, x_1}{ni} - x_1}{\rho_1 - x_1} = \frac{x_1 (b - ni)}{ni(\rho_1 - x_1)} = \frac{mi}{di}$$

und hieraus $x_1 (b - ni) \,.\, di = mi \,.\, ni \,.\, (\rho_1 - x_1) \ldots\ldots (2$

Nach dem zweiten Hilfssatze ist jedoch

$$\frac{mi\,.\,ni}{b'i\,.\,ki} = \frac{mi\,.\,ni}{x_1^2} = \text{const.} = \frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots (3$$

ferner

$$di = od - b + mi \ldots\ldots (4 \text{ und}$$

$$b - ni = mi - b \ldots\ldots\ldots (5$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen übergeht 2) in

$$x_1\,(b - ni)\,(od - b + mi) = \frac{b^2}{a^2}\,x_1{}^2(\rho_1 - x_1) \text{ oder}$$

$$(od - b)\,(mi - b) + mi\,(b - ni) = \frac{b^2}{a^2}\,x_1\,(\rho_1 - x_1) \text{ oder}$$

$$(od - b)\,mi - b\,(od - b) + mi\,(b - ni) = \frac{b^2}{a^2}\,x_1\,\rho_1 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1{}^2 \text{ und}$$

$$od\,.\,mi - mi\,.\,ni - b\,(od - b) = \frac{b^2}{a^2}\,x_1\,\rho_1 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1{}^2.$$

Aus *3)* folgt jedoch $mi\,.\,ni = \frac{b^2}{a^2}\,x_1{}^2$, daher

$$od\,.\,mi - b\,(od - b) = \frac{b^2}{a^2}\,.\,x_1\,\rho_1 \ldots\ldots (6$$

Gehen wir in Bezug auf den Punkt c' in ähnlicher Weise vor, so erhalten wir die Gleichung

$$b\,(od - b) - mh\,.\,od = \frac{b^2}{a^2}\,x_2\,\rho_1 \ldots\ldots (7$$

Addiren wir *6*) und 7), so folgt

$$od\,(mi - mh) = od\,.\,hi = \frac{b^2}{a^2}\,\rho_1\,(x_1 + x_2) \text{ daher}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{hi} = \frac{a^2\,.\,od}{b^2\,.\,\rho_1} \ldots\ldots (8$$

Zieht man durch h die Gerade lp parallel zu ab', so folgt aus den ähnlichen Dreiecken ldh und iph

$$\frac{ld}{hd} = \frac{ip}{ih}$$

oder

$$\frac{\rho_2 - x_2}{do - b + mh} = \frac{x_1 + x_2}{hi} = \frac{a^2\,.\,od}{b^2\,.\,\rho_1} \ldots\ldots (9$$

Dieser Bruch vom Nenner befreit, gibt

$$b^2\,\rho_1\,\rho_2 - b^2\,\rho_1\,x_2 = a^2\,.\,\overline{od}^2 - a^2\,.\,b\,.\,od + a^2\,.\,od\,.\,mh$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung 7) wird

$$b^2.\,\rho_1\cdot\rho_2 - a^2.\,b\,.\,(od - b) + a^2.\,mh\,.\,od = a^2.\,\overline{od}^2 - a^2.\,b\,.\,od + {}$$
$$+ a^2\,.\,od\,.\,mh,$$

woraus sich nach gehöriger Reduktion

$$\rho_1\,\rho_2 = \frac{a^2}{b^2}\,(\overline{od}^2 - b^2) \ldots\ldots (10$$

ergibt.

Setzt man den zweiten Theil dieses Ausdrucks, nämlich $\frac{a^2}{b^2}(\overline{od}^2 - b^2) = z^2$, so ist

$$z = \frac{a}{b}\sqrt{\overline{od}^2 - b^2} \ldots\ldots (11 \text{ und}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (12$$

Betrachten wir den Ausdruck *11)*, so lässt sich derselbe leicht construiren, indem man vorerst die Grösse $\sqrt{\overline{od}^2 - b^2}$ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks und z als vierte geometrische Proportionale zu $\sqrt{\overline{od}^2 - b^2}$, a und b graphisch darstellt.

Diese Länge z ergibt sich jedoch auch auf folgende Weise: Denkt man sich nämlich um den gegebenen Kegelschnitt einen anderen ähnlichen und ähnlich liegenden beschrieben, welcher die Gerade AX in d berührt, (dessen Halbaxen a_1 und b_1, analog mit ersteren bezeichnet, sich so wie diese zu einander verhalten müssen, wesshalb $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ ist) so wird dieser von der Tangente mf in s und s' getroffen und es muss auch hier nach *3)*

$$\frac{ms \,.\, ms'}{md \,.\, md'} = \text{const.} = \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ oder}$$

$$\frac{\overline{ms}^2}{(od - om)(od + om)} = \frac{\overline{ms}^2}{\overline{od}^2 - b^2} = \frac{a^2}{b^2} \ldots\ 12) \text{ sein,}$$

aus welcher Gleichung

$$ms = \frac{a}{b}\sqrt{\overline{od}^2 - b^2} = z \ldots\ldots (13$$

resultirt.

Denkt man sich ausser der durch das Auge zur Bildfläche parallelen Ebene, welche mit der Ebene des Kegelschnittes die Gerade AX als Trace gab, noch die Bildfläche selbst vorhanden, so wird ihr Schnitt BC mit der Kegelschnittsebene, d. i. die Bildflächtrace dieser letzteren, eine zu AX parallele Gerade sein, welche von den Geraden dn, ab' und $a'r$ in D, A und A' getroffen wird und die ähnlichen Dreiecke

$$ADr \text{ und } adr,$$

sowie

$$A'Dr \text{ und } a'dr$$

bildet.

Aus diesen Dreiecken ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{AD}{\rho_2} = \frac{Dr}{dr} \text{ und}$$

$$\frac{A'D}{\rho_1} = \frac{Dr}{dr}$$

welche mit einander multiplicirt

$$\frac{AD \cdot A'D}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \left(\frac{rD}{rd}\right)^2$$

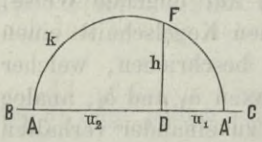
oder, wenn wir $AD = u_2$, $A'D = u_1$ setzen,

$$u_1 \cdot u_2 = \left(ms \cdot \frac{rD}{rd}\right)^2 \ldots\ldots (14$$

geben.

Diese Formel lässt sich folgends aussprechen: Wenn man im Fusspunkte D des den beiden zur Bildflächtrace parallelen Tangenten T und T' entsprechenden Durchmessers mn ein Perpendikel FD (Fig. 229) auf BC errichtet und darauf das Stück $FD = h = \frac{ms \cdot Dr}{dr}$ (Fig. 228) aufträgt, so liegen die zwei zusammengehörigen Punkte A und A', welche den conjugirten Durchmessern der Kegelschnittsperspektive entsprechen, immer in den Durchschnittspunkten der Bildflächtrace BC mit einem Kreise k, dessen Mittelpunkt in der Bildflächtrace liegt, und der durch den Endpunkt des Perpendikels geht.

Fig. 229.



Durch diesen Satz ist der Weg vorgezeichnet, den man zu verfolgen hat, um zwei beliebige conjugirte Durchmesser der Perspektive zu erhalten. Wie man sieht, handelt es sich hier blos um die Construktion der Länge $\frac{ms \cdot rD}{dr}$. *)

Sollen jedoch die senkrechten Axen des Bildes gefunden werden, so ist nur zu berücksichtigen, dass, da dieselben einen rechten Winkel einschliessen und gegen A und A' gerichtet sein müssen, der Scheitel des rechten Winkels, d. i. der Mittelpunkt

*) Die Construktion der conjugirten Durchmesser in §. 108 gibt blos ein bestimmtes Paar derselben, nämlich jenes, wo der eine Durchmesser zur Bildflächtrace parallel ist, und wurde aus dem Grunde vorausgeschickt, weil sich eben dieses Paar conjugirter Axen ohne jede analytische Untersuchung sehr einfach bestimmen lässt. Würde man sich jedoch zur Auffindung dieses Paares obiger Methode bedienen wollen, so gibt dieselbe ein gleiches Construktionsverfahren; denn, weil der eine Punkt A (Fig. 229) unendlich weit fällt, übergeht der durch F gehende Kreis in eine auf BC senkrechte Gerade, wesshalb A' mit D zusammenfällt, somit die Grösse FD nicht erst zu berechnen sein wird.

der Perspektive, gleichfalls in der Peripherie des in Fig. 229 verzeichneten Kreises liegen muss. Es wird somit nothwendig sein, vorerst den Mittelpunkt des Bildes zu bestimmen, was am einfachsten dadurch erreicht wird, dass man den Durchmesser, dem zwei zur Bildflächtrace parallele Tangenten entsprechen, verzeichnet und im fraglichen Mittelpunkte halbirt.

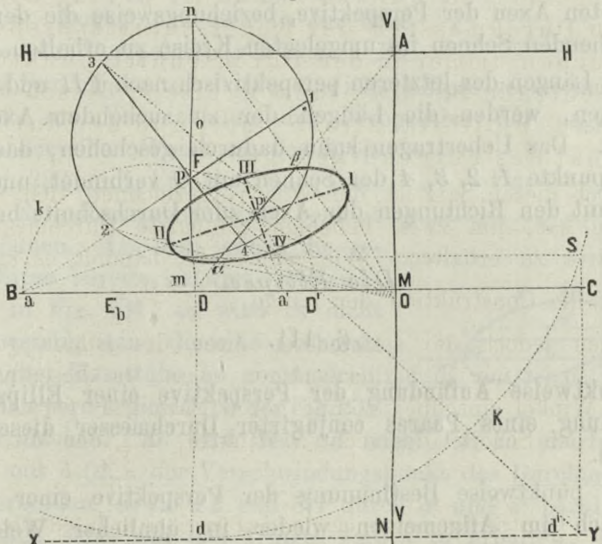
§. 110.

Bestimmung der senkrechten Axen der Perspektive eines Kreises.

Behufs der Bestimmung der senkrechten Axen der Kreisperspektive werden blos die im vorigen Paragraphen durchgeführten, allgemein für Kegelschnittslinien gültigen Sätze speciell auf den Kreis anzuwenden sein.

Ist E_b (Fig. 230) die Bildflächtrace einer horizontalen Ebene, in welcher der um E_b in die Bildfläche umgelegte Kreis $0\ 1\ 2\ 3\ 4$

Fig. 230.



liegt und $A\,O$ die Augdistanz, so ist O das in die Bildebene umgelegte Auge, wonach sich auf bekannte Weise die Gerade $\alpha\beta$ als ein Durchmesser der Kreisperspektive und der Halbirungspunkt p' von $\alpha\beta$ als Mittelpunkt derselben ergibt. Wird O mit p' verbunden und bis zum Durchschnitte p mit dem auf E_b senkrechten Durchmesser $m\,n$ des umgelegten Kreises geführt, so entspricht p dem Mittelpunkte p' im Bilde. Wird ferner $Dd = AO$ gemacht und dd' parallel zu E_b gezogen, so ist dd' die in die Bildfläche umgelegte Schnittlinie der Kreisebene mit der durch das Auge zur Bildfläche parallel geführten Ebene, und wird aus dem Mittelpunkte o ein zweiter Kreis K mit den Halbmesser od beschrieben und mit der durch m zu E_b parallel gezogenen Geraden mS in S zum Durchschnitte gebracht, so gibt diese Ordinate mS jene Länge, welche zur Bestimmung des Punktes F im Hilfskreise k erforderlich ist. Das Stück DF ergibt sich bekanntlich als vierte geometrische Proportionale der Längen pD, pd und mS und wird daher erhalten, indem man $dd' = mS$ macht und d' mit p verbindet, welche letztgezogene Gerade auf E_b das Stück $DD' = DF$ abschneidet. Man hat hienach blos den Kreis k so zu ziehen, dass die Punkte F und p' in der Peripherie desselben und sein Mittelpunkt in E_b liegt und sodann die Punkte a und a' mit p' und p zu verbinden, um die Richtungen der senkrechten Axen der Perspektive, beziehungsweise die denselben entsprechenden Sehnen im umgelegten Kreise zu erhalten.

Die Längen der letzteren perspektivisch nach $I\,II$ und $III\,IV$ übertragen, werden die Längen der zu suchenden Axen bestimmen. Das Uebertragen kann dadurch geschehen, dass man die Endpunkte *1*, *2*, *3*, *4* der Sehnen mit O verbindet, und diese Linien mit den Richtungen der Axen zum Durchschnitt bringt.

Die Ellipse.

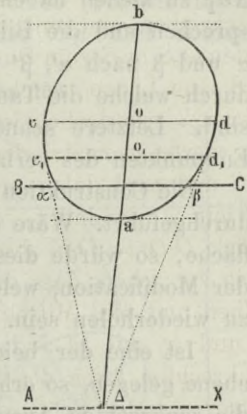
§. 111.

Punktweise Auffindung der Perspektive einer Ellipse und Bestimmung eines Paares conjugirter Durchmesser dieser Perspektive.

Die punktweise Bestimmung der Perspektive einer Ellipse lässt sich im Allgemeinen wieder in ähnlicher Weise wie beim Kreise durch Verzeichnung umschriebener Rechtecke und Parallelogramme durchführen. Die Perspektive der Ellipse wird, wie jene des Kreises, eine Kegelschnittslinie sein, doch ist auch hier zu berücksichtigen, dass die Lage und Ausdehnung der Ellipse grösstentheils eine solche ist, dass die Perspektive derselben wieder eine Ellipse und in speciellen Fällen ein Kreis wird.

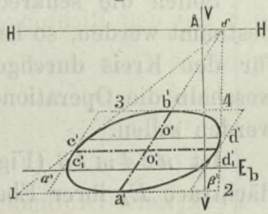
Sollen zwei conjugirte Durchmesser des Bildes gefunden werden, so können die in den vorhergegangenen Paragraphen entwickelten Grundsätze, welche allgemein für jede Kegelschnittslinie aufgestellt wurden, auch hier angewendet werden. Wir wollen jedoch wieder vorerst ein Paar dieser Durchmesser aufsuchen, deren Construktion die in §. 109 durchgeführte analytische Entwicklung nicht voraussetzt.

Fig. 231.



Es sei *abcdo* (Fig. 231) eine Ellipse, welche die in der Zeichnung angegebene Lage gegen die Bildflächtrace *BC* hat, und in einer horizontalen Ebene liegt. Ist E_b (Fig. 232) die Bildflächtrace dieser Ebene, so bestimme man vorerst die Perspektive $a'b'$ des zur Richtung *BC* conjugirten Durchmessers *ab*. Denkt man sich in der Bildfläche über der Perspektive $c'd'$ des zu *BC* parallelen Durchmessers *cd* eine ähnliche Ellipse verzeichnet, so wird diese zur Verzeichnung der Perspektive der gegebenen Ellipse in derselben Weise wie der Kreis *K* in Fig. 222 und Fig. 223 zur Construktion der Kreisperspektive benützt werden können. Hat man jedoch die gegebene Ellipse bereits seitwärts verzeichnet, wie in Fig. 231, so wird es nicht erst nothwendig sein, dieselbe nochmals im verjüngten Massstabe zu construiren, sondern man wird sogleich von der Fig. 231 Gebrauch machen. Es wird also *cd* nach $c'd'$ zu übertragen, c' und d' mit δ (d. i. der Verschwindungspunkt des Durchmessers *ab*) zu verbinden, sowie *12* und *34* durch a' und b' parallel zu E_b zu ziehen sein, um das Trapez *1234* zu erhalten, dessen Seiten Tangenten an die Perspektive der Ellipse in den Punkten a', b', c', d' sind.

Fig. 232.



Weil nun die Tangenten in a' und b' parallel sind, so ist $a'b'$ ein Durchmesser der Perspektive, dessen conjugirter Durchmesser $c'_1 d'_1$ parallel zur Bildflächtrace E_b durch den Halbirungspunkt o'_1 des Durchmessers $a'b'$ gehen muss. Um die Tangenten in c'_1 und d'_1 zu bestimmen, ist das in §. 108 Gesagte zu berücksichtigen, daher wir blos die Axe ab (Fig. 231) so weit zu verlängern haben, bis sie die Gerade AX, welche parallel zu BC in einer der Augdistanz gleichen Entfernung von BC gezogen wurde, in Δ trifft, und von Δ aus jene beiden Tangenten Δc_1, Δd_1 zu ziehen haben, welche den zu suchenden Tangenten entsprechen und die Bildflächtrace in α und β schneiden. Werden α und β nach α', β' übertragen, so bestimmen sie jene Punkte, durch welche die Tangenten $\alpha' c'_1$, $\beta' d'_1$ parallel zu $a'b'$ zu ziehen sind. Letztere schneiden $o'_1 c'_1 d'_1$ in c'_1 und d'_1, d. i. in den Endpunkten des verlangten zweiten Diameters.

Die Construktion wurde hier für eine horizontale Ebene $E_b E_v$ durchgeführt. Wäre die Ebene der Ellipse schief gegen die Bildfläche, so würde dieses Verfahren in gleicher Weise, jedoch mit der Modification, welche in §. 108 beim Kreise angedeutet wurde, zu wiederholen sein.

Ist eine der beiden Hauptaxen der Ellipse in der Vertikalebene gelegen, so erhält man durch das vorangegangene Verfahren die senkrechten Axen der Perspektive.

§. 112.

Construktion der senkrechten Axen der Perspektive einer Ellipse.

Sollen die senkrechten Axen der Perspektive einer Ellipse bestimmt werden, so hat man dasselbe Verfahren, wie es in §. 110 für den Kreis durchgeführt wurde, in Anwendung zu bringen, wesshalb die Operationen im Nachfolgenden nur kurz angedeutet werden sollen.

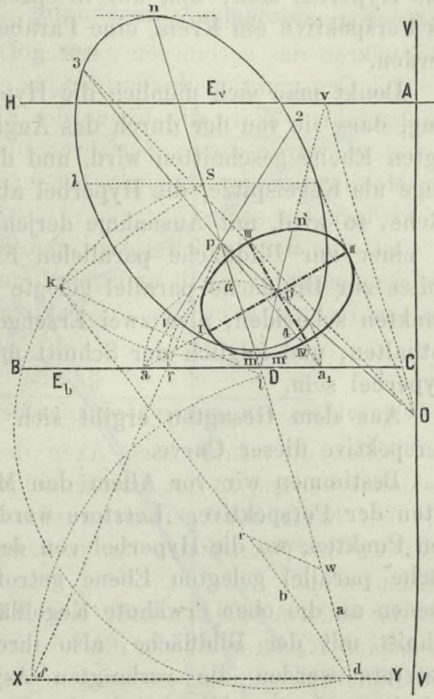
Ist $n24m13$ (Fig. 233) eine Ellipse, welche um die Bildflächtrace E_b ihrer Ebene, die horizontal angenommen wurde, in die Bildebene gedreht erscheint, so wird man vorerst den Mittelpunkt p' der Perspektive suchen, was am einfachsten, wie im vorigen Falle, durch Auffindung und Halbirung des Durchmessers $m'n'$ erreicht wird.

Wird p' mit O (umgelegtes Auge) verbunden und bis zum Durchschnitte p mit der Geraden mn verlängert, so ist p jener Punkt der Axe mn, welcher dem Mittelpunkte p' entspricht. Es handelt sich nun um die Construktion der Länge $z = \frac{a}{b}\sqrt{\overline{Sd}^2 - b^2}$.

In vorliegender Aufgabe ist $S\lambda = a$, $Sm = b$, daher diese Länge z erhalten wird, wenn man eine ähnliche Ellipse, welche XY in d berührt, über demselben Mittelpunkt s und den gleichen

Axenrichtungen construirt und jene Ordinate derselben sucht, welche durch m zu E_b parallel läuft, oder, was einfacher ist, durch graphische Construktion des Ausdrucks $\frac{a}{b}\sqrt{Sd^2 - b^2}$ selbst, indem $\sqrt{Sd^2 - b^2}$ die Kathete kd eines rechtwinkligen Dreiecks Skd vorstellt, dessen Hypothenuse Sd und dessen andere Kathete b ist, daher $z = dl = d\delta$ als die vierte geometrische Proportionale zu der eben gefundenen Kathete und zu den Axen a und b erhalten wird.

Fig. 233.



Endlich könnte man in Anbetracht dessen, dass die gegebene Ellipse mn zu der über Sd zu verzeichnenden ähnlich sein soll, leicht einen Punkt finden, welcher in der Axe Sm der ersteren Ellipse eine ähnliche Lage hat, wie der Punkt m in der Axe Sd der letztern, wo sodann die demselben entsprechende Ordinate, im Verhältnisse der Axen Sd und Sm der beiden Ellipsen vergrössert, das zu suchende Längenstück z gibt.

Ist nach einer dieser Methoden die Länge z bestimmt, und wird diese von d nach δ aufgetragen, so hat man blos δ mit p zu verbinden, das Stück $D\gamma$ nach $D\alpha$ aufzutragen und durch die Punkte α und p' einen Kreis so zu führen, dass sein Mittelpunkt in BC zu liegen kömmt. Dieser Kreis wird die Bildflächtrace BC in a und a_1 schneiden, welche Punkte mit p' verbunden, die Richtungen der zu suchenden Axen des Bildes, und mit p verbunden, die den senkrechten Axen des Bildes entsprechenden Sehnen 12, 34 der Ellipse geben. Mittelst der letzteren sind nun die Längen der zu suchenden Axen leicht zu bestimmen, indem deren Eckpunkte sich als Durchschnittspunkte der Richtungen ap' und $a_1 p'$ mit den Verbindungslinien $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ ergeben.

§. 113.
Die Hyperbel.

Die Perspektive einer Hyperbel wird im Allgemeinen wieder eine Hyperbel sein, und nur in speciellen Lagen derselben kann als Perspektive ein Kreis, eine Parabel oder eine Ellipse erhalten werden.

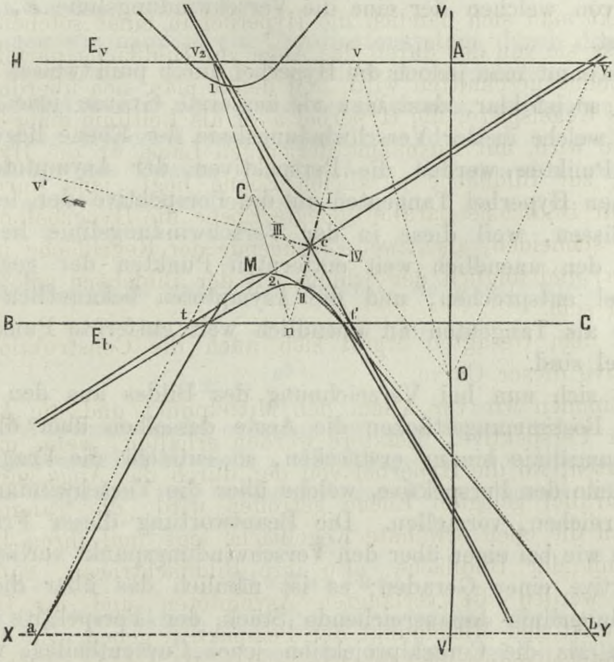
Denkt man sich nämlich die Hyperbel in einer solchen Stellung, dass sie von der durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegten Ebene geschnitten wird, und denkt man sich überdies das Auge als Kegelspitze, die Hyperbel aber als *Leitlinie* einer Kegelfläche, so wird, mit Ausnahme derjenigen Lage, wo die Hyperbel in einer zur Bildfläche parallelen Ebene liegt, jene durch die Spitze zur Bildfläche parallel gelegte Ebene die Hyperbel in zwei Punkten schneiden, also zwei Erzeugende der Kegelfläche in sich enthalten, und folglich der Schnitt mit der Bildebene selbst eine Hyperbel sein.

Aus dem Gesagten ergibt sich auch die Construktion der Perspektive dieser Curve.

Bestimmen wir vor Allem den Mittelpunkt und die Asymptoten der Perspektive. Letztere werden erhalten, wenn man in den Punkten, wo die Hyperbel von der durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegten Ebene getroffen wird, die Tangirungsebenen an die oben erwähnte Kegelfläche legt und ihren Durchschnitt mit der Bildfläche, also ihre Bildflächtracen, aufsucht. Letztere werden die verlangten Asymptoten und ihr Durchschnittspunkt den Mittelpunkt der Perspektive geben. Zu diesem Behufe denke man sich die Ebene der Hyperbel, welche wir horizontal annehmen wollen, um ihre *Bildflächtrace* E_b (Fig. 234) in die Bildfläche gelegt, woselbst XY der umgelegte Schnitt mit der durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegten Ebene und O das umgelegte Auge sein wird. Verzeichnet man nun den Hyperbelast Mab so weit, bis er XY in a und b trifft, so sind die in diesen Punkten an die Hyperbel gezogenen Tangenten bt' und at die umgelegten Tracen der oben erwähnten Berührungsebenen auf der Ebene $E_b E_v$ der Leitlinie. Die Perspektiven dieser Tangenten at und bt' sind die Asymptoten selbst, weil die Berührungsebenen durch das Auge gehen, sonach die Bildflächtrace, die Verschwindungslinie und die Perspektiven aller in einer solchen Ebene gelegenen Linien in eine Gerade fallen.

Diese Perspektiven sind leicht zu bestimmen; denn, zieht man aus O die Parallelen $O v_1$ und $O v_2$ zu den beiden Tangenten $a t$ und $b t'$, so schneiden sie die Horizontslinie in den Punkten v_1 und v_2, welche mit den Durchstosspunkten t und t' verbunden, die gewünschten Bilder geben und zugleich deren Verschwindungspunkte sind. Die so gefundenen Asymptoten schneiden

Fig. 234.



sich in dem Mittelpunkte c der Perspektive, welchem in der Ebene der Hyperbel der Punkt C entspricht. Werden endlich die Asymptotenwinkel $v_1 c v_2$ und $v_1 c t'$, halbirt, so geben die Halbirungslinien $c v$ und $III IV$ die Richtungen der beiden senkrechten Axen, von welchen diejenige die reelle ist, deren zugehörige Gerade im Raume eine Sehne der gegebenen Hyperbel wird.

Verbindet man nämlich O mit den Verschwindungspunkten v und v' der gefundenen Axen, so ist $O v$ der umgelegte Parallelstrahl der Axe $c v$, daher wird die durch den Durchstosspunkt n

mit der Bildflächtrace zu Ov gezogene Parallele $n\,21$, welche durch C gehen muss, die um E_b in die Bildfläche gedrehte Gerade im Raume geben und die Hyperbel in den beiden Punkten 1 und 2, die den Endpunkten I und II der reellen Axe der Perspektive entsprechen, treffen. Werden diese beiden Endpunkte 1 und 2 nach I und II übertragen, so hat man zur Construktion des Bildes die reelle Axe $I\,II$ und die beiden Asymptoten $v\,t$ und $v_2\,t'$ bestimmt, mithin das Nöthige gefunden.

Bemerkung 1. Wird die Hyperbel aus den so ermittelten Bestimmungsstücken verzeichnet, so ergeben sich zwei unendliche Aeste, von welchen der eine die Verschwindungslinie E_v durchschneidet.

Bestimmt man jedoch die Hyperbel durch punktweises Uebertragen, so ist klar, dass man als äusserste Gränze jene Punkte erhält, welche in der Verschwindungslinie der Ebene liegen. In diesen Punkten werden die Perspektiven der Asymptoten der gegebenen Hyperbel Tangenten an die Perspektive der letzteren sein müssen, weil diese in der Verschwindungslinie liegenden Punkte den unendlich weit entfernten Punkten der gegebenen Hyperbel entsprechen, und die Asymptoten bekanntlich nichts anderes als Tangenten an unendlich weit entfernte Punkte der Hyperbel sind.

Da sich nun bei Verzeichnung des Bildes aus den aufgesuchten Bestimmungsstücken die Aeste desselben über die Verschwindungslinie hinaus erstrecken, so entsteht die Frage: was jene Theile der Perspektive, welche über die Verschwindungslinie hinaus reichen, vorstellen. Die Beantwortung dieser Frage ist dieselbe wie bei einer über den Verschwindungspunkt verlängerten Perspektive einer Geraden; es ist nämlich das über die Verschwindungslinie hinausreichende Stück der Perspektive nichts anderes als die Centralprojektion jenes Curventheiles, welcher hinter der durch das Auge parallel zur Bildfläche gehenden Ebene sich befindet. Es ergibt sich also, dass die ganze als Perspektive erhaltene Hyperbel nichts anders, als die centrale Projektion der ganzen gegebenen Hyperbel ist.

Bemerkung 2. Die Lösung der eben behandelten Aufgabe für den Fall, als die gegebene Hyperbel in einer gegen die Bildfläche geneigten Ebene liegt, wird auf gleiche Weise durchgeführt, nur hat man die Länge $A\,O$ so wie die Entfernung der beiden Geraden E_b und $X\,Y$ nicht der Augdistanz, sondern der Nebenaugdistanz gleich zu machen. Die Construktion ändert sich auch dann nicht, wenn die Hyperbel eine verkehrte Lage gegen die Bildflächtrace hat, also jeder der beiden Aeste von der Geraden XY in einem Punkte geschnitten wird.

Bemerkung 3. Behufs der Bestimmung der Tangenten at und bt' in den Durchschnittspunkten a und b der Hyperbel mit der Geraden XY können entweder die Winkel, welche die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Brennpunkten bilden, halbirt, oder es kann die Entfernung des Durchschnittspunktes C dieser beiden Tangenten vom Mittelpunkte der gegebenen Hyperbel berechnet werden.

Legen wir nämlich ein Coordinatensystem durch den Mittelpunkt derart, dass die YAxe parallel zur Bildflächtrace E_b wird, und die XAxe mit dem zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser der Hyperbel zusammenfällt, und sind x' und y' die Coordinaten des Punktes a oder b in Bezug auf dieses Axensystem, so ist die Gleichung der Tangente

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

folglich für den zu suchenden Punkt C, da $y = 0$ wird,

$$\frac{xx'}{a^2} = 1 \text{ und hieraus}$$

$$x = \frac{a^2}{x'},$$

welcher Ausdruck leicht construirt werden kann.

Selbstverständlich stellt a die Länge der conjugirten reellen Axe der Hyperbel vor, welche mit der XAxe zusammenfällt.

§. 114.

Die Parabel.

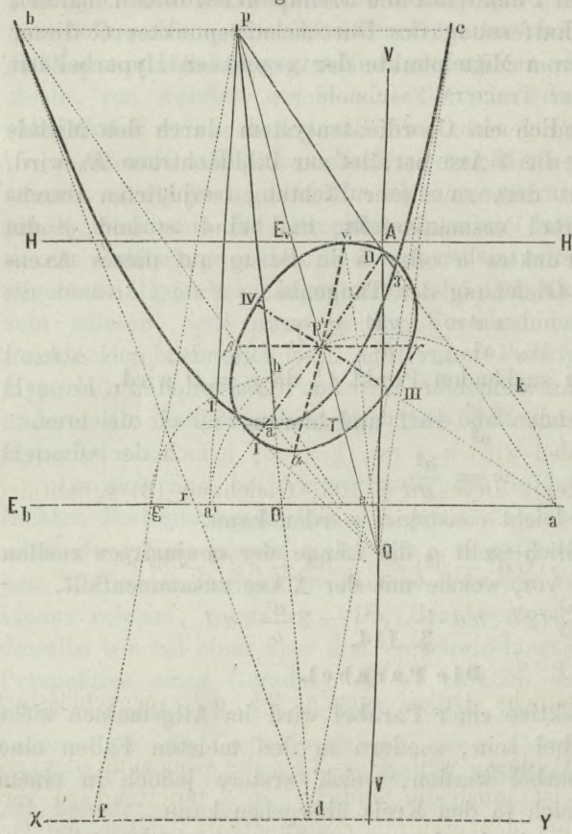
a) Die Perspektive einer Parabel wird im Allgemeinen nicht wieder eine Parabel sein, sondern in den meisten Fällen eine Ellipse oder Hyperbel werden, welch' erstere jedoch in einem speciellen Falle auch in den Kreis übergehen kann.

Um im Vorhinein bestimmen zu können, welche Curve in einem gegebenen Falle als Bild erhalten wird, hat man die Parabel um die Bildflächtrace ihrer Ebene in die Bildfläche umzulegen und nachzusehen, ob die Curve von der umgelegten Schnittlinie XY (der Parabelebene mit der durch das Auge zur Bildfläche parallel gelegten Ebene) getroffen, berührt oder nicht getroffen wird. — Im ersten Falle wird die Perspektive der Parabel eine

Hyperbel, im zweiten, so wie auch in dem Falle, wo ihre Ebene parallel zur Bildfläche ist, eine Parabel, im dritten Falle endlich eine Ellipse sein.

Wäre also $a\,b\,c$ (Fig. 235) jene um die Bildflächtrace E_b ihrer Ebene $E_b\,E_v$ umgelegte Parabel und $X\,Y$ die oberwähnte Schnittlinie, so wird dem Gesagten zu Folge die Perspektive der Parabel eine Ellipse sein müssen, deren conjugirte und senkrechte Axen bestimmt werden sollen.

Fig. 235.



Zur Bestimmung eines Paares dieser conjugirten Axen wollen wir wieder von dem im §. 108 entwickelten Satze ausgehen.

Legen wir sonach an die Parabel parallel zur Bildflächtrace die Tangente T, so wird diese die Curve in a berühren, während die zur Axe der Parabel parallel gezogene Gerade $d\,a\,p$ den dieser Richtung entsprechenden Durchmesser gibt.

Der Parallelstrahl $O\,v_1$ trifft die Verschwindungslinie E_v im Verschwindungspunkte v_1 der Perspektive dieses Durchmessers, daher v_1 mit dem Durchstosspunkte D desselben mit der Bildebene verbunden, die Perspektive von $a\,p$ liefert. Ist ferner α die Perspektive des Punktes a, so wird $\alpha\,v_1$ ein conjugirter

Durchmesser der Ellipse sein und in p' halbirt den Mittelpunkt derselben geben. Der Punkt p' auf die Gerade ap übertragen, gelangt nach p; es kann somit die zweite Axe gefunden werden, wenn man bc durch p parallel zu E_b zieht und die Endpunkte b und c dieser Sehne auf die durch p' parallel zu E_b gezogene Axenrichtung perspektivisch nach β und γ überträgt.

Zu gleichem Resultate gelangt man auch durch folgenden Schluss: Da die in β und γ an die Ellipse gezogenen Tangenten mit αv_1 parallel sind, so müssen die denselben entsprechenden Geraden Tangenten an die Parabel sein und sich mit pD in einem Punkte d der Trace XY schneiden.

Der bekannten Eigenschaft der Parabel, dass ihre Subtangente gleich der doppelten Abscisse ist, zufolge hat man das Stück ad von a nach p aufzutragen, um jenen Punkt zu erhalten, welchem der Mittelpunkt der Perspektive der Parabel entspricht, somit blos die Sehne bc zu ziehen und ap und bc perspektivisch zu bestimmen. Die auf E_b abgeschnittene Länge rs ist alsdann die Länge des zu suchenden zweiten Diameters $\beta\gamma$.

Sollen jedoch die senkrechten Axen des Bildes bestimmt werden, so hat man auch hier die in §. 109 abgeleiteten Formeln und Sätze anzuwenden und für vorliegenden Fall einzurichten.

Für die Parabel wird $a = \infty$, $b = \infty$, jedoch der Quotient $\frac{a^2}{b} = p$ (Parameter); dieses in §. 109, Gleichung 13) substituirt gibt:

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{a^2}{b^2}(\overline{Od}^2 - b^2) = \frac{a^2}{b^2}[(b + ad)^2 - b^2] \\ &= \frac{a^2}{b^2}(2b \,.\, ad + \overline{ad}^2) = 2\frac{a^2}{b} \,.\, ad \\ &= 2pad, \end{aligned}$$

weil $\overline{ad}^2$ als endliche Grösse gegen $2b \,.\, ad$ vernachlässiget werden kann.

Hieraus folgt, dass, weil $y^2 = 2px$ die Gleichung der gegebenen Parabel ist, auch die ähnliche, in d tangirend zu verzeichnende Parabel der ersteren congruent ist, daher die Ordinate z auch aus dieser bestimmt werden kann und einer Abscisse $x = ad$ zugehört.

Macht man sonach $ap = ad$, so ist $pb = pc = z$, folglich diese Länge von d nach f aufgetragen und f mit p verbunden die Länge $gD = z \,.\, \frac{pD}{pd}$ gibt, welche nach Dh übertragen jenen Punkt h liefert, durch welchen der Kreis k zu ziehen ist.

Für senkrechte Axen muss jedoch auch p' in der Peripherie des Hilfskreises k liegen, wesshalb der Mittelpunkt desselben in der Bildflächtrace E_b so zu bestimmen ist, dass die Peripherie durch h und p' geht.

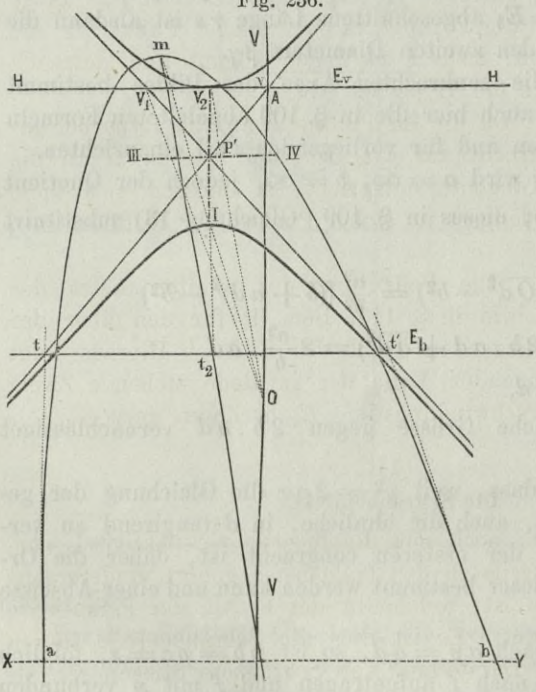
Verbindet man a und a' mit p' und p, so geben diese Geraden die Richtungen der senkrechten Axen der Perspektive, so wie die denselben entsprechenden Sehnen der gegebenen Parabel.

Um die Länge der Axen zu erhalten, wird man nur die Endpunkte *1* und *3* der Sehnen (die andern Endpunkte *2* und *4* der Sehnen fallen ausser die Zeichnungsfläche) entsprechend in die Perspektive zu übertragen haben.

Die anderen Halbaxen sind von p' aus nach entgegengesetzter Richtung zu übertragen.

b) Hat die Parabel gegen die Bildflächtrace eine entgegengesetzte Lage von derjenigen, welche unter a) angenommen wurde, so wird die um E_b (Fig. 236) in die Bildebene umgelegte Schnittlinie XY die in die Bildfläche gedrehte Parabel in a und b schneiden, wesshalb die Perspektive derselben eine Hyperbel sein wird.

Fig. 236.



Zur Verzeichnung der Bestimmungsstücke der letzteren wird man von den Asymptoten ausgehen, welche sich als die Bildflächtracen der in den Punkten a und b an den parabolischen Kegel (dessen Leitlinie die gegebene Parabel und dessen Spitze das Auge ist) geführten Tangirungsebenen ergeben. Zieht man sonach in a und b die beiden Tangenten at and bt' an die Parabel amb, so sind dies die umgelegten Durchschnitte (Tracen) dieser Tangirungsebenen mit der Ebene der Parabel, und es werden die durch O (umgelegtes Auge) zu at und bt' gezogenen Parallelen Ov und Ov_1 die Verschwindungslinie E_v in den Verschwindungspunkten der diesen Tangenten entsprechenden Perspektiven, d. i. in v und v_1 treffen, welche Verschwindungspunkte mit t und t' verbunden diese Perspektiven selbst, daher auch die gesuchten Asymptoten geben. Die beiden Asymptoten schneiden sich in p', d. i. im Mittelpunkte der Hyperbel, deren Axenrichtungen durch Halbirung des Winkels, welchen die Asymptoten einschliessen, erhalten werden. Hienach ergibt sich in $t_2 v_2$ die reelle und in der darauf Senkrechten $III\ IV$ die imaginäre Axenrichtung. Um schliesslich auf $t_2 v_2$ die Länge der reellen Axe zu erhalten, kann man sich diese Gerade in die Bildfläche gedreht denken, zu welchem Zwecke durch t_2 eine zu Ov_2 parallele Gerade mt_2 zu ziehen ist. Diese Gerade mt_2 schneidet die Parabel in m, welcher Punkt, in die Perspektive übertragen, nach I zu liegen kömmt und demnach $p'I$ die reelle Halbaxe der Hyperbel gibt.

Bemerkung 1. Da die im Punkte I an die Hyperbel geführte Tangente senkrecht auf $v_2 t_2$ ist, und der in m an die Parabel gezogenen Tangente entspricht, so müssen sich diese beiden Tangenten verlängert in einem Punkte der Bildflächtrace E_b schneiden.

Bemerkung 2. Die Bedeutung des zweiten Astes der Hyperbel ist dieselbe wie in §. 113, Bem. 1, für den über der Verschwindungslinie liegenden Theil des Bildes. Hieraus folgt auch, dass im vorliegenden Falle der in Rede stehende Zweig der Hyperbel die Verschwindungslinie E_v berühren muss.

§. 115.

Die Schraubenlinie.

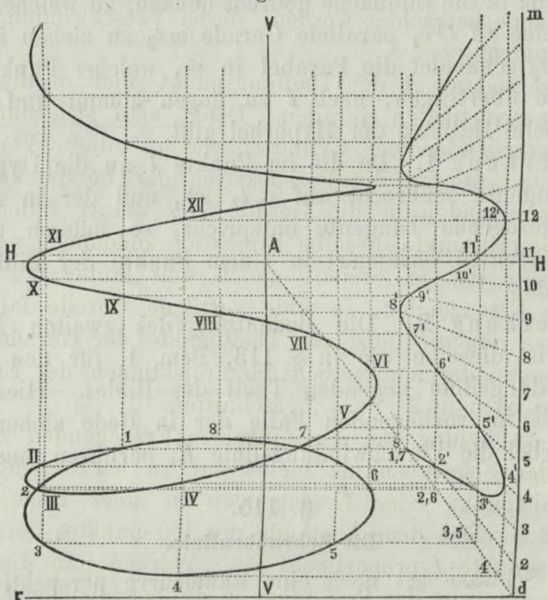
Zum Schlusse sei noch eine Raumcurve perspektivisch dargestellt, welche einerseits zu den einfachsten gehört, andererseits aber fast die einzige ist, welche in der Praxis der Perspektive eine Anwendung findet. Es ist dies die Schraubenlinie, deren Construktion bei der Darstellung von Schrauben, Stiegen etc. als Grundlage dient.

So wie in der orthogonalen Projektion wollen wir auch hier bei Verzeichnung dieser Linie von der wichtigsten Eigenschaft derselben, dass sie nämlich in jedem Punkte eine gleiche Neigung gegen eine bestimmte Ebene hat, ausgehen. Daraus folgt, dass gleichen Längenstücken der Projektion dieser Curve auf die gegebene Ebene auch eine gleich grosse Höhenzunahme in Bezug auf eine darauf senkrechte Richtung entspricht.

Wir wollen hier nur den einfachsten, jedoch am häufigsten vorkommenden Fall betrachten, wo die Schraubenlinie in der Oberfläche eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Leitlinie liegt, und letzteren so stellen, dass seine Axe parallel zur Bildfläche und vertikal, d. i. senkrecht auf die Grundebene zu liegen kommt.

Ist sonach E_b (Fig. 237) die Bildflächtrace der Grundebene, so wird in dieser vorerst ein Kreis zu verzeichnen und dessen

Fig. 237.



Peripherie in eine beliebig grosse Anzahl gleicher Theile zu theilen sein. Die in den Theilpunkten errichteten Vertikalen werden sodann die einzelnen Lagen der Erzeugenden einer Cylinderfläche vorstellen, welche sämmtlich von der zu verzeichnenden Curve so geschnitten werden, dass der Höhenunterschied je zweier Durchschnittspunkte dem zwischen den betreffenden Erzeugenden in der Basisebene liegenden Kreisbogen proportional ist, woraus folgt, dass diese vertikalen Geraden nur in den zu bestimmenden Punkten der Curve dem Obigen gemäss zu theilen sind. Ist die Perspektive eines Kreises derart verzeichnet, dass man unmittelbar die Bilder jener Punkte sucht, in welchen der Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (am besten eine durch *8* theilbare Zahl), hier in *8*, getheilt wurde, so wird die Theilung der in diesen Punkten errichteten Vertikalen vorzunehmen sein, zu welchem Zwecke noch die Ganghöhe, d. i. der Höhenunterschied zweier Punkte der Schraubenlinie, welchen eine ganze Kreisperipherie entspricht, angenommen werden muss.

Zieht man nun in der Bildfläche irgend eine auf die Bildflächtrace E_b senkrechte Gerade dm, trägt auf dieselbe die Ganghöhe $d8$ auf und theilt diese in ebenso viele gleiche Theile als den Kreis, so kann diese Gerade als Bildflächtrace einer vertikalen Ebene betrachtet werden, deren Verschwindungslinie die Vertikallinie ist.

Es ist sodann A der Theilungspunkt aller in dieser Ebene befindlichen vertikalen Geraden. Denkt man sich nun die einzelnen Erzeugenden der Cylinderfläche auf diese Vertikalebene projecirt, so werden die Perspektiven der Fusspunkte *1* bis *8* dieser Erzeugenden in die Gerade Ad derart fallen, dass je zweien dieser Punkte dieselbe Projektion zukömmt, wesshalb die Projektionen von je zweien, gleich weit hinter der Bildfläche liegenden Erzeugenden, in eine vertikale Gerade fallen. Verbindet man nun die einzelnen Theilpunkte der Geraden dm mit A, so werden durch dieselben die Projektionen der Erzeugenden der Reihe nach in $2'$, $3'$.... geschnitten.

Zur Auffindung der den einzelnen Erzeugenden zugehörigen Punkte der Schraubenlinie bleibt nur zu berücksichtigen, dass der Schnittpunkt jeder Erzeugenden in einer Höhe zu suchen sein wird, welche dem Abstande des Fusspunktes derselben vom Ausgangspunkte *1* proportional ist. Werden nun die so gefundenen Punkte aus der Projektion in die betreffenden Erzeugenden zurückgeführt, was selbstverständlich durch horizontale Gerade geschieht, so erhält man einzelne Punkte der Schraubenlinie für ein Gewinde. Sind jedoch mehrere Gewinde zu verzeichnen, so kann entweder auf dm die Theilung weiter fortgesetzt und in gleicher Weise wie bei der ersten Windung vorgegangen werden, oder es kann, da der bewegliche Punkt bei jedem Umgang des

Cylinders eine gleiche Höhe durchläuft und die Erzeugenden parallel zur Bildfläche sind, die Bestimmung weiterer Punkte so vorgenommen werden, dass man von jedem in der ersten Windung bestimmten Punkte auf der zugehörigen Erzeugenden die Schraubengangshöhe (in der Länge wie sie sich in der Perspektive an der betreffenden Stelle ergibt und in der Projektion abgenommen werden kann), so oft mal aufträgt, als man Gewinde verlangt. Bei der Verbindung der einzelnen Punkte ist zu beachten, dass sie in der Reihe vorzunehmen sei, wie die Erzeugenden der Cylinderfläche, in welchen die Punkte liegen, auf einander folgen.

Eine andere interessante Construktionsweise bietet die Schraubenlinie in der Lage, wenn ihre Axe senkrecht auf der Bildfläche steht. Geht die Axe überdies noch durch den Augpunkt, so ist die Perspektive der Schraubenlinie eine hyperbolische Spirale.

Die Construktion der Tangente an irgend einen Punkt der Curve geschieht einfach dadurch, dass man in dem Fusspunkte der dem gegebenen Punkte zugehörigen Erzeugenden an den Kreis eine Tangente zieht, auf dieser eine Länge abschneidet, welche der abgewickelten Kreislinie, vom Anfangspunkte der Schraubenlinie bis zu dem Fusspunkte der Erzeugenden (mit Berücksichtigung des ein- oder mehrmaligen Umganges) gemessen, gleich ist, und den so gefundenen Punkt mit dem gegebenen verbindet.

Bemerkung. Zum Schlusse dieses Abschnittes sei noch erwähnt, dass für solche Fälle, wo die Kreis- oder Ellipsenperspektive eine Hyperbel oder Parabel wird, die erforderlichen Bestimmungsstücke in gleicher Weise, wie dies bei der Hyperbel und Parabel gezeigt wurde, gefunden werden.

VIERTER ABSCHNITT.

Krumme Flächen.

Kapitel XII.

Perspektivische Darstellung krummer Flächen und Tangirungsebenen an dieselben.

§. 116.

Allgemeine Bemerkungen.

Insofern eine Fläche nichts anders als der geometrische Ort aller Lagen einer nach einem bestimmten Gesetze bewegten Linie, der Erzeugenden ist, wird man im Allgemeinen auch von der Gestalt der Fläche eine richtige Vorstellung erhalten, wenn man die Perspektiven der Erzeugenden in verschiedenen Lagen darstellt. Diese Darstellungsweise einer Fläche ist in vielen Fällen auch die einzig mögliche, wie es aus den weiteren Betrachtungen klar werden wird.

Die meisten Flächen haben eine nach einer oder nach mehreren Seiten hin begränzte Ausdehnung. Bei der perspektivischen Darstellung einer solchen Fläche wird es zweckmässig sein, die G r ä n z c u r v e, d. i. jene Curve, ausserhalb welcher sich kein Punkt der Fläche mehr vorfindet, und welche man den s i c h t b a r e n oder p e r s p e k t i v i s c h e n U m r i s s oder die Contour der Fläche nennt, perspektivisch zu bestimmen.

Wie aus der orthogonalen Projektionsmethode bekannt und wie gleich anfangs gezeigt wurde, ist der Umriss nichts anderes als die Berührungscurve des aus dem Auge an die Fläche gelegten tangirenden Kegels, und daher die Contour die Schnittlinie dieses Kegels mit der Bildebene.

In einzelnen Fällen wird die Fläche durch die Perspektive ihres sichtbaren Umrisses vollkommen bestimmt erscheinen, wie dies z. B. bei der Kugelfläche der Fall ist, und es wird als

Lösung der Aufgabe: „eine gegebene Fläche perspektivisch darzustellen“ oft genügen, blos den sichtbaren Umriss derselben anzugeben.

Aus dem Gesagten folgt zwar schon die Construktion des Umrisses im Bilde, doch kann dieser auch erhalten werden, wenn man mehrere auf einander folgende Lagen der Erzeugenden in angemessener Entfernung perspektivisch verzeichnet und untersucht, ob für dieselben eine einhüllende Curve zu ziehen möglich sei; ergibt sich eine solche, so ist diese die Contour der Fläche.

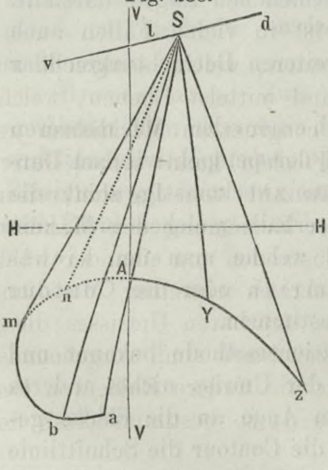
§. 117.

Darstellung der Kegel- und Cylinderflächen.

Ist das Bild eines gegebenen Kegels darzustellen, so kann dies, je nach der Erzeugungsweise desselben, auf verschiedene Weise geschehen. Die einfachste Darstellungsweise des Kegels ist jene, wo eine durch die Spitze gehende Gerade als Erzeugende, und eine in seiner Oberfläche gelegene Curve als Leitlinie angenommen wird.

Auch das perspektivische Bild dieser Fläche wird in gleicher Weise am einfachsten erhalten. Ist nämlich *abc....z* (Fig. 238) die Perspektive der Leitlinie und der durch die Gerade l_a^v bestimmte Punkt *S* die Spitze der Kegelfläche, so sind *Sa*, *Sb*...*Sz* die Perspektiven einzelner Lagen der Erzeugenden, während die aus *S* an die Leitlinie gezogene Tangente *Sm* den sichtbaren Umriss der Fläche gibt; denn denkt man sich an den Körper im Raume vom Auge aus die tangirende Kegelfläche gelegt, so übergeht diese im vorliegenden Falle in eine oder mehrere Berührungsebenen, welche sich sämmtlich in einer das Auge und die Spitze des Kegels verbindenden Geraden schneiden, wesshalb die Schnitte dieser Ebenen mit der Bildfläche, d. s. eine oder mehrere in der Perspektive der Spitze sich vereinigende Geraden, den sichtbaren Umriss der Fläche bilden müssen. Weil ferner diese tangirenden Ebenen alle auf der Oberfläche des Kegels gezogenen Curven

Fig. 238.



berühren, so folgt, dass die obgenannten Tracen dieser Ebenen auch das Bild jeder in der Oberfläche liegenden Curve, mithin die Perspektive der Leitlinie selbst berühren müssen.

Betrachtet man die Curve $abc.....z$ als Leitlinie einer Cylinderfläche, deren parallele Erzeugenden ihren Verschwindungspunkt in S haben, so kann Fig. 238 auch das Bild einer Cylinderfläche vorstellen. Hieraus erhellt, dass insbesondere bei der perspektivischen Projektion die Betrachtung und Darstellung einer Cylinderfläche als Kegelfläche mit unendlich weit entfernter Spitze den grossen Vortheil bietet, dass alle Construktionen bei den genannten Flächen auf ganz gleiche Weise durchgeführt werden können. Auf dasselbe Verhalten wurde auch schon bei Pyramiden und Prismen hingewiesen.

Bemerkung. Lassen sich gerade Linien als Erzeugende einer krummen Fläche auffinden, so sind dieselben am zweckmässigsten für die perspektivische Darstellung der Fläche zu benützen. Eine andere Gattung dieser Flächen, welche man die regelrechten nennt, bilden die windschiefen Flächen, deren jedoch erst am Schlusse dieses Abschnittes Erwähnung geschehen soll.

§. 118.

Umdrehungsflächen.

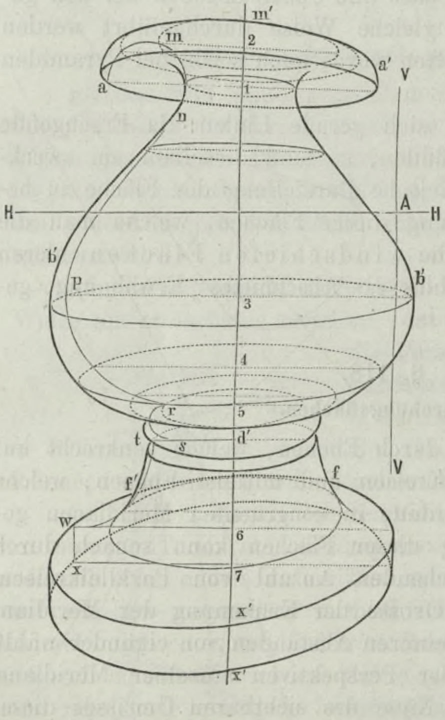
Diese Flächen werden durch Ebenen, welche senkrecht auf der Drehungsaxe sind, in Kreisen und mittelst Ebenen, welche durch die Axe geführt werden, in congruenten Meridianen geschnitten. Die Darstellung dieser Flächen kann sonach durch Verzeichnung einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen, welche man, je nach der Grösse der Krümmung der Meridiancurve, in grösseren oder kleineren Abständen von einander wählt, oder durch Bestimmung der Perspektiven einzelner Meridiane, welche insbesondere in der Nähe des sichtbaren Umrisses dieser Fläche näher aneinander gelegen anzunehmen sind, vorgenommen werden. Wird nun an die eine oder die andere Reihe von Perspektiven die Umhüllungscurve gezogen, so bestimmt diese den sichtbaren Umriss der Fläche.

In den meisten Fällen hat die Drehungsaxe eine vertikale oder wenigstens eine zur Bildfläche parallele Lage, daher die Parallelkreise in horizontalen, resp. in zur Bildfläche senkrechten Ebenen liegen. Wählt man in diesen Fällen Parallelkreise zur

Darstellung der Fläche, so ist es am zweckmässigsten, vorerst die Perspektive des zur Bildfläche parallelen Meridians, welchen wir den **Hauptmeridian** nennen wollen, zu bestimmen. Die auf die Perspektive der Drehungsaxe senkrechten Sehnen der Hauptmeridianperspektive werden sodann als Perspektiven der zur Bildfläche parallelen Durchmesser der betreffenden Parallelkreise bei Verzeichnung ihrer Bilder zu benützen sein.

Ist also *amprswx* (Fig. 239) die Perspektive des Hauptmeridians, so geben die über *a1*, *m2*, *p3*.... als Radien verzeichneten Kreisperspektiven, welche von der Curve *a'b'd'f'*..... berührt werden, das perspektivische Bild der Umdrehungsfläche.

Fig. 239.



Diese Art der Construktion des Bildes ist häufig zu mühsam, als dass man sich derselben durchgehends bedienen würde; wir werden daher in später folgenden Paragraphen andere Methoden kennen lernen, bei deren Anwendung jedoch die Kenntniss der Construktion von Berührungsebenen an Kegel- und Cylinderflächen vorausgesetzt wird.

Was hier über Umdrehungsflächen gesagt wurde, gilt auch in ähnlicher Weise für die fünf Flächen der zweiten Ordnung.

Tangirungsebenen an Kegel- und Cylinderflächen.

Dasselbe Constructionsverfahren, welches in der orthogonalen Projektionsmethode bei der Lösung der hierher gehörigen Aufgaben Anwendung findet, wird auch hier zum Ziele führen.

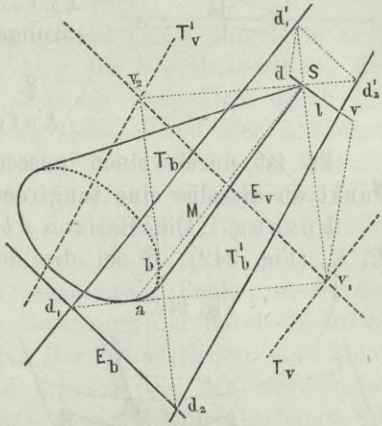
§. 119.

Aufgabe.

Es ist durch einen in der Kegelfläche gelegenen Punkt eine tangirende Ebene an diese Fläche zu legen.

Lösung. Ist $E_b E_v$ (Fig. 240) die Basisebene, S die Kegelspitze, welche durch die Gerade l_a^v bestimmt ist, und M die Perspektive eines in der Kegeloberfläche gelegenen Punktes, so entsprechen, bei der angenommenen Leitlinie, dieser Perspektive M zwei Punkte im Raume, welche in einer und derselben durch das Auge gehenden Geraden (Sehstrahl) liegen. Die diesen Punkten zugehörigen Erzeugenden Sa und Sb schneiden die Basis in den Punkten a und b. Zieht man in diesen Punkten an die Leitlinie die Tangenten $d_1 a v_1$ und $d_2 b v_2$, so hat man blos durch diese und die betreffenden Erzeugenden die Ebenen $T_b T_v$ und $T'_b T'_v$ zu legen, um die verlangten Tangirungsebenen zu erhalten.

Fig. 240.



Sucht man die Schnittlinie der beiden Tangirungsebenen, so muss dieselbe durch den Scheitel S des Kegels gehen.

Bemerkung. Es ist zweckmässig, da die Tangenten mit möglichster Genauigkeit an die Leitlinie zu ziehen sind, dieselben unmittelbar mit der Curve ins Bild zu übertragen, weil die Tangenten an die Curve selbst leichter genau gezogen werden können, als es im Bilde der Fall ist. Insbesondere lässt sich dies einfach bei dem Kreise, der Ellipse und überhaupt bei jeder nach einem geometrischen Gesetze geformten Curve durchführen.

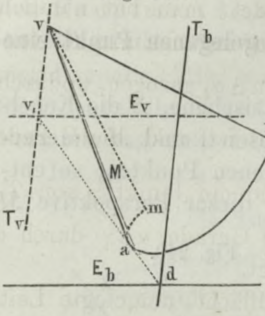
§. 120.

Aufgabe.

Es ist an eine Cylinderfläche, durch einen Punkt derselben, eine tangirende Ebene zu legen.

Lösung. Liegt die Leitlinie $m\,a\,n$ (Fig. 241) in der Ebene $E_b\,E_v$, ist v der Verschwindungspunkt der parallelen Erzeugenden und M der gegebene Punkt der Oberfläche, so ist $v\,M\,a$ die demselben zugehörige, im sichtbaren Theil der Fläche gelegene Erzeugende, welche die Leitlinie in a trifft. Zieht man durch a an die Leitlinie die Tangente $d\,a\,v_1$ und legt durch diese und die Erzeugende $v\,a$ eine Ebene $T_b\,T_v$, so ist letztere die gesuchte Tangirungsebene.

Fig. 241.



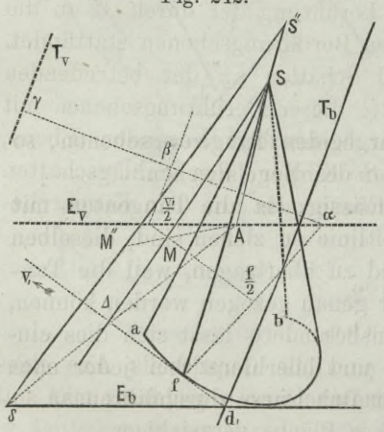
§. 121.

Aufgabe.

Es ist durch einen ausserhalb der Kegelfläche gelegenen Punkt an dieselbe eine tangirende Ebene zu führen.

Lösung. Die Basis $a\,f\,b$ liege in einer Horizontalebene $E_b\,E_v$ (Fig. 242), S sei die durch ihre Bildflächprojektion S'' bestimmte Spitze des Kegels und M der gegebene, ebenfalls durch M'' bestimmte Punkt. Verbindet man die Spitze S mit M durch die Gerade $M\,S$ und sucht deren Durchschnitt Δ mit der Basisebene (zu welchem Behufe durch $M\,S$ eine bildflächprojecirende Ebene gelegt wurde, deren Bildflächtrace $M''\,S''$ die Trace E_b in δ trifft, wesshalb $\delta\,A$ die Schnittlinie mit der Basisebene und Δ der Durchschnittspunkt ist), so wird die durch Δ an die Leitlinie geführte Tangente $v_1\,\Delta\,d_1$ dieselbe in f, daher die durch M gelegte Berührungsebene die Kegelfläche in der Erzeugenden $f\,S$ berühren.

Fig. 242.



Wäre auch die Bildflächtrace T_b und die Verschwindungslinie T_v der Berührungsebene zu suchen, so sind diese vermittelst der in der Berührungsebene gelegenen Geraden $S\,f$, $S\,\Delta$ und $v_1\,d_1$ zu bestimmen.

Da jedoch v_1 nicht innerhalb der Zeichnungsfläche fällt, so wurde zur Ermittlung eines Punktes γ der Verschwindungslinie T_v nachfolgende Hilfsconstruktion angewendet: man hat nämlich f mit irgend einem Punkte α der Verschwindungslinie E_v verbunden, $f\alpha$ in $\frac{f}{2}$ halbirt und $\frac{f}{2}\frac{v_1}{2}$ parallel zu $\Delta\, d_1$ gezogen, wodurch $\frac{v_1}{2}$ erhalten wurde. Wird nun durch diesen Punkt die Gerade $\frac{v_1}{2}\beta$ parallel zu T_b gezogen, so kann irgend ein Punkt γ von T_v erhalten werden, wenn man eine beliebige Gerade $\alpha\beta\gamma$ durch α zieht und $\alpha\gamma = 2\beta\alpha$ von α nach γ aufträgt.

Bemerkung 1. Ist die in die Bildfläche umgelegte Leitlinie gegeben, so wäre es auch hier am zweckmässigsten, den Punkt Δ gleichfalls umzulegen und die Tangenten durch den umgelegten Punkt an die erstere zu ziehen, weil sich auf diese Weise der Berührungspunkt f genauer angeben lässt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Cylinderflächen, so wie auch für beide Flächenarten in dem Falle, wo die berührenden Ebenen parallel zu einer gegebenen Richtung zu führen sind.

Bemerkung 2. Ist M ein leuchtender Punkt, so werden die Erzeugenden, in welchen die Berührung der durch M an die Kegel- oder Cylinderfläche gelegten Berührungsebenen stattfindet, die Gränzen zwischen Licht und Schatten an der betreffenden Fläche geben, so wie die Schnitte dieser Berührungsebenen mit irgend einer dem Punkte M entgegengesetzt liegenden Ebene, oder einem dortselbst befindlichen Körper, den Schlagschatten der Fläche auf der betreffenden Ebene oder auf dem Körper bestimmen.

§. 122.

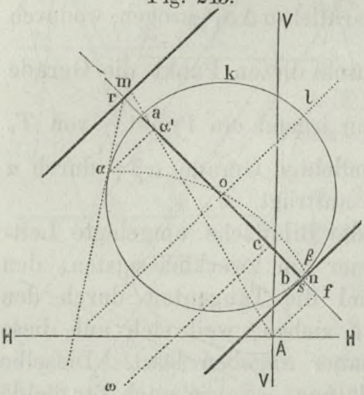
Aufgabe.

Es ist eine zur Bildfläche parallele Gerade als Axe eines Rotationscylinders von bekanntem Durchmesser gegeben; man soll den perspektivischen Umriss dieser Fläche verzeichnen.

Lösung. Man nehme die Axe l (Fig. 243) als in der Bildfläche liegend an und beschreibe über der Perspektive ab des zur Bildfläche parallelen Cylinderdurchmessers den Kreis k.

Wie aus dem Begriffe des perspektivischen Umrisses hervorgeht, hat man an den Cylinder durch das Auge die beiden Berührungsebenen zu legen und deren Tracen auf der Bildfläche zu bestimmen. Zu diesem Behufe führe man durch das Auge eine zu den Erzeugenden parallele Gerade, also die Bildflächprojektion Af derselben durch A parallel zu l bis zum Durchschnitte mit der Ebene des Kreises k und lege letztere um ab in die Bildfläche. Der besagte Durchschnittspunkt gelangt hiebei in die Verlängerung der Geraden Af, in eine der Augdistanz gleiche Entfernung von f; seine halbe Entfernung von dem Kreismittelpunkte o wird mithin erhalten, wenn man of in c halbirt, $c\omega$ senkrecht auf ab errichtet und der halben Augdistanz gleich macht.

Fig. 243.



Der aus ω mit dem Radius ωo beschriebene Kreisbogen $\alpha o \beta$ trifft den Kreis k in α und β, welchen Punkten die den Umriss bildenden Erzeugenden entsprechen.

Die durch α und β an k gezogenen Tangenten $r\alpha$, βs werden durch den vorerwähnten umgelegten Durchschnittspunkt gehen und, indem sie in den gewünschten Tangirungsebenen und in der Kreisebene k liegen, im Durchschnitte r und s mit der verlängerten Geraden ab zwei Punkte liefern, durch welche die fraglichen Contouren rm und sn parallel zu l gehen.

Dass die Perspektiven m und n der Punkte α und β im Raume leicht erhalten werden, wenn man $\alpha\alpha'$ senkrecht auf ab zieht und α' mit A verbindet, und ebenso mit β verfährt, ist klar.

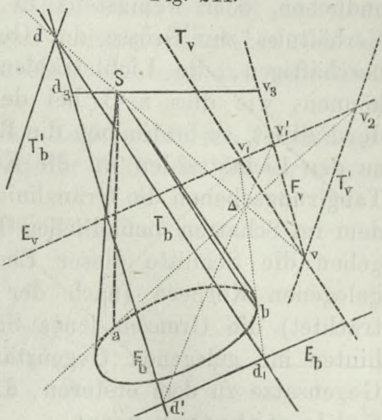
§. 123.

Aufgabe.

