

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

3821

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294418





HYDRAULIKA

DR. J. V. ŠKOFAR

DR. J. V. ŠKOFAR

HYDRAULIKA

DR. J. V. ŠKOFAR

DR. J. V. ŠKOFAR

DR. J. V. ŠKOFAR

DR. J. V. ŠKOFAR



# HYDRAULIKA

KURS SZKOŁY POLITECHNICZNEJ

DLA

INŻYNIERÓW I MECHANIKÓW

---

UŁOŻYŁ I WYDAŁ

*Feliks Kucharzewski*

---

Z UDZIAŁEM FUNDUSZU WYDAWNICTW TECHNICZNYCH, ZOSTAŁ WYDANY  
POD ZARZĄDEM STOWARZYSZENIA TECHNIKÓW W WARSZAWIE

---

WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W STOWARZYSZENIU TECHNIKÓW

ul. Czackiego № 3—5

1918.

# HYDRAULIKA

KURS SZKOŁY POLITECHNICZNEJ

1917

INŻYNIERÓW I MECHANIKÓW

WYDAWCA

„Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben“,  
Warschau den 2. 10. 1917. T. № 7755. Dr. № 396.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

113821

WARSZAWA

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

1918



# T R E Ś Ć.

§	Str.
1. Przedmiot Hydrauliki . . . . .	1
<b>I. Hydrostatyka.</b>	
2. Płyyny, cieczy, gazy . . . . .	3
3. Ciśnienie w płynach ( <i>Zadania 1-4</i> ) . . . . .	4
4. Równania równowagi. Powierzchnie poziome . . . . .	7
5. Równowaga cieczy i gazów . . . . .	9
6. Przypadki równowagi względnej ( <i>Zadania 5-8</i> ). . . . .	12
7. Ciśnienie cieczy na powierzchnię płaską ( <i>Zadania 9-11</i> ) . . . . .	15
8. Ciśnienie na jakąkolwiek powierzchnię. Zasada Archimede- desa ( <i>Zadania 12, 13</i> ). . . . .	16
9. Stałość równowagi ciał pływających . . . . .	20
10. Zastosowanie do graniastosłupa o przekroju kwadratowym ( <i>Zadania 14, 15</i> ). . . . .	24
<b>II. Hydrodynamika.</b>	
11. Równania Eulera . . . . .	26
12. Ruch ustalony płynów ( <i>Zadania 16-18</i> ) . . . . .	28
13. Ruch potencjalny cieczy ( <i>Zadanie 19</i> ) . . . . .	33
14. Prąd ustalony, równoległy, płaski ( <i>Zadania 20, 21</i> ) . . . . .	38
15. Ruch osiowo-symetryczny ( <i>Zadania 22-26</i> ) . . . . .	43
16. Twierdzenia Bernoulli'ego, Torricelli'ego i Bordy . . . . .	48
17. Ruch cieczy naturalnych . . . . .	51
18. Strata naporu, prędkość średnia . . . . .	52
19. Prąd regularny. Prawa Poiseuille'a i Reynolds'a . . . . .	57
20. Prąd burzliwy . . . . .	61
21. Ogólne równanie prądu ustalonego . . . . .	64
<b>III. Rury.</b>	
22. Ruch jednostajny . . . . .	67
23. Obliczanie rur ( <i>Zadania 26-30</i> ) . . . . .	77
24. Spadek, średnica, wydatek i koszt rur . . . . .	83
25. Rozkład prędkości na przecięciu poprzecznym rury . . . . .	89

§		Str.
26.	Ruch zmienny ( <i>Zadanie 31, Wodociąg „Venturi“</i> ) . . . . .	91
27.	Zmiany przekroju i ciśnienia ( <i>Zadanie 32</i> ) . . . . .	94
28.	Rura główna i bocznicę . . . . .	99
29.	Straty naporu podrzędne . . . . .	101
30.	Rura lewarowa . . . . .	104
31.	Rury ogrzewań centralnych . . . . .	105
32.	Wahania wody w rurach . . . . .	107
33.	Uderzenie wodne . . . . .	110

#### IV. Kanały.

34.	Ruch jednostajny . . . . .	114
35.	Obliczanie kanałów ( <i>Zadanie 33–38</i> ) . . . . .	117
36.	Kanał doprowadzający . . . . .	124
37.	Przekrój, prędkość i wydatek kanału . . . . .	126
38.	Rozkład prędkości . . . . .	129
39.	Kanały rozprowadzające . . . . .	130
40.	Akweduki i kanały ściekowe . . . . .	132
41.	Ruch zmienny . . . . .	136
42.	Odskok . . . . .	140
43.	Kanał bardzo szeroki ( <i>Zadanie 39</i> ) . . . . .	142
44.	Wzory praktyczne ( <i>Zadanie 40</i> ) . . . . .	144
45.	Przekrój prostokątny zmiennej szerokości . . . . .	147
46.	Ruch nieustalony . . . . .	150

#### V. Okoliczności przypadkowe ruchu.

47.	Otwór w cienkiej ścianie ( <i>Zadania 41–44</i> ) . . . . .	152
48.	Przystawki . . . . .	158
49.	Wytryski ( <i>Zadania 45, 46</i> ) . . . . .	163
50.	Nagła zmiana średnicy rury . . . . .	167
51.	Wypływ przez otwór pod zmiennym naporem ( <i>Zad. 47–51</i> ) . . . . .	171
52.	Przewał ( <i>Zadania 52, 53</i> ) . . . . .	174
53.	Wir . . . . .	182

#### VI. Energia prądu.

54.	Rzeki i potoki . . . . .	185
55.	Zakłady wodne . . . . .	186
56.	Przemiana na ciepło . . . . .	187
57.	Silniki wodne . . . . .	189
58.	Rozkład ciśnień w turbinie . . . . .	193
59.	Turbina Francis'a ( <i>Zadanie 54</i> ) . . . . .	199

#### VII. Wody wstępne.

60.	Sączenie przez piasek . . . . .	206
61.	Powierzchnia wody wstępnej . . . . .	209
62.	Sztolnie . . . . .	211
63.	Studnie . . . . .	212
64.	Studnie artezyjskie . . . . .	215
65.	Wzajemny wpływ studzien . . . . .	216

§	<b>VIII. Gazy.</b>	Str.
66.	Prawa ogólne ( <i>Zadania 55—63</i> ) . . . . .	219
67.	Wpływ ciepła ( <i>Zadania 64—68</i> ) . . . . .	223
68.	Przemiany termodynamiczne ( <i>Zadania 69—72</i> ) . . . . .	226
69.	Zbiorniki powietrza . . . . .	229
70.	Wypływ przez otwór ( <i>Zadania 73—77</i> ) . . . . .	232
71.	Ruch gazów w rurach ( <i>Zadania 78—81</i> ) . . . . .	237
<b>IX. Opór płynów.</b>		
72.	Oddziaływanie prądu ( <i>Zadanie 82</i> ) . . . . .	246
73.	Uderzenie żyły . . . . .	251
74.	Ciśnienie prądu na ciało zanurzone ( <i>Zadania 83—94</i> ) . . . . .	255
75.	Ciśnienie prądu wodnego na ściany ruchome . . . . .	266
<b>X. Hydrometria.</b>		
76.	Badanie zjawisk. Mierzenie czasu . . . . .	271
77.	Pomiary prądów . . . . .	273
78.	Pływaki . . . . .	276
79.	Młynki . . . . .	279
80.	Pitoty . . . . .	281
81.	Wydatek prądu . . . . .	284
82.	Wodomiary . . . . .	286
83.	Gazometria . . . . .	288
INDEX . . . . .		291

### Tablice liczbowe.

	Str.
1. Wartości współczynnika $\nu$ dla niektórych płynów, przy różnych temperaturach . . . . .	59
2 i 3. Tablice do obliczania rur według wzoru Flamanta . . . . .	73, 74
4. Chropowatość absolutna $k$ różnych ścian rur . . . . .	76
5. Straty naporu w rurach, według różnych wzorów . . . . .	77
6. Wartości współczynnika $B_1$ wzoru Bazin'a, dla kanałów . . . . .	118
7. Wartości funkcji $\psi(x)$ według Bresse'a . . . . .	143
8. Wartości współczynnika wydatku $\mu$ , dla otworów kołowych w cienkiej ścianie, według H. Smitha . . . . .	154
9. Wartości współczynnika wydatku dla otworów prostokątnych, według A. Gräeff'a . . . . .	157
10. Wartości współczynnika $b$ we wzorze (94) dla węzów sikawek, według Freeman'a . . . . .	166
11. Wartości współczynnika $m$ we wzorze (259) dla różnych wysokości zagrody i wzniesień wody nad progiem przewалу . . . . .	178
12. Wartości $\gamma$ , $R$ , $c_p$ , $c_v$ , $k$ , dla gazów . . . . .	224

## Nomogramy.

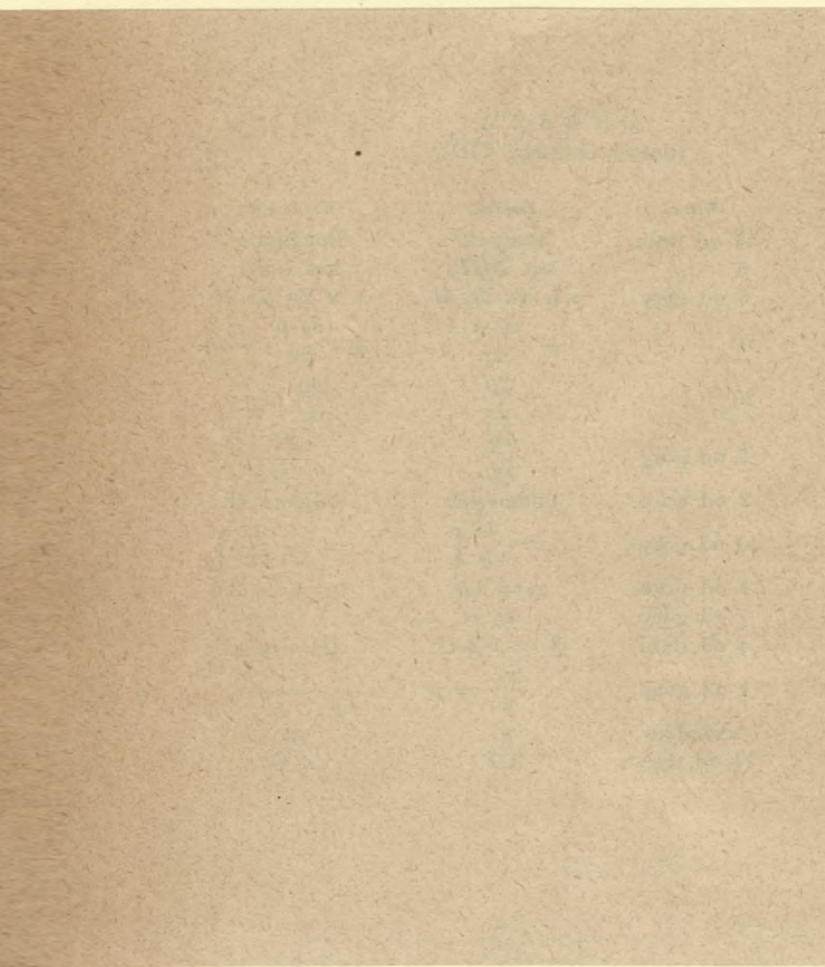
<i>Rys.</i>		<i>Str.</i>
47.	Obliczanie rur, według inż. Biegeleisena i Bukowskiego .	81
68.	Obliczanie kanałów, według wzoru Bazin'a . . . . .	119

## ERRATA.

<i>Str.</i>	<i>Wiersz</i>	<i>Zamiast:</i>	<i>Winno być:</i>
6	11 od góry	$P_3$	$\frac{P_2}{\omega_2}$
11	3 od dołu	$(1 - \alpha t)$	$(1 + \alpha t)$
12	1 od góry	na wysokość $z$	na wysokości $z_1$
"	4 " "	$(1 - \alpha t)$	$(1 + \alpha t)$
13	19 od góry	$g$ i $\theta x$	$g$ i $\theta^2 x$
"	6 od dołu	gęstszych	lżejszych
16	13 " "	$x_1 = OC$	$x_2 = aC$
"	8 od dołu	$\frac{h}{a}$	$\frac{h}{2}$
18	12 od góry	$P^2 = P_z^2 + 2P_y^2 =$	$P^2 = P_z^2 + 2P_y^2.$
"	13 " "	$=$	$P =$
"	15 " "	.	$, \operatorname{tg} \delta = \frac{P_z}{P_y \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{cotg} \alpha.$
39	3 od góry	$dx$	$\partial x$
"	9 od dołu	(5)	(54)
43	17 od góry	(35)	(53)
57	10 od dołu	$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z} \right)$	$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$
91	7 od dołu	$\frac{8Q}{\pi^2 D^3}$	$\frac{8Q}{\pi D^3}$
"	5 od dołu	$\frac{32 \alpha'}{\pi^3 g}$	$\frac{32 \alpha'}{\pi^2 g}$
101	nagłówek	161	101
115	"	151	115
132	2 od dołu	$\frac{\alpha - \sin \alpha}{2}$	$\frac{(\alpha - \sin \alpha) r^2}{2}$
136	12 od góry	$d, s$	$ds,$
142	2 od dołu	profesé	professé
176	11 od góry	$\frac{r_0}{r_0 + h'} \sqrt{\frac{h - \varepsilon - h'}{h - \varepsilon}}$	$\frac{r_0}{r + h'} = \sqrt{\frac{h - \varepsilon - h'}{h - \varepsilon}}$

E R R A T A  
(dalszy ciąg str. VIII).

Str.	Wiersz	Zamiast:	Winno być:
1	17 od dołu	Bouger'a	Bouguer'a
22	5 „	kął <i>DHB</i>	kął <i>DHA</i>
28	8 od góry	$\rho u du dz dt$	$\rho u dy dz dt$
-	10 „	$+ \frac{\partial \rho u}{\partial x}$	$+ \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx$
29	20 „	$\frac{\partial p}{\partial z}$	$\frac{\partial p}{\partial z} dz$
42	7 od góry	$\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial y}$
51	2 od dołu	dodatnych	odjemnych
94	10 od góry	$= \frac{1}{4k} [$	$= - \frac{1}{4k} [$
117	4 od dołu	$\chi = 2h$	$\chi = l + 2h$
139	7 od góry	$x y$	$x' y'$
209	4 od dołu	$Q = \mu z U$	$Q = m z U$
210	1 od góry	$\frac{m}{\mu} = p$	$\frac{1}{\mu} = p$
210—218	wszędzie	$\mu$	$m$
212	14 od dołu	<i>AB</i>	<i>A' B'</i>



Na dalszy rozwój hydrauliki największy wpływ wywarł...  
doświadczania i prace krytyczne: Poissona i Laplace'a i Bernoulli'ego i...  
kin w Francji, Weisbacha w Niemczech i Hagen'a w Holandii...  
Wyniki jego badań o spływie w kołach obracających się...  
L'Étude de l'hydrodynamique, a propos de la roue à aubes...  
stały się przedmiotem: Zainteresowanie...  
Na doświadczeniach jego badań o doświadczeniach doświadczeń...

**1. Przedmiot Hydrauliki.** Mechanika stosowana, podobnie jak mechanika teoretyczna, dzieli się według dwóch stanów skupienia ciał, na mechanikę ciał stałych i płynnych. Pierwsza nosi zwykle miano nauki o wytrzymałości materiałów i stałości budowli, a druga nazwę hydrauliki.

Hydraulika jest zbiorem prawideł, jakie mogą kierować inżyniera, przy rozwiązywaniu zadań, dotyczących ruchu płynów. Wyraz jej, pochodzący od greckich: ὕδωρ = woda i ἄλος = flet, oznaczał u starożytnych sztukę budowania organów, które przed zastosowaniem do tego celu miecha, potrzebowały ciśnienia wody, do wprowadzania powietrza do piszczałek, dla wydawania dźwięku.

Jako część mechaniki stosowanej, opiera się hydraulika na zasadach hydro-mechaniki, czyli mechaniki ciał płynnych, której odróżniane bywają dwie części: statyka i dynamika, zwane też hydrostatyką i hydrodynamiką. Pierwotnie nazwy te stosowano wyłącznie do cieczy, do gazów zaś odnosiły się nazwy: aerostatyki, aerodynamiki i aeroliki czyli pneumatyki (łac. aër = powietrze, grec. πνεῦμα = dmuch).

Najdawniejszą z tych nauk jest hydrostatyka, której ojcem był Archimedes, w III w. po Chrystusie; rozwinięta pracami Pascal'a, Stevin'a i Bouger'a, nauka o równowadze cieczy doszła do wysokiego stopnia rozwoju, posiadając bardzo małą liczbę praw zasadniczych, a wyniki i zastosowania nader liczne i ważne.

Hydraulika, której zasady stosowane były intuicyjnie w starożytności, przy wznoszeniu wielkich budowli wodnych, wzięła swój początek we Włoszech. Czem był Galileusz dla nauki o wytrzymałości materiałów, tem się stali dla hydrauliki: Torricelli i Castelli. Pierwszy z nich oznaczył prędkość wypływu wody przez otwory a drugi próbował ująć we wzory bieg wody w rurach i kanałach.

Główne zasady hydrauliki ugruntowali w końcu XVIII w. pracami swemi: Michelotti, Borda, Venturi, Bossut, Dubuat, de Chézy i de Prony, a równocześnie Daniel Bernoulli, Euler, d'Alembert i Lagrange zapoczątkowali hydrodynamikę. Pierwotnie wiązało z sobą te dwie nauki jedno tylko twierdzenie Bernoulli'ego.

Na dalszy rozwój hydrauliki największy wpływ wywarły doświadczenia i prace krytyczne: Poiseuille'a, Darcy'ego i Bazin'a we Francji, Weisbacha w Niemczech i Reynolds'a w Anglii. Wyniki prac Bazin'a zbliżyły w końcu ubiegłego stulecia hydraulikę do hydrodynamiki, z którą tylko luźny związek utrzymywać starali się przedtem: Navier, Belanger i St. Venant<sup>1)</sup>. Na dostarczonych przez Bazin'a podstawach doświadczalnych, odbudował Boussinesq<sup>2)</sup> całą teorię ruchu wody. W powstałych, w końcu ubiegłego i na początku bieżącego stulecia, przy politechnikach, pracowniach hydraulicznych, prowadzić zaczęto badania maszyn i różnych zjawisk wodnych, ćwiczenia hydrometryczne i wszelkie doświadczenia nad ruchem wody. Profesorowie wszechnic technicznych a także inżynierowie, ubiegający się o stopień doktora tych nauk, bogacili naukę nowymi przyczynkami<sup>3)</sup>. Dążenie do wzmocnienia związku między hydrauliką a hydrodynamiką, uwidoczniające się u nas w pracy Łukasza Bodaszewskiego<sup>4)</sup>, występuje stale w nowszych pracach. W ostatnich czasach, niektóre rozdziały hydrodynamiki opracowywali w zastosowaniu do potrzeb technicznych: A. Föppl<sup>5)</sup>, H. Lorenz<sup>6)</sup>, F. Prášil<sup>7)</sup>

Kurs hydrauliki w politechnikach, obejmuje obok wiadomości zasadniczych z hydrostatyki i hydrodynamiki, nauki o biegu wody w rurach i kanałach, wypływie wody przez otwory, przystawki i przewały, o energii prądu, wodach głębokich, ruchu gazów, oporze płynów, wreszcie hydrometrię czyli naukę o mierzeniu wydatku i prędkości prądów<sup>8)</sup>. Podawana dawniej przy hydraulice, teoria maszyn wodnych przeszła, w większości szkół politechnicznych, do kursów budowy maszyn.

<sup>1)</sup> Dzieje rozwoju poszczególnych rozdziałów hydrauliki podano w przedmowie do dzieła „Wykład hydrauliki, wraz z teorią maszyn wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnymi z mechaniki analitycznej ciał płynnych, przez Feliksa Kucharzewskiego i Władysława Klugera. Paryż 1873, nakład hr. Jana Działyńskiego“, gdzie dołączoną jest także bibliografia traktujących o hydraulice dzieł i rozpraw dawniejszych, obcych i polskich. Wiadomości o dalszym rozwoju nauki streszczono w artykule: „Postępy hydrauliki“ (*Przeгляд Techniczny* 1916).

<sup>2)</sup> Prace Boussinesq'a streścił A. Boulanger w dziele: *Hydraulique générale*. Paris 1909, 2 tomy.

<sup>3)</sup> Tytuły prac nowszych, przy powoływaniu się na nie, wymieniane są w przypiskach.

<sup>4)</sup> Teoria ruchu wody na zasadzie ruchu falowego. Lwów 1902.

<sup>5)</sup> Vorlesungen über technische Mechanik VI B. Leipzig 1910.

<sup>6)</sup> Technische Hydromechanik. München 1910.

<sup>7)</sup> Technische Hydrodynamik. Berlin 1913.

<sup>8)</sup> Czytelnikom pragnącym rozszerzyć i pogłębić zawarte tu wiadomości, poleca się główne źródła, z których te szczegóły zostały wybrane: A. Flamant, *Hydraulique*, Paris 1909; G. Dariès, *Précis*



## I. Hydrostatyka.

**2. Płyyny, ciecze, gazy.** *Płynami* nazywamy ciała, których cząstki są nadzwyczajnie ruchome, jedne względem drugich. Przesuwając po sobie różne części masy płynnej, nie czujemy oporu, jaki ma miejsce, gdy to robimy z ciałami stałymi. Ten brak oporu przy odkształcaniu sprawia, że płyny przybierają same przez się kształt ciał stałych, z którymi się stykają. Jeżeli wyobrazimy sobie płaszczyznę, dzielącą masę płynną na dwie części, to do przesuwania wzdłuż tej płaszczyzny, jednej części masy płynnej po drugiej, wystarcza nader mały wysiłek.

Płynem *doskonałym* nazywamy płyn idealny, w którym ten wysiłek jest ściśle równy zeru. Płyn taki nie istnieje w naturze, podobnie jak niema ciał stałych absolutnie nieodkształcalnych. Mechanika rozważa prawa równowagi i ruchu takiego płynu fikcyjnego, gdyż prawa te mogą być stosowane w wielu przypadkach i do płynów istniejących w naturze, z przybliżeniem wystarczającym. Przy tem stosowaniu jednak, zwłaszcza w przypadkach ruchu, uwzględniać należy wysiłek, potrzebny do przesuwania jednej po drugiej sąsiednich warstw płynu, przedzielonych idealną płaszczyzną.

Wysiłek ten nazwał Newton *lepkością*. Jest to opór styczny do powierzchni, wzdłuż której ślizgają się po sobie warstwy płynu; pod tym względem, przypomina tarcie między ciałami stałymi i jakkolwiek w płynach inny ma charakter, to jednak zwykle nosi nazwę *tarcia wewnętrznego*.

Dwa są rodzaje płynów. Jedne cechują się ściślnością nader małą, tak że w praktyce uważać je można jako nieściśliwe. Nazywamy je *cieczami*. Ciecz, którą głównie zajmować się mamy, woda, jest płynem jednorodnym i uważaną być może jako nieściśliwa. Gęstość jej zmienia się wraz z temperaturą i ciśnieniem, ale w granicach dość zbliżonych, tak że można ją uważać jako stałą. Ciężar jednego centymetra sześciennego wody destylowanej wynosi przy temperaturach:

0°	4°	10°	20°	60°	100°	Cels.
0,99987	1,00000	0,99973	0,99823	0,98324	0,95818	gram.;

bez wielkiego więc błędu przyjmowany być może za 1 gr.

d'Hydraulique, Paris 1912; Ph. Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914; J. F. Bubendey, Praktische Hydraulik, Leipzig 1911; A. Budau, Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik, Wien 1913; R. von Mises, Elemente der technischen Hydrômechanik I Th. 1914; F. Wittenbauer, Aufgaben aus der technischen Mechanik III Bd. Berlin 1911; H. Lamb (przekł. niem. J. Friedel'a) Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1907.

Przy temperaturze stałej, ciężar ten wzrasta razem z ciśnieniem, ale wzrost ten wynosi zaledwie 0,000049 na każdy kilogram wzrostu ciśnienia na  $1 \text{ cm}^2$ , Spójność międzycząsteczkową cieczy, w porównaniu z ciałami stałymi, określają obliczone przez Heinemanna, dla wody przy  $12^\circ \text{ C.}$ , współczynniki wytrzymałości: na rozerwanie  $0,00037 \text{ kg/cm}^2$  i na przecinanie  $0,00026 \text{ kg/cm}^2$ , które dla żelaza wynoszą  $4000 \text{ kg/cm}^2$  i  $2800 \text{ kg/cm}^2$ .

Inne znów płyny są bardzo ściśliwe i powracają do pierwotnej objętości, skoro tylko przestaje działać siła ściskająca; noszą też nazwę *płynów sprężystych* czyli *gazów*. Hydraulika podaje tylko niektóre wiadomości, odnoszące się do równowagi i ruchu takich gazów, do których stosują się prawa Mariotte'a i Gay-Lussaca. Łączona dawniej z hydrauliką większość zasad aeromechaniki, z powstaniem teorii mechanicznej ciepła, weszła w zakres termodynamiki.

**3. Ciśnienie w płynach.** Weźmy pod uwagę jakikolwiek płyn jednorodny w równowadze i oddzielmy w myśli pewną jego część, otoczoną ze wszystkich stron idealną powierzchnią. Na powierzchni tej ma miejsce pewne działanie międzycząsteczkowe, którego wynikiem jest utrzymywanie cząstek wewnątrz tej idealnej powierzchni. Działanie to nazywamy *ciśnieniem*. Pod tem działaniem znajdują się wszystkie punkty powierzchni, a jeżeli weźmiemy pod uwagę bardzo mały element tej powierzchni, to przyjąć można, że działanie na wszystkie punkty tego elementu jest jednakowe. Dzieląc więc ciśnienie  $P$  na cały element powierzchni, wyrażone w gramach, przez wielkość  $\omega$  tej powierzchni, wyrażoną w centymetrach kwadratowych, otrzymamy ciśnienie na jednostkę powierzchni elementu:

$$p = \frac{P}{\omega},$$

czyli ciśnienie na jednostkę powierzchni w jakimkolwiek punkcie płynu.

Wiadomo z doświadczenia, że w płynach naturalnych tarcie wewnętrzne zależy od prędkości, z jaką ślizgają się po sobie warstwy płynu, i schodzi do zera razem z tą prędkością. W płynie naturalnym, pozostającym w równowadze, niema więc żadnego tarcia międzycząsteczkowego, czyli niema żadnego natężenia stycznego do uważanego elementu powierzchni w danym punkcie i płyn taki z całą ściślnością uważany być może za płyn doskonały. Wynika stąd twierdzenie: *W płynie naturalnym w równowadze, ciśnienie w jakimkolwiek punkcie jest normalne do powierzchni, na jaką działa.*

Jeżeli przez punkt  $M$  płynu w równowadze (rys. 1) poprowadzimy trzy płaszczyzny do siebie prostopadłe i czwartą ukośną, to ciśnienie w punkcie  $M$  na którąkolwiek z tych płaszczyzn będzie do niej prostopadłe. Jeżeli w odległości nieskończenie małej od płaszczyzny ukośnej, poprowadzimy płaszczyznę do niej równoległą, odcinającą pomiędzy trzema płaszczyznami prostopadłymi nieskończenie mały czworościan  $ABCM$ , to ciśnienie na podstawę  $ABC$  będzie musiało równoważyć wszystkie siły, działające na czworościan. Z pomiędzy tych sił, wszystkie działające na masę czworościanu siły zewnętrzne, są proporcjonalne do tej masy, a więc do objętości i wobec ciśnień działających na ściany, proporcjonalnych do powierzchni tych ścian, mogą być pominięte, jako nieskończenie małe wyższego rzędu (trzecie potęgi wobec drugich). Aby więc czworościan pozostawał w równowadze, muszą się równoważyć ciśnienia na jego cztery ściany. Rzuty na osie  $x$   $y$   $z$  ciśnienia  $p$ , działającego na ścianę  $ABC$  o powierzchni  $\omega$ , oznaczając przez  $lmn$  dostawy kątów, jakie czyni  $p$  z osiami  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$ , wyrazić można przez iloczyny  $p\omega l$ ,  $p\omega m$ ,  $p\omega n$ . Rzuty te winny być równe skierowanym wzdłuż osi ciśnieniom  $p_1$   $p_2$   $p_3$  na ściany  $MCA$ ,  $MAB$ ,  $MCB$ , o powierzchniach  $\omega_1$   $\omega_2$   $\omega_3$ , co daje równania:

$$p\omega l = p_1\omega_1, \quad p\omega m = p_2\omega_2, \quad p\omega n = p_3\omega_3.$$

Z drugiej znów strony, powierzchnie  $\omega_1$   $\omega_2$   $\omega_3$  są rzutami, na płaszczyzny  $zy$ ,  $zx$ ,  $yx$ , powierzchni  $\omega$ , co daje:

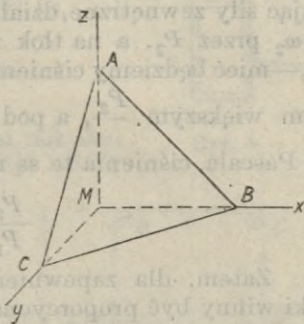
$$\omega l = \omega_1, \quad \omega m = \omega_2, \quad \omega n = \omega_3,$$

więc:

$$p = p_1 = p_2 = p_3,$$

ciśnienie na jednostkę powierzchni, na którąkolwiek ze ścian prostopadłych, jest równe ciśnieniu na jednostkę powierzchni na ścianę ukośną. Innymi słowy, *ciśnienie w punkcie  $M$  jest jednakowe na wszystkie powierzchnie, przez ten punkt przechodzące, czyli jednakie we wszystkich kierunkach.*

Dla zastosowania prawa równości ciśnień we wszystkich kierunkach wokoło danego punktu, czyli prawa równomiernego rozkładu ciśnień w płynach, wyrażonego przez Pascala, do



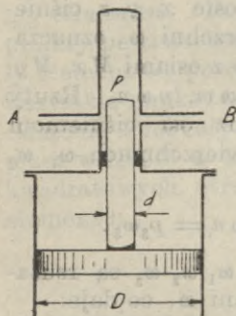
Rys. 1.

płynu, na który, oprócz ciśnień zewnętrznych nie działają inne siły, należy wyobrazić sobie płyn nieważki, albo też pomijać różnice ciśnień, wynikające z własnego ciężaru płynu. Jeżeli płyn taki, oczywiście nieściśliwy, a więc ciecz, wypełnia dwa cylindry różnej średnicy, połączone rurą u spodu a u góry zamknięte tłokami, to siły działające na tłoki z zewnątrz będą równoważone przez parcie płynu na dolne ściany tłoków. Oznaczając siły zewnętrzne, działające: na tłok większy o powierzchni  $\omega_2$  przez  $P_2$ , a na tłok mniejszy o powierzchni  $\omega_1$  przez  $P_1$ , — mieć będziemy ciśnienie na jednostkę powierzchni pod tłokiem większym  $\frac{P_2}{\omega_2}$ , a pod mniejszym  $\frac{P_1}{\omega_1}$ . Na zasadzie prawa Pascala, ciśnienia te są równe, więc:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Zatem, dla zapewnienia równowagi, siły działające na tłoki winny być proporcjonalne do powierzchni tłoków, albo do kwadratów ze średnic cylindrów. Na tej zasadzie budowane są prasy hydrauliczne, akumulatory, windy hydrauliczne i t. p.

**Zadanie 1.** W rurze  $AB$  (rys. 1) utrzymywane ma być ciśnienie  $p$ , naciskiem tłoka o średnicy  $d$ . Tłok ten stanowi jedną całość z tłokiem większym o średnicy  $D$ , na którego spód działa ciśnienie słupa wody, wysokości  $h$ . W jakim stosunku mają być dobrane średnice  $D$  i  $d$ ?



Rys. 2.

Oznaczając przez  $\gamma$  ciężar właściwy wody, z równania:

$$\gamma h \frac{\pi D^2}{4} = p \frac{\pi d^2}{4}$$

otrzymujemy:

$$\frac{D}{d} = \sqrt{\frac{p}{h \gamma}}.$$

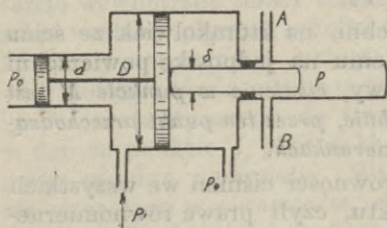
**Zadanie 2.** Akumulator różniczkowy utrzymuje ciśnienie  $p$  w rurze  $AB$  (rys. 3), za pomocą tłoka o średnicy  $\delta$ , połączonego stale z parą tłoków (o średnicy  $D$  i  $d$ ), pomiędzy które wchodzi para pod ciśnieniem  $p_1$ . Jakie ma być to ciśnienie?

Równanie:

$$(p_1 - p_0) \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = p \frac{\pi \delta^2}{4}$$

daje:

$$p_1 = p_0 + p \frac{\delta^2}{D^2 - d^2}.$$



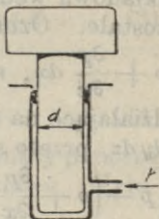
Rys. 3.

**Zadanie 3.** Pod tłokiem akumulatora (rys. 4), o średnicy  $d=20\text{ cm}$ , działa ciśnienie wody  $p=35$  atmosfer. Jeżeli tłok podnosi się na wysokość  $h=2,40\text{ m}$ , jakie będzie, po podniesieniu, ciśnienie na tłok, odliczając  $3\%$  na tarcie kołnierza uszczelniającego?

Ciśnienie na tłok będzie:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} (p - \gamma h) (1 - 0,03) = 10592\text{ kg},$$

przyjmując  $\gamma = 0,001\text{ kg}$ ,  $h = 240\text{ cm}$ .



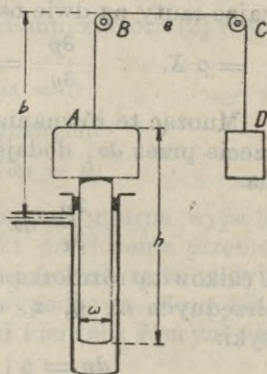
Rys. 4.

**Zadanie 4.** Ciśnienie wody podnosi tłok akumulatora o powierzchni  $\omega$  (rys. 5). Łańcuch  $ABCD$ , o długości  $l$ , przechodzący przez dwa bloki, łączy akumulator z przeciwwagą, Jaka ma być odległość bloków  $e$  i ciężar jednostki długości łańcucha  $q$ , aby zrównoważyły zmianę ciśnienia na tłok, podczas podnoszenia?

Oznaczając  $AB = x$ ,  $CD = y$ , a różnicę wysokości między spodem tłoka i rurą doprowadzającą wodę przez  $z$ , to zmienne ciśnienie na tłok będzie  $\gamma\omega z$ , a równowaga będzie miała miejsce, gdy  $qx - \gamma\omega z = qy$ . Ze zaś  $x + e + y = l$ ,  $x + h = b + z$ , więc:

$$q = \frac{\gamma\omega z}{2z + 2b - 2h - l + e}.$$

Jeżeli  $e = l - 2(b - h)$ , to  $q = \frac{1}{2} \gamma\omega$ .

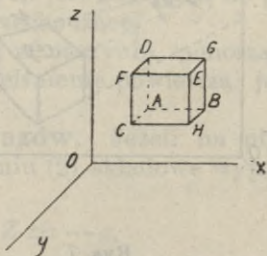


Rys. 5.

#### 4. Równania równowagi. Powierzchnie poziome.

Odnosząc punkty płynu w równowadze do trzech osi prostokątnych  $Ox, Oy, Oz$  (rys. 6), weźmy pod uwagę nieskończenie mały prostopłacin  $ABEF$ , mający krawędzie równoległe do osi i równe  $dx, dy, dz$ . Równanie równowagi prostopłacinu otrzymamy, przyrównując do zera sumy rzutów na trzy osie, sił działających na prostopłacin.

Siły te składają się najprzód z ciśnień, działających na sześć ścian prostopłacinu, równoległych do osi i z sił zewnętrznych, przyłożonych do masy płynu. Sumy składowych tych sił, odniesionych do jednostki masy,



Rys. 6.

według trzech osi, oznaczymy przez  $X, Y, Z$ , tak że przy gęstości płynu  $\rho$  i masie elementarnego prostopścianu  $\rho dx dy dz$ , składowa według osi  $x$  będzie  $\rho X dx dy dz$  i tak samo dwie pozostałe. Oznaczając ciśnienie w  $A$  przez  $p$ , będzie ono w  $B$ :

$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ , a że jedyne ciśnienia, mające rzuty na oś  $x$ , są

działające na ściany  $AF$  i  $BE$ , których powierzchnie są równe  $dy dz$ , przeto suma wszystkich rzutów ciśnień na oś  $x$  będzie

$\left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz$  albo  $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$  i ta suma, do-

dana do składowej  $\rho X dx dy dz$  sił zewnętrznych, winna być równą zeru, co po podzieleniu przez  $dx dy dz$  daje pierwsze z następujących trzech równań, a dwa inne otrzymuje się, rozważając rzuty na dwie osie  $y$  i  $z$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

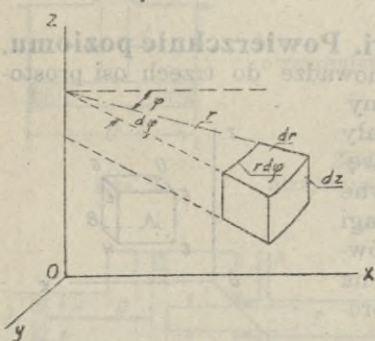
Mnożąc te równania, pierwsze przez  $dx$ , drugie przez  $dy$  a trzecie przez  $dz$ , dodając je do siebie i mając na uwadze, że suma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

jest całkowitą różniczką ciśnienia  $p$ , uważanego jako funkcya współrzędnych  $x, y, z$ , otrzymamy równanie ogólne hydrostatyki:

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Odnosząc punkty płynu do współrzędnych cylindrycznych



Rys. 7.

(rys. 7): promienia wodzącego  $r$ , kąta  $\varphi$  i wysokości liczonej po osi  $OZ$ , i biorąc pod uwagę, zamiast elementarnego prostopścianu, nieskończenie mały wycinek cylindryczny, zawarty między dwiema powierzchniami walcowymi, mającemi wspólną oś  $OZ$ , a promienie  $r$  i  $r + dr$ , dwiema płaszczyznami pionowymi, przechodzącymi przez oś  $OZ$  i tworzącymi przy tej osi kąt  $d\varphi$ , wreszcie dwiema

płaszczyznami poziomymi, odległymi na  $dz$ , — mieć będziemy masę elementarnego wycinka  $\rho \cdot dr \cdot r d\varphi \cdot dz$ , i składowe siły zewnętrznych  $R, T, Z$ , mianowicie:  $R$  w kierunku promienia wodzą-

cego  $r$ ,  $T$  w kierunku stycznej do koła o promieniu  $r$ ,  $Z$  w kierunku równoległym do osi  $OZ$ . Równania równowagi będą:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho R, \quad \frac{\partial p}{r \partial \varphi} = \rho T, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad (3)$$

a równanie ogólne hydrostatyki:

$$dp = \rho (Rdr + Trd\varphi + Zdz) \quad (4)$$

Powierzchnie w płynie, których wszystkie punkty ponoszą jednakie ciśnienie, nazywamy *powierzchniami poziomymi*. Wyrażając to określenie równaniami:

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{ilości stałej,} \\ dp &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

otrzymamy równania powierzchni poziomej, z wzoru (2) w spólrzędnych prostokątnych:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (6)$$

a z wzoru (4) w spólrzędnych cylindrycznych:

$$Rdr + Trd\varphi + Zdz = 0 \quad (7)$$

Równania te wyrażają, że praca elementarna wypadkowej sił zewnętrznych  $F$ , gdy jej punkt przyłożenia przebiega drogą  $ds$  na powierzchni poziomej, jest równa zeru. Gdybyśmy zamiast na trzy osie, rzucili tę wypadkową  $F$  na kierunek  $ds$ , to oznaczając przez  $\alpha$  kąt, jaki kierunek  $F$  czyni z kierunkiem  $ds$ , mielibyśmy:

$$F \cos \alpha ds = 0 \quad (8)$$

W ogóle równaniu temu uczynić można zadość, kładąc  $\cos \alpha = 0$ , skąd  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . W każdym więc punkcie powierzchni poziomej, wypadkowa sił zewnętrznych jest normalną do powierzchni poziomej przez ten punkt przechodzącej.

Powierzchnia swobodna cieczy w naczyniu, ponosząca we wszystkich swych punktach stałe ciśnienie powietrza, jest jedną z powierzchni poziomych.

**5. Równowaga cieczy i gazów.** Jeżeli na płyn działa tylko siła ciężkości, to w równaniu (2) składowe wypadkowej sił zewnętrznych

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie siły ciężkości, równe dla Warszawy  $9,81196 m$  i równanie przyjmuje kształt:

$$dp + \rho g dz = 0,$$

albo oznaczając przez  $\gamma = \rho g$  ciężar jednostki objętości płynu:

$$dp + \gamma dz = 0. \quad (9)$$

To równanie różniczkowe równowagi płynów wazkich, zcałkujemy w dwóch przypadkach:

1) W przypadku cieczy jednorodnej, jak woda,  $\gamma$  jest stałe i po zcałkowaniu równania (9) otrzymujemy:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = H \quad (10)$$

oznaczając przez  $z_0$  rzędną poziomu cieczy, przez  $p_0$  ciśnienie powietrza na tym poziomie, a przez  $H$  wysokość stałą. Stosunek

$\frac{p}{\gamma}$  ciśnienia w punkcie, którego rzędną jest  $z$ , do ciężaru

właściwego cieczy, nazywamy *naporem*. Jest to wielkość jednowymiarowa, bo w liczniku mamy ciśnienie na jednostkę

powierzchni, czyli siłę podzieloną przez powierzchnię a w mianowniku ciężar właściwy, to jest siłę podzieloną przez objętość.

Równanie (10) wyraża, że jeżeli w każdym punkcie cieczy, na przedłużeniu w górę rzędnej tego punktu, odetniemy wysokość

$\frac{p}{\gamma}$ , to końce górne wszystkich tych pionowych leżeć będą na jednej płaszczyźnie poziomej, wzniesionej na wysokość  $H$  nad płaszczyzną porównania.

Gdybyśmy za tę płaszczyznę porównania wzięli płaszczyznę poziomą cieczy, rzędne  $z$  liczyli od niej w dół i pominęli ciśnienie powietrza na poziomie cieczy, wtedy  $z$  będzie odjemne,  $p_0 = 0$ ,  $z_0 = H = 0$  i z równania (10) pozostanie:

$$p = \gamma z. \quad (11)$$

co znaczy, że we wszystkich punktach cieczy jednorodnej, ciśnienie jest proporcjonalne do głębokości tych punktów pod poziomem cieczy i dla każdego punktu jest równe ciężarowi słupa cieczy, mającego za podstawę jednostkę powierzchni, a za wysokość głębokość punktu pod poziomem cieczy.

Równanie (5), to jest równanie różniczkowe powierzchni poziomej, będzie wtedy:

$$\gamma dz = 0 \quad (12)$$

a po zcałkowaniu:

$$z = \frac{a}{\gamma} \quad (13)$$

gdzie  $a$  jest stałą dowolną. Jest to równanie płaszczyzn równoległych do płaszczyzny  $xy$ . Powierzchnie poziome są więc dla cieczy jednorodnych płaszczyznami poziomymi, prostymi



padłemi do kierunku siły działającej, to jest siły ciężkości, i odwrotnie każda płaszczyzna prostopadła do tego kierunku jest powierzchnią poziomą i ponosi jednakie ciśnienie we wszystkich swych punktach. Stwierdzają to fakty. Powierzchnia swobodna wody w zbiorniku, po zamknięciu przyływu, przyjmuje kształt płaszczyzny poziomej. Gdy do naczynia wlejemy cieczy różnych gęstości i te oddzielią się jedna od drugiej, to ułożą się one warstwami poziomymi, porządkiem ciężarów właściwych, najcięższe u spodu, najlżejsze u góry, a po ustaleniu się równowagi, warstwy oddzielone są jedna od drugiej płaszczyznami poziomymi. Wobec stwierdzenia wywodów analitycznych przez obserwację, mamy prawo wnioskować, że przypuszczenie płynności doskonałej, służące za podstawę wywodów, może być przyjętem w hydrostatyce, i doprowadza do pierwszego przybliżenia, wystarczającego dla objaśnienia obserwowanych faktów.

Równanie (10) wypisać można w postaci:

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = z_0 - z \quad \dots \quad (14)$$

*Różnica zatem naporów, na dwóch poziomach cieczy jednorodnej w równowadze, jest równa różnicy głębokości tych poziomów.*

2) W przypadku gazu doskonałego, to jest takiego, do którego prawo Mariotte'a stosuje się w zupełności, jeżeli  $\gamma_0$  jest ciężarem jednostki objętości gazu pod ciśnieniem atmosferycznym  $p_0$  i w temperaturze  $0^\circ$ , a  $\gamma$  ciężarem tejże jednostki pod ciśnieniem  $p$  i w temperaturze  $t^\circ$ , to według praw Mariotte'a i Gay-Lussaca:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t},$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności gazu, równym 0,003663. Stąd:

$$\gamma = p \frac{\gamma_0}{p_0 (1 + \alpha t)},$$

a wstawiwszy tę wartość w równanie różniczkowe  $dp + \gamma dz = 0$ , otrzymamy po podzieleniu przez  $p$ :

$$\frac{dp}{p} + \frac{\gamma_0 dz}{p_0 (1 + \alpha t)} = 0.$$

Po zcałkowaniu, przyjmując, że  $t$  jest stałe, otrzymujemy:

$$\ln p + \frac{\gamma_0 z}{p_0 (1 + \alpha t)} = C.$$

Mierząc ciśnienie  $p_1$  na wysokość  $z$ , znajdziemy:

$$C = \ln p_1 + \frac{\gamma_0 z_1}{p_0 (1 + \alpha t)},$$

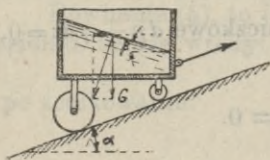
a po wstawieniu tej wartości otrzymamy:

$$\ln \frac{p}{p_1} + \frac{\gamma_0}{p_0 (1 + \alpha t)} (z - z_1) = 0, \quad (15)$$

równanie równowagi gazu doskonałego. Równanie to, przystosowane do atmosfery ziemskiej, służy za podstawę poziomowania barometrycznego, pozwalając oznaczyć wzniesienie  $z - z_1$  w funkcji stosunku  $\frac{p}{p_0}$ . W tym celu jednak wprowadzone być w niem muszą różne zmiany. Ciężar  $\gamma_0$  jednostki objętości powietrza, przy temperaturze  $0^0$  i pod ciśnieniem atmosfery, jest równy iloczynowi z gęstości czyli masy właściwej  $\rho_0$  przez przyspieszenie siły ciężkości  $g$ . Czynniki  $g$  nie jest stały i zmienia się razem z wysokością punktu nad powierzchnią ziemi, według prawa ciężenia, w stosunku odwrotnym do kwadratu z odległości od środka ziemi. Wyrażenie  $1 + \alpha t$ , które przy całkowaniu uważaliśmy za stałe, zmienia się w miarę wzrostu wysokości. Nie znając ściśle prawa zależności temperatury od wysokości, bierze się zwykle  $t$  jako średnią dwóch temperatur, zaobserwowanych na dwóch stanowiskach. Wreszcie zamiast wartości  $\alpha = 0,00366$ , przyjmuje się  $\alpha = 0,004$ , uwzględniając parę wodną rozpuszczoną w powietrzu. Przez wprowadzenie tych zmian otrzymuje się z równania (15), podawane w podręcznikach wzory na poziomowanie barometryczne, Laplace'a lub Gaussa.

**6. Przypadki równowagi względnej.** Wyznaczyć powierzchnie poziomu w następujących czterech przypadkach równowagi względnej:

**Zadanie 5.** Jeżeli wielka kadź, napełniona wodą (jak używana do przewozu statków na równiach pochyłych, łączących dwie, położone na różnych wysokościach części kanału) wprawioną zostanie w ruch z przyspieszeniem  $u' = \frac{du}{dt}$ , w kierunku strzałki



Rys. 8.

(rys. 8), po równi nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$ , to po uspokojeniu się wstrząśnienia, z jakim nachyleniem do poziomu układa się powierzchnia wody w kadzi?

Kąt  $\beta$ , którego styczna  $\operatorname{tg} \beta = \frac{dz}{dx}$ , otrzymamy kładąc w ró-

wnanie (6),  $X = -u' \cos \alpha$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g - u' \sin \alpha$ . Mamy wtedy:

$$-\frac{X}{Z} = \frac{dz}{dx} = -\frac{u' \cos \alpha}{g + u' \sin \alpha},$$

skąd:

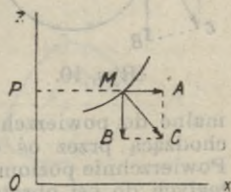
$$\beta = \text{arc tang} \frac{u' \cos \alpha}{g + u' \sin \alpha}.$$

**Zadanie 6.** Jeżeli ciecz zawarta w naczyniu wprowadzoną zostanie w ruch obrotowy około osi pionowej (np. woda w szklance przy kręceniu łyżeczką) i ruch ten się ustali, to przypuścić można, że ciecz doszła do względnej równowagi, w odniesieniu do osi współrzędnych prostokątnych, ożywionych tym samym ruchem obrotowym, około osi  $z$ . Punkt  $M$  cieczy, położony na płaszczyźnie południkowej  $zox$ , utrzymywany jest w równowadze na tej płaszczyźnie, obracającej się razem z cieczą, działaniem dwóch sił: rzeczywistej, jaką jest jego ciężar i siły pozornej bezwładności w ruchu obrotowym. Wielkości tych sił, odniesione do jednostki masy, będą:  $g$  i  $\theta^2 x$ , jeżeli  $\theta$  jest prędkością kątową ruchu obrotowego, a  $x$  odległością  $MP$  punktu  $M$ , od osi obrotu  $oz$ . Siły skierowane są według  $MB$  i  $MA$ . Kładąc w równaniu (6)  $X = \theta^2 x$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$ , otrzymujemy równanie krzywej, według której powierzchnia równiny przechodząca przez punkt  $M$ , przecina płaszczyznę  $zx$ :

$$\theta^2 x dx - g dz = 0,$$

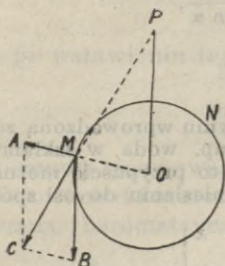
a po zcałkowaniu:  $\theta^2 \frac{x^2}{2} - gz = C$ . Krzywa ta jest parabola, mającą za oś pionową, oś obrotu, a powierzchnie poziomu są tu paraboloidami obrotowymi, w każdym punkcie normalnymi do  $MC$ , wypadkowej dwóch sił  $MB = g$  i  $MA = \theta^2 x$ , przyłożonych do jednostki masy w punkcie  $M$ . Wypadkowa  $MC = \sqrt{g^2 + \theta^4 x^2}$  jest zawsze większą od  $g$  i to tem więcej, im prędkość kątowa obrotu  $\theta$  jest większa. Cząstka cieczy w punkcie  $M$  i we wszystkich punktach położonych w odległości  $x$  od osi, znajduje się więc w tych warunkach, jakby jej ciężkość powiększyła się w stosunku  $g : \sqrt{g^2 + \theta^4 x^2}$ . Jeżeli te cząstki mają różne gęstości, to różnica sił na nie działających, przy równych objętościach, wzrośnie w tym samym stosunku i stanie się taką, jak gdyby w cieczy w spoczynku, wzrosła w tym stosunku różnica gęstości. Wynika stąd, że jeżeli z mieszaniny cieczy dwóch różnych gęstości, pozostającej w spoczynku, wydzielenie cieczy gęstszej jest trudne, to staje się ono ułatwionem przez wprowadzenie mieszaniny w ruch obrotowy, przyczem ciecz gęstsza oddala się od osi obrotu. Własność ta znalazła zastosowanie w przemyśle, w wirówkach lub odśrodkowcach, służących do filtrowania lub wydzielenia z mieszanin cieczy gęstszych, np. śmietanki z mleka. W wirówkach, używanych w cukrowniach, ma miejsce zastosowanie samej tylko siły odśrodkowej, gdyż małe otwory na obwodzie zatrzymują kryształ cukru, a przepuszczają sok lub melas.

**Zadanie 7.** Jeżeli ruch obrotowy cieczy ma miejsce około osi poziomej, której rzutem jest punkt  $O$  (rys. 10), to cząstka  $M$  prze-



Rys. 9.

biega okrąg koła  $MN$  o promieniu  $r$ , z prędkością kątową stałą  $\theta$ . Dla sprowadzenia tego przypadku do zadania równowagi względnej,



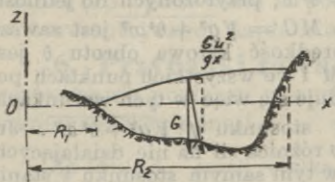
Rys. 10.

trzeba do siły rzeczywistej  $MB = g$ , odniezionej do jednostki masy, dołączyć siłę pozorną, pochodzącą z bezwładności  $\theta^2 r$  skierowaną według  $MA$ , przedłużenia promienia  $OM$ . Wypadkowa tych dwóch sił  $MC$  będzie normalną do powierzchni poziomu w punkcie  $M$ . Przedłużmy tę normalną do spotkania się z pionową, przechodzącą przez punkt  $O$ . Dwa trójkąty podobne  $MCB$  i  $PMO$  dają:

$$\frac{PO}{MB} = \frac{OM}{CB}, \text{ skąd } PO = \frac{gr}{\theta^2 r} = \frac{g}{\theta^2}.$$

Położenie punktu  $P$  jest więc niezależne od położenia punktu  $M$ . Wszystkie normalne do powierzchni poziomu spotykają płaszczyznę pionową, przechodzącą przez oś obrotu, na tej samej wysokości ponad tą oś. Powierzchnie poziomu są walcami o tworzących poziomych, równoległych do osi obrotu, a podstawy tych walców są okręgami kół zakreślonymi z punktu  $P$  jako ze środka. Odległość pionowa  $PO$  jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu z prędkości kątovej  $\theta^2$ . Gdy ta prędkość jest znaczną,  $OP$  staje się bardzo małym. Objasnia to, dlaczego można obracać, jak kamyk przywiązany do sznurka, szklankę z wodą, bez wylania wody. Koniecznym jest wtedy, aby punkt  $P$  leżał wewnątrz koła, jakie zakreślają w ruchu obrotowym cząsteczki leżące na powierzchni wody w szklance, czyli żeby  $OP = \frac{g}{\theta^2}$  było mniejsze od  $OM = r$ . Jest to także warunkiem ciągłego wyprężenia sznurka, podczas ruchu kołowego szklanki.

**Zadanie 8.** Jeżeli w zagięciu (kolanie) rzeki o przekroju poprzecznym stałym, jak na rys. 11, woda ma jednostajną prędkość  $u$ ,



Rys. 11.

to poziom podnosić się będzie przy brzegu zewnętrznym, a obniżać przy wewnętrznym. Cząstka cieczy, której ciężar jest  $G$ , podlegać będzie działaniu siły odśrodkowej

$\frac{Gu^2}{gx}$  i z równania (6) otrzymamy:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z} = -\frac{Gu^2}{G} = -\frac{u^2}{gx}$$

$$g dz = u^2 \frac{dx}{x},$$

$$gz = u^2 \ln x + C.$$

$$\text{Dla } x = R_1, z = 0$$

$$0 = u^2 \ln R_1 + C$$

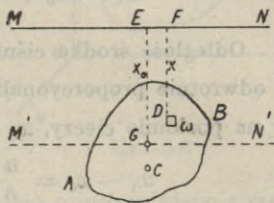
$$z = \frac{u^2}{g} \ln \frac{x}{R_1}.$$

Podniesienie pozorne na brzegu zewnętrznym (w log. Briggsa):

$$h = 2,30 \frac{u^2}{g} (\log R_2 - \log R_1).$$

**7. Ciśnienie cieczy na powierzchnię płaską.** W § 5 doszliśmy do równania  $p = \gamma z$ , wyrażającego, że dla każdego punktu cieczy jednorodnej w równowadze, ciśnienie jest równe ciężarowi słupa cieczy, mającego za podstawę jednostkę powierzchni, a za wysokość—głębokość punktu pod poziomem cieczy.

Jeżeli wewnątrz cieczy w równowadze weźmiemy pod uwagę powierzchnię, ograniczoną jakąkolwiek linią zamkniętą, położoną na płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$  a przecinającej poziom cieczy według prostej  $MN$ , to na element  $\omega$  tej powierzchni płaskiej, którego odległość od  $MN$  jest  $x$ , a głębokość pod poziomem cieczy  $z = x \sin \alpha$ , działa ciśnienie  $\gamma \omega x \sin \alpha$ , a na całą powierzchnię  $AB$  ciśnienie  $P = \sum \gamma \omega x \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \sum \omega x$ . Ciśnienie w każdym punkcie jest proporcjonalne do odległości tego punktu od prostej  $MN$ . Jeżeli przez  $x_0$  oznaczymy odległość  $GE$ , środka ciężkości  $G$  powierzchni  $AB$ , od prostej  $MN$ , a przez  $\Omega$  całą powierzchnię  $AB$ , to  $\sum \omega x = \Omega x_0$ , a ciśnienie całkowite  $P = \gamma \Omega x_0 \sin \alpha$ , jest równe iloczynowi z powierzchni  $\Omega$  przez ciśnienie w środku ciężkości, będące tym sposobem ciśnieniem średnim na powierzchni  $AB$ .



Rys. 12.

Punkt  $C$  przyłożenia wypadkowej  $P$ , albo *środek ciśnienia*, leży w odległości  $x_1$  od  $MN$ , a odległość tę otrzymać można z uwagi, że moment wypadkowej  $P$  względem osi  $MN$  jest równy sumie momentów ciśnień elementarnych:

$$Px_1 = \sum \gamma \omega x \sin \alpha \cdot x = \gamma \sin \alpha \sum \omega x^2 \dots (16)$$

$\sum \omega x^2$  jest to moment bezwładności powierzchni  $AB$  względem osi  $MN$ , a jeżeli przez  $I$  oznaczymy moment bezwładności tej powierzchni względem osi  $M'N'$ , przechodzącej przez jej środek ciężkości, będzie:

$$\sum \omega x^2 = I + \Omega x_0^2,$$

a więc:

$$x_1 = \frac{Px_1}{P} = \frac{\gamma \sin \alpha \sum \omega x^2}{\gamma \sin \alpha \sum \omega x} = \frac{\Omega x_0^2 + I}{\Omega x_0} = x_0 + \frac{I}{\Omega x_0} \dots (17)$$

Wynika stąd, że  $x_1 > x_0$ , czyli że środek ciśnienia leży zawsze pod środkiem ciężkości powierzchni, na którą ciecz ciśnie.

Jeżeli powierzchnia płaska jest symetryczna względem średnicy prostopadłej do  $MN$ , to środek ciśnienia leży na tej

średnicy i wzór powyższy, dający  $x_1$  odległość środka ciśnienia od  $MN$ , pozwala odnaleźć jego położenie.

**Zadanie 9.** Wzory (16) i (17) zastosować do prostokąta o dwóch bokach poziomych, oraz do przypadku, gdy bok górny prostokąta leży na poziomie cieczy i gdy ściana jest pionową.

Dla prostokąta o szerokości poziomej  $b$  a wysokości  $a$ ,  $\Omega = ab$   $I = a^3 b / 12$  i wzór (16) daje ciśnienie  $P = \gamma a b x_0 \sin \alpha$ , a wzór (17) odległość środka ciśnienia od poziomu wody:

$$x_1 = x_0 + \frac{a^3 b}{12 ab x_0} = x_0 + \frac{a^2}{12 x_0}$$

Odległość środka ciśnienia od środka ciężkości:  $x_1 - x_0 = \frac{a^2}{12 x_0}$

jest odwrotnie proporcjonalna do  $x_0$ . Jeżeli bok górny prostokąta leży na poziomie cieczy,  $x_0 = \frac{a}{2}$ ,

$$x_1 - x_0 = \frac{a}{6}, \quad P = \gamma \frac{a^2}{2} b \sin \alpha.$$

Gdy przytem ściana jest pionową,  $\sin \alpha = 1$ ,  $P = \frac{1}{2} \gamma a^2 b$ .

**Zadanie 10.** Wzory (16) i (17) zastosować do koła o promieniu  $r$ , oraz do przypadku, gdy koło dotyka poziomu cieczy.

Dla koła o promieniu  $r$ ,  $\Omega = \pi r^2$ ,  $I = \frac{1}{4} \pi r^4$ , wzór (16) daje:

$$P = \gamma \pi r^2 x_0 \sin \alpha,$$

a wzór (17):

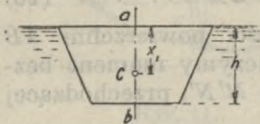
$$x_1 = x_0 + \frac{\pi r^4}{4 \pi r^2 x_0} = x_0 + \frac{r^2}{4 x_0}.$$

Odległość środka ciśnienia od środka ciężkości:  $x_1 - x_0 = \frac{r^2}{4 x_0} = \frac{(2r)^2}{16 x_0}$ , jest mniejsza niż dla prostokąta.

Gdy koło dotyka poziomu wody,  $x_0 = r$ ,  $P = \gamma \pi r^3 \sin \alpha$ , a dla ściany pionowej:  $P = \gamma \pi r^3$ .

**Zadanie 11.** Obliczyć spólrzędną  $x_1 = OC$  (rys. 13) środka ciśnienia  $C$  dla trapezu na ścianie pionowej, o bokach równoległych:  $a$ ,  $b$ , z których  $a$  leży na poziomie cieczy,  $b$  — na głębokości  $h$ .

$$x_1 = \frac{h}{a} \cdot \frac{a + 3b}{a + 2b}.$$

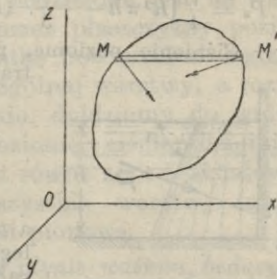


Rys. 13.

**8. Ciśnienie na jakąkolwiek powierzchnię. Zasada Archimedesesa.** Jeżeli powierzchnia zamknięta poddana jest we wszystkich swych punktach, ciśnieniu normalnemu stałemu na jednostkę powierzchni, to wypadkowa tych wszystkich ciśnień elementarnych jest równa zeru.

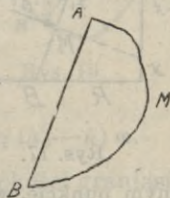
Odnosząc powierzchnię do jakichkolwiek trzech osi spólrzędnych prostokątnych (rys. 14), podzielmy ją na graniasto-

słupy nieskończenie małe, równoległe do jednej z osi, np. do  $Ox$ . Ciśnienie na podstawę nachyloną jednego z tych graniastosłupów równa się ciśnieniu  $p$ , pomnożonemu przez powierzchnię tej podstawy. Rzut tego ciśnienia na oś  $x$  jest równy iloczynowi  $z p$  przez powierzchnię przecięcia graniastosłupa. Tak samo ciśnienie na drugą podstawę  $M'$  będzie miało rzut na oś równy iloczynowi  $z p$  przez powierzchnię przecięcia prostego, czyli równy tej samej wartości. Suma więc tych dwóch rzutów, równych i skierowanych w strony przeciwne, będzie równa zero i toż samo będzie miało miejsce z rzutami na oś  $x$  ciśnień działających na podstawy wszystkich graniastosłupów. Suma rzutów na oś  $x$  wszystkich ciśnień na powierzchnię zamkniętą jest więc równa zero, a ponieważ toż samo wywieść można dla rzutów ciśnień na inne dwie osie, wynika stąd, że i wypadkowa wszystkich ciśnień jest równa zero.



Rys. 14.

Twierdzenie to daje możność znalezienia wypadkowej ciśnień normalnych, stałych na jednostkę powierzchni, działających na jakąkolwiek powierzchnię nieregularną ograniczoną płaszczyzną. Niech będzie  $AMB$  (rys. 15), ta powierzchnia, ograniczona płaszczyzną  $AB$  i poddana we wszystkich swych punktach działaniu ciśnienia normalnego  $p$ . Jeżeli weźmiemy pod uwagę objętość, jaką tworzy ta powierzchnia razem z płaszczyzną  $AB$  i ciśnienie  $p$ , działające na całą powierzchnię, tak płaską jak i krzywą, zamykającą tę objętość, to wypadkowa ciśnień elementarnych będzie równa zero, czyli uważana objętość będzie w równowadze. Wynika stąd, że ciśnienie  $p$  na jednostkę powierzchni na płaszczyznę  $AB$ , równoważy ciśnienie  $p$  na jednostkę powierzchni  $AMB$ , albo że wypadkowa ciśnienia na tę powierzchnię jest równa wypadkowej ciśnień na płaszczyznę  $AB$ , czyli iloczynowi  $z p$  przez powierzchnię płaską  $AB$ , jest prostopadła do  $AB$  i przyłożona w środku ciężkości tej powierzchni płaskiej.



Rys. 15.

uwzględniając, że ciśnienie  $p$  na jednostkę powierzchni na płaszczyznę  $AB$ , równoważy ciśnienie  $p$  na jednostkę powierzchni  $AMB$ , albo że wypadkowa ciśnienia na tę powierzchnię jest równa wypadkowej ciśnień na płaszczyznę  $AB$ , czyli iloczynowi  $z p$  przez powierzchnię płaską  $AB$ , jest prostopadła do  $AB$  i przyłożona w środku ciężkości tej powierzchni płaskiej.

**Zadanie 12.** Mur bulwaru ma kształt ostrokągu ściętego o promieniach podstaw:  $R$  — dolnej,  $r$  — górnej (rys. 16); tworzące ostrokągu nachylone są pod kątem  $\alpha$  do poziomu, a wysokość  $h$  jest jednocześnie głębokością wody. Wyznaczyć ciśnienie  $P$  na po-

wierzchnię ostrokągu, jego uchylenie  $\alpha$  do poziomu i odległość od podstawy punktu przecięcia się  $P$  z osią ostrokągu.

Ciśnienie pionowe na powierzchnię ostrokągu:

$$P_z = \frac{\gamma}{4} [R^2 \pi h - \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)] = \frac{\gamma \pi h}{12} (2R^2 - Rr - r^2).$$

Ciśnienie poziome, prostopadłe do płaszczyzny rysunku, na trapez o podstawach  $R$  i  $r$ :

$$P_y = \gamma \frac{1}{2} (R + r) h \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{r + 2R}{r + R} = \frac{\gamma h^2}{6} (2R + r),$$

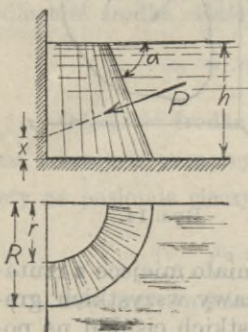
a taką samą wartość ma składowa, równoległa do płaszczyzny rysunku  $P_x$ . Ciśnienie całkowite:

$$P^2 = P_z^2 + 2P_y^2$$

$$P = \frac{\gamma h^2 (2R + r)}{12} \sqrt{8 + \pi^2 \cotg^2 \alpha},$$

gdzie:

$$\cotg \alpha = \frac{R - r}{h}.$$



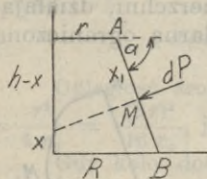
Rys. 16.

Dla znalezienia położenia punktu, w którym kierunek ciśnienia  $P$  (rys. 17) przecina oś ostrokągu, trzeba wziąć pod uwagę wężki pasek powierzchni  $AB$ , między dwiema tworzącymi ostrokągu, trapez o podstawach

$r d\varphi$  i  $R d\varphi$  i wysokości  $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$ . Środek ciśnienia na ten trapez, według wzoru

zadania 11, leży w odległości  $AM$  od wierzchołka  $A$ :

$$AM = x_1 = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{3R + r}{2R + r}.$$

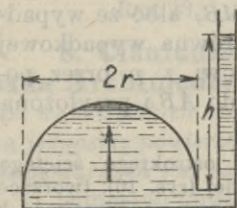


Rys. 17.

Ponieważ wszystkie ciśnienia elementarne  $dP$  przecinają oś ostrokągu w tym samym punkcie, więc ten punkt będzie zarazem środkiem ciśnienia; że zaś dla tego środka ciśnienia:  $(h-x) \sin \alpha = x_1 + r \cos \alpha$ , więc:

$$x = h - \frac{h}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{3R + r}{2R + r} - r \cotg \alpha.$$

**Zadanie 13.** Półkula, wypełniona cieczą, pozostaje pod ciśnieniem słupa cieczy  $h$  (rys. 18). Jakie jest ciśnienie pionowe na wewnętrzną powierzchnię półkuli?



Rys. 18.

Ciśnienie to jest równe ciśnieniu na płaską podstawę półkuli, na którą od spodu ciśnie  $\gamma \pi r^2 h$ , a od góry  $\frac{2}{3} \gamma \pi r^3$ . Ciśnienie więc wynosi:

$$P = \gamma \pi r^2 \left( h - \frac{2}{3} r \right).$$



Jeżeli ciało stałe jest zanurzone w płynie ważkim, będącym w równowadze, to składowa pozioma wypadkowej ciśnień na nie działających jest równa zeru, co znaczy, że ta wypadkowa jest pionowa. Przypuściwszy bowiem, że ciało stałe podzielone jest na warstwy poziome nieskończenie cienkie, przez płaszczyzny poziome równoległe, to ciśnienie na jednostkę powierzchni będzie jednakowe na obwodzie każdej poszczególniej warstwy, a rozumując w ten sam sposób jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że suma rzutów na dwie osie poziome, ciśnień działających na obwodzie każdej warstwy, jest równa zeru i składowa pozioma wypadkowej ciśnień na wszystkie warstwy także równa zeru, czyli że ta wypadkowa jest pionowa.

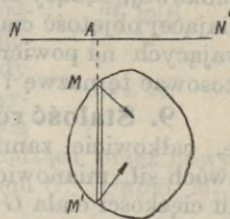
Jeżeli ciało stałe jest zanurzone w płynie ważkim, będącym w równowadze, to wypadkowa pionowa ciśnień działających na jego powierzchnię jest równa ciężarowi cieczy wypchniętej i przechodzi przez środek ciężkości masy jednorodnej, wypełniającej objętość zajmowaną przez ciało. Podzielmy ciało stałe na graniastosłupy pionowe nieskończenie małe i niech będzie  $\omega$  przecięcie proste, t. j. poziome jednego z tych graniastosłupów  $MM'$  (rys. 19). Jeżeli  $p$  i  $p'$  są ciśnienia na jednostkę powierzchni w  $M$  i  $M'$ , to suma rzutów na oś pionową ciśnień na ścianki górną i dolną graniastosłupa  $MM'$  będzie:

$$p' \omega - p \omega = (p' - p) \omega.$$

Jeżeli  $h$  i  $h'$  są głębokości punktów  $M$  i  $M'$  pod powierzchnią swobodną cieczy, to:

$$p = \gamma h, \quad p' = \gamma h', \quad (p' - p) \omega = \gamma (h' - h) \omega.$$

Różnica głębokości  $h - h'$  jest równa wysokości graniastosłupa  $MM'$ . Widzimy więc, że suma rzutów na oś pionową ciśnień działających na podstawy  $M$  i  $M'$  jest równa ciężarowi graniastosłupa wypełnionego płynem, w którym ciało jest zanurzone i że wypadkowa pionowa tych ciśnień działa od dołu do góry, w kierunku przeciwnym działaniu siły ciężkości. Powtarzając to rozumowanie dla każdego elementarnego graniastosłupa, dojdziemy do wniosku, że wypadkowa ciśnień na całą powierzchnię ciała stałego, jest równa ciężarowi płynu, któryby wypełniał objętość ciała stałego, i przechodzi przez środek ciężkości wszelkiej masy jednorodnej, wypełniającej tę objętość, gdyż wszystkie ciśnienia elementarne, składające się na tę wypadkową, są siłami pionowymi, których środek jest środkiem ciężkości masy jednorodnej, wypełniającej objętość ciała.

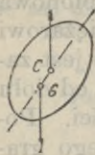


Rys. 19.

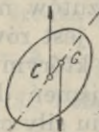
Wypadkową tę, usiłującą wypierać ciało z pod poziomu cieczy, nazwano *wyporem*. Twierdzenie o wyporze nosi nazwę *zasady Archimedesesa*. Ponieważ wypór sprawia pozorne zmniejszenie ciężaru ciała, nazywany bywa niewłaściwie *stratą ciężaru*.

Twierdzenie wywiedziono w przypuszczeniu, że ciężar właściwy płynu jest stały. Dowieść można w ten sam sposób prawdziwości zasady Archimedesesa i przy zmiennym ciężarze. Prawdziwość tę zresztą, we wszystkich przypadkach, wykazuje następujące rozumowanie. Jeżeli w płynie, będącym w równowadze, weźmiemy pod uwagę tę część płynu, która zostaje wypchniętą przez ciało stałe, gdy je w płynie zanurzono, to ta część płynu ponosi od części, które ją otaczają, ciśnienie pionowe równe i wprost przeciwne jej ciężarowi. Ciśnienie to, będące wypadkową wszystkich ciśnień działających na powierzchnię, która oddziela część płynu uważaną od części ją otaczających, pozostaje niezmienione, gdy uważana część płynu zastąpiona zostaje przez ciało zanurzone, gdyż powierzchnia, na którą to ciśnienie działa, nie ulega zmianie. Punkt przyłożenia tej wypadkowej, będący środkiem ciężkości masy jednorodnej, wypełniającej objętość ciała, nosi nazwę, gdy mowa o ciałach pływających na powierzchni cieczy, *środek zanurzenia*. Możliwość stosować tę nazwę i do ciał całkowicie zanurzonych.

**9. Stałość równowagi ciał pływających.** Ciało stałe, całkowicie zanurzone w cieczy, poddane jest działaniu dwóch sił, mianowicie swemu ciężarowi, przyłożonemu w środku ciężkości ciała  $G$  i wyporowi, t. j. ciśnieniu cieczy otaczającej, równemu ciężarowi cieczy wypchniętej i przyłożonemu w środku zanurzenia  $C$ . Ażeby ciało pozostawało w równowadze pod działaniem tych dwóch sił, trzeba i wystarcza, aby te siły były sobie równe i wprost przeciwne, t. j. aby ciężar ciała był równy ciężarowi cieczy wypchniętej i aby środek ciężkości ciała i środek zanurzenia leżały na jednej pionowej. Ale żeby równowaga była stała, trzeba jeszcze, aby środek ciężkości ciała leżał pod środkiem zanurzenia. Widzimy bowiem, że wtedy (rys. 20), przy najlżejszym poruszeniu, obie siły dążą do przywrócenia ciała położenia równowagi, gdy przeciwnie, jeżeli środek zanurzenia leży pod środkiem ciężkości ciała (rys. 21), wtedy ciało dąży do dalszego odchylenia się od położenia równowagi.



Rys. 20.

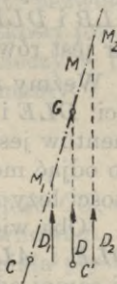


Rys. 21.

Jeżeli ciężar ciała stałego jest mniejszy od ciężaru cieczy, która byłaby przez ciało wypchniętą przy całkowitem zanurzeniu, wtedy ciało pływa na powierzchni cieczy i zanurza się na

tylko, aby ciężar cieczy wypchniętej był równy ciężarowi ciała. Wtedy wypadkowa ciśnień cieczy na ciało równowagi ciężar ciała, a środki ciężkości ciała i zanurzenia leżeć winny na jednej pionowej. Warunek wszakże stałości równowagi przybiera wtedy inną postać, co pochodzi stąd, że przy każdej zmianie położenia ciała pływającego zmienia się kształt części zanurzonej, a więc i położenie środka zanurzenia.

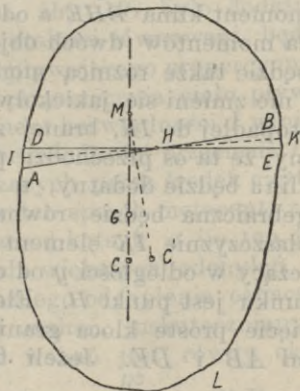
Niech będzie  $G$  (rys. 22), środek ciężkości ciała pływającego,  $C'$  — środek zanurzenia, odpowiadający położeniu równowagi. Jeżeli przypuścimy, że ciało pływające zmieniło położenie w ten sposób, że oś pływania  $GC'$  przyjąłoby położenie  $GC$ , to nowy środek zanurzenia znajdowałby się w  $D$ ,  $D_1$  lub  $D_2$ . Jeżeli leżećby w  $D$  na pionowej  $GC'$ , wtedy dwie siły na ciało działające, mianowicie ciężar i wypór, są wprost przeciwne i ciało pozostaje w stanie równowagi obojętnej, utrzymującej się przy każdej pomyślanej zmianie położenia ciała. Jeżeli środek zanurzenia przejdzie do  $D_1$ , to para sił dąży do dalszego oddalania ciała od położenia równowagi i równowaga jest nie stałą. Stałą być może wtedy



Rys. 22.

tylko, gdy nowy środek zanurzenia przypadnie w  $D_2$ , poza pionową, przechodzącą przez  $G$ , t. j. gdy pionowa  $D_2M_2$ , przechodząca przez nowy środek zanurzenia, przecina  $CG$  nad punktem  $G$ . Punkt  $M_2$ , w którym wtedy kierunek wyporu przecina oś pływania  $GC'$ , nazywamy *metacentrum*. Warunkiem więc stałości równowagi jest położenie metacentru nad środkiem ciężkości ciała pływającego.

Postarajmy się oznaczyć położenie metacentru. Niech będzie ciało pływające, którego środek ciężkości jest w  $G$  (rys. 23). W położeniu równowagi linią pływania jest  $DE$ , przecięcie powierzchni ciała przez płaszczyznę poziomu cieczy i środek zanurzenia  $C$  leży na prostopadłej do  $DE$ , przechodzącej przez  $G$ . Przypuśćmy, że skutkiem nieskończonej małej zmiany położenia ciała pływającego, linią pływania staje się  $AB$ , a nowy środek zanurzenia znajduje się w  $C'$ . Metacentrum



Rys. 23.

jest granica położenia punktu  $M$ , przecięcia się prostej  $CG$  z pionową, przechodzącą przez  $C'$ , przy nieskończeniu małej zmianie położenia ciała pływającego. Przyjmijmy, że płaszczyzna rysunku jest pionową, prostopadłą do przecięcia płaszczyzn  $AB$  i  $DE$ , że zmiana położenia jest bardzo mała, tak że dwa przekroje  $AB$  i  $DE$  różnią się bardzo mało jeden od drugiego. Każdy z tych przekrojów będzie prawie równy przekrojowi pośredniemu  $IK$  ciała przez płaszczyznę, dzielącą na połowę kąt, pod jakim przecinają się płaszczyzny  $DE$  i  $AB$ ; na tej płaszczyźnie leżą środki ciężkości dwóch klinów:  $DHA$  i  $BHE$ , których objętości są równe, ponieważ równe są objętości  $ALB$  i  $DLE$ , wypychające każda objętość cieczy  $V$ , której ciężar jest równy ciężarowi ciała pływającego.

Weźmy momenty względem płaszczyzny  $IK$  dwóch objętości:  $DLE$  i  $ALB$ . Jeżeli przypuścimy, że pierwszy z tych momentów jest znany, to aby otrzymać drugi, trzeba od pierwszego odjąć moment klina  $DHA$ , równy zeru, bo jego środek ciężkości leży na  $IH$ , i dodać moment klina  $BHE$ , także równy zeru. Oba więc momenty są sobie równe, a ponieważ objętości  $DLE$  i  $ALB$  są równe, przeto ich środki ciężkości leżą w tej samej odległości od  $IK$ , czyli że środek zanurzenia  $C'$  leży na równoległej do  $IK$ , przechodzącej przez  $C$ .

Weźmy następnie momenty tych samych dwóch objętości względem prostej, prostopadłej do  $IK$ . Różnicę ich stanowić będzie iloczyn z  $V$  przez odległość  $CC'$ . I tu możemy przechodzić od jednego z tych momentów do drugiego, dodając moment klina  $BHE$  a odejmując moment klina  $BHA$ . Różnica momentów dwóch objętości  $DLE$  i  $ALB$ , równa  $V \times CC'$ , będzie także różnicą momentów dwóch klinów  $BHE$  i  $DHA$  i nie zmieni się, jakiegokolwiek będzie położenie linii prostej, prostopadłej do  $IK$ , branej za oś momentów. Jeżeli przypuścimy, że ta oś przechodzi przez punkt  $H$ , to moment jednego klina będzie dodatny, a drugiego ujemny i ich różnica algebraiczna będzie równa sumie arytmetycznej. Weźmy na płaszczyźnie  $IK$  element powierzchni nieskończenie mały  $\omega$ , leżący w odległości  $y$  od osi, której rzutem na płaszczyznę rysunku jest punkt  $H$ . Element ten uważać można jako przecięcie proste kłosa graniastosłupowego, między płaszczyznami  $AB$  i  $DE$ . Jeżeli  $\theta$  jest kąt  $DHB$ , to wysokość graniastosłupa będzie  $2y \sin \frac{\theta}{2}$ , a objętość  $2y \omega \sin \frac{\theta}{2}$ , albo  $y \omega \theta$ , przyjmując, że kąt  $\theta$  jest bardzo mały, tak że można zastąpić jego wstawę długością łuku. Moment tego graniastosłupa, względem prostej, której rzutem jest punkt  $H$ , będzie  $y^2 \omega \theta$ ,

a suma momentów wszystkich graniastosłupów, tworzących oba kliny  $\Sigma y^2 \omega \theta = \theta \Sigma \omega y^2$ , obejmuje wszystkie elementy przecięcia  $IK$ . Mamy więc:

$$V \times CC' = \theta \Sigma \omega y^2,$$

że zaś kąt  $CMC'$  jest równy  $\theta$  i  $CC' = 2MC \sin \frac{\theta}{2} = MC \times \theta$ , przeto:

$$V \times MC \times \theta = \theta \Sigma \omega y^2.$$

W granicy, przecięcie  $IK$  schodzi się z przecięciem  $DE$  i prosta  $H$  przechodzi przez środek ciężkości tego przecięcia. Jeżeli oznaczymy przez  $I = \Sigma \omega y^2$  moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości przecięcia  $DE$  ciała pływającego, płaszczyznę poziomą cieczy w położeniu równowagi, to z równania ostatniego otrzymamy:

$$MC = \frac{I}{V}.$$

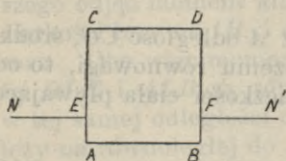
Jeżeli wreszcie oznaczymy przez  $A$  odległość  $CG$ , środka zanurzenia od środka ciężkości w położeniu równowagi, to odległość  $MG$ , metacentru od środka ciężkości ciała pływającego będzie:

$$MG = \frac{I}{V} \mp A. \quad (18)$$

gdzie znak  $\mp$  odnosi się do przypadku, gdy środek ciężkości  $G$  leży pod środkiem zanurzenia  $C$ . Aby więc równowaga była stałą, trzeba i wystarcza, aby  $MG$  było dodatne. Ta wielkość  $MG$  jest niejako miarą stałości równowagi, będąc przy każdej zmianie położenia ciała pływającego proporcjonalną do ramienia pary sił, dążącej do przywrócenia ciała pływającemu położenia równowagi. Moment bezwładności  $I$  winien tu być najmniejszym z momentów bezwładności przecięcia  $DE$  względem wszystkich osi, przechodzących przez środek ciężkości tego przecięcia. Wyznaczony w ten sposób metacentr zajmuje położenie określone, niezależne od kąta  $\theta$ , o ile ten kąt jest bardzo mały. W przypadkach większych odchylen od położenia równowagi, trzeba dla każdego odchylenia oznaczać położenie metacentru z wielkości wahań, uskutecznianych przez ciało pływające. Okres tych wahań jest równy okresom wahań wahadła prostego o długości  $\frac{R^2}{MG}$ , jeżeli  $R$  oznacza promień wirowania ciała, względem jego osi podłużnej poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości.

**10. Zastosowanie do graniastoslupa o przekroju kwadratowym.** Weźmy pod uwagę graniastoslup jednorodny, nieokreślonej długości, o przekroju kwadratowym. Oznaczmy przez  $a$  bok kwadratu a przez  $d$  stosunek ciężaru właściwego graniastoslupa do ciężaru wł. cieczy; będzie to ciężar właściwy graniastoslupa, przy ciężarze wł. cieczy wziętym za jedność. Pierwszy warunek równowagi, polegający na tem, aby środek ciężkości ciała pływającego i środek zanurzenia, leżały na jednej pionowej, może tu mieć miejsce przy dwóch położeniach graniastoslupa: pierwszem, gdy dwie ściany są równoległe do poziomu cieczy i drugim, gdy ściany są nachylone pod kątem  $45^\circ$  do poziomu cieczy. W tem ostatniem położeniu graniastoslup mieć będzie jedną lub trzy krawędzie zanurzone, stosownie do tego, czy jego ciężar właściwy będzie mniejszy lub większy od 0,50.

**Zadanie 14.** W pierwszym przypadku (rys. 24) oznaczmy głębokość ściany poziomej  $AB$  pod poziomem cieczy  $NN'$  przez  $z=AE=BF$ . Jeżeli przyjmiemy długość graniastoslupa równą jedności, będzie  $I = \frac{a^3}{12}$ ,  $V = az$ , a odległość metacentru od środka ciężkości graniastoslupa:



Rys. 24.

$$\frac{I}{V} = \frac{a^2}{12z}.$$

Odległość ta powinna być większa od odległości, środka zanurzenia od środka ciężkości ciała pływającego, to jest od  $A = \frac{a-z}{2}$ .

Warunkiem więc stałości równowagi jest:

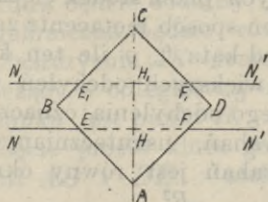
$$\frac{a^2}{12z} > \frac{a-z}{2},$$

czyli że  $\frac{z}{a} = d$  ciężarowi właściwemu graniastoslupa, przy ciężarze

cieczy równym jedności, winno być albo mniejsze od  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,212$  albo

większe od  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,788$ . Ró-

wnowaga będzie niestabilną między temi dwiema granicami.



Rys. 25.

**Zadanie 15** W drugim przypadku (rys. 25), gdy ściany są pochylone pod kątem  $45^\circ$  i jedna krawędź jest zanurzona, jeżeli przez  $z$  oznaczmy głębokość zanurzenia  $AH$  tej krawędzi, to przy objętości graniastoslupa  $a^2$  i objętości części zanurzo-

nej  $z^2$ , ciężar właściwy  $d = \frac{z^2}{a^2}$ . Moment bezwładności:

$$I = \frac{(2z)^3}{12} = \frac{2z^3}{3},$$

$$\frac{I}{V} = \frac{2}{3} z.$$

Stosunek ten winien być większy od odległości, środka ciężkości graniastoslupa od środka zanurzenia, czyli od:

$$A = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} z,$$

warunkiem więc stałości równowagi jest nierówność:

$$\frac{2}{3} z > \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} z,$$

albo:

$$\frac{8}{3} z > a\sqrt{2},$$

skąd:

$$\frac{z^2}{a^2} > \frac{9}{32},$$

czyli ciężar właściwy:

$$d > 0,281.$$

Tak samo dla przypadku, gdy trzy krawędzie będą zanurzone, otrzymać można warunek stałości równowagi:

$$d < \frac{23}{32},$$

czyli:

$$d < 0,719.$$

Graniastoslup więc, o podstawie kwadratowej, pływać będzie ze ścianą górną poziomą, gdy jego ciężar właściwy jest mniejszy od 0,212 lub większy od 0,788. Będzie miał ściany nachylone pod kątem  $45^\circ$  przy ciężarze właściwym, zawartym w granicach od 0,281 do 0,719. Można więc np. z samego położenia belki drewnianej o przekroju kwadratowym, pływającej na powierzchni wody, wnosić czy jest dębowa czy sosnowa. Ciężar właściwy dębu wynosi około 0,87, belka więc dębowa pływać będzie ze ścianą górną poziomą; ciężar właściwy sosny jest około 0,49, belka więc sosnowa ułoży się ze ścianami nachylonemi, pod kątem  $45^\circ$ .

## II. Hydrodynamika.

**11. Równania Eulera.** Gdy płyn jest w ruchu, siły zewnętrzne  $X, Y, Z$ , działające na prostocian elementarny (rys. 6), równoważyć winny rzuty przyspieszenia, jakie nadaje jednostce masy prostociąnu prędkość  $V$ , której składowe według trzech osi spólrzędnych są  $u, v, w$ . Rzuty przyspieszenia są całkowitemi pochodniami tych składowych prędkości względem czasu  $t$  i oznaczymy je przez  $u', v', w'$ . Stawiając w równaniu (1), zamiast  $X, Y, Z$ , różnice  $X - u', Y - v', Z - w'$ , otrzymujemy równania ruchu płynów doskonałych:

$$\begin{aligned} \rho (X - u') - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \rho (Y - v') - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \rho (Z - w') - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

Składowe  $u, v, w$ , prędkości  $V$ , są funkcjami spólrzędnych  $x, y, z$  i czasu  $t$ . Całkowita różniczka każdej z nich, np.  $u$ , ma wyrażenie:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

a pochodną  $u'$  względem czasu, otrzymamy, dzieląc różniczkę przez  $dt$ :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Stosunki  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  są to składowe  $u, v, w$ , prędkości  $V$ . Otrzymujemy więc wyrażenia na  $u'$ , a w ten sam sposób na  $v'$  i  $w'$ , następujące:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ v' &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ w' &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

W spólrzędnych cylindrycznych  $r, \varphi, z$  (§ 4), które, jak



uwidocznią rys. 26, odpowiadają spólrzędnym prostokątnym  $x, y, z$ , w ten sposób, że:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z;$$

wstawiając w równania (3) zamiast  $R, T, Z$ , składowych wypadkowej sił zewnętrznych w trzech kierunkach: promieniowym, stycznym i osiowym, różnice pomiędzy temi składowymi a przyspieszeniami w tychże kierunkach, pamiętając przytem, że  $u = \frac{\partial r}{\partial t}$ ,  $v = r\theta$ ,

gdzie prędkość kątowna  $\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,

$w = \frac{\partial z}{\partial t}$ , otrzymamy równania ruchu płynów doskonałych:

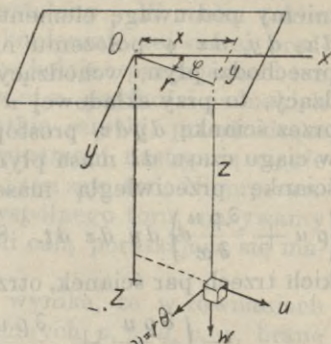
$$\left. \begin{aligned} \rho \left( R - \frac{du}{dt} + \theta^2 r \right) - \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left( T - \frac{dv}{dt} - \theta u \right) - \frac{\partial p}{r \partial \varphi} &= 0, \\ \rho \left( Z - \frac{dw}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

a rozwinięcia pochodnych prędkości względem czasu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \frac{\partial u}{\partial r} + \theta \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{dv}{dt} &= r \left[ u \frac{\partial \theta}{\partial r} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + \theta u \\ \frac{dw}{dt} &= u \frac{\partial w}{\partial r} + \theta \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Dla wyznaczenia pięciu nieznanych  $p, \rho, x, y, z$ , (lub  $p, \rho, r, \varphi, z$ ) potrzeba jeszcze dwóch równań. Jedno z nich wynika z samej natury płynu, mamy bowiem dla cieczy  $\rho =$  ilości stałej, a dla gazów  $\rho = Kp = \frac{kp}{1 + \alpha t}$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnik rozszerzalności, a  $t$  temperatura.

Piąte równanie, zwane *równaniem ciągłości*, otrzymamy wyrażając, że płyn w ruchu pozostaje ośrodkiem ciągłym, nie



Rys. 26.

tworzą się w nim próżnie, a masa każdej cząstki pozostaje wciąż równą iloczynowi z objętości przez gęstość. Jeżeli weźmiemy pod uwagę elementarny prostopadłościan o objętości  $dx, dy, dz$  w położeniu niezmiennem, przez ściany którego przechodzi płyn, wchodzący do jego wnętrza i z niego wychodzący, to przy składowej  $u$  prędkości cząstek, przechodzących przez ściankę  $dy dz$ , prostopadłą do tej składowej, przechodzi w ciągu czasu  $dt$  masa płynu  $\rho u dy dz dt$ , a wychodzi przez ściankę przeciwległą masa zwiększona o swoją różniczkę  $(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx) dy dz dt$ . Stosując to obliczenie do wszystkich trzech par ścianek, otrzymamy ogólne powiększenie masy:

$$- \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

Ponieważ objętość się nie zmienia i pozostaje równą  $dx dy dz$ , więc powiększenie masy równe jest iloczynowi z objętości, przez powiększenie gęstości w ciągu czasu  $dt$ , t. j. przez  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ . Wypisując to równanie i dzieląc obie strony przez  $dx dy dz dt$ , otrzymujemy równanie ciągłości dla płynów doskonałych:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (23)$$

a w spólrzędnych cylindrycznych, rozważając wycinek cylindryczny o masie  $\rho dr \cdot r d\varphi \cdot dz$  jak w § 3:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{d\rho}{dt} + \frac{u\rho}{r} = 0. \quad (24)$$

Dla cieczy  $\rho$  jest stałe,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  i pozostaje równanie ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

a w odniesieniu do spólrzędnych cylindrycznych:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0. \quad (26)$$

**12. Ruch ustalony płynów.** Jeżeli dla każdego punktu przestrzeni, którą płyn w swym ruchu wypełnia, pięć zmiennych:  $p, \rho, u, v, w$ , zachowują wciąż te same wartości w każdym poszczególnym punkcie, a zmieniają się wtedy tyl-

ko, gdy przechodzimy do innego punktu tejże przestrzeni, możemy, że ma miejsce ruch płynu ustalony. W ruchu takim każda cząstka płynu nie zachowuje koniecznie tej samej prędkości, ale różne cząstki, przechodzące kolejno przez jeden i ten sam punkt przestrzeni, nabierają w nim prędkości jednakich co do wielkości i kierunku. Wszystkie cząstki, przechodzące przez jeden i tenże sam punkt przestrzeni następują ciągle jedna po drugiej i przebiegają jeden i ten sam tor. Nieprzerwany ciąg tych cząstek, wzdłuż ich wspólnego toru, nazywamy *strugą*, a zbiór wszystkich strug, czyli całą poruszającą się masę — *prądem* płynu w ruchu.

