VERMISCHTE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN,

ENTHALTEND

1.
ZUSÄTZE
ZUR THEORIE DER GLEICHUNGEN.

2.
DIE QUADRATISCHE ZERFÄLLUNG DER ZAHLEN.

3.
DIE PHÖNIXZAHLEN.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER.

BRAUNSCHWEIG.
FRIEDRICH WAGNER'S HOFBUCHHANDLUNG.
1897.

Druckfehler.

S. 15 Z. 7 von oben im ersten Gliede statt $M_0 \, N_0^2$ lies $M_4 \, N_0$

Zur Theorie der Gleichungen.

1. Wenn die algebraische Gleichung n-ten Grades

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

nachweislich eine reelle Wurzel hat, kann man durch verschiedene Methoden Näherungswerthe derselben mit zunehmender Genauigkeit darstellen.

2. Eine dieser Methoden ist die von Horner (s. meine Schrift über die Auflösung der Gleichungen vom Jahre 1859). Dieselbe setzt voraus, dass die gesuchte Wurzel bereits zwischen zwei nahe gelegene Grenzwerthe eingeschlossen, insbesondere ihre dekadische Anfangsziffer gefunden sei, eine Voraussetzung, welche unter gewissen Umständen leicht, unter anderen Umständen aber schwer zu erfüllen ist.

3. Eine zweite Methode bietet die in §. 8 der eben gedachten Schrift vorgeführte Anwendung der Regula falsi dar. Dieselbe setzt voraus, dass zwei Werthe von x bekannt seien, wodurch

$$F(x) = y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

zwei Werthe mit entgegengesetzten Zeichen annehmen, dass also, wenn x_1 und x_2 diese Werthe von x sind, $F(x_1) = y_1$ und $F(x_2) = y_2$ entgegengesetzte Zeichen haben. (Wäre einer dieser beiden Werthe, z. B. $F(x_1) = 0$; so würde x_1 eine gesuchte Wurzel sein). Dieses Verfahren beruhet darauf, als ersten Näherungswerth von x den zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth $x_3 = x_1 + \dfrac{(x_2 - x_1)\,y_1}{y_1 - y_2}$ anzunehmen (welcher bei geometrischer Darstellung der Werthe von y als rechtwinklige Ordinaten auf der Abszissenaxe der x den Durchgang der die Endpunkte von y_1 und y_2 verbindenden geraden Linien durch die Abszissenaxe auf Grund der Formel $\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = -\dfrac{y_1}{y_2}$ bezeichnet, worin unter x_2 immer der nach der positiven Seite über x_1 hinaus liegende Werth verstanden werden soll, sonst aber x_1 und x_2 positiv oder negativ sein mag). Jenachdem nun die Substitution von x_3 für x einen Werth $F(x_3) = y_3$ ergiebt, welcher entweder das entgegengesetzte Zeichen von y_1, oder das entgegengesetzte Zeichen von y_2 hat, ist im ersten Falle mit x_1 und x_3, im zweiten Falle aber mit x_3 und x_2 wie vorher mit x_1 und x_2 zu verfahren, also ein Werth x_4 zu erzielen, welcher entweder das entgegengesetzte Zeichen des links, oder des rechts belegenen Nachbarwerthes hat.

Auf diese Weise nähert man sich dem Werthe von x sehr rasch oder auf dem kürzesten Wege, jedoch mit der Unbequemlichkeit, dass für x_3, x_4, x_5 ... wegen der für y_2, y_3, y_4 ... sich ergebenden Werthe, formell irrationale Grössen (d. h. Werthe von ungeschlossener dekadischer Form) zu substituiren sind.

4. Dieser letzteren Unbequemlichkeit geht man aus dem Wege, wenn man als neuen Werth von x immer den Mittelwerth zwischen den beiden Nachbarwerthen von x, für welche y entgegengesetzte Zeichen haben, annimmt, also zunächst $x_3 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, sodann je nach dem Zeichen von x_3 entweder $x_4 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{4}$, oder $x_4 = x_1 + \frac{3(x_2 - x_1)}{4}$, sodann, je nach dem Zeichen von x_4 entweder $x_5 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{8}$, oder $= x_1 + \frac{3(x_2 - x_1)}{8}$, oder $= x_1 + \frac{5(x_2 - x_1)}{8}$, oder $= x_1 + \frac{7(x_2 - x_1)}{8}$ setzt.

Diese Substitutionen rationaler Werthe von x_3, x_4, x_5 ... sind bequemer, besonders wenn für x_1 und x_2 ganze Zahlen gesetzt werden können (was in der Regel möglich ist), sie verlängern aber den zum Ziele führenden Weg.

5. Wenn die beiden Werthe von y_1 und y_2, zwischen welchen nachweislich eine reelle Wurzel liegt, gleiche Zeichen haben, wenn also zwischen x_1 und x_2 zwei reelle Wurzeln liegen, sodass x_1 und x_2 äusserste Grenzwerthe dieser beiden Wurzeln sind, so würde man, wenn die Regula falsi nach Nr. 3 zu Grunde gelegt werden soll, zunächst für x_3 den Punkt annehmen müssen, in welchem die vom Kopfe des y_1 nach dem Kopfe von y_2 führende gebrochene Linie die Abszissenaxe unter gleichen Winkeln berührt, für welchen also $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_1}{y_2}$ und mithin $x_3 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)y_1}{y_1 + y_2}$ ist. Hat nun y_3 das entgegengesetzte Zeichen von y_1 und y_2; so liegt eine reelle Wurzel zwischen x_1 und x_3 und eine andere reelle Wurzel zwischen x_3 und x_2: in diesem Falle kann also das Verfahren Nr. 3 sowohl zur Ermittlung der einen, wie auch der anderen Wurzel fortgesetzt werden. Hat aber y_3 dasselbe Zeichen wie y_1 und y_2; so kann eine oder auch zwei reelle Wurzeln ebensowohl zwischen x_1 und x_3, als auch zwischen x_3 und x_2 liegen: es genügt daher nicht die Herstellung eines der beiden Werthe y_4 oder y_5, für die zwischen x_1 und x_3 und zwischen x_3 und x_2 liegenden Werthe von x_4 und x_5, sondern sie müssen beide hergestellt werden. Hat dann entweder y_4 oder y_5 das entgegengesetzte Zeichen der

früheren y; so ist man in der Lage, die gesuchte reelle Wurzel nach Nr. 3 zu ermitteln. Hat aber sowohl y_4, als auch y_5 dasselbe Zeichen wie die früheren y; so müssen aus demselben Grunde wie vorstehend die vier Werthe y_6, y_7, y_8, y_9 hergestellt werden, für welche x_6, x_7, x_8, x_9 bezw. zwischen x_1 und x_4, zwischen x_4 und x_3, zwischen x_3 und x_5 und zwischen x_5 und x_2 liegt. Dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis sich ein y mit entgegengesetzten Zeichen ergiebt. Da alsdann eine reelle Wurzel zwischen dem zu y gehörigen Werthe von x und dem links, sowie auch rechts liegenden nächsten Nachbarwerthe existirt; so kann zur Ermittlung einer jeden dieser beiden Wurzeln von diesen Stellen an nach Nr. 3 verfahren werden.

6. Weit einfacher gestaltet sich im vorstehenden Falle das Verfahren nach Nr. 4, indem dann nach und nach eine, zwei, vier, acht, u. s. w. Werthe von y für alle in Nr. 4 genannten einfachen Werthe von x herzustellen sind, bis sich unter den Werthen von y einer findet, welcher das entgegengesetzte Zeichen hat. Von dieser Stelle aus kann das Verfahren Nr. 4 (welches für jedes neue y immer nur eine einzige Substitution für x erfordert) zur Ermittlung jeder der beiden in Frage kommenden Wurzeln angewandt werden.

Bei diesem Verfahren müssen sich nothwendig einmal entweder schon vor der Erreichung der eben bezeichneten Stelle oder später bei der Fortsetzung des einfachen Verfahrens Nr. 4 zwei benachbarte Werthe von x ergeben, welche gleiche Anfangsziffern haben. Von diesem Stadium an kann man, wenn man will, die Hornersche Methode zur Ermittlung einer Wurzel in Anwendung bringen. Hieraus geht hervor, dass die Voraussetzung für das Hornersche Verfahren mit Hülfe der Regula falsi stets erfüllt werden kann, insofern es gewiss ist, dass die Gleichung überhaupt reelle Wurzeln hat, und äusserste Grenzwerthe, welche diese Wurzeln bezw. in positiver oder in negativer Richtung nicht zu überschreiten vermögen, angegeben werden können.

Eben das Nämliche gilt für die Anwendung des Verfahrens Nr. 5.

Hätte die gegebene Gleichung zwei oder mehr gleiche positiv oder negativ reelle Wurzeln: so müssen sich zwei benachbarte Werthe von y dem Nullwerthe nähern, was durch jedes der vorstehenden Verfahren zur Erkenntniss kömmt.

In Erwägung, dass eine etwaige negative reelle Wurzel der Gleichung $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots = 0$ die positive Wurzel der Gleichung $(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \ldots = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \ldots = 0$ ist, dass man also nur positive reelle Wurzeln aufzusuchen braucht, ferner, dass der grösste negative Koeffizient einer Gleichung durch den um 1 vermehrten positiven Werth eine obere Grenze k bezeichnet, welche die positive Wurzel nicht überschreiten kann, kommen bei dem Verfahren nach Nr. 4 für x nur Werthe von der Form $x = \frac{ks}{2^r}$ in Betracht, worin r möglicherweise die ganzen Werthe 1, 2, 3 . . .

durchlaufen kann und s ein unpaarer ganzer Werth aus der Reihe $1, 3, 5, 7, \ldots 2^r - 1$ ist. Multiplizirt man nun die Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots = 0$$

nachdem darin $x = \frac{k\,s}{2^r}$ substituirt ist, mit dem Faktor 2^{nr}; so ergiebt sich

$$z = k^n s^n + a_{n-1} k^{n-1} 2^r s^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} 2^{2r} s^{n-2} + \ldots + a_0 2^{nr} = 0$$

Hierin hat s stets einen unpaaren ganzen Werth, wenn also die Koeffizienten k^r, $a_{n-1}k^{n-1}2^r$, $a_{n-2}k^{n-2}2^{2r}$ ... hergestellt sind, handelt es sich nur um die Substitution ganzer Werthe für s, und zwar hat für eine Gleichung unpaaren Grades die Grösse s für das betreffende r stets nur einen einzigen, leicht erkennbaren Werth, während für eine Gleichung paaren Grades für s unter Umständen die Reihe $1, 3, 5, \ldots 2^r - 1$ substituirt werden muss, bis ein Gegensatz zwischen den Werthen von z gefunden ist, der die Existenz von zwei reellen Wurzeln anzeigt (indem die Werthe von z, welche den paaren Zwischenzahlen $2, 4, 6, \ldots 2^r - 2$ entsprechen, schon bei den niedrigeren Werthen von r gebildet sind).

Ich bemerke, dass es nicht unbedingt nothwendig ist, zur Ermittelung einer zwischen x_1 und x_2 liegenden Wurzel x_3 immer den genauen Mittelwerth $\frac{x_1 + x_2}{2}$ anzunehmen: man kann vielmehr für x_3 jeden beliebigen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth setzen, also eine dem Mittelwerthe ziemlich nahe liegende, möglichst einfache Zahl wählen. Beispielsweise braucht man, wenn $x_1 = 13$ und $x_2 = 28$ wäre, nicht nothwendig $x_3 = 20{,}5$ zu nehmen, sondern kann $x_3 = 20$, auch $= 21$ setzen. Liegt dann x zwischen 13 und 20; so nimmt man nicht $x_3 = 16{,}5$, sondern $= 16$ auch $= 17$ u. s. f. Läge x zwischen 0 und 0,05; so braucht man nicht $x_3 = 0{,}025$ zu nehmen, sondern kann $x_3 = 0{,}02$ oder auch $= 0{,}03$ setzen. Läge x zwischen 3,013 und 3,040: so kann man statt $x_3 = 3{,}0265$ auch 3,026 nehmen. Es leuchtet ein, dass hierdurch die Operationen bedeutend abgekürzt werden können, indem für x möglichst einfache Zahlen (ohne die Nenner 2^r) zu substituiren sind.

Wenn in die gegebene Gleichung $x = \frac{1}{v}$ gesetzt und die entstehende Gleichung für v geordnet wird, ist die obere Grenze von v die untere Grenze von x, unter welche also x nicht herabsinken kann. Man kann hiernach immer eine untere und eine obere Grenze angeben, zwischen welchen x liegen muss. Die Bekanntschaft dieser beiden Grenzen ermöglicht für eine Gleichung unpaaren Grades stets die rasche Auffindung der Anfangsziffer von x, also die Anwendung der Hornerschen Methode. Denn, angenommen, die obere Grenze von x sei die dekadische Zahl $x_2 = a_1 a_2 \ldots a_n$; so liegt x auch unter der Zahl $(a_1 + 1)0 \ldots 0$. Wäre z. B. $x_2 < 735$; so ist auch $x_2 < 800$. Ferner, ist die untere Grenze von x die dekadische Zahl $x_1 = b_1 b_2 \ldots b_n$ oder auch $0\,0\,b_1 b_2 \ldots b_n$; so liegt x auch über der Zahl $(b_1 - 1)0 \ldots 0$, bezw. über $0\,0\,(b_1 - 1)\,0\,\ldots\,0$. Wäre z. B. $x_1 > 356$; so ist auch $x_1 > 200$, und wäre $x_1 > 0{,}00356$; so ist auch $x_1 > 0{,}002$. Im ersten Falle, wo $x_1 > 200$ und $x_2 < 800$ ist, ergeben die Substitutionen von $x = 200$, 300, 400, 500, 600, 700, 800 in die gegebene Gleichung an irgend einer Stelle einen Zeichenwechsel des Werthes von y, z. B. zwischen 400 und 500, mithin die Zahl 4 als dekadische Anfangsziffer der Wurzel x. Im zweiten Falle, wo $x_1 > 0{,}002$ und $x_2 < 800$ ist, würden, da nun auch $x_1 > 0$ ist, die Substitutionen $x = 0$, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 die Anfangsziffer ergeben, welche auf der dritten Stelle links vom Dezimalkomma steht. Fiele der Zeichenwechsel zwischen 0 und 100, nämlich zwischen $0\,.\,100$ und $1\,.\,100$; so wäre 0 die Anfangsziffer auf dritter Dezimalstelle, d. h. man würde $x = 0\,a_1 a_2 = a_1 a_2$ haben; man gelangt aber zu einer späteren Anfangsziffer a_1, wenn man die Substitutionen 0, 10, 20, ... 90 bildet. Zeigte schon die erste Substitution von 0 und 10 den Zeichenwechsel: so könnten die Substitutionen von 20, 30, ... 90 unterbleiben; man hätte aber 0, 1, 2, ... 9 zu substituiren. Ergäbe wiederum die erste Substitution 0, 1 den Zeichenwechsel; so wären die Substitutionen 0, 0,1, 0,2, ... 0,9 zu bilden, und immer nur dann, wenn die ersten beiden Substitutionen den Zeichenwechsel herbeiführten, wären die von 0 bis zum nächsten Werthe sich erstreckenden Substitutionen zu bilden, bis man zu der Reihe 0, 0,001, 0,002, 0,003, ... 0,009 gelangt, welche, da $x_1 > 0{,}002$ ist, nothwendig den Zeichenwechsel zwischen den Substitutionen 0,002, 0,003, ... 0,009 zeigen muss, was eine Anfangsziffer > 0 ergiebt.

Zur Auffindung der Anfangsziffer der Wurzel einer Gleichung paaren Grades kann dasselbe Verfahren angewandt werden. Wenn jedoch eine Substitutionsreihe lauter Werthe von gleichem Zeichen ergiebt, beschränkt sich die Fortsetzung nicht auf die Bildung einer einzigen neuen Substitutionsreihe; es müssen vielmehr, wenn man die baldige Erkenntniss der Anfangsziffer erwartet, nach und nach zwischen allen benachbarten Gliedern der vorhergehenden Reihe neue Reihen gebildet werden, bis sich ein Zeichenwechsel ergiebt.

In allen Fällen gelangt man durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung zu einer Anfangsziffer u von x, welche die m-te Stelle links oder rechts vom Dezimalkomma einnimmt, welche also den Werth $u\,.\,10^m$ anzeigt, worin m positiv, oder null, oder negativ sein kann. Setzt man jetzt $x = u\,.\,10^m + z$; so muss $z = v\,.\,10^{m-1}$ sein, worin v, also auch die Anfangsziffer u_1 von v zwischen 0 und 10 liegt, mithin die zweite Ziffer $u_1\,.\,10^{m-1}$ von x durch die Substitutionen $v = 0, 1, 2, \ldots 9$ bestimmt werden kann. Zu dem Ende ist aus der gegebenen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

durch die Substitution $x = u\,.\,10^m + z$ die Gleichung

$$b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = 0$$

zu bilden. Diese Umwandlung kann durch verschiedene bekannte Methoden erleichtert werden (s. meine Schrift über die Auflösung der

Gleichungen §. 5 und 6), ich bemerke hierzu, dass wenn ${}^s\mathfrak{B}_r$ den r-ten Binomialkoeffizienten vom s-ten Grade bezeichnet, die Koeffizienten der umgewandelten Gleichung folgende Werthe haben.

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= {}^n\mathfrak{B}_1 a_n u 10^m + a_{n-1} \\
b_{n-2} &= {}^n\mathfrak{B}_2 a_n u^2 10^{2m} + {}^{n-1}\mathfrak{B}_1 a_{n-1} u 10^m + a_{n-2} \\
b_{n-3} &= {}^n\mathfrak{B}_3 a_n u^3 10^{3m} + {}^{n-1}\mathfrak{B}_2 a_{n-1} u^2 10^{2m} + {}^{n-2}\mathfrak{B}_1 a_{n-2} u 10^m + a_{n-3} \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_1 &= {}^n\mathfrak{B}_{n-1} a_n u^{n-1} 10^{m(n-1)} + {}^{n-1}\mathfrak{B}_{n-2} a_{n-1} u^{n-2} 10^{m(n-2)} + \dots \\
&\qquad + {}^2\mathfrak{B}_1 a_2 u 10^m + a_1 \\
b_0 &= a_n u^n 10^{mn} + a_{n-1} u^{n-1} 10^{m(n-1)} + \dots + a_1 u 10^m + a_0
\end{aligned}
$$

In der neuen Gleichung muss z zwischen $0.10^{m-1}, 1.10^{m-1}, 2.10^{m-1}, \dots 10.10^{m-1}$ liegen. Der Werth der Gleichung für $z = 0.10^{m-1} = 0$ ist $= b_0$ und der für $z = 10.10^{m-1} = 10^m$, welcher $x = u.10^m + 10^m = (u+1)10^m$ voraussetzt, ist bereits bei der Ermittelung der ersten Anfangsziffer u bekannt geworden, braucht also nicht nochmals hergestellt zu werden. Substituirt man also zuerst 5.10^{m-1}, alsdann je nach dem Zeichenwechsel 2.10^{m-1} oder 8.10^{m-1}, darauf 1.10^{m-1} oder 3.10^{m-1} oder 6.10^{m-1} oder 9.10^{m-1}, hierauf, wenn es erforderlich ist, 4.10^{m-1} oder 7.10^{m-1}; so muss eine dieser vier Substitutionen die Kenntniss der zweiten Ziffer u_1 herbeiführen.

Setzt man jetzt $z = u_1 10^{m-1} + z_1$; so muss $z_1 = v_1.10^{m-2}$ sein. Die dritte Ziffer $u_2.10^{m-2}$ findet sich durch das vorstehende Verfahren, indem man die Gleichung $b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0 = 0$ durch die Substitution $z_1 = u_1.10^{m-1} + z_1$ in die Gleichung

$$c_n z_1^n + c_{n-1} z_1^{n-1} + \dots + c_1 z_1 + c_0 = 0$$

umwandelt, und aus den Werthen $z_1 = 0.10^{m-2}, 1.10^{m-2}, 2.10^{m-2}, \dots 10.10^{m-2}$ die dritte Ziffer $u.10^{m-2}$ bestimmt.

Auf diese Weise ergeben sich alle Ziffern von x. Eine jede kann höchstens vier Substitutionen in die betreffende Gleichung erfordern. Hat man aber Grund zu der Annahme, dass eine Ziffer einer gewissen bestimmbaren Grösse nahe liegt, so lässt sich die Menge der Substitutionen vermindern. In der That liegt im Allgemeinen der Werth der Gleichung $b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$ dem Werthe der beiden letzten Glieder ziemlich nahe, indem die vorhergehenden Glieder niedrige Werthe gegen $b_1 z$ und b_0 haben. Setzt man also nach diesem Grundgedanken Horners $b_1 z + b_0 = 0$; so wird $z = -\dfrac{b_0}{b_1}$ ein Näherungswerth von z sein, die Anfangsziffer dieses Werthes wird mithin der gesuchten zweiten Ziffer von x ziemlich nahe liegen. Ist v diese Anfangsziffer; so wird man zuerst $v.10^{m-1}$ und dann je nach der Zeichenfolge entweder $(v-1)10^{m-1}$ oder $(v+1)10^{m-1}$, darauf, wenn es nöthig ist, entweder $(v-2)10^{m-1}$ oder $(v+2)10^{m-1}$ u. s. w. substituiren, um möglichst bald zu der zweiten Ziffer u_1 zu gelangen. In ähnlicher Weise findet sich die dritte Ziffer aus $c_1 z_1 + c_0 = 0$, also $z_1 = -\frac{c_0}{c_1}$, und jede folgende Ziffer, indem bei genügendem Herabsinken dieser Ziffern eine mehrmalige Substitution, welche in der Hornerschen Methode die Kontrole bildet, nicht mehr erforderlich ist.

Es sei noch bemerkt, dass, wenn $z = -\frac{b_0}{b_1}$ einen negativen Werth ergiebt, wenn also b_0 und b_1 gleiche Zeichen haben, oder wenn $b_1 = 0$ ist, die zweite Anfangsziffer v nur durch die Kontrole, also durch Substitution in die vollständige Gleichung bestimmt werden kann. Dasselbe gilt eventuell für $z_1 = -\frac{c_0}{c_1}$ u. s. w.

Geht man nicht auf die Anwendung der Hornerschen Methode aus; so wird man, nachdem die Anfangsziffer $u\,10^m$ von x bestimmt ist, in die gegebene Gleichung, ohne Umwandlung derselben, $u\,10^m + v\,10^{m-1}$ substituiren, indem man für v erst 5, sodann 2 oder 8, darauf 1 oder 3 oder 6 oder 9 und zuletzt, wenn nöthig, 4 oder 7 setzt. Hierdurch ergiebt sich die zweite Ziffer u_1, und man hat nun in die gegebene Gleichung $u\,10^m + u_1\,10^{m-1} + v_1\,10^{m-2}$ zu substituiren, worin für v_1 die eben genannten Werthe von v zu setzen sind, um die dritte Ziffer u_2 zu finden. Auf diese Weise ergiebt sich $x = u\,10^m + u_1\,10^{m-1} + u_2\,10^{m-2} + \ldots$ oder in dekadischer Form $u\,u_1\,u_2 \ldots$ mit dem Dezimalkomma hinter der Stelle $u_m 10^{m-m} = u_m$, also in der Form $u\,u_1\,u_2 \ldots u_m, u_{m+1}\,u_{m+2} \ldots$ So kann man z. B., wenn $u = 300$ die Anfangsziffer ist, also x zwischen 300 und 400 liegt, in die Lage kommen, die folgenden Ziffern $u_1 = 60$, $u_2 = 4$, $u_3 = 0{,}2$, $u_4 = 0{,}05$ der Zahl $x = 364{,}25$ aus den Substitutionen von 360 und 370, ferner von 364 und 365, ferner von 364,2 und 364,3, ferner von 364,25 und 364,26 zu erkennen.

7. Die Hornersche Methode, sowie auch das auf die Regula falsi gestützte Verfahren geht darauf aus, die Wurzel einer Gleichung in dekadischer Form, also mittelst einer Summe oder Reihe von Zahlen zu bestimmen. Es hat ein wissenschaftliches Interesse, den Weg zu erörtern, auf welchem die Wurzel in der Form eines Produktes, also durch sukzessive Substitution von Faktoren anstatt von Summen in die Glieder der gegebenen Gleichung dargestellt werden kann. Zu diesem Ende ziehen wir als Faktoren, mit welchen bereits gebildete Produkte zu multipliziren sind, die Grössen

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{m+1}{m}$$

welche sämmtlich > 1 sind, aber sich unausgesetzt dem Werth 1 nähern, in Betracht, d. h. wir substituiren, nachdem eine untere Grenze v und eine obere Grenze w von x in nachstehender Weise ermittelt und danach aus der gegebenen Gleichung

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

die Werthe von $F(v)$ und $F(w)$ gebildet sind, zunächst für v einen Werth $v\,\frac{r+1}{r}$ oder für w einen Werth $w\,\frac{s+1}{s}$, um im ersten Falle an dem Zeichenwechsel zwischen $F(v)$ und $F\left(v\frac{r+1}{r}\right)$ oder zwischen $F\left(v\frac{r+1}{r}\right)$ und $F(w)$ und im zweiten Falle an dem Zeichenwechsel zwischen $F(v)$ und $F\left(w\frac{s+1}{s}\right)$ oder zwischen $F\left(w\frac{s+1}{s}\right)$ und $F(w)$ zu erkennen, ob x zwischen den ersteren oder den letzteren beiden Substitutionswerthen liegt.

Die Herstellung eines Werthes wie $F\left(\frac{r+1}{r}\,v\right)$ aus $F(v) = a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} \ldots + a_1 v + a_0$, also die Herstellung von

$$F\left(v\,\frac{r+1}{r}\right)$$
$$= a_n v^n \left(\frac{r+1}{r}\right)^n + a_{n-1} v^{n-1} \left(\frac{r+1}{r}\right)^{n-1} + \ldots\ a_1 v \frac{r+1}{r} + a_0$$

erleichtert sich durch die Multiplikation der ganzen Gleichung mit dem Faktor r^n, was für das Zeichen des gesuchten Werthes gleichgültig ist. Danach hat man

$$r^n F\left(v\frac{r+1}{r}\right)$$
$$= a_n v^n (r+1)^n + a_{n-1} v^{n-1} (r+1)^{n-1} r + a_{n-2} v^{n-2} (r+1)^{n-2} r^2 + \ldots$$

eine Formel, welche sich durch Multiplikation der Glieder der vorhergehenden Formel mit ganzen Faktoren leicht berechnen lässt, übrigens im Nachstehenden eine wesentliche Vereinfachung finden wird. Die hierauf zu berechnende Formel wird die allgemeine Form $F\left(v\,\frac{r+1}{r}\cdot\frac{r_1+1}{r_1}\right)$ haben, welche aus einer vorhergehenden Formel durch ähnliche Multiplikationen mit $\left(\frac{r_1+1}{r_1}\right)^n$, $\left(\frac{r_1+1}{r_1}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{r_1+1}{r_1}\right)^{n-2}$ ... oder mit $(r_1 +)^n$, $(r_1+1)^{n-1} r_1$, $(r_1+1)^{n-2} r_1{}^2$ ... entsteht.

Es kömmt jetzt darauf an, die Werthe von v, r, r_1 ... in angemessener und einfacher Weise zu bestimmen. Da sich aus den Koeffizienten der gegebenen Gleichung eine untere und eine obere Grenze von x ergiebt; so nehmen wir für unsere Rechnung als untere Grenze von x die zunächst unter jener unteren Grenze liegende Potenz von 2, also den Werth 2^m an, worin m positiv und auch negativ sein kann, indem $2^{-m} = \frac{1}{2^m}$ ist. Als obere Grenze für unsere Rechnung nehmen wir die zunächst über jener oberen Grenze liegende Potenz von 2 an, welche $2^{m+u} = 2^u 2^m$ sei, worin u eine positive ganze Zahl oder auch $= 0$ sein wird. Substituirt man nun statt 2^m nach und nach 2^{m+1}, 2^{m+2}, 2^{m+3} ...: so ergiebt sich als untere Grenze von x irgend eine dieser Potenzen und als obere Grenze die nächst höhere Potenz, d. h. x liegt zwischen 2^m und $2^{m+1} = 2 \,.\, 2^m$. Setzen wir also $2^m = v$; so liegt x zwischen v und $2v = w$. Hierdurch sind die vorhin mit v und w bezeichneten Grenzwerthe, wovon der obere das Zweifache des unteren (oder $w = 2v = v \cdot \frac{2}{1}$) ist, bestimmt, und es handelt sich jetzt um die Werthe von $\frac{r+1}{r}, \frac{r_1+1}{r_1}$ ... für die Zwischenwerthe.

Der erste Werth $\frac{r+1}{r}$ ist $= \frac{3}{2}$ zu setzen; denn offenbar ist derselbe > 1 und < 2, liegt also zwischen 1 und 2, sodass $x^1 = v \cdot \frac{3}{2}$ zwischen v und $2\,v$ oder $v \,.\, 2$ liegt. Das Zeichen von $F\left(v\,\frac{3}{2}\right)$ entscheidet, ob x zwischen $F\left(v\,\frac{3}{2}\right)$ und $F(v)$ oder zwischen $F\left(v\,\frac{3}{2}\right)$ und $F(v2)$ liegt. Im ersteren Falle bilden wir $F\left(v\,\frac{3+1}{2+1}\right) = F\left(v\,\frac{4}{3}\right)$, im zweiten Falle dagegen $F\left(v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{2^2+1}{2^2}\right) = F\left(v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\right)$, indem von diesen beiden Werthen thatsächlich der erste $< F\left(v\,\frac{3}{2}\right)$ und > 1, der zweite dagegen $> F\left(v\,\frac{3}{2}\right)$ und < 2 ist.

Das Zeichen des durch die betreffende neue Substitution $v\,\frac{4}{3}$ oder $v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$ bedingten Werthes der Funktion F lehrt nun ferner, ob x kleiner oder grösser als der zugehörige Substitutionswerth ist oder ob es links oder rechts von diesem Werthe liegt, ohne doch den nächstfolgenden aller gebildeten Werthe von x zu erreichen. Für die Lage links von $v\,\frac{4}{3}$ ist $v\,\frac{4+1}{3+1} = v\,\frac{5}{4}$, für die Lage links von $v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$ ist $v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5+1}{4+1} = v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}$ zu setzen: für die Lage rechts von $v\,\frac{4}{3}$ ist $v\,\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2+1}{3^2} = v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}$, für die Lage rechts von $v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$ ist $v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4^2+1}{4^2} = v\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}$ zu setzen.

Hieraus ist das sehr einfache Gesetz zu erkennen, nach welchem der für jede folgende Rechnung neu hinzuzufügende Faktor zu bilden ist. Hat nämlich das zuletzt substituirte Produkt die Form $v \cdot A \cdot \frac{r+1}{r}$ worin A ein beliebiges Produkt verschiedener Quotienten von der Form $\frac{m+1}{m}$ ist; so bedingt die Lage nach links die Substitution $v \cdot A \cdot \frac{r+2}{r+1}$ und die Lage nach rechts die Substituion $v \cdot A \cdot \frac{r+1}{r} \cdot \frac{r^2+1}{r^2}$, sodass bei der Lage nach links der auf $v \cdot A$ folgende Endfaktor $\frac{r+1}{r}$ in $\frac{r+2}{r+1}$ umzuwandeln oder damit zu vertauschen, bei der Lage nach rechts dagegen dem Faktor $v \cdot A \cdot \frac{r+1}{r}$ der Faktor $\frac{r^2+1}{r^2}$ hinzuzufügen ist. Die im ersten Falle erforderliche Umwandlung oder Vertauschung von $v \cdot A \cdot \frac{r+1}{r}$ in $v \cdot A \cdot \frac{r+2}{r+1}$ ist aber ebenfalls eine Hinzufügung des neuen Faktors $\frac{r+2}{r+1}$, allerdings nicht zu dem Produkte $v \cdot A \cdot \frac{r+1}{r}$, wohl aber zu dem Produkte $v.A$, welches einer vorhergehenden, also bereits ausgeführten Rechnung von $F(v.A)$ angehört.

Ich betone, dass diese Neubildung von Produkten immer von den im vorhergehenden Prozesse neu oder zuletzt gebildeten Produkten, nicht von den übrigen in jenem Prozesse erzeugten Produkten ausgehen muss, und dass jedes auf diese Weise erzeugte neue Produkt die Hinzufügung eines neuen Faktors zu einem bereits gebildeten Produkte ist. Auf diese Weise entstehen durch die fortschreitenden Prozesse folgende Reihen von Produkten, wovon ich die je neuen durch Unterstreichung markirt habe.

1) $v \quad \underline{v.2}$

2) $v \quad \underline{v \cdot \frac{3}{2}} \quad v.2$

3) $v \quad \underline{v \cdot \frac{4}{3}} \quad v \cdot \frac{3}{2} \quad \underline{v \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}} \quad v.2$

4) $v \quad \underline{v \cdot \frac{5}{4}} \quad v \cdot \frac{4}{3} \quad \underline{v \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9}} \quad v \cdot \frac{3}{2} \quad \underline{v \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}} \quad v \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$
$\underline{v \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16}} \quad v.2$

5) $$v \qquad \underline{v\cdot\frac{6}{5}} \qquad v\cdot\frac{5}{4} \qquad \underline{v\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}} \qquad v\cdot\frac{4}{3} \qquad \underline{v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{10}} \qquad v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}$$

$$\underline{v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{82}{81}} \qquad v\cdot\frac{3}{2} \qquad \underline{v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}} \qquad v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5} \qquad \underline{v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{26}{25}}$$

$$v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} \qquad \underline{v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{18}{17}} \qquad v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16} \qquad \underline{v\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{257}{256}} \qquad v\,.\,2$$

u. s. f. Von jeder dieser Reihen ist in einem gegebenen Falle immer nur ein einziges der neuen Produkte zu bilden, wie es der Zeichenwechsel zwischen zwei benachbarten Werthen von $F(x)$ verlangt. Der Beweis für die Richtigkeit der so gebildeten neuen Produkte ergiebt sich, wenn man einen solchen Faktor aus der Bedingung ableitet, dass das neue Produkt zwischen den beiden alten benachbarten unterstrichenen Produkten liegen muss, dass z. B., wenn aus $v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}$ neue Produkte gebildet werden sollen, das eine, nämlich $v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{10}$, zwischen $v\cdot\frac{4}{3}$ und $v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}$, das andere aber, nämlich $v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9^2+1}{9^2}$ zwischen $v\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{9}$ und $v\cdot\frac{3}{2}$ liegen muss.

Es handelt sich nun um die Herstellung der neuen Werthe von $F(x)$. Immer geht einem solchen neuen Werthe entweder der bereits gebildete Werth von $F\left(v\cdot A\cdot\frac{r+1}{r}\right)$ und auch der von $F(v\,.\,A)$ voran und es ist der neue Werth $F\left(v\cdot A\cdot\frac{r+2}{r+1}\right)$ zu bilden, oder es geht ihm der bereits gebildete Werth $F\left(v\cdot A\cdot\frac{r+1}{r}\right)$ voran und es ist der neue Werth $F\left(v\cdot A\cdot\frac{r+1}{r}\cdot\frac{r^2+1}{r^2}\right)$ zu bilden. In dem einen wie in dem anderen Falle muss man aus dem bereits berechneten Werthe $F(w)$, worin w entweder $= v\,.\,A$ oder $= v\cdot A\cdot\frac{r+1}{r}$ ist, den Werth von $F\left(w\cdot\frac{s+1}{s}\right)$ bilden, worin $\frac{s+1}{s}$ entweder $=\frac{r+2}{r+1}$ oder $=\frac{r^2+1}{r^2}$ ist.