Es ist parallel zu einer gegebenen Geraden an die Kegelfläche eine tangirende Ebene zu legen.

Lösung. Es sei $E_b E_v$ die Ebene der Leitlinie, S (Fig. 244) der auf der Geraden $d_3 v_3$ gelegene Kegelmittelpunkt und v der Verschwindungspunkt der gegebenen Geraden. Wird nun S mit v verbunden, der Durchschnitt Δ dieser Geraden mit der Ebene $E_b E_v$ vermittelst der Hilfsebene $F_b F_v$ gesucht und werden von Δ aus die Tangenten Δa und Δb an die Leitlinie gezogen, so wird letztere in a und b berührt, daher sich in $a\,S$ und $b\,S$ die Berührungserzeugenden ergeben. Um die Bestimmungsstücke der Berührungsebenen zu finden, hat man blos durch die drei sich schneidenden Geraden $v\,S\,\Delta$, $v_1\,\Delta\,b\,d_1$ und $b\,S$, so wie durch $v\,\Delta\,d$, $v_2\,a$ und $a\,S$ Ebenen zu legen, deren Verschwindungslinien T_v und T'_v durch Verbinden der beiden Punkte v_2 und v_1 mit v und deren Bildflächtracen $T_b\,T'_b$ durch den Durchstosspunkt d der Geraden $v\,S$ mit der Bildfläche, welcher in der Bildflächtrace F_b liegt, parallel zu T_v und T'_v zu ziehen sind.

Fig. 244.



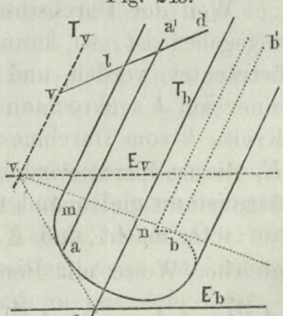
§. 124.

Aufgabe.

Es sind parallel zu einer gegebenen Geraden an eine Cylinderfläche Berührungsebenen zu legen.

Lösung. Ist die Leitlinie $m\,a\,b\,n$ in der Ebene $E_b\,E_v$ (Fig. 245) gelegen und sind die Erzeugenden der Cylinderfläche, an welche parallel zu der Geraden l_a^v die Tangirungsebenen geführt werden sollen, parallel zur Bildfläche, so lege man durch l_a^v eine Ebene, deren Verschwindungslinie T_v ist, parallel zu den Erzeugenden, suche den Verschwindungspunkt v der Trace dieser Ebene auf der Basisebene und führe durch denselben die möglichen Tangenten an die Leitlinie. Auf diese Weise erhält man die Berührungspunkte a und b, so wie in $b\,b'$ und $a\,a'$ diejenigen Erzeugenden, in welchen die Berührung erfolgt. Durch die in E_b gelegenen Durchstosspunkte der Geraden $v\,a$ und $v\,b$ sind die Bildflächtracen T_b der fraglichen Berührungsebenen parallel zu den Er-

Fig. 245.



zeugenden zu ziehen, während T_v die gemeinschaftliche Verschwindungslinie dieser Ebenen ist.

Bemerkung. Befindet sich ein leuchtender Körper in unendlicher, oder wenigstens in so grosser Entfernung, dass im Verhältniss zur Grösse der Gegenstände, mit welchen wir uns beschäftigen, die Lichtstrahlen als parallel angesehen werden können, wie dies z. B. bei der Sonnen- oder Mondbeleuchtung der Fall ist, so bestimmen die Berührungserzeugenden der parallel zu den Lichtstrahlen an die Kegel- oder Cylinderfläche gelegten Tangirungsebenen die Gränzlinien zwischen dem beleuchteten und dem im Schatten befindlichen Theil dieser Flächen. Ebenso ergeben die Schnitte dieser Ebenen mit den hinter der Fläche gelegenen Körpern (nach der Richtung der Lichtstrahlen betrachtet) die Grenzen jenes Schattens, den die Fläche auf die hinter ihr gelegenen Gegenstände wirft und welchen man im Gegensatze zu dem ersteren, d. i. dem Selbstschatten, den Schlagschatten nennt.

§. 125.

Aufgabe.

Es ist die Perspektive der Axe, und jene eines zur Bildfläche parallelen Durchmessers der Leitlinie eines Rotationskegels gegeben, man soll die Contour dieser Fläche verzeichnen.

Lösung. Ist l (Fig. 246) die Perspektive und v der Verschwindungspunkt der Axe, so ist Av die Verschwindungslinie der durch l gelegten bildflächprojecirenden Ebene, auf welcher der gegebene Durchmesser ab senkrecht stehen muss.

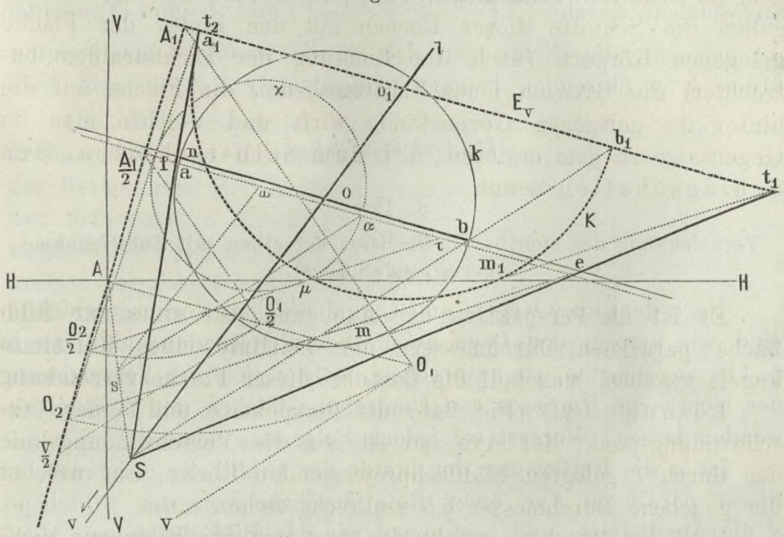
Weil der Durchstosspunkt der Axe mit der Bildebene nicht angegeben ist, so kann ab auch als in der Bildfläche liegend betrachtet werden und es wird sodann ab die Bildflächtrace einer auf l senkrechten Ebene sein, welche den Kegel in einem Kreise k vom Durchmeser ab schneidet. Die Verschwindungslinie E_v dieser Ebene wird bekanntlich erhalten, wenn man $A\,O_1$ der Augdistanz gleich und senkrecht auf vA, ferner $A_1\,O_1$ senkrecht auf $v\,O_1$ macht und E_v durch A_1 parallel zu ab zieht, oder in gleicher Weise mit Benützung der halben Distanzen $A\frac{v}{2}$, $A\frac{O_1}{2}$, $A\frac{A_1}{2}$; $A\,A_1 = 2 \,.\, A\frac{A_1}{2}$.

Man denke sich die Kegelfläche so weit verlängert, bis sie die Parallelebene E_v trifft. Zu diesem Behufe verbinde man die

Kegelspitze S mit a und b und ziehe diese Geraden bis zum Durchschnitte a_1 und b_1 mit E_v, wodurch in $a_1 b_1$ die Perspektive des zur Bildfläche parallelen Durchmessers des Schnittkreises der Ebene E_v mit dem Kegel erhalten wird. Dreht man nun E_v um $a_1 b_1$ in eine zur Bildfläche parallele Lage, so ist der Schnittkreis K über $a_1 b_1$ zu beschreiben, während das Auge nach O_2 fällt.

Die beiden aus dem Auge an den Kegel geführten Tangirungsebenen, welche im Durchschnitte mit der Bildfläche die verlangten

Fig. 246.



Contouren geben, werden von der Ebene E_v in zwei Geraden $O_2 m_1 t_1$, $O_2 t_2$ geschnitten, welche den Kreis K berühren, durch O_2 gehen und die Trace E_v in den Punkten t_1 und t_2 der Contourgeraden St_1 und St_2 treffen.

Da die Tracen der durch das Auge gelegten Berührungsebenen auf der Ebene E_v parallel sind zu den Tracen besagter Ebenen auf jeder Parallelkreisebene des Kegels, so können beliebig viele Punkte der Contour erhalten werden, wenn man irgend einen Parallelkreis ab in eine zur Bildfläche parallele Lage k dreht, und an denselben parallel zu $O_2 t_1$, $O_2 t_2$ die beiden Tangenten me, nf bis zum Durchschnitte e und f mit dessen Trace ab zieht. Hieraus ist ersichtlich, dass ein solches Verfahren dann in Anwendung zu bringen wäre, wenn die Kegelspitze S ausser die Zeichnungsfläche fiele.

Kann E_v nicht benützt werden, so bestimme man, wie früher angegeben, den Punkt $\frac{A_1}{2}$ (oder in ähnlicher Weise $\frac{A_1}{n}$), verbinde S mit A, halbire AS in s, ziehe $\frac{A_1}{2}\omega$ senkrecht auf $A\frac{v}{2}$, $s\omega$ parallel zu l und $s\alpha$ parallel zu Sb. Hiedurch wird auf $\frac{A_1}{2}\omega$ ein Stück $\omega\alpha = \frac{1}{2} \cdot o_1 b_1$ abgeschnitten, welches den Halbmesser eines aus dem Mittelpunkt ω zu beschreibenden Kreises $\varkappa$ liefert, an welchen durch $\frac{O_2}{2}$ $\left(\frac{O_2}{2}\frac{A_1}{2} = \frac{A_1}{2}\frac{O_1}{2}\right)$ die beiden Tangenten $\mu\tau$ gezogen, die Richtungen der an die verschiedenen Parallelkreise k zu führenden Tangenten angeben.*)

Umdrehungsflächen.

§. 126.

Verzeichnung des sichtbaren Umrisses derselben mit Zuhilfenahme berührender Kegel.

Nach dem über Kegel- und Cylinderflächen Vorausgeschickten sind wir nun in der Lage auch andere Methoden, als jene in §. 118 angeführten, zu besprechen, welche sich zur Verzeichnung des sichtbaren Umrisses von Umdrehungsflächen mit Vortheil anwenden lassen. Vorerst sei jedoch Folgendes bemerkt:

Ist a die Entfernung der hinter der Bildfläche gelegenen, zu dieser parallelen Axe einer Rotationsfläche von der Bildebene, d die Augdistanz, und bestimmen wir das Bild desjenigen Meridians, dessen Ebene parallel zur Bildfläche ist, so wird sich dasselbe dem Hauptmeridiane ähnlich, jedoch in einem verjüngten Massstabe darstellen. Die Verjüngung wird durch die Grösse $\frac{d}{d+a}$ angegeben. Bestimmen wir also die Perspektive der Drehungsaxe und verzeichnen den Hauptmeridian in der Bildebene im besagten Massstabe, denken uns ferner die Perspektive des Meridians um die Perspektive der Axe gedreht, so entsteht eine der gegebenen ähnliche Umdrehungsfläche, welche zur Hälfte

---

*) Andere Constructionen finden sich im LII. Bande (Jahrgang 1865) der Sitzungsberichte der mathem. naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, vom Prof. R. Niemtschik veröffentlicht, vor.

vor und hinter der Bildfläche liegt, und deren sämmtliche Dimensionen im Verhältnisse zu jenen der wirklichen Fläche im Massstabe $\frac{d}{d+a}$ verjüngt erscheinen. Hieraus folgt jedoch, dass die Bilder jener idealen Fläche und der gegebenen Umdrehungsfläche dieselben sein und übereinanderfallen müssen, und dass der aus dem Auge an die letztere Rotationsfläche gelegte berührende Kegel auch die erstere berühren wird.

Es ist daher ersichtlich, dass das Bild jeder Umdrehungsfläche verzeichnet werden kann, wenn eine andere der gegebenen Rotationsfläche ähnliche, im Verhältniss $\frac{d}{d+a}$ verjüngte Fläche mit ihrer Umdrehungsaxe in der Bildfläche angenommen und das Bild dieser letzteren gesucht wird. *)

Um die Perspektive des sichtbaren Umrisses einer Umdrehungsfläche zu bestimmen, kann in ähnlicher Weise wie bei der Bestimmung der Berührungscurven an Umdrehungsflächen in der orthogonalen Projektion vorgegangen werden. Man wird nämlich die Umdrehungsfläche in auf einander folgenden Parallelkreisen von berührenden senkrechten Kegeln, oder in einzelnen Meridianen von Cylindern umhüllt denken, an diese durch das Auge die berührenden Ebenen legen und die Bildflächtracen derselben aufsuchen. Letztere werden sodann Tangenten an den sichtbaren Umriss der Rotationsfläche in den betreffenden Punkten der Parallelkreise oder Meridiane sein.

Ist also amx (Fig. 247) die Perspektive der halben Hauptmeridiancurve **), YZ jene der Umdrehungsaxe, ferner mon der Durchmesser eines Parallelkreises, von welchem blos die Perspektiven jener Punkte gesucht werden sollen, die im sichtbaren Umrisse der Fläche liegen, so ziehe man in m die Tangente mS an den Hauptmeridian und denke sich beide um die Axe YZ rotirt. Hierbei wird die Meridiancurve die Umdrehungsfläche,

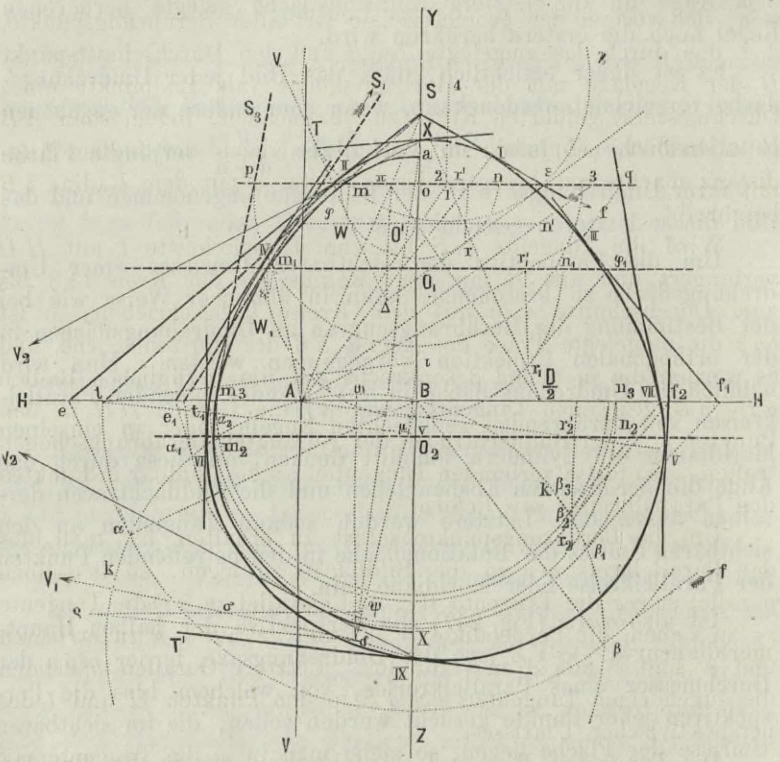
*) Von derselben Idee wurde auch bereits bei den regelmässigen Körpern sowohl, als auch beim Kreise Gebrauch gemacht.

**) Wenn in der Folge eine in der Bildfläche gelegene Curve ohne nähere Bezeichnung „Meridiancurve“ genannt wird, so ist darunter stets die Perspektive des Hauptmeridians, oder, nach dem oben Angeführten, der wirkliche Meridian einer ähnlichen mit der Axe in der Bildebene gelegenen Umdrehungsfläche zu verstehen, auf welche Hilfsfläche die weiter folgenden Construktionen basirt werden sollen.

und die Tangente einen senkrechten Kegel beschreiben, welcher die Rotationsfläche in dem angenommenen Parallelkreise berührt.

Werden nun an den Kegel durch das Auge die tangirenden Ebenen gelegt, so berühren sie denselben in Erzeugenden, die Umdrehungsfläche sonach im Durchschnitte dieser Erzeugenden

Fig. 247.



mit dem Parallelkreise, welche Punkte dem sichtbaren Umrisse angehören.

Die in diesen Punkten an den Parallelkreis geführten Tangenten, d. s. die Tracen der Berührungsebenen auf der Parallelkreisebene, schneiden die Trace mn in Punkten, welche den Bildflächtracen der Berührungsebenen angehören, also mit der zugehörigen Kegelspitze verbunden, die Contouren des Kegels und somit auch die Tangenten der Contour der Rotationsfläche in den im angenommenen Parallelkreise liegenden Punkten des Umrisses bilden.

Behufs der Durchführung der Construktion werden wir jeden Kegel bis zum Durchschnitte mit der Horizontsebene verlängern, diese Schnittcurve sammt dem Auge in die Bildfläche drehen und daselbst die Tangenten ziehen. Da die Tangenten sämmtlich durch das umgelegte Auge zu führen sind, dieses jedoch zumeist ausser die Zeichnungsfläche fällt, so wird es am zweckmässigsten sein, sich vorerst den geometrischen Ort aller Berührungspunkte, d. i. den durch das umgelegte Auge und den Durchschnittspunkt B der Kegelaxe mit der Horizontsebene (als Endpunkte eines Durchmessers) geführten Kreis zu verzeichnen, indem man AB in ω halbirt, $\omega\delta$ (senkrecht auf $H\dot{H}$) gleich der halben Augdistanz macht und besagten Kreis k aus δ mit dem Radius δB beschreibt.

Wird die Tangente mS bis zum Durchschnitte t mit HH verlängert und aus B mit dem Radius Bt der Kreis $t\alpha\beta$ bis zum Durchschnitte α, β mit dem Kreise k beschrieben, so ist $t\alpha\beta$ die umgelegte Trace des Kegels auf der Horizontsebene, und es werden die in α und β senkrecht auf die bezüglichen Radien αB, βB gezogenen Tangenten αe, βf die Gerade HH in den Punkten e, f der Bildflächtracen der verlangten Berührungsebenen treffen, also mit S verbunden Tangenten an die Contour in Punkten des Parallelkreises mn liefern.

Um die Berührungspunkte selbst zu erhalten, hat man blos den Parallelkreis mn in die Bildfläche zu legen, an denselben parallel zu αe die Tangente $W\varphi$ und parallel zu βf die Tangente $r\varepsilon$ zu ziehen, die Perpendikel WW' und rr' auf mn zu errichten und ω' und r' mit A zu verbinden. Letztere Geraden schneiden die zugehörigen Tangenten eS, fS in den Punkten II und I des perspektivischen Umrisses.

Die Tangenten $W\varphi$ und $r\varepsilon$ schneiden mn in den Punkten φ und ε, welche gleichfalls den Tangenten eS resp. fS angehören und insbesondere dann zu benützen sind, wenn die Punkte e oder f (wie dies auch hier bei f der Fall ist) ausser die Zeichnungsfläche fallen.

Ergibt sich die Kegelspitze S_1 des die Umdrehungsfläche im Parallelkreise $m_1 n_1$ berührenden Kegels nicht auf der Zeichnungsfläche, so werden die Punkte ε_1, φ_1, e_1, f_1, analog den Punkten $\varepsilon\varphi e f$ beim Kegel Smn, in gleicher Weise zu bestimmen und entsprechend zu verbinden sein. In diesem Parallelkreise liegen die Punkte III und IV der Contour.

Schneidet die Tangente mS die Gerade HH in sehr grosser Entfernung vom Punkte B, so dass α und β nicht benützt werden können, so dürfte es gerathen erscheinen, die Contourpunkte des Kegels direct, ohne Benützung der Horizontsebene aufzusuchen, was auf mehrfache Weise durchgeführt werden kann.

Geht man von denselben Gesichtspunkten aus, welche in §. 121 erörtert wurden, so hat man S mit dem Auge zu verbinden, und den Durchschnitt dieser Geraden mit der Basisebene mn des Kegels zu bestimmen. Diese Gerade ist jedoch ein Sehstrahl, daher ist S zugleich die Perspektive des Durchschnittspunktes, welcher nur noch sammt dem Parallelkreise um mn in die Bildfläche zu drehen sein wird, woselbst er nach Δ gelangt (S mit A und $\frac{D}{2}$ verbunden, $\pi\Delta$ senkrecht auf mn und gleich $2 . \pi 1$). Die aus Δ an den Kreis mn geführten Tangenten Δr, ΔW treffen mn in ε und φ und fallen mit den vorher gezogenen Geraden $W\varphi$, $r\varepsilon$ zusammen.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man den Kegel Smn durch eine zu mn parallele Ebene $o'n'$ schneidet, den so erhaltenen Schnittkreis als Basis eines zweiten Kegels, dessen Spitze das Auge ist, betrachtet und an beide Kegel die gemeinschaftlichen Berührungsebenen legt. Sucht man die Trace des zweiten Kegels auf der Ebene mn, indem man $o'n'$ als Perspektive des zur Bildfläche parallelen Halbmessers dieser Trace ansieht, so gelangt deren Mittelpunkt nach der Umlegung um nm nach 4, während 23 die wahre Länge des Halbmessers ist. Schliesslich sind an die Kreise mn und $\varkappa$ die gemeinschaftlichen Tangenten $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\varphi$ zu ziehen und die Durchschnittspunkte ε und φ mit S zu verbinden.

Das eben angegebene Verfahren würde insbesondere dann zu empfehlen sein, wenn auch die Kegelspitze ausser die Zeichnungsfläche fiele. In diesem Falle ist jedoch zumeist die Horizontstrace der Kegelfläche benützbar.

Bevor man die Construktion des perspektivischen Umrisses mit beliebig gewählten Parallelkreisen beginnt, wird es zweckmässig sein, gewisse Punkte desselben gleich in Vorhinein zu bestimmen, weil deren Auffindung eine vereinfachte Construktion gestattet, oder weil dieselben eine besondere Lage haben, welche beim Ziehen des Umrisses wohl zu berücksichtigen ist. Dies sind insbesondere jene Punkte, in welchen die Contour den Hauptmeridian berührt, ferner die in der Horizontslinie oder in der Rotationsaxe gelegenen Punkte, und endlich Punkte, welchen vertikale Tangenten zukommen.

Was jene Punkte anbelangt, welche im Hauptmeridiane liegen, so muss für dieselben die zugehörige Tangirungsebene bildflächprojecirend sein und durch das Auge gehen, weil nur in diesem Falle ein Punkt mit seiner Perspektive zusammenfallen kann. Man wird sie daher erhalten, wenn man aus dem Augpunkte A an die Meridiancurve die möglichen Tangenten zieht, welche dann zugleich Tangenten der Contour in denselben Punkten sind.

Die beiden in der Horizontsebene liegenden Punkte VII und $VIII$ ergeben sich durch Umlegen des Parallelkreises $m_3 B n_3$ im Durchschnitte der Tangenten $\beta_3\, VII$, $\alpha_3\, VIII$ mit HH. Die Tangenten in diesen Punkten müssen diesfalls mit Zuhilfenahme einer zweiten Horizontalebene mn gesucht werden, da die Kegelspitze S_3 ausser die Zeichnungsfläche fällt. mn schneidet den Kegel $S_3 m_3 n_3$ in einem Kreise vom Radius po, an welchen parallel zu $\beta_3\, VII$ und $\alpha_3\, VIII$ die Tangenten gezogen, im Durchschnitte q mit mn weitere Punkte der verlangten Contourtangenten liefern.

Die Punkte des Umrisses, deren Perspektiven IX und X in die Axe YZ fallen, werden erhalten, wenn man durch die Axe und den Gesichtspunkt eine Ebene legt, diese um YZ in die Bildfläche dreht und aus dem umgelegten Auge an den Hauptmeridian die möglichen Tangenten $v_2\, IX$, $v_2\, X$ zieht. Dass $v_2 B = 2 \,.\, B\delta$ wird, ist bekannt.

Die Tangenten in diesen Punkten der Curve stehen offenbar senkrecht auf der benannten Meridianebene. Ihr Verschwindungspunkt v_3 wird erhalten, wenn man $\delta \sigma v_1$ senkrecht auf $B\delta$ errichtet und die Entfernung des Durchschnittspunktes v_1 dieser Geraden mit HH von B aus zwei Mal nach links auf HH aufträgt. Wird $\psi \sigma \rho$ parallel zu HH gezogen, $\sigma\rho = \sigma\psi$ gemacht und ρ mit δ verbunden, so geht $\rho\delta$ auf den Punkt v_3 zu.

Um die in Rede stehenden Tangenten zu erhalten, wähle man in HH einen beliebigen Punkt t, ziehe $t\mu$ parallel zu $\delta\rho$ bis zum Durchschnitte μ mit $B\delta$, $\mu\nu$ parallel zu δIX, $\mu\tau$ parallel zu δX und die Tangenten T' und T parallel zu den Verbindungslinien $t\nu$ resp. $t\tau$.

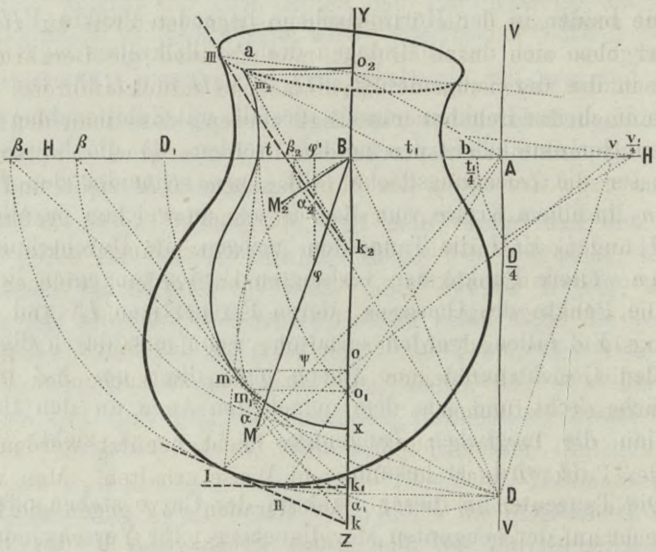
Endlich wird es zumeist Punkte der Meridiancurve geben, welchen zu YZ parallele Tangenten zukommen. Wählt man die diesen Punkten entsprechenden Parallelkreise, wie $m_2\, o_2\, n_2$, und verfährt in gleicher Weise wie bei $m\,n$ oder $m_1 n_1$, so erhält man die Contourpunkte V und VI mit den zu YZ parallelen Tangenten $e_2\, VI$, $f_2\, V$.

§. 127.

Verzeichnung des sichtbaren Umrisses mittelst umhüllender Cylinderflächen.

Ist $a\,m\,x$ (Fig. 248) die Meridiancurve, so denke man sich nach einer beliebigen Richtung durch die Axe YZ eine Meridian-

Fig. 248.



ebene gelegt, z. B. jene, deren Verschwindungslinie die Horizontslinie in v schneidet, und betrachte diesen Meridian als Leitlinie einer Cylinderfläche, welche die Rotationsfläche in demselben berührt, folglich horizontale, auf der Meridianebene senkrechte Erzeugende besitzt.

Wenn man an diese Cylinderfläche aus dem Auge die möglichen Berührungsebenen legt, welche dieselbe in Erzeugenden berühren, so werden sich im Durchschnitte dieser Erzeugenden mit der angenommenen Meridiancurve, je nach der Gestalt derselben, ein oder mehrere Punkte der Berührungscurve und in den Perspektiven der ersteren, Punkte des zu suchenden Umrisses ergeben.

Die hiebei nöthigen Construktionen beziehen wir auf die Horizontsebene, und drehen dieselbe um HH in die Bildfläche, wobei das Auge nach D gelangt und mithin die umgelegte Horizontaltrace BM der angenommenen Meridianebene durch B parallel zu vD zu ziehen ist.

Fällt man aus dem Auge eine Senkrechte auf diese Ebene, also aus D eine Senkrechte $D\alpha$ auf BM, so ist α der Fusspunkt derselben; denkt man sich hierauf das Ganze in die ursprüngliche Lage zurückversetzt und die Meridianebene um die Bildflächtrace YZ in die Bildfläche gedreht, so wird der Punkt α nach β und der gewählte Meridian in den Hauptmeridian fallen. Man hat somit aus β die Tangenten an den letzteren zu ziehen (hier ist blos eine, nämlich βm, möglich) und die Berührungspunkte in die angenommene Meridianebene zurückzuführen. Dies kann einfach dadurch bewerkstelligt werden, dass man den dem Berührungspunkte m entsprechenden Drehungsradius mo, so wie dessen Perspektive vo in der Meridianebene BM zieht und auf vo den Radius mo perspektivisch abschneidet. Das Auftragen dieser Länge kann mittelst des dem Verschwindungspunkte v zugehörigen Theilungspunktes t vorgenommen werden, welcher bekanntlich erhalten wird, wenn man $vt = vD$ macht. Die Verbindungslinie tm wird auf der Geraden ov das Stück vI gleich dem Radius mo abschneiden und in I den zu suchenden Punkt des Umrisses bestimmen.

Kann der Theilungspunkt t nicht leicht benützt werden, so wird der Punkt I auch auf folgende Weise erhalten. Man wird, da der Neigungswinkel MBD_1 der Geraden voI gegen die Bildfläche bekannt ist, auf den einen Schenkel BM das Stück $B\varphi = mo$ auftragen und von φ auf den andern Schenkel eine Senkrechte $\varphi\varphi'$ errichten, welche auf demselben das Stück $B\varphi'$, d. i. die orthogonale Projektion des Halbmessers Io auf der Bildfläche, abschneidet. Diese Länge von o nach ψ aufgetragen und ψ mit A verbunden, trifft die Gerade vo in dem Punkte I.

Soll in dem so gefundenen Punkte I die Tangente an den Umriss gezogen werden, so ist blos die an die Meridiancurve geführte Tangente βm bis zum Durchschnitte k mit der Axe YZ zu verlängern und k mit I zu verbinden.

Einige besondere Punkte ergeben sich auch bei dieser Construktionsweise etwas einfacher. Diese werden erhalten, wenn man als Meridianebene eine auf die Horizontslinie senkrechte

Ebene, oder die Bildfläche selbst, oder die durch das Auge und die Drehungsaxe YZ gehende Ebene wählt, welch' letzterer Annahme übrigens schon bei der vorhergegangenen Auflösungsweise erwähnt wurde.

Im ersten Falle ist die zugehörige Verschwindungslinie die Vertikallinie VV, mithin der Verschwindungspunkt v nach A und der Theilungspunkt t in den Distanzpunkt D_1 zu liegen kommt. Die auf die umgelegte Horizontaltrace BYZ aus D gefällte Senkrechte ist horizontal, und trifft erstere in α_1 *), welcher, in die Bildfläche gedreht nach β_1 fällt. Die von β_1 an den Hauptmeridian geführte Tangente $\beta_1 m_1$ schneidet die Axe in k_1 und es ist $m_1 o_1$ der dem Punkte m_1 zugehörige Radius, welcher auf der Linie $o_1 A$ durch die Theilungslinie $D_1 m_1$ in $o_1 II$ abgeschnitten, den Punkt II des Umrisses gibt. In diesem Punkte ist die Tangente an den Umriss horizontal, weil die Cylindererzeugenden parallel zur Bildfläche sind, die Berührungsebenen daher, so wie deren Bildflächtracen zur Horizontslinie parallel sein müssen. Vermittelst dieses Meridians werden somit die höchsten und tiefsten Punkte des Bildes erhalten.

In dem zweiten der obgenannten Fälle trifft das aus dem Auge auf die Meridianebene gefällte Perpendikel die letztere im Augpunkte, und weil der Meridian selbst in der Bildfläche liegt, folglich keine weitere Drehung nothwendig ist, werden die aus A an den Hauptmeridian gezogenen Tangenten diesen in Punkten des Umrisses berühren.

Endlich wurde in der Meridianebene $M_2 B$ auf gleiche Weise, jedoch mit Benützung einer Hilfsconstruktion und der Vierteldistanz, der Punkt III des Umrisses bestimmt. Es ist nämlich $A\frac{D}{4} = \frac{1}{4} AD$, mithin $A\frac{v_1}{4} = \frac{1}{4} A v_1$, wenn $\frac{D}{4}\frac{v_1}{4}$ parallel zur umgelegten Horizontaltrace $M_2 B$ gezogen und v_1 der in der Horizontslinie gelegene Punkt der Verschwindungslinie der angenommenen Meridianebene ist. Die aus β_2 an den Hauptmeridian geführte Tangente berührt denselben in m_2, welchem Punkte der Radius $m_2 o_2$ zukommt und welcher in die ursprüngliche Lage zurückversetzt, in der Perspektive $o_2 v_1$ liegen muss. Die Richtung $o_2 v_1$ wird erhalten, wenn man in Ab den vierten

*) Um nicht immer die Senkrechten auf die umgelegten Horizontaltracen ziehen zu müssen, kann über BD, als Durchmesser, ein Kreis beschrieben werden, welcher die Fusspunkte sämmtlicher Perpendikel enthält.

Theil von $A o_2$ bestimmt und $b \frac{v_1}{4}$ zieht. Der Punkt III selbst wurde mit Hilfe der Theilungslinie $t_1 m_2 III$ gefunden.

Wendet man dieses Construktionsverfahren zur Bestimmung des Umrisses einer Rotationsfläche an, so wird es zweckmässig sein, gleich anfangs jene besonderen Punkte zu berücksichtigen, deren bereits im vorigen Paragraphen Erwähnung geschah.

Bemerkung. Es sei hier noch erwähnt, dass es mitunter an einzelnen Stellen einer Umdrehungsfläche vortheilhaft erscheinen kann, von der im §. 118 angegebenen Construktionsweise Gebrauch zu machen, oder dass eine vereinte Anwendung beider letzt angegebenen Methoden am einfachsten zum Ziele führt. Es lassen sich in dieser Beziehung nicht leicht allgemeine Regeln aufstellen, doch wird es bei einiger Uebung keinen Schwierigkeiten unterliegen, eine geeignete Wahl zu treffen. Insbesondere ist anzurathen, sich gleich im Vorhinein durch eine genaue Betrachtung der Form und Lage des Hauptmeridians eine annähernd richtige Vorstellung von dem Bilde des Umrisses zu verschaffen.

Nachdem wir nun die allgemeine Darstellungsweise der Umdrehungsflächen zur Genüge behandelt, übergehen wir zur Construktion des Umrisses specieller Flächenarten, die einerseits eine häufigere Anwendung finden, andererseits aber ihrer besonderen Eigenschaften wegen eine Vereinfachung der Construktion gestatten.

§. 128.

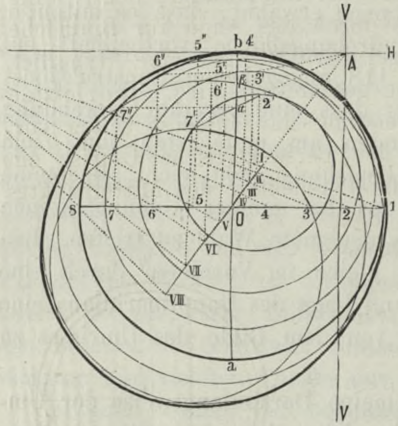
Die Kugel.

a) Die Kugel besitzt die Eigenschaft, von jeder Ebene nach einem Kreise geschnitten zu werden. Diese Eigenthümlichkeit derselben kann dazu benützt werden, ihren perspektivischen Umriss auf eine sehr einfache Weise darzustellen. Denkt man sich nämlich die Kugel durch eine Reihe von Ebenen, welche zur Bildfläche parallel sind, geschnitten, so werden die erhaltenen Schnittlinien sich perspektivisch wieder als Kreise darstellen und zieht man an die sämmtlichen so erhaltenen Perspektiven eine stätige umhüllende Curve, so bildet diese den Umriss der Kugel im Bilde.

Ist demnach O (Fig. 249) die Perspektive des Kugelmittelpunktes, ab jene des vertikalen Durchmessers derselben, so kann man sich bekannter Massen *a b* auch als den wirklichen Durchmesser einer Hilfskugel vorstellen, welche den Mittelpunkt in der Bildfläche hat und denselben perspektivischen Umriss liefert.

Geht man von dieser Kugel aus und beschreibt über *a b* einen Kreis, so ist dieser als Schnitt der Hilfskugel mit der Bildfläche anzusehen. Bestimmt man die Endpunkte *I* und *VIII* des auf die Bildfläche senkrecht stehenden Durchmessers, indem man die Gerade *A O* mit *1 D* und *8 D* zum Schnitte bringt, so wird blos noch die Anzahl der Ebenen zu wählen sein, durch welche die Kugel geschnitten werden soll.

Fig. 249.



Wir wollen sechs Schnittebenen annehmen.

Es ist zweckmässig dieselben in gleicher Entfernung von einander zu legen, also behufs der Bestimmung der Mittelpunkte jener als Schnitte erhaltenen Kreise, den auf die Bildfläche senkrechten Durchmesser *I VIII*, welcher der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Schnittkreise ist, in den Punkten *II* bis *VII* perspektivisch in acht gleiche Theile zu theilen.

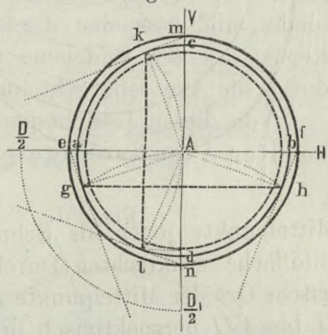
Weiters handelt es sich noch um die Perspektiven der diesen Mittelpunkten entsprechenden Radien.

Denkt man sich, zur Bestimmung derselben, durch *O a b* und *VIII O I* eine Ebene gelegt, welche die Kugel in einem grössten Kreise schneidet, und diese Ebene um *a b* in die Bildfläche gedreht, so gelangen die Punkte *I* bis *VIII* nach *1* bis *8*, und es werden die den Punkten *2* bis *7* entsprechenden Ordinaten, von welchen je zwei gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, eine gleiche Länge, d. i. beziehungsweise die Grösse *77''*, *66''*, *55''* haben, die wahren Längen der zu bestimmenden Radien geben. Diese Längen sind nun auf *O b* nach $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ zu übertragen und die Endpunkte α, β, γ mit *A* zu verbinden, um auf den in den einzelnen Mittelpunkten errichteten Vertikalen die Perspektiven der Radien *VII 7'*, *VI 6'* etc. zu erhalten. Man hat also schliesslich diese Kreise zu verzeichnen und dieselben vermittelst einer tangirenden Curve zu umhüllen, welche sodann den zu suchenden Umriss in der Perspektive darstellen wird.*)

b) Der sichtbare Umriss einer Kugel ist im Allgemeinen eine Ellipse, kann jedoch auch ein Kreis, eine Hyperbel oder eine Parabel werden. Die Kugelperspektive ist ein Kreis, wenn der Mittelpunkt der Kugel in der durch das Auge auf die Bildfläche errichteten Senkrechten, also im Hauptstrahl, liegt. Eine Parabel wird erhalten, wenn die durch das Auge zur Bildfläche parallel geführte Ebene die Kugel berührt, und eine Hyperbel, wenn die Kugel von dieser Ebene geschnitten wird. Die letzten zwei Fälle kommen in der Anwendung nur äusserst selten vor.

Für den ersten Fall, wo der perspektivische Umriss ein Kreis wird, muss A (Fig. 250) die Perspektive des Mittelpunktes sein. Wir werden hier wieder das Bild ab oder cd eines zur Bildfläche parallelen Durchmessers bestimmen und über denselben einen Kreis verzeichnen. Da im Vorhinein bestimmt ist, dass der Umriss ein Kreis werden soll, so wird blos der Radius desselben aufzusuchen sein. Zu diesem Behufe führe man durch das Auge und den Mittelpunkt eine horizontale oder vertikale Ebene und drehe dieselbe um ihre Bildflächtrace in die Bildebene, wobei das Auge in einen der Distanzpunkte D oder D_1 (hier durch $\frac{D}{2}$ und $\frac{D_1}{2}$ bestimmt) fällt und die Peripherie des Schnittkreises in den bereits verzeichneten Kreis zu liegen kommt.

Fig. 250.



Zieht man aus D_1 oder D die Tangenten $D_1 g$, $D_1 h$ oder Dk, Dl, so werden diese die entsprechenden Bildflächtracen (hier die Vertikal- und Horizontslinie) in den Punkten m, n, e und f des Umrisses treffen, und es werden die Verbindungslinien gh oder kl der Berührungspunkte zugleich den Durchmesser jenes Kreises angeben, in welchem die Berührung der Kugel und des Sehkegels erfolgt.

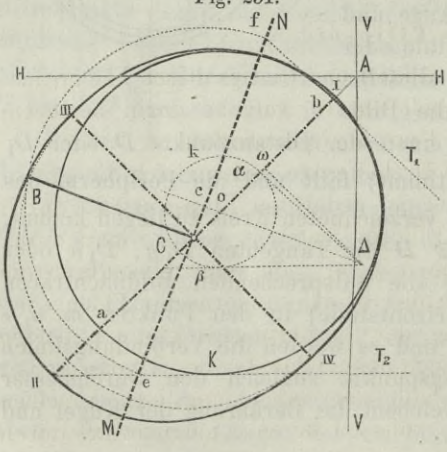
*) Eine gleiche Lösungsweise wird man auch bei allen Umdrehungsflächen in Anwendung bringen, wenn deren Axe auf der Bildfläche senkrecht steht. Die Construktion ist eine so einfache und von selbst verständliche, dass nicht für nöthig erachtet wurde, dieselbe in einem Beispiele speciell durchzuführen.

Da hier blos $\frac{D}{2}$ und $\frac{D_1}{2}$ innerhalb der Gränzen der Zeichnungsfläche fallen, so wird man zur Verzeichnung dieser Tangenten die Kreise gAh oder kAl aus jenen Punkten zu beschreiben und die Tangenten senkrecht auf die bezüglichen Radien zu ziehen haben.

c) Betrachtet man die Construktion des Umrisses in Fig. 249, so ist ersichtlich, dass die Verbindungsgerade AO des Mittelpunktes mit dem Augpunkte A die Richtung der grossen Axe der umhüllenden Curve bestimmt; denn in dieser Geraden liegen die Mittelpunkte aller eingehüllten Kreise, folglich jede auf AO senkrechte Sehne der Umhüllenden von dieser Geraden AO halbirt wird. Allein, unabhängig von dieser Construktionsweise, ist bekannt, dass jeder eine Kugel berührende Kegel ein Rotationskegel ist, dessen Axe den Kugelmittelpunkt mit dem Auge verbindet, und dass eine der senkrechten Axen der Schnittlinie des Kegels mit der Bildebene sich in jener Ebene befindet, welche durch die Axe senkrecht auf die schneidende Ebene geführt wird.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, werden sich die senkrechten Axen der Kugelperspektive einfach folgends ergeben.*)

Fig. 251.



Es sei der Kreis K (Fig. 251) der Hauptmeridian der Kugel, o deren Mittelpunkt und es sei blos der dritte Theil $\omega\Delta$ der Augdistanz benützbar.

Die Gerade Ao stellt offenbar die Trace der durch das Auge und den Kugelmittelpunkt senkrecht auf die Bildfläche geführten Ebene vor, welche den Sehkegel in zwei Erzeugenden schneidet, die, um Ao in die Bildfläche gedreht, durch das umgelegte Auge gehen, den Kreis K berühren und im Durchschnitte mit Ao die Endpunkte der grossen Axe des Bildes geben.

*) Siehe Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins in Wien, 18. Bd. E. Koutny: „Kugelperspektive“.

Zieht man aus o den Kreis k mit dem Radius $o\alpha = \frac{1}{3} \cdot oa$, macht $o\omega = \frac{1}{3} \cdot oA$, $\omega\Delta$ senkrecht auf Ao und dem dritten Theil der Augdistanz gleich, so geben die aus Δ an k gezogenen Tangenten $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ die Richtungen der beiden Erzeugenden T_1 und T_2 des Sehkegels, welche somit parallel zu diesen Richtungen tangentiell an den Kreis K gezogen, die grosse Axe $I\,II$ der Perspektive begränzen.

Der Halbirungspunkt C der Länge $I\,II$ ist der Mittelpunkt und $III\,IV$ der Ort der kleinen Axe des perspektivischen Bildes. Zur Bestimmung der Länge der letzteren schneiden wir den Sehkegel durch eine auf seine Axe $o\Delta$ senkrechte Ebene MN in einem Kreise eBf vom Durchmesser ef (zwischen den äussersten Erzeugenden T_2 und T_1), legen diesen um MN in die Bildfläche und ziehen durch C die auf MN senkrechte Ordinate CB desselben, welche, weil sie durch den Punkt C hindurchgeht und nach dem Zurückdrehen in die Bildfläche zu liegen kommt, zugleich die wahre Grösse der zweiten Halbaxe der Contour liefert, also nur vermittelst eines Bogens $III\,B\,IV$ aus dem Mittelpunkte C nach $C\,III$ und $C\,IV$ übertragen zu werden braucht.

§. 129.

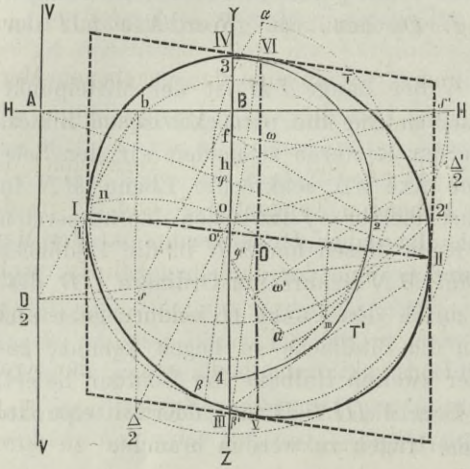
Das Ellipsoid.

Da bekanntlich der perspektivische Umriss dieser Fläche fast immer eine Ellipse ist, so soll unsere Aufgabe darin bestehen, zwei conjugirte Axen dieses Umrisses aufzufinden.

a) Ist YZ (Fig. 252) die Drehungsaxe und zugleich die grosse Axe der in der Bildfläche liegend gedachten Ellipse 324, durch deren Rotation um YZ das Ellipsoid entsteht, so lege man durch das Auge drei vertikale Ebenen derart, dass die eine durch die Drehungsaxe geht, während die beiden andern die Fläche berühren. Durch Bestimmung der Berührungspunkte der beiden letzteren Ebenen ergeben sich zwei Punkte des Umrisses mit vertikalen Tangenten, wesshalb die Verbindungslinie derselben eine Axe des Umrisses gibt, während deren conjugirte Axe durch den Halbirungspunkt der ersteren gehen und eine vertikale Lage haben wird. Zur Bestimmung der Länge dieser Axe kann eine zu ihr parallele Sehne ermittelt und aus dieser und der bekannten Axe die zweite gefunden werden. Diese Sehne wird sich in der erst genannten Ebene ergeben.

Bezüglich der Berührungspunkte der beiden Vertikalebenen sei bemerkt, dass dieselben bei vertikaler Drehungsaxe im grössten Parallelkreise liegen, man also zu deren Bestimmung, wie dies im §. 122 gezeigt wurde, die Projektion des Auges auf der Ebene des Parallelkreises zu suchen und letztere sammt dem Parallelkreis um die Trace *12* in die Bildfläche zu drehen hat. Die Projektion des Auges gelangt hiebei in die Vertikallinie und zwar in eine der Augdistanz gleiche Entfernung von der Drehungsaxe 1 2.

Fig. 252.



Um nun aus diesem Punkte, der hier jedoch ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt, die Tangente an den umgelegten Parallelkreis $1\,m\,2\,n$ ziehen und die Berührungspunkte fixiren zu können, bestimme man den Halbirungspunkt der Entfernung des besagten Punktes vom Mittelpunkte *o*. Dieser wird erhalten, wenn man $A\,B$ in b halbirt, b mit $\frac{D}{2}$ verbindet ($A\,\frac{D}{2}$ ist die halbe Augdistanz) und $o\,\frac{\Delta}{2}$ parallel zu $b\,\frac{D}{2}$ zieht und gleich dieser Länge macht. Es wird alsdann blos aus $\frac{\Delta}{2}$ der Kreis $m\,o\,n$ zu beschreiben sein, um die Berührungspunkte m und n zu finden, deren Perspektiven I und II die eine Axe $I\,II$ des Umrisses begränzen. Die in m und n an den umgelegten Parallelkreis gezogenen Tangenten schneiden die Trace $1\,2$ in den Punkten $1'$ und $2'$, durch welche die vertikalen Tangenten des Umrisses zu führen sind.

Der Halbirungspunkt O der Axe $I\,II$ liefert den Mittelpunkt der Perspektive, während in der durch diesen gehenden Vertikalen $V\,O\,VI$ die Richtung des entsprechenden conjugirten Durchmessers gegeben ist. Behufs der Auffindung der Länge desselben suche man vorerst jene Punkte der Contour, welche in der Drehungsaxe liegen. Zu diesem Ende wird man bekanntlich die durch das Auge und die Drehungsaxe gelegte Ebene in die Bildfläche drehen und aus dem umgelegten Auge D_2 an die Meridiancurve die beiden Tangenten T und T' zu ziehen haben. Da jedoch das Auge nach der Drehung ausser die Zeichnungsfläche fällt, so wird man zur Verzeichnung obiger Tangenten den Halbirungspunkt $\frac{\Delta'}{2}$ der Entfernung $o D_2$ benützen. Werden nämlich aus $\frac{\Delta'}{2}$ die Tangenten $\frac{\Delta'}{2}\omega$ und $\frac{\Delta'}{2}\omega'$ an eine der gegebenen Meridiancurve ähnliche Ellipse, welche über dem Mittelpunkte o und den halben Axenlängen $\frac{1}{2}(1\,0\,2)$ und $\frac{1}{2}(3\,0\,4)$ verzeichnet ist, geführt, so sind die zu ziehenden Tangenten T und T' zu den eben gefundenen parallel. Ist daher f ein Brennpunkt der Meridianellipse und sind φ und φ' jene der ähnlichen Ellipse, wobei selbstverständlich auch $o\varphi = o\varphi' = \frac{1}{2} of$ zu nehmen ist, so wird man, nach der bekannten Construktionsmethode, aus $\frac{\Delta'}{2}$ den Kreisbogen $\alpha\varphi'\alpha'$ zu beschreiben, diesen mit einem Kreise vom Halbmesser $03 = 04$ aus dem Mittelpunkte φ in α und α' zu durchschneiden und die Tangenten $\frac{\Delta'}{2}\omega$, $\frac{\Delta'}{2}\omega'$ so zu ziehen haben, dass die Bögen $\alpha\varphi'$, $\alpha'\varphi'$, oder deren Sehnen, durch dieselben halbirt werden. Der Punkt $\frac{\Delta'}{2}$ wird ähnlich wie jener $\frac{\Delta}{2}$ gefunden, indem man oB in h halbirt, $B\delta$ nach $B\delta'$ überträgt und $o\frac{\Delta'}{2}$, parallel zu $h\delta'$ geführt, gleich der Länge $h\delta'$ macht.

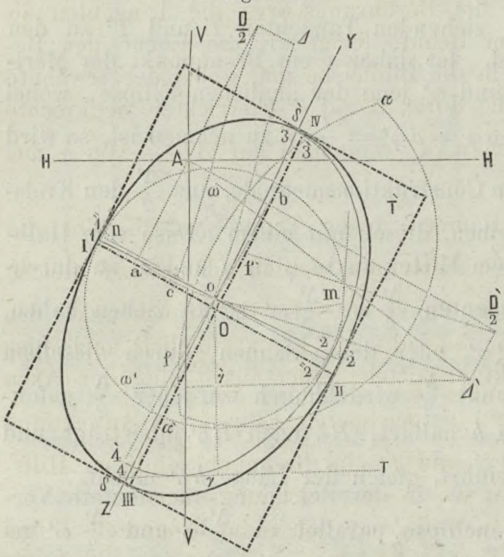
Die an die Meridianellipse parallel zu $\frac{\Delta'}{2}\omega$ und $\frac{\Delta'}{2}\omega'$ gezogenen Tangenten T und T' schneiden auf YZ die Länge $III\,IV$ ab, welche eine vertikale Sehne des Umrisses ist, folglich durch die Axe $I\,II$ in o' halbirt werden muss.

Die weitere Construktion wird nun blos darauf hinausgehen, aus der einen Axe $I\,II$ und der Sehne $III\,IV$ die zweite Axe aufzufinden, was vermittelst der bekannten Verzeichnungsart der Ellipse aus deren conjugirten Durchmessern einfach durchführbar ist. Wird nämlich über $I\,II$ der Kreis $I\beta\beta'II$ beschrieben, und werden in den Punkten o' und O die auf $I\,II$ senkrechten Sehnen $o'\beta$, $O\beta'$ gefällt, ferner β mit III verbunden und durch β' eine zu $\beta\,III$ parallele Gerade $\beta'V$ gezogen, so schneidet letztere auf der bereits verzeichneten Axenrichtung die zu suchende Länge dieser Halbaxe im Punkte V ab.

b) Der zweite conjugirte Durchmesser des Umrisses kann auch direkt ermittelt werden. Dies sei an einem Ellipsoide durchzuführen, dessen Axe YZ in der Bildfläche liegt, gegen die Vertikallinie jedoch geneigt erscheint.

Bestimmen wir wieder, wie im vorigen Beispiele, die Axe $I\,II$ (Fig. 253) mit Hilfe eines berührenden Cylinders, dessen Erzeugenden zur Rotationsaxe parallel sind, welcher mithin das Ellipsoid im grössten Parallelkreise $1\,2$ berührt. Es wurde zu diesem Zwecke $a\frac{D}{2}$ senkrecht auf $1\,2$ und gleich der halben Augdistanz gemacht, $o\,a$ in c halbirt, $o\,\Delta$ parallel zu $c\frac{D}{2}$ gezogen, $o\,\Delta = c\frac{D}{2}$ abgeschnitten und aus Δ der Kreisbogen $m\,o\,n$ bis zum Durchschnitte m und n mit dem umgelegten Parallelkreise geführt, welche Punkte zurückgedreht in ihren Perspektiven I und II die Eckpunkte des einen Durchmessers $I\,II$ geben. Diesem Durchmesser entsprechen in I und II zu YZ parallele Tangenten, daher die zweite Axe durch seinen Halbirungspunkt O parallel zur Rotationsaxe zu ziehen sein wird.

Fig. 253.



Um die Länge dieser Axe zu bestimmen, denke man sich an das Ellipsoid einen berührenden Cylinder parallel zur Axenrichtung $I\,II$ gelegt. Dieser wird dasselbe in einer Ellipse berühren, deren Ebene senkrecht auf der Bildebene steht und deren senkrechte Axen leicht zu bestimmen sind. Zieht man nämlich parallel zu $I\,II$ an den Hauptmeridian die beiden Tangenten, so wird die Verbindungslinie $3'\,o\,4'$ der Berührungspunkte $3'$ und $4'$

die grosse Axe der Berührungscurve und $1\,2$ die Länge der kleinen Axe sein. Letztere wird daher auf der in o senkrecht auf $3'\,4'$ errichteten Geraden in $1''\,2''$ abzuschneiden sein. Werden an den besagten Cylinder durch das Auge die beiden Tangirungsebenen gelegt und deren Bildflächtracen gesucht, so werden diese zu einander und zu $I\,II$ parallel laufen, Tangenten an den Umriss sein und die Axenrichtung $III\,IV$ in den Endpunkten dieser Axe schneiden.

Behufs der Construktion wird aus dem Auge eine Parallele zu den Cylindererzeugenden zu führen, der Durchschnitt derselben mit der Ebene der obigen Berührungscurve zu bestimmen und von diesem Punkte an die Berührungscurve die Tangenten zu führen sein. Zu diesem Behufe legen wir die Ebene der Berührungscurve um $3'\,4'$ in die Bildfläche um, wobei der erwähnte Durchschnittspunkt in die durch A auf $3'\,4'$ errichtete Senkrechte $A\,b\,\frac{D'}{2}$ fällt und erhalten wird, wenn man auf $A\,b\,\frac{D'}{2}$ von b aus die Augdistanz aufträgt.

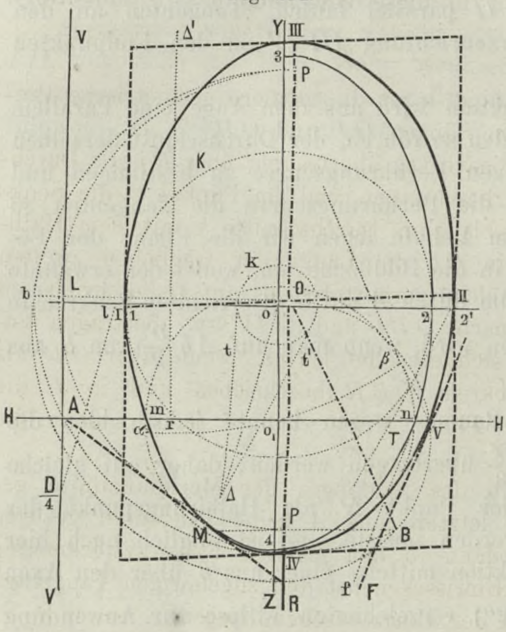
Des beschränkten Raumes wegen konnte jedoch blos die halbe Distanz nach $b\,\frac{D'}{2}$ übertragen werden, daher auf gleiche Weise, wie in a), der Punkt Δ' als Halbirungspunkt der Länge $o\,D'$ bestimmt werden musste. Es ist folglich auch hier wieder die Hilfsconstruktion mittelst einer aus o über den Axen $\frac{1}{2}(3'\,0\,4')$ und $\frac{1}{2}(1''\,0\,2'')$ verzeichneten Ellipse zur Anwendung gebracht worden. Sind f und f' die Brennpunkte dieser Hilfsellipse, so gibt das bekannte, in der Zeichnung angedeutete Verfahren die Tangenten $\Delta'\,\omega$ und $\Delta'\,\omega'$, daher die Tangenten T und T' an die umgelegte Berührungscurve im doppelten Abstande von o, $(o\,\gamma = 2\,o\,\gamma')$ parallel zu den ersteren gezogen, die Punkte δ und δ' auf $3'\,o\,4'$ bestimmen. Durch δ und δ' sind die Bildflächtracen der gesuchten Berührungsebenen parallel zu $I\,II$ zu führen. Dieselben schneiden die Gerade $III\,IV$ in den fraglichen Endpunkten III und IV der zweiten Axe.

Wären die Berührungspunkte der Tangenten T und T' bestimmt und in die ursprüngliche Lage zurückversetzt worden, so hätten die Perspektiven dieser Punkte offenbar die Endpunkte III und IV direkt gegeben.

c) Eine andere Bestimmungsweise von conjugirten Durchmessern des Umrisses ist folgende:

Es seien wieder YZ (Fig. 254) die Drehungsaxe, 12 die kleine und 34 die grosse Axe der rotirenden Ellipse. Vor Allem bestimme man, wie früher, die Axe $I\,II$ des Umrisses, was hier mit Benützung der Vierteldistanz durchgeführt wurde. Es wurden nämlich die beiden an den umgelegten grössten Parallelkreis K zu ziehenden Tangenten T und T' parallel zu jenen Tangenten t und t' geführt, welche man aus Δ an den Kreis k, dessen Radius $\frac{1}{4} . 0\,1$ ist, führte.

Fig. 254.



Halbirt man $I\,II$ im Mittelpunkte O der Perspektive, so ist durch O die zweite Axenrichtung vertikal zu ziehen.

Je nachdem der Augpunkt A ausserhalb oder innerhalb des Umfanges der Meridianellipse liegt, sind behufs der Bestimmung der Länge dieser Axe zwei Fälle zu unterscheiden.

Für den ersten Fall, wie in Fig. 254, wo A ausserhalb des Umfanges liegt, construire man aus A eine der beiden Tangenten, z. B. AR an die Meridiancurve, so wie deren Berührungspunkt M und verlängere dieselbe so lange, bis sie die Axe $III\,O\,IV$ in R schneidet. Nun ist bekannt, dass AR auch eine Tangente des Umrisses und M ein Punkt desselben ist, folglich die zu lösende Aufgabe darin besteht, aus den gegebenen Axenrichtungen der Ellipse, aus einer Tangente und dem Berührungspunkt derselben die Axenlängen zu bestimmen.

Nehmen wir zu diesem Behufe die bekannten Axenrichtungen als Coordinatenaxen, und zwar $III\,IV$ als Abscissen-, $I\,II$ als Ordinatenaxe an und bezeichnen die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf dieses System, d. i. OP mit x', MP

mit y', ferner die Längen der Halbaxen $O\,IV$ mit a, $O\,I$ mit b, so ist bekanntlich

$$\frac{x\,x'}{a^2} + \frac{y\,y'}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente $A\,R$, mithin die Länge $O\,R = \alpha$ erhalten wird, wenn man in diese Gleichung $y = o$ substituirt. Es ist somit

$$\alpha\,x' = a^2,$$

d. h. die zu suchende Länge a ist die mittlere geometrische Proportionale zu den beiden Längen $O\,P$ und $O\,R$.

Man kann also $O\,P$ nach $O\,p$ übertragen, über $R\,p$ als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben und im Punkte O die Senkrechte $O\,b$ auf $III\,IV$ bis zum Durchschnitte b mit dem Halbkreise errichten, um in $O\,b$ die Länge der fraglichen zweiten Halbaxe zu erhalten, welche vermittelst des aus O beschriebenen Halbkreises $III\,b\,IV$ nach $O\,III$ und $O\,IV$ zu übertragen ist. Noch einfacher ergibt sich dieselbe jedoch, wenn über $O\,R$ als Durchmesser der Halbkreis $O\,B\,R$ beschrieben und in P die Senkrechte $B\,P$ auf $III\,IV$ errichtet wird. $O\,B$ ist sodann die gesuchte Halbaxenlänge.

Wäre A innerhalb des Umfanges der Meridianellipse gelegen, so könnten an letztere aus A keine Tangenten gezogen werden. Es dürfte sodann in den meisten Fällen zweckmässig sein, jene Punkte des Umrisses nebst den zugehörigen Tangenten aufzusuchen, welche in der Horizontsebene liegen.

Die Auffindung dieser Punkte ist bereits im §. 126 erläutert worden.

Im vorliegenden Falle wurde die halbe Augdistanz benützt, mithin $A\,o_1$ in r halbirt und $r\,\Delta'$ gleich der halben Augdistanz gemacht, daher der aus Δ' beschriebene Kreisbogen $\alpha\,o_1\,\beta$ den umgelegten Parallelkreis $m\,n\,\alpha\,\beta$ in den Punkten α und β schneidet, deren Perspektiven die in der Horizontslinie gelegenen Punkte des Umrisses geben. Die Bestimmung der zweiten Axe ist dieselbe wie in b), nachdem wieder die Axenrichtungen, ein Punkt V des Umfanges und dessen Tangente F gegeben sind.

B e m e r k u n g. Es ist ersichtlich, dass insbesondere für den praktischen Gebrauch sich die letzterwähnte Auflösungsweise c) nur dann eignet, wenn der Abstand der Ebene des grössten Parallelkreises von der Horizontsebene (wenn A ausserhalb der Meridianellipse liegt, mit Berücksichtigung des Abstandes dieses

Punktes vom Ellipsenumfange) verhältnissmässig nicht zu gering ist, so dass der Schnittpunkt R der Tangente nicht zu weit hinausfällt.

Wenn solch' ein ungünstiger Fall eintritt, so ist entweder die Auflösungsweise a) anzuwenden, oder man kann sich auch in der Weise helfen, dass man nicht, wie bisher, von dem Durchmesser $I\,II$ ausgeht, sondern einen andern, z. B. jenen Durchmesser des Umrisses aufsucht, welcher erhalten wird, wenn man den höchsten und tiefsten Punkt des Bildes vermittelst eines dem Ellipsoide umschriebenen Cylinders, dessen Erzeugenden horizontal und parallel zur Bildfläche liegen, bestimmt (siehe §. 127) und diese Punkte, welchen zur Grundlinie parallele Tangenten zukommen, mit einander verbindet. Es ergibt sich sodann gerade in einem solchen Falle eine günstige Lage der zu benützenden Linien. Endlich könnte man auch mit Beibehaltung der Axe $I\,II$, nach der allgemeinen Methode §. 126, eine Tangente und den Berührungspunkt in einer zweckmässigen Lage bestimmen und weiters, wie in c) angegeben wurde, vorgehen.

§. 130.

Das Hyperboloid.

Da der perspektivische Umriss eines Hyperboloids mit einer zur Bildfläche parallelen Drehungsaxe fast immer eine Hyperbel ist, so wird es sich bei der Verzeichnung desselben um die Bestimmung einer Axe und der Asymptoten dieser Hyperbel handeln.

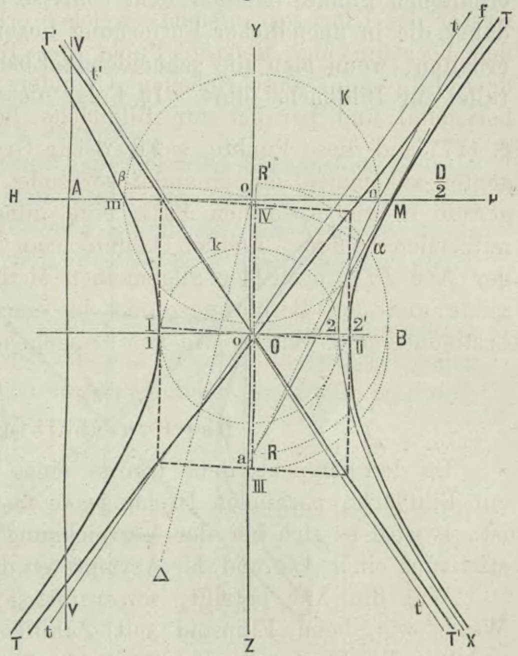
Was die Axe betrifft, so ergibt sich dieselbe auf gleiche Weise wie beim Ellipsoid mit Zuhilfenahme eines Cylinders, welcher die Fläche im Kehlkreise berührt, dessen Erzeugenden sonach parallel zur Rotationsaxe sind. Es ist daher in Fig. 255, wenn YZ die Drehungsaxe, $fn2x$ die rotirende Hyperbel und tt, $t't'$ deren Asymptoten darstellen, k der in die Bildebene umgelegte Kehlkreis 12, ferner sind I und II die Perspektiven der in demselben gelegenen Punkte des Umrisses, welchen zu YZ parallele Tangenten zukommen, folglich $I\,II$ eine Axe des Bildes wird, welche in O halbirt den Mittelpunkt desselben gibt.

Behufs der Asymptotenbestimmung lässt sich ein doppelter Weg einschlagen, und zwar a) ein indirecter und b) ein directer.

a) Indirect kann man die Asymptoten auffinden, wenn man, wie in §. 128, c) beim Ellipsoide, einen Punkt und die zugehörige Tangente des Umrisses sucht, hieraus mit Benützung des bereits aufgefundenen reellen Durchmessers $I\,II$ die conjugirte imaginäre Axe bestimmt und in dem über beiden Axen verzeichneten Parallelogramme die Diagonalen zieht.

In Fig. 254 wurde, da sich aus A keine Tangente an die Hyperbel $f\,n\,2\,x$ ziehen liess, der in der Horizontsebene liegende Punkt M des Umrisses und dessen Tangente $M\,a$ mit Benützung der halben Augdistanz aufgesucht. Sollte jedoch die Horizontsebene dem Kehlkreise zu nahe liegen, so wäre es zweckmässiger, nach der allgemeinen Methode einen Punkt des Umrisses in einem beliebigen Parallelkreise zu ermitteln.

Fig. 255.



Die im Halbirungspunkte O des Durchmessers $I\,II$ errichtete Vertikale $III\,IV$, welche offenbar die Richtung der zu $I\,II$ conjugirten, imaginären Axe des Bildes angibt, wird von der Tangente $M\,a$ in einem Punkte R getroffen, für welchen, wenn $I\,II$ und $III\,IV$ als Coordinatenaxen angenommen werden und MR' parallel zu $I\,II$ gezogen wird, bekanntlich die Relation

$$OR\,.\,OR' = (O\,III)^2$$

besteht, wobei $O\,III$ die Länge der zu suchenden Halbaxe ist.