Z określenia ruchu ustalonego wynika, że w równaniach (20) i (22) pochodne cząstkowe zmiennych  $p, \rho, u, v, w$ , brane względem czasu  $t$ , są równe zeru:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Jeżeli równania (19) pomnożymy kolejno przez:

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt,$$

i dodamy, to otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz) - \rho (u u' + v v' + w w') dt.$$

Pierwsza strona tego równania jest różniczką całkowitą  $dp$  ciśnienia  $p$ , a po drugiej stronie:

$$u' dt = du, \quad v' dt = dv, \quad w' dt = dw;$$

zaś trzy składowe:  $u, v, w$ , prędkości  $V$ , związane są równaniem:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

z którego po zróżniczkowaniu:

$$V dV = u du + v dv + w dw.$$

Otrzymujemy więc:

$$\frac{dp}{\rho} - (X dx + Y dy + Z dz) + V dV = 0,$$

a gdy na płyn działa tylko sama siła ciężkości:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

mamy ogólne równanie różniczkowe hydrodynamiki:

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + V dV = 0. \quad \dots \quad (27)$$

Dla cieczy  $\rho$  jest stałe i po zcałkowaniu, ponieważ  $\rho g = \gamma$ , będzie:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{ilości stałej} \dots \dots (28)$$

równanie wyrażające twierdzenie Daniela Bernoulli'ego.

Jest ono analogiczne z równaniem hydrostatyki (10) i może być w podobny sposób przedstawione geometrycznie. Jeżeli w każdym punkcie płynu doskonałego w ruchu ustalonym, wyprowadzimy rzędną pionową, równą wysokości  $\frac{p}{\gamma}$  ciśnienia w tym punkcie, a nad nią odetniemy wysokość  $\frac{v^2}{2g}$ , odpowiadającą prędkości cząstki w tym punkcie, to końce górne wszystkich tych rzędnych leżeć będą na płaszczyźnie poziomej, wyznaczonej przez rzędną  $H$  i zwanej *plaszczyzną naporu*. Suma  $z + \frac{p}{\gamma}$ , która w hydrostatyce stanowiła cały napór, jest tu tylko jego częścią i stanowi tak zwaną *wysokość poziomu piezometrycznego*.

Jeżeli w prąd cieczy wstawimy rurkę pionową  $AB$ , na obu końcach otwartą, zwaną *piezometrem*, to ciecz wzniesie się w rurce do wysokości odpowiadającej ciśnieniu w punkcie  $A$  (którego rzędna jest  $z$ ), tak, że  $AB = \frac{p}{\gamma}$ . Poziom cieczy  $B$  w piezometrze leżeć będzie na wysokości  $z + \frac{p}{\gamma}$  nad płaszczyzną porównania. Słup cieczy  $AB$  nazywamy *słupem piezometrycznym*. Dwie rurki piezometryczne, złączone w górnej części, pozwalają mierzyć różnicę ciśnienia w dwóch sąsiednich punktach prądu i stanowią *piezometr różniczkowy*.

Rys. 27.

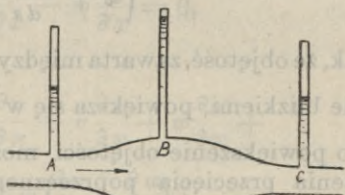
Oznaczając wysokość poziomu piezometrycznego  $z + \frac{p}{\gamma} = h$ , mamy z równania Bernoulli'ego:

$$h + \frac{v^2}{2g} = \text{ilości stałej}$$

i jeżelibyśmy wzięli pod uwagę punkt materialny, o ciężarze równym jedności, poddany działaniu tych samych sił, jakie działają na ciecz, przebiegający tę samą drogę, po jakiej bieży

cząstka cieczy, i z temiż samemi prędkościami, to ponieważ jego energia kinetyczna jest równa  $\frac{V^2}{2g}$ , więc jego energia potencjalna będzie proporcjonalną do wyżej określonej wysokości piezometrycznej  $h$ . Jeżeli przecięcie poprzeczne prądu zmienia się, jak to ma miejsce np. w rurze o zmiennym przekroju, to prędkość zmienia się w ten sposób, że objętość cieczy przechodząca w jednostce czasu przez różne przekroje pozostaje stałą, czyli innymi słowy prędkość zmienia się w stosunku odwrotnym do powierzchni przecięcia, jest mniejsza na przekroju większym  $B$  (rys. 28) a większa na mniejszych  $A$  i  $C$ .

Piezometry umieszczone w punktach  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , wskażą poziom piezometryczny wyższy w  $B$  a niższy w  $A$  i  $C$ . Ciecz, biegnąca w kierunku strzałki, spotyka między  $A$  i  $B$  coraz większe ciśnienie i przezwycięża je, tracąc na prędkości. Pewna część jej energii kinetycznej zamienia się na potencjalną. Odwrotnie, przechodząc od  $B$  do  $C$ , ciśnienie się zmniejsza a prędkość powiększa i to powiększenie energii kinetycznej wynika ze zmniejszenia energii potencjalnej.



Rys. 28.

W innych znów słowach, trzy wyrazy wzoru (28), których stała suma stanowi całkowitą energią cząstki cieczy w ruchu, przedstawiają każdy inny składnik energii. Wzniesienie punktu  $z$  jest *energiją z położenia*, wysokość odpowiadająca ciśnieniu  $\frac{p}{\gamma}$  *energiją z ciśnienia*, wreszcie wysokość odpowiadająca prędkości  $\frac{V^2}{2g}$  — *energiją z ruchu*.

Równanie ruchu ustalonego, z którego wynikło twierdzenie Bernoulli'ego, wywiedzionem było w założeniu, że różniczki:  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , są rzutami istotnego przemieszczenia cząstki cieczy w ciągu czasu  $dt$ , na osie spólrzędnych. Stosuje się więc to twierdzenie tylko do rzeczywistego toru, którą przebiega cząsteczka, czyli do jednej i tej samej strugi. Uwzględniając wszakże prędkości średnie na kolejnych przecięciach poprzecznych prądu, o jakich codopiero była mowa, stosować można twierdzenie Bernoulli'ego do prądu w ruchu ustalonym, uważając za strugę cieczy, nie istotny tor cząsteczki, przedstawiający liczne zagięcia i raptowne zmiany kierunku,

lecz krzywą, będącą we wszystkich swych punktach styczną do kierunków prędkości średniej w tych punktach.

Gdy prędkości  $u$  wszystkich cząstek prądu cieczy, przechodzących przez przecięcie poprzeczne o powierzchni  $\omega$ , są sobie równe i do tego przecięcia prostopadłe, to  $Q = \omega u$  będzie wydatkiem prądu, czyli objętością cieczy, przechodzącej przez przecięcie  $\omega$  w jednostce czasu. Objętość cieczy przechodzącej przez to przecięcie w ciągu czasu  $dt$  będzie  $Q dt$ , a cieczy przechodzącej przez przecięcie następne, odległe od pierwszego na  $ds$ :

$$\left( Q + \frac{dQ}{ds} ds \right) dt;$$

tak, że objętość, zawarta między dwoma przecięciami nieskończenie blizkimi, powiększa się w ciągu tego czasu o  $-\frac{dQ}{ds} ds dt$ .

To powiększenie objętości może być tylko wynikiem powiększenia przecięcia poprzecznego  $\omega$ , które przybrało wartość  $\omega + \frac{d\omega}{dt} dt$ , co odpowiada powiększeniu objętości  $\frac{d\omega}{dt} dt ds$ .

Przyrównywując do siebie te dwa wyrażenia, po podzieleniu przez czynnik wspólny  $dt ds$ , otrzymujemy równanie:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{dQ}{ds} = 0 \dots \dots \dots (29)$$

wyrażające w innym kształcie równanie ciągłości (25).

*Zadanie 16.* Jaka jest różnica energii dwóch cząstek cieczy w spoczynku, jednakiej masy, z których jedna leży na poziomie cieczy, a druga pod poziomem na głębokości  $h$ ?

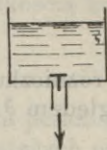
Stosując wzór (28), mamy dla obu cząstek w spoczynku  $V=0$  energia z ruchu jest równa zeru i zostają tylko składniki z położenia i z ciśnienia. Dla cząstki na poziomie  $z=h$ ,  $p=0$  i cała energia wynosi  $h$ . Dla cząstki na głębokości  $h$ , przymując płaszczyzną porównania przechodzącą przez tę cząstkę,  $z=0$ , a według (11)  $\frac{p}{\gamma} = h$ . Obie więc cząstki mają jednakową energię i różnica jest równa zeru.

*Zadanie 17.* Jaka jest różnica energii dwóch cząstek cieczy, z których jedna jest w spoczynku na poziomie w naczyniu, a druga wypłynęła na zewnątrz przez otwór u spodu naczynia i znajduje się w ruchu, w odległości  $h$  od poziomu?

Stosując wzór (28), mamy dla cząstki w spoczynku na poziomie cieczy  $V=0$ ,  $p=0$ ,  $z=h$  i cała energia sprowadza się do energii z położenia. Dla cząstki w ruchu  $V = \sqrt{2gh}$ ,  $p=0$ ,  $z=0$ , i cała energia sprowadza się do energii ruchu  $\frac{V^2}{2g} = h$ . Różnica więc obu energii jest równa zeru.

**Zadanie 18.** Ciecz wypływająca z naczynia przez przepustnik (rys. 29) dąży do zamknięcia przepustnika. Jak się objaśnia to zjawisko?

Według (28) suma energii jest stałą. Gdy prędkość pod przepustnikiem wzrasta, ciśnienie musi się zmniejszać i przestaje równoważyć napór cieczy na przepustnik. Napór ten dąży do zamknięcia przepustnika.



Rys. 29.

**13. Ruch potencjalny cieczy.** Dopisując do prawej strony pierwszego z równań (19), po wstawieniu za  $u'$  rozwinięcia według (20), tożsamość:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

otrzymamy równanie:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

a ponieważ po zróżniczkowaniu równania:

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2,$$

mamy:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (V^2)}{\partial x},$$

gdzie  $V$  jest prędkością wypadkową trzech składowych  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , to przekształcając w ten sam sposób pozostałe dwa równania (19), mieć będziemy:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} + w \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} + u \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (30).$$

Jeżeli ruch cieczy odbywa się w ten sposób, że:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \dots \quad (31)$$

to odpadają ostatnie dwa wyrazy każdego z równań (30) i składowe  $u$ ,  $v$ ,  $w$  stają się cząstkowymi pochodnymi pewnej funkcji:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t), \quad \dots \quad (32)$$

nazwanej przez Helmholtza *potencjałem prędkości*. Gdy bowiem:

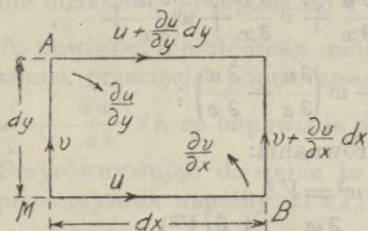
$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (33)$$

to, różniczkując pierwsze z tych równań względem  $\partial y$  a drugie względem  $\partial x$ , otrzymujemy:

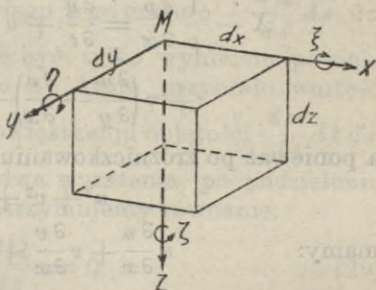
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

czyli pierwsze z równań (31) a podobnie dwa pozostałe.

Warunek istnienia dla danego prądu potencjału prędkości jest identyczny z innym warunkiem hydrodynamiki. Aby prędkość prądu ulegała stałym zmianom, winno dla nieskończenie małego elementu płaskiego  $AB$  (rys. 30) następo-



Rys. 30.



Rys. 31.

wać powiększanie składowych prędkości, od wartości  $u$  i  $v$  w punkcie  $M$ , do wartości  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  w punkcie  $A$  i wartości  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  w punkcie  $B$ . Powiększeniom tym:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

odpowiadają, w przeciwne strony skierowane prędkości kątowe wierzchołków  $A$  i  $B$  wokoło punktu  $M$ , które po podzieleniu przez ramiona momentów  $dy$  i  $dx$  są:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{i} \quad +\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Przyjmujemy tu za dodatni, ten kierunek obrotu, jaki mają skazówki zegarka, widziane z początku współrzędnych  $M$ , położonego z tyłu płaszczyzny rysunku. Tym sposobem, uważany element płaski  $dx, dy$ , oprócz przesunięć z prędkościami



mi  $u$  i  $v$ , wykonywa jeszcze obrót ze średnią prędkością kątową:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \zeta,$$

około osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Dwa podobne obroty, tak samo mają miejsce, około dwóch pozostałych osi (rys. 31), tak że razem dla uważanego elementu otrzymujemy trzy prędkości kątowe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \xi \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \eta \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

będące, jak wiadomo z mechaniki, składowymi prędkości kątowej wypadkowej  $\theta$ , takiej że:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \theta^2.$$

Prędkość kątową  $\theta$  nazwał Helmholtz *prędkością wirowania*, oś obrotu *osią wirowania*, wielkości  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  *składowymi wirowania*. Osie tych składowych są równoległe do osi współrzędnych. Ruch potencjalny cieczy, określony równaniami (31), przy których te składowe (34) są równe zeru, jest ruchem *bez wirowania*, albo *niewirowym*.

Wprowadzając do równań (30) wartości (33) składowych prędkości, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\},$$

a po położeniu:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F, \dots \dots \dots (35)$$

mieć będziemy:

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

tak że, przy potencyale prędkości, składowe sił zewnętrznych, działających na ciecz, są także pochodnymi pewnej funkcji:

$$F = F(x, y, z, t), \dots \dots \dots (36)$$

noszącej nazwę *potencjału sił*. Jeżeli więc ruch cieczy doskonałej posiada potencjał prędkości, to równocześnie istnieje dla tego ruchu potencjał sił zewnętrznych.

Po wprowadzeniu potencjału prędkości, równanie ciągłości (25) przybiera kształt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \quad (37)$$

a także równanie (26), w odniesieniu do współrzędnych cylindrycznych:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \dots \quad (38)$$

Równanie (32) potencjału prędkości, daje dla każdej wartości  $\Phi$  i  $t$ , równanie jednej powierzchni *ekwipotencjalnej* prędkości, czyli powierzchni jednakowych prędkości. Różniczkując je i uwzględniając (33), mamy wogóle:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + u dx + v dy + w dz. \quad \dots \quad (39)$$

a dla powierzchni ekwipotencjalnej, t. j. dla  $d\Phi = 0$ :

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + u dx + v dy + w dz, \quad \dots \quad (40)$$

skąd wynika, że powierzchnia ekwipotencjalna wogóle zmienia w czasie swój kształt i położenie. W pewnej oznaczonej chwili mamy, dla  $dt = 0$ :

$$u dx + v dy + w dz = 0, \quad \dots \quad (41)$$

gdzie różniczki  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  są rzutami, na trzy osie współrzędnych prostokątnych, przesunięcia  $ds$  na powierzchni ekwipotencjalnej. Równanie (41) wyraża, że prędkość wypadkowa  $V$  jest w każdej chwili normalną do powierzchni ekwipotencjalnej. Postępując zaś w kierunku ruchu cieczy, mamy przesunięcia:

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt,$$

albo:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \dots \quad (42)$$

Jest to równanie różniczkowe toru cząstki cieczy, ożywionej prędkością  $V$ . Tor ten nosi nazwę *strugi* cieczy. Kształt i położenie strugi w przestrzeni, zmienia się podobnie jak kształt i położenie powierzchni ekwipotencjalnej.

Jeżeli  $dn$  jest elementem normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej, to prędkość wypadkowa analogicznie do (33):

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n}. \quad (43).$$

Prędkość wypadkowa jest więc identyczną ze zmianą potencjału prędkości w kierunku ruchu, która to zmiana nosi nazwę *spadku* albo *gradientu* potencjału prędkości. Według (43), odległości  $dn$  powierzchni ekwipotencjalnych, jednej od drugiej, są odwrotnie proporcjonalne do prędkości. To też powierzchnie różnych potencjałów nie mogą się nigdy przecinać, gdyż dla  $dn = 0$ , byłyby prędkość  $V = \infty$ .

**Zadanie 19.** Jakie będą strugi cieczy w ruchu, którego potencjał prędkości:

$$\Phi = c_1 x + c_2 y + c_3 z + at^2$$

Według (32) i (33),  $u = c_1$ ,  $v = c_2$ ,  $w = c_3$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a$ ,

$$V^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \text{ilości stałej} = c^2.$$

Według (42), równanie różniczkowe strugi będzie:

$$\frac{dx}{c_1} = \frac{dy}{c_2} = \frac{dz}{c_3},$$

skąd:

$$x = c_1 t + b_1,$$

$$y = c_2 t + b_2,$$

$$z = c_3 t + b_3,$$

gdzie  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  są nowe stałe, wyznaczające położenie cząstki w chwili  $t = 0$ . Strugi są liniami prostymi prostopadłymi do płaszczyzn ekwipotencjalnych  $\Phi$  a cząstki cieczy przechodzą, przez każdą z tych płaszczyzn, ze stałą prędkością  $V = c$ .

Gdy siły zewnętrzne sprowadzają się do działania samej tylko siły ciężkości, wtedy:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

potencjał sił zewnętrznych:

$$F = g(z - z_0)$$

i według (35):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + a = g(z - z_0).$$

Ciśnienie więc powiększa się liniźnie, razem z głębokością pod poziomem normalnym  $z_0$ , tak, że jeżeli dla  $z = z_0$ , wynosi  $p = p_0$ , to z równania:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{c^2}{2} + a = 0$$

oznaczyc można ilość stałą  $a$  i potencjał prędkości będzie wtedy:

$$\Phi = c_1 x + c_2 y + c_3 z - \left( \frac{p_0}{\rho} + \frac{c^2}{2} \right) t.$$

**14. Prąd ustalony, równoległy, płaski.** W przypadku prądu ustalonego dwuwymiarowego, gdy ciecz nie ma żadnego ruchu w kierunku np. osi  $z$ , z równania ciągłości (25) pozostaje:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (44)$$

a po wprowadzeniu potencjału prędkości, określonego wartościami:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (45)$$

równanie:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (46)$$

i to równanie różniczkowe drugiego rzędu, na całej rozciągłości prądu, czynić winno zadość potencjałowi prędkości:

$$\Phi = \Phi(x, y). \quad (47)$$

Równanie (47), będące całką równania (46), daje dla każdej wartości parametru  $\Phi$  pewną krzywą płaską, przedstawia zatem dla różnych możliwych wartości parametru wiązkę krzywych na płaszczyźnie  $xy$ . Są to krzywe niezmiennego potencjału, zwane ekwipotencjalnymi albo *równicami*. Zmianę, przy przejściu od jednej z tych krzywych do drugiej, przedstawia różniczka:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = u dx + v dy. \quad (48)$$

Zmiana ta znika, gdy się pozostaje wciąż na tej samej równicy, t. j. gdy  $dx$  i  $dy$  do tej równicy się odnoszą. Gdy zaś odnoszą się do strugi prądu, to muszą czynić zadość równaniu (42):

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

albo:

$$u dy - v dx = 0. \quad (49)$$

Przechodząc od jednej strugi do sąsiedniej, czyli uogólniając znaczenie różniczki, musimy zamiast (49) napisać ogólniej:

$$d\Psi = u dy - v dx. \quad (50)$$

oznaczając przez  $\Psi$  nową funkcję:

$$\Psi = \Psi(x, y). \quad (51)$$

którą Stokes nazwał *funkcją prądową* i której równanie różniczkowe:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy,$$

wtedy tylko odpowiadać będzie równaniu (50) i (47), gdy:

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad \dots \quad (52)$$

skąd, mając na uwadze że według (45):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad \dots \quad (53)$$

otrzymujemy, po zróżniczkowaniu raz jeszcze względem  $y$  i  $x$ :

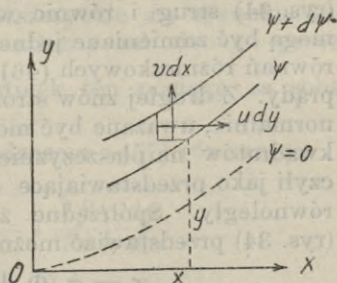
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \quad (54)$$

równanie podobne zupełnie do równania (46). Funkcja prądowa zatem czyni zadość ściśle takiemuż samemu równaniu o różniczkach cząstkowych drugiego rzędu, jak i odpowiadający potencjał prędkości. Z podzielenia przez siebie równań (53), otrzymujemy:

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{\frac{\partial\Psi}{\partial x}} \quad \dots \quad (55)$$

co w geometrii różniczkowej <sup>1)</sup> wyraża, że współczynnik kątowy stycznej do krzywej  $\Phi(x, y)$  w pewnym punkcie, jest równy współczynnikowi kątowemu normalnej do krzywej  $\Psi(x, y)$  w tymże punkcie. Styczne do równic są więc normalnemi do strug, czyli obie te wiązki krzywych przecinają się normalnie. Jedna z tych wiązek wyznacza drugą, co wynika i stąd także, że obie czynią zadość takiemuż samemu równaniu różniczkowemu (46) i (5) i obie te funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  są *sprzężone*.

Znaczenie parametru  $\Psi$  funkcji prądowej, po lewej stronie równania (51), objaśnia rys. 32, przedstawiający dwie sąsiednie strugi:  $\Psi$

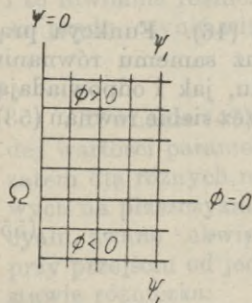


Rys. 32.

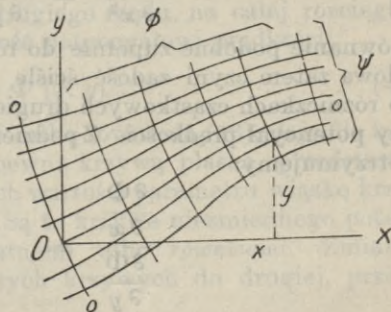
<sup>1)</sup> Ob. W. Folkierski. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Wyd. 2-e, t. II, 1909, §§ 105 - 108.

i  $\Psi + d\Psi$ . Dla przejścia od jednej do drugiej, cofnąć się trzeba o  $dx$  i posunąć naprzód o  $dy$ . Objętość cieczy, przepływającej w jednostce czasu między temi dwiema strugami, odniesiona do jednostki długości osi  $z$ , prostopadłej do płaszczyzny rysunku, wynosi  $v dx - u dy$ , co się równa według (50) różniczkę  $d\Psi$ , tak że parametr  $\Psi$ , w przybliżeniu pewnej dowolnej ilości stałej, oznacza pewną objętość cieczy. Wzmiankowaną ilość stałą oznaczyć można, odnosząc parametr  $\Psi = 0$  do strugi przechodzącej przez początek spólrzędnych, a wtedy  $\Psi$  oznaczać będzie, dla jakiegokolwiek strugi, ilość cieczy biegnącej między tą strugą a strugą, która przechodzi przez początek spólrzędnych, czyli wydatek prądu między temi strugami.

W ten sam sposób oznaczony być może potencjał prędkości  $\Phi$ , dla jakiegokolwiek punktu płaszczyzny  $xy$ , w przy-



Rys. 33.



Rys. 34.

bliżeniu pewnej ilości stałej, którą wyrugować można przez odniesienie wartości  $\Phi = 0$  do równicy przechodzącej przez początek spólrzędnych. Z siatki normalnych do siebie (rys. 34) strug i równic widzimy, że obie wiązki krzywych mogą być zamieniane jedne na drugie i że każde rozwiązanie równań różniczkowych (46) i (54) przedstawia dwa sprzężone prądy. Z drugiej znów strony wiązki te, jako przecinające się normalnie, uważane być mogą za kątoowo zgodne obrazy siatki kwadratów na płaszczyźnie  $\Phi \Psi$ , z początkiem w  $\Omega$  (rys. 33), czyli jako przedstawiające odpowiedni temu wykresowi prąd równoległy. Spólrzędne zatem  $xy$  pewnego punktu siatki (rys. 34) przedstawiać można jako funkcyje:

$$x = x(\Phi, \Psi), \quad y = y(\Phi, \Psi)$$

parametrów  $\Phi$  i  $\Psi$ , czyli że każdemu punktowi płaszczyzny  $\Phi, \Psi$ , odpowiada jeden punkt płaszczyzny  $x, y$  i odwrotnie.

Dla zestawienia wykresu jak na rys. 34, jako obrazu rys. 33, wyobraźmy sobie oba wykresy, w liczbach zespo-

lonych tak narysowane, że przy  $i = \sqrt{-1}$ , punktowi  $S = \Phi + i\Psi$  na pierwszym wykresie odpowiada punkt  $s = x + iy$  na drugim, tak że:

$$S = f(s) \text{ albo } \Phi + i\Psi = f(x + iy) \quad (56)$$

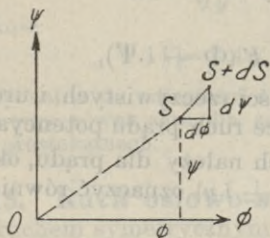
Mamy wtedy:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy}{dx + i dy}$$

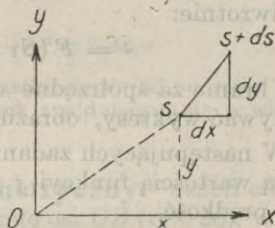
albo:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}} \quad (57)$$

Jeżeli oba wykresy mają być kątowno zgodne, czyli w swych elementach podobne, to przyrost liniowy  $dS$ , na płaszczyźnie  $\Phi\Psi$  rysunku 35, będzie wszędzie proporcjonalny do przyrostu liniowego  $ds$  na płaszczyźnie  $xy$  rysunku 36, czyli iloraz różniczkowy (57) niezależny od danego przez  $\frac{dy}{dx}$  kierunku przyrostu  $ds$ . Warunek ten pociąga za sobą



Rys. 35.



Rys. 36.

zniknięcie czynnika  $\frac{dy}{dx}$ , w pochodzącem z (57) równaniu:

$$\frac{dS}{ds} - \frac{\partial S}{\partial x} = \left( \frac{\partial S}{\partial y} - i \frac{\partial S}{\partial s} \right) \frac{dy}{dx}$$

i prowadzi do równań:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial S}{\partial y} = -i \frac{\partial S}{\partial y} \quad (58)$$

Ponieważ nadto, różniczkując równanie  $S = \Phi + i\Psi$ , otrzymujemy:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

przeto według (58):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right),$$

a po przyrównaniu do siebie części rzeczywistych i urojonych:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Są to znów związki (53), z których wynika normalne przecinanie się strug i równic, tak, że główna własność tych dwóch wiązek krzywych pozostaje nienaruszoną, przy przedstawianiu krzywych przez funkcyje zespolone. Teorya ta pozwala przez prosty wybór jakichkolwiek funkcyj:

$$S = f(s) = f(x + iy),$$

albo odwrotnie:

$$s = F(S) = F(\Phi + i\Psi),$$

i przez branie za spółrzedne części rzeczywistych i urojonych, otrzymywać wykresy, obrazujące ruch prądu potencjalnego <sup>1)</sup>.

W następujących zadaniach należy dla prądu, określonego daną wartością funkcyi  $f(x + iy)$  oznaczyć równice, linie strug i prędkość.

**Zadanie 20.**  $f(x + iy) = A(x + iy)$ .

Według (56) przy stałym  $A$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= Ax, & \Psi &= Ay \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= A, & \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Strugi są liniami prostymi, równoległymi do osi  $x$ , a równice takież liniami równoległymi do osi  $y$ .

$$V = u = A, \quad v = 0,$$

prędkość jest stała, ruch prądu prostolinijny i jednostajny wzdłuż osi  $x$ .

<sup>1)</sup> Wykład geometryi prądu ustalonego podany jest w książce F. Prášil'a (przyp. 7, str. 2), a ogólne wskazówki, odnoszące się do tego przedmiotu, we wstępie do pracy inż. C. Witoszyńskiego: „Podstawy teoryi hydrodynamicznej turbin, wentylatorów i pomp odśrodkowych“ (*Przegląd Techniczny*, 1916).



Zadanie 21.  $f(x + iy) = A(x + iy)^2 = A(x^2 - y^2) + 2iAxy$ .

Według (56), przy stałym  $A$ :

$$\Phi = A(x^2 - y^2), \quad \Psi = 2Axy,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2Ay.$$

Równice i strugi (rys. 37) są wiązkami przecinających się normalnie hiperbol równoramiennych i przedstawiają prąd biegnący łożyskiem, którego dno stanowi płaszczyzna rysunku a ściany boczne pionowe ustawione są według osi  $x$  i  $y$ , tak że łożysko tworzy kolano prostokątne z wierzchołkiem w początku spórzędnych.

Składowe prędkości są:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2Ax,$$

i według (35):

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2Ay,$$

a prędkość:

$$V = 2A\sqrt{x^2 + y^2} = 2Ar,$$

proporcjonalna do odległości  $r$  cząstki cieczy od początku spórzędnych, a więc równa zero dla cząstek znajdujących się w wierzchołku kolana prostokątnego.

**15. Ruch osiowo-symetryczny.** Jeżeli ciecz obraca się ruchem symetrycznym około osi  $OZ$  (rys. 26), w ten sposób, że we wszystkich jej punktach, położonych na tym samym równoleżniku, ciśnienie cieczy jest jednakowe, to siły zewnętrzne, albo przecinające się z osią, albo do niej równoległe, mają składową styczną  $T=0$ . Jeżeli w drugim z równań (21) położymy:

$$p = \text{ilości stałej}, \quad T=0,$$

pozostanie:

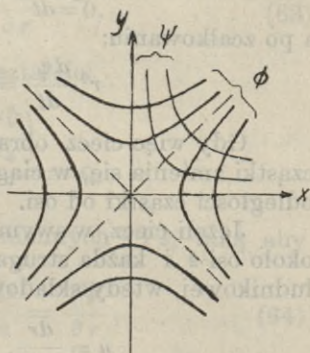
$$\frac{dv}{dt} + \theta u = 0 \quad (59),$$

a ponieważ:

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad v = r\theta = r \frac{d\varphi}{dt},$$

więc:

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt}, \quad \theta u = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt},$$



Rys. 37.

i równanie (59) przybierze kształt:

$$2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

a po zcałkowaniu:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = vr = \text{ilości stałej} \quad \dots \quad (60).$$

Gdy więc ciecz obraca się około osi symetrii, prędkość cząstki zmienia się, w ciągu obrotu, w stosunku odwrotnym do odległości cząstki od osi.

Jeżeli ciecz, w swym ruchu symetrycznym, nie obraca się około osi  $z$  i każda struga pozostaje wciąż na płaszczyźnie południkowej, wtedy składowe prędkości są:

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad v = 0, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

skąd wynika, w spólrzędnych cylindrycznych, równanie różniczkowe strugi na płaszczyźnie południkowej:

$$wdr - udz = 0,$$

odpowiadające równaniu (49) w spólrzędnych prostokątnych. W równaniach (21) i (22) znikają wtedy wyrazy zależne od kąta  $\varphi$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0,$$

a jeżeli przyjmiemy, że ruch jest ustalony, to znikną także pochodne cząstkowe prędkości względem czasu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Jeżeli wreszcie na ciecz działa sama tylko siła ciężkości, to:

$$R = 0, \quad T = 0, \quad Z = -g$$

i z równań (21) i (22) pozostaje:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= g + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (61),$$

z równania ciągłości (26):

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad \dots \quad (62),$$

a z równania (38):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (63)$$

To ostatnie napisać można w kształcie:

$$\frac{\partial \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)}{\partial z} = 0,$$

a dobierając dla strug funkcję  $\Psi$  zmiennych  $r$  i  $z$ , taką aby było:

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (64)$$

mamy:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial r}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial z}}{\frac{\partial \Psi}{\partial r}} \quad (65)$$

Równanie to, odpowiadające równaniu (55) dla prądu równoległego płaskiego, wyraża warunek normalnego przecinania się linii równic z liniami strug, na płaszczyźnie południkowej, przechodzącej przez oś  $z$ , to jest linii wyrażonych równaniami:

$$\Phi(r, z) = \text{ilości stałej}, \quad \Psi(r, z) = \text{ilości stałej};$$

że zaś:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r},$$

przeto po zróżniczkowaniu równań (64) otrzymujemy:

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right),$$

albo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \quad (66)$$

równanie odpowiadające równaniu (54), wywiedzionemu dla prądu równoległego płaskiego.

W następujących zadaniach należy dla danego potencjału  $\Phi$  prądu, osiowo symetrycznego: a) sprawdzić czy prąd czyni zadość równaniu (63), b) określić składowe  $u$ ,  $w$  i prędkość  $V$ , c) wskazać powierzchnie ekwipotencyjne i równice na

płaszczyźnie południkowej, d) wskazać linie strug, wyznaczające profil przewodu na płaszczyźnie południkowej.

**Zadanie 22.**  $\Phi = az + b$

a)  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ , więc prąd czyni zadość

równaniu (63).

b)  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ ,  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = a$ ,  $V = a$ .

c) Powierzchnie ekwipotencyjne są płaszczyznami a równice prostymi poziomymi.

d) Linie strug są proste, równoległe do osi  $z$ .

**Zadanie 23.**  $\Phi = a \log r$ .

a)  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{a}{r}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\frac{a}{r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ , więc prąd czyni zadość

równaniu (63).

b)  $u = \frac{a}{r}$ ,  $w = 0$ ,  $V = \frac{a}{r}$ .

c) Powierzchnie ekwipotencyjne są tu cylindry o osi  $z$  a równice są proste, równoległe do tej osi.

d) Linie strug są proste, prostopadłe do osi  $z$  i osi tę przecinające.

**Zadanie 24.**  $\Phi = \frac{a}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ .

a)  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -ar(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -a(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3ar^2(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$ ,

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -a(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3az^2(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$ , więc prąd czyni

zadość równaniu (63).

b)  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ,  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ ,  $V = \frac{a}{r^2 + z^2}$ .

c) Powierzchnie ekwipotencyjne są kulami, mającymi wspólny środek w początku współrzędnych.

d)  $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -arz(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = ar^2(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0$ ,

skąd równanie strug:

$$\psi = \frac{az}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \text{ilości stałej},$$

czyli że są to linie proste, przechodzące przez początek współrzędnych. Prąd przechodzi przez rurę kształtu ostrokąowego i wierzchołek ostrokągu leży w początku współrzędnych.

**Zadanie 25.**  $\Phi = 2az^2 - ar^2$

a)  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2ar$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -2a$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4a$ , więc prąd

czyni zadość równaniu (63);

b)  $u = -2ar$ ,  $w = 4az$ ,  $V = 2a\sqrt{r^2 + 4z^2}$

c) Przewód stanowi tu rura ssąca turbiny (rys. 38). Składowa  $u$  jest stałą dla wszystkich punktów powierzchni cylindrycznej  $ABCD$ , a składowa  $w$  dla wszystkich punktów poziomego przekroju  $AB$ . Ponieważ powierzchnia tego przekroju  $\omega_1 = r^2\pi$  a powierzchnia cylindryczna

$$\omega_2 = 2\pi rz,$$

przeto:

$$\omega_1 w + \omega_2 u = 0,$$

czyli że ta sama ilość wody, która dopływa przez powierzchnię cylindryczną, przechodzi przez przekrój  $AB$ , co odpowiada warunkowi ciągłości prądu. Wyrażenie prędkości  $V$  wykazuje, że jednakową prędkość mają punkty, położone na elipsoidzie obrotowej, której środek leży w  $O$  a osie są w stosunku  $2:2:1$ .

d) Z równań (64) i (65) wynika:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 4arz \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2ar^2,$$

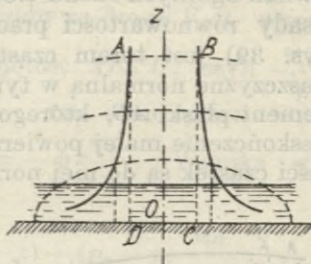
$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{u}{w} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

skąd równanie strug  $\Psi = r^2z = \text{ilości stałej}$ , wyznacza profil rury ssącej na płaszczyźnie południkowej.

**Zadanie 26.** Dla prądu, określonego w poprzednim zadaniu, wyznaczyć ciśnienie i otrzymać równanie powierzchni ekwipotencjalnej. Ponieważ według równań (61):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = u \frac{\partial u}{\partial r} = 4a^2r,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g + w \frac{\partial w}{\partial z} = g + 16a^2z,$$



Rys. 38.

więc całkowita różniczka:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho(4a^2 r dr + g dz + 16a^2 z dz),$$

a po zcałkowaniu:

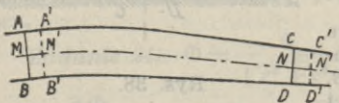
$$C - \frac{\rho}{2} = 2a^2 r^2 + gz + 8a^2 z^2,$$

i równanie powierzchni ekwipotencjalnej:

$$2r^2 + 8z^2 + \frac{g}{a^2} z = \text{ilości stałej},$$

wyznaczające powierzchnię elipsoidy obrotowej, ze środkiem na osi  $z$ .

**16. Twierdzenia Bernoulli'ego, Torricelli'ego i Bordy.** Twierdzenie Bernoulli'ego (28), stosowane prawie na każdym kroku w hydraulice, wywiedzione być może bez pomocy równań ogólnych ruchu cieczy, stanowiąc bezpośredni wynik zasady równowartości pracy i energii kinetycznej. Jeżeli  $MN$  (rys. 39) jest torem cząstki cieczy, poprowadźmy przez  $M$  płaszczyznę normalną w tym punkcie do  $MN$  i weźmy na niej element płaski  $AB$ , którego środek ciężkości leży w  $M$ . Przy nieskończenie małej powierzchni  $AB$  przyjąć można, że prędkości cząstek są do niej normalne i że tory oddalają się bardzo mało od linii  $MN$ , tworząc pewien rodzaj walca o przekroju poprzecznym bardzo małym. Ośią tego walca jest  $MN$ . Ciecz w tym walcu zawarta stanowić będzie strugę cieczy. Weźmy drugie przecięcie poprzeczne



Rys. 39.

$CD$  tej strugi i do cieczy zawartej między  $AB$  i  $CD$  zastosujemy zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. Oznaczmy przez  $V_0$  i  $p_0$ ,  $V$  i  $p$ , prędkość i ciśnienie na przecięciach  $AB$  i  $CD$ , których powierzchnie będą  $\omega_0$  i  $\omega$  i weźmy pod uwagę ruch w ciągu nieskończenie małego czasu  $dt$ , po upływie którego uważana objętość cieczy  $ABCD$  przechodzi do położenia  $A'B'C'D'$ . Przy ruchu ustalonym, cząstki zawarte między przecięciami  $AB$  i  $CD$  będą miały też same prędkości na początku i na końcu czasu  $dt$ , tak że przyrost energii kinetycznej całego systemu wynikać będzie z różnicy energii części  $CDC'D'$  i  $ABA'B'$ . Jeżeli oznaczymy przez  $m$  masę każdej części, to przyrost energii kinetycznej wynosić będzie  $\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$ . Również przy obliczaniu pracy siły ciężkości, nie potrzebujemy brać w rachunek części wspólnej  $A'B'CD$  i praca tej siły będzie takąż sama, jak gdyby masa cieczy

$ABA'B'$  przechodziła do położenia  $CDC'D'$ . Ponieważ ciecz jest nieściśliwą i zachowuje też samą objętość, przeto praca sił wewnętrznych jest równą zeru, jeżeli przytem przyjmujemy ciecz doskonałą. Równą zeru także jest praca sił zewnętrznych na obwodzie strugi  $ABCD$ , ponieważ ciśnienia są normalne do przemieszczeń. Pozostaje więc tylko oznaczyć pracę siły ciężkości i ciśnień na końcowych ściankach  $AB$  i  $CD$ . Oznaczając przez  $z_0$  i  $z$  wzniesienia punktów  $M$  i  $N$  nad płaszczyzną porównania, otrzymamy pracę siły ciężkości równą ciężarowi objętości  $ABA'B'$ , pomnożonemu przez  $z_0 - z$ . Objętość ta jest  $V_0 \omega_0 dt$  albo  $V \omega dt$ , stosownie do tego, czy się ją mierzy w  $ABA'B'$  czy w  $CDC'D'$ . Wynika stąd naprzód:  $V_0 \omega_0 = V \omega$ . Masa tej objętości jest  $m$  a ciężar  $mg$ ; praca więc siły ciężkości wynosi  $mg(z_0 - z)$ . Ciśnienie całkowite na  $AB$  jest  $p_0 \omega_0$  a jego praca, gdy  $AB$  przechodzi do  $A'B'$  i przebywa drogę  $V_0 dt$ , wynosi  $p_0 \omega_0 V_0 dt$ ; że zaś  $V_0 \omega_0 dt$  jest to objętość  $ABA'B'$ , czyli  $\frac{mg}{\gamma}$ , więc praca ciśnienia  $p_0$  jest  $p_0 \frac{mg}{\gamma}$ ; tak samo praca ciśnienia  $p$  na  $CD$  jest równa  $-p \omega V dt = -p \frac{mg}{\gamma}$ . Wynika stąd równanie:

$$\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2) = mg(z_0 - z) + (p_0 - p) \frac{mg}{\gamma},$$

które dzieląc przez  $mg$  i grupując po każdej stronie wyrazy z jednakim znacznikiem, otrzymujemy:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} \quad \dots \quad (67)$$

czyli w innym kształcie wypisane równanie (28), wyrażające twierdzenie Bernoulli'ego.

Z równania (67) mamy także:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\gamma} = z_0 - z,$$

a kładąc  $z_0 - z = h$ ,  $p_0 - p = \gamma h'$ :

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = h + h';$$

z równości zaś  $\omega_0 V_0 = \omega V$  wynika  $V_0 = \frac{\omega}{\omega_0} V$ , co wstawiając otrzymujemy wzór Torricelli'ego:

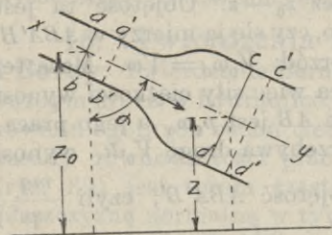
$$V = \sqrt{\frac{2g(h + h')}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

w kształcie najogólniejszym. Zwykle stosunek  $\frac{\omega}{\omega_0}$  bywa bardzo mały, a nadto  $p = p_0$  i wzór sprowadza się do postaci:

$$V = \sqrt{2gh}, \dots \dots \dots (68)$$

spotykanej często w hydraulice.

Przy zmianach poziomu piezometrycznego, odpowiadających stopniowym zmianom przekroju poprzecznego prądu (rys. 39), płaszczyzna naporu pozostaje nieruchomą, jak to wyraża twierdzenie Bernoulli'ego. W razie nagłej zmiany przekroju poprzecznego (rys. 40), powstaje wzburzenie i strata energii, objawiająca się przez obniżenie płaszczyzny naporu.



Rys. 40.

Prędkość strug w przekroju powiększonym  $cd$  jest mniejsza niż w przekroju  $ab$ , tak że cząstki napływające w kierunku strzałki, uderzają o te, które się znajdują przed nimi. Dla określenia wynikającej stąd straty naporu, weźmy pod uwagę masę cieczy, zawartą między przecięciami  $ab$  i  $cd$ , w których prędkości strug są równoległe do  $xy$ . Po upływie bardzo krótkiego przeciągu czasu, masa ta przenosi się do położenia  $a'b'c'd'$  i do tego przemieszczenia zastosować można twierdzenie ilości ruchu w rzucie na  $xy$ . Oznaczając przez  $\omega_0$  i  $\omega$  powierzchnie przekrojów  $ab$  i  $cd$ , przez  $V_0$  i  $V$  prędkości, a przez  $p_0$  i  $p$  ciśnienia w tych przekrojach, mamy najprzód:

$$\omega_0 V_0 = \omega V \dots \dots \dots (69)$$

a następnie, ponieważ ilość ruchu części wspólnej  $a'b'cd$  nie ulega zmianie, przeto powiększenie ilości ruchu, wynikające z przejścia masy  $ab$  do  $a'b'$ , wyraża się przez różnicę:

$$\frac{\gamma}{g} \omega V dt \cdot V - \frac{\gamma}{g} \omega_0 V_0 dt \cdot V_0 = \frac{\gamma}{g} \omega V \cdot (V - V_0) dt.$$

Siły zewnętrzne są tu: siła ciężkości i ciśnienia. Jeżeli przez  $ds$  oznaczymy odległość przecięć  $ab$  i  $cd$ , to ciężar całej masy  $abcd$ , wynosi  $\gamma \omega ds$  i działa w kierunku pionowym, który z osią  $xy$  czyni kąt  $\alpha$ . Rzut więc siły ciężkości na tę oś jest równy  $\gamma \omega ds \cos \alpha$ . Ciśnienia  $p_0$  i  $p$ , działające równoległe do osi  $xy$ , z jednej strony na powierzchnię  $ab$  i powierzchnię



obwodu prądu między  $ab$  i  $cd$  czyli (§ 8) na prostopadłą do  $xy$  powierzchnię płaską  $cd$  a z drugiej na tęż samą powierzchnię  $cd$  są równe  $p_0 \omega - p \omega$ . Równanie ilości ruchu będzie więc:

$$\frac{\gamma}{g} \omega V (V - V_0) dt = (p_0 \omega - p \omega) dt + \gamma \omega ds \cos \alpha dt,$$

a że  $ds \cos \alpha = z_0 - z$ , to po podzieleniu obu stron przez  $\gamma \omega dt$ , otrzymamy:

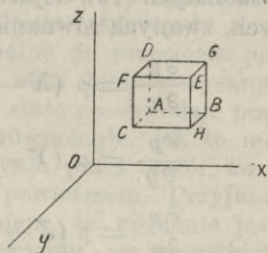
$$\frac{V(V - V_0)}{g} = \frac{p_0 - p}{\gamma} + z_0 - z,$$

co można napisać:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + \frac{(V_0 - V)^2}{2g} \quad (70)$$

Zestawienie tego równania z równaniem (28) wykazuje, że strata naporu wynikająca z nagłej zmiany przekroju prądu ciekłego, jest równa wysokości, odpowiadającej zmniejszeniu prędkości. O doświadczeniach Bordy, który wywiódł to prawo, uogólniające późniejsze twierdzenia Carnota o uderzeniu ciał niesprężystych, będzie mowa w roz. V.

**17. Ruch cieczy naturalnych.** Przy ruchu cieczy naturalnych, ciśnienia nie są już skierowane normalnie do powierzchni elementów i wytwarzają się działania styczne do tych powierzchni. Prostościan elementarny  $AE$  (rys. 41) odkształca się i ścianki  $AF$  i  $EB$ , ożywione różnymi prędkościami  $u$  i  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , odsuwają się jedna od drugiej na długość  $\frac{\partial u}{\partial x} \partial x$  z prędkością  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Wytwarza



Rys. 41.

to siłę, podobną do tej, która wywołuje rozciąganie w ciałach stałych. Newton przyjął, że ta siła jest proporcjonalną do prędkości względnej strug, czyli równą  $\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}$ , jeżeli przez  $\varepsilon$  oznaczymy stały współczynnik tarcia. Prostościan ponosić więc będzie na ścianie  $ACFD$  całkowite działanie  $\rho \varepsilon \partial y \partial z \frac{\partial u}{\partial x}$  w kierunku odciętych dodatnich. Na ścianie  $HEGB$  będzie miało miejsce w kierunku przeciwnym toż samo działanie, powiększone

różniczką względem  $x$ , tak że suma działań sprowadza się do  $\rho \varepsilon \partial x \partial y \partial z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Tak samo ścianki przeciwległe  $ABGD$

i  $CHEF$ , których prędkości w rzucie na oś  $x$  są  $u$  i  $u + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y$ , doznają ślizgania, którego prędkość odniesiona do jednostki odległości wynosi  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; wynika stąd siła  $\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$  na jednostkę

powierzchni i całkowita wypadkowa działań, wywołanych lepkością na tych ściankach, w rzucie na oś  $x$ , będzie  $\rho \varepsilon \partial x \partial y \partial z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Wreszcie względne ślizganie na ścian-

kach  $ABHC$  i  $EFDG$  wytwarza, w rzucie na oś  $x$ , siłę cał-

kowitą  $\rho \varepsilon \partial x \partial y \partial z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Dodając te trzy wypadkowe częśc-

kowe i dzieląc sumę przez masę prostościanu  $\rho \partial x \partial y \partial z$ ,

otrzymamy rzut na oś  $x$  siły wywołanej lepkością podczas

ruchu, wynoszący na jednostkę masy elementarnego prosto-

ścianu:

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

W ten sam sposób otrzymać można rzuty tej siły na osie  $y$  i  $z$ , a uzupełniając tymi wyrazami równania ruchu cieczy doskonałych (19), dojdziemy do równań ruchu cieczy naturalnych, zwanych równaniami Naviera:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho (X - u') + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho (Y - v') + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho (Z - w') + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

**18. Strata naporu, prędkość średnia.** Twierdzenie Bernoulli'ego stosuje się tylko do płynów doskonałych, w których działania styczne, czyli tarcia cząstek jednych o drugie, nie istnieją. Stosowane do płynów naturalnych, w których tarć nie można pomijać, daje tylko przybliżenie, wogóle odległe od rzeczywistości, zbliżające się do niej wszakże w niektórych przypadkach tak dalece, że może być użytem do rozwiązywania zadań praktycznych.

Wogóle tarcie cząstek jednych o drugie wytwarza opór, który w równaniu energii winienby być przedstawiony

i w skutku którego prędkość  $V$  w punkcie  $N$  (rys. 39, § 16) ma wartość niższą niż wynikająca z twierdzenia Bernoulli'ego.

Suma  $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$  przestaje być stałą i zmniejsza się w miarę postępowania cząsteczki po torze. Oznaczając liczoną po torze odległość punktu  $N$ , od wziętego za początek ruchu, punktu  $M$ , przez  $s$ , możemy to wyrazić, pisząc:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = F(s) \dots \dots \dots (72)$$

Wzniesienie płaszczyzny naporu przestaje być stałym dla wszystkich punktów strugi i wyraża się przez  $F(s)$ . Różnica wzniesień w dwóch punktach  $M$  i  $N$ , równa  $F(s_0) - F(s)$  nosi nazwę *straty naporu* między tymi dwoma punktami. Strata naporu jest więc miarą części energii, pochłoniętej przez tarcia międzycząsteczkowe. W niektórych okolicznościach ta strata naporu bywa nader małą i może być pomijaną, ale zawsze ma ona miejsce i w skutku tego twierdzenie Bernoulli'ego stosować można do cieczy naturalnych tylko w przybliżeniu.

Skoro np. ruch jest bardzo powolny, wtedy natężenie tarcia, proporcjonalne do prędkości względnej, jest bardzo małe i małą jest także praca tego oporu biernego. Wyrażamy to mówiąc, że w cieczy albo w części cieczy, której ruch jest bardzo powolny, ciśnienie zmienia się prawie według praw hydrostatyki. Podobnie, przy jakichkolwiek prędkościach cząstek, skoro te prędkości są jednakowe i równoległe, prędkość względna jest równa zeru i niema działań stycznych, a ciśnienie jest w każdym punkcie normalne do przecięcia poprzecznego prądu, co charakteryzuje stan hydrostatyczny. Może się także zdarzać, że ciśnienie jest stałe na obwodzie prądu, którego cząsteczki mają prędkości równoległe, jak to ma miejsce np. gdy ciecz wypływa z naczynia przez otwór, tworząc *żyłę*, ze wszystkich stron otoczoną powietrzem. Przyjmuje się wtedy, z dostatecznym przybliżeniem, że ciśnienie jest jednakie i równe ciśnieniu atmosferycznemu, we wszystkich punktach przecięcia poprzecznego, prostopadłego do kierunków pojedynczych strug. Przy tych przybliżeniach, stosować można twierdzenie Bernoulli'ego do cieczy naturalnych w ruchu, ale tylko po zapewnieniu się, że między dwoma przecięciami poprzecznymi niema żadnej przyczyny specjalnej, mogącej powodować stratę naporu i że tarcia międzycząsteczkowe na tej przestrzeni mogą być pomijane. Też same zastrzeżenia stosują się i wtedy, gdy do ruchu cieczy naturalnej stosujemy równania ogólne hydrodynamiki, wywiedzione w przypuszczeniu cieczy doskonałej.

Ruch ustalony cieczy zachodzi w rurze, kanale otwartym i przy wypływie przez otwory. W ruchu takim przyjmujemy, że prędkości pojedynczych cząstek są prawie równoległe, czyli że ruch odbywa się strugami prostopadłymi do jakiegokolwiek przecięcia poprzecznego prądu. Powierzchnię tego przecięcia poprzecznego oznaczmy przez  $\omega$ , a jej element nieskończenie mały przez  $d\omega$ , prędkość średnią strug przechodzących przez ten element oznaczmy przez  $u$ , a prędkość średnią, dla całego przecięcia  $\omega$ , przez

$$U = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u d\omega,$$

rozciągając tę całkę do wszystkich elementów  $d\omega$ . Jeżeli nadto oznaczmy przez  $Q$  wydatek prądu, t. j. objętość cieczy przechodzącej przez przecięcie  $\omega$  w ciągu jednostki czasu, to będzie:

$$dQ = u d\omega$$

$$Q = U\omega = \int_{\omega} u d\omega.$$

Porównajmy ilość ruchu i energię prądu, jakie są w istocie, z ilością ruchu i energią, jakieby były, gdyby strugi, zamiast istotnych swych prędkości, miały wszystkie prędkość średnią  $U$ . Masa cieczy, przechodząca przez przecięcie  $d\omega$

w jednostce czasu jest  $\frac{\gamma}{g} dQ$ , a ilość ruchu i energia będą:

$$\frac{\gamma}{g} dQ \cdot u \qquad \frac{\gamma}{g} dQ \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Sumując te ilości dla wszystkich elementów  $d\omega$ , otrzymujemy istotną ilość ruchu i energię prądu, mając przytem na uwadze, że  $dQ = u d\omega$ :

$$\frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega \qquad \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega.$$

Gdyby wszystkie strugi miały prędkość średnią  $U$ , byłyby te ilości odpowiednio równe:

$$\frac{\gamma}{g} Q U \qquad \frac{\gamma}{g} Q \frac{U^2}{2},$$

albo kładąc  $Q = U\omega$ :

$$\frac{\gamma}{g} U^2 \omega \qquad \frac{\gamma}{2g} U^3 \omega.$$

Mamy więc do porównania, dla ilości ruchu  $\int_{\omega} u^2 d\omega$  i  $U^2\omega$ , a dla energii  $\int_{\omega} u^3 d\omega$  i  $U^3\omega$ . Oznaczmy przez  $u_1$  różnicę dodatnią lub ujemną, pomiędzy istotną prędkością pewnej strugi  $u$  a prędkością średnią  $U$  i połączmy:

$$\begin{aligned} u &= U + u_1, \\ u^2 &= U^2 + 2Uu_1 + u_1^2, \\ u^3 &= U^3 + 3U^2u_1 + 3Uu_1^2 + u_1^3. \end{aligned}$$

Mnożąc wszystkie wyrazy tych trzech równań przez  $d\omega$  i całkując dla całej przestrzeni przecięcia poprzecznego prądu, otrzymamy z pierwszego równania:

$$\int u d\omega = U\omega + \int u_1 d\omega$$

a ze  $\int u d\omega = U\omega$ , więc:

$$\int u_1 d\omega = 0.$$

Mając to na uwadze, otrzymamy z pozostałych dwóch równań:

$$\begin{aligned} \int u^2 d\omega &= U^2\omega + \int u_1^2 d\omega \\ \int u^3 d\omega &= U^3\omega + 3U \int u_1^2 d\omega + \int u_1^3 d\omega. \end{aligned}$$

Stosunek więc ilości ruchu rzeczywistej, do ilości ruchu odpowiadającej prędkości średniej, jest równy:

$$\frac{\int u^2 d\omega}{U^2\omega} = 1 + \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega},$$

a takież stosunek dla energii:

$$\frac{\int u^3 d\omega}{U^3\omega} = 1 + 3 \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega} + \frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3\omega}.$$

Jakikolwiek znak ma  $u_1$ , kwadrat  $u_1^2$  jest zawsze dodatni i całka  $\int u_1^2 d\omega$  jest zawsze różna od zera i dodatnia. Wynika stąd, że istotna ilość ruchu jest zawsze większa, od ilości ruchu odpowiadającej prędkości średniej, a kładąc  $\eta = \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2\omega}$ , otrzymamy stosunek ilości ruchu rzeczywistej do ilości ruchu odpowiadającej prędkości średniej:

$$\frac{\int u^2 d\omega}{U^2\omega} = 1 + \eta,$$

gdzie  $\eta$  jest liczbą zawsze dodatnią.

Co do stosunku energii należy zauważyć, że ostatni wyraz  $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3 \omega}$  jest zawsze bardzo mały, w porównaniu z poprzednim  $\frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega}$ , gdyż najprzód  $u_1$  jest tylko małym ułamkiem prędkości średniej  $U$  i wyraz  $\frac{\int u^3 d\omega}{U^3 \omega}$  jest wielkością rzędu  $\left(\frac{u_1}{U}\right)^3$ , podczas gdy wyraz  $\frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega}$  jest wielkością rzędu  $\left(\frac{u_1}{U}\right)^2$ ; nadto wartości  $u_1$  są naprzemian dodatne i odjemne, gdyż  $\int u_1 d\omega = 0$ , całka więc  $\int u_1^3 d\omega$  składa się z elementów dodatnych i odjemnych, gdy elementy całki  $\int u_1^2 d\omega$  są wszystkie dodatne. Z tych dwóch względów wyraz  $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3 \omega}$  może być pominiętym wobec pozostałych i stosunek energii sprowadza się do:

$$\frac{\int u^3 d\omega}{U^3 \omega} = 1 + 3\eta = \alpha,$$

jest więc, podobnie jak stosunek ilości ruchu, większy od jedności i to o ilość trzy razy większą. Wynik ten zasługuje na uwagę. W skutku różnych prędkości pojedynczych strug, ilość ruchu i energia prądu są zawsze większe od ilości ruchu i energii, jakieby były, gdyby wszystkie strugi miały jednakową prędkość średnią. Spółczynniki  $\eta$  i  $\alpha$  są oczywiście zmienne, zależne od różnicy między prędkością średnią a największą prędkością w przecięciu poprzecznym prądu. Wartości ich, obliczono z pomiarów prędkości, dla prądów w rurach i kanałach.

Przy stosowaniu twierdzenia Bernoulli'ego (72), już nie do pojedynczej strugi o prędkości  $V$ , ale do prądu ustalonego, w którym ta struga przechodzi przez środki ciężkości powierzchni, następujących po sobie przecięć poprzecznych, oznaczać będą w równaniu:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = F(s),$$

$z$  — rzędną środka ciężkości przecięcia poprzecznego prądu,  
 $\frac{p}{\gamma}$  — wysokość ciśnienia w tym środku ciężkości. Zamiast  $\frac{V^2}{2g}$

weźmiemy wtedy  $\alpha \frac{U^2}{2g}$ , a wzniesienie płaszczyzny naporu  $F(s)$  wyrażać możemy także przez funkcję prędkości średniej  $f(U)$ . Że zaś, jak zobaczymy w dalszym ciągu, strata naporu następować może przy ruchu prądu, z różnych przyczyn i na różnych przecięciach, przeto najogólniejsze wyrażenie całkowitego wzniesienia płaszczyzny naporu między dwoma przecięciami poprzecznymi prądu będzie  $\Sigma f(U)$  i równanie, wyrażające twierdzenie Bernoulli'ego dla prądu ustalonego przybierze kształt:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \Sigma f(U) \dots \dots \dots (73)$$

**19. Prąd regularny. Prawa Poiseuille'a i Reynolds'a.** Prądem regularnym nazywamy powolny ruch cieczy, strugami prawie prostoliniowymi i równoległymi, bez wirów i wzburzeń. Ruch taki odbywać się może tylko w przewodach o bardzo małym przekroju poprzecznym i bardzo gładkich ścianach. Jako wstęp do badań nad cyrkulacją krwi w naczyniach włoskowatych, przeprowadził w połowie ubiegłego stulecia dr. Poiseuille szereg ścisłych doświadczeń nad ruchem wody w rurkach szklanych i wyciągnął z nich, że wydatek prądu regularnego jest: 1) proporcjonalny do różnicy naporów na dwóch końcach rurki, 2) odwrotnie proporcjonalny do długości rury, 3) proporcjonalny do czwartej potęgi z promienia rury. Wzór streszczający te prawa, wywiódł Bousinesq z równań Navier'a (§ 17). Przyjmując oś  $x$  schodzącą się z osią rurki, pominąć można w tych równaniach pochodne składowych  $v$  i  $w$ , a także przy ruchu prawie jednostajnym  $u' = 0$  i z pierwszego równania pozostaje:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (74)$$

Przy nachyleniu  $I$  rurki do poziomu, składowa siły ciężkości  $X = g \sin I$ , ciężar właściwy  $\gamma = \rho g$ , nazwawszy więc różnicę wysokości słupów piezometrycznych na jednostkę długości rurki:

$$\sin I - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = J,$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\gamma J}{\varepsilon} = 0 \dots \dots \dots (75)$$

Jeżeli oznaczymy przez  $r$  odległość cząstki cieczy od osi  $x$ , to przy kołowym przecięciu poprzecznym rurki, prędkość

kość  $u$  jest z symetrii wyłącznie funkcją promienia  $r$ . Ponieważ  $r^2 = y^2 + z^2$ , więc:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left[ -\frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \frac{dr}{dy} =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

i tak samo:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{z^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

skąd:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

i równanie (75) przybierze postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\gamma J}{\varepsilon} = 0.$$

Przez całkowanie otrzymujemy kolejno:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma J}{2\varepsilon} r^2 + A. \quad (76)$$

$$u = -\frac{\gamma J}{4\varepsilon} r^2 + A \ln r + B.$$

W rurce o przekroju kołowym, wypełnionej cieczą, prędkość jest skończoną i przy  $r = 0$ , co wymaga, aby  $A$  było równe zero. Ponieważ przy ruchu cieczy w rurce, najmniejsza różnica prędkości stykających się cząstek wywołuje tarcie, więc różnica prędkości cząstki nieruchomej na powierzchni wewnętrznej rurki i stykającej się z nią w swym ruchu cząstki na zewnętrznej powierzchni prądu, wywoływałyby tarcie jeszcze większe. Tarcie to nie mogłoby zostawiać w równowadze dynamicznej, warstwy nieskończenie cienkiej, przylegającej do ściany rurki, gdyż musiałoby równoważyć działanie styczne, wywierane na drugą stronę tej warstwy. Prędkość więc tej warstwy musi być nieskończenie mała i dla  $R = r$ , t. j. przy powierzchni wewnętrznej rurki przyjmujemy  $u = 0$ . Wynika stąd:

$$u = \frac{\gamma J}{4\varepsilon} (R^2 - r^2). \quad (77)$$



a wydatek prądu o przekroju  $\omega = \pi R$ , czyli wzór Poiseuille'a:

$$Q = \frac{\gamma J}{4\varepsilon} \cdot \frac{\omega^2}{\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) d\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\gamma J}{8\pi\varepsilon} \omega^2 = \frac{\rho g J \pi R^4}{8\varepsilon} \dots (78)$$

Przy stałej prędkości,  $J$  wyraża stratę naporu na jednostkę długości rurki; wydatek przeto jest proporcjonalny do różnicy naporów na dwóch końcach rurki a odwrotnie proporcjonalny do jej długości.

Doświadczenia, przeprowadzone w granicach temperatury od  $0^\circ$  do  $45^\circ$  C. dały dla wody wartość współczynnika tarcia wewnętrznego przy temperaturze  $10^\circ$  C.:

$$\varepsilon = 0,01303 \text{ jednostek } C. G. S.,$$

a przy temperaturze  $t$  w stopniach, liczonych powyżej  $10^\circ$  C.:

$$\varepsilon = \frac{0,01303}{1 + 0,02884 t + 0,000188 t^2}$$

Spółczynnik  $\varepsilon$  używany jest w hydraulice w kształcie nieco zmienionym, mianowicie jako tak nazwany przez Maxwella kinematyczny współczynnik tarcia:

$$\nu = \frac{\varepsilon}{\rho},$$

równy stosunkowi współczynnika tarcia wewnętrznego  $\varepsilon$ , do gęstości płynu  $\rho$ , przyczem wzór Poiseuille'a przybiera kształt:

$$Q = \frac{g J \pi R^4}{8\nu} \dots \dots \dots (79)$$

Wartości  $\nu$  dla niektórych płynów przy różnych temperaturach podane są w następującej tabelcy:

T A B L I C A 1.

Stopnie Celsusza	Wartość współczynnika $\nu$ w $cm^2/sek$ dla:			
	Wody	Powietrza pod ciśn. 1 atm.	Oliwy	Paliwa płynnego motorowego
0	0,0178	0,145	—	—
10	0,0131	0,155	—	—
20	0,0101	0,165	2,56	3,82
30	0,0081	0,177	2,26	1,70
50	0,0055	0,203	1,78	0,60
100	0,0027	0,271	—	0,10

Ze wzrostem prędkości i przekroju poprzecznego prądu ruch regularny przechodzi w burzliwy. Zwracał już na to uwagę Henryk Darcy, który wartości  $\varepsilon$ , otrzymane przez Poiseuille'a, stwierdził niektórymi doświadczeniami nad dowolnym ruchem wody w rurach o średnicy paru centymetrów, uwidoczniał zaś w r. 1883 Osborne Reynolds, wprowadzając do rury szklanej, przez którą przebiegała woda, cienką strugę cieczy zafarbowanej, wyciąganą działaniem prądu z włoskowatej rurki, której ostro zakończony koniec umieszczony był na osi rury szklanej. Ruch regularny znamionowany był w rurce zafarbowaną strugą środkową, równą i prostą; gdy wszakże prędkość prądu się zwiększała i przekraczała pewną granicę, wtedy struga zafarbowana przerywała się i cząstki kolorowe rozpraszały się pod postacią wirów. Doświadczenia wykazały, że ruch regularny przechodzi w burzliwy, przy prędkości średniej  $U$  czyniącej zadość równaniu:

$$\frac{UR}{\nu} = 1000 \text{ jednostek } C. G. S. \dots (80)$$

Reynolds wszakże zauważył, że przy zachowaniu ostrożności, można utrzymywać w rurkach ruch regularny i przy prędkości większej, odpowiadającej stosunkowi:

$$\frac{UR}{\nu} = 6900 \dots (81)$$

i tę prędkość nazwał *prędkością krytyczną*.

Wzmiankowane doświadczenia doprowadziły Reynoldsa do wykrycia tak zwanego *prawa podobieństwa* prądów. Jeżeli w pierwsze z równań Navier'a (71) wstawimy za  $u'$  rozwinięcie (20) z § 11 i wprowadzimy oznaczenia:

$$h = \frac{p}{\gamma}, \quad \rho = \frac{\gamma}{g}, \quad \varepsilon = \nu \rho,$$

to równanie przyjmie kształt:

$$\frac{\gamma}{g} X - \gamma \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\gamma}{g} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\nu \gamma}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right) = 0. \quad (82)$$

Pomijając pierwszy wyraz, w który wchodzi składowa siły ciężkości, nie ulegająca zmianie, odróżniamy w tem równaniu:

$$\text{wysokość ciśnienia } \gamma \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\text{siły bezwładności typu } \frac{\gamma}{g} u \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\text{siły tarcia typu } \frac{\nu \gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Składowe prędkości  $u$ ,  $v$ ,  $w$  i wysokość ciśnienia  $h$  są funkcjami współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Reynolds zauważył, że jeżeli znany jest z dokonanego doświadczenia pewien prąd (I), dla którego wymienione siły są w równowadze określonej równaniem (82) i jeżeli od tego prądu przechodzić będziemy do innego *podobnego* prądu (II), powiększając wszystkie długości, a więc współrzędne w stosunku  $f_l$ , wysokość ciśnienia w stosunku  $f_h$ , prędkości w stosunku  $f_u$ , ciężar właściwy w stosunku  $f_\gamma$ , spójczynnik  $\nu$  w stosunku  $f_\nu$ , to wszystkie te ilości określające prąd (II) uczynią zadość równaniu (82), gdy wymienione trzy typy sił powiększone zostaną w jednakim stosunku, to jest gdy:

$$\frac{f_\gamma f_h}{f_l} = \frac{f_\gamma f_u^2}{f_l} = \frac{f_\gamma f_\nu f_u}{f_l^2},$$

skąd:

$$\frac{f_u f_l}{f_\nu} = 1, \quad f_h = f_u^2 \quad \dots \quad (83)$$

Pierwsze z tych równań jest jednoznaczne z równaniem:

$$\frac{u_1 l_1}{\nu_1} = \frac{u_2 l_2}{\nu_2}$$

i wyraża warunek podobieństwa prądów (I) i (II), polegający na jednakowej dla obu prądów wartości stosunku  $\frac{ul}{\nu}$ . Z drugiego równania wynika, że wtedy jednakowym dla obu prądów winien być także stosunek  $\frac{h}{u^2}$ . Innymi słowy  $\frac{h}{u^2}$  jest funkcją  $\frac{ul}{\nu}$ . O stosunku  $\frac{h}{u^2}$  będzie mowa w następnym rozdziale, a co do stosunku  $\frac{ul}{\nu}$ , to biorąc w nim zamiast prędkości cząstkowej  $u$  prędkość średnią prądu  $U$ , a zamiast długości  $l$ , oznaczającej którykolwiek z wymiarów prądu, promień rury  $R$ , otrzymamy wzmiankowany stosunek  $\frac{UR}{\nu}$ , do którego odniósł Reynolds pomiary prądów w swych doświadczeniach.

**20. Prąd burzliwy.** Zjawiska burzliwego ruchu cieczy są najważniejsze w hydraulice, wszakże aż do ogłoszenia poszukiwań Boussinesq'a stanowiły w nauce, jak się wyraził Saint Venant, „rozpaczliwą zagadkę“. Jeszcze Leonard Vinci zwracał uwagę na to, że w masie cieczy, płynącej pewnym korytem, najmniejsze zboczenie wywołane nierównościami ścian, powoduje uderzenia, które przechodząc od jednej cząsteczki do

drugiej, mnożą się przy znaczniejszej prędkości i rozchodzą wśród cieczy w różnych kierunkach, wywołując zaburzenia nieregularnie peryodyczne, zwane niekiedy przez hydraulików *pulsem* prądu. Tam więc, gdzie mechanicy wprowadzali tylko prędkości i ciśnienia, zmieniające się w sposób regularny i ciągły, od jednego punktu do punktów sąsiednich i od jednej chwili do następnych, trzeba było wprowadzać przeważny wpływ zmian nagłych i nieregularnych: prędkości, przyspieszeń i ciśnień w różnych punktach cieczy. Odróżnić przyszło więc najprzód dwie części o różnych własnościach, w prędkości i przyspieszeniu, czy to jednej i tej samej cząstki, śledzonej w jej kolejnych położeniach przez krótką chwilę, czy też cząstek przechodzących kolejno przez dany punkt, o współrzędnych  $x, y, z$ , w krótkim przeciągu czasu.

Część pierwsza, odpowiadająca ogólnemu przemieszczeniu cząstek jest *średnią miejscową* wartości prędkości lub przyspieszenia. Jest ona większą od części drugiej, ale ma mniejsze pochodne, ponieważ zmienia się stopniowo. Tylko ta część jest ważną dla hydraulika, ponieważ może być zmierzona za pomocą przyrządów hydrometrycznych. Odpowiada ona istotnemu ruchowi prądu i może być przedstawioną przez funkcye, regularne i względnie proste, zmiennych  $x, y, z, t$ . Co do drugiej części, ta zmienia się bardzo szybko razem z  $x, y, z, t$ , w kierunkach przeciwnych dla bardzo blizkich wartości tych zmiennych, tak, że średnia jej wartość, w ciągu jakiegokolwiek dość krótkiego czasu, jest w każdym miejscu równa zero. Może ona mieć pochodne o dość znacznych wartościach, ale o wartości średniej także równej zero. Jest to prędkość lub przyspieszenie *wzburzenia miejscowego*, które, gdyby samo tylko istniało, wytwarzałoby wszędzie znaczne odkształcenia przypadkowe, ślizgania miejscowe w różnych kierunkach, ale bez ogólnego ruchu całej masy.

Z przeprowadzonej na tej podstawie subtelnej analizy Boussinesq'a wynika, że wywiedzione w § 17 równania Navier'a, stosowane być mogą do ruchu burzliwego, jeżeli funkcye  $u, v, w$  uważać będziemy za składowe prędkości średniej miejscowej. Współczynnik tarcia będzie w nich funkcją wszystkich przyczyn, wywołujących zaburzenia. Przyczyny te w ten sposób rozbiera Boussinesq: „Jeżeli obserwujemy powierzchnię wody wzburzonej, płynącej kanałem otwartym, spostrzegamy, jak wciąż pewne jej cząstki, niewielkie ale skończonych wymiarów, chwilowo przylegają do brzegów koryta, potem odrywają się odeń nagle i rozbiegają, dążąc ku wnętrzu prądu i tworząc jeden lub więcej wirów o osiach pionowych. Widać także, zwłaszcza w pośrodku kanału, zaburzenia lub wiry o osi

poziomej, wydobywające się z głębi, ukazujące się chwilowo na powierzchni i jakby zanurzające się z powrotem. Zaburzenie więc ruchu głównego, skutkiem którego ruchy drugorzędne, odbywające się w kierunkach naprzemian przeciwnych, składają się razem na ruch główny, pochodzi przedewszystkiem ze skończonej ale bardzo znacznej liczby wirów, wytwarzających się przy ścianach koryta i stamtąd się rozchodzących. Wzburzenie zatem wirowe zależy od wielu przyczyn. A najprzód wzburzenie, powstające w pewnym punkcie na ścianie koryta zmienia się razem:

1) z prędkością średnią miejscową w tym punkcie (prędkością, którą możemy utożsamiać ze składową  $u_0$ ), bo ta prędkość jest miarą średniego popędu, wytwarzającego wiry i udzielającego im swej siły żywej (prędkość ta nawet dochodzić winna do pewnej wartości, aby wzburzenie mogło powstać; doświadczenia wykazały, że ruchy cieczy w rurkach nawet większej średnicy niż 0,01 m, lecz z gładkimi ścianami wewnętrznymi, są regularne aż do pewnej granicy prędkości, tem niższej, im większą jest średnica rurek);

2) z wielkością stosunku  $\frac{\omega}{\chi}$ , przekroju prądu do obwo-  
du zwilżonego, stosunku, który mierzy rozległość przekroju, odpowiadającą jednostce obwo-  
du zwilżonego, gdyż ta wielkość sprzyja oscylacyom, prostopadłym do ścian koryta (ruchom falistym), dążącym do odrywania od ścian grup cząstek i bez których działanie stycznne, wywierane przez ściany na te grupy, nie doznawałoby nagłych zmian; te to zmiany, łącznie z ogólnym ruchem prądu, wprawiają cząstki cieczy w ruchy wirowe;

3) ze stopniem gładkości ścian przewodu (rury lub kanału); im więcej są one chropowate, tem więcej powodują uderzeń cząsteczek, wytwarzających wiry i przyczyniają się do powstawania ruchów oscylacyjnych, o których była mowa.

Od ścian wiry kierują się ku wnętrzu prądu i ocenienie wzburzenia miejscowego, jakie wytwarzają w danym punkcie, nie jest możliwem bez znajomości praw ich rozchodzenia się i zanikania (albo przekształcenia na energię wewnętrzną lub cieplikową), a także praw ich odbijania się o powierzchnie graniczne prądu, które spotykają w swym ruchu. Wszakże przyjąć wypada: że wzburzenie wirowe zwiększa się, postępując od ścian, gdyż wiry na ścianach powstałe, lub przez nie odbite, rozchodzą się po powierzchniach coraz mniejszych, jak to ma miejsce, gdy obwód zwilżony jest wklęsły (łożysko kołowe lub rura); że to wzburzenie pozostaje mniej więcej stałym przy obwodzie zwilżonym wydłużonym (łożyska prostokątne o pod-

stawie bardzo znacznej w stosunku do wysokości). Przypuszczać też należy, że wzburzenie wirowe jest prawie jednakie, w rurze o przekroju prostokątnym bardzo szerokim lub okrągłym, jak i w kanale otwartym, mającym za przekrój dolną połowę przekroju rury, gdyż odbijanie się na powierzchni swobodnej, wirów nadchodzących z głębi lub od brzegów, wytwarza w kanale otwartym wzburzenie podobne do tego, jakie wytwarzają w dolnej połowie przekroju rury, wiry nadchodzące od strony ścian górnych“.

Uwzględniając wszystkie przyczyny wzburzeń, doszedł Boussinesq do ogólnego wyrażenia na współczynnik tarcia w ruchu burzliwym:

$$\varepsilon = \rho g A_0 \frac{\omega}{\chi} u_0 F\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right), \dots \quad (84)$$

w którym  $u_0$  jest składowa, równoległa do osi  $x$ , prędkości średniej miejscowej na ścianie przewodu, w pewnym punkcie przekroju poprzecznego o powierzchni  $\omega$ , np. w punkcie najniższym przekroju,  $A_0$  współczynnik wzburzenia wywołanego w tym punkcie chropowatością ścian przewodu na obwodzie zwilżonym  $\chi$ ,  $F$  pewna funkcja stosunków spólrzędnych  $y, z$ , uwanżanego punktu do promienia średniego  $\frac{\omega}{\chi}$  przekroju. Jak wykazały doświadczenia, w kanale prostokątnym 1 m głębokim, przy prędkości na dnie 1 m/sek., współczynnik  $\varepsilon = 64$  jednostek  $C. G. S.$ , czyli jest prawie 5000 razy większy niż przy ruchu regularnym.

## 21. Ogólne równanie prądu ustalonego.

Weźmy pod uwagę prąd ustalony, którego przekrój poprzeczny zmienia się bardzo wolno i którego oś jest prostolinijna lub bardzo mało zakrzywiona, tak, że prędkości różnych pojedynczych strug uważać można jako do siebie równoległe. Przyjmując trzy osie spólrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , umieścmy ich początek w którymkolwiek punkcie przekroju poprzecznego prądu i skierujmy oś  $x$  równoległe do wspólnego kierunku prędkości strug, oś  $y$  — poziomo a oś  $z$  — prostopadle do  $xy$ . W równaniach Navier'a (71), zastosowanych do takiego prądu, składowe prędkości  $v$  i  $w$  będą mogły być pominięte, również jak ich pochodne  $v'$  i  $w'$  oraz drugie pochodne, których sumy mnoży współczynnik  $\varepsilon$ . Pominiętych może być także wyraz  $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , przy bardzo wolnej zmianie prędkości  $u$ . Z równań Navier'a pozostaną trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - u' \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

w których  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , przedstawiają rzuty na trzy osie sił zewnętrznych, działających na cząsteczkę. Siłami temi są: siła ciężkości i tarcie. Ponieważ przypuszczamy, że tory cząstek są prawie równoległe do osi  $x$ , więc tarcie, wynikające z prędkości względnej, czyli różnicy prędkości dwóch cząstek sąsiednich, skierowane będzie w kierunku przeciwnym kierunkowi prędkości względnej, to jest prawie równoległe do  $x$ . Rzuty jego na osie  $y$  i  $z$  są równe zeru, a rzut na oś  $x$  przedstawia pierwszy wyraz pierwszego równania, który oznaczamy:

$$-\frac{\varepsilon}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = F.$$

Jeżeli przez  $I$  oznaczymy nachylenie osi  $x$  do poziomu, składowe siły ciężkości według trzech osi będą:  $g \sin I$ ,  $0$ ,  $g \cos I$  i równania (85) przybiorą kształt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \sin I - F - u', \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g \cos I \dots (86)$$

Mnożąc dwa ostatnie kolejno przez  $\rho \partial y$  i  $\rho \partial z$ , dodając i całkując na przestrzeni tegoż samego przecięcia poprzecznego prądu, od punktu, gdzie oś  $x$  spotyka to przecięcie i gdzie  $y = 0$ ,  $z = 0$  a ciśnienie jest  $p_0$ , do jakiegokolwiek punktu, gdzie ciśnienie jest  $p$ , mieć będziemy  $p = p_0 + \rho g z \cos I$ . Wzór ten wykazuje, że ciśnienie zmienia się na tem samym przecięciu poprzecznym według praw hydrostatyki i że jeżeli powierzchnia prądu jest otwarta, to jej profil poprzeczny jest poziomy. Wykazuje także, że  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$ , a wstawiając tę wartość w pierwsze równanie, otrzymujemy  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} = g \sin I - F - u'$ . Nazwijmy  $\partial \omega$  jakikolwiek element powierzchni przecięcia poprzecznego prądu i weźmy sumę podobnych równań wypisanych dla różnych elementów całego przekroju  $\omega$ . Otrzymamy wtedy, ponieważ  $\frac{\partial p_0}{\partial x}$  i  $\sin I$  są stałe:

$$\omega \left( g \sin I - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \int_{\omega} F \partial \omega + \int_{\omega} u' \partial \omega \dots (87)$$

Ponieważ  $F$  jest rzutem na oś  $x$  oporu pochodzącego z tarcia na jednostkę masy, przeto  $F d\omega$  jest nateżeniem tarcia dla strugi o przekroju  $d\omega$  i na długości równej jednośc. Tarcia wewnętrzne, t. j. pojedynczych strug prądu jednych o drugie są wzajemne i mają miejsce między każdymi dwiema strugami; suma więc ich rzutów na oś  $x$  jest równa zeru. Pozostaje do uwzględnienia tarcie na powierzchni zewnętrznej prądu, o ściany rury lub koryta, przez które prąd bieży. Tarcie to, zależne od chropowatości ścian przewodu, jest proporcjonalne do prędkości  $u_0$  cząstek na powierzchni zewnętrznej prądu, oraz do liczby cząstek cieczy, uderzających o chropowatości ścian przewodu, a że ta liczba jest także proporcjonalną do  $u_0$ , więc tarcie jest proporcjonalne do  $u_0^2$ . Na elemencie  $d\chi$ , obwodu zwilżonego  $\chi$ , działa przeto siła oporu, wynikająca z tarcia, którą wyrazić można iloczynem:

$$g B u_0^2 d\chi$$

jeżeli przez  $B$  oznaczymy współczynnik liczbowy. Prędkość na powierzchni zewnętrznej prądu  $u_0$  zastąpić można w przybliżeniu pewną funkcją prędkości średniej na danym przekroju, albo ogólniej, przypuszczając, że obliczono całkę  $\int_{\chi} B u_0^2 d\chi$  dla każdego przekroju i otrzymaną wartość podzielono przez  $\chi$ , uważać w przybliżeniu iloraz jako funkcję prędkości średniej  $\varphi(U)$ . Ścisłe wywiedzionem to zostało przez Boussinesq'a, tu bierzemy w przybliżeniu:

$$\int_{\omega} F d\omega = g\chi\varphi(U).$$

Dla obliczenia drugiej całki  $\int_{\omega} u' d\omega$ , zauważmy że:

$$u' = \frac{du}{dt}, \quad u = \frac{dx}{dt}, \quad u' = u \frac{du}{dx},$$

$$u' d\omega = \frac{u du d\omega}{dx} = \frac{(u d\omega) du}{dx}.$$

$u d\omega$  jest to wydatek strugi, który będąc stałym wzdłuż całej strugi, wprowadzony być może pod różniczkę względem  $x$ , można więc napisać:

$$u' d\omega = \frac{d(u^2 d\omega)}{dx}$$

$$\int_{\omega} u' d\omega = \frac{d}{dx} \int_{\omega} u^2 d\omega,$$



a że w paragrafie 18 mieliśmy  $\int_{\omega} u^2 d\omega = (1 + \eta) U^2 \omega$ , przeto:

$$\int_{\omega} u' d\omega = U \omega \frac{d}{dx} \left[ (1 + \eta) U \right].$$

Przyjmując, że współczynnik  $\eta$  jest także niezależny od  $x$ , jeżeli położymy:  $\alpha' = 1 + \eta$ ,  $\frac{UdU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(U^2)}{dx}$ ,

otrzymamy:

$$\int_{\omega} u' d\omega = \frac{1}{2} \alpha' \omega \frac{d(U^2)}{dx},$$

a zastępując w równaniu (87)  $dx$  przez element toru  $ds$ , wstawiając otrzymane wartości na  $\int_{\omega} F d\omega$  i  $\int_{\omega} u' d\omega$  i dzieląc obie strony przez  $g\omega$ , mieć będziemy ogólne równanie ruchu ustalonego cieczy naturalnych:

$$\sin I - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right) \quad (88)$$

### III. R u r y.

**22. Ruch jednostajny.** W ogólnym równaniu prądu ustalonego (88), zastosowaniem do biegu wody w rurze o stałej średnicy  $D$ , mamy prędkość średnią  $U$  stałą i ostatni wyraz równy zeru. Nadto obwód zwilżony  $\chi = \pi D$ , powierzchnia przecięcia poprzecznego rury  $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$ , stosunek  $\frac{\chi}{\omega} = \frac{4}{D}$  i równanie przybiera postać:

$$\sin I - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{4}{D} \varphi(U) \quad (89)$$

Pierwsza strona równania wyraża *spadek*, czyli obniżenie poziomu piezometrycznego, na jednostkę długości rury. Ponieważ prędkość  $U$  jest stałą, przeto na mocy równania (28), linia poziomów piezometrycznych jest równoległą do linii naporu, i w każdym punkcie rury obniżenie poziomu piezometrycznego jest równe obniżeniu linii naporu. To też spadek nosi także nazwę *straty naporu* na jednostce długości rury. Jeżeli spadek na całej długości rury  $l$  wynosi  $h$ , to oznaczając

spadek na jednostkę długości rury przez  $J$ , będziemy mieli:

$$J = \frac{h}{l} = \frac{4}{D} \varphi(U) \dots \dots \dots (90)$$

albo:

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi(U) \dots \dots \dots (91)$$

Wzory te, razem z wyrażeniem wydatku rury:

$$Q = \omega U = \frac{1}{4} \pi D^2 U \dots \dots \dots (92)$$

służą do rozwiązywania zadań, dotyczących ruchu jednostajnego wody w rurach.

Kształt funkcji  $\varphi(U)$  oznaczano przez roztrzaskanie doświadczeń nad biegiem wody w rurach wodociągowych. Z 51 doświadczeń, wykonanych jeszcze w XVIII w., wyciągnął de Prony (1804 r.) wzór:

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2 \dots \dots \dots (93)$$

ze współczynnikami:  $a = 0,0000173$ ,  $b = 0,000348$  i ułożył tablice, używane w XIX w. we Francji i w innych krajach. Dla prędkości większych od  $0,25 \text{ m/sek.}$ , najczęściej się zdarzających w praktyce wodociągów, pierwszy wyraz wzoru (93) jest bardzo mały w stosunku do drugiego, co zauważywszy, Dupuit pierwszy wyraz pominął, a położył  $b = 0,0004$ , podając wzór:

$$\frac{1}{4} DJ = bU^2 \dots \dots \dots (94)$$

Na podstawie 51 dawnych i 20 własnych doświadczeń, podał Weisbach (1855 r.) wzór:

$$\frac{1}{4} DJ = B \frac{U^2}{2g}, \text{ gdzie } B = \left( a + \frac{b}{\sqrt{U}} \right) \dots \dots (95)$$

kładąc  $a = 0,0035975$ ,  $b = 0,0023678$  i ujednostajniając równanie (90), po którego lewej stronie jest wysokość spadku  $h$ , przez wprowadzenie po stronie prawej stosunku  $\frac{U^2}{2g}$ , czyli wysokości, odpowiadającej prędkości. Dla prędkości około  $2 \text{ m/sek.}$ , współczynnik wzoru Weisbacha brać można w rachunkach przybliżonych  $B = 0,005$ , a pisząc wzór w kształcie:

$$h = \frac{l}{D} \zeta \frac{U^2}{2g} \dots \dots \dots (95a)$$

współczynnik oporu przy biegu wody w rurach  $\zeta = 0,02$ .

Wszystkie te wzory nie uwzględniały natury i stopnia chropowatości ścian rur. Na ten czynnik pierwszy zwrócił uwagę Henryk Darcy (1857 r.) i opierając się na wynikach 198 własnych doświadczeń, podał:

$$\frac{1}{4} DJ = B_1 U^2, \text{ gdzie } B_1 = \left( a + \frac{b}{D} \right), \quad (96)$$

proponując dla rur z żelaza lanego, pokrytych wewnątrz osadem:

$$a = 0,000507, \quad b = 0,00001294,$$

a dla rur nowych współczynniki o połowę mniejsze.

Z innych wzorów dawniejszych, wymienimy jeszcze, służące tak dla rur pełnych, jak i dla kanałów o przekroju kołowym, wzory Ganguillet'a i Kuttera:

dla rur nowych:

$$J = \left( \frac{0,0003997}{D} + \frac{0,0003997}{D^{1,5}} + \frac{0,00009998}{D^2} \right) U^2 \quad (97)$$

i używanych:

$$J = \left( \frac{0,0003997}{D} + \frac{0,0002399}{D^{1,5}} + \frac{0,0003602}{D^2} \right) U^2$$

a także nowszy, odnoszący się nie tylko do ruchu wody, ale i do ruchu ropy i nafty, wzór Henryka Merczynga: <sup>1)</sup>

$$\frac{JD}{U^2} = a + \frac{b}{U} \quad (98)$$

dla którego obliczone zostały, przy trzech różnych średnicach, następujące współczynniki:

Średnica rury	W o d a		N a f t a	
	a	b	a	b
D=21,2 mm	a=0,001401	b=0,000437	a=0,001294	b=0,000502
26,2	0817	484	0791	513
45,25	0526	618	0405	768

a dla ropy przy średnicy  $D = 101,6$  mm:

$$a = 0,00270, \quad b = 0,00611.$$

We wzorach (95) i (96),  $\varphi(U)$  jest kwadratem z prędkości średniej, pomnożonym przez pewien współczynnik zmienny,

<sup>1)</sup> O biegu w rurach wody, nafty i ropy (*Przeegl. Techn.* 1890).

zależny od  $U$  (95) lub od  $D$  (96). Przyjmując kształt tej funkcji, jak we wzorze (95):

$$\varphi(U) = B \frac{U^2}{2g},$$

mamy po wstawieniu w równanie (90):

$$J = \frac{h}{l} = \frac{4}{D} B \frac{U^2}{2g},$$

skąd:

$$B = \frac{gDJ}{2U^2} = \frac{gD}{2l} \cdot \frac{h}{U^2} \dots \dots (99)$$

Ponieważ według prawa Reynoldsa (83) stosunek  $\frac{h}{U^2}$  jest funkcją stosunku  $\frac{UR}{\nu}$ , przeto i współczynnik  $B$  jest także funkcją tego stosunku<sup>2)</sup>, który nazwiemy *prędkością zredukowaną* i oznaczymy przez:

$$\frac{UR}{\nu} = \frac{UD}{2\nu} = C \dots \dots (100)$$

W przypadku ruchu regularnego, wstawiając w równanie (99) wartość na  $J$  wyciągniętą z wzoru Poiseuille'a (79), z uwzględnieniem:

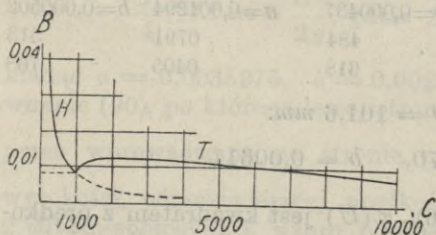
$$R = \frac{1}{2} D, \quad Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U, \quad J = \frac{8\nu Q}{g\pi R^4} = \frac{32\nu U}{gD^2}, \quad (101)$$

otrzymamy, mając na uwadze (100):

$$B = \frac{gDJ}{2U^2} = 8 \frac{2\nu}{UD} = \frac{8}{C}, \quad \dots \dots (102)$$

co wyraża zależność współczynnika  $B$  wyłącznie od prędkości zredukowanej.

Można zatem, dla jakiegokolwiek rury, wykresić według równania  $BC = 8$ , krzywą  $H$  (rys. 42), stanowiącą część hyperboli równoramiennej, która w pewnym punkcie przechodzi w krzywą



Rys. 42.

<sup>2)</sup> Por. H. Blasius: Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. H. 131. Berlin, 1913.

$T$ , odpowiadającą ruchowi burzliwemu. Ma to miejsce przy wartości (80):  $C = 1000$  jedn. C. G. S.; wtedy  $B = 0,008$  a prędkość krytyczna z równania (100):

$$U_k = \frac{2C\nu}{D}.$$

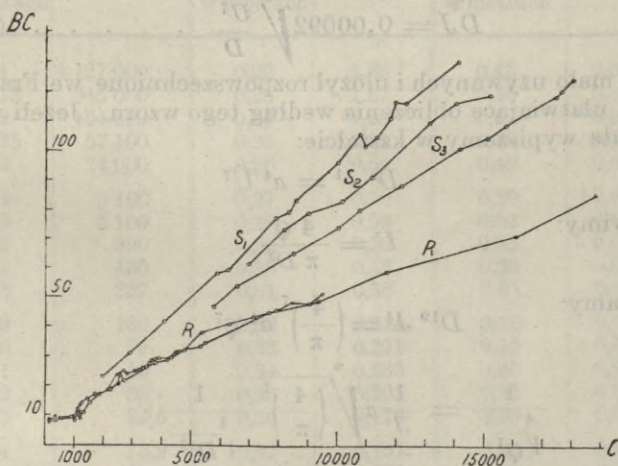
Posiłkując się tablicą 1 (§ 19), dającą wartości  $\nu$  dla różnych cieczy i temperatur, mamy dla wody przy  $20^{\circ}$  C. i średnicy rury:

$$D = 2 \text{ cm}, \quad U_k = 10 \text{ cm/sek.},$$

$$D = 20 \text{ cm}, \quad U_k = 1 \text{ cm/sek.},$$

a że zwykle prędkości w rurach wodociągowych są znacznie większe, przeto do ruchu wody w tych rurach nie można stosować wzoru Poiseuille'a. Wzór ten w rozleglejszych granicach stosowany być może do innych płynów, bo np. dla olejów przy  $20^{\circ}$  C.,  $\nu = 3$ , i ruch regularny w rurze o średnicy  $D = 2$  cm, trwa dopóki prędkość nie przekroczy granicy  $U_k = 2 \cdot 1000 \cdot 3 : 2 = 3000$  cm/sek.

W zwykle spotykanym w praktyce, przypadku ruchu burzliwego, gdy  $C > 1000$  jednostek C. G. S., współczynnik  $B$



Rys. 43.

wyznaczać trzeba przez interpolację wyników doświadczeń, które wykazują zależność  $B$  nie tylko od prędkości zredukowanej  $C$ , ale i od natury ścian wewnętrznych rury. Na rys. 43, dla którego zmniejszenia wzięto za rzędne nie  $B$ , ale iloczy-

ny  $BC$ , oznaczone są literą  $R$  wyniki doświadczeń Reynoldsa nad ruchem wody w rurkach ołowianych ciągnionych o średnicach 0,615 i 1,67  $cm$ , a literami  $S_1 S_2 S_3$  wyniki doświadczeń Sapha i Schodera (1903 r.) nad ruchem wody w rurach żelaznych cynkowanych, o średnicach  $D_1 = 1,234$ ,  $D_2 = 1,54$ ,  $D_3 = 2,16$   $cm$ . Ruch regularny przedstawia prosta pozioma o rzędnej  $BC = 8$ .

Z wzorów praktycznych, wywiedzionych drogą podobnych interpolacyj, największe mają rozpowszechnienie wzory Reynoldsa, Flamanta, Biela i Langa.