Nach der gegebenen Gleichung ist

$$F(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0$$

also wegen $\frac{s+1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$

$$F\left(w \cdot \frac{m+1}{m}\right)$$
$$= a_n w^n\left(1+\frac{1}{s}\right)^n + a_{n-1} w^{n-1}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 w\left(1+\frac{1}{s}\right) + a_0$$

Je grösser s wird, desto mehr nähert sich die Potenz $\left(1+\frac{1}{s}\right)^r$ dem Werth $1 + r \cdot \frac{1}{s}$, d. h. der an $1 + r \cdot \frac{1}{s}$ fehlende Werth ist ein immer mehr abnehmender Theil dieser Potenz. Setzt man also bei hinreichender Grösse der immer mehr wachsenden Zahl m für die Potenzen von $1 + \frac{1}{s}$ ihre Näherungswerthe; so ergiebt sich

$$F\left(w \cdot \frac{s+1}{s}\right)$$
$$= \{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + a_{n-2} w^{n-2} + \ldots + a_1 w + a_0\}$$
$$+ \frac{1}{s}\{n a_n w^n + (n-1) a_{n-1} w^{n-1} + (n-2) a_{n-2} w^{n-2} + \ldots + a_1 w\}$$

Die erste dieser beiden Reihen ist $= F(w)$, und die zweite ergiebt sich aus der ersten durch Multiplikation des ersten, zweiten, dritten, . . . n-ten Gliedes mit n, $n-1$, $n-2$, . . . 1 und Division des Ganzen durch s, also durch ein sehr einfaches Verfahren. Dasselbe kann von dem Augenblicke angewandt werden, wo sich zeigt, dass der abgekürzte Werth von $F\left(w \cdot \frac{s+1}{s}\right)$ dasselbe Zeichen hat, als der vollständige Werth dieser Funktion. Von diesem im Allgemeinen bald erreichten Augenblicke wird die Hinzufügung immer neuer Werthe von $\frac{s+1}{s}$ eine sehr leichte Operation, welche zur Kenntniss von immer genauer werdenden Näherungswerthen der Wurzel x in der Form

$$v \cdot \frac{m_1+1}{m_1} \cdot \frac{m_2+1}{m_2} \cdot \frac{m_3+1}{m_3} \ldots = 2^m \cdot \frac{m_1+1}{m_1} \cdot \frac{m_2+1}{m_2} \cdot \frac{m_3+1}{m_3} \ldots$$

führt, worin m eine positive oder negative ganze Zahl oder ein Nullwerth sein kann, m_1, m_2, m_3 . . . aber stets positive ganze Zahlen sind, welche fortgesetzt wachsen, also fortgesetzt kleiner werdende, immer mehr der Einheit sich nähernde Faktoren in Form von Quotienten darstellen. Die Zahlen m, m_1, m_2 . . . sind keinem Belieben unterworfen, sondern bilden eine ganz bestimmte Reihenfolge.

Es ist bemerkenswerth, dass die nach einer gewissen Reihe von Operationen zulässige Beschränkung des Werthes von $F\left(w \cdot \frac{s+1}{s}\right)$ auf den durch die beiden Anfangswerthe der Potenz $\left(1+\frac{1}{s}\right)^r$ ausgedrückten Näherungswerth hier dieselbe Rolle spielt, wie bei der

Hornerschen Methode die Beschränkung auf die beiden Endwerthe der als Reihe dargestellten Funktion $F(z)$.

Wenn man auf die der Einheit immer näher rückende Form $\frac{m+1}{m}$ der neuen Faktoren und auf die mit dieser Form verbundene Näherungsrechnung verzichten will, kann man auch die Regula falsi in Anwendung bringen. Denn wenn x zwischen x_1 und x_2 liegt: so kann man statt nach Nr. 4 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ für x zu substituiren, auch $x_1 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2\,x_1}$ an die Stelle von x_1 (oder $x_2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2\,x_2}$ an die Stelle von x_2) setzen, also dem Faktor x_1 den neuen Faktor $\frac{x_1 + x_2}{2\,x_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)$ zufügen. Auf diese Weise nähert man sich im Allgemeinen dem wahren Werthe von x rascher, jedoch mit weniger einfachen Operationen.

8. Ob eine Gleichung reelle Wurzeln hat, ergiebt sich aus dem Lehrsatze von Sturm (s. §. 2 Nr. 12 bis 14 der obigen Schrift). Aus den Zeichen der Koeffizienten der gegebenen Gleichung $F(x) = 0$ und aus denen der Gleichung $F(-x) = 0$ ergeben sich nach bekannten Sätzen die äussersten positiven und negativen Grenzwerthe der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ (s. §. 3 der obigen Schrift). Für diese Grenzwerthe können stets ganze positive oder negative Zahlen angenommen werden, welche zunächst ausserhalb der etwa in unganzer Form auftretenden Grenzwerthe liegen. Hiernach kann, wenn die Gleichung überhaupt reelle Wurzeln hat, irgend eine dieser Wurzeln durch das Verfahren Nr. 6 und, wenn man will, von einer gewissen Stelle an durch die Hornersche Methode berechnet werden.

Da jede Gleichung unpaaren Grades mindestens eine und jede Gleichung paaren Grades mit negativem bekanntem Gliede a_0 mindestens zwei reelle Wurzeln hat: so wird man nur für eine Gleichung paaren Grades mit positivem bekanntem Gliede a_0 zu dem Sturmschen Lehrsatze seine Zuflucht nehmen. Schliesslich kömmt es aber, wenn dieser Lehrsatz die Existenz nur von komplexen Wurzeln ergiebt, auf die Berechnung derselben an. Der Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes besteht nun eben in der Berechnung zweier reellen oder komplexen Wurzeln einer Gleichung paaren Grades ohne besondere Theoreme.

9. Zu diesem Ende sei für einen paaren Exponenten n die gegebene Gleichung in allgemeinster Form

$$F(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x^1 + a_0 = 0$$

Besitzt dieselbe zwei reelle Wurzeln x_1 und x_2; so haben dieselben die Form $x_1 = r + s$ und $x_2 = r - s$, worin $r = \frac{x_1 + x_2}{2}$ und $s = \frac{x_1 - x_2}{2}$ offenbar reelle Werthe haben. Besitzt die Gleichung zwei komplexe Wurzeln: so haben dieselben die Form $x_1 = r + s\,i$ und

$x_2 = r - si$, also dieselbe Form wie zwei reelle Wurzeln unter der Bedingung, dass in den letzteren das reelle s durch das imaginäre si ersetzt oder dass in der ersteren Form ein imaginärer Werth von s zugelassen werde.

Den Fall, wo $s = 0$ ist, wo also zwei gleiche Wurzeln in Frage kommen, schliessen wir aus, da derselbe nach Nr. 6 untersucht und erledigt werden kann. Den Fall, wo $r = 0$ ist, schliessen wir jedoch nicht aus, lassen also für r jeden möglichen reellen Werth, auch den Nullwerth zu.

Substituiren wir in die gegebene Gleichung $x_1 = s + r$, worin s reell oder imaginär sein möge; so kömmt

$$(1) \quad F(x_1) = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + A_{n-2} s^{n-2} + \ldots + A_1 s^1 + A_0 = 0$$

worin alle A Funktionen von r in Form algebraischer Potenzenreihen sind. Substituiren wir $x_2 = -s + r$; so kömmt

$$(2) \quad F(x_2) = A_n s^n - A_{n-1} s^{n-1} + A_{n-2} s^{n-2} - \ldots - A_1 s^1 + A_0 = 0$$

worin die A dieselben Werthe wie in $F(x_1)$ haben. Die Addition dieser beiden Gleichungen ergiebt nach Division mit 2

$$(3) \quad A_n s^n + A_{n-2} s^{n-2} + A_{n-4} s^{n-4} + \ldots + A_2 s^2 + A_0 = 0$$

Die Subtraktion jener beiden Gleichungen liefert nach Division mit $2s$ (was zulässig ist, da s nicht $= 0$ sein kann)

$$(4) \quad A_{n-1} s^{n-2} + A_{n-3} s^{n-4} + A_{n-5} s^{n-6} + \ldots + A_3 s^2 + A_1 = 0$$

Hierdurch haben wir zwei Gleichungen (3) und (4) erhalten, in denen s nur auf paaren Graden erscheint, die zweite aber um 2 Grad tiefer liegt als die erste. Multipliziren wir die Gleichung (3) mit A_{n-1} und die Gleichung (4) mit $A_n s^2$; so ergiebt die Subtraktion der beiden entstehenden Gleichungen

$$(5) \quad B_{n-2} s^{n-2} + B_{n-4} s^{n-4} + \ldots + B_2 s^2 + B_0 = 0$$

Multipliziren wir jetzt die Gleichung (4) mit B_{n-2} und die Gleichung (5) mit A_{n-1}; so ergiebt die Subtraktion Beider

$$(6) \quad C_{n-4} s^{n-4} + C_{n-6} s^{n-6} + \ldots + C_2 s^2 + C_0 = 0$$

Hierdurch sind zwei Gleichungen mit den paaren Graden $n - 2$ und $n - 4$ von s gewonnen, welche um 2 Grad tiefer liegen als die Gleichungen (3) und (4). Durch die Fortsetzung dieser Operationen, also durch Anwendung der ersten Operation mit (3) und (4) auf (5) und (6) ergiebt sich

$$(7) \quad D_{n-4} s^{n-4} + D_{n-6} s^{n-6} + \ldots + D_2 s^2 + D_0 = 0$$

und dann durch Anwendung der zweiten Operation mit (4) und (5) auf (6) und (7) ergiebt sich

$$(8) \quad E_{n-6} s^{n-6} + E_{n-8} s^{n-8} + \ldots + E_2 s^2 + E_0 = 0$$

also wiederum zwei Gleichungen unpaaren Grades $n - 4$ und $n - 6$, welche um 2 Grad tiefer liegen, als die Gleichungen (5) und (6).

Auf diese Weise gelangt man zuletzt zu zwei Gleichungen

$$M_4 s^4 + M_2 s^2 + M_0 = 0 \tag{9}$$

$$N_2 s^2 + N_0 = 0 \tag{10}$$

Aus der letzteren folgt

$$s = \sqrt{-\frac{N_0}{N_2}} \tag{11}$$

und sodann aus der ersteren die Endgleichung

$$M_0 N_0^2 - M_2 N_0 N_2 + M_0 N_2^2 = 0 \tag{12}$$

worin alle M und N Potenzenreihen von r darstellen.

Da die Gleichung (12) unbedingt reelle Wurzeln r enthält, während s reell oder imaginär sein kann: so ist mindestens eine dieser Wurzeln durch Näherungsrechnung bestimmbar. Wird der Werth dieser Wurzel ermittelt und nun in die Funktionen N_0 und N_2 der Gleichung (11) substituirt: so liefern die daraus sich ergebenden Werthe von s mit dem für r gefundenen Werthe zwei reelle Wurzeln $x_1 = r + s$ und $x_2 = r - s$ der gegebenen Gleichung, wenn $-\frac{N_0}{N_2}$ einen positiven Werth annimmt, und sie liefern zwei komplexe Wurzeln $x_1 = r + si$ und $x_2 = r - si$, wenn $-\frac{N_0}{N_2}$ einen negativen Werth annimmt.

10. Ich bemerke nebenbei, dass mittelst des vorstehenden Verfahrens eine Grösse s aus zwei algebraischen Gleichungen

$$A_{m+n} s^{m+n} + A_{m+n-1} s^{m+n-1} + \ldots + A_0 = 0$$

$$B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \ldots + B_0 = 0$$

eliminirt werden kann, indem man zunächst aus der zweiten durch Multiplikation mit s^m die Gleichung

$$B_n s^{m+n} + B_{n-1} s^{m+n-1} + \ldots + B_0 s^m = 0$$

herstellt, welche dann mit Hülfe der ersten Gleichung leicht zu einer Gleichung vom Grade $m + n - 1$ und hierauf zu immer tiefer liegenden Gleichungen führt.

11. Als Beispiel zu der in Nr. 9 vorgeführten Rechnung diene die Gleichung vierten Grades

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 40x + 25 = 0$$

Dieselbe ist aus den vier Wurzeln

$$x_1 = r + s = 3 + 2 = 5$$

$$x_2 = r - s = 3 - 2 = 1$$

$$x_3 = r + si = 1 + 2i$$

$$x_4 = r - si = 1 - 2i$$

konstruirt, welche sich durch die obige Rechnung folgendermaassen ergeben. Für die Gleichung vierten Grades von der Form

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

werden die beiden Gleichungen (9) und (10)

$$s^4 + (6r^2 + 3a_3 r + a_2)s^2 + (r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0$$
$$(4r + a_3)s^2 + (4r^3 + 3a_3 r^2 + 2a_2 r + a_1) = 0$$

Aus der letzten folgt statt Gleichung (11)

$$s^2 = -\frac{4r^3 + 3a_3 r^2 + 2a_2 r + a_1}{4r + a_3}$$

und durch Substitution von s^2 in die erste Gleichung statt Gleichung (12)

$$\begin{aligned} &64r^6 + 96a_3 r^5 + (32a_2 + 48a_3{}^2)r^4 \\ &\quad + (32a_2 a_3 + 8a_3{}^3)r^3 + (4a_2{}^2 + 4a_1 a_3 + 8a_2 a_3{}^2 - 16a_0)r^2 \\ &\quad + (2a_1 a_3{}^2 + 2a_2{}^2 a_3 - 8a_0 a_3)r + (a_1 a_2 a_3 - a_1{}^2 - a_0 a_3{}^2) = 0 \end{aligned}$$

Für die gegebenen Koeffizienten $a_3 = -8$, $a_2 = 22$, $a_1 = -40$, $a_0 = 25$ wird die letzte Gleichung

$$r^6 - 12r^5 + 59r^4 - 152r^3 + 220r^2 - 176r + 60 = 0$$

Eine reelle Wurzel dieser Gleichung ist $r = 1$, eine andere ist $r = 3$. Der Werth $r = 1$ liefert $s^2 = -4$, also $s = \mp 21$, mithin die beiden komplexen Wurzeln $x_3 = 1 + 2i$ und $x_4 = 1 - 2i$ der gegebenen Gleichung. Der Werth $r = 3$ liefert $s^2 = 4$, also $s = \mp 2$, mithin die beiden reellen Wurzeln $x_1 = 3 + 2 = 5$ und $x_2 = 3 - 2 = 1$ der gegebenen Gleichung.

12. Da jeder reelle Werth von r, welcher die Endgleichung befriedigt, einen reellen oder einen imaginären Werth s liefert, die gegebene Gleichung vom paaren n-ten Grade aber nicht mehr als n (reelle oder komplexe) Wurzeln haben kann: so ist es nicht möglich, dass die Endgleichung durch mehr als $\frac{n}{2}$ verschiedene reelle Werthe von r befriedigt werden kann: ihre übrigen Wurzeln müssen also diesen Werthen von r gleich, oder komplex, oder imaginär sein, sodass sie für die Bestimmung der Werthe von s nicht weiter in Betracht kommen.

13. Aus der vorstehenden Rechnung in Nr. 9 ergiebt sich der Schluss, dass jede Gleichung paaren Grades mindestens zwei reelle oder komplexe Wurzeln hat und, da eine Gleichung durch Ausscheidung einer Wurzel um einen Grad tiefer sinkt; so folgt ferner, dass jede Gleichung irgend eines paaren oder unpaaren Grades n genau n Wurzeln hat, welche theils reell, theils komplex sein können. (Für die triplexen und polyplexen Wurzeln hat die obige Rechnung keine Gültigkeit; ich habe in den „Zusätzen zur Zahlentheorie“ und in dem „Wesen der Mathematik“ gezeigt, dass eine jede Gleichung eine unbegrenzte Menge von polyplexen Wurzeln hat).

14. Für die verkürzte Gleichung vierten Grades, nämlich für $a_3 = 0$, nimmt die Endgleichung die einfache Form

$$(2r^2)^3 + 2(2r^2)^2 + (a_2{}^2 - 4a_0)(2r^2)^1 - a_1{}^2 = 0$$

also die Form einer Gleichung dritten Grades von $2r^2$ mit negativem konstantem Koeffizienten $-a_1{}^2$ an. Diese Gleichung wird unbedingt durch einen positiven reellen Werth $2r^2$ befriedigt, hat also bestimmt zwei reelle Wurzeln r mit entgegengesetzten Zeichen, welche vier reelle oder komplexe Werthe von s, also alle vier Wurzeln x der gegebenen Gleichung bedingen.

15. Die verkürzte Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 x + a_0 = 0$$

ergiebt für $x_1 = s + r$ und $x_2 = -s + r$ die beiden Gleichungen

$$s^3 + 3rs^2 + (3r^2 + a_1)s + (r^3 + a_1 r + a_0) = 0$$

$$-s^3 + 3rs^2 - (3r^2 + a_1)s + (r^3 a_1 r + a_0) = 0$$

Die Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert

$$2rs^2 + (r^3 + a_1 r + a_0) = 0$$

$$s^2 + (3r^2 + a_1) = 0$$

also

$$s^2 = -(3r^2 + a_1) = -\frac{r^3 + a_1 r + a_0}{3r}$$

mithin für r die Gleichung

$$(2r)^3 + a_1(2r) - a_0 = 0$$

und sodann für irgend einen hieraus sich ergebenden reellen Werth von r

$$s = \mp\sqrt{-(3r^2 + a_1)}$$

Die Endgleichung für r ist zwar ebenfalls eine verkürzte Gleichung dritten Grades, wie die gegebene Gleichung; diese beiden Gleichungen unterscheiden sich aber folgendermaassen. Wenn eine reelle Wurzel x der gegebenen Gleichung bekannt geworden ist: so lässt die Ausscheidung dieser Wurzel eine Gleichung zweiten Grades zurück, welche noch aufgelös't werden muss. Wenn dagegen eine reelle Wurzel r der Endgleichung gefunden ist; so bestimmt dieselbe mittelst der zugehörigen beiden Werthe von s sofort zwei Wurzeln x_1 und x_2 der gegebenen Gleichung und nach Ausscheidung dieser beiden Wurzeln auch die dritte. So hat man z. B. für die Gleichung

$$x^3 + 1 . x + 10 = 0$$

$$(2r)^3 + a_1(2r) - 10 = 0$$

$$s^2 = -(3r^2 + 1)$$

Da $r = 1$ eine Wurzel der Endgleichung und $s^2 = -(3 . 1^2 + 1) = -4$ für s die beiden Werthe $s = 2i$ ergiebt; so sind $x_1 = 1 + 2i$ und $x_2 = 1 - 2i$ zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung, nach deren Ausscheidung die Gleichung $x + 2 = 0$ zurückbleibt, welche die dritte Wurzel $x_3 = -2$ liefert.

16. Da die verkürzte Gleichung vierten Grades auf eine Endgleichung dritten Grades zurückführt und diese in eine verkürzte Gleichung dritten Grades umgewandelt werden kann; so hat eine bequeme Berechnung einer reellen Wurzel einer verkürzten Gleichung dritten Grades für

Gleichungen dritten und vierten Grades gleiches Interesse. Eine reelle Wurzel der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

ergiebt sich stets aus der Cardanischen Formel

$$x = \left\{- \frac{q}{2} \mp \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right\}^{1/3} + \left\{- \frac{q}{2} \pm \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right\}^{1/3}$$

worin zugleich die oberen oder die unteren Zeichen gelten. Denn ist p positiv oder auch negativ $= - p_1$, jedoch $\frac{p_1^3}{27} \leqq \frac{q^2}{4}$; so fordert diese Formel nur Quadratwurzeln aus einer positiven reellen Grösse und sodann Kubikwurzeln aus positiven oder negativen reellen Grössen, welche durch Rechnung leicht darzustellen oder aus Potenzentafeln zu entnehmen sind. Ist jedoch p negativ $= - p_1$ und $\frac{p_1^3}{27} > \frac{q^2}{4}$; so hat man

$$\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2} = \left(\frac{q^2}{4} - \frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2} = \left(\frac{p_1^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)^{1/2} i$$

Hierdurch wird der erste Theil von x, wenn wir denselben mit $X_1^{1/3}$ bezeichnen und in beiden Theilen die unteren Zeichen gelten lassen,

$$X_1 = - \frac{q}{2} + \left(\frac{p_1^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)^{1/2} i$$

$$= \left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2} \left\{ \frac{-q}{2\left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2}} + \frac{\left(\frac{p_1^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2}} \cdot i \right\}$$

und wenn wir die reelle Grösse

$$- \frac{q}{2\left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2}} = \cos\, \alpha$$

setzen (da sie quantitativ < 1 ist),

$$X_1 = \left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2} (\cos\, \alpha + \sin\, \alpha \cdot i) = \left(\frac{p_1^3}{27}\right)^{1/2} e^{\alpha i}$$

mithin

$$X_1^{1/3} = \left(\frac{p_1}{3}\right)^{1/2} e^{\frac{\alpha}{3} i} = \left(\frac{p_1}{3}\right)^{1/2} \left(\cos\, \frac{\alpha}{3} + \sin\, \frac{\alpha}{3} \cdot i\right).$$

Für den zweiten Theil von x ergiebt sich

$$X_2^{1/3} = \left(\frac{p_1}{3}\right)^{1/2} \left(\cos\, \frac{\alpha}{3} - \sin\, \frac{\alpha}{3} \cdot i\right)$$

also für $X_1^{1/3} + X_2^{1/3}$ die bekannte Formel

$$x = 2 \sqrt{\frac{p_1}{3}} \cdot \cos\, \frac{\alpha}{3}$$

worin der Werth von a aus trigonometrischen Tafeln zu bestimmen ist, also auch $\frac{\alpha}{3}$ einen aus solchen Tafeln sich ergebenden, folglich x einen leicht darstellbaren reellen Werth hat.

17. In Nr. 13 habe ich der polyplexen Wurzeln einer Gleichung erwähnt und bemerke dazu Folgendes. Eine reelle Wurzel stellt in räumlicher Anschauung eine in der Grundaxe OX liegende gerade Linie dar; eine komplexe Wurzel stellt eine in der Grundebene XY liegende, also eine deklinirte oder gedrehete, schräge gerade Linie dar, welche auch als die zweigliedrige Summe einer in der primären Richtung OX und einer in der sekundären Richtung OY liegenden Linie aufgefasst werden kann; eine triplexe Wurzel stellt eine im Grundraume XYZ liegende, also eine inklinirte (um die Grundaxe OX gewälzte) schräge Linie dar, welche auch als die dreigliedrige Summe einer in der primären Richtung OX, einer in der sekundären Richtung OY und einer in der tertiären Richtung OZ liegenden Linie aufgefasst werden kann. Hieraus geht hervor, dass die triplexen Wurzeln einer Gleichung dieselbe Wichtigkeit beanspruchen wie die reellen und die komplexen Wurzeln, da sie wie diese vollkommen anschauliche Grössen sind. Ich beschränke mich hier jedoch auf einige einfache Fälle.

Eine triplexe Grösse hat die Form

$$x e^{\varphi i} e^{\psi i_1} = x \cos \varphi + x \sin \varphi \cos \psi \,.\, i + x \sin \varphi \sin \psi \,.\, i\, i_1$$

Die linke Seite stellt die Grösse als ein Produkt von x, $e^{\varphi i}$ und $e^{\psi i_1}$ dar und sagt, dass die reelle Linie x um den Winkel φ deklinirt und darauf um den Winkel ψ inklinirt sei. Die rechte Seite stellt die triplexe Grösse in ternärer Form, nämlich als die Summe oder Reihe eines reellen, eines imaginären und eines überimaginären Gliedes dar. Jenes Produkt und diese Summe sind einander gleich, aber nicht identisch (indem Identität und Gleichheit zwei verschiedene Apobasen sind). Wegen dieser Nichtidentität können die beiden einander gleichen Grössen nicht nach den gewöhnlichen, für Identitäten gültigen Regeln behandelt werden: im Allgemeinen darf mit Produkten nur nach Multiplikationsgesetzen und mit Reihen nur nach Additionsgesetzen operirt werden. Demgemäss können, wenn die vorstehende Gleichung mit

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} = a \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \beta \,.\, i + a \sin \alpha \sin \beta \,.\, i\, i_1$$

multiplizirt werden soll, nur die triplexen Glieder miteinander multiplizirt werden, was zu dem Resultate

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} \,.\, x e^{\varphi i} e^{\psi i_1} = a x e^{(\alpha + \varphi) i} e^{(\beta + \psi) i_1}$$

$$= a x \cos(\alpha + \varphi) + a x \sin(\alpha + \varphi) \cos(\beta + \psi) \,.\, i + a x \sin(\alpha + \varphi) \sin(\beta + \psi) \,.\, i i_1$$

führt: es können aber nicht die ternären Reihen miteinander multiplizirt werden, was ein unverständliches und unrichtiges Resultat ergeben würde. Ternäre Reihen können nur addirt werden, indem die reellen, die imaginären und die überimaginären Glieder für sich addirt werden. Zwei triplexe Grössen können nur in der Weise addirt werden, dass sie in ternäre Reihen aufgelös't und diese addirt werden, was

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} + x e^{\varphi i} e^{\psi i_1}$$
$$= (a \cos\alpha + x\cos\varphi) + (a\sin\alpha\cos\beta + x\sin\varphi\cos\psi) i + (a\sin\alpha\sin\beta + x\sin\varphi\sin\psi)$$
ergiebt. Soll diese Summe als eine triplexe Grösse erscheinen: so muss dies mit Hülfe der allgemeinen Formel geschehen, dass
$$a + bi + cii_1 = xe^{\varphi i} e^{\psi i_1} = x\cos\varphi + x\sin\varphi\cos\psi . i + x\sin\varphi\sin\psi . ii_1$$
ist, wenn man
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \sin\psi = \frac{c}{\sqrt{b^2=c^2}}$$
hat, was natürlich zur Bestimmung der Werthe von φ und ψ die Zuhülfenahme trigonometrischer Tafeln erfordert.

18. Betrachten wir hiernach zunächst die Gleichung ersten Grades mit reellem konstanten Gliede $x + a = 0$. Für triplexe Werthe $pe^{\varphi i} e^{\psi i_1}$ der Wurzel x, also für $pe^{\varphi i} e^{\psi i_1} + a = 0$ ergiebt sich, wenn für das triplexe Glied seine ternäre Summe gesetzt wird,
$$(p\cos\varphi + a) + p\sin\varphi\cos\psi . i + p\sin\varphi\sin\psi . ii_1 = 0$$
und demnach
$$p\cos\varphi + a = 0 \qquad p\sin\varphi\cos\psi = 0 \qquad p\sin\varphi\sin\psi = 0$$
Die zweite und dritte Gleichung wird durch $\varphi = 0$ und auch durch $\varphi = \pi$ erfüllt. Für $\varphi = 0$ ergiebt die erste Gleichung $p = -a$, für $\varphi = \pi$ ergiebt sie $p = a$. Dabei bleibt ψ ganz willkürlich: die gegebene Gleichung hat also die Wurzel
$$x = -ae^{0i}e^{\psi i_1} \quad \text{oder auch} \quad = ae^{\pi i}e^{\psi i_1}$$
worin für ψ jeder beliebige Werth gesetzt werden kann. Hiernach würde die Gleichung ersten Grades $x + a = 0$ unendlich viel Wurzeln haben: allein, wennauch die triplexen Formen dieser Wurzeln verschieden sind: so sind doch die ternären Formen derselben sämmtlich einander gleich, nämlich für $\varphi = 0$
$$-ae^{0i}e^{\psi i_1} = -a\cos 0 - a\sin 0 . \cos\psi . i - a\sin 0 . \sin\psi . ii_1 = -a$$
und für $\varphi = \pi$ ebenfalls
$$ae^{\pi i}e^{\psi i_1} = a\cos\pi + a\sin\pi . \cos\psi . i + a\sin\pi . \sin\psi . ii_1 = -a$$

Unter dem Gesichtspunkte der Gleichheit hat also die Gleichung ersten Grades $x + a = 0$ nur die eine Wurzel $x = -a$.

19. Die verkürzte Gleichung zweiten Grades $x^2 + b = 0$ ergiebt durch Substitution der triplexen Wurzel $x = pe^{\varphi i}e^{\psi i_1}$ die drei Gleichungen
$$p^2\cos 2\varphi + b = 0$$
$$p^2\sin 2\varphi\cos 2\psi = 0$$
$$p^2\sin 2\varphi\sin 2\psi = 0$$

Die zweite und dritte Gleichung fordert $sin\, 2\varphi = 0$, wird also durch $\varphi = 0$ und auch durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erfüllt. Der Werth $\varphi = 0$ liefert nach der ersten Gleichung $p = \mp \sqrt{b}$, und danach ist eine triplexe Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = \mp \sqrt{b}\, e^{0i} e^{\psi i_1}$$

worin ψ ganz willkürlich bleibt. Ebenso stellt für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x = \mp \sqrt{b}\, e^{\frac{\pi}{2} i} e^{\psi i_1}$$

eine Wurzel dar. Diese Wurzeln, welche unendlich viel verschiedene triplexe Formen haben, reduziren sich aber doch unter dem Gesichtspunkte der Gleichheit auf zwei verschiedene Werthe $x = +\sqrt{b}$ und $x = -\sqrt{b}$, welche reell sind, wenn b positiv ist, dagegen imaginär, wenn b negativ ist.

20. Für die vollständige Gleichung zweiten Grades $x^2 + ax + b = 0$ ergiebt die Substitution $x = p e^{\varphi i} e^{\psi i_1}$ die drei Gleichungen (wovon wir die zweite und dritte durch den gemeinschaftlichen Faktor p dividirt haben)

$$p^2 \cos 2\varphi + a p \cos \varphi + b = 0$$
$$p \sin 2\varphi \cos 2\psi + a \sin \varphi \cos \psi = 0$$
$$p \sin 2\varphi \sin 2\psi + a \sin \varphi \sin \psi = 0$$

Die zweite und dritte kann durch $\varphi = 0$ erfüllt werden, wodurch die erste Gleichung $p^2 + ap + b = 0$ wird und die gewöhnlichen reellen oder komplexen Werthe von p ergiebt, denen alle in der triplexen Form $x = p e^{0i} e^{\psi i_1}$ mit willkürlichem ψ enthaltenen Wurzeln gleich sind.

Die zweite und dritte Gleichung kann aber auch durch

$$\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \quad \text{oder} \quad tang\, 2\psi = tang\, \psi$$

also sowohl durch $\psi = 0$, als auch durch $\psi = \frac{\pi}{3}$ und auch durch $\psi = -\frac{\pi}{3}$ erfüllt werden. Nehmen wir einmal $\psi = \frac{\pi}{3}$, wonach $\sin 2\psi = \sin \psi$ und $\cos 2\psi = -\cos \psi$ ist; so wird nach der zweiten Gleichung

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} = -\frac{a}{p} \frac{\cos \psi}{\cos 2\psi} = \frac{a}{p}$$

und wenn man $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ setzt,

$$\cos \varphi = \frac{a}{2p}, \quad \text{also} \quad \cos 2\varphi = \frac{a^2}{2p^2} - 1$$

Hierdurch wird die erste Gleichung

$$p^2\left(\frac{a^2}{2p^2}-1\right)+ap\frac{a}{2p}+b=0$$

mithin

$$p^2=a^2+b \quad \text{und} \quad p=\sqrt{a^2+b}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{2\sqrt{a^2+b}}$$

Durch diese Werthe von p, φ und ψ ist eine triplexe Wurzel

$$x=\sqrt{a^2+b}\; e^{\varphi i}\, e^{\frac{\pi}{3} i_1}$$

der gegebenen Gleichung gefunden, welche anzeigt, dass eine in der Grundaxe liegende Linie $\sqrt{a^2+b}$ um den Winkel ψ gedrehet und dann um den Winkel $\psi=\frac{\pi}{3}$ gewälzt werden soll. Als ternäre Summe setzt sich diese Wurzel aus einem in der Grundaxe liegenden Theile $\sqrt{a^2+b}\,.\cos\varphi$, einem in der Seitenaxe liegenden Theile $\sqrt{a^2+b}\,.\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3}$ und einem in der Höhenaxe liegenden Theile $\sqrt{a^2+b}\sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}$ zusammen.

Da man für p die beiden Werthe $\mp\sqrt{a^2+b}$ und für ψ die beiden Werthe $\pm\frac{\pi}{3}$ setzen kann; so folgt aus Vorstehendem, dass die Gleichung zweiten Grades vier triplexe Wurzeln hat. Die Verwirklichung dieser Wurzeln durch die vorstehende Rechnung setzt voraus, dass a^2+b einen positiven Werth habe, damit p reell sein könne, und dass $\frac{a}{2\sqrt{a^2+b}}$ quantitativ $\leqq 1$ sei, damit $\cos\varphi$ reell, also auch φ einen reellen Werth habe. Wären diese Bedingungen nicht erfüllt: so würde $\cos\varphi$ einen imaginären und φ einen komplexen Werth annehmen, also weitere Erörterungen erfordern.

21. Was die Gleichungen höherer Grade betrifft: so ergiebt jede solche Gleichung wie

$$x^n+ax^{n-1}+\ldots=0$$

durch die Substitution $x=pe^{\varphi i}e^{\psi i_1}$ in Folge der Umwandlung der triplexen Grössen in ternäre Summen eine aus reellen, imaginären und überimaginären Gliedern bestehende Reihe, und diese zerfällt in drei Gleichungen mit den drei reellen Unbekannten p, φ, ψ. Eliminirt man aus je zwei dieser Gleichungen die Grösse ψ; so bleiben zwei Gleichungen mit p und φ zurück. Eliminirt man aus diesen die Grösse φ; so ergiebt sich eine Endgleichung, welche nur p enthält. Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man alle möglichen Werthe von p. Die Substitution dieser Werthe in eine der Gleichungen, welche nur p und φ

enthalten, ergiebt eine Gleichung, deren Auflösung alle möglichen Werthe von φ liefert. Werden dann die zusammengehörigen Werthe von p und φ in eine Gleichung, welche p, φ und ψ enthält, eingesetzt: so führt die Auflösung dieser Gleichung für ψ zur Kenntniss der möglichen Werthe von ψ. Auf diese Weise finden sich durch ein zwar umständliches, aber ausführbares Verfahren die Wurzeln

$$x = p\, e^{\varphi i}\, e^{\psi i_1} = p \cos\varphi + p \sin\varphi \cos\psi \,.\, i + p \sin\varphi \sin\psi \,.\, i\, i_1$$

der gegebenen Gleichung als triplexes Produkt und als ternäre Summe.