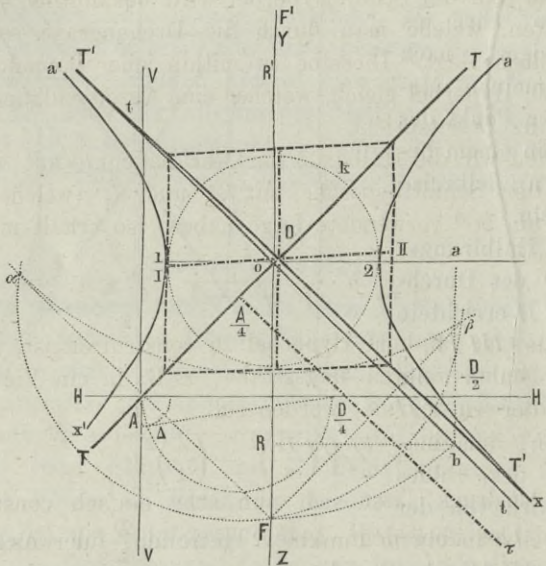
Wird daher über RR' als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben und aus O die Gerade OB senkrecht auf $III\,IV$ gefällt, so ist $OB = O\,III = O\,IV$ die imaginäre Halbaxe. Durch die beiden Axen $I\,II$ und $III\,IV$ sind die Asymptoten TT und $T'\,T'$ gefunden.

b) Für die directe Auffindung der Asymptoten ist gleichfalls vorerst die Axe $I\,II$ (Fig. 256) und der Mittelpunkt O des

Umrisses auf gleiche Weise wie früher zu suchen. Die Richtungen der Asymptoten können sodann folgends erhalten werden:

Wird durch das Auge eine beliebige, das Hyperboloid schneidende Ebene geführt, werden ferner aus dem Auge an die Schnittlinie die möglichen Tangenten gezogen und diese bis zum Durchschnitte mit der Bildebene verlängert, so werden die so erhaltenen Punkte offenbar dem Umrisse angehören. Es werden daher die in unendlicher Entfernung liegenden Punkte des Bildes erhalten, wenn man die schneidende Ebene durch das Auge parallel zur Bildfläche führt. In Folge dessen werden die an die

Fig. 256.



Schnittlinie gezogenen Tangenten auf jene in unendlicher Entfernung liegenden Punkte zugehen, daher parallel zu den Asymptoten sein müssen.

Wir haben sonach, behufs der Auffindung der Asymptotenrichtungen, den Schnitt einer durch das Auge parallel zur Bildfläche geführten Ebene mit dem Hyperboloide aufzusuchen und aus dem Auge an diese Schnittcurve, welche eine Hyperbel ist, die beiden Tangenten zu führen.

Bedenkt man jedoch, dass selbst bei einer verhältnissmässig kleinen Augdistanz die Axen der Schnitthyperbel sehr gross ausfallen, so ist ersichtlich, dass man auf diese Weise nur umständlich zum Resultate gelangt.

Um dieses Constructionsverfahren auch praktisch anwendbar zu machen, werden wir eine der zu suchenden Schnitthyperbel (welcher zu tt parallele Asymptoten zukommen) ähnliche Curve, jedoch in ihrer orthogonalen Projektion auf der Bildfläche, über dem Mittelpunkte o und denselben Asymptoten tt verzeichnen, sodann jenen, dem Punkte A analog liegenden Punkt in Bezug auf die verjüngte Hyperbel auffinden und aus diesem Punkte an letztere die beiden Tangenten ziehen, welche gleichfalls die Richtungen der Asymptoten angeben.

Die reelle Axe der Schnitthyperbel wird bekanntlich in jener Ebene erhalten, welche man durch die Drehungsaxe senkrecht auf die Bildfläche legt. Dieselbe ist mithin jener Doppelordinate der rotirenden Hyperbel gleich, welcher eine Abscissenlänge gleich der Augdistanz D entspricht.

Bezeichnen wir die Halbaxen der Meridiancurve mit a und b, ferner jene der Schnitthyperbel mit A und B (welche gegen erstere eine um 90^0 verwendete Lage haben), so erhält man dem Obigen zufolge

$$A = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{D^2 - a^2}$$

und weil blos eine ähnliche Hyperbel zu construiren ist, also die Schnittcurve im verjüngten Maassstabe, z. B. in ein Viertel der wirklichen Grösse gezeichnet werden soll,

$$\frac{A}{4} = \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{D}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun sehr einfach construiren; denn es wird blos über dem vierten Theile $A\frac{D}{4}$ der Augdistanz ein Halbkreis zu beschreiben, $A\Delta = \frac{1}{4}\, o\, 2 = \frac{1}{4}\, a$ zu machen, ferner $\Delta\frac{D}{4}$ von o nach a aufzutragen und daselbst die Vertikale ab bis zum Durchschnitte mit der Asymptote tt zu ziehen sein, um in $ab = oR = \frac{1}{4}\, A$ die verjüngte Axenlänge, mithin in R den Scheitel der betreffenden Hyperbel zu erhalten. Wird weiters ob nach oF übertragen, so ist F der Brennpunkt derselben.

Um nun einen dem Punkte A ähnlich liegenden Punkt zu erhalten, wird man blos A mit o zu verbinden und Ao in vier gleiche Theile zu theilen, also $\frac{A}{4}\, o = \frac{1}{4}\, Ao$ zu machen haben.

Aus $\frac{A}{4}$ können nun die beiden Tangenten an die verjüngte Hyperbel gezogen werden, ohne dass es nöthig wäre dieselbe zu verzeichnen, indem man aus $\frac{A}{4}$ den Kreisbogen $\alpha F \beta$ beschreibt, denselben aus F' (dem zweiten Brennpunkte) mit einem Kreisbogen vom Radius $R R' = 2 o R$ in α und β durchschneidet und die beiden Tangenten $\frac{A}{4} T$ und $\frac{A}{4} \tau$ so zieht, dass sie die Bögen αF und βF halbiren. Die zu suchenden Asymptoten sind sodann durch O parallel zu den eben gefundenen Tangenten zu ziehen. Die eine $T O T$ derselben fällt hier mit einer Asymptote der rotirenden Hyperbel zusammen, weil der Augpunkt A zufällig in der Asymptote $T O T$ liegt.

Bemerkung. In gleicher Weise können auch die Bestimmungsstücke des perspektivischen Umrisses eines Hyperboloides mit zwei Mänteln gefunden werden, nur ist zu bemerken, dass man die eine Axe nicht mit Hilfe eines zur Rotationsaxe parallelen berührenden Cylinders bestimmen kann, sondern den Erzeugenden desselben eine gegen die Rotationsaxe geneigte, also z. B. eine auf dieselbe senkrechte, jedoch stets zur Bildfläche parallele Richtung geben muss.

§. 131.

Das Paraboloid.

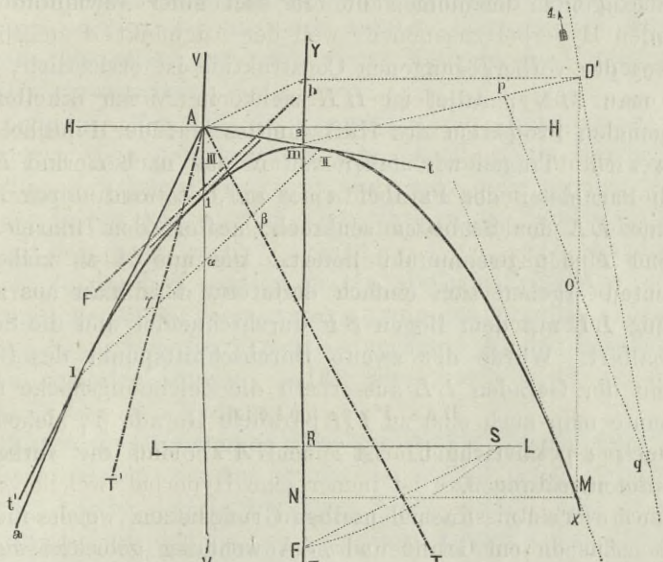
Der perspektivische Umriss eines Paraboloids mit einer zur Bildfläche parallelen Axe ist immer eine Hyperbel, welche, selbst bei einer verhältnissmässig geringen Augdistanz, grosse Axen besitzt. Aus diesem Grunde wird es wohl am zweckmässigsten sein, den Umriss dieser Fläche punktweise zu bestimmen und hiezu die erste allgemeine Methode, §. 125, anzuwenden.

Hier wollen wir nur zeigen, auf welche Weise die Axen und Asymptoten des Umrisses einfach aufgefunden werden können.

Führt man aus dem Augpunkte A (Fig. 257) an die Parabel $a m x$, welche als Hauptmeridian angenommen wird, die beiden Tangenten $A t$ und $A t'$, so sind diese auch Tangenten an die Perspektive, mithin ist $I II$ eine Sehne und $A V$ eine Axenrichtung des Bildes. Um die Endpunkte dieser Axe zu erhalten, denke man sich das Paraboloid von der Vertikalebene $V A V$ geschnitten und betrachte die erhaltene Curve, welche eine der Meridiancurve congruente Parabel ist, als Leitlinie einer berührenden Cylinderfläche, deren Erzeugenden offenbar parallel zu *I II* und parallel zur Bildfläche sind. Die durch das Auge an diesen Cylinder gelegten Berührungsebenen werden im Durchschnitte mit der Bildfläche die zu bestimmende Axe begränzen.

Zur Vereinfachung der Construktion bewegen wir die Parabel *1 V* sammt dem Auge parallel zu sich selbst so lange fort, bis deren Axe mit der Drehungsaxe *YZ* zusammenfällt und der Scheitel *1* nach *m*, also *A* nach *b* gelangt. Weiters drehen wir das Ganze um *YZ* in die Bildebene, woselbst die Parabel mit

Fig. 257.



jener *amx* zusammenfällt und das Auge nach *D'* (*bD'* die Augdistanz) zu liegen kommt.

Aus *D'* sind nun die beiden Tangenten an die Parabel zu ziehen, wovon sich die eine *D' 3*, welche *YZ* in *3* trifft, leicht ergibt, während die andere erhalten werden kann, indem man *D' M* parallel zu *YZ* führt, in *M* die Tangente an die Parabel, so wie durch irgend einen Punkt *o* der Geraden *D' M* eine Linie *pq* parallel zu dieser Tangente führt und *op* von *o* nach *q* aufträgt. Es ist ersichtlich, dass die so gefundene zweite Tangente *pq* die Axe *YZ*, selbst bei der hier angenommenen, kleinen Augdistanz, viel zu weit ausser der Zeichnungsfläche schneiden würde, als dass der sich dort ergebende zweite Endpunkt *4* der Axenlänge *34* für eine Hyperbelconstruktion benützt werden könnte.

Schliesslich sind die beiden Punkte *3* und *4* parallel zu *m1* nach *III*, *IV* in die Vertikalebene zurückzuführen und in diesen Punkten die Tangenten *FIII* parallel zu *I II* zu ziehen.*)

Zum Behufe der Asymptotenbestimmung führen wir, so wie beim Hyperboloide, durch das Auge eine zur Bildfläche parallele Ebene, suchen den Schnitt derselben mit dem Paraboloide, welcher eine zu *amx* congruente Parabel ist, und führen aus dem Auge die beiden Tangenten an die Schnittfigur. Diese Tangenten bestimmen die zu suchenden Asymptotenrichtungen.

Aus der vorhergegangenen Construktion ist ersichtlich, dass, wenn man *MN* parallel zu *HH* zieht, in *N* der Scheitel der orthogonalen Projektion des Hilfsschnittes auf der Bildfläche erhalten wird. Tragen wir daher von *N* aus nach *R* und *F* den halben Parameter der Parabel *amx* auf, so wird durch *R* die Leitlinie *LL* des Schnittes senkrecht auf *YZ* zu führen sein, während *F* den Brennpunkt liefert. Die aus *A* zu ziehenden Tangenten ergeben sich einfach dadurch, dass man aus *A* die Leitlinie *LL* mit dem Bogen *SF* durchschneidet und die Sehnen *SF* halbirt. Würde der zweite Durchschnittspunkt des Bogens *SF* mit der Geraden *LL* ausserhalb die Zeichnungsfläche fallen, so könnte man auch eine zu *I II* parallele Gerade $\beta\gamma$ ziehen und $\alpha\beta$ nach $\alpha\gamma$ übertragen. *AT* und *AT'* sind die verlangten Asymptotenrichtungen.

Bemerkung. Nach denselben Grundsätzen, welche hier bei Rotationsflächen entwickelt und in Anwendung gebracht wurden, können auch die Umrisse von den fünf Flächen der zweiten Ordnung bestimmt werden.

---

*) Wir haben hier gleichzeitig eine neue Construktion des Umrisses kennen gelernt, welche sich jedoch blos für ein Paraboloid eignet, indem dieses auch derart dargestellt werden kann, dass sich eine zu *amx* congruente Parabel auf der Parabel *amx*, als Leitlinie, so fortbewegt, dass ihr Scheitel stets den Umfang der letzteren durchschneidet und die Ebenen beider Parabeln auf einander senkrecht stehen, während die Axen immer in einer und derselben Ebene verbleiben.

Wird also mit beliebigen, auf der Bildfläche senkrechten Vertikalebenen so verfahren, wie oben mit *VAV*, so wird man eine Reihe von Punkten des Umrisses nebst den zugehörigen Tangenten erhalten.

§. 132.

Umdrehungsflächen mit zur Bildebene geneigten Axen.

Hat die Axe der Fläche eine gegen die Bildfläche geneigte Stellung, so gestaltet sich die directe Bestimmung des perspektivischen Umrisses etwas complicirter. Auch in diesem Falle wird es zumeist zweckmässig sein, berührende Rotationskegel zu benützen und die Contouren derselben, welche zugleich Tangenten des Umrisses der gegebenen Fläche sind, nach dem im §. 125 durchgeführten Verfahren zu bestimmen.

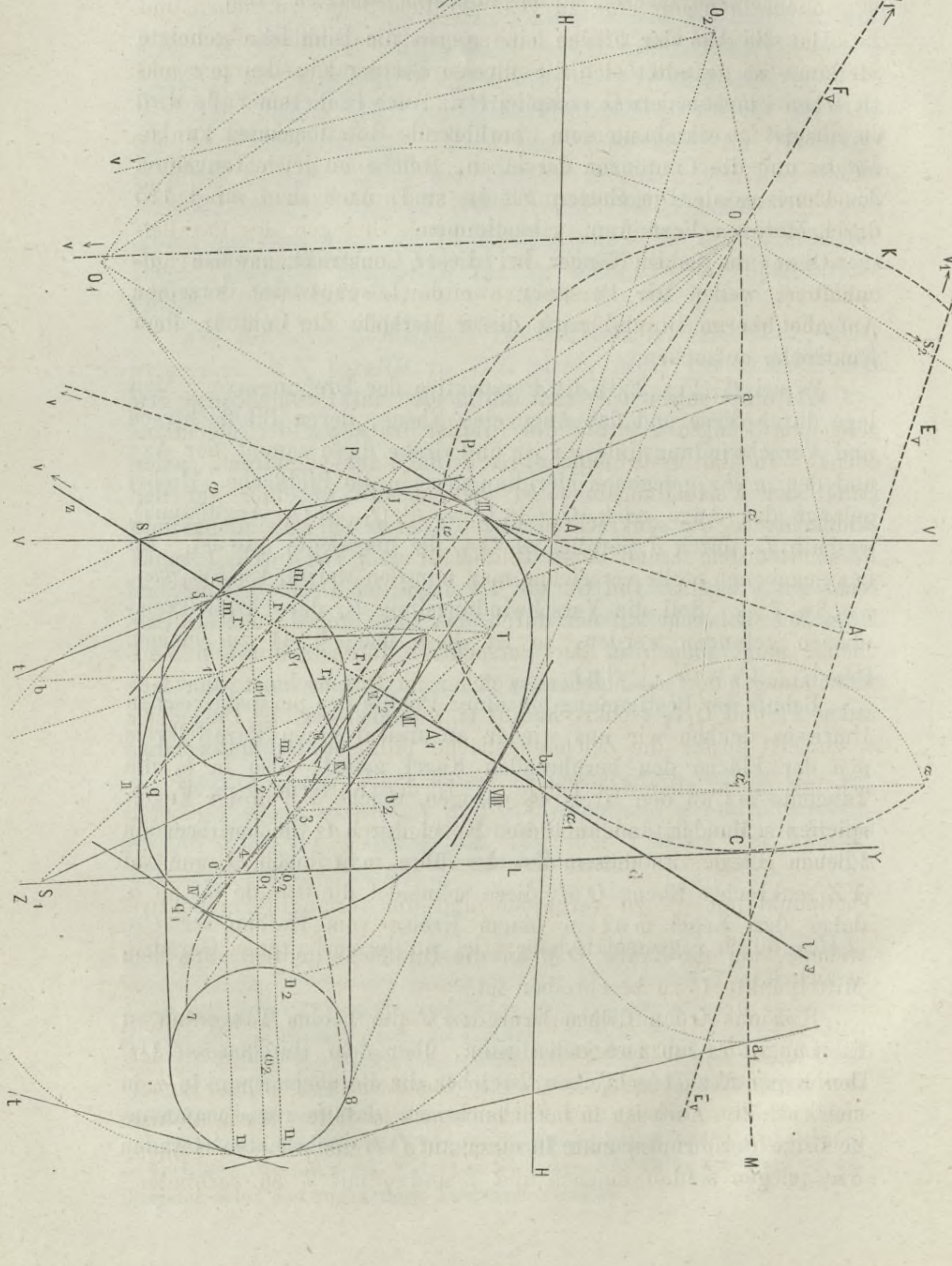
Ohne uns jedoch länger bei dieser Construktionsweise aufzuhalten, wollen wir zu einer zweiten Lösungsweise derselben Aufgabe übergehen und nach dieser Methode die Contour einer Ringfläche aufsuchen.

Es sei l_a^v (Fig. 258) die Perspektive der Drehungsaxe. Man lege durch diese und das Auge eine Ebene, deren Bildflächtrace und Verschwindungslinie yz ist und drehe diese sammt der Axe und der in ihr gelegenen Meridiancurve in die Bildfläche. Hiebei gelangt das Auge nach O ($A'_1 O = A'_1 O_1$, $A O_1$ Augdistanz), weshalb L, durch d parallel zu Ov, die umgelegte Axe ist. An der gegebenen Stelle verzeichne man nun den Meridian $m 5 m_2 6 \omega_1$, $n n_1 8 n_2 7 \omega_2$. Soll die Verschwindungslinie E_v der Parallelkreisebenen gefunden werden, so ist diese nach §. 41 zu suchen. ($O_2 A_1 \perp O_2 v$, $E_v \perp A v$.)

Behufs der Bestimmung einzelner Punkte des perspektivischen Umrisses denken wir uns wieder an irgend einen Parallelkreis mn der Fläche den berührenden Kegel gelegt, also in m die Tangente mt an den Kreis ω_2 gezogen, welche YZ in der Kegelspitze t schneidet, und an diesen Kegel durch O die berührenden Ebenen gelegt. Zu diesem Zwecke führe man durch O eine auf YZ senkrechte Ebene OM; diese schneidet die Gerade mt in a, daher den Kegel mnt in einem Kreise vom Halbmesser Ca, welcher, um die Trace OM in die Bildfläche gedreht, aus dem Mittelpunkte C zu beschreiben ist.

Um aus O an diesen Kreis $a \alpha C$ die beiden Tangenten zu führen, ist es am zweckmässigsten, über dem Durchmesser OC den Kreis K zu beschreiben, welcher die Berührungspunkte α in sich enthält. Auch ist zu berücksichtigen, dass je zwei zusammengehörige Berührungspunkte in einer auf OM senkrechten Geraden $\alpha \alpha'$ gelegen sind.

Fig. 258.



Werden die Punkte α' und O mit t verbunden, was selbst in dem Falle, wo t ausser die Zeichnungsfläche fällt, leicht möglich ist, indem man nur eine zu OM parallele Sehne zu ziehen und diese entsprechend zu theilen hat, so erhält man im Durchschnitte der Geraden yz und Ot die Perspektive s der Kegelspitze t und im Durchschnitte der Geraden $\alpha' t$ und mn den Punkt 1, d. i. die Projektion der beiden im Parallelkreise mn liegenden Punkte der Berührungscurve, auf der in die Bildfläche gedrehten Meridianebene $\omega_1 \omega_2$. Die Entfernung dieser Punkte von der bezeichneten Meridianebene kann einfach durch Umlegen des Parallelkreises mn in die Bildfläche, in $1b$ ($1b$ senkrecht auf mn) gefunden werden. Die Perspektive r dieser Projektion 1 ergibt sich offenbar im Durchschnitte des Sehstrahles $O1$ mit der Perspektive l.

Weiters denken wir uns die beiden im Parallelkreise mn gelegenen Punkte $1\,1'$ um die Bildflächtrace yz der Meridianebene l in die ursprüngliche Lage im Raume gedreht; jeder Punkt der Verbindungslinie $1\,1'$ bewegt sich in einer auf der Bildflächtrace yz senkrechten Ebene, deren Verschwindungslinie F_v somit durch A und deren Bildflächtrace $p\,1\,q$ durch 1 senkrecht auf yz geht. Die Gerade $1\,1'$ nach der Drehung steht bekanntlich senkrecht auf der durch das Auge gehenden Meridianebene, muss sonach in der Perspektive durch r auf den Verschwindungspunkt v_1 zugehen, welcher im Durchschnitte der Geraden F_v und $O_1 v_1$ (senkrecht auf $O_1 A'_1$) sich ergibt. Da jedoch v_1 zumeist ausser die Zeichnungsfläche fällt, so ist nothwendig, sich mit einem aliquoten Theile $\frac{v_1}{n} A_1$ der Entfernung $v_1 A'_1$ zu behelfen. Man hat sodann blos die Länge $r A'_1$ geometrisch in n gleiche Theile zu theilen, den dem Punkte A'_1 nächstliegenden Theilpunkt mit $\frac{v_1}{n}$ zu verbinden und die verlangte Perspektive $r\,II\,v_1$ durch r geometrisch parallel zur letzterhaltenen Geraden zu ziehen.

Endlich wird auf dieser Geraden $r v_1$ von r zu beiden Seiten die Länge $b\,1$ abzuschneiden sein. Hiezu ist am besten der Theilungspunkt T ($v_1 O_1 = v_1 T$) zu benützen, weil er fast immer innerhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche fällt. Man hat also die Gerade $T r r'$ bis zum Durchschnitte r' mit $p\,1\,q$ zu ziehen, $r' p = r' q = b\,1$ zu machen und p und q mit T zu verbinden, um im Durchschnitte der letzteren mit $r v_1$ die Punkte $I\, II$ der Contour und in $s I$ und $s II$ die diesen Punkten zukommenden Tangenten zu erhalten.

Würde r sehr nahe an die Gerade F_v fallen, so ergeben sich die Punkte I und II durch sehr schiefe Schnitte, also ungenau. Alsdann wäre es gerathen, sich vorerst die Gerade $r v_1$ um $p q$ in die Bildfläche zu legen, indem man die Bildflächprojektion und den Abstand des Punktes r im Raume von der Bildfläche bestimmt, durch den umgelegten Punkt R die Gerade $P Q$ parallel zu $O_1 v_1$ zieht, von R aus die Stücke $R P = R Q = b\, 1$ abschneidet und die so erhaltenen Punkte P, Q um $p q$ nach I, II zurückführt.

Dass der Punkt v_1 gleichfalls im Durchschnitte der Geraden E_v und F_v liegen muss, folgt daraus, weil die Gerade $I\, II$ im Raume sowohl in der Ebene $p q$, F_v als auch in der Parallelkreisebene, deren Verschwindungslinie E_v ist, liegt.

Besondere Punkte des perspektivischen Umrisses ergeben sich auch hier etwas einfacher.

Sucht man z. B. jene Punkte V, VI, VII, $VIII$, in welchen die Contour von der Axe $y z$ geschnitten wird, welche also in der anfangs gewählten, durch das Auge gehenden Meridianebene liegen, so hat man blos aus O die möglichen Tangenten $O\, VIII\, 8$, $O\, VII\, 7$, $O\, VI\, 6$, $O\, V\, 5$ an $\omega_1\, \omega_2$ zu ziehen. Die Tangenten in diesen Punkten der Contour gehen gegen den Punkt v_1.

Sollen jene Punkte der Contour gefunden werden, welchen zu $y z$ parallele Tangenten zukommen, so ist zu berücksichtigen, dass für diesen Fall das perspektivische Bild der Kegelspitze in unendliche Entfernung fallen, diese somit im Durchschnitte der Kegelaxe mit jener Ebene, welche durch das Auge parallel zur Bildfläche geht, liegen muss. Die um $y z$ in die Bildfläche gedrehte Kegelspitze befindet sich demzufolge in der Geraden $Y Z$ in einer der Länge $O v$ gleichen Entfernung von d. Werden somit aus dem so erhaltenen Punkte, welcher nebenbei bemerkt, auch als Durchschnitt der Geraden $Y Z$ und $O s_2$ (durch O parallel zu $y z$) angesehen werden kann, an den Meridian $\omega_1\, \omega_2$ die Tangenten $a_1 n_1$ verzeichnet (die zweite Tangente an den inneren Theil der Fläche wurde nicht gezogen) und die in dem betreffenden Parallelkreise $m_1\, o_1\, n_1$ liegenden Punkte III, IV in gleicher Weise wie die Punkte I und II des Parallelkreises

mn bestimmt*), so entsprechen denselben zu yz parallele Tangenten.

Von besonderer Wichtigkeit sind bei einzelnen Flächen die sogenannten Rückkehrpunkte der Contour, d. s. jene Contourpunkte, in welchen die Curve plötzlich abbricht, oder eigentlich blos einen entgegengesetzten Zug annimmt. Da die Berührungscurve des Sehkegels mit der Fläche im Raume continuirlich ist, so können offenbar Rückkehrpunkte nur dann vorkommen, wenn an einzelnen Stellen der Curve im Raume die Tangente derselben durch das Auge geht, sich also perspektivisch als Punkt darstellt. Aus diesem folgt, dass man, um solche Punkte zu fixiren, blos an die durch Verbinden der einzelnen Projektionen $1, 2 \ldots 8$ — $6, 3, 4, 7$ sich ergebende Projektion der Berührungscurve auf der Meridiancurve yz aus O die möglichen Tangenten $O3$, $O4$ zu ziehen, durch die Berührungspunkte 3, 4 die Parallelkreise $m_2 o_2 n_2$ zu legen und die Spitze S_1 des bezüglichen berührenden Kegels durch die Tangente $m_2 S_1$ in m_2 zu bestimmen habe.

In der Figur ist die Construktion blos für die im Bilde sichtbaren Rückkehrpunkte IX und X durchgeführt. Es schneidet nämlich der Sehstrahl $O3$ die Axe yz in r_2, daher die Punkte IX und X in der Geraden $r_2 v_1$ in einem der Ordinate $3 b_2$ gleichen Abstande von yz liegen. Die Perspektive der Kegelspitze S_1 fällt nach s_1 und gibt mit IX und X verbunden die Tangenten dieser äussersten Punkte des Curvenstückes $IX\ VI\ X$.

Wie sich das eben durchgeführte Constructionsverfahren gestalten wird, wenn die Axe yz in der Bildebene liegt, also v in unendlicher Entfernung angenommen wird, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung.

Ist die Rotationsfläche vom zweiten Grade, so wird man behufs der Bestimmung eines conjugirten Axenpaares am zweckmässigsten die beiden Punkte, welchen zur Axe der Rotationsfläche geometrisch parallele Tangenten zukommen und die in die Axenperspektive fallenden Punkte des Umrisses angeben. Die Verbindungslinie der ersteren Punkte bildet einen Diameter und die Verbindungslinie der letzteren, eine zu dem zweiten conjugirten Durchmesser parallele Sehne der Contour, aus welchen beiden Stücken dieser Durchmesser selbst so gefunden werden kann, wie es in §. 129 angegeben wurde.

*) Die gleichen Constructionslinien sind hiebei auch mit denselben Buchstaben bezeichnet, welchen jedoch der Zeiger 1 beigesetzt wurde.

Tangirungsebenen an Umdrehungsflächen.

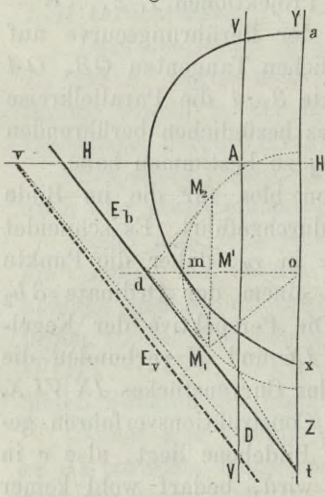
§. 133.

Aufgabe.

Es ist durch einen Punkt der Oberfläche eines Rotationskörpers eine berührende Ebene zu legen.

Lösung. Es sei amx (Fig. 259) die Perspektive der zur Bildfläche parallelen Meridiancurve, YZ die Drehungsaxe und mo der Halbmesser des durch den gegebenen Punkt M gehenden Parallelkreises. Der Punkt M sei durch seine orthogonale Projektion M' auf der Hauptmeridianebene angenommen worden. Es ist sodann $M_2\,m\,M_1$ der parallel zur Bildfläche gedrehte Parallelkreis, daher unserer Annahme die beiden Punkte M_1 und M_2 der Oberfläche entsprechen. AD sei die Augdistanz.

Fig. 259.



Wir wollen die Berührungsebene für den Punkt M_1 der Fläche bestimmen. Da der Parallelkreis $M_2\ m\ M_1$ durch den Punkt M der Fläche geht, so wird, wenn man an denselben in M_1 eine Tangente $M_1 d$ führt, $M_1 d$ die umgelegte Tangente Md an den Parallelkreis im Raume sein, durch welche die Berührungsebene geht. Die durch D zu $M_1 d$ Parallele Dv trifft die Horizontslinie im Verschwindungspunkte v der Tangente Md, daher M mit v verbunden die Perspektive dieser Tangente ist, welche durch d hindurchgehen muss, weil dieser Punkt bei der Drehung ungeändert bleibt.

Denkt man sich ferner durch M die Meridianebene gelegt und dieselbe in den Hauptmeridian gedreht, so gelangt M nach m. Die in m an den Hauptmeridian geführte Tangente trifft die Axe YZ in t, welcher Punkt beim Zurückdrehen ungeändert bleibt, daher t mit d verbunden die Trace E_b der Berührungsebene auf der Hauptmeridianebene gibt, zu welcher die Verschwindungslinie E_v dieser Ebene durch v parallel gezogen werden muss.

Auf gleiche Weise kann die Berührungsebene im Punkte M_2 gefunden werden.

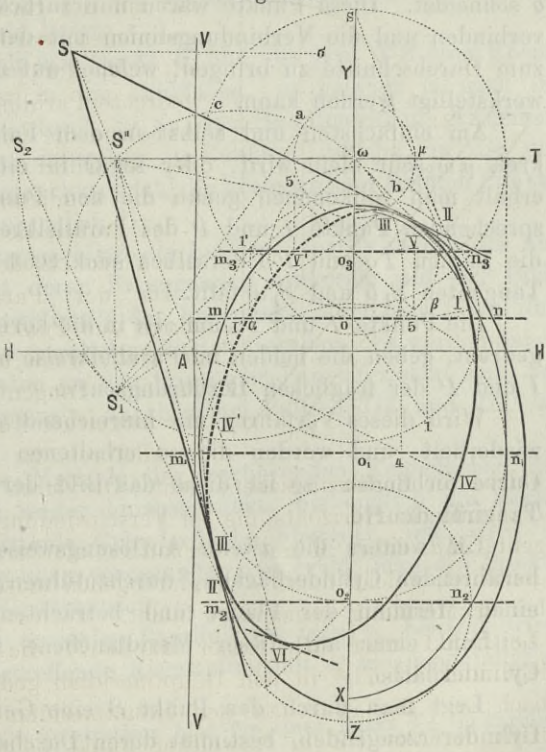
§. 134.

Aufgabe.

Es ist durch einen ausserhalb liegenden Punkt an eine Umdrehungsfläche ein berührender Kegel zu legen und dessen Berührungscurve zu bestimmen.

Lösung. Denken wir uns, der Einfachheit halber, wieder die Axe YZ (Fig. 260) der Rotationsfläche in der Bildebene liegend und den Punkt S durch seine orthogonale Projektion S'' auf der Bildebene bestimmt, so kann man, zum Behufe der Auffindung einzelner Punkte der Berührungscurve, einen doppelten Weg einschlagen, nämlich wie bei der Construktion des sichtbaren Umrisses, berührende Kegel- oder Cylinderflächen anwenden.

Fig. 260.



Ist also $n n_1 n_2 X$ die Meridiancurve (blos auf einer Seite der Axe verzeichnet), mn der Durchmesser eines Parallelkreises und ns die Tangente im Endpunkte desselben an die Meridiancurve, so hat man an die durch Rotation der Tangente ns um YZ entstandene Kegelfläche durch S die berührenden Ebenen zu legen und jene Punkte der Berührungserzeugenden zu bestimmen, welche gleichzeitig in der Oberfläche des Rotationskörpers liegen. Zu diesem Zwecke denke man sich durch S eine horizontale Ebene geführt, deren Bildflächtrace $S'' T$ durch S'' geht.

Diese Ebene schneidet die Kegelfläche in einem Kreise, dessen Radius $\mu \omega$ ist. Wird diese Horizontalebene, sammt dem in ihr liegenden Punkte S und dem Kreise $\mu \omega$, um $S'' T$ in die Bildfläche gedreht, so fällt der Punkt S nach S_1, während der Kreis aus ω mit dem Radius $\mu \omega$ zu beschreiben ist. Von S_1 sind nun die beiden Tangenten an den Kreis zu ziehen und die Berührungspunkte a und b zu bestimmen, was am einfachsten dadurch erreicht wird, dass man über $S_1 \omega$ als Durchmesser einen Kreis $S_1 S'' \omega$ beschreibt, welcher den ersteren in den Punkten a und b schneidet. Diese Punkte wären nun zurückzudrehen, mit s zu verbinden und die Verbindungslinien mit dem Parallelkreise mn zum Durchschnitte zu bringen, welches auf mehrfache Weise bewerkstelligt werden kann.

Am einfachsten und selbst in dem Falle, wo der Schnittkreis $\mu \omega$ sehr klein wird, oder sogar in einen Punkt übergeht, erhält man vollkommen genau die den Punkten a und b entsprechenden Punkte 1 und $1'$ des Parallelkreises mn, wenn man die Radien $1o$ und $1'o$ derselben senkrecht auf die bezüglichen Tangenten $S_1 b$ und $S_1 a$ fällt.

Die Punkte 1 und $1'$, um mn in die horizontale Lage zurückgedreht, geben die beiden im Parallelkreise mn gelegenen Punkte I und I' der fraglichen Berührungscurve.

Wird dieses Verfahren mit hinreichend vielen Parallelkreisen wiederholt, und werden die so erhaltenen Punkte durch eine Curve verbunden, so ist diese das Bild der in Rede stehenden Tangirungscurve.

Um weiters die zweite Auflösungsweise, nämlich die mit berührenden Cylinderflächen, durchzuführen, wählen wir irgend einen Meridian der Fläche und betrachten denselben als die Leitlinie einer auf dieser Meridianebene senkrecht stehenden Cylinderfläche.

Legt man durch den Punkt S eine Gerade parallel zu den Cylindererzeugenden, bestimmt deren Durchschnitt mit der Meridianebene und dreht diese um YZ in den Hauptmeridian, wobei der Durchschnittspunkt in die Gerade $S'' T$ fällt, so hat man aus diesem Punkte die möglichen Tangenten an den Hauptmeridian zu führen und die Berührungspunkte in die angenommene Meridianebene zurückzudrehen.

Es ist einleuchtend, dass man auch bei dieser Methode die durch S gelegte, in die Bildfläche gedrehte Horizontalebene benützen wird.

Noch sei hier einiger besonderer Punkte Erwähnung gethan.

Die wichtigsten hievon sind jene, welche den sichtbaren Theil der Curve von dem gedeckten trennen und welche sonach im Umrisse der Fläche liegen. Wird dieser Umriss als Leitlinie eines die Umdrehungsfläche berührenden Kegels gedacht, so ist, wie aus dem Begriffe des Umrisses hervorgeht, die Spitze desselben das Auge. Es werden sonach die Bildflächtracen der durch den Punkt S im Raume an diese Kegelfläche gelegten, berührenden Ebenen durch die Perspektive S tangirend an den Umriss zu ziehen sein, wo sodann die Berührungspunkte II und II' die zu suchenden Punkte liefern.

Legt man durch den Punkt S und die Axe YZ eine Ebene und dreht dieselbe in die Bildfläche, so gelangt S nach S_2 ($\omega S_2 = \omega S_1$). Die durch S_2 an den Hauptmeridian gezogenen Tangenten berühren denselben in Punkten, welche, in die ursprüngliche Ebene zurückversetzt, die höchsten und tiefsten Punkte der Berührungscurve geben.*)

Wird der Hauptmeridian als Leitlinie der Cylinderfläche angenommen, so sind deren Erzeugenden senkrecht auf der Bildfläche und es ist mithin S'' der Fusspunkt jener aus S zu den Cylindererzeugenden parallel geführten Geraden. Es werden daher aus S'' die Tangenten an den Hauptmeridian zu ziehen sein, um die der Berührungscurve angehörigen Punkte III und III' zu erhalten.

Wird bei der Methode der berührenden Kegelflächen die Kegelspitze immer weiter hinausgerückt, bis endlich die Kegelfläche in eine vertikale Cylinderfläche übergeht, und wird in gleicher Weise wie oben vorgegangen, so erhält man die Punkte IV und IV' der Berührungscurve.

Wenn endlich derjenige Parallelkreis $m_3\, n_3\, o_3$ benützt wird, bei welchem die betreffende Kegelspitze mit ω zusammenfällt, so

*) Hier wurde die Construktion blos für einen Punkt VI im Parallelkreise $m_2\, n_2$ durchgeführt.

Auch ist zu bemerken, dass die so erhaltenen Punkte wohl die höchsten und tiefsten Punkte der Curve im Raume, jedoch nicht die der Perspektive sind, dass denselben mithin horizontale Tangenten entsprechen, welche auf einen in der Horizontslinie liegenden Verschwindungspunkt zugehen.

übergeht der Schnittkreis dieses Kegels mit der Horizontalebene $S_2 T$ in einen Punkt ω, woraus folgt, dass im Parallelkreise $m_3 n_3$ der Durchmesser $5 5'$ senkrecht auf $S_1 \omega$ zu führen ist, um die Punkte 5 und $5'$ zu erhalten, welche um $m_3 n_3$ in die horizontale Lage zurückversetzt, die Punkte V und V' der Curve liefern.

Es ist auch hier zweckmässig, sich vorerst alle besonderen Punkte zu bestimmen und hierauf nach der einen oder nach der andern Methode Punkte dort aufzusuchen, wo sie zur genauen Verzeichnung der Curve noch nothwendig sind.

§. 135.

Aufgabe.

Es ist parallel zu einer gegebenen Geraden an eine Umdrehungsfläche ein berührender Cylinder zu legen und die Berührungscurve zu bestimmen.

Lösung. Diese Aufgabe lässt sich ebenfalls auf doppelte Weise, nämlich entweder mit Hilfe von berührenden Kegel-, oder Cylinderflächen durchführen, wovon jedoch die erste Methode die einfachere ist.

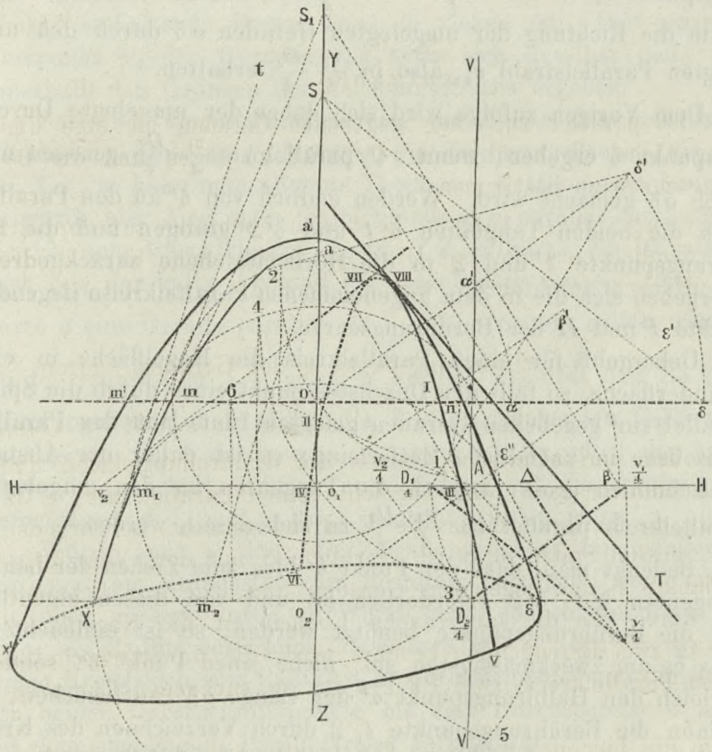
Es sei der Verschwindungspunkt v der Geraden, durch $\frac{v}{4}$ $\left(A\frac{v}{4} = \frac{1}{4} A v\right)$ gegeben, $a m X$ (Fig. 261) der Hauptmeridian, $a' m' x'$ der perspektivische Umriss der Umdrehungsfläche und YZ die Rotationsaxe. Man betrachte einen Parallelkreis, z. B. mn, als die Leitlinie eines die Umdrehungsfläche berührenden Kegels, dessen Spitze in S ist, verbinde S mit dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden und lege auf bekannte Weise durch Sv die tangirenden Ebenen an die Kegelfläche, welche in zwei Erzeugenden berührt wird, die im Durchschnitte mit dem Parallelkreise zwei Punkte der zu suchenden Curve bestimmen.

Um die hier nothwendigen Constructionen einfach durchzuführen, ohne die Perspektive des Parallelkreises zu verzeichnen, kann folgends vorgegangen werden.

Man bestimme vorerst den Abstand des Durchschnittspunktes der Geraden Sv mit der Parallelkreisebene von der Axe YZ, welcher erhalten wird, wenn man durch Sv und die Axe eine Ebene legt und selbe um YZ in die Bildfläche dreht. Hiebei wird es sich vorzugsweise um die Richtung der in die Bildfläche gedrehten Geraden handeln, welche sich bekanntlich durch Drehung des Parallelstrahls v um die Trace $v\,v_1$ ergibt.

Da hier die Construktion mit Benützung aliquoter Theile, also mit $\frac{v}{4}\,\frac{v_1}{4}$ vorgenommen wurde, so bestimmt $\frac{v}{4}\,\frac{D_1}{4}$ die besagte Richtung. Es ist nämlich $A\,\frac{D_2}{4}$ gleich dem vierten Theile

Fig. 261.



der Augdistanz und die Länge $\frac{v_1}{4}\,\frac{D_2}{4}$ nach $\frac{v_1}{4}\,\frac{D_1}{4}$ zu übertragen. Wird demnach $S\,\delta$ parallel zu $\frac{D_1}{4}\,\frac{v}{4}$ bis zum Durchschnitte δ mit der Trace $m\,n$ gezogen, so ist $\delta\,o$ der zu suchende Abstand.

Weiters denke man sich die Horizontalebene $m\,n$ in die Bildfläche gedreht, woselbst der Parallelkreis über $m\,n$ zu beschreiben ist und es nur noch darauf ankommt, den umgelegten Durchstosspunkt δ zu ermitteln, dessen Entfernung vom Mittelpunkte o soeben gefunden wurde.

Offenbar ist die Gerade $o\delta$ im Raume nichts anders als die orthogonale Projektion der Geraden Sv auf der Parallelkreisebene und muss daher auch parallel zur orthogonalen Projektion des Parallelstrahls v der gegebenen Geraden auf der Horizontsebene sein. Diese Projektion wird jedoch durch den Verschwindungspunkt v_1, wobei $Av_1 = 4 \,.\, A\frac{v_1}{4}$ ist, angegeben, und es wird mithin die Richtung der umgelegten Geraden $o\delta$ durch den umgelegten Parallelstrahl v_1, also in $\frac{v_1}{4}\frac{D_2}{4}$ erhalten.

Dem Vorigen zufolge wird sich daher der umgelegte Durchstosspunkt δ ergeben, wenn $o\delta'$ parallel zu $\frac{v_1}{4}\frac{D_2}{4}$ gezogen und gleich $o\delta$ gemacht wird. Werden endlich von δ' an den Parallelkreis die beiden Tangenten $\delta' 1$ und $\delta' 2$ gezogen und die Berührungspunkte 1 und 2 in die Horizontalebene zurückgedreht, so ergeben sich die in dem angenommenen Parallelkreise liegenden Punkte I und II der Berührungscurve.

Uebergeht für einen Parallelkreis die Kegelfläche in eine Cylinderfläche, so fällt der Durchstosspunkt einer durch die Spitze parallel zur gegebenen Geraden gelegten Linie mit der Parallelkreisebene in unendliche Entfernung; es ist daher der Abstand $o\delta$ unendlich gross, folglich die Tangenten an den umgelegten Parallelkreis parallel zu $\frac{v_1}{4}\frac{D_2}{4}$ zu ziehen sein werden.

Bedenkt man, dass der Punkt δ' blos zum Ziehen der beiden Tangenten $\delta' 1$, $\delta' 2$ erforderlich ist und von diesen eigentlich nur die Berührungspunkte benützt werden, so ist einleuchtend, dass es am zweckmässigsten sei, nicht jenen Punkt δ', sondern sogleich den Halbirungspunkt α' der Länge $o\delta'$ aufzusuchen, da sodann die Berührungspunkte 1, 2 durch Verzeichnen des Kreisbogens $2\,o\,1$ aus dem Mittelpunkte α' leicht erhalten werden und hieraus überdies noch der Vortheil erwächst, dass diese Halbirungspunkte nicht so häufig ausser die Zeichnungsfläche fallen, wie dies bei den umgelegten Durchstosspunkten δ' eintritt.

Halbirt man die Länge $\frac{v_1}{4}\frac{D_1}{4}$ in Δ und verbindet Δ mit $\frac{v}{4}$, so wird man durch S anstatt der Geraden $S\delta$ jene $S\alpha$ parallel zu $\Delta\frac{v}{4}$ zu ziehen und die Länge $o\alpha$ nach $o\alpha'$ zu übertragen haben, um den gewünschten Halbirungspunkt zu erhalten.

Hier wurden auf diese Weise auch die in der Horizontsebene, also im Parallelkreise $m_1 o_1$ liegenden Punkte *III* und *IV* der Berührungscurve gefunden. S_1 ist die Spitze des berührenden Kegels, daher, wenn $S_1 \beta$ parallel zu $\Delta \frac{v}{4}$ geführt und $o_1 \beta = o_1 \beta'$ gemacht wird, sich in β' der betreffende Halbirungspunkt ergibt, aus welchem, als Mittelpunkt, der die umgelegten Berührungspunkte enthaltende Bogen $4 o_1 3$ zu ziehen ist. Der umgelegte Fusspunkt δ'_1 der Geraden $S_1 v$ hätte sich daselbst nicht mehr innerhalb den Gränzen der Zeichnungsfläche ergeben.

Fällt bei einem Parallelkreise die Spitze des betreffenden Berührungskegels zu weit ausser die Zeichnungsfläche, wie z. B. bei $X o_2$, so kann man aliquote Theile der Entfernungen benützen. So wurde hier $X o_2$ in m_2 halbirt und $m_2 a$ parallel zur Tangente Xt bis zum Durchschnitte a mit YZ geführt. Es ist alsdann auch $o_2 a$ der halbe Abstand der Kegelspitze von o_2. Nun kann durch a eine Gerade parallel zu $\frac{v}{4} \frac{D_1}{4}$, oder wie es hier gemacht wurde, parallel zu $\Delta \frac{v}{4}$ gezogen werden, woselbst man im ersten Falle sogleich den Abstand des in Rede stehenden Halbirungspunktes von der Rotationsaxe, im letztern Falle jedoch den halben Abstand $o_2 \varepsilon$ erhält, welcher nun zweimal auf die Richtung $o_2 \varepsilon'$ aufgetragen, d. i. $o_2 \varepsilon' = 2 o_2 \varepsilon$ gemacht werden muss.

Würde auch ε' über die Zeichnungsgränze hinausfallen, so wird man am einfachsten zum Resultate gelangen, wenn man so wie oben gezeigt wurde zu Werke geht, jedoch den Kreis über $m_2 o_2$ als Radius beschreibt, denselben aus ε'' ($o_2 \varepsilon'' = o_2 \varepsilon$) mit einem Kreisbogen vom Radius $o_2 \varepsilon''$ durchschneidet und die Radien der beiden Durchschnittspunkte bis zum Durchschnitte *5* und *6* mit dem umgelegten Parallelkreise verlängert.

Die zweite Auflösungsweise dieser Aufgabe, d. i. jene mit Benützung von berührenden Cylindern, ist etwas umständlicher, jedoch für einzelne Lagen der Meridianebene vortheilhaft anzuwenden.

Nehmen wir nämlich den Hauptmeridian als Leitlinie einer Cylinderfläche an, deren Erzeugenden auf der Bildfläche senkrecht stehen und suchen jene Ebene, welche parallel zur gegebenen Geraden und zu den Erzeugenden ist, so muss Av die Verschwindungslinie sein und die Trace dieser Ebene auf der Meridianebene parallel zu Av gehen.

Zieht man daher parallel zu $\frac{v}{4}A$ Tangenten an den Hauptmeridian, so berühren dieselben den letzteren in Punkten, welche der Berührungscurve angehören.

Wird ferner jene Meridianebene gewählt, welche parallel zur gegebenen Geraden ist, deren Verschwindungslinie sonach die vertikale Gerade $v v_1$ ist, und wird dieser Meridian in die Bildfläche gedreht, so ist $\frac{v}{4}\frac{D_1}{4}$ (bereits früher gefunden) die Richtung des in gleicher Weise gedrehten Parallelstrahls. Es werden mithin die in der angenommenen Ebene liegenden Punkte der Berührungscurve gefunden, wenn man parallel zu $\frac{v}{4}\frac{D_1}{4}$ an den Hauptmeridian Tangenten führt und die Berührungspunkte in die frühere Ebene, nach *VII*, zurückdreht. Die Tangente in diesem höchsten Punkte der Berührungscurve wird erhalten, wenn man $\frac{D_2}{4}\frac{v_2}{4}$ senkrecht auf $\frac{D_2}{4}\frac{v_1}{4}$ errichtet, $Av_2 = 4.A\frac{v_2}{4}$ macht und v_2 mit *VII* vereint.

Wichtige Punkte der Curve werden erhalten, wenn man aus v an den Umriss der Rotationsfläche die möglichen Tangenten (hier also vT) führt. In den Berührungspunkten (*VIII*....) ergeben sich sodann die Gränzen des sichtbaren Theiles der Berührungscurve.

Denn denkt man sich das Auge als die Spitze eines um die Rotationsfläche beschriebenen Kegels und an diesen parallel zur gegebenen Geraden die möglichen Tangirungsebenen gelegt, so werden ihre Bildflächtracen durch v tangirend an die Bildflächtrace der Kegelfläche, d. i. an den Umriss zu ziehen sein. Dass diese Gerade vT zugleich zur Tangente der Berührungscurve im Punkte *VIII* derselben wird, ist selbstverständlich.

In jedem Falle ist es gerathen, vorerst die besonderen Punkte der Berührungscurve aufzusuchen und sodann auf die allgemeine Weise so viel Zwischenpunkte zu bestimmen, als man zum Ziehen der Curve für nothwendig erachtet.

---

*) Specielle Construktion der Berührungscurven an Rotationsflächen vom zweiten Grade finden sich im 55. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien vor. (Siehe E. Koutny: „Construktion der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen.)

Kapitel XIII.

Schnitte krummer Flächen mit Ebenen.

Kegel- und Cylinderflächen.

§. 136.

Allgemeine Bemerkungen.

Da eine Kegelfläche als Pyramide, eine Cylinderfläche als Prisma von unendlich grosser Seitenanzahl betrachtet werden kann, so findet das im Kapitel X Gesagte auch hier seine Anwendung und wird daher bei den folgenden Erörterungen als Grundlage dienen können.

Aus der unendlich grossen Flächenzahl folgt unmittelbar, dass die einzelnen Pyramiden- und Prismenflächen nur eine unendlich kleine Ausdehnung nach der Breite haben, ihre Ebenen sonach nichts anders als Tangirungsebenen an die einzelnen Erzeugenden der Kegel- und Cylinderfläche sind. Hieraus folgt ferner, dass die zweite dort angeführte Methode (wo durch die einzelnen Seitenflächen Ebenen gelegt und mit der schneidenden Ebene zum Durchschnitt gebracht werden), für diese Art krummer Flächen insoweit angewendet werden könnte, als man an mehr oder weniger nahe an einander gelegene Erzeugenden der Fläche die tangirenden Ebenen führen und dieselben mit der gegebenen Ebene zum Durchschnitt bringen würde. Die so gefundenen Schnittlinien würden sodann die Tangenten an die Schnittcurve in den ihnen zugehörigen Punkten der Erzeugenden geben, indem sie, wie bei eckigen Körpern, den Schnitt einer Seitenfläche, d. i. ein Element der Curve in sich enthalten.

Umgekehrt enthält der zuletzt aufgestellte Satz die Lösung der Aufgabe: „An einen Punkt der gefundenen Schnittcurve die Tangente zu ziehen.“ Dies wird sonach in der Weise geschehen, dass man in dem gegebenen Punkte die Tangirungsebene an die krumme Fläche legt und deren Schnitt mit der schneidenden Ebene sucht, welcher die verlangte Tangente gibt.

Dieser Satz hat auch seine Gültigkeit für alle andern Flächen, was leicht einzusehen ist, wenn man sich die krumme Fläche als ein aus unendlich vielen Elementen zusammengesetztes Polyeder denkt. Einfach ergibt sich aber auch dieser Satz aus der Eigenschaft der Tangirungsebenen, dass dieselben alle Tangenten der in dem betreffenden Punkte auf der krummen Oberfläche gezogenen Curven in sich enthalten, daher die Tangente an die Schnittcurve, in der zugehörigen Berührungsebene und in der Schnittebene liegend, sich als Durchschnitt dieser beiden Ebenen ergeben muss.

Auf den Schnitt von Kegel- und Cylinderflächen übergehend, ist klar, dass die Auflösungsweise mit Hilfe von Tangirungsebenen viel zu umständlich wäre, als dass man dieselbe anwenden würde. Es ist daher für diese Flächen nur diejenige Auflösungsweise anzurathen, wo man den Durchschnitt einer Reihe von Erzeugenden mit der Schnittebene aufsucht. Behufs der Wahl der durch die Erzeugenden zu legenden Hilfsebenen ist zu beachten, dass die Erzeugenden von den Hilfsschnitten nicht unter zu spitzen Winkeln getroffen werden sollen und dass es zweckmässig sei, diese Hilfsebenen bei Cylinderflächen zu einander parallel, bei Kegelflächen aber derart zu legen, dass sie sich in einer durch die Spitze gehenden Geraden schneiden. Diese Ebenen bildflächprojecirend anzuwenden, wird wohl der schiefen Schnitte halber nur selten rathsam sein und sonst auch keine beachtenswerthe Vereinfachung der Construktion gewähren.

§. 137.

Aufgabe.

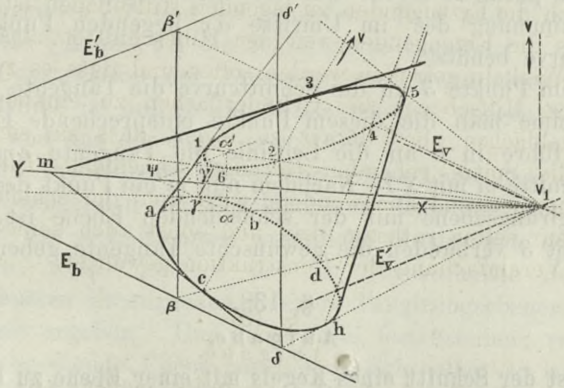
Es ist der Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene zu bestimmen.

Lösung. Es sei $E_b\, E_v$ (Fig. 262) die Leitlinienebene der Cylinderfläche, v der Verschwindungspunkt der Erzeugenden und $E'_b\, E'_v$ die schneidende Ebene. Man wähle in der Verschwindungslinie E_v der Basisebene einen Punkt v_1 und verbinde denselben mit v, wodurch man die gemeinschaftliche Verschwindungslinie $v\,v_1$ der Hilfsebenen, in v_1 den Verschwindungspunkt der Tracen der Hilfsebenen auf der Basisebene und im Durchschnitte v_2 der beiden Verschwindungslinien $v\,v_1$ und E'_v den Verschwindungspunkt v_2 sämmtlicher Tracen auf der Schnittebene erhält. Da hier jedoch der Punkt v_1 im Durchschnitte der beiden Verschwindungslinien E_v und E'_v angenommen wurde, so fällt auch v_2 mit v_1 zusammen.

Zieht man nun durch v_1 irgend eine die Leitlinie in c und d schneidende Gerade $v_1\,\beta$, so kann man durch diese und die geraden Erzeugenden cv und dv eine Hilfsebene legen, welche vv_1 zur Verschwindungslinie und $\beta\beta'$, parallel zu vv_1, zur Bildflächtrace hat. Letztere schneidet E'_b in β', und da v_1 ein Punkt des Schnittes ist, so gibt $v_1\beta'$ die Trace der Hilfsebene auf der Schnittebene, welche die Erzeugenden cv und dv in den Punkten *3* und *4* der Schnittcurve trifft.

Auf einige Punkte der Schnittlinie ist besonders Rücksicht zu nehmen, d. s. die Punkte in den sichtbaren Umrissen und jene, an welche die Hilfsschnitte zugleich Tangenten sind. Was die ersteren anbelangt, so ist klar, dass man einfach durch die

Fig. 262.



Erzeugenden, welche den Umriss bilden, Hilfsebenen zu legen und wie früher vorzugehen hat. Die betreffenden Erzeugenden werden sodann Tangenten an die Curve in diesen Punkten sein und in jenen Fällen, wo die Lage der schneidenden Ebene eine solche ist, dass ein Theil der Schnittcurve durch den vordern Theil der Fläche gedeckt erscheint, werden dieselben die Gränzpunkte des sichtbaren Theils der Schnittlinie angeben. Aehnliches gilt allgemein für jede Fläche.

Zieht man ferner aus v_1 die beiden Tangenten an die Leitlinie und bestimmt auf gleiche Weise den Schnitt der betreffenden Erzeugenden, wie z. B. jenen *5* der Erzeugenden vh, so ist die Schnittlinie $\delta' v_1$ zugleich Tangente im Punkte *5* der Schnittcurve; denn die Ebene $\delta\delta'$, vv_1 ist zugleich Tangirungsebene der Cylinderfläche, daher ihr Schnitt mit $E'_b E'_v$ Tangente an die Schnittcurve. Die zweite aus v_1 an die Leitlinie gezogene Tangente $v_1\gamma$ trifft E_b ausserhalb der Zeichnungsfläche. Man kann sich in einem solchen Falle leicht helfen, wenn man durch einen beliebigen Punkt ψ der Schnittlinie YX der beiden Ebenen $E_b\,E_v$, $E'_b\,E'_v$ wählt und durch denselben eine zur Bildfläche parallele Hilfsebene legt. Es sind sodann $\psi\,\alpha$ parallel zu E_b und $\psi\,\alpha'$ parallel zu E'_b die Tracen dieser Hilfsebene auf der Basis- und Schnittebene. Wird nun $v_1\,\gamma$ bis zum Durchschnitte γ mit $\psi\,\alpha$ verlängert, hierauf $\gamma\,\gamma'$ parallel zu $\beta\,\beta'$ bis zum Durchschnitte γ' mit $\psi\,\alpha'$ gezogen, so ist $\gamma_1 v_1$ der zu suchende Hilfsschnitt, welcher die Erzeugende $\gamma\,v$ in *6* schneidet und die Schnittcurve in diesem Punkte berührt. Hier wurde der Punkt ψ so gewählt, dass die Trace $\psi\,\alpha$ durch den Punkt γ geht, und die durch ψ gelegte zur Bildfläche parallele Ebene auf die eben angegebene Weise auch zur Bestimmung des im Umrisse $a\,v$ liegenden Punktes *1* der Schnittcurve benützt.

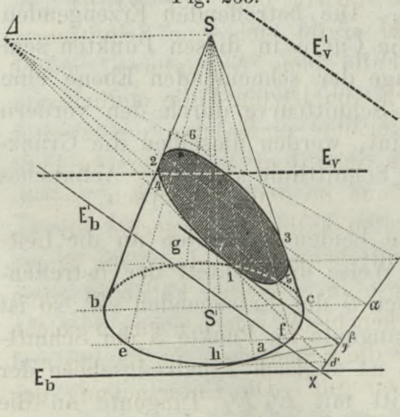
Ist im Punkte *3* an die Schnittcurve die Tangente zu ziehen, so bestimme man die diesem Punkte entsprechende Erzeugende $c\,v$ und führe in c an die Leitlinie die Tangente $c\,m$ bis zum Durchschnitte m mit $X\,Y$. Nachdem nun m ein Punkt des Schnittes der Tangirungsebene mit der schneidenden Ebene ist, so muss dieser mit *3* verbunden die gewünschte Tangente geben.

§. 138.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt eines Kegels mit einer Ebene zu bestimmen.

Fig. 263.



Lösung. Nehmen wir die Horizontalebene $E_b\,E_v$ (Fig. 263) als Ebene der Leitlinie, S als Kegelspitze und die auf $E_b\,E_v$ gefällte Senkrechte $S\,S'$ als dessen Höhe an; die schneidende Ebene sei $E'_b\,E'_v$ und $x\,y$ ihr Schnitt mit der Basisebene.

Um die Schnittcurve zu bestimmen, ziehe man durch die Spitze irgend eine Gerade $S\Delta$ so, dass sie parallel zur Basisebene ist und lege durch dieselbe die schneidenden Hilfsebenen. Hier wurde die Gerade $S\Delta$ parallel zur Bildfläche angenommen, wesshalb die Tracen der Hilfsebenen auf der Basisebene zu E_b parallel sein müssen. Die Tracen auf der schneidenden Ebene hingegen gehen durch den Durchstosspunkt Δ der Geraden $S\Delta$ mit letztgenannter Ebene, welcher in unserem Falle sich einfach vermittelst der durch $S\Delta$ zur Bildfläche parallel geführten Ebene $S'\alpha\Delta$ ergibt.

Wählen wir irgend eine Trace $ef\beta$, so ist $\beta\Delta$ der zugehörige Hilfsschnitt mit $E'_b E'_v$, welcher den entsprechenden Erzeugenden eS und fS in den Punkten *4* und *5* der Schnittcurve begegnet. Auf gleiche Weise werden die Punkte *2* und *3* in den Umrissen bS und cS und beliebig viele Punkte der Schnittcurve, so wie die in Bezug auf die Richtung E_b äussersten Punkte *6* und *7* in den Erzeugenden gS und hS gefunden. In *6* und *7* müssen die Hilfsschnitte $\gamma\Delta$ und $\delta\Delta$ die Schnittcurve tangiren.

Die Construktion der Tangenten an irgend einen Punkt *1* der Schnittlinie ist auf gleiche Weise wie im vorigen Falle vorzunehmen und aus der Figur ersichtlich.

Hat die schneidende Ebene eine solche Lage, dass eine oder mehrere Erzeugenden der Kegelfläche zu derselben parallel sind, so besitzt die Schnittcurve unendliche Aeste mit oder ohne Asymptoten, welch' letztere sich im Durchschnitte der durch die bezeichneten Erzeugenden gelegten Tangirungsebenen mit der Schnittebene ergeben. Um diese Fälle festzustellen, verschiebe man die schneidende Ebene parallel zu sich selbst so lange, bis sie durch die Kegelspitze geht und untersuche, ob die Leitlinie von derselben geschnitten, berührt oder gar nicht getroffen wird. Im ersten Falle ergibt sich eine Schnittcurve mit Asymptoten, im zweiten Falle ohne Asymptoten, jedoch gleichfalls mit unendlichen Aesten, im letzten Falle endlich eine begränzte Schnittlinie. Ist die Leitlinie eine Curve des zweiten Grades, so sind die betreffenden Schnittcurven im ersten Falle Hyperbeln, im zweiten Parabeln und im dritten Ellipsen, selbstverständlich jedoch, dass im ersten Falle die Hyperbel zur geraden Linie wird, wenn die Schnittebene selbst durch die Spitze hindurchgeht und dass die Ellipse in speciellen Fällen in einen Kreis übergehen kann. Zu bemerken bleibt jedoch noch für solche Fälle, dass das eben Gesagte für die Schnittcurve im Raume und nicht für die Perspektive derselben gilt. Die Untersuchung der letzteren muss selbständig vorgenommen werden.

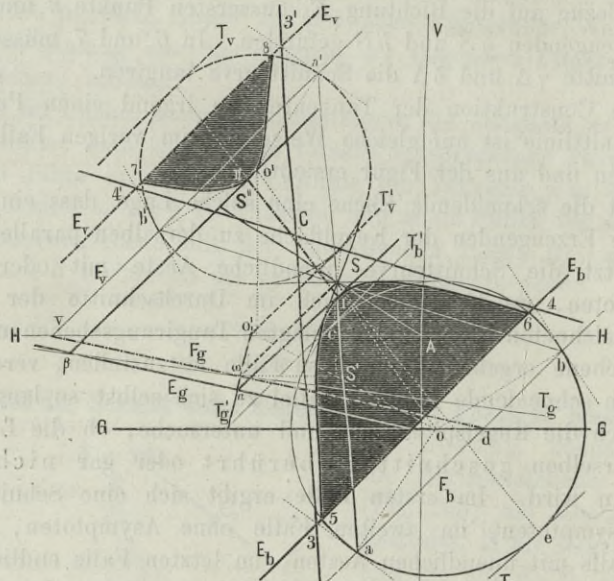
§. 139.

Aufgabe.

Es ist eine Kegelfläche mit kreisförmiger Leitlinie durch eine Ebene nach einer Hyperbel zu schneiden.

Lösung. Ist der in der Bildfläche gelegene Kreis *abcd* (Fig. 264) die Leitlinie, *S* die durch ihre Bildflächprojektion *S''* bestimmte Spitze der Kegelfläche, so wird, dem Vorhergegangenen zufolge, die schneidende Ebene derart anzunehmen sein, dass sie zu zwei Erzeugenden parallel ist. Zu diesem Behufe kann man

Fig. 264.



entweder zwei Erzeugende annehmen, durch dieselben eine Ebene legen und diese parallel verschieben, oder auf folgende Art vorgehen. Sucht man den Verschwindungspunkt *o'* jener Geraden, welche den Kreismittelpunkt *o* mit der Spitze verbindet (was durch die schneidende Gerade *ASS''* möglich ist, indem die durch *A* zu *S'' o* parallele Gerade *A o'* die Linie *o S* im Punkte *o'* trifft), ferner den Verschwindungspunkt *a'* irgend einer Erzeugenden *a S*, so ist *o'* der Mittelpunkt und *o'a'* der Radius jenes Kreises, welcher die Verschwindungslinie der Kegelfläche, d. i. den Durchschnitt eines durch das Auge, als Spitze, zu dem gegebenen Kegel parallel gelegten Kegels mit der Bildfläche darstellt. Wird die Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene so angenommen, dass sie diesen Kreis schneidet, so kann die Bildflächtrace E_b beliebig gewählt werden, um einen Hyperbelschnitt zu erhalten; denn, da die Verschwindungslinie E_v den Kreis in den Punkten *7* und *8* schneidet, so wird die Ebene $E_b E_v$ zu den beiden Erzeugenden $7\,S$ und $8\,S$ parallel sein.