We wzorze Reynoldsa:

$$\frac{1}{4} DJ = \lambda T^{2-n} \frac{U^n}{D^{2-n}} \dots \dots \dots (103)$$

spółczynniki:  $\lambda = \frac{396^n}{4 \times 67.7 \times 10^6}$ ,  $T = 1 + 0,0336 t + 0,000231 t^2$ ,

gdzie  $t$  jest temperatura w stopniach Cels. Wykładnik  $n$  waha się między 1,8 dla rur bardzo gładkich a 2 dla bardzo chropowatych. Dla rur nowych brać należy  $n = 1,85$ , dla pokrytych małym osadem  $n = 1,95$ .

Flamant (1892 r.) doszedł do wzoru:

$$DJ = 0,00092 \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}} \dots \dots \dots (104)$$

dla rur mało używanych i ułożył rozpowszechnione we Francji tablice, ułatwiające obliczenia według tego wzoru. Jeżeli wzór Flamanta wypiszemy w kształcie:

$$D^5 J^4 = a^4 U^7$$

i wstawimy:

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2},$$

otrzymamy:

$$D^{19} J^4 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 Q^7,$$

skąd:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{Q^7}} = \frac{1}{J} a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}}.$$

Tablica 2 daje dla wartości  $D$  od 0,1  $m$  do 1,40  $m$  wartości:

$$e = a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}}$$

a tablica 3 pozwala z ilorazu:

$$\frac{c}{J} = \frac{1}{4 \sqrt{Q^2}}$$

otrzymać wydatek  $Q$ .

Biel (1907 r.) wrócił do dwumianu de Prony'ego (93):

$$\frac{1}{4} DJ = a_1 U^2 + b_1 U \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

kładąc współczynniki:  $a_1 = 0,12 + \frac{f}{\sqrt{\frac{1}{4}D}}$ ,  $b_1 = \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{4}D}} \frac{v}{g}$ ,

gdzie  $v = \frac{\varepsilon}{\rho}$  (§ 19), a dla rur z żelaza lanego:

używanych  $f = 0,072$ ,  $b = 0,27$

nowych  $f = 0,036$ ,  $b = 0,46$ .

T A B L I C A 2,  
ułatwiająca obliczenia rur według wzoru Flamanta.

$D$ w metrach	$c$	$D$ w metrach	$c$	$D$ w metrach	$c$
0,01	4 427 000	0,22	1,86	0,45	0,062
0,015	645 000	0,23	1,51	0,46	0,056
0,02	164 500	0,24	1,23	0,47	0,051
0,025	57 100	0,25	1,01	0,48	0,046
0,03	24 000	0,26	0,84	0,49	0,041
0,04	6 100	0,27	0,70	0,50	0,0377
0,05	2 100	0,28	0,59	0,52	0,0313
0,06	890	0,29	0,50	0,55	0,0240
0,07	430	0,30	0,43	0,60	0,0158
0,08	227	0,31	0,36	0,65	0,0108
0,09	130	0,32	0,314	0,70	0,0076
0,10	79	0,33	0,271	0,75	0,0055
0,11	50	0,34	0,235	0,80	0,0040
0,12	33	0,35	0,205	0,85	0,0030
0,13	22,6	0,36	0,179	0,90	0,0023
0,14	15,9	0,37	0,157	0,95	0,0018
0,15	11,5	0,38	0,139	1,00	0,0014
0,16	8,44	0,39	0,123	1,05	0,0011
0,17	6,33	0,40	0,107	1,10	0,00089
0,18	4,83	0,41	0,097	1,20	0,00059
0,19	3,73	0,42	0,086	1,30	0,00040
0,20	2,93	0,43	0,077	1,40	0,00028
0,21	2,32	0,44	0,069	—	—

TABLICA 3.

ułatwiająca obliczenia rur według wzoru Flamanta.

$Q$ w litrach	$\frac{c}{J}$	$Q$ w metrach sześciennych	$\frac{c}{J}$	$Q$ w metrach sześciennych	$\frac{c}{J}$
0,10	10 000 000	0,0020	53 000	0,040	280
0,11	8 464 000	0,0021	49 000	0,045	227
0,12	7 268 000	0,0022	45 000	0,050	189
0,13	6 318 000	0,0023	41 000	0,055	160
0,14	5 550 000	0,0024	38 000	0,060	137
0,15	4 919 000	0,0025	36 000	0,065	120
0,16	4 393 000	0,0026	33 400	0,070	105
0,17	3 951 000	0,0028	29 300	0,075	93
0,18	3 575 000	0,0030	26 000	0,080	83
0,19	3 252 000	0,0035	19 900	0,090	68
0,20	2 973 000	0,0040	15 700	0,100	56
0,21	2 730 000	0,0045	12 800	0,110	48
0,22	2 516 000	0,0050	10 600	0,120	41
0,23	2 328 000	0,0055	9 000	0,130	36
0,24	2 161 000	0,0060	7 700	0,140	31
0,25	2 012 000	0,0065	6 700	0,150	28
0,26	1 878 000	0,0070	5 900	0,160	24,7
0,28	1 650 000	0,0075	5 230	0,170	22,2
0,30	1 462 000	0,0080	4 670	0,180	20,1
0,35	1 117 000	0,0090	3 810	0,190	18,3
0,40	884 000	0,010	3 160	0,200	16,7
0,45	719 000	0,011	2 680	0,210	15,35
0,50	598 000	0,012	2 300	0,220	14,15
0,55	506 000	0,013	2 000	0,230	13,09
0,60	435 000	0,014	1 750	0,240	12,15
0,65	378 000	0,015	1 560	0,250	11,31
0,70	332 000	0,016	1 390	0,260	10,56
0,75	294 000	0,017	1 250	0,280	9,28
0,80	263 000	0,018	1 130	0,300	8,22
0,90	214 000	0,019	1 030	0,350	6,28
1,00	178 000	0,020	940	0,400	4,97
1,10	151 000	0,021	860	0,450	4,04
1,20	129 000	0,022	796	0,500	3,36
1,30	112 000	0,023	736	0,550	2,85
1,40	99 000	0,024	683	0,600	2,44
1,50	87 000	0,025	636	0,650	2,12
1,60	78 000	0,026	594	0,700	1,87
1,70	70 000	0,028	522	0,750	1,65
1,80	64 000	0,030	462	0,800	1,48
1,90	58 000	0,035	353	0,900	1,20
				1,000	1,00



H. Lang, w rozpowszechnionym podręczniku „Hütte“, (1915 r.) podaje wzór ogólny:

$$J = \left( \frac{D}{D_1} \right)^5 \left( 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{UD}} \right) \frac{1}{2g} \frac{U^2}{D} \quad (106)$$

w którym, dla rur bez osadu,  $D = D_1$ . Obliczone dla takich rur tablice podręcznika, dają dla średnic od 0,02 m do 1 m odpowiadające wartości iloczynu  $1000^2 D^5$  i wartości współczynnika:

$$\lambda = 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{UD}},$$

odpowiadające prędkości  $U$  od 0,10 m do 2 m. W użyciu mniej są dogodne od tablic Flamanta.

Ogólniejszy od powyższych, bo dający się stosować nie tylko do wody, ale do różnych płynów i temperatur, oraz rur z różnego materiału, jest wzór Misesa <sup>1)</sup>, który, trzymając się ogólnej postaci:

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{B}{2g} U^2, \quad \dots \quad (107)$$

przyjął, podobnie jak Lang, kształt paraboliczny krzywej  $T$  (rys. 42), wychodzącej z punktu o współrzędnych  $C = 1000$ ,  $B = 0,008$ , obliczył współczynniki równania:

$$BC - 8 = \alpha (C - 1000) + \beta \sqrt{C - 1000},$$

czyli wartość współczynnika:

$$B = \alpha \left( 1 - \frac{1000}{C} \right) + \frac{\beta}{\sqrt{C}} \sqrt{1 - \frac{1000}{C}} + \frac{8}{C}.$$

Dla prędkości spotykanych w praktyce wodociągowej,  $C$  jest znacznie większe od 1000 a tembardziej od 8, wyrazy  $\frac{1000}{C}$  i  $\frac{8}{C}$  mogą być pominięte i zostaje  $B = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{C}}$ . Roztrząsanie wyników doświadczeń dało:

$$\beta = 0,3, \quad \alpha = 0,0024 + \sqrt{\frac{2k}{D}},$$

gdzie  $\frac{2k}{D}$  jest miarą chropowatości względnej, a  $k$  chropo-

<sup>1)</sup> Por. przyp. 8, str. 2.

wartością absolutną. Wynika stąd dla prędkości bliskich prędkości krytycznej:

$$B = \left(0,0024 + \sqrt{\frac{2k}{D}}\right) \left(1 - \frac{1000}{C}\right) + \frac{0,3}{\sqrt{C}} \sqrt{1 - \frac{1000}{C} + \frac{8}{C}}$$

a wogóle:

$$B = 0,0024 + \sqrt{\frac{2k}{D}} + \frac{0,3}{\sqrt{C}} \quad (108)$$

gdzie prędkość zredukowaną  $C$  daje równanie (100), a wartości  $10^6 k$  dla różnych materiałów tablica 4. Wszystkie średnice i prędkości we wzorze Misesa wyrażone są w centymetrach.

TABLICA 4.

**Chropowatość absolutna  $k$  różnych ścian.**

Materiał	$10^6 k$ w $cm$
Szkoło . . . . .	od 0,2 do 0,8
Mośiadz, ołów miedź (ciagnione) . . . . .	" 0,2 " 1,0
Cement wygładzony . . . . .	" 7,5 " 15
" surowy . . . . .	" 20 " 40
Waż gumowy zwykły . . . . .	" 6 " 12
" " chropowaty . . . . .	" 15 " 30
Rura gazowa . . . . .	" 20 " 50
" żelazna asfaltowana . . . . .	" 30 " 60
" " lana nowa . . . . .	" 100 " 200
" " " używana . . . . .	" 250 " 500
" z blachy żel. nitowana . . . . .	" 200 " 500
Drzewo gładko heblowane . . . . .	" 25 " 50
" ociosane . . . . .	" 50 " 100
" surowe chropowate . . . . .	" 200 " 400
Mur z ciosów . . . . .	" 200 " 400
" " cegieł fugowanych . . . . .	" 200 " 400
" " " zwykłych . . . . .	" 300 " 600
" " kamieni nieociosanych . . . . .	" 2000 " 4000
Ściany z ziemi i darni . . . . .	" 10000 " 20000

Inżynierowie lwowscy B. Biegeleisen i R. Bukowski<sup>1)</sup> po roztrząśnieniu doświadczeń w liczbie 1761 i krytycznym

<sup>1)</sup> Grundlagen zur Berechnung von Wasserrohr-leitungen. *Gesundheits-Ingenieur*, 1914.

rozbiorze dwudziestu jeden dawniejszych wzorów, podanych przez poprzedników, wywiedli:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla rur używanych } J = 0,002568 \frac{U^{1,9}}{D^{1,1}} \\ \text{„ „ nowych } J = 0,0012 \frac{U^{1,9}}{D^{1,1}} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (109)$$

Jak znaczne zachodzą różnice między wynikami obliczeń, dokonanych za pomocą różnych wzorów, wykazali inż. Biegeleisen i Bukowski w szczegółowych zestawieniach. W tabelicy 5 podajemy wyciągnięte z tych zestawień liczby, odnoszące się do wzorów wyżej podanych.

T A B L I C A 5.

W z o r y	Strata naporu $J$ na 1 m bieżącej rury żelaznej lanej średnicy $D = 0,2$ m			
	Rury nowe		Rury używane	
	$U=0,6$ m/sek.	$U=1$ m/sek.	$U=0,6$ m/sek.	$U=1$ m/sek.
de Prony (93) .	0,002713	0,007306	0,002713	0,007306
Dupuit (94) . .	0,002841	0,007890	0,002841	0,007890
Weisbach (95) .	0,002442	0,006080	0,002442	0,006080
Darcy (96) . . . .	0,002060	0,005723	0,004120	0,01142
Ganguillet i Kutler (97) .	0,003227	0,008965	0,004928	0,01368
Reynolds (103)	0,002311	0,005944	0,003943	0,01095
Flamant (104)	0,002264	0,005532	0,002814	0,006879
Biel (105) . . . .	0,002329	0,006130	0,003355	0,009127
Lang (106) . . . .	0,002321	0,006439	0,007049	0,01868
Mises (108) . . .	0,002756	0,007368	0,003505	0,009444
Biegeleisen i Bukowski (109)	0,002673	0,007053	0,005715	0,01508

**23. Obliczanie rur.** We wzorach (93—109) na ruch jednostajny wody w rurach, do których dochodzi wzór na wydatek (92), mamy cztery zmienne:

$$D, \quad J, \quad Q, \quad U,$$

i znając dwie z nich, możemy obliczyć dwie pozostałe. W praktyce dane bywają zwykle:

$$D, Q, \quad D, J, \quad J, Q$$

a szukane są:

$$J, \quad Q, \quad D,$$

oraz w niektórych przypadkach prędkość  $U$ , która według wzoru (92):

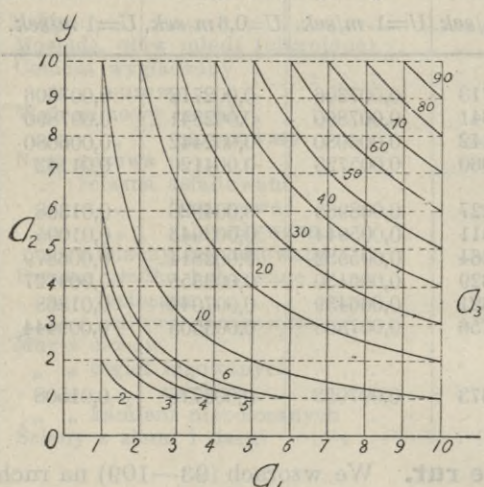
$$U = \frac{Q}{\frac{1}{4} \pi D^2},$$

obliczona być może z łatwością, przy użyciu tablic powierzchni kół, podawanych w podręcznikach technicznych.

Obliczanie rur bezpośrednio z wzorów jest zbyt uciążliwe, zwłaszcza przy potęgach ułamkowych, wymagających stosowania logarytmów. To też wszędzie, gdzie obliczanie to prowadzone było intensywniej, używano oddawna tablic liczbowych, w rodzaju podanych poprzednio (tabl. 2 i 3) przy wzorze Flamanta. Dogodniejszymi od tablic liczbowych okazały się w użyciu tablice wykresłne. Sporządzano je dawniej w sposób następujący. Dla wykresłnego przedstawienia jakiegokolwiek wzoru, np. iloczynu:

$$a_1 a_2 = a_3$$

brano dwie osie spólrzędnych prostokątnych  $OX$  i  $OY$  (rys. 44),



Rys. 44.

na których odcinano w dowolnej podziałce długości proporcjonalne do  $a_1$  i  $a_2$ :

$$x = m a_1, \quad y = n a_2,$$

biorąc dowolne  $m$  i  $n$ . Każde dwie wartości  $a_1$  i  $a_2$  dawały tym sposobem punkt  $a_3$ , należący do krzywej

$$xy = m n a_3$$

i każdej wartości  $a_3$  odpowiadała jedna krzywa. Otrzymywano tym sposobem szereg krzywych  $a_3$  dający wartości  $a_3$  odpowiadające różnym wartościom  $x$  i  $y$ . Np. dla  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ , wykres daje  $a_3 = 6$ .

Zastosowanie logarytmów pozwoliło uprościć te wykresy i otrzymywać szeregi linii prostych, zamiast linii krzywych.

W przykładzie powyższym:

$$\log a_1 + \log a_2 = \log a_3$$

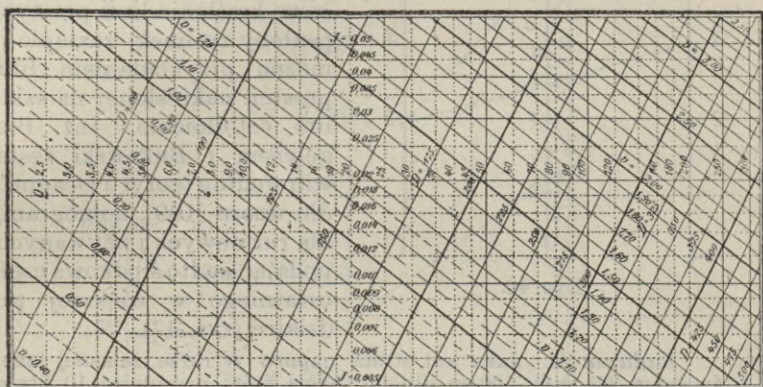
odcinając więc na osiach  $OX$  i  $OY$ :

$$x = \log a_1, \quad y = \log a_2,$$

otrzymujemy linię prostą, której równanie jest:

$$x + y = \log a_3.$$

W ten sposób, dla wzorów Kuttera (97) ułożone zostały w użyciu będące tablice wykresne <sup>1)</sup>, z których jedną, w zmniejszeniu <sup>10/22</sup> przedstawia rys. 45. Na tablicy tej linie pionowe



Rys. 45.

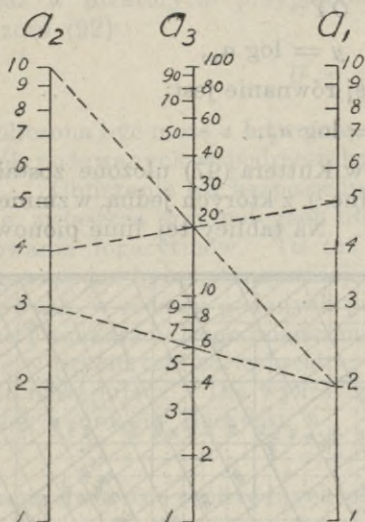
przedstawiają wydatki  $Q$ , od 2,5 do 300 litrów na sekundę, linie poziome — spadki  $J$  od 0,05 do 0,005, linie ukośne, obniżające się od lewej ku prawej stronie, — prędkości  $U$  od 0,4 do 3,5 m/sek., a obniżające się od prawej ku lewej stronie średnice  $D$  od 80 do 500 milimetrów. Np. dla  $D = 0,2$  m,  $Q = 48$  litr./sek. tablica daje  $J = 0,02$  i prędkość  $U = 1,50$  m/sek. Tablice podobne, rysowane na większą podziałkę i obejmujące szerszy zakres wartości czterech zmiennych, okazały się w użyciu praktyczniejszemi od tablic liczbowych.

Znakomite ulepszenie metod wykresnych dokonane zostało przez inż. Maurycego d'Ocagne, twórcę nauki wykładanej na politechnikach, zwanej nomografią <sup>2)</sup>. Doszedł on do zastąpienia siatek linii prostych, zbyt nużących oczy, nomograma-

<sup>1)</sup> Por. R. Weyrauch. *Hydraulisches Rechnen* Stuttgart 1915.

<sup>2)</sup> Por. M. d'Ocagne. *Traité de nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques.* Paris 1899.

mi, złożonymi z podziałek równoległych. Dla wziętego poprzednio przykładu prostego  $a_1 a_2 = a_3$ , nomogram d'Ocagne'a przedstawia rys. 46.



Rys. 46.

Podziałki z wartościami zmiennych tak są ustawione w nomogramie, że punkty, odpowiadające wartościom  $a_1, a_2, a_3$  leżą na linii prostej. Biorąc więc  $a_1 = 2, a_2 = 3$  i prowadząc przez nie linię prostą, otrzymuje się punkt  $a_3 = 6$ . Ponieważ każdorazowe kreślenie linii prostych psułoby rysunek, zastąpić je można przykładaniem linii prostej, nakreślonej na szkłe lub celluloidzie. Inż. Biegeleisen i Bukowski zestawili według teorii d'Ocagne'a dla wzoru (109), nomogramy dla rur nowych i używanych, podając nadto środkową część ostatniego w większej podziałce (rys. 47).

**Zadanie 26.** Jaka jest strata naporu w rurze żelaznej lanej, o średnicy 225 mm, 500 m długiej, przez którą przepływa 10 litrów wody na sekundę?

Na nomogramie (rys. 47) prosta przechodząca przez punkty  $Q = 0,01, D = 0,225$ , przecina podziałkę  $J$  w punkcie  $J = 0,00045$ . Na długości 500 m strata naporu wynosić będzie:  $0,00045 \cdot 500 = 0,225$  m.

Przy użyciu tablic Flamanta otrzymalibyśmy z tabl. 3 dla  $Q = 0,01$  m<sup>3</sup>,  $\frac{c}{J} = 3160$ , a z tabl. 2 dla  $D = 0,225$  m,  $c = 1,785$ , czyli:

$$J = \frac{1,785}{3160} = 0,00056.$$

Wykres (rys. 45) nie obejmuje danych zadania. Prędkość  $U$  według (92):

$$U = \frac{0,01}{0,03976} = 0,25 \text{ m/sek.}$$

**Zadanie 27.** Ile wody daje rura żelazna lana o średnicy 125 mm, 100 m długa, przy spadku całkowitym 0,55 m.

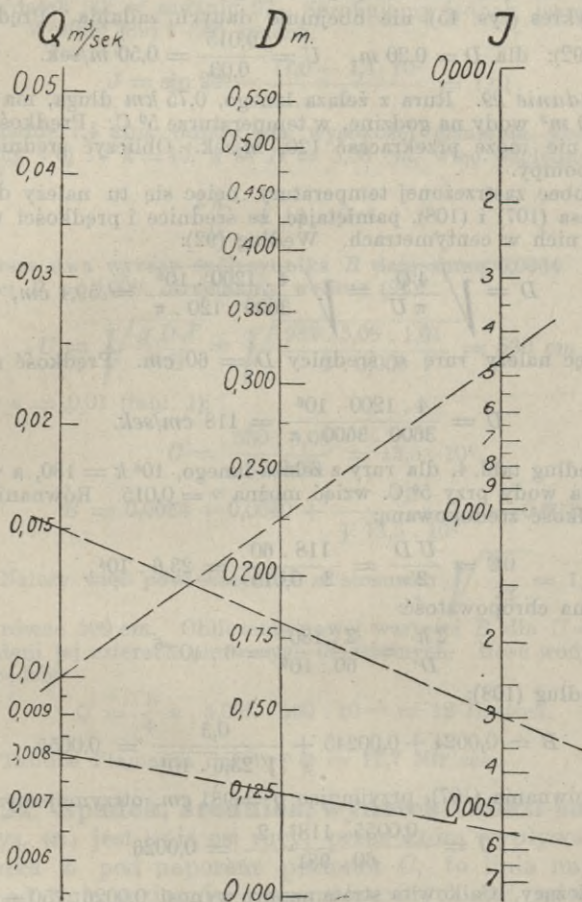
$$J = \frac{h}{l} = \frac{0,55}{100} = 0,0055.$$

Na nomogramie (rys. 47) prosta, przechodząca przez punkty:  $J = 0,0055, D = 0,125$  przecina podziałkę  $Q$  w punkcie 0,0082; rura daje więc 8,2 litrów na sekundę.

Przy użyciu tablic Flamanta otrzymalibyśmy z tabl. 2, dla  $D = 125$ ,  $c = 27,8$ ,  $\frac{c}{J} = 5054$ , a z tabl. 3,  $Q = 0,0078 \text{ m}^3$ .

Z wykresu (rys. 45) mamy dla  $D = 0,125 \text{ m}$  i  $J = 0,0055$ :

$$Q = 0,0066 \text{ m}^3 \quad \text{oraz} \quad U = 0,54.$$



Rys. 47.

**Zadanie 28.** Jaka średnicę winna mieć rura żelazna lana 1000 m długa przy spadku całkowitym 3 m, dawać mająca 15 litrów wody na sekundę?

$$J = 0,003, \quad Q = 0,015 \text{ m}^3/\text{sek}.$$

Na nomogramie (rys. 47) prosta, przechodząca przez te punkty,

przecina podziałkę  $D$  między punktami 0,175 i 0,20. W praktyce przyjąć należy średnicę 0,20 m.

Przy użyciu tablic Flamanta otrzymalibyśmy dla  $Q = 0,015$ , z tabl. 3:  $\frac{c}{J} = 1560$ , czyli  $c = 1560 J = 1560 \cdot 0,003 = 4,68$ ; w tabl. 2 średnica, odpowiadająca tej wartości  $c$  zawarta jest między 0,18 a 0,19, co prowadzi do poprzedniego rozwiązania.

Wykres (rys. 45) nie obejmuje danych zadania. Prędkość  $U$  według (92): dla  $D = 0,20$  m,  $U = \frac{0,015}{0,03} = 0,50$  m/sek.

**Zadanie 29.** Rura z żelaza łanego, 0,75 km długa, ma dostarczać 1200 m<sup>3</sup> wody na godzinę, w temperaturze 5° C. Prędkość wody w rurze nie może przekraczać 120, m/sek. Obliczyć średnicę rury i pracę pompy.

Wobec zastrzeżonej temperatury uciec się tu należy do wzorów Misesa (107) i (108), pamiętając, że średnice i prędkości wyrażone są w nich w centymetrach. Według (92):

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1200 \cdot 10^6}{3600 \cdot 120 \cdot \pi}} = 59,4 \text{ cm},$$

wziąć więc należy rurę o średnicy  $D = 60$  cm. Prędkość średnia będzie:

$$U = \frac{4 \cdot 1200 \cdot 10^6}{3600 \cdot 3600 \cdot \pi} = 118 \text{ cm/sek.}$$

Według tabl. 4, dla rury z żelaza łanego,  $10^6 k = 180$ , a według tabl. 1, dla wody przy 5° C. wziąć można  $\nu = 0,015$ . Równanie (100) daje prędkość zredukowaną:

$$C = \frac{UD}{2\nu} = \frac{118 \cdot 60}{2 \cdot 0,015} = 23,6 \cdot 10^4,$$

a względna chropowatość:

$$\frac{2k}{D} = \frac{2 \cdot 180}{60 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^{-6}.$$

Według (108):

$$B = 0,0024 + 0,00245 + \frac{0,3}{\sqrt{23,6 \cdot 10^4}} = 0,0055.$$

Z równania (107), przyjmując  $g = 981$  cm, otrzymujemy:

$$J = \frac{0,0055 \cdot 118^2 \cdot 2}{60 \cdot 981} = 0,0026$$

na metr bieżący. Całkowita strata naporu wynosi  $0,0026 \cdot 750 = 1,95$  m a praca potrzebna dla pokonania oporów:

$$\frac{1200 \cdot 10^3 \cdot 1,95}{3600 \cdot 75} = 8,7 \text{ k. m.}$$

Po zanieczyszczeniu się rury praca ta może nie wystarczać, gdyż  $10^6 k = 500$  daje drugi wyraz sumy, tworzącej współczynnik  $B$ , równy:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{60}} = 0,0041,$$



skąd  $B = 0,0071$ , t.j. o 30% większe, a praca potrzebna 11 koni zamiast 8,7.

**Zadanie 30.** Ile wody spływać będzie ze zbiornika, pod ciśnieniem 1,4 atm. rurą gazową dwucalową, 6 m długą, nachyloną na  $20^\circ$  do poziomu i otwartą na końcu?

Dane są tu spadek  $J$  i średnica  $D$ , można więc łatwo obliczyć wydatek jak w zadaniu 27. Spróbujemy jednak jeszcze wzoru Misesa. Według (89) i (90) spadek:

$$J = \sin 20^\circ = \frac{(1,0 - 1,4) 10}{6} = 1,01,$$

bo ciśnienie 1,4 atm. odpowiada wysokości ciśnienia wody 14 m. Z tablicy 4-ej  $10^6 k = 40$ , a że  $D = 5,08$  cm, więc względna chropowatość:

$$\frac{2k}{D} = 16 \cdot 10^{-6}$$

i pierwsze dwa wyrazy współczynnika  $B$  dają sumę 0,0064. Probując wartości  $B = 0,009$ , otrzymamy według (92):

$$U = \sqrt{\frac{g D J}{2 B}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 5,08 \cdot 1,01}{2 \cdot 0,009}} = 530 \text{ cm}$$

a przy  $\nu = 0,01$  (tabl. 1):

$$C = \frac{530 \cdot 5,08}{2 \cdot 0,01} = 13,5 \cdot 10^4$$

$$B = 0,0024 + 0,0040 + \frac{0,3}{\sqrt{13,5 \cdot 10^4}} = 0,0072.$$

Należy więc powiększyć  $U$  w stosunku  $\sqrt{\frac{90}{72}} = 1,12$ , to jest

wziąć równe 590 cm. Obliczenie nowej wartości  $B$  dla  $U = 590$  cm, nie zmieni jej czterech pierwszych dziesiątych. Ilość wody spływającej będzie:

$$Q = \frac{1}{4} \pi \cdot 5,08^2 \cdot 590 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ litr/sek.}$$

Tablice Flamanta dałyby:  $Q = 12,7$  litr/sek.

**24. Spadek, średnica, wydatek i koszt rur.** Jeżeli  $AB$  (rys. 48) jest linią osi rury, przez którą wypływa woda ze zbiornika  $Z$  pod naporem poziomym  $C$ , to linia naporu  $CD$  leży nad linią poziomów piezometrycznych  $EF$ , na wysokości stałej  $CE = SR = \frac{U^2}{2g}$ . Dla punktu  $M$  rury, rzędna  $MN = z$ ,

$RM = \frac{p}{\gamma}$ , tak, że rzędna linii naporu  $SN = h = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$

a rzędna linii poziomów piezometrycznych  $RN = h_1 = z + \frac{p}{\gamma}$ .

Obniżenie poziomu piezometrycznego między dwoma punkta-

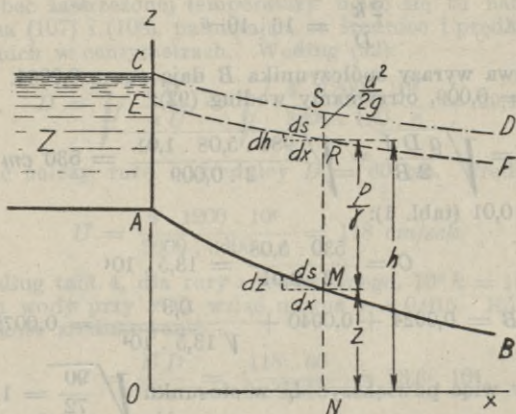
mi osi rury, odległymi od siebie na  $ds$ , równe obniżenie linii naporu, wiąże się ze średnicą i prędkością średnią równaniem (90):

$$-\frac{dh_1}{ds} = -\frac{dh}{ds} = \frac{4\varphi(U)}{D},$$

które napisać można, oznaczając ostatni wyraz stały przez  $K$  i odnosząc krzywe  $AB$ ,  $EF$  i  $CD$ , do osi  $oz$ ,  $ox$ :

$$\frac{dh}{dx} + K \frac{ds}{dx} = 0 \quad \dots \quad (110)$$

Równanie to wiąże elementy różniczkowe dwóch linii  $AB$  i  $CD$  (lub  $EF$ ) i pozwala wyznaczyć jedną z nich, gdy dru-



Rys. 48.

ga jest znana. Jeżeli np. oś rury jest linią prostą, wtedy stosunek  $\frac{ds}{dx}$  jest stały, stosunek  $\frac{dh}{dx}$  będzie także stałym i linia poziomów piezometrycznych  $EF$  linią prostą. Wogóle, przy osi rury określonej równaniem  $z = f(x)$ :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

a z równania (110):

$$\frac{dh}{dx} = -K \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad h = -K \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx.$$

Ilość stała  $K$  jest funkcją średnicy i wydatku  $Q$ . Linia naporu równoległa do linii poziomów piezometrycznych, ma rzędne większe o ilość stałą  $\frac{U^2}{2g}$ . Zwykle, przy znaczniejszej

długości rury, profil jej zbliża się do linii prostej, wtedy i linię poziomów piezometrycznych uważa się za prostą i pomijając wysokość  $\frac{U^2}{2g}$ , bardzo małą wobec  $h$ , bierze się ją za linię naporu.

Średnica  $D$  jest głównym czynnikiem wydatku rury  $Q$ . Ręgując  $U$ , otrzymujemy z wzorów (92) i (94):

$$Q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{D^5 J}{b}} \quad \dots \quad (111)$$

Na wielkość wydatku czynnik  $D$  wpływa w potęgę  $\frac{5}{2}$  a spadek  $J$  w potęgę  $\frac{1}{2}$ , co wynika bezpośrednio z równania różniczkowego:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{5}{2} \frac{dD}{D} + \frac{1}{2} \frac{dJ}{J},$$

otrzymanego z wzoru (111). Jeżeli np. podwoimy średnicę, nie zmieniając spadku, wydatek będzie więcej niż pięciokrotny; gdy przeciwnie podwoimy spadek, nie zmieniając średnicy, powiększenie wydatku wyniesie około 40%. Wogóle, mnożąc średnicę przez  $n$ , otrzymamy wydatek:

$$Q' = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{n^5 D^5 J}{b}}, \quad \text{skąd} \quad \frac{Q'}{Q} = \sqrt{n^5},$$

a mnożąc spadek przez  $n$ :

$$Q'' = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{D^5 n J}{b}}, \quad \text{skąd} \quad \frac{Q''}{Q} = \sqrt{n};$$

stosunek powiększonych wydatków jest więc:

$$\frac{Q'}{Q''} = \sqrt{\frac{n^5}{n}} = n^2.$$

Powiększając jednocześnie  $D$  i  $J$ , otrzymalibyśmy:

$$Q''' = n^3 Q.$$

Ponieważ zbytne powiększenie wydatku wywoływać może drgania, zagrażające stałości połączeń różnych części rury, lub podpór podtrzymujących rurę, nie należy przeto przekraczać w tym względzie pewnej granicy. Teoretycznie niepodobna oznaczyć tej granicy, zdaje się jednak, że wydatek

maximum rośnie szybciej od pierwiastku kwadratowego ze średnicy. Inż. Ch. Rabut <sup>1)</sup> proponuje wzór:

$$Q \leq 1,2 D^{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots (112)$$

wyrażony w jednostkach: metr, sekunda. Z ograniczenia wydatku wynika ograniczenie naporu, które wyrazić można przez:

$$J \leq 0,02 D^{-\frac{3}{8}} \dots \dots \dots (113)$$

a względem wydatku:

$$J \geq 0,009 Q^{-\frac{3}{20}} \dots \dots \dots (114)$$

Że zaś stosowanie tych wzorów wymaga logarytmów, a inżynier zmuszony bywa oryentować się szybko w praktyce, przeto inżynier Rabut zaleca swym uczniom utrwalenie w pamięci następujących liczb:

dla średnicy $D =$	20	40	60	80	100	200	centymetr.
maximum $Q =$	20	120	330	700	1200	2000	litr. na sek.
maximum $J =$	360	280	240	210	200	190	centymetr. na kilometr.

Zmniejszanie wydatku nie może także przekraczać pewnej granicy, bo przy małej prędkości, w rurach tworzą się osady, unoszone przez wodę gdy prędkość się powiększy, i powodujące wtedy zatkania rur lub zanieczyszczenie wody. W praktyce przyjmuje się prędkość minimalną 25 *cm* na sekundę.

Podobnie jak wydatek, ciśnienie w rurach ma także swą granicę wyższą i niższą. Granicę wyższą daje wytrzymałość materiału, z jakiego są zrobione rury. Przy grubości  $e$  ściany rury i praktycznej granicy wytrzymałości materiału na rozzerwanie  $R$ , ciśnienie wewnątrz rury  $p$  winno być:

$$p \leq \frac{2 e R}{D} \dots \dots \dots (115)$$

Rury z żelaza lanego nie przekraczają zwykle średnicy  $D = 1,20 m$ , kładąc więc przytem  $R = 2,5 kg$  na milimetr kwadratowy i  $e = 12 mm$ , mamy według (115) granicę wyższą ciśnienia w tych rurach:

$$p \leq 50 m \text{ słupa wody.}$$

<sup>1)</sup> Por. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Cours d'Hydraulique. Notes prises par les Elèves aux leçons de M. Rabut, Ingénieur en chef des P. et Ch., professeur. 1905—1906 (litografowane).

Rury większe o średnicach 1,25 lub 1,50 m odlewane być muszą z grubością  $e$ , odpowiadającą istotnemu naporowi, jaki mają ponosić.

Niższa granica ciśnienia wynika z warunku, aby w wodociągach miejskich woda dochodziła do górnych piętr pod ciśnieniem większym od atmosferycznego.

Obliczenia kosztu przewodów rurowych, glinianych lub żelaznych, wykazują proporcjonalność sum kosztu do średnicy rury i długości przewodu. Koszt rury o średnicy  $D$ , ułożonej na długości  $l$ , wynosi:

$$K = n l D \quad (116)$$

gdzie  $n$  jest stałe i zależne od materiału i miejscowości.

Zwykle w wodociągach, pompy umieszczone na brzegu rzeki lub przy źródłach, zaczerpnąwszy wodę rurą ssącą, pchają ją rurą tłoczącą do zbiornika, umieszczonego na pewnej wysokości. Znana jest długość rury i wydatek  $Q$ , a średnica pozostaje nieoznaczoną, gdyż praca maszyn przez powiększanie lub zmniejszanie prędkości w przewodzie, dostarczać może zawsze żądanej ilości wody. Przy większej długości rury, zmniejszenie średnicy obniża znacznie kosztą budowy, ale powiększa prędkość, a więc i pracę maszyn, co wywołuje zwiększenie kosztów eksploatacji (paliwo); przeciwnie znów zwiększenie średnicy powiększa pierwsze a zmniejsza drugie. Prowadzi to do wniosku, że pewna średnica, łącznie z pewną prędkością, dawać winny oszczędność na kosztach rury tłoczącej. Jeżeli  $l$  jest długość tej rury,  $H$ —całkowita wysokość ssania i tłoczenia,  $k$ —koszt konia mechanicznego maszyny podnoszącej (koszt utrzymania i oprocentowanie kapitału),  $k'$ —koszt metra bieżącego rury z ułożeniem,  $N$ —liczba koni mechanicznych maszyny,  $\eta$ —sprawność maszyny i pomp, to kapitał odpowiadający kosztom budowy będzie  $K = k N + k' D l$ . Praca dostarczana przez maszynę składa się z pracy użytecznej podnoszenia wody i pracy traconej na pokonanie oporów ruchu wody w rurze. Wysokość  $H$  należy przeto powiększyć wysokością straty naporu  $h$  na długości  $l$ . Suma  $H + h$  będzie wysokością ciśnienia, wskazywaną manometrem przy początku rury. Ponieważ według (111):

$$\frac{h}{l} = J = \frac{64 b Q^2}{\pi^2 D^5} \quad (117)$$

przeto:

$$N = \frac{1000 Q (H + h)}{75 \eta} = \frac{1000 Q}{75 \eta} \left( H + \frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} \right),$$

$$K = \frac{1000 k Q}{75 \eta} \left( H + \frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} \right) + k' D l.$$

Gdy chodzi o wybór takiego  $D$ , aby  $K$  było jaknajmniejsze, przyrównać trzeba do zera pochodną  $K$  względem  $D$ , co daje równanie:

$$-\frac{64000 Q^3 k}{75 \pi^2 \eta} \cdot \frac{5b}{D^6} + k' = 0,$$

z którego:

$$D = \sqrt[6]{\frac{5 \cdot 64000 \cdot b}{75 \pi^2 \eta} \cdot \frac{k}{k'} \cdot V\bar{Q}}.$$

Przy średnich wartościach:  $k = 1600$  rb.,  $k' = 40$  rb.,  $\eta = 0,60$ ,  $b = 0,0004$  (94), wypaść stąd wzór:

$$D = 1,50 V\bar{Q}.$$

a w praktyce stosunek  $\frac{D}{V\bar{Q}}$  waha się między 1,35 a 1,70, stosownie do wielkości ilorazu  $\frac{k'}{k}$ . Z wyrażenia  $U$  w funkcji  $Q$  otrzymuje się  $U = 0,57$ .

W podobny sposób określić można średnicę rury doprowadzającej wodę np. do zakładów hydroelektrycznych. Jeżeli wzniesienie zbiornika nad zakładem jest  $H$ , to tylko część z tego naporu pochłaniają opory w rurze, a reszta jest użytkowana do poruszania kół lub turbin. Bierze się przytem linię poziomów piezometrycznych za linię naporu i energia dostarczana do zakładu wynosić ma:

$$P = \gamma Q (H - h),$$

gdzie  $\gamma$  oznacza ciężar właściwy wody, a że według (117):

$$h = \frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5},$$

więc:

$$P = \gamma Q \left( H - \frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} \right).$$

Maximum  $P$  będzie przy wartości  $Q$  określonej równaniem:

$$\frac{dP}{dQ} = \gamma \left( H - 3 \frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} \right) = 0,$$

czyli:

$$\frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{H}{3} = h. \quad \dots \quad (118)$$

Przesyłka więc energii drogą wodną jest najodpowiedniejsza przy użyciu rury, która daje stratę naporu, wynoszącą

$\frac{1}{3}$  całego naporu rozporządzalnego. Maximum energii, jaką otrzyma zakład, będzie:

$$P_m = \frac{2}{3} \gamma Q H \dots \dots \dots (119)$$

Dane zadania są  $Q, l, H$ , a szukane  $h$  i  $D$ . Naprzykład dla  $H = 260$  m,  $l = 23$  km,  $Q = 22$  litr/sek., będzie

$$h = 86,7 \text{ m}, \quad \frac{h}{l} = J = 0,0038, \text{ nomogram (str. 81) daje}$$

$D = 0,20$  m, a maximum energii:

$$P_m = \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 0,022 \cdot 260 = 3746 \text{ kg/sek.} = 51 \text{ k. m.}$$

**25. Rozkład prędkości na przecięciu poprzecznym rury.** Przy ruchu regularnym wody w rurze o promieniu  $R$ , cząstka biegnąca w odległości  $r$  od osi ma prędkość (77):

$$u = \frac{\gamma J}{4 \varepsilon} (R^2 - r^2).$$

Jeżeli wstawimy w to wyrażenie wartość  $J$  (101):

$$J = \frac{32 \nu U}{g D^2} = \frac{8 \varepsilon U}{\rho g R^2},$$

otrzymamy:

$$\frac{u}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \dots \dots \dots (120)$$

Dla strugi na osi rury  $r = 0$  i prędkość największa  $u_0 = 2 U$ , dla strugi przy ścianie rury  $r = R$ ,  $u_1 = 0$ .

Przy ruchu burzliwym, według doświadczeń Bazin'a:

$$\frac{u_0 - u}{\sqrt{R J}} = k \frac{r^3}{R^3} \dots \dots \dots (121)$$

a po zróżniczkowaniu względem  $r$ :

$$r^2 = - \frac{R^3}{3 k \sqrt{R J}} \frac{d u}{d r}.$$

Mnożąc obie strony przez  $\pi J$  i kładąc według (94)

$$R J = \frac{1}{2} D J = 2 b U^2, \text{ otrzymamy:}$$

$$\pi r^2 J = - 2 \pi r \left[ \frac{R}{2} \cdot \frac{\sqrt{2b}}{3k} \cdot \frac{R}{r} \cdot U \cdot \frac{d u}{d r} \right].$$

Porównyując to równanie z równaniem (90), któremu można nadać kształt:

$$\omega J = \chi \varphi(U),$$

wyrażającym równowagę walca pełnego wody, zawartego między dwoma przecięciami poprzecznymi, odległymi na 1 m, widziemy, że czynnik w nawiasie przedstawia opór na jednostkę powierzchni, przy ślizganiu się warstwy walcowej o promieniu  $r$ , po warstwie sąsiedniej, nieskończenie bliskiej. Tarcie między temi warstwami jest więc proporcjonalne do: prędkości względnej  $\frac{du}{dr}$ , promienia średniego  $\frac{R}{2}$ , rozległości powierzchni w zetknięciu  $2\pi r \cdot 1$ , a odwrotnie proporcjonalnie do odległości  $r$  uważanej warstwy od osi rury.

Dla rur, wartość współczynnika  $k$  wynosi od 18 do 23, i bliską jest 21. Przy ścianach  $r = R$ , tak że z wzoru (121)  $u_1 = u_0 - 21 \sqrt{RJ}$ . Wydatek warstwy walcowej o promieniu  $r$  i prędkości  $u$  jest  $dQ = 2\pi r \cdot u \cdot dr$ , a wydatek rury:

$$Q = \pi R^2 U = 2\pi \int_0^R ur \, dr,$$

albo wstawiając  $u$  z wzoru (121):

$$U = \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[ u_0 - 21 \frac{r^3}{R^3} \sqrt{RJ} \right] r \, dr = u_0 - 8,4 \sqrt{RJ},$$

a po wstawieniu wartości  $RJ = 2b U^2$ :

$$\frac{u_0}{U} = 1 + 11,9 \sqrt{b}, \quad \frac{u_1}{U} = 1 - 17,85 \sqrt{b}.$$

Biorąc  $b = 0,0004$  (94), otrzymujemy:

$$u_0 = 1,24 U, \quad u_1 = 0,64 U.$$

Przy ruchu więc burzliwym, prędkości na przecięciu poprzecznym rozkładają się jednostajniej aniżeli przy ruchu regularnym. Współczynnik  $\eta$  (§ 18), zależny od różnicy między prędkością średnią a największą prędkością prądu, obliczony został przez Boussinesq'a, przy powyższej wartości  $k$  dla rur:

$$\eta = 0,033. \quad (122)$$

Z tej wartości  $\eta$  wynikają wartości współczynników (§ 18 i § 21):

$$\alpha = 1 + 3\eta = 1,099, \quad \alpha' = 1 + \eta = 1,033. \quad (123)$$



**26. Ruch zmienny.** Gdy przekrój przewodu rurowego nie jest stały, wtedy zwrócić się trzeba do równania ogólnego prądu ustalonego (88):

$$\sin I - \frac{1}{\gamma} \frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right),$$

którego pierwsza strona wyraża spadek, czyli obniżenie poziomu piezometrycznego na jednostkę długości rury. Na długości rury  $ds$  (por. rys. 48, § 24) obniżenie to wynosi  $dh$ , będzie więc, na jednostkę długości rury, równe  $\frac{dh}{ds}$  i równanie powyższe przybierze postać:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \frac{\alpha'}{g} U \frac{dU}{ds} \quad \dots \quad (124)$$

a po zcałkowaniu w granicach  $s_0$  i  $s$ , w których to punktach prędkości średnie są  $U_0$  i  $U$ .

$$h = \alpha' \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_{s_0}^s \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) ds \quad \dots \quad (125)$$

W miejsce  $\varphi(U)$  wstawione być może którekolwiek z wyrażań, podanych w § 22. Zwykle profil osi rury dany jest równaniem  $z = f(s)$ , przekrój poprzeczny równaniem  $\omega = \theta(s)$ , gdzie  $f$  i  $\theta$  są funkcjami znanymi lub nieznanymi. Całka po prawej stronie równania (125) przedstawia stratę naporu między przekrojami  $s_0$  i  $s$ . Kładąc według (94):

$$\varphi(U) = b U^2,$$

a dla przekroju kołowego o średnicy  $D$ :

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad \frac{\chi}{\omega} = \frac{\pi D}{\frac{1}{4}\pi D^2} = \frac{4}{D},$$

otrzymujemy:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{4}{\pi D^2} \cdot \frac{dQ}{ds} - \frac{8Q}{\pi^2 D^3} \frac{dD}{ds},$$

co wstawione w (124), daje:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} - \frac{16\alpha'}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q}{D^4} \cdot \frac{dQ}{ds} + \frac{32\alpha'}{\pi^3 g} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot \frac{dD}{ds} - \\ - \frac{64bQ^2}{\pi^2 D^5} = 0. \quad \dots \quad (126) \end{aligned}$$

Ostatnie równanie, w którym współczynnik  $\alpha'$  zastąpiony być winien wartością (123), daje związek między elementami różniczkowymi osi rury ( $ds$ ) i linii poziomów piezometrycz-

nych ( $dh$ ) i pozwala nakreślić tę ostatnią, gdy pierwsza jest znana. Jeżeli rura, w swym przebiegu, nie dostarcza wody bocznicom,  $Q$  jest stałe, a  $\frac{dQ}{ds} = 0$ ; gdy jednocześnie średnica

ca jest stałą,  $\frac{dD}{ds} = 0$  i z równania (126) zostaje:

$$\frac{dh}{ds} = J = \frac{64 b Q^2}{\pi^2 D^5},$$

wracamy więc do równania (117).

Rury o zmieniającej się stopniowo średnicy spotykamy w praktyce li tylko pod postacią krótkich kłoców ostrokągowych, służących do łączenia rur różnych średnic. Z połączonych niemi sekcji o stałych średnicach składają się długie przewody rurowe. Każda zmiana średnicy wywołuje obniżenie płaszczyny naporu, tak że linia naporu ma postać schodkowatą (rys. 49). Zwykle jednak te cząstkowe straty naporu bywają pomijane, wobec straty naporu dla całego przewodu, wywołanej przez tarcie o ściany rury. Jeżeli przewód składa się z sekcji  $AB, BC, CD, \dots$  których długości i średnice są kolejno  $l_1 D_1, l_2 D_2, l_3 D_3, \dots$  to straty naporu dla tych sekcji będą (117):

$$\frac{64 b l_1 Q^2}{\pi^2 D_1^5}, \quad \frac{64 b l_2 Q^2}{\pi^2 D_2^5}, \quad \frac{64 b l_3 Q^2}{\pi^2 D_3^5}, \dots$$

Stratę naporu dla całego przewodu, równą ich sumie, przyrównajmy do straty naporu, jakąby dała rura o stałej średnicy  $D$  i długości  $l$ , a otrzymamy:

$$\frac{64 b l Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{64 b Q^2}{\pi^2} \left[ \frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots \right]$$

czyli:

$$\frac{l}{D^5} = \frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots \quad (127)$$

Znając  $D$  oraz długości i średnice wszystkich sekcji, można stąd otrzymać  $l$  i odwrotnie, oznaczyć  $D$  w funkcji  $l$ .

Obniżenie poziomu piezometrycznego między dwoma końcami przewodu daje równanie (125), które można napisać w kształcie:

$$h = \alpha' \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} + h_1 \dots \quad (128)$$

jeżeli przez  $h_1$  oznaczymy stratę naporu, wynikającą z tarcia o ściany rury. Najczęściej, gdy prędkości nie przekraczają 2 m/sek., w miejsce linii poziomów piezometrycznych bierze się linię naporu, kładąc  $h = h_1$ .



Rys. 50.

**Zadanie 31.** Dane są średnice i straty naporu rur  $A, B, C$ , schodzących się we wspólnym węźle  $O$  (rys. 50). Obliczyć trzeba średnicę rury  $R$ , mogącej zastąpić wszystkie te rury przy danej stracie naporu.

Oznaczmy przez  $Q, D, J$ , wydatek, średnicę i stratę naporu rury  $OR$ , a przez  $q_1, d_1, j_1, q_2, d_2, j_2, q_3, d_3, j_3 \dots$  też same ilości dla rur  $OA, OB, OC$ . Według (111):

$$Q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{JD^5}{b}}, \quad q_1 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{j_1 d_1^5}{b}}, \quad q_2 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{j_2 d_2^5}{b}}, \quad q_3 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{j_3 d_3^5}{b}} \dots$$

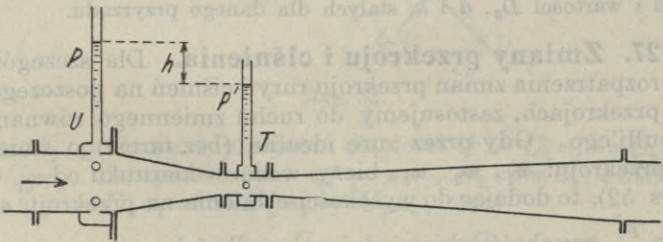
Ponieważ ma być  $Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ , więc po wypisaniu równania i skróceniu:

$$\sqrt{JD^5} = \sqrt{j_1 d_1^5} + \sqrt{j_2 d_2^5} + \sqrt{j_3 d_3^5} + \dots \quad (129)$$

Związek ten pozwala obliczyć  $D$  ze znanego  $J$  i odwrotnie. Gdy  $J$  jest jednakowe dla wszystkich rur, wtedy:

$$\sqrt{D^5} = \sqrt{d_1^5} + \sqrt{d_2^5} + \sqrt{d_3^5} + \dots \quad (130)$$

**Wodomiar „Venturi“.** Na zasadzie równania (125), inżynier amerykański C. Herschell zbudował wodomiar, dając mu nazwę „Venturi“ od wielkiego hydraulika włoskiego XVIII w. Wodomiar ten składa się



Rys. 51.

z części rury  $T$  (rys. 51) o zmniejszonej średnicy, łączącej się za pośrednictwem dwóch części ostrokągowych z rurą, której wydatek ma być mierzony. Zwężenie powiększa prędkość przepływu, co wywołuje między przecięciami  $U$  i  $T$  obniżenie poziomu piezometrycznego  $h$ , tem większe, im prędkość jest większa. Obniżenie to wykazują, w każdej chwili, dwa piezometry  $P$  i  $P'$ . W równaniu (125) kładąc  $\varphi(U) = b U^2$ , otrzymujemy:

$$h = a' \frac{U - U_0^2}{2g} + \frac{64 b Q^2}{\pi^2} \int_0^s \frac{ds}{D^5}$$

Oznaczając przez  $D_0$  średnicę przecięcia U, przez  $d$  średnicę przecięcia T, mamy  $Q = \omega_0 U_0 = \omega U$ , skąd:

$$U_0 = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{4Q}{\pi D_0^2}, \quad U = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

a po wstawieniu tych wartości w powyższe równanie:

$$h = \frac{16Q^2}{\pi^2} \frac{\alpha'}{2g} \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D_0^4} \right) + \frac{64bQ^2}{\pi^2} \int_0^s \frac{ds}{D^5}.$$

Średnica  $D$  przekroju pośredniego między U i T jest funkcją liniową odległości  $s$  od przecięcia U:

$$D = D_0 - k \cdot s,$$

gdzie  $k$  jest miarą nachylenia tworzących ostrokągu. Będzie więc:

$$\int_0^s \frac{ds}{D^5} = \int_0^s \frac{ds}{(D_0 - ks)^5} = \frac{1}{4k} \left[ \frac{1}{(D_0 - ks)^4} \right]_0^s,$$

$$h = \frac{16Q^2}{\pi^2} \left[ \frac{\alpha'}{2g} \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D_0^4} \right) + \frac{b}{k} \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D_0^4} \right) \right],$$

albo:

$$h = \frac{16Q^2}{\pi^2} \left( \frac{\alpha'}{2g} + \frac{b}{k} \right) \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D_0^4} \right),$$

skąd:

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{h}{\left( \frac{\alpha'}{2g} + \frac{b}{k} \right) \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{D_0^4} \right)}} \dots \dots \dots (I31)$$

Wzór ten daje wydatek rury, w funkcji obniżenia piezometrycznego  $h$  i wartości  $D_0$ ,  $d$  i  $k$ , stałych dla danego przyrządu.

**27. Zmiany przekroju i ciśnienia.** Dla szczegółowego rozpatrzenia zmian przekroju rury i ciśnień na poszczególnych przekrojach, zastosujemy do ruchu zmiennego równanie Bernoulli'ego. Gdy przez rurę idealną (bez tarcia) o zmiennym przekroju:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , bieży woda w kierunku od  $\omega_1$  do  $\omega_3$  (rys. 52), to dodając do wysokości ciśnienia na przekroju  $\omega_1$ , t. j. do  $\frac{p_1}{\gamma}$ , wysokość odpowiadającą prędkości na tym przekroju  $\frac{U_1}{2g}$ , otrzymamy napór  $N_1$ , wyznaczający linię naporu  $AB$  dla całej rury. Odejmując od  $\frac{p_1}{\gamma}$  wysokość ciśnienia atmosferycznego  $\frac{p_a}{\gamma}$ , mieć będziemy poziom piezometryczny dla przekroju  $\omega_1$ .  $H$  oznacza różnicę wzniesień poziomów piezometrycznych dla przekrojów  $\omega_1$  i  $\omega_3$ . Po odcięciu w podob-

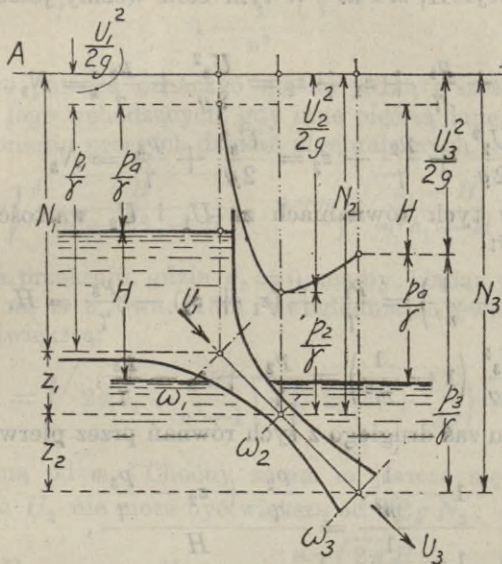
ny sposób wysokości, odpowiadających ciśnieniu i prędkości dla przekroju najmniejszego  $\omega_2$ , będzie według (67):

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + z_2 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{U_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} = N_3 \quad (132)$$

albo:

$$N_1 + z_1 + z_2 = N_2 + z_2 = N_3.$$

Aby otrzymać ciśnienia i prędkości na przekroju zwężo-



Rys. 52.

nym  $\omega_2$ , położmy w równaniu ciągłości  $Q = U_1 \omega_1 = U_2 \omega_2 = U_3 \omega_3$ , dla uproszczenia:  $\omega_1 = n \omega_3$ ,  $\omega_2 = m \omega_3$ , a otrzymamy  $Q = n U_1 \omega_3 = m U_2 \omega_3 = U_3 \omega_3$ , oraz:

$$U_1 = \frac{U_3}{n}, \quad U_2 = \frac{U_3}{m} \quad \dots \quad (133)$$

Ponieważ według rys. 52 i równań (132) i (133):

$$H = N_3 - \frac{p_3}{\gamma} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{U_3^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

będą więc prędkości wyrażone w funkeyi  $H$ ,  $m$ ,  $n$ , uwzględniając (133):

$$U_3 = n \sqrt{\frac{2gH}{n^2-1}}, \quad U_1 = \sqrt{\frac{2gH}{n^2-1}}, \quad U_2 = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{2gH}{n^2-1}} \quad \dots \quad (134)$$

Dla otrzymania z wyrażeń (134) rzeczywistych prędkości, koniecznym jest warunek:  $n > 1$ , albo  $\omega_1 > \omega_3$ .

Z równań (132) mamy:

$$\frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = N_3 - z_2$$

i dla otrzymania  $p_2$  należy za  $\frac{U_2^2}{2g}$  i  $N_3$ , wstawić ich wyrażenia w funkcji  $H$ ,  $m$  i  $n$ . W tym celu weźmy jeszcze z równań (132):

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + z_2 = \frac{U_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} = N_3,$$

$$\frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{U_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} = N_3$$

i położmy w tych równaniach za  $U_1$  i  $U_2$  wartości (133), a otrzymamy:

$$\frac{U_3^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{p_1}{\gamma} + (z_1 + z_2) - \frac{p_3}{\gamma} = H,$$

$$\frac{U_3^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \frac{p_3}{\gamma},$$

po podzieleniu zaś drugiego z tych równań przez pierwsze:

$$\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \frac{p_3}{\gamma}}{H},$$

skąd:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \left(\frac{p_3}{\gamma} - z_2\right) + \frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} H \quad (135)$$

Różnicę  $\frac{p_3}{\gamma} - z_2 = h_2$ , pomiędzy wysokością ciśnienia na przekroju  $\omega_3$  a odległością pionową przekrojów  $\omega_2$  i  $\omega_3$ , oznaczyć można za pomocą piezometru i pomiaru rury. Kładąc analogicznie  $\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = h_1$ , mamy:  $h_1 - h_2 = H$ .

Według (134) prędkość  $U_2$  będzie tem większa, im mniejsze będzie  $m = \frac{\omega_2}{\omega_3}$ , to jest mniejszy przekrój  $\omega_2$  a większy

przekrój  $\omega_3$ . Przeciwnie ciśnienie  $p_2$  zmniejsza się razem z  $m$ , podczas gdy  $U_1$  i  $U_3$  są niezależne od  $m$ . Ale zmniejszanie się  $p_2$  i  $m$  ma pewną granicę, po przekroczeniu której, przy  $p_2 = 0$ , ciągłość prądu się przerywa. Granicę tę, według równ. (135), określa równanie:

$$0 = \frac{p_3}{\gamma} - z_2 + \frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} \left[ \frac{p_1}{\gamma} + (z_1 + z_2) - \frac{p_3}{\gamma} \right],$$

z którego pomocą oznaczyć można jedną z sześciu wielkości w skład jego wchodzących, gdy inne pięć są dane. Można np. po wykonaniu prostych działań algebraicznych, otrzymać:

$$m = n \sqrt{\frac{H}{(n^2 - 1)h_1 + H}}, \quad n = m \sqrt{\frac{h_1 - H}{m^2 h_1 - H}} \quad (136)$$

Na przekroju, gdzie  $p_2 = 0$ , mamy, kładąc w równ. (134) wartość na  $m$  z równ. (136) i uwzględniając równ. (132), prędkość największą:

$$U_2 \max = \sqrt{2g \left( h_1 + \frac{H}{n^2 - 1} \right)} = \sqrt{2g \left( h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right)} = \sqrt{2g N_2},$$

niezależną od  $m$ . Choćby zatem  $m$  jeszcze się zmniejszało, prędkość  $U_2$  nie może być większą od  $\sqrt{2g N_2}$ . Wydatek:

$$Q = U_2 \omega_2 = m \omega_3 U_2 + m \omega_3 \frac{n}{m} \sqrt{\frac{2gH}{n^2 - 1}} = n \omega_3 \sqrt{\frac{2gH}{n^2 - 1}},$$

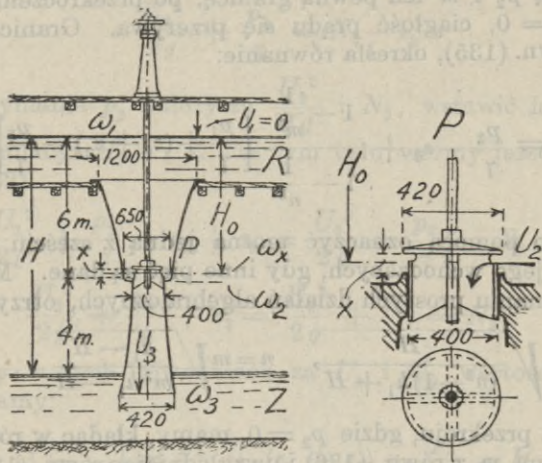
nie zależy od  $m$ , a więc i od  $\omega_2$ , dopóki  $p_2 \geq 0$ ; nie powiększy się zatem nawet przy takim wzroście prędkości, że ciśnienie będzie  $p_2 = 0$  i nie przekroczy wartości, jaką miał przed zmniejszeniem  $\omega_2$ . Wpływ na wydatek, oprócz przekroju  $\omega_3$ , ma tu jeszcze różnica wzniesień poziomów piezometrycznych:

$$H = \frac{p_1}{\gamma} + (z_1 + z_0) - \frac{p_3}{\gamma},$$

jak również stosunek  $n = \frac{\omega_1}{\omega_3}$ , dopótyd wszakże, dopóki przekrój  $\omega_2$  jest większy lub równy przekrojowi, warunkującemu ciśnienie  $p_2 = 0$ .

**Zadanie 32.** Przez rurę pionową (rys. 53), której średnica górna ma 1200 mm, przepuszczaną jest woda ze zbiornika  $R$  do  $Z$ .

Różnica poziomów w zbiornikach  $H = 10\text{ m}$ . Na wysokości  $4\text{ m}$  nad poziomem zbiornika  $Z$  umieszczony jest przepustnik  $P$ , pozwalający zmniejszać lub wstrzymywać zupełnie przepływ wody. Określić: 1) kie-



Rys. 53.

dy podczas zamykania przepustnika objawia się zmniejszenie wydatku, 2) jaki będzie wydatek przy różnych położeniach przepustnika.

Prędkość  $U_1$  na poziomie zbiornika  $R$  przyjęc można równą zeru, co odpowiada:  $\omega_1 = \infty$ . Przekrój zmienny otworu w przepustniku:  $\omega_x = D \pi x$ . Maximum podniesienia przepustnika  $x$  będzie miało miejsce, gdy  $\omega_x = \omega_2 = \frac{D_2^2 \pi}{4}$ ; a że  $D = D_2 = 400\text{ mm}$ , więc  $\max x = 100\text{ mm}$ . Oznaczając przez  $\omega_3$  powierzchnię dolnego otworu rury, będzie:

$$m = \frac{\omega_x}{\omega_3} = \frac{D \pi x}{\frac{D_3^2 \pi}{4}} = \frac{4 D x}{D_3^2},$$

a prędkości według równ. (134):

$$U_3 = \sqrt{2gH}, \quad U_2 = \frac{1}{m} \sqrt{2gH} = \frac{D_3^2}{4 D x} \sqrt{2gH} \dots (137)$$

Prędkość na zmiennym przekroju przepustnika jest więc zależną od podniesienia  $x$ . Na wykresie (rys 54) przedstawia ją część hyperboli  $mn$ . Wydatek  $Q = \omega_3 U_3 = \omega_x U_2$  jest stały i z pominięciem tarcia wynosi  $Q = \omega_3 \sqrt{2gH}$ , skoro tylko ciecz wypełnia wszystkie przekroje.

Prędkość  $U_2$  na głębokości  $H_0$  pod poziomem górnym, nie może jednak przybierać dowolnej wartości, ale ma pewne maximum, odpowiadające warunkowi  $p_0 = 0$ . Ponieważ  $x$  jest bardzo małe względem  $H_0$ , przyjmować można, że cały otwór przepustnika leży na głębokości  $H_0$ , i prędkość największa:

$$U_2 \max = \sqrt{2g \left( H_0 + \frac{p_0}{\gamma} \right)} \dots (138)$$

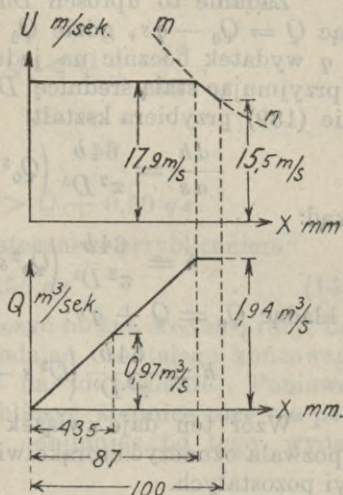


Od chwili dopiero, kiedy  $U_2$  osiągnie tę wartość, można zmniejszając  $x$ , zmniejszać  $Q$ . Ponieważ przekrój przepustnika zmniejsza się razem z  $x$ , a prędkość  $U_2$  utrzymuje swą wartość maximum, to wydatek zmniejsza się razem z  $x$  w stosunku liniowym, jak to uwidoczni wykres (rys. 54).

Przy regularnym przepływie:

$U_2 = \sqrt{2gH} = 14 \text{ m/sek.}$ ,  $Q = 1,94 \text{ m}^3 \text{ sek.}$ , w przepustniku przy  $x=100 \text{ mm}$  prędkość  $U_2$  ma wartość najmniejszą  $U_2 = 15,5 \text{ m/sek.}$  a dochodzi do maximum, według równ. (138),  $U_2 \text{ max} = 17,9 \text{ m/sek.}$ , przy podniesieniu  $x$ , które będzie wtedy:  $x = \frac{15,5 \cdot 100}{17,9} = 87 \text{ mm.}$

Połowa wydatku  $Q = \frac{1,94}{2} = 0,97 \text{ m}^3 \text{ sek.}$  będzie miała miejsce przy połowicznym podniesieniu przepustnika, to jest przy  $x = \frac{87}{2} = 43,5 \text{ mm.}$



Rys. 54.

## 28. Rura główna i bocznicie.

Gdy rura zasila po drodze bocznicie, ruch przy zmiennym wydatku nie przestaje być ustalonym. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rurę, której średnica zmienia się według równania:  $D = f(s)$ , a która zasilać po drodze bocznicie, ma wydatek zmieniający się według  $Q = \varphi(s)$ , przyczem  $f$  i  $\varphi$  są znane, to kładąc w równ. (126):

$$\frac{16\alpha'}{\pi^2 g} = \kappa, \quad \frac{32\alpha'}{\pi^2 g} = \lambda, \quad \frac{64b}{\pi^2} = \mu,$$

otrzymujemy:

$$\frac{dh}{ds} + \kappa \frac{Q}{D^4} \frac{dQ}{ds} - \lambda \frac{Q^2}{D^5} \frac{dD}{ds} + \frac{\mu Q^2}{D^5} = 0, \quad (139)$$

a ponieważ  $D$  i  $Q$  mamy wyrażone w funkcji  $s$ , to w końcu dochodzimy do związku:

$$\frac{dh}{ds} - \psi(s) = 0,$$

z którego otrzymać możemy, po zcałkowaniu między przecięciami 0 i  $s$ :

$$h = \int_0^s \psi(s) ds \quad (140)$$

Równanie to daje rzędną linii poziomów piezometrycz

nych w funkcyi długości  $s$ , liczonej po osi rury. Równanie tej linii otrzymujemy, rugując  $s$  między równaniem (140) a równaniem osi rury  $x = \theta(s)$ .

Zadanie to uprościł Dupuit, pomijając czynnik  $\alpha$ , kładąc  $Q = Q_0 - qs$ , gdzie  $Q_0$  jest wydatek na początku rury, a  $q$  wydatek bocznic na jednostkę długości rury zasilającej i przyjmując stałą średnicę  $D$ . Przy tych założeniach równanie (139) przybiera kształt:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{64b}{\pi^2 D^5} (Q_0^2 - 2Q_0 qs + q^2 s^2),$$

skąd:

$$h = \frac{64b}{\pi^2 D^5} \left( Q_0^2 s - Q_0 q s^2 + \frac{1}{3} q^2 s^3 \right),$$

a kładąc  $Q_0 = Q + qs$ :

$$h = \frac{64b}{\pi^2 D^5} \left( Q^2 s + Q q s^2 + \frac{q^2}{3} s^3 \right). \quad \dots \quad (141)$$

Wzór ten daje związek między ilościami  $h$ ,  $D$ ,  $Q$ ,  $s$ ,  $q$ , i pozwala oznaczyć którąkolwiek z nich, a zwłaszcza  $D$ , w funkcyi pozostałych.

Jeżeli na końcu rury  $Q = 0$ , wtedy  $s = l$ ,  $ql = Q_0$ :

$$h = \frac{64b}{\pi^2 D^5} \frac{q^2}{3} l^3 = \frac{1}{3} \frac{64blQ_0^2}{\pi^2 D^5}. \quad \dots \quad (142)$$

Porównyując to wyrażenie ze wzorem (117), widzimy, że założenie Dupuita prowadzi do otrzymania wartości  $h$  równej  $\frac{1}{3}$  tej wartości, jaka była potrzebną dla rury nie zasilającej

bocznic i dającej, w swym końcu, wydatek  $Q_0$ . Innemi słowy, rura oddająca bocznicom jednostajnie na całej swej długości cały wydatek  $Q_0$ , potrzebuje trzy razy mniejszego naporu niż rura doprowadzająca tę samą objętość wody  $Q_0$ , na długość  $l$ .

Jeżeli oś rury jest linią prostą, określoną równaniem  $s = mx$ , to równanie linii poziomów piezometrycznych będzie:

$$h = \frac{64bm}{\pi^2 D^5} \left( Q_0^2 x - m Q_0 q x^2 + \frac{m^2 q^2}{3} x^3 \right). \quad \dots \quad (143)$$

przedstawiające parabolę sześcienną. Gdyby zasilanie bocznic zaczęło się dopiero w pewnej odległości od zbiornika, to linia poziomów piezometrycznych składać się będzie z odcinka prostoliniowego łączącego się z parabolą.

Jeżeli położymy w równaniu (141):

$$Q_1^2 = Q^2 + Qqs + \frac{1}{3} q^2 s^2,$$

to otrzymamy:

$$h = \frac{64 b s Q_1^2}{\pi^2 D^5}; \quad \dots \quad (144)$$

widocznem znów jest, że:

$$Q_1 > Q + \frac{qs}{2}, \quad Q_1 < Q + \frac{qs}{\sqrt{3}},$$

albo kładąc  $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57$ :

$$Q + 0,57 qs > Q_1 > Q + 0,50 qs.$$

Przyjąć więc można z dostatecznym przybliżeniem:

$$Q_1 = Q + 0,55 qs \quad \dots \quad (145)$$

i wtedy według wzoru (144) obliczyć można średnicę rury, bez względu na zasilanie bocznic, dodając do stałego końcowego wydatku 0,55 ilości potrzebnej na to zasilanie. Ponieważ  $Q_1 = Q_0 - 45 qs$ , można też obliczyć średnicę rury na podstawie wydatku początkowego, odejmując od tego wydatku 0,45  $qs$ .

**29. Straty naporu podrzędne.** Przy wejściu wody do rury, w miejscach zmiany średnicy, rozgałęzieniach, kolana i łukach, wreszcie przy przechodzeniu wody przez różne urządzenia, służące do zatrzymywania lub zmniejszania przepływu, powstają straty naporu, na które, przy obliczaniu wodociągów, pozostawia się zwykle pewien zapas spadku, ustalony praktyką. O wejściu wody do rury i o nagłych zmianach średnicy będzie mowa w rozdz. V. Gdy na niewielkiej długości  $l$ , średnica zmienia się w sposób ciągły, przechodząc od  $D_1$  do  $D_2$  i rura ma na tej długości kształt ostrokągu, to według równ. (99):

$$\frac{dh}{dl} = J = \frac{4B}{D} \frac{U^2}{2g},$$

skąd:

$$h = \int 4B \frac{dl}{D} \frac{U^2}{2g}.$$

Kładąc  $D = D_1 + 2l \operatorname{tg} \alpha$ , mamy  $dD = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot dl$ , a że:

$$\frac{D_1^2 \pi}{4} U_1 = \frac{D^2 \pi}{4} U, \quad \text{skąd } U = \frac{D_1^2}{D^2} U_1,$$

to po wstawieniu, pod znak całki, wartości za  $dl$  i  $U$ , otrzymamy:

$$h = \frac{4 B D_1^4 U_1^2}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot 2g} \int_{D_1}^{D_2} \frac{dD}{D^5} = - \frac{B}{2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{D_1^4 U_1^2}{2g} \left( \frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right) =$$

$$= \frac{B}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{D_1^4 U_1^2}{2g D_1^4} - \frac{D_1^4 U_1^2}{2g D_2^4} \right) = \frac{B}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right);$$

albo, ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D_2 - D_1}{2l}$  a wysokości, odpowiadające prędkościom  $U_1$  i  $U_2$ , są  $h_1$  i  $h_2$ :

$$h = B \frac{l}{(D_2 - D_1)} \cdot (h_1 - h_2) \quad \dots \quad (146)$$

Strata naporu jest więc proporcjonalną do długości ostrokątego kawałka rury i do różnicy wysokości odpowiadających prędkościom na przecięciach krańcowych, a odwrotnie proporcjonalną do zmiany średnicy.

W miejscach rozgałęzień, według doświadczeń Belan-gera, gdy do rury większej dochodzi bocznicą pod kątem prostym a prędkość w bocznicy jest  $U$ , strata naporu wynosi:

$$h = 2 \frac{U^2}{2g} \quad \dots \quad (147)$$

Badania d-ra inż. H. Grethera<sup>1)</sup>, nad rozkładem ciśnień w prądzie dwuwymiarowym, przechodzącym przez kolana i łuki o przekroju wewnętrznym prostokątnym, dały interesujące wykresy (rys. 55) rozkładu ciśnień w krzywkach:

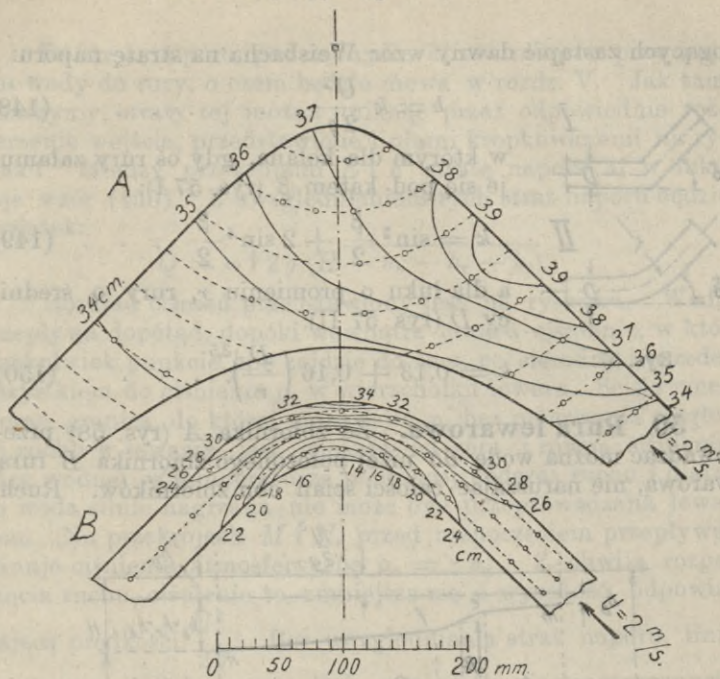
A) o profilu zewnętrznym hyperbolicznym a zmiennej szerokości przekroju prostokątnego;

B) o profilu łukowym i stałym przekroju. W krzywce hyperbolicznej odpowiadają: profil zewnętrzny, linii  $\Psi$ , a linie przerywane — równicom  $\Phi$  (por. rys. 37, na str. 43). Linie pełne równic na rys. 55, wykreślone na podstawie pomiaru piezometrycznego, wykazują cofanie się równic w kierunku przeciwnym prędkości.

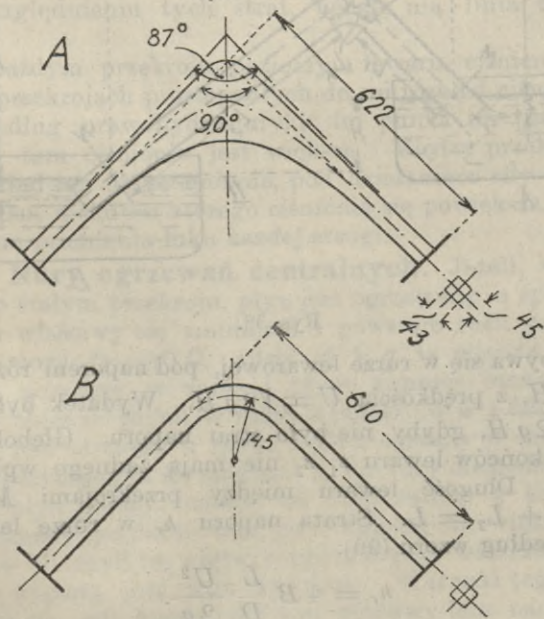
Kolana, z którymi robione były doświadczenia, mianowicie hyperboliczne o przekroju prostokątnym zmiennej szerokości i kołowe o przekroju kwadratowym, przedstawia rys. 56. Przez otwory, zrobione w ściankach tych kolana, w miejscach oznaczonych małymi kółkami na rys. 55 wstawiane były włoskowane rurki łączone z piezometrem.

Badania inż. Grethera nie dostarczyły jednak danych,

<sup>1)</sup> Über Potentialbewegung tropfbarer Flüssigkeiten in gekrümmten Kanälen. Berlin 1909.



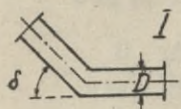
Rys. 55.



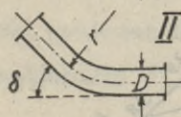
Rys. 56.

mogących zastąpić dawny wzór Weisbacha na stratę naporu:

$$h = k \frac{U^2}{2g}, \dots \dots \dots (148)$$



w którym dla kolana, gdy oś rury załamuje się pod kątem  $\beta$  (rys. 57 I):



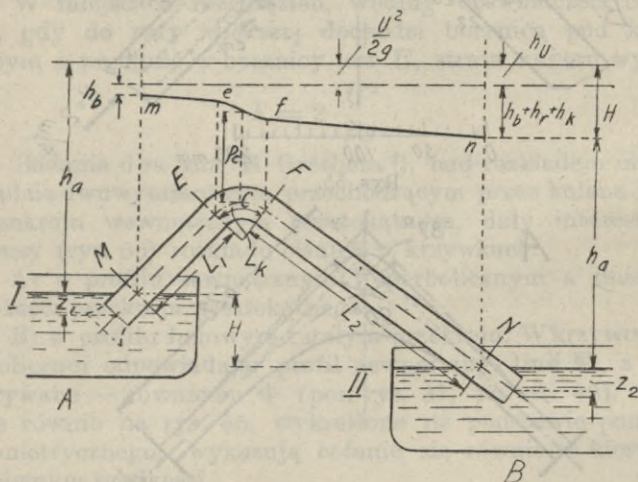
$$k = \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\beta}{2} \dots \dots (149)$$

a dla łuku o promieniu  $r$ , rury o średnicy  $D$  (rys. 57 II):

$$k = 0,13 + 0,16 \left( \frac{D}{r} \right)^{3,5} \dots \dots (150)$$

Rys. 57.

**30. Rura lewarowa.** Ze zbiornika  $A$  (rys. 58) przeprowadzić można wodę do niższego położonego zbiornika  $B$  rurą lewarową, nie naruszając całości ścian obu zbiorników. Ruch



Rys. 58.

wody odbywa się w rurze lewarowej, pod naporem różnicy poziomów  $H$ , z prędkością  $U = \sqrt{2gH}$ . Wydatek byłby więc  $Q = \omega \sqrt{2gH}$ , gdyby nie było strat naporu. Głębokości zanurzenia końców lewaru  $z_1$   $z_2$  nie mają żadnego wpływu na prędkość. Długość lewaru między przekrojami  $M$  i  $N$ :  $L_1 + L_k + L_2 = L$ . Strata naporu  $h_r$  w rurze lewarowej wynosi według wzoru (99):

$$h_r = 4B \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}.$$

Ze strat naporu podrzędnych,  $h_b$  ma miejsce przy wejściu wody do rury, o czym będzie mowa w rozdz. V. Jak tam zobaczymy, straty tej można uniknąć przez odpowiednie rozszerzenie wejścia, przedstawione liniami kropkowanymi na rysunku. Między przekrojami  $E$  i  $F$  stratę naporu  $h_k$  w łuku daje wzór (150). Z uwzględnieniem tych strat naporu będzie wydatek:

$$Q = \omega \sqrt{2g(H - h_b - h_r - h_k)}.$$

Rozkład ciśnień przedstawiony jest na rysunku. Woda przepływa dopóty, dopóki wewnątrz lewaru ciśnienie, w którymkolwiek punkcie, nie zejdzie do zera, co się odnosi przede wszystkim do ciśnienia  $p_c$  w wierzchołku lewaru. Ścisłe rzecz biorąc, granica, do której może zejść  $p_c$  bez przerywania ciągłości ruchu w lewarze, jest większą od zera i równą ciśnieniu pary wodnej w temperaturze panującej podczas ruchu i dlatego woda silnie nagrzana nie może być przeprowadzana lewarem. Na przekrojach  $M$  i  $N$ , przed rozpoczęciem przepływu, panuje ciśnienie atmosferyczne  $p_a = \gamma h_a$ . Z chwilą rozpoczęcia ruchu, ciśnienie to zmniejsza się o wysokość, odpowiadającą prędkości  $\frac{U^2}{2g}$ . Bez uwzględniania strat naporu, linia kreskowana byłaby przeto linią poziomów piezometrycznych, a przy uwzględnieniu tych strat, będzie nią linia łamana  $m e f n$ .

Na każdym przekroju poziomym lewaru, ciśnienie jest stałe. Na przekrojach prostopadłych do osi rozkład ciśnień ma miejsce według praw hydrostatyki: im punkt na przekroju leży niżej, tem ciśnienie jest większe. Między przekrojami  $E$  i  $F$  rozkład ten ulega zmianie, pod działaniem siły odśrodkowej w łuku, w skutku którego ciśnienie się powiększa, razem ze wzrostem promienia łuku każdej strugi.

### 31. Rury ogrzewań centralnych.

Jeżeli, w rurze pionowej o stałym przekroju, płyn jest ogrzewany u spodu, to jego ciężar właściwy się zmniejsza i powstaje ruch pod działaniem wyporu  $(\gamma - \gamma') O$ , gdzie  $\gamma'$  i  $\gamma$  są ciężary właściwe płynu gorącego w rurze i płynu zimnego otaczającego a  $O = \omega l$  objętość płynu w rurze o przekroju  $\omega$  i długości  $l$ . Gdy rura jest otwarta u góry, i płyn ogrzany w zetknięciu z płynem otaczającym się oziębia, a do rury dochodzi wciąż od spodu płyn gorący, ustala się ruch zwany w kominach *ciągami*, którego prędkość tem jest większą, im większa jest różnica  $\gamma - \gamma'$ , czyli im więcej rozgrzane gazy wchodzi do kominu i im większą jest jego wysokość. Warunki tego ruchu komplikują się, gdy komin nie jest pionowy lecz nachylony,

i gdy jego oś ma zmienny kierunek, lub gdy na jego przekroju poziomym temperatura nie jest jednakowa. Wypór zależy będzie od ciśnień na przekrojach górnym i dolnym, jak i od rozkładu temperatury w rurze, warunkującego ciśnienie na przekroju dolnym.

Podobne okoliczności zachodzą przy ruchu cieczy w rurach ogrzewań centralnych (rys. 59). W kotle  $a$  ogrzewaną jest woda, niżej  $100^{\circ}$  w ogrzewaniach o niskim, od  $100^{\circ}$  do

$150^{\circ}$  w ogrzewaniach o średnim ciśnieniu, tak że w rurze  $ab$  ciągnącej się do góry, ma ona ciężar właściwy  $\gamma_2$  mniejszy od ciężaru właściwego  $\gamma_1$  wody schodzącej z powrotem do kotła rurą  $cd$ , po przejściu przez ogrzewacze.

Jeżeli główne punkty, w których woda otrzymuje i oddaje ciepło, dzieli odległość pionowa  $H$ , to u spodu rury  $ab$ , w miejscu gdzie się łączy z kotłem, panować będzie mniejsze ciśnienie  $\gamma_2 H$ ,

niż w miejscu gdzie schodzi do kotła woda, spływająca rurą  $cd$ , gdzie ciśnienie jest  $\gamma_1 H$ . Ta nadwyżka ciśnienia  $(\gamma_1 - \gamma_2) H$  wytwarza ruch wody z prędkościami  $U_2$  i  $U_1$ , a nadto pokonywa opory wynikające z tarcia w rurach i ogrzewaczach. Przy jednakich przekrojach rur, prędkość  $U_2$  w rurze  $ab$  będzie większą od prędkości  $U_1$  w rurze  $cd$ . Jeżeli w obu rurach ma być jednakowa prędkość  $U$ , to powierzchnie przekrojów rur winny być dobrane w stosunku odwrotnym ciężarów właściwych.

Ilość ciepła, doprowadzanego przez wodę, zużyta zostaje na ogrzanie pomieszczeń, w których ustawione są ogrzewacze, pewna jej część wszakże służy do utrzymania ruchu wody, inna znów rozchodzi się przez promieniowanie bezużyteczne. Jeżeli  $O$  jest objętość wody, krążącej w rurach w ciągu sekundy, a jej ciężar  $\gamma O$ ,  $q_2$  ilość ciepła rozchodzącego się w ciągu tego czasu użytecznie i bezużytecznie,  $q_1$  ilość ciepła doprowadzanego,  $c$  — ciepło właściwe wody,  $A$  — mechaniczny równoważnik ciepła,  $t_2$  i  $t_1$  — temperatury wody w rurach  $ab$  i  $cd$ ,  $h_w$  — suma wszystkich strat naporu wynikłych z tarcia, to:

$$q_1 = q_2 = \gamma O c (t_2 - t_1) + A \gamma O h_w.$$

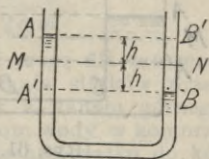


Sumę strat naporu  $h_w$  otrzymać można z równania:

$$\gamma h_w = (\gamma_1 - \gamma_2) H,$$

bo napór  $H$  wytworzywszy prędkość  $U$ , służy następnie do pokonywania oporów, wynikłych z tarcia.

**32. Wahania wody w rurach.** Jeżeli w rurze wygiętej, jak na rys. 60, i zwróconej otwartymi końcami ku górze, woda doprowadzoną zostanie w jednym ramieniu do poziomu  $A$ , położonego wyżej od poziomu  $B$  w ramieniu drugiem, a następnie pozostawioną sama sobie, wtedy poziom  $A$  się obniża a poziom  $B$  podnosi, ale ruch nie ustaje gdy oba poziomy dochodzą do poziomu równowagi  $MN$ . W skutku prędkości nabytej, ruch trwa dalej, a gdy tarcia są nieznaczne, poziom  $B$  podnosi się do  $B'$  a poziom  $A$  obniża do  $A'$ , położonych w tych samych odległościach od  $MN$ , jak poziomy pierwotne, tylko po stronach przeciwnych. Następuje potem ruch odwrotny i t. d.; tarcie jednak nie dopuszcza, aby ruch powtarzał się do nieskończoności i zmniejsza wciąż wysokość wahań.



Rys. 60.

Oznaczając przez  $2h$  pierwotną różnicę poziomów, przez  $2x$  różnicę poziomów w pewnej chwili  $t$ ,  $\omega$  — przekrój poprzeczny rury, a  $l$  — długość słupa wahającego  $AA'B$ , — mieć będziemy siłę przyspieszającą ruch w chwili  $t$  równą  $\gamma \omega 2x$ . Przy liczeniu  $x$  dodatnych od poziomu  $MN$  ku dołowi w ramieniu  $AA'$ , tak że na początku ruchu  $x = -h$ , siła przyspieszająca będzie dodatna przy  $x$  ujemnym i odwrotnie. Masa  $\frac{\gamma}{g} \omega l$ , poruszająca się z przyspieszeniem

$\frac{d^2 x}{dt^2}$  daje równanie:

$$-\gamma \omega 2x = \frac{\gamma}{g} \omega l \frac{d^2 x}{dt^2},$$

a po podzieleniu obu stron przez  $\gamma \omega$ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2g}{l} x \dots \dots \dots (151)$$

Całka tego równania, przyjmując że dla  $t=0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 0$  a  $x = -h$ , będzie:

$$x = -h \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t \dots \dots \dots (152)$$

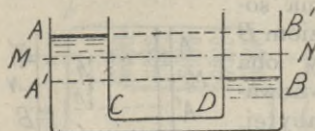
Jest to równanie ruchu wahadłowego harmonicznego.

Czas upływający między wyjściem poziomu  $A$  z położenia pierwotnego i powrotem do tego położenia czyli okres wahań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}},$$

jest niezależny od pierwotnej różnicy poziomów  $2h$ .

Podobny wynik otrzymamy w przypadku rury  $CD$  (rys. 61), łączącej dwa zbiorniki pionowe, innej średnicy niż



Rys. 61.

rura, tylko okres wahań ulegnie zmianie. Jeżeli oznaczymy przez  $\Omega$  przekrój poziomy każdego zbiornika,  $H$  — wzniesienie poziomu równowagi  $MN$  nad rurą  $CD$ ,  $l$  i  $\omega$  — długość i przekrój tej rury,  $U$  — prędkość ruchu wody w jakiegokolwiek chwili w zbiornikach pionowych, a  $u$  — prędkość w tejże chwili w rurze poziomej, mieć będziemy  $u = \frac{\Omega}{\omega} U$ .

Siła, wywołująca nieskończenie małe przemieszczenie  $dx$  poziomu w zbiornikach, wynosi  $\gamma \Omega 2x$  i daje pracę  $\gamma \Omega 2x dx$ , której odpowiada przyrost energii, równy w zbiorniku  $\frac{\gamma}{g} 2 \Omega H U dU$ , a w rurze  $\frac{\gamma}{g} \omega u du$ . Jeżeli  $x$  i  $dx$  są jednakowego znaku, to  $U$  i  $dU$  będą znaków przeciwnych i odwrotnie. Mamy więc równanie:

$$-\gamma \Omega 2x dx = \frac{\gamma}{g} \Omega 2 H U dU + \frac{\gamma}{g} \omega l u du,$$

w którym kładąc  $u du = \frac{\Omega^2}{\omega^2} U dU$ , będzie:

$$\frac{1}{g} \left( H + \frac{l}{2} \frac{\Omega}{\omega} \right) U dU + x dx = 0,$$

a całkując i mając na uwadze, że  $U = 0$  dla  $x = h$ :

$$\left( H + \frac{l}{2} \frac{\Omega}{\omega} \right) \frac{U^2}{2g} = \frac{h^2 - x^2}{2}.$$

Równanie to, zróżniczkowane względem  $t$ , ponieważ

$U = \frac{dx}{dt}$ , daje:

$$\frac{1}{g} \left( H + \frac{l}{2} \frac{\Omega}{\omega} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} = -x,$$

a kładąc dla skrócenia  $\lambda = H + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\omega}$ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda} x,$$

identyczne z równ. (151), jeżeli  $\frac{l}{2}$  zastąpić przez  $\lambda$ . Czas trwania wahnięcia wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g} + \frac{l \Omega}{2g\omega}}.$$

Wahania słupów wodnych stosowane być mogą dla zaoszczędzenia ilości wody, potrzebnej do przeprowadzania statków przez komory wielkich szluz na kanałach. Gdy statek z kanału górnego przechodzi przez szluzę do kanału dolnego, poziom wody w komorze zrównany jest z kanałem górnym. Po wprowadzeniu statku do komory, zamyka się wrota górne i wypuszcza wodę z komory, dopóki poziom jej nie zejdzie do poziomu kanału dolnego. Wtedy otwarte zostają wrota dolne i statek wyprowadzony z komory. Każde przejście statku, w jednym lub drugim kierunku, wymaga napełnienia komory i przy ożywionym ruchu statków ilość zużywanej wody bywa znaczną. Przy ograniczonym zapasie, oszczędzanie wody nabiera znaczenia.

Jeżeli dwa zbiorniki pionowe  $AA'$  i  $BB'$  (rys. 61) przedstawiają dwie sąsiednie komory, lub komorę i zbiornik zapasowy o jednakim przekroju poziomym, to powtarzające się wahania przeprowadzać mogą wodę z komory do zbiornika i odwrotnie i wystarczałoby wstrzymanie ruchu po pierwszej połowie wahnięcia, aby zaoszczędzić całe jedno napełnienie szluzy, gdyby nie tarcie, pochłaniające według doświadczeń prawie  $\frac{2}{5}$  naporu i pozwalające zaoszczędzać zaledwie  $\frac{3}{5}$  napełnienia. Doświadczenia inż. de Lagrenégo i Flamant'a <sup>1)</sup> wykazały, że oszczędność wody wzrasta razem z długością przewodu  $l$  i jego przekrojem  $\omega$ , oraz zmniejszaniem się obwodu zwilżonego tego przekroju.

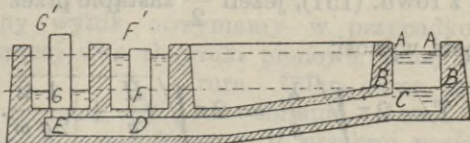
Na podobnych zasadach oparte zostało urządzenie przy szluzie Aulois na kanale bocznym Loary, zaprojektowane przez margrabiego de Caligny <sup>2)</sup> a mające na celu dla oszczędzania wody: 1) przeprowadzanie do kanału górnego części wody przy opróżnianiu komory, 2) doprowadzanie do komory, podczas jej napełniania, pewnej ilości wody z kanału dolnego (rys. 62).  $AA'BB'$  jest komora szluzy,  $AA'$  — poziom kanału górnego,  $BB'$  — poziom kanału dolnego. Akweduk  $CDE$ , jak można najdłuższy, dochodzi do komory przy wrotach dolnych w  $C$ . Na drugim końcu w  $D$  i  $E$  akweduk ma u góry dwa otwory okrągłe, na których stawiane być mogą rury pionowe  $FF'$  i  $GG'$ . Pierwsza, rura górna  $FF'$ , umieszczona jest w zbiorniku, łączącym się bezpośrednio z kanałem górnym, a jej wierzch  $F'$  wznosi się zaledwie na parę centymetrów, nad poziomem

<sup>1)</sup> *Annales des Ponts et Chaussées*. 1831.