22. Es ist schon erwähnt, dass ein aus einem primären, sekundären und tertiären Faktor bestehendes tertiäres Produkt $p\, e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1}$ nach den gewöhnlichen Regeln der Multiplikation nur mit einem ähnlichen Produkte multiplizirt werden kann, ferner dass eine aus einem reellen, imaginären und überimaginären Gliede bestehende ternäre Summe $a + bi + c\, i\, i_1$ nur zu einer ähnlichen Summe addirt werden kann, dass mithin, wenn die Addition zweier tertiären Produkte verlangt wird, diese Produkte zuvor in ternäre Summen aufgelös't werden müssen, und dass, wenn die Multiplikation zweier ternären Summen gefordert wird, diese Summen erst in tertiäre Produkte umzugestalten sind (s. Nr. 16). Die Nichterfüllung dieser Bedingungen liefert unrichtige Resultate.

Hieraus folgt zunächst, dass der Binomische Lehrsatz für triplexe Glieder seine Gültigkeit verliert. Denn dieser Lehrsatz würde für die zweite Potenz die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(p\, e^{\alpha i}\, e^{\alpha_1 i_1} + q\, e^{\beta i}\, e^{\beta_1 i_1})^2 \\
&= p^2 e^{2\alpha i} e^{2\alpha_1 i_1} + 2pq\, e^{(\alpha+\beta) i}\, e^{(\alpha_1+\beta_1) i_1} + q^2 e^{2\beta i} e^{2\beta_1 i_1} \\
&= [p^2 \cos 2\alpha + 2pq \cos(\alpha+\beta) + q^2 \cos 2\beta] \\
&\quad + [p^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha_1+\beta_1) + q^2 \sin 2\beta \cos 2\beta_1]\, i \\
&\quad + [p^2 \sin 2\alpha \sin 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha_1+\beta_1) + q^2 \sin 2\beta \sin 2\beta_1]\, i\, i_1
\end{aligned}$$

liefern. Da nun auch

$$\begin{aligned}
p\, e^{\alpha i}\, e^{\alpha_1 i_1} + q\, e^{\beta i}\, e^{\beta_1 i_1} &= (p \cos\alpha + q \cos\beta) + (p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos\beta_1)\, i \\
&\quad + (p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1)\, i\, i_1
\end{aligned}$$

ist; so hat man, wenn man die letztere Reihe $= x\, e^{\varphi i}\, e^{\psi i_1} = x \cos\varphi + x \sin\varphi \cos\psi \,.\, i + x \sin\varphi \sin\psi \,.\, i\, i_1$ setzt,

$$\begin{aligned}
x \cos\varphi &= p \cos\alpha + q \cos\beta \\
x \sin\varphi \cos\psi &= p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos\beta_1 \\
x \sin\varphi \sin\psi &= p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1
\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}
x^2 = (p \cos\alpha + q \cos\beta)^2 + (p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos\beta_1)^2 \\
+ (p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1)^2
\end{aligned}$$

Die zweite Potenz der gegebenen zweigliedrigen Gleichung ist aber zugleich

$$\begin{aligned}
(x\, e^{\varphi i}\, e^{\psi i_1})^2 &= x^2 e^{2\varphi i} e^{2\psi i_1} \\
&= x^2 \cos 2\varphi + x^2 \sin 2\varphi \cos 2\psi \,.\, i + x^2 \sin 2\varphi \sin 2\psi \,.\, i\, i_1
\end{aligned}$$

Wäre nun dieser Werth von $(x e^{\varphi i} e^{\psi i_1})^2$ dem vorhergehenden Werthe von $(p e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1} + q e^{\beta i} e^{\beta_1 i_1})^2$ gleich; so müsste man nach gewöhnlichen Regeln haben

$$x^2 \cos 2\varphi = p^2 \cos 2\alpha + 2pq \cos(\alpha + \beta) + q^2 \cos 2\beta$$

$$x^2 \sin 2\varphi \cos 2\psi = p^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha_1 + \beta_1) + q^2 \sin 2\beta \cos 2\beta_1$$

$$x^2 \sin 2\varphi \sin 2\psi = p^2 \sin 2\alpha \sin 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha_1 + \beta_1) + q^2 \sin 2\beta \sin 2\beta_1$$

Hieraus folgt nach gewöhnlichen Regeln

$$= (p^2 \cos 2\alpha + 2pq \cos(\alpha + \beta) + q^2 \cos 2\beta)^2 + (p^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha_1 + \beta_1) + q^2 \sin 2\beta \cos 2 + (p^2 \sin 2\alpha \sin 2\alpha_1 + 2pq \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha_1 + \beta_1) + q^2 \sin 2\beta \sin 2$$

Nach dem obigen Werthe von x^2 ist aber auch nach strengen Gesetzen

$$= (p \cos\alpha + q \cos\beta)^4 + (p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos\beta_1)^4 + (p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1)^4 + 2(p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 (p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos$$
$$+ 2(p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 (p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1)^2 + 2(p \sin\alpha \cos\alpha_1 + q \sin\beta \cos\beta_1)^2 (p \sin\alpha \sin\alpha_1 + q \sin\beta \sin\beta_1)^2$$

Diese beiden Ausdrücke für x^4 haben nur in gewissen speziellen Fällen, keineswegs allgemein, gleiche Werthe. Nehmen wir z. B. $p = 1$, $q = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, sodass $2\alpha = \pi$, $2\beta = \pi$, $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$, also $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha_1 = 0$, $\cos\alpha_1 = 1$, $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$, $\sin\beta_1 = 1$, $\cos\beta_1 = 0$, $\sin 2\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = -1$, $\sin 2\beta = 0$, $\cos 2\beta = -1$, $\sin(\alpha + \beta) = 0$, $\cos(\alpha + \beta) = -1$, $\sin(\alpha_1 + \beta_1) = 1$, $\cos(\alpha_1 + \beta_1) = 0$ ist: so ergiebt die erste Formel $x^4 = 4^2$, also $x = \sqrt{4} = 2$, die zweite Formel dagegen $x^4 = 4$, also $x = \sqrt{2}$. Diese beiden Werthe von x sind entschieden ungleich, der letztere, auf strenge Gesetze gegründete, ist der richtige, und der erstere, dem gewöhnlichen Verfahren entsprechende, ist der unrichtige: denn nach den angenommenen Werthen ist

$$\begin{aligned} p e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1} + q e^{\beta i} e^{\beta_1 i_1} &= e^{\frac{\pi}{2} i} e^{0 i_1} + e^{\frac{\pi}{2} i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} \\ &= \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha_1 . i + \sin\alpha \sin\alpha_1 . i i_1 \\ &\quad + \cos\beta + \sin\beta \cos\beta_1 . i + \sin\beta \sin\beta_1 . i i_1 \\ &= i + i i_1 = x e^{\varphi i} e^{\psi i_1} \end{aligned}$$

und die geometrische Anschauung lehrt sofort, dass $i + i i_1$ eine zwischen der sekundären Axe OY und der tertiären Axe OZ liegende Linie von der Länge $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ist, sodass $x = \sqrt{2}$, nicht aber $= 2$ ist.

Ein spezieller Fall, in welchem die beiden Werthe von x übereinstimmen, ergiebt sich durch $p = 1$, $q = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta_1 = 0$, $2\alpha = \pi$, $2\beta = \pi$, $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha_1 + \beta_1 = 0$, also $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha_1 = 0$, $\cos \alpha_1 = 1$, $\sin \beta = 1$, $\cos \beta = 0$, $\sin \beta_1 = 0$, $\cos \beta_1 = 1$, $\sin 2\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = -1$, $\sin 2\beta = 0$, $\cos 2\beta = -1$, $\sin(\alpha + \beta) = 0$, $\cos(\alpha + \beta) = -1$, $\sin(\alpha_1 + \beta_1) = 0$, $\cos(\alpha_1 + \beta_1) = 1$. Jetzt giebt die erste Formel $x^4 = 4^2$, also $x = 2$, und die zweite Formel ergiebt $x^4 = 2^4$, also ebenfalls $x = 2$. Dieser Fall entspricht der Gleichheit der beiden Glieder, sowie auch dem Mangel an tertiären Faktoren in dem Ausdruck $e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1} + e^{\beta i} e^{\beta_1 i_1} = i + i = 2i = x e^{\varphi i} e^{\psi i_1}$, also $x = 2$, ein Fall, der nach Nr. 32 des „Wesens der Mathematik“ als ein solcher bezeichnet ist, auf welchen die gewöhnlichen Rechnungsregeln anwendbar sind.

23. Die Unzulänglichkeit des Binomischen Lehrsatzes für triplexe Grössen hat eine wichtige Folge für die Behandlung der Gleichungen mit triplexen Wurzeln. Die Verkürzung einer Gleichung vom n-ten Grade durch Elimination des Gliedes vom $(n-1)$-ten Grade beruhet auf der Substitution eines Werthes $x_2 - \frac{a}{n}$ für x, indem die Potenzen jenes Werthes nach dem Binomischen Lehrsatze berechnet werden. Ist nun dieser Lehrsatz für Gleichungen mit triplexen Wurzeln unzulänglich: so ist es auch das letztere Verfahren, und daraus folgt, dass eine gegebene Gleichung, wenn ihre triplexen Wurzeln betrachtet werden sollen, auf gewöhnlichem Wege nicht verkürzt werden kann. Diess erklärt denn auch die in Nr. 18 und 19 nachgewiesene Thatsache, dass eine vollständige Gleichung zweiten Grades mehr verschiedene Wurzeln hat, als eine verkürzte Gleichung zweiten Grades, was unmöglich sein würde, wenn die vollständige Gleichung durch die Substitution $x = x_1 - \frac{a}{2}$ verkürzt werden könnte, da Diess ohne Einfluss auf die Anzahl der Wurzeln Beider sein würde.

Wenn man auf die Verkürzung Werth legt, muss sie auf die Endgleichung verschoben werden, da nur die reellen Wurzeln dieser Gleichung in Betracht kommen.

24. Eine zweite wichtige Folge der Unzulänglichkeit des gewöhnlichen Verfahrens bei der Multiplikation von Summen triplexer Glieder besteht darin, dass man eine solche Summe, also auch eine aus triplexen Gliedern bestehende Gleichung mit einem Faktor wie $x - a e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1}$ in gewöhnlicher Weise weder multipliziren, noch dividiren kann, dass man also aus einer solchen Gleichung eine gefundene triplexe Wurzel nicht nach gewöhnlichem Verfahren ausscheiden und dadurch die Gleichung auf einen tieferen Grad reduziren kann.

Legt man auf diese Reduktion Werth: so muss sie auf die Endgleichung mit ihren reellen Wurzeln beschränkt werden. Übrigens ist dieselbe auch hierfür keine Nothwendigkeit, da derselbe Weg, welcher zur Kenntniss irgend einer reellen Wurzel der Endgleichung führt, auch zur Kenntniss aller möglichen reellen Wurzeln leitet.

25. Das in Nr. 20 ff. beschriebene Verfahren zur Ermittelung triplexer Wurzeln setzt voraus, dass alle Koeffizienten der gegebenen Gleichung reelle Werthe haben. Wenn ein Koeffizient nicht reell wäre, würde es ganz unzulässig sein, denselben als binären Faktor $m + ni$ oder als ternären Faktor $m + ni + rii_1$ in Rechnung zu stellen, derselbe muss nothwendig in tertiärer Form $ae^{\alpha i}e^{\beta i_1}$ gegeben oder auf diese Form gebracht sein, um darauf mit dem zugehörigen Faktor $p^m e^{m\varphi i} e^{m\psi i_1}$ zu einer triplexen Grösse von der Form $ap^m e^{(\alpha + m\varphi)i} e^{(\beta + m\psi)i_1}$ vereinigt zu werden. Erst diese Grössen können in ternäre Summen

$$ap^m \cos(\alpha + m\varphi) + ap^m \sin(\alpha + m\varphi)\cos(\beta + m\psi)i + ap^m \sin(\alpha + m\varphi)\sin(\beta + m\psi)ii_1$$

zerlegt werden. Eine Addition der reellen, der imaginären und der überimaginären Glieder führt dann zu einer ternären Summe, welche in drei Gleichungen mit den drei unbekannten reellen Grössen p, φ, ψ, zerfällt.

26. In Nr. 32 des „Wesens der Mathematik“ habe ich gezeigt und durch die vorstehenden Resultate bestätigt, dass zwei Reihen von triplexen Gliedern nur a d d i r t werden können, wenn sie vorher in dreigliedrige Reihen von reellen, imaginären und überimaginären Gliedern aufgelöst und alsdann die gleichnamigen Glieder addirt werden, ferner, dass im Allgemeinen zwei Reihen von triplexen Gliedern oder von reellen, komplexen und triplexen Gliedern oder von reellen, imaginären und überimaginären Gliedern nur m u l t i p l i z i r t und auch nur p o t e n z i r t werden können, wenn sie vorher in triplexe Produkte umgewandelt sind und alsdann an ihnen die Multiplikation, bezw. Potenzirung vollzogen wird. Es lassen sich daher im Allgemeinen nur dreigliedrige Reihen mit reellen, imaginären und überimaginären Gliedern addiren und nur triplexe Produkte multipliziren und potenziren.

Spezielle Ausnahmefälle, wo das gewöhnliche Verfahren ausreicht, sind in der genannten Nummer bezeichnet.

Die dreigliedrige Summe $a + bi + cii_1$ stellt mit voller Anschaulichkeit eine Raumgrösse mit einer in der primären Axe OX liegenden Linie von der Länge a, einer in der sekundären oder Seitenaxe OY liegenden Linie von der Länge b und einer in der tertiären oder Höhenaxe OZ liegenden Linie von der Länge c und zugleich ein tertiäres Produkt $xe^{\varphi i}e^{\psi i_1}$, nämlich eine um den Winkel φ deklinirte (gedrehete) und um den Winkel ψ inklinirte (gewälzte) Linie von der Länge x mit ebenso grosser Deutlichkeit dar. Diese Anschaulichkeit geht in der Form der Q u a t e r n i o n $a + a_1 i_1 + bi + cii_1$ ganz verloren; denn der Faktor i_1 bezeichnet weder eine Längen-, noch eine Breiten-, noch eine Höhenrichtung, sondern die Wälzung einer in der Grundaxe liegenden Linie u m s i c h s e l b s t, und dennoch stellt $a + a_1 i_1$ nicht eine durch Anreihung zweier reeller Linien gebildete Linie von der Länge $a + a_1$ dar. Die Quaternion ist daher eine absolut u n v e r s t ä n d l i c h e, der

Anschauung und demzufolge der mathematischen Deutlichkeit widersprechende Formel, mit welcher auch nicht nach gewöhnlichen Regeln gerechnet werden kann. Eine rationelle Berücksichtigung der mit Fortschritt und Drehung in Verbindung zu setzenden Wälzung, welche eine Verallgemeinerung der in der Ebene sich vollziehenden primären und sekundären Prozesse ist, erfordert nothwendig die Einführung zweier neuer Zeichen $\dotplus$ (coplus) und $\div$ (cominus), wonach $i_1 = \sqrt{\div 1}$ ist. Mit diesen Zeichen muss aber nach besonderen, in Nr. 27 des „Wesens der Mathematik" vorgeführten Regeln operirt werden. In allen Fällen erfordern die triplexen Grössen ein von der Behandlung der reellen und der komplexen Grössen durchaus verschiedenes Verfahren.

Aus allem Diesen geht aber hervor, dass nicht nur die Theorie der Gleichungen, sondern jeder Zweig der Mathematik, welcher bisher nur für reelle und komplexe Grössen ausgebildet ist, z. B. die Determinantentheorie, die Substitutionstheorie, die Gruppentheorie, die Funktionsrechnung, für triplexe und polyplexe Grössen unzulänglich sind und eine Umgestaltung nach den vorerwähnten Prinzipien erfordern. Ohne diese Umgestaltung liefert die Einsetzung triplexer Werthe in die Glieder der diesen Theorien angehörigen Reihen und Funktionen und die Entwicklung nach gewöhnlichen Regeln falsche Resultate.

Die quadratische Zerfällung der Zahlen durch Differenzreihen.

1. Der nachstehende Aufsatz betrifft weder die von Gauss in den Disquisitiones arithmeticae ermittelten allgemeinen Merkmale der linearen Formen $pn + m$ und der quadratischen Formen $ax^2 - 2bxy - cy^2$ einer Primzahl q, noch die von Gauss in der Theoria residuorum quadraticorum vom Jahre 1828 durch die Zerfällung der Primzahlen $q = 8n + 1$ und $8n + 5$ in die Form $A^2 + B^2$ inaugurirte und von Eisenstein im Crelleschen Journale vom Jahre 1848 auf eine rationelle Theorie gebrachte Zerfällung der Primzahlen $q = 8n + 3$, $7n + 2$ und $7n + 4$ in die Form $A^2 + pB^2$ mittelst Binomialkoeffizienten, auch nicht die von mir in der Schrift „quadratische Zerfällung der Primzahlen" vom Jahre 1892 vervollständigte und für alle Primzahlen von der Form $q = pn + m$ verallgemeinerte Theorie der Zerfällung mittelst Binominalkoeffizienten, sondern die faktische Herstellung aller Formen von der Gestalt $aA^2 + bB^2 + cAB$, in welche sich eine beliebige ganze Zahl q zerlegen lässt, wenn entweder a, b, c, oder wenn A, B beliebige gegebene positive oder negative ganze Werthe haben.

Für die Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades $aA^2 + bB^2 + cAB = q$ in ganzen Zahlen habe ich bereits im fünften Abschnitte meiner „Unbestimmten Analytik" §. 100 bis 124 und für die Auflösung der Allgemeinen Gleichung $aA^2 + bB^2 + cAB + dA + eB = q$ in §. 125 bis 134 ausreichende Methoden mit Hülfe der Kettenbrüche entwickelt; der vorliegende Aufsatz hat jedoch den Zweck, diese Auflösungen lediglich mit Hülfe von Additionen aus Differenzreihen herzustellen und zugleich alle Auflösungen zu finden, für welche q kleiner als eine gegebene Zahl ist.

Offenbar brauchen für q nur positive Werthe betrachtet zu werden, da für ein negatives q die Umkehrung der Zeichen auf beiden Seiten der Gleichung $q = aA^2 + bB^2 + cAB$ eine Gleichung mit positivem q ergiebt.

Hiernach würde q alle diejenigen Werthe annehmen können, welche sich ergeben, wenn man jede der Zahlen A, B bezw. a, b, c die positive und negative unendliche Zahlenreihe . . . -3 -2 -1 0 1 2 3 . . .

durchlaufen lässt. Diese Operation ist jedoch wegen ihrer allseitigen Unbegrenztheit unausführbar, und es kömmt darauf an, dieselbe in die-jenigen Grenzen einzuschliessen, innerhalb welcher der Werth von q nothwendig liegen muss.

2. Wenn $c = 0$ ist und in der Gleichung $q = aA^2 + bB^2$ die Faktoren a, b gegeben, die Quadratzahlen A^2, B^2 aber gesucht sind, drehet es sich um die Wirkung der fortgesetzten Variation der Wurzeln von Quadraten um eine positive Einheit, also darum, dass die Grössen A und B durch die positive Zahlenreihe 0, 1, 2, 3 . . . geführt werden, (indem negative Werthe von A oder B für die Quadrate A^2 oder B^2 dieselbe Bedeutung haben wie positive Werthe). Wenngleich die Berechnung solcher Effekte keine Schwierigkeit hat; so wird die Potenzirung doch bei grossen Werthen der Wurzeln A, B, C . . . und der Faktoren a, b, c . . . mühsam. Diese Erschwerung beseitigt sich durch die Erwägung, dass die Grössen $p0^2$, $p1^2$, $p2^2$, $p3^2$, $p4^2$ . . . um die Werthe p, $3p$, $5p$, $7p$ . . . wachsen und dass diese Werthe um die konstante Differenz $2p$ variiren. Ausgehend von der Differenzreihe

$$2p \quad 2p \quad 2p \quad 2p \quad \ldots$$

ergiebt sich also aus dem Anfangsgliede p durch einfache Addition die zweite Differenzreihe

$$p \quad 3p \quad 5p \quad 7p \quad 9p \quad \ldots$$

und hieraus mittelst des Anfangsgliedes $p0^2 = 0$ durch einfache Addition als dritte Differenzreihe die Reihe der Grössen

$$p0^2 \quad p1^2 \quad p2^2 \quad p3^2 \quad p4^2 \quad p5^2 \quad \ldots$$

Hierdurch ist die Potenzirung auf Addition gegebener Grössen zurückgeführt. Da die zweite Differenzreihe einfach genug ist und ohne Mühe niedergeschrieben werden kann, indem ihre Glieder fortgesetzt um $2p$ wachsen; so ist die erste Differenzreihe mit den konstanten Gliedern $2p$ entbehrlich; man kann also die Reihe der p-fachen Quadrate sofort durch Addition aus der zweiten Differenzreihe herstellen. Indem man die Glieder der ersten Reihe mit 1, 2, 3 . . . und die der zweiten Reihe mit 0, 1, 2, 3 . . . numerirt, hat man

$$\begin{array}{rcccccc}
n = & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
(2n-1)p = & & p & 3p & 5p & 7p & \ldots \\
pn^2 = & 0 & p & 4p & 9p & 16p & \ldots \\
= & p0^2 & p1^2 & p2^2 & p3^2 & p4^2 & \ldots \\
n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 &
\end{array}$$

Hat die erste Reihe n Glieder, ist also ihr letztes Glied $(2n-1)p$ und das darauf folgende Glied $(2n+1)p$; so ist das letzte Glied der zweiten Reihe, welches um n Glieder vom ersten absteht, $= pn^2$. Die Nummer n eines Gliedes bezeichnet sofort die Funktion pn^2, welche dem durch Addition berechneten Werthe dieses Gliedes gleich ist.

So hat man s. B. für $p = 7$, also $2p = 14$, als Reihenanfang (wie er auch bei den späteren abgebrochenen Reihen zu verstehen ist, indem sich dieselben, auch wenn die Punkte ... weggelassen sind, unbeschränkt fortsetzen)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \\
 & 7 & & 21 & & 35 & & 49 & & 63 & & 77 & \\
0 & & 7 & & 28 & & 63 & & 112 & & 175 & & 252 \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6
\end{array}$$

worin die zweite Reihe die Werthe von

$$7 \cdot 0^2 \quad 7 \cdot 1^2 \quad 7 \cdot 2^2 \quad 7 \cdot 3^2 \quad 7 \cdot 4^2 \quad 7 \cdot 5^2 \quad 7 \cdot 6^2$$

darstellt. Will man die untere Reihe mit $7 \cdot 8^2 = 448$ beginnen: so muss man die obere Reihe mit $(2n+1)p = (2 \cdot 8 + 1)7 = 17 \cdot 7 = 119$ anfangen lassen, was dann

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & \\
 & & 119 & & 133 & & 147 & & 161 & \\
 & 448 & & 567 & & 700 & & 847 & & 1008 \\
= & 7 \cdot 8^2 & & 7 \cdot 9^2 & & 7 \cdot 10^2 & & 7 \cdot 11^2 & & 7 \cdot 12^2 \\
 & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12
\end{array}$$

ergiebt. Soll die untere Reihe mit irgend einem Werthe k beginnen, die obere Reihe aber die Werthe aA^2 für $A = 0, 1, 2, 3 \ldots$ durchlaufen: so bleibt die obere Reihe $p, 3p, 5p, 7p \ldots$ bestehen. So hat man z. B. für $p = 7$, $k = 9$

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & & & & 7 & & 21 & & 35 & & 49 & & 63 \\
7n^2 + 9 & = & 9 & & 16 & & 37 & & 72 & & 121 & & 184 \\
n & = & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5
\end{array}$$

indem die zweite Reihe die Werthe von $7n^2 + k$ für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ darstellt.

Für ein negatives p kehren die Glieder der ersten Reihe und für ein negatives k der Werth von k ihr Zeichen um: im Übrigen bleibt es bei den Additionsprozessen. So hat man für $p = -7$, $k = 9$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\
 & & & -7 & & -21 & & -35 & & -49 & \\
-7n^2 + 9 & = & 9 & & 2 & & -19 & & -54 & & -103 \\
n & = & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4
\end{array}$$

und für $p = 7$, $k = -9$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\
 & & & 7 & & 21 & & 35 & & 49 & \\
7n^2 - 9 & = & -9 & & -2 & & 19 & & 54 & & 103 \\
n & = & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4
\end{array}$$

Lässt man jetzt das Anfangsglied k der Reihe $pn^2 + k$ variiren, indem man dasselbe $= p_1 n_1^2$ setzt, worin p_1 konstant ist und n_1 die Zahlenreihe 0, 1, 2, 3 ... durchläuft: so ergiebt sich dadurch, dass man nachundnach jedes Glied der Reihe $pn^2 + k$ zum Anfangsgliede einer Reihe nimmt, für welche die Vorderreihe die Werthe p_1, $3p_1$, $5p_1$, $7p_1$ ... durchläuft, aus der in einer horizontalen Linie sich erstreckenden, eindimensionalen Reihe pn^2 eine in einer Ebene sich ausbreitende zweidimensionale Reihe $pn^2 + p_1 n_1^2$, deren vertikale Glieder wir für die positiven Variationen von n_1 nach unten kehren. Dieses zweidimensionale System hat die sich horizontal und vertikal fortsetzende Form

		$n =$	0	1	2	3
				p	$3p$	$5p$
n_1	$p_1 n_1^2$	$pn^2 =$	$p0^2$	$p1^2$	$p2^2$	$p3^2$
‖	‖					
0	$p_1 0^2$		$p0^2 + p_1 0^2$	$p1^2 + p_1 0^2$	$p2^2 + p_1 0^2$	$p3^2 + p_1 0^2$
p_1						
1	$p_1 1^2$		$p0^2 + p_1 1^2$	$p1^2 + p_1 1^2$	$p2^2 + p_1 1^2$	$p3^2 + p_1 1^2$
$3p_1$						
2	$p_1 2^2$		$p0^2 + p_1 2^2$	$p1^2 + p_1 2^2$	$p2^2 + p_1 2^2$	$p3^2 + p_1 2^2$
$5p_1$						
3	$p_1 3^2$		$p0^2 + p_1 3^2$	$p1^2 + p_1 3^2$	$p2^2 + p_1 3^2$	$p3^2 + p_1 3^2$

deren horizontale Reihen sich durch die Addition der Werthe von p, $3p$, $5p$ ... und deren vertikale Reihen sich durch die Addition der Werthe von p_1, $3p_1$, $5p_1$ ... ergeben. So erhält man für $7n^2 + 9n_1^2$ oder für $p = 7$, $p_1 = 9$

		$n =$	0	1	2	3
				7	21	35
n_1	$p_1 n_1^2$	$pn^2 =$	0	7	28	63
‖	‖					
0	0		0	7	28	63
9						
1	0		9	16	37	72
27						
2	36		36	43	64	99
45						
3	81		81	88	109	144

Hierin lehren z. B. die der Zahl 37 zugehörigen Werthe $n = 2$, $n_1 = 1$, dass $37 = 7 \,.\, 2^2 + 9 \,.\, 1^2$ ist.

Ist p oder p_1 negativ: so kehren die Glieder der horizontalen, bezw. der vertikalen Reihe ihr Zeichen um: man hat also für $7n^2 - 9n_1$ oder für $p = 7$, $p_1 = -9$

			$n =$	0	1	2	3
					7	21	35
n_1		$p_1 n_1^2$	$p n^2 =$	0	7	28	63
‖		‖					
0		0		0	7	28	63
	-9						
1		-9		-9	-2	19	54
	-27						
2		-36		-36	-29	-8	27
	-45						
3		-81		-81	-74	-53	-18

Für $-7n^2 + 9n_1$ oder $p = -7,\ q = 9$ hat man

			$n =$	0	1	2	3
					-7	-21	-35
n_1		$p_1 n_1^2$	$p n^2 =$	0	-7	-28	-63
‖		‖					
0		0		0	-7	-28	-63
	9						
1		9		9	2	-19	-54
	27						
2		36		36	29	8	-27
	45						
3		81		81	74	53	18

Die Werthe von $-pn^2 + p_1 n_1^2$ sind die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Werthe von $pn^2 - p_1 n_1^2$.

Für $-pn^2 - p_1 n_1^2$ ergeben sich die negativen Werthe von $pn^2 + p_1 n_1^2$.

Nach Vorstehendem wissen wir die Horizontalreihe für $\mp pn^2$, die Vertikalreihe für $\mp p_1 n_1^2$, sowie die zweidimensionale Reihe für $q = \mp pn^2 \mp p_1 n_1^2$ durch Addition zu bilden und schreiben demgemäss im Nachfolgenden diese Reihen ohne die Differenzen lediglich mit den Nummern n und n_1 ihrer Glieder nieder. In der Formel $q = aA^2 + bB^2$ tritt bezw. a, A, n, B an die Stelle von $\mp p$, n, $\mp p_1$, n_1, worin $A = n$ und $B = n_1$ die Gliedernummern 0, 1, 2, 3 ... der horizontalen, bezw. vertikalen Reihe bedeuten.

Da sich diese Reihen ins Unendliche fortsetzen; so kömmt es für die praktische Rechnung darauf an, diese Reihen auf diejenigen Glieder zu beschränken, in welchen ein gegebener Werth von q nothwendig liegen muss, wenn die Gleichung $q = aA^2 + bB^2$ überhaupt möglich ist.

3. Wenn a und b positiv (auch $= 0$) sind; so kann $q = aA^2 + bB^2$ nur positive Werthe haben und da $aA^2 = q - bB^2$ ist; so muss $aA^2 \leqq q$, mithin $A \leqq \sqrt{\frac{q}{a}}$ sein. Ebenso muss wegen $bB^2 = q - aA^2$

$B \leqq \sqrt{\frac{q}{b}}$ sein. Hieraus folgt, dass, sobald in horizontaler oder vertikaler Richtung der zweidimensionalen Reihe ein Werth $> q$ erreicht wird, die Rechnung in dieser Richtung nicht weiter fortgesetzt zu werden braucht, und dass sie überhaupt in keiner horizontaler Richtung über einen Werth von A oder n, welcher $> \sqrt{\frac{q}{a}}$ ist, und in keiner vertikalen Richtung über einen Werth von B oder n_1, welcher $> \sqrt{\frac{q}{b}}$ ist, hinaus fortgesetzt zu werden braucht. Demgemäss muss ein gegebener Werth von q nothwendig in einem endlich begrenzten Reihengebiete liegen, alle möglichen Werthe von q können daher und eventuell die Unmöglichkeit der gegebenen Gleichung nachgewiesen werden, welcher letztere Fall vorliegt, wenn der gegebene Werth von q nicht in dem abgegrenzten Gebiete erscheint. Zugleich geht aus dieser Gruppe hervor, welche Werthe q^1, die kleiner oder gleich dem gegebenen q sind, die Gleichung $q^1 = aA^2 + bB^2$ für gegebene Werthe von a und b zu erfüllen vermögen, da alle diese und keine anderen Zahlen $\leqq q$ in die Form $aA^2 + bB^2$ zerfällt werden können.

Wäre z. B. die Gleichung $64 = 7A^2 + 9B^2$ zu erfüllen; so muss $A \leqq \sqrt{\frac{64}{7}} \leqq 3$ und $B \leqq \sqrt{\frac{64}{9}} \leqq 2$ sein, und alle Werthe von $7A^2 + 9B^2$ sind auszuschliessen, welche den Werth 64 übersteigen. Die lediglich in Betracht kommenden Werthe sind also

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3
0	0	7	28	63
1	9	16	37	—
2	36	43	64	—

Da unter diesen Werthen die Zahl 64 und nur einmal für $n = A = 2$ und $n_1 = B = 2$ vorkömmt; so ist die Gleichung möglich und zwar in der einzigen Form $64 = 7 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^2$. Zugleich ersieht man, dass die Gleichung $q = 7A^2 + 9B^2$ überhaupt 10 verschiedene Auflösungen $\leqq 64$ hat, welche den Werthen $q = 0, 7, 9, 16, 28, 36, 37, 43, 63, 64$ entsprechen, dass also diese Gleichung für die 55 dazwischen liegenden Werthe $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18$ u. s. w. unmöglich ist.

Für die Gleichung $81 = 1A^2 + 5B^2$ ist $A \leqq \sqrt{\frac{81}{1}} \leqq 9$ und $B \leqq \sqrt{\frac{81}{5}} \leqq 4$, mithin

n^1 ‖	$n =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	5	6	9	14	21	30	41	54	69	—
2	20	21	24	29	36	45	56	69	—	—
3	45	46	49	54	61	70	81	—	—	—
4	80	81	84	89	—	—	—	—	—	—

Die Gleichung kann also in 3-facher Weise durch $81 = 1 \,.\, 1^2 + 5 \,.\, 4^2$, durch $81 = 1 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 3^2$ und durch $81 = 1 \,.\, 9^2 + 5 \,.\, 0^2$ erfüllt werden, und die Gruppe zeigt alle Werthe, welche $\leqq 81$ sind, an, die sich in die Form $1\,A^2 + 5\,B^2$ zerfällen lassen.

Dass man in den vorstehenden und den nachfolgenden Formeln immer voraussetzen kann, dass a und b kein gemeinschaftliches Maass haben, leuchtet ein, da ein solches Maass auch ein Faktor von q sein müsste, also aus der gegebenen Gleichung ausgeschieden werden könnte.