Um die Schnittlinie zu construiren, könnte man auf dieselbe Weise wie im vorigen Beispiele zu Werke gehen, doch wollen wir hier eine andere, in einem solchen Falle anwendbare Methode angeben. Schneiden wir nämlich die Kegelfläche und die Ebene $E_b E_v$ durch Hilfsebenen, welche zur Bildfläche parallel sind, so wird der Schnitt mit ersterer im Bilde ein Kreis und mit letzterer eine zu E_b parallele Gerade sein, und es werden sich, im Durchschnitte beider, Punkte der zu suchenden Schnittcurve ergeben.

Um die Construktion so einfach als möglich durchzuführen, werden wir die Grundebene $G\,G$ benützen und die Trace E_g der Schnittebene auf derselben, so wie die orthogonale Projektion $o\,o'_1$ der Kegelaxe suchen.

Nehmen wir nun eine zur Bildfläche parallele Ebene durch deren Grundflächtrace an, so schneidet letztere die Trace E_g in einem Punkte, durch welchen der Hilfsschnitt mit der Ebene $E_b E_v$ parallel zu E_b geht. Ferner begegnet dieselbe Gerade der Projektion $o\,o'_1$ in einem Punkte, über welchem der Mittelpunkt jenes Kreises ist, in dem die Kegelfläche geschnitten wird. Dieser Kreis ist daher so zu ziehen, dass er den sichtbaren Umriss der Kegelfläche berührt.

Es ergeben sich somit im Durchschnitte beider Hilfsschnitte zwei Punkte der zu suchenden Hyperbel und es liefert dieses Verfahren, genügend oft wiederholt, eine Reihe von Punkten, welche entsprechend verbunden, die Schnittcurve geben.

Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Weise zu einer Ebene gelangen wird, deren Schnitt mit $E_b E_v$ den Kreis, in welchem die Kegelfläche geschnitten wird, berührt, woselbst sich demnach blos ein Punkt ergibt, an welchen der Hilfsschnitt Tangente ist. Dasselbe gilt für den zweiten Mantel des Kegels, woraus folgt, dass die Verbindungslinie dieser beiden Berührungspunkte eine Axe der Schnittcurve bildet. Diese kann, wie in der orthogonalen Projektion, leicht aufgefunden werden.

Zieht man nämlich parallel zu E_b an den Basis- und an den Verschwindungskreis die Tangenten als Bildflächtracen resp. Verschwindungslinien der zu E_b parallelen Tangirungsebenen und sucht den Durchschnitt der durch die Berührungspunkte c und e gehenden Erzeugenden cS und eS mit der Ebene $E_b E_v$, indem man die Durchschnitte der Grundflächtracen E_g, T_g, T'_g dieser Ebenen benützt, so wird man die Punkte I und II der Schnittcurve und die zu E_b parallelen Tangenten αI, βII derselben erhalten.

Sucht man die Perspektiven der Asymptoten nach dem in der orthogonalen Projektionsmethode angewandten Verfahren, indem man die Berührungsebenen in den Erzeugenden $7S$, $8S$ der Kegelfläche mit der Ebene $E_b E_v$ zum Durchschnitt bringt, so erhält man zwei Tangenten der Schnittcurve in den Punkten 7 und 8 derselben. Dies findet seine Begründung in dem Umstande, dass die Asymptoten im Raume als Tangenten an unendlich weit entfernte Punkte der Curve angesehen werden können, diese Punkte jedoch in der Perspektive zumeist in endlicher Entfernung vom Augpunkte, nämlich als Durchschnitt der Verschwindungslinien der schneidenden Ebene und des Kegels erhalten werden. Vermittelst dieses Verfahrens können somit die Asymptoten der Perspektive nicht gefunden werden.

Um diese zu verzeichnen, werden wir jene Erzeugenden des Kegels zu bestimmen trachten, deren Bilder zu den verlangten Asymptoten geometrisch parallel laufen. Aus diesem Umstande folgt, dass die durch diese Erzeugenden gehende Ebene F gegen die Ebene $E_b E_v$ der Asymptoten eine solche Stellung haben muss, dass beide Ebenen durch irgend eine beliebige dritte Ebene in Geraden geschnitten werden, deren Perspektiven zu einander geometrisch parallel sind. Es muss demzufolge die Grundflächtrace F_g der Ebene F geometrisch parallel zu E_g, die Bildflächtrace F_b und Verschwindungslinie F_v derselben parallel zu E_b sein.

Nachdem jedoch F durch die Kegelspitze S geht, so hat man bloss durch S eine zu E_b parallele Gerade $S\omega$ zu ziehen, den Durchschnitt ω derselben mit der Grundebene zu bestimmen und die Grundflächtrace F_g der verlangten Ebene durch ω geometrisch parallel zu E_g und F_b durch d, F_v durch v parallel zu E_b zu führen.

Die Ebene $F_b F_v$ schneidet den Kegel in den Erzeugenden aSa', bSb', welche der Annahme zufolge die Asymptotenrichtungen angeben. Die Asymptoten selbst werden nun als Durchschnitte *44'*, *33'* der durch aS und bS an die Kegelfläche gelegten Berührungsebenen mit der Ebene $E_b E_v$ gefunden und müssen sich bei richtig durchgeführter Construktion im Halbirungspunkte C des Diameters III, d. i. im Mittelpunkte des perspektivischen Bildes kreuzen.

Es ist einleuchtend, dass die Kegelspitze S gegen die Trace E_b eine solche Lage haben kann, dass F_b die Bildflächtrace des Kegels nur berührt oder gar nicht schneidet; es treten dann die interessanten Fälle ein, wo sich die Schnittfigur, welche im Raume eine Hyperbel ist, als Parabel, beziehungsweise als Ellipse perspektivisch darstellt.*)

§. 140.

Aufgabe.

Es ist ein auf der Grundebene senkrechter Rotationskegel durch eine Ebene nach einer Ellipse zu schneiden und ein conjugirtes Axenpaar der Perspektive der Schnittcurve zu bestimmen.

Lösung. Nehmen wir die Kegelaxe So (Fig. 265) in der Bildfläche, GG als Grundlinie, $E_b E_v$ als schneidende Ebene, ab als den Durchmesser der Grundflächtrace des Kegels, daher aS und bS als die in der Bildfläche liegenden Erzeugenden desselben an. Im Durchschnitte der letzteren mit E_b ergeben sich daher die der Schnittcurve angehörigen Punkte *5* und *6*.

Am schnellsten ergibt sich jenes Paar conjugirter Diameter, von welchen der eine zur Bildfläche, also zu E_b parallel ist. Legt man nämlich an den Kegel zwei zu E_b parallele Tangirungsebenen und verzeichnet deren Schnitte mit der Ebene $E_b E_v$, so müssen die Schnittlinien zu E_b parallel und Tangenten der Schnittcurve sein, also einen Diameter derselben bestimmen.

Man wird zu diesem Zwecke durch S eine zu E_b Parallele $S\delta$ führen, den Durchschnitt Δ derselben mit der Grundebene suchen, diesen sammt dem Basiskreise in die Bildfläche drehen und daselbst an letztere die beiden Tangenten ziehen.

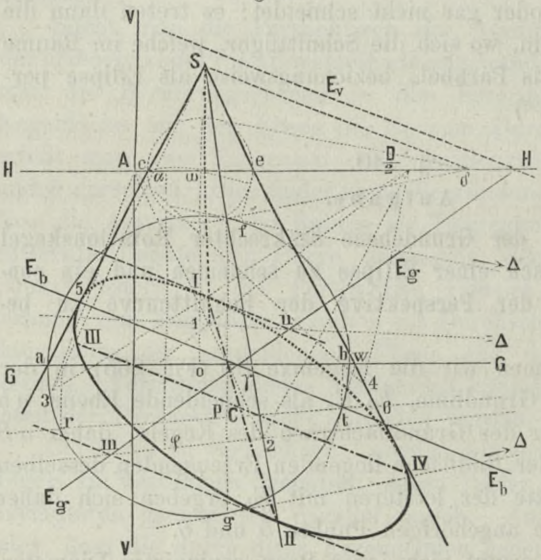
---

*) Eine ausführliche Abhandlung über die ebenen Schnitte von Kegeln und Cylindern des zweiten Grades in der Perspektive, findet sich im 3. Hefte 1867 von Dr. O. Schlömilch's „Zeitschrift für Mathematik und Physik", von Emil Koutny veröffentlicht, vor.

Da jedoch Δ ausser die Zeichnungsfläche fällt, so wurde die horizontale Hilfsebene *HH*, welche den Kegel im Kreise *ce*, die Gerade $S\Delta$ in δ schneidet, benützt und die verlangten Tangenten Δf, Δg parallel zu den aus δ an den Kreis *ce* gezogenen Tangenten geführt.

Die Berührungspunkte *f* und *g*, in die Grundebene zurückgeführt und daselbst perspektivisch bestimmt, fallen nach *1* und *2*, wesshalb 1Δ, 2Δ die Grundflächtracen der in Rede stehenden Berührungsebenen sind. Weil Δ nicht benützt werden kann, so wurden noch zwei andere Punkte der Geraden $f\Delta$, $g\Delta$ zurückgedreht und mit *1* und *2* verbunden.

Fig. 265.



Diese Tracen begegnen der Grundflächtrace E_g der Schnittebene in *m* und *n*; durch diese Punkte gehen die Schnittlinien *nI*, *mII* parallel zu E_v, treffen die zugehörigen Erzeugenden *1S*, *2S* in den Punkten *I* und *II* und bilden zugleich die Tangenten in diesen Punkten, wesshalb *I II* ein Durchmesser und der Halbirungspunkt *C* dieser Länge der Mittelpunkt des perspektivischen Bildes ist.

Der zu *I II* conjugirte Durchmesser *III IV* geht durch *C* parallel zu E_b; seine Endpunkte ergeben sich im Durchschnitte dieser Geraden mit der Kegelfläche.

Legt man durch *C* und $S\delta\Delta$ eine Ebene, so schneidet sie die Kegelfläche in zwei Erzeugenden *3S*, *4S*, welche im Durchschnitte mit *III IV* die gewünschten Endpunkte liefern.

Um die umlegte Grundflächtrace besagter Ebene zu erhalten, ziehe man die Gerade *CS* bis zum Durchschnitte γ mit *12*, bestimme in *p* den umgelegten Punkt γ und verbinde *p* mit Δ. Die

Gerade $p\Delta$ schneidet den Basiskreis in r und t, welche Punkte zurückgedreht sich in 3 und 4 darstellen.

Bei richtiger und genauer Construktion wird die Axe $I\,II$ die Sehne $5\,6$ halbiren und auf den Durchschnittspunkt der Geraden E_v und $V\,V$ zugehen.

Sollen die Grenzpunkte des sichtbaren Theiles der Schnittcurve angegeben werden, so müssen vorerst die Contourpunkte der Basis gesucht werden. Zu diesem Behufe halbire man $A\,\omega$ in α, errichte $\alpha\,\varphi$ senkrecht auf $H\,H$, mache die Länge $\alpha\,\varphi$ der halben Augdistanz gleich, durchschneide den Kreis $c\,e$ aus φ mit einem Bogen vom Radius $\varphi\,\omega$, verzeichne die Tangenten in den Durchschnittspunkten beider Kreise und ziehe zu diesen parallel die Tangenten an den Kreis $a\,b$. Die letztgezogenen Geraden schneiden $G\,G$ in den Punkten w der Contour und berühren in den entsprechenden Punkten den Grundkreis. Schliesslich hat man diese Berührungspunkte zurückzudrehen und die durch dieselben gehenden Erzeugenden mit $E_b\,E_v$ zum Durchschnitt zu bringen.

In ähnlicher Weise wäre auch die Aufgabe zu lösen: die Bildflächtrace oder Verschwindungslinie einer Kegel- oder Cylinderfläche durch ein Paar conjugirter Axen zu bestimmen.

Umdrehungsflächen.

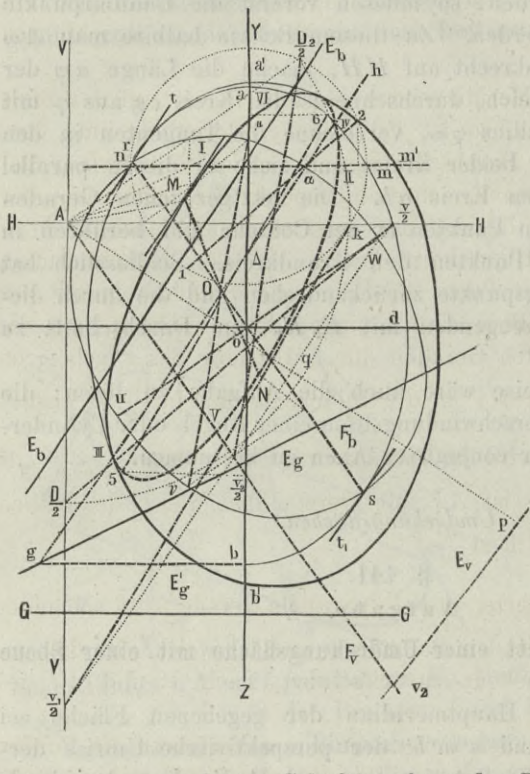
§. 141.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene zu bestimmen.

Lösung. Der Hauptmeridian der gegebenen Fläche sei $a\,m\,d\,s\,b$ (Fig. 266) und $a'\,m'\,b'$ der perspektivische Umriss derselben; ferner $Y\,Z$ die Rotationsaxe und $E_b\,E_v$ die schneidende Ebene. Die Rotationsaxe sei durch den Durchstosspunkt b mit der Grundebene $G\,G$ fixirt und stehe vertikal. Um den Schnitt der Ebene $E_b\,E_v$ mit der Umdrehungsfläche zu bestimmen, lege man durch die Drehungsaxe $Y\,Z$ eine zur Bildfläche parallele Ebene, deren Grundflächtrace E'_g ist und bestimme den Schnitt $g\,h$ derselben mit der gegebenen Ebene $E_b\,E_v$. Wendet man nun horizontale Hilfsebenen an, welche die Umdrehungsfläche in Parallelkreisen, die Ebene $E_b\,E_v$ in zur Horizontraltrace E_g parallelen Geraden schneiden, so werden sich in den Durchschnitten dieser Hilfsschnitte im Allgemeinen zwei Punkte der zu suchenden Schnittlinie ergeben. Hiebei wird es zweckmässig sein, jede solche Horizontalebene sammt den in ihr liegenden Schnittlinien in eine zur Bildfläche parallele Lage zu bringen. Ist also mn der Durchmesser eines Parallelkreises, in welchem der Schnitt erfolgt, so ist $m1n2$ der Parallelkreis nach der Drehung um mn. Für den umgelegten Hilfsschnitt mit der Ebene $E_b E_v$ ist α, wo gh von mn getroffen wird, ein Punkt desselben, während sich dessen Richtung durch Umlegung des dem Verschwindungspunkte v der Grundflächtrace E_g entsprechenden Parallelstrahls um HH, in $\frac{v}{2}\,\frac{D}{2}$ ergibt.*) Wird sonach $1\alpha 2$ parallel zu $\frac{v}{2}\,\frac{D}{2}$ gezogen, so schneidet diese Gerade den Parallelkreis in den Punkten 1 und 2, d. i. in den umgelegten Schnittpunkten der Fläche. Diese beiden Punkte, in die Horizontalebene zurückgedreht, gelangen nach I und II, wobei nur zu bemerken ist, dass letztere in die Hilfstrace fallen müssen, welche man erhält, wenn man α mit v vereint.

Fig. 266.



---

*) Die Richtung $\frac{v}{2}\,\frac{D}{2}$ wurde mit Benützung der halben Augdistanz bestimmt, und $\frac{v}{2}$ gefunden, indem man Ap senkrecht auf Ev führte, in q halbirte und $q\frac{v}{2}$ parallel zu Ev zog.

Auf diese Weise können beliebig viele Punkte der Schnittlinie gefunden werden.

Eine zweite Lösung der Aufgabe kann mit solchen Hilfsebenen vorgenommen werden, welche durch die Drehungsaxe gehen, mithin die Rotationsfläche in Meridianen schneiden. Dieses Verfahren ist im Allgemeinen weniger einfach, als das eben behandelte und für sich selbstverständlich, daher wir die Construktion gleich für einzelne specielle Lagen der Meridianebene durchführen werden.

Wird z. B. jene Meridianebene gewählt, welche auf der Bildebene senkrecht steht, so ist VV die Verschwindungslinie derselben, während der Durchschnittspunkt v_1 der Verschwindungslinien E_v und VV den Verschwindungspunkt der Schnittlinie der gegebenen Ebene $E_b E_v$ mit der angenommenen Meridianebene gibt. Wird dieser Hilfsschnitt um YZ in den Hauptmeridian gedreht, so bleibt der Punkt Δ, d. i. der Durchschnittspunkt der Axe YZ mit der Ebene $E_b E_v$, ungeändert, während sich die Richtung der gedrehten Geraden durch Drehung des zugehörigen Parallelstrahls v_1 um VV in die Bildebene, d. i. in $\frac{v_1}{2} k$ ergibt.

Der Punkt $\frac{v_1}{2}$ wird im Durchschnitte der Geraden $q \frac{v}{2}$ mit VV erhalten, und es ist Ak selbstverständlich gleich der halben Augdistanz, also gleich $A \frac{D}{2}$.

Die durch Δ geführte, zu $k \frac{v_1}{2}$ parallele Gerade $5 \Delta 6$ schneidet den Hauptmeridian in den Punkten 5 und 6, welche in die ursprüngliche Meridianebene zurückgeführt, nach V und VI gelangen.

Sehr einfach ergeben sich durch dieses Verfahren die Punkte III und IV der Schnittcurve als Durchschnitt des Hauptmeridians mit der Geraden gh.

Weiters lassen sich auch jene Punkte leicht finden, welche in der durch das Auge gehenden Meridianebene liegen; denn für diesen Fall ist YZ zugleich Bildflächtrace und Verschwindungslinie der Meridianebene. Werden die Operationen in gleicher Weise wie oben durchgeführt, so erhält man jene Punkte, in welchen die Schnittcurve von der Axe YZ getroffen wird.

Ist, wie in unserem Beispiele angenommen wurde, die rotirende Curve eine Linie der zweiten Ordnung, so wird auch die Schnittlinie eine solche Curve sein müssen. Es wird sonach der Schnitt des Ellipsoids mit der Ebene $E_b E_v$ eine Ellipse sein. Wir wollen nun noch zeigen, auf welche Weise man zwei conjugirte Axen der Schnittfigur auffinden kann. Zu diesem Behufe denken wir uns an das Ellipsoid einen berührenden Cylinder gelegt, dessen Erzeugenden parallel zur Bildflächtrace E_b sind. Führt man an den Hauptmeridian parallel zu E_b die beiden Tangenten rt und st_1 und verbindet die Berührungspunkte r und t, so ist rt die Trace jener auf der Bildfläche senkrechten Diametralebene des Ellipsoids mit der Hauptmeridianebene, in welcher die Berührung erfolgt, daher F_v, durch A parallel zu rt geführt, die zugehörige Verschwindungslinie gibt. Suchen wir den Schnitt dieser Diametralebene mit der schneidenden Ebene $E_b E_v$ und mit dem Ellipsoide, so werden sich diese beiden Schnittlinien in zwei Punkten begegnen, welche der Schnittcurve angehören und welchen zu E_b parallele Tangenten zukommen, folglich die Verbindungslinie derselben einen Durchmesser der zu suchenden Schnittfigur liefert.

Um dies durchzuführen, drehe man die in der Ebene rs, F_v gelegene Berührungscurve um rs in eine zur Bildfläche parallele Lage, woselbst sie über ro als grosse und $ow = od$ als kleine Halbaxe zu verzeichnen sein wird.

Der um rs gedrehte Schnitt der Ebenen $E_b E_v$ und rs, F_v ist offenbar durch den um F_v in die Bildfläche umgelegten Parallelstrahl v_2, d. i. in $\frac{v_2}{2} \frac{D_2}{2}$ *), seiner Richtung nach, und durch den Schnittpunkt O der beiden Tracen rs und gh, seiner Lage nach gegeben. Es werden daher die zu suchenden Endpunkte des Diameters erhalten, wenn man durch O die umgelegte Trace $\mu\nu$ parallel zu $\frac{v_2}{2} \frac{D_2}{2}$ zieht, mit der eben verzeichneten Ellipse $r\mu s\nu$ zum Durchschnitt bringt und diese Punkte μ und ν in die ursprüngliche Ebene rs, F_v nach M und N zurückversetzt, woselbst sie in jene Gerade fallen müssen, welche den Punkt O mit v_2 verbindet.

Um schliesslich den zu MN conjugirten Durchmesser zu erhalten, wird man MN zu halbiren und durch diesen Punkt eine

---

*) Der Punkt $\frac{v_2}{2}$, welcher die Länge $A\,v_2$ halbirt, liegt ebenfalls in der Geraden $\frac{v_1}{2}\, q\, \frac{v}{2}$.

zu gh parallele Gerade zu führen haben, welche im Durchschnitte mit dem Ellipsoide die Endpunkte der zu suchenden Axe bestimmen wird. Zu diesem Behufe wird man durch die Richtung dieser zweiten Axe, entweder eine zur Bildfläche parallele, oder eine auf die Bildfläche senkrechte Ebene zu legen und den Schnitt mit dem Ellipsoide, welcher im ersten Falle eine zur Meridiancurve ähnliche Ellipse ist, im zweiten Falle aber aus seinen Axen einfach verzeichnet werden kann, zu bestimmen haben. In den Durchschnittspunkten dieser Ellipse mit der Axenrichtung ergeben sich sodann die fraglichen Endpunkte des Diameters. Ebenso könnte auch die Sehne $III\,IV$ zur Auffindung der Länge der parallelen Axe benützt werden, wie dies auch seinerzeit bei der Bestimmung des sichtbaren Umrisses eines Ellipsoids gezeigt wurde.

§. 142.

Aufgabe.

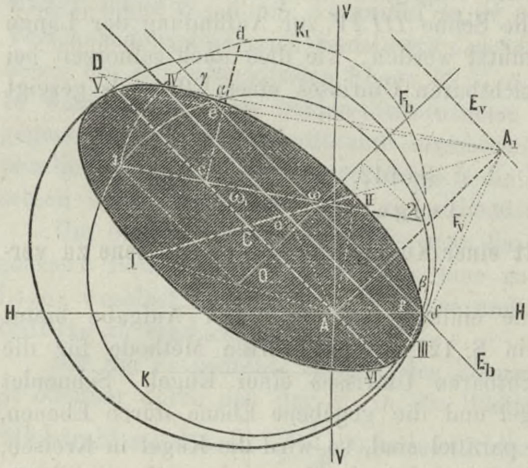
Es ist der Schnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene zu verzeichnen.

Lösung 1. Eine einfache Lösung dieser Aufgabe bietet die Anwendung der in §. 127 durchgeführten Methode für die Verzeichnung des sichtbaren Umrisses einer Kugel. Schneidet man nämlich die Kugel und die gegebene Ebene durch Ebenen, welche zur Bildfläche parallel sind, so wird die Kugel in Kreisen, welche sich perspektivisch wieder als Kreise darstellen, und die Ebene in zur Bildflächtrace parallelen Geraden geschnitten, welche, im Durchschnitte mit ersteren, Punkte der zu suchenden Schnittcurve bestimmen.

Lösung 2. Ist O (Fig. 267) der in der Bildebene liegende Mittelpunkt der Kugel, welche von der Bildfläche im Kreise K geschnitten wird und $E_b\,E_v$ die schneidende Ebene, so begegnet E_b dem Kreise K in den beiden Punkten α und β, welche der Schnittlinie angehören. Letztere wird in diesem Falle ein Kreis sein, wesshalb es sich hier blos um die Verzeichnung der Perspektive eines Kreises handelt, welcher in der Ebene $E_b\,E_v$ liegt. $\alpha\beta$ ist eine zur Bildflächtrace parallele Sehne der Perspektive, daher diese in ω zu halbiren und ω mit dem Nebenaugpunkte A_1 zu verbinden ist, um in ωA_1 die Richtung der Perspektive des auf die Bildflächtrace E_b senkrechten Kreisdurchmessers zu erhalten.

Zur Bestimmung seiner Endpunkte lege man durch $A_1 \omega$ und O eine Ebene $F_b F_v$, welche senkrecht auf der Bildfläche steht und $A A_1$ zur Verschwindungslinie, ωO zur Bildflächtrace hat, und drehe diese um F_b in die Bildebene. Der dem Nebenaugpunkte A_1 der Ebene $E_b E_v$ entsprechende Parallelstrahl gelangt alsdann nach $A_1 D$, folglich $\omega\, 1\, 2$, parallel zu $A_1 D$ gezogen, den Kreis K in den Punkten 1 und 2 trifft, deren Verbindungslinie $1\,2$ den Durchmesser jenes Kreises gibt, in welchem die Kugel von der Ebene geschnitten wird. Die Punkte 1 und 2, in die Ebene $F_b F_v$ zurückgeführt, gelangen nach I und II, welche Punkte der Perspektive der Schnittcurve angehören und die Endpunkte jenes Durchmessers $I\,II$ derselben bestimmen, welcher zur Richtung E_b conjugirt ist. Wird $1\,2$ in ω_1 halbirt und ω_1 gleichfalls in die Ebene $F_b F_v$ nach o zurückgeführt, so ist o das Bild des Mittelpunktes, wesshalb $III\, o\, IV$, durch o parallel zu E_b gezogen und darauf der gefundene Radius $1\,\omega_1 = \omega_1\, 2$ perspektivisch nach beiden Seiten aufgetragen (indem $\omega\gamma = \omega\delta = \frac{12}{2}$ gemacht und γ und δ mit A_1 verbunden wird) die Bilder III und IV der Eckpunkte des zur Bildfläche parallelen Durchmessers des Schnittkreises geben. Mit diesen Bestimmungsstücken lässt sich nun die Kreisperspektive leicht verzeichnen.

Fig. 267.



Ebenso einfach wie $III\, IV$ kann sogleich auch der zu $I\,II$ conjugirte Durchmesser $V\, VI$ der Perspektive ermittelt werden, welcher eine zu E_b parallele Lage hat und durch den Halbirungspunkt C der Länge $I\,II$ geht, wenn man den dem Punkte C entsprechenden Punkt c der Geraden $1\,2$ bestimmt, über $1\,2$ als Durchmesser den Halbkreis K_1 beschreibt und die dem Punkte c

zukommende halbe Sehnenlänge cd zieht. Diese Länge cd, auf gleiche Weise wie es bei $III\,IV$ durchgeführt wurde, auf die Gerade $V\,C\,IV$ übertragen, wird den zweiten Durchmesser der Perspektive bestimmen.

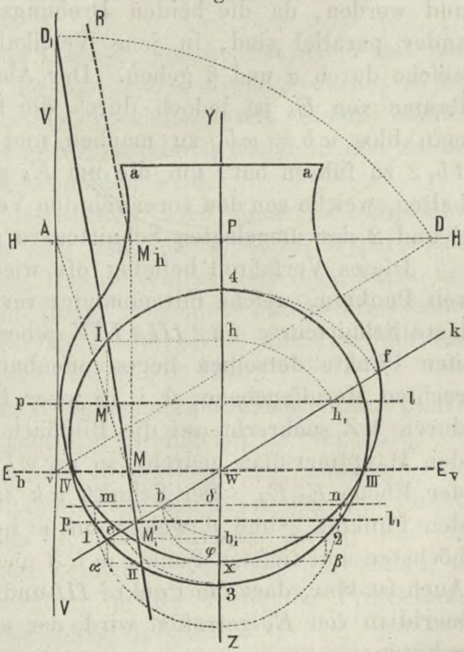
§. 143.

Aufgabe.

Es ist der Hauptmeridian einer Umdrehungsfläche und die Perspektive eines Punktes der Fläche gegeben; man suche die orthogonale Projektion dieses Punktes auf der Bildfläche und bestimme den Parallelkreis, in welchem derselbe sich befindet.

Lösung 1. Die Axe YZ der Umdrehungsfläche sei vertikal und in der Bildfläche gelegen, ferner amx (Fig. 268) der Hauptmeridian und M die Perspektive des gegebenen Punktes.

Fig. 268.



Man denke sich das Auge mit dem Punkte M durch eine Gerade verbunden und den Durchschnitt derselben mit der Umdrehungsfläche gesucht. Zu diesem Behufe lege man durch besagte Gerade eine Ebene, z. B. eine zur Horizontslinie parallele Ebene, deren Bildflächtrace E_b mit der Verschwindungslinie E_v zusammenfällt und parallel zu HH ist, und bestimme den Schnitt derselben mit der Umdrehungsfläche, welcher hier gleichfalls in die Gerade E_b zu liegen kömmt, also in dieser Lage nicht benützt werden kann. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, die Schnittcurve um die Trace E_b in die Bildfläche umzulegen und die umgelegte Curve punktweise zu bestimmen.

Vorerst lege man eine vertikale Ebene, am einfachsten jene, welche durch die Drehungsaxe geht und auf der Bildfläche senkrecht steht, und drehe die Schnittlinie derselben mit der Ebene $E_b E_v$ um die Bildflächtrace YZ der erstern Ebene in die Bildfläche, woselbst diese Schnittlinie nach wk gelangt.*) Wendet man nun horizontale Hilfsebenen an, welche die Rotationsfläche in Parallelkreisen, die Ebene $E_b E_v$ in horizontalen, zur Bildfläche parallelen Geraden schneiden, und ist mn eine solche Ebene, so wird $m\alpha\beta n$ der um mn in die Bildfläche gelegte Parallelkreis, δb die Entfernung des Hilfsschnittes mit der Ebene $E_b E_v$ von der Bildfläche, daher, $\delta b = \delta \varphi$ gemacht und durch φ die Horizontale $\alpha\varphi\beta$ gezogen, wird $\alpha\varphi\beta$ der umgelegte Hilfsschnitt selbst sein, welcher den Parallelkreis in den Punkten α und β trifft.

Die so erhaltenen Punkte α und β, welche im Raume in der Ebene $E_b E_v$ liegen, sind nun um E_b in die Bildfläche umzulegen und werden, da die beiden Drehungsaxen mn und E_b zu einander parallel sind, in jene Vertikallinien zu liegen kommen, welche durch α und β gehen. Der Abstand der Geraden $\alpha\beta$ im Raume von E_b ist jedoch durch die Länge bw gegeben, daher man blos $wb = wb_1$ zu machen und durch b_1 die Horizontale $1 b_1 2$ zu führen hat, um die um E_b gedrehte Schnittlinie zu erhalten, welche von den vorerwähnten Vertikallinien in den Punkten *1* und *2* der umgelegten Schnittcurve getroffen wird.

Dieses Verfahren beliebig oft wiederholt, liefert eine Reihe von Punkten, welche mit einander verbunden die um E_b umgelegte Schnittcurve *1 3 2 III 4 I IV* geben. Die höchsten und tiefsten Punkte derselben liegen offenbar in der auf $E_b E_v$ senkrechten Meridianebene, d. i. in jener Ebene, welche wir anfangs durch YZ senkrecht auf die Bildfläche führten. Wird diese in den Hauptmeridian gedreht, so ist wk der Schnitt derselben mit der Ebene $E_b E_v$. Der Schnitt wk trifft den Hauptmeridian in den Punkten e und f, welche um w in die Axe YZ gedreht, den höchsten und tiefsten Punkt, d. i. *3* und *4*, der Schnittcurve geben. Auch ist klar, dass die Punkte *III* und *IV*, in welchen der Hauptmeridian von E_b getroffen wird, der umgelegten Schnittcurve angehören.

*) v ist der Verschwindungspunkt der Schnittlinie, AD die Augdistanz, daher ist vD der um VV gedrehte Parallelstrahl und wk parallel zu vD zu ziehen.

Weiters wird das um E_b gedrehte Auge nach D_1, daher der dem Punkte M entsprechende Sehstrahl nach MD_1 gelangen und der Schnittcurve in Punkten I und II begegnen, welche schliesslich in die ursprüngliche Ebene $E_b\, E_v$ zurückzuführen sind. Hiebei sind die obigen Constructionen im Vergleich zu den vorhergehenden in verkehrter Ordnung durchzuführen, also z. B. für den Punkt I die Horizontale Ih zu ziehen, $wh_1 = wh$ zu machen und durch h_1 die Trace pl des zu suchenden Parallelkreises zu führen. Ebenso findet man die Trace $p_1 l_1$, welche dem Punkte II entspricht.

Wird M mit A verbunden, so ergeben sich im Durchschnitte mit den eben gefundenen Tracen die Bildflächprojektionen M' und M'_1 jener beiden Punkte im Raume, welche dieselbe Perspektive M besitzen.

Es ist ersichtlich, dass die beiden Punkte I und II, bei richtiger und genauer Construktion, vertikal über den Punkten M' und M'_1 liegen müssen.

Lösung 2. Wird jene Gerade, welche das Auge mit dem Punkte M verbindet, um die Axe YZ rotirend gedacht, so beschreibt dieselbe ein Rotationshyperboloid mit Einem Mantel, welches sich mit der gegebenen Umdrehungsfläche in den zu bestimmenden Parallelkreisen schneiden wird.

Die diesbezügliche Construktion wird derart durchgeführt werden müssen, dass man sich den Schnitt dieses Hyperboloids mit der Bildebene, d. i. den Hauptmeridian desselben, sucht und die Bildflächtracen der in Rede stehenden Parallelkreisebenen durch die Schnittpunkte der Meridianhyperbel mit dem Meridian der Umdrehungsfläche senkrecht auf YZ zieht.

Der Hauptmeridian des Hyperboloids lässt sich einfach punktweise bestimmen, wenn man die Bildfläche als vertikale, die Horizontsebene als horizontale Projektionsebene annimmt, die letztere sammt der horizontalen Projektion $M_h R$ des dem Punkte M zukommenden Sehstrahls in die Bildfläche umlegt und die Construktion mit Hilfe dieser beiden Projektionen durchführt, wo sich alsdann der Hauptmeridian in der vertikalen Projektionsebene, also in der Bildfläche selbst darstellt.

Die vertikale Projektion des Sehstrahls ist die Gerade MA, und die umgelegte Horizontalprojektion $M_h R$ derselben wird erhalten, wenn man M_h mit dem in der Vertikallinie VV liegenden Distanzpunkte verbindet.

YZ ist die vertikale Projektion der Drehungsaxe und der Punkt P in der Horizontslinie deren horizontale Projektion.

Zur Verzeichnung von Punkten der Hyperbel hat man blos einzelne Punkte der Geraden $(MA, M_h R)$ so lange zu drehen, bis sie in die vertikale Projektionsebene fallen.

Ebenso einfach lassen sich auch die Bestimmungsstücke der Meridianhyperbel, d. s. die reelle Axe und die Asymptoten, auffinden.

Zumeist erhält man eine sehr gestreckte Hyperbel, welche den Meridian amx grösstentheils in zwei Punkten schneidet.

Lösung 3. Eine fernere Lösung dieser Aufgabe würde darin bestehen, dass man durch die Verbindungslinie des Punktes M mit dem Auge eine vertikale Ebene legt. Man hätte sodann die Schnittlinie derselben mit der Umdrehungsfläche um die Bildflächtrace in die Bildebene umzulegen und derart punktweise zu bestimmen, dass man eine Reihe von horizontalen Hilfsebenen anwendet, welche vorerst um deren Tracen gedreht werden müssten, um die Halbmesser für die Drehung um die Bildflächtrace der erstern Ebene zu bestimmen. Die Construktion selbst ist zu einfach, als dass sie hier speciell durchgeführt werden sollte, wesshalb wir blos darauf verweisen.

Bemerkung. Für specielle Fälle ergeben sich bei den Lösungsweisen *1* und *3* interessante Abkürzungen, und es ist insbesondere zu berücksichtigen, dass für den Fall, wo die gegebene Fläche eine Kegelschnittslinie als Hauptmeridian besitzt, die Schnittcurve auch durch ihre Axen ermittelt werden kann.

Kapitel XIV.

Darstellung der windschiefen Flächen.

Nachdem die windschiefen Flächen durch die Bewegung einer geraden Linie entstehen, also zu den regelrechten Flächen gehören, wird es sich, wie in der orthogonalen Projektion, auch bei der perspektivischen Darstellung derselben blos darum handeln, einzelne Lagen der Erzeugenden aufzufinden und bildlich darzustellen, um das perspektivische Bild der Fläche zu erhalten. Ist es möglich, die so erhaltenen Perspektiven der Erzeugenden durch eine stetige Curve zu umhüllen, so wird diese den sichtbaren Umriss der Fläche geben.

Ohne hier auf die Eigenschaften und die verschiedenen Erzeugungsweisen dieser Flächen näher einzugehen, wollen wir uns sogleich mit der Darstellung einiger dieser Flächen befassen, um zu zeigen, wie in ähnlichen Fällen vorzugehen wäre.

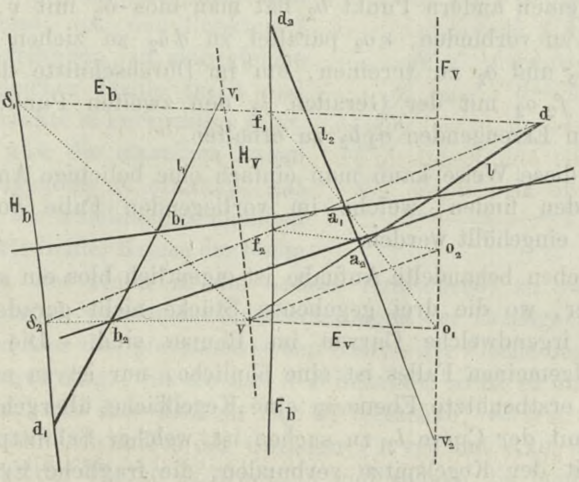
§. 144.

Aufgabe.

Es ist jene Fläche darzustellen, welche entsteht, wenn sich eine gerade Linie so fortbewegt, dass sie drei gegebene, sich nicht schneidende und nicht parallele Gerade schneidet.

Lösung. Sind l, l_1, l_2 (Fig. 269) die drei gegebenen Geraden, v, v_1, v_2 die Verschwindungspunkte, d, d_1, d_2 die Durchstosspunkte derselben mit der Bildebene, so nehme man in der einen dieser Geraden, z. B. in l_1, irgend einen Punkt b_1 an, lege

Fig. 269.



durch denselben und durch eine der beiden andern Geraden, z. B. durch l, eine Ebene und bestimme den Schnitt a_1 der dritten Geraden l_2 mit dieser Ebene. Die Verbindungslinie $a_1 b_1$ der beiden Punkte a_1 und b_1 wird sodann eine Erzeugende der zu bestimmenden Fläche sein.

Hat man den Punkt b_1 angenommen, so ist es am zweckmässigsten, durch denselben eine zu l parallele Gerade zu führen, also b_1 mit v zu verbinden und den Durchstosspunkt δ_1 dieser Geraden $b_1 v$ mit der Bildfläche zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke lege man durch l_1 und $b_1 v$ eine Ebene, deren Verschwindungslinie H_v die beiden Verschwindungspunkte v und v_1 verbindet und deren Bildflächtrace H_b durch d_1 parallel zu $v v_1$ geht. Diese Bildflächtrace kann für alle weitern Bestimmungen von Erzeugenden benützt werden, weil sie die Durchstosspunkte aller Geraden enthält, welche die Gerade l_1 schneiden und zu l parallel sind. Wird sonach δ_1 mit d verbunden, so ist dies die Bildflächtrace E_b, und $v o_1$, parallel zu E_b, die Verschwindungslinie E_v der durch l und durch den Punkt b_1 gelegten Ebene, deren Schnitt mit der Geraden l_2 zu suchen ist. Zur Bestimmung desselben lege man durch l_2 eine Ebene $F_b F_v$ und suche deren Schnitt $f_1 o_1$ mit der Ebene $E_b E_v$, welcher die Gerade l_2 in dem der zu suchenden Erzeugenden angehörigen Punkt a_1 schneidet. Die Gerade $a_1 b_1$ ist mithin eine Erzeugende der Fläche.

Für einen andern Punkt b_2 hat man blos b_2 mit v, sodann δ_2 mit d zu verbinden, $v o_2$ parallel zu $d \delta_2$ zu ziehen und die Punkte f_2 und o_2 zu vereinen, um im Durchschnitte des Hilfsschnittes $f_2 o_2$ mit der Geraden l_2 den zweiten Punkt a_2 der verlangten Erzeugenden $a_2 b_2$ zu erhalten.

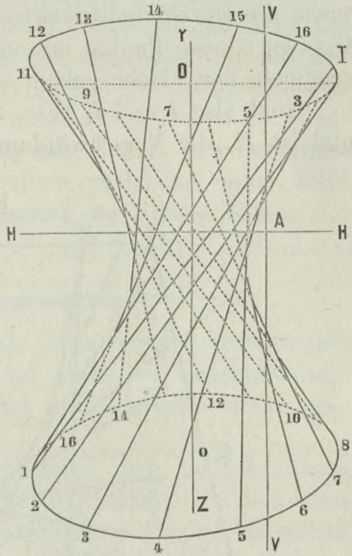
Auf diese Weise kann man einfach eine beliebige Anzahl der Erzeugenden finden, welche im vorliegenden Falle von einer Hyperbel eingehüllt werden.

Die eben behandelte Aufgabe ist eigentlich blos ein specieller Fall jener, wo die drei gegebenen Stücke nicht gerade Linien, sondern irgendwelche Curven im Raume sind. Die Lösung dieses allgemeinen Falles ist eine ähnliche, nur ist zu erwähnen, dass die erstbenützte Ebene in eine Kegelfläche übergeht, deren Schnitt mit der Curve l_2 zu suchen ist, welcher Schnittpunkt sodann, mit der Kegelspitze verbunden, die fragliche Erzeugende gibt. Sonst bietet jedoch dieser Fall kein besonderes Interesse.

Die in Fig. 269 verzeichnete Fläche ist bekanntlich ein Hyperboloid mit Einem Mantel, das sich auf mehrfache Weise darstellen lässt. Ein specieller Fall derselben ist in Fig. 270 durchgeführt, nämlich jener, wo das Hyperboloid eine Rotationsfläche ist, und durch Umdrehung einer die Axe nicht schneidenden und zu ihr nicht parallelen Geraden erzeugt werden kann.

Will man diese Fläche nicht als Rotationsfläche, sondern als windschiefe Fläche behandeln, so gehe man von folgendem Gesichtspunkte aus. Man nehme an, es bewege sich eine gegebene Gerade *I 1* so, dass sie stets mit einer gegebenen Ebene, hier mit der Horizontalebene, einen constanten Winkel einschliesst und zwei vertikal übereinander liegende Kreise schneidet.

Fig. 270.



Ist *YZ* die Gerade, welche die Mittelpunkte dieser Kreise verbindet, *1 I* die Erzeugende, und sind *1* und *I* die Schnittpunkte derselben mit den horizontalen Kreisebenen, ferner *O* und *o* die Kreismittelpunkte, so sind *o 1* und *O I* die Perspektiven der Radien der beiden horizontalen Kreise, welche über diesen Radien zu verzeichnen sind. Dies geschieht am zweckmässigsten in der Art, dass man beide Kreise, von den Punkten *1* und *I* angefangen, in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilt und die Theilpunkte in Perspektive setzt.

Um nun die einzelnen Lagen der Erzeugenden zu erhalten, hat man blos die aufeinanderfolgenden Theilpunkte beider Kreise der Reihe nach (aus der einen in die andere Kreisebene) zu verbinden. Jene Hyperbel, welche die einzelnen Lagen der Erzeugenden einhüllt, wird hier den perspektivischen Umriss der Fläche bestimmen.

Bemerkung. Ist die Axe *YZ* bekannt, so ist es am zweckmässigsten, wie dies auch in Fig. 270 geschah, vorerst den Ort des kürzesten Abstandes der Geraden *I 1* von der Axe, d. i. den Mittelpunkt der Fläche zu ermitteln und sodann die beiden horizontalen Kreisebenen in gleicher Höhe über und unter dem Mittelpunkte anzunehmen. Hiedurch werden die beiden Kreise denselben Halbmesser erhalten und am einfachsten zu verzeichnen sein. Auch wird sich das Bild, wenn die Fläche durch diese beiden Ebenen begränzt ist, am gefälligsten ergeben.

§. 145.

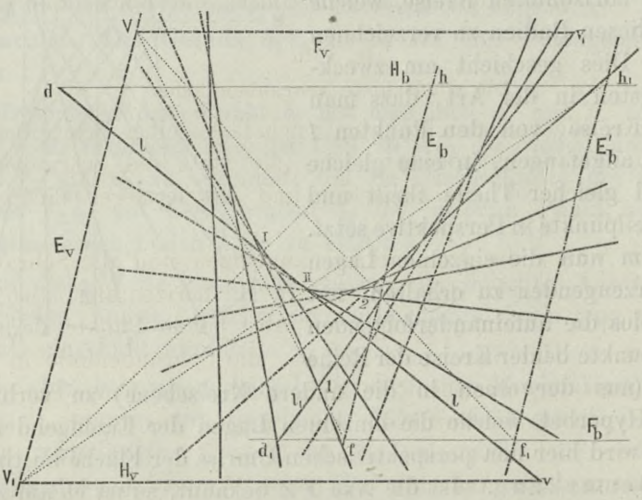
Aufgabe.

Es ist jene windschiefe Fläche darzustellen, welche entsteht, wenn sich eine Gerade auf zwei andern nicht parallelen und sich nicht schneidenden Geraden so fortbewegt, dass sie stets zu einer gegebenen Ebene parallel bleibt.

Lösung. Um einzelne Lagen der Erzeugenden jener Fläche, welche bekanntlich das hyperbolische Paraboloid ist, darzustellen, verschiebe man die gegebene Ebene parallel zu sich selbst und suche die Durchschnittpunkte derselben mit den beiden gegebenen Geraden; diese Punkte mit einander verbunden, werden eine Erzeugende der Fläche geben.

Sind also l und l_1 (Fig. 271) die beiden gegebenen Geraden, und ist E_v die Verschwindungslinie jener Ebene, zu welcher die

Fig. 271.



Erzeugenden parallel sein sollen, so nehme man irgend eine zu E_v parallele Gerade E_b als Bildflächtrace an und bestimme die Durchschnittpunkte dieser Ebene $E_b\,E_v$ mit den beiden Geraden l und l_1. Zu diesem Behufe lege man durch jede dieser Geraden eine Ebene $F_b F_v$, $H_b H_v$, welche für die Bestimmung aller weitern Lagen der Erzeugenden zu benützen sein werden. Es ist sodann V der Verschwindungspunkt aller Schnittlinien der Ebene $F_b\,F_v$

mit sämmtlichen zu $E_b\,E_v$ parallelen Ebenen, und V_1 der Verschwindungspunkt der Schnittlinien dieser Ebenen mit der Ebene $H_b\,H_v$. Die betreffenden Bildflächtracen schneiden sich in den Punkten h und f, wesshalb die Schnittlinien $f\,V$ und $h\,V_1$ auf den gegebenen Geraden die beiden Punkte *1* und *I* bestimmen, welche mit einander verbunden, eine Erzeugende der Fläche fixiren.

Die Bestimmung weiterer Lagen der Erzeugenden ist nun äusserst einfach, indem für eine zweite, zu E_v parallele Ebene $E'_b\,E_v$ die Durchschnittspunkte h_1 und f_1 der entsprechenden Bildflächtracen, beziehungsweise mit V und V_1 verbunden, die Hilfsschnitte $f_1\,V$ und $h_1\,V_1$ geben, welche sich mit den gegebenen Geraden l und l_1 in den Punkten *II* und *2* der fraglichen Erzeugenden treffen.

Wird auf diese Weise eine genügende Anzahl von Erzeugenden bestimmt, so umschliessen dieselben nach der einen Seite eine Curve, welche den sichtbaren Umriss der Fläche bildet.

§. 146.

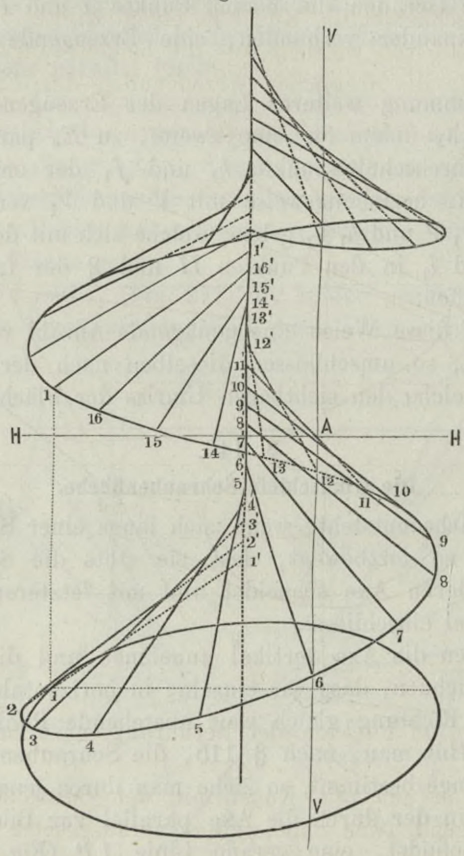
Die windschiefe Schraubenfläche.

Diese Fläche entsteht, wenn sich längs einer Schraubenlinie eine Gerade so fortbewegt, dass sie stets die Schraubenlinie sowohl, als deren Axe schneidet und mit letzterer einen constanten Winkel einschliesst.

Wir wollen die Axe vertikal annehmen und die Schraubenlinie so verzeichnen, dass wir einzelne in horizontaler, also auch in vertikaler Richtung gleich weit abstehende Punkte derselben bestimmen. Hat man, nach §. 115, die Schraubenlinie in einer beliebigen Länge bestimmt, so ziehe man durch jenen Theilpunkt, welcher sich in der durch die Axe parallel zur Bildfläche gelegten Ebene befindet, eine gerade Linie *11'* (Fig. 272) derart, dass sie mit der Axe den gegebenen Winkel einschliesst, trage vom Punkte *1'* derselben auf der Axe die Schraubengangshöhe so auf, dass *11* perspektivisch gleich *1'1'* wird und theile dieses Stück in ebenso viele gleiche Theile, als man Punkte der Schraubenlinie in einem Gange bestimmte. Verbindet man hierauf die Theilpunkte der Axe der Reihe nach mit den gleichbezeichneten Punkten der Schraubenlinie, so erhält man verschiedene Lagen von Erzeugenden der Fläche, welche zu beiden Seiten der Axe von Hyperbelästen umhüllt werden. Bis zu dieser

Umhüllungscurve sind die einzelnen Erzeugenden sichtbar, während der andere Theil derselben durch den vordern Theil der Fläche gedeckt erscheint.

Fig. 272.



§. 147.

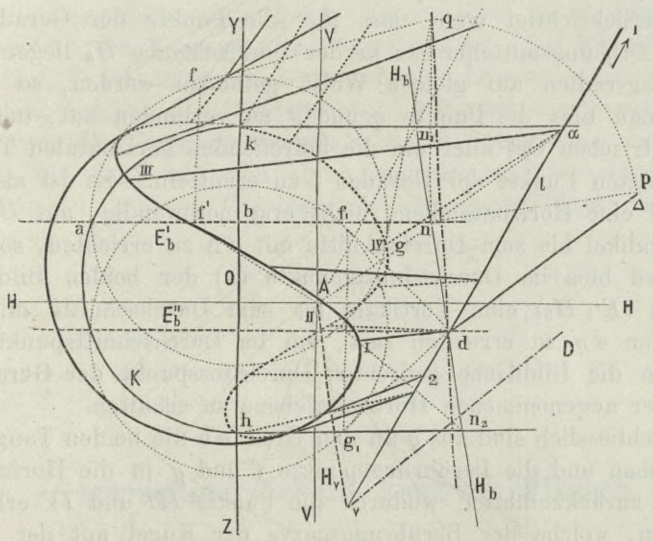
Aufgabe.

Es bewegt sich eine gerade Linie parallel zu einer gegebenen Ebene derart, dass sie eine gegebene Gerade schneidet und eine bestimmte Fläche berührt; man soll die so erzeugte Fläche darstellen.

Lösung. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Richtungsebene horizontal, dass l_v^d (Fig. 273) die gegebene Gerade und die Kugel O jene Fläche sei, welche von den Erzeugenden stets berührt werden soll.

Um einzelne Lagen der Erzeugenden zu erhalten, schneide man die Kugel und die Gerade l durch Horizontalebenen. Jede solche Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, die Gerade l in einem Punkte, von welchem aus die beiden Tangenten an den Kreis gezogen, die fraglichen Erzeugenden der Fläche liefern

Fig. 273.



und die Kugel in Punkten der Berührungscurve beider Flächen tangiren.

Denkt man sich die Kugel mit dem Mittelpunkte in der Bildfläche liegend, (was ohne weiters vorausgesetzt werden kann wenn man denjenigen Punkt als Durchstosspunkt der Geraden l mit der Bildebene ansieht, in welchem diese Gerade von der durch den Kugelmittelpunkt parallel zur Bildfläche gelegten Ebene geschnitten wird) und nimmt man irgend eine horizontale Ebene E'_b, HH an, deren Schnitt mit der Kugel ein Kreis vom Halbmesser ab und mit der Geraden l der Punkt α ist, so drehe man diese Ebene um ihre Bildflächtrace E'_b in die Bildfläche, wobei der umgelegte Parallelkreis über ab als Halbmesser zu beschreiben ist und der Punkt α einen Kreisbogen durchläuft, dessen Radius sein Abstand von der Bildebene ist. Um letzteren zu erhalten, lege man durch die Gerade l eine bildflächprojecirende Ebene $H_b H_v$ und drehe dieselbe um H_b in die Bildebene, wobei die Gerade l nach $d\Delta$ (vD der umgelegte Parallelstrahl) zu liegen kommt. Errichtet man im Durchschnittspunkte n der Tracen E'_b und H_b auf letztere eine Senkrechte np bis zum Durchschnitte mit der umgelegten Geraden $d\Delta$, so ist dies der zu suchende Abstand, welcher von n aus auf die in n auf E'_b errichtete Senkrechte nach nq zu übertragen ist, um in q den umgelegten Durchschnittspunkt α zu erhalten.

Berücksichtigt man, dass für alle Punkte der Geraden l, deren Drehungsmittelpunkte in der Bildflächtrace H_b liegen, die Drehungsradien auf gleiche Weise gefunden werden, so folgt, dass man blos die Punkte q und d zu verbinden hat, um den geometrischen Ort aller um die betreffenden horizontalen Tracen umgelegten Punkte der Geraden l zu ermitteln. Es ist also für irgend eine Horizontalebene nicht erst nothwendig, auf H_b das Perpendikel bis zum Durchschnitte mit $d\Delta$ zu errichten, sondern es wird blos im Durchschnittspunkte (n) der beiden Bildflächtracen ($E'_b H_b$) eine Vertikale bis zum Durchschnitte mit der Geraden dq zu errichten sein, um im Durchschnittspunkte (q) den in die Bildfläche gedrehten Durchstosspunkt der Geraden l mit der angenommenen Horizontalebene zu erhalten.

Schliesslich sind aus q an den Kreis ab die beiden Tangenten zu ziehen und die Berührungspunkte f und g in die Horizontalebene zurückzuführen, wodurch die Punkte III und IV erhalten werden, welche der Berührungscurve der Kugel mit der windschiefen Fläche angehören und mit α verbunden die Perspektiven der beiden in der angenommenen Ebene liegenden Erzeugenden geben.

In unserem Beispiele hat die Gerade l eine solche Lage, dass die Hilfslinie dq mit der Vertikalrichtung einen sehr spitzen Winkel bildet, folglich mit derselben sehr schiefe Schnitte gibt. Bei dieser Annahme ist die eben besprochene Vereinfachung, des minder genauen Resultates wegen, nicht anzuempfehlen.

Beachtenswerth sind jene Erzeugenden, welche im Raume die höchste und tiefste Lage einnehmen. Man findet dieselben, wenn die schneidende Horizontalebene als die Kugelfläche berührend angenommen wird. In diesem Falle sind deren Tracen tangentiell an den Hauptmeridian K der Kugel, also durch die Punkte h und k, welche zugleich die Berührungspunkte sind, horizontal zu ziehen. Man hat sodann nur die Punkte *1* und *2*, in welchen die Gerade l von den beiden Tangirungsebenen geschnitten wird, mit k resp. h zu verbinden, um die gewünschten Erzeugenden zu erhalten.

Bemerkung 1. In Fig. 273 wurden die Erzeugenden begränzt angenommen und nur jene Theile derselben angegeben, welche durch die Gerade l und die Berührungscurve begränzt sind.

Bemerkung 2. Nennt man auch bei Regelflächen, wie wir es bei der Ebene gethan haben, jene Curve, welche die Verschwindungspunkte sämmtlicher Erzeugenden einer Regelfläche verbindet, die Verschwindungscurve oder Flucht der Fläche, so ist einleuchtend, dass die Flucht solcher windschiefen Flächen, welchen eine Richtungsebene zukommt, eine gerade Linie und zwar die Verschwindungslinie der Richtungsebene ist. Dies ist mithin auch bei dem eben besprochenen, der Kugel umschriebenen, schiefen Conoide der Fall, dessen Flucht die Horizontslinie bildet.

Kapitel XV.
Gegenseitiger Schnitt krummer Flächen.

§. 148.

Allgemeine Bemerkungen.

Um den Schnitt krummer Oberflächen zu bestimmen, schneide man dieselben durch eine Reihe von Ebenen, bestimme die Durchschnittspunkte beider Schnittlinien und verbinde die in den auf einander folgenden Ebenen gefundenen Punkte entsprechend durch eine stetige Curve.

Wie aus dem Angedeuteten hervorgeht, handelt es sich vorzugsweise um die Wahl der schneidenden Hilfsebenen. Dies bezüglich gilt die allgemeine Regel, dass man dieselben stets so zu wählen habe, dass ihre Hilfsschnitte mit den beiden Flächen möglichst einfach zu verzeichnen sind. Bei allen regelrechten Flächen wird man sonach die schneidenden Ebenen so legen, dass die Fläche in geraden Erzeugenden, bei Umdrehungsflächen dagegen in Parallelkreisen oder Meridianen etc. geschnitten wird. Weiter lässt sich darüber nichts Bestimmtes feststellen, doch wird bei einiger Uebung eine zweckmässige Wahl der schneidenden Ebenen keinen Schwierigkeiten unterliegen.

Es ist selbstverständlich, dass, so wie die Ebene, auch jede andere krumme Fläche zu gleichem Zwecke benützt werden könne. Uebrigens sei bemerkt, dass blos die Kugel eine Anwendung als Hilfsfläche findet.

Soll in einem Punkte der Schnittcurve die zugehörige Tangente gezogen werden, so ergibt sich diese als Durchschnitt der in diesem Punkte an beide Flächen gelegten Berührungsebenen, oder dadurch, dass man durch die dem gegebenen Punkte zukommenden Normalen beider Flächen die Normalebene der Durchschnittscurve legt und die zu bestimmende Tangente senkrecht auf die Normalebene errichtet.

§. 149.

Aufgabe.

Es ist der Schnitt zweier Kegelflächen zu construiren.*)

Lösung. Sind $E_b E_v$ und $E'_b E'_v$ (Fig. 274) die Ebenen der Leitlinien, S und s die Spitzen beider Kegelflächen, so verbinde man die beiden Scheitel durch eine Gerade Ss und suche deren Durchschnitte Δ und δ mit den Ebenen der Leitlinien. Werden nun durch Ss die schneidenden Ebenen geführt, so werden beide Flächen in geraden Erzeugenden geschnitten, deren gegenseitiger Durchschnitt Punkte der zu suchenden Schnittcurve liefert.

Von den Hilfsebenen sind blos die Tracen auf den Ebenen der Leitlinien nothwendig. Dieselben gehen selbstverständlich durch die Punkte Δ und δ, wobei sich die beiden Tracen einer Hilfsebene in einem Punkte der Schnittlinie XY der beiden Ebenen $E_b E_v$, $E'_b E'_v$ begegnen müssen.

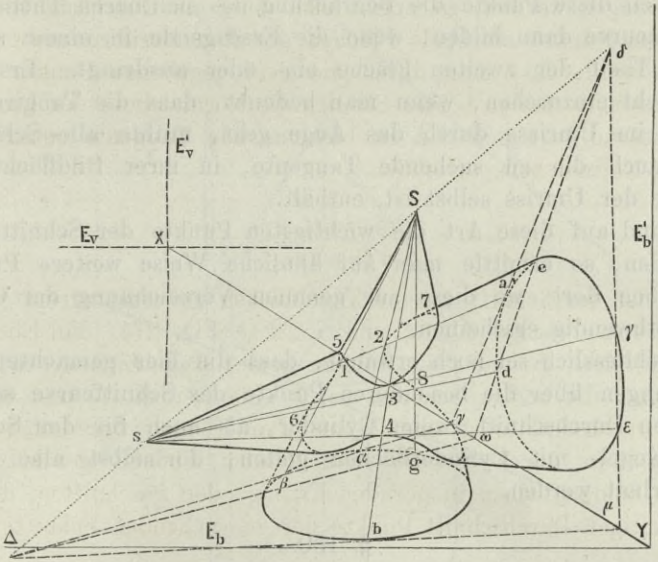
Zieht man durch δ und Δ an die in den betreffenden Ebenen liegenden Leitlinien jene Tangenten, deren zugehörige Tracen auf der andern Ebene die darin liegende Leitcurve noch schneiden, d. s. die Tangenten $\delta\nu$ und $\Delta\mu$, so werden diese die äussersten

*) Ueber den gegenseitigen Schnitt von Kegel- und Cylinderflächen gilt dasselbe, was über Pyramiden und Prismen bereits in den §§. 101—105 erörtert wurde.

Lagen der Hilfsebenen bestimmen. Hiernach ergeben sich für die Hilfsebene $\Delta\,\delta\,\nu$, $\alpha\,s$ als Schnitt mit der einen, $\alpha\,S$ und $\beta\,S$ als Schnitt mit der andern Kegelfläche, folglich im gegenseitigen Durchschnitt die Punkte *1* und *2* der Schnittcurve.

Ebenso ist für die Ebene $\delta\,\mu\,\Delta$, $b\,S$ der Schnitt des Kegels S, dagegen $\gamma\,s$ und $\varepsilon\,s$ der Schnitt des Kegels s, mithin ergeben sich in diesen Erzeugenden die Punkte *3* und *4*, welche der fraglichen Schnittcurve angehören.

Fig. 274.



Abgesehen davon, dass diese beiden Ebenen die Gränzen angeben, innerhalb welcher man die schneidenden Ebenen zu legen hat, haben die so gefundenen Punkte *1*, *2*, *3*, *4* die Eigenschaft, dass die Erzeugenden $\alpha\,S$, $\beta\,S$, $\gamma\,s$, $\varepsilon\,s$ Tangenten in diesen Punkten an die Schnittcurve sind.

Um dies für einen dieser Punkte nachzuweisen, suchen wir, z. B. für *2*, die Tangente an die Schnittcurve nach der oben angegebenen allgemeinen Methode. Dieselbe ergibt sich als Schnitt der in den Kanten $\alpha\,S$ und $\alpha\,s$ an die Kegelflächen geführten Tangirungsebenen. Der Annahme zufolge ist jedoch die Hilfsebene schon tangirend an die Kegelfläche s, wird sich somit mit der in $\alpha\,S$ gelegten Berührungsebene nur in dieser Geraden schneiden können und folglich $\alpha\,S$ die gesuchte Tangente sein.

Weiters bestimme man jene Punkte der Schnittcurve, welche in den Umrissen der Kegelflächen liegen. Man wird, um z. B. die im Umrisse cS gelegenen Punkte *5* und *7* zu erhalten, durch den Fusspunkt c dieser Erzeugenden cS die Trace $c\delta$ und die zugehörige zweite Trace $\omega\Delta$ ziehen und die Durchschnittspunkte *5, 6, 7, 8* der in dieser Ebene gelegenen Erzeugenden cs, ds, fs und gs bestimmen. Die in den Umrissen befindlichen Punkte sind darum von besonderem Interesse, weil in denselben die den Umriss bildende Erzeugende die Durchdringungscurve berührt, und weil diese Punkte die Begränzung des sichtbaren Theils der Schnittcurve dann bilden, wenn die Erzeugende in einem sichtbaren Theil der zweiten Fläche ein- oder ausdringt. Ersteres ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass die Tangirungsebene im Umrisse durch das Auge geht, mithin alle Schnitte, also auch die zu suchende Tangente, in ihrer Bildflächtrace, welche der Umriss selbst ist, enthält.

Sind auf diese Art die wichtigsten Punkte der Schnittcurve gefunden, so ermittle man auf ähnliche Weise weitere Punkte derselben dort, wo diese zur genauen Verzeichnung der Curve als nothwendig erscheinen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die hier gemachten Bemerkungen über die besonderen Punkte der Schnittcurve sowohl für den Durchschnitt zweier Cylinder, als auch für den Schnitt von Kegel- mit Cylinderflächen gelten, dortselbst also nicht wiederholt werden.

§. 150.

Aufgabe.

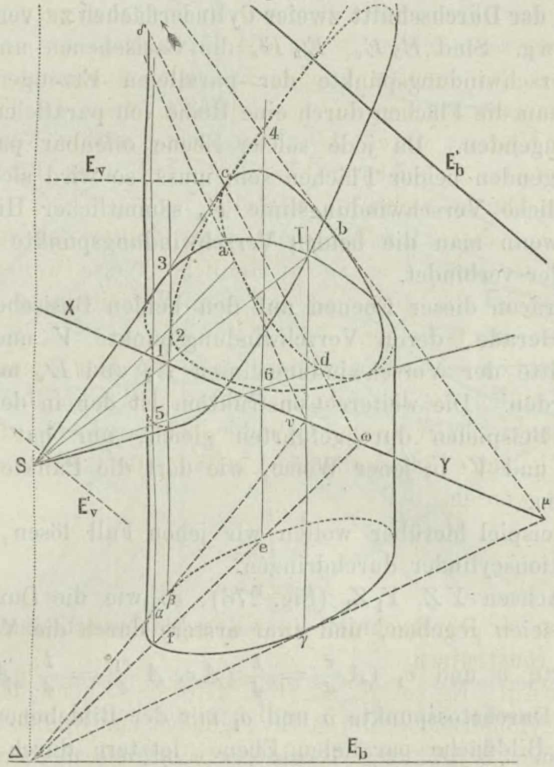
Es ist der Durchschnitt einer Kegelfläche mit einer Cylinderfläche zu construiren.

Lösung. Es sei $E_b E_v$ (Fig. 275) die Ebene der Leitlinie $\alpha\beta\gamma$ der Cylinderfläche, deren Erzeugenden zur Bildfläche parallel sind, ferner $E'_b E'_v$ die Basisebene und $abcd$ die Basis der Kegelfläche, deren Spitze S in der Bildfläche liegt und welche über die Leitlinie hinaus ins Unendliche fortgesetzt gedacht wird. Legt man durch S eine zu den Cylindererzeugenden parallele Gerade $S\delta\Delta$, so liegt diese in der Bildebene und schneidet sich mit den Basisebenen in den Punkten Δ und δ ihrer Bildflächtracen. Die durch die Gerade $S\delta\Delta$ gelegten Hilfsebenen schneiden die beiden Flächen in geraden Erzeugenden, in deren gegenseitigem Schnitt man Punkte der zu suchenden Durchdringungscurve erhält.

Die Tracen der Hilfsebenen auf den Basisebenen gehen beziehungsweise durch die Punkte δ und Δ, und je zwei einer Hilfsebene angehörige Tracen müssen sich in einem Punkte der Schnittlinie XY der beiden Basisebenen begegnen.

Vorerst sind auch hier die Gränzebenen $\Delta\gamma\mu$ und $\delta\alpha\nu$ zu legen und die Punkte in den sichtbaren Umrissen zu bestimmen.

Fig. 275.



Die weitere Construktion stimmt mit der in der früheren Aufgabe durchgeführten überein und ist aus der Figur ersichtlich.