<sup>2)</sup> M<sup>is</sup> A. de Caligny. *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes*. Versailles-Paris. 1880—1883.

kanału górnego. Druga, *rura dolna*  $GG'$ , umieszczona jest w zbiorniku, mającym połączenie z kanałem dolnym, za pośrednictwem rowu, możliwie jaknajszerszego, a jej wierzch  $G'$  umieszczony jest znacznie wyżej niż  $F'$ .

Gdy chodzi o opróżnienie komory, napełnionej do poziomu  $AA'$ , wyjętą zostaje rura  $GG'$ , woda przechodzi przez otwór  $E$  do kanału dolnego i prędkość w akweduku  $CDE$  wzrasta; gdy jest już dość znacz-



Rys. 62.

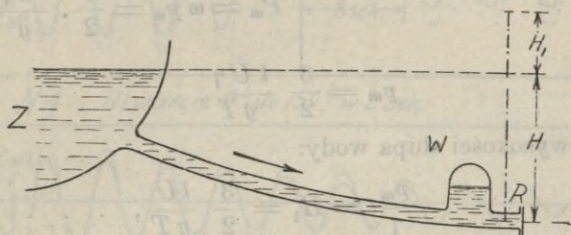
ną, wstawia się napowrót rurę  $GG'$ , a woda z nabytą prędkością podnosi się w obu rurach  $GG'$  i  $FF'$  i przekraczając poziom  $F'$  przelewa się do kanału górnego. Prędkość w akweduku  $CDE$  stopniowo się zmniejsza i doszłaby do zera, gdyby nie wyjęto powtórnie rury  $GG'$ . Wtedy prędkość znów wzrasta i dochodzi do wielkości wystarczającej, aby po ponownym wstawieniu rury  $GG'$ , poziom znów się podniósł w obu rurach ponad  $F'$  i nastąpiło nowe przelanie się wody do kanału górnego. Przy każdym wahnieniu, objętość przelewanej wody się zmniejsza i czynność prowadzoną jest do chwili, gdy ta objętość staje się nieznaczną. Wtedy opróżnienie komory ma miejsce dalej, przy wyjętej rurze  $GG'$  i otwartej komunikacji z kanałem dolnym.

Przy napełnianiu komory używane są naprzemian rury  $FF'$  i  $GG'$ . Gdy poziom wody w komorze jest  $BB'$ , wyjętą zostaje rura górna  $FF'$ , woda z kanału górnego wchodzi przez otwór  $D$  i przez akweduk do komory i prędkość w akweduku wzrasta; gdy staje się znaczną, wtedy wstawia się rurę  $FF'$  a wyjmuje rurę  $GG'$ . Ruch wody w akweduku, nieustający w skutku prędkości nabytej, wytwarza spadek ciśnienia w części  $DE$  i wessanie wody z kanału dolnego przez otwór  $E$ . Gdy ten ruch ustaje, ustawia się rurę  $GG'$  a wyjmuje  $FF'$ , wywołując nowy przyływ wody z kanału dolnego przez otwór  $E$  i akweduk do komory.

Doświadczenia wykazały, że oszczędność przy szluzowaniu wynosiła 0,412 podczas napełniania, a 0,386 podczas opróżniania komory, razem 0,798. Jeżeli, bez tego urządzenia, potrzeba było dla napełnienia komory wziąć objętość wody  $O$  z kanału górnego, któraby w całości przeszła przy opróżnianiu komory do kanału dolnego, to przy opisanym urządzeniu, zużyto do napełnienia komory 0,412  $O$  wody wziętej z kanału dolnego, a więc z kanału górnego tylko 0,588  $O$ . Przy opróżnianiu, z objętości  $O$  przeprowadzono do kanału górnego 0,386  $O$ , a do kanału dolnego spłynęło tylko 0,614  $O$ . Kanał górny dostarczył zatem  $(0,588 - 0,386) O = 0,202 O$ , a kanał dolny otrzymał  $(0,614 - 0,412) O = 0,202 O$ . Przy każdym szluzowaniu oszczędność wynosiła prawie  $\frac{4}{5}$  potrzebnej ilości wody.

**33. Uderzenie wodne.** Przy nagłym zamknięciu otworu, przez który woda wypływa z rury, następuje również nagłe zatrzymanie ruchu, uderzenie wody o ściany rury i strata ener-

gii. W rurze, nad otworem, wytwarza się, bezpośrednio po uderzeniu, przewyżka ciśnienia, tem większa, im raptowniej zamknięto otwór, im dłuższa jest rura i znaczniejsza prędkość ruchu. Ta przewyżka ciśnienia rozchodzi się falą wzdłuż rury, odbija w zbiorniku i wraca napowrót; następują wahania, pochłaniane stopniowo przez tarcie o ściany rury. Uderzenia takie są szkodliwe dla przewodów, naruszają spójnia a nieraz, przy większych prędkościach, wywołują pęknięcie rur. Obawiać się ich należy, zwłaszcza przy rurach tłoczących lub rurach większych średnic, doprowadzających wodę do turbin, z prędkością dochodzącą do 3 lub 4 *m/sek*. Unika się uderzeń przez



Rys. 63.

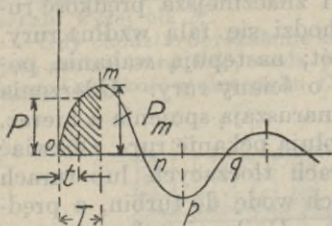
powolne zamykanie otworów, ale na rurach tłoczących wodę do zbiorników, lub doprowadzających (rys. 63), umieszczane bywają dzwony powietrzne, jak *W*, w których woda ściskając powietrze, traci energię. Uderzenie wodne następuje także przy nagłym otwarciu rury i zmniejszeniu naporu, wtedy wszakże bywa już mniej niebezpieczne.

Gdy niema dzwonu powietrznego *W*, i rura *l* metrów długa doprowadza rurę ze zbiornika *Z* do otworu *R*, pod naporem *H*, to przy nagłym zamknięciu otworu, następuje uderzenie wodne, którego wielkość, wyrażona wysokością słupa wody, wynosi  $H_1$  i zależy od *l* i od prędkości *U* wypływu wody przez otwór *R*. Gdy otwór zostaje zamkniętym, w przeciągu bardzo krótkiego czasu *T*, to w przybliżeniu obliczyć można siłę uderzenia *P* z pomocą równania ilości ruchu:

$$\int_0^T P dt = m U,$$

w którym  $m = \frac{l \omega \gamma}{g}$ , gdyby znaną była zależność *P* od czasu *t*. Z następujących po uderzeniu wahań słupa wody w rurze, odbywających się według prawa ruchu wahadłowego har-

monicznego (152), wyciągnął A. Budau<sup>1)</sup> wniosek, że ta zależność wyraża się również sinusoidą *omnpq* (rys. (64)). Zastępując, dla obliczenia zakreskowanej powierzchni, łuk sinusoidy łukiem paraboli, otrzymać można:



Rys. 64.

$$\int_0^T P dt = \frac{2}{3} P_m T = m U,$$

gdzie  $P_m$  oznacza wartość odpowiadającą czasowi  $T$ . Ponieważ:

$$P_m = \omega p_m = \frac{3}{2} \cdot \frac{l \omega \gamma}{g} \cdot \frac{U}{T},$$

więc:

$$p_m = \frac{3}{2} \frac{l U \gamma}{g T},$$

albo w wysokości słupa wody:

$$\frac{p_m}{\gamma} = H_1 = \frac{3}{2} \frac{l U}{g T}, \dots \dots (153)$$

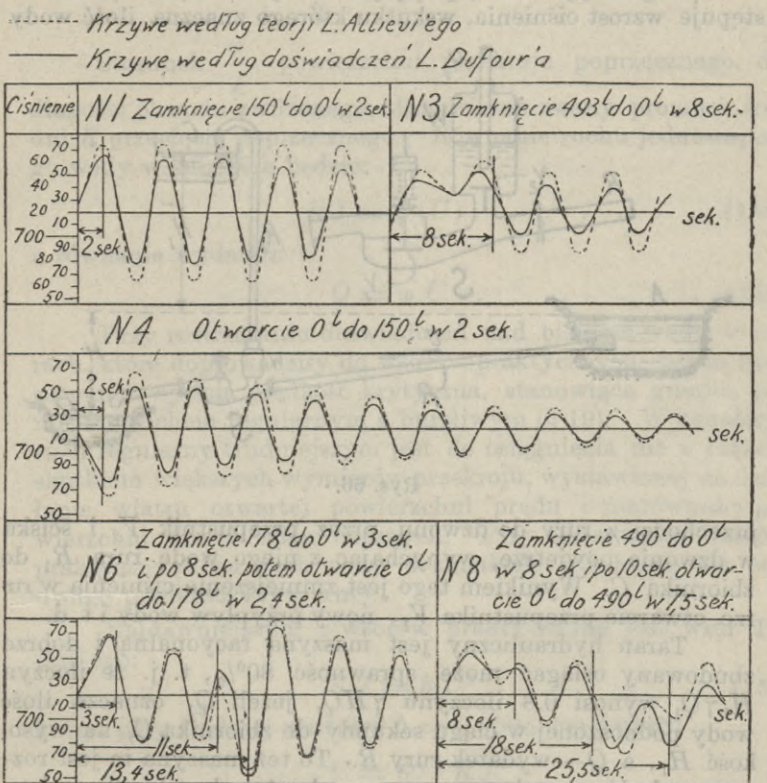
odpowiadającej wysokości  $h$  we wzorze (152).

W skutku sprężystości ścian rury i ściśliwości wody, istotna przewyżka naporu bywa mniejszą. Ścisłą teorię uderzenia wodnego podał inżynier włoski L. Allievi<sup>2)</sup>, a teoria ta sprawdzaną była doświadczalnie przez inż. L. Dufour'a w zakładach hydroelektrycznych w Viège (Szwajcarya), gdzie woda pod naporem 720 m dochodziła przewodem rurowym 1420 m długim, złożonym z jednej rury średnicy 0,7 m i długości 1157 m, rozgałęziającej się na dwie o średnicy 0,5 m na długości 263 m. Niektóre z otrzymanych wykresów podane są na rys. 65. Rachunek przybliżony za pomocą wzoru (153), biorąc podane przy wykresach wartości  $T$  i  $Q$  i obliczając  $U$  dla średnic 0,7 m i 0,5 m na długościach 1157 m i 263 m, daje  $H_1$  zbliżone do uwidoczniionych na wykresach, np. dla № 1  $H_1 = 49$  m, dla № 3  $H_1 = 40$  m i t. d.

<sup>1)</sup> Ob. przyp. 8, str. 2.

<sup>2)</sup> „Teoria generale del moto perturbato dell' acqua nei tubi in pressione“ (*Annali della Società degli Ingegneri ed architetti*. 1903). Przekład niemiecki tej pracy podany jest w dziele: Allievi-Dubs-Bataillard. Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen, Berlin 1909 (I. Theil: Rohrleitungen von Lorenzo Allievi, deutsche, erläutere Ausgabe bearbeitet von Robert Dubs und V. Bataillard. II. Theil: Stollen und Wasserschloss, von Robert Dubs).

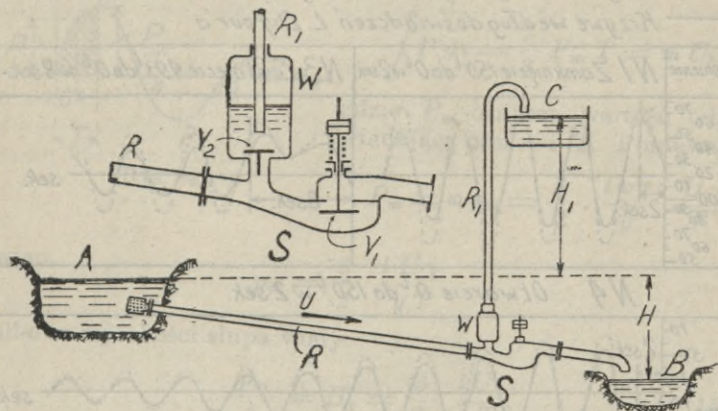
Wzrost ciśnienia, następujący po nagłym zamknięciu rury prowadzącej wodę, użytym być może, przy odpowiednim urządzeniu, do podnoszenia wody na znaczne wysokości. Urzą-



Rys. 65.

dzenie to nosi nazwę *taranu hydraulicznego*. Jeżeli w *A* (rys. 66) mamy do rozporządzenia spadek *H* i prowadzimy wodę rurą *R* do położonego niżej odpływu *B*, to przy końcu tej rury umieszczony taran hydrauliczny *S* podnosić może wodę i przelewać ją do zbiornika *C*. Taran składa się z przepustnika  $V_1$ , opadającego własnym ciężarem, a podnoszącego się, gdy prędkość *U* w rurze *R* osiąga pewną oznaczoną wartość. Przed przepustnikiem, na rurze *R* umieszczony jest dzwon powietrzny *W*, zamykany przepustnikiem opadającym  $V_2$  w ten sposób, że woda z rury wchodzić może swobodnie do dzwonu, gdy swym ciśnieniem podniesie przepustnik, a nie może wracać napowrót. Pod działaniem naporu *H*, woda płynie rurą *R*, dopó-

każ przepustnik  $V_1$  jest otwarty. Gdy prędkość  $U$  dochodzi do wartości, przy której ciśnienie całkowite na powierzchni przepustnika  $V_1$  staje się większe od jego ciężaru, wtedy przepustnik  $V_1$  nagle się podnosi i przepływ zostaje wstrzymanym. Następuje wzrost ciśnienia, wskutku którego znaczna ilość wody



Rys. 66.

przechodzi z rury do dzwonu przez przepustnik  $V_2$  i ściska w dzwonie powietrze, wypychając z niego wodę rurą  $R_1$  do zbiornika  $C$ . Wynikiem tego jest zmniejszenie ciśnienia w rurze, otwarcie przepustnika  $V_1$ , nowy przypływ wody i t. d.

Taran hydrauliczny jest maszyną racjonalną i dobrze zbudowany osiągać może sprawność 80%, t. j. że iloczyn  $H_1 \gamma Q_1$  wynosi 0,8 iloczynu  $\gamma H Q$ , jeżeli  $Q_1$  oznacza ilość wody podnoszonej w ciągu sekundy do zbiornika  $C$ , na wysokość  $H_1$ , a  $Q$  — wydatek rury  $R$ . To też maszyna ta jest rozpowszechnioną, zwłaszcza w gospodarstwach rolnych, w krajach górzystych.

## IV. Kanały.

**34. Ruch jednostajny.** W ogólnem równaniu prądu ustalonego (88), kładąc, jak dla rur, spadek osi prądu na jednostkę długości:

$$\sin I - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_0}{\partial s} = J,$$

otrzymujemy:

$$J = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right). \quad (154)$$



Przy stałym przekroju poprzecznym prądu, prędkość  $U$  będzie stałą i drugi wyraz prawej strony równy zeru; pozostanie:

$$\frac{\omega}{\chi} J = \varphi(U) \dots \dots \dots (155)$$

Stosunek  $\frac{\omega}{\chi}$ , powierzchni przekroju poprzecznego, do długości obwodu zwilżonego, stanowi tak zwany promień średni  $R$  przecięcia poprzecznego. Równanie ruchu jednostajnego wody w kanałach będzie:

$$RJ = \varphi(U) \dots \dots \dots (156)$$

a równanie wydatku:

$$Q = \omega U \dots \dots \dots (157)$$

Przy roztrząsaniu doświadczeń nad biegiem wody w rurach, które doprowadziły do wzorów praktycznych, braną była za punkt wyjścia prędkość krytyczna, stanowiąca granicę pomiędzy ruchem regularnym a burzliwym (§ 19). W kanałach, ruch regularny trudniejszym jest do osiągnięcia niż w rurach, skutkiem większych wymiarów przekroju, wystawionej na działanie wiatru otwartej powierzchni prądu i nierówności powierzchni dna i ścian bocznych. Przy zestawianiu wzorów praktycznych na ruch wody w kanałach, nie brano też pod uwagę prędkości krytycznej.

Najdawniejszym z wzorów praktycznych jest wzór Tadini'ego:

$$RJ = b U^2 \dots \dots \dots (158)$$

który, przy średniej wartości  $b = 0,0004$  ma kształt:

$$U = 50 \sqrt{RJ}.$$

Wzór ten daje dość dokładne wyniki dla kanałów szerokich i głębokich, przy małym spadku. Podobne też wyniki daje wzór Weisbacha:

$$RJ = \frac{B}{2g} U^2, \dots \dots \dots (159)$$

w którym dla kanałów i rzek z dnem chropowatym:

$$B = 0,0074 + \frac{0,000433}{U},$$

a średnio  $B = 0,0075$ ,  $U = 51 \sqrt{RJ}$ .

Porównawcze zbadanie wyników przeszło 700 doświadczeń,

wykonanych na kanałach ze ścianami z różnych materiałów, doprowadziło Bazin'a do wzoru:

$$U = B_1 \sqrt{RJ}, \text{ w którym } B_1 = \frac{87}{1 + \frac{c}{\sqrt{R}}} \quad (160)$$

z wartościami współczynnika chropowatości ścian:

$c = 0,06$	dla ścian bardzo gładkich,
0,16	" " gładkich,
0,46	" " z kamieni grubo ociosanych,
0,85	" " " nieociosanych,
1,30	" " z ziemi,
1,75	" " " wyjątkowo opornych.

Wzór Bazin'a wypisać można w kształcie:

$$RJ = \left[ \frac{1}{87} \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{R}} \right) \right]^2 U^2,$$

cały więc opór, stawiany przez ściany, zależy od  $c$  i od  $R$ , to jest od natury ścian i od kształtu przekroju poprzecznego.

Wyniki równie dobre, jak wzór Bazin'a, daje wzór Kuttera, używany także do obliczania rur:

$$U = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left( 23 + \frac{0,00155}{J} \right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{RJ} \quad (161)$$

z wartościami:

$n$	$\frac{1}{n}$	
0,010	100	dla ścian bardzo gładkich,
0,013	77	" " gładkich,
0,017	58	" " mało gładkich,
0,020	50	" " chropowatych,
0,025	40	" " z ziemi,
0,030	33	" " ze żwiru,
0,035	29	" " ze żwiru nieregularnego,
0,040	25	" " bardzo chropowatych.

Dla rur nowych brano zwykle  $n = 0,01$ , a dla używanych  $n = 0,013$  i tym dwóm wartościom  $n$  odpowiadają wzory (97), podane w § 22.

W Anglii używano również wzoru Manninga:

$$U = CR^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}}, \quad (162)$$

w którym współczynnik zmienny  $C$  ma wartość stosunku  $\frac{1}{n}$  wchodzącego do wzoru Kuttera. I tak np. dla ścian gładkich  $C = 77$ . Wzór ten może mieć postać:

$$U = C_1 \sqrt{R J},$$

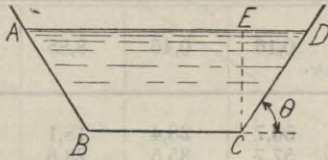
jeśli położymy:

$$C_1 = C \sqrt{R}.$$

Zamiast promienia średniego  $R$ , wprowadzoną została przez niektórych inżynierów, do wzorów na bieg wody w rzekach, średnia głębokość  $T$ . Między innymi prof. M. Matakiewicz<sup>1)</sup> proponował wzór:

$$U = \frac{116 J^{0,493 + 10 J}}{2,2 + T^{\frac{2}{3} + \frac{0,15}{T^2}}} T. \quad (163)$$

**35. Obliczanie kanałów.** Przekrój kanałów miewa zwykle kształt trapezu równobocznego  $ABCD$  (rys. 67), ścia-



Rys. 67.

ny boczne są mniej lub więcej nachylone do poziomu, stosownie do rodzaju gruntu, najczęściej pod kątem  $45^\circ$ . Jeżeli głębokość wody w kanale  $EC = h$ , szerokość dna  $BC = l$ , to  $ED = h \cotg \theta$ , powierzchnia przekroju:

$$\omega = h (l + h \cotg \theta). \quad (164)$$

a obwód zwilżony  $AB + BC + CD$ :

$$\chi = l + \frac{2h}{\sin \theta}. \quad (165)$$

i te dwa związki pozwalają obliczyć dla każdego przekroju promień średni  $R = \frac{\omega}{\chi}$ .

Gdy  $\theta = 90^\circ$ , trapez zamienia się na prostokąt i wtedy:

$$\omega = hl, \quad \chi = 2h. \quad (166)$$

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Gewässerkunde 10 (1911). Por. art. prof. Matakiewicza: „Próby ustawienia wzorów empirycznych na przypliw wody w korytach naturalnych“ (*Czasopismo Techniczne lwowskie* 1906).

a promień średni:

$$R = \frac{hl}{l + 2h} \quad (167)$$

Dla przekroju prostokątnego bardzo szerokiego a małej głębokości, zamiast (167) bierze się zwykle  $R = h$ ; gdy przytem spadek  $J$  jest znany, wtedy wzory praktyczne pozwalają obliczyć prędkość  $U$ , a wzór (157) wydatek  $Q$ .

Różni autorowie, dla ułatwienia obliczeń, zestawiali tablice liczbowe, podobne do podanych dla rur (§ 22). Tablica 6 obejmuje wartości współczynnika  $B_1$  wzoru Bazina (160), odpowiadające różnym wartościom promienia średniego  $R$  i współczynnika  $c$ .

TABLICA 6.

**Wartości współczynnika  $B_1$  wzoru Bazina (160), odpowiadające różnym wartościom współczynnika  $c$  i promienia średniego  $R$ .**

$c =$	0,06	0,16	0,46	8,85	1,30	1,75
$R = 0,05$	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
10,00	85,3	82,8	75,9	68,5	61,6	56,0
20,00	85,8	84,0	78,8	73,0	67,3	62,5

Układano także nomogramy i rys. 68 przedstawia nomogram, ułatwiający rachunki według wzoru Bazina. Nomogram

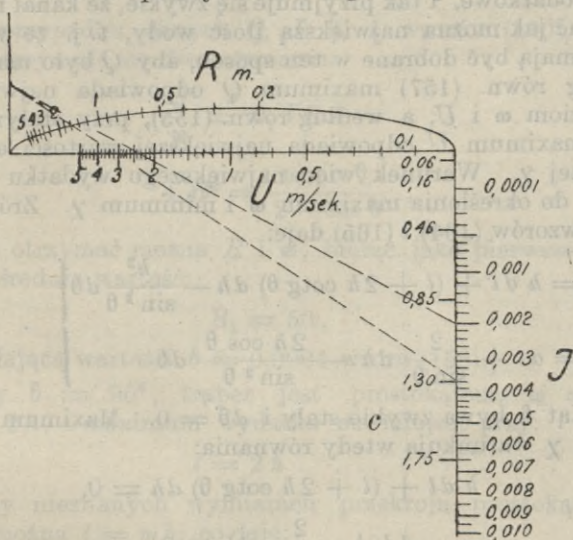
ma podziałki dla trzech głównych czynników tego wzoru:

promienia średniego  $R$ ,  
prędkości  $U$   
i spadku  $J$

oraz czwartą podziałkę z lewej strony pionowej  $J$  z wartościami współczynnika  $c$ :

0,06 0,16 0,46 0,85 1,30 1,75

Sposób użycia nomogramu jest następujący: poprowadziwszy linię prostą przez punkt odpowiadający jednej z powyższych wartości współczynnika  $c$  i punkt podziałki  $R$  odpo-



Rys. 68.

wiadający wartości promienia średniego, obraca się tę prostą około punktu jej przecięcia z pionową górną, nie mającą podziałki, dopóki nie przejdzie przez punkt podziałki  $J$ , odpowiadający danemu spadkowi. Prosta ta, w nowym swem położeniu, przetnie podziałkę  $U$  w punkcie odpowiadającym szukanej prędkości. Jeżeli np. mamy dane:

$$c = 1,30 \text{ (ściany z ziemi), } R = 1,60 \text{ m, } J = 0,002,$$

to dla znalezienia odpowiadającej prędkości  $U$ , przykładamy do nomogramu linię prostą (nakreślona na szkłe lub celulo-dzie) tak, aby przechodziła przez punkty: podziałki współczynnika  $c = 1,30$  i podziałki promienia średniego  $R = 1,60$ . to jest miała położenie linii przerywanej niższej na rys. 68,

Prostą tę obracamy około punktu jej przecięcia z pionową bez podziałki, dopóki nie przejdzie przez punkt  $J = 0,002$  (linia przerywana wyższa). W tem nowem położeniu prosta przecina podziałkę  $U$  w punkcie odpowiadającym szukanej prędkości

$$U = 2,40 \text{ m.}$$

Tak samo, przy wiadomej zawsze wartości współczynnika  $c$  można ze znanych  $U$  i  $R$  otrzymać  $J$ , lub mając  $U$  i  $J$ , znaleźć  $R$ .

Ponieważ promień średni  $R$  nie określa wymiarów  $h, l, \theta$  przekroju trapezowego, przyjmować wypada w tym celu warunki dodatkowe. I tak przyjmuje się zwykle, że kanał ma przepuszczać jak można największą ilość wody, t. j. że wymiary  $h, l, \theta$  mają być dobrane w ten sposób, aby  $Q$  było maximum. Według równ. (157) maximum  $Q$  odpowiada największym wartościom  $\omega$  i  $U$ , a według równ. (155), przy stałym spadku  $J$  maximum  $U$  odpowiada największej wartości  $\omega$  a najmniejszej  $\chi$ . Warunek więc największego wydatku sprowadza się do określenia maximum  $\omega$  i minimum  $\chi$ . Zrózniczkowanie wzorów (164) i (165) daje:

$$\left. \begin{aligned} d\omega &= h dl + (l + 2h \cotg \theta) dh - \frac{h^2}{\sin^2 \theta} d\theta \\ d\chi &= dl + \frac{2}{\sin \theta} dh - \frac{2h \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \end{aligned} \right\} \dots (168)$$

Kąt  $\theta$  bywa zwykle stały i  $d\theta = 0$ . Maximum  $\omega$  i minimum  $\chi$  warunkują wtedy równania:

$$h dl + (l + 2h \cotg \theta) dh = 0,$$

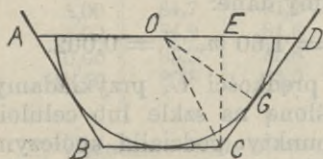
$$dl + \frac{2}{\sin \theta} dh = 0,$$

z których rugując  $dh$  i  $dl$  i mając wzgląd na równania (164) i (165), otrzymujemy:

$$h = \sqrt{\frac{\omega \sin \theta}{2 - \cos \theta}}, \dots (169)$$

gdy zaś  $h, \omega$  i  $\theta$  są znane, wzór (164) daje  $l$ . Geometrycznie wzór (169) wyraża, że trapez  $ABCD$  (rys. 69) winien być opisany na półkolu, którego środek leży w  $O$ , środku  $AD$ , bo wtedy równanie (169):

$$\omega = h^2 \left( \frac{2}{\sin \theta} - \cotg \theta \right),$$



Rys. 69.

łącznie z równaniem (164) daje:

$$l + 2h \cotg \theta = \frac{2h}{\sin \theta}, \quad \dots \quad (170)$$

związek wyrażający, że  $AD = 2DC$  albo  $OD = OC$ . Trójkąt  $ODC$  jest więc równoramienny, dwie wysokości  $OG$  i  $CE$  są równe, okrąg opisany ze środka  $O$  promieniem  $OG$  jest styczny do trzech boków trapezu. Z drugiej znów strony z równań (164) i (165) wypada w tym przypadku:

$$R = \frac{h(l + h \cotg \theta) \sin \theta}{l \sin \theta + 2h} = \frac{h}{2} \quad \dots \quad (171)$$

W przypadku danych  $Q$ ,  $J$ ,  $\theta$ , z wzorów (160), (169) i (171), otrzymuje się dwa równania:

$$\frac{Q}{\omega} = B_1 \sqrt{RJ} \quad \dots \quad (172)$$

$$4R^2 = \frac{\omega \sin \theta}{2 - \cos \theta}, \quad \dots \quad (173)$$

z których otrzymać można  $R$  i  $\omega$ , biorąc jako pierwsze przybliżenie, średnią wartość:

$$B_1 = 50,$$

odpowiadającą wartości  $b = 0,0004$  wzoru (158).

Gdy  $\theta = 90^\circ$ , trapez jest prostokątem,  $\omega = lh$ ,  $\chi = l + 2h$ , i maximum wydatku ma miejsce przy:

$$l = 2h \quad \dots \quad (174)$$

Przy nieznanym wymiarach przekroju prostokątnego, położyć można  $l = mh$ , co daje:

$$\omega = mh^2, \quad \chi = (m + 2)h, \quad R = \frac{mh}{m + 2}, \quad \dots \quad (175)$$

a że, z wzorów (157) i (158) mamy:

$$RJ = \frac{bQ^2}{\omega^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{mhJ}{m + 2} = \frac{bQ^2}{m^2h^4},$$

więc:

$$h^5 = \frac{(m + 2)bQ^2}{m^3J}, \quad Q = \sqrt{\frac{m^3h^5J}{(m + 2)b}}, \quad \dots \quad (176)$$

a największy wydatek ma miejsce, gdy  $l = 2h$  czyli  $m = 2$ . Mając  $m$ ,  $Q$ ,  $J$ , obliczyć można  $h$  z wzoru (176), przy użyciu podawanej w podręcznikach technicznych tablicy kwadratów i sześciątów.

Przyjmując, że szerokość dna kanału jest stałą,  $dl = 0$ , i równania różniczkowe (168) dadzą:

$$(l + 2h \cotg \theta) dh - \frac{h^2}{\sin^2 \theta} d\theta = 0,$$

$$\frac{dh}{\sin \theta} - \frac{h \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = 0,$$

a po wyrugowaniu  $dh$  i  $d\theta$  otrzymujemy warunek:

$$\cotg 2\theta = -\frac{l}{2h} \dots \dots \dots (177)$$

Przy stałej znów wysokości trapezu  $h$ ,  $dh = 0$ , a z równań (168) wypada:

$$dl - \frac{hd\theta}{\sin^2 \theta} = 0, \quad dl - \frac{2h \cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = 0,$$

skąd:

$$2 \cos \theta - 1 = 0, \quad \dots \dots \dots (178)$$

co daje:  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

*Zadanie 33.* Ile wody dawać będzie kanał, wykopany w ziemi, o przekroju trapezowym, ze skarpami nachylenymi jak 1:2 (1 wysokości na 2 podstawy), szerokości dna 2 m, przy głębokości 0,80 m i spadku 20 cm na kilometr?

Z danych:

$$\cotg \theta = 2, \quad l = 2 \text{ m}, \quad h = 0,80 \text{ m},$$

otrzymujemy według równania (164):

$$\omega = 0,8 (2 + 0,8 \cdot 2) = 2,88 \text{ m}^2,$$

a że:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}} = 0,45,$$

więc według równ. (165):

$$\chi = 2 + (2 \cdot 0,8) : 0,45 = 5,5 \text{ m}, \\ R = 2,88 : 5,5 = 0,52.$$

Jakkolwiek znamy  $c$ ,  $R$ ,  $J$ , nie otrzymamy jednak  $U$  z nomogramu, gdyż podziałka  $J$  nie obejmuje wartości 0,0002. Tablica 6, dla  $c = 1,3$  i  $R = 0,52$ , daje  $B_1 = 31$ , a według równ. (160):

$$U = 31 \sqrt{0,52 \cdot 0,0002} = 0,32 \text{ m}$$

i szukane:

$$Q = 0,32 \cdot 2,88 = 0,92 \text{ m}^3 = 92 \text{ litr./sek.}$$

*Zadanie 34.* Rów wykopany w ziemi, mający 1 m szerokości dna, ze skarpami nachylenymi jak 2:3 (2 wys. na 3 podst.) i spadkiem 15 cm na kilometr ma dawać 300 litrów wody na sekundę. Jaka będzie głębokość wody w rowie?

Dane:  $Q = 0,3 \text{ m}^3$ ,  $J = 0,00015$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\cotg \theta = 1,5$ ,



$c = 1,3$ , nie wystarczają do oznaczenia przekroju  $\omega$  i prędkości  $U$ , zadanie więc rozwiązać można tylko przez kolejne próby. Dana wartość  $Q$  pozwala przypuszczać  $h < 1$  m, a biorąc  $h = 1$  m, mielibyśmy, obliczając jak w poprzednim zadaniu:

$$\omega = 2,5 \text{ m}^2, \quad \chi = 4,7 \text{ m}, \quad R = 0,53 \text{ m},$$

$$B_1 = 31, \quad U = 0,45,$$

co dawałoby:

$$\omega = 0,3 : 0,45 = 0,66,$$

wartość zbyt różną od 2,5. Dla  $h = 0,8$ , otrzymamy:

$$\omega = 1,76, \quad \chi = 4, \quad R = 0,44,$$

$$B_1 = 29,5, \quad U = 0,24,$$

co znów daje  $\omega = 0,3 : 0,24 = 1,25$ , wartość jeszcze niedość bliską 1,76. Dla  $h = 0,7$  mieć będziemy:

$$\omega = 1,44, \quad \chi = 3,5, \quad R = 0,41,$$

$$B_1 = 28,6, \quad U = 0,21, \quad \omega = \frac{0,3}{0,21} = 1,43,$$

wartość tak już bliską 1,44, że  $h = 0,7$  m uważać można za szukaną głębokość.

**Zadanie 35.** Kanał ma przepuszczać 800 litrów na sekundę, z prędkością średnią 0,50 m, w gruncie pozwalającym na nachylenie skarp pod kątem 45°. Jaka będzie szerokość dna, głębokość i spadek?

Dane są:

$$Q = 0,8 \text{ m}^3, \quad U = 0,50 \text{ m/sek.}, \quad \theta = 45^\circ,$$

skąd:

$$\cotg \theta = 1, \quad \omega = 0,8 : 0,5 = 1,6 \text{ m}^2.$$

Z wzoru (169), mając  $\sin \theta = \cos \theta = 0,707$ , otrzymujemy  $h = 0,93$  m, z wzoru (170)  $l = 0,76$ , a z wzoru (171)  $R = h : 2 = 0,47$ . Tablica 6 dla  $c = 0,85$  (skarpy pod 45° przyjmujemy wyłożone kamieniem nieociosanym) daje  $B_1 = 38,8$  i według równ. (160) będzie  $J = 0,00036$ . Będzie więc szerokość dna kanału 0,76 m, głębokość 0,93 m, spadek 36 cm na kilometr.

**Zadanie 36.** Kanał w ziemi, ma przepuszczać dziesięć metrów sześciennych wody na sekundę przy spadku dziesięciu centymetrów na kilometr. Jaki ma być przekrój poprzeczny, przy skarpach z nachyleniem 1:2?

Dane są:

$$Q = 10, \quad J = 0,0001, \quad \cotg \theta = 2.$$

Z równań (172) i (173), mając  $\sin \theta = 0,45$ ,  $\cos \theta = 0,89$ , otrzymuje się:

$$\frac{10}{\omega} = 50 \sqrt{0,0001 R}, \quad 4 R^2 = \frac{\omega \cdot 0,45}{2 - 0,89} = 0,405 \omega,$$

skąd  $R^5 = 25 (0,405)^2$  a przy użyciu logarytmów  $R = 1,32$  m. Przy  $c = 1,30$  tablica 6 daje  $B_1 = 40,2$ , a biorąc tę wartość zamiast średniej 50, otrzymamy  $R^5 = 38,5 (0,405)^2$  i  $R = 1,44$ . Tablica 6 daje dla tej wartości promienia średniego  $B_1 = 41,1$ , wartość dość bliską poprzedniej, tak że gdy ją weźmiemy zamiast 40,2, otrzymamy  $R^5 = 37 (0,405)^2$  i  $R = 1,43$ , którą przyjąć można ostatecznie. Bę-

dzie więc  $h = 2R = 2,86$ ,  $\omega = 9,87 R^2 = 20,23 m$ ,  $U = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{20,23} = 0,49$ , co sprawdzić można za pomocą nomogramu, wreszcie, według równ. (170),  $l = 1,27 m$ .

**Zadanie 37.** Mały kanał z betonu, o przekroju prostokątnym, 1450 m długi, ma doprowadzać 50 litrów wody na sekundę, ze źródła wytryskującego na wzniesieniu 80 m, do zbiornika, wzniesionego na 78,8 m. Jakie winny być wymiary kanału?

$$J = 1,20 : 1450 = 0,00082.$$

Dla maximum wydatku (174):

$$\omega = lh = \frac{l^2}{2}, \quad \chi = l + 2h = 2l, \quad R = \frac{l}{4},$$

z wzoru: (158):

$$\frac{l}{4} J = 0,0004 \cdot \frac{4Q^2}{l^4},$$

skąd:

$$l^3 = \frac{0,0064 (0,05)^2}{0,00082} = 0,0195.$$

W tablicy kwadratów i sześciątów odnaleźć można liczbę, dla której  $l^2 l^3 = l^5 = 195$ . Probując  $20 \times 911 = 182$ ,  $21 \times 967 = 203$ , dochodzimy do  $20,7 \times 941 = 195$ , dla  $l = 0,455 m$ . Kanał więc mieć będzie 46 cm szerokości dna, a 23 cm głębokości.

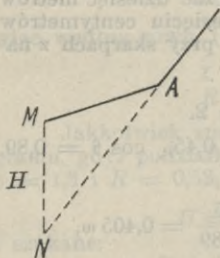
**Zadanie 38.** Dany jest spadek kanału 0,80 m na kilometr, szerokość  $l = 0,40 m$ , głębokość  $h = 0,30$ . Jaka jest prędkość i wydatek na sekundę, przy ścianach  $c = 0,16$ ?

$$\omega = 0,40 \cdot 0,30 = 0,12 m^2, \quad \chi = 0,40 + 0,60 = 1 m,$$

$$R = \frac{0,12}{1,00} = 0,12 m, \quad B_1 = 58,9, \quad U = 58,9 \sqrt{0,12 \times 0,0008} = 0,57 m,$$

$$Q = 0,12 \times 0,57 = 68,4 \text{ litr./sek.}$$

**36. Kanał doprowadzający.** Spadek kanału, doprowadzającego wodę do zakładu z silnikami wodnymi, obliczony być może w ten sam sposób, jak w § 24 oznaczoną była średnica rury tłoczącej. Technicznie kwestya tak się przedstawia. W punkcie *A* (rys. 70) rzeki lub strumienia, których spadek jest znany, ma brać początek kanał doprowadzający pewną objętość wody do punktu *M*, o znanym wzniesieniu. Chodzi o wyznaczenie położenia punktu *A* i o spadek projektowanego kanału. Jeżeli ujęcie wody odsuwamy od *M* w górę rzeki, powiększamy długość i spadek kanału, a zmniejszamy jego przekrój poprzeczny. Odwrotny wynik daje przesunięcie punktu *A* w dół rzeki i wtedy przekrój poprzecz-



Rys. 70.

ny kanału się powiększa a spadek i długość się zmniejszają. Ponieważ koszt kanału zależy od przekroju poprzecznego, prowadzi to do wniosku, że jest pewna kombinacja spadku i przekroju korzystniejsza od wszystkich innych. Oznaczmy przez  $H$  wzniesienie punktu  $M$ , nad przedłużeniem linii spadku  $AN$ , doprowadzonym do pionowej przez  $M$  przechodzącej,  $k$  — koszt metra bieżącego kanału na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego, obejmujący kupno gruntu i budowę,  $\omega$  — przekrój poprzeczny kanału,  $J$  — spadek kanału,  $L$  — całkowitą długość kanału,  $J'$  — spadek rzeki w pobliżu punktu  $A$ . Dane są  $h, k, J'$  a szukane  $J$  i  $L$ .

Koszt budowy, o którego minimum chodzi, będzie  $K = k\omega L$ .

Z trójkąta  $AMN$  mamy  $H = L(J' - J)$ , bo  $J'$  przedstawia spadek  $AN$  a  $J$  — spadek  $AM$ .

Dla trapezu, dającego maximum wydatku, promień średni według równ. (173):

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \sin \theta}{2 - \cos \theta}}$$

Jeżeli położymy dla skrócenia:

$$m = \frac{1}{4} \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}, \text{ to } R^2 = m\omega.$$

Równanie (158):

$$RJ = bU^2 = \frac{bQ^2}{\omega^2}$$

daje:

$$J = \frac{m^2 b Q^2}{R^5},$$

a kładąc  $m^2 b Q^2 = \rho^5 J'$ , otrzymujemy:

$$J = \frac{\rho^5}{R^5} J' \dots \dots \dots (179)$$

Koszt budowy będzie:

$$K = k\omega L = k\omega \frac{H}{J' - J} = \frac{kH\rho^5}{m^3 b Q^2} \cdot \frac{R^7}{R^5 - \rho^5}.$$

W wyrażeniu tem, tylko  $R$  jest zmienne. Aby  $K$  było minimum, trzeba aby  $R$  czyniło zadość warunkowi  $\frac{dK}{dR} = 0$ ,

czyli:

$$7(R^5 - \rho^5) - 5R^5 = 0,$$

$$R^5 = \frac{7}{2} \rho^5,$$

co według równ. (179) odpowiada warunkowi  $J = \frac{2}{7} J'$ . Spadek więc najekonomiczniejszy, kanału doprowadzającego, jest równy dwóm siódmym spadku rzeki, w pobliżu punktu ujęcia wody.

Długość kanału doprowadzającego będzie:

$$L = \frac{h}{J' - J} = \frac{7h}{5J'}$$

Dla kanału o przekroju prostokątnym, szerokości  $l$  i głębokości  $h$ , mielibyśmy  $\omega = hl$ , a następnie  $J = \frac{bQ^2}{R h^2 l^2}$ . Przyjmując, że promień średni jest stały równie jak i głębokość, położmy:

$$\frac{bQ^2}{R h^2} = \lambda^2 J',$$

wtedy:

$$J = \frac{\lambda^2}{l^2} J' \quad \dots \quad (180)$$

i otrzymamy:

$$K = \frac{k h^3 \lambda^2 R H}{b Q^2} \cdot \frac{l^3}{l^2 - \lambda^2}$$

Czynnikiem zmiennym jest tu szerokość  $l$ . Równanie

$$\frac{dK}{dl} = 0, \text{ daje:}$$

$$l^2 - 3\lambda^2 = 0,$$

a według równania (180):

$$J = \frac{J'}{3}$$

Przyjmując więc przekrój prostokątny, otrzymujemy najekonomiczniejszy spadek, kanału doprowadzającego, równy  $\frac{1}{3}$  spadku rzeki. Praktycznie brać można w przybliżeniu  $J = 0,30 J'$ .

**37. Przekrój, prędkość i wydatek kanału.** W praktyce najczęściej spotykane są przekroje trapezowe, rzadziej prostokątne, a w szczególnych przypadkach tylko dobierane bywają przekroje, dające maximum prędkości lub wydatku. Ponieważ według równ. (160)  $U = B_1 \sqrt{R J}$  a promień średni  $R = \frac{\omega}{\chi}$ , przeto przy stałym spadku  $J$ ,  $U$  zależy wyłącznie od  $R$ , a więc od kształtu przekroju poprzecznego kanału.

Wartości  $\omega$  i  $\chi$ , przy których  $U$  jest maximum, winny czynić zadość równaniu:

$$dU = 0,$$

albo:

$$\chi d\omega - \omega d\chi = 0. \quad (181)$$

Jeżeli np. weźmiemy pod uwagę przekrój kołowy (rys. 71) i będziemy chcieli oznaczyć położenie  $ab$ , przy którym prędkość średnia będzie największa, to oznaczając przez  $r$  promień koła, a przez  $\alpha$  kąt przyśrodkowy, odpowiadający obwodowi zwilżonemu, mamy:

$$\omega = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), \quad \chi = r\alpha,$$

skąd:

$$d\omega = \frac{r^2}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha, \quad d\chi = r d\alpha, \quad \text{Rys. 71.}$$

a po wstawieniu tych wartości w równanie (181):

$$\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0, \quad (182)$$

co odpowiada w przybliżeniu wartości  $\alpha = 258^\circ$ .

Gdy powierzchnia przekroju jest stałą,  $d\omega = 0$ , a maximum prędkości odpowiada najmniejszemu obwodowi zwilżonemu. Krzywą odpowiadającą temu warunkowi jest łuk koła.

Prędkość prądu w kanale, ze względu na podmywanie ścian łożyska, nie powinna przekraczać pewnej granicy. Dla różnych łożysk, prędkości dopuszczalne są następujące:

Prędkość w *m/sek.*

Rodzaj łożyska	Prędkość w <i>m/sek.</i>		
	na powierzchni	na dnie	średnia
Miał, glina brunatna . . . . .	0,15	0,08	0,22
Piasek drobny . . . . .	0,20	0,10	0,16
Gлина (złoża pierwotne) . . . . .	0,30	0,16	0,25
Piasek rzeczny tłusty . . . . .	0,60	0,31	0,50
Żwir . . . . .	1,22	0,70	1,00
Głazy drobne . . . . .	1,52	0,94	1,25
Odlamy łupkowe . . . . .	2,22	1,49	1,80
Skały uwarstwione . . . . .	2,75	1,82	2,30
„ twarde nieuwarstwione . . . . .	4,27	3,14	3,50

Profil dający też samą prędkość dla jakiegokolwiek położenia poziomej wody, wyznaczony jest stałym promieniem średnim  $R = a$ . Mamy wtedy  $\omega = a\chi$ ,  $d\omega = a d\chi$ . To ostatnie równanie, wypisane we współrzędnych prostokątnych  $y dx = a ds$ , określa krzywą łańcuchową. Dla uzyskania więc

stałej prędkości profilować wypada skarpy kanału według łuków krzywej łańcuchowej.

W kanale, którego przekrój byłby utworzony jak na rys. 72, z półkola o promieniu  $2a$  ze skarpami  $ab$  i  $cd$  w łukach krzywej łańcuchowej, promień średni zachowuje istotnie stałą wartość, przy jakimkolwiek położeniu poziomu  $ac$ , bo dla krzywej łańcuchowej:

$$\omega = 2\pi a^2 + 2as, \quad \chi = 2\pi a + 2s,$$

skąd:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2\pi a^2 + 2as}{2\pi a + 2s} = a.$$

Przekrój odpowiadający największemu wydatkowi otrzymamy z równania:  $dQ = 0$ , wyrażając  $Q$  w funkcji  $\omega$  i  $\chi$ . Ponieważ  $Q = \omega U = B_1 \omega \sqrt{RJ}$ , więc:

$$Q^2 = B_1^2 J \frac{\omega^3}{\chi}.$$

Jeżeli kształt przekroju jest oznaczony, wtedy wydatek  $Q$  jest największy przy wartościach  $\omega$  i  $\chi$ , czyniących zadość równaniu:

$$dQ = 0,$$

czyli:

$$3\chi d\omega - \omega d\chi = 0. \quad \dots \quad (183)$$

Dla uproszczenia przyjmujemy tu, że  $B_1$  jest stałe; biorąc je jako zmienną funkcję  $\chi$ , otrzymać można wynik zbliżony. Różnica w praktyce może być pominięta.

Jeżeli np. przekrój kanału jest kołowy, jak na rys. 71, z kątem przyśrodkowym  $\alpha$ , wyznaczającym położenie poziomu wody  $ab$  dla największego wydatku, mamy wtedy:

$$\omega = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), \quad \chi = r\alpha,$$

$$d\omega = \frac{r^2}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha, \quad d\chi = r d\alpha,$$

a wstawiając te wartości w równanie (183), otrzymamy:

$$3(1 - \cos \alpha) = 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

albo:

$$2\alpha - 3\alpha \cos \alpha + \sin \alpha = 0, \quad \dots \quad (184)$$

co odpowiada w przybliżeniu wartości:

$$\alpha = 308^{\circ}.$$

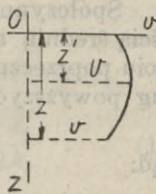
Poziom więc największego wydatku różni się od poziomu największej prędkości, dla którego otrzymaliśmy wyżej  $\alpha = 258^{\circ}$ .

**38. Rozkład prędkości.** Prawo rozkładu prędkości na przecięciu poprzecznym kanału, ma wielkie znaczenie praktyczne, zwłaszcza dla wielkich rzek, których wydatek oznaczany bywa przez pomiar prędkości. Dawniejsi hydraulicy dążyli do streszczenia tego prawa w jednym wzorze ogólnym <sup>1)</sup>, z licznych wszakże doświadczeń, wykonanych w ostatnich czasach przez Bazin'a we Francyi, Cunningham'a na kanale Gangesu i Humphreys'a i Abbot'a na Mississipi, okazało się to niemożliwym. Na poziomej prostopadłej do osi kanału, prędkość największa ma miejsce w pobliżu środka kanału a zmniejsza się stale, gdy postępujemy ku brzegom. Zmniejszenie to, zrazu powolne, staje się coraz szybszem przy zbliżaniu się do brzegów. Każde znów powiększenie głębokości zwiększa prędkość i odwrotnie. Na pionowej, prędkość maximum rzadko kiedy ma miejsce na powierzchni prądu. Odległość tego maximum od poziomu wody, zależy od głębokości i szerokości kanału i dochodzi niekiedy do  $\frac{1}{3}$  głębokości.

Jeżeli  $v$  (rys. 73) jest prędkość na głębokości  $z$  pod powierzchnią wody,  $V$  — prędkość maximum na tej samej pionowej, na głębokości  $z'$ , to według wzoru wywiedzionego doświadczalnie przez Bazin'a:

$$v = V - \theta (z - z')^2, \dots (185)$$

gdzie  $\theta$  jest spółczynnik, inny dla każdej pionowej i każdego przecięcia poprzecznego. Jak widzimy, prawo zmiany prędkości na jednej pionowej, przedstawione jest przez parabolę drugiego stopnia, o osi poziomej.



Rys. 73.

Gdy szerokość kanału jest bardzo wielką w stosunku do głębokości, wpływ ścian bocznych się zmniejsza, i dla wielkich rzek:

$$\theta = \frac{k}{h^2} V \sqrt{hJ}, \dots (186)$$

<sup>1)</sup> Por. art. inż. Wł. Witkowskiego: „Kilka doświadczeń w przedmiocie rozkładu prędkości wody, na jednej pionowej na rzece Wiśle, przy stanie jej zamarznięcia pod lodem“. *Dziennik Politechniczny*, r. 1862.

gdzie współczynnik  $k$  jest blizki 24. Wtedy:

$$v = V - \frac{k}{h^2} V \sqrt{hJ} (z - z')^2. \quad (187)$$

Wzór (187) przedstawia pewne podobieństwo do wzoru (121), otrzymanego dla rur i dowieśćby tu można tak samo, że tarcie dwóch warstw cieczy, równoległych do powierzchni prądu w kanale, jest proporcjonalne do ich prędkości względnej.

Dla kanału, o przekroju prostokątnym mniejszych wymiarów, najczęściej spotykanego w praktyce, podał Bazin wzór odmienny od (187), mianowicie:

$$U = V - 14 \sqrt{RJ}, \quad (188)$$

w którym  $U$  oznacza prędkość średnią,  $V$  — prędkość największą na pionowej w pośrodku prądu. Kładąc, według (160):

$$\sqrt{RJ} = \frac{U}{B_1},$$

otrzymujemy:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 + \frac{14}{B_1}}, \quad (189)$$

wzór, pozwalający obliczyć stosunek  $\frac{U}{V}$  dla każdej wartości  $B_1$  (§ 35, tabl. 6).

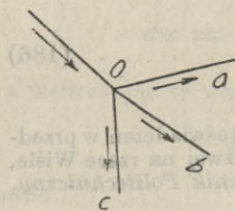
Współczynnik  $\eta$  (§ 18), zależny od różnicy pomiędzy prędkością średnią a największą prędkością prądu w danym przecięciu poprzecznym, obliczony został przez Boussinesq'a według powyższych wyników doświadczeń Bazin'a dla kanałów:

$$\eta = 0,02, \quad (190)$$

skąd:

$$\alpha = 1 + 3\eta = 1,06, \quad \alpha' = 1 + \eta = 1,02 \quad (191)$$

**39. Kanały rozprowadzające.** Gdy kanał irygacyjny, którego wymiary i spadek są znane, doprowadza do punktu  $O$  (rys. 74) zmienną objętość wody,



Rys. 74.

która ma być rozdzieloną między wielu użytkowników, proporcjonalnie do danych liczb, — zachodzi potrzeba obliczenia kanałów rozprowadzających:  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ . Oznaczmy w tym celu, przyjmując, że wszystkie kanały mają przekrój prostokątny, przez:  $l$ ,  $h$ ,  $J$ ,  $Q$ , szerokość, głębokość, spadek i wydatek ka-



nału głównego, a przez:  $l_1 h_1 J_1 Q_1$ ,  $l_2 h_2 J_2 Q_2$ ,  $l_3 h_3 J_3 Q_3$ , też same wymiary kanałów  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ .

Wstawiając we wzór (158) za  $R$  wartość z wzoru (167), a za  $U$  z wzoru (157) i (166), otrzymujemy związek:

$$\frac{lhJ}{l+2h} = \frac{bQ^2}{l^2h^2},$$

z którego:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{l^3 h^3 J}{l+2h}} \dots \dots \dots (192)$$

i także same wyrażenia na  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ . Ponieważ wydatek kanału głównego winien być równy sumie wydatków kanałów drugorzędnych, mamy przeto równanie ciągłości:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \dots \dots \dots (193)$$

Jeżeli woda ma być rozdzieloną pomiędzy użytkowników, proporcjonalnie do liczb:  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , to:

$$\frac{Q_1}{m} = \frac{Q_2}{n} = \frac{Q_3}{p} \dots \dots \dots (194)$$

albo:

$$Q_1 = \frac{m}{n} Q_2 = \frac{m}{p} Q_3, \dots \dots \dots (195)$$

a po wstawieniu tych wartości w równanie (193), będziemy mieli:

$$Q = \frac{m+n+p}{p} Q_3,$$

lub zastępując  $Q$  i  $Q_3$  wartościami według równ. (192):

$$\sqrt{\frac{l^3 h^3 J}{l+2h}} = \frac{m+n+p}{p} \sqrt{\frac{l_3^3 h_3^3 J_3}{l_3+2h_3}} \dots \dots (196)$$

Równanie to daje związek między wymiarami kanału głównego i kanału  $Oc$ , a równania (195) dwa związki między wymiarami kanałów  $Oa$  i  $Ob$ .

Jeżeli wszystkie kanały mają jednaki spadek, co często się zdarza, równanie (196) ma postać:

$$\sqrt{\frac{l^3 h^3}{l+2h}} = \frac{m+n+p}{p} \sqrt{\frac{l_3^3 h_3^3}{l_3+2h_3}}; \dots \dots (197)$$

a przy jednakiej głębokości wszystkich kanałów:

$$\sqrt{\frac{l^3}{l+2h}} = \frac{m+n+p}{p} \sqrt{\frac{l_3^3}{l_3+2h_3}} \dots \dots (198)$$

To ostatnie równanie pozwala obliczyć  $l_3$  skoro  $l$  i  $h$  są znane, z równań zaś (194), wypisanych w kształcie:

$$\sqrt{\frac{l_1^3}{l_1 + 2h}} = \frac{m}{p} \sqrt{\frac{l_3^3}{l_3 + 2h}},$$

$$\sqrt{\frac{l_2^3}{l_2 + 2h}} = \frac{n}{p} \sqrt{\frac{l_3^3}{l_3 + 2h}},$$

obliczyć będzie można  $l_1$  i  $l_2$ .

Jeżeli głębokość kanałów jest tak mała, w stosunku do ich szerokości, że może nie być uwzględniana, to szerokości  $l_1$   $l_2$   $l_3$  otrzymane być mogą przez podzielenie  $l$  proporcjonalnie do liczb  $m$   $n$   $p$ . Gdy wreszcie woda ma być rozdzieloną pomiędzy użytkowników w równych częściach a głębokości i spadki są jednakie, będzie oczywiście:

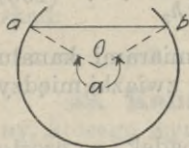
$$l_1 = l_2 = l_3$$

oraz:

$$\sqrt{\frac{l^3}{l + 2h}} = 3 \sqrt{\frac{l_3^3}{l_3 + 2h}}.$$

Rachunek ten stosować można do jakiegokolwiek liczby kanałów rozdzielczych, a także do przekrojów trapezowych i półkołowych, przyczem wzory będą więcej złożone. Można by także, przy proporcjonalności kosztu budowy kanału do jego przekroju, stosować, dla obliczenia najekonomiczniejszego rozdziału wody, metodę podaną w § 36.

**40. Akweduki i kanały ściekowe.** Akweduki obliczać można przy użyciu wzoru Bazin'a (160), przyjmując współczynnik chropowatości, dla ścian bardzo gładkich  $c = 0,06$ , lub dla ścian gładkich  $c = 0,16$ . Zwykle wydatek, spadek i kształt geometryczny przekroju są znane i obliczać wypada wymiary tego przekroju. Najczęściej używane są przekroje kołowe i jajkowate.



Rys. 75.

Dla przekroju kołowego o promieniu  $r$  (rys. 75), jeżeli położenie poziomu wody  $ab$  określone jest wielkością kąta przyśrodkowego  $\alpha$ , będzie jak w § 37 (str. 127):

$$\omega = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} = m r^2, \quad \chi = \alpha r = n r, \quad R = \frac{m}{n} r,$$

a z równania (160):

$$\frac{Q}{\omega} = B_1 \sqrt{\frac{m}{n} r J},$$

$$\frac{m}{n} r J = \frac{Q^2}{m^2 r^4 B_1^2},$$

$$r^5 = \frac{n Q^2}{m^3 J B_1^2} \dots \dots \dots (199)$$

Wzór ten daje  $r$ , gdy  $m$ ,  $n$ ,  $Q$ ,  $J$  są znane. Dla małych akweduków cementowych brać można  $B_1 = 50$ , dla średnich z gładkimi ścianami  $B_1 = 58$ , dla wielkich przekrojów  $B_1 = 71$ .

Najczęstszy jest przypadek, gdy  $\alpha = 240^\circ$ , wtedy:

$$m = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{240}{360} 3,14 + 0,87 \right) = 2,53, \quad n = 2 \frac{240}{360} 3,14 = 4,19,$$

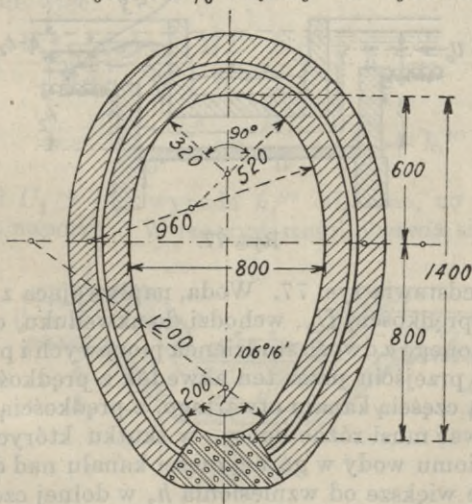
a równanie (199) daje:

$$r^5 = \frac{0,26 Q^2}{J B_1^2} \dots \dots \dots (200)$$

Wydatek największy osiągnięty będzie przy  $\alpha = 308^\circ$ , co odpowiada wartościom:

$$m = 3,08, \quad n = 5,37.$$

Wydatek ten jest o 5% większy od wydatku, gdy woda



Rys. 76.

pełnym przekrojem akweduku, a o 18% większy od wydatku, gdy poziom  $ab$  odpowiada kątowi  $\alpha = 240^\circ$ .

Przekroje kanałów ściekowych warszawskich Lindley'a są z trzech typów: eliptyczne, gruszkowe i dzwonowe. Rys. 76

przedstawia przekrój eliptyczny kanału III-iej klasy, 80 cm szerokości na 140 cm wysokości przy wypełnieniu:

po pachy,	całego przekroju,
$\omega' = 0,4837 \text{ m}^2$	$\omega'' = 0,8679 \text{ m}^2$
$\chi' = 1,915 \text{ m}$	$\chi'' = 3,518 \text{ m}$
$R' = 0,25258 \text{ m}$	$R'' = 0,2467 \text{ m}$

Biorąc we wzorze Bazin'a (160)  $c = 0,16$ , będzie współczynnik  $B_1$ :

$$B_1' = 65,9 \qquad B_1'' = 65,7$$

a dla spadku  $J = 0,002$ :

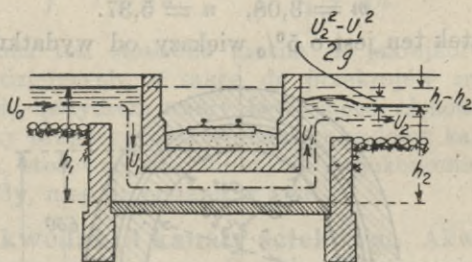
prędkość:

$$U' = 1,48 \text{ m/sek.} \qquad U'' = 1,457 \text{ m/sek.}$$

wydatek:

$$Q' = 0,716 \text{ m}^3/\text{sek.} \qquad Q'' = 1,28 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

Gdy kanał otwarty spotyka w swym biegu drogę lub inny kanał, trzeba wtedy przepuszczać wodę akwedukiem pod napotkaną przeszkodą. Przekrój takiego akweduku, pod drogą



Rys. 77.

żelazną, przedstawia rys. 77. Woda, napływająca z górnej części kanału z prędkością  $U_0$ , wchodzi do akweduku, ogólnej długości  $L$ , złożonego z dwóch studzienek pionowych i przewodu poziomego; po przejściu przez ten akweduk z prędkością  $U_1$ , odpływa dolną częścią kanału otwartego, z prędkością  $U_2$ . Ruch ten pokonywać musi różne opory, w skutku których wzniesienie  $h_1$ , poziomu wody w górnej części kanału nad dnem akweduku, będzie większe od wzniesienia  $h_2$  w dolnej części kanału. Straty naporu wywołane są tarciami wewnątrz prądu, tarciami o ściany akweduku i wzburzeniami przy nagłych załamaniach kierunku pod kątem prostym. Ogólna suma strat naporu, przyjmując  $U_0 = U_2$ , wynosi  $h_1 - h_2$  i składa się z następujących strat naporu szczegółowych:

1) napór zużyty na powiększenie prędkości z  $U_0$  na  $U_1$ , gdyż wogóle dla oszczędności przekroje akweduków są mniejsze od przekrojów kanałów otwartych:

$$h_s = \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g};$$

2) strata naporu, wynikająca z tarcia o ściany akweduku, według równ. (159) po położeniu  $J = \frac{h_s'}{L}$ :

$$h_s' = \frac{BL}{R} \frac{U^2}{2g};$$

3) strata naporu przy czterech zmianach kierunku  $h_s''$ , którą obliczyć można z pomocą wzoru (148) dla kolan rur.

Jeżeli przekroje tak są dobrane, że  $U_1 = U_2$  albo bardzo bliskie, to całkowita strata naporu jest sumą powyższych trzech strat szczegółowych; gdy zaś  $U_1 < U_2$ , dochodzi jeszcze

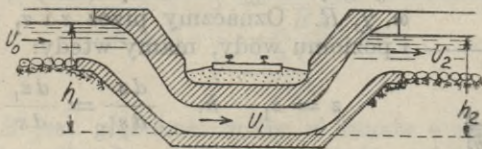
4) odpowiadająca różnicy prędkości w dolnej części kanału i w akweduku strata naporu:

$$h_s''' = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}.$$

Wogóle więc:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} + \frac{BL}{R} \frac{U_1^2}{2g} + h_s'' + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \\ &= \frac{U_2^2 - U_0^2}{2g} + \frac{BL}{R} \frac{U_1^2}{2g} + h_s''. \end{aligned}$$

Jeżeli  $U_1 > U_2$ , wypada  $h_s'''$  odjemne, co wykazywałoby zysk na naporze. W rzeczywistości objawia się wtedy tyl-



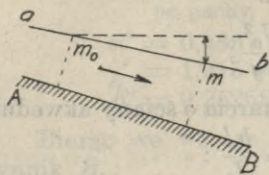
Rys. 78.

ko wzburzenie na poziomie, przy wychodzeniu wody z akweduku. Ogólną stratę naporu zmniejszyć można znacznie, projektując akweduk o profilu hydraulicznie racjonalnym, jak na rys. 78, który nie ma załamań, ani nagłych zmian przekroju.

**41. Ruch zmienny.** Gdy przekrój kanału się zmienia, inna jest prędkość na każdym przecięciu poprzecznym prądu i stosować wtedy wypada ogólne równanie ruchu ustalonego (154),

w którym spadek  $J = \frac{dz}{ds}$  (rys. 79)

odnosi się do linii  $ab$ , przedstawiającej strugę na powierzchni, ożywioną największą prędkością, to jest oś hydrauliczną prądu:



Rys. 79.

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\alpha'}{g} U \frac{dU}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) \quad . \quad . \quad (201)$$

Po zcałkowaniu w granicach od 0 do  $s$ , otrzymujemy:

$$z = \alpha' \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^s \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) ds, \quad . \quad . \quad (202)$$

różnicę wzniesień poziomów wody na przekrojach  $m_0$  i  $m$ , na których prędkość średnia jest  $U_0$  i  $U$ .

We wzorze (202) wartość współczynnika  $\alpha'$  jest ściśle oznaczoną (191), ale wartości  $\varphi(U)$  podane w § 34 a obliczone dla ruchu jednostajnego, stosowane być mogą do ruchu zmiennego tylko w przybliżeniu i, według St-Venanta, pod warunkiem lekkiego powiększenia wartości  $\alpha'$ , a mianowicie przyjęcia wartości zawartej między 1,08 a 1,138. W dalszym ciągu współczynnik ten oznaczamy literą  $\alpha$ , przyjmując:

$$\alpha = 1,111 = \frac{10}{9} \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

Dla przekroju prostokątnego (rys. 80) o stałej szerokości  $l$  i zmiennej głębokości  $h$  wzory (166) i (167) dają  $\omega, \chi, R$ . Oznaczmy przez  $z$  i  $z_1$  rzędne dna i poziomu wody, mamy wtedy:

$$z = z_1 - h, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dz_1}{ds} - \frac{dh}{ds},$$

a jeżeli  $i$  jest stały spadek dna  $AB$  (rys. 79):

$$\frac{dz}{ds} = i - \frac{dh}{ds}$$

Rys. 80.

to równanie (201) przybiera kształt:

$$\frac{dh}{ds} + \frac{\alpha}{g} U \frac{dU}{ds} = i - \frac{\varphi(U)}{R}, \quad . \quad . \quad (204)$$

przyczem:

$$l h U = Q \dots \dots \dots (205)$$

jest stałe, więc:

$$h \frac{dU}{ds} + U \frac{dh}{ds} = 0 \dots \dots \dots (206)$$

Zrównań (204) i (206) po wyrugowaniu  $\frac{dU}{ds}$ , otrzymujemy:

$$\frac{dh}{ds} - \frac{\alpha U^2}{g h} \frac{dh}{ds} = i - \frac{\varphi(U)}{R} \dots \dots (207)$$

a kładąc według równ. (158)  $\varphi(U) = b U^2$  oraz za  $R$  i  $U$  wartości z równań (167) i (205):

$$\frac{dh}{ds} - \frac{\alpha Q^2}{g l^2 h^3} \frac{dh}{ds} = i - \frac{b Q^2 (l + 2h)}{l^3 h^3} \dots \dots (208)$$

albo:

$$\left[ i - \frac{b Q^2 (l + 2h)}{l^3 h^3} \right] ds = \left( 1 - \frac{\alpha Q^2}{g l^2 h^3} \right) dh \dots \dots (209)$$

Równanie to daje się całkować bez trudności i dostarcza związku w kształcie  $s = f(h)$ , wyznaczającego oś hydrauliczną prądu, czyli tor cząstki, ożywionej największą prędkością na powierzchni  $ab$ , między przekrojami  $s_0$  i  $s$ , których głębokości są  $h_0$  i  $h$ . Znając  $h$  w funkcji  $s$ , otrzymuje się  $U$  w funkcji  $s$ , co rozwiązuje zadanie.

Gdy ruch jednostajny wody w kanale tamuje zagroda z przewalem, podnosząca poziom wody w górze przewалу i wywołująca zmienność ruchu, wtedy mają miejsce zjawiska, które objaśnić może szczegółowe roztrząśnienie równania (207). Kładąc w tem równaniu za  $f(U)$  wartość (80), mamy:

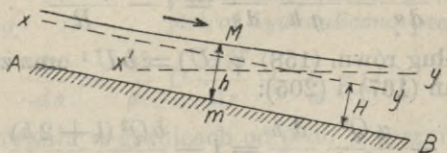
$$dh = i \frac{1 - \frac{b U^2}{R i}}{1 - \frac{\alpha U^2}{g h}} ds \dots \dots (210)$$

Jeżeli  $H$  jest głębokość wody w kanale o szerokości  $l$ , wydatku  $Q$  i spadku dna  $i$  przy ruchu jednostajnym, to gdy  $h$  jest stałe i równe  $H$ , mamy  $dh = 0$ , czyli ruch jednostajny.

Gdy  $h$  mało się różni od  $H$ , wartość stosunku  $\frac{b U^2}{R i}$  zbliża się do jedności; licznik ułamka (210) jest bardzo mały w porównaniu z mianownikiem i tak samo  $dh$  względem  $i ds$ . W tym przypadku głębokość w kanale zmienia się nieznacznie na długiej przestrzeni i ruch uważać można za jednostajny.

Gdy  $h < H$ , prędkość średnia jest większa od tej, która odpowiada ruchowi jednostajnemu, bo wydatek się nie zmienia, a powierzchnia przekroju jest mniejsza. Jest więc wtedy  $b U^2 > R i$ , i licznik ułamka (210) jest ujemny. Rzecz się ma odwrotnie, gdy  $h > H$ . Co do mianownika, dwa przypadki są do rozważenia, stosownie do tego, czy  $\alpha U^2 \geq g h$ .

Oś hydrauliczną prądu wyznaczają analitycznie równania (207) i (210). Gdy ta krzywa rozciąga się nad linią po-



Rys. 81.

ziomów prądu jednostajnego, nazywamy ją *osią podniesienia*, a gdy biegnie pod tą linią — *osią obniżenia*.

Dla osi podniesienia (rys. 81), ponieważ  $H$  czyni zadość równaniom (158) i (167):

$$R i = \frac{l H i}{l + 2 H} = b U^2,$$

czyli:

$$Q^2 = l^2 H^2 U^2 = l^2 H^2 \frac{l H i}{b (l + 2 H)},$$

to wstawivszy tę wartość w równanie (209), otrzymamy po skróceniu:

$$i \left[ 1 - \frac{l + 2 h}{l + 2 H} \cdot \frac{H^3}{h^3} \right] ds = \left[ 1 - \frac{\alpha i}{b g} \cdot \frac{l}{l + 2 H} \cdot \frac{H^3}{h^3} \right] dh \quad (211)$$

Przyjmując:

$$\alpha U^2 < g h \text{ i } h > H,$$

mamy:

$$R i > b U^2;$$

w tym przypadku ułamek (210) pozostaje dodatnym i  $dh$  ma ten sam znak co i  $ds$ .

W miarę postępowania w dół prądu,  $h$  powiększa się razem z  $s$ .  $U$  się zmniejsza i nierówności powyższe utrzymują się dla kolejnych wartości  $h$ . Przeciwnie, gdy się cofamy w górę prądu,  $h$  zmniejsza się razem z  $s$ .

Ale  $h$ , zmniejszając się, zbliża się do  $H$ ; gdyż przyjęliśmy  $h > H$ . Gdy więc poprowadzimy  $xy$  równoległą do dna kanału, w odległości  $H$ , to oś podniesienia będzie asymptotą



do tej równoległej. Równoległa  $xy$  przedstawia oś prądu jednostajnego.

Jeżeli znów  $h$  się powiększa, to ilorazy  $\frac{bU^2}{Ri}$  i  $\frac{\alpha U^2}{gh}$  nie przestają się zmniejszać, bo  $R$  rośnie razem z  $h$  i ilorazy zbliżają się do zera. Stosunek więc  $\frac{dh}{ds}$ , przedstawiający kątowy współczynnik stycznej do osi hydraulicznej, dąży do granicy  $i$ , co wskazuje, że ta oś jest asymptotą do pewnej poziomej  $xy$ .

Oś podniesienia jest krzywą zwróconą swą wklęsłością w górę. Wykreślać ją przychodzi w każdym szczególnym przypadku na profilu podłużnym kanału, od zagrody w górę, aż do punktu, w którym różnica  $h - H$  staje się nieznaczną, dla przekonania się, czy obwałowanie brzegów jest dostatecznie wysokie i czy skutkiem urządzenia zapory i podniesienia poziomu wody, na któremkolwiek przecięciu poprzecznym nie nastąpi wylew. Wykreślenie to dokonaniem być może na podstawie równania, otrzymanego przez zcałkowanie równania (211), co nie przedstawia trudności ale daje wzór zbyt złożony, aby mógł służyć do celów praktycznych. Zastępując przy całkowaniu zmienną  $h$  przez wysokość podniesienia  $z$  nad prostą  $xy$ , czyli kładąc  $h = H + z$ , a dla skrócenia:

$$1 - \frac{\alpha i}{bg} \frac{l}{l+2H} = m, \quad \frac{3l+4H}{l+2H} = n,$$

i wprowadzając inne jeszcze uproszczenia, dojść można do wzoru:

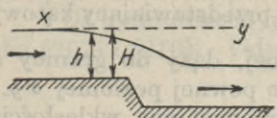
$$i(s-s_0) = (z-z_0) \left(1 - \frac{m}{9n}\right) + \frac{mH}{n} \ln \frac{z(3H+2z_0)}{z_0(3h+2z)}. \quad (212)$$

w którym wartości  $s=s_0$  odpowiada wartość  $z=z_0$ . Jeżeliby odległości  $s$  liczone były od zagrody w górę, wtedy  $s_0 = 0$ , a  $z_0$  przedstawia podniesienie przy zagrodzie. Gdy  $z_0$  jest małe w porównaniu z  $H$ , bierze się dla  $\frac{m}{n}$  wartość średnią  $\frac{2}{5}$  i zastępuje logarytm ilorazem  $\frac{z_0-z}{z}$ , a wtedy wzór przyjmuje kształt uproszczony:

$$is = \frac{z_0-z}{5} \left( \frac{2H}{z_0} + 3,45 \right). \quad (213)$$

Dla osi obniżenia, przyjmując  $\alpha U^2 < gh$  i  $h < H$ , ułamek (210) jest odjemny i  $dh$  ma znak przeciwny niż  $ds$ . Gdy postępujemy w kierunku prądu,  $h$  się zmniejsza a  $U$  powiększa; przeciwnie, postępując w górę prądu,  $h$  się powiększa.

Przy zmniejszaniu się  $h$ , nierówność  $h < H$  będzie stale się utrzymywać, ale przy zmniejszaniu się różnicy  $gh - \alpha U^2$  dojść można do równości  $\alpha U^2 = gh$ . Oś hydrauliczna oddala się stale od prostej odpowiadającej ruchowi jednostajnemu, ale pozostaje pod nią w całości. Dla pewnej wartości  $h = h'$ , odpowiadającej wartości  $s = s'$ ,



Rys. 82.

styczna do osi hydraulicznej staje się prostopadłą do dna kanału, co stoi w sprzeczności z hipotezą równoległości strug; przy pewnej więc wartości  $s$  mniejszej od  $s'$  i wartości  $h$  większej od  $h'$  następuje przerwa w ciągłości ruchu. Zauważono istotnie, że w tym przypadku oś hydrauliczna przybiera kształt zaokrąglony (rys. 82) i ciecz wzburzona dochodzi, kłębiąc się, do prądu w dole, ożywionego już inną prędkością. Wynik ten powodowany jest zwykle nagłym obniżeniem dna kanału.

**42. Odskok.** Nazwę tę nosi zjawisko, obserwowane często w kanałach ściekowych, a nieraz i w kanałach ze znacznym spadkiem, skoro prąd regularny następuje po wzburzeniu; miewa ono także miejsce przy wypływie wody przez otwór z pogródką; obserwowali je Bidone i Bazin. Jeżeli, rozważając w dalszym ciągu równanie (210), przypuścimy, że:

$$\alpha U^2 > gh \text{ i } h < H,$$

wtedy pochodna  $\frac{dh}{ds}$  jest dodatnią i głębokość  $h$  wzrasta razem z  $s$ , a  $U$  się zmniejsza. Dochodzi się wtedy do jednego z dwóch równań:

$$\alpha U^2 = gh, \quad h = H.$$

Jeżeli ruch prądu czyni wprzód zadość pierwszemu z tych równań, to styczna do osi hydraulicznej, w pewnym jej punkcie, staje się prostopadłą do dna kanału, co, jak wzmiankowaliśmy wyżej, jest niedopuszczalne. W rzeczywistości, przed dojściem jeszcze do tej wartości  $s$ , następuje przerwa w ciągłości ruchu: masa wody pędząca z góry, uderza o masę dolną, ożywioną mniejszą prędkością i wytwarza wzburzenia, tak że poziom nagle się podnosi (rys. 83). Ma wtedy miejsce tak zwany *odskok podniesienia*, po za którym ruch w kanale ulega zmianie.

Jeżeli zaś ruch prądu czyni wprzód zadość równaniu  $h = H$ , to oś hydrauliczna się nie przerywa i styczna do niej staje się równoległą do dna kanału na pewnym przecięciu poprzecznym (rys. 84); poza tem przecięciem  $h$  pozostaje stałym

i wtedy ruch jest jednostajnym, albo też różnica  $h-H$  staje się dodatnią,  $\frac{dh}{ds}$  będzie ujemne i wracamy do warunków osi obniżenia.

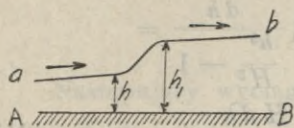
Odskok więc podniesienia charakteryzują warunki:

$$\alpha U^2 > gh \text{ i } h < H.$$

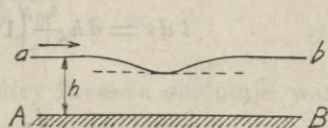
Odskok wytwarza się także, gdy prąd czyni zadość nierównościom:

$$\alpha U^2 > gh \text{ i } h > H.$$

Pochodna  $\frac{dh}{ds}$  jest wtedy ujemną, głębokość  $h$  najprzód się zmniejsza, a  $U$  powiększa, gdy postępujemy ku dołowi prądu. Mianownik ułamka (210) pozostaje ujemnym, ale może



Rys. 83.



Rys. 84.

się zdarzyć, że licznik schodzi do zera, a wtedy styczna do osi hydraulicznej staje się równoległą do dna na pewnym przecięciu poprzecznym. Poza tem przecięciem licznik staje się ujemnym,  $h$  się powiększa, co powoduje odskok więcej lub mniej wydłużony.

Oznaczmy przez  $h$  i  $h_1$  (rys. 83) głębokość wody bezpośrednio przed i po za odskokiem. Twierdzenie Bernoulli'ego daje, uwzględniając nagłą zmianę przekroju prądu (70), dla strugi stanowiącej oś hydrauliczną:

$$h + \frac{V^2}{2g} = h_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V-V_1)^2}{2g},$$

a zastępując prędkości na powierzchni przez prędkości średnie (§ 18) ze współczynnikiem  $\alpha$  (203):

$$h + \frac{\alpha U^2}{2g} = h_1 + \frac{\alpha U_1^2}{2g} + \alpha \frac{(U-U_1)^2}{2g}.$$

Po wyrugowaniu  $U_1$  na mocy związku  $Uh = U_1 h_1$  (szerokość kanału  $l$  stała), otrzymujemy:

$$\frac{h_1}{h} = \sqrt{\frac{\alpha U^2}{gh}} \dots \dots \dots (214)$$

wzór pozwalający obliczyć wysokość  $h_1 - h$  odskoku, w funkcji prędkości  $U$  i głębokości  $h$ . Zresztą, wyrażając, że stosunek po pierwszej stronie jest większy od jedności, wracamy do nierówności, charakteryzującej odskok podniesienia.

**43. Kanał bardzo szeroki.** Przy znacznej szerokości kanału, wzory (211) — (213) upraszczają się. Pozostaje  $\omega = lh$ , ale można położyć w przybliżeniu  $\chi = l$ ,  $R = h$ . Równanie (211), pomijając  $h$  i  $H$  w obec  $l$ , przybiera kształt:

$$i ds = \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg} \frac{H^3}{h^3}}{1 - \frac{H^3}{h^3}} dh = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{\frac{h^3}{H^3} - 1} \right] dh,$$

albo kładąc dla uproszczenia  $h = \lambda H$ :

$$\begin{aligned} i ds &= dh + \left( 1 - \frac{\alpha i}{bg} \right) \frac{dh}{\frac{h^3}{H^3} - 1} = \\ &= dh + \left( 1 - \frac{\alpha i}{bg} \right) \frac{H d\lambda}{\lambda^3 - 1} \dots \dots (215) \end{aligned}$$

Poraz  $\frac{1}{\lambda^3 - 1}$  rozkłada się na ułamki:

$$\frac{1}{\lambda^3 - 1} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda + 1} \right],$$

a po pomnożeniu przez  $d\lambda$  i zcałkowaniu otrzymujemy:

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 + \lambda + 1} + \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \text{arc. cotg} \frac{2\lambda + 1}{\sqrt{3}} + C (216)$$

Bresse <sup>1)</sup> obliczył wartości funkcji:

$$\psi(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ arc. cotg} \frac{2x + 1}{3},$$

stanowiącej ze zmienionym znakiem drugą stronę równania (216). Mamy więc:

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = C - \psi(\lambda) \dots \dots (217)$$

a całkując równanie (215) w granicach  $s_0$  i  $s$ , wstawiając za całkę drugiego wyrazu wartość (217) i wracając do zmiennej  $h$ ,

<sup>1)</sup> Cours de mécanique appliquée, profesé à l'École des ponts et chaussées, 2-e partie, Hydraulique. Paris 1868.

dochodzimy do równania:

$$i(s-s_0) = h_0 - h + H \left( 1 - \frac{\alpha i}{bg} \right) \left[ \psi \left( \frac{h}{H} \right) - \psi \frac{h_0}{H} \right] \quad (218)$$

Z pomocą tego równania, mając dany spadek dna  $i$ , wydatek  $q$  na jednostkę szerokości dna i głębokość  $h_0$  tuż przy zagrodzie, to jest w punkcie  $s_0 = 0$ , można bez wykreślania osi hydraulicznej zdawać sobie sprawę z jej kształtu i sprawdzić, w jakiej odległości  $s$  w górze od zagrody, prąd mieć będzie pewną dowolną głębokość  $h$  różną od  $h_0$ , a oczywiście większą od  $H$ , głębokości prądu jednostajnego przed postawieniem zagrody. Ponieważ  $Q = ql = UlH$ , więc według równania (158):

$$Hi = bU^2 = \frac{bq^2}{H^2},$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{bq^2}{i}} \quad (219)$$

Następujący wyciąg z tablicy Bresse'a obejmuje wartości  $\psi(x)$  odpowiadające niektórym wartościom  $x = \lambda = \frac{h}{H}$

T A B L I C A 7.

$x$	$\psi(x)$	$x$	$\psi(x)$	$x$	$\psi(x)$
0	-0,6046	1	$\infty$	1,11	0,6489
0,01	-0,5946	1,005	1,6469	1,12	0,6327
0,05	-0,5546	1,01	1,4159	1,13	0,6025
0,10	-0,5046	1,015	1,2807	1,14	0,5749
0,15	-0,4545	1,02	1,1848	1,15	0,5619
0,20	-0,4042	1,025	1,1241	1,16	0,5494
0,25	-0,3536	1,03	1,0610	1,17	0,5258
0,30	-0,3025	1,035	1,0080	1,18	0,5146
0,35	-0,2508	1,04	0,9709	1,19	0,4932
0,40	-0,1980	1,045	0,9311	1,20	0,4831
0,45	-0,1438	1,05	0,8931	1,25	0,4198
0,50	-0,0878	1,055	0,8665	1,30	0,3671
0,55	-0,0293	1,06	0,8301	1,35	0,3348
0,60	+0,0325	1,065	0,8188	1,40	0,3047
0,65	+0,0987	1,07	0,7871	1,45	0,2778
0,70	+0,1711	1,075	0,7675	1,50	0,2580
0,75	+0,2520	1,08	0,7490	2,00	0,1318
0,80	+0,3459	1,085	0,7315	2,50	0,0821
0,85	+0,4605	1,09	0,7069	3,00	0,0553
0,90	+0,6138	1,095	0,6990	10,00	0,0050
0,95	+0,8624	1,10	0,6766	$\infty$	0

Dla osi obniżenia wzór (218) ma kształt:

$$i(s - s_0) = h - h_0 + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \psi\left(\frac{h_0}{H}\right) - \psi\left(\frac{h}{H}\right) \right]. \quad (220)$$

i w tym przypadku służą w tablicy 7 wartości  $x$  mniejsze od jedności. Nie należy wżakże zapominać, że wzór (218) stosuje się tylko do prądów wielkiej szerokości. Stosowany do kanałów mniejszych wymiarów dałby wyniki błędne.

**Zadanie 39.** Na rzece ze spadkiem dna  $i = 0,0002$  i wydatkiem  $q = 5,66 \text{ m}^3$  podniesiono poziom przez postawienie zagrody w ten sposób, że głębokość przy zagrodzie  $h_0 = 6 \text{ m}$ . Jak daleko w górze od zagrody głębokość będzie o  $1 \text{ m}$  mniejsza?

Biorąc  $b = 0,0004$ , mamy  $\frac{bq^2}{i} = 64$ , według równania (219)

$$H = 4 \text{ m}, \text{ według (203) } \alpha = \frac{10}{9}, \quad g = 9,81 \text{ m}, \quad \frac{\alpha i}{bg} = 0,056,$$

$$\frac{h_0}{H} = \frac{6}{4} = 1,50, \quad h = 6 - 1 = 5 \text{ m}, \quad \frac{h}{H} = \frac{5}{4} = 1,25, \text{ tabl. 7}$$

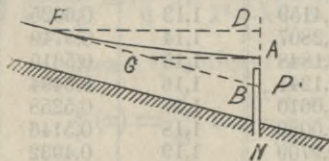
daje  $\psi\left(\frac{h_0}{H}\right) = 0,258$ ,  $\psi\left(\frac{h}{H}\right) = 0,4198$ , co wstawiając we wzór (218):

$$0,0002 s = 1 + 0,608, \quad s = \frac{1,608}{0,0002} = 8 \text{ klm}.$$

W górze rzeki głębokość  $5 \text{ m}$  spotyka się, w odległości  $8 \text{ klm}$  od zagrody. Stosując wzór przybliżony (213), otrzymalibyśmy  $s = 7,45 \text{ klm}$

**44. Wzory praktyczne.** Do wykreślenia osi podniesienia, wzór (212) zbyt jest złożony, a wzór (213) służyć może tylko wtedy, gdy  $z_0$  jest małe w porównaniu z  $H$ . Zwykle też przy kreśleniu osi podniesienia, używaną jest przybliżona ale prostsza metoda Poirée'go. Jeżeli  $PN$  (rys. 85) jest zagrodą, w górze której chcemy

otrzymać wykres osi hydraulicznej prądu, a  $FB$  jest osią prostolinią ruchu jednostajnego, jaki miał miejsce przed zbudowaniem zagrody, to wzniesienie  $AP$  poziomu wody nad krawędzią  $P$ , otrzymać można z wzoru na wypływ przez przewal,

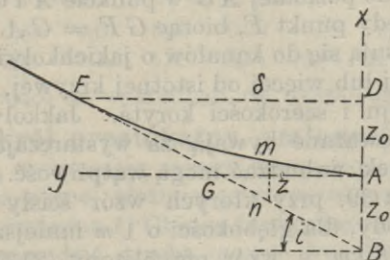


Rys. 85.

który podany będzie w rozdz. V. Znajac tym sposobem głębokość przy zagrodzie  $AN = BN + AB = H + z_0$ , możemy przyjąc na podstawie licznych doświadczeń, dokonanych na kanałach i rzekach z małym spadkiem, że podniesienie osi hydraulicznej nad osią biegu jednostajnego staje się niedostrzegalnym w okolicy punktu  $F$ , położonego na poziomej, prze-

chodzącej przez punkt  $D$ , który znów znajduje się na pionowej  $AN$  i leży w odległości od  $A$ , równej  $AD = AB$ .

Skoro oznaczony został punkt  $F$ , metoda Poirée'go polega na zastąpieniu osi hydraulicznej, parabolą o osi pionowej, z wierzchołkiem w punkcie  $A$ , styczną do poziomej  $AG$



Rys. 86.

i do prostej  $FB$ . Równanie tej paraboli, odniesione do osi  $xy$  (rys. 86), będzie  $y^2 = 2px$ . Ponieważ krzywa przechodzi przez  $F$ , którego spólrzędne są  $z_0$  i  $\delta$ , więc  $\delta^2 = 2pz_0$ , a że z trójkąta  $BDF$  mamy:  $2z_0 = \delta i$ , więc:

$$\left(\frac{2z_0}{i}\right)^2 = 2pz_0$$

i równanie paraboli:

$$z_0 y^2 = \left(\frac{2z_0}{i}\right)^2 x.$$

Kładąc  $mn = z$  i mając na uwadze, że wzniesienie punktu  $n$  nad punktem  $B$  jest równe  $iy$ , mamy:

$$z - x + iy = z_0,$$

skąd:

$$z = z_0 - iy + x = z_0 - iy + \frac{z_0 y^2}{\left(\frac{2z_0}{i}\right)^2},$$

albo:

$$z = z_0 - iy + \frac{i^2 y^2}{4z_0} = \frac{4z_0^2 - 4z_0 iy + i^2 y^2}{4z_0},$$

wreszcie:

$$z = \frac{(2z_0 - iy)^2}{4z_0}.$$

Zwykle, przy małych spadkach kanałów, brać można zamiast odległości poziomych  $y$ , długości  $s$  liczone po osi hy-

draulicznej i wtedy otrzymujemy wzór Poirée'go:

$$z = \frac{(2z_0 - is)^2}{4z_0} \quad (221)$$

Możnaby, prościej jeszcze, zastąpić łuk paraboli łukiem koła, stycznym do poziomej  $AG$  w punkcie  $A$  i do prostej  $FB$ . Oznacza się wtedy punkt  $F'$ , biorąc  $GF' = GA$ . Te przybliżone wykresy stosują się do kanałów o jakichkolwiek przekrojach i oddalają mniej lub więcej od istotnej krzywej, pod wpływem spadku, przekroju i szerokości koryta. Jakkolwiek przy małych spadkach uważane bywają za wystarczające, to jednak dla wielkich rzek wzbudzać mogą wątpliwość. I tak np. dla danych zadania 39, przy których wzór ścisły (218) dał odległość od zagrody, dla głębokości o 1 m mniejszej niż tuż przy zagrodzie,  $s = 8 \text{ km}$ , a wzór przybliżony (213)  $s = 7,45 \text{ km}$ , otrzymalibyśmy z wzoru (221)  $s = 5,9 \text{ km}$ .

Długością spiętrzenia wody w górze zagrody jest odległość  $FA = s$ , a ponieważ w punkcie  $F$  mamy  $z = 0$ , więc według równania (221):

$$2z_0 = is$$

czyli:

$$s = \frac{2z_0}{i} \quad (222)$$

Objętość wody, jaką zatrzymuje zagroda, jest równa objętości graniastosłupa prostego, o podstawie  $FAB$  (rys. 85), będącej różnicą trójkąta  $FBD$  i odcinka paraboli  $FAD$ . Przy szerokości kanału  $l$  i przekroju kanału prostokątnym, powierzchnia odcinka  $FAD$  jest równa  $\frac{2}{3} \delta z_0$ , a objętość wody zatrzymanej:

$$V = \left( \frac{1}{2} \delta 2z_0 - \frac{2}{3} \delta z_0 \right) l = \frac{1}{3} \delta z_0 l.$$

**Zadanie 40.** Kanał cementowy, o przekroju prostokątnym 1,2 m szerokości, zagrodzony został do wysokości 1,15 m. Wydatek kanału wynosi 300 *litr./sek.* przy spadku 0,10 m na kilometr. Wykreślić ós podniesienia.

Wzór na wypływ przez przewal daje przy  $Q = 0,3 \text{ m}^3$  wysokość  $AP$  (rys. 85) równą 0,28 m, będzie więc:  $AN = PN + AP = 1,15 + 0,28 = 1,43 \text{ m}$ . Według równania (174), dla maximum wydatku będzie  $H = \frac{l}{2} = 0,60 \text{ m}$ , co daje  $z_0 = 1,43 - 0,60 = 0,83$ . Długość wspanięcia, w górze zagrody, będzie według równania (222):

$$s = \frac{1,66}{0,0001} = 16,6 \text{ km}.$$



Wzór (221) daje:

$$z = \frac{(1,66 - 0,0001 s)^2}{3,32},$$

skąd:

$$s = 10000 (1,66 - \sqrt{3,32z}).$$

Kładąc za  $z$  wartości od  $z_0$  do 0, mamy:

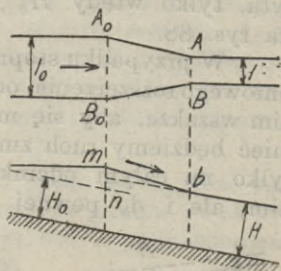
dla $z =$	0,80	0,60	0,40	0,20	0,10	0,05	0 m
$s =$	0,31	2,49	5,08	8,45	10,84	12,53	16,6 km

wartości wystarczające do wykreślenia osi hydraulicznej.

#### 45. Przekrój prostokątny, zmiennej szerokości.

Oś hydrauliczną wyznaczają zawsze wzory poprzednio podane, ale obliczenia są więcej złożone, gdyż we wzorach zjawia się, oprócz  $h$ , druga zmienna  $l$ . Obie są funkcjami długości  $s$  i przy całkowaniu wprowadzić trzeba pewne hipotezy, np. stałość promienia średniego  $R$ .

Weźmy na uwagę kanał, którego sąsiednie dwie części, większej długości a szerokości  $l_0$  i  $l$ , połączone są odcinkiem o zmiennym przekroju, długości  $\lambda$ . Przyjmijmy  $l_0 > l$ , co odpowiada *zweźnieniu koryta*. W dolnej części kanału ruch jest jednostajny i głębokość  $H$  (rys. 87) a w części górnej  $H_0$  i mamy  $H_0 < H$ . Głębokości te mogą być oznaczone według wydatku kanału, spadku i szerokości  $l_0$  i  $l$ . Ponieważ spadek dna się nie zmienia, więc oś hydrauliczna będzie jak na rys. 87. Na przekroju  $A_0 B_0$  oś hydrauliczna wznosić się będzie na wysokość  $mn$  nad osią ruchu jednostajnego, z którą schodzi się w górnej części kanału.



Rys. 87.