4. Wenn von den beiden Faktoren a und b einer negativ ist, wenn also $q = a\,A^2 - b\,B^2$ sein soll; so gestalten sich die Sachen wesentlich anders. Es giebt nun für A und B kein Maximum, sondern nur ein Minimum: denn diese Gleichung fordert, dass $A \geqq \sqrt{\frac{q}{a}}$ und dass auch $A \geqq B\sqrt{\frac{b}{a}}$ oder $B \leqq A\sqrt{\frac{a}{b}}$ sei. Die Werthe von A und B können also ins Unendliche wachsen und für die höchsten Beträge Auflösungen der gegebenen Gleichung herbeiführen. In der zweidimensionalen Zahlenreihe

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3
0	$a\,0^2 - b\,0^2$	$a\,1^2 - b\,0^2$	$a\,2^2 - b\,0^2$	$a\,3^2 - b\,0^2$
1	$a\,0^2 - b\,1^2$	$a\,1^2 - b\,1^2$	$a\,2^2 - b\,1^2$	$a\,3^2 - b\,1^2$
2	$a\,0^2 - b\,2^2$	$a\,1^2 - b\,2^2$	$a\,2^2 - b\,2^2$	$a\,3^2 - b\,2$
3	$a\,0^2 - b\,3^2$	$a\,1^2 - b\,3^2$	$a\,2^2 - b\,3^2$	$a\,3^2 - b\,3^2$

beginnt also jede Horizontalreihe mit einem negativen Werthe, welcher allmählich in positive Werthe übergeht, wogegen jede Vertikalreihe mit einem positiven Werthe beginnt, welcher nachundnach in negative Werthe übergeht. Alle negativen Werthe und alle positiven Werthe, welche $> q$ sind, kommen nicht in Betracht, und sobald sie eintreten, kann die Rechnung in der betreffenden Richtung geschlossen werden. So hat man z. B. für $q = 3\,A^2 - 7\,B^2$, worin $b > a$ ist, wenn wir vorläufig q unbestimmt lassen,

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	12	27	48	75	108	147
1	− 7	− 4	5	20	41	68	101	140
2	− 28	− 25	− 16	− 1	20	47	80	119
3	− 63	− 60	− 51	− 36	− 15	12	45	84
4	− 112	− 109	− 100	− 85	− 64	− 37	− 14	35
5	− 175	− 172	− 163	− 148	− 127	− 100	− 67	− 28

und wenn wir die negativen Werthe ausschliessen

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	12	27	48	75	108	147
1	.	.	5	20	41	68	101	140
2	.	.	.	.	20	47	80	119
3	.	.	.	.	.	12	45	84
4	.	.	.	.	.	.	.	35

Für $q = 7A^2 - 3B^2$, worin $b < a$ ist, würde sich die Horizontalreihe in eine Vertikalreihe und die Vertikalreihe in eine Horizontalreihe mit entgegengesetzten Zeichen verwandeln: man würde erhalten

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3	4	5
0	0	7	28	63	112	175
1	− 3	4	25	60	109	172
2	− 12	− 5	16	51	100	163
3	− 27	− 20	1	36	85	148
4	− 48	− 41	− 20	15	64	127
5	− 75	− 68	− 47	− 12	37	100

und bei Unterdrückung der negativen Glieder

n_1 ‖	$n =$ 0	1	2	3	4	5
0	0	7	28	63	112	175
1		4	25	60	109	172
2			16	51	100	163
3			1	36	85	148
4				15	69	127
5					37	100

Für $b = a$ muss $q = aA^2 - aB^2$ durch a theilbar sein; man kann also dafür die Form $q = A^2 - B^2$ betrachten. Dieselbe ergiebt

n_1 | $n =$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	4	9	16	25
1	-1	0	3	8	15	24
2	-4	-3	0	5	12	21
3	-9	-8	-5	0	7	16
4	-16	-15	-12	-7	0	9
5	-25	-24	-21	-16	-9	0

und bei Unterdrückung der negativen Glieder

n_1 | $n =$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	4	9	16	25
1		0	3	8	15	24
2			0	5	12	21
3				0	7	16
4					0	9
5						0

So ist z. B. 9 sowohl $= 3^2 - 0^2$, als auch $= 5^2 - 4^2$ und z. B. 16 sowohl $= 4^2 - 0^2$, als auch $= 5^2 - 3^2$. Wenn in der Gleichung $q = aA^2 - bB^2$ das positive Glied vorangestellt wird, folgen in horizontaler Richtung die positiven auf die negativen Glieder und in vertikaler Richtung die negativen auf die positiven Glieder. Stellt man das negative Glied voran; so behalten die Glieder von $q = -aA^2 + bB^2$ die Werthe von $q = aA^2 - bB^2$, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen, was auch die Umkehrung der Folge der positiven und negativen Glieder nach sich zieht. Wir werden den nachstehenden Untersuchungen die Form $q = aA^2 - bB^2$ zu Grunde legen.

Für $q = aA^2 - bB^2$ durchschreitet jede Horizontalreihe, indem sie mit einem negativen Werthe beginnt, ein positives Minimum. Ist in irgend einer dieser Reihen für bestimmte Werthe von A und B das erste positive, also das Minimalglied $= r$, also $aA^2 - bB^2 = r$; so wird das nächstfolgende Glied unzweifelhaft grösser sein als q, wenn in $a(A+1)^2 - bB^2 = aA^2 - bB^2 + a(2A+1) = r + a(2A+1)$ das Glied $a(2A+1) > q$ oder $A > \frac{q}{2a} - \frac{1}{2}$ also zuverlässig auch dann, wenn $A > \frac{q}{2a}$ ist. Hieraus geht hervor, dass, sobald A den Werth von $\frac{q}{2a}$ überschritten hat, lediglich das erste positive Glied in Betracht kömmt, welches möglicherweise $<$, $=$ und $> q$ sein kann, dass jedoch das nächstfolgende Glied unfehlbar $> q$ ist, dass also die Rechnung in den späteren Reihen, für welche $A = n > \frac{q}{2a}$

ist, auf die Ermittlung des ersten positiven Gliedes beschränkt werden kann.

Soll z. B. $3A^2 - 7B^2 = 20$ sein; so kommen in allen Reihen, sobald $A > \frac{20}{2 \cdot 3} > \frac{10}{3} > 3$ ist, nur die ersten positiven Glieder in Betracht, indem alle folgenden Glieder > 20 sein werden. Die zu berechnende Gruppe ist also

	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
0	0	3	12					
1			5	20				
2					20			
3						12		
4							35	
.								
.								
.								

(Der vorstehende Satz gilt auch dann noch, wenn $aA^2 - bB^2 = 0$ ist, weil jedenfalls $a(A+1)^2 - bB^2 = a(2A+1) > a\left(\frac{2q}{2a}+1\right) > q + a > q$ ist).

Es kömmt jetzt in Frage, welches Gesetz die Abstände der Minimalwerthe von q in horizontaler und vertikaler Richtung befolgen. Dasselbe ergiebt sich folgendermaassen. Wenn für bestimmte Werthe von A und $B-1$ $q = aA^2 - b(B-1)^2$ ein solches Minimum ist, also q positiv und $aA^2 = bB^2 = -q_1$ negativ ist, und wir schreiten nun in der horizontalen Reihe, in welcher $-q_1$ liegt, vorwärts; so sei $a(A+m)^2 - bB^2 = q_2$ das erste sich einstellende positive Glied, mithin das vorhergehende Glied $a(A+m-1)^2 - bB^2 = -q_3$ negativ; so wird, falls $b > a$ ist, das auf q_2 folgende v e r t i k a l e Glied $a(A+m)^2 - b(B+1)^2$ n e g a t i v $= -q_4$ sein; mithin wird q_2 das in dem Abstande von m horizontalen Gliedern und einem vertikalen Gliede auf q folgende Minimalglied sein. Denn wegen des negativen $-q_3$ ist $m < B\sqrt{\frac{b}{a}} + 1 - A$, also da $\sqrt{\frac{b}{a}} > 1$ ist, auch $m < B\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - A$ oder $< (B+1)\sqrt{\frac{b}{a}} - A$. Wegen des positiven q_2 aber ist $m > B\sqrt{\frac{b}{a}} - A$ und die Negativität von $-q_4$, welche $m < (B+1)\sqrt{\frac{b}{a}} - A$ verlangt, ist bereits soeben nachgewiesen. Demnach ist q_2 ein Minimalglied, sobald wegen der Werthe von q_2 und $-q_3$

$$m > B\sqrt{\frac{b}{a}} - A \text{ und } < B\sqrt{\frac{b}{a}} - A + 1$$

ist. Wenn sich dieses Verhältniss von Positivität und Negativität der Grössen q_2 und q_4 um ein Glied weiter erstreckt, wenn also

$$m + 1 > B\sqrt{\frac{b}{a}} - A \text{ und } < B\sqrt{\frac{b}{a}} - A + 1$$

ist; so ist $a(A + m + 1)^2 - bB^2$ das nächst erste Minimalglied.

Fassen wir für die Gleichung $q = pA^2 - p_1B^2 = pn^2 - p_1n_1^2$ die zweite Horizontalreihe ins Auge, für welche $B = n_1$ konstant $= 1$ ist; so wird für den Fall, wo $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ eine ganze Zahl c ist, wenn $A = n$ die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots x$ durchläuft, welche zunächst eine Reihe negativer Werthe für q erzeugt, der Übergang von den negativen zu den positiven Werthen mittelst eines Nullgliedes erfolgen; denn man hat $px^2 - p_1 1^2 = 0$ für $x = \sqrt{\frac{p_1}{p}} = c$. Im Allgemeinen ist $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ keine ganze Zahl, sondern $= c + \gamma$ worin c eine ganze Zahl und γ einen Bruch < 1 bedeutet, es kann also (ausser für $n = 0$ und $n_1 = 0$) kein Nullglied erscheinen, der erste und zugleich kleinste positive Minimalwerth von q in der zweiten Horizontalreihe, welcher $px^2 - p_1 1^2 > 0$, also $x > \sqrt{\frac{p_1}{p}}$ erfordert, wird mithin für $x = c + 1$ erreicht.

In jeder Horizontalreihe könnte ein Nullglied erscheinen, wenn man für n nicht nur ganze, sondern auch gebrochene Werthe zuliesse. In der n_1-ten Horizontalreihe, also für einen beliebigen ganzen Werth von n_1, würde dann auf das durch $pn^2 - p_1n_1^2$ bestimmte Glied ein Nullwerth $px^2 - p_1n_1^2 = 0$ folgen, wenn $x = n_1\sqrt{\frac{p_1}{p}} = n_1(c+\gamma)$, also gleich dem n_1-fachen von $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = c + \gamma$ genommen wird. Das auf dieses Nullglied zunächst folgende ganze positive Glied, welches einen Minimalwerth von q in der Reihe für n_1 darstellt, erfordert dann für x den zunächst über $n_1(c + \gamma)$ liegenden ganzen Werth. In den aufeinander folgenden Reihen oder für $n_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots$ haben also die Minimalwerthe von q die Stellen, welche den ganzen Werthen $n = 0(c+\gamma)+y_0,\ 1(c+\gamma)+y_1,\ 2(c+\gamma)+y_2,\ 3(c+\gamma)+y_3$ u. s. w. entsprechen, worin $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ die Ergänzungen zu der nächst höheren ganzen Zahl anzeigen (der erste Minimalwerth von q in der ersten Horizontalreihe ist die auf das erste Nullglied folgende Zahl). Die Grösse γ ist entweder rational, oder irrational. Ist sie irrational, hat sie z. B. für $p = 3$, $p_1 = 7$, da $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}527 \ldots$, den Werth $\gamma = 0{,}527 \ldots$, worin $c = 1$ ist; so ergeben sich folgende Werthe, welche auch für jeden beliebigen ganzen Werth von c, also für $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = c + 0{,}527 \ldots$ gültig sind.

$$\begin{array}{clcl}
n_1 & & n & \\
\Vert & & \Vert & \\
0 & 0(c+\gamma) = 0 & 1 & \\
 & & & \} \; c \\
1 & 1(c+\gamma) = c + 0{,}527\ldots & c+1 & \\
 & & & \} \; c+1 \\
2 & 2(c+\gamma) = 2c + 1{,}054\ldots & 2c+2 & \\
 & & & \} \; c \\
3 & 3(c+\gamma) = 3c + 1{,}581\ldots & 3c+2 & \\
 & & & \} \; c+1 \\
4 & 4(c+\gamma) = 4c + 2{,}108\ldots & 4c+3 &
\end{array}$$

Für das Beispiel $q = 3A^2 - 7B^2$, also für $c = 1$, sind diese Werthe von $n = 1, 2, 4, 5, 7 \ldots$ ganz dem obigen Systeme aller möglichen Werthe von q, nämlich den Minimalwerthen $q = 3, 5, 20, 12, 35 \ldots$ entsprechend.

Ist γ rational: so stellen sich in den betreffenden Horizontalreihen Nullglieder ein. So erhält man z. B. für $q = 4A^2 - 9B^2$, also $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

n_1	$n = 0$	1	2	3	4	5	6
0	0	4					
1	-9	-5	7				
2			-20	0			
3				-45	-17	19	
4						-44	.

mithin

$$\begin{array}{clcl}
n_1 & & n & \\
\Vert & & \Vert & \\
0 & 0(c+\gamma) = 0 & 0 & \\
 & & & \} \; c+1 \\
1 & 1(c+\gamma) = c + 0{,}5 & c+1 & \\
 & & & \} \; c \\
2 & 2(c+\gamma) = 2c + 1 & 2c+1 & \\
 & & & \} \; c+1 \\
3 & 3(c+\gamma) = 3c + 1{,}5 & 3c+2 & \\
 & & & \} \; c \\
4 & 4(c+\gamma) = 4c + 2 & 4c+2 &
\end{array}$$

Allgemein, geht aus Vorstehendem hervor, dass, *während die Grösse $n_1 = B$ nachundnach um eine Einheit wächst, die Grösse $n = A$ bald um den Betrag c, bald um den Betrag $c+1$, aber um keinen anderen zunimmt.* Aus dem Werthe von γ oder direkt aus dem Werthe von $n_1(c+\gamma) = n_1\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \sqrt{\frac{n_1^2 p_1}{p}} = d + \delta$ lässt sich bestimmen, ob in der n_1-ten Horizontalreihe die Grösse n um c, oder ob sie um $c + 1$ wächst. Übrigens wechseln, wenn γ irrational ist, die Abstände c und $c + 1$ im Allgemeinen in unregelmässiger Weise.

Die Minimalwerthe von q ergeben sich hiernach auf folgende Weise. Ist $pn^2 - p_1 n_1^2$ irgend ein solcher Werth in der n_1-ten Horizontalreihe, also $pn^2 - p_1(n_1 + 1)^2$ der in der $(n_1 + 1)$ten Horizontalreihe darunter stehende negative Werth; so bestimmt man zunächst in der letzteren Reihe den Werth von $p(n + c)^2 - p_1(n_1 + 1)^2$. Ist derselbe positiv oder gleich null; so stellt er den nächsten Minimalwerth von q dar. Ist derselbe aber negativ; so ist $p(n + c + 1)^2 - p_1(n_1 + 1)^2$ der nächste Minimalwerth von q. Auf dieselbe Weise ergiebt sich der dritte, vierte und jeder spätere Minimalwerth von q.

Wollte man die Berechnung der beiden aufeinander folgenden Werthe, von welchen nur einer der Minimalwerth sein kann, durch Zuhülfenahme der Formel $\sqrt{\frac{n_1^2 p_1}{p}} = d + \delta$, welche für $n_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots$ die Werthe $\sqrt{\frac{0 p_1}{p}} = d_0 = 0, \sqrt{\frac{p_1}{p}} = d_1 + \delta_1, \sqrt{\frac{2^2 p_1}{p}} = d_2 + \delta_2$, $\sqrt{\frac{3^2 p_1}{p}} = d_3 + \delta_3$ u. s. w. ergiebt, indem man $\sqrt{\frac{n_1^2 p_1}{p}} = d_{n_1} + \delta_{n_1} = n_1(c + \gamma)$ hat, worin alle Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{n_1} < 1$ sind; so würde Diess für $q = 3A^2 - 7B^2$ die Werthe

$$
\begin{array}{clcl}
n_1 & & n & \\
\| & & \| & \\
0 & \sqrt{\frac{0 . 7}{3}} = 0 & 1 = d_0 + 1 & \\
 & & & \big\} \; d_1 \\
1 & \sqrt{\frac{1 . 7}{3}} = 1{,}52 \ldots & 2 = d_1 + 1 & \\
 & & & \big\} \; d_2 - d_1 \\
2 & \sqrt{\frac{2^2 . 7}{3}} = 3, \ldots & 4 = d_2 + 1 & \\
 & & & \big\} \; d_3 - d_2 \\
3 & \sqrt{\frac{3^2 . 7}{3}} = 4, \ldots & 5 = d_3 + 1 & \\
 & & & \big\} \; d_4 - d_3 \\
3 & \sqrt{\frac{4^2 . 7}{3}} = 6, \ldots & 6 = d_4 + 1 &
\end{array}
$$

u. s. w. ergeben, welche mit den obigen übereinstimmen, aber nur der Berechnung je eines Werthes von q bedürfen, indem der horizontale Fortschritt von einem Minimalwerthe zu dem nächsten stets durch die Differenz $d_{n_1+1} - d_{n_1}$ gemessen wird, worin die Grössen d_{n_1} und d_{n_1+1} in einer bestimmbaren Weise variiren.

Wenn $\sqrt{\frac{n_1{}^2 p_1}{p}} = d_{n_1}$, also $\delta_{n_1-1} = 0$ wird, was jedoch nur für rationale Werthe von $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \frac{g}{f}$, also für $\frac{p_1}{p} = \frac{g^2}{f^2}$ oder, da p und p_1 keinen gemeinschaftlichen Faktor haben werden, für $p = f^2$ und $p_1 = g^2$ möglich ist, muss an dieser Stelle d_{n_1} statt $d_{n_1} + 1$ gesetzt werden.

Wenn $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ eine ganze Zahl g ist, was $p = 1$ und $p_1 = g^2$ voraussetzt; so ist fortwährend d_{n_1} statt $d_{n_1} + 1$ zu setzen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, dass mit Hülfe der Grössen d der Werth des einem beliebigen Werthe n_1 zugehörigen n durch $n = d_{n_1} + 1$ fest bestimmt ist, indem man für das entsprechende Minimum von q

$$q = p(d_{n_1} + 1)^2 - p_1 n_1{}^2$$

(für einen Nullwerth aber $0 = p d_{n_1}{}^2 - p_1 n_1{}^2 = p \frac{n_1{}^2 p_1}{p} - p_2 n_1{}^2$) hat. So ergiebt sich für das letzte Beispiel, wo $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 4$, $d_4 = 6$, also n bezw. $= 1, 2, 4, 5, 7$ ist, die obige Reihe der Minimalwerthe von q durch die Formeln $3 \,.\, 1^2 - 7 \,.\, 0^2 = 3$, $3 \,.\, 2^2 - 7 \,.\, 1^2 = 5$, $3 \,.\, 4^2 - 7 \,.\, 2^2 = 20$, $3 \,.\, 5^2 - 7 \,.\, 3^2 = 12$, $3 \,.\, 7^2 - 7 \,.\, 6^2 = 35$. Für $n_1 = 100$ würde man $\sqrt{\frac{100^2 \,.\, 7}{3}} = \sqrt{\frac{70000}{3}} = 152, \ldots$, also $d_{n_1} = 152$, $d_{n_1} + 1 = 153$, mithin $q = 3(153)^2 - 7 \,.\, 100^2 = 227$ und für $n_1 = 10000$ würde man $\sqrt{\frac{10000^2 \,.\, 7}{3}} = 15275, \ldots$, $d_{n_1} = 15275$, $d_{n_1} + 1 = 15276$, mithin $q = 3(15276)^2 - 7(10000)^2 = 68528$ erhalten.

Durch dieses, wie durch das vorher bezeichnete Verfahren können alle möglichen Werthe, welche q annehmen kann, und es können daher alle möglichen Auflösungen der Gleichung $q = pA^2 - p_1 B^2$, worin q einen gegebenen Werth hat, sowie alle dieser Gleichung genügenden Werthe von q, welche kleiner, als ein gegebener Werth von q sind, bis zu jedem beliebig hohen Werthe von B und A hinauf gefunden werden.

Die aufeinander folgenden Minimalwerthe von q können bald steigen, bald fallen; beachtenswerth sind jedoch folgende Fälle.

Wenn $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ eine ganze Zahl g, also $p = 1$ und $p_1 = g^2$ ist, hat man für die Gleichung $q = A^2 - g^2 B^2$, da nun $d_1 = g$, $d_2 = 2g$, $d_3 = 3g$, $d_4 = 4g$ u. s. w. ist, die Minimalwerthe $1 \,.\, g^2 - g^2 \,.\, 0^2 = g^2$, $1(2g)^2 - g^2 \,.\, 1^2 = 3g^2$, $1(3g)^2 - g^2 \,.\, 2^2 = 5g^2$, $1(4g)^2 - g^2 \,.\, 3^2 = 7g^2$ u. s. w., allgemein, $1((x + 1)g)^2 - g^2 x^2 = (2x + 1)g^2$. Die Minimalwerthe steigen fortgesetzt, überschreiten also jeden gegebenen

Werth von q. Ein solcher gegebener Werth von q liegt mithin in einer endlichen Reihe von Minimalwerthen, und daraus folgt, dass die Gleichung $q = A^2 - g^2 B^2$ nur eine endliche Menge von Auflösungen hat, welche durch das vorstehende Verfahren sämmtlich gefunden werden können.

Wenn $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ ein rationaler Bruch mit dem Nenner 2, also ein Bruch $\frac{u}{2}$ mit dem unpaaren Zähler u, folglich $2^2 = 4$ und $p_1 = u^2$ ist: so hat man, wenn man $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \frac{u}{2} = v + \frac{1}{2} = v + 0{,}5 = v{,}5$ schreibt, indem $u = 2v + 1$ ist, für die Gleichung $q = 2^2 A^2 - u^2 B^2$, da nun $v{,}5 = d_1 + \delta_1$, $2(v{,}5) = (2v + 1) = d_2$, $3(v{,}5) = (3v + 1)\,5 = d_3 + \delta_3$, $4(v{,}5) = (4v + 2) = d_4$ u. s. w. ist, die Minimalwerthe $4 \,.\, 1^2 - u^2 \,.\, 0^2 = 4$, $4(v + 1)^2 - u^2 \,.\, 1^2$, $4(2v + 1)^2 - u^2 \,.\, 2^2$, $4(3v + 2)^2 - u^2 \,.\, 3^2$, $4(4v + 2)^2 - u^2 \,.\, 4^2$, $4(5v + 3)^2 - u^2 \,.\, 5^2$, $4(6v + 3)^2 - u^2 \,.\, 6^2$, $4(7v + 4)^2 - u^2 \,.\, 7^2$ u. s. w. So erhält man z. B. für $p = 4$, $p_1 = 9$, $u = 3$, $v = 1$, also für $q = 4A^2 - 9B^2$, die Minimalwerthe $4 \,.\, 1^2 - 9 \,.\, 0^2 = 4$, $4 \,.\, 2^2 - 9 \,.\, 1^2 = 7$, $4 \,.\, 3^2 - 9 \,.\, 2^2 = 0$, $4 \,.\, 5^2 - 9 \,.\, 3^2 = 19$, $4 \,.\, 6^2 - 9 \,.\, 4^2 = 0$, $4 \,.\, 8^2 - 9 \,.\, 5^2 = 31$, $4 \,.\, 9^2 - 9 \,.\, 6^2 = 0$, $4 \,.\, 11^2 - 9 \,.\, 7^2 = 43$ u. s. w. In den letzteren Minimen folgen unausgesetzt Nullwerthe auf grössere Werthe. Die Gleichung $0 = 4A^2 - 9B^2$ hat also unendlich viel Auflösungen (wenn $0 = 4A_1{}^2 - 9B_1{}^2$ eine Auflösung ist, ist auch $0 = 4(xA_1)^2 - 9(xB_1)^2$ für jedes x eine solche). Abgesehen von den Nullwerthen, welche q haben kann, so wachsen die Minimalwerthe von q über jede Grenze hinaus, indem von den Werthen 7, 19, 31, 43 ... jeder folgende um 12 grösser ist, als der vorhergehende. Hieraus folgt, dass die Gleichung $q = 4A^2 - 9B^2$, wenn $q > 0$ ist, nur eine endliche Menge von Auflösungen hat, welche nach dem obigen Verfahren sämmtlich darzustellen sind. Das Nämliche ergiebt sich für jeden anderen unpaaren Werth von u, z. B. für $u = 5$, also $p_1 = 5^2 = 25$, und $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ indem zwischen den aufsteigenden Minimen 11, 31, 51, 71 ... die Nullwerthe $4 \,.\, 5^2 - 25 \,.\, 2^2 = 0$, $4 \,.\, 10^2 - 25 \,.\, 4^2 = 0$, $4 \,.\, 15^2 - 25 \,.\, 6^2 = 0$ u. s. w. liegen.

Allgemein, hat, wenn rational $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = v + \frac{g}{f} = \frac{fv + g}{f}$, also $p = f^2$, $p_1 = (fv + g)^2$ ist, die Gleichung $0 = f^2 A^2 - (fv + g)^2 B^2$ unendlich viel Auflösungen, für welche $A = x\,(fv + g)$ und $B = xf$ ist, während für $q > 0$ die Gleichung $q = f^2 A^2 - (fv + g)^2 B^2$ nur endlich viel, nach dem obigen Verfahren darstellbare Auflösungen hat.

Wenn $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ irrational $= d_1 + \delta_1$ also $n_1 \sqrt{\frac{p_1}{p}} = d_{n_1} + \delta_{n_1}$ und $q = p(d_{n_1} + 1)^2 - p_1 n_1{}^2$ ist; so entsteht die Frage, ob von einer gewissen Höhe der Zahl n_1 an alle Werthe von $p(d_{n_1} + 1)^2 - p_1 n_1{}^2$

einen gegebenen Werth von q übersteigen, oder ob einzelne dieser Werthe $> q$ und andere $\leq q$ sein können. Da $n_1 \sqrt{\frac{p_1}{p}} = d_{n_1} + \delta_{n_1} = n_1(d_1 + \delta_1) = n_1 d_1 + n_1 \delta_1$ ist; so wird, da $\delta_1 > 0$ und < 1, also $n_1 \delta_1 > 0$ und $< n_1$ ist, $d_{n_1} = n_1 d_1 + x$ und $d_{n_1} + 1 = n_1 d_1 + x + 1$ sein, worin x die in $n_1 \delta_1$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, welche jedenfalls $< n_1$ ist. Hiernach wird nun $p(d_{n_1} + 1)^2 - p_1 n_1^2 > q$ sein, wenn $(d_{n_1} + 1)^2 > \frac{p_1}{p} n_1^2 + \frac{q}{p}$, also wenn

$$(n_1 d_1 + x + 1)^2 > (d_1 + \delta_1)^2 n_1^2 + \frac{q}{p}$$

ist, worin $x + 1$ höchstens den Werth n_1, also $n_1 d_1 + x + 1$ höchstens den Werth $n_1 d_1 + n_1 = (d_1 + 1) n_1$ erreichen, jedoch nicht dauernd behaupten, sondern auch wieder auf kleinere Werthe herabsinken kann. Dieser Bedingung kann nun bei den aufsteigenden Werthen von n_1 wegen der Veränderlichkeit von x bald genügt werden, bald nicht, man kann also ohne eingehendere Untersuchung weder behaupten, dass von einem gewissen hohen Werthe von n_1 an alle Werthe von $pA^2 - p_1 B^2$ einen gegebenen Werth von q überschreiten, noch dass sie diesen Werth unterschreiten, der Werth von $pA^2 - p_1 B^2$ wird sich also stellenweise heben und senken, und demzufolge scheint es, dass die Gleichung $pA^2 - p_1 B^2 = q$ je nach den besonderen Werthen von p und p_1 endlich viel, auch unendlich viel, auch keine Auflösung haben könne. Zur Unterstützung dieser Meinung dienen Fälle, wie der, wonach die Funktion $1A^2 - 7B^2$, für welche $\sqrt{\frac{p_1}{p}} = \sqrt{7} = 2{,}645751\ldots$, also $d_1 = 2$, $\delta_1 = 0{,}645751\ldots$ ist, für $n_1 = 48$, $d_{48} + \delta_{48} = 48\sqrt{7} = (96 + 30) + \delta_{48}$, mithin $d_{48} = 96 + 30 = 126$, $d_{48} + 1 = 127$ trotz der grossen Werthe von A und B den sehr kleinen Minimalwerth $127^2 - 7.48^2 = 1$ annimmt. Eine genauere Untersuchung ergiebt folgendes Resultat.

Da x die in $n_1 \delta_1$ enthaltene ganze Zahl, also, wenn in Dezimalform $n_1 \delta_1 = x + 0{,}\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots$ und $y = 0{,}\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots$ ist, $x = n_1 \delta_1 - y$ gesetzt werden kann, worin $y < 1$ ist; so wird die vorstehende Bedingung

$$(n_1 d_1 + n_1 \delta_1 + 1 - y)^2 - n_1^2 (d_1 + \delta_1)^2 > \frac{q}{p}$$

und wenn die Quadrate entwickelt werden

$$2 n_1 d_1 (n_1 \delta_1 + 1 - y) + (n_1 \delta_1 + 1 - y)^2 - 2 n_1^2 d_1 \delta_1 - n_1^2 \delta_1^2 > \frac{q}{p}$$

$$2 n_1 d_1 (1 - y) + (n_1 \delta_1 + 1 - y)^2 - n_1^2 \delta_1^2 > \frac{q}{p}$$

und da die beiden letzten Glieder auf der linken Seite

$$= (2 n_1 \delta_1 + 1 - y)(1 - y)$$

sind,

$$(1-y)\left[2n_1(d_1+\delta_1)+(1-y)\right]>\frac{q}{p}$$

Hierin hat $d_1+\delta_1$ den konstanten Werth von $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$, es muss also

$$n_1>\frac{q}{2(1-y)\sqrt{pp_1}}-\frac{1-y}{2}\sqrt{\frac{p_1}{p}}$$

sein. Gegen das mit n_1 fortwährend wachsende Glied $2n_1(d_1+\delta_1)$ wird das Glied $1-y$, welches stets <1 ist, endlich verschwinden, sodass für genügend grosse Werthe von n_1 nahezu

$$(1-y)\,2n_1\sqrt{\frac{p_1}{p}}>\frac{q}{p}$$

oder

$$n_1>\frac{q}{2(1-y)\sqrt{pp_1}}$$

sein wird. Je grösser $y=0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ ist, desto kleiner ist $1-y$ und desto grösser $\frac{1}{1-y}$. Nun hat für

$$\delta_1=0,\alpha\beta\gamma\ldots,\quad n_1\delta_1=x+0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$$

offenbar die Grösse $0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots=y$ ein Maximum, welches irgend einem Werthe von n_1 angehört, also für keinen noch so grossen Werth von n_1 überschritten werden kann. und welches stets <1 bleibt. Substituiren wir dieses Maximum von y in die letztere Bedingung, wodurch auch $\frac{1}{1-y}$ einen bestimmten Maximalwerth annimmt; so leuchtet ein, dass diese Bedingung für wachsende n_1 von einem bestimmten Werthe an dauernd erfüllt wird. (Könnte das Maximum von $y=1$ werden, was jedoch nicht möglich ist; so würde die Bedingung $n_1>\infty$ lauten). Für Werthe von n_1, welche den eben gedachten Werth überschreiten, ist mithin $pA^2-p_1B^2$ grösser als der gegebene Werth von q, die Gleichung $pA^2-p_1B^2=q$ kann also nur eine endliche Menge von Auflösungen haben. Allerdings kann die Anzahl dieser Auflösungen unter Umständen, nämlich in den Fällen, wo das Maximum von $y=0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ sich dem Einheitswerthe nähert, sich der unendlichen Anzahl nähern, ohne doch die absolute Unendlichkeit zu erreichen.

Obgleich dem Maximum y ein bestimmter endlicher Werth zugeschrieben werden muss; so ist es dennoch nicht bestimmbar, weil es nach der Formel $y=0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$, welche aus $n_1\sqrt{\frac{p_1}{p}}=n_1(d+\delta_1)$ $=n_1d_1+n_1\delta_1=n_1d_1+n_1d_1+n_1\,.\,0,\alpha\beta\gamma\ldots$ und demnach aus $n_1\delta_1=n_1\,.\,0,\alpha\beta\gamma\ldots=x+0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ entspringt, aus einer unendlichen Reihe $0,\alpha\beta\gamma\ldots$ oder $0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ bestimmt werden müsste, was unmöglich ist, weil diese Reihe oder der vollständige Reihenwerth von $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ nicht darstellbar ist. Man muss also schliessen, dass die gegebene Gleichung unter Umständen unzählige Auflösungen haben kann und dass ein solcher Fall vorliegt, wenn das Maximum y gegen den Einheitswerth konvergirt.

Dass für endliche Reihen $0, \alpha\beta\gamma \ldots \omega$, welche rationalen Werthen von $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ zukommen, das Maximum y stets bestimmbar ist, leuchtet ein. Denn wenn diese Reihe aus r Gliedern besteht: so erzeugt $n_1 = 10^r$ für y einen Nullwerth, indem man $10^r . 0, \alpha\beta\gamma \ldots \omega = \alpha\beta\gamma \ldots \omega + 0$ hat. Für $n_1 = 10^r + 1$, $10^r + 2$, $10^r + 3$ u. s. w. wiederholen sich für y dieselben Werthe wie für $n_1 = 1, 2, 3$ u. s. w. Das Maximum von y entspricht mithin einem zwischen 1 und 10^r liegenden Werthe von n_1.

Ich bemerke noch, dass wenn für einen hohen Werth von n_1 die Gleichung $pA_1^2 - p_1B_1^2 = q$ erfüllt ist: so wird für einen grösseren Werth $n_1 + m$ die Gleichung $pA_2^2 - p_1B_2^2 = q$ erfüllt, also $pA_2^2 - p_1B_2^2 = pA_1^2 - p_1B_1^2$ sein, wenn die den Werthen n_1 und $n_1 + m$ angehörigen Werthe y_1 und y_2 in der Näherungsbeziehung

$$(1 - y^2)(n_1 + m) = (1 - y_1)n_1$$

stehen, wenn man also angenähert

$$1 - y_2 = \frac{(1 - y_1)n_1}{n_1 + m}$$

oder

$$y_2 = \frac{m + y_1 n_1}{m + n_1}$$

hat. Im Wesentlichen muss man sich bei der Auflösung der Gleichung $pA^2 - p_1B^2 = q$ mit der Bestimmung derjenigen Werthe von A und B begnügen, welche unterhalb gegebener beliebig hoher Grenzen liegen. Diese Werthe, sowie alle Werthe von A und B für die Gleichung $pA^2 + p_1B^2 = q$ sind nach dem Vorstehenden darstellbar und aus der Gesammtzahl der durch das obige Verfahren sich ergebenden Werthe zu entnehmen. Wenngleich dieses Verfahren die gesuchten Werthe von A und B nicht durch direkte Operationen herstellt, sondern eine Auslese von Werthen, worunter sich die gesuchten befinden, liefert; so hat dasselbe den grossen Vorzug, dass diese Auslese alle Auflösungen enthält, für welche q kleiner ist, als der dafür angenommene Werth.