In unserem Beispiele berühren die Tracen $\Delta\mu$ und $\delta\mu$ der einen Grenzebene beide Leitlinien, wesshalb im Durchschnitte I der beiden Erzeugenden bS und γI ein vielfacher Punkt der Schnittcurve, d. h. ein solcher Punkt erhalten wird, in welchem sich die beiden Curvenäste kreuzen.

Bei dieser Annahme liegt die Leitlinie der Kegelfläche zum grössten Theile im Innern der Cylinderfläche, wesshalb wir, um die ganze Schnittfigur zu erhalten, die Kegelfläche über die Leitlinie hinaus fortsetzen mussten. Würde die Kegelfläche jedoch durch die Leitlinie begränzt sein, so wäre auch die Durchdringungscurve nur bis zu dieser zu ziehen.

§. 151.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt zweier Cylinderflächen zu verzeichnen.

Lösung. Sind $E_b\,E_v$, $E'_b\,E'_v$ die Basisebenen und v und v_1 die Verschwindungspunkte der parallelen Erzeugenden, so schneide man die Flächen durch eine Reihe von parallelen Ebenen nach Erzeugenden. Da jede solche Ebene offenbar parallel zu den Erzeugenden beider Flächen sein muss, so wird sich die gemeinschaftliche Verschwindungslinie F_v sämmtlicher Hilfsebenen ergeben, wenn man die beiden Verschwindungspunkte v und v_1 mit einander verbindet.

Die Tracen dieser Ebenen auf den beiden Basisebenen sind parallele Gerade, deren Verschwindungspunkte V und V' im Durchschnitte der Verschwindungslinien E_v und E'_v mit F_v erhalten werden. Die weitere Construktion ist der in den vorhergehenden Beispielen durchgeführten gleich, nur hat man die Punkte V und V' in jener Weise, wie dort die Punkte δ und Δ zu benützen.

Als Beispiel hierüber wollen wir jenen Fall lösen, wo sich zwei Rotationscylinder durchdringen.

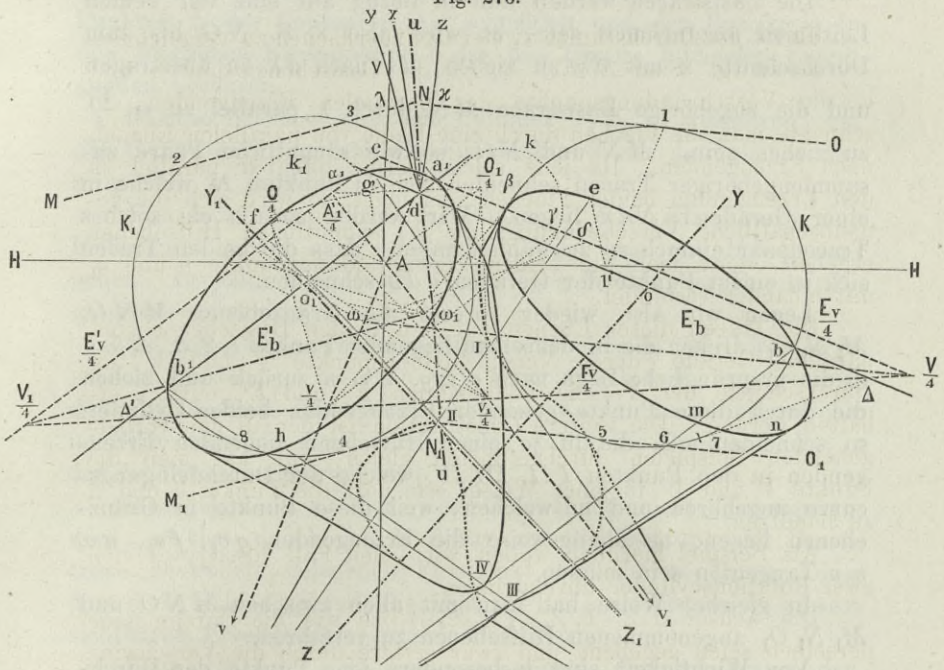
Die Achsen YZ, $Y_1 Z_1$ (Fig. 276), so wie die Durchmesser derselben seien gegeben, und zwar erstere durch die Verschwindungspunkte v und v_1 $(A\frac{v}{4} = \frac{1}{4} . Av,\ A\frac{v_1}{4} = \frac{1}{4} . Av_1)$ und durch die Durchstosspunkte o und o_1 mit der Bildebene oder mit einer zur Bildfläche parallelen Ebene, letztere durch die Perspektiven ab, $a_1 b_1$ in der durch o und o_1 gehenden, zur Bildfläche parallelen Lage. Wir können somit ab, $a_1 b_1$ auch als Bildflächtracen E_b, E'_b der auf YZ, $Y_1 Z_1$ senkrechten Basisebenen, welche die Cylinder nach Kreisen schneiden, betrachten.

Zur Fixirung der Verschwindungslinien E_v, E'_v dieser Ebenen suchen wir auf bekannte Weise die Geraden $\frac{E_v}{4}$, $\frac{E'_v}{4}$, deren Entfernung von A blos den vierten Theil jener der Geraden E_v, E'_v

von A beträgt. ($A\frac{O_1}{4} \perp A\frac{v_1}{4}$ und gleich $\frac{1}{4}$ Augdistanz, $\frac{O_1}{4}\frac{A'_1}{4} \perp \frac{O_1}{4}\frac{v_1}{4}$, schneidet $A\frac{v_1}{4}$ in dem der Geraden $\frac{E'_v}{4}$ zugehörigen Punkte $\frac{A'_1}{4}$; ebenso wird $\frac{E_v}{4}$ gefunden.)

Wird der Durchschnittspunkt d der Bildflächtracen mit jenem x der Verschwindungslinien verbunden, welch' letzterer in der Verlängerung der Geraden Ac so gelegen ist, dass $Ax = 4 . Ac$

Fig. 276.



ist, so erhält man die Schnittlinie dx beider Basisebenen. Ebenso ergibt sich die Verschwindungslinie F_v der Hilfsebenen als Verbindungslinie der Punkte v, v_1, also $\frac{F_v}{4}$, analog $\frac{E_v}{4}$, durch Verbinden von $\frac{v}{4}$ und $\frac{v_1}{4}$. Die Verschwindungspunkte V, V_1 der Tracen der Hilfsebenen auf den Basisebenen sind somit durch die Schnittpunkte $\frac{V}{4}$, $\frac{V_1}{4}$ der Geraden $\frac{E_v}{4}$, $\frac{E'_v}{4}$ mit $\frac{F_v}{4}$ fixirt.

Um nun die Construktion einfach durchzuführen, drehen wir jede Basisebene um E_b, E'_b in die Bildebene, beziehungsweise in eine zur Bildfläche parallele Lage. Daselbst sind die Basiskreise K, K_1 aus o, o_1 über den Durchmessern ab, $a_1 b_1$ zu beschreiben, während die umgelegten Basistracen durch Drehung der Punkte $\frac{O}{4}$, $\frac{O_1}{4}$ nach ω und ω_1, und durch Verbinden der letzteren mit $\frac{V}{4}$, resp. $\frac{V_1}{4}$ ihrer Richtung nach erhalten werden.

Die Schnittlinie dx gelangt einmal nach dz, durch d parallel zu ωc, das andere Mal nach dy, parallel zu $\omega_1 c$.

Die Basistracen werden nun in Bezug auf eine der beiden Leitlinien anzunehmen sein, es wird also z. B. NO bis zum Durchschnitte $\varkappa$ mit dz zu ziehen, $d\varkappa$ nach $d\lambda$ zu übertragen und die zugehörige Basistrace MN durch λ parallel zu $\omega_1 \frac{V_1}{4}$ zu ziehen sein. MN und NO, so wie sämmtliche Paare zusammengehöriger Tracen schneiden sich in Punkten N, welche in einer Geraden $uNdu$ liegen. Wir werden sonach ein solches Tracenpaar einfach so zu wählen haben, dass die beiden Tracen sich in einem Punkte der Geraden udu schneiden.

Legen wir also wieder vorerst die Gränzebenen MNO, $M_1 N_1 O_1$, drehen die in denselben liegenden Punkte *1, 2, 3, 4, 5, 6* in die ursprüngliche Lage nach e, f, g, h, m, n zurück und ziehen die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden beider Cylinder, so schneiden sich die in je einer Hilfsebene liegenden Erzeugenden in den Punkten *I II*, *III IV*, welche der Durchdringungscurve angehören und in welchen, weil diese Punkte in Gränzebenen liegen, beziehungsweise die Erzeugenden gv_1, fv_1, nv, mv Tangenten sein müssen.

In gleicher Weise hat man mit allen zwischen MNO und $M_1 N_1 O_1$ angenommenen Hilfsebenen zu verfahren.

Von Wichtigkeit sind insbesondere jene Punkte der Durchdringungscurve, welche in den Contourkanten der Cylinderflächen liegen, weil sie den sichtbaren Theil der Curve begränzen und die bezüglichen Contourgeraden zu Tangenten haben.

In unserem Beispiele müssen wir vorerst die Fusspunkte der die sichtbaren Umrisse bildenden Erzeugenden in den Kreisen K, K_1 aufsuchen. Zu diesem Behufe denken wir uns die Cylinder bis zum Durchschnitte mit den zugehörigen Parallelebenen E_v, E'_v verlängert und an die so erhaltenen Schnittkreise aus dem Auge die Tangenten geführt, welche die Verschwindungslinien in Punkten des Umrisses schneiden, die eben bezeichneten Schnittkreise jedoch in Punkten der diesen Contouren entsprechenden Erzeugenden im Raume berühren.

Weil jedoch E_v und E'_v ausser die Zeichnungsfläche fallen, so führen wir durch $\frac{v}{4}$ die Geraden $\frac{v}{4}\beta$ parallel zu YZ, $\frac{v}{4}\gamma$ parallel zu bv bis zum Durchschnitte β und γ mit $\frac{E_v}{4}$, beschreiben aus β mit dem Halbmesser $\beta\gamma$ den Kreis k, ziehen aus ω die beiden Tangenten $\omega\delta$ an k und zu diesen Tangenten parallel die Tangenten $7\,\Delta$ an den Kreis K, welch' letztere die Trace E_b in Punkten Δ der Contouren Δv schneiden und den Basiskreis in den fraglichen Fusspunkten 7 der den Umriss bildenden Erzeugenden berühren.

Ebenso hat man mit dem Cylinder $Y_1\,Z_1$ zu verfahren, um die Contouren $\Delta' v_1$ und die Fusspunkte 8 der bezüglichen Erzeugenden zu erhalten.

Nun kann man durch die Punkte 7, 8.... die Tracen der Hilfsebenen ziehen und in gleicher Weise wie mit MNO vorgehen. In jeder Hilfsebene werden vier Punkte der Durchdringungscurve erhalten.

Soll blos der im Bilde sichtbar erscheinende Theil der Curve gesucht werden, so hat man selbstverständlich auch nur jene in den verschiedenen Hilfsebenen gelegenen Kanten zu ziehen, welche im Bilde sichtbar sind, was wieder durch die Punkte 7, 8.... der Leitlinien angezeigt wird.

Dass man dann über jene Gränzebene nicht hinausgehen wird, welche, durch den in Bezug auf die Richtung der Basistrace rückwärts gelegenen Fusspunkt der Umriss-Erzeugenden der einen Fläche gehend, die andere Fläche wenigstens in einer sichtbaren Erzeugenden schneidet, ist klar.

Bemerkung 1. Es kann vorkommen, dass die Tracen der Hilfsebenen auf den Basisebenen sich mit der Schnittlinie XY der letzteren nicht auf der Zeichnungsfläche schneiden. In diesem Falle kann man die Bildflächtracen der Hilfsebenen, oder andere Bestimmungsstücke derselben, welche bisher nicht benützt wurden, anwenden.

Bemerkung 2. Ob ein Punkt der Schnittcurve sichtbar oder gedeckt ist, wird einfach daraus ersichtlich, ob die beiden Erzeugenden, als deren Durchschnitt der in Rede stehende Punkt erhalten wurde, sichtbar sind oder nicht. Derselbe kann nur dann sichtbar sein, wenn es beide Erzeugende sind.

§. 152.

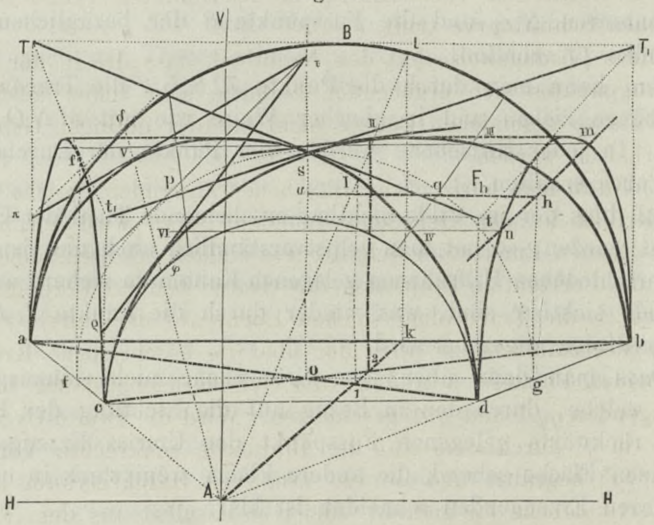
Aufgabe.

Es sind die Grathe eines Kreuzgewölbes zu verzeichnen.

Lösung. Bekanntlich entsteht ein Kreuzgewölbe durch den Schnitt zweier Tonnengewölbe von gleicher Pfeilhöhe. Wir wollen die Tonnen halbkreisförmig annehmen, und das Gewölbe so verzeichnen, dass die eine Tonne parallel zur Bildfläche ist, die andere dagegen senkrecht auf derselben steht.

Ist also *abcd* (Fig. 277) das Bild des horizontalen Quadrates, welches von den Anlaufslinien der beiden Tonnengewölbe gebildet

Fig. 277.



wird, so sind die beiden Diagonalen des Quadrates die Perspektiven der horizontalen Projektionen der Durchdringungscurven beider Tonnen, daher *o* die horizontale Projektion des Scheitels *s*. Legt man durch *o* eine zur Bildfläche parallele Ebene, so ist der über *fg* als Durchmesser verzeichnete Kreis die Perspektive des Schnittes dieser Ebene mit dem auf der Bildfläche senkrechten Cylinder, während der Schnitt des andern Cylinders eine diesen Kreis berührende horizontale Gerade ist. Ebenso sind die über *ab* und *cd* beschriebenen Kreise die Begränzungen der ersteren Cylinderfläche.

Um Punkte der Durchdringungscurve zu erhalten, kann man auf mehrfache Weise vorgehen.

a) Mit Benützung der horizontalen Projektion der Grathe.

Nimmt man nämlich irgend einen Punkt *1* der Projektion an und legt durch denselben eine zu den Erzeugenden des ersteren Cylinders parallele vertikale Ebene, so ist $A\,1$ deren horizontale Trace, welche noch überdies den Punkt *2* der zweiten Diagonale in sich enthält. Diese Trace schneidet die Gerade $a\,b$ in k, daher die Vertikale $k\,l$ die Trace der eben gelegten Ebene auf jener zur Bildfläche parallelen Seitenebene $a\,b$ ist und den darin liegenden Kreis in l schneidet. Die Gerade $A\,l$ ist mithin der Schnitt der Hilfsebene mit der Cylinderfläche, welcher die in *1* und *2* errichteten Vertikallinien in den Punkten *I* und *II* der fraglichen Schnittcurve trifft.

Diese Lösungsweise hat den Nachtheil, dass die in der Nähe des Augpunktes sich ergebenden Schnitte sehr schief ausfallen, daher die so gefundenen Punkte nicht mit der nöthigen Genauigkeit erhalten werden.

b) Kann man horizontale Hilfsebenen anwenden, welche beide Cylinderflächen nach Geraden schneiden. Man wird vermittelst dieser Ebenen Punkte der Schnittcurve einfach erhalten, ohne dass hiezu die horizontale Projektion der Grathe benützt werden muss.

Ist F_b die Trace einer solchen Ebene auf der durch $f\,g$ gelegten Vertikalebene, so wird der über $f\,g$ beschriebene Kreis in den beiden Punkten p und q, die Cylinderfläche daher in den Erzeugenden $p\,A$ und $q\,A$ geschnitten. Wird die zweite Cylinderfläche in f durch eine auf die Bildfläche senkrechte Vertikalebene $f\,f'$ begränzt und der so erhaltene Halbkreis um $f\,f'$ in die Vertikalebene $f\,g$ gedreht, so ist er daselbst aus dem Mittelpunkte f mit dem Radius $f\,f'$ zu beschreiben, und wird daher dem Kreise $f\,g$ congruent sein. Die zweite Cylinderfläche wird sonach in zwei horizontalen Erzeugenden geschnitten, welche sich im Abstande $\alpha\,q$ vor und hinter der durch $f\,g$ gelegten Vertikalebene befinden. Werden daher die Punkte m und n des Kreises $b\,m\,n\,d$ so bestimmt, dass $h\,m = h\,n$ perspektivisch gleich $\alpha\,q$ ist, so schneiden die durch m und n geführten Erzeugenden jene des ersten Cylinders in den Punkten *III*, *IV* etc. der Durchdringungscurve.

c) Eine dritte Auflösungsweise besteht darin, dass man zwei conjugirte Durchmesser der Perspektive der Schnittcurven, welche bekanntlich Ellipsen sind, sucht. Nachdem den Punkten b, c, a und d der Grathe vertikale Tangenten entsprechen, so sind die Diagonalen ad und bc die einen Axen dieser Ellipsen, während die andern vertikal sind und durch die Halbirungspunkte der ersteren gehen. Wird also bc im Punkte 2 halbirt, daselbst die Vertikale $2\,II$ errichtet und deren Schnitt II mit der Cylinderfläche bestimmt, so ist $2\,II$ der gesuchte halbe Diameter. Auf gleiche Weise wird die zu ad conjugirte Halbaxe der andern Ellipse gefunden.

Die Construktion der Tangente an einen Punkt der Schnittcurve lässt sich hier ebenfalls auf mehrfache Weise durchführen und wird sehr einfach, wenn man berücksichtigt, dass die Tangente gleichfalls in der Ebene der Curve liegen muss. Sind z. B. in den Punkten V und VI der Erzeugenden δA die Tangenten an beide Grathe zu verzeichnen, so hat man durch δA eine Tangirungsebene an den auf die Bildfläche senkrechten Cylinder zu legen und dieselbe mit den Ebenen der Curven zum Durchschnitt zu bringen. Diese Tangirungsebene schneidet die beiden durch ab und cd geführten Vertikalebenen in den Geraden $\delta\pi$ und $\varphi\rho$, welche zu einander parallel und Tangenten in den Punkten δ und φ der begränzenden Kreise $a\delta b$ und $c\varphi d$ sind. Die Tracen der Diametralebenen ad und bc auf den vorgenannten Vertikalebenen sind offenbar die in a, b, c und d errichteten Vertikalen aT, bT_1, ct_1 und dt. Die Tangenten $\delta\pi$ und $\varphi\rho$ schneiden sich mit einer der obigen, in derselben Diagonalebene liegenden Tracen in den Punkten π und ρ, welche mit V und VI verbunden die gesuchten Tangenten geben.

Einfacher ergeben sich die Tangenten auf folgende Weise. Zieht man an den Kreis fpg in dem Durchschnittspunkte δ mit der Erzeugenden δA eine Tangente, so ist dies die Trace der Berührungsebene auf der durch fg gehenden Vertikalebene, welche mit den beiden Diagonalebenen bc und ad die Gerade os gemeinschaftlich hat. Der Punkt τ, in welchem diese Gerade von ersterer geschnitten wird, muss somit den zu suchenden Tangenten angehören.

Wichtig ist ferner die Bestimmung der Tangenten in dem Kreuzungspunkte s beider Grathe. Die Construktion derselben muss nach der erst angeführten Methode vorgenommen werden, da für diesen Punkt die zweite Methode zu keinem Resultate führt. Für die Erzeugende As ist die Trace der Berührungsebene in B horizontal und schneidet die durch a und b gehenden

Vertikallinien in T und T_1, daher diese Punkte blos mit s zu verbinden sind, um die fraglichen Tangenten zu erhalten, welche horizontal und gegen die Bildfläche unter einem Winkel von 45^0 geneigt sind.

Die Construktion des Kreuzgewölbes in einer andern, als der hier angenommenen Stellung, würde in gleicher Weise, nur mit den durch die verschiedene Lage sich ergebenden Abänderungen durchzuführen sein.

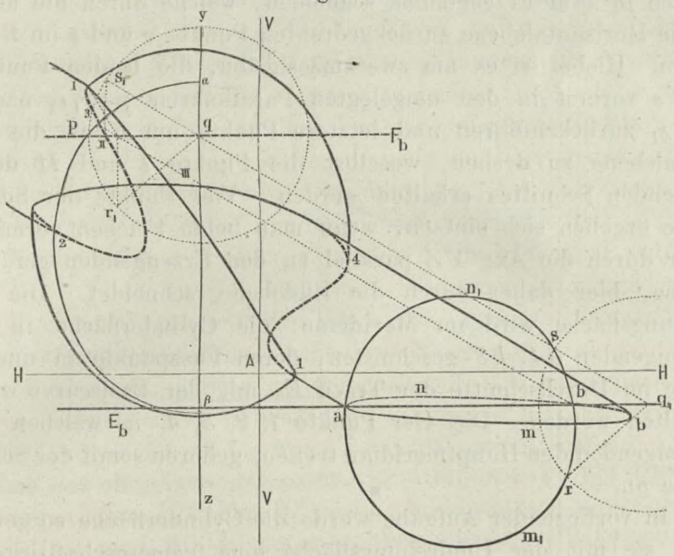
§. 153.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt einer Umdrehungsfläche mit einer Cylinderfläche zu bestimmen.

Lösung. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die Cylindererzeugenden parallel zur Bildebene seien, und dass die Drehungsaxe der Umdrehungsfläche in der Bildebene liege. Ferner

Fig. 278.



sei $a m n b$ (Fig. 278) die Trace der Cylinderfläche auf der Horizontalebene E_b und $\alpha p \beta$ der Hauptmeridian der Rotationsfläche.

Um Punkte der Schnittcurve zu erhalten, kann man die Trace der Cylinderfläche um E_b in die Bildebene drehen, woselbst sie sich in $a b m_1 n_1$ ergibt, und ein System horizontaler Hilfsebenen anwenden, welche die Umdrehungsfläche nach Parallelkreisen, die Cylinderfläche hingegen nach zur Trace $a\,b\,m_1\,n_1$ congruenten Curven schneiden. Ist also F_b die Bildflächtrace einer Hilfsebene, so wird der mit dem Radius pq verzeichnete Kreis $p\,q\,r_1\,s_1$ der in die Bildfläche gedrehte Parallelkreis und q dessen Mittelpunkt sein.

Denkt man sich diesen Parallelkreis als Leitlinie einer Cylinderfläche, deren Erzeugenden parallel zu jenen des gegebenen Cylinders sind, so ist die Trace derselben auf der Ebene E_b wieder ein Kreis vom Radius $p\,q$, dessen Mittelpunkt q_1 erhalten wird, wenn man durch q eine Gerade $q\,q_1$ parallel zu den Erzeugenden führt und mit der Trace E_b zum Schnitte bringt. Der aus q_1 mit dem Radius $p\,q$ beschriebene Kreis ist somit die in die Bildfläche umgelegte Trace der Hilfscylinderfläche, welche die umgelegte Trace des gegebenen Cylinders in r und s schneidet.

Beide Cylinder haben parallele Erzeugende, müssen sich sonach in zwei Erzeugenden schneiden, welche durch die um E_b in die Horizontalebene zurückgedrehten Punkte r und s im Raume gehen. Hiebei ist es am zweckmässigsten, die beiden Punkte r und s vorerst in den umgelegten Parallelkreis $p\,q\,r_1\,s_1$ nach r_1 und s_1 zurückzuführen und letztere Punkte um F_b in die Horizontalebene zu drehen, woselbst die Punkte I und II des zu suchenden Schnittes erhalten werden. Vier Punkte der Schnittcurve ergeben sich einfach, wenn man beide Flächen vermittelst einer durch die Axe YZ parallel zu den Erzeugenden geführten Ebene, hier daher durch die Bildebene, schneidet. Die Umdrehungsfläche wird im Meridiane, die Cylinderfläche in zwei Erzeugenden $a\,1$, $b\,3$ geschnitten, deren Fusspunkte in unserem Falle im Durchschnitte der Trace E_b mit der Basiscurve $a\,b\,m\,n$ erhalten werden. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4, in welchen diese Erzeugenden den Hauptmeridian treffen, gehören somit der Schnittcurve an.

In vorliegender Aufgabe wurde die Cylinderfläche so gewählt, dass sie mit der Umdrehungsfläche eine gemeinschaftliche Berührungsebene und in derselben einen Punkt III gemein hat, in welchem sich sodann die beiden Schnittcurven, nämlich die Eintritts- und Austrittscurve, vereinen.

§. 154.

Aufgabe.

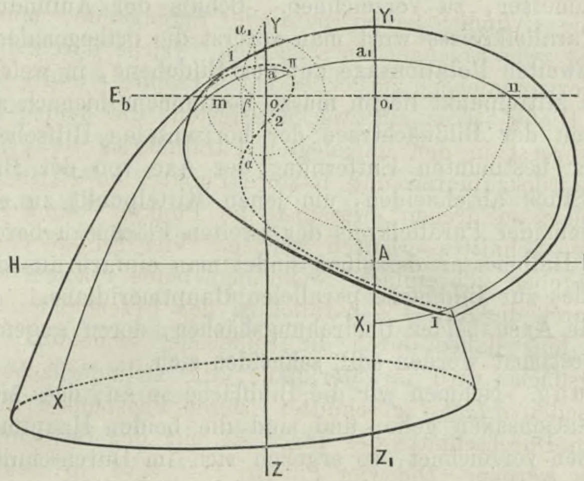
Es ist der Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen zu construiren.

a) Die Axen beider Flächen seien in der Bildebene oder in einer zu derselben parallelen Ebene gelegen und beide vertikal.

Lösung. Es sei ein Paraboloid, dessen Hauptmeridianhälfte amx ist, mit einem Ellipsoide, das durch Rotation der halben Ellipse $a_1 n x_1$ um ihre kleine Axe $a_1 x_1$ entstanden ist, zum Durchschnitt zu bringen. YZ und $Y_1 Z_1$ (letztere mit der Vertikallinie zusammenfallend) seien die beiden Drehungsaxen.

Zum Behufe der Auffindung einzelner Punkte des Schnittes werden wir horizontale Hilfsebenen anwenden und dieselben

Fig. 279.



sammt den in ihnen gelegenen Schnittkreisen in die Bildebene umlegen. Ist E_b (Fig. 279) die Bildflächtrace einer solchen Ebene, so sind die in derselben liegenden Parallelkreise beider Flächen nach der Drehung um E_b über den Radien om, $o_1 n$ zu verzeichnen. Diese schneiden sich in zwei Punkten α, α_1, welche gleich weit vor und hinter mn gelegen sind. Diese beiden Punkte in die horizontale Ebene zurückversetzt, geben die der Schnittcurve angehörigen Punkte *1* und *2*.

Die Punkte I und II, in welchen sich die Hauptmeridiane beider Flächen schneiden, gehören gleichfalls der Schnittcurve an, während die diesen Punkten zugehörigen Tangenten im Augpunkte A verschwinden.

b) Es ist der Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen mit vertikalen Axen zu suchen, wenn letztere nicht in der Bildfläche liegen.

Lösung. Man denke sich die Bildfläche durch eine der beiden Axen hindurchgehend und bestimme die Entfernung der zweiten Axe von der Bildfläche. Schneidet man beide Flächen durch horizontale Ebenen und legt diese sammt den beiden Parallelkreisen, die sich als Schnitte ergeben, in die Bildebene, so erhält man im Durchschnitte dieser Kreise zwei Punkte der fraglichen Durchdringungscurve. Der umgelegte Parallelkreis der Umdrehungscurve, deren Axe in der Bildfläche liegend angenommen wurde, ist über der betreffenden Sehne des Hauptmeridians, als Durchmesser, zu verzeichnen. Behufs der Auffindung des zweiten Parallelkreises wird man vorerst die orthogonale Projektion der zweiten Rotationsaxe auf der Bildebene, in welcher der umgelegte Mittelpunkt liegen muss, bestimmen, hienach auf derselben, von der Bildflächtrace der horizontalen Hilfsebene, ein der früher bestimmten Entfernung der Axe von der Bildfläche gleiches Stück abschneiden, um jenen Mittelpunkt zu erhalten, aus welchem der Parallelkreis der zweiten Fläche zu beschreiben ist. Den Halbmesser desselben findet man einfach aus der Perspektive des zur Bildfläche parallelen Hauptmeridians.

c) Die Axen beider Umdrehungsflächen, deren gegenseitiger Schnitt bestimmt werden soll, schneiden sich.

Lösung. Nehmen wir die Bildfläche so an, dass sie durch beide Rotationsaxen gehe, und sind die beiden Hauptmeridiane der Flächen verzeichnet, so ergeben sich im Durchschnitte derselben Punkte der zu suchenden Curve. Schneidet man ferner beide Flächen durch eine Reihe concentrischer Kugeln, deren Mittelpunkt im Durchschnitte beider Axen liegt, so werden dieselben gleichfalls in Parallelkreisen geschnitten, deren Ebenen sich in einer auf der Bildfläche senkrechten Geraden begegnen. Der Fusspunkt dieser Geraden auf der Bildebene ergibt sich im Durchschnitte der Bildflächtracen der beiden Parallelkreisebenen. Nun hat man blos einen der beiden Parallelkreise sammt dieser Geraden in die Bildfläche umzulegen und die erhaltenen Durchschnittspunkte, in die ursprüngliche Lage zurückgedreht, perspektivisch zu bestimmen.

§. 155.

Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt einer windschiefen Fläche mit einer Cylinderfläche zu bestimmen.

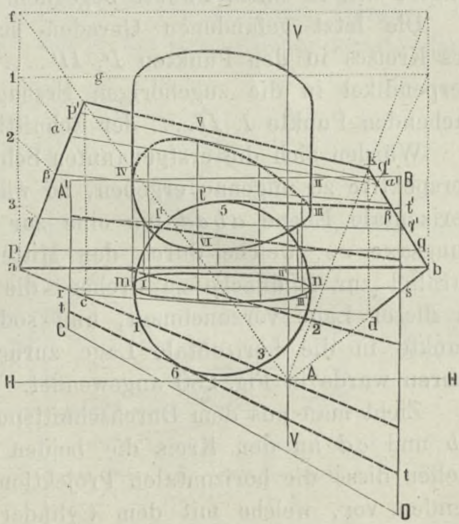
Lösung. Hat die Cylinderfläche eine beliebige Lage im Raume, so wende man solche Hilfsebenen an, welche die windschiefe Fläche nach Erzeugenden schneiden und zu den Cylindererzeugenden parallel sind.

Wir wollen diesfalls eine windschiefe Dachfläche wählen und sie mit einer vertikalen Cylinderfläche von kreisförmiger Leitlinie zum Durchschnitt bringen.

Das Trapez *a b c d* (Fig. 280) sei beispielsweise der Grundriss eines Gebäudes, welches einen horizontalen, in der Mauerfläche *c d g k* gelegenen First erhalten soll. Die Gesimskante *a b* liege in der Bildebene, während die beiden Seitenmauern *a c* und *b d* auf derselben senkrecht stehen. *a f* sei die Höhe des Dachfirstes.

Die beiden Punkte *g* und *k* werden erhalten, wenn man auf den in *c* und *d* errichteten Vertikalen *c g* und *d k* das Längenstück *a f* perspektivisch abschneidet; es ist mithin *g k* die Perspektive des Firstes.

Fig. 280.



Der in der Horizontalebene *a b c d* liegende Kreis *m n* bilde die äussere Fläche einer cylindrischen Mauer, welche aus dem Gebäude durch das Dach geführt wird, also letzteres durchdringt.

Am einfachsten erhält man diesfalls Punkte der Schnittcurve beider Flächen, wenn man horizontale Hilfsebenen anwendet, welche die Cylinderfläche nach Kreisen, die windschiefe Fläche*) nach geraden Erzeugenden schneiden. Hiezu kann unmittelbar die horizontale Ebene *abcd* als Grundebene benützt werden. Am zweckmässigsten ist es, die Hilfsebenen in gleicher Entfernung von einander zu legen. Theilt man z. B. die Höhe *af* in vier gleiche Theile und verbindet diese Theilpunkte mit *A*, so erhält man in den Punkten α, β, γ der Geraden *ag* die Schnittpunkte derselben mit den durch *1*, *2*, *3* gelegten Horizontalebenen. Auf gleiche Weise erhält man in der Geraden *bk* die Punkte α', β', γ', welche mit α, β, γ verbunden die entsprechenden Erzeugenden der windschiefen Fläche geben.

Die horizontalen Projektionen derselben werden einfach bestimmt, wenn man die Punkte α, β, γ, α', β', γ' in die Geraden *ca* und *bd* vertikal projecirt, oder, indem man die Geraden *ca* und *bd* perspektivisch in vier gleiche Theile theilt, und die Theilpunkte in gehöriger Aufeinanderfolge mit einander verbindet. Die so gefundenen Geraden, so wie jene *ab* und *cd*, müssen verlängert sich in einem Punkte begegnen.

Die letzt gefundenen Geraden schneiden die Perspektive des Kreises in den Punkten *I'*, *II'*...., welche durch vertikale Perpendikel in die zugehörigen Erzeugenden projecirt, die zu suchenden Punkte *I*, *II*.... der Schnittlinie bestimmen.

Würden sich die erstgenannten Schnittpunkte mit der Kreisperspektive zu ungenau ergeben, so wäre es zweckmässiger, die horizontale Ebene *abcd* um eine zur Bildfläche parallele Drehungsaxe *rs*, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, parallel zur Bildfläche zu drehen, die angeführten Operationen in dieser Lage vorzunehmen, und sodann erst die ermittelten Punkte in die horizontale Lage zurückzuführen. Dieses Verfahren wurde in Fig. 280 angewendet.

Zieht man aus dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden *ab* und *cd* an den Kreis die beiden Tangenten (*tt*, *t't'*), so stellen diese die horizontalen Projektionen der äussersten Erzeugenden vor, welche mit dem Cylinder noch zum Durchschnitt gelangen. Bestimmt man diese Erzeugenden *pq* und *p'q'* selbst und in ihnen die Berührungspunkte mit dem Cylinder, so müssen

*) Diese windschiefe Dachfläche ist ein Theil des in §. 145 behandelten hyperbolischen Paraboloids, indem daselbst *ag* und *bk* die Leitlinien sind und die Horizontalebene die Richtungsebene der Fläche bildet.

erstere auch die Durchdringungscurve in den Punkten *V* und *VI* berühren. Es ist selbstverständlich, dass man Punkte der Curve nur innerhalb denjenigen Horizontalebenen suchen wird, welche den beiden äussersten Erzeugenden entsprechen.

Kapitel XVI.

Verschiedene Aufgaben.

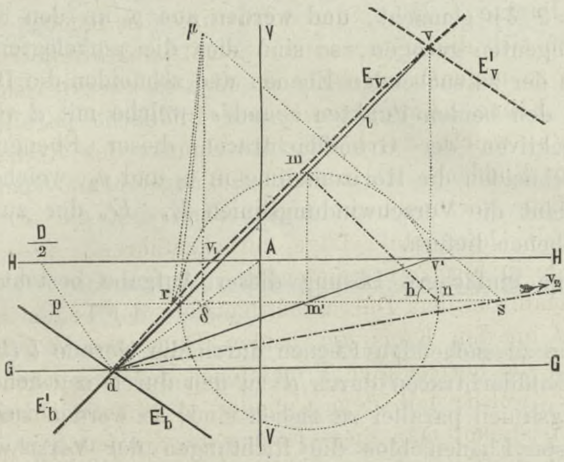
§. 156.

Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene so zu legen, dass sie mit der Grundebene einen bestimmten Winkel einschliesst.

Lösung. a) Ist l_v^d (Fig. 281) die gegebene Gerade, so wähle man eine horizontale Ebene als Grundebene derart, dass

Fig. 281.



die Grundlinie *G G* durch den Durchstosspunkt *d* der Geraden *l* mit der Bildebene gehe. Es ist sodann *d v'* die Perspektive der Grundflächprojektion dieser Geraden.

Nimmt man irgend einen Punkt *m*, *m'* dieser Geraden und denkt sich durch denselben alle Ebenen, welche mit der Grundebene den gegebenen Winkel einschliessen, geführt, so werden diese eine senkrechte Kegelfläche mit vertikaler Axe $m m'$ umhüllen. Von den besagten Ebenen werden die zu suchenden durch die gegebene Gerade selbst gehen, demnach bestimmt werden, wenn man durch die Gerade l an diese Kegelfläche die möglichen Tangirungsebenen legt.

Zieht man die Horizontale $m' n$ parallel zu $G G$ und führt $m n$ unter den gegebenen Winkel h gegen dieselbe, so bestimmt das Stück $m' n$ die Perspektive des zur Bildfläche parallelen Halbmessers der Grundflächtrace obiger Kegelfläche.

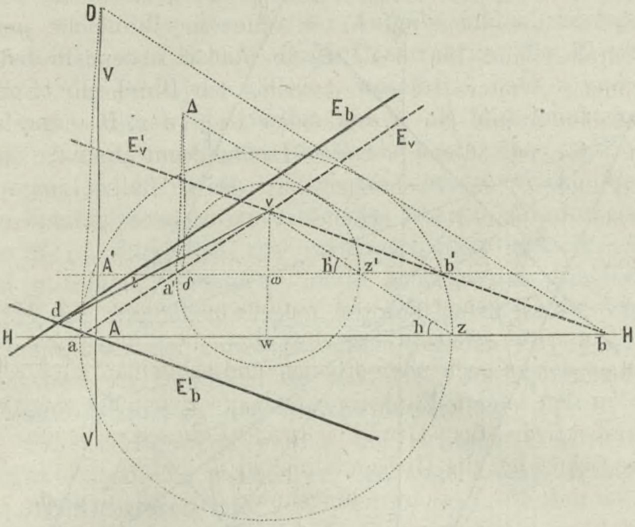
Es wird jedoch im vorliegenden Beispiele nicht nothwendig sein, die Perspektive dieses Kreises zu verzeichnen, sondern wir werden denselben um $r s$ in eine zur Bildfläche parallele Ebene drehen und ihn daselbst aus m' mit dem Radius $m' n$ verzeichnen. Weiters ist erforderlich, den Durchschnittspunkt d der Geraden l mit der Grundebene nach der Drehung zu ermitteln. Es ist offenbar δ der Drehungsmittelpunkt für den Punkt d und $d \delta$ der Drehungsradius, dessen halbe Länge $p \delta$ in Bezug auf die durch $r n$ gehende Vertikalebene gefunden wird, wenn man d mit $\frac{D}{2}$, ($A \frac{D}{2}$ halbe Augdistanz) verbindet. Wird also $\delta \mu = 2 . \delta p$ gemacht, und werden aus μ an den Kreis die beiden Tangenten gezogen, so sind dies die umgelegten Grundflächtracen der zu suchenden Ebenen und schneiden die Drehungsaxe $r n$ in den beiden Punkten r und s, welche mit d verbunden die Perspektiven der Grundflächtracen dieser Ebenen geben. Letztere schneiden die Horizontslinie in v_1 und v_2, welche Punkte mit v vereint die Verschwindungslinien E_v, E'_v der zu bestimmenden Ebenen liefern.

b) Eine einfachere Lösung dieser Aufgabe besteht in Folgendem.

Da die zu suchenden Ebenen durch die Gerade l (Fig. 282), also ihre Bildflächtracen durch d zu den durch v gehenden Verschwindungslinien parallel zu ziehen sind, so werden zur Bestimmung dieser Ebenen blos die Richtungen der Verschwindungslinien erforderlich sein. Denkt man sich sonach den Parallelstrahl der Geraden l gezogen und aus dem Durchschnitte v desselben mit der Bildebene als Scheitel den obigen Kegel verzeichnet, so hat man durch den Parallelstrahl die Tangirungsebenen an den Kegel zu legen, um im Durchschnitte derselben mit der

Bildebene die zu suchenden Verschwindungslinien zu erhalten. Wird also vz unter dem gegebenen Winkel h gegen die Horizontslinie gezogen, und die Horizontsebene als Grundebene angenommen, so ist wz der Radius des Basiskreises der Kegelfläche. Man wird sodann, wie früher, die Horizontsebene um die Horizontslinie in die Bildfläche drehen — woselbst der Basiskreis aus w mit dem Radius wz zu beschreiben ist und das Auge nach D (AD Augdistanz) gelangt — und aus D an den Kreis die beiden Tangenten Da und Db zu ziehen haben, um im Durchschnitte a und b derselben mit der Horizontslinie jene Punkte zu erhalten,

Fig. 282.



welche mit v verbunden die Verschwindungslinien E_v und E'_v der Ebenen $E_b\,E_v$, $E'_b\,E'_v$ geben.

Ist die Distanz AD zu gross, um mit derselben innerhalb der Gränzen der Zeichnungsfläche auszureichen, so kann ein aliquoter Theil derselben benützt werden.

Man wird sodann nicht die Horizontsebene, sondern, wenn z. B. die halbe Distanz benützt wird, eine durch den Halbirungspunkt ω der Geraden vw gehende Horizontalebene als Grundebene benützen, diese sammt dem in ihr liegenden Punkt Δ des Parallelstrahls in die Bildfläche umlegen und die weitern Operationen in derselben Weise wie früher durchführen, wodurch man die Punkte a' und b' der beiden Verschwindungslinien erhält. Sämmtliche Construktionen sind in Fig. 282 ersichtlich.

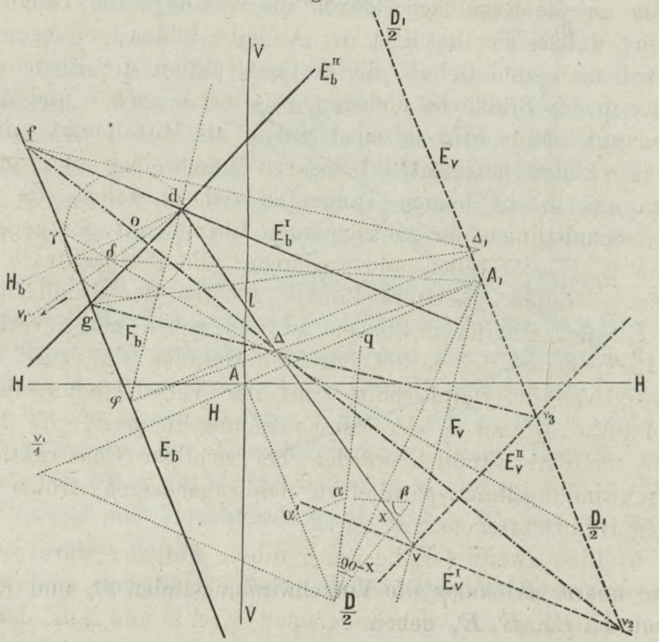
§. 157.

Aufgabe.

Es ist eine Ebene $E_b\,E_v$ und eine Gerade l_v^d gegeben; man soll durch diese Gerade eine Ebene legen, welche mit der gegebenen Ebene einen bestimmten Neigungswinkel x einschliesst.

Lösung. a) Man bestimme vorerst den Durchschnittspunkt Δ (Fig. 283) der gegebenen Geraden mit der Ebene $E_b\,E_v$ durch

Fig. 283.



Zuhilfenahme einer Ebene $F_b\,F_v$, deren Verschwindungslinie den Verschwindungspunkt v mit dem Nebenaugpunkte A_I der gegebenen Ebene verbindet, wähle sodann einen Punkt der Geraden l, z. B. den Durchstosspunkt d derselben mit der Bildebene, fälle aus d ein Perpendikel $v_1\,d$ (mit Benützung von $\frac{v_1}{4}$) auf $E_b\,E_v$, und suche dessen Durchschnitt δ mit dieser Ebene, wozu am zweckmässigsten die bildflächprojecirende Ebene $H_b\,H_v$ zu benützen ist.

Betrachtet man δd als die Axe einer senkrechten Kegelfläche, deren Erzeugenden den Winkel x mit der Ebene $E_b E_v$ bilden, so ist die Trace dieser Kegelfläche auf $E_b E_v$ ein Kreis, dessen Halbmesser als die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden wird, welches die wahre Grösse der Entfernung $d\delta$ zur zweiten Kathete und dieser gegenüber den Winkel x hat. Wird daher auf irgend eine Weise die wahre Länge $\frac{D}{2}\alpha$ der Perspektive $d\delta$ gesucht und das Dreieck $\frac{D}{2}\alpha\beta$ nach obiger Angabe verzeichnet, so ist dessen Kathete $\alpha\beta$ der in Rede stehende Halbmesser.

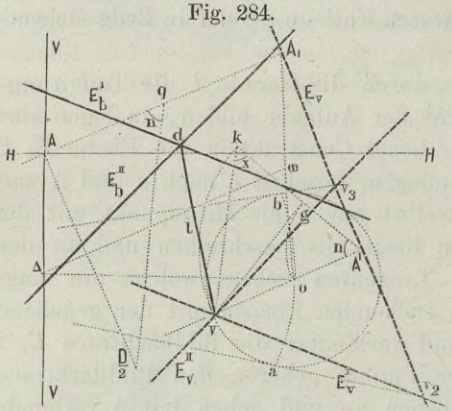
Da an die Kegelfläche durch die Gerade l die Tangirungsebenen, welche das Resultat der Aufgabe bilden, zu legen sind, so wird man zum Behufe dieser Construktion die Ebene $E_b E_v$ um E_b in die Bildfläche umlegen, woselbst δ nach o und Δ nach Δ_1 gelangt. Man wird daselbst aus o als Mittelpunkt mit dem Radius $\alpha\beta$ den umgelegten Basiskreis beschreiben und an denselben aus Δ_1 die beiden Tangenten ziehen, welche die umgelegten Schnittlinien der zu suchenden Ebenen mit der gegebenen Ebene $E_b E_v$ darstellen und verlängert die Bildflächtrace E_b in f und g treffen. Letztere Punkte gehören den Bildflächtracen E_b^I, E_b^{II} der fraglichen Ebenen an und geben mit Δ verbunden die Perspektiven der zurückgedrehten Geraden $f\Delta_1$, $g\Delta_1$, welche Perspektiven im Durchschnitte mit der Verschwindungslinie E_v die Punkte v_2 und v_3 der Verschwindungslinien E_v^I, E_v^{II} bestimmen. Selbstverständlich werden bei richtiger Construktion die Verschwindungslinien parallel zu den zugehörigen, früher gefundenen Bildflächtracen sein.

b) Eine zweite Lösungsweise dieser Aufgabe wäre jene, wo man vorerst die Verschwindungslinien der Ebenen aus der Verschwindungslinie E_v der gegebenen Ebene und aus dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden aufsucht.

Betrachtet man nämlich v als den Scheitel eines Kegels, dessen Erzeugenden gegen die Parallelebene E_v unter dem gegebenen Winkel x gerichtet sind, und legt durch den Parallelstrahl v an diesen Kegel die Tangirungsebenen, so werden diese die Bildfläche in Geraden schneiden, welche die Verschwindungslinien der fraglichen Ebenen sind.

Um das Gesagte durchzuführen, denke man sich durch v (Fig. 284) eine auf E_v senkrechte Ebene vA' gelegt und dieselbe um vA' in die Bildebene gedreht, woselbst die umgelegte Trace $A'k$ dieser Ebene auf der Parallelebene E_v gegen vA' unter dem Neigungswinkel der Ebene E_v mit der Bildebene zu ziehen ist. Es ist sodann die aus v auf $A'k$ gefällte Senkrechte vg nichts anders als die Kegelaxe. Wird über dieser, als Kathete, und mit Zuhilfenahme des gegenüberliegenden Winkels x das Dreieck vgk verzeichnet, so ist gk der Radius jenes Kreises, in welchem die Kegelfläche von der Parallelebene E_v geschnitten wird. Alsdann drehe man die Parallelebene sammt dieser Kegeltrace und dem Auge um E_v in die Bildfläche, woselbst g als Kreismittelpunkt nach o gelangt. Aus o ist der Kreis mit dem Radius bk zu beschreiben.

Fig. 284.



Das umgelegte Auge fiel hier ausser die Zeichnungsfläche, wesshalb der Halbirungspunkt Δ der das Auge mit o verbindenden Geraden Δo derart gesucht wurde, dass man o mit A_1 (Nebenaugpunkt) vereinigte, im Halbirungspunkte ω von $A_1 o$ die auf E_v Senkrechte $\omega\Delta$ zog, und auf dieser die durch das Dreieck $Aq\frac{D}{2}$ erhaltene halbe Nebenaugdistanz $q\frac{D}{2}$ von ω nach Δ auftrug. Da aus dem umgelegten Auge an den eben verzeichneten Kreis die beiden Tangenten zu führen sind, so hat man den Kreis aus Δ mit dem Bogen aob in a und b zu durchschneiden und in diesen Punkten die Tangenten zu ziehen. Letztere treffen die Verschwindungslinie E_v in den Punkten v_2 und v_3, welche mit v verbunden, die Verschwindungslinien E_v^I, E_v^{II} der zu suchenden Ebenen darstellen.

Schliesslich sind durch den bis jetzt nicht benützten Punkt d die Bildflächtracen E_b^I und E_b^{II} parallel zu E_v^I und E_v^{II} zu ziehen.

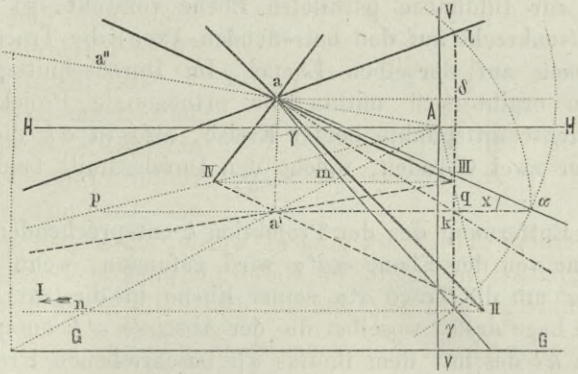
§. 158.

Aufgabe.

Es ist eine Gerade so zu verzeichnen, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht und mit der Grundebene den Winkel x, mit der Bildfläche hingegen den Winkel y einschliesst.

Lösung. Es sei a (Fig. 285) der gegebene Punkt, a' seine Grundflächprojektion und a'' seine Bildflächprojektion. Sämmtliche Geraden, welche mit der Grundebene den Winkel x einschliessen, liegen in der Oberfläche eines senkrechten Kegels, dessen Spitze a und dessen Axe das Perpendikel $a a'$ ist. Ebenso bilden alle Geraden, welche mit der Bildfläche den Winkel y einschliessen, einen Rotationskegel, welcher a als Spitze und $a a''$

Fig. 285.



zur Höhe hat. Die zu suchende Gerade wird sich demnach als Durchschnitt dieser beiden Kegelflächen ergeben.

Um die Construktion in der Perspektive einfach durchzuführen, denke man sich durch beide Kegelaxen eine Ebene gelegt, welche demnach vertikal ist, senkrecht auf der Bildebene steht und jeden Kegel nach zwei Erzeugenden schneidet, welche gegen die Axe symetrisch gestellt sind. Ferner denke man sich die Ebene sammt den darin befindlichen Linien um $a a'$ so lange gedreht, bis sie eine zur Bildfläche parallele Lage annimmt, wodann $a a''$ parallel zur Grundlinie $G G$ wird. Die vorerwähnten Erzeugenden $a \alpha$, $a \gamma$ beider Kegel sind daselbst durch a unter den Winkeln $90 - x$ gegen $a a'$, und $90 - y$ gegen die zweite

Axe zu ziehen. Der Punkt α ist zugleich der Durchstosspunkt der betreffenden Erzeugenden mit der Grundebene, indem er in der Grundflächtrace $a'\alpha$ der durch aa' gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene liegt.

Um den Durchschnitt dieser beiden Kegel in der neuen Lage zu bestimmen, schneide man beide durch eine Kugel, welche ihren Mittelpunkt im gemeinschaftlichen Scheitel a beider Kegel hat, und deren Radius die Länge der Geraden $a\alpha = a\gamma$ ist. Diese Kugel schneidet beide Kegelflächen nach Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf den zugehörigen Kegelaxen, daher auch senkrecht auf der Bildebene stehen, sich demnach auch in einer Geraden begegnen, welche senkrecht auf der Bildebene steht.

Zieht man also aus a mit dem Radius $a\alpha$ einen Kreisbogen, welcher den Schnitt der Kugel mit der durch aa' gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene vorstellt, so sind $\alpha a'$ und $\gamma\delta$ (senkrecht auf den betreffenden Axen) die Tracen obiger Kreisebenen auf derselben Ebene. Im Durchschnittspunkte k derselben ergibt sich mithin die orthogonale Projektion der zwei Durchschnittspunkte beider Kreise, also in ak die Projektion jener zwei Geraden, welche den Durchschnitt beider Kegel bilden.

Die Entfernung des der Projektion k entsprechenden Punktes im Raume von der Ebene $aa'\alpha$ wird gefunden, wenn man den Kreis $\alpha a'$ um die Trace $a'\alpha$ seiner Ebene in die zur Bildfläche parallele Lage dreht, woselbst die der Abscisse $a'k$ entsprechende Ordinate kl des mit dem Radius $\alpha\beta$ beschriebenen Kreises jene Entfernung angibt.

Drehen wir schliesslich das Ganze um 90^0 in die ursprüngliche Lage zurück, welches nach der einen oder andern Richtung geschehen kann, so ergibt sich die Lage des Punktes k, wenn man auf der aus a' auf die Bildebene gefällten Senkrechten $a'A$, nach beiden Seiten von a' die Länge $a'k$ abschneidet, also $a'm = a'n$ perspektivisch gleich $a'k$ macht. Die früher auf der Bildfläche senkrechte Gerade kl, welche sich in k projecirte, wird gegenwärtig parallel zur Bildfläche erscheinen; man wird demnach durch m und n die Horizontalen ziehen und auf denselben von m und n aus nach beiden Seiten das Stück kl abschneiden (indem man $a'p = a'q = kl$ macht und p so wie q mit A verbindet), wodurch sich die Punkte I, II, III und IV

ergeben, welche mit a verbunden vier Gerade bestimmen, die sämmtlich der gestellten Aufgabe Genüge leisten.

Verbindet man die Punkte I, II, III, IV mit a', so erhält man die Perspektiven der Grundfläch projektionen der gefundenen Geraden, vermittelst welchen man die Durchstoss- und Verschwindungspunkte dieser Geraden leicht ermitteln kann.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Kapitel XVII.

Construktion der Schatten.

§. 159.

Allgemeine Bemerkungen.

Wendet man die in der perspektivischen Projektionslehre aufgestellten Sätze und durchgeführten Constructionen auf die Bestimmung der Selbst- und Schlagschatten eines perspektivisch dargestellten Körpers in gleicher Weise an, wie dies in der orthogonalen Projektion geschieht, so wird auch die Schattenbestimmung in der Perspektive keinen Schwierigkeiten unterliegen.

Es ergeben sich jedoch für die Schattenbestimmung oft Vereinfachungen, wesshalb wir diesen Gegenstand im Wesentlichsten hier behandeln und die Construktionen an mehreren Beispielen durchführen wollen.

In der orthogonalen Projektion setzt man immer eine solche Stellung des leuchtenden Körpers voraus, dass die Gegenstände auf der Vorderseite beleuchtet erscheinen; in der Perspektive jedoch ist dies weniger häufig der Fall und man hat sehr oft Schattenbestimmungen vorzunehmen, wo der leuchtende Körper hinter dem Objekte sich befindet, die Schlagschatten demnach nach vorne geworfen werden.

In dieser Beziehung unterscheidet man eine dreifache Stellung des leuchtenden Körpers:

a) dieser kann vor der Bildebene, vor oder hinter dem Beobachter, in grösserer oder kleinerer Entfernung sich befinden,

b) der leuchtende Körper kann in der verlängerten Bildebene liegen, und

c) kann er in endlicher oder unendlicher Entfernung hinter der Bildebene sich befinden.

Im letzteren Falle können die Lichtstrahlen mehr oder weniger schräg die beleuchteten Objekte treffen.

Die Verzeichnung der Gränzen der Selbst- und Schlagschatten, womit wir uns hier befassen werden, gehört in das Bereich der Linearperspektive, während die Bestimmung der Stärke der Töne, überhaupt die Ausführung in Farben, ein Gegenstand der Luftperspektive ist.

Je nachdem der leuchtende Körper sich in endlicher oder unendlicher Entfernung befindet, haben wir centrale oder parallele Lichtstrahlen zu unterscheiden. Der erstere Fall kommt im Vergleich zu letzterem nur selten vor. Parallele Lichtstrahlen können wir bekanntlich bei der Sonnen- und Mondbeleuchtung, so wie überhaupt bei der Beleuchtung durch Körper annehmen, welche im Verhältniss zur Ausdehnung der von uns betrachteten Körper eine sehr grosse Entfernung haben, wie dies bei allen Himmelskörpern der Fall ist. Eine centrale Beleuchtung bietet z. B. ein Kerzen- oder Lampenlicht.

Setzen wir parallele Lichtstrahlen voraus, so haben dieselben in der Perspektive einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt, und es ist bezüglich der Lage desselben in den drei oben angegebenen Fällen folgendes zu merken:

a) Befindet sich der leuchtende Körper vor der Bildebene, so ist der Verschwindungspunkt der parallelen Lichtstrahlen unter der Horizontslinie gelegen, und zwar um so tiefer, unter je grösserem Winkel die Lichtstrahlen die Horizontalebene treffen. Ob der Verschwindungspunkt rechts oder links vom Auge zu wählen ist, darüber entscheidet der Stand des leuchtenden Körpers.

b) Der leuchtende Körper kann in der unendlich weit verlängert gedachten Bildfläche liegen. Diessfalls ist selbstverständlich, dass die Lichtstrahlen zur Bildfläche parallel sind, also auch in der Perspektive zu einander parallel sein müssen, wesshalb sodann blos die Richtung der parallelen Strahlen anzunehmen ist.

Dieser Fall bietet durchgehends die einfachste Lösung, was schon daraus hervorgeht, dass jeder Strahlencylinder zur Bildfläche parallel ist und bekanntlich in solchen Fällen die Operationen sehr einfach durchführbar sind.

c) Ist der leuchtende Körper hinter der Bildebene, so liegt der Verschwindungspunkt der parallelen Lichtstrahlen oberhalb der Horizontslinie. Im Uebrigen gilt dasselbe, was unter a) bereits gesagt wurde, auch bleibt die Construktion mit wenigen unwesentlichen, aus der Richtung der Strahlen sich von selbst ergebenden Abänderungen dieselbe wie im erstern Falle.

Zur Erläuterung der perspektivischen Schattenbestimmung wollen wir nun die Construktion derselben an einigen Körpern zeigen und zu diesem Zwecke von einfacheren Gegenständen auf complicirtere übergehen.

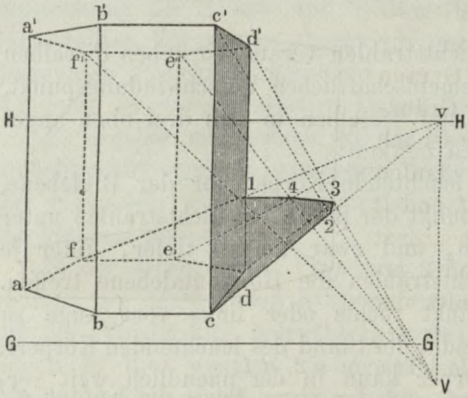
§. 160.

Aufgabe.

Es ist der Schatten eines auf der Grundebene senkrecht stehenden Prismas zu bestimmen.

Lösung. a) Ist *V* (Fig. 286) der Verschwindungspunkt der parallelen Lichtstrahlen, so bestimme man vorerst die Richtung der Tracen der parallel zu den Lichtstrahlen und den Prismenkanten gelegten Ebenen mit der Grundebene *G G*, also den Verschwindungspunkt *v* dieser Tracen, welcher sich ergibt, indem man in *V* die Vertikale *Vv* zieht, und diese mit der Horizontslinie zum Durchschnitt bringt. *v* kann auch als der Verschwindungspunkt der Projektionen der angenommenen Lichtstrahlen auf der Grundebene angesehen werden.

Fig. 286.



Zieht man aus *v* die Geraden *vc*, *vf* zu den äussersten Basisecken, also gleichsam die Tangenten an das Basispolygon, so werden diese Geraden die Schattenrichtungen der beiden Kanten *ff'* und *cc'* vorstellen, daher nur noch die Gränzen der Schatten, d. s. die der Punkte *f'* und *c'* zu bestimmen sein werden. Führen wir demnach durch *c'* und *f'* die Lichtstrahlen, indem wir *f'* und *c'* mit *V* verbinden, so werden sich die verlangten Schatten im Durchschnitte dieser Lichtstrahlen mit der Grundebene in *1* und *2* ergeben.

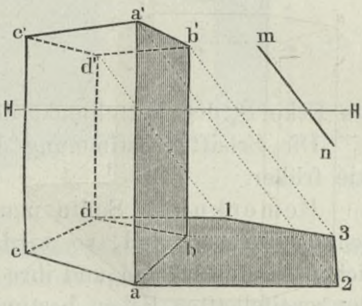
Aus der Richtung der Lichtstrahlen ist weiters ersichtlich, dass von der obern Basis der Theil $c'd'e'f'$ schattenwerfend sei, was übrigens auch schon daraus hervorgeht, dass dieser Theil eine Gränze zwischen einem beleuchteten und einem im Schatten liegenden Theil der Oberfläche des Körpers bildet.

Führen wir also durch d' und e' die Lichtstrahlen Vd', Ve' und suchen ihren Schnitt mit der Grundebene, indem wir durch Vd', Ve' vertikale Ebenen legen, deren Tracen die Geraden dv, ev sind, und diese letzteren zum Schnitt mit den genannten Lichtstrahlen bringen, so ergeben sich die Punkte *3* und *4* als die zu suchenden Schatten von d' und e'.

Hienach wird $f1432c$ den fraglichen Schatten bestimmen.

b) Haben die Lichtstrahlen eine zur Bildfläche parallele Lage, deren Richtung durch die Gerade mn (Fig. 287) bestimmt ist, so werden alle durch die einzelnen Punkte parallel zu den Lichtlinien gelegten Vertikalebenen zur Bildfläche parallel, mithin deren Grundflächtracen zur Horizontslinie parallele Gerade sein. Die Schatten der Gränzkanten aa', dd' werden sonach zur Grundlinie parallel laufen und durch die Schatten *1* und *2* der Punkte a' und d' begränzt werden. Die Punkte *1* und *2* ergeben sich im Durchschnitt der durch a' und d' gelegten, zu mn parallelen Geraden mit den Tracen $a2$, $d1$.

Fig. 287.



Es ist ersichtlich, dass von der obern Basis die Kanten $a'b'$, $b'd'$ die Schlagschattengränzen bestimmen, wesshalb nur noch der Schatten *3* des Punktes b' auf gleiche Weise zu suchen und *3* mit *2* und *1* zu verbinden ist, um den vollständigen Schlagschatten zu erhalten.

In beiden soeben behandelten Aufgaben ist selbstverständlich, dass von dem sichtbaren Theil des Gegenstandes in Fig. 286 die Fläche $cdc'd'$, in Fig. 287 die Fläche $aba'b'$ im Selbstschatten sich befindet.

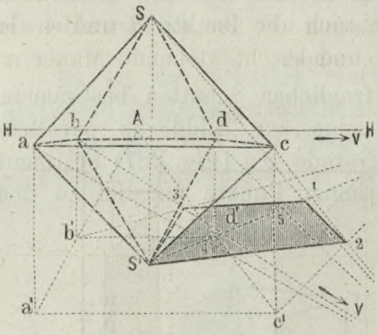
§. 161.

Aufgabe.

Es ist der Schatten eines Oktaeders auf eine horizontale Ebene zu construiren.

Lösung. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass, sobald das Bild der orthogonalen Projektion eines Punktes gefunden, sich auch sein Schatten auf dieser Ebene sehr einfach ergibt. Bei den regelmässigen Körpern ist die orthogonale Projektion der Eckpunkte leicht verzeichnet; es wird demnach auch die Bestimmung des Schlagschattens keinen Schwierigkeiten unterliegen. In unserem Falle ist die horizontale Projektion aller Punkte durch die Verzeichnung des Quadrates $a'b'c'd'$ über der Oktaederkante, wobei die Ecke S' den Mittelpunkt desselben bildet, gefunden.

Fig. 288.



Die Schattenbestimmung der einzelnen Eckpunkte geschieht wie früher.

Bemerkung. Sollte man im Zweifel sein, welche Kanten schattenwerfend sind, so wird man sich vorerst die muthmasslichen Kanten wählen und ihre Schatten, so wie auch die Schatten der zweifelhaften Ecken bestimmen.

In unserem Beispiele wurden nach der Lage der Lichtstrahlen die Kanten Sb, Sc, $S'b$, $S'c$ als schattenwerfend vermuthet, und ihre Schlagschatten bestimmt, wodurch sich das Polygon $1\,2\,S'\,3$ ergab. Es könnte jedoch sein, dass bei nahezu senkrechter Stellung der Lichtstrahlen, wobei die obere Pyramide ganz beleuchtet erscheint, die Spitze S keinen Schlagschatten wirft, in welchem Falle die Ecken a und d einen Schatten geben müssten. Sucht man diesen, so fällt er von beiden Punkten innerhalb des Polygons $1\,2\,3\,S'$, was ein Zeichen ist, dass die anfänglich angenommenen Schattengränzen die richtigen seien. Im vorliegenden Beispiele ist keine im Selbstschatten liegende Fläche des Körpers im Bilde sichtbar.

§. 162.

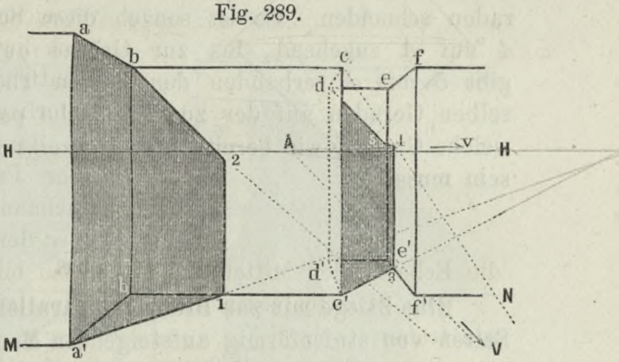
Aufgabe.

Es ist $Ma'b' \ldots N$ (Fig. 289) als der Grundriss einer vertikalen Mauerfläche gegeben; man soll die sich ergebenden Schatten verzeichnen.

Lösung. In vorliegendem Beispiele sind die Schatten nicht nur auf horizontale, sondern auch auf vertikale Ebenen zu bestimmen.

Bei der angenommenen Richtung V der Lichtstrahlen ist klar, dass die auf der Bildebene senkrecht stehende Mauer ab im Selbstschatten liegen und auf die nächstfolgende Mauerfront bc, so wie auf den Boden Schatten werfen wird.

Fig. 289.



Bestimmen wir zunächst den Schatten der Kante aa', so ergibt sich dieser auf der Grundebene, indem man a' mit v verbindet.

Die so erhaltene Gerade schneidet $b'c'$ in *1*, daher von hier aus der Schatten auf die Vertikalebene $b'c'$ fällt.

Die durch aa' parallel mit den Lichtstrahlen gelegte Ebene ist vertikal, wird sich demnach mit der Vertikalebene $b'c'$ in einer vertikalen Geraden schneiden, die in *1* zu errichten ist.

Der Schatten des Punktes a liegt in dieser Geraden, so wie auch in dem durch a gezogenen Lichtstrahl aV, folglich im Durchschnitte *2* beider, in welchem Punkte somit der Schatten der Kante aa' begränzt ist. Dieser Kante zunächst wirft ab den Schatten auf dieselbe Ebene bc, welcher, indem der Punkt b sein eigener Schatten auf dieser Ebene ist, durch Verbinden der Punkte *2* und b erhalten wird.