Obniżenie osi hydraulicznej, między przekrojami  $A_0 B_0$  i  $A B$ , daje wzór (202). Zmiana głębokości, którą tu oznaczymy przez  $y$ , wynosi na odległości  $s = \lambda$ ,  $y = z - i \lambda$ , a wstawiając wartość  $z$  według wzoru (202), mamy:

$$y = \alpha \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^\lambda \left[ \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) - i \right] ds. \quad (223)$$

Kładąc:

$$\varphi(U) = b U^2,$$

$$\frac{\chi}{\omega} = \frac{1}{R} = \text{ilości stałej},$$

$$\omega = \omega_0 + k \lambda,$$

wzór (223) pozwala obliczyć  $y$  w funkcji powierzchni  $\omega_0$  i  $\omega$ , przekrojów  $A_0B_0$  i  $AB$ , długości  $\lambda$  i spadku  $i$ . Podniesienie  $z_0$  otrzymamy ze związku:

$$z_0 = H - H_0 + y.$$

Znając  $z_0$ , wykreślić można oś hydrauliczną w górnej części kanału, jak to było wskazane w § 44.

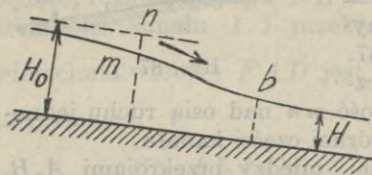
W praktyce nieraz pomija się całkę po drugiej stronie równania (223), której wartość jest stosunkowo mała wobec pierwszego wyrazu i przyjmuje się:

$$y = \alpha \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \dots \dots \dots (224)$$

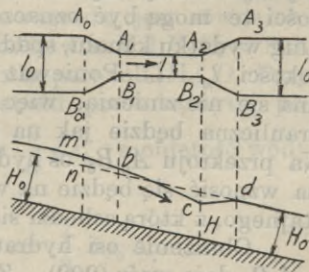
Dla przybliżonych obliczeń, gdy  $l$  mało się różni od  $l_0$  i  $\lambda$  jest niewielkie, kładą nawet  $z_0 = H - H_0$ , pomijając  $y$ . Głębokości  $H_0$  i  $H$  mierzone są na pionowych a  $\lambda$  na poziomej, co jest możliwem przy małym spadku.

Też same wzory stosowane być mogą do rozszerzenia koryta, tylko wtedy  $H_0 > H$  i poziom wody układa się jak na rys. 88.

W przypadku stopniowego zwężenia, oddzielonego od stopniowego rozszerzenia, odcinkiem o stałym przekroju, zbyt krótkim wszakże, aby się mógł w nim ustalić ruch jednostajny, mieć będziemy ruch zmienny, nie tylko na całym odcinku pośrednim, ale i do pewnej odległości



Rys. 88.



Rys. 89.

w górze, tak samo jak przy stopniowym zwężeniu. Profil osi hydraulicznej przedstawiony jest na rys. 89 z podniesieniem w górze, wynikającym ze stopniowego zmniejszania się szerokości od  $A_0B_0$ , obniżeniem rozciągającym się aż do  $A_2B_2$  i podniesieniem między  $A_2B_2$  i  $A_3B_3$ . Prędkość średnia  $U_0$ , na początku ruchu zmiennego, nie przestaje się zmniejszać aż do przekroju  $A_0B_0$ , gdzie jest minimum, następnie powiększa się do przekroju  $A_2B_2$ , gdzie ma wartość maximum  $U$ . Po między  $A_2B_2$  i  $A_3B_3$  prędkość zmniejsza się od  $U$  do  $U_0$ . Podniesienie  $cd$ , będące faktem zaobserwowanym, wynika

właśnie z różnicy naporu, odpowiadającej temu zmniejszeniu prędkości i może być obliczone w przybliżeniu zapomocą wzoru (224). Wydatek bowiem:  $l(H_0 - y)U = l_0 H_0 U_0$ , skąd:

$$U = \frac{l_0 H_0 U_0}{l(H_0 - y)},$$

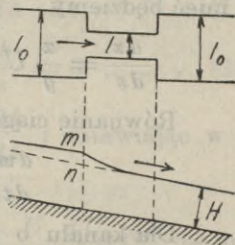
co wstawiając we wzór (224), otrzymujemy:

$$y = \frac{\alpha U_0^2}{2g} \left[ \frac{l_0^2 H_0^2}{l^2 (H_0 - y)^2} - 1 \right], \dots \quad (225)$$

równanie trzeciego stopnia, pozwalające obliczyć  $y$  ze znanych wartości  $U_0$ ,  $l_0$ ,  $H_0$ . Mając  $y$ , oznaczyć możemy głębokość  $H$  w punkcie  $c$ . W ten sam sposób oznaczyć można zapomocą wzoru (223) lub (224) głębokość w  $b$ , a następnie w  $m$ . Wreszcie, według podniesienia  $mn = z_0$  wykreślić można oś hydrauliczną w górze zwężenia, jak w § 44.

Gdy  $l > l_0$ , to jest gdy zamiast zwężenia mamy krótkie rozszerzenie koryta, wtedy w górze oś obniżenia łączy się z osią ruchu jednostajnego i rozciąga się w dół do przecięcia  $A_0 B_0$ , gdzie się zaczyna oś podniesienia i ciągnie między  $A_0 B_0$  i  $A_2 B_2$ , obniżając się następnie i schodząc z osią ruchu jednostajnego. Obliczenie podniesienia  $y$  i wykreślenie osi hydraulicznej, dokonaniem być może jak przy zwężeniu, zapomocą tych samych wzorów.

W przypadku nagłego zwężenia, jakie ma miejsce np. przy przejściu rzeki pod mostem, obserwacya poucza, że oś hydrauliczna ma kształt ogólny jak na rys. 89, z podniesieniem rozciągającym się na pewną odległość w górę, po którym następuje obniżenie więcej lub mniej wydatne, a w końcu znów podniesienie, rozciągające się na pewnej długości w dół rzeki. W zwykłych okolicznościach, gdy spadek, wydatek i długość zwężenia, są niewielkie, i  $l$  mało się różni od  $l_0$ , wysokość tego końcowego podniesienia jest również mała, a ponieważ trudne jest oznaczenie punktów, w których się ono zaczyna i kończy, przeto się je pomija, przyjmując wykres osi hydraulicznej jak na rys. 90. Można wtedy obliczyć w przybliżeniu podniesienie  $mn = z_0$ , zapomocą wzoru (224), biorąc za  $U_0$  i  $U$  ilorazy wydatku  $Q$ , przez powierzchnie przekrojów poprzecznych i stosując przytem współczynnik ścieśnienia (o którym będzie mowa w rozdz. V)  $m = 0,8$ . W górze zwę-



Rys. 90.

zenia powierzchnia przekroju jest  $l_0 (H + z_0)$  a prędkość  $U_0$ , w zważeniu  $lH$  i  $U$ , będzie więc:

$$l_0 (H + z_0) U_0 = m l H U = Q,$$

skąd:

$$U_0 = \frac{Q}{l_0 (H + z_0)}, \quad U = \frac{Q}{m l H},$$

a po wstawieniu we wzór (224):

$$z_0 = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{m^2 l^2 H^2} - \frac{1}{l_0^2 (H + z_0)^2} \right] \dots (226)$$

Równanie to, trzeciego stopnia względem  $z_0$ , rozwiązać można przez kolejne próby albo też graficznie. Posługują się niem, przy obliczaniu podniesienia w górze projektowanego mostu, biorąc za  $l_0$  średnią szerokość rzeki przed zbudowaniem mostu a za  $l$  średnią szerokość przepływu pod mostem. Można także obliczyć  $l$  ze znanego  $l_0$  i postawionego a priori podniesienia  $z_0$ . Pamiętać należy wszakże, że obliczenie to stosuje się tylko do niewielkich podniesień, przy większych dawać może wyniki niezgodne z rzeczywistością.

**46. Ruch nieustalony.** Równanie ruchu ustalonego otrzymano z równań ogólnych hydrodynamiki (19, 20) przez pominięcie pochodnych cząstkowych, zmiennych  $p, \rho, u, v, w$ , branych względem czasu  $t$ . W przypadku więc ruchu nieustalonego, do równania różniczkowego (201) dojdzie jeszcze wyraz  $\frac{\beta}{g} \frac{dU}{dt}$ , w którym  $\beta$  jest współczynnik podobny do  $\alpha$ , i mieć będziemy.

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\alpha}{g} U \frac{dU}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \frac{\beta}{g} \frac{dU}{dt} \dots (227)$$

Równanie ciągłości (29), kładąc w niem  $Q = \omega U$ , będzie:

$$\frac{d\omega}{dt} + U \frac{d\omega}{ds} + \omega \frac{dU}{ds} = 0 \dots (228)$$

Dla kanału o przekroju prostokątnym stałej szerokości i o stałym spadku, równanie (227) przybiera postać (204):

$$\frac{dh}{ds} + \frac{\alpha}{g} U \frac{dU}{ds} + \frac{\beta}{g} \frac{dU}{dt} = i - \frac{\varphi(U)}{R} \dots (229)$$

a równanie (228):

$$\frac{dh}{dt} + h \frac{dU}{ds} + U \frac{dh}{ds} = 0 \dots (230)$$

Zadanie ruchu nieustalonego w kanale o przekroju prostokątnym, stałej szerokości i stałego spadku, sprowadza się więc do zcałkowania dwóch równań różniczkowych, o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu; zmienne niezależne są  $s$  i  $t$  a funkcyje nieznanne  $h$  i  $U$ . Całkowanie to możliwem jest tylko w przypadku, gdy druga strona równania (229) jest równą zeru.

Przyjmiemy więc, że spadek dna  $i$  jest tak mały, że może być pominięty, równie jak i tarcie strug o ściany kanału. Inaczej mówiąc, przypuścimy, że tarcia zewnętrzne równoważą się ze spadkiem w ten sposób, że:

$$i - \frac{\varphi(U)}{R} = 0.$$

W tym przypadku równania (229) i (230), kładąc jeszcze dla uproszczenia  $\alpha = \beta = 1$ , będą:

$$\frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} + \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} = 0$$

$$\frac{dh}{dt} + h \frac{dU}{ds} + U \frac{dh}{ds} = 0,$$

a ponieważ prędkość  $U$  jest funkcyą  $s$  i  $t$ , przeto:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dh} \frac{dh}{dt},$$

i równania przyjmą postać:

$$\frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} + \frac{1}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (231)$$

$$\frac{dh}{dt} + h \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} + U \frac{dh}{ds} = 0 \quad (232)$$

Biorąc wartość z równania (232) na  $\frac{dh}{dt}$  i wstawiając w równanie (231), mamy:

$$\frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} - \frac{h}{g} \left( \frac{dU}{dh} \right)^2 \frac{dh}{ds} - \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} = 0$$

a po skróceniu:

$$\frac{dh}{ds} \left[ 1 - \frac{h}{g} \left( \frac{dU}{dh} \right)^2 \right] = 0.$$

Pierwsze rozwiązanie  $\frac{dh}{ds} = 0$ , daje  $h =$  ilości stałej,

czyli oś hydrauliczną równoległą do dna kanału, co odpowiada ruchowi jednostajnemu, dla którego istotnie  $Ri = \varphi(U)$ .

Drugie rozwiązanie daje:  $\frac{dU}{dh} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$ , skąd  $U = \pm 2\sqrt{gh} + C$ . Związek ten daje prędkość, na którymkolwiek przekroju poprzecznym, w funkcji głębokości. Płość stałą  $C$  oznaczyć można z wartości początkowych  $U_0$  i  $h_0$ :

$$C = U_0 + 2\sqrt{gh_0}.$$

Kładąc wartości  $U$  i  $\frac{dU}{dh}$  w równanie (232), otrzymujemy:

$$\frac{dh}{dt} \pm \sqrt{gh} \frac{dh}{ds} \pm (2\sqrt{gh} + C) \frac{dh}{ds} = 0$$

czyli:

$$\frac{dh}{dt} \pm (3\sqrt{gh} + C) \frac{dh}{ds} = 0.$$

Po zcałkowaniu, oznaczając przez  $\varphi$  funkcję dowolną, otrzymamy:

$$s = \pm (3\sqrt{gh} + C) t + \varphi(h).$$

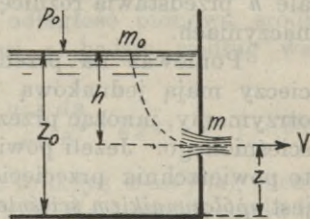
Równanie to określa  $h$  w funkcji  $s$  i  $t$ , daje profil osi hydraulicznej w jakiejkolwiek chwili, gdy znamy  $\varphi$  to jest profil w epoce poprzedniej, odpowiadającej np.  $t = 0$ . Stosownie do wartości początkowej  $\frac{dU}{dh}$ , dobrany będzie w każdym przypadku znak wartości  $3\sqrt{gh}$ . Mając  $h$  wyrażone w funkcji  $s$  i  $t$ , można zapomocą równania  $U = \pm 2\sqrt{gh} + C$  wyrażać  $U$  w funkcji tychże zmiennych.

## V. Okoliczności przypadkowe ruchu.

**47. Otwór w cienkiej ścianie.** Gdy szerokość brzołów otworu, w dnie lub ścianie bocznej zbiornika, jest mniejsza od połowy najmniejszego wymiaru powierzchni otworu, mówimy, że to jest otwór w cienkiej ścianie. Strugi cieczy, kierując się ku środkowi otworu, ze wszystkich stron, zbiegają się, tworząc żyłę i w niewielkiej odległości po za otworem, przyjmują kierunki równoległe. Pomiedzy otworem a punktem, w którym strugi stają się równoległymi, przekrój żyły się

zmniejsza. Po za tym punktem zmienia się kształt powierzchni przekroju a wielkość jej pozostaje niezmienną. Omawiane zjawisko nosi nazwę *ścieśnienia żyły*, a przecięcie poprzeczne najbliższe otworu, na którym strugi stają się równoległymi — nazwę *przezięcia ścięśnionego*.

Jeżeli poziom cieczy w zbiorniku lub naczyniu, z którego ciecz wypływa, utrzymywany jest na nieziennej wysokości a jego powierzchnia jest bardzo wielka w stosunku do powierzchni otworu, to wypływ nie narusza równowagi cząstek znajdujących się na poziomie, albo też nadaje im prędkości tak małe, że mogą być pominięte. Biorąc więc na uwagę dwie cząstki:  $m_0$  (rys. 91) na poziomie cieczy w zbiorniku i  $m$  na przecięciu ścięśnionem, których rzędne są  $z_0$  i  $z$  a prędkości  $V_0 = 0$  i  $V$ , mieć będziemy ciśnienie powietrza  $p_0$  w punkcie  $m_0$  i także ciśnienie  $p = p_0$  na obwodzie przecięcia ścięśnionego. Ciśnienie to ma miejsce na całym przecięciu ścięśnionem, bo strugi przechodzące przez to przecięcie są równoległe, i ciśnienie rozchodzi się na przecięciu, jednostajnie we wszystkich kierunkach.



Rys. 91.

Według twierdzenia Torricellego (68) prędkość cząstki  $m$  na przecięciu ścięśnionem wynosi  $V = \sqrt{2gh}$ , czyli równa jest prędkości spadku z wysokości  $h$ . Nie należy wszakże zapominać, że wzór ten wywiedziony był dla płynów doskonałych, że w cieczach naturalnych mają miejsce tarcia międzycząsteczkowe, zwłaszcza gdy strugi zbiegają się ku środkowi otworu, nie mają kierunków równoległych, w skutku czego prędkość rzeczywista musi być nieco mniejszą:

$$V = \varphi \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (233)$$

Doświadczenie wykazało, że *spółczynnik prędkości*  $\varphi$ , bliski jedności i często pomijany w rachunkach, zmienia się w ciałnych granicach, od 0,96 do 0,98. Przyjmując wartość  $\varphi = 0,98$ , obliczyć możemy stratę naporu przy wypływie przez otwór w cienkiej ścianie, to jest różnicę między naporem teoretycznym a rzeczywistym:

$$h_t - h_r = \frac{V^2}{2g} - \frac{\varphi^2 V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} (1 - \varphi^2) = 0,04 h_t,$$

wynoszącą 4% naporu teoretycznego, czyli wzniesienia poziomu cieczy w zbiorniku ponad środkiem otworu. Spółczynnik

oporu, to jest stosunek tej różnicy do naporu rzeczywistego:

$$\xi = \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2} \dots \dots \dots (234)$$

Gdyby prędkość  $V_0$  na poziomie cieczy nie mogła być pomijaną, wtedy z twierdzenia Torricellego otrzymalibyśmy  $V = \sqrt{2gh + V_0^2}$ . Jeżeli żyła cieczy nie wypływa z otworu na powietrze, ale wchodzi do naczynia napełnionego cieczą, której poziom ma stałe wzniesienie, wtedy otwór jest *zatopiony*. Prędkość na przecięciu ścięzionem daje wtedy również wzór (233), ale  $h$  przedstawia różnicę poziomów w dwóch zbiornikach lub naczyniach.

Ponieważ na przecięciu ścięzionem wszystkie cząstki cieczy mają jednakową prędkość, więc wydatek otworu  $Q$  otrzymamy, mnożąc przez tę prędkość powierzchnię przecięcia ścięzionego. Jeżeli powierzchnię otworu oznaczymy przez  $\omega$ , to powierzchnia przecięcia ścięzionego będzie  $m\omega$ , gdzie  $m$  jest *spółczynnikiem ścięśnienia*, a wydatek otworu będzie:

$$Q = m\omega \cdot \varphi \sqrt{2gh} = \mu \omega \sqrt{2gh} \dots \dots (235)$$

Poczyn  $m\varphi = \mu$  stanowi *spółczynnik wydatku*, zmieniający się razem z kształtem otworu i wysokością  $h$ . W przypadkach, gdy wymiar pionowy otworu jest bardzo mały w stosunku do  $h$ , współczynnik wydatku waha się w granicach 0,57 do 0,70 i zwykle jest bliski 0,62.

Dla otworów okrągłych od 0,006  $m$  do 0,3  $m$  średnicy granice te są jeszcze więcej zbliżone, jak pokazuje tablica 8, obejmująca wyniki doświadczeń H. Smith'a <sup>1)</sup>.

T A B L I C A 8.

Wzniesienie poziome wody nad środkiem otworu $h$	Wartości współczynników wydatku $\mu$ dla otworów kołowych, w cienkiej ścianie pionowej, o średnicy:					
	0,30 $m$	0,18 $m$	0,06 $m$	0,03 $m$	0,015 $m$	0,006 $m$
0,18 $m$	—	0,593	0,601	0,613	0,624	0,655
0,21	0,590	0,594	0,601	0,611	0,622	0,651
0,24	0,591	0,594	0,601	0,610	0,620	0,648
0,30	0,591	0,595	0,600	0,608	0,617	0,644
0,60	0,595	0,597	0,599	0,604	0,610	0,632
0,90	0,597	0,598	0,599	0,603	0,606	0,627
1,20	0,596	0,597	0,599	0,602	0,605	0,623
2,10	0,596	0,596	0,598	0,600	0,603	0,614
3,00	0,595	0,596	0,597	0,598	0,601	0,611
6,00	0,594	0,596	0,596	0,596	0,598	0,601

<sup>1)</sup> Hamilton Smith. Hydraulics. London 1886.



Jeżeli otwór ma większe wymiary, co najczęściej spotyka się w praktyce, niepodobna już wtedy przypuszczać, że wszystkie cząstki cieczy mają jednakową prędkość na przecięciu ścieśnionem; że zaś wzór (235) opiera się na tem przypuszczeniu, wynikałoby stąd, że nie można go używać w tym przypadku; wszakże tak doświadczenie jak i rachunek wykazują, że wzór (235) daje wyniki bliskie rzeczywistych, dla wielkich otworów, jeżeli za wysokość  $h$  brać będziemy odległość pionową środka ciężkości powierzchni otworu od poziomu cieczy.

Podzielmy powierzchnię otworu w ścianie nachylonej do poziomu pod kątem  $\theta$ , na paski szerokości  $x$  a wysokości  $dy$ . Wydatek każdego paska, którego odległość pionowa środka ciężkości od poziomu cieczy wynosi  $z$ , będzie według wzoru (235):

$$dQ = \mu x dy \sqrt{2gz} = \frac{\mu x dz}{\sin \theta} \sqrt{2gz}. \quad (236)$$

Znając kształt otworu, to jest funkcję  $x = f(z)$ , można zcałkować to wyrażenie w granicach  $z_1$  i  $z_2$ , rzędnych dwóch punktów obwodu położonych najdalej i najbliżej poziomu cieczy i otrzymać  $Q$ . W przypadku otworu prostokątnego w ścianie pionowej, szerokości  $a$ , wysokości  $b = z_2 - z_1$ :

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} \cdot dz,$$

$$Q = \mu a \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{2gz} \cdot dz = \mu a \sqrt{2g} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} (z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}}),$$

a że:

$$\omega = ab = a(z_2 - z_1),$$

więc:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \omega \sqrt{2g} \frac{z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}}}{z_2 - z_1}. \quad (237)$$

Ułamek ostatni jest prawie równy  $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(z_1 + z_2)}$ , a że odległość środka ciężkości prostokąta od poziomu cieczy  $h = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ , więc wracamy do wzoru (235):

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gh}.$$

Wywiedzione wzory odnoszą się do przypadku *ścieśnienia całkowitego*, gdy żyła cieczy podlega ścieśnieniu na całym swym obwodzie. Gdy wszakże brzegi otworu są w pewnych swych częściach przedłużone na wewnątrz zbiornika, lub schodzą się z jego dnem lub ścianami, wtedy ścieśnienie żyły w tych częściach obwodu nie następuje i jest *cząstkowem*. Jeżeli przez  $k$  oznaczymy stosunek części obwodu dającej ścieśnienie do całego obwodu otworu, to według doświadczeń Bidone'a, spół-

czynnik ścieśnienia cząstkowego  $\mu'$  wyraża się w funkcji współczynnika ścieśnienia całkowitego  $\mu$  wzorem:

$$\mu' = \mu (1 + 0,15 k) \dots \dots \dots (238)$$

W praktyce, zwłaszcza przy większych otworach, bezpieczniej jest zamiast wzoru (238) używać wartości współczynników wydatku obliczonych doświadczalnie przez inż. Graëff'a <sup>1)</sup> dla otworów prostokątnych w ścianie pionowej zbiornika, dających całkowite lub cząstkowe ścieśnienie żyły wodnej. Wartości te streszcza, dla siedmiu przypadków położenia i ustroju brzegów otworu, tablica 9, stosująca się tylko do otworów, których szerokość nie przewyższa 20 razy wziętej wysokości. Przypadki uwzględnione są następujące:

A. Otwór w cienkiej ścianie, odsunięty od dna i ścian bocznych zbiornika, dający całkowite ścieśnienie żyły wodnej.

B. Otwór w cienkiej ścianie, którego brzegi pionowe stanowią przedłużenie ścian zbiornika, dający ścieśnienie cząstkowe żyły wodnej, na wierzchu i na spodzie.

C. Otwór w cienkiej ścianie, którego brzeg dolny schodzi się z dnem zbiornika, tak że żyła wodna nie podlega ścieśnieniu od spodu.

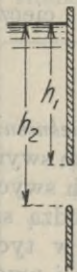
D. Otwór mający tylko brzeg górny zaostrowy, tak że ścieśnienie żyły ma miejsce tylko na wierzchu.

E. Otwory, mające brzegi od 0,04 m do 0,05 m szerokie, odsunięte od dna i ścian bocznych zbiornika (zwykłe otwory stawideł drewnianych).

F. Takież otwory z brzegami pionowymi, stanowiącymi przedłużenie ścian zbiornika (jak B).

G. Takież otwory, w których ścieśnienie jest usunięte na dnie i z obu boków (jak D).

Spółczynniki wydatku mierzone były przez inż. Graëff'a dla powyższych siedmiu typów otworów w dwóch różnych warunkach, mianowicie przy swobodnym wypływie wody na powietrze i przy otworze przedłużonym łotkiem czyli rynną jednakowej szerokości z otworem, tak krótką wszakże, że ruch jednostajny nie mógł się w niej ustalić. W obu tych przypadkach spółczynniki obliczane były dla otworów większych i mniejszych, tych ostatnich nie przekraczających 0,03 m wysokości. Spółczynniki zależne są od stosunku naporu na górny brzeg otworu, do wysokości otworu czyli do różnicy naporów na brzegi dol-



Rys. 92.

ny i górny, t. j. od stosunku  $\frac{h_1}{h_2 - h_1}$  (rys. 92).

<sup>1)</sup> A. Graëff. *Traité d'hydraulique*. Paris 1882.

TABLICA 9.

Wartości współczynników wydatku dla otworów prostokątnych.

$\frac{h_1}{h_2 - h_1}$	Otwory wielkie (wysokość > 0,03 m)							Otwory małe (wysokość < 0,03 m)						
	Położenie i ustrój otworu							Położenie i ustrój otworu						
	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
1. Wyływ swobodny na powietrze.														
1	0,61	0,65	0,67	0,70	0,65	0,68	0,67	0,70	0,71	0,72	0,71	0,75		
5	0,62	0,64	0,67	0,69	0,67	0,70	0,66	0,66	0,70	0,71	0,70	0,74		
10	0,62	0,63	0,67	0,69	0,68	0,71	0,65	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74		
20	0,61	0,63	0,66	0,68	0,68	0,71	0,64	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74		
40	0,61	0,62	0,66	0,68	0,68	0,70	0,63	0,64	0,69	0,69	0,69	0,73		
100	0,60	0,60	0,66	0,68	0,66	0,69	0,61	0,63	0,68	0,69	0,69	0,72		
400	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	0,60	0,63	0,68	0,68	0,68	0,71		
1000	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	0,60	0,62	0,67	0,67	0,68	0,71		
i więcej														
2. Otwory przedłużone łotokiem.														
1	0,57	0,64	0,60	0,60	0,62	0,65	0,65	0,67	0,67	0,69	0,68	0,70		
5	0,61	0,64	0,62	0,64	0,63	0,66	0,64	0,66	0,67	0,68	0,67	0,71		
10	0,61	0,63	0,63	0,65	0,64	0,67	0,64	0,65	0,67	0,68	0,67	0,71		
20	0,61	0,63	0,63	0,65	0,65	0,67	0,63	0,64	0,66	0,68	0,67	0,70		
40	0,61	0,62	0,63	0,65	0,64	0,66	0,62	0,63	0,66	0,67	0,66	0,70		
100	0,60	0,60	0,62	0,64	0,63	0,65	0,84	0,61	0,62	0,65	0,67	0,66	0,69	0,86
400	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,81	0,60	0,61	0,65	0,66	0,65	0,68	0,84
1000	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,80	0,60	0,61	0,64	0,66	0,65	0,67	0,81
i więcej														

Zadanie 41. Jaki jest wydatek otworu trapezowego (rys. 93) w ścianie pionowej?

Wzór (236), dla  $\theta = 90^\circ$ , daje:

$$dQ = \mu x dz \sqrt{2gz},$$

skąd:

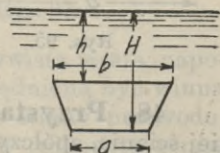
$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{z_2}^{z_1} x \sqrt{z} \cdot dz.$$

Równanie  $x = f(z)$  będzie dla trapezu:

$$x = a - \frac{a-b}{z_1-z_2} (z-z_2),$$

a po wykonaniu działań:

$$Q = \mu \frac{2\sqrt{2g}}{z_1-z_2} \left[ \frac{a z_1 - b z_2}{3} \right] (z_1^{3/2} - z_2^{3/2}) - \frac{a-b}{5} (z_1^{5/2} - z_2^{5/2}).$$



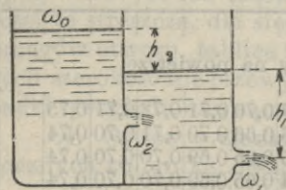
Rys. 93.

**Zadanie 42.** Jaki jest wydatek tegoż otworu, gdy bok  $a$  leży na poziomie wody?

$$z_2 = 0, \quad x = a - \frac{a-b}{z_1} z,$$

$$Q = \frac{2}{15} \mu (2a + 3b) z_1 \sqrt{2g z_1}.$$

**Zadanie 43.** Dwa zbiorniki (rys. 94) mają w ścianach bocznych otwory o powierzchniach  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Jaki będzie stosunek wysokości  $h_1$  i  $h_2$  po ustaleniu wypływu?



Rys. 94.

Dla otworu  $\omega_1$  wzór (233), przyjmując  $\varphi = 1$ , daje  $V_1^2 = 2g h_1$ ; dla otworu zatopionego  $\omega_2$  tenże wzór:  $V_2^2 = 2g h_2$ . Ponieważ po ustaleniu ruchu:

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2,$$

więc:

$$\omega_1^2 h_1 = \omega_2^2 h_2.$$

**Zadanie 44.** Jaka jest prędkość wypływu i wydatek otworu na dnie zbiornika (rys. 95). Wymiary dna i otworu są:

$$a=4 \text{ m}, \quad b=3 \text{ m}, \quad c=5 \text{ cm}, \quad d=3 \text{ cm}.$$

Stała głębokość wody w zbiorniku  $h = 0,8 \text{ m}$ , ciśnienie wewnętrzne  $1,2 \text{ At}$ , zewnętrzne  $1 \text{ At}$ .

Napór w otworze będzie:

$$H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = 0,8 + 0,2 \cdot 10,333 = 2,867 \text{ m}.$$

Prędkość wypływu:

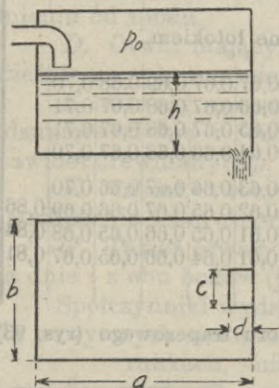
$$V = 0,97 \sqrt{2gH} = 7,278 \text{ m}.$$

Przy cząstkowym ścieśnieniu żyły, stosunek  $k$  we wzorze (238):

$$k = 11 : 16,$$

skąd:  $\mu' = 0,68$ ,

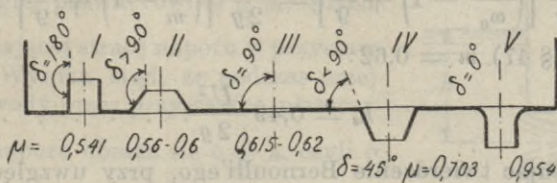
$$Q = 0,68 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,278 \text{ cm}^3 = 7,425 \text{ litr./sek.}$$



Rys. 95.

**48. Przystawki.** Przy wypływie przez otwór w cienkiej ścianie, współczynnik wydatku  $\mu$  zależy od kształtu otworu, którego brzegi mogą być mniej lub więcej ostre i powodować mniejsze lub większe ścieśnienie żyły. Współczynnik wydatku zmienia się więcej jeszcze przez umieszczenie w otworze rurek dodatkowych czyli *przystawek*, jak przedstawione na rys. 96. Przystawki mogą być *wewnętrzne*, wchodzące wewnątrz naczynia, jak *I, II*, i *zewnętrzne*, jak *IV* i *V* (*III* jest otwór w cienkiej ścianie) i stosownie do wielkości kąta  $\delta$  wytwarzają mniej-

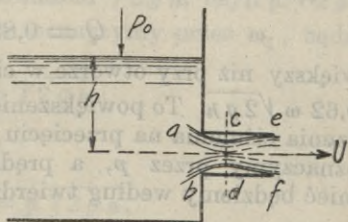
sze lub większe ścieśnienie żyły, jak to wykazują wartości współczynnika  $\mu$ , obliczone doświadczalnie przez Weisbacha dla pięciu typów otworu, przedstawionych na rysunku. Przystawka V ma brzoży zaokrąglone tak, że jej profil zbliża się do profilu żyły wodnej, wychodzącej z otworu w cienkiej ścianie.



Rys. 96.

Przez dobór odpowiedniego zaokrąglenia doprowadzić można współczynnik  $\mu$  do wartości 0,98, pamiętać należy wszakże, że  $\mu = m \varphi$  i jeżeli współczynnik ścieśnienia  $m$  przedstawia zmniejszenie wydatku otworu, to współczynnik prędkości  $\varphi$  określa stratę naporu, wynoszącą według równania (234)  $\frac{V^2}{2g} (1 - \varphi^2)$ .

Strata naporu staje się większą jeszcze w przystawkach zewnętrznych cylindrycznych (rys. 97), gdy żyła wodna wychodząca z otworu  $ab$ , uległszy ścieśnieniu na przecięciu  $cd$ , zaraz potem się rozszerza, wypełniając całą przystawkę, której przekrój poprzeczny  $\omega$  jest równy powierzchni otworu. Wszelka bowiem nagle zmiana przekroju prądu ciekłego wywołuje wzburzenie i stratę energii, objawiającą się przez obniżenie płaszczyzny naporu, jak to wykazuje wzór (70). Gdy prędkości strug nie są jednakie na przecięciu poprzecznym prądu, rzeczywista strata naporu jest jeszcze większa (§ 18), a nadto uwzględnioną być winna strata naporu wynikająca z tarcia cząstek o ściany przewodu, w którym prąd płynie. W tych warunkach całkowita strata naporu, wynikająca z nagłego powiększenia przekroju prądu między przecięciem  $cd$  i otworem  $ef$ , przedstawioną być może według doświadczeń Bordy wzorem:



Rys. 97.

$$h_s = \frac{(U_0 - U)^2}{2g} + \frac{1}{9} \frac{U^2}{2g} \dots (239)$$

w którym prędkość średnia  $U$  zastępuje prędkość pojedynczej strugi  $V$ , jaką mieliśmy we wzorze (70). Że zaś przy prądzie ustalonym:  $\omega_0 U_0 = \omega U$ , a powierzchnia przecięcia ścięsnionego  $cd$  jest  $\omega_0 = m\omega$ , więc:

$$h_s = \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] = \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] \dots (240)$$

a kładąc (§ 47)  $m = 0,62$ :

$$h_s = 0,49 \frac{U^2}{2g} \dots \dots \dots (241)$$

Stosując twierdzenie Bernoulli'ego, przy uwzględnieniu tej straty naporu, między poziomem cieczy w zbiorniku a otworem  $ef$ , mamy:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \frac{1}{2} \frac{U^2}{2g},$$

skąd, ponieważ  $z_0 - z = h$ :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{2}{3} h,$$

wreszcie:

$$U = 0,82 \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (242)$$

a wydatek przystawki:

$$Q = 0,82 \omega \sqrt{2gh}, \dots \dots \dots (243)$$

wiekszy niż przy otworze w cienkiej ścianie, gdzie był równy  $0,62 \omega \sqrt{2gh}$ . To powiększenie wydatku jest wynikiem zmniejszenia ciśnienia na przecięciu  $cd$ . Jeżeli bowiem ciśnienie to oznaczymy przez  $p$ , a prędkość na przecięciu  $cd$  przez  $U$ , mieć będziemy według twierdzenia Bernoulli'ego:

$$\frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}, \dots \dots \dots (244)$$

a że:  $U_1 m \omega = U \omega$ , skąd:

$$U_1 = \frac{U}{m} = \frac{0,82}{0,62} \sqrt{2gh},$$

więc:

$$\frac{p_0 - p_1}{\gamma} = h \left[ \left( \frac{0,82}{0,62} \right)^2 - 1 \right] = \frac{3}{4} h. \dots (245)$$

Zmniejszenie ciśnienia na przecięciu ścięsnionem żyły w przystawce cylindrycznej wykazał słynnym doświadczeniem Venturi (rys. 98). Napór całkowity  $h$  uważać można jako

złożony z dwóch części: jednej równej:

$$(0,82)^2 h = 0,6724 h \text{ czyli prawie } \frac{2}{3} h = \frac{U^2}{2g},$$

odpowiadającej prędkości  $U$  z jaką woda wychodzi z przystawki i drugiej prawie równej  $\frac{1}{3} h$ , przed-

stawiającej stratę naporu w przystawce. Wynika stąd, że podczas przejścia wody przez przystawkę, płaszczyzna naporu obniża się o  $\frac{1}{3} h$ , czyli o:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{U^2}{2g}.$$

Wzór (241) pozwala obliczyć stratę naporu, przy wejściu wody ze zbiornika do rury, wzmiankowaną w § 29, gdyż wejście to odbywa się zupełnie w ten sam sposób jak do przystawki walcowej (rys. 98).

W przystawkach ostrokągowych zbieżnych, gdy kąt u wierzchołka ostrokągu nie odpowiada profilowi żyły ściśnionej, ma także miejsce strata naporu. Prędkość przy wyjściu z przystawki jest tylko ułamkiem  $\sqrt{2gh}$ , czyli  $\mu \sqrt{2gh}$ .

Jeżeli powierzchnię wylotu oznaczymy przez  $\omega_1$ , będzie wydatek:

$$Q = \mu \omega_1 \sqrt{2gh},$$

prędkość średnia przy wyjściu:

$$U = \frac{Q}{\omega_1} = \mu \sqrt{2gh},$$

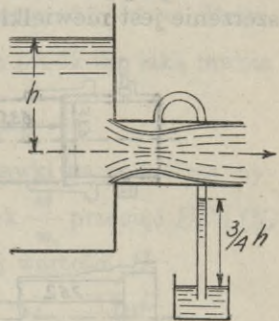
napór:

$$\frac{U^2}{2g} = \mu^2 h,$$

a strata naporu w przystawce:

$$h - \mu^2 h = (1 - \mu^2) \frac{U^2}{\mu^2 2g} \dots \dots (246)$$

Doświadczenia wykazały, że maximum wydatku ma miejsce, gdy kąt przy wierzchołku ostrokągu wynosi około  $12^\circ$  i wtedy  $\mu = 0,95$ . Rury wylotowe używane przy węzłach si-

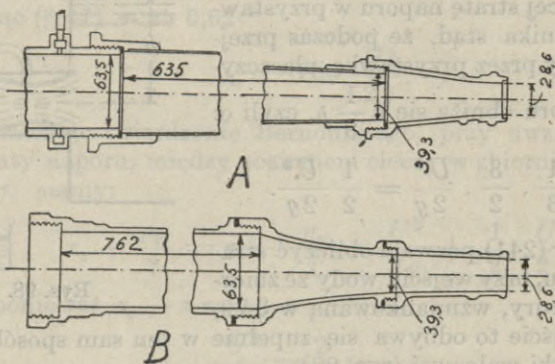


Rys. 98.

kawek zaopatrywane są w przystawki składane, jak na rys. 99. Badając doświadczalnie te przystawki, znalazł Freeman:

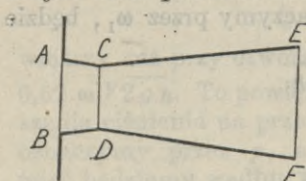
$$\left. \begin{array}{l} \text{dla wylotu } A \quad \mu = 0,976 \\ \text{„ „ } B \quad \mu = 0,971 \end{array} \right\} \dots (247)$$

W przystawkach ostrokągowych rozbieżnych, gdy rozszerzenie jest niewielkie, tak że żyła wciąż dotyka ścian we-



Rys. 99.

wewnętrznych przystawki, strata naporu bywa nieznaczną. Prędkość przy wyjściu jest więc teoretycznie równa  $\sqrt{2gh}$ , przy jakiegokolwiek powierzchni otworu  $EF$  (rys. 100). Wynikałby



Rys. 100.

stąd paradoks, że można nieograniczenie powiększać wydatek, przedłużając przystawkę. W rzeczywistości mają tu miejsce straty naporu, trudne do obliczenia, ale wykazywane doświadczeniami. Nadto, gdy prędkość  $U = \sqrt{2gh}$  w otworze  $EF$  o powierzchni  $\omega$ ,

to na przecięciu  $CD$  o powierzchni  $\omega_1$  prędkość  $U_1 = \frac{U\omega}{\omega_1}$

jest tem większa, im stosunek  $\frac{\omega}{\omega_1}$  jest większy, a ta prędkość  $U_1$  według twierdzenia Bernoulli ego (244):

$$U_1^2 = 2g \left( h + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} \right).$$

Ciśnienie  $p_1$  nie może być zmniejszanem nieograniczenie, nie tylko bowiem nie może być odjemnem ani dochodzić do zera, ale nawet nie może schodzić poniżej pewnego ułamka



(np. połowy lub trzeciej części) ciśnienia atmosferycznego  $p_0$ . Poza tą granicą wydziela się powietrze rozpuszczone w wodzie i następuje wypływ burzliwy. Gdy woda wychodzi z przystawki na powietrze, to ponieważ  $\frac{p_0}{\gamma}$  wynosi około 10 m, wy-

raz  $\frac{p_0 - p_1}{\gamma}$  nie może praktycznie przekraczać 5—7 m. Przyjmując, że  $p_1$  schodzi do zera, największa prędkość, jaką można osiągnąć, nie może być większą od:

$$U_1 = \sqrt{2g(h + 10^m)}.$$

Gdy więc woda wychodzi z przystawki na powietrze, byłoby bezużytecznem powiększać stosunek  $\frac{\omega}{\omega_1}$  przecięć  $EF$  i  $CD$  ponad granicę odpowiadającą powyższej wartości  $U_1$ :

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{U_1}{U} = \frac{\sqrt{2g(h + 10^m)}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{1 + \frac{10^m}{h}}.$$

Większa wartość tego stosunku nie dawałaby już regularnego wypływu i istotnego powiększenia wydatku. Wydatek więc przystawki ostrokątowej rozbieżnej, przystosowanej do przecięcia ścięzionego  $\omega_1$ , przy naporze  $h$ , nie może być większy od:

$$\omega_1 U_1 = \omega_1 \sqrt{2g(h + 10^m)},$$

a dla pewności lepiej będzie brać pod pierwiastkiem  $h + 7^m$  zamiast  $h + 10^m$ . Aby otrzymać powiększenie wydatku przy użyciu takiej przystawki, trzeba aby przystawka miała ściany szczelne, nie przepuszczające powietrza i aby ciśnienie atmosferyczne nie dochodziło do wnętrza przystawki. W razie przeciwnym nie otrzymuje się żadnego powiększenia wydatku, jak to wykazał Venturi, wierząc w ścianach przystawki małe otwory.

Przystawki ostrokątowe rozbieżne stosowane są na wielką skalę przy otworach szluzowych zbiorników pływających, gdzie chodzi o osiągnięcie maximum wydatku tych otworów. Gromadzona w tych zbiornikach woda, podczas największych przypływów, wypuszczana jest dla pogłębiania i czyszczenia kanałów wejściowych w portach, podczas odpływów morza.

**49. Wytryski.** Żyła wodna, wytryskająca swobodnie, z powodu oporu powietrza i działania siły ciężkości, zmienia kształt przekroju i stopniowo traci swą spójność. Od jej trzonu oddzielają się pojedyncze krople, a w końcu żyła zamienia się na deszcz. Gdy napór jest znaczny a ściężnienie małe, żyła trzyma się dłużej w spójności.

Jeżeli przez mały otwór w ścianie pionowej zbiornika wytryska żyła z prędkością  $U$ , to jej struga środkowa zakreśla parabolę, której spórzędne odniesione do osi prostokątnych, mających początek w otworze (rys. 104, str. 166), będą, oznaczając czas przez  $t$ :

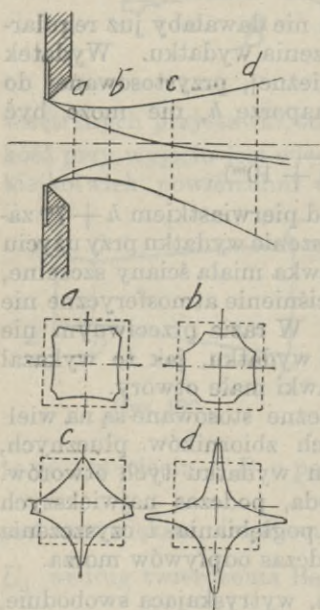
$$x = Ut, \quad y = \frac{gt^2}{2} \quad \dots \quad (248)$$

Rugując  $t$  i kładąc  $g = 9,81 \text{ m}$ , otrzymujemy:

$$U = 2,2146 \frac{x}{\sqrt{4}} \quad \dots \quad (249)$$

prędkość wypływu w funkcji spórzędnych któregośkolwiek punktu strugi. Wzór ten, w razie możności dokładnego obliczenia spórzędnych  $A_1A$  i  $AB$  (rys. 104, str. 166) służy do obliczenia wydatku otworu.

Przekrój żyły, wychodzącej z otworu kwadratowego w ścianie pionowej zbiornika, zmienia swój kształt, jak na rys. 101,



Rys. 101.

stając się najprzód ośmiokątnym, a następnie gwiaździstym. Przyczyną tak zwanego *wywrotu żyły* jest ściąganie się powierzchni zewnętrznej, stępujące najprzód kąty kwadratu a następnie wywołujące zakłębnięcia nowo powstałych boków. Zjawiskiem tem, nie mającym praktycznego znaczenia, zajmowali się gorliwie dawni hydraulicy.

Gdy żyła wychodzi przez otwór okrągły na dnie zbiornika (rys. 102), wtedy na pewnej głębokości  $z_1$  pod poziomem  $AB$ , ma pewien przekrój  $r_1^2 \pi$ , na większej  $z_2$ , w skutku zwiększonej prędkości przekrój mniejszy  $r_2^2 \pi$ . Prawo ciągłości wymaga, aby było:

$$r_1^2 \pi U_1 = r_2^2 \pi U_2.$$

Wstawiając:

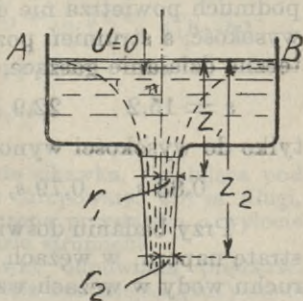
$$U_1 = \sqrt{2gz_1}, \quad U_2 = \sqrt{2gz_2},$$

otrzymujemy związek między  $r$  i  $z$ :

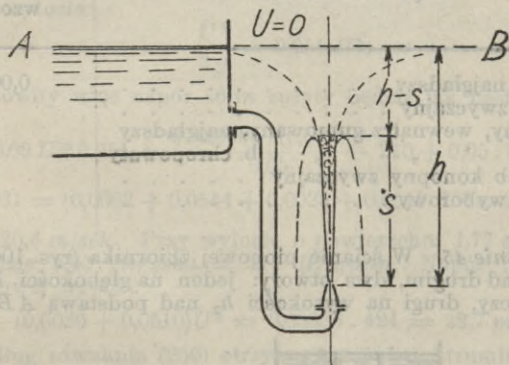
$$r_2^4 z_2 = r_1^4 z_1, \quad \text{albo} \quad r_2 = r_1 \sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}}.$$

Dla  $z = 0$ ,  $r = \infty$ , co zgadza się z przypuszczeniem, że na poziomie  $AB$ ,  $U = 0$  i powierzchnia przekroju żyły jest nieskończona.

Podobny kształt winienby mieć wytrysk skierowany pionowo w górę, gdyby nie było strat naporu i gdyby cząstki cieczy, dochodzące do szczytu wytrysku, pod działaniem siły ciężkości, nie wstrzymywały ruchu cząstek następujących, skutkiem czego wytrysk przybiera kształt jak na rys. 103. Na różnicę wysokości  $h - s$ , z których pierwsza jest wzniesieniem płaszczyzny naporu a druga rzeczywistą wysokością wytrysku, obok straty naporu w rurze doprowadzającej i oporu powietrza, wpływa



Rys. 102.



Rys. 103.

głównie wzmiankowane opadanie cząstek cieczy u szczytu, tak że wytrysk lekko nachylony, wznosi się wyżej od wytrysku pionowego. Bossut, Weisbach, Lueger, podali wzory wyciągnięte z doświadczeń nad wytryskami pionowymi <sup>1)</sup>, a Freeman dla wylotów gładkich (rys. 99), zwracając uwagę na stan powietrza podczas doświadczeń, otrzymał wzór:

$$s = h - 0,000113 \frac{h^2}{D}, \dots \dots (250)$$

<sup>1)</sup> Teorię wytrysków i wzory praktyczne podał inż. H. Czopowski w pracy p. t. „Z teorii wodotrysków” w *Przeglądzie Technicznym* z r. 1902.

w którym  $D$  oznacza średnicę wylotu. Najmniejszy jednak podmuch powietrza nie pozwala wytryskowi wznosić się na tę wysokość, a strumień pozostaje pełnym i wywierającym skuteczne działanie gaszące, przy wartościach:

$$s = 15,2 \quad 22,9 \quad 30,5 \quad 38,1 \quad 45,7 \text{ metrów,}$$

tylko do wysokości wynoszącej:

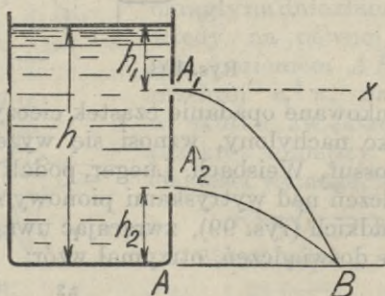
$$0,88 \text{ s, } 0,79 \text{ s, } 0,73 \text{ s, } 0,67 \text{ s, } 0,63 \text{ s.}$$

Przy badaniu doświadczalnym sikawek oznaczał Freeman stratę naporu, w węzłach z różnych materyałów. Stosując do ruchu wody w węzłach wzór (94), otrzymał wartości współczynnika  $b$ , podane w następującej tablicy:

T A B L I C A 10.

Waż sikawki	Spółczynnik $b$ wzoru (94)
Gumowy najgładszy . . . . .	0,000215
"      "      zwyczajny . . . . .	225
Bawełniany, wewnątrz gumowany, najgładszy	221
"      "      "      "      b. chropowaty	408
Lniany lub konopny zwyczajny . . . . .	533
Skórzany wyborowy . . . . .	343

*Zadanie 45.* W ścianie pionowej zbiornika (rys. 104) zrobione są, jeden nad drugim, dwa otwory: jeden na głębokości  $h_1$  pod poziomem cieczy, drugi na wysokości  $h_2$  nad podstawą  $AB$ . Jaki ma



Rys. 104.

być stosunek tych wysokości, aby żyły wodne, wychodzące z otworów, schodziły się na podstawie w  $B$ .

Według wzorów (248), mamy dla górnego otworu:

$$x = Ut = t \sqrt{2gh_1}, \quad y = h - h_1 = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{x^2}{4h_1},$$

a dla dolnego:

$$x = Ut = t \sqrt{2g(h-h_2)}, \quad y = h_2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{x^2}{4(h-h_2)}.$$

Rugując  $\frac{x^2}{4}$  z obu równań, otrzymujemy:

$$(h-h_1)h_1 = (h-h_2)h_2$$

czyli  $h_1 = h_2$ .

**Zadanie 46.** Ile wody dawać będzie sikawka, działająca pod ciśnieniem 4,6 at., której wąż, wewnątrz chropowaty, 210 m długi, 5 cm średnicy, ma rurę wylotową zakończoną przystawką o wylocie 1,5 cm średnicy i jak wysoko sięgać będzie strumień?

Prędkość  $U$  w wylocie przystawki odpowiada prędkości  $0,09 U$  w węź. Przy wejściu wody do węża ma miejsce (241) strata naporu  $0,49 \frac{U^2}{2g}$ . Tarcie o ściany węża daje stratę naporu (94) przy spółczynniku (według tabl. 10)  $b = 0,0004$ . W przystawce, według wzoru (246), biorąc  $\mu = 0,975$ , strata naporu wynosi:

$$\frac{1-0,95}{0,95} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

a napór w wylocie:

$$\frac{U^2}{2g} = 0,051 U^2.$$

Całkowity więc napór 46 m zużyty będzie jak następuje:

$$46 = 0,49 (0,09 U)^2 0,051 + \frac{4 \cdot 0,0004 \cdot (0,09 U)^2}{0,05} 210 + 0,05 \cdot U^2 \cdot 0,051 + \\ + U^2 0,051 = (0,0002 + 0,0544 + 0,0026 + 0,0510) U^2 = 0,1082 U^2.$$

skąd  $U = 20,6$  m/sek. Przy wylocie o powierzchni  $1,77$  cm<sup>2</sup> sikawka dawać będzie 3,65 litr./sek. = 219 litr./min. Napór na początku rury wylotowej wynosi:

$$(0,0026 + 0,0510)U^2 = 0,05636 \cdot 424 = 22,7 \text{ m.}$$

Według równania (250) otrzymaćby można strumień pionowy, którego najwyższe krople osiągną wysokości:

$$22,7 - 0,000113 \frac{515}{0,015} = 22,7 - 3,9 = 18,8 \text{ m,}$$

a pełny strumień sięgać będzie do wysokości  $0,79 \cdot 18,8 = 15$  m.

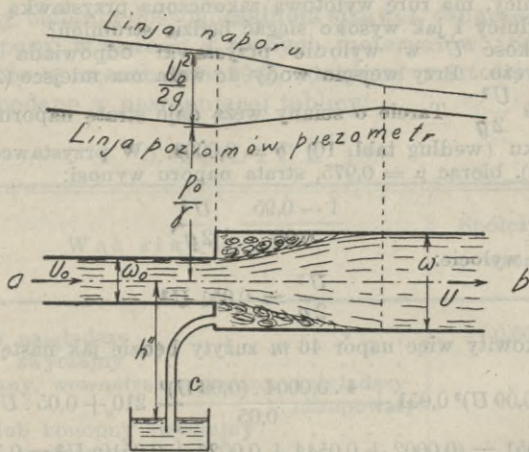
**50. Nagła zmiana średnicy rury.** Przy nagłym powiększeniu średnicy rury zachodzić mogą dwa przypadki. Gdy rura szersza jest krótka a prędkość  $U_0$  w rurze węższej stosunkowo znaczna, wtedy żyła wodna przechodzi przez rurę szerszą, nie dotykając jej ścian i wypływ nie powoduje żadnej miejscowej straty naporu. W drugim przypadku, gdy rura szersza dla prędkości  $U_0$  jest dostatecznie długa (rys. 105), wtedy woda napływająca nappełnia ją całkowicie i następuje częściowa przemiana energii kinetycznej w potencjalną (§ 12)

oraz strata naporu, według wzoru (70):

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{U_0^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + \frac{(U_0 - U)^2}{2g},$$

po położeniu  $U_0 = \frac{\omega}{\omega_0} U = nU$ , wynosząca:

$$\frac{(U_0 - U)^2}{2g} = (n - 1)^2 \frac{U^2}{2g} = \zeta \frac{U^2}{2g} \quad (251)$$



Rys. 105.

Stosunkowi przekrojów  $n$  odpowiadają współczynniki oporu  $\zeta$ :

$n =$	1,3	1,5	2,0	3	4	5	10	50,
$\zeta =$	0,09	0,25	1,0	4	9	16	81	2401.

Wysokość ciśnienia, która przed nagłą zmianą średnicy wynosiła  $\frac{p_0}{\gamma}$ , staje się równą  $\frac{p}{\gamma}$ , a różnica:

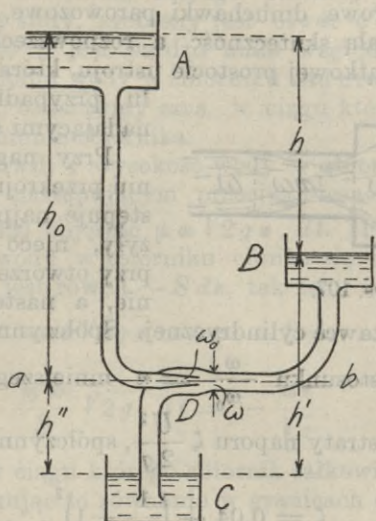
$$\frac{p - p_0}{\gamma} = 2(n - 1) \frac{U^2}{2g} \quad (252)$$

wytwarza działanie ssące w rurze  $c$ . Jeżeli ta rura połączona zostanie ze zbiornikiem dolnym, którego poziom leży pod osią  $ab$ , na głębokości:

$$h'' < \frac{p - p_0}{\gamma},$$

to woda ze zbiornika dolnego wciągana będzie do rury szerszej, a mieszanina obu wód wychodzi z rury szerszej z prędkością  $U$ .

Na tej zasadzie <sup>1)</sup> budowane są tak zwane *pompy prądowe* czyli *smoczki wodne*, przepompowujące wodę ze zbiornika dolnego *C* do zbiornika *B* pod działaniem prądu, wychodzącego ze zbiornika górnego *A* (rys. 106) z prędkością  $U_0$ , zmie-



Rys. 106.

niającego nagle swój przekrój  $\omega_0$  na  $\omega$  w  $D$ . Teoretycznie, pomijając tarcia w miejscu rozszerzenia prądu, skuteczność tego działania jest równa stosunkowi różnicy ciśnień  $\frac{p-p_0}{\gamma}$  do różnicy wysokości odpowiadających prędkościom:

$$h = \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} = (n^2 - 1) \frac{U^2}{2g}$$

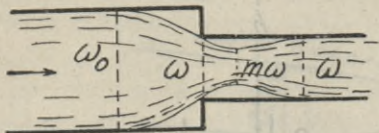
czyli równa:

$$\frac{p-p_0}{\gamma h} = \frac{2(n-1)}{n^2-1} = \frac{2}{n+1}$$

Jeżeli przez  $Q_0$  oznaczymy wydatek rury doprowadzającej wodę ze zbiornika  $A$ , to  $\gamma Q_0 h$  przedstawiać będzie całkowitą energię zużywaną na podnoszenie ilości wody  $Q'$  na se-

<sup>1)</sup> Działanie ssące, wykazane doświadczeniem Venturi'ego (rys. 98), służyło za podstawę przy projektowaniu w początku XIX w. różnych przyrządów do osuszania bagien we Włoszech. Należała do nich „trąba hydrauliczna“, opisana w artykule: „Pomysły techniczne generała Sokolnickiego“ (*Przegląd Techniczny* r. 1905).

kundę, na wysokość  $h'$ . Skuteczność więc pompy prądowej wyrazi się stosunkiem  $\frac{Q'h}{Q_0h}$ , który w praktyce wynosi zaledwie 0,1 do 0,3. I inne przyrządy, oparte na tej samej zasadzie, jak smoczki parowe, dmuchawki parowozowe, miechy wodne, mają równie małą skuteczność, a rozpowszechnienie swe zawdzięczają wyjątkowej prostocie ustroju, która je czyni w wie-



Rys. 107.

lu przypadkach jedynymi, nadającymi się do użycia.

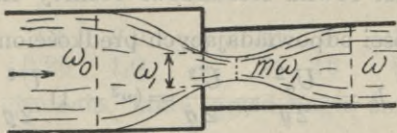
Przy nagłym zmniejszeniu przekroju (rys. 107), następuje najprzód ścieśnienie żyły, nieco odmienne niż przy otworze w cienkiej ścianie, a następnie rozszerzenie, jak w przystawce cylindrycznej. Spółczynnik ścieśnienia  $m$

zależy tu od stosunku  $\frac{\omega}{\omega_0} = n$  mniejszego od jedności a w wyrażeniu straty naporu  $\zeta \frac{U^2}{2g}$ , współczynnik oporu według

Weisbacha:

$$\zeta = 0,04 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (253)$$

i dla $n =$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$m =$	0,60	0,61	0,62	0,65	0,70	0,77
$\zeta =$	0,50	0,46	0,42	0,33	0,23	0,13.



Rys. 108.

Jeżeli woda z rury szerszej  $\omega_0$  wchodzi do rury węższej  $\omega$ , przez otwór w cienkiej ścianie  $\omega_1$  (rys. 108), wtedy:

$$\zeta = 0,04 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{m\omega_1} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (254)$$

i gdy  $\omega_1 < 0,1 \omega_0$ , to przyjmować można  $m = 0,63$ , gdy zaś  $\omega_1 \geq 0,1 \omega_0$ , to:

dla $\frac{\omega_1}{\omega_0} =$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$m =$	0,63	0,64	0,67	0,72	0,85.



Jeżeli  $\omega_0 = \omega$ , pozostaje tylko otwór w cienkiej ścianie przegradzającej rurę, której średnica nie ulega zmianie.

**51. Wyływ przez otwór, pod zmiennym naporem.** Na dnie zbiornika, którego przekrój poziomy o powierzchni  $S$  jest stały, zrobiony jest otwór o powierzchni  $\omega$ . Przyjmujemy, że  $\omega$  jest bardzo małe względem  $S$  i znając wysokość  $h$  poziomu wody w zbiorniku nad otworem, w chwili otwarcia otworu, oznaczymy czas, w ciągu którego następuje całkowite opróżnienie zbiornika.

Jeżeli w chwili  $t$  wysokość wody w zbiorniku jest  $z$ , to w bezpośrednio następującym przedziale czasu  $dt$  wypływa przez otwór (235) objętość  $\mu \omega \sqrt{2gz} \cdot dt$ . Ponieważ jednocześnie poziom wody w zbiorniku obniża się o wysokość  $dz$ , więc objętość ta jest równa  $-S dz$ , tak że:

$$m \omega \sqrt{2gz} \cdot dt = -S dz \quad \dots \quad (255)$$

albo:

$$\frac{m \omega}{S} \sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Czas  $T$ , w ciągu którego zbiornik całkowicie się opróżni, otrzymamy, całkując to równanie w granicach od  $h$  do 0:

$$\frac{m \omega}{S} \sqrt{2g} T = -\int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{h},$$

skąd:

$$T = \frac{2S\sqrt{h}}{m\omega\sqrt{2g}} \quad \dots \quad (256)$$

Czas  $t$ , w ciągu którego poziom wody w zbiorniku zejdzie do wysokości  $z$ , będzie:

$$\begin{aligned} \frac{m \omega}{S} \sqrt{2g} t &= -\int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(\sqrt{h} - \sqrt{z}), \\ t &= \frac{2S}{m\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}). \quad \dots \quad (257) \end{aligned}$$

Gdy powierzchnia  $S$  przekroju poziomego zbiornika nie jest stałą, ale zmienia się razem z obniżaniem poziomu, to jest razem z  $z$ , wtedy równanie (255) ma kształt:

$$m \omega \sqrt{2gz} dt = -f(z) dz$$

i czas  $T$ , w ciągu którego zbiornik całkowicie się opróżni,

otrzymać można z wzoru:

$$T = \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{f(z) dz}{\sqrt{z}} \quad (258)$$

Gdy wartości  $S$ , odpowiadające różnym  $z$ , różnią się między sobą nieznacznie, zastąpić można całkę we wzorze (258) średnią wartością powierzchni  $S$ .<sup>1)</sup>

**Zadanie 47.** Pod jakim stałym naporem średnim wypływała by ze zbiornika taż sama objętość wody, jaka wypływa w ciągu czasu  $t$  według wzoru (257), gdy poziom wody w zbiorniku schodzi z wysokości  $h$  do wysokości  $z$ .

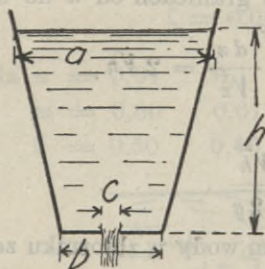
W ciągu czasu  $t$  wypływa ze zbiornika objętość  $S(h-z)$ . Pod naporem stałym  $\bar{h}_s$ , wypłynęłaby równocześnie, przez otwór  $\omega$ , objętość  $\mu \omega \sqrt{2g \bar{h}_s} \cdot t$ . Z równania:

$$\mu \omega \sqrt{2g \bar{h}_s} \cdot t = S(h-z),$$

po wstawieniu za  $t$  wartości  $z$  z wzoru (257) otrzymamy:

$$\bar{h}_s = \left[ \frac{\sqrt{h} + \sqrt{z}}{2} \right]^2.$$

**Zadanie 48.** W ciągu jakiego czasu opróżni się naczynie, mające kształt odwróconego kłosa ostrosłupowego (rys. 109), wysokości



Rys. 109.



Rys. 110.

$h = 20$  cm do poziomu wody, z przekrojami kwadratowymi o bokach  $a = 20$  cm,  $b = 10$  cm. Otwór w dnie jest kwadratowy o boku  $c = 1$  cm. Spółczynnik  $\mu = 62$ .

We wzorze (258) będzie  $f(z) = \left[ \frac{a-b}{h} z + b \right]^2$ , skąd:

$$T = \frac{2}{15} \frac{\sqrt{h}}{\mu c^2 \sqrt{2g}} (3a^2 + 4ab + 8b^2) = 60,8 \text{ sek.}$$

<sup>1)</sup> Szersze a oryginalne rozwinięcie tego przedmiotu znaleźć można w pracy prof. H. Jewniewicza: „O wpływie cieczy przy zmiennym poziomie“ (*Przeł. Techn.* 1890); por. także art. inż. Fr. Lewandowskiego „Oznaczanie naturalnych stanów wody w sztucznych jej zbiornikach“ (*Przeł. Techn.* 1905).

**Zadanie 49.** W ciągu jakiego czasu opróżni się zbiornik, mający kształt paraboloidy obrotowej (rys. 110), jeżeli powierzchnia poziomu cieczy jest  $S_0$ , otwór u spodu  $\omega$  stosunkowo mały i  $h$  wzniesienie poziomu cieczy nad otworem?

We wzorze (258),  $f(z) = S_0 \frac{z}{h}$ , skąd:

$$T = \frac{2}{3} \frac{S_0 \sqrt{h}}{\mu \omega \sqrt{2g}}$$

**Zadanie 50.** Jak oznaczyć czas opróżnienia zbiornika naturalnego, utworzonego przez zamknięcie doliny groblą?

W braku wyrażenia analitycznego zmiennej powierzchni  $S$  w funkcji obniżenia poziomu  $z$ , dzieli się całą masę wody w zbiorniku na warstwy poziome. Objętości poszczególnych warstw, których średnie wzniesienia nad otworem:

$$h_1, h_2, \dots, h_n,$$

są znane, oblicza się przez zdjęcie na gruncie powierzchni odpowiadających poziomów:

$$S_1, S_2, \dots, S_n.$$

Przyjmując, że poszczególne warstwy, których objętości:

$$V_1, V_2, \dots, V_n$$

zostały obliczone, wypływają przez otwór  $\omega$ , każda pod stałym naporem równym jej średniemu wzniesieniu nad otworem, w ciągu odstępów czasu:

$$t_1, t_2, \dots, t_n,$$

będą objętości:

$$V_1 = \mu \omega t_1 \sqrt{2g h_1}, \quad V_2 = \mu \omega t_2 \sqrt{2g h_2}, \quad \dots, \quad V_n = \mu \omega t_n \sqrt{2g h_n},$$

stąd wyciągając wartości poszczególnych czasów i sumując, otrzymujemy czas całkowity:

$$T = \sum_1^n (t) = \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \sum_1^n \left( \frac{V}{\sqrt{h}} \right).$$

Ścisłej obliczyć można czas  $T$ , stosując zamiast prostego sumowania metodę Simpsona; wtedy wszakże warstwy muszą być jednakiej wysokości i w liczbie całkowitej. Po zdjęciu odpowiadających im powierzchni  $S$ , mamy z jednej strony całkowitą objętość równą iloczynowi ze średniego wydatku  $Q_m$  przez czas  $T$ , a z drugiej według wzoru Simpsona:

$$Q_m T = \frac{h_1 - h_n}{3n} (S_1 + 4S_2 + 2S_3 + 4S_4 + \dots + S_n)$$

i tak samo czas:

$$T = \frac{h_1 - h_n}{3n \mu \omega \sqrt{2g}} \left( \frac{S_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{4S_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{2S_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{4S_4}{\sqrt{h_4}} + \dots + \frac{S_n}{\sqrt{h_n}} \right).$$

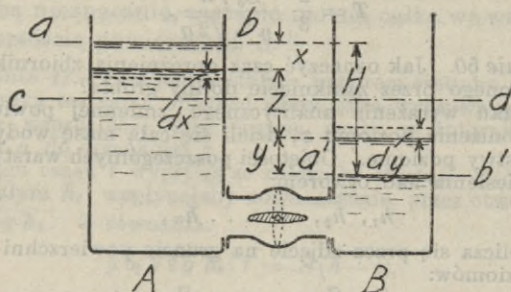
**Zadanie 51.** Jak oznaczyć czas wyrównania poziomów, w zbiornikach połączonych?

Zbiorniki  $A$  i  $B$  (rys. 111) połączone są przewodem o otworze  $\omega$ , w którym jest kłapa  $k$ , przedstawiona w położeniu otwartem

na rysunku. Przed otwarciem klapy poziomy wody w zbiornikach były  $ab$  i  $a'b'$ , a różnica ich wzniesień  $H$ . Po upływie czasu  $t$  poziom w zbiorniku  $A$  obniży się o  $x$ , a w zbiorniku  $B$  podniesie się na  $y$ , tak że:

$$H = x + y + z.$$

Po upływie następnego nieskończenie małego czasu  $dt$ , przepływie przez otwór  $\omega$  objętość  $\mu \omega \sqrt{2gz} \cdot dt$ , przyczem w zbiorni-



Rys. 111.

ku  $A$  poziom obniży się o  $dx$ , a w zbiorniku  $B$  podniesie na  $dy$ . Będzie więc, oznaczając przez  $S_1$ ,  $S_2$  stałe przekroje poziome zbiorników  $A$  i  $B$ :

$$\mu \omega \sqrt{2gz} \cdot dt = S_1 dx = S_2 dy;$$

że zaś z równania  $H = x + y + z$  wynika:  $dz = -(dx + dy) = -(dx + \frac{S_1}{S_2} dx)$ , przeto:

$$dx = -\frac{S_2}{S_1 + S_2} dz,$$

$$\mu \omega \sqrt{2gz} \cdot dt = -\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} dz,$$

$$dt = -\frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

$$t = \frac{2}{\mu \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} (\sqrt{H} - \sqrt{z}).$$

Wyrównanie poziomów następuje, gdy  $z = 0$ , t. j. po upływie czasu:

$$t = \frac{2}{\mu \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \sqrt{H}.$$

**52. Przewał.** Otwór prostokątny większych wymiarów, którego wierzch leży nad poziomem cieczy, stanowi *przewał*. Spód otworu, zwykle poziomy, nazywamy *progiem* przewału. Gdy próg ma bardzo małą grubość, mówimy, że przewał zrobiony jest w cienkiej ścianie. Przewał taki urze-

czywistnie można, tworząc próg z blachy żelaznej lub z deski skośnie obciętej.

Przy wypływie przez przewał, poziom cieczy w górze przewału, zrazu poziomy, obniża się nad progiem; strugi dolne, dotykające progu, podnoszą się w górę i następuje ścieśnienie płachty wodnej, tak, że jej grubość poza progiem (rys. 112) jest mniejsza od wysokości  $h$  w górze przewału. Doświadczenia Bazin'a stwierdziły wyniki dawniejszych, d'Aubuisson'a i Ponceleta, wykazując, że wydatek przewału może być wyrażony wzorem, podobnym do (235):

$$Q = m l h \sqrt{2gh}, \quad (259)$$

w którym  $l$  przedstawia długość przewału, t. j. szerokość prądu.

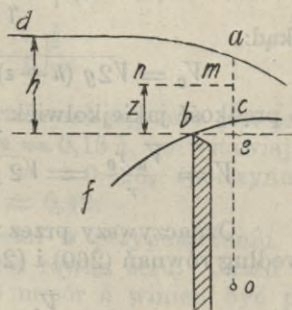
Na wartość współczynnika  $m$  wpływają różne okoliczności, a zwłaszcza prędkość, z jaką woda dochodzi do przewału. Wartość ta waha się między 0,40 a 0,44, wynosząc średnio  $m = 0,42$ .

Dla wyprowadzenia wzoru (259) Belanger i Boussinesq przyjmowali, że przy ruchu ustalonym, wypływ reguluje się w ten sposób, aby dla danego  $h$ ,  $Q$  było maximum. Wyniki logiczne tego postulatu sprawdzone zostały licznymi doświadczeniami Bazin'a.

Boussinesq przyjął, że strugi przechodzące przez przecięcie ścieśnione są normalne do tego przecięcia i mają wspólny środek krzywizny  $o$ , co odpowiada przypuszczeniu, że cała masa cieczy, przechodząc przez przecięcie  $ac$ , wykonywa ruch obrotowy około osi  $o$ , równoległej do progu przewału. Siły zewnętrzne sprowadzają się tu do siły ciężkości, przechodzącej przez oś obrotu, a we wszystkich punktach każdej strugi ciśnienie jest stałe. Odnosząc rzędne do poziomej, przechodzącej przez  $b$ , oznaczymy przez  $r_0$  promień krzywizny  $oc$  strugi spodniej, —  $\varepsilon$  podniesienie się tej strugi nad linią poziomą, —  $z$  rzędną strugi przechodzącej przez  $m$ , której promień krzywizny jest  $r = r_0 + z - \varepsilon$  a prędkość  $V$ . Przy ruchu obrotowym około osi  $o$  mamy według równania (60):  $Vr =$  ilości stałej. Jeżeli więc przez  $V_0$  i  $V_1$  oznaczymy prędkości strug: spodniej i wierzchniej, przez  $h'$  grubość  $ac$  płachty wodnej nad przewalem, to:

$$V_0 r_0 = V (r_0 - \varepsilon + z) = V_1 (r_0 + h'). \quad (260)$$

Stosując do strug  $fc$  i  $da$  twierdzenie Bernoulli'ego, od



Rys. 112.

$df$  do  $ae$ , i przyjmując, że prędkości w górze przeważu są równe zeru, mamy:

$$h + \frac{p_0}{\gamma} = \varepsilon + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g},$$

$$h + \frac{p_0}{\gamma} = \varepsilon + h' + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g},$$

skąd:

$$V_0 = \sqrt{2g(h - \varepsilon)}, \quad V_1 = \sqrt{2g(h - \varepsilon - h')},$$

a prędkość jakiegokolwiek strugi  $m$ , według równania (260):

$$V = \frac{V_0 r_0}{r} = \sqrt{2g(h - \varepsilon)} \frac{r_0}{r_0 + z - \varepsilon}. \quad (261)$$

Oznaczywszy przez  $\lambda$  stosunek prędkości  $V_1$  i  $V_0$ , mamy według równań (260) i (261):

$$\lambda = \frac{V_1}{V_0} = \frac{r_0}{r_0 + h'} \sqrt{\frac{h - \varepsilon - h'}{h - \varepsilon}},$$

skąd:

$$r_0 = \frac{\lambda h'}{1 - \lambda^2}, \quad 1 - \lambda^2 = \frac{h'}{h - \varepsilon},$$

$$r_0 = \lambda(1 + \lambda)(h - \varepsilon).$$

Wydatek przeważu, mającego długość  $l$  będzie:

$$Q = l \int_{\varepsilon}^{h'+\varepsilon} V dz = l r_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{h'+\varepsilon} \frac{dz}{r_0 + z - \varepsilon},$$

a po zcałkowaniu:

$$Q = l r_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)} \cdot \ln \left( 1 + \frac{h'}{r_0} \right),$$

albo zastępując  $r_0$  wartością w funkcji  $\lambda$ :

$$Q = l \sqrt{2g(h - \varepsilon)}^{\frac{3}{2}} (\lambda + \lambda^2) \ln \frac{1}{\lambda}.$$

Przyjmując, że wypływ reguluje się w ten sposób, aby  $Q$  było maximum, otrzymamy  $\lambda$  z równania:

$$\frac{dQ}{d\lambda} = l \sqrt{2g(h - \varepsilon)}^{\frac{3}{2}} \left[ (1 + 2\lambda) \ln \frac{1}{\lambda} - (1 + \lambda) \right] = 0,$$

dającego:

$$(1 + 2\lambda) \ln \frac{1}{\lambda} - (1 + \lambda) = 0.$$

Wartość  $\lambda$  z tego równania wynosi około 0,46854....., więc:

$$h' = 0,781 (h - \epsilon),$$

$$Q = 0,522 l \sqrt{2g} (h - \epsilon)^{\frac{3}{2}} = 0,522 l \left(1 + \frac{\epsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}} h \sqrt{2gh},$$

a kładąc:

$$m = 0,522 \left(1 + \frac{\epsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wracamy do wzoru (259). Bazin przekonał się, że  $\epsilon$  jest proporcjonalne do  $h$  i wynosi średnio  $\epsilon = 0,13 h$ , co wstawiając w wyrażenie na  $m$ , otrzymujemy  $m = 0,423$ , współczynnik zbliżony do podanego poprzednio  $m = 0,42$ .

Wzór (259) wyprowadzony został w przypuszczeniu, że prędkość prądu w górze przewału jest równa zero. Jeżeli ta prędkość ma wartość skończoną, to napór  $h$  winien być powiększony o pewną wysokość  $h''$ , będącą funkcją pominiętej prędkości  $U$ . Doświadczenia wykazały, że  $h'' = \alpha \frac{U^2}{2g}$  i że współczynnik  $\alpha$  jest bardzo bliski 1,56. Wtedy wydatek:

$$Q = \mu l \left(h + \alpha \frac{U^2}{2g}\right) \sqrt{2g \left(h + \alpha \frac{U^2}{2g}\right)},$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem wydatku, zmieniającym się bardzo mało razem z  $h$ . Wypisując ten wzór w kształcie:

$$Q = \mu l \sqrt{2gh} \left(1 + \alpha \frac{U^2}{2gh}\right)^{\frac{3}{2}},$$

rozwijając w szereg dwumian po stronie drugiej równania i zatrzymując, w obec małego  $\frac{\alpha U^2}{2gh}$ , tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, otrzymamy wzór:

$$Q = \mu l \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gh}\right),$$

który, jeżeli położymy:

$$m = \mu \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gh}\right),$$

sprowadza się do wzoru (259). Prędkość średnia  $U$ , pomnożona przez przekrój kanału w górze przewału, daje wydatek  $Q$ .

Oznaczając przez  $p$  wysokość zagrody, stanowiącej przewal o długości  $l$ , mamy:

$$Q = (p + h) l U,$$

skąd:

$$U = \frac{Q}{l(p + h)},$$

a następnie uwzględniając równanie (259):

$$\frac{U^2}{2gh} = \frac{Q^2}{2ghl^2(p+h)^2} = m^2 \left( \frac{h}{p+h} \right)^2.$$

Kładąc  $\frac{3}{2} \alpha m^2 = k$ , będzie:

$$m = \mu \left[ 1 + k \left( \frac{h}{p+h} \right)^2 \right],$$

zależne od  $h$ ,  $p$ ,  $\mu$  i nowego współczynnika  $k$ , według Bazin'a blizkiego 0,55. Wydatek przewалу daje wzór (259), pod warunkiem oznaczenia w każdym przypadku współczynnika  $m$  według powyższego wzoru i po położeniu  $k = 0,55$  a także według Bazin'a:

$$\mu = 0,405 + \frac{0,003}{h}.$$

Obliczenia ułatwia następująca tablica w metrach:

T A B L I C A 11.

Wysokość $h$	Wartość współczynnika $m$ dla wysokości zagrody					
	$p=0,30$	0,60	1,00	1,50	2,00	b. wielkie
0,10	0,447	0,437	0,434	0,433	0,433	0,432
0,20	0,459	0,436	0,428	0,425	0,423	0,421
0,30	0,475	0,443	0,430	0,424	0,421	0,417
0,40	0,489	0,451	0,433	0,424	0,421	0,414
0,50	0,500	0,459	0,427	0,426	0,421	0,411
0,60	0,510	0,466	0,441	0,427	0,421	0,409

Jeżeli zagroda nie jest pionową, lecz nachyloną, ku górze lub ku dołowi prądu (stawidła młynów, zastawy ruchome), współczynnik  $m$ , przy nachyleniu zagrody:

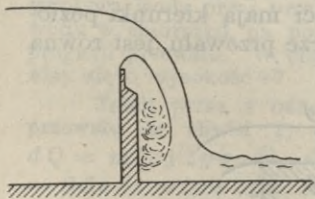


	ku górze prądu,			ku dołowi prądu,				
wynoszącem:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
należy pomnożyć przez:	0,93	0,94	0,96	1,04	1,07	1,10	1,12	1,09

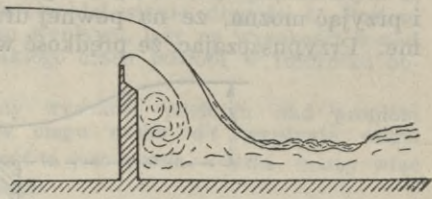
Jeżeli zaś zagroda w planie ustawioną jest nie prostopadle, lecz ukośnie do osi kanału, to współczynnik  $m$  należy pomnożyć przez 0,942 lub 0,911, stosownie do tego, czy zagroda czyni z osią kanału kąt  $45^\circ$  czy  $65^\circ$ .

W powyższem przyjmowano, że płachta wodna, spadając swobodnie poza progiem przewалу, otoczona jest ze wszystkich stron powietrzem (rys. 113). Jeżeli ściany boczne kanału przy przewale nie dopuszczają swobodnego dopływu powietrza pod płachtę, warunki wypływu ulegają zmianie. Bazin obserwował podobne płachty tworzące się w warunkach następujących:

1)  $h < 0,4 p$ , płachta niestała, zbliżająca się do zagrody (rys. 114),



Rys. 114.



Rys. 115.

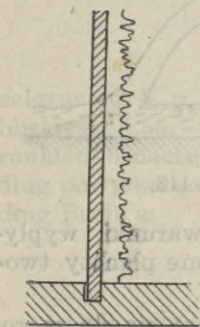
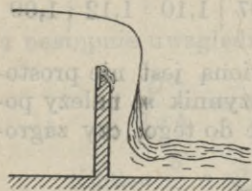
2)  $h \approx 0,4 p$ , płachta zatopiona od spodu (rys. 116),



Rys. 116.

3) różnica wzniesień poziomu wody przed i poza przełazem  $\cong \frac{3}{4} p$ , płachta zatopiona całkowicie od spodu a częściowo od wierzchu (rys. 116),

4)  $h = 0,31 p$ , płachta przylegająca do zagrody (rys. 117, przekrój i plan).



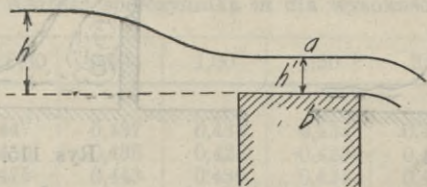
Rys. 117.

Wydatek przełazu był większy niż przy płachcie swobodnej i współczynnik w pierwszym przypadku wahał się między  $m$  a  $0,8 m$ , w drugim wynosił  $1,10 m$ , w trzecim od  $1,06 m$  do  $1,18 m$  a w czwartym  $1,3 m$ .

Liczne doświadczenia nad wypływem przez przełaz przeprowadzał w Karlsruhe prof. Th. Rehbock i podał różne wzory, z których ostatni z roku 1913 jest następujący:

$$Q = \frac{2}{3} \left[ 0,605 + \frac{1}{1050 h - 3} + 0,08 \frac{h}{p} \right] h l \sqrt{2g h} \dots (262)$$

Gdy przełaz ma próg szeroki (rys. 118) a wysokość  $h$  jest niewielką, strugi cieczy ślizgają się po progu i przyjąć można, że na pewnej długości mają kierunki poziome. Przypuszczając, że prędkość w górze przełazu jest równą



Rys. 118.

zeru a wszystkie strugi na przecięciu  $ab$  mają wspólną prędkość średnią:  $U = \sqrt{2g(h-h')}$ , mieć będziemy wydatek przełazu:

$$Q = l h' \sqrt{2g(h-h')}.$$

Grubość płachty  $h'$  oznaczyć można, przyjmując jak wyżej, że wypływ reguluje się w ten sposób, aby dla danego  $h$ ,

$Q$  było maximum<sup>1)</sup>. Wtedy  $h'$  czynić winno zadość warunkowi:

$$\frac{dQ}{dh} = l\sqrt{2g} \left( \sqrt{h-h'} - \frac{h'}{2\sqrt{h-h'}} \right) = 0,$$

skąd:

$$2h = 3h', \quad h' = \frac{2}{3}h,$$

$$Q = \frac{2}{3}lh \sqrt{2g \frac{h}{3}} = 0,385 lh \sqrt{2gh}.$$

Doświadczenia wykazały, że współczynnik teoretyczny 0,385 jest za wielki i że w skutku tarcia strug na progu przewału w rzeczywistości sprowadza się do 0,35. Przyjmować więc należy w praktyce, dla przewału z szerokim progiem:

$$Q = 0,35 lh \sqrt{2gh}; \quad \dots \quad (263)$$

jeżeli wszakże  $h$  jest większe od dwa razy wziętej grubości progu, to według Bazin'a przewał działa jak w cienkiej ścianie i stosuje się wzór (259).

Jeżeli poziom wody w dole przewału wznosi się na wysokość  $h_1$  nad progiem, wtedy przewał jest *zatopiony*, a wydatek daje wzór przybliżony:

$$Q = 0,41 l \left( h + \frac{h_1}{2} \right) \sqrt{2g(h-h_1)}. \quad \dots \quad (264)$$

*Zadanie 52.* Ze zbiornika, o stałym przekroju poprzecznym  $S$ , wypływa woda przez przewał w cienkiej ścianie, długości  $l$ . Poziom wody w zbiorniku, na początku wypływu, leży na wysokości  $h$  nad progiem przewału. W ciągu jakiego czasu poziom w zbiorniku obniży się o wysokość  $\varepsilon$ ?

Jeżeli przez  $z$  oznaczymy wysokość poziomu nad progiem przewału w chwili  $t$ , to w ciągu czasu  $dt$  wypłynie wody:  $dQ = mlz\sqrt{2gz} \cdot dt$ . Objętość ta jest równa —  $Sdz$ , mamy więc —  $Sdz = mlz\sqrt{2gz} \cdot dt$ , skąd:

$$dt = - \frac{S}{ml\sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad t = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + C.$$

Dla  $t = 0$ ,  $z = h$ , więc szukany czas  $T$  będzie:

$$T = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \left[ \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right],$$

<sup>1)</sup> Por. art. inż. W. Rechiniewskiego „Oznaczenie ilości przepływu wody przez przewał“, *Przegląd Techniczny* 1881.

albo, ponieważ  $z = h - \varepsilon$ :

$$T = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \left[ \frac{1}{\sqrt{h-\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right].$$

Dla  $\varepsilon = h$ ,  $T = \infty$ , teoretycznie więc trzeba nieskończenie długiego czasu, aby poziom wody w zbiorniku zrównał się z progiem przewał; w praktyce zrównanie to następuje, gdy różnica  $h - \varepsilon$  staje się bardzo mała.

*Zadanie 53.* Do zbiornika dopływa woda w ilości  $Q$  na sekundę. Dla uregulowania jej odpływu, budowany ma być przewał, z progiem umieszczonym na głębokość  $h$  pod najwyższym poziomem dopuszczalnym w zbiorniku. Jaką długość ma mieć przewał?

Ze wzoru (259):

$$l = \frac{Q}{m h \sqrt{2gh}}.$$

**53. Wiry.** W rzekach i strumieniach często mają miejsce, pochodzące od nierówności ścian koryta, ruchy nieregularne, wzburzenia przybierające postać wirów, krótkotrwałe, powtarzające się jednak peryodycznie w tem samym miejscu, pod wpływem przyczyn, które jakkolwiek stałe, wywołują przerywane i powtarzające się objawy. Hydraulicy, jak widzieliśmy w § 20, usiłują zdawać sprawę z tych ruchów, wprowadzając do wzorów, zamiast rzeczywistych prędkości cząstek cieczy, prędkości średnie miejscowe. Wzburzenia te przybierają postać wirów o osiach poziomych, podnoszących się jak wały od dna koryta, w którym prąd bieży, i rozwijających się na powierzchni prądu, lub też wirów o osiach pionowych, trwających dłużej, znikających w pewnej odległości od punktu powstania i wracających po chwili.

Niezależnie od tych wirów, przypadkowych i nieregularnych, powstają także w cieczach naturalnych, pod wpływem ściśle określonych przyczyn, wiry regularne i ustalone, w których cząstki krążą dokoła osi prawie pionowych, po drogach mniej lub więcej kołowych. Wiry te bywają dwojaki: albo ciecz wirująca wciąż się odnawia, spływając w dół osi, albo też obracają się około osi wciąż też same cząstki cieczy.

Pierwszy rodzaj wirów pojawia się przy wypływie cieczy przez otwór w dnie naczynia. Gdy poziom wody w naczyniu się obniża, to w pewnej chwili tworzy się wklęsłość nad otworem i przy jakimkolwiek naruszeniu symetrii dopływu do otworu, powstaje obrót całej masy cieczy około osi pionowej. Wiry takie tworzą się w zbiornikach z otworem w dnie, albo przy stawidłach szluz otwartych u spodu; tworzą się także przy ruszeniu wiosła, nadającego cząstkom wody na pewnej głębokości prędkość większą od prędkości cząstek na powierzchni i tworzącego za sobą próżnię, którą wypełnia woda schodząca z powierzchni. W tych wszystkich przypadkach tworzy

się lejek o osi pionowej i cząstki cieczy schodzą po powierzchni lejka od jego górnego brzegu ku dołowi. Jeżeli  $v = r\theta$  jest prędkością cząstki, położonej w odległości  $r$  od osi, to według równania (60):

$$vr = \text{ilości stałej.}$$

Prędkość więc cząstki cieczy w wirze zmienia się w stosunku odwrotnym do odległości od osi, tak, że dla cząstki dochodzącej z prędkością  $v_0$  do brzegu lejka na poziomie, położonego w odległości  $r_0$  od osi, będzie:

$$vr = v_0 r_0 = C.$$

Stosując do cząstki, krążącej w około osi a jednocześnie schodzącej od brzegu lejka ku dołowi, twierdzenie Bernoulli'ego (67), mamy przy stałym ciśnieniu  $p = p_0$ :

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

skąd, oznaczając przez  $h = z_0 - z$  głębokość pod poziomem cieczy, na którym leży brzeg lejka o promieniu  $r_0$ , mamy:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{C^2}{2g} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right),$$

równanie krzywej, według której powierzchnia lejka przecina płaszczyznę południkową. Oś wiru stanowi asymptotę tej krzywej. Ponieważ jednak, według równania (60), prędkość jest odwrotnie proporcjonalną do promienia, więc dla cząstki na osi wiru byłaby nieskończenie wielką. To też wywody te nie stosują się do cząstek bardzo blizkich osi wiru.

Energia takiego wiru jest znaczną. Dla warstwy zawartej między dwiema płaszczyznami poziomymi, odległymi na jednostkę długości i dwoma okręgami kół o promieniach  $r_1$  i  $r_0$ , energia wynosi:

$$\int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{2} \rho v^2 (2\pi r) dr = \pi \rho C^2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r} = \pi \rho C^2 \ln \frac{r_0}{r_1}$$

i staje się bardzo wielką przy bardzo małym  $r_1$ .

Drugi rodzaj wirów, w których masa cieczy się nie odnawia, powstaje zawsze, gdy masa w kształcie pierścienia ożywiona jest ruchem obrotowym i ruch ten komunikuje pierścieniom przyległym. Ruch początkowy wytworzony być może, albo przez obracanie zanurzonego w cieczy cylindra pustego, albo też przez dwa prądy poziome, biegnące w przeciwnych kierunkach i działające, jak para sił, na dwa przeciwległe punkty

pierścienia. Ruch zależy wtedy od tarcia wewnętrznego cieczy, określonego współczynnikiem  $\varepsilon$  (§ 17). Przyjmując w pierścieniu jednakową prędkość, dla wszystkich punktów położonych na jednej pionowej, mieć będziemy, biorąc pod uwagę element podobny do przedstawionego na rys. 7 (§ 4), prędkość względną ślizgania na ściance o powierzchni  $r d\varphi dz$ , równą iloczynowi z promienia  $r$  przez pochodną względem  $r$  prędkości kątowej  $\frac{v}{r}$ . Siła styczna, na jednostkę powierzchni ścianki, będzie mieć wartość:

$$T = \varepsilon r \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right).$$

Wyrażając równowagę tego elementu, czyli przyrównując do zera sumy rzutów na trzy kierunki  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , sił działających na element i sił bezwładności, i mając na uwadze, że składowe bezwładności elementu są:

$$\rho \frac{v^2}{r} \text{ w kierunku promienia,}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} \text{ w kierunku stycznej,}$$

mieć będziemy trzy równania:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Tr) + \frac{T}{r} = \rho \frac{dv}{dt}.$$

Jeżeli ruch jest ustalony, ostatni wyraz trzeciego równania jest równy zeru, a wstawiając za  $T$  poprzednią wartość, mamy:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \varepsilon r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) \right] + \varepsilon \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) = 0,$$

albo:

$$\frac{\varepsilon}{r^3} \frac{d}{dr} \left[ r^3 \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) \right] = 0,$$

skąd:

$$r^3 \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) = \text{ilości stałej} = -2B,$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) = -\frac{2B}{r^3},$$

a oznaczając nową ilość stałą przez  $A$ :

$$\frac{v}{r} = A + \frac{B}{r^2},$$

$$v = Ar + \frac{B}{r}.$$

Wzór ten daje prędkość nieskończenie wielką dla  $r = 0$ , podobnie jak przy wirach pierwszego rodzaju, nie może się też stosować do cząstek bardzo bliskich osi wiru. W każdym razie prędkość się zmniejsza, w miarę oddalania się od środka wiru; przechodzi przez minimum, w odległości od środka wiru zależnej od wartości stałych  $A$  i  $B$  a następnie powiększa się razem z  $r$ .

## VI. Energia prądu.

**54. Rzeki i potoki.** Ruch wód bieżących bywa zwykle zmienny, bo szerokość koryta, głębokość i nachylenie brzegów, inne są w każdym przekroju; spadek zmniejsza się, w miarę oddalania się od źródeł; oś prądu rzadko bywa prostolinijną na większej długości, a równie rzadko przekrój symetrycznym względem osi i koryto niepodmywalnem. Do zadań przeto, dotyczących ruchu wód bieżących, stosować wypada wzory wyprowadzone dla ruchu ustalonego zmiennego, a otrzymane wyniki będą tylko przybliżone, z powodu niemożności wprowadzenia w rachunek wszystkich czynników zmiennych. W wyjątkowych tylko razach, gdy koryto na znacznej długości jest regularne, obliczać można wydatek według wzorów na ruch jednostajny. Podczas wezbrań, wydatek rzeki w każdym przekroju bywa zmienny i obliczony być może tylko zapomocą wzorów § 46.

Stosownie do wielkości spadku, odróżniane są potoki i rzeki. Spadek potoków bywa większy od 2,50 m na kilometr, spadek rzek mniejszy od tej granicy. Wogóle, według Boussinesq'a, za potoki uważać wypada wody bieżące, ze spadkiem  $i$ , czyniącym zadość we wzorze (211) nierówności  $\alpha i \geqslant bg$ , a za rzeki spokojne o słabym spadku takie, dla których  $\alpha i < bg$ . Przy średnich wartościach  $\alpha = 1,10$ ,  $b = 0,0003$ ,  $g = 9,81$ , pierwsza nierówność daje  $i \geqslant 2,67$  m na kilometr.

Na zagięciach osi koryta, w łukach, strugi przestają być równoległymi, bo występują w każdej chwili nowe siły, zmieniające ich kierunek. Bezwładność sprzeciwia się tej zmianie i powstają wzburzenia, mniej lub więcej znaczne, w pobliżu brzegu zewnętrznego. Przy brzegu wewnętrznym, poziom skutkiem działania siły odśrodkowej się obniża (§ 6, Zadanie 8). Prawo ruchu strug, uderzających o brzeg zewnętrzny i odrzuconych na brzeg przeciwległy, jest nieznanne, i zwykle zjawisko to brane jest w rachunek jako nagła zmiana przekroju prądu (§ 16).