5. Betrachten wir jetzt die Gleichung $q = aA^2 + bB^2 + cAB$; so sind zwei Voraussetzungen zu erwägen: erstens, dass A und B gleiche Zeichen haben, also das Produkt AB positiv ist, zweitens, dass A und B ungleiche Zeichen haben, also AB negativ ist. Beide Fälle sind durch die Formel $q = aA^2 + bB^2 \mp cAB$ dargestellt, wenn man unter A und B ihre absoluten Werthe versteht. Alle möglichen Werthe von

q ergeben sich dann durch die Variation von A und B längs der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3 ... Bezeichnen wir, wie vorhin, das allgemeine Glied dieser Reihe für A mit n und für B mit n_1, setzen also allgemein $A = n$ und $B = n_1$, schreiben auch p, p_1, p_2 für $a, b, \mp c$; so erhält man alle Werthe von $q = pn^2 + p_1 n_1^2 + p_2 n n_1$ für ein konstantes $B = n_1$ mittelst Addition auf Grund der Differenzreihen

$$\begin{array}{ccccccc} & p+p_1 n^2+p_2 n n_1 & & p2^2+p_1 n^2+p_2 2 n n_1 & & p3^2+p_1 n^2+p_2 3 n n_1 \\ p+p_1 n^2+p_2 n n_1 & & 3p+p_2 n n_1 & & 5p+p_2 n n_1 & \\ & 2p & & 2p & & \end{array}$$

Allgemein, ist die Differenz der Glieder einer horizontalen Reihe oder das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe $p(2n+1)+p^2 n n_1$, worin n variabel und n_1 konstant ist. Lässt man jetzt n_1 variiren und hält n konstant; so bildet sich unter jedem Gliede der anfänglichen Horizontalreihe eine Vertikalreihe, deren Glieder die Differenz $p_1(2n_1+1)+p_2 n n_1$ haben, worin n_1 variabel und n konstant ist. Die in horizontaler und vertikaler Richtung sich erstreckende Gesammtheit aller möglichen Werthe von q, welche durch Addition herzustellen ist, beginnt also in folgender Weise.

$$\begin{array}{lllll} n = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & & \\ & 0 & p1^2 & p2^2 & p3^2 \\ & p_1 1^2 & p1^2+p_2 1^2+p_2 1.1 & p2^2+p_1 1^2+p_2 2.1 & p3^2+p_1 1^2+p_2 \\ & p_1 2^2 & p1^2+p_1 2^2+p_2 1.2 & p2^2+p_1 2^2+p_2 2.2 & p3^2+p_1 2^2+p_2 \\ & p_1 3^2 & p1^2+p_1 3^2+p_2 1.3 & p2^2+p_1 3^2+p_2 2.3 & p3^2+p_1 3^2+p_2 \end{array}$$

Wenn p positiv ist; so nehmen offenbar die Glieder jeder Horizontalreihe mit konstantem $B = n_1$ endlich positive wachsende Werthe an. Wenn p negativ ist, werden diese Werthe wachsend negativ, sodass die möglichen positiven Werthe sämmtlich in den Anfangsgliedern liegen. Wenn von p und p_1 der eine Faktor positiv und der andere negativ ist, kann das positive Glied pn^2 oder $p_1 n_1^2$ stets vorangestellt werden, wenn man lauter Horizontalreihen mit wachsenden positiven Endgliedern haben will. Wenn p und p_1 beide negativ (also p_2 positiv) ist; so werden die Endglieder jeder Horizontalreihe wachsend negativ, die positiven Glieder liegen vorn, eine solche Reihe kann aber unter Umständen mit fallenden negativen Gliedern beginnen, welche in steigende positive Glieder übergehen, die ein Maximum erreichen, um alsdann zu fallen und in wachsende negative Glieder überzugehen.

Wenn p_1 positiv ist, werden die Glieder jeder Vertikalreihe mit konstantem $A = n$ endlich wachsend positiv, und wenn p_1 negativ ist, werden sie wachsend negativ. Wenn also p und p_1 beide positiv sind, werden alle Horizontal- und Vertikalreihen endlich wachsend positiv, gleichviel, welches Zeichen p_2 hat, während, wenn p und p_1 beide negativ sind, beide Reihen endlich wachsend negativ werden.

Die negativen Glieder sind, da q positiv sein soll, ohne Bedeutung; man hat sich auf die positiven Glieder zu beschränken und nach einem möglichst einfachen Verfahren zu streben, welches alle Glieder ergiebt, die $\leqq q$ sind. Aus Vorstehendem ist ersichtlich, dass hierbei der Werth von p_2 und überhaupt der von $p_2 n n_1$ nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Wenn p und p_1 positiv sind: so stellen sich die Werthe von $pn^2 + p_1 n_1^2 \mp p_2 n n_1$ für jedes q, welches einen gegebenen endlichen Werth nicht überschreitet, in einer endlichen Gruppe von Gliedern dar. So hat man z. B. für $q = 1A^2 + 5B^2 + 3AB$, wenn q den Werth 81 nicht überschreiten soll,

n_1 ‖ $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	5	9	15	23	33	45	59	75	.	.
2	20	27	36	47	60	75	.	.	.	.
3	45	55	67	81	.	.	.	.	.	.
4	80	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Keine anderen, als die vorstehenden Werthe von q können die Gleichung $q = 1A^2 + 5B^2 + 3AB$ erfüllen, und die Gruppe liefert für alle Werthe von q, welche $\leqq 81$ sind, die Auflösungen. So hat man für $q = 36$ die beiden Auflösungen $36 = 1.6^2 + 5.0^2 + 3.6.0$ und $1.2^2 + 5.2^2 + 3.2.2$

Für $q = 1A^2 + 5B^2 - 3AB$ ergiebt sich die Gruppe mit anfangs fallenden und später steigenden Gliedern

n_1 ‖ $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	.	.	.
1	5	3	3	5	9	15	23	33	45	59	75	.	.
2	20	15	12	11	12	15	20	27	36	47	60	75	.
3	45	37	31	27	25	25	27	31	37	45	55	67	81
4	80	69	60	53	48	45	44	45	48	53	60	69	80
5	.	.	.	.	81	75	71	69	69	71	75	81	.

Hiernach hat man auch für $q = 36$ die beiden Auflösungen $36 = 0.6^2 + 5.0^2 - 3.6.0$ und $36 = 1.8^2 + 5.2^2 - 3.8.2$, sodass, wenn man für A und B positive und negative Werthe zulässt, die Gleichung $36 = 1A^2 + 5B^2 + 3AB$ folgende acht Auflösungen hat: $1.6^2 + 5.0^2 + 3.6.0$, $1.2^2 + 5.2^2 + 3.2.2$, $1(-6)^2 + 5(-0)^2 + 3(-6)(-0)$, $1(-2)^2 + 5(-2)^2 + (-2)(-2)$, $1.6^2 + 5(-0)^2 + 3.6(-0)$, $1(-6)^2 + 5.0^2 + 3(-6).0$, $1.8^2 + 5(-2)^2 + 3.8(-2)$, $1(-8)^2 + 5.2^2 + 3(-8).2$.

Wenn übrigens in der Formel $pA^2 + p_1 B^2 - p_2 AB$ das Quadrat des Faktors p den Werth von $4pp_1$ übersteigt, so lehrt die Auflösung der Gleichung $pA^2 + p_1 AB^2 - p_2 AB = -r$ für A, welche

$$A = \frac{p_2}{2p} B \mp \frac{1}{2p} \sqrt{(p_2{}^2 - 4pp_1) B^2 - 4pr}$$

ergiebt, dass, wenn $p_2{}^2 > 4pp_1$ ist, die Grösse A für jedes B, also in jeder Horizontalreihe Werthe annimmt, welche negative Werthe von q erzeugen, die sich zwischen die fallenden vorderen und die steigenden hinteren Werthe von q lagern. So erhält man z. B. für $1A^2 + 5B^2 - 6AB$, worin $6^2 > 4 . 1 . 5$, nämlich $36 > 20$ ist,

n_1	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
1	5	0	−3	−4	−3	0	5	12	21	32	45	60	77
2	20	9	0	−7	−12	−15	−16	−15	−12	−7	0	9	20
3	45	28	13	0	−11	−20	−27	−32	−35	−36	−35	−32	−27

In diesem Falle können also in jeder der unendlich vielen Horizontalreihen positive Werthe vorkommen, welche $< q$ sind; bei hinreichend grossem B kommen jedoch nur die unmittelbar vor dem ersten, bezw. letzten negativen Minimalwerthe stehenden positiven Werthe von q, welche die Minimalwerthe von q in der betreffenden Horizontalreihe darstellen, in Betracht, weil die nächst vorangehenden, bezw. nächst folgenden positiven Werthe $> q$ sein werden. Diess geschieht, wenn $B > \frac{q}{\sqrt{p_2{}^2 - 4pp_1}}$ ist, da dann $A > \frac{p_1}{2p} B + \frac{q}{2p}$ ist, indem alsdann der Werth von $pA^2 + p_1 B^2 - p_2 AB = r$ den Werth $p(A+1)^2 + p_1 B^2 - p_2 (A+1) B > q$ bedingt. Die negativen Zwischenglieder brauchen nicht hergestellt zu werden, und bei hinreichend grossem B brauchen nur in jeder Horizontalreihe die beiden positiven Minimalglieder berechnet zu werden. Die Gleichung $q = pA^2 + p_1 B^2 - p_2 AB$ kann aber hiernach unendlich viel Auflösungen haben.

Wenn $p_2{}^2 \leqq 4pp_1$ ist, stellen sich keine negativen Glieder ein und die Werthe von $q = pA^2 + p_1 B^2 - p_2 AB$ bilden eine geschlossene endliche Gruppe; die vorstehende Gleichung kann mithin nur eine darstellbare endliche Menge von Auflösungen haben.

Wenn p und p_1 negativ, also p_2 jedenfalls positiv ist; so hat $-pA^2 - p_1 B^2 + p_2 AB = -(pA^2 + p_1 B^2 - p_2 AB)$ die negativen Werthe der vorstehend betrachteten Formel. Wäre dann $p_2{}^2 \leqq 4pp_1$, wie in $-1A^2 - 5B^2 + 3AB$, so kann die Formel (ausser dem Werthe 0) nur negative Werthe, die Gleichung also ausser der Auflösung $A = 0$, $B = 0$ keine Auflösung haben. Wäre indessen $p_2{}^2 > 4pp_1$; so ergeben sich die Auflösungen durch Umkehrung der Zeichen der negativen Glieder der vorhergehenden Formel, z. B. für $-1A^2 - 5B^2 + 6AB$

n_1 ‖	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	0	3	4	3	0	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	0	7	12	15	16	15	12	7	0	.	.
3	.	.	.	0	11	20	27	32	35	36	35	32	27

Eine solche Gleichung kann unendlich viel Auflösungen haben. Die Maximalwerthe von q, welche endlich jeden Werth übersteigen, sind die Mittelglieder jeder positiven Horizontalreihe, die Auflösungen für ein gegebenes q liegen daher an den Enden dieser Reihen.

Wenn von den beiden Faktoren p_1 und p_2 einer positiv und einer negativ ist, kann die Gleichung $q = pA^2 - p_1 B^2 \mp p_2 AB$ oder $= - pA^2 + p_1 B^2 \mp p_2 AB$ unendlich viel Auflösungen haben: immer bildet jedoch jede Horizontalreihe eine Reihe mit anwachsenden und fallenden positiven oder negativen oder positiven und negativen Gliedern, welche endliche Maximen und Minimen durchschreiten und zuletzt in positiven oder negativen Werthen unausgesetzt wachsen, also für Werthe von q, welche einen gegebenen Betrag nicht überschreiten sollen, immer nur eine endliche bestimmbare Menge von Gliedern enthalten. Da jedoch die Anzahl dieser Horizontalreihen unbeschränkt ist; so kann eine solche Gleichung immerhin unendlich viel Auflösungen haben.

Ich mache darauf aufmerksam, dass jede Horizontalreihe und jede Vertikalreihe eines Ausdruckes von der Form $pA^2 + p_1 B^2 + p_2 AB$, welche positive oder negative Werthe die Faktoren p, p_1 p_2 auch haben mögen, leicht dargestellt werden kann, indem in einer Horizontalreihe, welche im Vertikalabstande $B = n_1$ liegt, die Glieder um die Werthe von

$$p + n_1 p_2,\ 3p + n_1 p_2,\ 5p + n_1 p_2,\ 7p + n_1 p_2 \ldots$$

und in einer Vertikalreihe, welche in dem Horizontalabstande $A = n$ liegt, um die Werthe

$$p_1 + np_2,\ 3p_1 + np_2,\ 5p_1 + np_2,\ 7p_1 + np_2 \ldots$$

wachsen. Diese Variation findet vom ersten Gliede jeder Reihe an statt, kann aber, wie man leicht ersieht, von jedem beliebigen hergestellten Gliede aus ohne die vorhergehenden Glieder seitwärts und abwärts ausgeführt werden.

6. Dass man auf dem vorstehenden Wege auch die Auflösungen der allgemeineren Gleichung $aA^2 + bB^2 + cAB + dA + eB = q$ finden kann, indem man für jede Horizontalreihe B konstant erhält und A in dem Ausdrucke $aA^2 + (cB + d)A + bB^2 + eB$ die Werthe 0, 1, 2, 3 ... durchlaufen lässt, für jede Vertikalreihe aber A konstant erhält und B in dem Ausdrucke $bB^2 + (cA + e)B + aA^2 + dA$ durch die Werthe 0, 1, 2, 3 ... variiren lässt, leuchtet ein.

7. Wären in der Formel $aA^2 + bB^2 = q$ die Werthe für A, B und q gegeben und die von a und b gesucht; so hätte man es mit einer unbestimmten Gleichung ersten Grades zu thun, welche nach irgend einer der fünf Methoden, welche ich in der „Unbestimmten Analytik“

vorgeführt habe, aufgelös't werden kann. Die in §. 28 enthaltene ist die von Euler, die in §. 30 vorgetragene ist die von Bachet auf die Kettenbrüche gestützte, die in §. 114 beschriebene ist die von mir aus der Auflösung quadratischer Gleichungen abstrahirte, die in §. 137 vorgeführte ist die von mir auf die Reste der Vielfachen einer Zahl gegründete, und die in §. 141 entwickelte ist die von Cauchy aus den Eigenschaften der Reste der Potenzen einer Zahl abgeleitete. Diese Auflösungen ergeben für a und b alle möglichen positiven und negativen Werthe.

Mit Hülfe der Differenzreihen durch Addition ergeben sich nach dem Obigen die möglichen Werthe von q, jenachdem a oder b positiv oder negativ sein soll, sehr leicht. So erhält man für $a 2^2 + b 3^2 = a 4 + b 9$, wenn man für a und b positive Werthe verlangt,

n_1 ‖ $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	4	8	12	16	20	24	28
1	9	13	17	21	25	29	33	37
2	18	22	26	30	34	38	42	46
3	27	31	35	39	45	47	51	55

also z. B. für $q = 25 \quad 4 . 2^2 + 1 . 3^2 = 25$.

Wenn man dagegen für a einen positiven und für b einen negativen Werth verlangt, würde sich für $a 2^2 - b 3^2 = a 4 - b 9$ in positiven Werthen von a und b folgende Anfangsgruppe von Werthen für q ergeben, aus welcher die negativen Werthe fortgelassen sind.

n_1 ‖ $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	4	8	12	16	20	24	28
1	.	.	.	3	7	11	15	19
2	.	.	.	.	.	2	6	10
3	.	.	.	.	.	.	.	1

also z. B. für $q = 10 \quad 7 . 2^2 - 2 . 3^2 = 10$.

Für positive Werthe von a und b kann die Gleichung $aA^2 + bB^2 = q$ nur eine endliche, für einen negativen Werth von a oder b kann sie jedoch unendlich viel Auflösungen haben.

Wenn man nicht die Absicht hat, die Auflösungen der Gleichung $aA^2 + bB^2 = q$ für alle unter einem gegebenen Werthe liegenden Werthe von q, sondern nur für einen einzigen gegebenen Werth von q darzustellen; so empfiehlt sich immer die Auflösung nach einem der erstgenannten für unbestimmte Gleichungen gültigen Verfahren. Wäre z. B. $a . 4 + b . 9 = 25$ gegeben, für welche man $4x + 9y = 25$ zu schreiben pflegt; so ergiebt das Eulersche Verfahren $x = 4 - 9w$ und $y = 1 + 4w$, worin der Willkürlichen w jeder beliebige positive oder negative ganze Werth gegeben werden kann. Hiernach ist für $w = 0, 1, 2, -1, -2$

w	x	y	q
0	4	1	$4 \,.\, 4 + 9 \,.\, 1 = 25$
1	-5	5	$-4 \,.\, 5 + 9 \,.\, 5 = 25$
2	-14	9	$-4 \,.\, 14 + 9 \,.\, 9 = 25$
-1	13	-3	$4 \,.\, 13 - 9 \,.\, 3 = 25$
-2	22	-7	$4 \,.\, 22 - 9 \,.\, 7 = 25$

und man erkennt leicht, dass, wenn a und b positiv sein sollen, die Gleichung $4x + 9y = 25$ nur eine endliche Menge, wenn aber a oder b negativ sein soll, die Gleichung $-4x + 9y = 25$ und die Gleichung $4x - 9y = 25$ unendlich viel leicht darstellbare Auflösungen hat.

8. Die Gleichung $aA^2 + bB^2 + cAB = q$ ist für gegebene A und B und gesuchte a, b, c wie eine unbestimmte Gleichung mit drei Unbekannten zu behandeln. Setzt man für einen der drei Koeffizienten a, b, c, z. B. für c, einen beliebigen ganzen Werth; so ist die Gleichung $aA_2 + bB^2 = q - cAB = q'$ eine nach Vorstehendem zu lösende unbestimmte Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten a und b. Dass A und B keinen gemeinschaftlichen Faktor haben dürfen, welcher nicht zugleich in q enthalten ist und demnach ausgeschieden werden kann, ist selbstverständlich. Ebenso leuchtet ein, dass jeder andere Werth von c neue Auflösungen herbeiführt.

In der Gleichung $aA^2 + bB^2 + cAB + dA + eB = q$ würden sogar für drei Koeffizienten, z. B. für c, d, e, beliebige Werthe gesetzt werden können, um eine unbestimmte Gleichung $aA^2 + bB^2 = q'$ mit zwei Unbekannten herbeizuführen.

9. Wenn man nicht beabsichtigt, alle möglichen unter einer bestimmten Grenze liegenden Werthe von q zu ermitteln, für welche q die Form $m + pn$ und zugleich die Form $A^2 + pB^2$ mit gegebenem p hat, sondern nur die Ermittlung von A und B für gegebene Werthe von q und p, also die Auflösung der in Nr. 1 erwähnten viel behandelten Aufgabe anstrebt; so gestatten die obigen Operationen eine erhebliche Abkürzung.

Die Auflösung der Gleichung $q = m + pn = A^2 + pB^2$ erfordert zwei Bedingungen: erstens, dass $\frac{A^2 - m}{p}$ eine g a n z e Z a h l r oder dass $m + pr = A^2$ ein Q u a d r a t sei, zweitens, dass $\frac{A^2 - m}{p} = n - B^2$ oder dass $n - \frac{A^2 - m}{p} = n - r = B^2$ ein Q u a d r a t sei.

Hinsichtlich der ersten Bedingung, so sind alle Zahlen A_0, für welche $m + pr_0 = A_0{}^2$ und $r_0 < p$ ist, sehr leicht zu finden, indem man durch sukzessive Addition von p die Werthe m, $m + p$, $m + 2p$, $m + 3p, \ldots m + (p-1)p$ bildet. Nachdem alle diese Werthe von A_0 hergestellt sind, werden für jeden derselben die Grössen $A_0 \mp p$, $A_0 \mp 2p$, $A_0 \pm 3p$ u. s. w. lauter mögliche Werthe von A darstellen, also eine nach der positiven und nach der negativen Seite sich erstreckende erste Differenzreihe bilden. Berechnet man also den nächsten, nach der positiven Seite liegenden Werth von $\frac{(A_0+p)^2-m}{p}$; so bildet die Differenz $\frac{(A_0+p)^2-m}{p} - \frac{A_0^2-m}{p} = 2A_0+p$ das Anfangsglied der zweiten Differenzreihe und $2p$ das konstante Glied der dritten Differenzreihe. Die Ermittlung des Werthes von A_0 genügt also, um die erste Differenzreihe durch einfache Additionen zu erzeugen. Bezeichnet man die Glieder dieser Reihe mit

$$\ldots\; C_{-2} \quad C_{-1} \quad C_0 \quad C_1 \quad C_2 \;\ldots$$

(indem C_0 den Werth von $\frac{A_0^2-m}{p}$, ferner C_1 den Werth von $\frac{(A_0+p)^2-m}{p}$ u. s. w. darstellt), und subtrahirt dieselben von n, bildet also die Reihe

$$\ldots\; n-C_{-2} \quad n-C_{-1} \quad n-C_0 \quad n-C_1 \quad n-C_2 \;\ldots$$

(welche auf die positiven Werthe beschränkt werden kann); so liefert dasjenige Glied dieser Reihe, welches ein Quadrat bildet, den Werth von B^2, während der Werth von A^2 oder A (der positiv oder negativ sein kann) aus dem zugehörigen Werthe von C hervorgeht. Da quantitativ $A < \sqrt{q}$ und $B < \sqrt{\frac{q}{p}}$ ist; so hat die Berechnung dieser Reihen ihre natürliche Grenze. Kömmt unter den Werthen von $n - C$ kein Quadrat vor; so ist die gesuchte Zerlegung von q unmöglich; kommen aber mehrere Quadrate darin vor; so sind mehrere Zerlegungen von q möglich.

Um z. B. für $p = 7$ die Zerlegung von $79 = 2 + 7.11 = A^2 + 7B^2$ zu finden, worin $m = 2$, $n = 11$ ist; so kann A_0 sowohl den Werth 3, als auch den Werth 4 annehmen, indem man sowohl $2 + 1.7 = 9 = 3^2$, als auch $2 + 2.7 = 16 = 4^2$ hat. Trotz der Verschiedenheit dieser beiden Werthe von A_0 findet man, dass sie Glieder einundderselben Reihe von C bilden, man hat nämlich für $A_0 = 4$, $\frac{A_0^2-2}{7} = 2$, $\frac{(A_0+7)^2-2}{7} = 17$, $\frac{(A_0+7)^2-2}{7} - \frac{A_0^2-2}{7} = 15$ $2p = 14$, mithin folgende Differenzrechnung

	C_{-3}	C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3	
...	41	14	1	2	17	46	89	...
...	−27		−13	1	15	29	43	...
...	14	14	14	14	14	14		...

und demnach für die Werthe von $n - C = 11 - C$ nur die zwei positiven Werthe 10 und 9 aus der Reihe

$$\ldots -30 \quad -3 \quad 10 \quad 9 \quad -6 \quad -35 \quad -78 \ldots$$

wovon nur die beiden positiven Glieder 10 und 9 in Betracht kommen. Hieraus folgt $B^2 = 9$, also $B = 3$ und $A = 4$. In der That ist $79 = 4^2 + 7 \cdot 3^2$.

Der andere Werth $A_0 = 3$ liefert dieselbe Reihe der C in umgekehrter Reihenfolge, nämlich als

... C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3 ...
17	2	1	14	41	82
−15	−1	13	27	41	
14	14	14	14		

Für $p = 5$ und $m = 1$, also $q = 1 + 5n$ ergeben sich ebenfalls zwei Werthe von A_0, nämlich $A_0 = 1$ und $A_0 = 4$, welche ebenfalls Glieder derselben Reihe, nämlich der Reihe

... C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3 ...
16	3	0	7	24	51
−13	−3	7	17	27	
10	10	10	10		

sind, sodass man z. B. für $n = 12$, also $61 = 1 + 5 \cdot 12$, für $n - C = 12 - C$ die drei positiven Werthe

$$9 \quad 12 \quad 5$$

hat, woraus $B^2 = 9$ oder $B = 3$ und $A = 4$, mithin $61 = 4^2 + 5 \cdot 3^2$ folgt.

Für $q = 81 = 1 + 5 \cdot 16$ hat man für C die vorstehende Reihe, also für $n - C = 16 - C$ die vier positiven Werthe 0, 12, 16, 9. Da hiervon drei Zahlen Quadrate darstellen, indem $0 = 0^2$, $16 = 4^2$, $9 = 3^2$ ist; so lässt sich 81 in die drei Formen $9^2 + 5 \cdot 0^2$, $1^2 + 5 \cdot 4^2$ und $6^2 + 5 \cdot 3^2$ zerlegen.

10. Da in der Formel $q = m + pn$ für m stets ein Werth genommen werden kann, welcher $< p$ ist; so kommen die Werthe von A_0, welche $< p$ sind, stets paarweise vor: denn wenn A_0 ein möglicher Werth ist; so ist auch $p - A_0$ ein solcher. Hieraus folgt, dass man nur die möglichen Werthe von A_0 aufzusuchen braucht, welche $< \frac{p}{2}$ sind. Ausserdem aber erkennt man leicht, dass die beiden Werthe A_0 und $p - A_0$ stets derselben Reihe der C angehören, dass es also für diese beiden Werthe der Berechnung nur einer Reihe bedarf.

11. Wenn p und q Primzahlen sind; so muss bekanntlich m ein quadratischer Rest nach p sein. Dem Model p entsprechen $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste, welche z. B. für $p = 3$ den Werth 1, für $p = 5$ die Werthe 1 und 4, für $p = 7$ die Werthe 1, 2, 4, für $p = 11$

die Werthe 1, 3, 4, 5, 9 haben. (Diese quadratischen Reste a von p werden bekanntlich durch die Bedingung ermittelt, dass $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \; mod\, p$ sei).

Wenn alsdann A_0 ein möglicher Werth $\leqq \frac{p-1}{2}$, also $\frac{A_0^2 - m}{p}$ eine ganze Zahl ist; so fragt es sich, ob es noch einen oder mehrere Werthe von A_0 geben könne, welche ebenfalls $\leqq \frac{p-1}{2}$ sind. Angenommen, $A_0 + D$ sei ein solcher Werth, also

$$\frac{(A_0 + D)^2 - m}{p} = \frac{A_0^2 - m}{p} + \frac{D(2A_0 + D)}{p}$$

eine ganze Zahl; so müsste, da das erste Glied eine solche Zahl ist, auch $\frac{D(2A_0 + D)}{p}$ eine ganze Zahl sein. Wenn aber $A_0 + D$ nach der Voraussetzung $\leqq \frac{p-1}{2}$ ist; so ist $D \leqq \frac{p-1}{2} - A_0$, mithin $\leqq \frac{p-1}{2}$. Demzufolge kann D nicht durch p theilbar sein, es müsste vielmehr $2A_0 + D$ durch p theilbar, also $\geqq p$ sein. Alsdann wäre ferner $A_0 + \frac{D}{2} \geqq \frac{p}{2}$ und noch mehr $A_0 + D \geqq \frac{p}{2}$. Da dieses Ergebniss der Voraussetzung $A_0 + D \leqq \frac{p-1}{2}$ widerspricht; so kann es keinen zweiten Werth von A_0 geben, welcher $\leqq \frac{p-1}{2}$ ist; man hat also für Primwerthe von p und q nur e i n e n Werth von A_0, welcher $\leqq \frac{p-1}{2}$ ist, zu ermitteln und mit einer einzigen Reihe der C zu operiren.

Diese Operation vereinfacht sich, wenn man das Quadrat, welches dem quadratischen Reste m für den Model p äquivalent ist, mit r^2 bezeichnet, sodass $m \equiv r^2 \; mod\, p$ oder $= r^2 + ps$ ist, worin r eine ganze Zahl $< p$ und s eine positive oder negative ganze Zahl ist. Alsdann hat man auch $q = r^2 + ps = A^2 + pB^2$. Man findet leicht, dass von den möglichen Werthen von A, welche nun auch der Bedingung $\frac{A^2 - r^2}{p} = t$ entsprechen müssen, der erste $= r$ ist und dass die folgenden abwechselnd um $p - 2r$ und $2r$ wachsen, dass also die für A möglicherweise in Betracht kommenden Werthe die folgenden sind

$$A = r \quad p - r \quad p + r \quad 2p - r \quad 2p + r \quad 3p - r \quad 3p + r \; \ldots$$

Hieraus folgt für die obige Reihe der C

$$\frac{A^2 - r^2}{p} = 0 \quad p - 2r \quad p + 2r \quad 4p - 4r \quad 4p + 4r \quad 9p - 6r \quad 9p + 6r \ldots$$

Überhaupt hat man für zwei benachbarte Glieder, wenn deren erstes $A = xp - r$ ist,

$$A = xp - r \qquad xp + r$$

$$\frac{A^2 - r^2}{p} = x^2 p - 2xr \qquad x^2 p + 2xr$$

Allgemein, hat man $C = \dfrac{A^2 - r^2}{p} = px^2 \mp 2rx$, worin x jeden positiven ganzen Werth annehmen kann, oder auch $= px^2 + 2rx$, worin x positiv und negativ zu nehmen ist.

Wenn man diese Reihe der C in zwei Reihen zerlegt, von welchen die erste das 1 ste, 3 te, 5 te, 7 te ... Glied der Reihe der C enthält; während die zweite das 2 te, 4 te, 6 te ... Glied der Reihe der C enthält; so ist das Anfangsglied der ersten Reihe $= 0$ und ihre Glieder wachsen sukzessiv um die Beträge $p + 2r$, $3p + 2r$, $5p + 2r$, $7p + 2r$ ..., während das Anfangsglied der zweiten Reihe $= p - 2r$ ist und ihre Glieder sukzessiv um die Beträge $3p - 2r$, $5p - 2r$, $7p - 2r$ ... wachsen. Wenn man die Reihe der A ebenso zerlegt; so ist das Anfangsglied der ersten Reihe $= r$ und das Anfangsglied der zweiten Reihe $= p - r$ und in jeder dieser beiden Reihen wachsen die Glieder sukzessiv um den konstanten Betrag p. Hiernach sind sowohl die Werthe von C, als auch die von A mit grosser Leichtigkeit herzustellen.

(Die Fortsetzung der Reihe von A nach der negativen Seite erzeugt die negativen Werthe der positiven Seite; die Reihe der C reproduzirt also in der negativen Richtung die positive Seite, kömmt also nicht weiter in Betracht).

Für B ergiebt sich die Bedingung

$$B^2 = \frac{q - A^2}{p} = \frac{q - r^2 - (A^2 - r^2)}{p} = \frac{q - r^2}{p} - \frac{A^2 - r^2}{p}$$
$$= s - \frac{A^2 - r^2}{p}$$

Subtrahirt man also die vorstehenden Werthe von $C = \dfrac{A^2 - r^2}{p}$ von s; so liefert derjenige Werth, welcher ein Quadrat darstellt, einen Werth für B^2, während A dem zugehörigen Werthe $xp \mp r$ entspricht.

Beispielsweise ist für $p = 11$ der quadratische Rest $3 = 5^2 - 11 . 2$, also $r = 5$. Die Reihe der C wird danach

$$\frac{A^2 - r^2}{p} = \quad 0 \quad 1 \quad 21 \quad 24 \quad 64 \quad \ldots$$

Für $q = 47 = 5^2 + 11 . 2$ ist mithin $s = 2$ und daher

$$B^2 = \quad 2 \quad 1 \quad -19 \quad \ldots$$

Da in dieser Reihe nur das eine positive Quadrat 1 vorkömmt; so ist $B^2 = 1$ und, da hierfür $A = p - r = 11 - 5 = 6$ ist; so hat man $47 = 6^2 + 11 . 1^2$.

Anstatt nachzusehen, ob die Reihe von $s - C$ ein Quadrat B^2 enthält, kann man auch nachsehen, ob die Reihe $s - B^2$, nämlich die Reihe

$$s - 0 \qquad s - 1 \qquad s - 2^2 \qquad s - 3^2 \qquad s - 4^2 \quad \ldots$$

welche mit dem Werthe $s - 0 = s$ beginnt und aus der Differenzreihe

$$-1 \qquad -3 \qquad -5 \qquad -7 \qquad -9 \quad \ldots$$

mit grösster Leichtigkeit in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} s & & s-1 & & s-4 & & s-9 & & s-16 \quad \ldots \\ & -1 & & -3 & & -5 & & -7 & \end{array}$$

zu bilden ist, einen positiven Werth enthält, welcher mit dem Werthe eines C übereinstimmt Im vorstehenden Beispiele enthält die Reihe

$$s - B^2 = \quad 2 \qquad 1 \qquad -2 \qquad -7 \qquad -18 \quad \ldots$$

den Werth 1, welcher mit dem Werthe $C = 1$ übereinstimmt.

12. Das vorstehende Verfahren ergiebt die Zerfällung einer Primzahl von der Form $q = m + pn = r^2 + ps$ in die Form $A^2 + pB^2$, wenn diese Zerfällung überhaupt möglich ist, und sie lässt zugleich die etwaige Unzerfällbarkeit erkennen: denn nicht jede Primzahl ist in diese Form zerlegbar. So ist z. B. für $p = 11$ die Primzahl $q = 23 = 1 + 11 . 2$ nicht in die Form $A^2 + 11 B^2$, auch für $p = 5$ die ~~Primzahl $q = 221 = 1 + 5 . 44$ nicht in die Form $A^2 + 5 B^2$,~~ auch die Primzahl $q = 19 = 4 + 5 . 3$ nicht in die Form $A^2 + 5 B^2$ zerlegbar.*) Ist aber eine Primzahl $q = m + pn$ in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällbar ist, so kann sie bekanntlich nur in einziger Weise diese Form annehmen (s. meine „Unbestimmte Analytik“ §. 154), während manche zusammengesetzte Zahl in mehrfacher Weise, z. B. $q = 261$ sowohl in $1 + 5 . 32$, als auch in $4^2 + 5 . 7^2$, als auch in $9^2 + 5 . 6^2$, als auch in $16^2 + 5 . 1^2$ zerlegt werden kann.

Für gewisse quadratische Formen, insbesondere für die Zerfällung in die Differenz zweier Quadrate $A^2 - B^2$, ergiebt sich die Einzigkeit für eine Primzahl und die Mehrfachheit für zusammengesetzte Zahlen aus dem Satze: wenn die beiden Faktoren a und b beide paar oder beide unpaar sind, ist stets

$$q = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = A^2 - B^2$$

So oft also das Produkt q in zwei paare oder zwei unpaare Faktoren zerlegt werden kann, in so viel verschiedenen Formen $A^2 - B^2$ erscheint die Zahl q. Ist q eine unpaare Primzahl; so ist sie nur in einziger Weise das Produkt $ab = q . 1$, mithin nur in einziger Weise die Differenz der beiden Quadrate

---

*) ~~Durch die Erkenntniss, dass die Primzahl $1 + 5 . 44 = 1 + 5 . 4 . 11$ nicht in die Form $A^2 + 5 B^2$ zerfällbar ist, berichtige ich eine in der Schrift „Die quadratische Zerfällung der Primzahlen“ im Schlusssatze auf S. 136 enthaltene Bemerkung, indem nicht die Primzahlen von der Form $1 + 20 n$, sondern die von der Form $1 + 40 n$ in jene Form zerfällbar zu sein scheinen.~~

$$\left(\frac{q+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 = q$$

Dieser Satz involvirt zugleich den Satz: wenn q das Vierfache eines Produktes zweier beliebigen ganzen Zahlen a und b, also $= 4ab$ ist; so hat man stets

$$q = 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 = A^2 - B^2$$

und zwar nimmt diese Zerlegung ebenso viel verschiedene Formen an, als die Grösse $\frac{q}{4}$ sich in zwei Faktoren a und b zerlegen lässt.

Ebenso steht fest, dass, wenn die Zahl q das Produkt $(a+bi)(a-bi)$ zweier komplexen Faktoren von der Form $a+bi$ und $a-bi$ ist, sie die Summe a^2+b^2 zweier Quadrate darstellt, ferner dass die Glieder dieser Summe so viel verschiedene Werthe annehmen können, als die Faktoren von q von vorstehender Form, endlich, dass jede Primzahl q von der Form $4x+1$, wie z. B. 5, 13, 17, 29 u. s. w., welche man eine unvollkommene Primzahl nennen kann, ein Produkt der vorstehenden Art in einziger Weise bildet, also stets als Summe zweier Quadrate, und zwar in einziger Weise, dargestellt werden kann, dass aber eine vollkommene Primzahl von der Form $4x+3$ nicht die Summe zweier Quadrate sein kann. Wenn die Zahl b eine Primzahl p als Faktor enthält, also $= pc$ ist; so hat man für eine unvollkommene Primzahl stets in einziger Weise $q = a^2 + p^2c^2$. So ist z. B. für $p = 5$ die Primzahl $q = 1 + 5.8 = 41 = 4^2 + 5^2.1^2$, die Primzahl $q = 1 + 5.36 = 181 = 9^2 + 5^2.2^2$. Für $p = 7$ ist die Primzahl $q = 1 + 7.28 = 197 = 1^2 + 7^2.2^2$.