Die Gerade $b2$ muss, wie aus dem Folgenden hervorgeht, parallel zur Verbindungslinie der Punkte V und A sein, was eine Controle für die Richtigkeit der Arbeit bietet. Es ist nämlich $b2$ der Schnitt einer durch ab gelegten, also senkrecht auf der Bildfläche stehenden, zu den Lichtstrahlen parallelen Ebene mit der zur Bildfläche parallelen Mauerebene bc, wesshalb ihr Schnitt parallel zur Bildfläcbtrace der ersteren Ebene, also auch parallel zu ihrer Verschwindungslinie VA sein wird.

In der Vertiefung $cdef$ wirft auf gleiche Weise die Kante cc' einen Schatten, der theils auf den Boden, theils auf die Ebene ef fällt und sich in $c'34$ ergibt.

Weiters wirft die Kante cd ihren Schatten auf die Ebene ef. Denkt man sich durch cd eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene gelegt, so steht diese senkrecht auf der Bildebene, wird sich demnach mit der erstern, die vertikal ist und senkrecht auf der Bildebene steht, in einer auf der Bildfläche senkrechten Geraden schneiden. Es ist sonach diese Schattenlinie 45, durch 4 auf A zugehend, bis zur Gränze ee' zu ziehen. Endlich gibt 5 mit d verbunden den letzten Theil des Schattens derselben Geraden auf der zur Bildfläche parallelen Ebene $ded'e'$, welche Gerade, wie bereits früher gezeigt wurde, parallel zu VA sein muss.

§. 163.

Aufgabe.

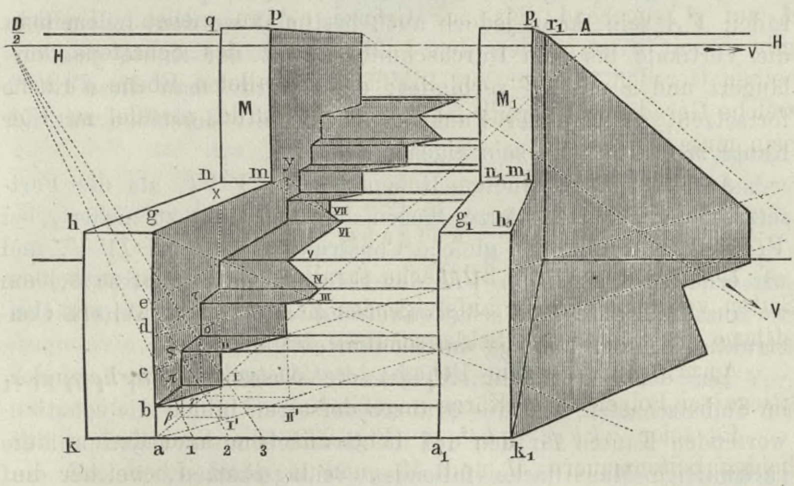
Eine Stiege mit zur Bildfläche parallelen Stufen ist zu beiden Seiten von stufenförmig aufsteigenden Mauern begränzt; man bestimme den Selbst- und Schlagschatten des Objektes.

Anmerkung. Zum Behufe der Construktion vorliegender Stiege sei Folgendes in Kürze angeführt.

Es seien $akhg$, $a_1k_1h_1g_1$ (Fig. 290) die Frontflächen der beiden Seitenmauern M und M_1, und in deren Ebene ab die erste Stufenhöhe. Die Stufenbreite sei doppelt so gross als die Stufenhöhe. Man verbinde a mit A und schneide darauf so viele Stufenbreiten ab, als Stufen vorkommen, wodurch man die Punkte $\beta\gamma\ldots.$ erhält. Auf ag, von b aus, die Stufenhöhe ebenso oft aufgetragen und die Theilpunkte c, d, e mit A verbunden, bestimmen die Schnitte der horizontalen Stufenebenen mit der Seitenwand. Man hat nun in β, γ, $\delta\ldots.$ die Perpendikel zu errichten und davon jene Stücke, welche der Reihe nach zwischen zwei aufeinander folgenden Horizontalebenen liegen, also $\pi\,\rho$, $\sigma\,\tau$ u. s. w. zu benützen. Die durch diese Punkte gezogenen Horizontalen sind sodann die Bilder der horizontalen, zur Bildfläche parallelen Stufenkanten. Nach der vierten Stufe wurde ein Ruheplatz angenommen, hierauf die Stufen fortgesetzt und daselbst der Mauer eine stufenförmige Erhöhung gegeben.

Lösung. V und v (beide ausserhalb der Zeichnungsfläche) seien beziehungsweise die Verschwindungspunkte der Lichtstrahlen und ihrer horizontalen Projektionen. Zuvörderst ist ersichtlich, dass die Kante ag eine Schattengränze der im Selbstschatten liegenden innern Mauerfläche ist, welche ihren Schatten auf die Stufen wirft. Dieser Schatten beginnt in b, und es ist blos b mit v zu verbinden, um den Schatten bI auf der ersten horizontalen Stufenebene $b\pi$ zu erhalten. Auf der Vertikalebene $\pi\,\rho$ ist der Schatten vertikal durch III begränzt, und ist diese Gränzlinie

Fig. 290.



auf der zweiten horizontalen Stufenebene von II aus gegen den Punkt v bis zum Durchschnitt mit der Horizontalen σ fortzusetzen. Ein Gleiches wiederholt sich bei den folgenden Stufen. Letztgenannte Schattengränze IIv muss offenbar auf den Punkt c zugehen, und man wird, um sie von dem erst später gefundenen Punkte II unabhängig zu machen und um eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit zu haben, dieselbe jedenfalls gleich im Vorhinein durch c ziehen. Werden die Schnitte der Geraden bv, cv.... mit den durch π, ρ.... gezogenen Horizontalen sehr schief, so kann man die vertikalen Schattengränzen auch mit Hilfe der durch ak gehenden Horizontalebene bestimmen. Verbindet man nämlich a mit v, so ist av die Grundflächtrace der durch $a\,g$ gehenden Lichtebene, und zieht man durch β, γ, δ.... die Horizontalen $\beta\, I'$, $\gamma\, II'$.... als Tracen der zur Bildfläche parallelen Stufenhöhenebenen $\pi\rho$, $\sigma\tau$.... bis zum Durchschnitt I', II'.... mit ersterer Trace, so bestimmen die durch diese Punkte geführten Vertikalen die Schattengränzen in den bezüglichen Ebenen.

Verbindet man g mit V, so trifft dieser Lichtstrahl eine der so gefundenen Schattengränzen in III, wesshalb von III angefangen die auf die Bildfläche senkrechte Mauerkante $g\,m$ schattenwerfend wird. Von dem Schatten dieser Geraden entfällt ein Theil $III\ IV$ auf die durch τ gehende Horizontalebene, wesshalb $III\ IV$ gegen den Augpunkt zu ziehen ist. Der weitere Theil $IV\ V$ der Schattengränze wird, wie bekannt, parallel zur Geraden $V A$ sein, kann jedoch auch bestimmt werden, indem man die Vertikale bis zum Durchschnitte x mit der Kante $g\,m$ verlängert und x mit IV verbindet; denn würde man diese Ebene fortsetzen, so wäre der Punkt x der Schnitt derselben mit der Kante $m\,g$, also auch sein eigener Schatten.

Auf dem angeordneten Ruheplatze ist $V\ VI$, als die Fortsetzung der Schattengränze, gegen den Augpunkt zu ziehen, bei VI wiederholt sich die gleiche Construktion wie bei $IV\ V$, und wir erhalten hienach in VII den Schatten des Punktes m, von wo aus die Kante $m\,p$ schattenwerfend wird. Die weitere Construktion ist der anfangs durchgeführten gleich.

Bei der Seitenmauer M_1 ist die Aussenseite $k_1\ h_1\ n_1\ p_1\ r_1$ im Selbstschatten, und die Gränzen derselben bilden die schattenwerfenden Kanten für den auf die Grundebene und den auf die rückwärtige Mauerfläche fallenden Schlagschatten, welcher auf bekannte Weise gefunden wird.

§. 164.

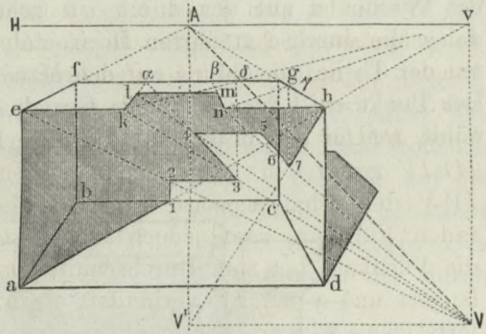
Aufgabe.

Es ist der Durchschnitt eines parallelopipedischen Gefässes, welches oben mit einer rechteckigen Oeffnung versehen ist, gegeben, man soll den sich ergebenden Schatten verzeichnen.

Lösung. Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 291) der Boden, $k\,l\,m\,n$ die Oeffnung, so wirft vorerst die Kante $a\,e$ ihren Schatten $a\,1\,2$ auf die Bodenfläche und auf die hintere Seitenfläche. Der Schatten der horizontalen Kante $e\,k$ ist von 2 aus horizontal bis zum Durchschnitt 3 mit $k\,V$ zu ziehen. Würde man in den so gefundenen

Durchschnittspunkt 3, wegen des zu schiefen Schnittes, nicht genügend Vertrauen setzen, so kann man denselben auch dadurch feststellen, dass man kv mit fg zum Durchschnitte bringt und in δ die Vertikale $\delta 3$ errichtet, welche durch 3 gehen muss. Um weiters den Schatten der Kante kl zu finden, verlängere man dieselbe bis α, welcher Punkt sein eigener Schatten ist, und verbinde α mit 3, welche Gerade 3α bis zum Durchschnitte 4 mit lV zu ziehen ist und, wie schon früher gezeigt wurde, parallel zu AV sein muss. Die Horizontale 45 ist der Schatten von lm, so wie die Gerade 56, auf den Durchschnittspunkt β von mn und fg zugehend, ein Theil des Schattens von mn sein wird; der andere Theil des Schattens fällt auf die Seitenwand $cdgh$. Um den Schatten des Punktes n zu verzeichnen, ziehe man die Gerade nv bis zum Durchschnitte γ mit gh und errichte die Vertikale $\gamma 7$, welche den durch n gelegten Lichtstrahl nV in 7 trifft; 76 muss im Augpunkte verschwinden, und es wird schliesslich die Gerade $7h$ den Schatten der Kante nh geben, welche Gerade ihren Verschwindungspunkt V' im Durchschnitte der Vertikallinie mit der durch V gezogenen Horizontalen VV' hat.

Fig. 291.



Aus diesem Beispiele folgt, dass man zur Schattenbestimmung eine jede beliebige Horizontalebene, wie z. B. hier die obere Deckplatte des Gefässes, als Projektionsebene benützen kann, also nicht immer vorerst die Projektionen aller Punkte auf der Grundebene zu bestimmen braucht.

§. 165.

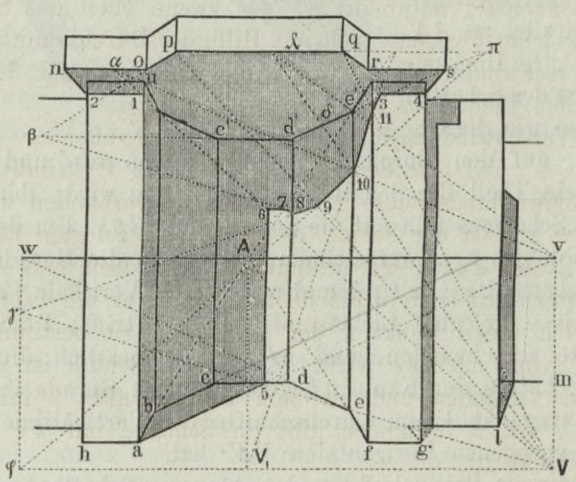
Aufgabe.

Es ist eine prismatische, mit einer Steinplatte gedeckte Mauernische gegeben; man soll den sich ergebenden Schatten construiren.

Lösung. Ist, wie in allen vorhergehenden Beispielen, die Richtung der Lichtstrahlen durch den Verschwindungspunkt V

(Fig. 292) derselben gegeben, so ist ersichtlich, dass die Steinplatte ihren Schatten auf die Mauern *fg* und *ah*, so wie auch in das Innere der Nische werfen wird. Um ersteren zu bestimmen, verbinde man die Ecke *u* mit *v*, ziehe die Verbindungsgerade bis zum Durchschnitte *α* mit *no*, und bringe die Kante *au* zum Schnitte mit dem durch *α* gelegten Lichtstrahl *α V*, so wird *1* der Schatten des Punktes *α* auf der durch *ah* gehenden Vertikalebene und daher die durch *1* geführten Horizontalen *12* und *34* die Schatten der Theile *no* und *rs* auf den Mauerflächen *ah* und *fg* sein. Der Punkt *u* ist hier aus dem Grunde am zweckmässigsten gewählt, weil er den in der Kante *au* liegenden Punkt der Schatten-

Fig. 292.



gränze und jenen Punkt *α* der Kante *no* angibt, von welchem angefangen letztere ihren Schatten in die Nische wirft.

Um den Schatten in das Innere der Nische zu erhalten, suche man vorerst die durch die vertikale Kante *au* sich ergebende Schattengränze *a56* auf der Bodenfläche und der rückwärtigen Mauerfläche *cd*.

Wie aus dem Vorigen ersichtlich, ist jedoch blos das Stück *a1* dieser Kante schattenwerfend, wesshalb die vertikale Schattengrenze *56* nur bis zu dem durch *1* gelegten Lichtstrahl *α V* gezogen werden kann.

Von hier aus fällt der Schatten der untern Plattenfläche in die Nische und wird vorerst durch den horizontalen Schatten *67* der Kante αo begränzt, welcher sich in *6* an *5 6* anschliesst. Die Kante $o p$ wirft den Schatten auf die Flächen $c d$ und $d e$. Um jenen auf die Fläche $c d$ zu bestimmen, kann man den Schatten eines Punktes, z. B. von p, auf dieser Ebene suchen und mit 7 verbinden.

Bedenkt man jedoch, dass die Geraden $c' d'$ und $o p$ in einer Horizontalebene liegen, also gleichsam die Tracen der Mauerebene und der durch $o p$ gelegten Lichtebene auf dieser Horizontalebene sind, so ist ersichtlich, dass der Durchschnittspunkt β der Tracen dem Schnitte beider Ebenen angehört, daher mit *7* vereint und bis zur Kante $d d'$ verlängert, die in Rede stehende Schattengränze gibt. Der Punkt p wirft seinen Schatten auf die Ebene $d e$ nach *9*, mithin ist *8 9* der zweite Theil des Schattens von $o p$, welcher übrigens auch mit Hilfe des Durchschnittspunktes γ der Verschwindungslinien der Mauerfläche $d e$ und der durch $o p$ gehenden Lichtebene gefunden werden kann.

Die Verschwindungslinie der ersteren ist offenbar die Vertikallinie $\gamma \varphi$, und jene der letztern Ebene ist $V \gamma$ (indem V mit dem Verschwindungspunkte der Geraden $o p$ verbunden wird).

Von *9* aus ist der Schnitt der durch $p q$ gelegten Lichtebene mit der Ebene $d e e' d'$ zu bestimmen; da jedoch blos ein Theil des Schattens auf letztere Fläche fällt, so ist es am zweckmässigsten, gleich jenen Punkt λ der Kante $p q$ zu bestimmen, der seinen Schatten nach $e e'$ wirft. Zu diesem Behufe ist einfach v mit e' zu verbinden und bis zum Durchschnitte λ mit $p q$ zu ziehen. λ mit v verbunden gibt im Schnitte mit $e e'$ den gesuchten Punkt *10*.

Sucht man den Durchschnitt φ der Verschwindungslinien $V \varphi$ und $w \varphi$ beider Ebenen, so wie den Schnitt π ihrer Tracen $p q$ und $d' e'$, so ist $\varphi \pi$ ebenfalls die gesuchte Schnittlinie.

Auf gleiche Weise wird endlich der Schatten *10 11* von λq auf $e f e'$, so wie jener *11 3* der Kante $q r$ auf der Ebene $f g$ gefunden.

Die weiters noch vorkommenden Schatten sind auf bekannte Weise construirt worden.

Die untere Fläche der Deckplatte sowohl, als auch die beiden Seitenflächen $a b$ und $b c$ im Innern der Nische liegen im Selbstschatten.

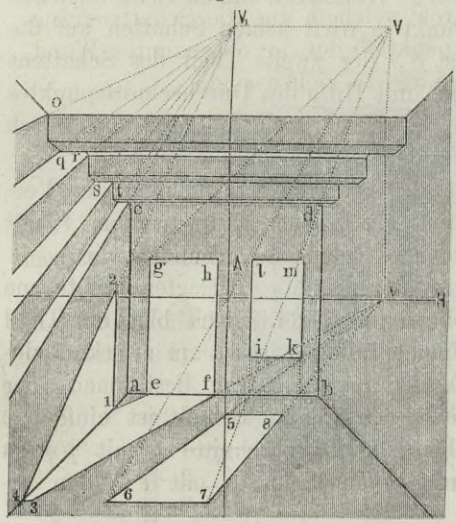
§. 166.

Aufgabe.

Es ist der Schatten, welcher in das Innere eines mit Fenster- und Thüröffnungen versehenen Raumes fällt, zu verzeichnen, wenn der leuchtende Körper unendlich weit hinter der Bildebene sich befindet.

Lösung. Es sei $abcd$ (Fig. 293) die zur Bildfläche parallele hintere Wandfläche des Raumes, welcher oben offen und blos von einigen, zur Bildfläche parallelen Balken, die in gleicher Entfernung von einander liegen, überzogen ist.

Fig. 293.



In dieser Wandfläche befinde sich die Thüröffnung $efgh$ und die Fensteröffnung $iklm$. Unserer Annahme gemäss muss der Verschwindungspunkt V der parallelen Lichtstrahlen oberhalb der Horizontslinie liegen, und es wäre demnach, wenn z. B. die Beleuchtung durch die Sonne geschähe, in diesem Punkte das Bild der Sonne zu verzeichnen.

Behufs der Construktion der Schattengränzen verfahre man auf gleiche Weise wie in den vorhergehenden Beispielen. Ist v der Verschwindungspunkt der horizontalen Projektion eines Lichtstrahles, so gibt $ve1$ den Schatten eines Theiles der vertikalen Thürkante eg; das obere Stück derselben wirft den Schatten auf die vertikale, zur Bildebene senkrechte Wandfläche, welcher demnach wieder vertikal sein muss und bis zu dem durch g gelegten Strahl gV zu ziehen ist. Ebenso wird der Schatten $f3$ der Kante fh gefunden, während 34 parallel zu HH gezogen und 4 mit 2 verbunden, den Schatten von gh bestimmen.

Letztere Gerade 24 lässt sich jedoch auch direct ermitteln; denn gh ist zur Bildebene parallel, folglich ist auch die Verschwindungslinie $V V'$ der dieser Geraden entsprechenden Lichtebene horizontal und schneidet die Verschwindungslinie $A\ V_1$ der betreffenden Wandfläche in V_1, welcher Punkt sonach der Schnittlinie angehört und in der Verlängerung von $2\,4$ liegen muss. Auf gleiche Weise werden die Schatten der Fensterkanten bestimmt, die jedoch diessfalls ganz auf die horizontale Bodenfläche fallen. Was die oben liegenden Balken betrifft, so werfen diese ihren Schatten auf eben dieselbe zur Bildfläche senkrecht stehende Wandfläche und sind überdies zur Bildfläche parallel, folglich ist zu deren Schattenbestimmung aus gleichem Grunde, wie bei der Thürkante $g\,h$ gezeigt wurde, der Verschwindungspunkt V_1 zu benützen, von welchem aus die Schattengränzlinien zu den äussersten Eckpunkten der in obgenannter Wandebene liegenden Balkenquerschnitte zu ziehen sind.

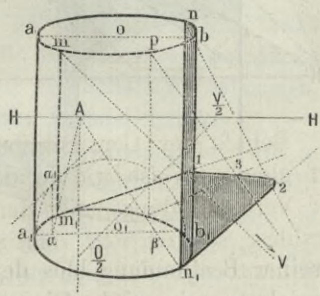
§. 167.

Aufgabe.

Es ist der Schatten eines vertikalen Cylinders auf der Grundebene zu bestimmen, und sind dessen Selbstschattengränzen anzugeben.

Lösung. Legt man parallel zu den Lichtstrahlen die tangirenden Ebenen an die Cylinderfläche, so ist v (Fig. 294) der Verschwindungspunkt der horizontalen Tracen dieser Ebenen; es geben folglich die aus diesem Punkte an die Leitlinie gezogenen Tangenten in den Berührungspunkten m_1 und n_1 die Fusspunkte jener Erzeugenden, welche den Selbstschatten begränzen. Um die Berührungspunkte genauer zu erhalten, denke man sich die Leitlinie, welche wir hier als Kreis annahmen, um den zur Bildfläche parallelen Durchmesser in eine zur Bildebene parallele Lage gebracht. Die Richtung der gedrehten Horizontaltrace ist sodann $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ (wenn nämlich zu deren Verzeichnung die halbe Distanz benützt wird).

Fig. 294.



Werden nun parallel zu dieser an den Kreis die beiden Tangenten gezogen, so ergeben sich in den Berührungspunkten α_1, β_1

die zu suchenden Fusspunkte, welche in die Horizontalebene nach m_1 und n_1 zurückzudrehen sind.

Die Schlagschattengränze auf der Horizontalebene wird durch den Schlagschatten der beiden Erzeugenden $m m_1$, $n n_1$ und durch den Schatten des Halbkreises $m p n$ der oberen Basis gebildet.

Letzterer ergibt sich am einfachsten, indem man auf bekannte Weise den Schatten einzelner Punkte des Halbkreises bestimmt. Zu bemerken ist, dass die geraden Schattengränzen $m_1\, 1$ und $n_1\, 2$ die Ellipse *123* in *1* und *2* berühren müssen, so wie, dass diese Curve von jenem Lichtstrahl berührt werden muss, welchen man aus V tangentiell an die obere Basiscurve zieht.

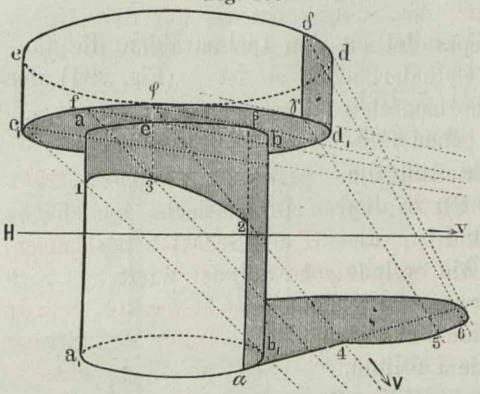
§. 168.

Aufgabe.

Auf einem vertikalen Cylinder ruht konzentrisch ein zweiter, grösserer auf; man soll die sich ergebenden Schatten bestimmen.

Lösung. Wir haben in diesem Falle offenbar die Selbstschatten beider Cylinder, ferner die Schlagschatten derselben auf die Horizontalebene und den Schatten des oberen Cylinders auf den unteren anzugeben. Die Selbstschatten werden in $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (Fig. 295) auf die im vorigen Beispiele gezeigte Weise gefunden.

Fig. 295.



Der Schlagschatten auf die untere Cylinderfläche wird von einem Theile des Kreises $c_1 f d_1$ geworfen, daher behufs seiner Bestimmung blos der Durchschnitt zweier Cylinder zu verzeichnen sein wird. Die zu den Cylinderkanten parallelen Ebenen haben Vv zur Verschwindungslinie und sind vertikal, weil V der Verschwindungspunkt des Strahlencylinders ist und die zweite Fläche vertikale Erzeugende hat. Betrachten wir die Ebene beider Kreise $a e b$ und $c_1 f d_1$ als gemeinschaftliche Basisebene beider Cylinder, so ist v der Verschwindungspunkt der Tracen der Hilfsebenen auf dieser Basisebene.

Ziehen wir demnach die Trace fv einer solchen Hilfsebene, so schneidet diese die Leitlinien in e und f und die beiden Cylinder in den Erzeugenden $e\,3$ und $f\,V$, in deren Durchschnitt der Punkt 3 der Schattengränze liegt. Auf diese Weise können beliebig viele Punkte der Schattengränze ermittelt werden.

Vorerst ist es zweckmässig, jene Punkte der Durchschnittscurve aufzusuchen, welche ihre Perspektiven im sichtbaren Umrisse $a\,a_1$ der Cylinderfläche und in der Selbstschattengränze $\alpha\,\beta$ haben. Zu diesem Behufe lege man die Tracen der Hilfsebenen durch die Punkte a und β und bestimme wie früher die fraglichen Punkte 1 und 2.

In 2 muss der Lichtstrahl $\varphi\,V$ Tangente an die Schattengränze sein, weil hier die schneidende Ebene zur Berührungsebene an die untere Cylinderfläche wird. Der Punkt β jedoch ist auch aus dem Grunde wichtig, weil er jenen Punkt φ der Kreislinie $c_1\,f\,d_1$ liefert, von welchem angefangen diese ihren Schatten auf die Grundebene wirft. Es ist also in 4 der Schatten der Erzeugenden $\alpha\,\beta$ begränzt, dagegen jener $4\,5$ des Kreisbogens $\gamma\,\varphi$, ferner der Schatten der Geraden $\gamma\,\delta$ und eines Stückes des oberen Kreisbogens $\delta\,d\,c$ als Begränzung des Schlagschattens auf der Grundebene zu suchen und wie in früheren Beispielen zu bestimmen.

§. 169.

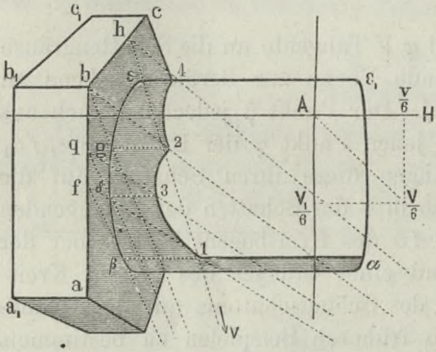
Aufgabe.

Ein horizontaler, zur Bildfläche paralleler Cylinder trägt an dem einen Ende eine Platte, deren prismatische Basisfläche ein regelmässiges Sechseck ist; man soll den Schatten bestimmen, den diese Deckplatte auf die cylindrische Spindel wirft.

Lösung. Gehen wir von demselben Gesichtspunkte, wie in der vorhergehenden Aufgabe aus, indem wir nämlich den Schnitt des Strahlenprismas mit dem Cylinder suchen, so folgt, dass in diesem Falle die Horizontale $V\,V_1$ (Fig. 296) die Verschwindungslinie jener Hilfsebenen ist, welche parallel zu den Prismenkanten und Cylindererzeugenden sind. $V\,V_1$ schneidet die Vertikallinie, d. i. die Verschwindungslinie der gemeinschaftlichen Basisebene, in V_1, wesshalb dies der Verschwindungspunkt der Schnitte der Hilfsebenen mit dieser Basisebene ist. Wird von V_1 an die Basis $\varepsilon\,g\,\beta$ der Cylinderfläche die Tangente $V_1\,f$ gezogen, so erhält man jene Erzeugende $\alpha\,\beta$ der Cylinderfläche, welche den Selbstschatten begränzt.

Um den Schlagschatten des Prismas auf dem Cylinder zu finden, bedenke man, dass blos die den beiden Kanten $a\,b$ und $b\,c$ entsprechenden Schattengränzen theilweise im Bilde sichtbar erscheinen. Man wird demnach vorerst Hilfsebenen durch die Selbstschattengrenze $\alpha\,\beta$, durch den sichtbaren Umriss $\varepsilon\,\varepsilon_1$ und durch die Ecke b legen. Für letztere ist $b\,V_1$ die Trace der Hilfsebene, welche die Cylinderfläche nach der Erzeugenden $g\,2$, und das Strahlenprisma nach der Kante $b\,V$ schneidet. Im Durchschnitte beider ergibt sich der Punkt 2 als Schatten der Ecke b.

Fig. 296.



Auf gleiche Weise werden die übrigen Punkte gefunden. Es werden wieder die Erzeugende $\varepsilon\,\varepsilon_1$, so wie der Lichtstrahl $f\,V$ Tangenten an die Schattengränze sein, welche in diesem Falle eine gebrochene Curve (aus mehreren Ellipsenstücken zusammengesetzt) ist.

Wichtig sind die im Punkte 2 den beiden daselbst zusammenstossenden Curvenstücken zukommenden Tangenten, welche sich einfach ergeben, wenn man im Punkte g an die Ellipse $\varepsilon\,g\,\beta$ eine Tangente führt und jene Punkte, in welchen diese die Kanten $a\,b$ und $b\,c$ trifft, mit 2 verbindet.

§. 170.

Aufgabe.

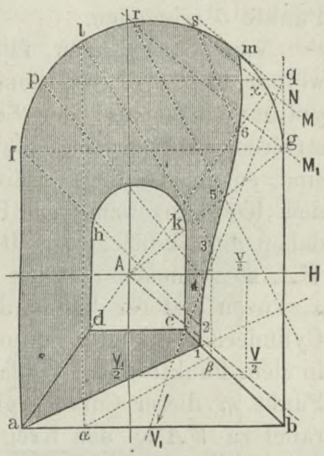
Es ist der Schatten in das Innere eines mit einem vollen Tonnengewölbe überdeckten Ganges zu construiren.

Lösung. Es bleibt sich gleich, ob der Gang senkrecht zur Bildebene, oder schief gegen dieselbe ist. A (Fig. 297) sei der Verschwindungspunkt der Erzeugenden der Cylinderfläche, welche das Tonnengewölbe bildet. Die Begränzungsflächen des Ganges wollen wir parallel zur Bildebene annehmen.

Die Schlagschatten werden durch den Schatten der vertikalen Kante $a\,f$ auf den Boden und auf die Seitenfläche $b\,c\,g\,k$, ferner durch den Schatten eines Theiles des sich an f anschliessenden

Kreisbogens begränzt, welcher theilweise auf die Ebene *bcgk* und theilweise in die Cylinderfläche fällt. Der Schatten der Kante *af* ergibt sich auf bekannte Weise in *a12*.

Fig. 297.



Der Schatten des Kreisbogens *flg* auf dieselbe Seitenfläche wird erhalten, indem man den Schnitt des entsprechenden Strahlencylinders mit dieser Fläche sucht, was bekanntlich mit Hilfe von Ebenen geschieht, welche zu den Erzeugenden des Cylinders, also zu den Lichtstrahlen parallel sind. Von den unendlich vielen Lagen dieser parallelen Hilfsebenen sind folgende am zweckmässigsten:

1. Vertikale Ebenen. Nimmt man z. B. den Punkt *l* an, so ist die durch ihn gezogene Vertikale *lα* die Bildflächtrace, *Vv* die Verschwindungslinie, *αv* die Trace dieser Ebene auf der Bodenfläche. Letztere schneidet *bA* in β, daher die in β errichtete Vertikale der Schnitt der Ebene *bcgk* mit dieser Hilfsebene ist, welcher die Erzeugende *Vl* in dem Punkte *3* der Curve trifft.

2. Ebenen parallel zur Grundlinie. Die Horizontale $V V_1$ ist sodann die Verschwindungslinie derselben und schneidet die Verschwindungslinie $A V_1$ der Seitenfläche *bcgk* in dem Punkte V_1 als den Verschwindungspunkt der Hilfsschnitte.

Nehmen wir einen Punkt *p* des Kreisbogens an, so ist *pq* die entsprechende Bildflächtrace, mithin $q V_1$ der Hilfsschnitt mit *bcgk*, welcher dem Lichtstrahl in *4* begegnet.

3. Solche Ebenen, welche die Seitenfläche nach Geraden schneiden, die zur Axe des Gewölbes parallel sind. Die Verschwindungslinie solcher Ebenen ist *VA*, folglich die durch irgend einen Punkt *r* gelegte Bildflächtrace M_1 parallel zu *VA*. Diese schneidet die Kante *bg* in *g*, wesshalb sich im Durchschnitte des Hilfsschnittes *gA* mit dem Lichtstrahl *rV* ein Punkt *5* der Gränzcurve ergibt.

Vermittelst einer solchen Hilfsebene kann man auch jenen Punkt der Schattengränze bestimmen, welcher die Gränze zwischen dem Schatten auf die Seitenfläche und in die Cylinderfläche bildet. Diese Gränzlinie ist gk; legt man folglich durch g die Bildflächtrace M_1 parallel zu VA und zieht durch r den Lichtstrahl rV, so wird dieser die Gerade gk in dem zu suchenden Punkte *5* schneiden.

Von *5* angefangen, fällt der Schatten in das Innere des Gewölbes und wird von dem Schlagschatten des Bogens rsm begränzt; es ist also der Schnitt zweier Cylinderflächen zu construiren. Hilfsebenen, die zu den Erzeugenden beider parallel sind, entspricht die Verschwindungslinie AV; sie sind sonach zu den letzt angewendeten Hilfsebenen (*3*) parallel. Legt man daher die Bildflächtrace M einer solchen Hilfsebene parallel zu VA, so schneidet dieselbe den Kreisbogen in den Punkten s und x, wovon ersterer dem Strahlencylinder, letzterer aber der andern Cylinderfläche angehört, und deren Erzeugenden sV und xA sich in dem Punkte *6* der Schlagschattengränze schneiden. Der letzte Punkt m dieser Curve ergibt sich als Tangirungspunkt der parallel zu VA an den Kreisbogen geführten Tangente Nm.

Wäre die vordere Seite des Gewölbes nicht parallel zur Bildfläche, so würde die Construktion in ähnlicher Weise durchzuführen sein.

§. 171.

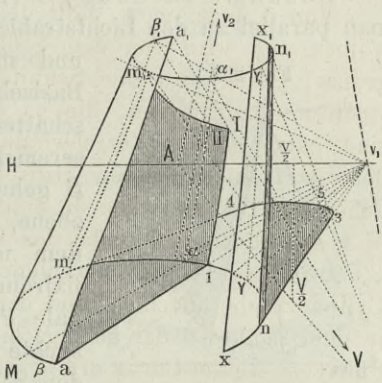
Aufgabe.

Es ist ein hohler schiefer Cylinder, nach vorn und oben offen und auf einer Horizontalebene aufstehend, gegeben; man soll den Schatten, der in das Innere des Cylinders geworfen wird, so wie jenen auf die Horizontalebene, verzeichnen.

Lösung. Man lege, um die Selbstschattengränzen zu erhalten, Tangirungsebenen parallel zu den Cylindererzeugenden. Ist V (Fig. 298) der Verschwindungspunkt der Lichtstrahlen und v_2 jener der Cylindererzeugenden, so ist Vv_2 die Verschwindungslinie aller zu den Lichtstrahlen und zu den Erzeugenden parallelen Ebenen und v_1, in der Horizontslinie, der Verschwindungspunkt ihrer horizontalen Tracen. Demnach geben die aus v_1 an die Leitlinie gezogenen Tangenten v_1m, v_1n die Schlagschattengränzen auf der Horizontalebene und die den Berührungspunkten m und n entsprechenden Erzeugenden mm_1, nn_1 die Selbstschattengränzen der Cylinderfläche.

Die äussere Kante $a\alpha_1$, so wie das Stück $a_1 m_1$ der obern Begränzung der Cylinderfläche werfen ihre Schatten in das Innere derselben. Um diese zu bestimmen, legen wir vorerst durch $a\alpha_1$ die Lichtebene, deren Trace $a v_1$ die Basiscurve in *1* schneidet. Es ist mithin *a 1* die Gränze des Schattens, welcher im Innern der Fläche auf die Horizontalebene geworfen wird, und die Erzeugende $1 v_2$, bis zum Durchschnitte *I* mit dem Lichtstrahl $a_1 V$, der Schlagschatten von $a\alpha_1$ auf die innere Fläche des Cylinders.

Fig. 298.



Behufs der Auffindung des Schattens der Curve $a_1 m_1$ haben wir blos den Durchschnitt des dieser Curve entsprechenden Strahlencylinders mit dem gegebenen Cylinder zu construiren. Ebenen, welche zu den Erzeugenden beider parallel sind, sind bereits durch ihre Verschwindungslinie $V v_1 v_2$ bestimmt. Legen wir demnach durch v_1 irgend eine Trace $v_1 M$, so wird der rückwärtige Theil der gegebenen Cylinderfläche nach der Kante $\alpha\alpha_1$ geschnitten. Die Erzeugende $\beta\beta_1$ bestimmt den Punkt β_1 in der obern Curve, durch welchen die Erzeugende $\beta_1 V$ des Strahlencylinders geht. Letztere schneidet die Gerade $\alpha\alpha_1$ in dem Punkte *II* der Schlagschattengränze $I\,II\,m_1$.

Man hätte ebenso, was einfacher wäre, die Trace in der Ebene der obern Curve unmittelbar ziehen können, doch ist dieses dann zu vermeiden, wenn die obere Curve sehr nahe an die Horizontsebene zu liegen kömmt und man daselbst zu schiefe Schnitte erhalten würde.

Zur Begränzung des Schlagschattens auf der Horizontalebene fehlt noch der Schatten des rückwärtigen Theiles $m_1 n_1$, der oberen Gränzcurve. Derselbe kann einfach mit Hilfe solcher Ebenen, deren Verschwindungslinie $v_2 v_1 V$ ist, gefunden werden. Legt man durch einen beliebigen Punkt, z. B. y, eine solche Ebene, so ist $y v_1$ deren Trace, welche mit dem Lichtstrahl $V y_1$ zum Schnitt gebracht, in *5* einen Punkt der zu suchenden Schattengränze gibt.

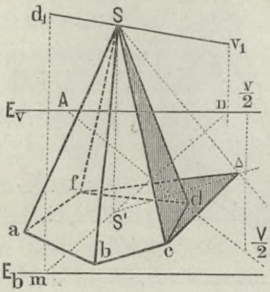
§. 172.

Aufgabe.

Es ist der Schatten einer Pyramide, den sie auf eine horizontale Ebene wirft, zu bestimmen.

Lösung. Ist $abcdfS$ (Fig. 299) die Pyramide, so lege man parallel zu den Lichtstrahlen die beiden tangirenden Ebenen und suche deren Schnittlinien mit der Basisebene, um durch letztere den Schlagschatten begränzt zu erhalten. In unserem Falle ist Δ der Schnitt des durch S gelegten Lichtstrahls mit der Basisebene, welcher hier gefunden wurde, indem man mittelst der die Spitze S fixirenden Geraden $v_1 S d_1$ die orthogonale Projektion S' auf der Basisebene suchte und dann auf gewöhnliche Weise den Schatten des Punktes S bestimmte.

Fig. 299.



Da die von Δ an das Basispolygon gezogenen Verbindungslinien mit den äussersten Ecken c und f die zu suchenden Schlagschattengränzen sind, so werden auch die rückwärts zwischen diesen beiden Kanten cS und fS liegenden Seitenflächen im Selbstschatten liegen.

§. 173.

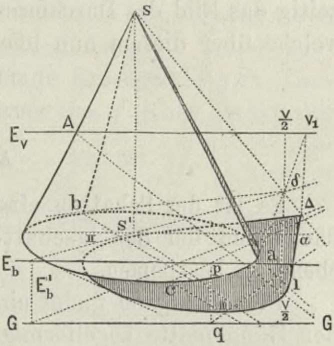
Aufgabe.

Es ist der Selbstschatten einer Kegelfläche, so wie deren Schlagschatten auf eine beliebige Horizontalebene zu bestimmen.

Lösung. Es sei die Horizontalebene $E_b E_v$ (Fig. 300) die Leitlinienebene einer Kegelfläche, welche wir hier senkrecht auf die Grundebene und von kreisförmiger Basis annehmen wollen, wiewohl die hier folgende Construktion für jeden beliebigen Kegel gilt. GG sei die Bildflächtrace der Grundebene, auf welcher der Schlagschatten gesucht werden soll.

Um letzteren zu finden, lege man durch S eine zu den Lichtstrahlen parallele Gerade SV und suche ihren Durchschnittspunkt δ mit der Ebene $E_b E_v$, welcher, da die orthogonale Projektion von S als Mittelpunkt des Basiskreises bekannt ist, sich im Durchschnitte der beiden Geraden SV und $S'v$ ergibt. Von δ aus sind behufs der Bestimmung der Selbstschattengränzen an den Kreis die beiden Tangenten δa, δb zu ziehen, welche denselben in a und b berühren und so die Gränzen Sa, Sb bestimmen. Um diese Berührungspunkte genau zu erhalten, ist es zweckmässig, den Kreis sammt den Punkt δ um die durch den Mittelpunkt S' zur Bildfläche parallele Axe $S'\alpha$ in eine zur Bildfläche parallele Ebene zu drehen.

Fig. 300.



Um nun den Schlagschatten auf die Ebene GG zu erhalten, haben wir den Schnitt der den beiden Selbstschattengränzen entsprechenden Lichtebenen, so wie den Durchschnitt des der Kreislinie abc zugehörigen Strahlencylinders mit der Grundebene zu bestimmen.

Man suche zuerst den Schnitt Δ der Geraden SV mit der Grundebene durch Zuhilfenahme der hindurchgelegten Vertikalebene $E'_b\, Vv$ und ziehe durch Δ parallel zu δa und δb die beiden Schlagschattengränzen ΔI, ΔII, indem man Δ mit den, den ersteren Geraden zukommenden Verschwindungspunkten v_1, v_2 (letzterer ausserhalb der Zeichnungsfläche) verbindet und zum Durchschnitte I und II mit den Lichtstrahlen aV, bV bringt. Von I bis II wird der Schlagschatten durch den Schatten des Kreisbogens acb abgegränzt. Zur Bestimmung desselben schneide man den Strahlencylinder durch vertikale Ebenen nach Erzeugenden. Diese Ebenen werden Vv zur Verschwindungslinie und den Punkt v zum Verschwindungspunkt ihrer horizontalen Tracen haben.

Für irgend einen Punkt c der Kreislinie ziehe man die Trace cv bis zum Durchschnitte p mit E_b und die Erzeugende cV; führe ferner durch p die Bildflächtrace pq der Hilfsebene vertikal und ziehe aus dem Durchschnittspunkte q derselben mit GG die Schnittlinie qv mit der Grundebene, welche den Lichtstrahl cV in dem Punkte III der Schlagschattengränze trifft. Auf diese Weise können beliebig viele Punkte gefunden werden. Zu berücksichtigen bleibt, dass die so gefundene Curve von den aus V an die Leitlinie gezogenen Tangenten ebenfalls berührt werden muss, und dass jenen Tracen auf $E_b E_v$, welche die Leitlinie tangiren, auch Tracen auf der Grundebene entsprechen, welche die Schattencurve berühren.

In unserem Falle ist die Leitlinie des Strahlencylinders ein Kreis, folglich wird auch sein Schatten auf einer zu seiner Ebene parallelen Ebene ein Kreis sein. Bestimmt man den Schatten des durch *S'* gehenden, zur Bildfläche parallelen Durchmessers, so ist ersterer gleichfalls zur Bildfläche parallel und gibt gleichzeitig das Bild des Durchmessers der zu suchenden Schattengränze, welche über diesem nun leicht zu verzeichnen ist.

§. 174.

Aufgabe.

Es ist der Schatten einer horizontalen Platte auf eine Kegelfläche und der Schlagschatten beider Körper auf einer Vertikalebene zu bestimmen.

Diese Aufgabe findet eine Anwendung bei Gesimsen, wo unter der Hängeplatte kegelförmige Ansätze, sogenannte Tropfen, angebracht sind.

Lösung. Nehmen wir die rückwärtige Wandfläche, also auch die Begränzungskante der horizontalen Platte parallel zur Bildebene und die Kegelfläche mit vertikaler Axe an, so ist, behufs der Bestimmung der Schlagschattengränze auf der Kegelfläche, der Durchschnitt derselben mit der durch mn gehenden Lichtebene und als Schlagschattengränze auf der durch pq bestimmten Vertikalebene, der Schnitt des dem untern Kegelrande zugehörigen Strahlencylinders, so wie die Schnitte der den Selbstschattengränzen und der Kante mn entsprechenden Lichtebenen mit obiger Vertikalebene zu verzeichnen.

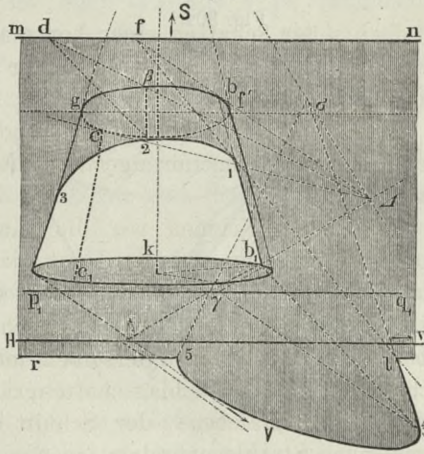
Es sei V (Fig. 301) der Verschwindungspunkt der parallelen Lichtstrahlen (unterhalb HH rechts vom Augpunkte A, hier ausserhalb der Papierfläche gelegen).

Zur Verzeichnung des Schnittes der durch mn parallel zu den Lichtstrahlen gehenden Ebene mit der Kegelfläche, lege man durch die Spitze S eine mit den Lichtstrahlen parallele Gerade SV und bestimme deren Durchschnitte Δ und σ mit der durch mn gehenden Horizontalebene und der rückwärtigen Wandfläche. Aus Δ an den obern Kreis die beiden Tangenten Δb, Δc gelegt, geben die beiden Berührungspunkte b und c mit S verbunden die Selbstschattengränzen Sbb_1, Scc_1 des Kegels. Weiters ist

Δ jener Punkt, durch welchen die Bilder der horizontalen Tracen der Hilfsebenen zu ziehen sind.

Ist Δd eine solche Trace, und schneidet sie die Kante mn in d, den Kreis in β, so wird die entsprechende Hilfsebene die Kegelfläche in der Erzeugenden $S\beta$, die Lichtebene hingegen in dem Lichtstrahle dV schneiden, welche Geraden sich in dem Punkte *2* der Schlagschattengränze begegnen. Auf gleiche Weise werden die Punkte *1* und *3* gefunden, welche in den Erzeugenden fS, gS liegen und in welchen der Lichtstrahl fV, beziehungsweise die den sichtbaren Umriss bildende Erzeugende gS, Tangenten an die Schattencurve sind; ferner ist f jener Punkt der Kante mn, von welchem aus diese ihren Schatten auf die rückwärtige Wandfläche wirft.

Fig. 301.



Behufs der Construktion des Schlagschattens auf die Vertikalebene bestimme man vorerst deren Trace $p_1 q_1$, mit der untern Basisebene der Kegelfläche, welche Trace zugleich die orthogonale Projektion des Kreises $b_1 k c_1$ auf dieser Ebene ist. Suchen wir den Schatten dieses Kreisbogens, so ist es am einfachsten, bildflächprojecirende Hilfsebenen parallel zu den Lichtstrahlen anzuwenden. Nehmen wir z. B. den Punkt b_1, so ist γ dessen orthogonale Projektion, daher $\gamma 4$, parallel zu AV, die Trace, welche im Durchschnitte mit dem Lichtstrahl $b_1 V$ den Punkt *4* der Curve bestimmt. Da jedoch b_1 auch der Selbstschattengränze $b b_1$ angehört, so muss *4* mit σ verbunden den Schatten von $b b_1$ geben.

Dasselbe gilt bezüglich des Schattens *5* von c_1 und der Geraden 5σ. Auf gleiche Weise wie *4* und *5* können nun beliebig viele Punkte der Gränzcurve gefunden werden; nur ist hiebei zu bemerken, dass für den Fall, als sich zu schiefe Schnitte ergeben sollten, man andere Hilfsebenen benützen, oder die obigen in eine zur Bildfläche parallele Lage drehen muss.

Zieht man aus f den Lichtstrahl fV bis zum Durchschnitte l mit der Geraden 4σ, so ist durch l der Schatten von mn, welcher hier die letzte Schattengränze bildet, horizontal zu ziehen. Die Geraden 4σ, 5σ werden blos unterhalb der Geraden lr schlagschattenbegränzende Linien sein.

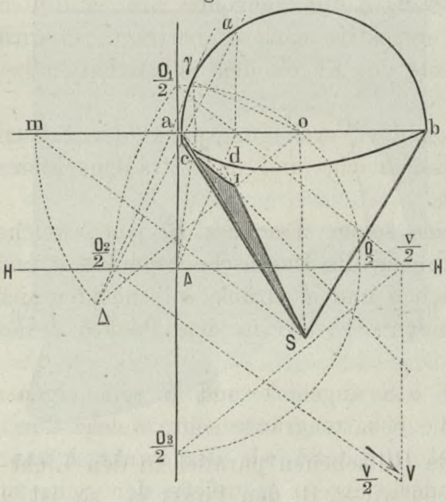
§. 175.

Aufgabe.

Es ist der Schatten in das Innere eines halben senkrechten Kegels zu bestimmen.

Lösung. Es sei $abcS$ (Fig. 302) die Hälfte eines Kegels, welcher durch eine zur Bildfläche parallele, durch seine Axe gehende Ebene geschnitten wurde, und V der Verschwindungspunkt der Lichtstrahlen. Man ziehe wieder durch S eine zu den Lichtstrahlen parallele Gerade SV und bestimme ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene der Leitlinie. Zu diesem Ende ist es zweckmässig, den in eine durch ab gehende, zur Bildfläche parallele Ebene gedrehten Durchstosspunkt zu bestimmen, was folgends bewerkstelligt wird.

Fig. 302.



Denkt man sich den Kegel sammt der Geraden SV um So so lange gedreht, bis letztere parallel zur Bildebene wird, so gelangt diese nach Sm. Das Stück mo wird die wahre Entfernung des zu suchenden Durchstosspunktes von der Drehungsaxe sein. Zur Bestimmung der Richtung von Sm drehe man den durch das Auge gehenden Parallelstrahl V um die Drehungsaxe Vv in die Bildebene, was einfach dadurch geschieht, dass man $A\frac{O}{2} = A\frac{O_1}{2}$, $\frac{v}{2}\frac{O_1}{2} = \frac{v}{2}\frac{O_2}{2}$ macht und $\frac{O_2}{2}$ mit $\frac{V}{2}$ verbindet. Es ist sonach Sm parallel zu $\frac{O_2}{2}\frac{V}{2}$ zu ziehen.

Weiters bestimme man die umgelegte Trace der durch SV gelegten Vertikalebene mit der Basisebene, welcher Trace der Punkt v als Verschwindungspunkt ihrer Perspektive zukommt. Die Richtung dieser umgelegten Trace wird man daher erhalten, wenn man den in der Vertikallinie $A\frac{O_3}{2}$ liegenden Distanzpunkt O_3 mit v, oder $\frac{O_3}{2}$ mit $\frac{v}{2}$ verbindet.

Zieht man also $o\Delta$ parallel zu $\frac{v}{2}\frac{O_3}{2}$ und trägt auf dieser Geraden die früher gefundene Länge om von o nach Δ auf, so ist Δ der fragliche Durchstosspunkt, durch welchen die umgelegten Tracen der zu benützenden Hilfsebenen zu ziehen sind.

Der umgelegte Kreis ist über ab aus o zu verzeichnen. Wenn man an diesen Kreis aus Δ die Tangente zieht und den Berührungspunkt γ in die Perspektive nach c überträgt, so wird cS auf der rückwärtigen Seite des Kegels den Selbstschatten begränzen.

Der Punkt Δ ist zugleich der Vereinigungspunkt der Tracen aller Ebenen, welche die Kegelfläche und den Strahlencylinder nach Erzeugenden schneiden.

Ziehen wir demnach eine solche Trace, z. B. jene, welche durch α hindurchgeht und drehen die Durchschnittspunkte α und α in die Horizontalebene nach a und d zurück, so schneiden sich die entsprechenden Erzeugenden aV, dS in dem Punkte 1 der Schattenlinie.

Nachdem a der Kante aS angehört und S sein eigener Schatten ist, so wird $1S$ die Schattengränze sein, welche durch jene Erzeugende aS gebildet wird. So wie den Punkt 1 kann man beliebig viele Punkte der Curve $c1$, welche den Schatten des Kreisbogens $a\gamma$ bildet, bestimmen.

§. 176.

Selbst- und Schlagschatten von Umdrehungsflächen.*)

Behufs der Verzeichnung des Selbstschattens einer Umdrehungsfläche lege man an dieselbe parallel zur Richtung der

---

*) Ausführliches hierüber siehe: E. Koutny, „Construktion der Selbstschattengränze von Umdrehungsflächen in der Perspektive, unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen" in dem LV. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, II. Abth., Februar-Heft, Jahrg. 1867.

Lichtstrahlen einen berührenden Cylinder und suche dessen Berührungslinie mit der in Rede stehenden Umdrehungsfläche. Die so erhaltene Curve ist die Selbstschattengränze und zugleich die Leitlinie des Strahlencylinders, welcher im Durchschnitte mit den rückwärts liegenden Objekten den von der Umdrehungsfläche erzeugten Schlagschatten begränzt.

In speciellen Fällen erlaubt die Form der Meridiancurve eine vereinfachte Constructionsweise, wie es folgende Beispiele zeigen werden.

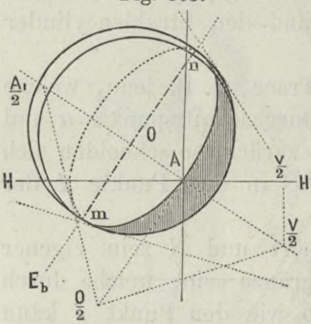
§. 177.

Aufgabe.

Es ist der Selbst- und Schlagschatten einer Kugelfläche zu bestimmen.

Lösung. Es ist bekannt, dass bei einer Kugel die Berührungscurve des ihr umschriebenen Cylinders ein Kreis ist,

Fig. 303.



dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht und senkrecht auf den Lichtstrahlen steht. Wird also der Mittelpunkt O (Fig. 303) der Kugel in der Bildfläche gedacht, und ist V (durch $A\frac{V}{2} = \frac{1}{2} A V$ bestimmt) der Verschwindungspunkt der parallelen Lichtstrahlen, so wird, wenn man V mit A verbindet, $A\frac{O}{2}$ senkrecht auf $\frac{V}{2}A$ und gleich der halben Augdistanz macht, ferner $\frac{V}{2}$ mit $\frac{O}{2}$ vereint und $\frac{A_1}{2}\frac{O}{2}$ senkrecht auf $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ bis zum Durchschnitte $\frac{A_1}{2}$ mit VA zieht, dieser Punkt $\frac{A_1}{2}$ die halbe Entfernung des Nebenaugpunktes der auf den Lichtstrahlen senkrechten Ebenen vom Augpunkte angeben, daher die in A_1 ($A A_1 = 2 A \frac{A_1}{2}$) auf VA gefällte Senkrechte E_v die Verschwindungslinie dieser Ebenen ist. Da die Ebene des Berührungskreises durch den Mittelpunkt O geht, so ist deren Bildflächtrace E_b durch O parallel mit E_v zu ziehen. Um die zu suchende Selbstschattengränze zu erhalten, ist nur über dem

Durchmesser mn in der Ebene $E_b\,E_v$ die Perspektive des Kreises zu verzeichnen.

Um den Schlagschatten der Kugel auf irgend einer Horizontalebene zu erhalten, bestimme man auf bekannte Weise den Schnitt eines senkrechten Cylinders mit dieser horizontalen Ebene. Dieser Schnitt wird selbstverständlich eine Ellipse sein.

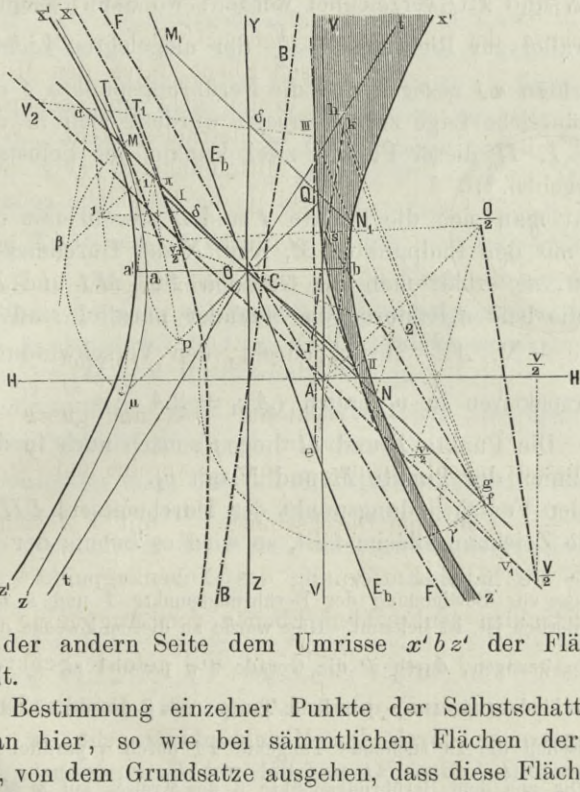
§. 178.

Aufgabe.

Es ist der Selbstschatten eines einmanteligen Hyperboloides zu bestimmen.

Lösung. Es sei xaz (Fig. 304) die Meridiancurve, welche sich blos zu einer Seite der Axe YZ verzeichnet vorfindet, weil

Fig. 304.



sie auf der andern Seite dem Umrisse $x'bz'$ der Fläche sehr nahe fällt.

Zur Bestimmung einzelner Punkte der Selbstschattengränze kann man hier, so wie bei sämmtlichen Flächen der zweiten Ordnung, von dem Grundsatze ausgehen, dass diese Flächen durch eine Reihe von parallelen Ebenen in ähnlichen Curven des zweiten

Grades geschnitten werden. Wählt man diese Ebenen derart, dass sie parallel zu den Lichtstrahlen sind, so wird der die Fläche berührende Strahlencylinder in geraden Erzeugenden geschnitten, welche die Schnittlinien der gegebenen Fläche in Punkten der fraglichen Gränzcurve berühren.

Wir schneiden sonach das Hyperboloid durch ein System von bildflächprojecirenden, zu den Lichtstrahlen parallelen Ebenen, deren Verschwindungslinie $A\,V$ ist, und legen die erste dieser Ebenen durch den Mittelpunkt O der Fläche, so dass MN (durch O parallel zu $A\,V$) deren Bildflächtrace angibt. Das Hyperboloid wird in einer Ellipse geschnitten, deren grosse Axe der in MN gelegene Diameter MN der Meridianhyperbel ist und deren kleine Axe der reellen Axe dieser Curve gleichkömmt. Diese Ellipse, in die Bildfläche umgelegt, könnte somit über den Axen MN und PQ verzeichnet werden, wo dann, wenn an dieselbe parallel zur Richtung $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ der umgelegten Lichtstrahlen die Tangenten $\alpha\,1$ gezogen und die Berührungspunkte 1 und 2 in die ursprüngliche Lage zurückversetzt wurden, sich in den Perspektiven I, II dieser Punkte zwei Punkte der Selbstschattengränze ergeben.*)

Denkt man sich die Punkte 1 und 2 sowohl mit einander, als auch mit den Endpunkten M, resp. N des Durchmessers MN verbunden, so erhält man die Geraden $1\,2$, $M1$ und $N2$, von welchen die beiden letzteren zu einander parallel sind und, in die Ebene MN, $A\frac{V}{2}$ zurückgedreht, den Verschwindungspunkt ihrer Perspektiven in v_1 haben ($A\,v_1 = 2A\,\frac{v_1}{2}$, $\frac{O}{2}\frac{v_1}{2}$ parallel zu $2\,N$). Die Punkte I und II liegen sonach auch in den Verbindungslinien der Punkte M und N mit v_1.

Da der Verschwindungspunkt des Durchmessers $I\,II$ zumeist ausser die Zeichnungsfläche fällt, so wird es behufs der Fixirung

*) Dass zur Bestimmung der Berührungspunkte 1 und 2 die Ellipse nicht erforderlich ist, ist bekannt. Hier wurde zu diesem Zwecke der Viertelkreis $M\beta\mu$ gezogen, durch P die Gerade $P\pi$ parallel zu $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ geführt, die zur Verbindungslinie $\pi\mu$ parallele Tangente $\alpha\beta$ an den Kreis gezogen und schliesslich die zu suchende Tangente $\alpha\,1$ durch α parallel zu $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ geführt. Die aus dem Berührungspunkte β des Kreises auf MN errichtete Senkrechte $\beta\,1'$ schneidet $\alpha\,1$ in dem fraglichen Berührungspunkte.

der beiden Punkte I und II nothwendig sein, die Perspektiven irgend einer andern, durch je einen dieser Punkte gehenden Geraden anzugeben. In dieser Beziehung ist es am zweckmässigsten, die Halbaxen OM, ON in eine beliebige Anzahl, hier in zwei, gleiche Theile zu theilen, einen Theilpunkt δ mit 1 zu verbinden und den Verschwindungspunkt v_2 dieser in die Ebene MN, $A\frac{V}{2}$ zurückversetzten Geraden zu bestimmen $\left(\frac{O}{2}\frac{v_2}{2}\right.$ parallel zu 1δ, $\left.Av_2 = 2 \,.\, A\frac{v_2}{2}\right)$. Die Perspektive I ergibt sich sodann im Durchschnitte der Geraden Mv_1, δv_2 und ähnlich so die Perspektive II.

Da nun sowohl die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den in der Meridiancurve liegenden Endpunkten der Axen der betreffenden Schnittellipsen, als auch jene der Berührungspunkte mit den Halbirungspunkten dieser Halbaxen in sämmtlichen Hilfsschnitten eine und dieselbe Richtung haben und die Mittelpunkte aller Hilfsschnitte in jener Geraden E_b liegen, welche zu dem Durchmesser MN der Meridiancurve conjugirt ist, also zur Tangente TM im Punkte M der letzteren parallel läuft, so werden die in einer zweiten zu MN, AV parallelen Hilfsebene M_1N_1 befindlichen Punkte der Schattengränze einfach erhalten, wenn man die Punkte N_1 (der zweite fällt hier ausser die Zeichnungsfläche), in welchen die Trace M_1N_1 dieser Ebene die Meridianhyperbel schneidet, mit v_1, die Halbirungspunkte δ_1 der Halbaxen mit v_2 verbindet und je zwei zusammengehörige Gerade $v_2\delta_1$, N_1v_1 in III zum Durchschnitt bringt.

Auf diese Weise lässt sich weiter leicht die erforderliche Anzahl von Punkten der Berührungscurve finden.

Berücksichtigt man, dass die Selbstschattengränze eine ebene Curve ist und die Ebene derselben den zu den Lichtstrahlen parallelen Durchmesser der Fläche conjugirt und eine Diametralebene der Fläche ist, so folgt, dass E_b zugleich die Bildflächtrace dieser Ebene angibt. Nachdem jedoch E_b auch der geometrische Ort der Spitzen jener Kegel ist, welche die Fläche in den verschiedenen zu MN, AV parallelen Hilfsebenen berühren, so ergibt sich hieraus eine sehr einfache Construktionsweise der Tangenten in den verschiedenen Punkten der Schattengränze. Man wird nämlich, um z. B. die Tangente $e\,III$ im Punkte III zu erhalten, blos in dem Punkte N_1 der betreffenden Trace M_1N_1

die Tangente $N_1 e$ der Meridianhyperbel zu verzeichnen und den Durchschnittspunkt e derselben mit E_b mit III zu vereinen haben; denn, weil e die Spitze des die Fläche in der Ebene $M_1 N_1$, $A V$ berührenden Kegels ist, muss die Bildflächtrace der Tangirungsebene der Fläche im Punkte III durch e gehen, wesshalb e, als in den beiden Bildflächtracen gelegen, einen Punkt der Durchschnittslinie der zugehörigen Ebenen, d. i. der fraglichen Tangente liefert.

Auf Grundlage dieses Construktionsverfahrens können auch die Asymptoten der Perspektive der Selbstschattengränze, wenn sich diese als Hyperbel darstellt, gefunden werden. Die einzelnen Punkte III der Curve ergeben sich nämlich als Durchschnitte je zweier Geraden, welche auf die fixen Punkte v_1 und v_2 zugehen. Lässt man die Ebene $M_1 N_1$ sich immer weiter von MN entfernen, so wird die Sehne der Meridiancurve, also auch die Viertelsehne $\delta_1 N_1$ fortwährend grösser, daher der Winkel $v_2 III v_1$ stets kleiner, bis endlich für eine gewisse Lage der Ebene $M_1 N_1$ dieser Winkel gleich Null wird, d. h. bis die genannten Geraden zu einander parallel werden, wo dann ihr Durchschnittspunkt in unendliche Entfernung fällt und diese Geraden, als auf unendlich weit entfernte Punkte der Curve zugehend, die Asymptotenrichtungen der Schattengränze angeben.

Sollen jedoch die beiden Geraden $v_2 \delta_1$ und $v_1 N_1$ parallel werden, so muss für die diesfällige Lage der Ebene MN, da $v_1 v_2$ gleichfalls parallel zu MN ist, offenbar die Viertelsehne $\delta_1 N_1$ der Entfernung $v_1 v_2$, also die halbe Sehne $M_1 N_1 = 2 . v_1 v_2$ sein. Demzufolge wird man zur Bestimmung dieses Punktes N_1 auf der verlängerten Geraden ON von O aus ein Stück gleich $2 . v_1 v_2$ aufzutragen und durch den Endpunkt dieser Länge eine Parallele zu E_b zu ziehen haben, um im Durchschnitte der letzteren mit der Meridianhyperbel die zu suchenden Endpunkte N_1 der Sehnen zu erhalten.

Weil jedoch das Benützen solcher Längen zumeist nicht möglich ist, so müssen wir vorerst untersuchen, auf welche Weise die Construktion mit aliquoten Theilen der vorkommenden Längenstücke vorgenommen werden könne. Zu diesem Ende beziehen wir die Hyperbel xaz auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkte O zusammenfällt und dessen Coordinatenaxen die Geraden MN und E_b bilden. Bezeichnen wir die Länge der Axe MN mit $2a$, die Länge der in E_b liegenden, zu MN conjugirten, imaginären Axe mit $2b$, so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Meridiancurve.

Im Umfange dieser Hyperbel sind nun zwei Punkte N_1 so anzugeben, dass denselben eine Abscissenlänge $2 . v_1 v_2 = v . c$ entspricht, und sind die Geraden zu bestimmen, welche diese Punkte mit v_1 oder v_2 verbinden. Die Ordinaten dieser Punkte haben somit die Länge

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} . \sqrt{(2c)^2 - a^2},$$

oder, um mit aliquoten Theilen, z. B. mit $\frac{1}{4}$ der einzelnen Längen, arbeiten zu können,

$$\frac{y_1}{4} = \pm \frac{b}{a} . \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht construiren; denn trägt man auf der XAxe von O aus das Stück $Of = \frac{1}{2} . v_1 v_2 = \frac{v_1}{2} \frac{v_2}{2}$ auf, beschreibt über dieser Länge als Durchmesser einen Halbkreis, durchschneidet denselben aus f mit einem Kreisbogen vom Radius $f\gamma = \frac{1}{4} ON = \frac{1}{4} a$ und überträgt $O\gamma$ nach Og, so ist

$$O\gamma = Og = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2}.$$

Um endlich $\frac{y_1}{4}$ als vierte geometrische Proportionale zu den Grössen a, b und Og zu bestimmen, hat man blos durch g eine Parallele gh bis zum Durchschnitte h mit der Asymptote tOt der Meridiancurve zu ziehen, wo dann

$$gh = \frac{b}{a} . Og = \frac{1}{4} y_1$$

wird.