Według Boussinesq'a strata naporu, wynikająca podczas przepływu prądu przez łuk o długości  $s$  a promieniu  $r$ , gdy kanał ma szerokość  $l$  a głębokość  $h$ , wyraża się dość ściśle związkami:

$$\xi = \frac{b_1 s}{h} \sqrt{\frac{l}{r}} U^2, \dots \dots \dots (265)$$

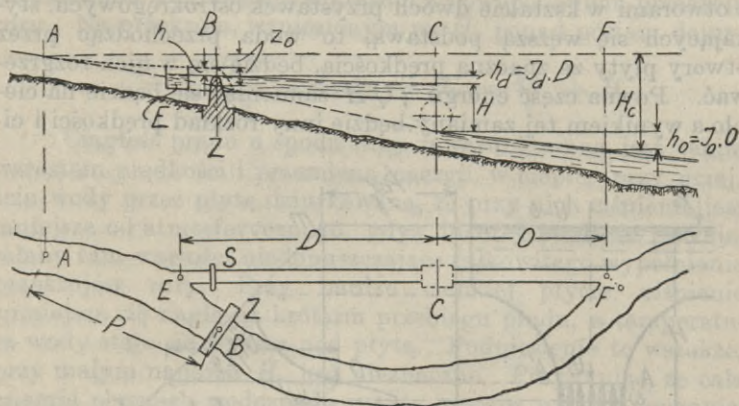
przy wartości współczynnika  $b_1 = 0,0004$  i długości  $s$  liczonej po osi kanału, której promień krzywizny jest  $r$ . Dołączając to wyrażenie na  $\xi$ , do równania (202), mieć będziemy wzór określający prawo ruchu zmiennego prądu w kolanach rzek.

Spadki wód bieżących używane są od najdawniejszych czasów do wprawiania w ruch silników wodnych, zwłaszcza spadki średnie, kilkometrowe, często spotykane. W okolicach górzystych pożytkowane są również od dawna spadki większe, od 15 do 20 *m*. W naszych czasach wreszcie, eksploatować zaczęto w tym celu potoki górskie, przekraczające nawet 500 *m* i niektóre gałęzie przemysłu przenoszą swe zakłady w góry, pomimo miejscowych niedogodności. Koszta instalacji silników wodnych w wielkich zakładach bywają znaczne, za to koszty eksploatacji niewielkie, w niektórych przypadkach wszakże odgrywające pewną rolę.

**55. Zakłady wodne.** Dwa główne czynniki trzeba mieć na względzie, gdy chodzi o zużytkowanie spadku wody, mianowicie wydatek prądu i wysokość spadku. O pomiarze wydatku będzie mowa w rozdz. X; jeżeli cała rozporządzalna ilość wody zużywaną ma być w zakładzie, to wydatek mierzony być winien przy średnim stanie wód, jaki ma miejsce zwykle w ciągu dziewięciu miesięcy roku, z pominięciem okresów wód niskich i wezbrań. Wysokość spadku otrzymuje się przez poziomowanie. Niech  $A-B-C-F$  (rys. 119) przedstawia profil podłużny koryta prądu, między  $A$  i  $F$ , którego wydatek  $Q$  i różnica poziomów  $H$  są znane. W odpowiednio wybranem a zależnem od natury gruntu, miejscu  $B$ , zbudowaną zostaje zagroda  $Z$ , podnosząca poziom w  $B$  o wysokość  $z_0$ . Część spadku, wynosząca także  $z_0$ , według przybliżonego wzoru Poiré'go (§ 44), zostaje straconą, jeżeli poziom w punkcie  $A$ , w skutku miejscowych warunków, nie może być podniesiony. Od koryta prądu odgałęzia się przed zagrodą kanał doprowadzający wodę do silnika, zamykamy jedną lub paroma szluzami  $S$ . Przy zamkniętych szluzach, przelewa się woda przez próg przevalu pod naporem  $h$  (§ 52). Przy szluzach otwartych, poziom w górze zagrody obniża się do wysokości progów, albo niżej jeszcze, i woda wchodzi do kanału doprowadzającego.



W punkcie  $C$ , wyznaczonym przez warunki miejscowe, ustawiony zostaje budynek silnikowy.  $D$  jest długością kanału doprowadzającego a  $O$  odprowadzającego wodę. W miejscowościach, gdzie siła wodna ma wysoką wartość, np. w pobliżu miast, lub w okolicach przemysłowych, przekroje tych kanałów dobiera się możliwie wielkie, aby ich spadki mogły być jak najmniejsze i jak najmniejsza strata spadku całkowi-



Rys. 119.

tego, który jest do rozporządzenia. Przy dużym bowiem przekroju  $\omega$ , będą, dla danego wydatku  $Q$ , mniejsze: tak prędkość  $U$ , jak i spadek  $J$ . O najekonomicznym spadku kanału doprowadzającego  $J_d$  była mowa w § 36. Do obliczenia spadku kanału odprowadzającego  $J_0$  służą wzory § 34. Z czterech ilości związanych tymi wzorami,  $Q$  jest dane, a prędkość średnia  $U$  nie może przekraczać granic podanych na str. 127.

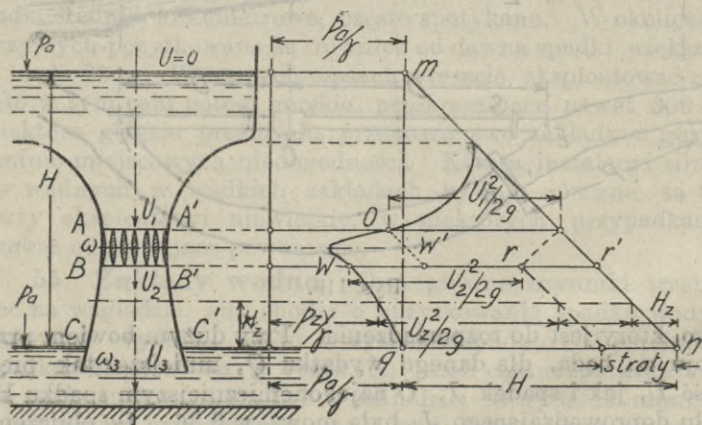
Im mniejszy jest spadek całkowity  $H_c$ , o tem mniejsze należy się starać spadki  $J_d$  i  $J_0$ ; w praktyce spotyka się wartości tych spadków 0,0005 do 0,001. Przy uwzględnieniu wymienionych strat, pozostaje do zużytkowania w zakładzie wodnym spadek:

$$H = H_c - z_0 - h - h_d - h_0 \quad \dots \quad (266)$$

**56. Przemiana na ciepło.** Mając w pewnym punkcie prąd o wydatku  $Q$  na sekundę i przeprowadzając ten prąd do innego punktu, położonego niżej o wysokość  $H$ , zużywamy na sekundę ilość energii  $\gamma Q H$  kilogramometrów. Odbywa się to w zakładach wodnych i najczęściej energia potencjalna spadku wody przekształcana bywa na energię kinetyczną, zużywaną bezpośrednio, lub na prąd elektryczny, służący do wy-

tworzenia energii kinetycznej, potrzebnej w innym miejscu. Okoliczności przypadkowe ruchu wody sprawiać mogą wszakże inną przemianę energii prądu, wcale niepożądaną, mianowicie przemianę na ciepło, przez podniesienie temperatury wody.

Jeżeli przez rurę pionową (rys. 120), ze zbiornika górnego do dolnego, przy różnicy poziomów  $H$ , przepływa  $Q$  m<sup>3</sup> wody na sekundę i rurę tę przegrodzimy płytą dziurkowaną z otworami w kształcie dwóch przystawek ostrokągowych, stykających się węższą podstawą, to woda przechodząc przez otwory płyty ze znaczną prędkością, będzie się w nich rozgrzewać. Pewna część energii  $\gamma Q H$  zamieniać się będzie na ciepło a wynikiem tej zamiany będzie inny rozkład prędkości i ci-



Rys. 120.

śnienie. Wpływ tej zamiany na prędkość, wtedy dopiero staje się widocznym, gdy stosunek sumy powierzchni  $\omega$  wszystkich otworów w płycie, do powierzchni  $\omega_3$  dolnego otworu rury, przekracza granicę, przy której prędkość  $U$  w małych otworach dochodzi do wartości maximum, określonej na str. 97; ciśnienia zaś rozkładają się w sposób uwidoczniiony na wykresie. Gdyby rura była u spodu zamknięta, ciśnienia rozkładałyby się według praw hydrostatyki, zwiększając się od góry do dołu, jak pokazuje nachylenie linii prostej  $mn$ . Przy otwartej rurze, napór zmniejsza się będzie o wysokość odpowiadającą prędkości, aż do przekroju  $\omega$ , a następnie powiększać przy rozszerzaniu się rury. Bez straty energii, byłyby na przekrojach  $AA'$  i  $BB'$  prędkość  $U_1 = U_2$  i linia naporu, po pewnym wygięciu w lewo, spowodowanem różnicą wysokości odpowiadających prędkościom  $U$  i  $U_1$ , przechodziłaby od  $o$

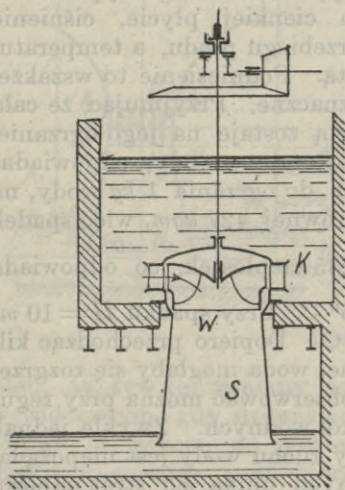
do  $w'$ , równoległe do  $mn$ . W rzeczywistości linia ta przechodzi przez  $w$  i  $ww' = rr'$  jest stratą energii przy przejściu wody przez płytę dziurkowaną, przyczem wszakże nie bierze się pod uwagę strat energii w górnej części rury. Od  $w$  napór się powiększa, do przekroju  $CC'$ , na którym ciśnienie staje się równe atmosferycznemu  $p_a$ , wysokości zaś odpowiadające prędkościom zmniejszają się razem z powiększaniem przekroju rury. Na przekroju, wzniesionym na  $H_z$  ponad poziom dolny:

$$\frac{p_z}{\gamma} + \frac{U_z^2}{2g} + \text{straty} + H_z = \frac{p_a}{\gamma} + H.$$

Ciągłość prądu u spodu rury zawarunkowaną jest takim wzrostem prędkości i przemianą energii w ciepło, przy przejściu wody przez płytę dziurkowaną, że przy nich ciśnienie jest mniejsze od atmosferycznego, gdyż inaczej prędkość przybierałaby tam wartości niedopuszczające całkowitego wypełnienia przekrojów rury. Przy bardzo cienkiej płycie, ciśnienie zmniejsza się nagle na krótkim przebiegu prądu, a temperatura wody staje się wyższą pod płytą. Podniesienie to wszakże, przy małym naporze  $H$ , jest nieznaczące. Przyjmując, że cała energia pewnego wodospadu zużyta zostaje na jego ogrzanie, to spadek  $H = 100$  m, jednego kilograma wody, odpowiadać będzie pracy 100 *kgm*. Ponieważ do ogrzania 1 *kg* wody, na 1° C., potrzeba jednej ciepłostki, równej 427 *kgm*, więc spadek 1 *kg* wody wytworzy  $\frac{100}{427} = 0,235$  ciepłostek, co odpowiada podniesieniu temperatury o 0,235° C. Przy spadku  $H = 10$  m, podniesienie wynosiłoby 0,0235° C. Dopiero przechodząc kilkakrotnie przez płyty dziurkowane, woda mogłaby się rozgrzewać w sposób widoczny, jak to obserwować można przy regulatorach hamulcowych turbin i kół wodnych. Zwykle jednak podnoszenie się temperatury przy ruchu wody jest niepożądane i przy budowie zakładów wodnych unika się strat naporu, powodujących zamianę energii prądu na ciepło.

**57. Silniki wodne.** Woda bieżąca wprawia w ruch silnik, działając albo energią, albo ciężarem, albo wreszcie oddziaływaniem; działać może także równocześnie dwoma z tych sposobów. Najprzód powstać mogła myśl postawienia wodzie bieżącej pewnej przeszkody, która by popychała w swym ruchu, — myśl najprostsza lecz zarazem najwadliwsza, gdyż uderzenie połączone jest zawsze ze stratą energii a więc i pracy, a nadto powodować może uszkodzenie silnika. Takie jest działanie wody w kołach podsiębirnych z płaskimi łopatkami i kołach wiszących, umieszczanych na rzekach, przy stat-

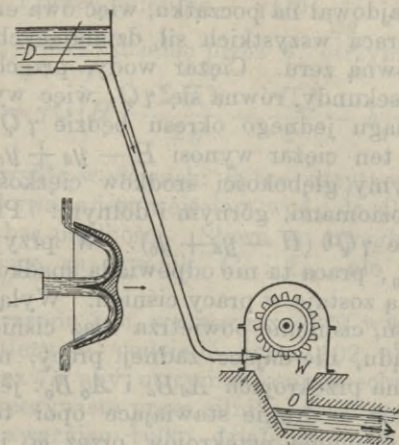
kach, lub między dwoma statkami. Następnie zwrócić musiano uwagę na możliwość spożytkowania samego ciężaru wody, jak to ma miejsce w starodawnych, a do dziś jeszcze na małych spadkach używanych, kołach nasiębiernych czyli skrzynkowych i w niektórych, na tej samej zasadzie opartych, urządzeniach hydraulicznych. W trzecim sposobie działania wody, przeszkody ruchome, nie zmniejszając nagle jej prędkości, jak przy uderzeniu, usiłują zmieniać stopniowo kierunek prądu i woda oddziaływa na nie swą bezwładnością, jak w kołach podsiębiernych z łopatkami zakrzywionymi i kołach śródbiernych. W większości turbin, woda działa głównie swą energią, przez ciśnienie a nie przez uderzenie. Podczas gdy w kołach wodnych, woda w swym ruchu względem silnika, wycofuje się z niego tą samą drogą, jaką doń weszła, — w turbinach wchodzi jedną stroną łopatki a wychodzi drugą. Turbinę składają dwa koła: stałe, zwane kierownicą i ruchome zwane wirnikiem. W turbinach promieniowych, koła te umieszczone są jedno w drugim, z wirnikiem zewnętrznym w turbinie odśrodkowej Fournayron'a a wewnętrznym w turbinie dośrodkowej Francis'a (rys. 121, *K* kierownica, *W* wirnik, *S* rura ssąca). W turbinach osiowych, albo równoległych, Fontaine'a, Jonval'a, prąd przebiega drogę cylindryczną, nie zmieniając swej odległości od turbiny. Są także turbiny mieszane, w których oś prądu nie pozostaje ani na płaszczyźnie prostopadłej do osi turbiny ani na cylindrze około tej osi opisanym. Wreszcie w kołach stycznobiernych Pelton'a (rys. 122), o których będzie jeszcze mowa, żyła wodna padając na krawędź między podwójnymi łyżkami, umocowanymi w pewnej liczbie na obwodzie koła, rozdziela się i napiera na wewnętrzne powierzchnie łyżek, wychodząc z nich dwoma strumieniami, po obu stronach koła.



Rys. 121.

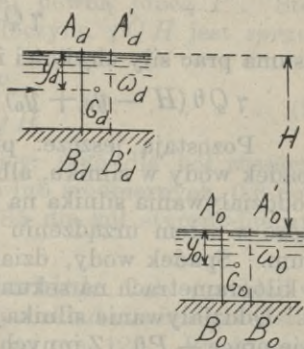
Woda przechodząca przez silnik nie ma ruchu ściśle ustalonego. Zwykle ruch ten powtarza się w identycznych warunkach, w ciągu okresów bardzo krótkich. Jeżeli weźmiemy

pod uwagę koło wodne, zaopatrzone w szereg łopatek, lub turbinę ze swemi międzyłopatkowymi przewodami (komórkami), to po obróceniu się koła lub wirnika turbiny o kąt odpowiadający rozstawieniu łopatek, każda łopatką zajmuje położenie ło-



Rys. 122.

patki poprzedzającej i cały system wraca do położenia pierwotnego. Rozważanie jednego takiego okresu, czas trwania którego niech będzie  $\theta$ , pozwala zestawić równanie ogólne ruchu silnika, z uwydatnieniem wszystkich działań, które należy mieć na uwadze przy określaniu jego sprawności. Przyjmijmy, że woda doprowadzana jest do silnika kanałem o pewnym przekroju  $\omega_a$  (rys. 123) i ma na tym przekroju prędkość  $U_a$  dostatecznie małą, aby można było pomijać jej energię  $U_a^2$ , a odchodzi z pod silnika kanałem odprowadzającym  $\omega_0$ . Jeżeli spadek zużytkowany został w zupełności, prędkość  $U_0$  będzie także dość małą, aby  $U_0^2$  mogło być pominięte. Wysokość spadku  $H$  stanowi różnicę wzniesień poziomów górnego i dolnego, między którymi ustawiony zostaje silnik.



Rys. 123.

Weźmy pod uwagę masę cieczy, w prądzie ciągłym lub przerywanym, przechodzącym przez przewody i silnik. Po upływie czasu  $\theta$ , przekroje  $A_a B_a$ ,  $A_0 B_0$ , przybierają położe-

nie  $A_a' B_a'$ ,  $A_0' B_0'$ . Przyrost energii, wobec małej wartości  $U_a$  i  $U_0$  może być pominięty; jakkolwiek bowiem energia masy, zawartej między  $A_a' B_a'$  a  $A_0 B_0$  jest znaczną, to jednak gdy cały system na końcu okresu wraca do warunków, w jakich się znajdował na początku, więc owa energia nie ulega zmianie i praca wszystkich sił, działających na uważaną masę będzie równą zeru. Ciężar wody, przechodzącej przez silnik w ciągu sekundy, równa się  $\gamma Q$ , więc wydatek w kilogramach w ciągu jednego okresu będzie  $\gamma Q \theta$ . Wysokość z jakiej spada ten ciężar wynosi  $H - y_a + y_0$ , jeżeli przez  $y_a$  i  $y_0$  oznaczymy głębokości środków ciężkości przekrojów  $G_a$  i  $G_0$  pod poziomami, górnym i dolnym. Praca więc siły ciężkości będzie  $\gamma Q \theta (H - y_a + y_0)$ . W przypadku gdy  $y_a$  jest różne od  $y_0$ , praca ta nie odpowiada spadkowi  $H$  a różnica uwzględnioną zostaje w pracy ciśnień. Wyłączymy, z pośród tych ciśnień, ciśnienie powietrza oraz ciśnienia normalne do kierunku prądu, nie dające żadnej pracy, mieć będziemy tylko ciśnienia na przekrojach  $A_a B_a$  i  $A_0 B_0$ : jedno, wprawiające masę w ruch a drugie stawiające opór temu ruchowi. Oznaczając powierzchnie przekrojów przez  $\omega_a$  i  $\omega_s$ , mieć będziemy ciśnienia, w środkach ciężkości  $G_a$  i  $G_0$  równe  $\gamma y_p$  i  $-\gamma y_0$ , a na całych przekrojach:  $\gamma y_a \omega_a$  i  $-\gamma y_0 \omega_0$ . Prace tych ciśnień, przy drogach przebieżonych  $A_a A_a' = U_a \theta$ ,  $A_0 A_0' = U_0 \theta$ , będą:  $\gamma y_a \omega_a U_a \theta$  i  $-\gamma y_0 \omega_0 U_0 \theta$ , albo uwzględniając  $Q = \omega_a U_a = \omega_0 U_0$ :

$$\gamma Q (y_a - y_0) \theta,$$

a suma prac siły ciężkości i ciśnień:

$$\gamma Q \theta (H - y_a + y_0) + \gamma Q (y_a - y_0) \theta = \gamma Q H \theta.$$

Pozostają jeszcze: praca użyteczna, wytworzona przez spadek wody w silniku, albo raczej praca odjemna, wynikająca z oddziaływania silnika na wodę, oraz prace oporów biernych, które w całym urządzeniu spowodowane być winny do minimum. Spadek wody, działając na silnik, wykonywa pracę  $P$  w kilogrametrach na sekundę, czyli  $P \theta$  w ciągu jednego okresu. Oddziaływanie silnika na wodę, w kierunku przeciwnym, daje pracę  $-P \theta$ . Z innych prac odjemnych uwzględnić trzeba: straty naporu, wynikające z tarcia przy ruchu cieczy, których obliczaniem zajmowaliśmy się dotąd i które dają zmniejszenie wysokości spadku  $h'$  i pracę straconą  $-h' \gamma Q \theta$ , następnie pewną niez użytą część wysokości spadku  $-h'' \gamma Q \theta$ , wreszcie straty naporu wynikające z uderzeń i nagłych zmian przekroju prądu, według wzoru (252), proporcjonalne do kwadratu z prędkości straconej. Oznaczając tę prędkość przez  $U_s$ ,

mieć będziemy pracę —  $\gamma Q \theta \Sigma \frac{U_s^2}{2g}$ . Wreszcie, jeżeli woda z silnika wychodzi z prędkością  $U_3$ , to uwzględnić trzeba stratę naporu  $\frac{U_3^2}{2g}$  i pracę odjemną —  $\gamma Q \theta \frac{U_3^2}{2g}$ . Zbierając razem te wszystkie czynniki i dzieląc przez  $\theta$ , otrzymujemy wzór:

$$P = \gamma Q \left( H - \frac{\Sigma U_s^2}{2g} - \frac{U_3^2}{2g} - h' - h'' \right), \quad (267)$$

wyrażany zwykle w słowach: dobre zużytkowanie spadku wody, uwarunkowane jest wejściem wody do silnika bez uderzeń, a wyjściem bez prędkości. Słowa te uwzględniają prace odjemne, mające za czynnik  $U_s$  i  $U_3$ , ale nie uwzględniają strat  $h'$  i  $h''$ .

$P$  wyrażone jest we wzorze (267) w kilogrametrach na sekundę; należy je podzielić przez 102 aby otrzymać kilowaty, a przez 75 aby otrzymać konie mechaniczne. Nie jest to jeszcze rzeczywista praca silnika, doszliśmy bowiem do wzoru (267), rozważając tylko działanie wody na silnik. Ten ostatni, jako mechanizm, ma tarcia wewnętrzne części składowych, jednych o drugie, a także, obracając się w powietrzu lub w wodzie, narażony bywa na opór ośrodka, w którym się porusza. W skutku tego rzeczywista praca silnika  $P_r$ , którą można mierzyć zapomocą dynamometru, ustawionego na wałę silnika, jest równa pracy  $P$ , zmniejszonej pewną pracą  $P'$ . Stosunek pracy rzeczywistej  $P_r$  do iloczynu  $\gamma Q H$  jest *sprawnością* silnika:

$$\eta = \frac{P_r}{\gamma Q H} \quad (268)$$

Stosunek ten bywa rozmaity: 0,25 dla kół wiszących, 0,4 do 0,6 dla kół podsiębiernych lub śródbiernych, 0,6 do 0,9 dla kół nasiębiernych, 0,65 do 0,85 dla kół stycznno-biernych, 0,70 do 0,85 dla turbin.

**58. Rozkład ciśnień w turbinie.** Jako przykład weźmiemy turbinę osiową, bo w niej rozkład ciśnień przedstawia się prościej i zbliża do podanego na rys. 120. Prąd, mogący mieć różne kierunki w silnikach wodnych, jest tu pionowy (rys. 124: (a)—przekrój pionowy, (b)—plan). Woda dopływająca kanałem  $D$ , przechodzi przez rurę  $R_d R_0$ , spadając z wysokości  $H$ . Spadek ten przemienić się ma w silniku na energię kinetyczną, z potrąceniem małego tylko ułamka na straty, jak wyszczególnione we wzorze (267). Przez danie do-

statecznie wielkiego przekroju  $\omega_3$ , można prędkość  $U_3$ , z jaką woda opuszcza silnik, doprowadzić do minimum; straty zaś zależą głównie od tej prędkości.

W kanale dopływowym  $D$ , prędkość jest  $U_d$  i właściwie za napór rozporządzalny uważaćby należało  $H + \frac{U_d^2}{2g}$ . Ponie-

waż jednak w kanale odpływowym  $O$  woda musi mieć także pewną prędkość  $U_0$ , prawie równą  $U_d$ , można więc, albo pomijając obie te prędkości, przyjmować do rachunku spadek  $H$ , albo też, jak się to robi zwykle, uwzględniać tylko prędkość  $U_0$ . Przy wejściu z kanału  $D$  do górnej części rury  $R_d$ , woda nabiera prędkości  $U$ .

W miejscu przemiany energii, woda, przez zmniejszenie przekroju, powiększa swoją prędkość. Zmniejszenie przekroju następuje przy przejściu prądu między płaszczem turbiny  $K_d$  a ścianami rury  $R_d$ , a następnie przy przejściu przez koło kierownicze z łopatkami, którego przekrój cylindryczny (rzut poziomy cylindra o średnicy  $d_s$  na rys. 124 *b*) przedstawiony jest w rozwinięciu na rys. 124 *c*. Łopatki nadają prądowi kierunek nachylony  $U_1$ . Z komórek kierownicy wychodzi woda z prędkością  $U_1$ , odpowiadającą naporowi  $H_d$ , t. j. odległości poziomu górnego od przekroju I, u spodu koła kierowniczego i pod ciśnieniem odpowiadającym wysokości  $h_1$ , takim, że pomijając straty energii wynikające z tarcia:

$$h_a + H_d = h_1 + \frac{U_1^2}{2g},$$

skąd:

$$U_1 = \sqrt{2g(h_a + H_d - h_1)}.$$

Płość wody, przepływająca w ciągu sekundy przez koło kierownicze, przy przekroju  $\omega_d$ , mierzonym prostopadłe do kierunku  $U_1$ , będzie:  $Q = \omega_d U_1$ . Jeżeli liczbę łopatek koła kierowniczego oznaczymy przez  $i_1$ , szerokość komórek przez  $b$  a grubość żyły przez  $a$ , to  $\omega_d = i_1 a b$ .

Gdyby ustrój silnika kończył się na kierownicy, woda płynęłaby dalej, linią śrubową, przez dolną rurę  $R_0$ , do kanału odprowadzającego. Ale, pod kołem kierowniczym stałym, umieszczone jest drugie koło ruchome, zwane *wirnikiem*, osadzone na, ruchomymokoło swej osi, wale  $N$ . Woda zmuszona jest przechodzić przez wirnik, a ponieważ jego łopatki mają inny kierunek niż w kierownicy (rys. 124 *c*), więc woda przyjmuje kierunek  $W_1$  względem wirnika. W skutku zmiany kierunku na łopatkach wirnika, ciśnienie na stronę wklęsłą łopatek wirnika jest większe niż na stronę wypukłą, a wynikający stąd moment sił wprawia wirnik, wraz z wałem  $N$ , w ruch obrotowy.





Przekroje komórek wirnika zmniejszają się od wejścia wody do jej wyjścia. Gdyby wirnik się nie obracał, to w skutku nagłych zmian przekroju i kierunku prądu, powstawałyby w nim znaczne wzburzenia i straty naporu, gdyż przekroje wejściowe wirnika są o wiele większe od przekrojów wyjściowych kierownicy. Ponieważ jednak wirnik obraca się w kierunku strzałki (rys. 124 c), więc woda wchodzi doń z prędkością względną  $W_1$ , która jest wypadkową prędkości  $U_1$  i odjemnie wziętej prędkości na obwodzie wirnika  $u$ , jak to wskazuje wykres (rys. 124 d). Przez odpowiedni dobór prędkości na obwodzie wirnika, utrzymać można  $W_1$  znacznie mniejsze od  $U_1$ , a tym sposobem większy przekrój wejścia do wirnika może się podczas obrotu całkowicie wypełniać wodą. Z zasady ciągłości wynika:  $Q = \omega_1 W_1 = \omega_2 W_2$ , gdzie  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są przekroje wejścia i wyjścia w wirniku, brane prostopadłe do kierunku prędkości względnej. Zachowując oznaczenia rys. 124 c i oznaczając przez  $i_2$  liczbę łopatek wirnika, mieć będziemy także:

$$Q = i_2 a_1 b W_1 = i_2 a_2 b W_2.$$

Dla doprowadzenia tej małej prędkości  $W_1$  do większej  $W_2$ , którą winna mieć woda, aby przechodzić mogła przez wąskie otwory wyjściowe wirnika, ciśnienie musi się zmniejszyć i wartość  $h_1$  ciśnienia panującego w szczelinie między kierownicą a wirnikiem zejdzie do  $h_2$  pod wirnikiem. Z wirnika wychodzi woda z prędkością bezwzględną  $U_2$ , wypadkową prędkości na obwodzie  $u$  i prędkości względnej  $W_2$  (rys. 124 e). Ta prędkość  $U_2$  będzie małą względem  $W_2$ , a w dobrze zbudowanych turbinach mieć będzie kierunek równoległy do osi ( $\alpha_2 = 90^\circ$ ). W dawnych turbinach, wyjście wody z wirnika nie odbywało się regularnie, gdyż woda musiała przechodzić z przekroju pierścieniowego  $\pi d_s b$  do znacznie większego  $\frac{\pi}{4} d_r^2$ , co wywoływało straty naporu. Obecnie, przy budowie turbiny osiowej, zaradzićby można tej niedogodności, przez dodanie dolnego płaszcza  $K_0$ , wpływającego na stopniowe zmniejszanie się prędkości z  $U_2$  na  $U_3$ . Nieregularność, o której mowa, nie została uwzględniona w wykresie na rys. 124.

Omówiony wyżej korzystny układ prędkości wody w turbinie, może mieć miejsce tylko przy pewnej oznaczonej prędkości na obwodzie wirnika. Przy obrocie wolniejszym lub szybszym, prędkość  $U_2$  będzie większą. W obu tych przypadkach woda przechodzić będzie przez rurę  $R_0$ , nie w kierunku osi, lecz w kierunku śrubowym: w stronę obrotu wirnika przy szybszym jego biegu, lub w stronę przeciwną przy biegu powolniejszym.

Odpowiadająca różnicy ciśnień  $h_1 - h_2 = h_p$  oraz różnicy prędkości  $\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$  energia prądu przemienia się na energię kinetyczną za pośrednictwem wału  $N$ . Wszakże podczas przejścia wody przez turbinę pewna część spadku  $H$  zostaje straconą, w skutku przemiany na ciepło. Różne straty naporu:

1) podczas dopływu do przekroju I:

$$H_{1r} = \zeta_1 \frac{U_1^2}{2g} = \sigma_1 H,$$

2) w wirniku:

$$H_{2r} = \zeta_2 \frac{W_2^2}{2g} = \sigma_2 H,$$

3) w rurze  $R_0$ :

$$H_{3r} = \zeta_3 \frac{U_3^2}{2g} = \sigma_3 H,$$

mogą także być wyrażone jako pewien ułamek spadku  $H$ :

$$H_r = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) H = \sigma H.$$

Ciśnienie pod wirnikiem, odpowiadające wysokości  $h_2$ , jest zwykle mniejsze od atmosferycznego i dlatego rurę  $R_0$  nazwano *rurą ssącą* (por. str. 47, *Zad. 25*). Gdy niema żadnego ruchu obrotowego wody w rurze ssącej, czyli gdy turbina jest prawidłowo zbudowana i ma najodpowiedniejszą liczbę obrotów, wtedy według twierdzenia Bernoulli'ego:

$$\frac{U_2^2}{2g} + h_2 + H_0 = \frac{U_3^2}{2g} + h_3,$$

gdzie  $h_3$  oznacza wysokość ciśnienia na przekroju III rury ssącej. Pomiedzy znów tym przekrojem a na zewnątrz rury leżącym poziomem dolnym IV, podległym ciśnieniu powietrza:

$$\frac{U_3^2}{2g} + h_3 = \frac{U_0^2}{2g} + h_a.$$

Pomijając  $U_0$ , zwykle bardzo małe, mamy z powyższych dwóch równań:

$$h_2 = h_a - H_0 - \frac{U_2^2}{2g}.$$

Na wykresie (rys. 124) przedstawiony jest cały ten układ ciśnień i prędkości, przez rzędne prostopadłe do osi pionowej  $z z$ . Podziałka jest jednakową dla rzędnych i odciętych, i prosta  $mn$  nachylona pod kątem  $45^\circ$  przedstawia ciśnienia hydrostatyczne, jakie miałyby miejsce na różnych przekro-

jach, przy zamkniętym otworze dolnym rury  $R_0$ . Linia  $m'n'$  odległa od  $mn$  na wysokość odpowiadającą ciśnieniu atmosferycznemu  $h_a = \frac{p_a}{\gamma}$ , określa też same ciśnienia z pominięciem ciśnienia powietrza. Pomijając bardzo małą prędkość  $U_a$  w kanale  $D$ , przyjęto od poziomu wody do dna kanału hydrostatyczny rozkład ciśnień, według  $mo$ . Gdyby jednak wypadało uwzględniać prędkość dopływu i odpowiadającą jej wysokość  $\frac{U_a^2}{2g}$ , to zamiast  $mn$  przyjąć należy równoległą do niej linię  $m''n''$ . Przy wejściu do rury woda nabiera prędkości  $U$ , co wywołuje zmniejszenie ciśnienia o wysokość  $\frac{U^2}{2g}$  i obniżenie linii  $mn$  do  $pq$ . W miejscu, gdzie woda wchodzi w przestrzeń pierścieniową, między płaszczem turbiny a ścianami rury, wraz ze zmniejszaniem się przekroju, prędkość zaczyna się powiększać i przechodzi od wartości  $U$  w rurze, do  $U_1$  w kierownicy, co wywołuje spadek ciśnienia od  $q$  do  $r$ . Linia  $rr'$  przedstawia wysokość ciśnienia  $h_1$  w szczelinie między kierownicą a wirnikiem. W wirniku wysokość ciśnienia schodzi do wartości  $h_2$ , powyżej obliczonej. Spadek ciśnienia, między  $r$  i  $s$ , przemienia się w energię kinetyczną.

Na przekroju III energia prądu równoważyć winna, działające na poziom dolny, ciśnienie atmosferyczne. Przy idealnym urządzeniu, mianowicie przy stopniowym powiększaniu przekroju rury ssącej i to aż do wielkości nieskończonej (dla sprowadzenia prędkości  $U_0$  do zera), możnaby otrzymać:

$$h_3 + \frac{U_3^2}{2g} = h_a.$$

Urządzenie takie, w zmniejszonej podziałce przedstawia rys. 124 *f*. Przekrój kołowy wylotu rury ssącej przechodzi w cylindryczny, zawarty między dolnym brzegiem rury a odpowiednio ukształtowanym dnem kanału odprowadzającego, przez co prąd rozchodzący się na wszystkie strony w kierunku promieni, ma coraz większe przekroje. Można wtedy wprowadzić do wykresu:

$$h_3 = h_a - \frac{U_3^2}{2g},$$

t. j. linię  $tt'$ , i w takim razie odjęta prądowi przez silnik energia  $E$ , odpowiada całkowitemu spadkowi  $H$ . Zwykle jednak wysokość  $h_3$  musi być większą od powyższej granicy, gdyż zamiana wysokości  $\frac{U_3^2}{2g}$  na ciśnienie, może mieć miejsce tylko

do wartości, odpowiadającej prędkości  $U_0$  w kanale odprowadzającym i punkt  $t$  wykresu przesunie się dalej na prawo. Przy rurze ssącej, takiej jak na rys. 124 *a*, przyjmować można, że na przekroju III panuje ciśnienie atmosferyczne. Wtedy punkt  $t$  wykresu przechodzi do  $t''$  ( $t't'' = h_a$ ), i energia odjęta prądowi wynosi:

$$E = H - \frac{U_3^2}{2g};$$

jest więc mniejszą od całkowitego spadku o wzmiankowaną stratę naporu  $\frac{U_3^2}{2g}$ , która przez stopniowe rozszerzanie rury

ssącej zmniejszoną być może do  $\frac{U_0^2}{2g}$ . Przy uwzględnieniu na

wykresie strat naporu wewnątrz silnika, wartości których na wykresie podane są w nawiasach ( ), otrzymujemy zamiast linii ciśnień  $pqrst$ , linię  $prs't''$ , a energia rzeczywiście odjęta wynosi:

$$E = H - \frac{U_3^2}{2g} - \sigma H.$$

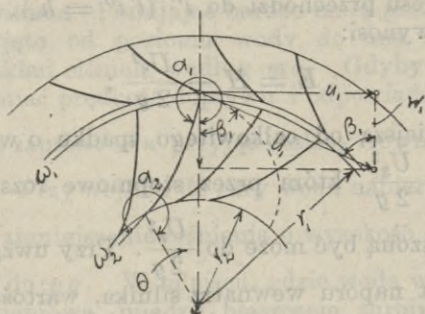
**59. Turbina Francis'a.** W turbinie osiowej ruch wody odbywa się w kierunku osi i każda cząstka nie opuszcza w swym ruchu powierzchni cylindrycznej, której rozwinięcie, ze śladami łopatek, przedstawiał rys. 124 *c*. W turbinie promieniowej dośrodkowej, ustawionej pionowo, jak przedstawiona na rys. 121 turbina Francis'a, strugi skierowane poziomo między łopatkami kierownicy, zaginają się w komórkach międzyłopatkowych wirnika i wychodzą skierowane po powierzchniach cylindrycznych. W rurze ssącej ciśnienie się powiększa a prędkość maleje; o ile wszakże cząstka wychodząca z wirnika zachowuje jeszcze pewien ruch obrotowy, to ruch ten powoduje bezużyteczną stratę energii. Stracie tej zapobiegać może tylko takie urządzenie łopatek, przy którym woda, wychodząca z wirnika, nie ma już żadnego ruchu obrotowego. Oznaczając przez  $Q$  objętość wody, przechodzącej przez turbinę w ciągu sekundy, mieć będziemy masę tej wody:

$$\rho Q = \frac{\gamma Q}{g},$$

a gdy  $r_1$  jest promieniem zewnętrznym wirnika,  $u_1$  składową obrotową prędkości, to moment obrotu wirnika będzie:

$$M = \frac{\gamma Q}{g} u_1 r_1 \dots \dots \dots (269)$$

Na przekroju poziomym kierownicy i wirnika (rys. 125) przedstawione są ślady łopatek. Prędkość cząstki przy wyjściu z kierownicy ma trzy składowe:  $u_1$  w kierunku stycznej do obwodu zewnętrznego wirnika,  $W_1$  w kierunku promienia  $r_1$



Rys. 125.

i wreszcie małą bardzo składową w kierunku równoległym do osi turbiny, którą tu pominiemy, tak, że oznaczając przez  $U_1$  prędkość bezwzględna, z jaką woda wychodzi z kierownicy, mamy:

$$U_1^2 = u_1^2 + W_1^2 \dots \dots \dots (270)$$

Kierunek  $U_1$  nachylony jest do promienia  $r_1$  pod kątem  $\beta_1$ , który może być obliczony z równania:

$$W_1 \operatorname{tg} \beta_1 = u_1 \dots \dots \dots (271)$$

Pod tym kątem nachylone być winny, przy wyjściu wody, cylindryczne łopatki kierownicy, do promienia  $r_1$ . Aby wirnik, obracający się z prędkością kątową  $\theta$ , wypełniony był stale wodą, musi składowa  $W_1$  odpowiadać prędkości wody przyływającej. Jeżeli oprócz warunku, aby wychodzenie wody z wirnika odbywało się bez ruchu obrotowego, wypełniony ma być jeszcze warunek wejścia wody do wirnika bez uderzenia, to względna składowa obrotowa prędkości  $u_1 - r_1 \theta$  czynić winna ze składową  $W_1$  kąt  $\alpha_1$ , określony równaniem:

$$W_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = u_1 - r_1 \theta \dots \dots \dots (272)$$

Pod kątem  $\alpha_1$ , nachylony ma być do promienia  $r_1$ , względny tor cząstki przy wejściu do wirnika, a więc i łopatka wirnika w tem miejscu. Ponieważ przy wyjściu wody z wirnika składowa  $u_2$  ma zniknąć, aby nie było ruchu obrotowego wody, przeto kąt  $\alpha_2$  określony będzie równaniem analogicznym do równania (272):

$$W_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = -r_2 \theta \dots \dots \dots (273)$$

Wzory (271), (272) i (273), przy danych prędkościach  $W_1$ ,  $u_1$ ,  $W_2$ , i promieniach  $r_1$ ,  $r_2$ , określają kąty, pod jakimi ustawione być mają łopatki kierownicy i wirnika, przy wchodzeniu i wychodzeniu z nich wody. Zresztą kształt łopatek bywa dowolny a ich liczba oznaczana według wskazówek praktyki. Wykreślenie śladów łopatek wyznacza także, kreskowany na rys. 125, bezwzględny tor cząstki, który, przy uwzględnieniu warunku, aby woda opuszczała wirnik, nie mając żadnego ruchu obrotowego, schodzi się w końcu z kierunkiem promienia.

Jeżeli wirnik, obracając się z prędkością  $\theta_0$ , czyni zadość dwom powyższym warunkom (wchodzenia wody bez uderzeń i wychodzenia bez ruchu obrotowego), to przy prędkości obrotowej  $\theta'$  i bez zmiany ilości i prędkości wody dopływającej, równania (270) i (271) pozostają w swej mocy; składowa zaś, w kierunku stycznej do obwodu zewnętrznego wirnika, nie będzie już  $u_1$  lecz  $u_1'$ , czyniąca zadość równaniu:

$$W_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = u_1' - r_1 \theta', \quad (274)$$

skutkiem czego następować może, przy wejściu wody do wirnika uderzenie w tym kierunku. W skutku zmiany prędkości katowej wirnika, zmieni się także równanie (273), woda nie będzie już wychodziła bez obrotu, i mieć będziemy:

$$W_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = u_2 - r_2 \theta', \quad (275)$$

a zamiast wzoru (269), moment obrotu:

$$M' = \frac{\gamma Q}{g} (u_1 r_1 - u_2 r_2), \quad (276)$$

któremu odpowiada praca użyteczna:

$$P_r = \frac{\gamma Q}{g} (u_1 r_1 - u_2 r_2) \theta', \quad (277)$$

podczas gdy, w skutku uderzenia przy wejściu i zachowania ruchu obrotowego przy wyjściu, następuje strata energii:

$$P' = \frac{\gamma Q}{2g} (u_1 - u_1')^2 + \frac{\gamma Q}{2g} u_2^2. \quad (278)$$

Jeżeli prędkość wody, dopływającej do turbiny kanałem górnym, oznaczmy przez  $U_a$ , a odpływającej przez  $U_o$  i uwzględnimy stratę energii, przez wprowadzenie współczynnika  $\zeta$ , to przy różnicy poziomów  $H$ , mieć będziemy między tymi dwoma poziomami równanie energii:

$$\gamma Q H = \frac{\gamma Q}{2g} \left[ U_o^2 (1 + \zeta) - U_a^2 \right] + P_r + P'$$

albo uwzględniając wzory (277) i (278):

$$2gH = U_o^2(1 + \zeta) - U_d^2 + 2(u_1 r_1 - u_2 r_2) \theta' + (u_1 - u_1')^2 + u_2^2 \dots \dots \dots (279)$$

Rugując składowe  $u_1$ ,  $u_1'$ ,  $u_2$ , z tego równania i równań (271), (274) i (275), otrzymujemy:

$$2gH = U_o^2(1 + \zeta) - U_d^2 + \theta'^2(r_1^2 - r_2^2) + W_1^2(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1)^2 + W_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 2W_1 r_1 \theta' \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Wprowadzenie objętości wody  $Q$ , przepływającej przez turbinę w jednostce czasu i powierzchni przekrojów  $\omega_d$  i  $\omega_o$  na poziomach górnym i dolnym, oraz  $\omega_1$  i  $\omega_2$  przy wejściu i wyjściu wody z wirnika, daje:

$$Q = \omega_d U_d = \omega_o U_o = \omega_1 W_1 = \omega_2 W_2 \dots \dots (280)$$

i równanie (279) przyjmuje kształt:

$$2gH = \theta'^2(r_1^2 - r_2^2) + 2\theta' Q \frac{r_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{\omega_1} + Q^2 \left\{ \frac{1 + \zeta}{\omega_o^2} - \frac{1}{\omega_d^2} + \frac{(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1)^2}{\omega_1^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\omega_2^2} \right\} \dots (281)$$

Dla wejścia wody bez uderzenia i wyjścia z wirnika bez ruchu obrotowego, równanie (279) upraszcza się, bo  $u_1 = u_1'$ ,  $u_2 = 0$ ,  $\theta' = \theta$  i pozostaje:

$$2gH = U_o^2(1 + \zeta) - U_d^2 + 2\theta u_1 r_1 \dots \dots (282)$$

a zamiast (281):

$$2gH = 2r_1^2 \theta^2 + 2\theta Q \frac{r_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{\omega_1} + Q^2 \left( \frac{1 + \zeta}{\omega_o^2} - \frac{1}{\omega_d^2} \right) \dots (283)$$

Równanie (281) służyć może do obliczenia głównych wymiarów turbiny, jeżeli spadek  $H$  i prędkość kątowna  $\theta$  (albo odpowiadająca liczba obrotów) są dane. Dobiera się wtedy odpowiedni promień  $r_1$  i wprowadza stratę energii:

$$\frac{U_o^2(1 + \zeta) - U_d^2}{2g} = \xi H = H' \dots \dots (284)$$

jako stratę spadku, przyjmując według wskazówek praktyki  $\xi = 0,15$  do  $0,2$ . Z równania (282) mamy:

$$u_1 = \frac{g(H - H')}{\theta r_1}, \dots \dots \dots (285)$$

a po dobraniu możliwie małych składowych  $W_1$  i  $W_2$ , przez urządzenie możliwie wielkich przekrojów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , mogą być



obliczone trzy kąty:  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  z równań (271), (272) i (273). Po wyrugowaniu z tych wzorów, tak  $Q$  jak i  $\theta$ , pozostaje równanie warunkowe:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1}{r_1 \omega_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{r_2 \omega_2} = 0.$$

Wysokość, na której umieszczony ma być wirnik, między poziomami górnym i dolnym, oraz ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$  przy wejściu i wyjściu wody z wirnika, nie wchodzi do powyższych równań i nie mają wybitnego wpływu na zużycie energii w turbinie. Ograniczenie wysokości, na jakiej umieszczony będzie wirnik nad poziomem dolnym, wynika tylko z warunku, że żadne z tych ciśnień nie może być odjemnem, gdyż rura ssąca musi wciąż być wypełnioną. Sprawność turbiny, przy warunku wejścia wody do wirnika bez uderzenia i wyjścia bez ruchu obrotowego, dają równania (268), (269), (282) i (284) według których:

$$\eta = \frac{P_r}{\gamma Q H} = \frac{M \theta}{\gamma Q H} = 1 - \frac{U_o^2 (1 + \zeta) - U_d^2}{2 g H} = 1 - \xi. \quad (286)$$

Jeżeli moment obrotu zmienia się przez powiększanie lub zmniejszanie dostarczanej przez turbinę pracy, to przy stałych kątach  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  i stałym spadku, prędkość kątowna  $\theta'$  i objętość  $Q$  zmieniać się będą według wzoru (281). Wykres tego równania, biorąc za spólrzędne prostokątne wartości  $\theta'$  i  $Q$ , daje nachyloną elipsę albo hyperbole, ze środkiem w początku spólrzędnych, stosownie do tego, czy:

$$\frac{r_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{\omega_1} \cong (r_1^2 - r_2^2) \left[ \frac{1 + \zeta}{\omega_o^2} - \frac{1}{\omega_d^2} + \frac{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1}{\omega_1^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\omega_2^2} \right]. \quad (287)$$

W przypadku równości obu tych wyrażeń, równanie (281) rozpada się na równania dwóch prostych równoległych, położonych w równych odległościach od początku spólrzędnych. Ponieważ wyrażenie w drugim nawiasie, po prawej stronie, ma stałe wartość dodatnią, przeto kształt wyrażonej przez równanie (281) linii charakterystycznej turbiny, zależy przeważnie od różnicy  $r_1^2 - r_2^2$ , która w nowszych turbinach, prawie wyłącznie dośrodkowych, bywa zwykle dodatnią. Dla turbiny Francis'a linią charakterystyczną jest elipsa (rys. 126), przecinająca osie spólrzędnych w punktach  $A$  i  $B$ , w których  $Q = 0$  i  $\theta' = 0$ . Drugi z tych punktów odpowiada objętości  $Q$ , przepływającej przez mocno zahamowany wirnik, podczas

gdym pierwszy nie ma praktycznego znaczenia, bo elipsa, wyszedłszy z  $B$ , jeszcze przed dojściem do  $A$ , mianowicie już w punkcie  $C$  odpowiada bezwodnemu czyli jałowemu biegowi turbiny. Bieg ten ma miejsce z powodu, że  $M' = 0$ , czyli według wzoru (276)  $u_1 r_1 = u_2 r_2$ , albo według wzorów (271) i (275), dla  $\theta' = \theta_0$  i  $Q = Q_0$ :

$$\theta_0 r_2^2 = Q_0 \left( \frac{r_1 \operatorname{tg} \beta_1}{\omega_1} - \frac{r_2 \operatorname{tg} \beta_2}{\omega_2} \right) \quad (288)$$

Punktowi  $A$ , to jest objętości  $Q = 0$ , odpowiada według wzoru (281) prędkość kątowna:

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2gH}{r_1^2 - r_2^2}} \quad (289)$$

jak się okazuje, niezależna od kątów łopatkowych. Nowsze turbiny wszakże budowane są w ten sposób, że kąt  $\beta_1$  może być zmienianym, dla regulowania ruchu turbiny zapomocą specjalnego urządzenia, tak, że każdej wartości kąta  $\beta_1$ , odpowiada inna elipsa charakterystyczna. Wszystkie te

elipsy mają oczywiście różne nachylenia  $\varphi$  osi i według wzoru (289) przechodzą przez ten sam punkt  $A$ . Przez wyregulowanie kąta  $\beta_1$  z równań (288) i (281) i położenie  $\theta' = \theta_0$ ,  $Q = Q_0$ , otrzymać można jako równanie miejsca geometrycznego wszystkich punktów biegu jałowego  $C$ , znów pewną elipsę  $CC'$ , która przy  $Q_0 = 0$  przecina oś  $\theta'$  w punkcie  $C_1$ , przy prędkości kątowej:

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{2gH}{r_1^2 - r_2^2 + \frac{r_2^4}{r_1^2}}} < \theta_1 \quad (290)$$

i którą, razem z drugą linią charakterystyczną  $B'C'A$ , przedstawia rys. 126.

Wreszcie równanie (283), w które kąt  $\beta_1$  nie wchodzi, daje dla  $\theta$  i  $Q$  elipsę ze środkiem w  $O$ , jako miejsce geometryczne wszystkich stanów ruchu, z wejściem wody do wirnika bez uderzenia i wyjściem bez ruchu obrotowego, tak, że każda linia charakterystyczna rys. 126 posiada jeden taki punkt.

Dla jakiegokolwiek ruchu turbiny, mamy według równań (268) i (277) sprawność:

$$\eta' = \frac{P_r}{\gamma Q H} = \frac{(u_1 r_1 - u_2 r_2) \theta'}{g H},$$

albo według równań (271) i (275).

$$\eta' = \frac{\theta'}{g H} \left[ Q \left( \frac{r_1 \operatorname{tg} \beta_1}{\omega_1} - \frac{r_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{\omega_2} \right) - \theta' r_2^2 \right], \quad (291)$$

skąd, dla biegu jałowego  $\theta_0$  znów czynić będzie zadość równaniu (288). Oczywiście, dla  $\theta' = 0$ , będzie  $\eta' = 0$ .

*Zadanie 54.* Obliczyć główne elementy turbiny Francis'a, dla objętości wody  $Q = 4 \text{ m}^3/\text{sek.}$  i spadku  $H = 2,5 \text{ m}$ , ustawionej w zbiorniku otwartym, o powierzchni poziomu wody  $\omega_d = 4 \text{ m}^2$ .

Przyjmując współczynnik  $\xi = 0,2$  a więc sprawność  $\eta = 1 - \xi = 0,8$ , ponieważ:

$$U_d = \frac{Q}{\omega_d} = 1 \text{ m/sek.},$$

mamy z równania (284):

$$U_0 = \sqrt{\frac{2g \xi H + U_d^2}{1 + \xi}} = 3 \text{ m/sek.},$$

skąd dolny przekrój rury ssącej:

$$\omega_0 = 1,333 \text{ m}^2 \text{ (średnica } 1,3 \text{ m)}.$$

Praca turbiny będzie:

$$P_r = \frac{4000 \cdot 2,5 \cdot 0,8}{75} = 106,7 \text{ k. m.}$$

Jeżeli turbina ma działać przy liczbie obrotów  $n = 80$  na minutę ( $\theta = 8,37$ ), to z równania (285), dla  $H' = \xi H = 0,5 \text{ m}$ :

$$u_1 r_1 = 2,34.$$

Biorąc średnicę wirnika  $2r_1 = 1,5 \text{ m}$ , wysokość kierownicy  $b = 0,4 \text{ m}$ , będzie (pomijając ścięśnienie żyły przy wejściu):

$$\omega_1 = 2 \pi r_1 b = 1,885 \text{ m}^2,$$

$$W_1 = \frac{Q}{\omega_1} = 2,125 \text{ m/sek.},$$

$$u_1 = 3,12 \text{ m/sek.}$$

Według równania (272):

$$W_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = u_1 - r_1 \theta = 3,12 - 0,75 \cdot 8,37 = -3,16,$$

więc:  $\operatorname{tg} \alpha_1 = -1,49$ ; kąt łopatkowy przy wejściu do wirnika  $\alpha_1 = 303^\circ 55' = -56^\circ 5'$ . Równanie (271) daje kąt łopatkowy przy wyjściu wody z kierownicy:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{3,12}{2,125} = 1,47, \quad \beta_1 = 55^\circ 45'.$$

Jako promień wewnętrzny wirnika, praktycznie będzie przyjąć  $r_2 = 0,45 \text{ m}$ , co przy średniej wysokości łopatek  $b = 0,4 \text{ m}$  daje:

$$\omega_2 = 1,7 \text{ m}^2, \quad W_2 = 2,35 \text{ m/sek.},$$

a według wzoru (273):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{3,76}{2,35} = -1,6, \quad \alpha_2 = 302^\circ.$$

Wyznaczone zostają w ten sposób kierunki początkowe i końcowe łopatek, których zakrzywienie między  $r_1$  i  $r_2$ , jak i krzywe południkowe, projektowane są według mniej lub więcej dowolnych przepisów praktyki.

Równanie linii charakterystycznej (281) będzie:

$$49,05 = 0,36 \theta'^2 - 1,185 \theta' Q + 3,967 Q^2$$

i przedstawia elipsę, która w punktach:  $A$  ( $Q = 0$ ,  $\theta' = 11,67$ ) i  $B$  ( $\theta' = 0$ ,  $Q = 3,52 \text{ m}^3$ ) przecina osie współrzędnych. Wielka oś elipsy nachylona jest pod kątem  $\varphi = 90'8''$  do osi  $\theta'$ . Odpowiadający biegowi jałowemu turbiny punkt  $C$  elipsy, leży według równania (288) na przecięciu elipsy z prostą  $\theta_0 = 5 Q_0$ , odpowiadającą ilości wody  $Q_0 = 2,64 \text{ m}^3$  przy  $\theta = 13,2$  albo  $n = 126$  obrotów na minutę. Przez  $C$  przechodzi elipsa biegu jałowego, która w punkcie  $C'$  ( $Q = 0$ ,  $\theta_2 = 10,64$ ) przecina oś  $\theta'$ . Wreszcie z równania (283) otrzymuje się elipsę:

$$49,05 = 1,125 \theta^2 - 1,185 \theta Q + 0,617 Q^2,$$

jako miejsce geometryczne wszystkich biegów turbiny, z wejściem wody bez uderzenia i wyjściem bez obrotu. Przecięcie tych dwóch elips odpowiada danym zadania:  $Q = 4 \text{ m}^3$ ,  $\theta = 8,37$ .

## VII. Wody wglębne.

**60. Sączenie przez piasek.** W warstwach piaskowych woda sączy się cienkimi strugami, przez następujące jedna po drugiej w kierunku ruchu, szczeliny między ziarnkami piasku. Ścianki tych fikcyjnych rurek utworzone są przez powierzchnie ziarn i przez płyn nieruchomy, wypełniający szczeliny poprzeczne, w których ciśnienie jest takie samo, jak na sąsiednich przekrojach rurek. Płyn, o którym mowa, przenosi ciśnienie od jednej rurki do drugiej i wytwarza solidarność ruchu w całej warstwie. Ciśnienie w przekroju każdej rurki, rozkłada się według praw hydrostatyki. Jeżeli  $h$  jest wzniesienie, nad płaszczyzną pionową stałą, punktu, w którym ciśnienie jest  $p$ , to w przekroju prostopadłym do kierunku ruchu:  $dp = -\gamma dh$ , skąd:

$$d\left(h + \frac{p}{\gamma}\right) = 0, \text{ albo } h + \frac{p}{\gamma} = N = \text{ilości stałej.}$$

Ponieważ napór jest stały w przekroju prostopadłym do osi rurki, oraz w szczelinach sąsiednich, wypełnionych płynem nieruchomym, przeto kierunek całego sączącego się prądu jest

normalny do szeregu *powierzchni jednakowego naporu*, określonych równaniem:  $N =$  ilości stałej. Powierzchnie te, jakkolwiek przedstawiające niezliczone nieregularności miejscowe, niedostrzegalne wgłębienia, z których każde stanowi otwór fikcyjnej rurki, są jednak ciągłe w swej całości. Dla elementu rurki, spadek czyli strata naporu:

$$J = - \frac{dN}{dn}, \dots \dots \dots (292)$$

gdzie  $dn$  jest nieskończenie małą normalną do powierzchni jednakowego naporu, skierowaną w stronę ruchu prądu. Wydatek pojedynczej rurki będzie, przy ruchu jednostajnym, według wzoru Poiseuille'a (79):

$$q = k \frac{g J \omega^2}{\nu},$$

gdzie  $\omega = \pi R^2$  jest powierzchnią przekroju poprzecznego rurki,  $\nu$  współczynnik określony w § 19 a  $k$  współczynnik liczbowy, zależny od kształtu przekroju  $\omega$   $\left[ \frac{1}{8\pi}$  dla przekroju kołowego,  $\frac{1}{20\sqrt{3}}$  dla przekroju trójkątnego równobocznego  $\right]$ .

Dla wiązki rurek, odcinającej na powierzchni jednakowego naporu  $N$ , pole dość ograniczone, aby można było przyjmować dla nich jednaki spadek  $J$ , biorąc sumę wydatków i dzieląc ją przez sumę powierzchni przekrojów, otrzymamy prędkość średnią:

$$U = \frac{g J}{\nu} \cdot \frac{\sum k \omega^2}{\sum \omega},$$

a kładąc współczynnik wydatku uważanego ośrodka:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{g}{\nu} \cdot \frac{\sum (k \omega) \omega}{\sum \omega} = \frac{g}{\nu} k \omega,$$

gdzie  $k \omega$  przedstawia średnią wartość powierzchni przekroju fikcyjnej rurki, otrzymamy:

$$J = \mu U \dots \dots \dots (293)$$

Przypuśćmy, że ośrodek porowaty, przez który przechodzi woda, jest jednorodny, złożony z ziarenek kulistych i że wszystkie rurki mają jednaki kształt i przekrój; wtedy:

$$\mu = \frac{\nu}{g} \cdot \frac{1}{k \omega}.$$

Między trzema ziarnkami stycznymi, obwód przekroju rurki tworzą trzy łuki kół wielkich, będących przekrojami ku-

lek, a linie proste styczne do tych łuków w ich środkach dają trójkąt równoboczny, którego powierzchnia, w funkcji promienia koła wielkiego kulki  $R$ , wynosi  $\sqrt{3} (7 - 4\sqrt{3}) R^2 = 0,124 R^2$ . Biorąc  $k = 0,029$  a  $\omega = 0,124 R^2$ , mieć będziemy:

$$\mu = \frac{\nu}{0,0009 g (2R)^2}.$$

Dla ziarenek  $0,001 m$  średnicy,  $\mu$  w jednostkach metrsekunda będzie bliskie 600, a tem większe od 600 im ziarnka będą mniejsze.

Przy ruchu ustalonym, wydatek na jednostkę powierzchni przecięcia poprzecznego prądu będzie:

$$Q = m U,$$

oznaczając przez  $m$  stosunek sumy przekrojów rurek fikcyjnych do całej powierzchni przekroju. Jeżeli za  $U$  wstawimy wartość według wzoru (293), otrzymamy:

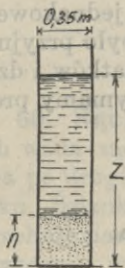
$$Q = \frac{m}{\mu} J. \dots \dots \dots (294)$$

Wzór ten sprawdzony został doświadczalnie. Darcy przepuszczał wodę przez rurę pionową  $0,35 m$  średnicy (rys. 127), u spodu której, na kracie i grubych kamykach ułożona była warstwa piasku grubości  $n$ , możliwie jednorodnego. Powierzchnie jednakowego naporu były tu płaszczyznami poziomymi, spadek:

$$J = \frac{z}{n},$$

a wydatek na jednostkę powierzchni filtru:

$$Q = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{z}{n}.$$



Rys. 127.

Darcy znalazł dla piasku grubego ( $m = 0,38$ ):

$$\frac{m}{\mu} = 0,0003,$$

czyli  $\mu = 1266$ ; Dupuit dla drobnych piasków ( $m = 0,30$ ):

$$\frac{m}{\mu} = 0,00005,$$

a więc  $\mu = 5700$ . Dla zdania sobie sprawy z prędkości sączenia, która według wzoru (293):

$$U = \frac{J}{\mu} = \frac{z}{n} \cdot \frac{1}{\mu},$$

weźmy, jak na filtrach wodociągu warszawskiego,  $n = 1,5 m$ ,  
 $z = 2,50 m$  a będzie:

$$\text{dla } \mu = 1266 \quad U = 0,0013 \text{ m/sek.}$$

$$\text{„ } \mu = 5700 \quad U = 0,0003 \text{ „}$$

Dla skutecznego oczyszczania wody stosowane bywają  
na filtrach wodociągowych prędkości sączenia znacznie mniej-  
sze. Normalnie, na filtrach warszawskich sączenie odbywać  
się ma z prędkością 100 mm na godzinę, czyli:

$$U = 0,000028 \text{ m/sek.,}$$

lecz i tę prędkość, w wielu razach, wypada znacznie  
zmniejszać.

**61. Powierzchnia wody w głębiej.** Jeżeli  $AB$   
(rys. 128) przedstawia przekrój powierzchni gruntu, płaszczy-  
zną prostopadłą do linii głównego ścieku doliny, a  $M'M$  prze-



Rys. 128.

krój powierzchni prądu podziemnego, sączącego się w kierunku  $MM'$ , przypuśćmy dla uproszczenia: że warstwa spodnia nieprzemakalna jest pozioma, schodzi się z dnem rzeki w dolinie i oznaczmy przez  $z$  rzędną jakiegokolwiek punktu  $M$  krzywej  $M'M$ ,  $Q$  wydatek prądu na jeden metr bieżący rzeki,  $h$  głębokość rzeki,  $\mu$  współczynnik przepuszczalności warstwy wodonośnej,  $U$  prędkość średnią prądu podziemnego na przekroju  $MP$ . Wydatek na tym przekroju:

$$Q = \mu z U \quad (296)$$

Między punktami nieskończenie bliskimi  $M$  i  $M'$ , całkowita strata naporu wynosi  $-dz$ , grubość warstwy wodonośnej  $ds$ , tak, że strata naporu na 1 m wynosi  $\frac{dz}{ds}$ , czyli

oznaczając współczynnik  $\frac{m}{\mu} = p$ , będzie:

$$U = p \frac{dz}{ds} \quad (297)$$

Wyrugowanie  $U$  z równań (296) i (297) daje:

$$Q = \mu p z \frac{dz}{ds},$$

albo:

$$Q ds = \mu p z dz,$$

skąd po zcałkowaniu:

$$2 Q s = \mu p z^2 + C.$$

Ponieważ dla  $s = 0$ ,  $z = h$ , przeto:

$$\mu p h^2 + C = 0,$$

wreszcie:

$$2 Q s = \mu p (z^2 - h^2) \quad (298)$$

Jest to równanie linii piezometrycznej  $MM'$ , określające pewną odmianę logarytmiki i aby je otrzymać w spórzędnych prostokątnych, wyrugować należy  $ds$ , zapomoćą związku:  $ds^2 = dx^2 + dz^2$ , a całkowanie daje:

$$2 Q x = z \sqrt{\mu^2 p^2 z^2 - Q^2} - \frac{Q^2}{\mu p} \left( \ln z + \sqrt{z^2 - \frac{Q^2}{\mu^2 p^2}} \right) + C.$$

Różniczkując równanie (298) i uważając  $s$  jako stałe a  $h$  jako zmienne, otrzymamy przy  $ds = 0$ :

$$dz = \frac{h}{z} dh,$$

a ponieważ  $h$  jest mniejsze od  $z$ , więc  $dz < dh$  i przyrosty  $z$  są mniejsze od przyrostów  $h$ . Stwierdza to fakt wielokrotnie obserwowany, że na poziom wody w rzece bardzo mały wpływ wywierają górne warstwy sączącej się wody w warstwie wodonośnej.

Dla uproszczenia równania krzywej  $MM'$ , zastąpić można element  $MM' = ds$ , jego rzutem poziomym  $dx$ , wtedy równanie (297) będzie:

$$U = p \frac{dz}{dx},$$

a po wyrugowaniu  $U$  w równaniach (296) i powyższem, otrzymamy:

$$Q dx = \mu p z dz, \quad (299)$$



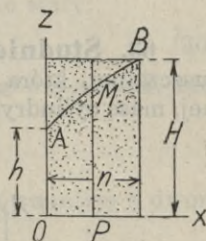
po zcałkowaniu zaś:

$$2 Q x = \mu p (z^2 - h^2) \dots \dots \dots (300)$$

Krzywa piezometryczna jest wtedy parabolą, której oś schodzi się z  $Ox$ ; wykreslić ją można, mając spólrzędne dwóch jej punktów, dostarczone przez dwa otwory świdrowe, dające głębokości spotkania wody wgłębnej.

**62. Sztolnie.** Jeżeli koryto rzeki przechodzi przez grunt przepuszczalny, to do wykopanej równoległe do koryta sztolni, przesączać się może oczyszczona od unoszonych części stałych woda rzeczna. Gdy sztolnia wykopana jest do warstwy nieprzepuszczalnej  $Ox$  (rys. 129), to przyjmując w niej stałą głębokość wody  $h$ , przy głębokości rzeki  $H$  a grubości warstwy przepuszczalnej  $n$ , mamy na przekroju  $MP$  według wzoru (299):

$$Q = \mu p z \frac{dz}{dx},$$



Rys. 129.

a po zcałkowaniu:

$$2 Q x = \mu p z^2 + C,$$

krzywą piezometryczną w łuku paraboli. Rugując  $C$  w granicach  $h$  i  $H$ , otrzymamy:

$$Q = \frac{\mu p (H^2 - h^2)}{2n} = \frac{\mu p (H - h)}{n} \cdot \frac{H + h}{2} \dots \dots (301)$$

Dla danej więc przepuszczalności  $\mu$ , wydatek sztolni jest proporcjonalny do obniżenia poziomu wody wgłębnej  $(H - h)$ , do wysokości średniej  $\frac{1}{2}(H + h)$  wody w warstwie przesiąkanej i odwrotnie proporcjonalny do grubości tej warstwy.

Czas, w ciągu którego woda przesiąka, obliczyć można zważywszy, że:  $U = \frac{dx}{dt}$ ,  $Q = \mu z \frac{dx}{dt}$ , a stąd  $dt = \frac{\mu}{Q} z dx$ .

Rugując  $z$  z równania (300), otrzymamy:

$$dt = \frac{\mu}{Q} \sqrt{\frac{2 Q x}{\mu p} + h^2} \cdot dx,$$

a całkując to wyrażenie w granicach 0 i  $n$ , mieć będziemy czas szukany:

$$T = \left[ \frac{\mu}{Q} \cdot \frac{\mu p}{2 Q} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{2 Q x}{\mu p} + h^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^n,$$

albo po uproszczeniu:

$$T = \frac{1}{3} \frac{\mu^2 p}{Q^2} \left[ \left( \frac{2Qn}{\mu p} + h^2 \right)^{\frac{3}{2}} - h^3 \right],$$

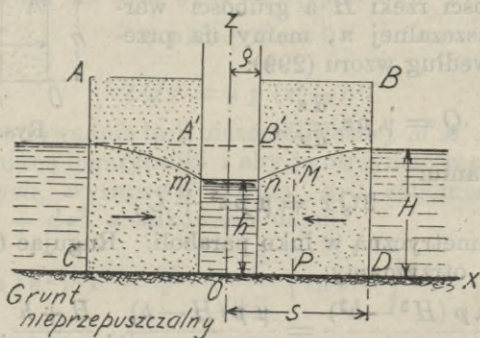
a ponieważ według równania (301):

$$\frac{2Qn}{\mu p} + h^2 = H^2,$$

można więc napisać:

$$T = \frac{\mu^2 p}{3Q^2} (H^3 - h^3). \quad (302)$$

**63. Studnie.** Weźmy pod uwagę w warstwie przepuszczalnej, która leży na warstwie nieprzepuszczalnej poziomej, masę cylindryczną  $ABCD$  (rys. 130), do której ze wszyst-



Rys. 130.

kich stron przesiąka woda. W tej masie cylindrycznej wykopaną została studnia, dochodząca do warstwy nieprzepuszczalnej. Dopóki nie czerpie się wody ze studni, poziom utrzymuje się na linii  $A'B'$ , i w warstwie piaskowej woda pozostaje w spokoju. Wypompowanie wody ze studni obniża poziom do  $mn$  i powoduje ruch dośrodkowy w warstwie wodonośnej. Powierzchnia wody w tej warstwie przybiera kształt powierzchni obrotowej, której tworzącą jest pewna krzywa  $Mn$ . Ruch każdej cząstki wody skierowany jest ku osi studni, a rzuty poziome pojedynczych strug są promieniami, schodzącymi się w jednym punkcie, na osi studni i jednakowo względem siebie nachylonymi. Jeżeli grubość warstwy wodonośnej oznaczymy przez  $H$ , promień studni przez  $\rho$ , promień uważanej masy cylindrycznej przez  $s$ , głębokość wody w studni po wypompowaniu przez  $h$ , mamy na przekroju cylindrowym o tworzącej  $MP$ :

$$Q = 2\mu\pi z x U,$$

a że  $U = p \frac{dz}{dx}$ , więc  $Q = 2 p \mu \pi z x \frac{dz}{dx}$ , albo kładąc dla skrócenia  $k = p \mu \pi$ ,

$$Q = 2 k z x \frac{dz}{dx}.$$

Rozdzieliwszy zmienne, mamy:

$$\frac{Q dx}{x} = 2 k z dz,$$

a po zcałkowaniu, uważając wydatek  $Q$  jako stały:

$$Q \ln x = k z^2 + C. \quad (303)$$

Dla  $x = \rho$  i  $x = s$ , powinno być  $z = h$  i  $z = H$ , więc:

$$Q \ln \rho = k h^2 + C,$$

$$Q \ln s = k H^2 + C,$$

a po wyrugowaniu  $C$  między pierwszym równaniem a dwoma ostatnimi:

$$Q \ln \frac{x}{\rho} = k (z^2 - h^2),$$

$$Q \ln \frac{s}{\rho} = k (H^2 - h^2),$$

skąd:

$$\frac{\ln \frac{x}{\rho}}{\ln \frac{s}{\rho}} = \frac{z^2 - h^2}{H^2 - h^2}, \quad (304)$$

$$Q = \frac{k (H^2 - h^2)}{\ln \frac{s}{\rho}}. \quad (305)$$

Równanie (304), niezależne od  $k$  i  $Q$ , to jest od przepuszczalności gruntu i wydatku studni, jest równaniem krzywej  $Mn$  i określa krzywą wykładniczą.

Równanie (305) wykazuje, że wydatek studni powiększa się razem z naporem  $H - h$ , przepuszczalnością warstwy wodonośnej i promieniem  $\rho$  studni a zmniejsza się razem z promieniem  $s$  masy wodonośnej otaczającej studnię. W rzeczywistości, ponieważ  $\rho$  wchodzi tylko logarytmem, zmiany promienia mają niewielki wpływ na wydatek, zwłaszcza gdy promień  $s$  jest znacznie większy od  $\rho$ , co zwykle ma miejsce. Jeżeli jednak oznaczymy przez  $\alpha$  kąt, jaki styczna do krzywej  $Mn$  w punkcie  $M$  czyni z osią  $Ox$ , to  $Q = 2 k z x \sin \alpha$

a tak samo przy ścianie studni, oznaczając kąt stycznej z osią  $Ox$  przez  $\alpha'$ ,  $Q = 2k h \rho \sin \alpha'$ , skąd:

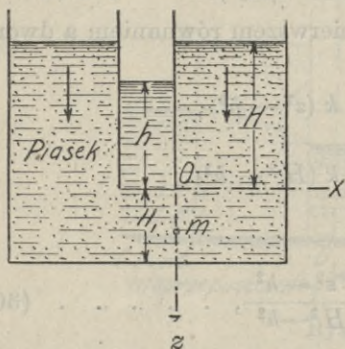
$$h = \frac{Q}{2k\rho \sin \alpha'}$$

Ponieważ maximum  $\sin \alpha'$  jest równe jedności, przeto minimum  $h$ , odpowiadające danemu wydatkowi  $Q$  i promieniowi  $\rho$ , będzie:

$$h = \frac{Q}{2k\rho}$$

co uwidoczni wpływ wielkości promienia studni na wydatek, gdyż przy większym promieniu powiększać można znacznie głębokość wypompowywania, a więc i napór.

Do studni rozważanej woda dochodziła wyłącznie przez ściany, gdyż dno przyjmowano nieprzepuszczalne; zdarza się



Rys. 131.

jednak, że studnia zasilana jest równocześnie przez dno i ściany, albo wyłącznie przez dno. W tym ostatnim przypadku, rachunek wykazuje wogóle większy wpływ promienia studni na wydatek, niż przy dnie nieprzepuszczalnym, co zresztą sprawdzone zostało doświadczeniami. I rzeczywiście, jeżeli weźmiemy pod uwagę studnię (rys. 131), której ściany są nieprzepuszczalne, to dla strugi przechodzącej przez

przekrój  $Oz$  w punkcie  $m$ , którego rzędna jest  $z$ , droga do przebycia jest  $H + 2z$ , napór  $H - h$  i według wzoru (297):

$$U = p \frac{H - h}{H + 2z}$$

Wydatek cylindra elementarnego wysokości  $dz$  przechodzącego przez punkt  $m$ , będzie:

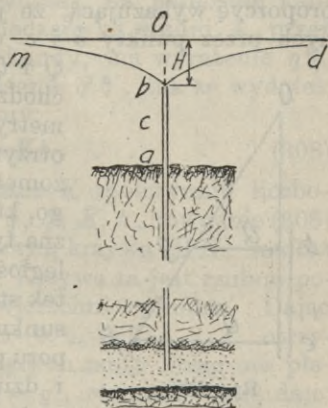
$$dQ = 2\pi\rho p (H - h) \mu \frac{dz}{H + 2z} = 2k\rho (H - h) \frac{dz}{H + 2z},$$

a po zcałkowaniu, w granicach od  $z = 0$ ,  $Q = 0$ , do  $z = H_1$ ,

$$Q = k\rho (H - h) \ln \left( 1 + \frac{2H_1}{H} \right),$$

wzór wskazujący, że  $Q$  jest proporcjonalne do  $H - h$  i do  $\rho$ .

**64. Studnie artezyjskie.** Jeżeli rurą zapuszczoną w głąb i dochodzącą do niższej warstwy wodonośnej, która leży pod warstwami nieprzepuszczalnymi, podnosi się woda i jeżeli rura u wierzchu zatrzymuje się w punkcie  $b$  (rys. 132), w pewnej odległości od poziomu piezometrycznego, to powierzchnia tego poziomu obniża się ku otworowi rury, według krzywej  $m b d$ , i woda wypływa z rury pod naporem  $b O$ . Do studzien artezyjskich stosowany być może wzór (305), gdyż okoliczności ruchu wody są podobne w obu przypadkach. Średnią wysokość warstwy wodonośnej  $\frac{1}{2}(H+h)$  zastąpić należy przez



Rys. 132.

grubość  $n$  warstwy, z której przyływa woda wznosząca się w rurze, a napór  $H - h$  przez wysokość  $b O = H$ . Pości  $s$  i  $\rho$  zachowują swe znaczenia:  $s$  szerokość warstwy przepuszczalnej otaczającej studnię, a  $\rho$  promień studni. Wzór (305) przybiera kształt:

$$Q = 2 k n \frac{H}{\ln \frac{s}{\rho}} \quad (306)$$

Dla ścisłości należałoby odejmować od  $H$  stratę naporu wynikającą z tarcia wody o ściany zapuszczonej rury; ta strata naporu jest funkcją średnicy rury i wydatku, ale ponieważ wogóle bywa niewielka w stosunku do całego naporu, może przeto być pomijana.

Proporcjonalność wydatku do naporu sprawdza się we wszystkich studniach artezyjskich, ale doświadczenia wykazują, że wpływ średnicy rury bywa większy, niż wskazany wzorem (306). Za wyborem większych średnic przemawia także większa łatwość przy wierceniu, zapuszczaniu rur i ich naprawie.

Oznaczmy przez  $Q'$  wydatek w innym punkcie  $c$  (rys. 133),  $H'$  napór odpowiadający temu wydatkowi. I tu także:

$$Q' = 2 k n \frac{H'}{\ln \frac{s}{\rho}}, \quad (307)$$

a dzieląc równanie (306) przez (307), mamy:

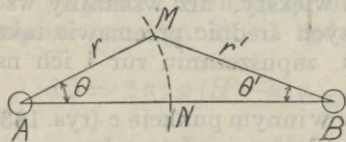
$$\frac{Q}{Q'} = \frac{H}{H'}$$

proporcję wykazującą, że jeżeli na poziomych przewodzonych przez punkty  $b$  i  $c$  odetniemy rzędne proporcjonalne  $Q$  i  $Q'$ , prosta  $fg$  teoretycznie przechodzić powinna przez poziom piezometryczny  $O$ . Najczęściej wszakże, otrzymany tym sposobem poziom piezometryczny jest niższy od rzeczywistego, który w przybliżeniu oznaczyć można tylko przez badanie kształtu i rozległości warstwy wodonośnej. Wydatek studni bywa zawsze w pewnym stopniu zmniejszony, w skutku strat naporu przy połączeniach rur, w szczelinach i dziurach przewodu, który nigdy nie może być bezwzględnie nieprzepuszczalnym.

Pewna część wydatku wznosi się pomiędzy rurą a ścianami przebitego otworu aż do warstw przepuszczalnych, w których się rozprasza.

Rys. 133.

**65. Wzajemny wpływ studzien.** Gdy warstwa, przez którą woda przesiąka, jest jednorodna i leży na poziomej warstwie nieprzepuszczalnej, to dla pojedynczej studni, powierzchni jednakowego naporu (§ 60) są cylindrami pionowymi, których osią wspólną jest oś studni. Rzuty poziome tych powierzchni cylindrycznych, czyli *krzywe jednakowego naporu*, są kołami, mającemi środek wspólny na osi studni a rzuty poziome pojedynczych strug prądu przesiąkającego — promieniami tych kół. Jeżeli w tej samej masie przepuszczalnej, w niewielkiej odległości jedna od drugiej, wykopanych będzie kilka studzien, to wydatki ich będą zależne jedne od drugich a krzywe jednakowego naporu i normalne do nich linie strug przybiorą różne kształty, odpowiednio do liczby studzien, ich wydatków i względnych odległości.



Rys. 134.

Weźmy pod uwagę dwie studnie  $A$  i  $B$  (rys. 134), zasilane przez tę samą warstwę wodonośną. Niech będzie  $Q$  wydatek studni  $A$ ; iloraz  $\frac{Q}{2\pi} = q$  przedstawia wydatek na jednostkę kąta między promieniami i dla kąta  $\theta$  wydatek odpowiadający będzie  $q\theta$ . Za płaszczyznę porównania weźmy po-

ziome dno warstwy wodonośnej, na którym położone są punkty  $A$  i  $B$  i jakikolwiek punkt  $M$  krzywej  $MN$ , położonej na tej płaszczyźnie.

Jeżeli oznaczymy przez  $q'$  wydatek na jednostkę kąta studni  $B$ , to objętość wody, przechodząca ku studni  $A$ , przez cylinder pionowy  $MN$ , w ciągu sekundy, ma wyrażenie  $q\theta$ , a przechodząca ku studni  $B$  wyrażenie  $q'\theta'$ , tak że wydatek cylindra będzie  $q\theta - q'\theta'$ . Położmy:

$$q\theta - q'\theta' = Kh, \quad \dots \quad (308)$$

oznaczając przez  $h$  ilość stałą a przez  $K$  współczynnik liczbowy. Dla każdego systemu wartości  $q, q', K, h$ , równanie (308) daje na płaszczyźnie porównania pewną krzywą  $MN$ , wzdłuż której wydatek cylindra jest stały. Krzywa ta jest rzutem poziomym strug, biegnących po powierzchni cylindra. Dając kolejno współczynnikowi  $K$  wartości  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , otrzymamy wiązkę krzywych, odtwarzających rzuty strug na płaszczyznę poziomą. W przypadku  $q = q'$ , równanie (308) daje:

$$\theta - \theta' = \frac{Kh}{q}; \quad \dots \quad (309)$$

a krzywe odpowiadające są hyperbolami równobocznymi, przechodzącymi przez środki  $A$  i  $B$ . Krzywe te są nakreślone na rys. 136.

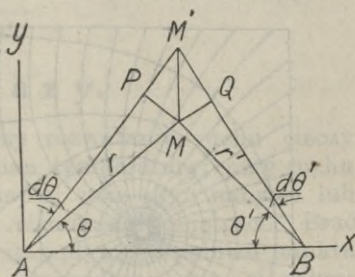
Aby otrzymać równanie powierzchni wody w warstwie wodonośnej, w której wykopane są studnie, weźmy  $AB$  za oś  $x$  (rys. 135), prostopadłą  $Ay$  za oś  $y$  a prostopadłą w  $A$  do płaszczyzny porównania za oś  $z$ , skierowaną od dołu do góry. Niech będzie  $MM' = dy$ , równoległy do  $Oy$  ślad płaszczyzny pionowej. Poprowadźmy prostopadłe  $MP$  i  $MQ$  do promieni  $AM'$  i  $BM'$  i połączmy  $MAM' = d\theta$ ,  $MBM' = d\theta'$ ,  $MP = r d\theta$ ,  $MQ = r' d\theta'$ . Na płaszczyźnie  $MM'$  wydatek będzie:  $dQ = \mu z dy U$ , a że według (308) i (297):

$$dQ = q d\theta - q' d\theta', \quad U = p \frac{dz}{dx},$$

więc:

$$\mu p z dy \frac{dz}{dx} = q d\theta - q' d\theta'.$$

Według rys. 135 mamy rzuty elementów  $dy$  i  $dx$ , na kierunku promieni  $AM$  i  $BM$ :



Rys. 135.

$$\begin{aligned} r d\theta &= dy \cos \theta, & dr &= dx \cos \theta, \\ r' d\theta' &= dy \cos \theta', & dr' &= -dx \cos \theta', \end{aligned}$$

a związki te pozwalają wyrugować z poprzedniego równania:  $dx$ ,  $dy$ ,  $d\theta$ ,  $d\theta'$ . Otrzymujemy wreszcie:

$$\mu p z dz = q \frac{dr}{r} + q' \frac{dr'}{r'},$$

a po zcałkowaniu:

$$\mu p z^2 = 2q \ln r + 2q' \ln r' + C$$

albo:

$$\mu p z^2 = 2 \ln r^q r'^{q'} + C. \quad (310)$$

Jest to w spólrzędnych cylindrycznych, równanie powierzchni piezometrycznej dla warstwy wodonośnej.

Gdy  $q = q'$ , równanie przybiera kształt:

$$\mu p z^2 = 2q \ln r r' + C. \quad (311)$$

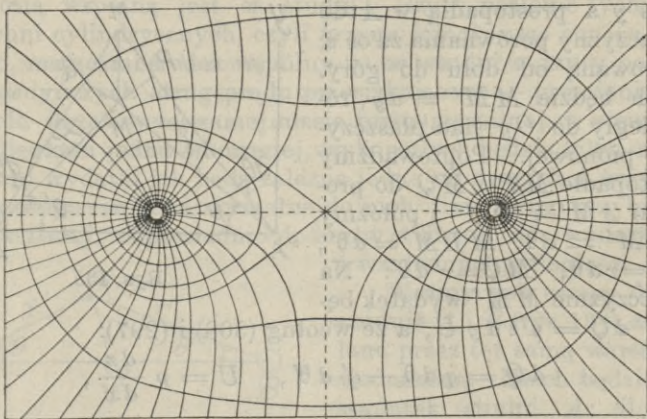
Według wzoru (310), warstwie na powierzchni wody wgłębnej, wzdłuż których  $z$  jest stałe, mają za równanie na płaszczyźnie poziomej, oznaczając ilość stałą przez  $k^2$ :

$$r^q r'^{q'} = k^2,$$

a gdy  $q = q'$ , równanie to, oznaczając inną stałą przez  $b^2$ , będzie:

$$r r' = b^2.$$

Krzywe, wyrażone tem równaniem, są to tak zwane *owale Cassini'ego*; niektóre z nich przedstawione są na rys. 136.



Rys. 136.

Owale te są normalne do hyperbol określonych równaniem (309). Gdy ilość stała  $b$  jest równa połowie odległości  $AB$



między studniami, owal zamienia się na lemniskatę, nakreśloną na rysunku; gdy zaś  $b$  różni się znacznie od połowy  $AB$ , krzywe zbliżają się do kształtu kołowego. Objętość wody przechodzącej w jednostce czasu przez cylindry opisane na owalach otaczających obie studnie wynosi  $2\pi(q + q')$ , a przez także cylindry otaczające jedną studnię:  $2\pi q$  i  $2\pi q'$ .

Dla otrzymania wartości  $q = q'$ , przypuścimy, że dwa punkty, przez które przechodzi prąd wglębny, leżą na jednej płaszczyźnie pionowej z osiami obu studzien, tak że oznaczając  $AB = l$ , można położyć, jak w § 63:

$$\begin{aligned} r' &= \rho, & r &= l + \rho, & z &= h \\ r' &= s, & r &= l + s, & z &= H. \end{aligned}$$

Przyjmując te granice dla wyrugowania ilości stałej we wzorze (311) i mając na uwadze, że  $\mu p = \frac{k}{\pi}$  (§ 63), otrzymujemy:

$$q = \frac{k}{2\pi} \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{s}{\rho} + \ln \frac{l+s}{l+\rho}}, \dots \dots \dots (312)$$

wzór uwydatniający wpływ odległości, między dwiema studniami, na wydatek każdej ze studzien. Widzimy, że ten wydatek powiększa się razem z odległością i staje się równy wydatkowi pojedynczej studni gdy  $l = \infty$ , a połowie tego wydatku gdy  $l = 0$ .

## VIII. G a z y.

**66. Prawa ogólne.** Przy rozważaniu ruchu cieczy można było pomijać wpływ zmian temperatury; przy ruchu gazów uwzględniać trzeba ilość ciepła, jaką płyn nabywa lub traci i wynikające stąd zmiany ciśnienia i objętości. Brać trzeba także pod uwagę możliwy stan płynu, w pobliżu punktu skroplenia; ten względ wszakże, wchodzący już w zakres termodynamiki, można tu pominąć, gdyż zajmować nas będą wyłącznie *gazy stałe*, to jest znajdujące się w stanie dostatecznie odległym od punktu skroplenia, mianowicie też *gazy doskonałe*, które podpadają w zupełności pod prawa Mariotte'a i Gay Lussac'a. Wprawdzie podciąganie pod te prawa gazów naturalnych nie będzie ścisłym, da wszakże, dla ich większości, przybliżenie wystarczające w praktyce.

Oznaczając przez  $p$  ciśnienie gazu,  $v$  objętość odpowiadającą jednostce jego ciężaru,  $\alpha$  współczynnik rozszerzalności

na  $1^{\circ}$  C.,  $t$  temperaturę, mamy według praw Mariotte'e i Gay-Lussac'a:

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \text{ilości stałej.}$$

Oznaczywszy tę ilość stałą przez  $\frac{R}{\alpha}$  i biorąc spółczynnik:

$$\alpha = 0,003663, \quad \frac{1}{\alpha} = 273,$$

równaniu powyższemu nadać można postać:

$$\frac{pv}{273 + t} = R.$$

Ilość  $273 + t$  stanowi tak zwaną temperaturę bezwzględną, t. j. liczoną od zera bezwzględnego, położonego na stopniu  $-273^{\circ}$  podziałki Celsiusza. Kładąc  $273 + t = T$ , mieć będziemy:

$$pv = RT. \quad \dots \quad (313)$$

Stała  $R$  nie jest jednakową dla wszystkich gazów. Przy jednakim ciśnieniu i jednakowej temperaturze,  $R$  jest proporcjonalne do  $v$  objętości jednostki ciężaru, albo odwrotnie proporcjonalne do ciężaru jednostki objętości, czyli do gęstości płynu  $\gamma$ . Mamy więc:

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}, \quad \dots \quad (314)$$

a jeżeli  $G$  jest ciężar objętości  $V$  gazu, czyli:

$$V = Gv, \quad \dots \quad (315)$$

to według równania (314):

$$Vp = GRT. \quad \dots \quad (316)$$

Dla mieszaniny gazów ilość stała  $R_m$  jest według prawa Daltona:

$$R_m = \frac{\Sigma RG}{\Sigma G}. \quad \dots \quad (317)$$

Z praw równowagi plynów (rozdz. I) wynikają dwa wzory dla balonów. Zasada Archimedes'a (§ 8) dostarcza wzoru na siłę  $S$ , podnoszącą w powietrzu balon, którego objętość  $V$  wypełniona jest gazem, o ciężarze właściwym  $\gamma_1$ , mniejszym od ciężaru właściwego powietrza  $\gamma$ , przyczem całkowity ciężar balonu wynosi  $G$ :

$$S = V(\gamma - \gamma_1) - G; \quad \dots \quad (318)$$

a z podanego w § 5 równania równowagi gazu doskonałego (15), mamy, oznaczając przez  $p_0$  ciśnienie powietrza na

powierzchni ziemi, a przez  $p$  ciśnienie powietrza na wysokości  $h$  nad ziemią:

$$\ln \frac{p_0}{p} - \frac{\gamma_0}{p_0 (1 + \alpha t)} h = 0.$$

Jeżeli tu położymy, według praw Mariotte'a i Gay-Lussac'a,

$$\frac{\gamma_0}{p_0 (1 + \alpha t)} = \frac{\gamma}{p} = \frac{1}{k},$$

to otrzymamy wysokość, do której wznosi się balon:

$$h = k \cdot \ln \frac{p_0}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

We wzorze tym, współczynnik  $k$ , przy uwzględnieniu równań (313) i (314) oraz wartości dla powietrza  $R = 29,27$ :

$$k = \frac{p}{\gamma} = p v = R T = 7991 \left(1 + \frac{t}{273}\right) \quad . \quad (320)$$

*Zadanie 55.* Jak obliczyć, z ilości stałej  $R$ , ciężar właściwy gazu  $\gamma$ , przyjmując temperaturę  $0^0$  i normalną wysokość barometru 760 mm?

Z równania (314), kładąc  $p = 1 \text{ At}^1) = 10333 \text{ kg/m}^2$ ,  $T = 273$ , mamy:

$$\gamma = \frac{37,85}{R}.$$

*Zadanie 56.* Ile waży 1 m<sup>3</sup> powietrza przy temp.  $0^0$  i ciśnieniu normalnem?

Według wzoru otrzymanego w zadaniu 61, biorąc z tabl. 12 (str. 224) wartość stałej  $R$  dla powietrza, będzie:

$$\gamma = \frac{37,85}{29,27} = 1,293 \text{ kg}.$$

*Zadanie 57.* Ile waży 8,5 m<sup>3</sup> powietrza, pod ciśnieniem 4,2 at<sup>2)</sup> i przy temperaturze  $20^0$ .

Według wzoru (316), przyjmując okrągło  $p = 1 \text{ at} = 10000 \text{ kg/m}^2$ :

$$G = \frac{8,5 \cdot 42000}{29,27 (273 + 20)} = 41,627 \text{ kg},$$

a przyjmując jak w zadaniu 61,  $p = 10333 \text{ kg/m}^2$ :

$$G = \frac{8,5 \cdot 4,2 \cdot 10333}{29,27 (273 + 20)} = 43,013 \text{ kg}.$$

*Zadanie 58.* Jaka objętość ma 12,4 kg powietrza, pod ciśnieniem 5,7 At i przy temperaturze  $35^0$ .

Według wzoru (316):

$$V = \frac{G R T}{p} = \frac{12,4 \cdot 29,27 (274 + 35)}{5,7 \cdot 10333} = 1,898 \text{ m}^3.$$

<sup>1)</sup> At = atmosfera fizyczna (ciśnienie 10333 kg/m<sup>2</sup>).

<sup>2)</sup> at = atmosfera techniczna (ciśnienie 1 kg/cm<sup>2</sup>).

**Zadanie 59.** Znaleść stałą  $R$  i ciężar właściwy  $\gamma$  gazu oświetlającego, w którego  $100 \text{ m}^3$  jest 10 tlenku węgla, 45 wodoru, 35 metanu, 4 etylenu, 3 kwasu węglanego i 3 azotu. Stałe  $R$  i ciężary właściwe  $\gamma$  wymienionych składników podane są w tabl. 12.

Obliczywszy ciężary składników, otrzymuje się dla gazu oświetlającego  $\gamma = 0,5634 \text{ kg/m}^3$ , a z wzoru (317)  $R_m = \frac{\sum RG}{\sum G} = 67,19$ .

**Zadanie 60.** Urządzenie gazowe zużywa na płomień i godzinę  $0,07 \text{ m}^3$  gazu oświetlającego, przy ciśnieniu gazu  $100 \text{ mm}$  słupa wody, temperaturze  $15^\circ$  i ciśnieniu powietrza  $700 \text{ mm}$ . Sprowadzić te liczby do ciśnienia gazu wyrównywającego ciśnienie powietrza, temperatury  $0^\circ$  i normalnej wysokości barometru  $760 \text{ mm}$ .

Pierwotne ciśnienie gazu:  $p_1 = p_0 + h\gamma$ , gdzie  $p_0$  ciśnienie powietrza,  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $\gamma$  ciężar właściwy wody. Przy  $700 \text{ mm}$  barometru i ciężarze rtęci  $\gamma_1 = 0,013596$ ,  $p_0 = 70$ ,  $\gamma_1 = 0,95172$  at. a  $p_1 = 0,96172$  at.

Według wzoru (316):

$$V_1 p_1 = G R T_1, \quad V_2 p_2 = G R T_2, \\ V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} \frac{T_1}{T_2},$$

a że  $p_2 = 1,0333$  at, więc:

$$V_2 = 0,07 \frac{0,96172 \cdot 273}{1,0333 \cdot 288} = 0,0618 \text{ m}^3.$$

**Zadanie 61.** Balon napełniony wodorem ma unosić, oprócz trzech ludzi (po  $80 \text{ kg}$ ), motor ważący  $450 \text{ kg}$  i ciężar własny wynoszący  $2800 \text{ kg}$ , przyczem podnosić się ma w górę z siłą  $1370 \text{ kg}$ . Stan barometru  $730 \text{ mm}$ , temperatura  $20^\circ \text{ C}$ . Jaka ma być objętość balonu?