In die Form $A^2 + pB^2$ kann manche vollkommene und manche unvollkommene Primzahl von der Form $q = m + pn$, jedoch nur in einziger Weise zerlegt werden. Diese Einzigkeit kann, wie schon erwähnt, nachgewiesen werden. Die von Eisenstein für die Primzahlen von der Form $q = m + 7n$ inaugurirte und von mir in der Schrift über die quadratische Zerfällung der Primzahlen verallgemeinerte Theorie gelangt zu diesem Resultate, indem sie den Werth von A, wenn die Primzahl $q = m + pn$ überhaupt in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällbar ist, als eine bestimmte Funktion von Binomialkoeffizienten darstellt, was keine mehrfachen Werthe von A zulässt. Durch diese Bestimmtheit der Auflösung unterscheidet sich die letztere Theorie wesentlich von der unbestimmten Analytik und Kongruenztheorie, welche vorzugsweise allgemeine Gesetze aufstellen, ohne die Endwerthe für gegebene Fälle zu entwickeln. Insofern es sich nicht um eine Primzahl q handelt, erfordert die Mehrfachheit der Werthe von A und B, also der Bestand der Gleichungen $q = A^2 + pB^2 = A_1{}^2 + pB_1{}^2$, die Gleichung

$$B^2 - B_1{}^2 = \frac{A_1{}^2 - A^2}{p} = \frac{A_1{}^2 - r^2}{p} - \frac{A^2 - r^2}{p}$$

oder auch die Gleichung

$$p\,(B + B_1)\,(B - B_1) = (A_1 + A)\,(A_1 - A)$$

welche unter Umständen durch verschiedene Werthe von A und A_1, also auch von B und B_1 erfüllt werden kann.

13. Schliesslich bemerke ich, dass sich durch angemessene Variation des Werthes von s in der Form $q = r^2 + ps$ für ein gegebenes r und p alle Zahlen $q = m + pn = r^2 + ps$ bestimmen lassen, welche in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällbar sind, sowie diejenigen, welche es nicht sind. Zu diesem Ende braucht man nur die obige Reihe von C als

$$C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \ldots$$

herzustellen und, da $s = C + B^2$ ist, aus dieser Reihe durch Addition von $B^2 = 1^2$ die Reihe

$$C_0 + 1 \quad C_1 + 1 \quad C_2 + 1 \quad C_3 + 1 \quad \ldots$$

sodann für $B^2 = 2^2 = 4$ die Reihe

$$C_0 + 4 \quad C_1 + 4 \quad C_2 + 4 \quad C_3 + 4 \quad \ldots$$

dann für $B^2 = 3^2 = 9$ die Reihe

$$C_0 + 9 \quad C_1 + 9 \quad C_2 + 9 \quad C_3 + 9 \quad \ldots$$

u. s. w. zu bilden. Alle hieraus sich ergebenden Zahlen sind mögliche Werthe von s, welche eine in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällbare Zahl $q = r + ps$ ergeben, während jeder nicht erscheinende Werth von s eine Zahl q bedingt, welche **nicht** in diese Form zerfällbar ist. Ausserdem lehren diese Reihen, wenn darin ein Werth von s mehrmals vorkömmt, dass die betreffende Zahl q ebenso vielmal in verschiedener Weise in die Form $A^2 + pB^2$ zerfällt werden kann. So erhält man z. B. für $r = 1$ und $p = 5$, also für die Zahlen $q = 1 + 5s$, die Reihen

0	3	7	16	24	39	51	. . .
1	4	8	17	25	40	52	. . .
4	7	11	20	28	43	55	. . .
9	12	16	25	33	48	60	. . .
16	19	23	32	40	55	67	. . .
25	28	32	41	49	64	76	. . .
36	39	43	52	60	75	87	. . .
49	52	56	65	73	88	100	. . .
.	.	.	.	.	.	.	. . .

Diese Reihen lehren, dass s nicht die Werthe 2, 5, 6, 10, 13, 14, 15 u. s. w., sondern nur die Werthe 0, 1, 4, 7, 8, 9, 11, 12 u. s. w. annehmen kann, ferner, dass $1 + 5 . 3 = 16$ nur in einziger Weise als $4^2 + 5 . 0^2$, ebenso $1 + 5 . 8 = 41$ nur in einziger Weise als $6^2 + 5 . 1^2$, dass dagegen $1 + 5 . 7 = 36$ in zweifacher Weise als $6^2 + 5 . 0^2$ und als $4^2 + 5 . 2^2$, ferner $1 + 5 . 16 = 81$ in dreifacher Weise als $9^2 + 5 . 0^2$, $6^2 + 5 . 3^2$ und $1^2 + 5 . 4^2$ in die Form $A^2 + 5B^2$ zerlegt werden kann. Die **Primzahlen** von der Gestalt

$1 + 5 \,.\, 8 \,.\, n$ scheinen sämmtlich in die Form $A^2 + 5B^2$ zerfällbar zu sein; die zusammengesetzten Zahlen von dieser Gestalt, wie z. B. $1 + 5 \,.\, 8 \,.\, 12 = 481$ und $1 + 5 \,.\, 8 \,.\, 14 = 561$, sind jedoch nicht sämmtlich in die fragliche Form zerfällbar. Auch sind, wie schon in Nr. 12 erwähnt, nicht alle Primzahlen von der Gestalt $1 + 5 \,.\, 4 \,.\, n$, z. B. nicht die Primzahl $1 + 5 \,.\, 4 \,.\, 11 = 221$, in die Form $A^2 + 5B^2$ zerfällbar (der Werth $s = 4 \,.\, 11 = 44$ fehlt in der Gruppe der C). Allgemein, hat man

$$s = y^2 + px^2 + 2rx$$

worin man für x und y jeden beliebigen positiven oder negativen Werth setzen kann.

Nachtrag zur Theorie der Gleichungen.

Nach Nr. 27 der Schrift „Das Wesen der Mathematik" ist das Produkt $a e^{\alpha i} e^{\beta i_1}$ mit der Summe $a \cos\alpha + a \sin\alpha \cos\beta . i + a \sin\alpha \sin\beta . i i_1$ nicht identisch, sondern ihr nur insofern gleich, als der dem ersten Gliede $a \cos\alpha$ noch zukommende Faktor $(\cos\beta \dotplus \sin\beta . i_1)$, welcher eine Wälzung der in der Grundaxe liegenden Linie $a \cos\alpha$ um diese Grundaxe anzeigt, also für die Raumanschauung der gegebenen Grösse keine wesentliche Bedeutung hat, weggelassen ist. Bei gewissen Operationen kann dieser Faktor jedoch bedeutsam werden, und ich habe bereits hervorgehoben, dass eine Addition der durch $a e^{\alpha i} e^{\beta i_1}$ und $a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1}$ dargestellten Grössen nur in ihrer Summenform, also nach Umwandlung der Produkte in Summen der gedachten Art, und dass eine Multiplikation oder Potenzirung solcher Grössen nur in ihrer Form als Produkte, also, wenn sie in Summenform gegeben wären, nach Umwandlung dieser Summen in Produkte geschehen kann.

Ich bemerke nun noch, dass wenn auf die Wälzung der in der Grundaxe liegenden Längeneinheit 1 um diese Grundaxe kein Werth gelegt wird, immerhin $1 . i_1 = 1$ gesetzt werden kann, dass man also für diese Voraussetzung, indem wir den Faktor $e^0 = 1$ ganz bei Seite lassen, $e^{0i} = e^{0 i_1} = e^{\frac{\pi}{2} i_1} = e^{0i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} = e^{0i} e^{-\frac{\pi}{2} i_1} = 1$ hat. Kömmt jedoch die Wälzung der Einheit um sich selbst in Betracht; so kann man nur setzen

$$e^{0i} = e^{0 i_1} = e^{0i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} = e^{0i} e^{-\frac{\pi}{2} i_1} = 1$$

dagegen $$e^{\frac{\pi}{2} i_1} = 1 . i_1 = i_1$$

Für die Werthe von i und $i i_1$ hat man immer

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} = e^{-\frac{\pi}{2} i} e^{-\frac{\pi}{2} i_1} = i i_1$$

Für die negativen Werthe ist

$$e^{\pi i} = e^{\pi i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} = -1$$

$$e^{-\frac{\pi}{2} i_1} = -i_1$$

$$e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} e^{-\frac{\pi}{2} i_1} = e^{-\frac{\pi}{2} i} e^{\frac{\pi}{2} i_1} = -i i_1$$

Die Grösse i zeigt die Drehung von 90 Grad einer in der Grundaxe OX liegenden ungewälzten Einheit 1 um die Höhenaxe OZ an, wodurch sie in die Richtung der Seitenaxe OY versetzt wird. Die Grösse i_1 zeigt die Wälzung von 90 Grad der in der Seitenaxe OY liegenden Einheit i um die Grundaxe OX an, wodurch das Produkt $i i_1$ eine in der Höhenaxe OZ liegende Einheit darstellt. Wird eine in der Grundaxe OX liegende Einheit 1 um 90 Grad gewälzt, so bezeichnet $1 . i_1 = i_1$ eine in der Grundaxe liegende gewälzte Linie, welche durch die Multiplikation mit i in der Ebene OXZ bis in die Höhenaxe OX fortschreitet, sodass das Produkt $i_1 i$ dem Produkte $i i_1$ gleich ist.

Auf Grund geometrischer oder räumlicher Anschauung kann man aus den einfachen Grössen 1, i, i_1 mannichfache Produkte und Potenzen bilden, unter Anderem die folgenden. Die zweite Potenz von i oder von i_1 führt immer einen Gegensatz zu dem Ausgangswerthe herbei, indem $-1 . -1 = (-1)^2 = 1$, $1 . i^2 = -1$, $1 . i_1^2 = \div 1 = 1$ ist. Die vierte Potenz von i oder von i_1 hebt diesen Gegensatz wieder auf, führt also zu dem Ausgangswerthe zurück, indem man $1 . i^4 = 1 (-1)^2 = 1$, $1 . i_1^4 = (\div 1)^2 = \dotplus 1 = 1$ hat. Die Bestätigung aller dieser und ähnlicher Sätze ergiebt sich durch Substitution der Potenzwerthe von 1, i, i_1. So hat man thatsächlich $(-1)^2 = (e^{\pi i})^2 = e^{2 \pi i} = \cos 2\pi + \sin 2\pi . i = 1$, ferner $i^2 = \left(e^{\frac{\pi}{2} i}\right)^2 = e^{\pi i} = -1$, $i_1^{\,2} = \left(e^{\frac{\pi}{2} i_1}\right)^2 = e^{\pi i_1} = \cos \pi \dotplus \sin \pi . i_1 = \div 1 = 1$ u. s. w.

Diese Beziehungen lassen nun sofort erkennen, dass die Gleichung vierten Grades $x^4 - 1 = 0$ oder $x^4 = 1$ ausser den bekannten zwei reellen, in der Grundaxe liegenden Wurzeln 1 und -1 und den zwei imaginären, in der Seitenaxe liegenden Wurzeln i und $-i$ auch noch die zwei in der Höhenaxe liegenden tertiären Wurzeln $i i_1$ und $-i i_1$, sowie die zwei in der Grundaxe liegenden gewälzten tertiären Wurzeln $1 . i_1$ und $-1 . i_1$ oder i_1 und $-i_1$, im Ganzen also a c h t v e r s c h i e d e n e W u r z e l n hat, wenn man die gewälzten Einheiten i_1 und $-i_1$ als von 1 und -1 verschiedene Grössen ansieht, sonst aber doch immer s e c h s verschiedene Wurzeln 1, -1, i, $-i$, $i i_1$, $-i i_1$ und zwei mit 1 und -1 in der Länge, jedoch nicht in der Wälzung zusammenfallende Wurzeln hat.

Die Bestätigung dieser acht Wurzeln, sowie auch ihre Verschiedenheit als Potenzen von e findet sich, wenn man dafür die vorher genannten Potenzen von e einsetzt. Die zwei reellen Wurzeln 1 und -1 sind dann e^{0i} und $e^{\pi i}$, die zwei komplexen Wurzeln i und $-i$ sind $e^{\frac{\pi}{2}i}$ und $e^{-\frac{\pi}{2}i}$, die vier triplexen Wurzeln $i\,i_1$, $-\,i\,i_1$, i_1 und $-\,i_1$ sind $e^{\frac{\pi}{2}i}\,e^{\frac{\pi}{2}i_1}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}\,e^{-\frac{\pi}{2}i_1}$, $e^{\frac{\pi}{2}i_1}$ und $e^{-\frac{\pi}{2}i_1}$, und es ergiebt sich leicht, dass die vierte Potenz jeder dieser acht verschiedenen Wurzeln $= 1$ ist, dass sie also thatsächlich acht verschiedene Wurzeln einer Gleichung vierten Grades darstellen und dass die vier triplexen Wurzeln ebenso anschauliche Grössen im Raume, wie die reellen Wurzeln es in der Grundlinie und die komplexen Wurzeln es in der Grundebene sind.

Auf demselben Wege kann man darthun, dass dieselbe Gleichung vierten Grades ausser diesen vier reellen und komplexen Wurzeln und den vier triplexen Wurzeln noch acht quadruplexe, im Ganzen also sechzehn, überhaupt bei der Zulassung fortwährend steigender Werthe von $1, i, i_1, i_2, i_3 \ldots$ unendlich viel verschiedene Wurzeln besitzt, deren über die Triplexität hinausgehende Werthe keine geometrische Anschaulichkeit, wohl aber eine bestimmte mathematische Bedeutung haben.

Wenn x_1 eine reelle Wurzel einer gegebenen Gleichung n-ten Grades ist; so ist auch stets die triplexe Grösse $x_1\,e^{\frac{\pi}{2}i_1} = x_1\,i_1$ als eine Wurzel derselben Gleichung anzusehen, da jede Potenz von $e^{\frac{\pi}{2}i_1}$ wie $e^{\frac{n\pi}{2}i_1} = \cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\cdot i_1$ immer nur die Bedeutung einer Wälzung der in der Grundaxe OX liegenden Längeneinheit um sich selbst hat, die Längen der einzelnen reellen Glieder der gegebenen Gleichung also durch die Substitution von $x_1\,e^{\frac{\pi}{2}i_1}$ für x_1 nicht geändert werden, mithin auch ihre Summe den früheren Quantitätswerth behält. Jede Gleichung hat also jedenfalls noch ebenso viel triplexe Wurzeln, als sie reelle hat.

Anders ist es, wenn $x_1\,e^{\varphi i} = x_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi\,.\,i$ eine komplexe Wurzel der gegebenen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots = 0$ ist, was die Erfüllung der beiden Gleichungen

$$x_1^n \cos n\varphi + a_1 x_1^{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_2 x_1^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots = 0$$

$$x_1^n \sin n\varphi + a_1 x_1^{n-1} \sin(n-1)\varphi + a_2 x_1^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots = 0$$

voraussetzt. Jetzt wird eine triplexe Wurzel im Allgemeinen die Form $y_1\,e^{\varphi_1 i}\,e^{\psi_1 i_1} = y_1 \cos\varphi_1 + y_1 \sin\varphi_1 \cos\psi_1\,.\,i + y_1 \sin\varphi_1 \sin\psi_1\,.\,i\,i_1$ haben, worin x_1 in y_1 und φi in $\varphi_1 i$ übergegangen und der neue Exponent $\psi_1 i_1$ hinzugetreten ist. Es giebt jedoch Gleichungen von gewissen speziellen Formen, für welche eine komplexe Wurzel $x_1\,e^{\varphi i}$ sofort die triplexe Wurzel

$$\begin{aligned} x_1\,e^{\varphi i}\,e^{\frac{\pi}{2}i_1} &= x_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi \cos\frac{\pi}{2}\cdot i + x_1 \sin\varphi \sin\frac{\pi}{2}\cdot i\,i_1 \\ &= x_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi\,.\,i\,i_1 \end{aligned}$$

bedingt: es sind die Gleichungen, in welchen der Exponent von x von seiner untersten Stufe immer um vier Einheiten aufsteigt oder von seiner obersten Stufe immer um vier Einheiten absteigt, wovon übrigens auch beliebige Glieder fehlen können. Solche Gleichungen wären z. B.

$$x^9 + a_1 x^5 + a_2 x^1 + a_3 = 0$$
$$x^{10} + a_1 x^6 + a_2 x^2 + a_3 = 0$$
$$x^{11} + a_1 x^7 + a_2 x^3 + a_3 = 0$$
$$x^{13} + a_1 x^9 + a_2 x^5 + a_3 x^1 + a_4 = 0$$

Denn die Gleichung n-ten Grades zerfällt für $x = x_1 e^{\varphi i} e^{\psi i_1}$ in die drei Gleichungen

$$x_1^n \cos n\varphi + a_1 x_1^{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_2 x_1^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots = 0$$
$$x_1^n \sin n\varphi \cos n\psi + a_1 x_1^{n-1} \sin(n-1)\varphi \cos(n-1)\psi$$
$$+ a_2 x_1^{n-2} \sin(n-2)\varphi \cos(n-2)\psi + \ldots = 0$$
$$x_1^n \sin n\varphi \sin n\psi + a_1 x_1^{n-1} \sin(n-1)\varphi \sin(n-1)\psi$$
$$+ a_2 x_1^{n-2} \sin(n-2)\varphi \sin(n-2)\psi + \ldots = 0$$

und wenn die Exponenten von x_1 immer um vier Einheiten abnehmen, werden diese Gleichungen

$$x_1^n \cos n\varphi + a_4 x_1^{n-4} \cos(n-4)\varphi + \ldots = 0$$
$$x_1^n \sin n\varphi \cos n\psi + a_4 x_1^{n-4} \sin(n-4)\varphi \cos(n-4)\psi + \ldots = 0$$
$$x_1^n \sin n\varphi \sin n\psi + a_4 x_1^{n-4} \sin(n-4)\varphi \sin(n-4)\psi + \ldots = 0$$

Die erste dieser drei Gleichungen ist von ψ unabhängig und bleibt der früheren ersten gleich. Ist nun $\psi = \frac{\pi}{2}$; so werden in der zweiten Gleichung die Kosinus einander gleich, d. h. man hat

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{(n-4)\pi}{2} = \cos\frac{(n-8)\pi}{2} \text{ etc.}$$

und in der dritten Gleichung ist

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{(n-4)\pi}{2} = \sin\frac{(n-8)\pi}{2} \text{ etc.}$$

Werden aber diese gleichen Faktoren aus der zweiten und dritten Gleichung ausgeschieden; so werden beide Gleichungen identisch und der früheren zweiten gleich, sie gehen mithin beide durch den Werth von x_1 und φ, welcher die komplexe Wurzel $x_1 e^{\varphi i}$ bedingt, in Erfüllung. Die Grösse $x_1 e^{\varphi i} e^{\frac{\pi}{2} i_1}$ erfüllt daher die letzteren drei Gleichungen, ist mithin eine triplexe Wurzel der gegebenen Gleichung. Diese Gleichung hat also ebenso viel triplexe Wurzeln von der Form $x_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi \,.\, i i_1$, als sie komplexe Wurzeln von der Form $x_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi \,.\, i$ hat, deren wesentliche Verschiedenheit als Raumgrössen auf der Hand liegt.

Für die allgemeine Gleichung stehen die komplexen und die triplexen Wurzeln nicht in der eben gedachten Beziehung: die Werthe der drei Unbekannten x_1, φ, ψ für eine triplexe Wurzel sind alsdann aus den drei zuerst genannten Gleichungen abzuleiten, und alle drei Unbekannten werden bestimmte Werthe annehmen, wenn für die beiden Unbekannten x_1, φ die vorher genannten zwei Gleichungen erfüllt werden können, wenn es also eine komplexe Wurzel giebt.

Beachtenswerth ist noch, dass die triplexen Wurzeln ebenso wie die komplexen paarweise vorkommen, indem, wenn $x_1 e^{\varphi i} e^{\psi i_1}$ eine triplexe Wurzel ist, auch $x_1 e^{\varphi i} e^{-\psi i_1}$ eine solche sein wird, da die Werthe x_1, φ, $-\psi$ die drei in Rede stehenden Gleichungen ebenso gut erfüllen, wie die Werthe x_1, φ, ψ.

Die Phönixzahlen.

1. Die „Braunschweigischen Anzeigen" vom 22. Juni 1896 besprechen nach der „Romanwelt" (Heft 34, dritter Jahrgang) unter dem Titel „Eine merkwürdige Zahl" eine angeblich aus einem verschollenen englischen Büchlein: „Short cuts in arithmetic and curious calculations" entnommene Zahl, welche eine Phönixzahl genannt wird, weil sie wie der wunderbare Vogel Phönix aus der Asche immer wieder ersteht, aus allen Multiplikationsoperationen, die man mit ihr vornimmt, immer wieder zum Vorschein kömmt. Als solche Phönixzahl wird die 18-zifferige Zahl

526 315 789 473 684 210

aufgeführt und es wird bemerkt, dass sich durch Multiplikation mit 2 die Zahl

1 052 631 578 947 368 420

durch Multiplikation mit 3 die Zahl

1 578 947 368 421 052 630

durch Multiplikation mit 5 oder 7 ebenfalls eine aus denselben Ziffern und Gruppen gebildete Zahl einstelle.

Für Multiplikationen mit einziffrigen Faktoren 1, 2, 3, ... 9 findet allerdings die behauptete Wiederkehr statt, für zwei- und mehrziffrige Faktoren findet sie jedoch im Allgemeinen nicht statt: denn wie der Artikel in dem genannten Blatte selbst anführt, ergiebt die Multiplikation mit 24 die Zahl

12 631 578 947 368 421 040

welche durchaus nicht aus den Ziffern der gegebenen Zahl besteht, welcher vielmehr eine Ziffer 5 fehlt, während sie die drei Ziffern 1, 0, 4 zuviel besitzt. Diese Abweichung von der als merkwürdig angekündigten Eigenschaft wird damit beschönigt, dass die fehlenden Ziffern dieselbe Summe bilden wie die überflüssigen Ziffern, indem man $5 = 1 + 0 + 4$ hat. Das Nämliche soll sich bei der Multiplikation mit zusammengesetzteren Faktoren ereignen, würde aber, wenn es sich bewahrheitete, die behauptete Merkwürdigkeit vollständig aufheben und die Phönixnatur der gegebenen Zahl in die Eigenschaft verwandeln, dass die Summe der Ziffern eines aus dieser Zahl gebildeten Produktes einen konstanten

Werth hat, während die Ziffern selbst verschiedentlich variiren können. Das hier in Betracht kommende mathematische Gesetz ergiebt sich folgendermaassen.

2. Die gewöhnliche Multiplikation einer dem Dezimalsysteme angehörigen Zahl wie edc,ba mit einem einziffrigen Faktor x beginnt an der am weitesten rechts stehenden Anfangsziffer a und schreitet von rechts nach links in der Weise vor, dass man die erste Ziffer a des Multiplikands mit x multiplizirt, das Ergebniss $a\,.\,x$ in die Form $n\,.\,10 + a_1$ bringt, worin a_1 einen der 10 Werthe 0, 1, 2, ... 9 und n einen der 9 Werthe 0, 1, 2, ... 8 hat (indem der grösstmögliche Werth von $ax = 9\,.\,9 = 81 = 8\,.\,10 + 1$ ist, also den Betrag $9\,.\,10 + a_1$ nicht erreichen kann), dass man dann a_1 als Anfangsglied des gesuchten Produktes niederschreibt und die Zahl n zu der weiter folgenden Multiplikation der zweiten Ziffer b mit x, also zu $b\,.\,x$, addirt, was die Grösse $b\,.\,x + n$ in der Form $n_1\,.\,10 + b_1$ liefert, welche b_1 als zweite Ziffer des gesuchten Produktes und n_1 als den der dritten Multiplikation $c\,.\,x$ hinzuzufügenden Werth ergiebt. Die Fortsetzung dieser Operation schliesst mit einer endlichen Ziffernreihe ab. Erzeugt die letzte Ziffer e des Multiplikands mit ihrem Addend eine einziffrige Zahl e_1, ist also in der Summe $e\,.\,x + n_3 = n_4\,.\,10 + e_1$ die Grösse $n_4 = 0$; so ist e_1 die Endziffer des gesuchten Produktes; ist jedoch n_4 grösser als 0; so schliesst nicht e_1, sondern $n_4\,e_1$ das Produkt. Will man die Addenden n, n_1, n_2 ... aus besonderen Gründen überblicken; so kann man die Operation $edc,ba \times x$ in die Form

$$\begin{array}{rrrrrr} & \scriptstyle n_4 & \scriptstyle n_3 & \scriptstyle n_2 & \scriptstyle n_1 & \scriptstyle n \\ & e & d & c, & b & a \\ & & & & & x \\ \hline n_4 & e_1 & d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \end{array}$$

stellen, worin n_4 und auch manche andere der Grössen n, n_1, n_2 ... gleich Null sein kann. Beispielsweise hat man

$$\begin{array}{rrrrrr} & \scriptstyle 3 & & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 1 \\ & 5 & 0 & 4, & 7 & 2 \\ & & & & & 6 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rrrrr} & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 1 & \\ 1 & 0 & 4, & 7 & 2 \\ & & & & 6 \\ \hline 6 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{array}$$

3. Die gewöhnliche Division einer als Dividend gegebenen Zahl ab,cde durch einen einziffrigen Divisor x beginnt im links liegenden Endpunkte a des Dividends und schreitet von links nach rechts folgendermaassen vor. Man dividirt die erste Ziffer a durch x und stellt sie in die Form $a = a_1\,.\,x + n$, worin $a_1\,.\,x$ das grösste in a enthaltene Vielfache von x und daher $n < 10$ ist, nimmt alsdann a_1 zur ersten Ziffer des gesuchten Quotienten, bildet darauf aus n und dem zweiten Gliede b des Dividends die Grösse $n\,.\,10 + b$ oder in Dezimalform $n\,b$,

dividirt dieselbe durch x und stellt sie in die Form $nb = b_1 . x + n_2$, worin $b_1 . x$ das grösste in nb enthaltene Vielfache von x ist. Hierdurch ergiebt sich die zweite Ziffer b_1 des gesuchten Quotienten und für die fernere Operation die Grösse n_2 und $n_2 . 10 + c$. Die Fortsetzung dieser Operation wird entweder mit einer endlichen Ziffernreihe abschliessen, oder sie wird eine unendliche periodische Ziffernreihe bilden, welche sich aus dem gegebenen Dividend dadurch bildet, dass man demselben unausgesetzt Nullglieder zufügt, also $ab, cde\,0\,0\,0\,0\,\ldots$ schreibt. Wenn die Grössen n, n_1, $n_2 \ldots$ zu gewissen Reflexionen dienen sollen, kann man die Operation $ab, cde : x$ in die Form

$$\begin{array}{llllllll}
\scriptstyle n & \scriptstyle n_1 & \scriptstyle n_2 & \scriptstyle n_3 & \scriptstyle n_4 & \scriptstyle n_5 & \scriptstyle n_6 & \scriptstyle n_7 \\
a & b, & c & d & e & 0 & 0 & 0 \ldots \\
x \\
\hline
a_1 & b_1, & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \ldots
\end{array}$$

stellen. Beispielsweise hat man für den Divisor $x = 3$ die aufgehende Division

$$\begin{array}{lllll}
\scriptstyle 2 & \scriptstyle 2 & & \scriptstyle 1 & \\
5 & 0 & 4, & 7 & 2 \\
3 \\
\hline
1 & 6 & 8, & 2 & 4
\end{array}$$

und die nicht aufgehende Division

$$\begin{array}{llllllll}
\scriptstyle 2 & \scriptstyle 2 & & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 2 \\
5 & 0 & 4, & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\
3 \\
\hline
1 & 6 & 8, & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 \ldots
\end{array}$$

4. Neben der in Nr. 2 und 3 erörterten gewöhnlichen Multiplikation und Division ziehen wir jetzt unter dem Namen der erzeugenden Multiplikation und Division zwei Operationen in Betracht, bei welchen zwar ein bestimmter Multiplikator oder Divisor x, aber kein geschlossener Multiplikand oder Dividend, sondern statt dessen eine einziffrige Zahl a mit der Bedingung gegeben ist, dass a als die erste Ziffer der zu bildenden Reihe gelte und dass mit der Grösse x zunächst auf a, alsdann aber immer auf die Anfangsziffer des unmittelbar vorher erzeugten Produktes oder Quotienten nach den Regeln der gewöhnlichen Multiplikation oder Division unter gehöriger Berücksichtigung der sich einstellenden Addenden eingewirkt werde. Es leuchtet ein, dass hierdurch stets eine unendliche periodische Zahlenreihe entstehen muss, welche wir nachstehend näher untersuchen werden. Von dieser Untersuchung schliessen wir die Fälle aus, wo $x = 0$ oder $= 1$ ist, weil $x = 0$ nur eine aus lauter Nullen bestehende Reihe und $x = 1$ nur eine aus lauter dem a gleichen Ziffern bestehende Reihe ergeben würde. Wir ziehen also nur die Werthe $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ in Betracht. Ebenso ist der Fall auszuschliessen, wo die Anfangsziffer $a = 0$ sein soll, weil hieraus nur eine Reihe von lauter Nullziffern entstehen würde.

5. Im erzeugenden Multiplikationsprozesse liefert der Faktor $x = 2$, wenn $a = 1$ genommen wird, die unendliche Reihe

$$\ldots\; 4\;\; 2\;\; {}^{1}1 \;\Big|\; 0\;\; {}^{1}5\;\; 2\;\; 6\;\; {}^{1}3\;\; {}^{1}1\;\; {}^{1}5\;\; {}^{1}7\;\; 8\;\; {}^{1}9\;\; 4\;\; {}^{1}7\;\; {}^{1}3\;\; 6\;\; 8\;\; 4\;\; 2\;\; 1 \;\Big|$$

nach 18 Gliedern wiederholt sich das erste Glied 1 und damit alle 18 Glieder: die unendliche Reihe ist also periodisch und ihre Periode ist 18-gliedrig. Man erkennt in dieser Periode, die wir in zwei vertikale Striche eingeschlossen haben, die obige Phönixzahl, bei welcher jedoch die 0 nicht das Anfangs-, sondern das Endglied bildet. (Die mit dem Anfangsgliede 0 geschriebene Zahl ist eine unrichtige Phönixzahl, welche den wahren Zahlengesetzen nicht entspricht. Aus ${}^{0}0$ kann keine Periode entspringen, da $x \,.\, {}^{0}0$ stets $= {}^{0}0$ ist, also die entstehende Periode nur $\ldots 0000$ sein kann. Will man einen Nullwerth zum Anfangsgliede; so muss dieses Glied nicht $= {}^{0}0$, sondern $= {}^{1}0$ gesetzt werden, wodurch stets das zweite Glied $x \,.\, 0 + 1 = 1$ wird). Die 18 Ziffern dieser Zahl sind, wenn man den vor jeder Ziffer verzeichneten Addend, der entweder $= 0$, oder $= 1$ ist, mit berücksichtigt, folgende 9 einfachen (dem Addend 0 entsprechenden) Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

und folgende 9 mit dem Addend 1 behaftete Zahlen

$$\begin{array}{cccccccccc} & {}^{1}0 & {}^{1}1 & {}^{1}2 & {}^{1}3 & {}^{1}4 & {}^{1}5 & {}^{1}6 & {}^{1}7 & {}^{1}8 \\ = & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{array}$$

In der ersten Gruppe fehlt die Zahl $0 = {}^{0}0$, weil dieselbe durch den Faktor 2 aus keiner der vorhergehenden Zahlen erzeugt werden kann, da $2 \,.\, 5 = 10 = {}^{1}0$, nicht aber $= {}^{0}0$ ist, also eine einfache 0, welche $2 \,.\, 0 = 0 = {}^{0}0$ ergeben könnte, nicht vorkommen kann, vielmehr aus der Anfangsziffer 0 nur die Reihe $\ldots 0000$ erzeugen könnte. In der zweiten Gruppe fehlt die Zahl ${}^{1}9 = 19$, weil dieselbe nur aus einer vorhergehenden gleichen Zahl ${}^{1}9$ entstehen und nur eine gleiche nachfolgende gleiche Zahl ${}^{1}9$ erzeugen könnte, mithin nicht aus der Anfangsziffer 9, sondern nur aus ${}^{1}9$ entspringen und nur die Reihe $\ldots {}^{1}9\; {}^{1}9\; {}^{1}9\; {}^{1}9$ erzeugen würde. Da hiernach nur die einfachen Ziffern $1, 2, \ldots 9$ und nur die mit dem Addend 1 verbundenen Ziffern ${}^{1}0, {}^{1}1, \ldots {}^{1}8$ möglich sind; so muss in dem durch den Faktor 2 erzeugten Multiplikationsprozesse die Anfangsziffer sich nothwendig wiederholen, die entstehende Zahl muss daher eine periodische sein, also einen bestimmten Abschnitt einer unendlichen periodischen Reihe bilden. Die Summe der $18 = 2 \,.\, 9$ Glieder dieses periodischen Abschnittes ist $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) + (0 + 1 + 2 + \ldots + 8) = 45 + 36 = 81$ oder $= 9 \,.\, 9$.

Beginnt man den Multiplikationsprozess des Faktors 2 nicht wie vorstehend mit der Ziffer 1, sondern mit irgend einer anderen der eben beschriebenen 18 Zahlen; so reproduzirt sich offenbar genau dieselbe Phönixzahl von einem anderen Anfangspunkte aus. Beginnt man z. B. statt mit der einfachen $1 = {}^{0}1$ mit der zusammengesetzten Zahl ${}^{1}1$; so ergiebt sich

$$\ldots\ {}^{1}\ {}^{1}3\ 1 \;\Big|\; {}^{1}5\ {}^{1}7\ 8\ {}^{1}9\ 4\ {}^{1}7\ {}^{1}3\ 6\ 8\ 4\ 2\ {}^{1}1\ 0\ {}^{1}5\ 2\ 6\ {}^{1}3\ 1 \;\Big|$$

oder beginnt man mit der einfachen Zahl $3 = {}^{0}3$; so kömmt

$$\ldots\ 2\ 6\ 3 \;\Big|\; {}^{1}1\ {}^{1}5\ {}^{1}7\ 8\ {}^{1}9\ 4\ {}^{1}7\ {}^{1}3\ 6\ 8\ 4\ 2\ {}^{1}1\ 0\ {}^{1}5\ 2\ 6\ 3 \;\Big|$$

Hiernach ist es gleichgültig, welche der bezeichneten 18 Zahlen man zum Anfangsgliede für die erzeugende Multiplikation mit 2 nimmt; es ergiebt sich stets dieselbe unendliche Reihe, worin die erzeugte 18-stellige Reihe eine Periode bildet, die der zuerst gebildeten Phönixzahl entspricht, wenn man dieselbe an derjenigen Stelle beginnt, wo das angenommene Anfangsglied liegt, und bei Erreichung der Endziffer jener Phönixzahl deren Anfangsziffern folgen lässt.