Es ist nun am zweckmässigsten, die so gefundene Länge $\frac{y_1}{4}$ der Abscisse $\frac{x_1}{4} = Of$ entsprechend aufzutragen, d. h. durch f eine zu gh Parallele fk zu führen und auf derselben die Länge $gh = fk$ abzuschneiden. Man hat hiedurch einen Punkt k gefunden, welcher vom Mittelpunkte O eine viermal kleinere Entfernung als der zu suchende Punkt N_1 hat.

Verbindet man nun v_1 mit O und macht $Or = \frac{1}{4} Ov_1$, so hat offenbar der Punkt r gegen k eine ähnliche Lage, wie v_1 gegen den verlangten Punkt N_1 und es muss demzufolge die Verbindungslinie rk die Richtung der einen Asymptote geben.

Für die zweite Asymptote ist das untere Zeichen (—) in Betracht zu ziehen, d. h. die Ordinate fk ist nach abwärts aufzutragen und der so resultirende Punkt k_1 mit r zu verbinden. Halbirt man jedoch rk in s und verbindet s mit f, so wird, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke skf und rkk_1 folgt, sf parallel zur besagten Verbindungslinie rk_1 sein, somit die Richtung der zweiten Asymptote angeben.

Die Asymptoten selbst sind schliesslich durch den Halbirungspunkt C der Sehne $I\,II$ zu den eben gefundenen Geraden rk und sf parallel zu ziehen und ergeben sich in BCB, FCF.*)

Dass die Punkte I, II, welche in der Ebene MN, AV gefunden wurden, die Endpunkte eines Durchmessers der Perspektive der Selbstschattengränze, folglich im Halbirungspunkte C ihrer Verbindungslinie den Mittelpunkt der Curve bestimmen, folgt schon daraus, weil die Tangenten $T_1 I$ in diesen Endpunkten, auf die früher angegebene Weise gesucht, sich zu E_b parallel ergeben.

Aus diesem Diameter und den Asymptoten lassen sich die senkrechten Axen der Hyperbel leicht auffinden.

§. 179.

Aufgabe.

Es ist der Schatten ins Innere einer hohlen Halbkugel zu construiren.

Lösung. Es sei O (Fig. 305) der Kugelmittelpunkt, V der Verschwindungspunkt der Lichtstrahlen und v jener ihrer orthogonalen Projektionen auf der Horizontalebene, durch welche die Kugel in zwei Hälften getheilt wurde.

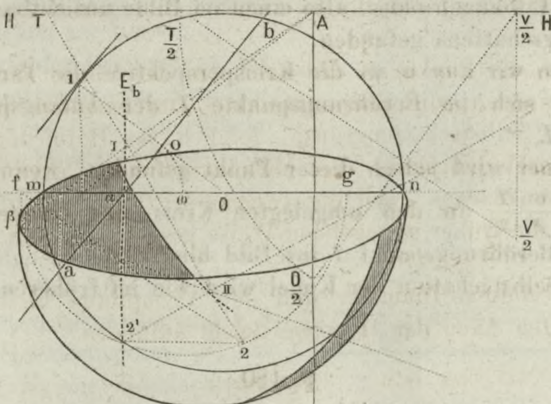
Zur Bestimmung der Schlagschattengränze wird man den Durchschnitt der Kugel mit jenem Strahlencylinder zu verzeichnen haben, welcher den Kreis mOn zur Leitlinie hat. Zu diesem

*) Eine directe Bestimmungsweise der Asymptoten ist in der auf Seite 379 (Anmerkung) bezeichneten Abhandlung angeführt.

Ende wenden wir vertikale Hilfsebenen an und legen die sich ergebenden Schnitte um die Bildflächtracen dieser Ebenen in die Bildfläche um.

Macht man $A\frac{O}{2}$ gleich der halben Augdistanz und verbindet $\frac{O}{2}$ mit $\frac{v}{2}$, so ist $\frac{O}{2}\frac{v}{2}$ die Richtung der horizontalen Tracen der Hilfsebenen. Trägt man $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ nach $\frac{v}{2}\frac{T}{2}$ auf, so bestimmt die Gerade $\frac{V}{2}\frac{T}{2}$ die Richtung der in die Bildfläche gedrehten Lichtstrahlen. $AT = 2A\frac{T}{2}$ gemacht, gibt den Theilungspunkt T für die Perspektiven der horizontalen Tracen an.

Fig. 305.



Beschreibt man über mn aus dem Mittelpunkte O einen Kreis, so ist dies der in die Bildfläche gelegte obere Begränzungskreis der Halbkugel. Zur Bestimmung einzelner Punkte der Schattengränze ziehe man parallel zu $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ eine Sehne, z. B. ab, welche die umgelegte Horizontaltrace einer Hilfsebene vorstellt. Diese Gerade trifft mn im Punkte α, wesshalb E_b die Bildflächtrace und αv die Horizontaltrace unserer Hilfsebene ist. Letztere schneidet die Kugel nach einem Kreise vom Durchmesser ab, welcher, um E_b in die Bildfläche gedreht, dadurch erhalten wird, dass man den Halbirungspunkt o von ab um α nach ω dreht und von ω aus mit dem Radius $o\alpha$ den Halbkreis $f2g$ beschreibt. Der durch f parallel mit $\frac{T}{2}\frac{V}{2}$ gezogene Lichtstrahl trifft den Halbkreis in *2*, welcher Punkt, als der Gränzcurve angehörig, blos in die ursprüngliche Ebene zurückzudrehen sein wird.

Hiebei bedenke man, dass der Punkt *2* bei seiner Drehung um E_b einen Kreisbogen vom Radius $2\,2'$ beschreibt, mithin in die Gerade $2'v$ gelangen muss, auf welcher das Stück $2\,2'$ perspektivisch abgeschnitten (was durch Ziehen der Theilungslinie $2\,T$ erreicht wird) den Punkt *II* der zu suchenden Schattenlinie gibt. Wird der dem Punkte f oder a entsprechende Punkt β der Perspektive mit V verbunden, so muss diese Gerade, welche die Perspektive des betreffenden Lichtstrahls ist, ebenfalls durch den Punkt *II* des Schattens gehen.

Vermittelst dieser Hilfsebene haben wir den Punkt *II* unterhalb des Halbkugelrandes, also einen im Bilde unsichtbaren Punkt des Schlagschattens gefunden.

Ziehen wir aus v an die Kreisperspektive die Tangente $v\,I$, so ergibt sich im Berührungspunkte *I* der Anfangspunkt der Curve *I II*.

Genauer wird jedoch dieser Punkt gefunden, wenn man parallel zu $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ an den umgelegten Kreis eine Tangente zieht und den Berührungspunkt *1* ins Bild überträgt.

Der Selbstschatten der Kugel wird wie im früheren Beispiele ermittelt.

§. 180.

Aufgabe.

Es ist der im Innern einer Nische sich ergebende Schlagschatten zu construiren.

Die Nische besteht aus einem cylindrischen Mauerwerke und ist mit einem viertelkugelförmigen Gewölbe gedeckt.

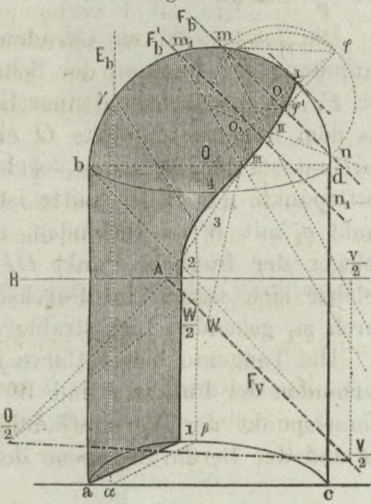
Lösung. Der obere Rand Ib (Fig. 306) der Viertelkugel, so wie die Kante ab bestimmen durch ihren Schlagschatten die zu suchende Schattencurve, welche sich theils im Innern der Cylinderfläche, theils in der Viertelkugel und auf der horizontalen Bodenfläche ergibt.

Zur Bestimmung dieser Curve haben wir auf bekannte Weise den Schatten $a\,1\,2$ der Kante ab; ferner, von *2* angefangen, den Durchschnitt des vertikalen Cylinders mit dem durch einen Theil des Halbkreises $b\,I$ gelegten Strahlencylinder und schliesslich den

Durchschnitt der Kugelfläche mit demselben Strahlencylinder zu construiren.

Die zu den beiden Cylinderflächen parallelen Hilfsebenen haben Vv zur Verschwindungslinie. Ist E_b die Bildflächtrace einer solchen Ebene, so ist αv ihre Grundflächtrace, während $\beta 3$ und γV die in ihr liegenden Erzeugenden beider Cylinder sind, welche sich in dem Punkte *3* der Schattengränze schneiden. Es ist zweckmässig, auf diese Weise einige Punkte der Curve selbst dann zu bestimmen, wenn einer oder der andere derselben über die Gränze der cylindrischen Wand fallen sollte, um die Curve, welche bis zum Durchschnitte *4* mit dem Halbkreis *bd* reicht, richtig ziehen zu können.

Fig. 306.



Behufs der Bestimmung der Durchschnittscurve des Strahlencylinders mit der Kugelfläche wende man bildflächprojecirende Hilfsebenen an, welche parallel zu den Cylindererzeugenden gehend, den Cylinder nach Geraden, die Kugelfläche dagegen nach Kreisen schneiden und VA zur Verschwindungslinie F_v haben. Ist F_b die Bildflächtrace einer solchen Hilfsebene, so lege man die in derselben liegenden Schnitte in die Bildfläche um, woselbst der Kreis über mn zu beschreiben, der Lichtstrahl durch m parallel zu dem umgelegten Parallelstrahl $\frac{V}{2}\,\frac{O}{2}$ zu ziehen ist. Letzterer schneidet den in die Bildfläche gedrehten Kreis in φ, welcher Punkt zurückgedreht seine orthogonale Projektion in φ' ($\varphi\varphi'$ senkrecht auf mn) hat und in der Entfernung $\varphi\varphi'$ hinter der Bildfläche liegt.

Wird also auf $\varphi' A$ das Stück $\varphi' II$ perspektivisch gleich $\varphi\varphi'$ abgeschnitten, so ist II der gesuchte Punkt der Schattengränze, welcher ebenfalls im Lichtstrahle $m\,V$ liegen muss.

Der Gränzpunkt dieser Curve, welche sich in *4* an die erstbestimmte so anschliesst, dass beide in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, ergibt sich im Berührungspunkte I der an den Kreis bmd parallel zu AV gezogenen Tangente.

Verbindet man die umgelegten Punkte φ in den einzelnen Halbkreisen mit den Mittelpunkten derselben, so wird man offenbar ein System paralleler Geraden φo erhalten, deren Verschwindungspunkt W sich in der gemeinschaftlichen Verschwindungslinie AV der Hilfsebenen ergibt, wenn man den Parallelstrahl DW parallel zu φo, oder $\frac{O}{2}\frac{W}{2}$ parallel zu φo zieht und $AW = 2A\frac{W}{2}$ macht.

Die letzterwähnten Geraden lassen sich mit Vortheil zur Auffindung von Punkten der Schattengränze anwenden. Ist nämlich F_b die Bildflächtrace einer Hilfsebene, und hat man auf F'_b, aus dem Kugelmittelpunkte O ein für alle Mal den senkrechten Durchmesser OI gezogen, welcher der geometrische Ort der Mittelpunkte der Hilfsschnitte ist, so hat man blos den Mittelpunkt o_1 mit W zu verbinden, um eine Gerade zu erhalten, in welcher der fragliche Punkt III der Schattengränze liegt, und welcher sich sonach im Durchschnitte dieser Geraden mit dem durch m_1 gehenden Lichtstrahle ergibt.

Die Tangente dieser Curve im Punkte I wird einfach durch Verbinden der Punkte I und W erhalten; denn W ist der Durchschnittspunkt der Verschwindungslinien der Ebene dieser Curve $I4$ und der Berührungsebene der Kugel im Punkte I.

§. 181.

Aufgabe.

Es ist der Schatten ins Innere eines halben Ellipsoids zu construiren.

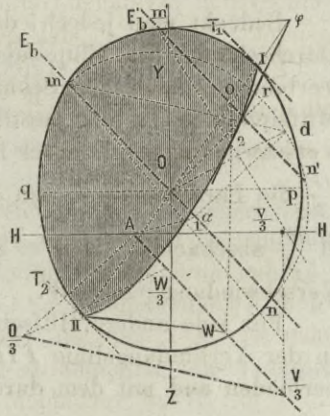
Lösung. Diese Aufgabe lässt sich auf ähnliche Weise wie die vorhergehende lösen.

Ist $\frac{V}{3}A$ (Fig. 307) der dritte Theil der Entfernung des Verschwindungspunktes der Lichtstrahlen vom Augpunkte, O der Mittelpunkt des Ellipsoides, so kann man Hilfsebenen anwenden, welche auf der Bildebene senkrecht und parallel zu den Lichtstrahlen sind, demnach $A\frac{V}{3}$ zur Verschwindungslinie haben.

Am zweckmässigsten ist es, eine solche Ebene E_b durch den Mittelpunkt O und zwei Ebenen, d. s. T_2 und T_1, tangentiell an die Ellipse pq selbst zu legen. Vermittelst der letzteren erhält man die Punkte I und II als die Gränzpunkte der Schattencurve.

Die Ebene E_b schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren eine Axe mn und deren andere pq ist. Denkt man sich diese Ebene um E_b in die Bildfläche gelegt, so ist über den beiden Axen mn und $or = op$ eine halbe Ellipse zu beschreiben und der umgelegte Lichtstrahl durch m parallel zu dem umgelegten Parallelstrahl $\frac{V}{3}\,\frac{O}{3}$ zu ziehen, welcher die Ellipse in dem fraglichen Punkte d schneidet.*)

Fig. 307.



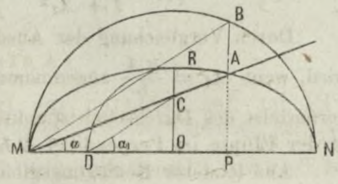
Dreht man diesen Punkt in die ursprüngliche Ebene zurück, so ist der Fusspunkt α des aus d auf E_b gefällten Perpendikels die orthogonale Projektion des Punktes 1

---

*) Es ist zur Bestimmung des Durchschnittspunktes d der Ellipse mit der Geraden md nicht nothwendig, die erstere zu verzeichnen, sondern es lässt sich dieser Punkt auf folgende Weise einfach auffinden.

Es seien $MO = NO = a$, $RO = b$ (Fig. 308) die beiden Halbaxen der Ellipse und MA jene Gerade, deren Durchschnitt mit der Ellipse gesucht werden soll und welche unter dem Winkel $AMn = \alpha$ (dessen trigonometrische Tangente wir mit A bezeichnen wollen) gegen MN geneigt ist. Nehmen wir M als den Ursprung und MN als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, so sind:

Fig. 308.



$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2\,a\,x - x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y^2 = 2\,a\,x - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$y = A\,x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

die Gleichungen der Ellipse, des über der grossen Axe beschriebenen Kreises und der gegebenen Geraden. Suchen wir die Abscisse MP des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ellipse, so finden wir durch Auflösung der beiden Gleichungen (*1* und (*3*

$$x = M\,P = \frac{2\,a\,b^2}{a^2\,A^2 + b^2} \quad \text{oder}$$

im Raume, daher sich die Perspektive desselben im Durchschnitte der Geraden $A\alpha$ mit dem Lichtstrahl mV ergibt.

Auf gleiche Weise können nun beliebig viele Punkte der Durchschnittscurve bestimmt werden.

Bedenkt man jedoch, dass für alle Ellipsen, welche sich als Durchschnitte des Ellipsoids mit den Hilfsebenen ergeben, die Verbindungslinien der Schnittpunkte d mit den entsprechenden Mittelpunkten zu dO parallele Gerade sind, so wird man den Verschwindungspunkt ihrer Perspektiven erhalten, indem man aus $\frac{O}{3}$ die Parallele $\frac{O}{3}\frac{W}{3}$ zu dO zieht, welche auf $A\frac{V}{3}$ das Stück $A\frac{W}{3}$ abschneidet. $AW = 3 . A\frac{W}{3}$ gemacht, gibt den fraglichen Verschwindungspunkt W.

Für jede andere Hilfsebene, z. B. E'_b, hat man also blos den in der Verbindungslinie $I\,II$ liegenden Mittelpunkt o mit W zu verbinden und mit dem durch m' gehenden Lichtstrahl $m'V$ zum

---

$$= \frac{2a}{1+\left(\frac{aA}{b}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Ist $y = A_1 x$ .... (5 eine zweite durch M gehende Gerade MB, so erhält man durch Verbindung der Gleichungen (2 und (5 für die Abscisse x_1 ihres Durchschnittspunktes B mit dem Kreise den Ausdruck:

$$x_1 = \frac{2a}{1+A_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Durch Vergleichung der Ausdrücke (4 und (6 ersieht man, dass $x = x_1$ wird, wenn $A_1 = \frac{aA}{b}$ angenommen wird, d. h. dass man bei dieser Annahme vermittelst des Durchschnittspunktes B des Kreises den zu suchenden Punkt A der Ellipse im Perpendikel PB erhält.

Aus letzterer Bedingungsgleichung folgt:

$$bA_1 = aA.$$

Die Länge $aA = a\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ist jedoch jenes Stück OC der kleinen Axe, welches von der Geraden AM abgeschnitten wird. Wenn wir mithin $OD = OR = b$ machen und D mit C verbinden, so ist:

$$OC = b\,.\,\mathrm{tg}\,CDO = b\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \quad \text{und}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{OC}{b} = \frac{aA}{b} = A_1 \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

woraus erhellt, dass die Gerade MB parallel zu CD zu ziehen ist. Wird im Durchschnittspunkte B dieser Geraden mit dem Kreise das Perpendikel BP errichtet, so schneidet es sich mit der gegebenen Geraden in dem zu suchenden Punkte A.

Schnitt zu bringen, um einen Punkt *2* der Schlagschattengränze zu erhalten.*)

Berücksichtigt man, dass die Schattengränze *I 2 1 II* eine ebene Curve ist und die Punkte *1* und *2* derselben in der Bildfläche liegen, ferner dass *o W* eine in der Ebene dieser Curve liegende Gerade ist, so folgt, dass *I II* die Bildflächtrace und eine durch *W* zu *I II* parallel gezogene Gerade die Verschwindungslinie der in Rede stehenden Ebene ist und dass daher die Schattengränze auch nach §. 140 als Durchschnitt des Ellipsoides mit dieser Ebene gefunden werden kann.

Hiedurch ergibt sich auch ein sehr einfaches Verfahren zur Verzeichnung der Tangente in irgend einem Punkte der Schattengränze. Man wird nämlich, um z. B. die Tangente im Punkte *2* zu erhalten, blos in dem Punkte m', in welchem die Trace E'_b der durch *2* gehenden, zu *A V* parallelen Ebene E'_b, *A V* die Leitlinie *I m' m q II* des Strahlencylinders schneidet, die Tangente

---

*) Dass sämmtliche obgenannte Verbindungslinien parallele Gerade sind, lässt sich leicht beweisen.

Denn, wie in der vorigen Anmerkung gefunden, sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes *A* (siehe Fig. 308):

$$x'' = \frac{2a}{1+\left(\frac{aA}{b}\right)^2}, \qquad y'' = \frac{2aA}{1+\left(\frac{aA}{b}\right)^2};$$

folglich die Gleichung der Geraden *O A*, welche durch diesen und den Punkt *O* $\left\{\begin{matrix} x' = a \\ y' = o \end{matrix}\right\}$ geht:

$$y = \frac{y''}{x''-a}(x-a),$$

wobei also der Ausdruck $\frac{y''}{x''-a}$ die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels φ der Geraden *O A* mit der Abscissenaxe angibt. Für y'' und x'' die Werthe substituirt, wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2A}{1-A^2\left(\frac{a}{b}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I}$$

Diese Formel beweist, dass tg φ, mithin auch φ, so lange ungeändert bleibt, als das Verhältniss $\frac{a}{b}$ sich nicht ändert. Nun wird jedoch ein Ellipsoid durch parallele Ebenen in ähnlichen Ellipsen geschnitten, d. h. in Ellipsen, welche durchgehends ein gleiches Axenverhältniss haben, woraus folgt, dass in unserem Beispiele sämmtliche Geraden, welche die Punkte der Schattengränze mit den bezüglichen Mittelpunkten der Hilfsschnitt-Ellipsen verbinden, parallele Linien sind.

$m\varphi$ an diese Curve bis zum Durchschnitte φ mit der verlängerten Geraden $I\,II$ zu verzeichnen und diesen Punkt mit 2 zu verbinden haben. Hieraus folgt, dass die Tangenten in den Punkten I und II auf W zugehen.

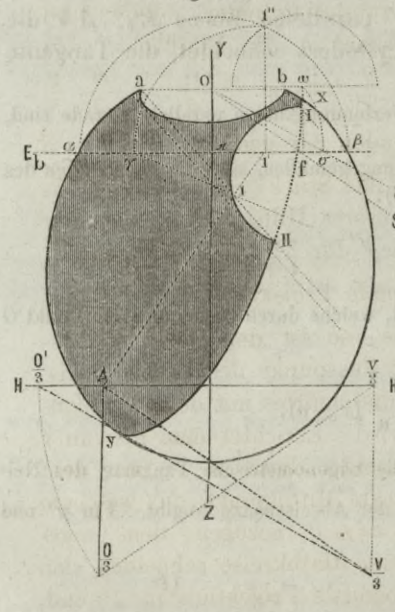
§. 182.

Aufgabe.

Es ist der im Innern eines oben offenen, halben Rotationskörpers sich ergebende Schlagschatten zu verzeichnen.

Lösung. Es sei die gegebene Rotationsfläche ein durch die zur Bildfläche parallel gehende Meridianebene getheiltes Ellipsoid, welches oben durch den Parallelkreis $a\,b$ (Fig. 309) begränzt ist.

Fig. 309.



Man verzeichne vorerst auf die vorhergehend besprochene Weise den Schatten des äussern Randes $x\,a\,y$ in das Innere, ohne auf die obere Begränzung Rücksicht zu nehmen. Verbindet man sodann die Endpunkte a und b des Durchmessers $a\,b$ mit V (hier durch $\frac{V}{3}$ bestimmt), so werden diese Lichtstrahlen im Durchschnitte mit der eben erhaltenen Curve die Punkte I, II angeben, zwischen welchen jene Schlagschattengränze, welche durch die obere kreisförmige Oeffnung bedingt ist, zu bestimmen sein wird. Um diese Schattengränze zu erhalten, haben wir offenbar den Durchschnitt des Strahlencylinders $a\,b\,V$ mit dem Ellipsoide zu ermitteln.

Hiebei kann auf gleiche Weise wie im vorigen Beispiele vorgegangen werden.

Man kann nämlich solche Ebenen anwenden, welche die Cylinderfläche nach geraden Erzeugenden schneiden und senkrecht auf der Bildebene stehen. Der Hilfsschnitt mit dem Ellipsoide wird eine halbe Ellipse sein. Die Construktion wird der im vorigen Beispiele angegebenen ähnlich, jedoch mit dem Unterschiede durchgeführt werden, dass die Lichtstrahlen nicht aus dem Endpunkte der grossen Axe der in die Bildfläche umgelegten Schnittellipse, sondern aus jenem Punkte zu ziehen sein werden, welcher dem im Halbkreise ab liegenden Endpunkt des Ellipsenbogens entspricht.

Eine zweite Auflösungsweise wäre jene mit Anwendung von horizontalen Hilfsebenen, welche beide Flächen nach Halbkreisen schneiden. Ist also E_b die Trace einer solchen Ebene, so wird der über $\alpha\beta$ beschriebene Halbkreis der in die Bildfläche umgelegte Hilfsschnitt des Ellipsoides sein. Um den Mittelpunkt des umgelegten Hilfsschnittes mit dem Strahlencylinder zu erhalten, lege man vorerst durch den Mittelpunkt o des Halbkreises ab den Lichtstrahl oV, welcher die Axe des Cylinders bildet, und drehe denselben um die Rotationsaxe in die Bildfläche. Zu diesem Ende verbinde man $\frac{v}{3}$ mit $\frac{O}{3}$, mache $\frac{v}{3}\,\frac{O}{3} = \frac{O'}{3}\,\frac{v}{3}$ und ziehe $\frac{V}{3}\,\frac{O'}{3}$, zu welcher Geraden der gedrehte Strahl oS parallel sein muss. Offenbar wird das Stück $\pi\sigma$ der Trace E_b die Entfernung des Mittelpunktes unseres Hilfsschnittes von der Axe YZ geben. Zieht man ferner durch o die Gerade oS_1 parallel zu $A\,\frac{V}{3}$, also die orthogonale Projektion der Axe des Strahlencylinders auf der Bildebene, so ist der Durchschnittspunkt f dieser Geraden mit E_b der Fusspunkt des Perpendikels, welches aus dem Mittelpunkte des Hilfsschnittes mit dem Strahlencylinder auf die Bildfläche gefällt wird. Errichtet man also in f die Senkrechte $f\omega$ auf E_b und schneidet diese aus π mit dem Radius $\pi\sigma$ in ω, so ist σ der umgelegte Mittelpunkt, aus welchem der Halbkreis mit dem Radius $oa = \omega 1''$ gezogen, den umgelegten zweiten Hilfsschnitt gibt. Beide Halbkreise schneiden sich im Punkte $1''$, welcher seine orthogonale Projektion in $1'$ und, in die Horizontalebene E_b zurückgedreht, seine Perspektive in 1 hat.

Auf gleiche Weise können beliebig viele Punkte der Ellipse $I\,1\,II$ gefunden werden.

Zu bemerken ist, dass dieselbe von dem aus V tangentiell an den Halbkreis ab gezogenen Lichtstrahl ebenfalls berührt werden muss.

§. 183.

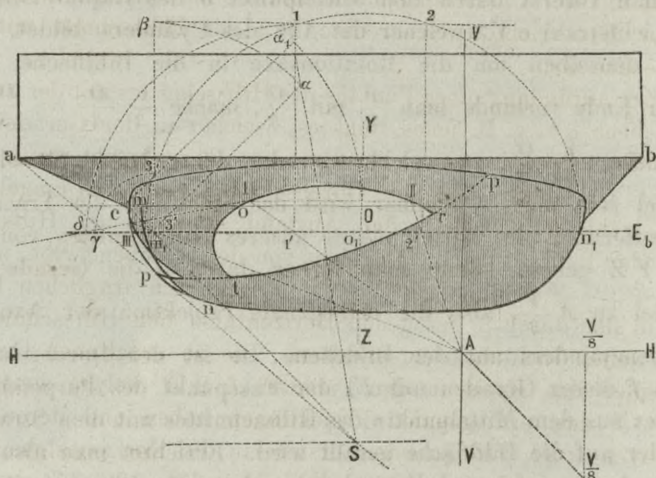
Aufgabe.

Es ist der Schatten, den eine horizontale, rechtwinklige Platte auf eine Umdrehungsfläche wirft, zu construiren.

Als Umdrehungsfläche nehmen wir eine Ringfläche an, welche durch Rotation eines Viertelkreises $m n o$ (Fig. 310) um die verticale Axe $Y Z$ entstanden ist.

Lösung. Die untern Gränzkanten der Platte sind schattenwerfend und bilden die Basis eines Prismas, dessen parallele Kanten parallel zu den Lichtstrahlen sind. Es sind somit behufs der Bestimmung der Schlagschattengränzen die Schnitte der

Fig. 310.



durch die beiden Kanten $a b$ und $a c$ gelegten Lichtebenen mit der Umdrehungsfläche zu construiren. Zu diesem Zwecke lege man durch a den Lichtstrahl $a V$ und bestimme dessen Durchstosspunkt S mit der Bildfläche, welch' letztere durch die Umdrehungsaxe gehend angenommen wurde.

Da wir die Platte mit je zwei Kanten, beziehungsweise parallel und senkrecht zur Bildebene gelegt haben, so ist c die orthogonale Projektion der Kante $a c$ auf der Bildfläche, folglich $S c$ parallel zu $A V$ die Bildflächtrace der durch den Lichtstrahl $a V$ senkrecht auf die Bildfläche gelegten Ebene. Dieser Lichtstrahl $a V$, um die Bildflächtrace $S c$ in die Bildfläche umgelegt, gelangt nach $S\alpha_1$, was man vermittelst des umgelegten Parallelstrahles, oder einfach dadurch erhält, dass man auf der in c auf cS errichteten Senkrechten $c\alpha_1$ die wahre Länge von $c\alpha$, d. i. cO, von c nach α_1 abschneidet und α_1 mit S verbindet.

Um nun einzelne Punkte der Schlagschattengränze zu erhalten, wende man eine Reihe von horizontalen Hilfsebenen an, welche die Umdrehungsfläche nach Parallelkreisen, das Strahlenprisma, oder besser die beiden durch ab und ac gelegten Lichtebenen nach zwei, beziehungsweise parallel und senkrecht zur Bildfläche stehenden Geraden schneiden, und lege jede dieser Hilfsebenen um deren Bildflächtrace in die Bildebene um.

Ist also E_b eine solche Hilfsebene, so ist der aus o_1 über $m_1 n_1$ als Durchmesser beschriebene Halbkreis $m_1\,1\,2\,n_1$ der Hilfsschnitt mit der Umdrehungsfläche und die im Durchschnittspunkte $3'$ auf E_b errichtete Senkrechte $3'\beta$ der Hilfsschnitt mit der Lichtebene ac.

Zur Auffindung eines Punktes des Hilfsschnittes mit der andern Lichtebene ab, z. B. jenes Punktes, welcher in der Geraden $3'\beta$ liegt, berücksichtige man, dass die aus $3'$ senkrecht auf cS errichtete Gerade $3'\alpha$, bis zum Durchschnitte α mit dem umgelegten Lichtstrahl $S\alpha$ gezogen, den Abstand des in jener Hilfsebene liegenden Punktes des Lichtstrahles von der Bildebene gibt, mithin blos $3'\beta = 3'\alpha$ zu machen ist, um in β den fraglichen Punkt und in der durch β gezogenen Horizontalen den Hilfsschnitt mit der zweiten Lichtebene zu erhalten. Die so erhaltenen Geraden schneiden den Kreis in den Punkten 1, 2, 3, welche sonach in $1'$, $2'$, $3'$ ihre orthogonalen Projektionen haben und deren Perspektiven I, II, III, nachdem erstere in die Horizontalebene zurückgedreht wurden, in den Abständen $11'$, $22'$, $33'$ von der Bildebene zu verzeichnen sind.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens für beliebig viele Horizontalebenen erhält man eine Reihe von Punkten, von welchen immer zwei der einen, der dritte aber der andern Schlagschattengränzcurve angehören.

Erstere ist durch die Durchschnittspunkte r und t mit der Selbstschattengränze abgeschlossen, letztere hingegen berührt oben den sichtbaren Umriss der Umdrehungsfläche und ist nach unten bis zum Durchschnitte mit der Selbstschattengränze zu ziehen.

Die Selbstschattengränze $ptrq$ wird auf die allgemeine Art gefunden.

Wäre die obere Platte nicht in einer solchen Lage, dass eine Kante ab derselben parallel zur Bildfläche ist, so würde die Construktion in ganz gleicher Weise durchzuführen sein. Nur wären sodann die Hilfsschnitte mit den beiden Lichtebenen nicht mehr parallel und senkrecht zur Bildfläche, sondern es müssten vorerst deren Richtungen durch die entsprechenden in die Bildfläche umgelegten Parallelstrahlen bestimmt werden.

Aus diesen hier gegebenen Beispielen ist es klar, wie man in allen ähnlichen, mehr oder weniger complicirten Fällen vorzugehen haben wird.

Es bleibt jedoch auch hier zu bemerken nothwendig, dass es mitunter, insbesondere bei aus vielen und verschiedenen Theilen zusammengesetzten Gegenständen rathsam erscheinen kann, sich der Durchschnittsmethode zu bedienen, d. h. sich die Schattengränzen in orthogonaler Projektion zu verzeichnen und punktweise in die Perspektive zu übertragen.

ANHANG.

Perspektivische Darstellung architektonischer Gegenstände.

Allgemeine Bemerkungen.

Insofern, als man es in der Architektur grösstentheils mit Gegenständen zu thun hat, welche durch drei Systeme von aufeinander senkrechten Geraden begränzt sind, wovon überdies die beiden ersteren in Horizontalebenen liegen, das letztere jedoch vertikal ist, sich demnach auch perspektivisch vertikal darstellt; so ist einleuchtend, dass man bei der perspektivischen Darstellung solcher Objekte von den in der perspektivischen Projektionslehre aufgestellten allgemeinen Sätzen und Lösungsweisen einen beschränkten Gebrauch macht und dass selbst diese noch einige Vereinfachung gestatten.

Aus der eben bezeichneten Lage der Flächen und Kanten folgt, dass es in den meisten Fällen zweckmässig sein wird, vorerst das Bild des Grundrisses zu verzeichnen, sodann die vertikalen Kanten des Bildes in den einzelnen Eckpunkten des Grundrisses zu errichten und die betreffenden Längen daselbst aufzutragen.

Horizontslinie, Augpunkt, Augdistanz.

Es sei uns hier gestattet, Einiges nochmals zu berühren, welches bei der Construktion perspektivischer Bilder von besonderer Wichtigkeit ist. Es sind dies einzelne Bemerkungen über die zweckmässige Wahl der Horizontslinie, des Augpunktes und der Augdistanz.

Was die Horizontslinie anbelangt, so hängt die Annahme derselben von dem darzustellenden Gegenstande und von der Art und Aufstellung des Bildes ab.

Ist z. B. ein Gesimse perspektivisch zu verzeichnen, so kann der Horizont verhältnissmässig tief angenommen werden, während man ihn sonst gewöhnlich in der Mitte des Bildes wählt.

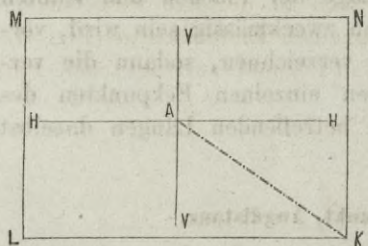
Durch den angenommenen Horizont kann der Augpunkt blos in der Breitenrichtung beliebig festgesetzt werden. Die natürlichste Lage des Augpunktes bietet der Mittelpunkt der begränzten Bildfläche, indem, um ein Bild zu betrachten, man dasselbe jedenfalls so vor das Auge stellt, dass sich letzteres nahezu über dem Mittelpunkte des Bildes befindet.

Es wird daher, wenn ein Bild den gewünschten Eindruck hervorbringen soll und nicht besondere Umstände eintreten, der Augpunkt stets in der Nähe des Mittelpunktes angenommen werden müssen.

Eine Ausnahme hievon könnte z. B. dann eintreten, wenn das Bild einen seitwärts liegenden Gegenstand von besonderem Interesse enthält; in diesem Falle wird der Augpunkt gegen diesen Gegenstand hin zu versetzen sein.

Das Wichtigste bei perspektivischen Zeichnungen bildet die Annahme der Augdistanz, welche, um das ganze Bild deutlich übersehen zu können, ohne das Auge zu wenden, **wenigstens zweimal so gross angenommen werden muss, als der Abstand des entferntesten Punktes des Bildes vom Augpunkte beträgt.** Ist also das Rechteck $KLMN$ (Fig. 311) die begränzte Bildfläche und A der Augpunkt, so ist K jener Punkt des Bildes, welcher von A am weitesten absteht, wesshalb in diesem Falle die Augdistanz D wenigstens doppelt so gross als AK, daher als äusserste Gränze $D = 2 . AK$ anzunehmen wäre. Hieraus ist ersichtlich, dass die Augdistanz fast durchgehends eine solche Ausdehnung erhält, dass die Construktionen nur mit aliquoten Theilen derselben durchgeführt werden können.

Fig. 311.



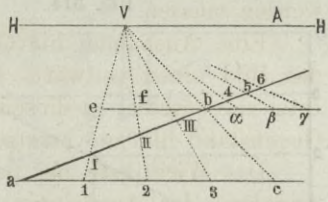
Theilung von Linien.

Die Theilung der Linien wurde bereits im Kapitel VI besprochen; es sei jedoch hier über diesen Gegenstand noch folgendes bemerkt.

1. Ist ab (Fig. 312) das Bild einer horizontalen, durch die beiden Punkte a und b begränzten Geraden, welche in eine bestimmte Anzahl n gleicher Theile getheilt werden soll, so kann dies mit Benützung eines beliebigen, in der Horizontslinie gelegenen Punktes v vorgenommen werden. Wird nämlich durch a eine zu HH parallele Gerade ac gezogen, b mit v verbunden und bis zum Durchschnitte c mit ac verlängert, ferner ac in die gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt und die einzelnen Theilpunkte mit v vereint, so schneiden diese Theilungslinien die Perspektive ab in den zu bestimmenden Theilpunkten I, II.....

2. Um das Eintheilen der Länge ac zu vermeiden, kann ein beliebig angenommener Theil $a\,1$ auf ac n mal bis c aufgetragen und c mit b verbunden werden, wodurch sich in der Horizontslinie der Punkt v ergibt, welcher mit den einzelnen Theilpunkten der Geraden ac zu verbinden ist.

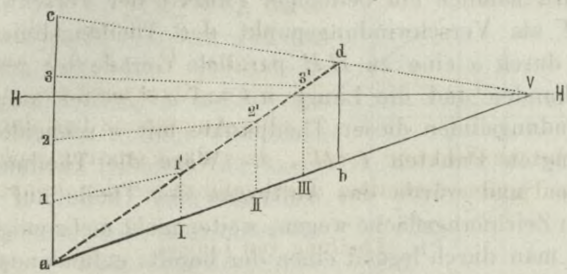
Fig. 312.



Die Richtigkeit dieser beiden Constructionen erhellt daraus, dass die einzelnen Theilungslinien, als auf einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt v zugehend, im Raume zu einander parallel sind, daher auch auf ab, so wie auf ac, gleiche Stücke abschneiden.

3. Dieselbe Theilung kann auch in der Art vorgenommen werden, dass man auf der in dem einen Endpunkte a (Fig. 313) errichteten Vertikalen eine Länge $a\,1$ n mal aufträgt, den End-

Fig. 313.

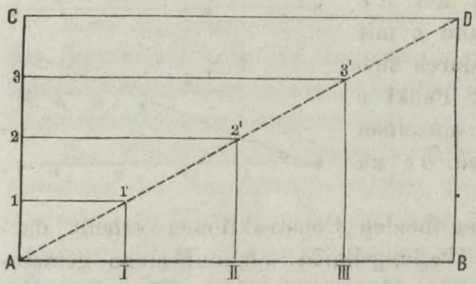


punkt c der so erhaltenen Länge mit dem Verschwindungspunkte v der gegebenen Geraden ab verbindet, ferner die Vertikale bd errichtet und die Diagonale ad zieht.

Werden nun die einzelnen Theilpunkte der Geraden ac mit v verbunden, so schneiden diese Verbindungslinien die Diagonale ad in den Punkten $1'$, $2'$...., während die durch diese Punkte gezogenen Vertikalen die Gerade ab in den gesuchten Punkten I, II.... treffen.

Werden sämmtliche Linien dieser Figur in der Lage, in welcher sie sich im Raume befinden, auf die Bildfläche übertragen, so wird die Richtigkeit des obigen Verfahrens von selbst klar; denn auf der Geraden AB (Fig. 314) wurde die Senkrechte AC errichtet, auf dieser eine Länge $A1$, von A nach C, n mal aufgetragen und die Geraden CD, $11'$, $22'$.... parallel zu AB geführt, nachdem deren Perspektiven auf den Verschwindungspunkt v der Geraden ab zugehen. Die Diagonale AD, entsprechend der Geraden ad des Bildes, wird mithin in den Punkten $1'$, $2'$..... in n gleiche Theile getheilt, wesshalb die durch diese Theilpunkte gezogenen Vertikalen die verlangte Theilung der Geraden AB in gleicher Weise bewirken.

Fig. 314.



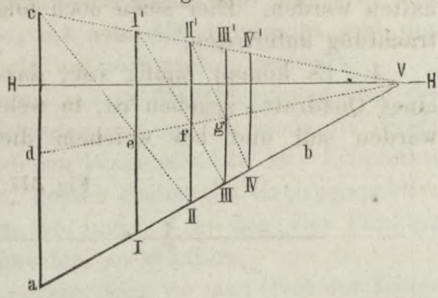
4. Soll auf einer gegebenen Geraden abv (Fig. 312) eine schon in ihrer Perspektive gegebene Länge aI mehrmals aufgetragen werden, so kann dies in gleicher Weise wie in den Fällen 1. und 2. geschehen.

Es wird nämlich ein beliebiger Punkt v der Verschwindungslinie HH als Verschwindungspunkt der Theilungslinien angenommen, durch a eine zu HH parallele Gerade ac gezogen, I mit v verbunden und die Länge $a1$ auf ac weiter aufgetragen. Die Verbindungslinien dieser Theilpunkte mit v schneiden av in den verlangten Punkten I, II..... Wäre die Theilung weiter fortzuführen und würde das Auftragen der Theile auf ac, der begränzten Zeichnungsfläche wegen, weiter nicht mehr möglich sein, so könnte man durch irgend einen der bereits gefundenen Punkte, z. B. durch b eine zu ac Parallele $b\gamma$ ziehen und mit Hilfe der Längenstücke $b\alpha = \alpha\beta \ldots\ldots = ef$ die Theilung, so wie früher, fortsetzen.

Wäre ein Längenstück ab in eine Anzahl Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, so müsste die Theilung der zu HH Parallelen ac in demselben Verhältnisse vorgenommen werden.

5. Sind in den einzelnen Theilpunkten einer Geraden ab (Fig. 315) vertikale Gerade, z. B. als Mittellinien von Säulen, Bäumen u. dergl. zu errichten, so kann auch in der Weise vorgegangen werden, dass man auf die in a errichtete Vertikale eine beliebige oder gegebene Länge ac aufträgt, diese in d halbirt und die Linien cv und dv gegen den Verschwindungspunkt v der gegebenen Geraden ab führt. Sollen nun die einzelnen Mittellinien in der Entfernung aI gezogen werden, so wird man in dem gegebenen ersten Theilpunkte I die Vertikale II' zu errichten und deren Durchschnittspunkt e mit der Geraden dv mit c zu verbinden haben, um den nächsten Theilpunkt II zu erhalten. In derselben Weise wird die Theilung fortgesetzt.

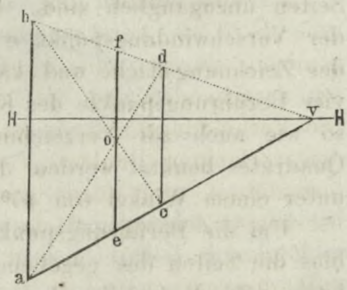
Fig. 315.



Es sind daselbst offenbar die Längen cd und eI im Raume einander gleich, folglich die Dreiecke cde und $eIII$ congruent und daher auch die Stücke aI und III gleich lang.

6. Soll zwischen zwei perspektivisch gegebenen Vertikallinien ab und cd (Fig. 316), deren Fusspunkte a und c in einer und derselben Horizontalebene liegen, eine dritte, in der Mitte derselben, angegeben werden, so kann dies durch perspektivisches Halbiren der Länge ac nach 1. oder 2., oder auch derart geschehen, dass man einen beliebigen Punkt b mit dem Verschwindungspunkte v der Geraden ac verbindet und die Diagonalen ad und bc des so erhaltenen Rechtecks zieht. Dieselben schneiden sich

Fig. 316.



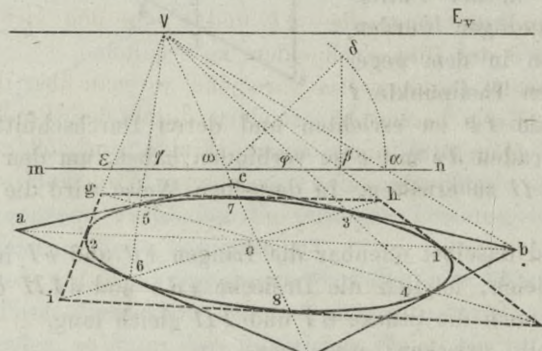
in einem Punkte o, durch welchen die fragliche Vertikallinie fe zu führen ist.

Kreisperspektive.

In der Praxis wird das Bild eines Kreises, mit Benützung der Perspektive des zur Bildfläche parallelen Kreisdurchmessers, zumeist in der Art verzeichnet, dass man die Bilder zweier, dem Kreise umschriebener Quadrate (§. 107, b) darstellt, wodurch acht Punkte der Peripherie nebst den zugehörigen Tangenten erhalten werden. Hier seien noch folgende Fälle einer nähern Betrachtung unterzogen.

1. Es kömmt häufig vor, dass das Bild $abcf$ (Fig. 317) eines Quadrates gegeben ist, in welches ein Kreis eingeschrieben werden soll und bei welchem die Verschwindungspunkte der

Fig. 317.



Seiten unzugänglich sind. In einem solchen Falle fällt immer der Verschwindungspunkt v der einen Diagonale cf innerhalb der Zeichnungsfläche und kann demgemäss zur Bestimmung der vier Berührungspunkte des Kreises mit dem gegebenen Quadrate, so wie auch zur Verzeichnung der Perspektive eines zweiten Quadrates benützt werden, dessen Seiten gegen jene des ersteren unter einem Winkel von 45^0 geneigt sind.

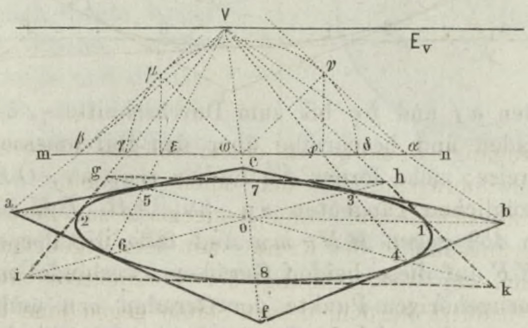
Um die Berührungspunkte 3, 4, 5 und 6 zu erhalten, sind blos die Seiten des gegebenen Quadrates perspektivisch zu halbiren. Zu diesem Zwecke ziehe man durch irgend einen Punkt der Geraden ov eine Gerade mn parallel zur Verschwindungslinie E_v der Kreisebene und verbinde den Punkt b mit v. Wird nun das auf mn abgeschnittene Stück $\omega\alpha$ in φ halbirt, $\omega\varphi$ nach $\omega\gamma$ übertragen, und werden die Punkte γ und φ mit v vereint, so schneiden diese Geraden die Seiten des Quadrates in den vier Halbirungspunkten *3*, *4*, *5* und *6*. Diese Punkte geben mit o verbunden die Diagonalen des zu suchenden zweiten Quadrates.

Um jene Punkte *1* und *2* zu finden, in welchen der Kreis die Diagonale ab schneidet, hat man diese Gerade in dem bekannten Verhältnisse $1 : \sqrt{2} - 1$ zu theilen. In demselben Verhältnisse wird demnach auch die Länge $\omega\alpha$ zu theilen sein, was einfach dadurch bewerkstelligt werden kann, dass man über $\omega\alpha$, als Radius, einen Kreisbogen $\alpha\delta$ von 45^0 beschreibt und den Endpunkt δ desselben senkrecht auf mn nach β projecirt.

Es ist sodann blos $\omega\beta$ nach $\omega\varepsilon$ zu übertragen und sind die Punkte ε und β mit v zu verbinden, um im Durchschnitte dieser Geraden mit den eben gefundenen Diagonalen die vier Eckpunkte des zweiten Quadrates $ghik$, dessen Seiten die Kreisperspektive berühren und die Diagonalen ab und cf in den vier Punkten *1*, *2*, *7* und *8* des Bildes schneiden, zu erhalten.

Eine zweite Lösungsweise wäre jene, wo man über der Länge $\omega\alpha$ keinen Kreis beschreibt, sondern durch den Punkt α eine Gerade $\alpha\nu$ (Fig. 318) unter einem Winkel von 45^0 gegen mn zieht und $\omega\nu$ senkrecht auf $\alpha\nu$ errichtet. Wird nun aus ω mit

Fig. 318.



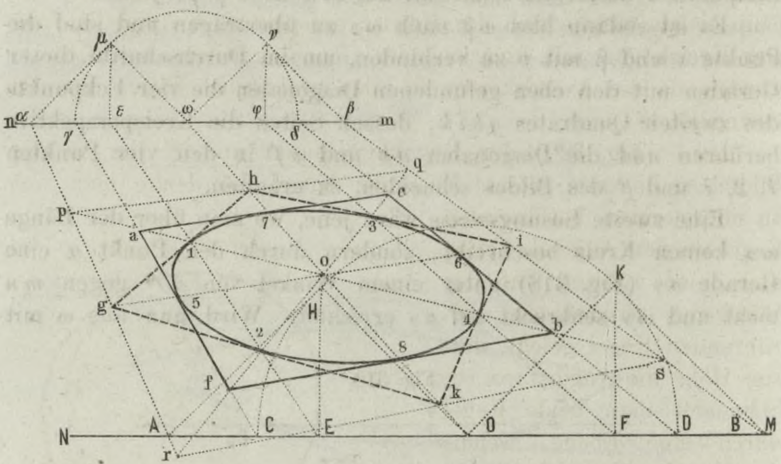
dem Radius $\omega\nu$ ein Kreis beschrieben, so schneidet er die Gerade mn in den Punkten δ und γ, welche sammt den Punkten φ und ε, die durch die Senkrechten $\nu\varphi$, $\mu\varepsilon$ ($\omega\varphi = \omega\varepsilon$) erhalten werden, in derselben Weise wie im vorigen Beispiele zu benützen sind, um die Punkte *1* bis *8* der Kreisperspektive, so wie das

Bild des zweiten dem Kreise umschriebenen Quadrates *ghik* zu erhalten.

2. Ist die Perspektive *abcd* (Fig. 319) eines dem Kreise umschriebenen Quadrates gegeben, und hat die Kreisebene eine solche Lage, dass deren Verschwindungslinie ausser die Zeichnungsfläche fällt, so kann selbstverständlich der Verschwindungspunkt *v* der Diagonale *cf* nicht benützt werden, daher folgendes Verfahren eingeschlagen werden muss.

Man ziehe zwei Gerade *mn* und *MN* parallel zur Verschwindungslinie der Kreisebene, verlängere zwei gegenüberliegende

Fig. 319.



Quadratseiten *af* und *bc* bis zum Durchschnitte γ, δ, *C*, *D* mit diesen Geraden und beschreibe über den Durchmessern $\gamma\delta$ und *CD* Halbkreise; ziehe ferner die Radien $\omega\mu$, $\omega\nu$, *OH*, *OK*, so wie die bezüglichen Tangenten $\alpha\mu$, $\beta\nu$, *AH*, *BK* unter einem Winkel von 45^0 gegen *MN*, *mn* und fälle die Perpendikel $\mu\varepsilon$, $\nu\varphi$, *HE*, *KF* auf diese beiden Geraden. Verbindet man sodann die zusammengehörigen Punkte der Geraden *mn* und *MN* miteinander, so ergeben sich im Durchschnitte der Geraden εE, φF mit den Diagonalen *ab*, *cf* des gegebenen Quadrates die Berührungspunkte *1*, *2*, *3*, *4* des zweiten Quadrates mit der Kreisperspektive und im Durchschnitte der Geraden $O\omega$ mit den Seiten *ac* und *bf* die Berührungspunkte *7* und *8* dieser beiden Seiten mit dem Kreise. Endlich begegnen die Linien $A\alpha$, $B\beta$

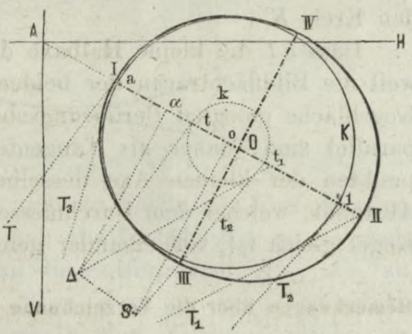
den obigen Diagonalen in den Endpunkten p, q, r, s eines Quadrates, dessen Seiten pq und rs die Gerade ωO in den Eckpunkten h und k des zu suchenden zweiten Quadrates treffen Es ist mithin blos h mit *1* und *3*, k mit *2* und *4* zu verbinden, um das Bild dieses Quadrates zu erhalten, dessen zweite Diagonale gi die Seiten af und bc des ersten Quadrates in den Berührungspunkten *5* und *6* schneidet.

Kugelperspektive.

Der Umriss der Kugel wird zumeist nach der im §. 127, a) angegebenen Methode gesucht, jedoch können sehr einfach die senkrechten Axen desselben gefunden und über denselben die Ellipse, als welche sich der Umriss perspektivisch darstellt, aus vier Kreisbögen mit hinreichender Genauigkeit zusammengesetzt werden, da die Axendifferenz in allen praktischen Fällen äusserst gering ist.*)

Ist o (Fig. 320) der Kugelmittelpunkt und K der in der Bildfläche liegende grösste Kreis der Kugel, so denke man sich an diese einen berührenden Kegel aus dem Auge als Spitze und einen zweiten auf der Bildfläche senkrechten, berührenden Kegel gelegt, dessen Höhe die Augdistanz ist. Schneidet man beide Kegel durch eine Ebene, welche durch das Auge und die Gerade Ao geht und legt dieselbe um Ao in die Bildfläche, so gelangt das Auge in die im Punkte A auf Ao gefällte Senkrechte, während die Spitze des zweiten Kegels in die im Punkte o auf Ao errichtete Senkrechte So fällt. Die aus den beiden umgelegten Kegelspitzen an den Kreis K gezogenen Tangenten T, T_1, T_2, T_3 schneiden auf Ao Längenstücke gleich den

Fig. 320.



*) Die nachfolgende Bestimmungsweise der senkrechten Axen der Kugelperspektive wurde auch in der Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins veröffentlicht. (Siehe XVIII. Jahrgang, S. 199, E. Koutny „Kugelperspektive".)

beiden zu suchenden Axen ab, und zwar wird die grosse Axe durch die aus dem umgelegten Auge gezogenen Tangenten in den Punkten I und II begränzt, während das durch die beiden andern Tangenten begränzte Stück der Geraden $A\,o$, als kleine Axe, auf die im Halbirungspunkte O der Länge $I\,II$ errichtete Senkrechte zu übertragen ist, woselbst mithin $O\,III = O\,IV = o\,1$ wird.

Fallen die umgelegten Spitzen, wie dies zumeist der Fall ist, ausser die Zeichnungsfläche, so wird man ebenso einfach mit Benützung von aliquoten Theilen der Augdistanz zum Ziele gelangen. Kann man z. B. blos den dritten Theil der Augdistanz in Anwendung bringen, so theile man $A\,o$ in drei gleiche Theile, so dass $o\,\alpha = \frac{1}{3} A\,o$ wird, errichte in α und o die Senkrechten $\alpha\,\Delta$ und $o\,S$ auf $A\,o$ und trage auf denselben die Längenstücke $\alpha\,\Delta = o\,S$ gleich dem dritten Theile der Augdistanz auf; beschreibe ferner aus o den Kreis k mit Ein Drittel des Halbmessers vom Kreise K als Radius, führe aus den Punkten Δ und S die Tangenten $\Delta\,t$, $\Delta\,t_1$, $S\,t_2$ an den Kreis k und ziehe schliesslich die fraglichen Tangenten T, T_1, T_2 parallel zu letzteren an den Kreis K.

Dass $o\,1$ die kleine Halbaxe des Umrisses ist, folgt daraus, weil die Bildflächtracen der beiden, aus dem Auge an die zweite Kegelfläche gelegten Berührungsebenen zu einander und zu $A\,o$ parallel sind, daher als Tangenten an den Umriss, den Endpunkten der kleinen Axe desselben entsprechen und in einem Abstande, welcher dem Durchmesser des Basiskreises vom zweiten Kegel gleich ist, von einander gelegen sind.

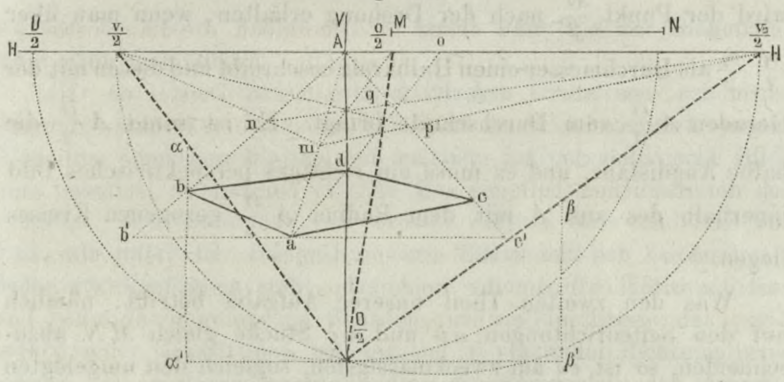
Bemerkungen über die Verzeichnung des perspektivischen Grundrisses.

Die Objekte stehen entweder mit einer Seitenfläche parallel und mit der andern senkrecht zur Bildfläche (frontal), oder die auf einander senkrecht stehenden Seitenflächen sind gegen die Bildebene unter 45^0 geneigt, oder endlich schliessen die Seitenflächen verschiedene Winkel mit der Bildebene ein. Im ersten Falle hat man horizontale, zur Bildfläche parallele Gerade und im Augpunkte verschwindende Linien zu verzeichnen; im zweiten Falle verschwinden die horizontalen Kanten in den Distanzpunkten und man erhält die sogenannte „Ansicht über's Eck“; im dritten Falle endlich sind vorerst die Verschwindungspunkte auszumitteln. Letztere fallen jedoch gewöhnlich über die Zeichnungsgränze hinaus, daher man sich mit aliquoten Theilen ihrer Entfernung vom Augpunkte behelfen muss. Das einfachste Verfahren, welches in einem solchen Falle angewendet werden kann, ist folgendes.

Es seien z. B. ab und ac (Fig. 321) die Perspektiven zweier in a sich schneidender Geraden, welche in einer horizontalen Ebene liegen und einen rechten Winkel einschliessen; man soll die diesen beiden Geraden entsprechende Augdistanz auffinden und mit MN, als Seitenlänge, über der Ecke a ein Quadrat verzeichnen.

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass die Verschwindungspunkte v_1 und v_2 dieser beiden Geraden ausser die Zeich-

Fig. 321.



nungsgränze fallen. Um daher aliquote Theile der Entfernungen Av_1, Av_2 zu erhalten, theile man die Gerade Aa geometrisch in so viel gleiche Theile, als man die Entfernungen Av_1, Av_2 zu theilen sich veranlasst sieht, d. h. so, dass der erste Theilpunkt dieser Entfernungen noch innerhalb der Zeichnungsfläche zu liegen kömmt.

Hier wurde die Construktion mit den halben Entfernungen durchgeführt; man hat also aA im Punkte m zu halbiren und durch m die Parallelen zu ac und ab zu führen, um im Durchschnitte derselben mit der Horizontslinie die Halbirungspunkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ der Längen Av_1, Av_2 zu erhalten.

Behufs der Auffindung der Augdistanz denke man sich durch v_1 und v_2 die zugehörigen Parallelstrahlen geführt, welche sich im Gesichtspunkte schneiden und einen rechten Winkel einschliessen; es werden demnach auch die durch $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ zu den entsprechenden Parallelstrahlen gezogenen parallelen Geraden einen rechten Winkel bilden, sich jedoch in einem Punkte der aus dem Auge auf die Bildfläche gefällten Senkrechten schneiden, welcher von der Bildebene um die halbe Augdistanz absteht. Legt man die Horizontsebene sammt den eben genannten Linien in die Bildfläche um, so wird dieser Durchschnittspunkt $\frac{O}{2}$ im Perpendikel $A\frac{O}{2}$ liegen, während die Punkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ als in der Drehungsaxe befindlich, ungeändert bleiben. Da die umgelegten Geraden $\frac{v_1}{2}\frac{O}{2}$, $\frac{v_2}{2}\frac{O}{2}$ einen rechten Winkel einschliessen, so wird der Punkt $\frac{O}{2}$ nach der Drehung erhalten, wenn man über $\frac{v_1}{2}\frac{v_2}{2}$ als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt und diesen mit der Geraden $A\frac{O}{2}$ zum Durchschnitt bringt. Es ist somit $A\frac{O}{2}$ die halbe Augdistanz, und es muss ein richtiges perspektivisches Bild innerhalb des aus A mit dem Radius $A\frac{O}{2}$ gezogenen Kreises liegen.

Was den zweiten Theil unserer Aufgabe betrifft, nämlich auf den Seitenrichtungen ab und ac Stücke gleich MN abzuschneiden, so ist es am zweckmässigsten, sogleich den umgelegten rechten Winkel $\frac{v_1}{2}\frac{O}{2}\frac{v_2}{2}$ zu benützen. Vorausgesetzt, dass a in der Bildfläche liegt, mache man $\frac{O}{2}\alpha = \frac{O}{2}\beta = MN$, bestimme die Projektionen dieser Längen auf der Horizontalen $\alpha'\beta'$ und übertrage diese Stücke $\frac{O}{2}\alpha'$, $\frac{O}{2}\beta'$ auf die durch a gezogene Horizontallinie nach ab', ac' und ziehe schliesslich die bildfläch-projecirenden Geraden $b'A$, $c'A$, welche auf den Perspektiven der gegebenen Geraden die bestimmte Länge abschneiden. In vielen Fällen lässt sich auch der Theilungspunkt, oder ein aliquoter Theil seines Abstandes vom Augpunkte mit Vortheil benützen. Auch ist zu empfehlen, den Verschwindungspunkt o der Diagonale aufzusuchen, welcher sich bekanntlich einfach ergibt, wenn man den rechten Winkel bei $\frac{O}{2}$ halbirt, die Halbirungslinie mit der Horizontslinie zum Durchschnitt bringt und $A\,o = 2\,.\,A\,\frac{o}{2}$ macht.

Hat man endlich aus irgend einem Punkte gegen die Verschwindungspunkte v_1, v_2 Linien zu ziehen, so sind hiezu die Punkte $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ oder allgemein $\frac{v_1}{n}$, $\frac{v_2}{n}$ derart zu benützen, dass man den gegebenen Punkt mit dem Augpunkte verbindet, diese Linie in 2 oder allgemein in n gleiche Theile theilt, den dem Augpunkte A nächsten Theilpunkt mit $\frac{v_1}{n}$ und $\frac{v_2}{n}$ vereint und aus dem gegebenen Punkte zu letzteren Geraden die geometrisch Parallelen zieht. Zur Verzeichnung des Quadrates wird man also durch b und c zu den Geraden $n\frac{v_2}{2}$, resp. $p\frac{v_1}{2}$ die Parallelen $b\,d$ und $c\,d$ ziehen, welche sich in einem Punkte d der Diagonale $a\,d\,o$ schneiden müssen.

Für die Construktion perspektivischer Grundrisse sei noch folgendes bemerkt: In vielen Fällen ist es wünschenswerth, jenen Theil des Zeichnungsblattes, auf welchem das perspektivische Bild sich befindet, so viel als möglich frei von Construktionslinien zu erhalten. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man für den Fall, als unter der Bildgränze noch Raum auf der Zeichnungsfläche zur Verfügung steht, das Auge sammt der Horizontslinie und allen darin gelegenen Punkten, so wie die Ebene des perspektivischen Grundrisses, beliebig tief in vertikaler Richtung verschiebt und in dieser neuen Stellung die Perspektive des Grundrisses verzeichnet. Es ist einleuchtend, dass sich dabei die gegenseitigen Verhältnisse der Grundrisse nicht ändern, und dass demnach auch die Vertikallinien, die in den einzelnen Punkten des Grundrisses zu errichten sind, dieselben bleiben, da die Verschiebung in vertikaler Richtung vorgenommen wurde.

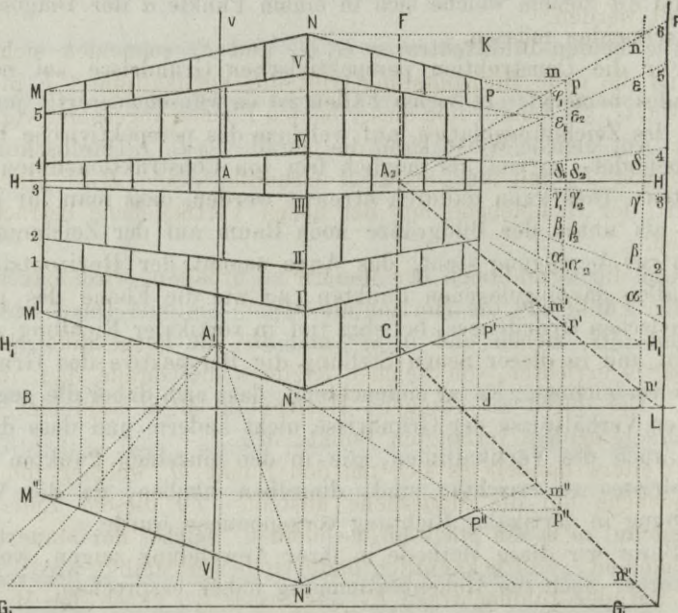
Bevor wir diese Methode in ihrer Anwendung zeigen, wollen wir vorher noch die Höhenbestimmung näher besprechen.

Höhenbestimmung einzelner Punkte.

Hat man die Perspektive des Grundrisses gefunden, so sind zur Auffindung der einzelnen Punkte des Bildes blos auf den Perpendikeln die gegebenen Entfernungen von der Grundebene auf bekannte Weise perspektivisch abzuschneiden. Aus gleichem Grunde jedoch, um nämlich auf der Fläche des Bildes nicht zu viel Construktionslinien zu erhalten, kann man die Höhenbestimmung sämmtlicher vertikalen Linien in einer einzigen Vertikalebene vornehmen, welche man wieder sammt dem Auge parallel zu sich selbst in horizontaler Richtung so weit fortgeschoben denkt, bis der Augpunkt an die Gränze der Bildfläche, oder wenigstens nahe an dieselbe zu liegen kömmt. Da in der so erhaltenen Ebene die Höhenbestimmung ausserhalb der Fläche des Bildes vorgenommen wird, so ist der Zweck erreicht, und es werden die zu suchenden Punkte selbst in den durch die eben bestimmten Höhenpunkte gezogenen Horizontallinien erhalten.

Es sei also z. B. BJK (Fig. 322) die Gränze der Fläche des Bildes und auf der Zeichnungsfläche nach unten und rechts ein

Fig. 322.



freier Raum benützbar. BJ sei zugleich die Bildflächtrace der Grundebene, worauf eine durch Seitenmauern begränzte rechteckige Fläche sich vorfindet; A sei der Augpunkt.

Denken wir uns die Grundebene oder eine andere Horizontalebene sammt dem Auge so lange vertikal nach abwärts bewegt, bis der Augpunkt nach A_1 gelangt, so wird $A_1 H_1$ die neue Horizontallinie sein, während die Bildflächtrace $G_1\,G_1$ der neuen Horizontalebene, je nach Massgabe des unten zu Gebote stehenden Raumes, mehr oder weniger tief unter $A_1\,H_1$ angenommen werden kann. Selbstverständlich werden alle in der früheren Horizontslinie sich befindlichen Verschwindungs-, Theilungspunkte etc., so wie die Distanzpunkte vertikal in die neue Horizontslinie herab versetzt werden müssen. In der so fixirten Grundebene construire man nun den Grundriss $M''\,N''\,P''$ der im Bilde sichtbaren Mauerfronten.

Auf gleiche Weise denke man sich eine beliebige vertikale, auf der Bildfläche senkrechte Ebene, gleichsam als vertikale Projectionsebene für die gleichnamigen Kanten, in horizontaler Richtung sammt dem Auge beliebig weit nach rechts versetzt, so dass z. B. die Vertikallinie $V\,V$ nach $C\,F$ und der Augpunkt nach A_2 gelangt. Die Bildflächtrace F_b dieser Vertikalebene kann beliebig gewählt werden.

Die beiden Bildflächtracen $G_1\,G_1$ und F_b schneiden sich in G_1 und die neue Horizontslinie trifft die Vertikallinie $C\,F$ in C; mithin $C\,G_1$ als Schnittlinie dieser beiden Ebenen angesehen werden kann. Auf gleiche Weise kann die Gerade $A_2\,L$ (L Durchschnittspunkt von F_b mit der früheren Grundflächtrace $B\,J$) als der Schnitt der Grundebene mit der neuen Vertikalebene betrachtet werden.