Przy ciśnieniu:  $p = 10333 \frac{730}{760} \text{ kg/m}^3$  i temperaturze  $T=293^\circ$

mamy według wzoru (314):  $\gamma = \frac{p}{RT}$ , a biorąc wartości  $R$  z tabl. 12, będzie dla powietrza  $\gamma = 1,16 \text{ kg/m}^3$  a dla wodoru  $\gamma_1 = 0,08 \text{ kg/m}^3$  Według wzoru (318):

$$V = \frac{S + G}{\gamma - \gamma_1} = \frac{4860}{1,08} = 4500 \text{ m}^3.$$

**Zadanie 62.** Balon sztywny, objętości  $V$  unosi ciężar  $G$ . Do jakiej wysokości wzleci, przyjmując, że temperatura nie ulega zmianie?

Największą wysokość osiąga balon, gdy  $S = 0$ , wtedy według wzoru (318):  $\gamma - \gamma_1 = \frac{G}{V}$ , a że według wzoru (314):  $\gamma = \frac{p}{RT}$ ,

$\gamma_1 = \frac{p}{R_1 T}$ , więc  $p = \frac{G}{V} \cdot \frac{T}{1/R - 1/R_1}$ . Jeżeli  $\gamma_0$  i  $p_0$  oznaczają ciężar właściwy i ciśnienie powietrza na powierzchni ziemi, to ponieważ  $\gamma_0 = \frac{p_0}{RT}$ ,  $p = \frac{G}{V\gamma_0} \cdot \frac{p_0}{1 - R/R_1}$ , więc według wzorów (319) i (320) największa wysokość będzie:

$$h = RT \ln \left[ \frac{V\gamma_0}{G} \left( 1 - \frac{R}{R_1} \right) \right].$$

**Zadanie 63.** Do jakiej największej wysokości wzniesie się balon z zadania 67, przyjmując, że temperatura nie ulega zmianie?

Dla  $\gamma_0 = 1,16$ ,  $t = 20^\circ$ , według wzorów (319) i (320):

$$h = 7992 \left( 1 + \frac{20}{273} \right) \ln \left[ \frac{4500 \cdot 1,16}{3490} \left( 1 - \frac{29,27}{422,59} \right) \right] = 2837 \text{ m.}$$

**67. Wpływ ciepła.** Gdy jednostka ciężaru gazu otrzymuje pewną ilość ciepła, nieskończenie małą  $dQ$ , przyjmujemy, że temperatura gazu powiększa się o  $dT$  a objętość o  $dV$ . Dostarczona więc ilość ciepła  $dQ$  rozkłada się na dwie części, wywołujące te dwa skutki. Pierwsza z tych części będzie  $c_v dT$ , gdzie  $c_v$  jest spółczynnik stały, a druga będzie proporcjonalną do pracy  $p dV$ , wytworzonej przez zmianę objętości, czyli równą  $A p dV$ , gdzie  $A$  jest także spółczynnikiem stałym. Będzie więc:

$$dQ = c_v dT + A p dv. \quad . \quad . \quad . \quad (321)$$

Przyjmując  $dv = 0$ , to jest objętość gazu stałą, mamy  $dQ = c_v dT$ , albo:

$$Q = c_v (T_2 - T_1). \quad . \quad . \quad . \quad (322)$$

Spółczynnik  $c_v$  mierzy więc ilość ciepła, która dostarczoną być winna jednostce ciężaru gazu, dla podniesienia temperatury o  $1^\circ \text{C.}$ , przy zachowaniu stałej objętości. Jest to więc pojemność cieplikowa gazu, o stałej objętości, albo ciepło właściwe. Spółczynnik ten nie jest jednaki dla wszystkich gazów i zmienia się w stosunku odwrotnym do ich gęstości.

Jeżeli przyjmiemy  $dT = 0$ , czyli temperaturę stałą, mamy:

$$dQ = A p dv,$$

albo po zcałkowaniu:

$$Q = A \int p dv.$$

Gdy uważamy temperaturę za miarę wewnętrznej energii gazu, to ilości ciepła  $Q$  pochłoniętej przez gaz, odpowiada wykonana praca  $\int p dv$ . Oznaczając tę pracę przez  $W$ , mamy:

$$Q = A W. \quad . \quad . \quad . \quad (323)$$

Spółczynnik  $A$ , mierzący ilość ciepła, potrzebną do wykonania jednostki pracy, nosi nazwę *równoważnika cieplikowego pracy* a jego odwrotność  $1/A$ , wyrażająca ilość pracy, która odpowiada jednostce ciepła, jest *równoważnikiem mechanicznym ciepła*. Spółczynnik ten jest stały, nie tylko dla wszystkich gazów, ale i dla wszelkich przemian ciepła na pracę lub odwrotnie. Przyjmując kilogrametr za jednostkę pracy a ciepłostkę (ilość ciepła potrzebną do podniesienia od  $0^\circ$  do  $1^\circ$  temperatury kilograma wody) za jednostkę ciepła, mamy:

$$A = 0,00234, \quad \frac{1}{A} = 427.$$

Gdy objętość i temperatura zmieniają się równomiernie a ciśnienie  $p$  pozostaje stałym, to oznaczając przez  $v_1$  i  $T_1$  początkową objętość jednostki ciężaru i początkową temperaturę, a przez  $v_2$  i  $T_2$  też same ilości, po otrzymaniu przez gaz jakiegokolwiek ilości ciepła  $Q$ , mieć będziemy po zcałkowaniu równania (321):

$$Q = c_v (T_2 - T_1) + A p (v_2 - v_1);$$

że zaś według wzoru (313):

$$p v_1 = R T_1, \quad p v_2 = R T_2,$$

więc:

$$Q = (T_2 - T_1) (c_v + A R) = c_p (T_2 - T_1), \quad (324)$$

po położeniu spółczynnika liczbowego:

$$c_v + A R = c_p,$$

a według wzorów (323) i (313) jest wtedy praca:

$$W = \frac{c_p}{A} (T_2 - T_1) = R (T_2 - T_1) = p (v_2 - v_1). \quad (325)$$

Spółczynnik  $c_p$  przedstawia ilość ciepła, jakiej trzeba dostarczyć jednostce ciężaru gazu dla podniesienia temperatury o  $1^\circ \text{C}$ ., przy stałym ciśnieniu. Jest to więc pojemność cieplikowa, albo ciepło właściwe gazu, przy stałym ciśnieniu.

Stosunek  $\frac{c_p}{c_v} = k$  ma dla gazów jednoatomowych wartość  $\frac{5}{3}$ , a dla dwuatomowych, przy zwykłych temperaturach 1,4. Wartości:  $\gamma$ ,  $R$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  i  $k$ , te ostatnie odpowiadające temperaturom między  $0^\circ$  i  $200^\circ$ , podane są w następującej tablicy.

T A B L I C A 12.

G a z	$\gamma$ $kg/m^3$	$R$	Ciepło właściwe		$k = \frac{c_p}{c_v}$
			$c_p$	$c_v$	
Powietrze . . . . .	1,293	29,27	0,24	0,172	1,40
Tlen . . . . .	1,429	26,50	0,218	0,156	1,40
Azot . . . . .	1,251	30,26	0,249	0,178	1,40
Wodór . . . . .	0,090	420,6	3,405	0,242	1,407
Tlenek węgla . . . . .	1,250	30,29	0,250	0,179	1,398
Kwas węglowy . . . . .	1,964	19,27	0,21	0,165	1,28
Metan . . . . .	0,715	52,90	0,59	0,46	1,28
Etylen . . . . .	1,251	30,25	0,40	0,32	1,25

**Zadanie 64.** Przez ogrzanie powietrza zamkniętego, o temperaturze  $20^{\circ}$ , potraja się jego ciśnienie. Jaka będzie temperatura powietrza po ogrzaniu?

Przy stałej objętości, według wzoru (313):

$$p_1 : p_2 = T_1 : T_2 = 1 : 3, \\ t_2 = T_2 - 273 = 606^{\circ}.$$

**Zadanie 65.** W cylindrze, pod tłokiem, ma powietrze temperaturę  $t_1 = 550^{\circ}$ . Spalenie wstrzykniętego paliwa płynnego doprowadza taką ilość ciepła, że objętość powietrza się podwaja, bez zmiany ciśnienia na tłok. Jaki będzie wzrost temperatury powietrza i praca ciśnienia na tłok?

Przy stałym  $p$ , według wzoru (313):

$$v_1 : v_2 = T_1 : T_2 = 1 : 2, \quad t_2 = 1373^{\circ},$$

a według wzoru (325):

$$W = R (T_2 - T_1) = 24089 \text{ mkg}.$$

**Zadanie 66.** Gaz, o ciśnieniu 5,2 at, ponad ciśnieniem powietrza zewnętrznego, rozpręża się bez zmiany temperatury do 0,28 at, poniżej tego ciśnienia. Pokrotnie powiększy się jego objętość, przy wysokości barometru rtęciowego 690 mm?

Ciśnienie powietrza zewnętrznego w słupie rtęciowym  $\frac{p_0}{\gamma} = 69 \text{ cm}$ , ciężar właściwy rtęci  $\gamma = 0,013596 \text{ kg/cm}^3$ ,  $p_0 = 0,938 \text{ at}$ . Przy stałej temperaturze, według wzoru (313):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0 + 5,2}{p_0 - 0,28} = 9,3.$$

Objętość gazu powiększy się 9,3 razy.

**Zadanie 67.** Gaz o ciśnieniu 2,5 at, ponad ciśnieniem powietrza zewnętrznego, rozpręża się do  $4\frac{1}{2}$  razy większej objętości. Jaka będzie, po rozprężeniu, przewyżka ciśnienia w gazie, ponad ciśnieniem zewnętrznym, jeżeli to ostatnie wynosi 720 mm barometru rtęciowego a temperatura gazu nie ulega zmianie.

$$\frac{p_0}{\gamma} = 72 \text{ cm}, \quad \gamma = 0,013596 \text{ kg/cm}^3, \quad p_0 = 0,979 \text{ at},$$

$$\frac{v_2}{v_1} = 4,5 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2,5 + 0,979}{p_2},$$

skąd  $p_2 = 0,773 \text{ at}$ , a szukana przewyżka:

$$0,773 - 0,979 = -0,206 \text{ at}.$$

**Zadanie 68.** Dwa zbiorniki, jednakiej temperatury, mieszczą w sobie dwa różne gazy o ciężarach  $G_1, G_2$ , ciśnieniach  $p_1, p_2$  i ilościach stałych  $R_1, R_2$ . Jakie będzie ciśnienie  $p$  wpołączonych zbiornikach?

Oznaczając przez  $V_1, V_2$  objętości zbiorników, mamy według wzoru (316):

$$V_1 = \frac{R_1 T}{p_1} G_1, \quad V_2 = \frac{R_2 T}{p_2} G_2,$$

a po połączeniu zbiorników będzie całkowita objętość obu gazów:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{RT}{p} (G_1 + G_2).$$

Według wzoru (317):

$$p = p_1 p_2 \frac{G_1 R_1 + G_2 R_2}{G_1 R_1 p_2 + G_2 R_2 p_1}.$$

**68. Przemiany termodynamiczne.** Różniczkując równanie (313), otrzymujemy:

$$R dT = p dv + v dp,$$

a wstawiając otrzymaną z tego równania wartość na  $dT$  w równanie (321), mieć będziemy:

$$dQ = \frac{c_v}{R} (v dp + p dv) + A p dv,$$

albo z uwagi, że  $c_v + RA = kc_v$ :

$$dQ = \frac{c_v}{R} (v dp + k p dv).$$

Gdy gaz nie otrzymuje ani nie traci ciepła,  $dQ = 0$ , czyli:

$$v dp + k p dv = 0,$$

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0,$$

a po zcałkowaniu:

$$\left. \begin{aligned} p v^k &= \text{ilości stałej, a także } \} \\ p V^k &= \text{ilości stałej.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (326)$$

Przemiana gazu, nieotrzymującego ani nietracącego ciepła, nosi nazwę *przemiany adiabatycznej*; towarzyszy jej zmiana temperatury i wytworzenie albo zużycie pracy. Gdy gaz, ze stanu  $p_1 v_1$  przechodzi do stanu  $p_2 v_2$  przez przemianę adiabatyczną, mamy:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k;$$

a jeżeli  $T_1$  i  $T_2$  są to temperatury odpowiadające, mamy także według równania (313):

$$p_1 v_1 = R T_1, \quad p_2 v_2 = R T_2,$$

skąd:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \dots \dots (327)$$

Odpowiadająca przemianie adiabatycznej, praca mechaniczna związana jest ze zmianą temperatury równaniem (321),



w którym  $dQ = 0$ , czyli równaniem:

$$c_v dT + A p dv = 0,$$

z którego otrzymujemy po zcałkowaniu:

$$c_v (T_2 - T_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p dv = 0,$$

a praca mechaniczna:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p dv = -\frac{c_v}{A} (T_2 - T_1) = \frac{c_v}{A} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

albo z uwagi na związku:  $c_v + AR = c_p = k c_v$ , oraz na wzór (313):

$$\begin{aligned} W &= \frac{R T_1}{k-1} (T_1 - T_2) = \frac{R T_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = \\ &= \frac{p_1 v_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right] = \frac{R T_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right]. \end{aligned} \quad (328)$$

Wytworzeniu więc pracy zewnętrznej towarzyszy zmniejszenie temperatury i odwrotnie powiększenie temperatury towarzyszy zużyciu pracy zewnętrznej.

Dla gazów dwuatomowych przyjmuje się następujące wartości wykładników:

$$\begin{array}{lll} k = 1,4 & k - 1 = 0,4 & \frac{k-1}{k} = 0,286 \\ \frac{1}{k} = 0,714 & \frac{1}{k-1} = 2,5 & \frac{k}{k-1} = 3,5. \end{array}$$

Gdy gaz przechodzi z jednego stanu do drugiego, zachowując tę samą temperaturę, przemiana jest *izotermiczną* i równanie (313) przy stałej temperaturze daje:

$$p v = \text{ilości stałej} \quad (329)$$

Przemianie towarzyszy zysk lub strata ciepła i wytworzenie lub zużycie pracy mechanicznej, bo kładąc w równanie (321)  $dT = 0$ , mamy:

$$dQ = A p dv,$$

a wstawiając za  $p$  wartość z równania (313):

$$dQ = A R T \frac{dv}{v}.$$

Po zcałkowaniu w granicach  $v_1$  i  $v_2$ , otrzymamy:

$$Q = ART \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = ART \ln \frac{v_2}{v_1}$$

i ilość ta nie może być zerem, gdy tylko  $v_2$  jest różne od  $v_1$ .  
Ponieważ według wzoru (313)  $p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT$ , więc:

$$Q = A p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = A p_2 v_2 \ln \frac{p_1}{p_2} \dots (330)$$

a praca mechaniczna:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \ln \frac{p_1}{p_2} \dots (331)$$

*Zadanie 69.* Powietrze  $V = 0,4 \text{ m}^3$ ,  $t_0 = 15^\circ$ ,  $p_0 = 1,8 \text{ At}$ , rozpręża się bez doprowadzania ciepła do objętości podwójnej i następnie bez zmiany temperatury schodzi do objętości pierwotnej. Jaka będzie praca całkowita, końcowa temperatura i ciśnienie?

Dla pierwszej przemiany (adiabaticznej), według wzoru (328):

$$W_1 = \frac{RT_0}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} \right], \quad T_0 = t_0 + 273^\circ = 288^\circ, \quad \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{2}.$$

Dla drugiej przemiany (izotermicznej), według wzoru (331):

$$W_2 = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad T_1 = T_0 \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1}, \quad \frac{v_1}{v_2} = 2.$$

Praca całkowita  $W = G(W_1 + W_2)$ , a że  $G = \frac{Vp_0}{RT_0}$ , przeto:

$$W = \frac{Vp_0}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} \left( 1 + [k-1] \ln \frac{v_1}{v_2} \right) \right],$$

a po wstawieniu  $p_0 = 1,8 \cdot 10333 \text{ kg/m}^2$ ,  $k = 1,41$ :

$$W = 607,88 \text{ mkg}.$$

Temperatura końcowa:

$$T_2 = T_1 = T_0 \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} = 288^\circ \left( \frac{1}{2} \right)^{0,41} = 216,7^\circ,$$

$$t_2 = -56,3^\circ.$$

Ciśnienie końcowe, według wzorów (313), (314) i (326):

$$p_0 v_0^k = p_1 v_1^k, \quad p_1 v_1 = p_2 v_2,$$

$$p_2 = p_0 \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^k \left( \frac{v_1}{v_2} \right) = 1,355 \text{ At}.$$

*Zadanie 70.* Powietrze  $V_1 = 3,2 \text{ m}^3$ ,  $p = 1,5 \text{ At}$ ,  $t_1 = 36^\circ$ , rozpręża się bez zmiany ciśnienia, do objętości  $V_2 = 5,2 \text{ m}^3$ . Jak się zmienia temperatura, jaka zostaje wykonana praca i ile ciepła należy doprowadzić?

$T_1 = 273^{\circ} + 36^{\circ}$ , więc według wzoru (316), przy stałym ciśnieniu:

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 502,1^{\circ},$$

$$t_2 = T_2 - 273 = 229,1^{\circ};$$

według wzoru (325) praca wykonana:

$$G W = V_1 p \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 3,2 \cdot 1,5 \cdot 10333 \cdot \frac{502,1 - 309}{309} = 30995 \text{ mkg},$$

a według wzoru (323) potrzebna ilość ciepła, przy  $c_p = 0,24$ :

$$G Q = G W \frac{c_p}{R} = 254 \text{ ciepłostek.}$$

**Zadanie 71.** Powietrze  $V_1 = 2,4 \text{ m}^3$ ,  $p_1 = 5,8 \text{ At}$ ,  $t_1 = 15^{\circ}$  rozpręża się do  $V_2 = 4 \text{ m}^3$ , bez zmiany temperatury. Jak się zmienia ciśnienie, jaka została dokonana praca i ile trzeba doprowadzić ciepła?

Według wzoru (316):  $V_1 p_1 = V_2 p_2$ ,  $p_2 = 3,48 \text{ At}$ , dalej według wzoru (331):

$$G W = V_1 p_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 2,4 \cdot 5,8 \cdot 10333 \ln \frac{4}{2,4} = 73471 \text{ m/kg},$$

a według (323):  $G Q = A G W = \frac{1}{427} G W = 172 \text{ ciepłostek.}$

**Zadanie 72.** W cylindrze silnika znajduje się mieszanina powietrza i pary paliwa płynnego, pod ciśnieniem  $p_1 = 0,9 \text{ at}$  i w temperaturze  $t_1 = 100^{\circ}$ . Dla zapalenia mieszaniny doprowadzić trzeba temperaturę do  $t_2 = 600^{\circ}$ . Jakiego użyć trzeba ciśnienia, aby przemiana nastąpiła bez straty lub zysku na ciepłe?

Według wzoru (327):

$$\frac{273 + 600}{273 + 100} = \left( \frac{p_2}{0,9} \right)^{\frac{0,41}{1,41}},$$

$$p_2 = 16,76 \text{ at.}$$

**69. Zbiorniki powietrza.** Używane przy wodociągach dzwony powietrzne (§ 33) dla unikania szkodliwych skutków uderzeń wody w rurach przy nagłym zamykaniu kranów, pochłaniają energię wody przez ściskanie zawartego w nich powietrza. Jeżeli  $D$  jest średnica rury,  $l$  jej długość,  $U$  średnia prędkość wody, to energia wynosi:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot l \cdot \frac{U^2}{2}$$

i wyrównywać winna pracę, wykonaną przy podniesieniu ciśnienia powietrza w dzwonie, od wartości początkowej  $p_1$ , przed zamknięciem kranu, do wartości maximum  $p_2$ , zawarunkowanej wytrzymałością ścian dzwonu. Pominięta tu zostanie praca siły ciężkości, działającej na wodę w krótkim przeciągu czasu jej wchodzenia do dzwonu i ściskania powietrza, a także

tarcie wody o ściany rury w ciągu tego czasu i przyrównaną będzie połowa siły żywej wody do pracy oporu, jaki stawia powietrze, gdy jego ciśnienie przechodzi od  $p_1$  do  $p_2$ . Wartość tej pracy zależy od warunków, w jakich się odbywa ściskanie powietrza, które może następować według przemiany izotermicznej lub adiabatycznej. W pierwszym przypadku praca

odjemna będzie na jednostkę ciężaru (331):  $-p_1 v_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$

a dla całej ilości powietrza  $V_1$  zawartej w dzwonie  $-p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$

i otrzymamy równanie:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot l \cdot \frac{U^2}{2} + p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 0, \dots \quad (332)$$

pozwalające obliczyć objętość początkową  $V_1$ , jaką ma mieć dzwon, przy której ciśnienie nie będzie przekraczać wartości  $p_1$ .

W praktyce trudno przypuszczać, aby ściskanie powietrza w dzwonie odbywało się według przemiany izotermicznej, czyli aby powietrze oddawało ścianom dzwonu ilość ciepła równoważną wykonanej pracy. Przyjmować wypada raczej, że w ciągu krótko trwającego ściskania, powietrze nie otrzymuje ani nie traci ciepła, t. j. że ściskanie odbywa się według prawa adiabatycznego. Obliczając wtedy pracę według wzoru (328), mamy:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot l \cdot \frac{U^2}{2} + \frac{p_1 V_1}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 0. \dots \quad (333)$$

Hypoteza przemiany adiabatycznej daje zwykle objętość  $V_1$  większą niż przy przemianie izotermicznej. Jeżeli np. dla skrócenia, oznaczymy przez  $W'$  pierwszy wyraz każdego z równań (332) i (333) i postawimy warunek  $\frac{p_2}{p_1} = 2$ , otrzy-

mamy według wzoru (332):

$$V_1 = \frac{W'}{p_1 \ln 2} = 1,45 \frac{W'}{p_1},$$

a według wzoru (333), biorąc  $k = 7/5$ :

$$V_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{W'}{0,22 p_1} = 1,80 \frac{W'}{p_1},$$

czyli wartość przeszła o  $1/4$  większą. W praktyce więc bezpieczniej jest obliczać objętość dzwonu w przypuszczeniu przemiany adiabatycznej.

W ten sam sposób obliczane są dzwony powietrzne, umieszczane na rurach zasilanych przez pompy tłoczące, w celu

regulowania ruchu wody w tych rurach. Między pompą a dzwonem ruch wody jest przerywany i objętość dostarczana w każdej chwili przez pompę, gdy ta jest o działaniu pojedynczym, waha się między zerem a pewnym maximum. Objętość całkowita, dostarczana przez pompę w danym przeciągu czasu, w rurze po za dzwonem biedz powinna z prędkością, o ile można zbliżoną do jednostajnej. Ciśnienie więc w dzwonie zmieniać się winno w granicach dość zbliżonych. Oznaczając przez  $V_1$  objętość powietrza przy ciśnieniu najmniejszym  $p_1$ , a przez  $V_2$  przy największem  $p_2$ , związek między  $V_1$  a  $V_2$  dadzą warunki zasilania rury i różnica  $V_1 - V_2$  odpowiadać będzie przewyżce objętości wody, dostarczanej przez pompę w pewnym okresie jej ruchu, nad objętością, która bieży w rurze poza dzwonem, z prędkością średnią stałą. Przyjąć więc można, że  $V_1 - V_2$  jest jedną z danych zadania, równie jak  $p_1$ . Wreszcie, stosownie do stopnia regularności, jaki ma być nadany ruchowi wody w rurze, ograniczyć należy wartość różnicy  $p_2 - p_1$ , albo stosunku  $\frac{p_1}{p_2}$ . Chodzi więc o obliczenie  $V_1$ , ze

znanych  $\frac{p_1}{p_2}$  i  $V_1 - V_2$ . Hypoteza izotermiczna daje  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , skąd:

$$V_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)} (V_1 - V_2),$$

a hypoteza adiabatyczna  $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$ :

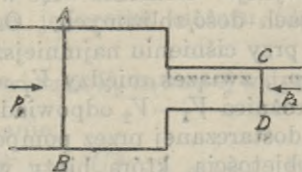
$$V_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}} (V_1 - V_2).$$

Ponieważ  $\frac{1}{k}$  jest mniejsze od jednośc, przeto druga wartość  $V_1$  będzie większą; gdy  $\frac{p_1}{p_2}$  mało się różni od jednośc, do czego zawsze się dąży, to druga wartość wynosi prawie:

$$\frac{1}{\frac{1}{k} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)} (V_1 - V_2),$$

czyli równa się pierwszej, pomnożonej przez  $k = \frac{7}{5}$ , jest więc od niej o  $\frac{2}{5}$  większą. W praktyce objętość  $V_1$  powietrza, w dzwonach przy pompach, bywa zwykle od 4 do 10 razy większą od objętości wody, dostarczanej przez każdy skok tłoka pompy.

**70. Wypływ przez otwór.** Gdy z napełnionego gazem zbiornika, w którym utrzymywane jest stałe ciśnienie  $p_1$ , wypływa gaz przez otwór o przekroju  $\omega$ , zaopatrzony w przystawkę o takimże przekroju, pokonywując w swym ruchu również stałe ciśnienie  $p_2$ , w otworze i przystawce, — to ciśnienia te można uwidocznnić (rys. 137): w zbiorniku tłokiem  $AB$ ,



Rys. 137.

o przekroju  $\Omega$ , popychającym przez ciśnienie  $p_1$  a w przystawce tłokiem  $CD$ , ponoszącym w przeciwnym kierunku ciśnienie  $p_2$ . Fikcyjne te tłoki zastępują idealne przekroje płynu płaszczyznami  $AB$  i  $CD$ . Prędkość średnia  $U$ , ruchu gazu w przystawce, będzie w tem przypuszczeniu prędkością posuwania się tłoka  $CD$ . Gdy tłok  $AB$  posunie się o ilość taką, że przez otwór wyjdzie ze zbiornika jednostka ciężaru gazu, to objętość odpowiadająca temu przesunięciu tłoka w zbiorniku będzie  $v_1$  a praca udzielona gazowi przez tłok  $AB$  równa  $p_1 v_1$ . Równocześnie jednostka ciężaru gazu, wchodząca do przystawki, przesuwając tłok  $CD$  o ilość odpowiadającą objętości  $v_2$  gazu w przystawce i praca wykonana tam przez gaz wynosi  $p_2 v_2$ . Całkowita więc praca gazu jest równa  $p_1 v_1 - p_2 v_2$ , a według wzoru (313):

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = R (T_1 - T_2).$$

Z drugiej znów strony, jednostka ciężaru gazu, zajmująca w zbiorniku objętość  $v_1$ , zajmie w przystawce objętość  $v_2$ , różną od  $v_1$ , przyczem gaz dokona pracy  $p (v_2 - v_1)$ , która według wzoru (324):

$$p (v_2 - v_1) = \frac{Q}{A} - \frac{c_v}{A} (T_2 - T_1).$$

Całkowita więc praca gazu, przy wypływie przez otwór będzie (328):

$$R (T_1 - T_2) + \frac{Q}{A} - \frac{c_v}{A} (T_2 - T_1) = \frac{Q}{A} - \frac{c_p}{A} (T_2 - T_1).$$

Praca ta zużyta zostaje na wytworzenie ruchu, przez powiększenie energii gazu o iloczyn  $\frac{U^2}{2g}$ , z masy jednostki ciężaru  $\frac{1}{g}$  przez połowę kwadratu z prędkości  $\frac{U}{2}$ ; otrzymamy zatem:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{Q}{A} - \frac{c_p}{A} (T_2 - T_1) . . . . (334)$$

Jeżeli gaz przy wypływie nie zyskuje ani nie traci ciepła, t. j. gdy wypływ się odbywa na podstawie prawa adiabatyicznego, wtedy  $Q = 0$  i pozostaje:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{c_p}{A} (T_1 - T_2) = \frac{c_p T_1}{A} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

a ponieważ według wzorów (324), (313) i (327):

$$\frac{kR}{k-1} = \frac{c_p}{A}, \quad RT_1 = p_1 v_1, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

przeto:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] . . . (335)$$

Jeżeli wypływ gazu odbywa się przy stałej temperaturze, t. j. według prawa izotermicznego, wtedy  $T_1 = T_2$  i z równania (334) otrzymujemy według wzoru (330):

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{Q}{A} = p_1 v_1 \ln \frac{p_1}{p_2} . . . . (336)$$

Zwykle wypływ gazu ze zbiornika odbywa się bez zysku lub straty ciepła i w praktyce stosuje się wzór (335).

Tak samo, jak przy wypływie wody (§ 47), prędkość rzeczywista jest mniejsza od teoretycznej i wprowadzany bywa współczynnik  $\varphi$ , tak że:

$$U = \varphi \sqrt{2g \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} . . . (337)$$

Zeuner zastąpił współczynnik  $\varphi$  zmniejszeniem wartości  $k$  w wykładniku  $\frac{k-1}{k}$  i zamiast  $k = 1,41$  przyjął wartość  $m$ , określoną nierównościami:

$$1 < m < 1,41.$$

Jeżeli przez  $p$  oznaczymy ciśnienie w samym otworze, podczas gdy  $p_1$  oznacza ciśnienie w zbiorniku, a  $p_2$  ciśnienie

w przystawce poza otworem, to dla danej wartości  $m$ , współczynnik  $\varphi$  zależy od stosunku  $\frac{p}{p_2} = \beta$ , tak że  $\varphi$  maleje razem ze wzrostem  $\beta$ . Gdy  $\beta = 1$ :

$$\varphi^2 = \frac{m-1}{k-1} \cdot \frac{k}{m}, \dots \dots \dots (338)$$

a że według wzoru (234) współczynnik oporu:

$$\xi = \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2},$$

więc:

$$m = \frac{k(1 + \xi)}{1 + k\xi} \dots \dots \dots (339)$$

Odpowiadające różnym wartościom  $\beta$ , wartości  $m$  i współczynnika  $\varphi$  są dla powietrza:

T A B L I C A 13.

$m =$	1,4	1,38	1,35	1,30	1,25
$\beta =$	0,530	0,533	0,538	0,547	0,556
$\varphi^2 =$	1	0,940	0,876	0,767	0,654
$\varphi =$	1	0,970	0,936	0,876	0,810

Biorąc  $m$  za wykładnik przemiany stanu gazu między zbiornikiem a otworem, mielibyśmy zamiast wzoru (327):

$$p_1 v_1^m = p v^m, \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \dots \dots (340)$$

a ciężar gazu wpływającego przez otwór o przekroju  $\omega$  w ciągu jednej sekundy:

$$G = \omega \frac{U}{v} = \omega \sqrt{\frac{2 g k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \beta^{\frac{2}{m}} - \beta^{\frac{m+1}{m}} \right]}.$$

Ponieważ maximum wyrażenia:  $\beta^{\frac{2}{m}} - \beta^{\frac{m+1}{m}}$  ma miejsce dla:

$$\beta = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}, \dots \dots \dots (341)$$



przy tej więc wartości  $\beta$  ciężar  $G$  będzie największy. Rozróżnić tu należy dwa przypadki:

1)  $p_2 > \beta p_1$ , wtedy  $p = p_2$ ,

$$U = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}, \quad \dots \quad (342)$$

$$G = \omega \frac{U}{v_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \dots \quad (343)$$

a dla bardzo małej różnicy  $p_1 - p_2$  przyjmuje się zwykle:

$$U = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \frac{m-1}{m} v_1 (p_1 - p_2)}, \quad G = \omega \frac{U}{v_1} \quad (344)$$

Według Weisbacha i Grashofa, dla powietrza, gdy  $\beta > 0,5$  wartości współczynników i wydatku  $\mu$ , ściśnienia żyły  $\alpha$ , prędkości  $\varphi$ , oporu  $\xi$  oraz wykładnika  $m$  są następujące:

T A B L I C A 14.

Otwór okrągły	$\mu$	$\alpha$	$\varphi$	$\xi$	$m$	Uwagi
14 mm średnicy w cienkiej ścianie płaskiej	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	
z krótką przystawką cylindryczną tejże średnicy	0,815	1	0,821	0,490	1,243	$p_2 : p_1 = 1,08$
	0,813	1	0,838	0,444	1,252	$= 1,41$
	0,831	1	0,866	0,362	1,271	$= 1,70$
z przystawką ostrokągową zwężającą, średnica końcowa 10 mm	0,97	1	0,974	0,034	1,392	

2)  $p_2 < \beta p_1$ , wtedy  $p = \beta p_1$ ,

$$U = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \cdot \frac{m-1}{m+1} p_1 v_1}, \quad \dots \quad (345)$$

$$G = \omega \frac{U}{v_1} \beta^{\frac{1}{m}} \quad \dots \quad (346)$$

**Zadanie 73.** Obliczyć temperaturę powietrza w otworze, z temperatury  $T_1$  wewnątrz zbiornika, przyjmując maksymalny ciężar  $G$  powietrza, wypływającego przez otwór, w ciągu jednej sekundy.

Z równań (313), (340) i (341):

$$T = T_1 \frac{2}{m+1}.$$

**Zadanie 74.** Jaka jest prędkość wypływu powietrza ze zbiornika, w którym temperatura jest  $T_1$ , do próżni, jeżeli się pomija opory w otworze?

Ponieważ  $p_2 = 0$ , więc można zastosować wzór (345). Dla  $\xi = 0$ , według wzoru (339)  $m = k$ :

$$U = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} p_1 v_1} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} R T_1}$$

**Zadanie 75.** Powietrze w zbiorniku, pod ciśnieniem 4,8 At ma temperaturę  $t_1 = 30^\circ$ . Przez otwór o powierzchni  $12 \text{ cm}^2$  następuje wypływ powietrza na zewnątrz, gdzie ciśnienie  $p_2 = 1 \text{ At}$ . Spółczynnik oporu w otworze wynosi  $\xi = 0,025$ . Obliczyć prędkość wypływu i ciężar powietrza, wypływającego w ciągu jednej sekundy.

Według wzoru (339):

$$m = \frac{k(1 + \xi)}{1 - k\xi} = 1,396,$$

a według (341):

$$\beta = \left( \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{m}{m-1}} = 0,529;$$

ponieważ  $p_2 = 1 \text{ At}$ ,  $p_1 = 4,8 \text{ At}$ , więc  $p_2 < \beta p_1$  i stosują się równania (345) i (346), ciśnienie w otworze  $p = \beta p_1 = 2,539 \text{ At}$ , a temperatura (Zadanie 73):

$$T = T_1 \frac{2}{m+1} = 252,92^\circ,$$

prędkość wypływu:

$$U = \sqrt{g k p v \frac{m-1}{k-1}} = \sqrt{g k R T \frac{m-1}{k-1}} = 314,49 \text{ m/sek.},$$

ciężar powietrza wypływającego w ciągu sekundy:

$$G = \omega \frac{U}{v_1} \beta^m, \quad v_1 = \frac{R T_1}{p_1},$$

$$G = 1,338 \text{ kg/sek.}$$

**Zadanie 76.** Zbiornik powietrza, w którym ciśnienie  $p_1 = 1,6 \text{ At}$ , temperatura  $t_1 = 6^\circ$ , ma otwór w cienkiej ścianie o powierzchni  $\omega = 4 \text{ cm}^2$ , przez który powietrze wychodzi na zewnątrz. Ile kilogramów powietrza wypływać będzie w ciągu sekundy, jeżeli współczynnik oporu w otworze wynosi  $\xi = 0,04$ ?

Jak w poprzednim zadaniu,  $m = 1,388$ ,  $\beta = 0,530$ ,  $p_2 > \beta p_1$

$$p = p_2, \text{ według wzoru (340) } T = T_1 \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} =$$

$$= (273+6) \left( \frac{1}{1,6} \right)^{\frac{0,388}{1,388}} = 244,71^\circ.$$

Według wzoru (342) kładąc:

$$p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right] = R T_1 \left( 1 - \frac{T}{T_1} \right) = R (T_1 - T),$$

otrzymujemy:

$$U = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R (T_1 - T)} = 260,23 \text{ m/sek.},$$

a według wzoru (343):

$$G = \omega \frac{U}{v_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\omega U p}{RT} = \\ = \frac{0,0004 \cdot 260,23 \cdot 1 \cdot 10333}{29,27 \cdot 244,71} = 0,150 \text{ kg/sek.}$$

**Zadanie 77.** Zbiornik gazu oświetlającego, w którym temperatura  $t_1 = 20^\circ$  a ciśnienie wynosi 40 mm słupa wody, ma otwór o średnicy 3 cm. Przy wypływie gazu przez ten otwór, współczynnik oporu  $\xi = 0,034$ . Ile kilogramów gazu wypływać będzie w ciągu sekundy?

Przy małej różnicy ciśnień stosować można wzór (344) i uwzględniając (339), mamy:

$$U = \sqrt{\frac{2g}{1+\xi}} v_1 (p_1 - p_2),$$

albo według (313):

$$U = \sqrt{\frac{2g R T_1}{1+\xi}} \left( 1 - \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Z zadania 59, dla gazu oświetlającego, mamy  $R = 67,19$ ,

$$T_1 = 273 + 20 = 293^\circ, \quad p_2 = 10333 \text{ mm słupa wody,}$$

$$p_1 = (10333 + 40) \text{ mm,}$$

skąd:

$$U = 37,96 \text{ m/sek.},$$

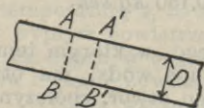
$$G = \omega \frac{U}{v_1} = \frac{\omega U p_1}{R T_1} = 0,014138 \text{ kg/sek.},$$

co wynosi 50,897 kg na godzinę.

**71. Ruch gazów w rurach.** Dla wyprowadzenia wzorów praktycznych na ruch gazów w rurach, przyjmuje się, że temperatura gazu pozostaje stałą podczas ruchu. Z przyjęcia tej hipotezy wynika zamiana ciepła między gazem w ruchu a ścianami rury, gdyż każdej przemianie izotermicznej towarzyszy koniecznie zysk lub strata ciepła a ruch gazu może mieć miejsce o tyle tylko, o ile jego ciśnienie i gęstość wciąż się zmieniają. Zmiany te wszakże wogóle bywają niewielkie, następują zwolna, a małe różnice temperatury, gdyby gaz nie zyskiwał ani nie tracił ciepła, znikają szybko przy stykaniu się gazu ze ścianami rur, których temperatura jest prawie niezmienna pod ziemią. Ściany te odstępują gazowi lub otrzymują od niego małe ilości ciepła, potrzebne do utrzymania go w stałej temperaturze, a jednocześnie nie zmieniają prawie własnej temperatury. Z przyjęciem hipotezy izotermicznej

zadanie zostaje ułatwionem; pozostaje wszakże wyrazić tarcie gazu o ściany rury, co się uskutecznia w sposób podobny, jak przy ruchu cieczy.

Przypuścimy, że strugi gazu, na danem przecięciu poprzecznym rury o średnicy  $D$  (rys. 138), ożywione są wszystkie jednakową prędkością średnią  $U$ , i weźmy pod uwagę dwa przecięcia nieskończenie bliskie  $AB$  i  $A'B'$ , położone w odległości  $ds = U dt$ . Oznaczając przez:



Rys. 138.

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4}, \quad \chi = \pi D,$$

powierzchnię i obwód przekroju, przez  $p$  ciśnienie a przez  $\gamma$  ciężar właściwy gazu, mamy masę gazu, między przecięciami  $AB$  i  $A'B'$  równą  $\frac{\gamma}{g} \omega ds$ , a przyrost ilości ruchu w jednostce czasu, przyjmując, że wszystkie cząstki przechodzą równocześnie od prędkości  $U$  do  $U + dU$ , równy iloczynowi z tej masy przez stosunek  $\frac{dU}{dt}$ , czyli równy

$\frac{\gamma}{g} \omega ds \frac{dU}{dt}$ . Ten przyrost ilości ruchu winien być równy sumie rzutów sił na kierunek prędkości  $U$ , czyli na oś rury. Ciśnienie na przekroju  $AB$  wynosi  $p \omega$ , a na przekroju  $A'B'$ :  $-(p + dp) \omega$  i siły te rzucają się na oś rury w naturalnej wielkości. Ciężar uważanej warstwy wynosi  $\gamma \omega ds$ , a jego rzut na oś rury, oznaczając przez  $dz$  odległość pionową środków ciężkości przecięć  $AB$  i  $A'B'$ , jest równy  $-\gamma \omega dz$ . Tarcie, wyrażone przez  $f(U)$ , będzie proporcjonalne do powierzchni  $\chi ds$  i jego rzut na oś rury wynosić będzie  $-\chi f(U) ds$ . Mamy więc:

$$\frac{\gamma}{g} \omega ds \frac{dU}{dt} = -\omega dp - \gamma \omega dz - \chi f(U) ds,$$

albo, kładąc  $\frac{ds}{dt} = U$  i dzieląc przez  $\gamma \omega$ :

$$\frac{U dU}{g} + \frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{\chi}{\omega} \frac{f(U)}{\gamma} ds = 0, \quad (347)$$

równanie podobne do otrzymanego dla ruchu cieczy w rurach (124).

Doświadczenia Arsona <sup>1)</sup> wykazały, że tarcie wyrazić można, podobnie jak dla cieczy we wzorze (93), dwumianem z pierwszej i drugiej potęgi prędkości średniej:

$$\frac{f(U)}{\gamma} = aU + bU^2$$

i że między  $\gamma$  i  $U$  zachodzi związek, wykazujący stałość ciężaru gazu, przechodzącego przez wszystkie przekroje rury w jednostce czasu:

$$\gamma U = \text{ilości stałej.}$$

Przyjmując stałą temperaturę, mieć będziemy ciężar właściwy gazu  $\gamma$  proporcjonalny do ciśnienia, czyli stosunek

$$\frac{p}{\gamma} = K \text{ także stały i tak samo iloczyn } pU = K', \text{ skąd}$$

$$dU = -\frac{K' dp}{p^2}. \text{ Wstawiając te wartości w równanie (347)}$$

i mnożąc przez  $p^2$ , otrzymujemy:

$$\frac{K'^2 dp}{gp} = p^2 dz + K p dp + \frac{\chi}{\omega} (a K' p + b K'^2) ds.$$

Biorąc, zamiast zmiennego ciśnienia  $p$ , wartość średnią  $\frac{1}{2}(p_0 + p_1)$  ciśnień na przekrojach, początkowym i końcowym, uważanej części rury, o długości  $l$ , przytem oznaczając przez  $h$  różnicę poziomów tych przekrojów, dodatnią, gdy koniec leży wyżej od początku a ujemną w razie przeciwnym, kładąc wreszcie  $\frac{\chi}{\omega} = \frac{4}{D}$ , mieć będziemy po zcałkowaniu:

$$\begin{aligned} \frac{K'^2}{g} \ln \frac{p_1}{p_0} &= \frac{(p_0 + p_1)^2}{4} h + K \frac{p_1^2 - p_0^2}{2} + \\ &+ \frac{4 K' l}{D} \left( a \frac{p_0 + p_1}{2} + b K' \right). \end{aligned}$$

Stosownie do tego, czy chodzi o obliczenie prędkości średniej  $U_0$  przy wejściu do rury, czy  $U_1$  przy wyjściu, kładzie

<sup>1)</sup> Expériences sur l'écoulement des gaz en longues conduites par M. Arson, ingénieur en chef de la Compagnie parisienne du Gaz. Paris 1867. Doświadczenia z powietrzem prowadzonym rurami, pod wysokim ciśnieniem, o których mowa na str. 242, robione były w roku 1890 w Paryżu w zakładach Sain Fargeau przez inżynierów Towarzystwa Popp. Zdawał z nich sprawę prof. Riedler w broszurze, której przekład francuski wydany był p. t. La distribution de la force par l'air comprimé dans Paris (procédés Victor Popp), Paris 1891.

się zamiast współczynnika  $K'$  wartości  $p_0 U_0$  lub  $p_1 U_1$ , otrzymując wzory:

$$\left(\frac{4bl}{D} - \frac{1}{g} \ln \frac{p_1}{p_0}\right) U_0^2 + \frac{2al}{D} \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) U_0 = \\ = \frac{K}{2} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right] - \frac{h}{4} \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right)^2,$$

$$\left(\frac{4bl}{D} + \frac{1}{g} \ln \frac{p_0}{p_1}\right) U_1^2 + \frac{2al}{D} \left(1 + \frac{p_0}{p_1}\right) U_1 = \\ = \frac{K}{2} \left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^2 - 1\right] - \frac{h}{4} \left(1 + \frac{p_0}{p_1}\right)^2.$$

Wzory te, nie nadające się do użytku praktycznego, można uprościć. Stosunek  $\frac{p_1}{p_0}$  jest bliski jedności i jego logarytm, bardzo mały, pominięty być może wobec poprzedniego wyrazu, gdy  $l$  jest wielkie. Można także, w wyrazach, w które wchodzi  $U_0$  i  $h$ , zastąpić stosunek  $\frac{p_1}{p_0}$  przez jedność; wreszcie zamiast  $\left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)^2$  napisać można  $\left(\frac{p_1}{p_0} + 1\right) \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)$  albo  $\frac{2(p_0 - p_1)}{p_0}$ . Przy tych uproszczeniach, pierwsze z powyższych równań przybierze kształt:

$$\frac{4l}{D} (aU_0 + bU_0^2) = K \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) - p, \quad (348)$$

a także samo będzie drugie równanie, dla  $U_1$ , tylko w mianowniku pierwszego wyrazu po drugiej stronie, mieć będziemy  $p_1$  zamiast  $p_0$ . Dwie prędkości  $U_0$  i  $U_1$  nie wiele więc się różnią, jedna od drugiej. W zastosowaniach uważa się te prędkości jako jednakie i przyjmuje się prędkość średnią gazu w rurze  $U$ , odpowiadającą ciśnieniu pośredniemu między  $p_0$  i  $p_1$ ; kładzie się więc równocześnie  $U$  zamiast  $U_0$  i wartość średnią ciśnienia zamiast  $p_0$ , co odpowiada zastąpieniu stosunku  $\frac{K}{p_0}$  przez  $\frac{1}{\gamma}$ , to jest przez odwrotność ciężaru właściwego gazu, przy ciśnieniu średnim. Jeżeli jeszcze przyjmiemy, że początek i koniec rury leżą na tym samym poziomie, to  $h = 0$ , i otrzymamy z równania (348):

$$p_0 - p_1 = \frac{4l}{D} \gamma (aU + bU^2),$$

a ponieważ strata naporu na jednostkę długości rury:

$$J = \frac{p_0 - p_1}{l},$$

więc:

$$\frac{1}{4} D J = \gamma (a U + b U^2) \quad (349)$$

W tym wzorze Arsona, podobnym do wzoru (93) dla cieczy, współczynniki  $a$  i  $b$  są zależne od średnicy rury, zmieniając się w miarę wzrostu średnicy. Dla rur z żelaza łanego, średnicom  $D$  odpowiadają następujące wartości współczynników:

$D = 0,05 \text{ m}$	$a = 0,000 702$	$b = 0,000 595$
0,081	0,000 589	0,000 489
0,103	0,000 560	0,000 480
0,254	0,000 237	0,000 359
0,325	0,000 151	0,000 326
0,500	0,000 020	0,000 246

Dla większych średnic,  $a = 0$ :

$D = 0,60 \text{ m}$	$b = 0,000 202$
0,70	0,000 200.

Dla rur blaszanych o średnicy  $D = 0,05 \text{ m}$  otrzymano:

$a = 0,000 738$	$b = 0,000 345.$
-----------------	------------------

Jeżeli do wzoru (349) dołączymy wzór na wydatek w  $m^3/\text{sek.}$ :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U, \quad (350)$$

mieć będziemy ruch gazu w rurach określony w ten sam sposób, jak ruch wody w rozdziale III.

Przy obliczaniu ilości  $U$ ,  $Q$ ,  $\gamma$ , pamiętać należy o sprowadzeniu ich do temperatury i ciśnienia gazu płynącego przez rurę. Jeżeli ta temperatura jest  $t$ , a  $Q_0$  oznacza objętość pod ciśnieniem atmosfery i przy temperaturze  $0^\circ \text{C.}$ ,  $p$  ciśnienie gazu w rurze w atmosferach ( $10^m, 33$  wody), obliczać należy  $Q$  z wzoru:

$$Q = \frac{Q_0 (1 + \alpha t)}{p},$$

gdzie  $\alpha = 0,003663$ . Tak samo, oznaczając przez  $\gamma_0$  ciężar właściwy gazu w temperaturze  $0^\circ$ , pod ciśnieniem atmosferycznym, otrzymamy:

$$\gamma = \frac{\gamma_0 p}{1 + \alpha t}.$$

Dla gazu oświetlającego  $\gamma_0 = 0,5634 \text{ kg/m}^3$  a dla powietrza  $\gamma_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ .

Wzór (349), dający wyniki dostatecznie ściśle dla gazu oświetlającego i dla powietrza, płynących pod ciśnieniem zbliżonym do atmosferycznego, daje przy wysokich ciśnieniach, gdy prędkość przekracza 2 do 3 m na sekundę, straty naporu zbyt wielkie. Jak wykazały doświadczenia (por. przyp. str. 239), wyniki ściślejsze otrzymywać wtedy można, stosując do gazów wzór Flamanta (104) i tablice 2 i 3 z rozdz. III. I tak np. gdy przez rurę o średnicy 0,30 m, długości 16502 m, przepływało w ciągu godziny przy jednym doświadczeniu 13788 m<sup>3</sup> powietrza (objętość ta odnosi się do powietrza pod ciśnieniem atmosferycznym), ciśnienie na początku rury wynosiło 6,25 at, a średnia temperatura powietrza w rurze 15° C., to:

$$p = 1,00 + 6,25 = 7,25 \text{ At.}$$

$$Q = \frac{13788}{7,25 \cdot 3600} = 0,528 \text{ m}^3/\text{sek.}$$

$$\gamma = \frac{1,293 \times 7,25}{1 + 15 \alpha} = 8,886 \text{ kg.}$$

Ciśnienie na końcu rury wynosiło 4,25 At, czyli całkowita strata naporu wykazana doświadczeniem wynosiła 2 At a obliczona w  $\text{kg/m}^2$  i na 1 klm długości rury:

$$\frac{2 \times 10334}{16,502} = 1252 \text{ kg.}$$

Obliczając stratę naporu według wzoru Flamanta, otrzymalibyśmy dla  $D = 0,30$  i  $Q = 0,528$ , z tablic 2 i 3 (§ 22),  $J = 0,1419$ , czyli dla powietrza, w  $\text{kg/m}^2$  i na 1 klm rury:

$$1000 J \gamma = 1261 \text{ kg,}$$

wynik nader zbliżony do otrzymanego z doświadczenia.

Z wzorów podanych w rozdz. III, stosowany może być także do ruchu powietrza w rurach wzór Misesa (107 i 108).

**Zadanie 78.** Dla dostarczania 2,7 m<sup>3</sup>/sek. powietrza, rurą 100 m długą, jest do rozporządzenia wentylator tłoczący powietrze w temperaturze 10° C., pod ciśnieniem 0,0048 at. t. j.  $p = 1,0048$  at. Jaka ma być najmniejsza średnica rury, pozwalająca powietrzu wychodzić z rury swobodnie na zewnątrz?

Ciężar właściwy powietrza w temperaturze 10° C. pod ciśnieniem  $p = 1,0048$  at wynosi:

$$\gamma = \frac{1,293 \times 1,0048}{1 + 10 \alpha} = 1,2,$$

więc różnicy ciśnień na obu końcach rury 0,0048 at odpowiada wysokość:

$$\frac{0,0048 \times 10^6}{1,2} = 40 \text{ m,}$$



co daje spadek na metr bieżący  $J = 0,4$ . Tablice do wzoru Flamanta nie obejmują wydatków większych od  $1 \text{ m}^3/\text{sek.}$ , użyjemy tu więc wzoru Misesa (107) i wzoru na wydatek (350), według których:

$$Jg = 2B \frac{U^2}{D} = \frac{32 B Q^2}{D^5 \pi^2}, \quad D = \sqrt[5]{\frac{32 B Q^2}{Jg \pi^2}}$$

Biorąc na próbę  $B = 0,006$ , otrzymamy:

$$D = \sqrt[5]{\frac{32 \cdot 0,006 \cdot 2,7^2 \cdot 10^{12}}{0,4 \cdot 981 \cdot \pi^2}} = 51,4 \text{ cm.}$$

Dla sprawdzenia  $B$ , obliczmy ten współczynnik według wzoru (108): Z tablicy 4-ej weźmiemy  $10^6 k = 25 \text{ cm}$  i będziemy mieli:

$$\sqrt{\frac{2k}{D}} = \sqrt{\frac{50}{51,4 \cdot 10^6}} = 0,001;$$

że zaś według wzoru (350):

$$UD = \frac{4Q}{D\pi} = \frac{4 \cdot 2,7 \cdot 10^6}{51,4 \cdot \pi} = 6,69 \cdot 10^4,$$

z tablicy 1-ej  $\nu = 0,155$ , a według wzoru (100):

$$C = \frac{UD}{2\nu} = \frac{6,69 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,155} = 21,93 \cdot 10^4,$$

przeko według wzoru (108):

$$B = 0,0024 + 0,0010 + \frac{0,3}{\sqrt{21,93 \cdot 10^4}} = 0,004,$$

zamiast wartości próbowanej 0,006. Otrzymana poprzednio wartość  $D = 51,4$  jest więc za wielka i podzieloną być winna przez:

$$\sqrt[5]{\frac{6}{4}} = 1,08,$$

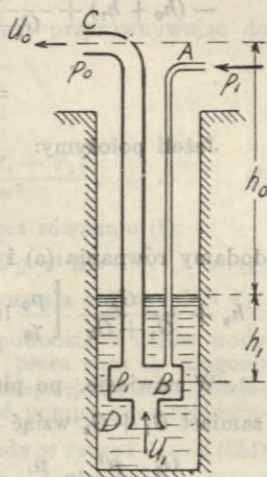
co daje:

$$D = 48 \text{ cm.}$$

**Zadanie 79.** W pompie „Mammut“ (rys. 139), rurką  $A$  doprowadzane jest powietrze, pod ciśnieniem  $p_1$ , do przestrzeni  $B$ , gdzie miesza się z wodą, wchodzącą przez otwór  $D$ , z prędkością  $U_1$ . Mieszanina wody i powietrza podnosi się w rurze o większej średnicy i wychodzi na zewnątrz w  $C$ , z prędkością  $U_0$ . Z danych: głębokości  $h_0$  i prędkości  $U_0$  i  $U_1$ , obliczyć stosunek  $\eta$ , pracy podnoszenia wody do pracy zgęszczania powietrza, czyli sprawność pompy.

Według twierdzenia Bernoulli'ego (28), po wprowadzeniu straty naporu przy wejściu wody przez otwór  $D$  (251):

$$h_1 - \frac{p_1 - p_0}{\gamma_1} = \frac{U_1^2}{2g} (1 + \zeta_1), \dots \quad (a)$$



Rys. 139.

jeżeli przez  $\gamma_1$  oznaczymy ciężar właściwy wody, a przez  $\zeta_1$  współczynnik oporu przy wejściu  $D$ . Do ruchu mieszaniny wody i powietrza, od  $B$  do  $C$ , zastosujemy ogólne równanie różniczkowe hydrodynamiki (27), które po podzieleniu przez  $g$ , położeniu  $\rho g = \gamma$  ciężarowi właściwemu mieszaniny,  $z = h$ ,  $V = U$  i wprowadzeniu zmiennej straty naporu  $h_t = \zeta_2 \frac{U^2}{2g}$  w rurze  $C$ , przybierze postać:

$$dh + dh_t + \frac{U dU}{g} + \frac{dp}{\gamma} = 0, \dots \dots (b)$$

Jeżeli przez  $G_1$  i  $G_2$  oznaczymy ciężary wody i powietrza, dostarczane w ciągu sekundy,  $\gamma_2$  i  $\gamma_0$  ciężary właściwe powietrza, w rurze i poza rurą, to:

$$\frac{G_1 + G_2}{\gamma} = \frac{G_1}{\gamma_1} + \frac{G_2}{\gamma_2},$$

a przy przemianie izotermicznej:  $\gamma_2 = \frac{p}{p_0} \gamma_0$ .

Całkując równanie (b) od  $B$  do  $C$ , mamy:

$$h_0 + h_1 + \int_B^C dh_t + \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} + \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = 0,$$

a że:

$$\int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{1}{G_1 + G_2} \left[ \frac{G_1}{\gamma_1} \int_{p_1}^{p_0} dp + \frac{G_2}{\gamma_0} p_0 \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{p} \right] =$$

$$= \frac{1}{G_1 + G_2} \left[ \frac{G_1}{\gamma_1} (p_0 - p_1) + \frac{G_2}{\gamma_0} p_0 \ln \frac{p_0}{p_1} \right],$$

więc:

$$-(h_0 + h_1) + \frac{1}{G_1 + G_2} \left[ \frac{G_1}{\gamma_1} (p_1 - p_0) + \frac{G_2}{\gamma_0} p_0 \ln \frac{p_1}{p_0} \right] =$$

$$= \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} + \int_B^C dh_t. \dots \dots (c)$$

Jeżeli położymy:

$$\int_B^C dh_t = \zeta_2 \frac{U_0^2}{2g}$$

i dodamy równania (a) i (c), otrzymamy:

$$-h_0 + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \left[ \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{p_1 - p_0}{\gamma_1} \right] = \frac{U_0^2}{2g} (1 + \zeta_2) + \frac{U_1^2}{2g} \zeta_1.$$

W nawiasie, po pierwszej stronie, pominąć można  $\frac{p_1 - p_0}{\gamma_1}$

a zamiast  $G_1 + G_2$  wziąć  $G_1$ , wtedy będzie:

$$\frac{G_2}{G_1} \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} = h_0 + \frac{U_0^2}{2g} (1 + \zeta_2) + \frac{U_1^2}{2g} \zeta_1. \dots (d)$$

Według wzorów (314) i (331), dla zgęszczenia 1 kg powietrza od  $p_0$  do  $p$ , potrzeba użyć pracy:

$$W = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0},$$

a dla zgęszczenia ciężaru  $G_2$  powietrza:

$$W_2 = G_2 \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0};$$

dla podniesienia zaś ciężaru wody  $G_1$  na wysokość  $h_0$ :

$$W_1 = G_1 h_0.$$

Sprawność pompy:

$$\eta = \frac{W_1}{W_2},$$

a według równania (d):

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{U_0^2 (1 + \zeta_2) + U_1^2 \zeta_1}{2g h_0} \dots \dots \dots (e)$$

*Zadanie 80.* Jeżeli przy obliczaniu pompy „Mammut“, jak w poprzednim zadaniu, oznaczymy przez  $V_1$  objętość wody podnoszonej w ciągu sekundy, przez  $V_2$  objętość powietrza wtłaczanego w tymże czasie (odniesioną do ciężaru właściwego  $\gamma_0$  powietrza zewnętrzne) a przez  $\omega$  przekrój rury między  $C$  a  $D$  (rys. 139), to jakie będzie dla objętości  $V_1$  wody najmniejsze zużycie powietrza  $V_2$ ?

Kładąc:

$$\begin{aligned} G_1 &= V_1 \gamma_1, & G_2 &= V_2 \gamma_0 \\ V_1 &= \omega U_1, & V_1 + V_2 &= \omega U_0, \end{aligned}$$

otrzymamy równanie (d) w postaci:

$$\frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{p_0}{\gamma_1} \ln \frac{p_1}{p_0} = h_0 + \frac{(1 + \zeta_2) (V_1 + V_2)^2 + \zeta_1 V_1^2}{2g \omega^2}.$$

Minimum  $V_2$  dla danego  $V_1$  otrzymamy, przyrównywując do zera pochodną  $V_1$  względem  $V_2$ :

$$\frac{\partial V_1}{\partial V_2} = 0,$$

czyli:

$$\frac{1}{V_1} \cdot \frac{p_0}{\gamma_1} \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{(1 + \zeta_2) (V_1 + V_2)}{2g \omega^2}, \dots \dots \dots (f)$$

a po podzieleniu poprzedniego równania przez równanie (f):

$$(1 + \zeta_2) (V_2^2 - V_1^2) = \zeta_1 V_1^2 + 2g \omega^2 h_0. \dots \dots \dots (g)$$

Równanie to, łącznie z równaniem (f) pozwala obliczyć  $V_1$  i  $V_2$ .

*Zadanie 81.* Pompa „Mammut“ ma podnosić 7 litrów wody w ciągu sekundy, na wysokość  $h_0 = 15 m$ , przez rurę  $C$ , długości 36 m a średnicy 8 cm. Jakiej potrzeba najmniejszej objętości powietrza na sekundę i jaką sprawność winna mieć pompa, przy współczynnikach oporu:  $\zeta_2 = 0,02 \frac{l}{d}$  (95 a) dla biegu wody w rurze i  $\zeta_1 = 2$  (251) dla wejścia wody do przestrzeni  $B$ .

$$\text{Dane są: } V_1 = 0,007 \text{ m}^3, \quad \omega = \frac{\pi (0,08)^2}{4} = 0,005 \text{ m}^2, \quad \zeta_1 = 2$$

$$\zeta_2 = 0,02 \frac{36}{0,08} = 9.$$

Z równania (g) otrzymujemy najmniejszą potrzebną objętość powietrza:

$$V_2 = 0,0282 \text{ m}^3/\text{sek.} = 28,2 \text{ ltr./sek.},$$

z równania (f), dla  $p_0 = 10333 \text{ kg/m}^2$ :

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = 0,972, \quad \frac{p_1}{p_0} = 2,65,$$

a z równania (a) głębokość zanurzenia rury:

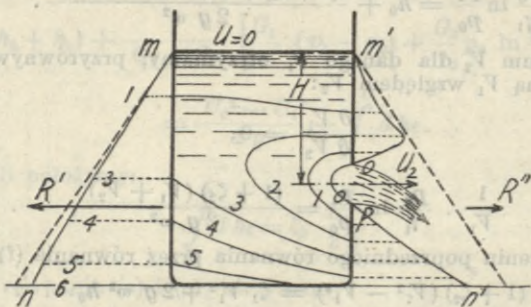
$$h_1 = 17,35 \text{ m.}$$

Sprawność pompy:

$$\eta = \frac{W_1}{W_2} = \frac{V_1 \gamma_1 h_0}{V_2 p_0 \ln \frac{p_1}{p_0}} = 0,37.$$

## IX. Opór płynów.

**72. Oddziaływanie prądu.** Ciecz w naczyniu, pozostająca w spokoju, układa się do poziomu i wszystkie powierzchnie wewnątrz cieczy, na których ciśnienie jest jednakowe, są płaszczyznami poziomymi. Wypadkowe ciśnień na ściany



Rys. 140.

boczne pionowe naczynia (rys. 140),  $R'$  i  $R''$ , wzajemnie się znoszą a wypadkową ciśnień na dno naczynia, jest ciężar cieczy.

Gdy w ścianie prawej naczynia zrobiony jest otwór  $op$  i ciecz wypływa przez otwór, przy utrzymywaniu poziomu w naczyniu na niezmienniej wysokości, to w masie cieczy, znajdującej się w ruchu ustalonym, powierzchnie jednakowego ciśnie-

nia przybierają inne kształty, naszkicowane na rysunku liniami pełnymi: 1, 2, 3, 4, 5. Na poziomie i przy otworze, ciśnienie jest prawie jednakowe a ciśnienia na ścianę lewą pełną, które przedstawia linia  $mn$ , dadzą oczywiście wypadkową  $R'$ , większą od wypadkowej  $R''$  ciśnień na ścianę prawą z otworem, przedstawionych przez linię  $m'opn'$ . Różnica  $R' - R''$  stanowi *oddziaływanie prądu*. Ścisłe wyznaczenie powierzchni jednakowego ciśnienia, pozwoliłoby przez zsumowanie iloczynów z powierzchni, pomnożonych przez ciśnienie na jednostkę każdej, otrzymać wypadkowe  $R'$  i  $R''$ ; ale zadanie to zbyt jest trudnem i do otrzymania wypadkowych dojść można prostszą drogą.

Na zasadzie równości działania i oddziaływania, parcie  $R = R' - R''$ , nadające wodzie wychodzącej przez otwór prędkość  $U_2$ , równe jest parciu wody na ścianę przeciwległą. Oznaczając przez  $M$  masę wody, wypływającej przez otwór w ciągu sekundy, mieć będziemy ilość ruchu  $MU_2$ , popęd  $\int R dt$  i równanie ilości ruchu:

$$\int_0^1 R dt = MU_2.$$

Przy ruchu ustalonym, popęd jest stały, więc:

$$\int_0^1 R dt = R \int_0^1 dt = R,$$

a oznaczając przez:  $G$  ciężar masy  $M$ ,  $\gamma$  ciężar właściwy wody a  $Q$  wydatek otworu, otrzymujemy:

$$R = MU_2 = \frac{G}{g} U_2 = \frac{Q\gamma}{g} U_2, \dots (351)$$

wzór na oddziaływanie prądu w oznaczonym kierunku ( $U_2$ ), w przypuszczeniu, że na poziomie w naczyniu prędkość  $U = 0$ . Oddziaływanie prądu jest więc równe iloczynowi z prędkości średniej przez masę wypływającą w ciągu sekundy, czyli równe ilości ruchu w jednostce czasu. Wielkość ta wyraża się w kilogramach, jak wskazuje następujące zestawienie:

$$\frac{\text{Ilość ruchu}}{\text{sek.}} = \frac{1}{\text{sek.}} \text{masa} \times \text{prędkość} = \frac{1}{\text{sek.}} \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}^2}{\text{met}} \frac{\text{met.}}{\text{sek.}} \right] = [\text{kg}].$$

Kładąc  $Q = \omega U_2$ , napisać można wzór (351) w postaci:

$$R = \frac{\gamma U_2 \omega}{g} U_2,$$

a że według wzoru (68) dla cieczy doskonałych, bez tarcia,

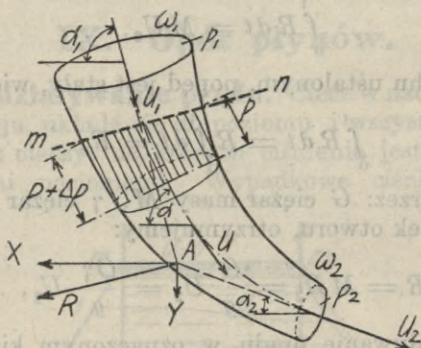
$$\frac{U_2^2}{2g} = H, \text{ przeto:}$$

$$R = 2\gamma\omega H. \quad (352)$$

Oddziaływanie prądu jest więc równe dwa razy wziętemu ciśnieniu słupa wody w równowadze, mającego za podstawę powierzchnię otworu a za wysokość odległość pionową środka ciężkości tej powierzchni od poziomu cieczy.

Gdyby ściana naczynia, w której zrobiony jest otwór, nie była pionową, lecz nachyloną do poziomu pod kątem  $\alpha$ , to i oddziaływanie  $R$ , przechodzące przez środek ciężkości powierzchni otworu, miałyby też samo nachylenie. Składowa pozioma oddziaływania byłaby  $X = R \cos \alpha$  i miałyby kierunek wprost przeciwny składowej poziomej prędkości wypływu a składowa pionowa  $Z = R \sin \alpha$  zmniejszałaby ciężar wody w naczyniu.

Gdy ciecz przepływa przez rurę zwążającą się (rys. 141), oznaczmy w przekrojach  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , ciśnienia przez  $p_1$ ,  $p_2$ , a prędkości przez  $U_1$ ,  $U_2$ .



Rys. 141.

kości przez  $U_1$ ,  $U_2$ . Zmiana wielkości i kierunku prędkości wywołuje oddziaływanie prądu na ściany rury. Jeżeli dla uproszczenia przyjmiemy, że oś rury leży na płaszczyźnie poziomej, to według twierdzenia Bernoulli'ego (67):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}.$$

Jeżeli ciśnienie  $p_2$  jest stałe, to przy powiększaniu się ciśnienia  $p_1$ , zwiększać się będzie prędkość  $U_2$  a razem z nią i oddziaływanie prądu na ściany rury.

W poszczególnych warstwach, ciśnienia nie rozkładają się jednostajnie, w skutku wywiązujących się sił odśrodko-

wych, przy ruchu krzywolinijnym cząstek. Od ściany wypukłej ( $p$ ) do wklęsłej ( $p + \Delta p$ ) ciśnienie stale się powiększa, jak to przedstawia na rysunku linia  $mn$ . W danym punkcie, któregokolwiek przekroju, prędkość  $U$ , przy ruchu ustalonym, jest stałą; przy dalszym ruchu cząstki prędkość ta zmniejsza się lub (jak na rys. 141) powiększa. Składowe przyspieszenia będą:

$$\frac{d(U \cos \alpha)}{dt} \quad \text{i} \quad \frac{d(U \sin \alpha)}{dt},$$

a siły odpowiadające tym przyspieszeniom:

$$dX = dm \cdot \frac{d(U \cos \alpha)}{dt}, \quad dY = dm \frac{d(U \sin \alpha)}{dt}.$$

Oddziaływanie prądu będzie równe i wprost przeciwne tym siłom, a że, dla ruchu ustalonego:

$$dm = M dt \quad \text{a} \quad M = \frac{\gamma Q}{g},$$

więc:

$$dX = M d(U \cos \alpha), \quad dY = M d(U \sin \alpha),$$

a po zcałkowaniu:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\gamma Q}{g} (U_2 \cos \alpha_2 - U_1 \cos \alpha_1), \\ Y &= \frac{\gamma Q}{g} (U_2 \sin \alpha_2 - U_1 \sin \alpha_1); \end{aligned} \right\} \quad (353)$$

całkowite zaś oddziaływanie prądu na ściany:

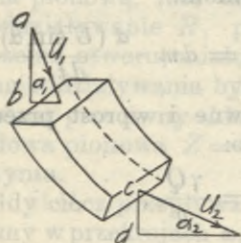
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (354)$$

Jak widzimy, kształt rury nie ma wpływu na wielkość oddziaływania, które zależy wyłącznie od ciśnień i prędkości przy wejściu wody do rury i przy wyjściu. Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie cząstki mają w przekrojach, wejściowym i wyjściowym, jednakowe w każdym z nich ilości ruchu, a więc i jednakowe prędkości, to kierunek wypadkowej  $R$  przechodzić będzie przez punkt, w którym się przetną przedłużenia kierunków prędkości cząstek przechodzących przez środki ciężkości przekrojów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , t. j. przez punkt  $A$ . Kierunek więc wypadkowej nie zależy także od kształtu rury.

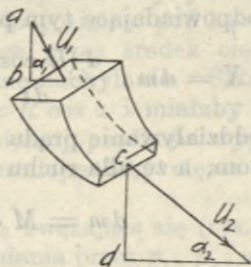
Na rurę działają jeszcze, ciśnienia  $\omega_1 p_1$  i  $\omega_2 p_2$ , dające siłę wypadkową i moment obrotu a także działać mogą siły zewnętrzne na ściany rury. Ważnem jest zatem oznaczenie kierunku oddziaływania, a zwłaszcza kierunku, w którym, pod jego wpływem, mogłoby nastąpić poruszenie rury. Co do kie-

runku składowej  $X$ , to przyjmując, że rura leży nie na płaszczyźnie poziomej, lecz na pionowej, niema wątpliwości, iż ruch pod wpływem tej składowej nastąpić może od strony prawej ku lewej. Trudno znów orzec, jakie wtedy będzie działanie, skierowanej na rysunku ku dołowi, składowej  $Y$ . Mogą być przypadki, w których składowa ta znika, lub w których skierowaną jest pod górę i zmniejsza ciężar cieczy.

Z równania (353) wynika, że oddziaływanie prądu, w jakimkolwiek kierunku, jest równe różnicy rzutów ilości ruchu



Rys. 142.



Rys. 143.

na ten kierunek, przy wejściu wody do rury i przy wyjściu. Jeżeli przeto (rys. 142) w kierunku pionowym  $ab = U_1 \sin \alpha$ , będzie równe  $cd = U_2 \sin \alpha_2$ , to według drugiego z równań (353),  $Y = 0$  i niema składowej pionowej oddziaływania. Gdy  $ab > cd$ , oddziaływanie skierowane będzie ku dołowi, gdy zaś  $ab < cd$  (rys. 143), to  $Y$  działać będzie pod górę, zmniejszając ciężar cieczy.

Zmniejszeniu składowej pionowej prędkości odpowiada opóźnianie ruchu w tym kierunku. Jeżeli weźmiemy pod uwagę rurę o stałym przekroju, wygiętą pod kątem  $90^\circ$  (rys. 144), to każda cząstka cieczy w przekroju  $AB$  będzie miała składową pionową prędkości równą  $U$ . Składowa ta będzie się wciąż zmniejszać i w końcu znika w przekroju  $CD$ . Jednocześnie wytwarza się składowa pozioma prędkość, rosnąca od 0 w przekroju  $AB$  do  $U$  w przekroju  $CD$ . Składowe oddziaływania:

$$X = Y = \frac{\gamma Q U}{g}$$

skierowane są: pierwsza w stronę przeciwną ruchu prądu, a dru-



ga w stronę tego ruchu. Wypadkowa:

$$R = X\sqrt{2} = Y\sqrt{2}.$$

Niektórzy autorowie dawali tej wypadkowej nazwę *parcia odchyłającego*, w miejsce której proponuje Budau<sup>1)</sup> dwie różne nazwy dla  $X$  i  $Y$ : *przeciwparcie przyspieszające* i *parcie opóźniające*.

**Zadanie 82.** Do otworu, w ścianie pionowej zbiornika, przyśrubowaną jest przystawka zwężająca (rys. 145). Jaka będzie siła, usiłująca oderwać przystawkę od ściany zbiornika?

Każda cząstka, przebiegająca przez przystawkę, zwiększa swą prędkość z  $U_1$  na  $U_2$ . W skutku tego występuje przeciwparcie przyspieszające  $R$ , w kierunku strzałki, które zmniejsza ciśnienie hydrostatyczne na ściany przystawki i równe jest różnicy ilości ruchu:

$$MU_2 - MU_1 = R.$$

Kładąc:

$$M = \frac{\gamma Q}{g} = \frac{\gamma \omega_1 U_1}{g} = \frac{\gamma \omega_2 U_2}{g},$$

mamy:

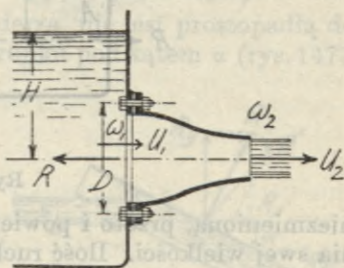
$$R = \frac{\gamma}{g} (\omega_2 U_2^2 - \omega_1 U_1^2).$$

Parcie to działa na przeciwległą otworowi ścianę zbiornika w kierunku przeciwnym wypływowi i śruby przymocowujące przystawkę wytrzymywać muszą działanie odrywające, równe różnicy między ciśnieniem hydrostatycznym  $P_s = \omega_1 \gamma H$ , jakie miałyby miejsce przy zamkniętym otworze, a oddziaływaniem prądu  $R$ :

$$P = P_s - R = \omega_1 \gamma H - \frac{\gamma}{g} (\omega_2 U_2^2 - \omega_1 U_1^2).$$

Ścisłej byłoby wstawić w tym wzorze, w miejsce  $\gamma H$ , wysokość ciśnienia zmniejszoną wysokością  $\frac{U_1^2}{2g}$ ; staje się to niezbędnym w przypadku, gdy  $\omega_1$  jest niewiele większe od  $\omega_2$ .

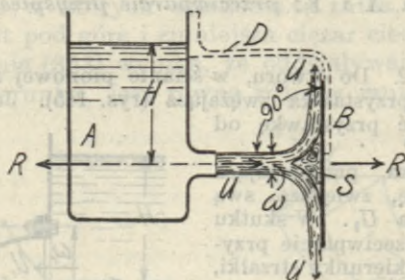
**73. Uderzenie żyły.** Jeżeli żyła wodna, wypływająca poziomo z naczynia (rys. 146), w którym poziom utrzymywany jest na niezmienniej wysokości, spotyka ścianę pionową  $B$ , to uderzenie ma pewne podobieństwo do rozpatrywanego w mechanice uderzenia ciał niesprężystych, strata energii wszakże jest znacznie mniejsza. Cząstki cieczy, uderzające o ścianę, w małym stopniu tylko wpływają na zmniejszenie prędkości, bo na ścianie tworzy się stożek  $S$ , wypełniony po



Rys. 145.

<sup>1)</sup> Por. przyp. 8 str. 2.

zostającą w spoczynku, albo w ruchu wirowym, cieczą wzburzoną. Po powierzchni tego stożka ześlizgują się i zaginają pod kątem  $90^\circ$  pojedyncze strugi. Ruch tych strug odbywa się w tych samych warunkach, jak rozważany wyżej (rys. 144) ruch w rurze zagiętej, a ponieważ prędkość cząstek pozostaje



Rys. 146.

niezmienioną, przeto i powierzchnia przekroju prądu nie zmienia swej wielkości. Płóść ruchu w rzucie pionowym schodzi do zera, a w rzucie poziomym stanowi ciśnienie  $R$ , równe, kładąc

$$\frac{U^2}{2g} = h:$$

$$R = \frac{\gamma Q}{g} U = \frac{\gamma \omega U}{g} U = \frac{\gamma \omega}{g} U^2 = 2\gamma \omega h. \quad (355)$$

W przypadku cieczy doskonałej, nieobecności tak tarcia jak i ścieśnienia żyły, uważać można  $h = H$ ; w rzeczywistości ciśnienie będzie mniejsze, niż je daje wzór (352). Z drugiej znów strony, pewna ilość wody rozpyła się przy uderzeniu, cząstki odskakują od ściany, tak że oba te wpływy prawie się równoważą i wzór (355) zgadza się z wynikami doświadczeń. Wzór ten jest jednobrzmiący z wzorem (351) i (352), bo ciśnienie w stronę prawą jest równe oddziaływaniu, skierowanemu w lewą stronę. Gdyby ściana  $B$  przymocowaną była, zapomocą ramienia  $D$ , do naczynia, z którego woda wypływa i została, razem z naczyniem, zawieszoną na długim sznurze, lub umieszczoną na ruchomym wagoniku, przekonałby się można, że wypływ razem z uderzeniem nie dają żadnej składowej poziomej prędkości. Ciśnienie więc żyły poziomej, na płaszczyznę pionową, równa się oddziaływaniu wody na naczynie.

Jeżeli ściana pionowa oddala się od naczynia z prędkością  $V$ , to w miejsce  $U$  wprowadzać należy do wzoru (355) różnicę  $U - V$  i będzie:

$$R = \frac{\gamma Q}{g} (U - V). \quad (356)$$

Wzory (355) i (356) wywiedzione zostały bez określenia wymiarów ściany  $B$ ; według doświadczeń, powierzchnia tej ściany  $\Omega$  winna być, przy kołowym kształcie, względem powierzchni przekroju żyły  $\omega$ , w stosunku:

$$\Omega > 9\omega,$$

inaczej bowiem wzory nie dają dokładnych wyników. Jeżeli  $\Omega$  jest mniejsze, siła uderzenia się zmniejsza i schodzi przy  $\Omega = \omega$  do połowy wartości, jaką dają powyższe wzory.

Jeżeli ściana, o którą żyła uderza, nie jest prostopadłą do osi żyły, ale nachyloną do tego kierunku pod kątem  $\alpha$  (rys. 147), to ciśnienie normalne  $R$  najłatwiej się oznacza jako wypadkowa dwóch składowych: poziomej  $R_x$  i pionowej  $R_y$ :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (357)$$

Obie zaś składowe wynikają z różnicy rzutów ilości ruchu na te dwa kierunki. W kierunku poziomym ilość ruchu żyły, przed spotkaniem ściany jest  $MU$ , a ilość ruchu żyły, biegnącej po ścianie,  $MU \cos \alpha$ , więc:

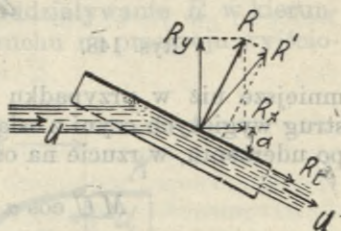
$$R_x = MU - MU \cos \alpha = \frac{\gamma Q}{g} U (1 - \cos \alpha). \quad (358)$$

W tym kierunku ilość ruchu ulega zmniejszeniu, a  $R_x$  działa w kierunku prędkości  $U$  i w tę samą stronę. W kierunku pionowym ilość ruchu żyły, przed spotkaniem ściany jest równa zero, a po spotkaniu wynosi  $MU \sin \alpha$ , więc:

$$R_y = 0 - MU \sin \alpha = -\frac{\gamma Q}{g} U \sin \alpha. \quad (359)$$

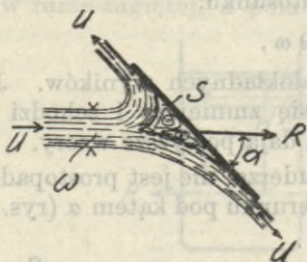
i działa w stronę przeciwną ruchu, t. j. pod górę.

Żyła, biegnąca wzdłuż ściany, wywołuje także opór tarcia  $R_t$ , usiłujący przesunąć ścianę, którą żyła spotyka. Całkowite działanie uderzenia  $R'$  jest wypadkową sił:  $R$  (357) i  $R_t$ . Taki rozkład sił ma miejsce, gdy żyła nie rozlewa się po ścianie nachylonej, lecz płynie w jednym kierunku (np. wyznaczonym przez umieszczone na ścianie listwy). W przypadku płaszczyzny nieograniczonej, tworzyć się będzie stożek  $S$  (rys. 148), wokół którego wyginać się będą strugi, jak przy spotkaniu ściany prostopadłej do osi żyły; wywód teoretyczny wypadkowej ciśnień jest wtedy niepewny. Zadanie

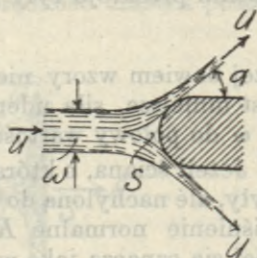


Rys. 147.

staje się prostszem przy uderzeniu żyły o powierzchnię obrotową (rys. 149), której oś stanowi przedłużenie osi żyły. Gdy powierzchnia zwrócona jest do żyły stroną wypukłą,  $R$  będzie



Rys. 148.



Rys. 149.

mniejsze niż w przypadku ściany płaskiej. Jeżeli kierunek strug wygiętych czyni z osią żyły kąt  $\alpha$ , to suma ilości ruchu, po uderzeniu, w rzucie na oś żyły, będzie:

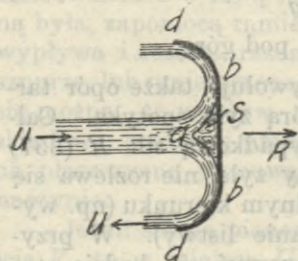
$$MU \cos \alpha = \frac{\gamma \omega U^2 \cos \alpha}{g}$$

Rzuty na kierunku prostopadły do osi żyły, wobec symetrycznego rozchodzenia się strug, wzajemnie się znoszą i całkowite ciśnienie przy uderzeniu będzie:

$$R_2 = \frac{\gamma \omega U^2}{g} (1 - \cos \alpha), \dots (360)$$

równe różnicy ilości ruchu, przed dojściem żyły do powierzchni obrotowej i przy odchodzeniu od tej powierzchni, poszczególnych strug. Dla  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , wzór wraca do postaci (355).

Jeżeli powierzchnia obrotowa zwrócona jest do żyły stroną wklęsłą (rys. 150), będzie wtedy kąt  $\alpha$  rozwarty i  $\cos \alpha$  ujemne. Przy wygięciu strug pod kątem  $180^\circ$ ,  $\cos \alpha = -1$  i



$$R = \frac{2\gamma \omega U^2}{g} = 4\gamma \omega H, \dots (361)$$

dwa razy większe niż przy ścianie płaskiej (355).

Porównywając ruch strug po powierzchni stożka z ruchem w rurze wygiętej (rys. 144), mamy od  $a$  do  $b$  (rys. 150) działanie opóźniające  $R'$  skierowane w stronę biegu strug, a przeciwnie od

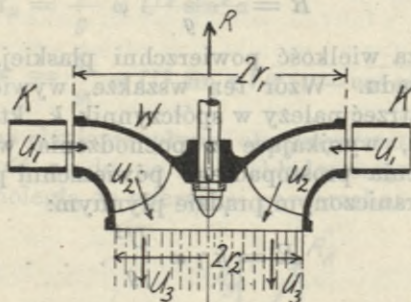
Rys. 150.

$b$  do  $d$  równe poprzedniemu oddziaływanie przyspieszające  $R''$ , skierowane w stronę przeciw nabiegowi strug. Oba te ciśnienia się sumują i przy pominięciu tarcia:

$$R = R' + R'' = MU + MU = 2MU = 4\gamma\omega H;$$

tylko w przebiegu od  $a$  do  $b$  działa właściwe uderzenie, a od  $b$  do  $d$  — oddziaływanie.

Wywiedzione wzory służyć mogą i wtedy, gdy prąd wodny przebiega drogę w odwrotnym kierunku. Na rys. 151 przedstawiony jest przekrój wirnika turbiny Francisa, o średnicy zewnętrznej  $2r_1$  i wewnętrznej  $2r_2$ . Jak o tem była mowa w § 59, prędkość  $U_3$  jest równoległa do osi turbiny i jednakowa dla wszystkich strug. Oddziaływanie  $R$  w kierunku osi, zależne jest tylko od ilości ruchu na przekroju wyjścio-



Rys. 151.

wym wirnika, gdyż woda dochodząca do wirnika z prędkością  $U_1$  nie ma w rzucie na oś turbiny żadnej ilości ruchu. Całkowite więc oddziaływanie w kierunku osi turbiny będzie:

$$R = MU_3 = \frac{\gamma Q}{g} U_3,$$

gdzie  $Q$  oznacza ilość wody przechodzącej przez turbinę w ciągu sekundy. Ponieważ przy tem powstaje pewna ilość ruchu i wytwarza się przeciwparcie przyspieszające ( $X$  na rys. 144), przeto wypadkowa ciśnien działa w kierunku przeciwnym prądowi, od dołu do góry, przyczyniając się do zmniejszenia ciśnienia w rurze ssącej (por. § 58).

**74. Ciśnienie prądu na ciało zanurzone.** Kwestye, dotyczące oporu, jaki stawiają prądom płynnym, umieszczone wśród nich ciała stałe, przedstawiają się często w praktyce technicznej. Filary mostów wytrzymywać muszą ciśnienie prądu wodnego, kominy fabryczne ciśnienie wiatru i t. d. Wiatr działa także na dachy budynków i na przesła mostów, a dla latawców, wypuszczonych przez stacje meteorologiczne,

z przyrządami samopiszzącymi, stanowi siłę, jednocześnie podnoszącą je i utrzymującą na wysokości.

Weźmy najprzód pod uwagę stałą powierzchnię płaską, pogrążoną w ośrodku płynnym nieograniczonym. Ośrodek ten w ruchu stanowi prąd, a powierzchnia płaska, utrzymywana stale w położeniu prostopadłym do osi prądu, stawia opór ruchowi. Przed nią i za nią gromadzą się cząstki płynu, tworzące nieregularne wzburzenia, jak na rys. 146 i 148, a wokół tych dwóch stożków, których wspólną podstawę stanowi dana powierzchnia, obiegają strugi prądu, wywierając nie tylko nacisk, ale także tarcie o cząstki tworzące stożki. Ciśnienie, odpowiadające uderzeniu żyły wodnej na płaszczyznę prostopadłą do jej osi, będzie według wzoru (355):

$$R = \frac{\omega \gamma U^2}{g},$$

gdzie  $\omega$  oznacza wielkość powierzchni płaskiej, wystawionej na działanie prądu. Wzór ten wszakże, wywiedziony przez analogię, zaopatrzyć należy w spółczynnik  $k$ , który równoważy niepewności, wynikające z pochodzenia wzoru. Będzie więc dla uderzenia prostopadłego powierzchni płaskiej, zanurzonej w nieograniczonym prądzie płynnym:

$$R = k \gamma \omega \frac{U^2}{g}. \quad (362)$$

Dla powietrza otrzymał R. v. Lössl wartości spółczynnika  $k$  zależne od kształtu powierzchni płaskiej, mianowicie:

Koło . . . . .	$k = 0,83$
Kwadrat . . . . .	0,86
Trójkąt równoboczny . . . . .	0,90
Prostokąt (1 wysokości na 2 podstawy) . . . . .	0,92
„ (1 wysokości na 4 podstawy) . . . . .	0,94
Jakakolwiek powierzchnia z wystającym brzegiem . . . . .	1,00

Wzór (362) stosuje się tak ściśle do ciśnienia wiatru, że można w nim spółczynnik  $k$  położyć równym jedności. Ponieważ  $1 m^3$  powietrza waży od 1,2 do 1,3 kg, można więc położyć  $\frac{\gamma}{g} = 0,12$  do 0,13 kg i ciśnienie wiatru na  $1 m^2$  stałej powierzchni płaskiej, prostopadłej do kierunku wiatru, liczyć:

$$R = \frac{U^2}{8} \text{ kg.}$$

Mniej pewne wyniki otrzymać można przy obliczaniu ciśnienia płynu na powierzchnię płaską, nachyloną do kierunku

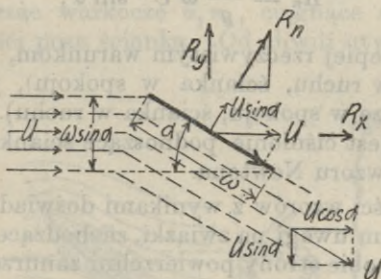
prądu. Zadanie to, nie tyle ważne dla wody, jest wielkiego znaczenia dla powietrza, wobec rozwoju lotnictwa. Ciśnienie oznaczać tu przychodzi, według wzorów (357) — (361), jako wypadkową dwóch składowych, przyczem, jak pokazuje rys. 152, ilość płynu uderzająca w ciągu sekundy wynosi:

$$Q = \omega U \sin \alpha. \quad (363)$$

Wywód nadto stosować się będzie tylko do nachylenia:  $\alpha < 45^\circ$ , gdyż przy kącie większym, odpływ płynu w jedną tylko stronę, nachylonej powierzchni płaskiej, nie może mieć miejsca. Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \\ R_y &= \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin^2 \alpha \\ R &= \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin \alpha \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (364)$$

Wzór na ciśnienie płynu otrzymywano dawniej, rozkładając prędkość prądu na dwie składowe: jedną prostopadłą, a drugą równoległą do uderzanej powierzchni płaskiej. Pierw-



Rys. 152.

szą z tych składowych uważano za straconą i energię uderzenia za zniszczoną. Prof. Donat Bánki<sup>1)</sup> wykazał niesłuszność tego poglądu, zarzuconego już obecnie. Pogląd ten, w danym przypadku doprowadzałby do wzoru na ciśnienie równe składowej prostopadłej  $R_n$ :

$$R_n = \frac{\gamma}{g} Q U \sin \alpha,$$

<sup>1)</sup> Por. „Über unrichtige Anwendung hydraulischer Sätze“ (*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1910, str. 1410).

a kładąc za  $Q$  wartość (363):

$$R_n = \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin^2 \alpha. \quad (365)$$

Wzór ten, znany pod nazwą wzoru Newtona, służył przez długie lata do oznaczania ciśnienia prądu płynnego na zanurzone w nim powierzchnie płaskie, skierowane ukośnie do kierunku prądu. Składowa pozioma  $R_x$  tej wypadkowej  $R_n$ , stanowiąca tak zwany *napęd wsteczny*, byłaby:

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin^3 \alpha,$$

a składowa pionowa, nosząca nazwę *wyporu*:

$$R_y = \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

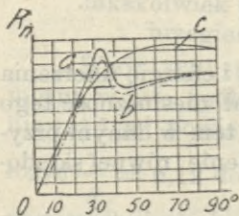
Wychodząc z innych założeń, różni badacze dochodzili do wzorów na ciśnienie, jakie płyn w ruchu wywiera na ściankę nachyloną, nie osiągając wszakże zupełnej zgodności wzorów z doświadczeniami. Jeden z pierwszych, wykazał zupełną niemożliwość czysto teoretycznego wzoru Newtona, F. v. Lössl i na licznych doświadczeniach oparł wzór:

$$R_n = \frac{\gamma}{g} \omega U^2 \sin \alpha, \quad (366)$$

odpowiadający lepiej rzeczywistym warunkom, tak dla latawców (powietrze w ruchu, ścianka w spokoju), jak i dla aeroplanów (powietrze w spokoju, ścianka w ruchu). Wzór Lössla daje wypór, to jest ciśnienie podnoszące ściankę, większe niż otrzymywane z wzoru Newtona.

Niezgodności wzorów z wynikami doświadczeń objaśniają się niezwracaniem uwagi na związki, zachodzące między ciśnieniami prądu, na obie strony powierzchni zanurzonej. Doświadczenia wykazują, trudne do ścisłego oznaczenia przeciwciśnienie, zwiększające całkowity opór płynu; wykazują

nadto, że zależność całkowitego ciśnienia od nachylenia ścianki ma miejsce tylko przy  $\alpha < 38^\circ$ . Przy nachyleniu większem, dochodzącem do  $42^\circ$ , ciśnienie może się znacznie zmniejszać i dopiero, poczynając od tego nachylenia, wraca stała zależność ciśnienia, od nachylenia ścianki.

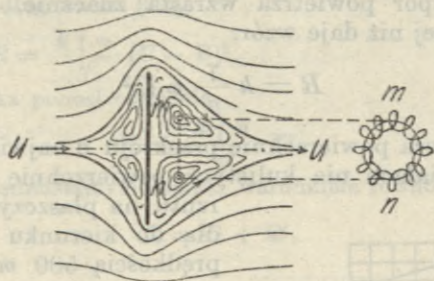


Rys. 153.

Na rys. 153 przedstawiony jest wykres, mający za odcięte nachylenia  $\alpha$ , a za rzędne ciśnienia  $R_n$ , odpowiadające tym nachyleniom. Krzywe  $a$  i  $b$  odnoszą się do

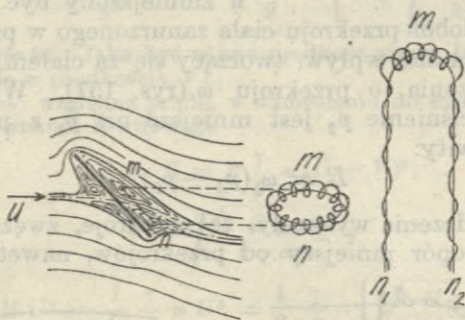


ścianki kwadratowej, o boku 305 mm, a krzywa  $c$  jest krzywą ciśnienia na ściankę prostokątną, długości 76 mm (na płaszczyźnie rysunku 152), a szerokości (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku 152) 1218 mm. Wogóle, przekonano się, że ścianki prostokątne większej szerokości, przy tej samej powierzchni dają opór większy. Zjawisko to objaśnia stożek wzburzenia z tyłu ścianki (rys. 154), tworzący pierścień wirowy, w którym, w około okręgu koła  $mn$  wirują cząstki, leżące



Rys. 154.

blżej powierzchni zewnętrznej stożka. Przy mniejszym kącie nachylenia ścianki (rys. 155) pierścień się spłaszcza i w końcu rozrywa, tworząc warkocze  $n_1 n_2$ , ciągnące się w prądzie, na pewnej długości poza ścianką. Od chwili utworzenia się pierś-



Rys. 155.

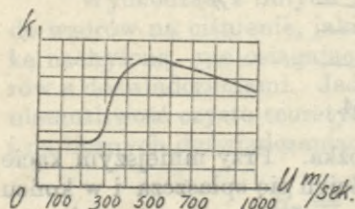
cienia wirowego, zmienia się stosunek ciśnień, i wypadkowa staje się mniejszą, co objaśnia skok krzywych  $a$  i  $b$  na wykresie (rys. 153).