6. Wenn man die mit der Ziffer 1 beginnende, durch den Faktor 2 erzeugte Phönixzahl mit irgend einer der darin enthaltenen einfachen Zahlen 1, 2, 3, ... 9 oder mit irgend einer der darin enthaltenen zusammengesetzten Zahlen ${}^{1}0 = 10$, ${}^{1}1 = 11$, ${}^{1}2 = 12$, ${}^{1}3 = 13$, ${}^{1}4 = 14$, ${}^{1}5 = 15$, ${}^{1}6 = 16$, ${}^{1}7 = 17$, ${}^{1}8 = 18$, jedoch nicht mit einer nicht darin enthaltenen Zahl wie ${}^{1}9 = 19$, ${}^{2}4 = 24$, ${}^{31}7 = 317$ u. s. w. nach den Regeln der gewöhnlichen Multiplikation multiplizirt; so bildet das Produkt stets eine 18-stellige Periode der in Rede stehenden unendlichen periodischen Zahl, enthält also alle Ziffern der Phönixzahl in gleicher Reihenfolge von einer bestimmten Stelle aus. Diese Stelle der Phönixzahl ist diejenige, wo der gewählte Faktor x als ${}^{0}a$ oder ${}^{1}a$ liegt. Multipliziren wir z. B. mit $x = 7$; so ergiebt sich die mit 7 beginnende Reihe ... 1 5 7 8 9 4 7, das vollständige Produkt ist also

$$\Big|\; 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7 \;\Big|$$

Multipliziren wir dagegen mit ${}^{1}7 = 17$; so ergiebt sich die mit ${}^{1}7$ beginnende Reihe

$$\Big|\; 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7 \;\Big|$$

Den Grund dieser Reproduktion der ursprünglichen Phönixzahl werden wir in Nr. 15 näher betrachten.

7. Wenn der Faktor x keine der in der Phönixzahl enthaltenen Ziffern, sondern eine nicht darin enthaltene Zahl, z. B. 24 ist, so entsteht, wie schon in Nr. 1 erwähnt ist, nicht wieder die Phönixzahl, sondern eine davon verschiedene Zahl mit mehr als 18 Ziffern. In dieser Zahl erscheinen zum Theil Gruppen der Phönixzahl, zum Theil aber auch Gruppen, welche in der Phönixzahl nicht enthalten sind. Die Summe dieser neuen Ziffern ist im vorstehenden Falle der Summe der fehlenden Ziffern gleich: Die Multiplikation mit einer zusammengesetzten Zahl wie z. B. 2753 kann auf die Addition des 3-fachen, des 5-fachen, des 7-fachen und des 2-fachen der Phönixzahl unter Vorrückung des 5-fachen um eine Stelle, des 7-fachen um zwei Stellen, des 2-fachen um drei Stellen zurückgeführt werden, und diese Operation lässt deutlich die Formungleichheit des Produktes neben der Gleichheit der Ziffern-

summe erkennen. Als einfaches Beispiel stellen wir nachstehend das 1001-fache der Phönixzahl dar: dasselbe ist

$$\begin{array}{r}
0\;5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8\;4\;2\;1 \\
5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8\;4\;2\;1\; \\
\hline
5\;2\;6\;8\;4\;2\;1\;0\;5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;2\;1
\end{array}$$

Diese Zahl hat 20 Stellen, sie hat auch die der Phönixzahl angehörige Gruppe 68 . . . 94, sie hat aber ausserdem die Ziffern 1 2 2 5, während ihr die Gruppe 73 fehlt. Da $1 + 2 + 2 + 5 = 7 + 3 = 10$ ist: so hat auch in diesem Falle die neue Zahl die Ziffernsumme 81 der Phönixzahl.

Da jedes Produkt der Phönixzahl mit einer einstelligen Zahl dieselbe Periode darstellt, wie die Phönixzahl selbst; so erscheint jedes Produkt der Phönixzahl mit einer zusammengesetzten Zahl als eine Summe von vorgeschobenen gleichen Perioden, welche sich nur durch die Anfangsziffern unterscheiden. So ist z. B. das 24-fache der Phönixzahl die nachstehende Summe

$$\begin{array}{r}
2\;1\;0\;5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8\;4 \\
1\;0\;5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8\;4\;2\; \\
\hline
1\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8\;4\;2\;1\;0\;4
\end{array}$$

mit der konstanten Ziffernsumme 81.

Dass die Ziffernsumme jedes Produktes der Phönixzahl mit einer jeden zusammengesetzten Zahl konstant $= 81$ ist, ergiebt sich daraus, dass, wenn . . . $c\,b\,a$ und . . . $c_1 b_1 a_1$ die von irgend einer Stelle a und von irgend einer anderen Stelle a_1 auf einander folgenden Ziffern der Phönixzahl sind, die Summen $a + a_1$, $b + b_1$, $c + c_1$ u. s. w. unter Berücksichtigung der erscheinenden und auf die nächste Summe zu übertragenden Addenden eine Ziffernreihe ergeben, welche mit der Phönixzahl von der der Summe $a + a_1$ entsprechenden Stelle aus identisch ist. Nimmt man z. B. $a = 1$ und $a_1 = 7$; so erhält man folgende Summen

$$| \; 7 + 1 = 8,\; 4 + 2 = 6,\; 9 + 4 = {}^{1}3,\; 8 + 8 + 1 = {}^{1}7,\; 7 + 6 + 1 = {}^{1}4,\; 5 + 3 + 1 = 9,\; 1 + 7 = 8,\; 3 + 4 = 7,\; 6 + 9 = {}^{1}5,\; 2 + 8 + 1 = {}^{1}1,\; 5 + 7 + 1 = {}^{1}3,\; 0 + 5 + 1 = 6,\; 1 + 1 = 2,\; 2 + 3 = 5,\; 4 + 6 = {}^{1}0,\; 8 + 2 + 1 = {}^{1}1,\; 6 + 5 + 1 = {}^{1}2,\; 3 + 0 + 1 = 4,\; | \; 7 + 1 = 8 \text{ etc.}$$

Die hierdurch erzeugte Ziffernreihe

$$|\; 4\;2\;1\;0\;5\;2\;6\;3\;1\;5\;7\;8\;9\;4\;7\;3\;6\;8 \;|$$

entspricht genau der Phönixzahl, hat also die Ziffernsumme 81. Nun stellt die mit 7 beginnende Periode das 7-fache der mit 1 beginnenden Periode dar; das 7-fache der Phönixzahl hat also dieselbe Ziffernsumme, wie das 1-fache, überhaupt bilden, wenn x und y zwei einfache Ziffern sind, das x-fache und das y-fache gleiche Gruppen mit gleichen Ziffernsummen, wie schon aus Nr. 6 hervorgeht.

Bei einer Multiplikation mit einer mehrziffrigen, in der Phönixzahl nicht enthaltenen Zahl, wie vorstehend mit $24 = 20 + 4$ kömmt nun das 4-fache und das um eine Stelle vorgeschobene 2-fache der Phönixzahl in Betracht. Hierdurch stellen sich die beiden Ziffern 8 und 2 übereinander, bedingen also, wenn die neben der 8 rechts stehende Ziffer 4 vorläufig ausser Acht gelassen wird, durch die Addition der folgenden übereinander stehenden Ziffern die Summirung des 8-fachen und des 2-fachen der Phönixzahl, was nach der letzten Erörterung eine der Phönixzahl gleiche Ziffernreihe ergeben würde, falls jede der beiden Reihen ihre vollzähligen 18 Ziffern besässe. Der obersten Reihe fehlt jedoch die 4 und der unteren Reihe die 1, indem nur die Theile

$$\begin{array}{c} 2\ 1\ \ldots\ldots\ 6\ 8 \\ 0\ 5\ \ldots\ldots\ 4\ 2 \end{array}$$

der vollständigen Reihen der letzteren Bedingung entsprechen. Die Ziffernsumme dieses Theiles ist daher etwas kleiner als 81, und zwar um den Betrag der beiden unberücksichtigt gebliebenen Ziffern 4 und 1. Indem diese beiden Ziffern am Anfange und Ende der Gesammtsumme hinzutreten, decken sie die fehlende Ziffer $5 = 1 + 4$ der Phönixzahl, machen aber das Produkt um eine Ziffer l ä n g e r als die Phönixzahl und dieser ungleich.

Nur wenn der zusammengesetzte Faktor der Phönixreihe angehört, wie z. B. ${}^{1}7 = 17$, bleibt Periodizität und Ziffernsumme ungeändert, indem die Endziffer 0 der Phönixreihe die Verlängerung der Reihe verhütet.

8. Der Faktor $x = 3$ liefert im erzeugenden Multiplikationsprozess aus dem Anfangsgliede $a = 1$ eine ganz andere Phönixzahl, als der Faktor 2, nämlich folgende 28-ziffrige Zahl:

$$\ldots 9\ 3\ {}^{1}1 \left| {}^{1}0\ {}^{1}3\ {}^{2}4\ 4\ {}^{2}8\ {}^{1}2\ {}^{2}7\ {}^{1}5\ 8\ 6\ {}^{2}2\ {}^{2}0\ {}^{2}6\ {}^{1}8\ {}^{1}9\ {}^{1}6\ 5\ {}^{2}5\ 1\ {}^{1}7\ 2\ {}^{1}4\ {}^{2}1\ {}^{2}3\ 7\ 9\ 3\ {}^{1}1 \right|$$

Dieselbe enthält die Ziffern

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ {}^{1}0 & {}^{1}1 & {}^{1}2 & {}^{1}3 & {}^{1}4 & {}^{1}5 & {}^{1}6 & {}^{1}7 & {}^{1}8 & {}^{1}9 \\ {}^{2}0 & {}^{2}1 & {}^{2}2 & {}^{2}3 & {}^{2}4 & {}^{2}5 & {}^{2}6 & {}^{2}7 & {}^{2}8 \end{array}$$

bildet mithin die Summe $45 + 45 + 36 = 126 = 9 \,.\, 14$.

Auch diese Zahl, welche eine 28-gliedrige Strecke einer unendlichen periodischen Zahl darstellt, liefert durch gewöhnliche Multiplikation mit einer der darin enthaltenen Zahlen x, d. h. mit einer der Zahlen 1, 2, 3, ... 9 oder 10, 11, 12, ... 19 oder 20, 21, 22, ... 28 dieselbe Reihe von demjenigen Anfangspunkte aus, welcher $= x$ ist. So ergiebt z. B. der Faktor $x = 7$ die Reihe

$$\ldots 8\ 9\ 6\ 5\ 5\ 1\ 7$$

welche die mit ${}^{0}7$ beginnende 28-ziffrige obige Phönixzahl ist.

Die Multiplikation mit einer nicht in der Phönixzahl enthaltenen Zahl liefert auch hier eine der Phönixzahl nicht ganz gleiche Zifferngruppe, aber eine Reihe von konstanter Z i f f e r n s u m m e 126.

9. Der Faktor $x = 4$ liefert durch den erzeugenden Multiplikationsprozess keine Phönixzahl, sondern die 6-ziffrige Zahl

$$\ldots\ 4\ \overset{1}{1}\ \Big|\ \overset{2}{0}\ \overset{2}{2}\ \overset{1}{5}\ 6\ 4\ 1\ \Big|$$

mit der Ziffernsumme 18. Diese Zahl enthält nur die Ziffern

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ {}^{1}0 & {}^{1}6 \\ {}^{2}2 & {}^{2}5 \end{array}$$

ist also unvollständig. Nur das 1-fache und das 4-fache dieser Zahl zeigt dieselbe Gruppe, jedes andere Vielfache weicht davon ab, und die Ziffernsummen variiren zwischen den Werthen 18, 27, 36.

10. Der Faktor $x = 5$ erzeugt ebenfalls keine Phönixzahl, sondern eine 42-ziffrige unvollständige Zahl

$$\ldots\ 5\ \overset{1}{1}\ \Big|\ 0\ \overset{2}{2}\ 0\ \overset{4}{4}\ 0\ \overset{3}{8}\ \ldots\ldots\overset{4}{.}\ \overset{3}{3}\ \overset{3}{8}\ \overset{2}{7}\ \overset{2}{7}\ 5\ 5\ 1\ \Big|$$

welcher die Glieder $7,\ {}^{1}4,\ {}^{2}1,\ {}^{2}8,\ {}^{3}5,\ {}^{4}2$ fehlen, was zur Folge hat, dass sich jene Zahl zwar durch ihr 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 9-faches, aber nicht durch ihr 7-faches reproduzirt, das Letztere vielmehr die 6-ziffrige Zahl 142 857 hervorbringt, sodass 7 solcher 6-ziffrigen Perioden die Länge der ersten 42-ziffrigen Zahl ergeben. Ebensowenig ergiebt das 14-, 21-, 28-, 35- und 42-fache die Phönixzahl. Es ist jedoch bemerkenswerth, dass die Ziffernsumme der 7 Perioden des 7-fachen konstant $= 189 = 3 . 9 . 7$ bleibt.

11. Der Faktor 6 erzeugt wiederum eine vollständige 58-ziffrige Phönixzahl, welche aus folgenden beiden Strecken besteht.

$$\overset{5}{3}\ \overset{4}{8}\ \overset{1}{9}\ 8\ \overset{3}{3}\ 0\ \overset{5}{5}\ \overset{2}{0}\ \overset{4}{8}\ \overset{2}{4}\ \overset{3}{7}\ \overset{4}{4}\ \overset{3}{5}\ \overset{1}{7}\ \overset{4}{6}\ 2\ \overset{1}{7}\ \overset{5}{1}\ \overset{3}{1}\ \overset{2}{8}\ \overset{2}{6}\ 4\ \overset{4}{4}\ \overset{4}{0}\ \overset{4}{6}\ \overset{5}{7}\ \overset{3}{7}\ \overset{3}{9}\ 6\ 6\ 1\ \Big|$$

$$\ldots\ 6\ 6\ \overset{1}{1}\ \Big|\ \overset{4}{0}\ \overset{5}{1}\ \overset{2}{6}\ \overset{5}{9}\ 4\ \overset{3}{9}\ \overset{1}{1}\ \overset{3}{5}\ \overset{2}{2}\ \overset{1}{5}\ \overset{2}{4}\ \overset{4}{2}\ \overset{1}{3}\ \overset{5}{7}\ \overset{4}{2}\ 8\ \overset{2}{8}\ \overset{3}{1}\ \overset{3}{3}\ \overset{5}{5}\ \overset{1}{5}\ \overset{1}{9}\ \overset{1}{3}\ 2\ \overset{2}{2}\ \overset{2}{0}\ \overset{5}{3}$$

Dieselbe enthält die Ziffern

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ {}^{1}0 & {}^{1}1 & {}^{1}2 & {}^{1}3 & {}^{1}4 & {}^{1}5 & {}^{1}6 & {}^{1}7 & {}^{1}8 & {}^{1}9 \\ {}^{2}0 & {}^{2}1 & {}^{2}2 & {}^{2}3 & {}^{2}4 & {}^{2}5 & {}^{2}6 & {}^{2}7 & {}^{2}8 & {}^{2}9 \\ {}^{3}0 & {}^{3}1 & {}^{3}2 & {}^{3}3 & {}^{3}4 & {}^{3}5 & {}^{3}6 & {}^{3}7 & {}^{3}8 & {}^{3}9 \\ {}^{4}0 & {}^{4}1 & {}^{4}2 & {}^{4}3 & {}^{4}4 & {}^{4}5 & {}^{4}6 & {}^{4}7 & {}^{4}8 & {}^{4}9 \\ {}^{5}0 & {}^{5}1 & {}^{5}2 & {}^{5}3 & {}^{5}4 & {}^{5}5 & {}^{5}6 & {}^{5}7 & {}^{5}8 & \end{array}$$

mit der Ziffernsumme $9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9 = 261 = 9 . 29$. Jedes Produkt dieser Zahl mit einer Zahl x, welche $= 1, 2, 3, \ldots 9, 10, 11, 12, \ldots 19, 20, 21, \ldots 29, 30, 31, \ldots 39, 40, 41, \ldots 49, 50, 51, \ldots 58$ ist, liefert dieselbe 58-ziffrige Periode. Das Produkt mit jeder beliebigen Zahl zeigt aber die konstante Ziffernsumme 261.

12. Die Faktoren 7, 8, 9 erzeugen keine Phönixzahl.

13. Ausser den einziffrigen Faktoren 2, 3, 6 erzeugen aber manche mehrziffrigen Faktoren vollständige Phönixzahlen. Der Faktor 10 ergiebt

die Reihe ... 0 1 0 1 0 1, also *keine* Phönixzahl. Wohl aber erzeugt der Faktor 11 eine solche Zahl von folgenden 108 Ziffern

```
                      7  4  2  2     2  9  3  5  9  6  2  4  9  5  3  3  1  1
                   7  7  0  6  4  2  2  0  1  8  3  4  8  6  2  3  8  5  3  2  1  1  |
                   4 10  4  5 10  5  4  1  3  9  4  4     4  7  7 10  7  2  5  8  7
                   7  3  3  9  4  4  9  5  4  1  2  8  4  4  0  3  6  6  9  7  2  4
                   1  4  8  6  1  5  7  8  9  9 10  9     9  2  6  7  9  6     3  3
                   6  5  1  3  7  6  1  4  6  7  8  8  9  9  0  8  2  5  6  8  8  0
                   6  6 10  6  3  3     3  8  5  2  3 10  3  6  8  8 10  8  1  7  5
                   7  1  5  5  9  6  3  3  0  2  7  5  2  2  9  3  5  7  7  9  8  1
  2  1  1     1 | 10  1  8  4  3  1  2 10  2  7  6     6  5     5  6  9  7  1
...  3  2  1  1 |  0  0  9  1  7  4  3  1  1  9  2  6  6  0  5  5  0  4  5  8
```

Die Faktoren 12, 13, 14 erzeugen keine vollständigen Phönixzahlen, wohl aber liefert der Faktor 15 die nachstehende 148-ziffrige Phönixzahl

```
                  14  6  9  4  1 13 10  3  7 12  4  3  3  2  7 11  9  7  1
                   9  1  9  4  6  3  0  8  7  2  4  8  3  2  2  1  4  7  6  5  1  |
                   9  9  6  6  4 14  7  4     3     2  5  6  3  4 12  2 13 11 13  2
                   4  9  6  6  4  4  2  9  5  3  0  2  0  1  3  4  2  2  8  1  8  7
                   4 10 12  6  8  9  5 11  8 12  5 13 13  3  9  2 11  6  7 14
                   4  0  2  6  8  4  5  6  3  7  5  8  3  8  9  2  6  1  7  4
                  11 11 12  7  3  5  7 13 14 13  4  4 13 12  8 13     9     6
                   1  6  7  7  8  5  2  3  4  8  9  9  3  2  8  8  5  9  0  6  0
                   9  8 11 10  2 12  1  3  1 12     8  5 10 13  1  4 11  7  2 10
                   9  8  6  5  7  7  1  8  1  2  0  8  0  5  3  6  9  1  2  7  5
                   1  1 11  5 12  3  8  7     5  5  8  8 10     7 10 14 11 14 12
                   1  6  1  0  7  3  8  2  5  5  0  3  3  5  5  7  0  4  6  9  7
           1  1 | 10 10  1  2  6  1 14  5 14  8 14 10  4  2  8  6  5  9  3  6  2  9
      ...  5  1 |  0  0  6  7  1  1  4  0  9  3  9  5  9  7  3  1  5  4  3  6  2  4
```

Aus den Faktoren 16, 17 entspringen keine vollständigen Phönixzahlen, wohl aber aus dem Faktor 18 die nachstehende 178-ziffrige Phönixzahl.

```
                  15  6 14 17 15 15 14  4 12 14  2 10 11  7  4  8 10 14  1
                   5  0  8  3  7  9  8  8  8  2  6  8  1  5  6  4  2  4  5  8  1  |
                   4 11  4 10 12 17 14  5  4  7     4  4  6  8 11  6 12 15 12  2  9  1
                   0  7  2  6  2  5  6  9  8  3  2  4  0  2  2  3  4  6  3  6  8  7  1
                  10  1 16 16  6 15  9  8 13  8 15 10     6  6  9  3 17  9  9  5  1 13
                   2  9  6  0  8  9  3  8  5  4  7  4  8  6  0  3  3  5  1  9  5  3  3
                  17 16  7  7  2  6  7  1 14 14  3  2  4  5 16     9     5 14 16  5  5 17
                   1  8  9  9  4  4  1  3  4  0  7  8  2  1  2  2  9  0  5  0  2  7  9  3
                   2  5 15  8 16  2 11  3     2  2  3 13  5  3 15  7  6 10 13  9  7  3 16
                   6  3  1  2  8  4  9  1  6  2  0  1  1  1  7  3  1  8  4  3  5  7  5  4
                      8  8 12 16  4 13  6 13  7  5     3 12 13 10 17 13 13 11  9  6 11  5
                   4  8  0  4  4  6  9  2  7  3  7  4  3  0  1  6  7  5  9  7  7  6  5  3
                   1 12 12     7 16  1  1 11  2  8  9  4  9  2  7 17 11 11  8 14
                   7  2  0  6  7  0  3  9  1  0  6  1  4  5  2  5  1  3  9  6  6
           1  1 | 10 10 15 11 10 16  3  3 14 15 13 12  1 17  8 17 12  3
      ...  8  1 |  0  0  5  5  8  6  5  9  2  1  7  8  7  7  0  9  4  9
```

14. Aus Vorstehendem folgt, dass es nicht *eine*, sondern *unendlich viel* vollständige Phönixzahlen giebt. Eine solche, aus dem beliebigen einziffrigen oder mehrziffrigen Faktor x erzeugte Zahl muss folgende

Glieder mit den daneben bemerkten Ziffernzahlen und Ziffernsummen enthalten:

						Ziffern-zahl	Ziffern-summe
	${}^{0}1$	${}^{0}2$	${}^{0}3$	. . .	${}^{0}9$	9	45
${}^{1}0$	${}^{1}1$	${}^{1}2$	${}^{1}3$	. . .	${}^{1}9$	10	45
${}^{2}0$	${}^{2}1$	${}^{2}2$	${}^{2}3$	. . .	${}^{2}9$	10	45
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
${}^{x-2}0$	${}^{x-2}1$	${}^{x-2}2$	${}^{x-2}3$	. . .	${}^{x-2}9$	10	45
${}^{x-1}0$	${}^{x-1}1$	${}^{x-1}2$	${}^{x-1}8$	. . .	${}^{x-1}8$	9	36
						$10 . x - 2$	$9(5 . x - 1)$

So hat z. B. die aus dem Faktor 11 gebildete Phönixzahl die Ziffernzahl $10 . 11 - 2 = 108$ und die Ziffernsumme $9(5 . 11 - 1) = 486$; die aus dem Faktor 15 gebildete Phönixzahl hat die Ziffernzahl $10 . 15 - 2 = 148$ und die Ziffernsumme $9(5 . 15 - 1) = 666$; die aus dem Faktor 18 gebildete Phönixzahl hat die Ziffernzahl $10 . 18 - 2 = 178$ und die Ziffernsumme $9(5 . 18 - 1) = 801$.

Dass die durch den Bildungsprozess der Phönixzahl entstehenden Addenden nur die Werthe 0, 1, 2, . . . $x - 1$ annehmen können, leuchtet ein.

Wir behaupten nun, dass die gewöhnliche Multiplikation einer jeden (aus der Einheit 1 mittelst irgend eines Faktors durch erzeugende Multiplikation gebildeten) vollständigen oder unvollständigen Phönixzahl mit einer in der Phönixzahl vorkommenden Zahl, welche die Form ${}^{0}a = a$, oder ${}^{1}a = 10 + a$, oder ${}^{2}a = 20 + a$, oder allgemein, ${}^{n}a = 10 . n + a$ haben wird, die gegebene Phönixzahl oder vielmehr die Periode, welcher die Phönixzahl angehört, von der Stelle ${}^{n}a$ wiedererzeugt, und dass eine vollständige Phönixzahl durch die gewöhnliche Multiplikation mit jeder beliebigen Zahl die ursprüngliche Ziffernsumme behält. Den Beweis dieser beiden Sätze erbringe ich in den nachstehenden Nummern, hebe jedoch nachdrücklich hervor, dass, weil die Zahl ${}^{x-1}9$ kein Glied der Phönixzahl ist, das $[(x - 1) 10 + 9]$-fache der Phönixzahl und jedes Vielfache davon nicht die Periode der Phönixzahl, sondern stets die Periode . . . 9 9 9 9 9, welche mit gewissen Ziffern schliesst, und wenn die Schlussziffern sämmtlich = 9 sind, die Ziffernsumme $x . 9(5x - 1)$ hat, welche das x-fache der Ziffernsumme der Phönixzahl ausmacht. So ist für die aus dem Faktor $x = 2$ entspringende Phönixzahl das ${}^{1}9 = 19$-fache und jedes Vielfache davon, also auch das 38-fache, das 57-fache u. s. w., für die aus dem Faktor $x = 3$ entspringende Phönixzahl das ${}^{2}9 = 29$-fache, das 58-fache u. s. w., für die aus dem Faktor $x = 6$ entspringende Phönixzahl das ${}^{5}9 = 59$-fache, das 118-fache u. s. w. von dem vorstehenden Gesetze ausgeschlossen.

15. Zum Beweise der Konstanz der Periodizität einer Phönixzahl bei der gewöhnlichen Multiplikation mit einer in ihr enthaltenen Zahl vergegenwärtige man sich zuvörderst, dass die Ziffern einer in Dezimalform geschriebenen Zahl nach ihrem Abstande vom Anfangsgliede das

1-fache, das 10-fache, das 100-fache u. s. w. ihres Werthes darstellen, und dass diese Werthe bei der Erzeugung einer Phönixzahl aus der Einheit 1 mittelst des Faktors a das 1-fache von 1, das 10-fache von a, das 100-fache von a^2, das 1000-fache von a^3 u. s. w. bedeuten, dass also eine solche Zahl, wenn man $1 = 10^0$, bezw. $= a^0$ setzt, die Summen

$$\ldots + a^3 . 10^3 + a^2 . 10^2 + a^1 . 10^1 + a^0 . 10^0$$

darstellt. Entwickelt man also die Potenzen von a in Dezimalform, schreibt also, wenn a die allgemeine Form $a = {}^n x = \ldots a_3 a_2 a_1$ hat, $1 = 1$, $a = \ldots a_3 a_2 a_1$, $a^2 = \ldots b_3 b_2 b_1$, $a^3 = \ldots c_3 c_2 c_1$, $a^4 = \ldots d_3 d_2 d_1$ u. s. w.; so ergiebt sich die Phönixzahl, indem man diese Potenzen unter einander setzt, aber jede folgende um eine Stelle nach links verrückt, als die Summe

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
\ldots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \\
\ldots & b_3 & b_2 & b_1 & & \\
\ldots & c_2 & c_1 & & & \\
\ldots & d_1 & & & & \\
\ldots & & & & & \\
 & {\scriptstyle n_3} & {\scriptstyle n_2} & {\scriptstyle n_1} & & \\
\hline
\ldots & m_3 & m_2 & m_1 & a_1 & 1
\end{array}$$

So findet sich z. B. die durch den Faktor $a = 2$ aus der Einheit gebildete und in Nr. 5 vorgeführte Phönixzahl durch die Potenzen von 2 durch folgende Summirung.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&2 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&4 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&8 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&1&6 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&3&2 \\
&&&&&&&&&&&&&&&&6&4 \\
&&&&&&&&&&&&&&1&2&8 \\
&&&&&&&&&&&&&2&5&6 \\
&&&&&&&&&&&&5&1&2 \\
&&&&&&&&&&1&0&2&4 \\
&&&&&&&&&2&0&4&8 \\
&&&&&&&&4&0&9&6 \\
&&&&&&&8&1&9&2 \\
&&&&&1&6&3&8&4 \\
&&&&3&2&7&6&8 \\
&&&6&5&5&3&6 \\
&1&3&1&0&7&2 \\
\cline{1-7}
2&6&2&1&4&4 \\
&&&&&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 1}&&&&{\scriptstyle 1} \\
\hline
&&&&&1\,|&0&5&2&6&3&1&5&7&8&9&4&7&3&6&8&4&2&7\,|
\end{array}$$

Betrachten wir diese Summe von irgend einer Stelle, z. B. von der Stelle $4 + 3 = 7 = {}^0 7$ aus; so entstehen die folgenden Glieder offenbar durch das 2-fache der sukzessiven Glieder 7, 4, 9, 8, 7, 5, 1 u. s. w., nämlich aus den Werthen 2 . 7 = 14, 2 . 4 = 8, 2 . 9 = 18, 2 . 7 = 14, 2 . 5 = 10, 2 . 1 = 2 u. s. w. durch folgende Summirung

```
                                    7
                                1 4
                                8
                            1 8
                          1 6
                        1 4
                      1 0
                      2
                    6
                1 2
                4
            1 0
            0
          2
        4
      8
  1 6
1 2
6
--------------------------------------
7|3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7|
```

Diese 2-fachen der von 7 ausgehenden Glieder ergeben sich aber zugleich aus den 7-fachen der von 1 ausgehenden Glieder der aus der Ziffer 2 entsprungenen Phönixzahl, nämlich aus den Werthen 1 . 7 = 7, 2 . 7 = 14, 4 . 7 = 28, 8 . 7 = 56, 6 . 7 = 42, 3 . 7 = 21, 7 . 7 = 49 u. s. w. und entsprechen der Summirung

```
                                    7
                                1 4
                              2 8
                            5 6
                          4 2
                        2 1
                      4 9
                    2 8
                  6 3
                5 6
              4 9
            3 5
            7
        2 1
      4 2
    1 4
  3 5
  0       1 1 1 1   1 1
--------------------------------------
  3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
```

Statt der aus der Phönixzahl genommenen Ziffern 1, 2, 4, 8, 6, 3, 7 etc. kann man aber auch die Potenzen von 2 setzen, aus welchen jene Ziffern entstanden sind, d. h. man kann die 7-fachen von 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc. in folgender Form summiren

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 7 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 4 & \\
 & & & & & & & & & 2 & 8 & & \\
 & & & & & & & & 5 & 6 & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 2 & & & & \\
 & & & & & 2 & 2 & 4 & & & & & \\
 & & & & 4 & 4 & 8 & & & & & & \\
 & & & 8 & 9 & 6 & & & & & & & \\
 & 1 & 7 & 9 & 2 & & & & & & & & \\
3 & 5 & 8 & 4 & & & & & & & & & \\
 & & \text{u. s. w.} & & & & & & & & & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7
\end{array}$$

Nennen wir zwei Dezimalzahlen, welche gleiche Anfangsglieder haben, einander **äquivalent** und bezeichnen wir diese Äquivalenz durch das Symbol $\equiv$, setzen also z. B. $53 \equiv 13 \equiv 3$; so erscheinen in den vorstehenden drei Operationen die Summen der oben stehenden Glieder (mit Einschluss der bei der Summirung entstehenden Addenden) sämmtlich den darunter stehenden Ziffern ... 1, 5, 7, 8, 9, 4, 7 und daher unter einander äquivalent. So hat man z. B. von der sechsten Ziffer 5 an

$$\begin{array}{llll}
5+2+8 & \equiv 1+4 \equiv 4+1 & \equiv 1+4 & \equiv 5 \\
0+4+6+1 & \equiv 1+0 \equiv 2+9 & \equiv 1+2+8 & \equiv 1 \\
1+0+9+2+1 & \equiv 1+2 \equiv 4+8+1 & \equiv 2+4+6+1 & \equiv 3 \\
2+0+9+4+1 & \equiv \quad\; 6 \equiv 2+3+1 & \equiv 4+9+2+1 & \equiv 6
\end{array}$$

u. s. w. Diese Äquivalenz der Summen und in Folge dessen die Gleichheit ihrer Anfangsziffern und demnach die Identität der von dem beliebigen erstgenommenen Gliede 5 an beginnenden Periode beruhet offenbar auf der Gleichheit der Produkte $1.7 = 7.1$, $2.7 = 7.2$, $2^2.7 = 7.2^2$, $2^3.7 = 7.2^3$ u. s. w., ist also von dem speziellen Werthe der Grösse 7 oder des gewählten Anfangsgliedes, sowie auch von dem speziellen Werthe der Grösse 2 oder des erzeugenden Faktors der Phönixzahl unabhängig. Für jeden Werth ${}^m x = 10\,m + x$ statt 7, insofern er nur ein Glied der (mit ihren Addenden geschriebenen) Phönixzahl darstellt, und für jeden Werth ${}^n y = 10\,n + y$ statt 2 als erzeugenden Faktor bestehen die Gleichungen $1.{}^m x = {}^m x.1$, ${}^n y.{}^m x = {}^m x.{}^n y$, $({}^n y)^2.{}^m x = {}^m x.({}^n y)^2$, $({}^n y)^3.{}^m x = {}^m x({}^n y)^3$ u. s. w., allgemein $({}^n y)^z.{}^m x = {}^m x.({}^n y)^z$ und demgemäss die erwähnten Äquivalenzen und die fragliche konstante Periodizität. **Danach stellt jede durch erzeugende Multiplikation aus der Einheit 1 gebildete vollständige Phönixzahl, wenn die Addenden notirt und demnach** die in ihr enthaltenen Zahlen in der Form $''x$ (worin $x = 0$ und > 0 sein kann) erkennbar sind, von der Anfangsziffer x einer jeden solchen Zahl eine Periode dar, welche dem Produkte entspricht, das sich durch gewöhnliche Multiplikation dieser Phönixzahl mit dem Faktor $''x$ ergiebt. Hiervon sind nach Nr. 14 für die aus dem Faktor 2 entspringende Phönixzahl die Multiplikationen mit 19 und einem Vielfachen von 19 ausgeschlossen, weil die Zahl $19 = {}^{1}9$ kein Glied dieser Phönixzahl ist.

Im Vorstehenden haben wir diese Wirkung für die aus dem Faktor 2 erzeugte Phönixzahl von der Stelle 7 aus vorgeführt und bemerken ausdrücklich, dass hierunter nur die siebente Stelle, welche $= {}^{0}7$ ist, nicht die elfte Stelle, welche $= {}^{1}7 = 17$ ist, verstanden werden darf. Ginge man von dieser letzteren Stelle mittelst des einfachen Faktors 7 aus: so beginge man die vorstehende Operation, welche die Reihe . . . 8 9 4 7, nicht aber die von ${}^{1}7$ beginnende Reihe . . . 3 1 5 7 erzeugen und diese Reihe nicht als das 7-fache der Phönixzahl wiedergeben würde.