Um die Grundlinien der Mauern zu erhalten, wird man z. B. für den Punkt M'' die Horizontale $M''\,m''$ bis zum Durchschnitte m'' mit $C\,G_1$ ziehen und in m'' und M'' die Perpendikel $M''\,M$ und $m''\,m$ errichten, von welchen letzteres die Gerade $A_2\,L$ in m' trifft. Die durch m' gezogene Horizontale $M'\,m'$ schneidet sich mit $M''\,M$ in dem verlangten Punkte M'.

Weiters handelt es sich um den Punkt M, welcher von der Grundebene um die Mauerhöhe absteht. Zu diesem Ende ist vorerst auf $m'\,m$ ein Stück abzuschneiden, welches der Mauerhöhe gleichkömmt, was bekanntlich dadurch bewerkstelligt wird, dass man auf der Bildflächtrace F_b das Stück $L\,6$ gleich der Mauerhöhe aufträgt und 6 mit A_2 verbindet, wodurch in der Geraden $m''\,m'$ der Punkt m erhalten wird, durch welchen die Horizontale $M\,m$ gezogen, die Gerade $M''\,M'$ in dem fraglichen Punkte schneidet.

Auf gleiche Weise kann die Mauerkante $N'\,N$ so wie jede andere Kante bestimmt werden, woraus ersichtlich ist, dass die Gerade $6\,A_2$ die Höhenpunkte aller gleich hohen Mauerkanten bestimmt.

Hat man derart die Gränzkanten der Mauer gefunden, und soll daselbst noch ein Steinschnitt z. B. von abwechselnd höhern und niedern Quadern angebracht werden, so sind blos die einzelnen Quaderhöhen von L gegen 6 nach den Punkten *1*, *2*, *3* . . . aufzutragen und diese Theilpunkte mit dem Augpunkte A_2 zu verbinden. Diese Linien werden auf den Vertikalprojektionen mm', nn', pp' der Kanten MM', NN', PP' jene Punkte α_1, β_1 . . ., α_2, β_2 . . . bestimmen, durch welche blos die Horizontallinien zu ziehen sind, um auf den obgenannten Kanten die Theilpunkte *1*, *2*, *3* . . ., *I*, *II*, *III* . . . zu erhalten.

Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, dass für gewisse Fälle die angeführte Methode mit Vortheil benützt werden kann, und dass insbesondere zur Bestimmung der Höhen verschiedener Punkte es gerathen erscheint, sich einer einzigen Vertikalebene zu bedienen.

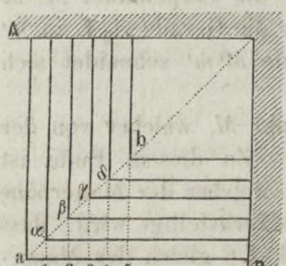
Darstellung verschiedener Objekte.

Stiegen.

Ein Fall, und zwar der einfachste, wurde bereits in der Schattenlehre (§. 163) durchgeführt.

Nehmen wir an, es wären zwei Mauern A und B (Fig. 323) beziehungsweise parallel und senkrecht zur Bildebene, und es lehne sich an dieselben eine Stiege, welche zu beiden Seiten einen Aufgang gestattet, wie dies aus dem Grundrisse ersichtlich ist.

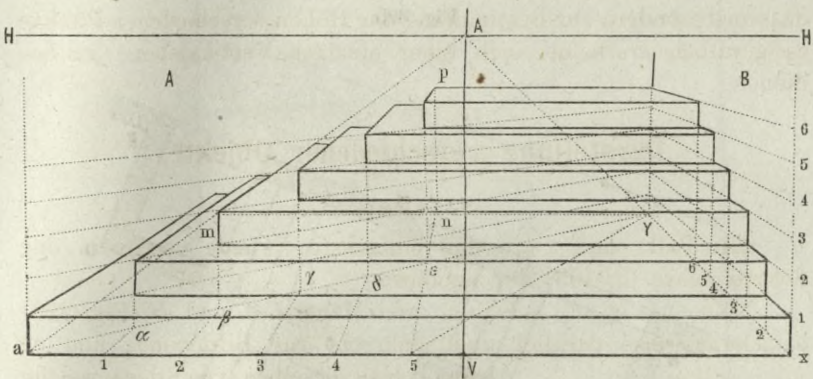
Fig. 323.



Das Profil in der Mauerfläche B (Fig. 324) wird auf bekannte Art (siehe §. 163) und wie aus der Figur ersichtlich, gefunden. Es werden nun noch die Bilder der vertikalen Kanten der Stufen (in der freien Ecke derselben) zu bestimmen sein. Betrachten wir den Grundriss (Fig. 323), so ist ersichtlich, dass sich die horizontalen Projektionen α, β, γ . . . dieser Kanten als die Eckpunkte der Diagonalen von Quadraten ergeben, welche die Stufenbreite zur Seite haben.

Trägt man also im Bilde auf ax (Fig. 324) die Stufenbreite entsprechend oft auf, zieht aus a eine unter 45^0 gegen die Bildfläche geneigte Gerade ay und verbindet diese Theilpunkte mit dem Augpunkte, so wird ay in den Fusspunkten α, β, γ.... dieser Kanten geschnitten. In diesen Punkten sind nun Vertikallinien zu errichten und von denselben blos jene der Stufenhöhe gleichen Stücke zu benützen, welche innerhalb je zweier, die Stufenhöhe begränzender, aus den Eckpunkten des Stiegenprofils der Mauer B gezogener Horizontallinien liegen. Aus den so erhaltenen Eckpunkten sind die Stufenkanten gegen den Augpunkt, und zwar bis zum Durchschnitte mit der Mauerfläche A fortzusetzen. In jener Mauerfläche A wird schliesslich das Profil zu verzeichnen sein,

Fig. 324.



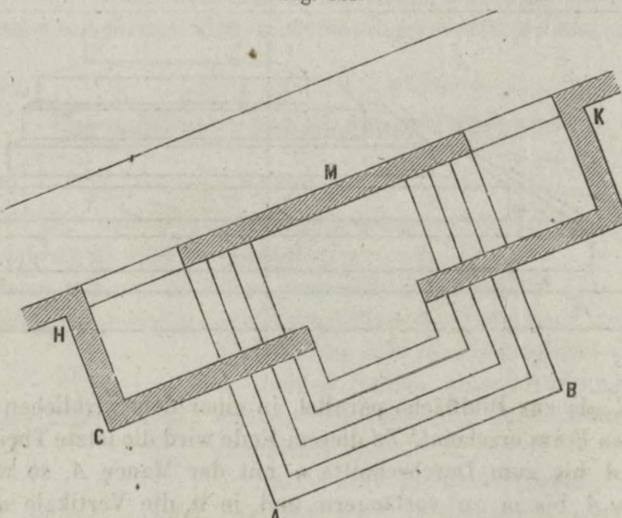
welches, als zur Bildfläche parallel, in einer dem wirklichen Profil ähnlichen Form erscheint. Zu diesem Ende wird die letzte Theilungslinie $5A$ bis zum Durchschnitte n mit der Mauer A, so wie die Kante aA bis m zu verlängern und in n die Vertikale np bis zum Durchschnitte p mit der der höchsten Platte angehörigen Gränzkante zu ziehen sein, wo dann blos über mn als Breite und np als Höhe das ähnliche Profil zu verzeichnen ist. Die so erhaltenen Kanten desselben werden jedoch nur theilweise sichtbar erscheinen.

Das Abschneiden der Stufenhöhen auf den in α, β, γ.... errichteten Vertikallinien kann auch, ohne das Profil der Mauer B zu benützen, derart geschehen, dass man in den beiden Punkten a und y Vertikallinien errichtet, auf beiden die Stufenhöhe entsprechend oft aufträgt und die gleich hoch gelegenen Punkte mit einander vereint.

Eine grössere Stiegenanlage wurde in Fig. 326 dargestellt. Der Grundriss dieser Anlage sei in Fig. 325 gegeben. Dieselbe soll gegen die Bildfläche schief gestellt erscheinen.

In erster Reihe ist es hier nothwendig, die Verschwindungspunkte der beiden Systeme von parallelen, und beziehungsweise auf einander senkrechten Geraden zu fixiren, um vermittelst derselben den perspektivischen Grundriss verzeichnen zu können. Es sei A der Augpunkt $\frac{B}{4}$ und $\frac{B_1}{4}$ die vierten Theile der Entfernungen der obgenannten Verschwindungspunkte von demselben und $\frac{B}{4}\, D_1\, \frac{B_1}{4}$ der umgelegte rechte Winkel. Mit Hilfe dessen ist die Perspektive

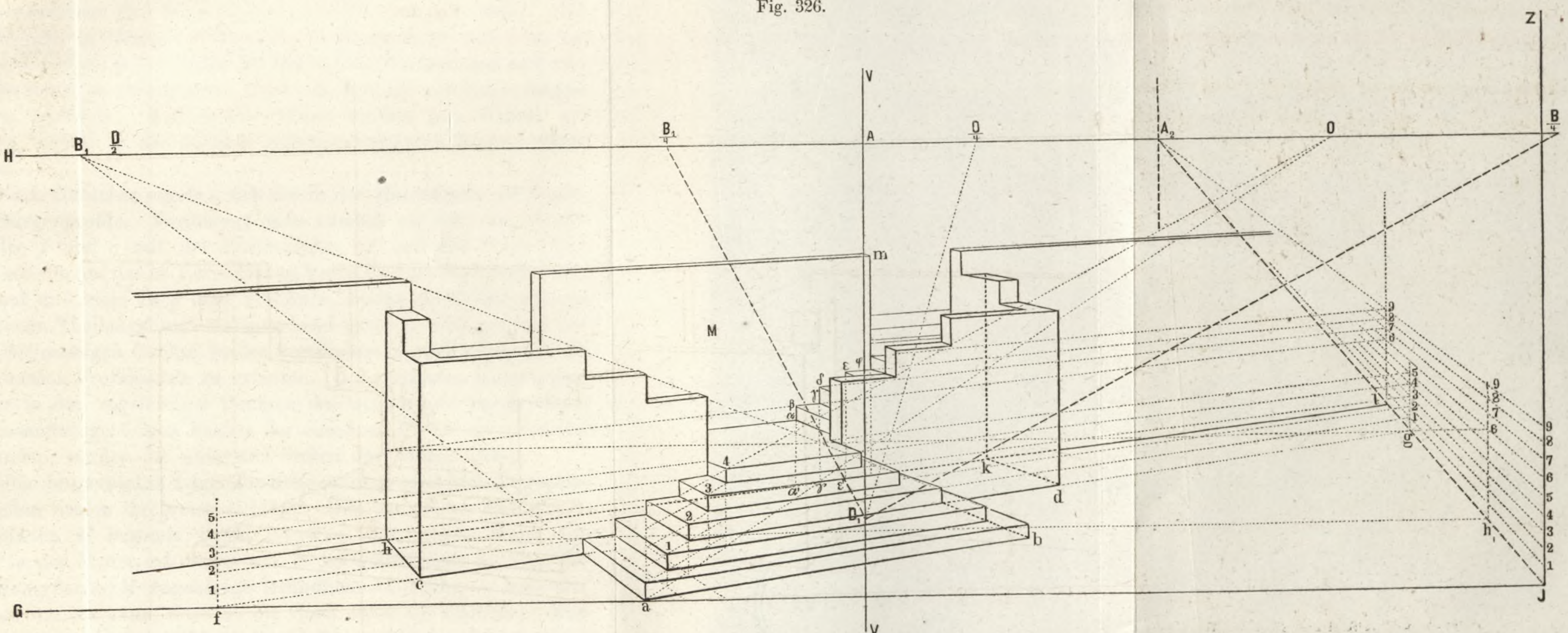
Fig. 325.



des Grundrisses oder wenigstens der wichtigsten Theile desselben aufzufinden. Hier wurde keine neue Grundfläche gewählt, sondern die Construction sogleich in der Ebene des Bodens durchgeführt.

In einem solchen Falle ist es zweckmässig, eine Vertikalebene behufs der Höhenbestimmung anzuwenden. Es wurde daselbst der Augpunkt nach A_2 versetzt und die Vertikale JZ als die Bildflächtrace der Vertikalebene, $A_2 J$ daher als deren Grundflächtrace angenommen. Auf HZ ist nun von H die Stufenhöhe entsprechend oft aufzutragen, und sind die Theilpunkte mit A_2 zu verbinden.

Fig. 326.



Die Construktion des Bildes besteht der Hauptsache nach in der Verzeichnung der einzelnen Profile.

Nachdem der Punkt a in der Bildfläche liegend vorausgesetzt wurde, so stellt sich die in diesem Punkte aufsteigende, vertikale Stufenkante in ihrer wahren Länge dar. Ist O der Verschwindungspunkt der Diagonale, so ist $a\,O$ jene Linie, in welcher sich die Projectionen der Stufenkanten $1 \ldots 4$ vorfinden müssen. Errichtet man in diesen Projektionen die Perpendikel und trägt auf die in a errichtete Vertikale die Stufenhöhe fünfmal auf und verbindet ferner die Theilpunkte mit O, so sind die vertikalen Stufenkanten bestimmt. Auf gleiche Weise werden jene Kanten gefunden, welche in der durch b gelegten vertikalen Diagonalebene liegen.

Noch einfacher ergeben sich die in der Mauerfläche $c\,d$ liegenden Stiegenprofile. Verlängert man nämlich $c\,d$ bis zum Durchschnitte f und g mit der Horizontalen $a\,f$ und der Trace $A_2\,J$, trägt sodann auf der in f errichteten Vertikalen die Stufenhöhe fünf Mal auf und zieht in g eine Vertikale, welche durch die anfangs gezogenen Theilungslinien entsprechend getheilt wird, so sind nur die gleichnamigen Punkte beider Vertikalen zu verbinden, um die horizontalen Profilkanten zu erhalten. Die vertikalen Kanten sind wieder in den zugehörigen Punkten des Grundrisses zu errichten. Die zusammengehörigen Punkte der einzelnen Profile entsprechend verbunden, werden die untersten Stufen der Anlage geben.

Von den zunächst folgenden Stiegenarmen sind blos die rechtsliegenden Stufen theilweise sichtbar. Man verzeichne also das in der Mauer M liegende Profil $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varphi$ auf gleiche Weise wie jenes in der Mauer $c\,d$, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass die der Mauerfläche M zugehörige Grundlinie $h\,k$ nicht so weit verlängert werden kann, dass sie die Horizontale $a\,f$ schneidet. Man nehme daher einen beliebigen Punkt h der Geraden $h\,k$ an, ziehe durch denselben die Horizontale $h\,h_1$ bis zum Durchschnitte h_1 mit der Trace $A_2\,J$ und errichte in h_1 ein Perpendikel, welches durch die Theilungslinien in den Punkten 6 bis 9 getroffen wird. Letztere Punkte sind nun horizontal auf die in h errichtete Vertikale zu übertragen, um diese entsprechend zu theilen. Die Gerade $h\,k$ schneidet verlängert $A_2\,J$ in l, daher die in l errichtete Vertikale ebenfalls in den Punkten 6 bis 9 getheilt erscheint. Je zwei gleichbenannte Theilpunkte verbunden, werden innerhalb der durch den Grundriss bestimmten Profilkanten $\alpha\,\alpha'$, $\gamma\,\gamma' \ldots$ die horizontalen Kanten des Profils geben. Aus den einzelnen Ecken des Letzteren sind die horizontalen Stufenkanten gegen den gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt B_1 derselben zu ziehen, oder es können dieselben, falls B_1 sich nicht innerhalb des zur Benützung stehenden Raumes vorfände und man keine weitern Hilfsconstruktionen anwenden wollte, mit Benützung des in der Mauerebene cd zu verzeichnenden Profils gefunden werden.

Hieraus ist ersichtlich, dass es sehr vortheilhaft sei, wenn einer der beiden Verschwindungspunkte, wie dies hier der Fall ist, noch auf die Papierfläche fällt.

Endlich sind noch rechts jene Stufen zu verzeichnen, welche in der Fortsetzung der Mauer M liegen. Zu diesem Zwecke schneide man auf der Geraden $m\varphi$ die Stufenhöhen ab, wobei die eine in dieser Geraden verbleibt, die andere jedoch um eine Stufenbreite zurückversetzt werden muss. Die horizontalen Stufenkanten sind gegen den Verschwindungspunkt B_2 zu ziehen.

Die Stiegenmauern wurden stufenförmig abgesetzt. Die perspektivische Darstellung derselben unterliegt keinen Schwierigkeiten. Die Höhe der Mauer über den Stufen kann beliebig gewählt werden, während die Mauerstärke, die hier gleich der Stufenbreite angenommen wurde, aus dem gegebenen Grundrisse zu entnehmen ist.

Aufgabe.

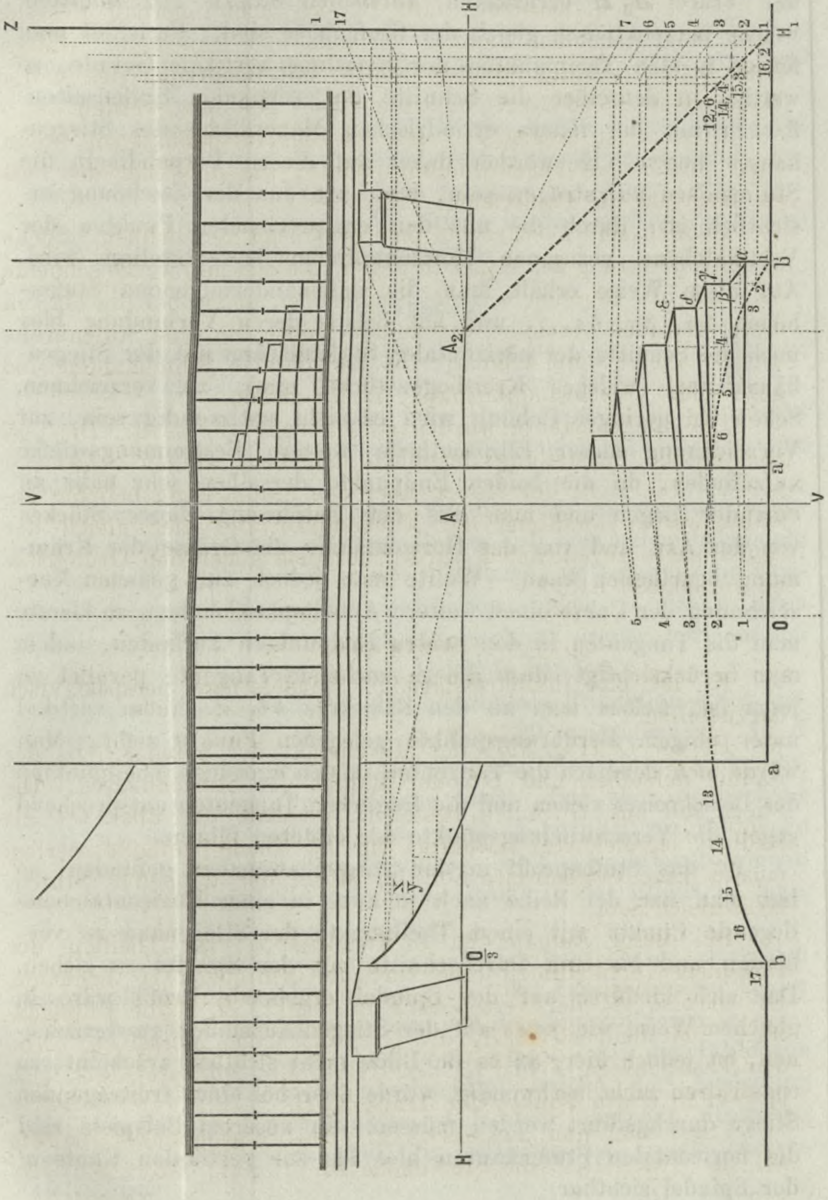
Es ist eine halbkreisförmige Spindelstiege perspektivisch darzustellen.

Es sei O (Fig. 327) der Mittelpunkt der Spindel, Oa der Radius derselben und Ob der Radius des Stiegenhauses. Die Stiege soll aus *17* Stufen bestehen, wesshalb der über Ob als Radius verzeichnete Halbkreis in *16* Theile getheilt werden muss. Eine Stufenbreite soll im Mittel der doppelten Stufenhöhe gleich sein.

Bei dieser Aufgabe ist es zweckmässig, zur Theilung der einzelnen Vertikallinien eine vertikale Hilfsebene zu benützen. Es sei also A_2 der verschobene Augpunkt, $H_1 Z$ die Bildflächtrace und demnach $A_2 H_1$ die Grundflächtrace derselben. Von den Theilpunkten *1* bis *16* des Halbkreises bb_1 projeciren sich je zwei in einem Punkte der Trace $A_2 H_1$.

Trägt man nun auf der Axe O des Stiegenhauses, so wie auf der Trace $H_1 Z$ die Stufenhöhe so oft auf, als Stufen vor-

Fig. 327.



handen sind und verbindet die so erhaltenen Theilpunkte der Trace $H_1 Z$ mit A_2, so werden auf den in den einzelnen Punkten der Trace $A_2 H$ errichteten Vertikalen Stücke abgeschnitten, welche perspektivisch gleich der Stufenhöhe sind. Errichtet man ferner in den Theilpunkten der Kreislinie vertikale Gerade, so werden in denselben die Schnitte der vertikalen Stufenseitenflächen mit der innern cylindrischen Mauerfläche des Stiegenhauses liegen. Es werden daher auf diesen Perpendikeln die Stufenhöhen aufzutragen sein, was, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, durch die aus den entsprechenden Punkten der Vertikalebene gezogenen Horizontallinien bewerkstelligt wird. Auf diese Weise erhält man die aufeinanderfolgenden Stufenhöhen 1α, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$.... und hat behufs deren Verbindung blos noch die Schnitte der horizontalen Stufenflächen mit der Stiegenhausmauer, welches Kreisbogenstücke sind, zu verzeichnen. Schon bei geringer Uebung wird es nicht nothwendig sein, zur Verzeichnung dieser Ellipsentheile weitere Bestimmungsstücke aufzufinden, da die beiden Endpunkte derselben sehr nahe an einander liegen und man aus der Entfernung dieses Stückes von der Axe und von der Horizontslinie die Grösse der Krümmung beurtheilen kann. Wollte man jedoch zur genauen Verzeichnung der Curve einen weitern Anhaltspunkt haben, so könnte man die Tangenten in den beiden Endpunkten auffinden, indem man berücksichtigt, dass die zu suchende Tangente parallel zu jener ist, welche man an den Basiskreis $b\,b_1$ in einem vertikal unter obigem Berührungspunkte gelegenen Punkte zieht. Man würde sich demnach die Tangenten in den einzelnen Theilpunkten des Basiskreises ziehen und die fraglichen Tangenten entsprechend gegen die Verschwindungspunkte der ersteren führen.

Ist das Stufenprofil in der Stiegenhausmauer gefunden, so hat man nur der Reihe nach je zwei in einer Horizontalebene liegende Punkte mit einem Theilpunkte der Stiegenaxe zu verbinden und bis zum Durchschnitte mit der Spindel zu ziehen. Das sich hiedurch auf der Spindel ergebende Profil wäre in gleicher Weise wie jenes auf der Stiegenhausmauer zu verzeichnen, ist jedoch hier, da es im Bilde nicht sichtbar erscheint, zu construiren nicht nothwendig, würde aber bei einer freitragenden Stiege durchgeführt werden müssen. In unserem Beispiele sind die horizontalen Stufenkanten blos bis zur vertikalen Kante a' der Spindel sichtbar.

Auf der andern Seite der Spindel sieht man unter die Stiege; es wird sonach blos eine Schraubenlinie als Schnitt der untern windschiefen Stiegenfläche mit der Stiegenhausmauer zu verzeichnen sein. Einzelne Punkte dieser Curve sind leicht gefunden, wenn man unter jede Stufenhöhe, z. B. xy, ein Stück von beiläufig zwei Zollen aufträgt.

Die letzte Stufenhöhe kömmt in die Kante b zu liegen. In dieser Höhe wurde eine Platte, auf Tragsteinen ruhend, gezeichnet, welche den Gang bilden soll und mit einem Gitter versehen ist. Die Fortsetzung der Stiege in das nächste Stockwerk wird ganz auf dieselbe Weise erhalten.

Gesimse.

Bei der perspektivischen Darstellung der Gesimse handelt es sich eigentlich blos um die Darstellung jener Gränze oder Ecke, Gesimsgrath genannt, welche im Durchschnitt der einzelnen Flächen der an den Hauptmauern umlaufenden gleichen Gesimse entsteht.

Zumeist haben die beiden Mauern eine aufeinander senkrechte Stellung, daher wir auch diesen Fall hier näher behandeln wollen. Wo dies jedoch nicht vorkömmt, unterliegen die Construktionen auch keinen Schwierigkeiten, indem es sich in allen Fällen eigentlich blos um den Durchschnitt zweier horizontalen Prismen von bekannter gleicher Leitlinie handelt.

Es sei also in Fig. 328 die horizontale Projektion eines Gesimses, dessen Profil $abc \ldots k$ in Fig. 329 angegeben ist. In K sei eine Ecke, von welcher aus die eine Mauerfront senkrecht, die andere parallel zur Bildfläche läuft. Das eben angegebene Profil sei der Durchschnitt einer durch K parallel zur Bildfläche gelegten Ebene E mit dem Gesimse. Die Constructionen können wir so durchführen, als wenn jenes Profil in der Bildfläche läge, E also die Bildebene selbst wäre.

Aus der Betrachtung des Grundrisses geht hervor, dass sich die fraglichen Eckpunkte a_1, c_1, $e_1 \ldots$ des Durchschnittes beider Gesimsfronten ergeben, wenn man von den Endpunkten a, c, $e \ldots$ des Profils E die Senkrechten aa_1, $cc_1 \ldots$ auf die Bildebene zieht und darauf Stücke abschneidet, welche der Ausladung des betreffenden Gesimspunktes, d. h. dem Abstande desselben von der Mauer, gleich sind, da offenbar $aa_1 = ak$, $cc_1 = ck \ldots$ ist.

Hiedurch ist auch die Construktion der Perspektive eines solchen Gesimses bereits gegeben. Ist somit $abc\ldots.k$ (Fig. 329) das in der Bildfläche angenommene Profil E, so hat man die einzelnen Eckpunkte desselben mit dem Augpunkte A zu verbinden und auf diesen Linien, nach vorn zu, perspektivisch Längenstücke abzuschneiden, welche den Entfernungen der betreffenden Punkte von der Kante KK gleich sind. Es ist also $aI = a\alpha$, $bII = b\beta\ldots.$ zu machen.

Die krummen Gesimsglieder werden in gleicher Weise behandelt, indem man ihren Durchschnitt punktweise bestimmt, wie dies auch in der Fig. 329 bei den Punkten m und n durchgeführt ist. Es wurde durchgehends mit ein Drittel Distanz gearbeitet, daher die Abstände $a\alpha$, $b\beta\ldots.$ in drei gleiche Theile getheilt erscheinen.

Mit Benützung des perspektivischen Grundrisses und einer Höhenebene lässt sich dieselbe Aufgabe auch auf folgende Art lösen:

Es sei wieder eine parallele und eine senkrecht zur Bildfläche stehende Mauerfront gegeben, welch' letztere mit einem Risalit versehen ist. Wir werden daher an dieser Seite mehrere Gesimsgrathe darzustellen, also auch mehrere dem vorigen Beispiele gleiche Constructionen durchzuführen haben. In einem solchen zusammengesetzten Falle dürfte wohl die Anwendung der nachfolgenden Methode zweckmässig sein und zwar insbesondere dann, wenn beide Mauerflächen gegen die Bildebene geneigt sind.

Man verzeichne zunächst den perspektivischen Grundriss $abcdefgh$ (Fig. 330) der Hauptmauer und jenen $a_1 b_1 \ldots. g_1 h_1$ der äussersten Gesimskante. Dies kann in einer beliebigen oder in einer sammt dem Auge nach abwärts verschobenen Horizontalebene geschehen. Im vorliegenden Falle wurde der Augpunkt A für den Grundriss beibehalten; für die vertikale Höhenebene jedoch wurde der Augpunkt nach A_2 verlegt und F_b als deren Bildflächtrace angenommen.

Die Tracen bb_1, cc_1, $dd_1 \ldots. gg_1$ jener Vertikalebenen, in welchen die zu bestimmenden Gesimsgrathe liegen, sind gegen die Bildebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt, wie dies schon aus Fig. 328 ersichtlich ist. Die Bildfläche denken wir uns durch die Mauerfläche gh gelegt, mithin werden wir an F_b das gegebene Gesimsprofil $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen grösste Ausladung $\alpha\alpha' = g\alpha_1$ ist, in der wirklichen Gesimshöhe zu zeichnen haben.

Die einzelnen Gesimsglieder werden nun auf F_b und $\alpha\alpha'$ projezirt, wodurch man auf F_b die Höhen derselben und auf $\alpha\alpha'$ deren Entfernungen von der Hauptmauer in den Punkten α, γ'', δ'', φ''.... erhält.

Aus Fig. 328 erhellt, dass die Horizontaltrace der Diagonalprofilebene $a_1 K$ durch die horizontalen Projektionen der einzelnen Gesimskanten in gleichem Verhältnisse, wie die Gesimsausladung $a k$ getheilt wird. Dies werden wir in unserem Falle auf die einzelnen Horizontaltracen anzuwenden, und daher $g g_1$ perspektivisch in demselben Verhältnisse zu theilen haben, wie $\alpha\alpha'$ durch die einzelnen Vertikalpunkte getheilt wurde. Zu diesem Zwecke übertrage man diese Gerade sammt deren Theilpunkten von g nach α_1 und verbinde die letzteren mit dem Augpunkte, durch welche Geraden nicht nur $g g_1$, sondern auch alle ähnlich liegenden Profiltracen $f f_1$, $c c_1$, $b b_1$ in dem gegebenen Verhältnisse perspektivisch getheilt werden. Die zu suchenden Punkte des Gesimsgrathes werden sonach in den in diesen Punkten *1*, *2*, *3*.... errichteten Perpendikeln liegen.

Um die einzelnen Punkte selbst zu erhalten, hat man nur auf zwei in derselben Diagonalebene liegenden Vertikallinien die in der Trace F_b erhaltenen Theilpunkte $\alpha' \beta' \gamma'$.... entsprechend zu übertragen und je zwei gleich hoch liegende Punkte beider Vertikalen mit einander zu verbinden. Diese Geraden geben im Durchschnitte mit den zugehörigen Perpendikeln die zu suchenden Punkte des Grathes.

Für das Profil $g g_1$ wurde die Mauerkante g, auf welche, weil sie in der Bildebene liegt, die Theilpunkte nur horizontal nach α'_1, β'_1, γ'_1.... zu übertragen sind, und jene Vertikallinie G gewählt, welche sich als Durchschnitt der Diagonalebene $g g_1$ mit der Höhenebene F_b ergibt, und welche durch die Theilungslinien $A_2 \alpha'$, $A_2 \beta'$.... entsprechend getheilt wird. Die in den beiden Geraden G und g_1 erhaltenen Punkte geben, entsprechend mit einander verbunden, eine Reihe von horizontalen Geraden, welche die anfangs gezogenen Perpendikel in den zu suchenden Punkten *I*, *II*,.... des Grathes schneiden.

Zur Bestimmung der Diagonalprofile $b b_1$, $c c_1$ und $f f_1$ kann man das gleiche Verfahren anwenden. Es wird jedoch eine weitere Höhenbestimmung nicht nothwendig sein, da die bereits gefundenen Gesimskanten, welche durch die einzelnen Punkte des Grathes gegen den Augpunkt gezogen wurden, im Durchschnitte mit den in den Theilpunkten der betreffenden horizontalen Tracen errichteten Perpendikeln, die zu suchenden Eckpunkte der obbezeichneten Grathe geben.

Für die noch übrigen Grathe, deren horizontale Projektionen die Geraden $d d_1$ und $e e_1$ sind, gilt dasselbe Verfahren. Es wird nämlich vorerst die Eintheilung der Horizontaltracen $d d_1$ und $e e_1$ auf gleiche Art wie früher vorgenommen, jedoch ist zur Bestimmung der einzelnen Punkte keine weitere Construktion erforderlich, da sich dieselben im Durchschnitte der in den Theilpunkten der Tracen $d d_1$, $c c_1$ errichteten Vertikallinien mit den bezüglichen, durch die Eckpunkte der nächstliegenden Grathe gezogenen Gesimskanten ergeben.

Eine Controle für die Richtigkeit oder Genauigkeit der Arbeit kann jedoch eine unabhängige Höhenbestimmung für das eine oder das andere Diagonalprofil wünschenswerth erscheinen lassen.

Wie schon früher bemerkt, ist die eben behandelte Methode insbesondere dann mit Vortheil anzuwenden, wenn beide Mauerflächen einen beliebigen Winkel mit einander bilden, oder wenn sie wohl senkrecht auf einander stehen, jedoch gegen die Bildfläche geneigt sind. In jedem Falle wird die Construktion in derselben Weise durchzuführen sein, wie in der behandelten Aufgabe gezeigt wurde, nur ist zu berücksichtigen, ob sich die Verschwindungspunkte der horizontalen Projektionen der Gesimsgrathe noch auf der Zeichnungsfläche ergeben, weil dieselben sodann mit Vortheil benützt werden könnten.

Gewölbe.

Betreffs der perspektivischen Darstellung von Gewölben ist in Folge der bereits gegebenen Erläuterungen über die Darstellung und die gegenseitigen Beziehungen krummer Flächen (Abschnitt IV) nicht viel Neues mehr hinzuzufügen.

Für die Darstellung des Tonnengewölbes haben wir eine Cylinderfläche, für ein Kreuz- und Kappengewölbe zwei Cylinder nebst ihren Durchschnittslinien, wie in §. 152 durchgeführt wurde, für ein böhmisches Platzelgewölbe die vier Gurten, welche die Pfeiler verbinden u. s. w. zu verzeichnen.

Ist an einem Gewölbe der Fugenschnitt anzugeben, so geschieht dies in der Perspektive ebenso wie in der orthogonalen Projektion. Die Fugen, welche fast durchgehends gerade Linien oder Kreisbogenstücke sind, werden durch die Construktion be-

Fig. 329.

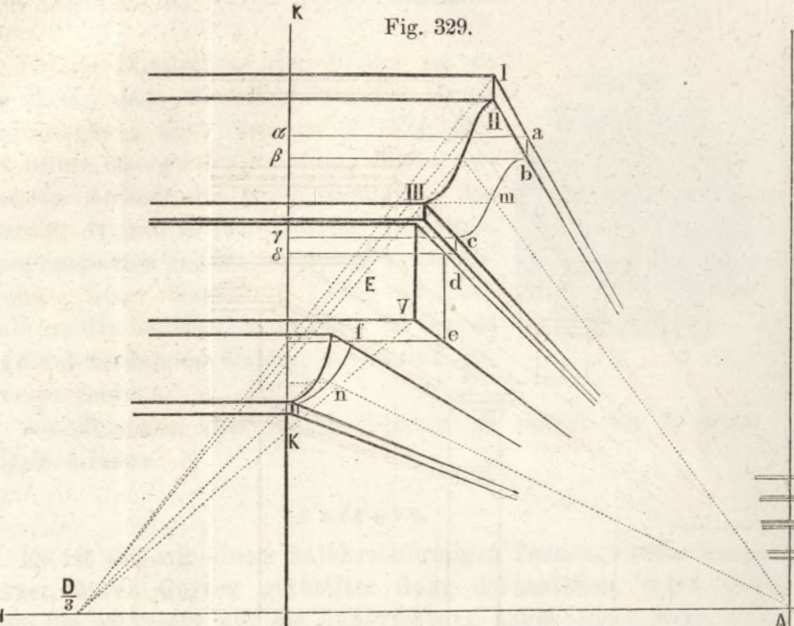


Fig. 328.

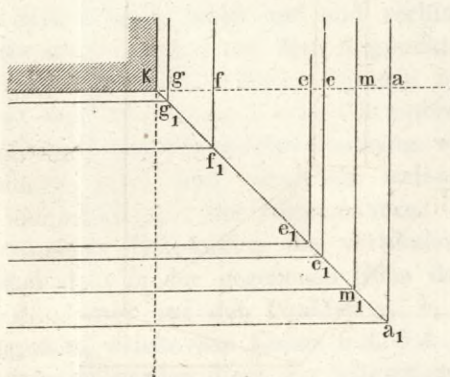
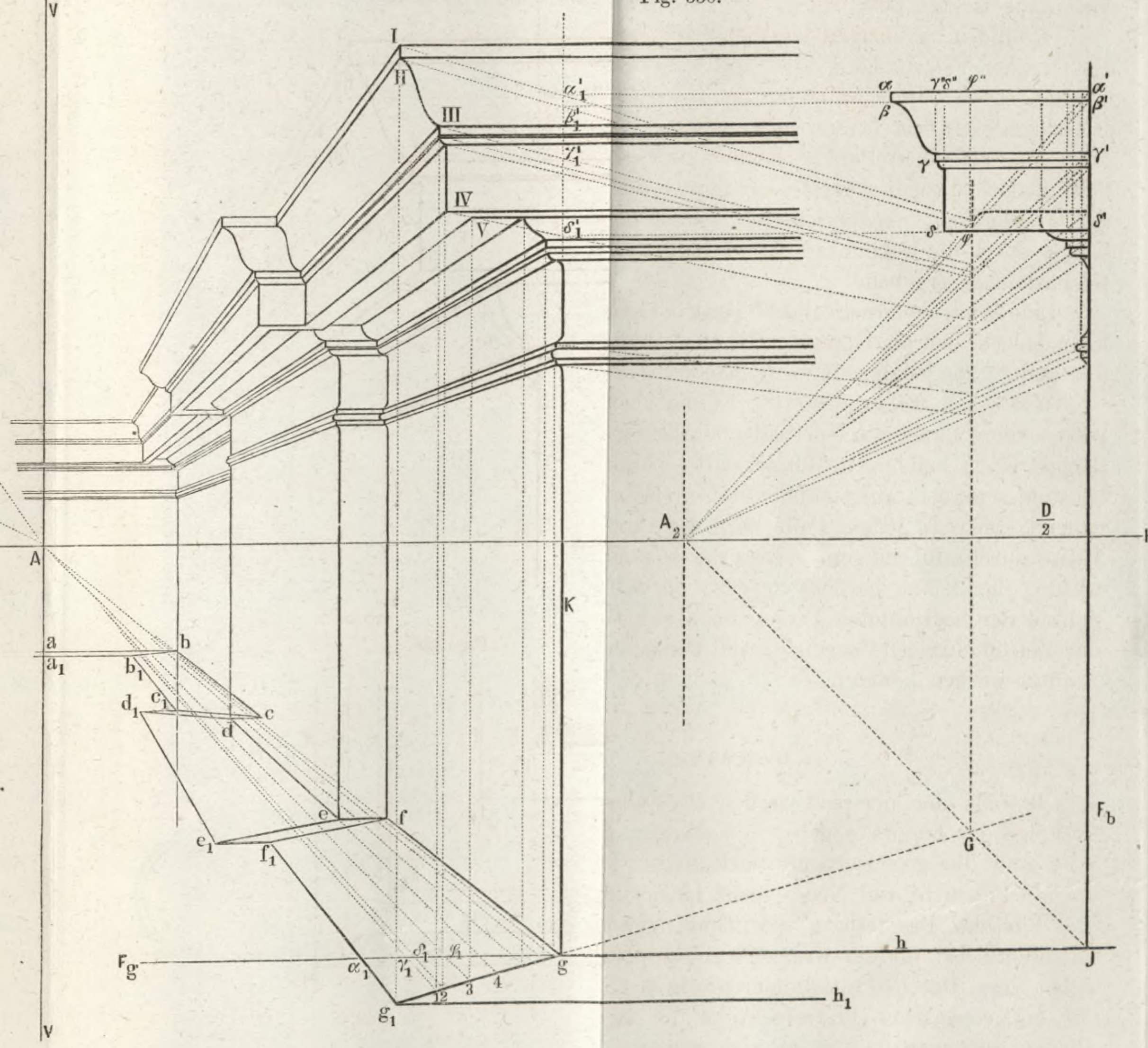


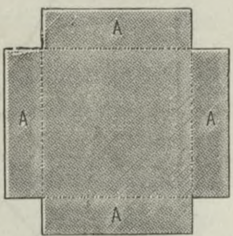
Fig. 330.



sagter Linien, die durch vorher bestimmte Punkte gehen, erhalten.

Behufs Darstellung der Pfeiler ist zu bemerken, dass dieselben zumeist einen quadratischen, mit Ansätzen A (Fig. 331) versehenen Querschnitt erhalten, welche Ansätze die Anläufe der hervortretenden, das Gewölbe begränzenden Gurten enthalten. Die sogenannten Schilde entstehen im Durchschnitte zweier Gewölbe. Ueber die Construktion der Durchdringungsfigur ist bereits in dem betreffenden Kapitel ausführlich gesprochen worden.

Fig. 331.



Als Beispiele über diesen Gegenstand wollen wir folgende Aufgaben lösen.

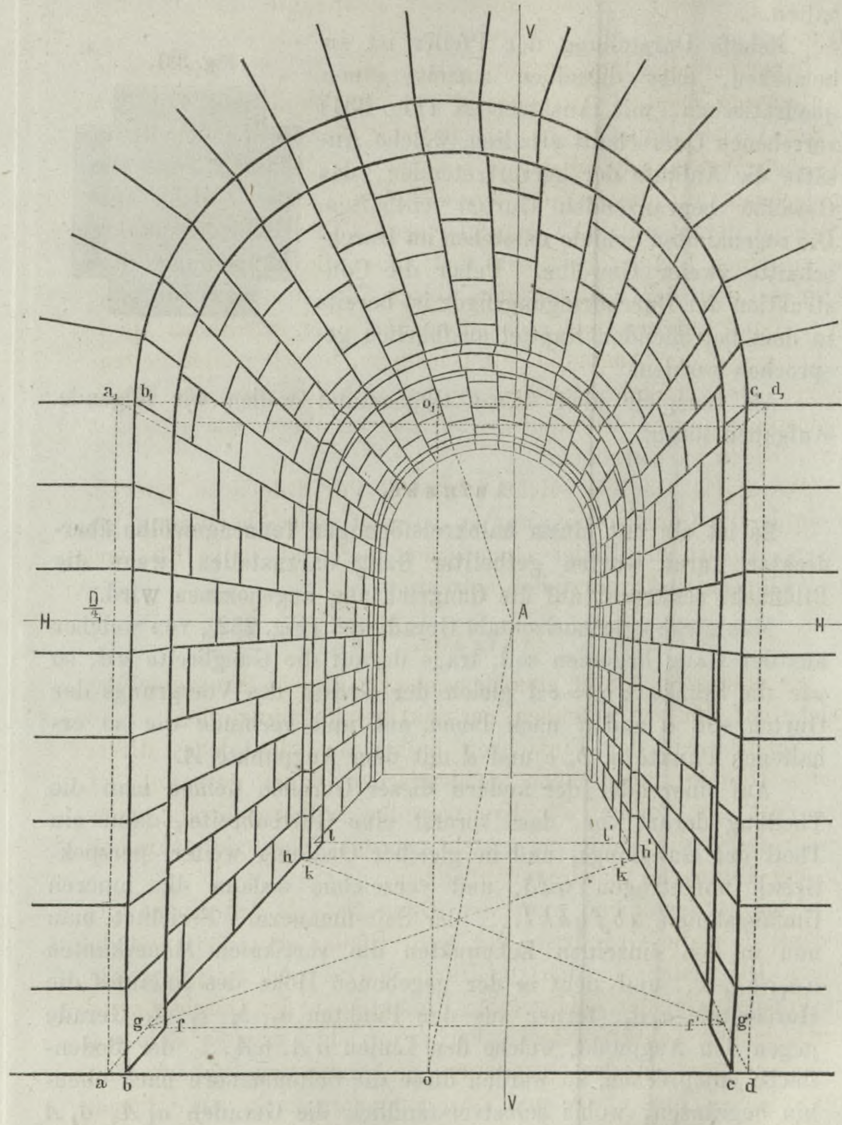
Aufgabe.

Es ist ein mit einem halbkreisförmigen Tonnengewölbe überdeckter, durch Gurten getheilter Gang darzustellen, wenn die Bildfläche senkrecht auf die Gangrichtung angenommen wird.

Man ziehe eine horizontale Gerade ad (Fig. 232), von welcher aus der Gang beginnen soll, trage darauf die Gangbreite ad, so wie die Stücke $ac = cd$ gleich der Grösse des Vorsprungs der Gurten von a und d nach innen auf und verbinde die so erhaltenen Punkte a, b, c und d mit dem Augpunkte A.

Auf einer oder der andern dieser Geraden nehme man die Theilung derart vor, dass vorerst eine Gurtenbreite, dann ein Theil der Ganglänge, und in gleicher Ordnung weiter, perspektivisch aufgetragen wird, und verzeichne sodann die inneren Umfangslinien $abfghkl\ldots.$ der Seitenmauern. Errichtet man nun in den einzelnen Eckpunkten die vertikalen Mauerkanten aa_1, $bb_1\ldots.$ und zieht in der gegebenen Höhe des Anlaufes die Horizontale a_1d_1, ferner aus den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1 Gerade gegen den Augpunkt, welche den Linien aA, $bA\ldots.$ der Bodenfläche entsprechen, so werden diese die Seitenmauern nach obenhin begränzen, wobei selbstverständlich die Geraden a_1A, d_1A so wie jene aA und dA blos in den Seitenmauerflächen, hingegen b_1A, c_1A nur in den innern Flächen der rechteckigen Vorsprünge zu ziehen sind und die Verbindung der einzelnen Linienstücke durch zur Bildfläche parallele Gerade stattfindet. Weiters

Fig. 332.



hat man $b_1 c_1$ in o zu halbiren und o mit A zu verbinden, um jene Gerade zu erhalten, welche die Mittelpunkte für sämmtliche Kreisbögen des Gewölbes enthält, welch' letztere, als zur Bildfläche parallel, sich im Bilde wieder als Kreise darstellen. Die

Durchmesser dieser Halbkreise ergeben sich sodann durch Verbindung je zweier gegenüberliegender Eckpunkte der Anlaufslinien.

Betreffend den Fugenschnitt nehme man sich die Quaderhöhe als aliquoten Theil von $a a_1$ an, mache die Eintheilung auf den in der Vertikalebene $a d d_1 a_1$ gelegenen Gewölbequerschnitt in derselben Weise, wie in der orthogonalen Projektion, trage die Quaderlänge auf die Gerade $A a$ zwischen je zwei Gurten entsprechend derart auf, dass man gleichzeitig die Halbirungspunkte der einzelnen Längen bestimmt und ziehe die Längenfugen des Gewölbes und der Seitenmauern durch die einzelnen auf $a a_1$, $b b_1 \ldots.$ und auf den entsprechenden Kreisbögen erhaltenen Theilpunkte gegen den Augpunkt, die Querfugen jedoch in den Seitenmauern als vertikale Gerade, in der Gewölbsfläche als Kreisbogenstücke, deren Mittelpunkte auf gleiche Weise wie jene der Gurtenbögen sich ergeben.

Wäre das Gewölbe nicht senkrecht zur Bildfläche gelegen, so würde die Construktion nur in so weit eine Abänderung erfahren, als sich die Bilder sämmtlicher Bögen als halbe Ellipsen, resp. Ellipsenstücke darstellen würden.

Aufgabe.

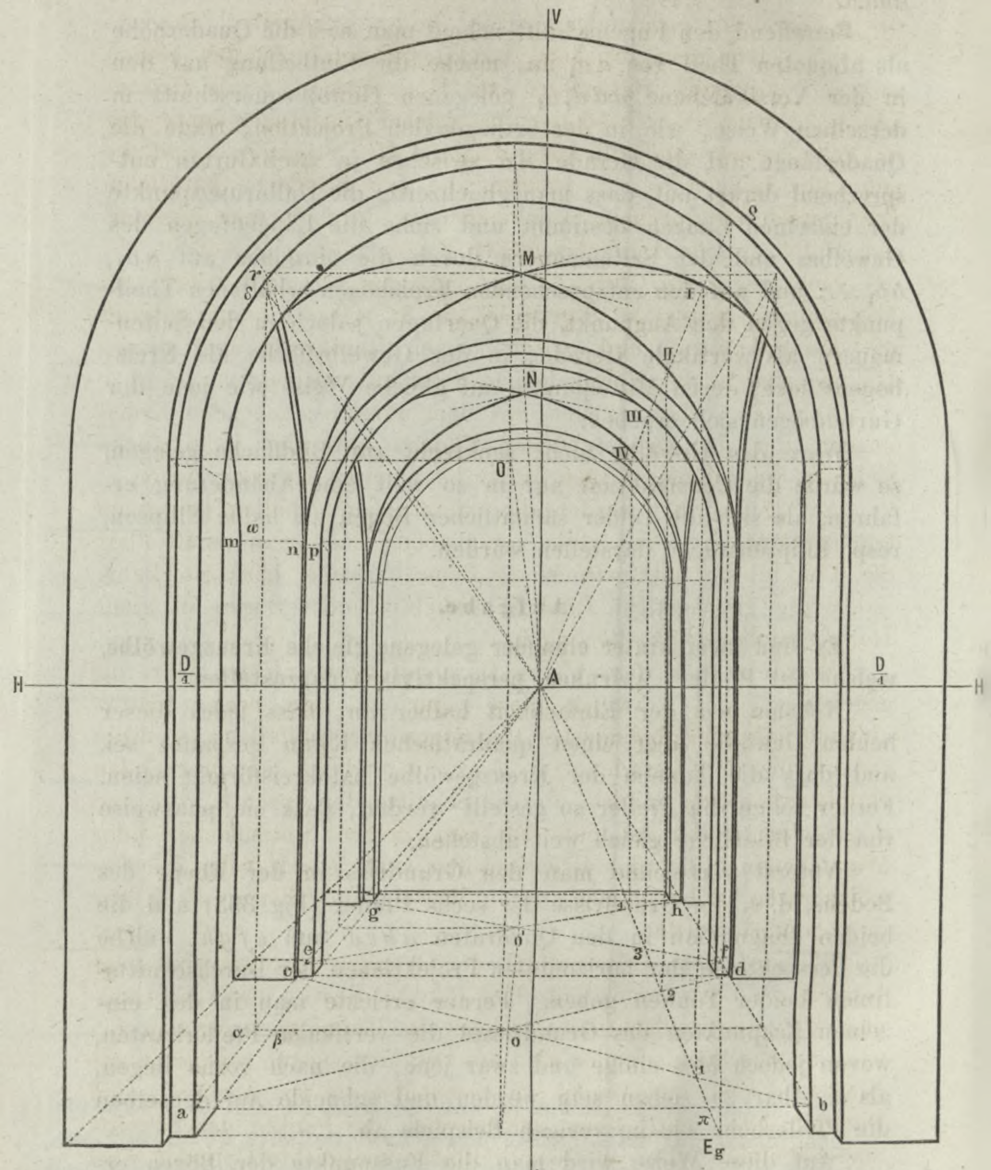
Es sind zwei hinter einander gelegene gleiche Kreuzgewölbe, welche auf Pfeilern aufruhen, perspektivisch darzustellen.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass jedes dieser beiden Gewölbe über einen quadratischen Raum gespannt sei, und dass die Tonnen der Kreuzgewölbe halbkreisförmig seien. Ferner sollen die Pfeiler so gestellt werden, dass sie paarweise von der Bildfläche gleich weit abstehen.

Vorerst verzeichne man den Grundriss in der Ebene des Bodens, d. s. die Grundrisse der sechs Pfeiler (Fig. 333) und die beiden Diagonalen in den Quadraten $a b c d$ und $e f g h$, welche die Perspektiven der horizontalen Projektionen der Durchschnittslinien beider Tonnen geben. Ferner errichte man in den einzelnen Eckpunkten des Grundrisses die vertikalen Pfeilerkanten, wovon jedoch blos einige und zwar jene, die nach vorne liegen, als sichtbar zu ziehen sein werden und schneide auf denselben die Pfeilerhöhe wie im vorigen Beispiele ab.

Auf diese Weise wird man die Fusspunkte der Bögen erhalten, welche den Gurten angehören. Die Mittelpunkte der zur

Fig. 333.



Bildfläche parallelen Halbkreise ergeben sich, wie in der vorhergehenden Aufgabe, in der Geraden AO.

Um die Bilder jener Halbkreise, welche Gurten angehören, die je zwei hintereinanderliegende Pfeiler verbinden, zu verzeichnen, ziehe man aus dem Durchschnittspunkte o der beiden anfangs gezogenen Diagonalen die Horizontale αo als Grundflächtrace jener Vertikalebene, in welcher die Mittelpunkte der in Rede stehenden Halbkreise liegen. Die Stücke αo und βo geben die Längen an, in welchen die zur Bildfläche parallelen Halbmesser der durch p, beziehungsweise durch m und n gehenden Halbkreise im Bilde erscheinen.

Zieht man also durch α die Vertikale $\alpha\omega$ und trägt vom Mittelpunkte ω aus die Stücke $\omega\delta = o\beta$, $\omega\gamma = o\alpha$ auf, so sind die den Punkten n und p zugehörigen Halbkreise über diesen Halbmessern in der Vertikalebene $a\alpha A$ zu construiren.

Aehnlich verhält es sich mit dem durch m gehenden Kreisbogen. Von den so gefundenen Bildern sind blos jene Stücke sichtbar, welche bis zu den vorher bestimmten Gurten reichen.

Auf gleiche Art werden die sämmtlichen, ähnlich gelegenen Gurten bestimmt, nur ist hervorzuheben, dass man unmittelbar die Punkte der letztgefundenen Bögen bereits benützen kann, indem die gleichartigen Punkte ähnlichliegender Bögen in einer Horizontalebene enthalten sind.

Würde ausser dem bisher Durchgeführten nichts mehr angegeben werden, so würde diese Figur das Bild zweier hintereinanderliegender, böhmischer Platzelgewölbe vorstellen; es wären sodann die den Geraden $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$ und $a\,c$ entsprechenden Halbkreise nichts anders, als die Schnitte der durch a, b, c und d gelegten Halbkugel mit den vier innern Seitenflächen oder Wandebenen. Für das Kreuzgewölbe sind jedoch noch die Gewölbsgrathe zu bestimmen, deren Verzeichnung bereits in §. 152 durchgeführt wurde.

Es wird hiezu grösstentheils der Grundriss benützt, und zwar werden zur Bestimmung einzelner Punkte dieser Curven Vertikalebenen E_g (Grundflächtrace), welche eine Tonne nach geraden Erzeugenden schneiden, hier also am zweckmässigsten senkrecht zur Bildfläche sind, angewendet. E_g schneidet die Diagonalen in den Punkten 1, 2, 3, 4, über welchen sich die Punkte der Schnittcurve befinden. Der auf der Bildfläche senkrechte Cylinder wird in der Erzeugenden ρA (ρ vertikal über π) geschnitten, welch' letztere im Durchschnitte mit den eben gezogenen Perpendikeln die zu suchenden Punkte *I*, *II*, *III*, *IV* gibt. Symetrisch zu diesen können weitere vier Punkte sehr leicht gefunden werden.

Gleich in Vorhinein zu bestimmen werden insbesondere die Punkte *M* und *N*, als Durchschnitte der Grathe, sein, welche in den Perpendikeln über *o* und *o'* und in der Höhe αo über der Anlaufslinie liegen. Die Tangenten in jenen Punkten der Grathe sind horizontal und ergeben sich somit als Diagonalen des in der Ebene des Scheitels *M* und *N* parallel zu den Seitenwänden des Raumes verzeichneten Quadrates, in unserem Falle daher unter einem Winkel von 45^0 gegen die Bildebene geneigt.

Auf dieselbe Weise müsste vorgegangen werden, wenn das Kreuzgewölbe in schiefer Stellung gegen die Bildebene zu verzeichnen wäre, nur würden jene Kreise, die hier im Bilde wieder als Kreise erscheinen, sich dort als Ellipsen darstellen.

Säulen.

Von jeder Säule wird das Kapitäl, der Schaft und der Fuss zu verzeichnen sein.

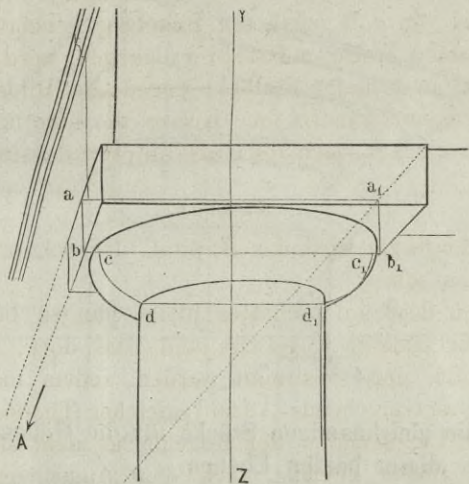
Bezüglich des Säulenschaftes bleibt nur zu bemerken, dass dieser ein abgestutzter Kegel ist und dass dort, wo er Kannelirungen erhält, diese bestimmt werden, indem man den Basiskreis in die entsprechende Anzahl gleicher Theile theilt, durch dieselben die Erzeugenden der Kegelfläche zieht und diese Einschnitte am Boden zumeist nach dem Augenmasse, oder mit Hilfe eines an die Einschnitte tangentiell gelegten Kreises verzeichnet.

Was die beiden andern Theile der Säule anbelangt, so dürfte es in den meisten Fällen angezeigt sein, die Bilder der sich ergebenden Kanten, Ecken, Einschnitte u. dergl. zu construiren, weil sich sodann die sichtbaren Umrisse der Umdrehungsflächen zumeist sogleich oder allenfalls vermittelst eines oder des andern in der Mitte angenommenen und verzeichneten Parallelkreises leicht ergeben.

Zur Bestimmung der einzelnen Punkte der zu verzeichnenden Parallelkreise kann ein doppelter Weg eingeschlagen werden. Man kann nämlich die Perspektiven dieser Kreise auf gewöhnliche Weise bestimmen, wie dies auch in Fig. 334 geschah, welche ein einfaches Kapitäl, bestehend aus einer quadratischen Platte $a a_1 b b_1$ und einer einfachen Umdrehungsfläche $c d$, $c_1 d_1$ darstellt.

Zur Verzeichnung desselben wird man vorerst die oberste Platte darstellen und hierauf die Perspektiven der beiden Kreise $c c_1$, $d d_1$ bestimmen. Auch wird man nachsehen, ob aus dem Auge an den Hauptmeridian eine Tangente möglich sei, welche sodann gleichfalls den sichtbaren Umriss berührt. Endlich wird man allenfalls noch einen zwischen $c c_1$ und $d d_1$ liegenden Parallelkreis verzeichnen, um den sichtbaren Umriss mit der nöthigen Sicherheit tangentiell an diese Kreise ziehen zu können.

Fig. 334.



Behufs der Bestimmung des sichtbaren Umrisses des Säulenschaftes kann man noch irgend einen Querschnitt desselben perspektivisch verzeichnen und die den Umriss bildenden Erzeugenden tangentiell an diesen und an den Kreis $d d_1$ ziehen, oder man kann sich die Punkte des Umrisses in der Horizontsebene durch Umlegen des in dieser Ebene liegenden Querschnittes bestimmen, indem man aus dem umgelegten Auge die Tangenten an den Kreis zieht und diese bis zum Durchschnitte mit der Horizontslinie verlängert.

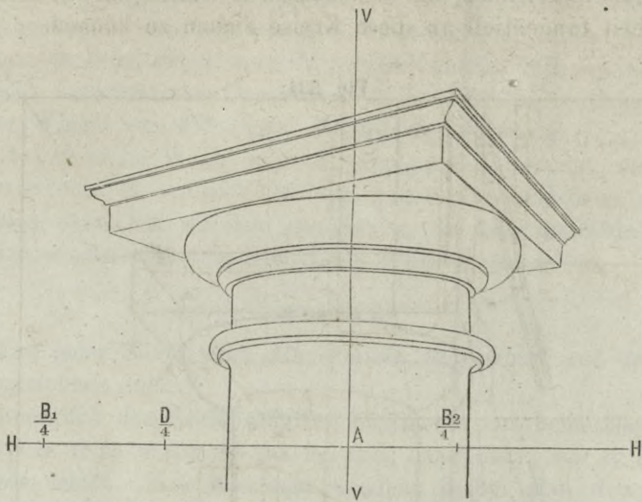
In Fig. 335 ist ein anderes Kapitäl nach derselben Methode perspektivisch dargestellt.

Das zweite Verfahren besteht darin, dass man beliebig viele Meridiane der Umdrehungsfläche perspektivisch verzeichnet. Hiezu ist es am zweckmässigsten, eine besondere Vertikalebene zur

Höhenbestimmung, so wie einen perspektivischen Grundriss anzuwenden.

Auf diese Weise wurde in Fig. 336 der attische Säulenfuss dargestellt. Für den Grundriss wurde E_b als Bildflächtrace angenommen und der Augpunkt nach A_1 verschoben; ebenso sind

Fig. 335.



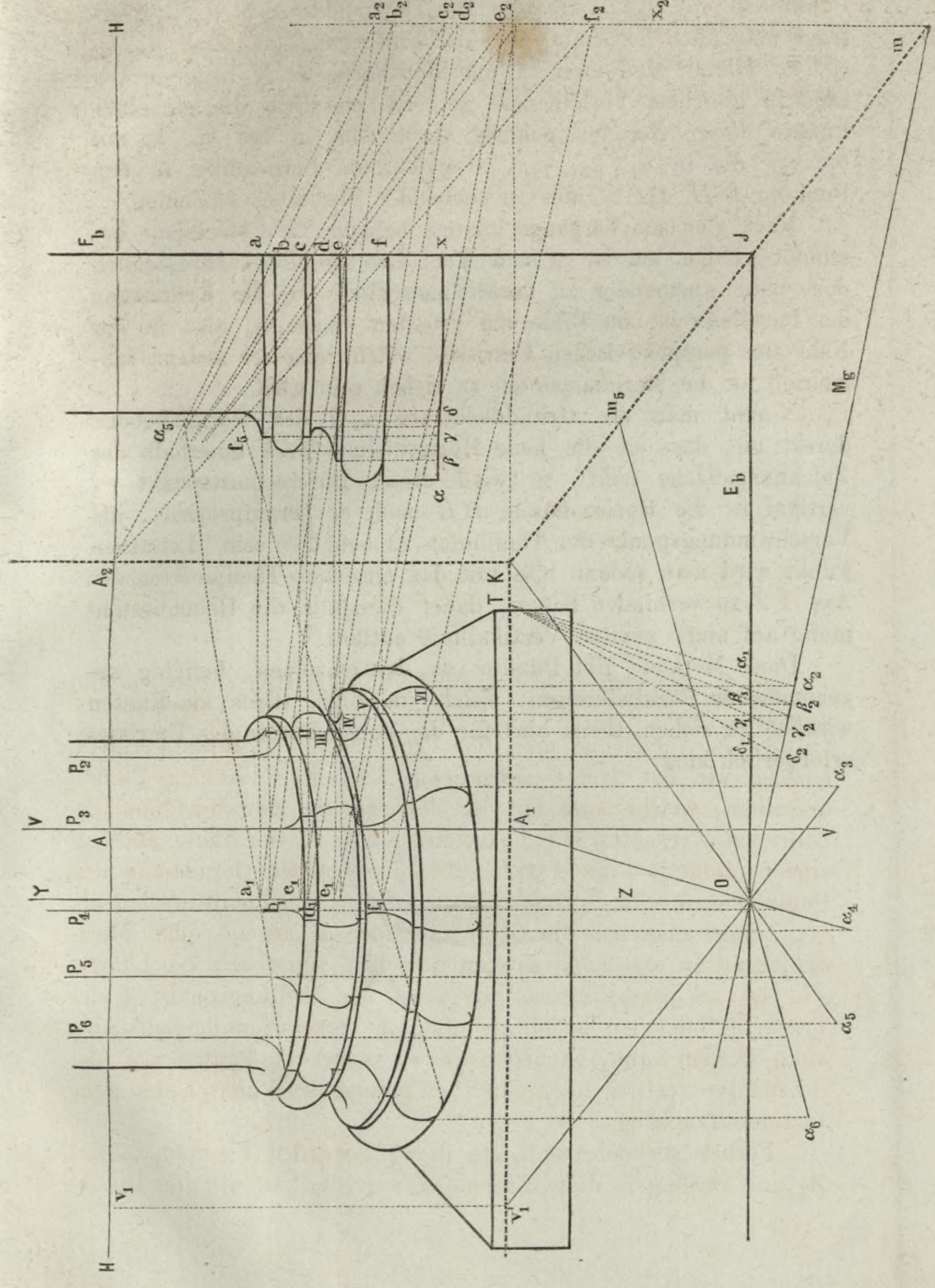
F_b und A_2 die gleichnamigen Stücke für die Höhenebene, mithin JK die Trace dieser beiden Ebenen.

An F_b verzeichne man das Profil oder den Hauptmeridian, beziehe wie bei dem Gesimse (Fig. 330) die einzelnen Punkte desselben, welche man für die Verzeichnung der Meridiane als nothwendig erachtet, auf die vertikale Axe F_b der Säule und auf eine horizontale Linie αx so, dass diese beiden Geraden in den Punkten a, b, c, $d \ldots . x$ und α, β, γ, $\delta \ldots . x$ getheilt erscheinen.

Nimmt man nun die Grundflächtrace M_g irgend einer Meridianebene an und schneidet auf derselben von O aus die Längen $x\delta$, $x\gamma \ldots$ perspektivisch ab, wozu der Theilungspunkt T der Trace M_g oder ein beliebig gewählter Verschwindungspunkt benützt werden kann, so liegen die zu suchenden Punkte der Meridiancurve vertikal über den eben gefundenen Punkten der horizontalen Trace.

Ferner verbinde man die in F_b liegenden Theilpunkte mit A_2 und verlängere diese Linien so weit, bis sie die im Durch-

Fig. 336.



schnitte m der Geraden JK und M_g errichtete Vertikale in den Punkten a_2, b_2, c_2.... treffen. Die Theilpunkte a, b, c.... übertrage man auch horizontal auf die Umdrehungsaxe nach a_1, b_1, c_1.... Hiemit sind zwei in der Meridianebene M liegende Gerade in gleichem Verhältnisse getheilt, wesshalb die einzelnen Punkte dieser Geraden gehörig verbunden (a_1 mit a_2, b_1 mit b_2....), die in α_2, β_2, γ_2.... errichteten Perpendikel in den Punkten I, II, III.... des zu suchenden Meridians schneiden.

Nach gleichem Vorgange können beliebig viele Meridiane bestimmt werden, nur ist zu bemerken, dass dieselben hauptsächlich dort nahe aneinander zu verzeichnen sind, wo die Krümmung der Parallelkreise im Bilde am grössten erscheint, also in der Nähe des perspektivischen Umrisses, welch' letzterer sodann tangentiell an die Meridiancurven zu ziehen sein wird.

Nimmt man die Grundflächtrace $\alpha_3 O$ der Meridianebene derart an, dass sie die neue Horizontslinie noch innerhalb der Zeichnungsfläche trifft, so wird dieser Durchschnittspunkt v'_1 vertikal in die Horizontslinie HH nach v_1 heraufprojezirt, als Verschwindungspunkt der Theillinien zu benützen sein. Letzteren Punkt wird man sodann blos mit den einzelnen Theilpunkten der Axe YZ zu verbinden haben, daher diessfalls die Höhenbestimmung auf einer zweiten Vertikallinie entfällt.

Diese Methode gibt Punkte von den einzelnen, beliebig angenommenen Parallelkreisen, welche im Bilde theils als Kanten wirklich zu ziehen, theils blos für die Verzeichnung des Umrisses erforderlich sind.