Opór, jaki stawiają ruchowi nieograniczonego prądu płynnego ciała stałe w nim zanurzone, wobec komplikacji, uwidoczonych w przypadku ścianki płaskiej, oznaczony być może wyłącznie drogą poszukiwań doświadczalnych. Dla wody, prowa-

dzono je w znacznej liczbie tylko przy ruchu statków; dla powietrza wykonano ich więcej, zwłaszcza przy ruchu okrągłych pocisków. Doświadczenia stwierdziły, przy prędkościach, spotykanych w hydraulice i technice lotniczej, a więc dochodzących do  $U = 40 \text{ m/sek.}$ , wywiedzioną teoretycznie zależność oporu: liniową — od ciężaru właściwego płynu i od wielkości powierzchni ciała zanurzonego, a w kwadracie — od prędkości, i to aż do prędkości pocisków  $250 \text{ m/sek.}$  Ponad tą granicą, aż do  $500 \text{ m/sek.}$ , opór powietrza wzrasta znacznie, wynosząc do  $2^{1/2}$  raza więcej niż daje wzór:

$$R = k \frac{\gamma}{g} \omega U^2,$$

gdzie  $\omega$  oznacza powierzchnię przekroju o największej średnicy, a przy ciałach nie kulistych powierzchnię największego rzutu na płaszczyznę prostopadłą do kierunku lotu. Ponad prędkością  $500 \text{ m/sek.}$  opór się zmniejsza, jak przedstawia wykres (rys. 156), dający współczynnik  $k$  w funkcji prędkości  $U$ .

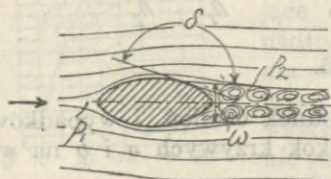


Rys. 156.

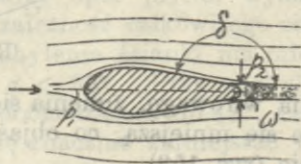
Opór płynu jest skutkiem tarcia wewnętrznych cząstek, niema go w płynie doskonałym, a zmniejszony być może przez odpowiedni dobór przekroju ciała zanurzonego w prądzie, gdyż przeważny ma nań wpływ, tworzący się za ciałem, stożek lub walec wzburzenia, o przekroju  $\omega$  (rys. 157). Wewnątrz tej przestrzeni, ciśnienie  $p_2$  jest mniejsze niż  $p_1$ , z przodu ciała o opór całkowity:

$$R = \omega (p_1 - p_2).$$

Doświadczenia wykazały, że przekroje, zwężające się ku tyłowi, dają opór mniejszy od przekrojów, nawet więcej za-



Rys. 157.



Rys. 158.

ostrzonych z przodu a tępych z tyłu. Przy pierwszych, cylinder wzburzenia wirowego, w skutku przylegania cząstek płynu

do powierzchni ciała ma mniejszy przekrój (rys. 158) niż przy drugich (rys. 157).

**Zadanie 83.** Na ściankę poziomą (rys. 159) o powierzchni  $\omega$  i ciężarze  $G$ , podnoszącą się w górę z prędkością  $V$ , uderza od spodu pionowy prąd powietrza. Jaka ma być prędkość  $U$  tego prądu i jakiej potrzeba pracy dla jej osiągnięcia?

Prędkość względna prądu w odniesieniu do podnoszącej się ścianki będzie  $U - V$ , a ciśnienie na ściankę według wzoru (362):

$$R = \frac{k \gamma \omega}{g} (U - V)^2.$$

Od góry ścianka ponosi ciśnienie:

$$R' = \frac{k \gamma \omega}{g} V^2,$$

a przy ruchu jednostajnym ścianki warunkiem równowagi będzie równanie:

$$R = G + R',$$

z którego:

$$U = V + \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega} + V^2}.$$

Dla nadania masie powietrza  $M = \frac{\gamma}{g} \omega U$ , prędkości  $U/\text{sek.}$ , wykonać trzeba pracę:

$$P = \frac{1}{2} M U^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega U^3 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega \left[ V + \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega} + V^2} \right]^3.$$

**Zadanie 84.** Jaka być winna prędkość prądu  $U$  i praca, jeżeli ścianka opada z prędkością  $V$ ?

Prędkość względna prądu, w odniesieniu do ścianki jest wtedy  $U + V$ , a równanie równowagi:

$$G = R = k \frac{\gamma}{g} \omega (U + V)^2,$$

skąd:

$$U = \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega}} - V,$$

$$P = \frac{1}{2} M U^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega U^3 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega \left[ \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega}} - V \right]^3.$$

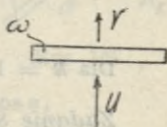
**Zadanie 85.** Jaka potrzebna jest praca dla utrzymywania w powietrzu ścianki o powierzchni  $\omega$  i ciężarze  $G$ ?

Jeżeli w rozwiązaniach dwóch poprzednich zadań położymy  $V = 0$ , to szukana praca:

$$P = \frac{1}{2k} G U,$$

a prędkość prądu mogącego podtrzymywać ściankę w powietrzu:

$$U = \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega}}.$$



Rys. 159.

Przy kołowym kształcie ścianki (por. str. 256)  $k = 0,83$ , a kładąc  $\frac{g}{\gamma} = 8$ , otrzymamy:

$$P = 1,87 \frac{G^{\frac{3}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{Dla } k = 1, \quad P = \frac{1}{2} G U.$$

**Zadanie 86.** Jaka ma być prędkość  $U$  i praca  $P$  prądu nachylonego do pionu pod kątem  $\beta$  (rys. 160), podnoszącego ściankę z prędkością pionową  $V$ .

Mamy jak w zad. 83:

$$R = \frac{k \gamma \omega}{g} (U \cos \beta - V)^2, \quad R' = \frac{k \gamma \omega}{g} V^2.$$

$$R = G + R',$$

$$U = \frac{1}{\cos \beta} \left[ V + \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega} + V^2} \right],$$

$$P = \frac{1}{2} M U^2, \quad M = \frac{\gamma}{g} \omega U \cos \beta,$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega U^3 \cos \beta = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{\omega}{\cos^2 \beta} \left[ V + \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega} + V^2} \right]^2.$$

**Zadanie 87.** Przy prądzie, nachylonym do pionu pod kątem  $\beta$ , jakiej prędkości i jakiej pracy wymaga utrzymywanie w powietrzu ścianki, o powierzchni  $\omega$  i ciężarze  $G$ ?

Gdy  $V = 0$ , wzory poprzedniego zadania przyjmują postać:

$$U = \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega}}, \quad P = \frac{1}{2} \frac{G}{k \cos^2 \beta} \sqrt{\frac{Gg}{k \gamma \omega}} = \frac{1}{2k} \frac{G U}{\cos \beta}.$$

**Zadanie 88.** Powierzchnia nośna  $\omega$  aeroplanu, ustawiona pod kątem  $\alpha$  do poziomu (rys. 161), porusza się z prędkością poziomą  $V$ . Jakie są składowe ciśnienia powietrza na tę powierzchnię: pionowa, podnosząca aeroplan w górę, i pozioma, wyrównywająca siłę popędową ruchu aeroplanu?

Ciśnienie w kierunku normalnym do powierzchni  $\omega$  daje wzór (366):

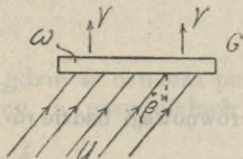
$$R_n = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin \alpha,$$

skąd składowa pionowa, podnosząca aeroplan w górę:

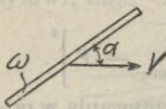
$$R_y = R_n \cos \alpha = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

a składowa pozioma, równa sile popędowej:

$$R_x = R_n \sin \alpha = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin^2 \alpha.$$



Rys. 160.

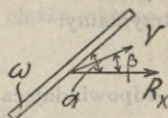


Rys. 161.

**Zadanie 89.** Powierzchnia nośna aeroplanu, ustawiona pod kątem  $\alpha$  do poziomu (rys. 162), porusza się z prędkością  $V$ , nachyloną do poziomu pod kątem  $\beta$ . Jakie będą składowe  $R_y$  i  $R_x$ ?

Ciśnienie normalne będzie według wzoru (366):

$$R_n = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin(\alpha - \beta),$$



skąd:

Rys. 162.

$$R_y = R_n \cos \alpha = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha,$$

$$R_x = R_n \sin \alpha = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha.$$

**Zadanie 90.** Aeroplan o powierzchni nośnej  $\omega$  i ciężarze  $G$  (rys. 161) porusza się z prędkością poziomą  $V$ . Jakiej to potrzebuje pracy?

Kładąc, we wzorach otrzymanych w **Zadaniu 88**,  $R_y = G$ , otrzymamy:

$$V = \sqrt{\frac{Gg}{\gamma \omega}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha}},$$

$$R_x = G \operatorname{tg} \alpha,$$

$$P = R_x V = G \sqrt{\frac{Gg}{\gamma \omega}} \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}};$$

wyłączyć tu należy przypadki:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , przy których wzory powyższe dają  $V = \infty$ .

**Zadanie 91.** Jeżeli dla pokonania oporu powietrza, przy ruchu powierzchni nośnej aeroplanu (rys. 161), potrzeba pracy  $P_1$  a przy ruchu innych części aeroplanu, pracy  $P_2$ , to przy jakim stosunku tych dwóch prac i jakiej prędkości  $V$ , praca całkowita  $P$  będzie najmniejsza?

Z zadania 89, dla  $\beta = 0$ , mamy ciśnienie na powierzchnię nośną  $\omega$ :

$$R_x = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin^2 \alpha.$$

Oznaczając przez  $\omega'$  powierzchnię największego przekroju korpusu aeroplanu, prostopadłego do  $V$ , mieć będziemy ciśnienie na tę powierzchnię:

$$R'_x = \frac{\gamma \omega'}{g} V^2.$$

Będzie więc:

$$P_1 = R_x V, \quad P_2 = R'_x V,$$

a z zadania 88:

$$R_y = \frac{\gamma \omega}{g} V^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Gdy  $R_y = G$ , to:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{a}{V} + b V^3,$$

gdzie:

$$a = \frac{G^2 g}{\gamma \omega \cos^2 \alpha}, \quad b = \frac{\gamma}{g} \omega'.$$

Kładąc:

$$\frac{dP}{dV} = 0,$$

otrzymamy:

$$\frac{a}{V} = 3V^3, \quad \text{czyli } P_1 = 3P_2,$$

a odpowiadającą wartość prędkości:

$$V^4 = \frac{a}{3b}, \quad \text{czyli } V = \sqrt[4]{\frac{Gg}{\gamma \cos \alpha \sqrt{3} \omega \omega'}}.$$

**Zadanie 92.** Ciężar  $G$  aeroplanu składa się z trzech części: ciężaru użytkowego  $G_3$ , ciężaru wartości  $G_2 = nP$  proporcjonalnego do pracy, potrzebnej dla pokonania wszystkich oporów i ciężaru powierzchni nośnej  $G_1 = m\omega$ . Oznaczyć stosunek  $x = \frac{P}{\omega}$  w ten sposób, aby  $y = \frac{G_3}{\omega}$  było maximum.

Z zadania 88 siła podnosząca:

$$R_y = \frac{\gamma}{g} \omega V^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

równa się ciężarowi całkowitemu:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = m\omega + nP + G_3,$$

a z zadania 91:

$$P = (R_x + R'_x) V = \left( \sin^2 \alpha + \frac{\omega'}{\omega} \right) \frac{\gamma}{g} \omega V^3,$$

Kładąc  $x = \frac{P}{\omega}$ ,  $y = \frac{G_3}{\omega}$ , otrzymamy:

$$V^3 = \frac{x}{\frac{\gamma}{\omega} \left( \sin^2 \alpha + \frac{\omega'}{\omega} \right)},$$

$$y = a x^{\frac{2}{3}} - n x - m,$$

gdzie:

$$a = \left( \frac{\gamma}{g} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\left( \sin^2 \alpha + \frac{\omega'}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}}};$$

a z równania:

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

otrzymamy szukaną wartość stosunku:

$$x_1 = \frac{P}{\omega} = \left( \frac{2a}{3n} \right)^{\frac{3}{2}},$$

przy której:

$$\max. y = \max. \left( \frac{G_3}{\omega} \right) = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{27n^2} - m = \frac{n}{2} x_1 - m.$$

**Zadanie 93.** Przy jakiej najmniejszej wartości stosunku  $\frac{P}{\omega}$  aeroplan poprzedniego zadania będzie mógł unosić ciężar użytkowy  $G_3$ ?

Ostatnie równania napisać można w postaci:

$$a^3 = \frac{27}{8} n^3 x_1, \quad \max. y = \frac{1}{2} n x_1 - m,$$

i przedstawić je na wykresie (rys. 163). Aby ciężar  $G_3$  mógł być unoszony, winno być:

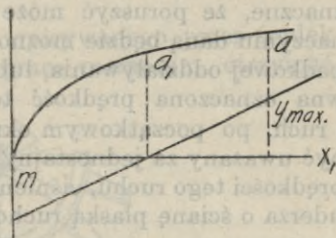
$$\max. y = \max \frac{G_3}{\omega} > 0,$$

albo:

$$x_1 = \frac{P}{\omega} > 2 \frac{m}{n}$$

i taka jest najmniejsza szukana wartość stosunku, przyczem wszakże wypełniony ma być warunek:  $a > a_1$  (por. rys. 163), albo:

$$a > 3 \sqrt[3]{\frac{n^2 m}{4}}.$$



Rys. 163.

**Zadanie 94.** Dla aeroplanu o powierzchni nośnej  $\omega = 110 \text{ m}^2$ , ustawionej pod kątem  $\alpha = 15^\circ$ , której ciężar  $G_1 = 143 \text{ kg}$ , z motorem o sile 70 k m., ważącym 6.25 kg na jednego konia mechanicznego, przy powierzchni największego przekroju  $\omega' = 0,0259 \omega$ , obliczyć ciężar użytkowy i ciężar całkowity przy ruchu poziomym, jak również największy ciężar użytkowy i pracę motoru, potrzebną dla unoszenia tego ciężaru.

Według danych zadania:

$$n = \frac{6,25}{75} = \frac{1}{12}, \quad m = \frac{143}{110} = 1,3,$$

$$a_1 = 3 \sqrt[3]{\frac{n^2 m}{4}} = 0,393,$$

a przyjmując  $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}$ :

$$a = \left(\frac{\gamma}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\left(\sin^2 \alpha + \frac{\omega^1}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}}} = 0,609.$$

Warunek  $a > a_1$  jest więc wypełniony. Ciężar użytkowy dają równania:

$$y = \frac{G_3}{\omega} = a x^2 - n x - m, \quad x = \frac{P}{\omega} = \frac{70 \cdot 75}{110},$$

skąd:

$$G_3 = 301 \text{ kg},$$

a ciężar całkowity:

$$G = G_3 + n P + m \omega = 881,5 \text{ kg}.$$

Dla największego ciężaru użytkowego:

$$x = \frac{P}{\omega} = \left( \frac{2a}{3n} \right)^3 = 115,6,$$

$$\max. G_3 = \left( \frac{1}{2} n x - m \right) \omega = 386 \text{ kg},$$

$$P = 115,5 \omega = 12705 \text{ kgm/sek.} = 169,4 \text{ k. m.}$$

**75. Ciśnienie prądu wodnego na ściany ruchome.** Oddziaływanie prądu na ściany naczynia (§ 72) bywa tak znaczne, że poruszyć może z miejsca samo naczynie. Jeżeli naczyniu daną będzie możność poruszania się w kierunku wypadkowej oddziaływania, lub jednej z jego składowych, to pewna oznaczona prędkość tego ruchu pokonać może opory, i ruch, po początkowym okresie przyspieszenia, będzie mógł być uważany za jednostajny. Przy zwiększającej się wszakże prędkości tego ruchu, ciśnienie będzie się zmniejszało. Gdy żyła uderza o ścianę płaską ruchomą (§ 73), to z wzoru (356):

$$R = \frac{\gamma Q}{g} (U - V),$$

w którym  $U$  jest prędkością żyły a  $V$  prędkością ruchu ściany, wynika, że przy zwiększaniu się  $V$ , zmniejsza się  $R$  i dochodzi do zera, gdy  $U = V$ . Toż samo ma miejsce przy nachyleniu położeniu ściany i  $R$  schodzi do zera przy  $V = U \cos \alpha$ . Gdy ściana nie jest płaską, wtedy zamiast ciśnienia  $R$ , działać będzie jedna ze składowych oddziaływania (353).

Opierając się na tych wywodach, łatwo będzie zdać sobie sprawę z działania prądu na łopatki kół wodnych, za pośrednictwem których energia prądu przekształconą zostaje na ruch obrotowy koła. Znaczna liczba dawniejszych systemów tych kół opartą była na zasadzie oddziaływania prądu, jak koła wiszące, koła podsiebierne i koła o oddziaływaniu. Należy tu także najnowsze, koło popędowe Peltona.

Koło podsiebierne, przedstawione na rys. 164, ma średnicę  $D$ , mierzoną między środkami  $t$  zanurzanych części przeciwległych łopatek. Punkty te poruszają się ze stałą prędkością obwodową  $V$ . Woda wychodzi z pod nachylnego stawidła  $S$ , przy naporze  $H$ , z prędkością  $U_1$ . Jakkolwiek spotyka łopatki koła w różnych kierunkach, i po parę z nich jednocześnie, to jednak zdać sobie można sprawę z jej działania, biorąc pod uwagę jedną łopatkę, skierowaną prostopadle do kierunku żyły wodnej. Oddziaływanie prądu we wszystkich położeniach łopatki daje równanie (356). Kładąc w niem  $Q = \omega U_1$ ,  $\omega = ab$  iloczynowi z grubości żyły  $a$  przez jej



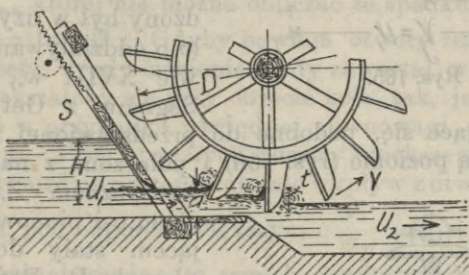
szerokość  $b$ , która tu niewiele się różni od szerokości łopatki, otrzymujemy:

$$R = \frac{\gamma Q}{g} (U_1 - V) = \frac{\gamma \omega U_1}{g} (U_1 - V_2) = \frac{\gamma a b}{g} U_1 (U_1 - V). \quad (367)$$

Praca koła, nie biorąc pod uwagę podrzędnych strat naporu, będzie:

$$P = R V = \frac{\gamma Q}{g} (U_1 - V) V. \quad (368)$$

Prędkość na obwodzie koła, opisywanego przez środek zanurzonej części łopatki, dającą pracę maximum, otrzymać



Rys. 164.

można przez zróżniczkowanie równania (368) względem  $V$  i przyrównanie pochodnej do zera. Prędkość ta wynosi:

$$V = \frac{U_1}{2}.$$

Kładąc tę wartość za  $V$  w równanie (368), otrzymamy:

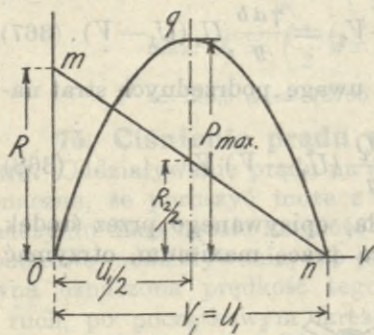
$$P = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{U_1^2}{4} = \frac{1}{2} \gamma Q \cdot \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{2} \gamma Q H, \quad (369)$$

czyli że teoretycznie, dająca się zużytkować praca wody w tem kole jest równa połowie dostarczanej energii brutto  $\gamma Q H$ . Druga połowa tej energii pozostaje w wodzie odchodzącej z pod koła, i wynosi w przybliżeniu, jeżeli przez  $U_2$  oznaczymy prędkość wody odchodzącej:

$$\frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{U_2^2}{2}.$$

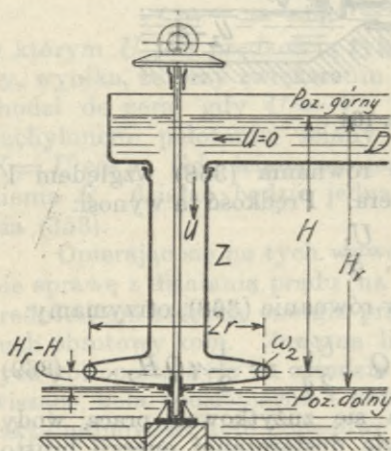
Wywód ten uwidoczni wykres (rys. 165), w którym za odcięte wzięto prędkości  $V$ , a za rzędne ciśnienia  $R$  (prosta  $mn$ ) i prace  $P$  (krzywa  $oqn$ ). Dla  $V = 0$ , czyli gdy koło jest zahamowane, ciśnienie  $R$  jest największe. Gdy prędkość koła wzrasta, ciśnienie według wzoru (367)

zmniejsza się w stosunku liniowym, a dla  $V_j = U_1$ , czyli dla tak zwanej prędkości jałowej, schodzi do zera. Tak w jednym,



Rys. 165.

rury zwązające się, podobne do ustawione są poziomo (rys. 166) i połączone z naczyniem cylindrycznym Z, ruchomem



Rys. 166.

około osi pionowej, otrzymującym stały dopływ wody z kanału D. Pod naporem H woda wypływa przez dwie wygięte rury o powierzchni wylotu  $\omega_2$ , wywierając oddziaływanie  $R_1$ , które wprawia w ruch obrotowy całą maszynę, w kierunku przeciwnym prędkości wody wypływającej, jak to oznaczają strzałki na rysunku. Woda wypływa z otworów z prędkością względną  $u_2$ , która z prędkością bezwzględną  $U_2$  i prędkością obrotu koła  $V$ , wiąże się równaniem:

$$u_2 = V + U_2, \dots (370)$$

bo gdy koło, przy  $V=0$ , jest w spoczynku, wtedy prędkość bezwzględna  $U_2$  musi być równa prędkości względnej  $u_2$ , a znów przy obrocie koła tak szybkim, że  $u_2 = V$ , będzie  $U_2 = 0$ , czemu także czyni za-  
dość równanie (370). Nie biorąc tymczasowo pod uwagę prę-

kości względnej  $u_1$ , przy wejściu wody do rur wygiętych, mamy oddziaływanie w odległości  $r$  od osi, według wzoru (351), kładąc za  $U_2$  prędkość względną  $u_2$ . Moment tego oddziaływania będzie:

$$2r \frac{R_1}{2} = r R_1 = r \frac{\gamma Q}{g} u_2,$$

a pomnożony przez prędkość kątową  $\theta$ , z równania  $r\theta = V$ , daje pracę:

$$P = \frac{\gamma Q}{g} V u_2.$$

Część wszakże tej pracy zużyta zostaje na wytworzenie prędkości  $u_2$ , której nie można obliczać ze spadku  $H$  znanym wzorem  $u_2 = \sqrt{2gH}$ . Gdyby bowiem otwory rur wygiętych były zamknięte, wtedy ciśnienie wody zawartej w rurach wygiętych zwiększałoby się przy obrocie koła, tak, jak się zwiększa ciśnienie w przypadku względnej równowagi cieczy (por. *Zad. 6*, str. 13). Przy otwartych rurach zwiększenie ciśnienia nie będzie wprawdzie następowało, ale wypływ z otworów będzie miał miejsce pod naporem większym o  $\frac{V^2}{2g}$  od wysokości ciśnienia hydrostatycznego w rurach zamkniętych. Prędkość względną  $u_2$  wytwarzać więc będzie napór  $H + \frac{V^2}{2g}$ , tak, że:

$$u_2 = \sqrt{2gH + V^2}, \quad \dots \quad (371)$$

powiększa się razem z prędkością obrotową. Może to wszakże mieć miejsce tylko do pewnej granicy, gdyż przy wejściu wody do rur wygiętych, udzieloną zostaje jej nagle prędkość obrotowa, co przy zwiększaniu się tej ostatniej powoduje coraz większe wzburzenia i straty naporu. W rzeczywistości, osiągnięta zostaje pewna oznaczona prędkość biegu jałowego  $V_j$ , wynosząca, według Weisbacha, około  $2\sqrt{2gH}$ .

Po wyjściu z rur wygiętych, woda posiada jeszcze pewną energię:

$$P_0 = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{U_2^2}{2},$$

tak, że całkowita energia udzielona kołu, w najpomysłniejszym przypadku, wynosić może:

$$P_r = \gamma Q H - P_0 = \gamma Q \left( H - \frac{U_2^2}{2g} \right),$$

gdzie praca brutto  $\gamma Q H$  odnosi się do spadku  $H$ , zużywanego istotnie przez koło, t. j. wysokości od poziomu górnego do

płaszczyzny przechodzącej przez środki otworów rur wygiętych, a nie do spadku rozporządzalnego  $H_r$  (od poziomu górnego do dolnego). Różnica  $H_r - H$ , t. j. wysokość, na jakiej są umieszczone środki otworów nad poziomem dolnym, może być bardzo małą i dla tego nie została uwzględniona. Wprowadzając w ostatnie równanie wartości  $H$  i  $U_2$  z równań (370) i (371), otrzymujemy:

$$P_r = \frac{\gamma Q}{g} (u_2 - V) V = \frac{\gamma Q}{g} [V \sqrt{2gH + V^2} - V] V, \quad (372)$$

związek między pracą i prędkościami, podobny do otrzymanego dla koła podsiebiernego. Można by więc i tu zestawić wykres, jak na rys. 165, otrzymując najlepszą pracę wtedy, gdy koło o oddziaływaniu ma prędkość obrotową równą połowie prędkości względnej, przy wyjściu wody z rur wygiętych. Jeżeli położymy wtedy  $u_2 = u_n$ , to

$$P_r = \frac{\gamma Q}{g} \left( u_n - \frac{u_n}{2} \right) \frac{u_n}{2} = \frac{1}{4} \frac{\gamma Q}{g} u_n^2.$$

Sprawność  $\eta$ , czyli według wzoru (268) stosunek  $P_r$  do pracy brutto  $\gamma Q H$ , która dla kół podsiebiernych wynosiła według wzoru (369) tylko 0,5, będzie tu większą. Ze wzoru (371):

$$H = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{V^2}{2g},$$

a kładąc  $2V = u_n = u_2$ :

$$H = \frac{u_n^2}{2g} - \frac{u_n^2}{8g} = \frac{3}{8} \frac{u_n^2}{g},$$

przy tej zaś wartości  $H$  mamy:

$$\eta = \frac{P_r}{\gamma Q H} = \frac{\frac{1}{4} \frac{\gamma Q}{g} u_n^2}{\frac{3}{8} \frac{\gamma Q}{g} u_n^2} = \frac{2}{3}.$$

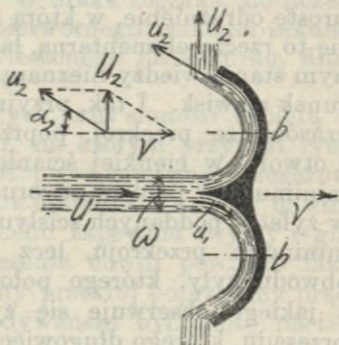
W kole o oddziaływaniu, podobnie jak w kole podsiebiernym, większa część niezużytej energii uchodzi wraz z wodą. Tarcie wałów i powietrza oraz nieuwzględnione w powyższem rozważaniu podrzędne straty naporu, zmniejszają sprawność w większym jeszcze stopniu, tak, że jeżeli od koła podsiebiernego spodziewać się można sprawności 40%, to koło o oddziaływaniu dać może conajwyżej 60%.

W kole popędowem Peltona (rys. 122), uniknięto większej straty energii, wynikającej z prędkości wody przy odpływie z pod silnika, przez zastosowanie podwójnych łyżek

(rys. 167), które zwracają wodę pod kątem prawie  $180^\circ$  względem pierwotnego kierunku. Żyłka wodna wpada na łopatkę utworzoną z dwóch łyżek z prędkością  $U_1$  i rozdzieliwszy się na dwie połowy, przepływa po łyżkach z prędkością względną przy wyjściu:

$$u_1 = U_1 - V.$$

Na łyżkach ta prędkość względna mało się zmniejsza, tak, że przy wyjściu otrzymać można z trójkąta prędkości, narysowanego na rysunku, prędkość  $u_2$  bardzo małą, dobierając mały kąt  $\alpha_2$  i zbliżone do siebie wielkości  $u_2$  i  $V$  (najlepiej gdy  $V = u_2 \cos \alpha_2$ ). Mając na uwadze uderzenie żyły o powierzchnię wklęsłą (rys. 150) oraz określenia składowych  $X$  i  $Y$  oddziaływania  $R$  (str. 251), widzimy, że w kole Peltona, względnie do łyżki, działa od  $a$  do  $b$  parcie opóźniające, a od  $b$  do wyjścia wody z łyżki przeciwparcie przyspieszające. Oddziaływanie  $R$  (361) będzie tu dwa razy większa niż przy kole podsiebniernem (355) lub kole o oddziaływaniu (352), co przy małej stracie energii przy wyjściu wody z łyżek, daje wysoką, do  $80\%$  dochodzącą, sprawność koła Peltona.



Rys. 167.

## X. Hydrometria.

**76. Badanie zjawisk. Mierzenie czasu.** Hydrometria podaje sposoby dokonywania pomiarów, stanowiących podstawę projektowania robót wodnych <sup>1)</sup>, jak regulacje rzek, budowa kanałów i t. p., a także obliczania ilości wody rozporządzałnej dla zakładów wodnych <sup>2)</sup>, o których była mowa w § 55.

Jakąkolwiek będzie metoda, użyta przy badaniu zjawisk hydraulicznych: dostrzeganie, doświadczenie, czy analiza mate-

<sup>1)</sup> Por. J. Rychter. Roboty wodne. Część I. Pomiary wodne, rowy i kanały. Lwów 1894.

<sup>2)</sup> Por. O. Nadolski. Zakłady o sile wodnej, obliczenia hydrotechniczne. Lwów 1910.

matyczna, chodzi zawsze o oznaczenie praw równoczesnej zmiany różnych ilości. Przy dostrzeżeniach i doświadczeniach, badanie ma różne stopnie doskonałości, z których pierwszym jest proste odróżnienie, w którą stronę następuje zmiana. Wydaje się to rzeczą elementarną, łatwą do wykrycia, a jednak w obecnym stanie wiedzy nieznanym bywa w wielu razach sam kierunek zjawisk. I tak, przyjmowano powszechnie, do ostatnich czasów, że przekrój poprzeczny żyły wodnej, wychodzącej z otworu w cienkiej ścianie, przechodzi wogóle przez pewne minimum w pobliżu otworu. Badania Bazin'a wykazały, że w żyłach, poddanych ścisłym pomiarom, nie wykryto żadnego minimum przekroju, lecz minimum szerokości pozornego obwodu żyły, którego położenie zależnem jest od punktu, z jakiego obserwuje się żyłę. Fakt ten tłumaczy początek przesądu, którego długowieczność pochodzi z nazwy ścieśnienia (kontrakcyi), nadanej przez dawnych hydraulików pozorowi zjawiska, nie sprawdzonemu przez ścisłe pomiary. Nie mniej czasu wymagało obalenie innego rozpowszechnionego przesądu, że miejscowe rozszerzenie koryta rzeki obniża poziom przyboru wody. Możliwość przeciwnego wyniku, zauważona podczas wielkiego wylewu Loary w 1840 r., ustaloną została dopiero przez poszukiwania doświadczalne inż. Vautier'ów. Przykłady te, wykazujące, jak ważnem jest samo tylko odróżnienie, w którą stronę zmieniają się ilości w zjawisku, dowodzą potrzeby niezmiernej ścisłości w pomiarach wodnych. Stosowanie przy tych pomiarach sposobów ulepszonych, stało się też jedynym środkiem zapewnienia dalszych postępów hydrauliki.

Drugi stopień doskonałości w badaniu zjawisk stanowi równoczesne mierzenie ilości zasadniczych w tych zjawiskach i powtarzanie pomiarów. Aby z szeregów liczb otrzymywanych wyciągać było można należyte wnioski, należało te liczby zestawiać, co uskuteczniano dawniej w tablicach o wejściu pojedynczem, lub podwójnem. Pierwotny ten sposób, zestawiania liczb z pomiarów, zastąpiony został wykresami, a uwieńczeniem postępu w tej dziedzinie stały się nomogramy d'Ocagne'a (§ 23). Potrzeba równoczesnego mierzenia ilości zasadniczych i powtarzania pomiarów doprowadziła do dokonywania ich w odstępach czasu coraz krótszych i trzecim stopniem doskonałości w badaniu zjawisk stały się przyrządy rejestrujące, najprzód samopiszące, a następnie automatycznie zestawiające wykresy.

Pomiary wodne polegają na mierzeniu czasu i wymiarów prądu, oraz ilości pochodnych, jakimi są: ciśnienie, prędkość, wydatek, praca. Do mierzenia czasu używany bywa zwykle

zegarek, ze skazówką sekundową, która przez trzy kolejne naciśnięcia guziczka: puszczana jest w ruch, zatrzymywana i napowrót sprowadzana do zera. W braku zegarka, do liczenia sekund używać można bardzo pierwotnego wahadła sekundowego, mianowicie kamyka zawieszzonego na sznurku, długości 0,994 m.

W przyrządach rejestrujących, czas stanowi odciętą wykresu i ruch jednostajny papieru, na którym przyrząd rysuje przebieg zjawiska, nadawany jest przez mechanizm zegarowy, umieszczony najczęściej wewnątrz cylindra, na który nawinięty jest papier. Jednostajność ruchu zapewnia zwykły regulator skrzydełkowy. Ścisłe zaznaczanie chwili pewnego faktu, np. przejścia pływaka przez dany przekrój poprzeczny prądu, przy mierzeniu prędkości, dokonywanem być może naciskaniem specjalnego skaźnika.

**77. Pomiary prądów.** Mierzenie wydatku prądów jest czynnością delikatną, wymagającą wielkiej staranności. Gdy na pewnym przecięciu poprzecznym o przekroju  $\omega m^2$ , prędkość średnia wynosi  $U m/sek.$ , to wydatek  $Q m^3/sek.$  będzie:

$$Q = \omega U.$$

Jeżeli więc prędkość  $U$  może być oznaczoną bezpośrednio przez doświadczenie, to łatwo już będzie otrzymać wydatek  $Q$ , gdyż powierzchnia  $\omega$  może być zawsze dokładnie obliczona, zwykłymi sposobami mierniczymi. Odwrotnie znów, jeżeli możemy zmierzyć wydatek  $Q$ , przez pomiar zbiornika, do którego prąd zostanie wpuszczony, to otrzymamy prędkość średnią:

$$U = \frac{Q}{\omega}.$$

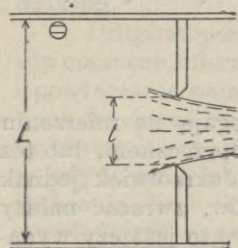
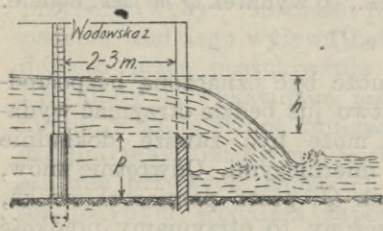
Wogóle więc, pomiary prądów polegają na mierzeniu prędkości, w pewnym danym przecięciu poprzecznym, lub też ilości wody nagromadzonej w zbiorniku. Jakikolwiek jednak będzie sposób wykonywania tych pomiarów, zwracać należy baczną uwagę na to, czy prąd jest ustalony, to jest czy wydatek jest stały w ciągu przeprowadzania pomiaru, a w przypadku mierzenia prędkości, czy prąd jest jednostajny. Na wykonanie bowiem pomiaru potrzeba pewnego czasu, a gdy w ciągu tego czasu wydatek i prędkość ulegają zmianie, otrzymalibyśmy w wyniku nie wydatki i prędkości średnie, o jakie chodzi, ale wydatki i prędkości rzeczywiste w poszczególnych chwilach. Dwa te warunki: ruch ustalony przy mierzeniu wydatku i ruch jednostajny przy mierzeniu prędkości, stanowią podstawę dokładności pomiarów prądu. Czyni się im zadość

wytwarzając, gdy to jest możliwem, ruch ustalony na danem przecięciu, przez zagrodzenie strumienia i urządzenie odpowiednich przepustów, a na rzekach, których nie można zagrażdzać, wyczekując niskiego stanu wody, kiedy ruch bywa ustalony, i wybierając regularne części koryta, na przestrzeni których ruch ustalony bywa równocześnie jednostajnym.

Bezpośrednio mierzyć można wydatek małego strumienia, wpuszczając wodę, w ciągu pewnego czasu, do pomierzonego uprzednio zbiornika. Gdy zbiornik objętości  $V m^3$  napęlnia się w ciągu czasu  $T sek.$ , wtedy wydatek:

$$Q = \frac{V}{T}.$$

Wydatki niewielkie, wynoszące od  $0,3$  do  $3 m^3/sek.$ , o ile nie mogą być obliczone przy użyciu znajdujących się na strumieniu otworów stawidłowych, mierzyć można, urządzając specjalnie dla pomiaru tak zwany *przewał Poncelet'a* (rys. 168). Przewał ten daje zupełne ścieśnienie płachty u spodu i po bokach i swobodny dopływ powietrza do płachty, jak na



Rys. 168.

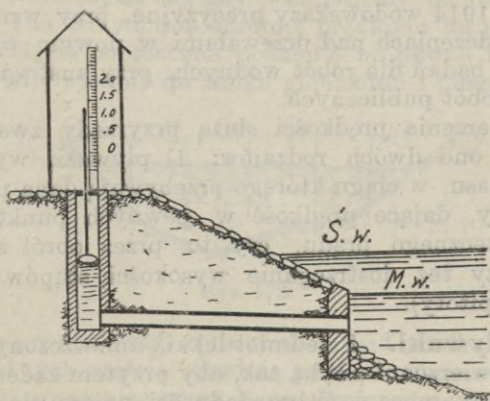
z wzoru (259), a współczynnik  $m$  z tablicy 11 (str. 178); wszakże doświadczenia precyzyjne, wykonane w nowym wiedeńskim zakładzie do badań dla robót wodnych, przy austriackim ministerjum robót publicznych <sup>1)</sup>, wykazały, że odpowiedniejszym jeszcze do stosowania przy tych pomiarach jest wzór (262) Th. Rehbock'a.

Na większych strumieniach i rzekach wydatek otrzymywać można tylko przez pomiar przekroju poprzecznego i prędkości. Pomiaru te wszakże dają wydatek, mający miejsce w chwili ich wykonywania, gdy tymczasem zwykle chodzi o ilość przepływu w dłuższych

<sup>1)</sup> Por. Dr. Fritz Schaffernak. Die Versuchsanstalt für Wasserbau im k. k. Ministerium für öffentlichen Arbeiten (*Zeitschrift der Oesterreichischen Ingenieur und Architekten-Vereines* 1916).

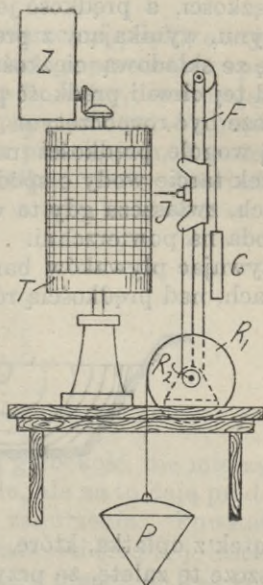


okresach czasu. To też zdawna już, przy filarach mostów, lub na brzegach rzek urządzone są wodowskazy i prowadzona stała kontrola wysokości wody. Kontrola taka daje możność obli-



Rys. 169.

czania wydatku w ciągu dłuższego okresu czasu. Dla ułatwienia odczytywań wysokości na wodowskazy, wyprowadzaną bywa z koryta rzeki, od najniższego stanu wody rura do studzienki, umieszczonej na brzegu wysokim, i w studzience stawiany wodowskaz (rys. 169). Płaska bańka blaszana unosi wtedy drążek ze skazówką, której położenie odczytywane jest na łącie. Największe wszakże ulepszenie w prowadzeniu kontroli stanów wody, stanowią wodowskazy samokreślne, albo zegarowe, zwane także *limnigrafami*. W przyrządach tych pływak  $P$ , opuszczany do studzienki, równoważony jest przeciwwagą  $G$  (rys. 170) w ten sposób, że sznur, na którym zawieszony jest pływak, nawija się na kółko  $R_1$ , osadzone na jednej osi i stale złączone z kółkiem  $R_2$ , na które nawija się sznur od przeciwwagi  $G$ , przechodzący przez krążek, umieszczony na słupie  $F$ . Po słupie tym przesuwając się może, połączone z obiegiem sznurowym przeciwwagi, pióro  $J$ , odtwarzające w każdej chwili ruchy pływaka. Pióro  $J$  kreśli na papierze kratkowanym, na-

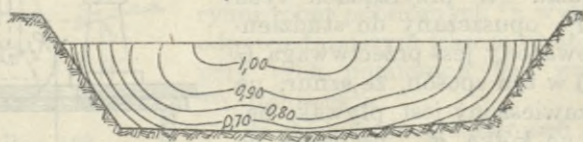


Rys. 170.

winiętym na cylindrze  $T$ , krzywą, przedstawiającą zmiany stanu wody. Cylinder  $T$  wprowadzany jest w ruch przez mechanizm zegarowy  $Z$ . Ze szczególną starannością, urządzone zostały w r. 1914 wodowskazy precyzyjne, przy wzmiankowanych doświadczeniach nad przewalami w nowym wiedeńskim zakładzie do badań dla robót wodnych, przy austriackim ministerjum robót publicznych.

Do mierzenia prędkości służą przyrządy zwane *hydrometrami*; są one dwóch rodzajów: 1) pływaki, wymagające mierzenia czasu, w ciągu którego przebywają daną przestrzeń, 2) przyrządy, dające prędkość w pewnych punktach przecięcia poprzecznego prądu, czy to przez obrót skrzydełek (młynki), czy też dostrzeganie wysokości słupów wodnych w rurkach (pitoty).

**78. Pływaki.** Przedmiot lekki, umieszczony z ostrożnością na powierzchni prądu, tak, aby przytem żaden ruch nie był mu nadany, mocą swej bezwładności opiera się zrazu ruchowi prądu. Prędkość jego, najprzód mniejsza od prędkości prądu, stopniowo się powiększa, dążąc do zrównania się z tą ostatnią. Wtedy już pływak poddany jest tylko działaniu siły ciężkości, a prędkość jego powiększa się dalej, dopóki opór płynu, wynikający z prędkości względnej pływaka, nie zrówna się ze składową ciężkości, równoległą do powierzchni prądu. Od tej chwili prędkość pływaka staje się jednostajną i pomiar może być rozpoczętym. Wynika stąd, że pływaki dawać mogą wogóle prędkości na powierzchni nieco za duże, jakkolwiek tarcie wody o spód pływaka działa wstrzymująco na jego ruch, zwłaszcza gdy ta woda ma prędkość nieco mniejszą, niż woda na powierzchni. W praktyce unikać można tych różnic, używając pływaków bardzo małych. W ścisłych doświadczeniach, nad prędkością różnych prądów, używał Boileau <sup>1)</sup> pie-



Rys. 171.

czątek z opłatka, które, oprócz bardzo małej objętości, miały jeszcze tę zaletę, że przylegały do cieczy, co częściowo równoważyło działanie siły ciężkości.

O rozkładzie prędkości na powierzchni prądu była wzmian-

<sup>1)</sup> Traité de la mesure des eaux courantes. Paris 1854.

ka w § 38. Dla lepszego uwidocznienia tego rozkładu a także ogólnego rozkładu prędkości w przecięciu poprzecznym prądu, podajemy ten ostatni na rys. 171. Jak widzimy, prędkość na powierzchni zmniejsza się, gdy postępujemy od osi koryta ku brzegom. Dla otrzymania średniej prędkości na powierzchni, należy przecięcie poprzeczne podzielić na pewną liczbę części (rys. 172), odpowiednio do zmian głębokości i puszczać pływa-



Rys. 172.

ki tak, aby przechodziły, o ile można, nad środkami ciężkości powierzchni tych części. Średnią prędkość na powierzchni  $U_0$  otrzymamy, oznaczając przez  $u_0$  prędkości pływaków I, II... a przez  $\omega$  powierzchnie części 1, 2, ...:

$$U_0 = \frac{\sum \omega u_0}{\sum \omega}.$$

Aby ze średniej prędkości na powierzchni prądu, otrzymać średnią prędkość w całym przecięciu poprzecznym, posługiwać się można wzorami R. Siedek'a <sup>1)</sup>, który, oznaczając przez  $U$  prędkość średnią na przecięciu poprzecznym,  $U_0$  prędkość średnią na powierzchni, ponad tem przecięciem,  $l$  szerokość,  $h$  głębokość prądu, wywiódł z wielkiej liczby doświadczeń, dla głębokości  $h$  większej od 0,8 m a mniejszej od 2 m:

$$U = U_0 \sqrt[20]{\frac{h^2}{l}},$$

a dla  $h > 2 m$ :

$$U = \frac{U_0 + 0,4}{1,2} \sqrt[20]{\frac{h^2}{l}}.$$

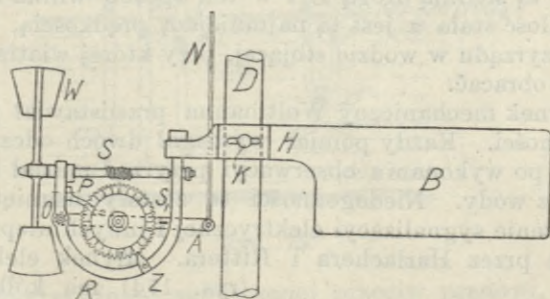
Pływaki, zanurzające się na pewną głębokość, nie mierzą dokładnie prędkości na powierzchni prądu, ale za to dają prędkość średnią, odpowiadającą głębokości zanurzenia. Powstał stąd pomysł używania, do oznaczania prędkości średniej, lasek odpowiednio obciążonych, aby się zanurzały prawie do dna ko-

<sup>1)</sup> Oesterreichische Wochenschrift für den öffentlichen Bau-dienst. 1912.

ryta. Sposób ten, stosowany był przez Buffon'a, przy mierzeniu prędkości Tygrysu, przez Lombardini'ego na rzece Po, inżynierów amerykańskich na Mississipi i angielskich na Irravaddy; wszędzie, przy mierzeniu prędkości wielkich rzek, okazał się praktycznym. Na rzece Po, używane były laski bukowe, malowane i pokostowane, żeby w nie woda nie wsiąkała, z zawieszonym u spodu blaszanym cylindrem, w którym umieszczano ciężarki ołowiane. Laski te zastępować można jakimikolwiek drążkami z twardego drzewa, z przywiązaniem u spodu kamieniem. Drążek, tak obciążony, przyjmuje w prądzie położenie prawie pionowe, pochylając się nieco w kierunku biegu wody przy większych prędkościach, i utrzymując tem stałej to położenie, im jego środek ciężkości leży niżej. Dlatego też obciążenie umieszczone być winno u samego spodu, a górny koniec drążka dochodzić winien do powierzchni prądu. Doświadczenia Cunningham'a, na kanale Gangesu, wykazały, że drążek w tem położeniu, gdy jego długość wynosi  $\frac{9}{10}$  głębokości, płynie z prędkością prawie równą prędkości średniej prądu.

Ponieważ pływak, zanurzony w prądzie, nie odrazu płynąć zaczyna z prędkością jednostajną, należy przeto wypuszczać pływaki z miejsca położonego w górze przekroju, od którego zaczyna się liczenie czasu i sprawdzać, czy ruch ich doszedł do jednostajności, notując czasy przebycia dwóch równych odległości. Czasy te będą sobie równe, gdy ruch pływaka jest jednostajny. Odległości do przebycia oznaczane bywają za pomocą znaków stałych. Przypuśćmy, że co 25 m postawiony jest znak. Wypuszczając pływaki z punktu, położonego powyżej pierwszego znaku i zapisując liczby sekund, w ciągu których pływak przebywa kolejne przestrzenie między znakami, przekonamy się zaraz, od którego znaku ruch pływaka stał się jednostajnym. Mając zaś zapisany, przy każdym znaku, czas przejścia pływaka, oblicza się prędkość, dzieląc odległość między znakami, przez wyrażony w sekundach czas, w ciągu którego pływak przebywa tę odległość. Zwykle prędkość pływaka ujednostajnia się po przebyciu 15 do 20 m, a z pięćdziesięciu metrów ruchu jednostajnego pływaka, można już otrzymywać wyniki dostatecznie ścisłe. Pomiaru wykonywane być winny w czasie spokojnym, gdyż działanie wiatru może być przyczyną znacznych błędów, zwłaszcza przy pływakach na powierzchni. Na ruch laszek obciążonych wiatr nie ma już większego wpływu. W każdym razie górny koniec laski nie wiele wystawać powinien nad poziomem wody; aby zaś laska była łatwo widziana, dobrze jest zaopatrywać ją w chorągiewkę, lub przyszpilony na wierzchu kawałek papieru.

**79. Młynki.** Do mierzenia prędkości w poszczególnych punktach przecięcia poprzecznego prądu, obmyślił Woltmann, jeszcze w r. 1790, przyrząd noszący jego imię. Młynek Woltmanna, zwany także młynkiem mechanicznym, dla odróżnienia od ulepszonego, elektrycznego, składa się z dwuskrzydłowego wiatraczka *W* (rys. 173), umocowanego na osi, obracającej się swobodnie w ramie *R*. Na osi umieszczony jest ślimak *S*, przesuwający zęby kółka  $S_1$ , które za pośrednictwem drążka *A*, ruchomego około punktu *O*, może być podnoszone przez pociągnięcie w górę sznura *N* i doprowadzone do zetknięcia ze ślimakiem. Puszczanie sznura znosi to zetknięcie, bo sprężyna *P* odsuwa kółko zębate od ślimaka, a umocowany na ramie *R* ząb *Z* zatrzymuje obrót kółka zębatego, odsuniętego od ślimaka, wpadając między dwa zęby kółka. Skazówka,



Rys. 173.

przymocowana do ramy *R*, pokazuje na podziałce kółka, zgodnej z liczbą jego zębów, każdorazowe położenie kółka względem ramy. Rama umocowana jest na pochwie *H*, którą można przesuwając wzdłuż drążka *D* i w każdym położeniu zatrzymać za pomocą śruby *K*. W dawniejszych przyrządach, pochwa zaopatrzona była jeszcze w ster blaszany *B*, ustawiający os przyrządu w kierunku ruchu prądu, na którym ściśle znajdować się winna, podczas pomiaru.

Stawiając drążek, z umocowanym na nim młynkiem, pionowo na przekroju prądu, doprowadzać można młynek do każdego punktu tego przekroju. Po doprowadzeniu młynka na miejsce, podnosimy, za pomocą sznurka, kółko zębate i od tej chwili liczymy sekundy. Po upływie  $\frac{1}{2}$  do  $1\frac{1}{2}$  minuty opuszczamy sznurek, notując liczbę sekund, w ciągu których kółko było podniesione, wyciągamy młynek z wody i odczytujemy, na podziałce kółka zębatego, liczbę zębów przesuniętych przez ślimak, czyli liczbę obrotów wiatraczka. Dzieląc tę liczbę przez zanotowaną liczbę sekund podniesienia kółka,

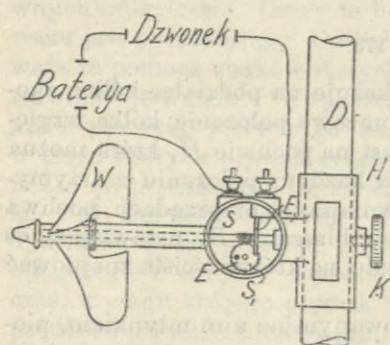
otrzymujemy liczbę obrotów młynka na sekundę  $n$ , a według dołączonego do każdego przyrządu wzoru, prędkość, w miejscu gdzie był umieszczony młynek:

$$u = \alpha + \beta n,$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są ilości stałe, odnoszące się do danego przyrządu.

Gdybyśmy przyjmowali, że niema żadnego tarcia w przyrządzie, to ilość stała  $\alpha$  winnaby być równa zeru. Jeżeli bowiem przypuścimy, że młynek, zanurzony w wodzie stojącej, porusza się z prędkością  $u$ , to droga przebyta przez przyrząd, w ciągu jednej sekundy będzie równa  $u$  a liczba obrotów wiatraczka w ciągu tego czasu, wynosić będzie  $n$ . Podczas jednego obrotu wiatraczka, przyrząd przebędzie drogę  $S$ , taką, że  $nS = u$ . W tem więc przypuszczeniu, ilość stała  $\beta$  jest właściwie tą średnią drogą  $S$  i w ten sposób winna być obliczana, a ilość stała  $\alpha$  jest tą najmniejszą prędkością, posuwania się przyrządu w wodzie stojącej, przy której wiatraczek zaczyna się obracać.

Młynek mechaniczny Woltmanna przedstawiał poważne niedogodności. Każdy pomiar wymagał dwóch odczytów na kółkach i po wykonaniu obserwacji przyrząd musiał być wyjmowany z wody. Niedogodności te zostały usunięte przez wprowadzenie sygnalizacji elektrycznej i innych ulepszeń, dokonanych przez Harlachera i Rittera. Młynek elektryczny



Rys. 174.

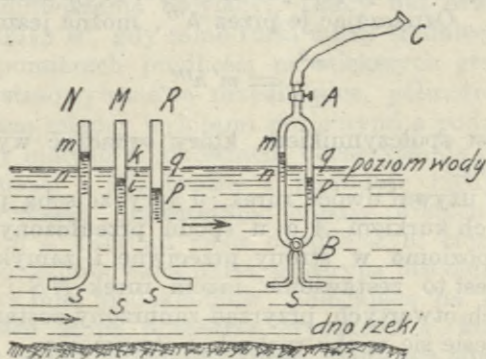
(rys. 174) ma kółko zębate  $S_1$ , dotykające stale ślimaka  $S$ . Kółko zębate ma okrągłą liczbę zębów ( $z = 20, 50$  lub  $100$ ), jest izolowane i połączone przewodnikami z baterią i dzwonkiem elektrycznym. Na kółku umieszczony jest guzik  $E$ , który przy obrocie kółka wchodzi w zetknięcie z izolowaną i także połączoną z baterią, sprężyną  $E_1$ , co powoduje zamknięcie obiegu elektrycznego i puszczenie w ruch dzwonka. Obserwator mierzy czas między dwoma sygnałami, a lepiej jeszcze, czas odpowiadający kilku sygnałom i ze znanej liczby zębów  $z$ , otrzymuje liczbę obrotów młynka między sygnałami końcowymi, czyli w ciągu czasu  $T$ :

$$n = \frac{z}{T}.$$

Prędkość  $u$ , z zaobserwowanego czasu  $T$ , daje wzór:

$$u = \alpha + \frac{\beta}{T}.$$

**80. Pitoty.** Hydrometry, mierzące prędkość przez dostrzeżenie różnicy wysokości słupów piezometrycznych (str. 30) w rurkach, noszą nazwę pitotów. Jeszcze w r. 1732 proponował Pitot mierzenie prędkości wody, za pomocą rurki, za puszczonej w prąd dowolnej głębokości. Zauważył on, używa



Rys. 175.

jąc rurki zakrzywionej, skierowanej przeciw prądowi, jak  $NS$  (rys. 175), że woda w rurce podnosiła się na wysokość  $mn$  nad powierzchnią prądu i wysokość tę uważał jako odpowiadającą prędkości w punkcie  $S$ , czyli kładąc  $mn = h'$ , wywodził prędkość:

$$u = \sqrt{2gh'}.$$

Wywód ten wszakże nie był ścisłym, gdyż nie uwzględniał faktu, że przy zanurzeniu rurki prostej  $MS$ , wysokość  $Si$ , mierząca ciśnienie w punkcie  $S$ , jest mniejsza od  $Sk$ , tak, że i wtedy woda nie podnosi się w rurce do wysokości powierzchni prądu. Pochodzi to stąd, że wprowadzenie rurki do wnętrza prądu, przy jak najmniejszej nawet jej średnicy, narusza zawsze rozkład prędkości i wywołuje stratę naporu, wykazywaną przez obniżenie  $ki$  słupa wody w rurce. Stosunek tego obniżenia, do wysokości odpowiadającej prędkości, jest zresztą stały, tak, że jeżeli  $ki = h''$ , to należałoby położyć, nie jak wyżej:

$$\frac{u^2}{2g} = h'$$

i jak to uczynił Pitot, ale:

$$\frac{u^2}{2g} = m h'',$$

gdzie  $m$  jest współczynnikiem stałym. Aby więc z rurki Pitot'a uczynić przyrząd ścisły, należało oznaczyć współczynnik  $m$  przez doświadczenie; uczynił to Darcy, wprowadzając przytem, do tego prostego przyrządu, znakomite ulepszenia.

Ustawiając poziomy koniec rurki, nie przeciw prądowi, lecz w stronę ruchu prądu, jak  $RS$  (rys. 175), dostrzegamy obniżenie  $qp$ . Oznaczając je przez  $h'''$ , można jeszcze położyć:

$$\frac{u^2}{2g} = m' h''',$$

gdzie  $m'$  jest współczynnikiem, który oznaczyć wypada przez doświadczenie.

Darcy używał dwóch rurek, u góry ze sobą połączonych i zamykanych kurkiem  $A$  a u spodu przedłużonych rurkami zagiętymi poziomo w strony przeciwne i zamykanych kurkiem  $B$ . Jest to zestawienie razem rurek  $NS$  i  $RS$ . Gdy, przy kurkach otwartych, przyrząd zanurzony zostanie w prąd, woda podniesie się w obu rurkach, i otrzymamy:

$$\frac{u^2}{2g} = m h'' \quad \text{i} \quad \frac{u^2}{2g} = m' h'''$$

a z tych równań:

$$u = K \sqrt{2g(h'' + h''')},$$

po położeniu:

$$K = \frac{m m'}{m + m'}.$$

$h'' + h'''$  jest to różnica poziomów  $mp$  w obu rurkach, którą odczytywać można na podziałce prawidła metalowego, na którym umocowane są rurki. Współczynnik  $K$  oznacza się przez przesuwanie przyrządu ze stałą prędkością w wodzie stojącej. Prawidło z rurkami połączone jest z pochwą, którą przesuwac można wzdłuż drążka, ustawionego pionowo w danym punkcie przekroju poprzecznego prądu. Za pomocą małej pompki, połączonej z rurką górną  $AC$ , doprowadzać można, przy otwartym kurku  $A$ , poziomy wody w rurkach do podziałki na prawidło, nie zmieniając ich różnicy wysokości. Tym sposobem różnica ta odczytywaną być może na podziałce, nad poziomem wody. Dla zmierzenia prędkości, w danym punkcie przecięcia poprzecznego prądu, przyrząd zostaje opuszczonym, tak, aby jego spód  $S$  dochodził do danej głębokości,



i otwiera się kurek  $B$  za pomocą sznurka, jak przy młynku mechanicznym Woltmanna. Słupy wody w rurkach oscylują zrazu silnie, następnie słabo, uwydatniając tylko nierówności ruchu burzliwego (§ 20). Wtedy zamyka się kurek  $B$ , otwiera kurek  $A$ , dla podciągnięcia słupów w obu rurkach do podziałki i po zamknięciu kurka  $A$ , odczytuje na podziałce różnicę  $h$ , otrzymując prędkość z wzoru:

$$u = k \sqrt{2gh}.$$

Dla zmniejszenia oscylacji, Darcy dał otworom rurek średnicę  $0,0015 m$ , gdy same rurki miały średnicę  $0,01 m$ .

Przy pomiarach prędkości na większych głębokościach, do rurek dostosowywane są przedłużnice, półmetrowej długości, wstawiane między wylotami poziomymi a podziałką. Ponieważ, przy małych prędkościach, odczytywanie na podziałce drobnych różnic  $h$  jest trudne i powoduje błędy, przeto  $h$  można powiększać, umieszczając między wierzchołkami słupów wodnych a kurkiem ciecz o mniejszym ciężarze właściwym, jak np. zafarbowana nafta, gliceryna lub olej. Powoduje to wszakże inną niedokładność, polegającą na nieuwzględnieniu ciężaru słupa powietrza, wysokości  $h$ , który obciąża więcej słup wody w jednej z rurek. Gdy ten słup powietrza zastąpiony zostaje słupem płynu, o większym ciężarze właściwym, ciężar ten będzie jeszcze więcej obniżał poziom niższy wody w jednej rurce, a podnosił poziom wyższy w drugiej.

Pitot, ulepszony przez Darcy'ego, zmodyfikowany został przez Rittera, który umieścił rurkę z wylotem, skierowanym przeciw prądowi (hydrauliczną), wewnątrz rurki z wylotem pionowym (statycznej). Obie rurki są mosiężne, a rurka statyczna komunikuje u spodu, przez otwór  $2 mm$  średnicy z rurką poziomą,  $10 cm$  długą,  $1 cm$  średnicy, o bardzo cienkich ścianach, z obu stron otwartą, równoległą do poziomego wylotu rurki hydraulicznej. Przez tę rurkę poziomą przechodzą swobodnie strugi prądu. Ritter przekonał się, że obniżenie poziomu w rurce statycznej pochodzi prawie wyłącznie od prądów ukośnych, a skoro te są usunięte, za pomocą rurki poziomej z obu końców otwartej, obniżenia niema wcale. Gdy rurka pozioma ustawiona jest dokładnie w kierunku prądu, wtedy prędkość  $u$  odpowiada ściśle wysokości  $h$  i mamy:

$$u = \sqrt{2gh},$$

bez żadnego współczynnika.

Pitoty znalazły szersze zastosowanie w Ameryce, podczas gdy w Europie do mierzenia prędkości używane są przeważnie młynki.

**81. Wydatek prądu.** Z pomiaru prędkości, w poszczególnych punktach przecięcia poprzecznego prądu, otrzymać można wydatek, przy użyciu różnych metod, z których najogólniejsza polega na podzieleniu powierzchni przecięcia na pewną liczbę figur (prostokąty, trapezy i trójkąty), zmierzeniu prędkości w punktach odpowiadających środkom ciężkości tych figur i obliczeniu wydatku według wzoru:

$$Q = \Sigma u \Delta \omega,$$

gdzie  $\Delta \omega$  oznacza powierzchnię figury, w której środku ciężkości zmierzoną została prędkość  $u$ .

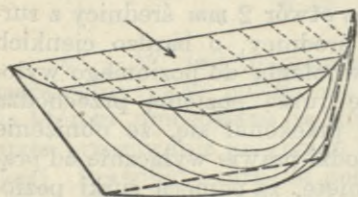
Ścisłejsze wyniki otrzymane być mogą przy użyciu innej metody, *objętościowej*, polegającej na obliczeniu objętości bryły, utworzonej przez przecięcie poprzeczne prądu, jako podstawę i powierzchnię przechodzącą przez wierzchołki linii prostych, prostopadłych do przecięcia poprzecznego, wyprowadzonych w punktach, w których pomierzone zostały prędkości, i równych tym prędkościom. Objętość tej bryły jest całką równania:

$$u d\omega = dQ,$$

równą objętości wody, przechodzącej w ciągu sekundy przez przecięcie  $\omega$ , czyli równą iloczynowi z prędkości średniej  $U$  przez powierzchnię  $\omega$ :

$$Q = U\omega.$$

Objętość tę wyznaczyć można, kreśląc na przecięciu poprzecznym prądu linie jednakowej prędkości, czyli *izotachy* (rys. 171), będące kolejnymi przekrojami bryły o jakiej mowa, przez płaszczyzny równoległe do przecięcia poprzecznego prądu, położone w odległościach od tego przecięcia, równych kolejnym wartościom prędkości. Bryłę taką, dla trapezowego przecięcia poprzecznego prądu, przedstawia schematycznie rys. 176. Jeżeli tym prędkościom:



Rys. 176.

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

odpowiadają obwiedzione izotachami, na przecięciu poprzecznym prądu, powierzchnie:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

to objętość bryły będzie:

$$Q = \omega_1 u_1 + \frac{u_1 + u_2}{2} (\omega_2 - \omega_1) + \dots$$

Powierzchnie obwiedzione izotachami, obliczane być mogą za pomocą planimetru.

Metodę skróconą obliczania wydatku prądu, płynącego spokojnie w korycie prostokątnym, podał prof. Teichman, wywodząc ją analitycznie w przypuszczeniu, że krzywa prędkości na jednej pionowej jest parabolą (§ 38). Metoda polega na pomiarze prędkości tylko w czterech punktach przecięcia poprzecznego, których położenie przedstawia rys. 177. Odległości  $a$  i  $b$  w funkcji szerokości  $l$  i głębokości  $h$  są:

$$a = 0,215 h$$

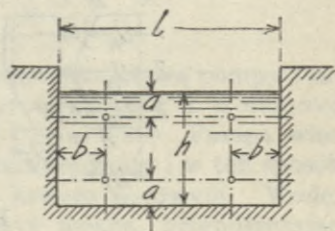
$$b = 0,211 l,$$

a prędkość średnia jest średnią arytmetyczną prędkości pomierzonych w czterech wskazanych punktach przecięcia poprzecznego prądu.

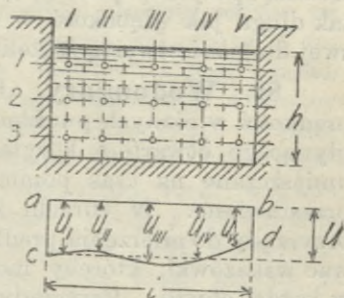
Zwykle prędkość średnia w korycie prostokątnym oznaczana bywa sposobem wykreślnym, jak następuje. Na rys. 178 powierzchnia przekroju podzielona została na piętnaście prostokątów, po trzy na każdej z pięciu pionowych: I—V. Prędkości, pomierzone w trzech punktach każdej pionowej, odłożone zostają na wykresach (rys. 179) w ten sposób, że na pionowej  $mn = h$  wyprowadzone zostają poziome w punktach 1, 2, 3 i na tych poziomych odcięte prędkości:  $u_{I1}$ ,  $u_{I2}$ ,  $u_{I3}$ . Przez otrzymane punkty  $o$ ,  $p$ ,  $q$  przeprowadzoną zostaje krzywa  $m'opqn'$ , której punkty końcowe  $m'$ ,  $n'$ , pozostawione dowolności rysownika, są najmniej pewne. Zmierzona przy użyciu planimetru, powierzchnia  $mm'opqn'n$ , podzielona przez  $h$ , daje prędkość średnią  $u_I$  na pionowej I i tak samo otrzymuje się prędkości średnie na czterech pozostałych pionowych. Otrzymane w ten sposób prędkości średnie na pionowych:

$$u_I, u_{II}, u_{III}, u_{IV}, u_V$$

odcięte zostają na rzędnych prostopadłych do  $ab = l$  (rys. 178)



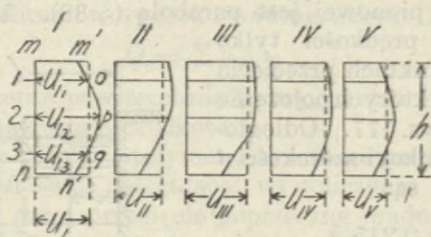
Rys. 177.



Rys. 178.

i dają znów krzywą  $cd$ . Zmierzona planimetrem powierzchnia  $acdb$ , podzielona przez  $l$ , daje prędkość średnią  $U$ .

Średnie prędkości na pionowych, mierzone mogą być także bezpośrednio hydrometrami. Była już mowa o mierzeniu ich za pomocą pływaków, w postaci lasek (§ 78). Prze-



Rys. 179.

suwając młynek (§ 79), ze stałą prędkością, wzdłuż drąga pionowego, na którym jest umieszczony, możemy z liczby sekund, w ciągu których dokonaniem zostało to przesunięcie i z liczby obrotów młynka w ciągu tego czasu, otrzymać prędkość średnią na danej pionowej. Bezpośrednio, daje także tę prędkość średnią specjalny pitot (§ 80), rurka hydrometryczna Franka, tak długa jak głębokość w danym punkcie, mająca na całej swej długości otwartą szczelinę, skierowaną przeciw prądowi.

**82. Wodomiary.** Przyrządy, służące do mierzenia prędkości w różnych punktach przecięcia poprzecznego prądu, płynącego otwartym korytem, mogą być w tych punktach umieszczane na czas pomiaru, a następnie wyjmowane, lub przestawiane. W rurach, które prąd całkowicie wypełnia, przyrządy do mierzenia prędkości pozostawać muszą stale i dawać wskazówki, któreby można było odczytywać z zewnątrz, w każdej chwili. Przyrządy te, zwane wodomiarami, wskazują nie prędkość średnią, lecz odrazu wydatek rury, przy stałym przecięciu poprzecznym, proporcjonalny do prędkości. Wodomiary używane są przy wodociągach, dla kontrolowania ilości wody dostarczanej do domów. Szczegóły dotyczące ich ustroju, wchodzi w zakres nauki o wodociągach.

Z rozlicznych systemów wodomiarów, za najdokładniejsze uważane są wodomiary tłokowe. Przy znanej objętości cylindra pompy, ilość wody dostarczanej przez pompę może być mierzona liczbą skoków tłoka, a liczba ta może być wskazywana w każdej chwili na tarczy, dodanego do pompy licznika. Jeżeli  $D$  jest średnica cylindra pompy a  $S$  skok tłoka,

to  $\frac{D^2 \pi S}{4}$  będzie objętością wody wessanej przez pompę, w cią-

gu jednego skoku tłoka. Przy  $J$  skokach, w ciągu czasu  $T$ , pompa o działaniu pojedynczym dostarcza wody na sekundę:

$$Q = \eta \frac{D^2 \pi}{4} S \frac{J}{T},$$

a pompa o działaniu podwójnym:

$$Q = 2 \eta \frac{D^2 \pi}{4} S \frac{J}{T}.$$

Spółczynnik  $\eta$  jest sprawnością objętościową pompy i zależy od regularnego działania przepustników i szczelności tłoków i dławnic, waha się między 0,9 a 0,99. Pompa więc sama mierzy dokładnie ilość dostarczanej wody i w ten sposób mierzona bywa woda dostarczana kotłom parowym. Wodę, dostarczaną przez wodociągi, mierzyć można, przepuszczając ją przez wodomiar tłokowy, będący małą pompą z licznikiem, wprawianą w ruch przez wodę napływającą i przy zużyciu pewnej cząstki naporu. W najwięcej rozpowszechnionym wodomiarze Kennedy'ego, pompa jest o działaniu pojedynczym. Bywają także wodomiarzy dwutłokowe, jak również wodomiarzy z trzema lub czterema cylindrami i tłokami.

Cenionym, dla swej dokładności i prostoty ustroju wewnętrznego, dającej mniejszą stratę naporu, niż pompa w wodomiarze tłokowym, jest wodomiar „Venturi“, którego zasadę podano w § 26. Wodomiar ten daje wydatek  $Q$  w funkcji obniżenia piezometrycznego  $h$ , według wzoru (131). Obniżenie to mierzyć można przez połączenie końców rurek piezometrycznych  $p$  i  $p'$  (rys. 51) z ramionami rurki wygiętej w postaci litery U, napełnionej rtęcią. Gdy  $h$  się zmienia, mały tłok, umieszczony w jednym z ramion rurki, podnosi się i spada, a połączone z drążkiem tłoka pióro, kreśli krzywą na przyrządzie rejestrującym, podobnym do opisanego przy limnigrafie (rys. 165). Przyrząd rejestrujący jest kosztowny i wymaga ciągłej obsługi, w skutku czego wodomiar „Venturi“ nie może znaleźć rozpowszechnienia przy wodociągach.

W wodomiarach skrzydełkowych, zastosowane zostały, do mierzenia prędkości i wydatku, młynki. Liczba obrotów jest w nich, prawie linijnie, proporcjonalna do prędkości prądu (§ 79), a więc i do wydatku, wskazywanego przez licznik. Wodomiarzy skrzydełkowe wszakże przedstawiają ten niedostatek, że cząstki stałe, znajdujące się w zawieszeniu w wodzie, osiadają na skrzydłach młynka, stale zanurzonego, i utrudniają swobodny obrót. Drugi niedostatek polega na małej czułości młynka, gdy prędkość jest nieznaczna i oddziaływanie skrzydełek nie może podtrzymywać ruchu obrotowego młynka;

wodociągach największe znalazły rozpowszechnienie.

**83. Gazometrya.** Do mierzenia objętości ciał lotnych służą *gazometry*, zbiorniki określające objętość wchodzącego do nich gazu, ilością cieczy przez gaz wypchniętej. Używane przy oświetleniu gazowem, *gazomierze* różnych systemów, mierzą i rejestrują objętości gazu oświetlającego, dochodzącego rurami do mieszkań.

Większe ilości powietrza w ruchu, przy niewielkiej różnicy ciśnień, nie przekraczającej 200 mm słupa wody, mierzone być mogą w ten sam sposób, jak ciecze. Głównymi czynnikami obliczenia są tu: powierzchnia  $\omega$  przecięcia poprzecznego przewodu, którym płynie powietrze i średnia prędkość  $U$  prądu powietrznego na tem przecięciu. Dają one objętość:

$$V = \omega U,$$

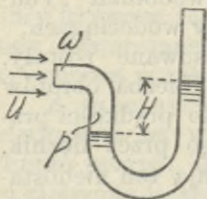
i ciężar:

$$G = \omega U \gamma_1,$$

gazu przechodzącego przez przecięcie poprzeczne w ciągu sekundy.

Unika się oznaczania prędkości średniej, gdy zmierzoną może być ściśle, za pomocą manometru lewarowego, różnica ciśnień, wywołująca ruch gazu w przewodzie. Z różnicy tej otrzymać można prędkość średnią

Do bezpośredniego oznaczania prędkości powietrza na



Rys. 180.

przecięciu poprzecznem przewodu, używać można także otwartego manometru lewarowego (rys. 180), którego ramię poziome skierowane jest przeciw prądowi, o ile manometr może być ustawianym w różnych punktach przecięcia. Różnica wysokości słupów cieczy  $H$  pozwala obliczyć prędkość w punkcie ustawienia manometru. Prąd powietrza, którego ciężar właściwy jest  $\gamma_1$ , wpadając

z prędkością  $U$  do ramienia poziomego rurki o przekroju  $\omega$ , wywiera na ciecz w rurce ciśnienie  $R = p \omega$ . Kładąc za  $R$  wartość, według wzoru (355), otrzymamy:

$$p \omega = \frac{\gamma_1 \omega}{g} U^2;$$

a ponieważ, w obu ramionach rurki manometru, ciśnienie jest jednakie, przeto oznaczając przez  $\gamma_2$  ciężar właściwy cieczy, wypełniającej manometr, będziemy mieli:

$$p \omega = \gamma_2 \omega H.$$

Z powyższych dwóch równań wynika:

$$\gamma_1 \omega \frac{U^2}{g} = \gamma_2 \omega H,$$

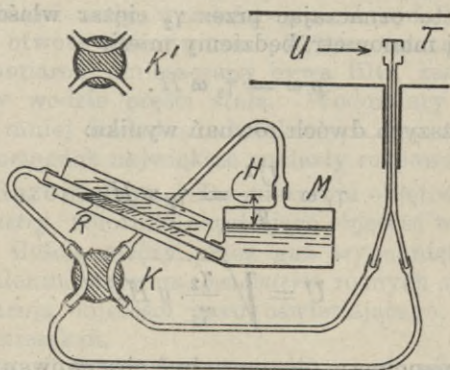
a następnie:

$$U = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} g H}. \quad \dots \quad (373)$$

Jeżeli manometr nie może być obserwowanym na przecięciu poprzecznym przewodu, wtedy użyte być muszą dwa manometry lewarowe, z których jeden mierzy w zwykły sposób różnicę między ciśnieniem powietrza zewnętrznego a ciśnieniem statycznym na danym przecięciu, podczas gdy drugi, zaopatrzony w ramię poziome, skierowane przeciw prądowi, mierzy przewyżkę ciśnienia wytwarzaną przez ruch powietrza. Prędkość obliczyć można za pomocą wzoru (373), w którym  $H$  oznaczać będzie różnicę ciśnień w obu manometrach. Pomiar ciśnienia wewnątrz przewodu są trudne i niepewne, bo nawet gdy ramię poziome manometru skierowane zostanie prostopadłe do kierunku prądu, to i wtedy powietrze przepływające koło otworu wywiera działanie ssące na ciecz w manometrze.

Pewniejszem w tych przypadkach jest oznaczanie prędkości za pomocą przyrządów kalibrowanych, składających się z tak zwanej *tarczy spiętrzającej*, opartej na tej samej zasadzie co pitoty, i z manometru. Przyrząd taki, przedstawiony na rys. 181, ma tarczę spiętrzającą  $T$  systemu Krella. Jest to krótki i pusty cylinder  $T$ , mający 10 mm średnicy. Każda z podstaw cylindra ma w środku bardzo mały otwór. Wnętrze cylindra przedzielone jest ścianką pełną na dwie połowy, z których jedna połączona jest cienką rurką, z naczyniem  $M$  manometru, a druga takąż rurką z górnym końcem rurki  $R$ , połączonej z naczyniem  $M$  i zaopatrzonej w podziałkę. Ciśnienie, w zwróconej przeciw prądowi połowie małego cylindra, działa na poziom cieczy w naczyniu  $M$ , a ciśnienie w drugiej połowie cylindra — na słup cieczy w rurce  $R$ . Różnicę tych ciśnień, t. j. wysokość  $H$ , odczytywać można na podziałce

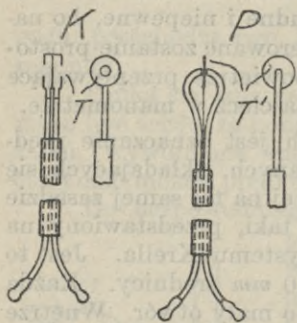
rurki  $R$ . Zwykle podziałka ta daje bezpośrednio prędkość prądu. Poziom ciecży w naczyniu  $M$  (alkohol zafarbowany o ściśle oznaczonym ciężarze właściwym) stać winien równo



Rys. 181.

z zerem podziałki na rurce  $R$ . Kontrolę ułatwia poczwórny kranik  $K$ , który w położeniu  $K'$  sprowadza wierzch słupa ciecży w rurce  $R$  do zera podziałki.

Rys. 182 przedstawia widzianą z przodu i z boku ( $K$ ) tarczę spiętrzającą Krella  $T$  i ( $P$ ) takąż tarczę prof. Prandtl'a  $T'$ , dającą bezpośrednie połączenie powietrza, po obu stronach tarczy, z rurkami prowadzącymi do manometru. Kalibrowanie tych przyrządów, budowanych dla prędkości powietrza od 0,2 do 40 m, odbywa się przy mniejszych prędkościach, ustawiając tarczę przed otworem, przez który wychodzi powietrze z dużego zbiornika. Z ilości powietrza, wychodzącej przez otwór w jednostce czasu, obliczana jest prędkość i znaczoną na rurce  $R$  (rys. 181).



Rys. 182.

Do mierzenia prędkości powietrza, w przewodach o większych przekrojach, używane bywają też same anemometry, które w obserwatoriach meteorologicznych służą do mierzenia prędkości wiatru, a także małe przyrządy z licznikiem, w zasadzie podobne do młynków hydrometrycznych.



## INDEX.

- Abbot** 129.  
**Aeroplany** 262—266.  
**Akumulator** 6, 7 — różniczkowy 6.  
**Akweduki** 132, 134.  
**Alembert d' 1.**  
**Alliévi** 112, 113.  
**Archimedes** 1, 16, 20, 220.  
**Arson** 239, 241.  
**Artezyjskie studnie** 215.  
**Atmosfera fizyczna** 221, — techniczna 221.  
**Aubuisson d' 175.**  
**Azot** 224.  
**Badanie zjawisk** 271.  
**Balon** 220, 222.  
**Bánki D.** 257.  
**Bataillard** 112.  
**Bazin** 2, 116, 118, 129, 130, 140, 175, 177—179, 272.  
**Belanger** 2, 175.  
**Belka pływająca dębowa** 25, — sosnowa 25.  
**Bernoulli** 1, 30, 48, 56—57, 160, 197, 243, 248.  
**Bidone** 140, 155.  
**Bieg jałowy (bezwodny) turbiny** 204.  
**Biegeleisen** 76, 77, 80.  
**Biel** 72, 73.  
**Blasius** 70.  
**Bocznicą (rura wodociągowa)** 99.  
**Bodaszewski** 2.  
**Boileau** 276.  
**Borda** 1, 48, 159.  
**Bossut** 1, 165.  
**Bouger** 1.  
**Boulangier** 2.  
**Boussinesq** 2, 57, 61—64, 90, 130, 175, 185.  
**Bresse** 142, 143.  
**Bubendey** 3.  
**Budau** 3, 112.  
**Buffon** 278.  
**Bukowski** 76, 77, 80.  
**Caligny de** 109.  
**Carnot** 51.  
**Castelli** 1.  
**Chézy de 1.**  
**Chropowatość ścian rur** 76.  
**Ciało pływające** 20, — zanurzone 19.  
**Ciecze** 3.  
**Ciepła wpływ** 223.  
**Ciepło właściwe gazu** 223, — przy stałym ciśnieniu 224, — przy stałej objętości 223.  
**Ciepłotka** 223.  
**Ciężar właściwy wody** 3.  
**Ciśnienie cieczy na powierzchnię jakąkolwiek** 16, — płaską 15, wewnętrzną półkuli 18, — w płynach 4, — prądu na ciało zanurzone 255, — prądu wodnego na ściany ruchome 266.  
**Cunningham** 129, 278.  
**Czas opróżnienia zbiornika** 171.  
**Czopowski** 165.  
**Darcy** 2, 60, 69, 208, 282.  
**Dmuchawka parowozowa** 170.

- Dubs** 112.  
**Dubuat** 1.  
**Dufour** 112, 113.  
**Dupuit** 68, 208.  
 Działanie ssące 169.  
 Dzwon powietrzny 111, 229.  
 Ekwipotencyalna krzywa 38, — powierzchni 36.  
 Elipsa biegu jałowego turbiny 204.  
 Energia kinetyczna 31, — potencjalna 31. — prądu 54, 185, — wiru 183, — z ciśnienia 31, — z położenia 31, — z ruchu 31.  
 Energii przemiana na ciepło 187, — przesyłka 88.  
 Etylen 224.  
**Euler** 1, 26  
 Filtry wodociągowe 209.  
**Flamant** 2, 72, 73, 74, 109, 242.  
**Foepl** 2.  
**Folkierski** 33.  
**Fontaine** 190.  
**Forchheimer** 3.  
**Fournayron** 190.  
**Francis** 190, 199, 255.  
**Frank** 286.  
**Freeman** 162, 165, 166.  
 Funkcja prądowa 39.  
 Funkcje sprzężone 39.  
**Galileusz** 1.  
**Ganguillet** 69.  
**Gauss** 12.  
**Gay Lussac** 4, 11, 219, 220.  
 Gaz 4, — doskonały 219, — oświetlający 222, — stały 219.  
 Gazometr 288.  
 Gazometryria 288.  
 Gazomierz 288.  
 Gazów ruch 219.  
 Gradient 37.  
**Graeff** 156.  
 Graniastosłup pływający 24.  
**Grashof** 235.  
**Grether** 102,  
**Harlacher** 280.  
**Helmholz** 33, 35.  
**Herschell** 93.  
**Humphreys** 129.  
 Hydrodynamika 26.  
 Hydroelektryczne zakłady 112.  
 Hydrometr 276.  
 Hydrometryria 271.  
 Hydrostatyka 3.  
 Hyperbole równoramienne 43.  
 Pość ruchu prądu 54.  
 Izotachy 284.  
 Jałowy bieg turbiny 204.  
**Jewniewicz** 172.  
**Jonval** 190.  
 Kanał bardzo szeroki 142, — doprowadzający 124.  
 Kanały 114, — rozprowadzające 130, — ściekowe 132.  
**Kennedy** 287.  
 Kierownica 190.  
**Kluger** 2,  
 Kolano hyperboliczne 102, — łukowe o przekroju prostokątnym 102, — prostokątne 43, — rzeki 14.  
 Koło nasiębiejne 190, 193 — o oddziaływaniu 268, — Peltona 190, 270, — podsiębiejne 189, 193, 267, — skrzynkowe ob. nasiębiejne, — śródbierne 190, 193.  
 Komora szluzu 109.  
 Koszt rur 83, 87.  
**Krell** 289.  
 Krzywe ekwipotencyalne 38, — jednokowego naporu 216.  
 Krzywka (rura) 102, — hyperboliczna 102.

- Kucharzewski** 2.  
**Kutter** 69, 79, 116.  
 Kwaz węglowy 224.
- Lagrange** 1.  
**Lagrené de** 109.  
**Lamb** 3.  
**Lang** 72, 75.  
**Laplace** 12.  
 Lemniskata 219.  
 Lepkość 3.  
**Lewandowski** 172.  
 Lewarowa rura 104.  
 Liczby zespolone 40, 41.  
 Limnigraf 275.  
**Lindley** 133.  
 Linia charakterystyczna (turbi-  
 ny) 203, — naporu 83, — po-  
 ziomów piezometrycznych 83.  
 Linie strug 216.  
**Loessl v.** 256.  
**Lombardini** 278.  
**Lorenz** 2.  
**Lueger** 165.
- Łotok (rywna) 156, 157.  
 Łyżki (koła Peltona) 271.
- Mammut (pompa) 243—246.  
**Manning** 116.  
 Manometr lewarowy 288.  
**Mariotte** 4, 11, 219, 221.  
**Matakiewicz** 117.  
**Maxwell** 59.  
**Merczyng** 69.  
 Metacentr 21.  
 Metan 224.  
 Miechy wodne 170.  
 Mierzenie czasu 271, — wydat-  
 ku 284.  
**Mises v.** 3, 75, 76, 242.  
 Młynek mechaniczny 279, — elek-  
 tryczny 280.  
 Młynki 279.  
 Mur bulwaru 17, 18.
- Nadolski** 271.  
 Nagła zmiana szerokości kana-  
 łu 149, — średnicy rury 167.  
 Napęd wsteczny 258.  
 Napór hydrauliczny 30, — hydro-  
 statyczny 10, — zmienny 171.  
**Navier** 2, 52.  
**Newton** 3, 51.  
 Nomogramy 79, 80, 81, 119.
- Objętościowa metoda 284.  
 Obliczanie kanałów 117, — rur 77.  
**Ocagne d'** 79, 272.  
 Oddziaływanie prądu 246.  
 Odskok 140, — podniesienia 140.  
 Odśrodkowce 13.  
 Ogrzewań centralnych rury 105.  
 Okoliczności przypadkowe ru-  
 chu 152.  
 Opór płynów 246.  
 Oszczędzanie wody 109.  
 Oś pływania 21, — symetrii 44,  
 — wirowania 35.  
 Oś hydrauliczna prądu 136, — ob-  
 niżenia 138, 147, — podniesie-  
 nia 138, 149.  
 Otwór w cienkiej ścianie 152, — za-  
 topiony 154.  
 Owale Cassini'ego 218.
- Parcie odchylające 251, — opóźnia-  
 jące 251.  
**Pascal** 1, 5.  
**Pelton** 190, 266, 270.  
 Piezometr 30, — różniczkowy 30.  
**Pitot** 281.  
 Pitoty 281.  
 Płachta wodna nad progiem prze-  
 wału 175, — niestała 179, — przy-  
 legająca do zagrody 180, — za-  
 topiona od spodu 179, — od  
 wierzchu 180.  
 Płaszczyzna naporu 30.  
 Płyn doskonały 3, — nieściśli-  
 wy 3, — sprężysty 4.

- Płyyny 3.  
 Pływaki 276.  
**Poiseuille** 2, 57, 59, 207.  
**Poirée** 144, 186.  
 Pojemność cieplikowa gazu 223.  
 Pomiary prądów 273, — wodne 272.  
 Pompa Mammut 243 — 246, — prądowa 169.  
**Poncelet** 175, 274.  
**Popp** 239.  
 Potencjał prędkości 33, 37, 38, 40, — sit 36.  
 Potoki 185.  
 Powierzchnia ekwipotencjalna 36, 46, — nosna aeroplanu 262, — wody głębokiej 209.  
 Powierzchnie jednakowego naporu 207, — poziomu 7, 9.  
 Powietrze 224.  
 Poziom piezometryczny 30.  
 Poziomowanie barometryczne 12.  
 Praca silnika wodnego 193.  
**Prandtl** 290.  
**Prášil** 2, 42.  
 Prasa hydrauliczna 6.  
 Prawa ogólne ruchu gazów 219.  
 Prawo Poiseuille'a 57, — podobieństwa prądów 60, — Reynolds'a 57.  
 Prąd burzliwy 61, — regularny 57, równoległy płaski 38, — ustalony 29.  
 Prędkość krytyczna 60, — średnia miejscowa 62, — średnia prądu 52, — zredukowana 70, — wirowania 35, — w kanałach 127.  
**Prony de** 1, 68.  
 Próg przevalu 174.  
 Przecięcie ścieśnione żyły wodnej 153.  
 Przeciwparcie przyspieszające 251.  
 Przedmiot hydrauliki 1.  
 Przekrój kanału 120, — prostokątny zmiennej szerokości 147, — trapezowy 120.  
 Przekroje żyły 164.  
 Przemiana adiabatyczna 226, — energii prądu na ciepło 187, — izotermiczna 227.  
 Przemiany termodynamiczne 226.  
 Przepustnik 98.  
 Przewał 174, — Poncelet'a 274, — zatopiony 181.  
 Przypadki równowagi względnej 12.  
 Przyspieszenie średnie miejscowe 62.  
 Przystawki 158, — cylindryczne 159, — ostrokątne rozbieżne 162, — zbieżne 161, — wewnętrzne 158, — zewnętrzne 158.  
 Puls prądu 62.  
**Rabut** 86.  
**Rehbeck** 180, 274.  
**Rechniewski** 181.  
**Reynolds** 2, 60, 70, 72.  
**Riedler** 239.  
**Ritter** 283.  
 Roboty wodne 271.  
 Równania Eulera 26, — równowagi 7.  
 Równanie ciągłości 27, — prądu ustalonego 64, — toru cząstki cieczy 36.  
 Równia pochyła 12.  
 Równica 38, 43.  
 Równowaga ciał pływających 20, — płynów 9, — względna 12.  
 Równoważnik cieplikowy pracy 223, — mechaniczny ciepła 223.  
 Rozkład ciśnień w turbinie 193, — w prądzie dwuwymiarowym 102.  
 Rozkład prędkości w kanałach 129, — w rurach 89.

- Rozszerzenie koryta 148.  
 Różnica energii dwóch cząstek cieczy 32.  
 Ruch cieczy naturalnych 51, — gazów w rurach 237, — jednostajny wody w rurach 67, — ustalony płynów 28, — zmienny w kanałach 136, — zmienny w rurach 91, — niewirowy cieczy 35, — niustalony w kanałach 150, — obrotowy cieczy 13. 43, — osiowo symetryczny 43, — potencjalny cieczy 33.  
 Rura doprowadzająca 88, — główna 99, — lewarowa 104, — ssąca turbiny 47, 197, — tłocząca 87.  
 Rury 67, — ogrzewań centralnych 105.  
 Rzeki 185.  
**Saint Venant** 2, 136.  
**Saph** 72.  
 Sączenie przez piasek 206.  
**Schaffernack** 274  
**Schoder** 72.  
**Segner** 268.  
 Siatka strug i równie 40.  
**Siedek** 277.  
 Silniki wodne 189.  
 Składowe prędkości 26, — wirowania 35.  
 Słup piezometryczny 30.  
**Smith** 154.  
 Smoczek parowy 170, — wodny 169.  
**Sokolnicki** 169.  
 Spadek ob. strata naporu, — potencjału 37.  
 Spadki wód bieżących 185.  
 Spółczynnik  $\alpha$  56, 90, 130, —  $\eta$  56, 90, 130, — prędkości 153, — ściśnienia 154, — tarcia  $\epsilon$  51, 59, — wydatku 154.  
 Spółrzędne cylindryczne 8, 26.  
 Sprawność objętościowa pompy tłokowej 287, — pompy Mammut 246, — silników wodnych 193, 270.  
 Stałość równowagi ciał pływających 20.  
 Stawideł otwory 156.  
**Stevin** 1.  
 Strata naporu 53, 57, 67, — w łuku kanału 186.  
 Straty naporu podrzędne 101.  
 Struga 29, 36.  
 Studnie 212, — artezyjskie 215.  
 Studzien wzajemny wpływ 216.  
 Sztolnie 211.  
 Ścieśnienie żyły 153, — całkowite 155, — cząstkowe 155.  
 Średnica rur 83, 85, 88.  
 Średnicy rury nagła zmiana 167.  
 Środek ciśnienia 15, — zanurzenia 20.  
 Tablice liczbowe (spis) iv, — wykreślne 79.  
**Tadini** 115.  
 Taran hydrauliczny 113.  
 Tarcie wewnętrzne 3.  
 Tarcza spiętrzająca 289.  
**Teichman** 285.  
 Temperatura bezwzględna 220.  
 Tlen 224.  
 Tlenek węgla 224.  
**Torricelli** 1, 48, 49, 153.  
 Trąba hydrauliczna 169.  
 Turbina 190, — Francis'a 199, — osiowa 190, 193, — promieniowa 190.  
 Twierdzenie Bernoulli'ego 30, 48, — Bordy 48, — Torricelli'ego 48, 153.  
 Uderzenie wodne 110.

- Vautier'owie** 272.  
**Venturi** 1, 93, 160, 169.  
**Vinci** 61.
- Wahanie wody w rurach 107.  
 Warstwie, na powierzchni wody  
 głębnej 218.
- Weisbach** 2, 68, 115, 159, 165, 170,  
 235, 269.
- Weyrauch** 79.  
 Węże sikawek 166.  
 Wiązki strugi równic 40.  
 Winda hydrauliczna 6.  
 Wirnik 190, 194.  
 Wirowanie 35.  
 Wirówka 13.  
 Wiry 62—64, 182.
- Witkowski** 129.  
**Witoszyński** 42.  
**Wittenbauer** 3.
- Wodomiany 286, — tłokowe 286,  
 skrzydełkowe 287, — Ventu-  
 ri 93, 287.  
 Wodotryski 165.  
 Wodowskaz 274, — zegarowy 275.  
 Wody głębne 206.
- Wodór 224.  
**Woltmann** 279, 283.  
 Wpływ ciepła na gazy 223.  
 Wydatek kanałów 128, — otwo-  
 ru 154, — prądu 54, 284, — prze-  
 wału 175, — rur 85.  
 Wypływ cieczy pod zmiennym  
 naporem 171, — gazu przez  
 otwór 232.
- Wykresy uderzeń wodnych 113.  
 Wytryski 162.  
 Wypór 258.  
 Wzajemny wpływ studzien 216.  
 Wzburzenie miejscowe 62.
- Zakłady wodne 186, 271.  
 Zasada Archimedes'a 16—20.  
 Zbiornik naturalny 173, — powie-  
 trza 229.  
 Zbiorniki połączone 173.  
**Zeuner** 233.  
 Zmiany przekroju i ciśnienia w ru-  
 rach 94.  
 Zwięzienie koryta 147.
- Żyła cieczy 53, 152.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
 KRAKÓW



S - 96





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294418