Will man mit der elften Stelle ${}^{1}7 = 17$ beginnen: so ergiebt sich

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 7 \\
 & & & & & & & 3 & 4 & \\
 & & & & & & 6 & 8 & & \\
 & & & & 1 & 3 & 6 & & & \\
 & & & 2 & 7 & 2 & & & & \\
 & & 5 & 4 & 4 & & & & & \\
1 & 0 & 8 & 8 & & & & & & \\
\multicolumn{3}{r}{\mathrm{u.\,s.\,w.}} & 1 & & 1 & 1 & & & \\
\hline
 & . & . & . & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 \; 7
\end{array}
$$

die wirklich vom elften Gliede aus beginnende Reihe, welche zugleich das 17-fache der Phönixzahl nach der Formel

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & 1 & 7 \\
 & & & & & & 3 & 4 & \\
 & & & & & 6 & 8 & & \\
 & & & 1 & 3 & 6 & & & \\
 & & 1 & 0 & 2 & & & & \\
 & & 5 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 9 & & & & & & \\
\multicolumn{3}{r}{\mathrm{u.\,s.\,w.}} & & 1 & 1 & & & \\
\hline
. \; . \; . & & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7
\end{array}
$$

ist. Man kann hiernach eine vollständige Phönixzahl ausser mit den darin enthaltenen einziffrigen Faktoren, auch mit jedem darin nach der Form $'''x$ enthaltenen mehrziffrigen Faktor multipliziren und wird immer eine konstante Periode finden. Ein Produkt der Phönixzahl mit einer nicht in ihr enthaltenen Zahl liefert nicht die vollständige Periode der Phönixzahl, wohl aber einen Theil davon, an welchen sich rechts und links fremde Ziffern anschliessen. In gewissen Fällen ist die Ziffernsumme dieser fremden Ziffern der Ziffernsumme der fehlenden Ziffern der Phönixzahl gleich und alsdann die Ziffernsumme der neuen Reihe der Ziffernsumme der Phönixzahl gleich, wie es sich in Nr. 7 für das 1001-fache und das 24-fache der dortigen Phönixzahl ereignet hat. Diese Konstanz der Ziffernsumme ist jedoch keine allgemein bestehende Eigenschaft jedes Produktes der Phönixzahl. Für ${}^{m}x = {}^{1}9 = 19$ bildet, wie schon erwähnt, das 19-fache der aus dem Faktor 2 entspringenden Phönixzahl eine aus den Ziffern 9 bestehende und unter Umständen mit einigen anderen Ziffern beginnende Reihe.

Im Vorstehenden ist der Satz, dass die gewöhnliche Multiplikation einer mit der Einheit 1 beginnenden Phönixzahl mit irgend einem in ihr enthaltenen Faktor x stets die Periode der Phönixzahl von der Stelle der Ziffer x an hervorbringt, mehr durch Spezialitäten und bemerkenswerthe Prozesse bestätigt, als streng und allgemein bewiesen: der letztere Zweck wird durch folgende Betrachtung erfüllt.

Die Erzeugung einer Phönixzahl aus dem Faktor a durch erzeugende Multiplikation, sowie die gewöhnliche Multiplikation einer gegebenen Phönixzahl mit einem Faktor x erfordert die Herstellung der sukzessiven einfachen Ziffern einer in Dezimalform dargestellten Zahlenreihe. Diese Ziffern bilden sich im ersten Falle durch die fortgesetzte Multiplikation einer vorher erzeugten Ziffer mit dem Faktor a unter Hinzufügung eines durch die vorhergehende Zahl bedingten Addends und im zweiten Falle durch die fortgesetzte Multiplikation einer in der Phönixzahl bereits gegebenen Ziffer mit dem Faktor x gleichfalls unter Hinzufügung eines vorher festgestellten Addends. Diese Operation mit einfachen Ziffern kann, da es sich immer nur um die Bildung von Ziffern handelt, auch auf eine Operation mit äquivalenten Zahlen zurückgeführt werden, deren Anfangsziffer der gegebenen Ziffer gleich ist, da man für jede solche Ziffer z immer $a.z \equiv a.(m.10 + z)$ und allgemein $x.z \equiv x.(m.10 + z)$ hat. So bildet z. B. die erzeugende Multiplikation die Ziffern der Phönixzahl 052631578947368421 durch Multiplikation der sich ergebenden einfachen Ziffern mit dem Faktor 2 unter Hinzufügung eines aus der vorhergehenden Zahl stammenden Addends. Ist also z eine noch nicht mit einem Addend behaftete Ziffer der Phönixzahl; so bestimmt sich die nächste Ziffer z_1 der Phönixzahl aus dem Produkte $2z = n.10 + z_1$ durch Zerlegung des Werthes von $2z$ in das grösstmögliche Zehnfache $n.10$ und die überschiessende einfache Ziffer z_1. Hat z einen der Werthe 0, 1, 2, 3, 4; so ist offenbar $n = 0$ und $2z = 0.10 + z_1$ oder $2z = z_1$: hat dagegen z einen der Werthe 5, 6, 7, 8, 9; so ist $n = 1$ und $2z = 1.10 + z_1$. Die Grösse n, welche hiernach für die aus dem Faktor 2 entspringende Phönixzahl nur $= 0$, oder $= 1$ sein kann, ist der Addend für die auf z_1 folgende Ziffer, der aus z entspringende Addend macht sich also als solcher immer in der dritten Stelle geltend, und es ist für die Bestimmung der Ziffern z und der Addenden n offenbar irrelevant, ob zu diesen Resultaten noch Werthe gefügt werden, welche beliebige Zehnfache darstellen, da diese die Äquivalenz der Resultate nicht beeinflussen. Setzt man nämlich, wenn $r.10$ ein beliebiges Zehnfaches bedeutet, in erster Stelle

$A = r \, . \, 10 + z \equiv z$; so ist für die zweite Stelle $A_1 = 2\,A \equiv 2\,z = n \, . \, 10 + z_1 \equiv z_1$ und für die dritte Stelle $A_2 = 2\,A_1 + n = 2 \, . \, n \, . \, 10 + 2\,z_1 + n \equiv 2\,z_1 + n = b \, . \, 10 + z_2 \equiv z_2$.

Hiernach ergeben sich die Ziffern und Addenden der in Rede stehenden Phönixzahl von der Einheit 1 an für $r = 0$ in der Reihenfolge

$$\begin{array}{llll}
A_0 = 1 & & = 0 \, . \, 10 + 1 & \equiv 1 \\
A_1 = 2 \, . \, 1 & & = 0 \, . \, 10 + 2 & \equiv 2 \\
A_2 = 2 \, . \, 2 & & = 0 \, . \, 10 + 4 & \equiv 4 \\
A_3 = 2 \, . \, 4 & & = 0 \, . \, 10 + 8 & \equiv 8 \\
A_4 = 2 \, . \, 8 & & = 1 \, . \, 10 + 6 & \equiv 6 \\
A_5 = 2 \, . \, 6 & + 1 & = 1 \, . \, 10 + 3 & \equiv 3 \\
A_6 = 2 \, . \, 3 & + 1 & = 0 \, . \, 10 + 7 & \equiv 7 \\
A_7 = 2 \, . \, 7 & + 0 & = 1 \, . \, 10 + 4 & \equiv 4 \\
A_8 = 2 \, . \, 4 & + 1 & = 0 \, . \, 10 + 9 & \equiv 9
\end{array}$$

u. s. w., und wenn man statt des einziffrigen Faktors von 2 in den Werthen der A mehrziffrige Zahlen setzt, welche diesem Faktor äquivalent sind, also z. B. für $A_5 = 2 \, . \, 6 + 1$ den Werth $2 \, . \, 16 + 1 = 2 \, . \, 10 + 2 \, . \, 6 + 1$ einführt, sodass jedes folgende A im ersten Gliede das 2-fache des vorhergehenden A und im zweiten Gliede den ihm zukommenden Addenden darstellt:

$$\begin{array}{lllr}
A_0 & = 1 & & \equiv 1 \\
A_1 & = 2\,A_0 + 0 = & 2 & \equiv 2 \\
A_2 & = 2\,A_1 + 0 = & 4 & \equiv 4 \\
A_3 & = 2\,A_2 + 0 = & 8 & \equiv 8 \\
A_4 & = 2\,A_3 + 0 = & 16 & \equiv 6 \\
A_5 & = 2\,A_4 + 1 = & 33 & \equiv 3 \\
A_6 & = 2\,A_5 + 1 = & 67 & \equiv 7 \\
A_7 & = 2\,A_6 + 0 = & 134 & \equiv 4 \\
A_8 & = 2\,A_7 + 1 = & 269 & \equiv 9 \\
A_9 & = 2\,A_8 + 0 = & 538 & \equiv 8 \\
A_{10} & = 2\,A_9 + 1 = & 1077 & \equiv 7
\end{array}$$

Bei dieser wie bei der vorhergehenden Darstellung sind die Addenden stets durch die Schlussziffer des dritten vorhergehenden Gliedes fest bestimmt. So geben die Ziffern 1, 2, 4 der ersten drei Glieder A_0, A_1, A_2 den Addend 0 für A_2, A_3, A_4, die Ziffern 8, 6 von A_3 und A_4 geben den Addend 1 für A_5 und A_6, die Ziffer 3 von A_5 giebt den Addend 0 für A_7, die Ziffer 7 von A_6 giebt den Addend 1 für A_8 u. s. w. Alle Addenden bestimmen sich also ohne besondere Rechnungen aus den Schlussziffern der um zwei Stellen vorhergehenden Glieder und die Bestimmung der Schlussziffern, welche die Anfangsziffern der Werthe von A oder deren Äquivalente sind, erfordert nur die Herstellung des betreffenden A in Dezimalform.

Dass man auf diese Weise die Periode der Phönixzahl nicht nur vom Einheitsgliede, sondern von jedem Gliede an herstellen kann, leuchtet ein: es kömmt nur darauf an, festzustellen, ob dieses Glied den Addend 0, oder 1 hat, was natürlich den Rückblick auf die Schlussziffer des dritten vorhergehenden Gliedes erfordert. Ohne diesen Rückblick, also auch ohne Kenntniss der vorhergehenden Schlussziffern, ergiebt sich die Periode der Phönixzahl aus jeder e i n f a c h e n Ziffer, z. B. aus 7, wenn man $A_0 = 7$ setzt, folgendermaassen

$$\begin{aligned} A_0 & & &= 7 \equiv 7 \\ A_1 &= 2A_0 & &= 14 \equiv 4 \\ A_2 &= 2A_1 + 1 & &= 29 \equiv 9 \\ A_3 &= 2A_2 + 0 & &= 58 \equiv 8 \\ A_4 &= 2A_3 + 1 & &= 117 \equiv 7 \end{aligned}$$

u. s. w., worin das erste Glied $= A_0$, das zweite Glied $A_1 = 2A_0$ ist und die Addenden für die folgenden Glieder A_2, A_3 etc. lediglich durch die dritte der vorhergehenden Schlussziffern bestimmt sind. Man erkennt in den Schlussziffern die Periode der Phönixzahl vom siebenten Gliede an.

Ist das Glied, womit man beginnen will, nicht einziffrig, sondern wie 17 z w e i z i f f r i g: so muss dasselbe als mit dem Addend 1 behaftet erscheinen, man hat also

$$A_1 = 17 = 2\,A_0 + 1 = 2 \,.\, 8 + 1$$

zu setzen, wonach $8 = \frac{17-1}{2}$ die Schlussziffer des vorhergehenden Gliedes ist. Diess giebt

$$\begin{aligned} A_0 & & &= 8 \equiv 8 \\ A_1 &= 2A_0 + 1 & &= 17 \equiv 7 \\ A_2 &= 2A_1 + 1 & &= 25 \equiv 5 \\ A_3 &= 2A_2 + 1 & &= 51 \equiv 1 \\ A_4 &= 2A_3 + 1 & &= 103 \equiv 3 \\ A_5 &= 2A_4 + 0 & &= 206 \equiv 6 \\ A_6 &= 2A_5 + 0 & &= 412 \equiv 2 \end{aligned}$$

u. s. w. Man erkennt in den Schlussziffern die Periode der Phönixzahl vom elften Gliede an.

Jetzt beachte man, dass dieselbe Ziffernreihe, welche durch wiederholte Multiplikation der Ziffer 7 mit dem Faktor 2 unter Hinzufügung bestimmter, aus dem unmittelbar vorhergehenden Gliede stammenden Addenden Resultate ergeben muss, welche der Multiplikation der Ziffer 2 mit dem Faktor 7 unter Hinzufügung derselben Addenden äquivalent sind: denn, da es sich immer nur um die Herstellung von Anfangsziffern handelt und diese Ziffern durch den Multiplikator und die Anfangsziffer des Multiplikands (nicht durch die folgenden Ziffern des Multiplikands), sowie durch den Addend bestimmt sind; so hat man für jede beliebige Ziffer x nicht nur

$$1 . x \equiv x . 1$$
$$2 . x \equiv x . 2$$
$$4 . x \equiv x . 4$$
$$8 . x \equiv x . 8$$

u. s. w., sondern auch, wenn $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sowie $b_0, b_1, b_2 \ldots$ beliebige ein- oder mehrziffrige Zahlen sind,

$$1 (10 . a_0 + x) \equiv (10 . b_0 + x) 1$$
$$2 (10 . a_1 + x) \equiv (10 . b_1 + x) 2$$
$$4 (10 . a_2 = x) \equiv (10 . b_2 + x) 4$$

u. s. w. und daher, wenn $n_0, n_1, n_2, n_3 \ldots$ Addenden sind,

$$1 (10 . a_0 + x) + n_0 \equiv (10 . b_0 + x) 1 + n_0$$
$$2 (10 . a_1 + x) + n_1 \equiv (10 . b_1 + x) 2 + n_1$$
$$3 (10 . a_2 + x) + n_2 \equiv (10 . b_2 + x) 4 + n_2$$

u. s. w. Die Addenden $n_0, n_1, n_2 \ldots$ ergeben sich hiernach für die linke und rechte Seite dieser Äquivalenzen aus den vorhergehenden Gliedern auf dieselbe Weise, sie sind aber jetzt nicht mehr auf die Werthe 0 und 1 beschränkt; man hat also, wenn man in den vorstehenden Formeln, welche die sukzessiven Glieder der Phönixzahl erzeugen, vom Gliede $x = 7$ an statt der aus der Phönixreihe hervorgehenden Multiplikanden, welche Vielfache von 2 oder deren Anfangsglieder sind, die sukzessiven Zweifachen von 7 und statt der dortigen Addenden die aus den nächsten Vorgliedern stammenden Addenden setzt,

$$\begin{array}{rcrcrcl}
7 & = & 7 & & & & \equiv 7 \\
2 . 7 & = & 14 & = & 10 + 4 & \equiv 2 . 7 & \equiv 4 \\
2 . 14 + 1 & = & 29 & = & 20 + 9 & \equiv 2 . 4 + 1 & \equiv 9 \\
2 . 28 + 2 & = & 58 & = & 50 + 8 & \equiv 2 . 8 + 2 & \equiv 8 \\
2 . 56 + 5 & = & 117 & = & 110 + 7 & \equiv 2 . 6 + 5 & \equiv 7 \\
2 . 112 + 11 & = & 235 & = & 230 + 5 & \equiv 2 . 2 + 1 & \equiv 5 \\
2 . 224 + 23 & = & 471 & = & 470 + 1 & \equiv 2 . 4 + 3 & \equiv 1
\end{array}$$

u. s. w. Hierdurch sind die Phönixzahlen vom siebenten Gliede 7 an dargestellt. Geht man jetzt von den sukzessiven Siebenfachen von 2 aus; so ergiebt sich

$$\begin{array}{rcrcrcl}
7 . 1 & = & 7 & & & & \equiv 7 \\
7 . 2 & = & 14 & = & 10 + 4 & \equiv 2 . 7 & \equiv 4 \\
7 . 4 + 1 & = & 29 & = & 20 + 9 & \equiv 2 . 4 + 1 & \equiv 9 \\
7 . 8 + 2 & = & 58 & = & 50 + 8 & \equiv 2 . 8 + 2 & \equiv 8 \\
7 . 16 + 5 & = & 117 & = & 110 + 7 & \equiv 2 . 6 + 5 & \equiv 7 \\
7 . 32 + 11 & = & 235 & = & 230 + 5 & \equiv 2 . 2 + 1 & \equiv 5 \\
7 . 64 + 23 & = & 471 & = & 470 + 1 & \equiv 2 . 4 + 3 & \equiv 1
\end{array}$$

u. s. w. Diese Operation ist mit der vorhergehenden identisch, da man

$$\begin{array}{llll}
1.7 = 7 \equiv 7 & & 7.1 = 7 \equiv 7 \\
2.7 = 14 \equiv 4 & & 7.2 = 14 \equiv 4 \\
2.4 = 8 \equiv 8 & & 7.4 = 28 \equiv 8 \\
2.8 = 16 \equiv 6 & & 7.8 = 56 \equiv 6 \\
2.6 = 12 \equiv 2 & & 7.6 = 42 \equiv 2 \\
2.2 = 4 \equiv 4 & & 7.2 = 14 \equiv 4 \\
2.4 = 8 \equiv 8 & & 7.4 = 28 \equiv 8
\end{array}$$

u. s. w. hat. In der letzteren Form erscheinen aber die Ziffern der Phönixzahl von der Stelle 7 an als Resultate der gewöhnlichen Multiplikation der Phönixziffern von der Einheit an, und hieraus folgt, dass das Produkt der mit der Einheit 1 beginnenden durch den Faktor 2 erzeugten Phönixzahl mit irgend einer einziffrigen Zahl x oder auch mit irgend einer zweiziffrigen Zahl von der Form $10 + x$ (jedoch mit Ausschluss der in dieser Phönixzahl nicht vorkommenden Zahl $10 + 9$) die Periode der Phönixzahl von der der Zahl x, bezw. $10 + x = {}^1x$ zukommenden Stelle hervorbringt.

Hinsichtlich der Addenden bemerke ich noch, dass dieselben nach der letzten Formulirung ein fortwährendes Wachsthum zeigen, ferner dass sie sich, als Zusätze zu den Werthen von $2A$, nach der vorhergehenden Formulirung auf die Werthe 0 und 1 beschränken, indem man

$$\begin{array}{lllll}
7 & = 7 & & = A_6 & \\
2.7 & = 7.\ 2 & = 14 & = A_7 & = 2A_6 + 0 \\
2.14 + 1 & = 7.\ 4 + 1 & = 29 & = A_8 & = 2A_7 + 1 \\
2.28 + 2 & = 7.\ 8 + 2 & = 58 & = A_9 & = 2A_8 + 0 \\
2.56 + 5 & = 7.16 + 5 & = 117 & = A_{10} & = 2A_9 + 1 \\
2.112 + 11 & = 7.32 + 11 & = 235 & = A_{11} & = 2A_{10} + 1
\end{array}$$

u. s. w. hat und dass sie, wenn als Faktoren von x die einfachen Ziffern der Phönixzahl genommen werden, alle diejenigen Werthe n anzunehmen vermögen, welche die Grössen $0.x$, $1.x$, $2.x$, ... $9.x$ darbieten, sobald man diese Grössen in die Form $n.10 + a$ stellt. Demnach kann n für $x = 7$ die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen. In der That erhält man nach gewöhnlicher Multiplikation der Ziffern der Phönixzahl mit 7

$$\begin{array}{llll}
7.1 & = 7 & = 0.10 + 7 & \equiv 7 \\
7.2 & = 14 & = 1.10 + 4 & \equiv 4 \\
7.4 + 1 & = 29 & = 20 + 9 & \equiv 9 \\
7.8 + 2 & = 58 & = 50 + 8 & \equiv 8 \\
7.6 + 5 & = 47 & = 40 + 7 & \equiv 7 \\
7.3 + 4 & = 25 & = 20 + 5 & \equiv 5 \\
7.7 + 2 & = 51 & = 50 + 1 & \equiv 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
7.4 + 5 = 33 = 30 + 3 \equiv 3 \\
7.9 + 3 = 66 = 60 + 6 \equiv 6 \\
7.8 + 6 = 62 = 60 + 2 \equiv 2 \\
7.7 + 6 = 55 = 50 + 5 \equiv 5 \\
7.5 + 5 = 40 = 40 + 0 \equiv 0 \\
7.1 + 4 = 11 = 10 + 1 \equiv 1 \\
7.3 + 1 = 22 = 20 + 2 \equiv 2 \\
7.6 + 2 = 44 = 40 + 4 \equiv 4 \\
7.2 + 4 = 18 = 10 + 8 \equiv 8 \\
7.5 + 1 = 36 = 30 + 6 \equiv 6 \\
7.0 + 3 = 3 = 0.10 + 3 \equiv 3 \\
\hline
7.1 + 0 = 7 = 0.10 + 7 \equiv 7
\end{array}
$$

Die vorstehende Ausführung gilt nicht nur für die aus dem Faktor 2 erzeugte, sondern für jede aus dem Faktor b entspringende Phönixzahl, indem man b an die Stelle von 2 setzt und beachtet, dass nun statt der beiden Addenden 0 und 1 diejenigen Addenden n in Betracht kommen, welche den Werthen von $0.b$, $1.b$, $2.b$, ... $9.b$ entsprechen, wenn man dieselben in die Form $n.10 + a$ setzt. So hat man für die in Nr. 8 betrachtete, aus dem Faktor 3 erzeugte Phönixzahl ... 51 724 137 931, welcher wegen $0.3 = 0$, $1.3 = 0.10 + 3$, $2.3 = 0.10 + 6$, $3.3 = 0.10 + 9$, $4.3 = 1.10 + 2$, $5.3 = 10 + 5$, $6.3 = 1.10 + 8$, $7.3 = 2.10 + 1$, $8.3 = 2.10 + 4$, $9.3 = 2.10 + 7$ die drei Werthe 0, 1, 2 entsprechen,

$$
\begin{array}{llllll}
3^0 & = 1 & & \equiv 1 & A_0 & \\
3^1 & = 3 & & \equiv 3 & A_1 & = 3A_0 + 0 \\
3^2 & = 9 & & \equiv 9 & A_2 & = 3A_1 + 0 \\
3^3 & = 27 & = 20 + 7 & \equiv 7 & A_3 & = 3A_2 + 0 \\
3^4 + 2 & = 83 & = 80 + 3 & \equiv 3 & A_4 & = 3A_3 + 2 \\
3^5 + 8 & = 251 & = 250 + 1 & \equiv 1 & A_5 & = 3A_4 + 2 \\
3^6 + 25 & = 754 & = 750 + 4 & \equiv 4 & A_6 & = 3A_5 + 1 \\
3^7 + 75 & = 2262 & = 2260 + 2 & \equiv 2 & A_7 & = 3A_6 + 0 \\
3^8 + 226 & = 6787 & = 6780 + 7 & \equiv 7 & A_8 & = 3A_7 + 1 \\
3^9 + 678 & = 20361 & = 20360 + 1 & \equiv 1 & A_9 & = 3A_8 + 0 \\
3^{10} + 2036 & = 61085 & = 61080 + 5 & \equiv 5 & A_{10} & = 3A_9 + 2
\end{array}
$$

u. s. w. Ganz in derselben Weise wie für die erste Phönixzahl ist dann durch das vorstehende Verfahren auch für jede andere Phönixzahl die Thatsache leicht zu beweisen, dass die gewöhnliche Multiplikation jeder mit 1 beginnenden Phönixzahl mit irgend einem darin enthaltenen Faktor, insbesondere mit jedem einziffrigen Faktor, die Periode dieser Phönixzahl erzeugt.

16. Der Beginn einer Phönixzahl mit einem darin enthaltenen Gliede x ist gleichbedeutend mit der Erzeugung einer Phönixzahl aus

diesem Gliede $\mathfrak{x}$ als Anfangsglied; man kann also nach Vorstehendem sagen: das Produkt der mit der Einheit 1 beginnenden Phönixzahl mit dem Faktor x ist gleich dieser vom Gliede x an genommenen Phönixzahl. Die letztere Gleichheit findet offenbar auch dann noch statt, wenn x eine ganz beliebige, in der Phönixzahl nicht enthaltene Grösse (jedoch keine der nach Obigem ausgeschlossenen Grössen, welche die Periode . . . 9999 . . . erzeugen) ist, in welchem Falle nur nicht von der Entstehung einer vollkommenen Phönixzahl, sondern von einer davon abweichenden Zahl die Rede sein kann. Die so entstehende Zahl hat aber mit der vollkommenen Phönixzahl eine Gliedergruppe gemein, wie aus Nachstehendem hervorgeht.

Wenn bei der erzeugenden Multiplikation durch den Faktor 2 ein beliebiger Werth für die Anfangszahl x, z. B. der Werth 24, angenommen wird, welcher grösser ist als irgend eine in der Phönixzahl enthaltene Zahl; so nimmt die Operation mittelst der Werthe . . . $(2^3 . 24)$, $(2^2 . 24)$, $(2 . 24)$, $(1 . 24)$ folgenden Verlauf

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & & & & & & & & & 2 & 4 \\
 & & & & & & & & 4 & 8 & \\
 & & & & & & & 9 & 6 & & \\
 & & & & & 1 & 9 & 2 & & & \\
 & & & & 3 & 8 & 4 & & & & \\
 & & & 7 & 6 & 8 & & & & & \\
 & 1 & 5 & 3 & 6 & & & & & & \\
\text{u. s. w.} & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & . & . & . & & & & & \\
 & & & & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 4
\end{array}$$

Diese Periode stimmt nicht mit der der Phönixzahl überein: es ist jedoch leicht zu übersehen, dass die Addenden bei fortschreitender Addition, wenn sie nicht schon von vornherein die Höhe des grössten Addends 1 der Phönixreihe erreicht oder unterschritten haben, allmählich auf diese Höhe herabsinken, also mit den ihnen zugehörigen einziffrigen Gliedern der neuen Reihe nothwendig früher oder später eine in der Phönixreihe enthaltene Zahl $''a$ bilden müssen, dass also von dieser Stelle an sich die Periode einstellt, welche die Phönixzahl von der entsprechenden Stelle aus besitzt. Vor dieser Stelle hat die neue Reihe eine Ziffernfolge, welche der Phönixzahl nicht entspricht. Im vorstehenden Beispiele beginnt die Periode der Phönixzahl an der zweiten Stelle mit 1, und dieser Stelle geht die Gruppe 0 4 voran, welche der Phönixzahl nicht angehört.

Wird die Operation ins Unendliche fortgesetzt; so reproduzirt sich von der gedachten Stelle aus unausgesetzt die ganze Periode der Phönixzahl. Wird die Operation aber mit einer endlichen Anzahl von Operationen, insbesondere mit der der Gliederzahl der Phönixzahl entsprechenden Anzahl von 18 Operationen abgebrochen; so erlischt die angebahnte Periode der Phönixzahl schon vor der Vollziehung der letzten Operation und es folgen darauf als Endglieder Ziffern, welche ebenfalls der Phönixzahl nicht angehören. Im vorliegenden Falle schliesst nämlich (wie schon in Nr. 7 gezeigt ist) die neue Reihe mit den Ziffern 1 2 6 3 . . ., wovon die Ziffern 2 6 3 . . . der Phönixzahl angehören, die Ziffer 1 aber ausserhalb liegt. Statt der vorderen und hinteren Ziffern 1, 0, 4 hat die Phönixzahl die Ziffern 0, 5, deren Summe der Summe der ersteren Ziffern gleich ist, sodass das 24-fache der Phönixzahl dieselbe Ziffernsumme hat wie die Phönixzahl selbst. Die Meinung nun, dass diese Konstanz der Ziffernsumme allgemein, für jeden Multiplikator stattfinde, ist durchaus i r r i g. Es liegt ja schon auf der Hand, dass, wenn der Multiplikator mehr Stellen hat, als die Phönixzahl P, wie es z. B. bei den Potenzen P^2, P^3, P^n, $m \,.\, P^n$ der Fall ist, bei genügender Höhe von n und m Resultate von ungeheuerer Länge enstehen müssen, welche unmöglich die Ziffernsumme von P haben können. Es besteht jedoch zwischen den neu auftretenden fremden Ziffern und den verschwindenden Ziffern der Phönixzahl eine eigenthümliche Beziehung, welche wir nachstehend erörtern wollen.

Bei dem Abbruche der eben erwähnten Operation können die Endziffern der neuen Reihe nicht mehr durch diese Operation festgestellt werden. Am leichtesten wird das Produkt einer Phönixzahl mit einem zusammengesetzten Faktor $x = \ldots a_2\, a_1\, a = \ldots 100\, a_2 + 10\, a_1 + a$ durch Addition der um je ein Glied vorgeschobenen Werthe des a-fachen, des a_1-fachen, des a_2-fachen u. s. w. ausgeführt: die vorstehende Betrachtung hat aber den Werth, die Thatsache zur Erkenntniss zu bringen, dass, wenn der Multiplikator nicht grösser ist, als die Phönixzahl, in der Gesammtsumme nothwendig eine Strecke der Phönixzahl liegen muss, an welche sich vorn und hinten eine Anzahl fremder Ziffern anschliesst. Bilden wir hiernach das 724-fache der obigen Phönixzahl; so ergiebt sich aus dem 4-fachen, dem 2-fachen und dem 7-fachen der Phönixzahl die Summe

		2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	
3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7		
	1	1		1		1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1		
3	8	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	0	4

Der Phönixzahl gehört die Reihe 0 5 . . . 6 8 an, die Ziffern 3, 8, 1 und 0, 4 gehören ihr nicht an; sie bilden die Summe 16, wogegen die fehlenden Ziffern der Phönixzahl, nämlich 4, 2, 1, die Summe 7 bilden. Diese beiden Summen sind durchaus nicht gleich, die erstere ist vielmehr um 9 Einheiten grösser als die letztere, und in der That ist die Ziffernsumme des 724-fachen der Phönixzahl gleich 90, während die der Phönixzahl selbst gleich 81 ist.

Zur Erkenntniss des Wesens der neu entstehenden Ziffern heben wir zunächst hervor, dass, wenn von der unendlichen Periode, welcher die Phönixzahl angehört, irgend zwei gleich lange Strecken vertikal unter einander gesetzt und dann addirt werden, sich nothwendig eine Reihe ergeben muss, welche mit Ausnahme der Anfangs- und der Endziffer jener Periode angehört. So hat man z. B.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 \\
 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 \\
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
\hline
1 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 8
\end{array}$$

Mit Ausnahme der Anfangsziffer 8 und der Endziffer $^{1}4 = 14$ stellen die 16 Ziffern 7 3 . . . 7 8 nach dem Obigen eine Strecke der Periode der Phönixzahl dar, während die überschüssigen Ziffern 1, 4, 8 die Summe 13 bilden, welche auch die in der 18-gliedrigen Phönixzahl fehlenden Ziffern 9, 4 darstellen, wodurch die Ziffernsumme der neuen Zahl gleich der der Phönixzahl bleibt.

Setzen wir unter die vorstehenden zwei Reihen oder, was Dasselbe sagt, unter deren Summe eine dritte gleich lange Strecke der Phönixzahl; so muss sich mit Ausschluss von zwei Anfangs- und zwei Endziffern eine 14-stellige Reihe aus der Periode der Phönixzahl, z. B. die folgende einstellen

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 8 \\
 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 \\
 & & & & {\scriptstyle 1} & & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
\hline
1 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 6
\end{array}$$

Die zwischen der Anfangs- und Endziffer liegende Reihe 8 . . . 5 gehört der Phönixzahl an und die überschüssigen Ziffern 1 und 6 bilden die Summe 7 wie die fehlende Phönixziffer 7. Aber auch, wenn man rechts und links zwei Ziffern, nämlich rechts 6 und 5 und links 9 und $^{1}8 = 18$, also die Summe $6 + 5 + 9 + 1 + 8 = 29$ abschneidet, bilden dieselbe die Summe der fehlenden Ziffern $5 + 7 + 8 + 9 = 29$, während die zwischenliegende Periode 4 . . . 1 14-stellig ist, nämlich 2 Stellen weniger als die vorhergehende und überhaupt 4 Stellen weniger als die Phönixzahl hat. Auf diese Weise wird erkannt, dass eine aus n Gruppen der 18-stelligen Periode gebildete Summe gewiss eine Strecke der Phönixzahl von $18 - (n - 1)$ Stellen, unter Umständen jedoch eine noch etwas längere Strecke enthalten wird und dass die überschiessenden Anfangs- und Endziffern zu den fehlenden Phönixziffern in einer bestimmten Beziehung stehen werden, welche dadurch nicht geändert wird, dass man von der wirklich periodischen Stellenzahl Glieder abschneidet und den Aussengliedern zuzählt, da diese die Summe der Aussenglieder und die Summe der fehlenden Phönixglieder in gleicher Weise verändern.

Die eben erwähnte Beziehung der Aussenglieder zu den fehlenden Phönixgliedern besteht nicht, wie schon an dem 724-fachen der Phönixzahl gezeigt ist, in der unbedingten Gleichheit der Summen der horizontal neben einander gestellten und so addirten Glieder, sondern in einer anderen Gleichheit. Gehen wir nämlich von der soeben betrachteten Addition gleich langer und an derselben Stelle beginnender Perioden zu der Addition gleich langer, aber sukzessiv um eine Stelle nach links vorrückender Perioden über, welche die Multiplikation der Phönixzahl mit einer 1-, 2-, 3-, 4- . . . n-ziffrigen Zahl bedeuten: so wird sich von rechts her bezw. nach der 1-ten, 2-ten, 3-ten, 4-ten, . . . n-ten Stelle eine Strecke der Periode der Phönixzahl einstellen. Dieselbe wird in einer gewissen, immer kürzer werdenden Entfernung erlöschen und links eine Anzahl von Ziffern übrig lassen, welche ebensowenig wie die gedachten Anfangsziffern der Periode angehören. Diese fremden Anfangs- und Endziffern bilden nun stets eine den fehlenden Phönixziffern gleiche Summe, wenn die rechts überschiessenden Ziffern in jeder Reihe links vor das Ende der Reihe gesetzt und nun alle diese Ziffern in ihrer vertikalen Stellung nach dem Additionsgesetze addirt werden, während die fehlenden Phönixziffern in horizontaler Anreihung zu addiren sind: denn in dieser Übereinanderstellung der Anfangs- und Endglieder liegt deutlich erkennbar ihre Ergänzung zu periodischen Gliedern, d. h. die vorher mit einer bestimmten periodischen Ziffer abschliessende Reihe setzt sich vermöge dieser Addition der Anfangs- und Endglieder nothwendig in der Periode der Phönixzahl fort, da die an das Ende gesetzten Anfangsglieder ja nichts Anderes sind, als die auf die Endglieder folgenden periodischen Glieder, mithin der Vorgang, welcher das letzte periodische Endglied erzeugte, durch die neuen Endglieder nur seinen gesetzlichen Fortgang findet, indem er durch die Addition der übereinander gestellten Anfangs- und Endglieder eben dieselben Periodenziffern erzeugt, welche der vorher gebildeten Periode fehlen. Die überschüssigen Zahlen liefern also in dieser Stellung nicht nur eine den fehlenden Periodenziffern gleiche Summe, sondern sind mit diesen Ziffern **identisch** und vervollständigen die Phönixperiode.

Dieses Resultat ist allgemein folgendermaassen zu symbolisiren: Angenommen, es handele sich um die Multiplikation der Phönixzahl mit einer vierziffrigen Zahl $d\,c\,b\,a$. Da a, b, c, d einfache Ziffern sind; so hat jede der vier zu addirenden Reihen so viel Stellen als die Phönixzahl, man hat also, wenn die Zahl der Ziffern der Phönixzahl mit r bezeichnet wird, eine Summe von der Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & a_r & a_{r-1} & \dots & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
 & & b_r & b_{r-1} & b_{r-2} & \dots & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \\
 & c_1 & c_{r-1} & c_{r-2} & c_{r-3} & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & & \\
d_r & d_{r-1} & d_{r-2} & d_{r-3} & d_{r-4} & \dots & d_2 & d_1 & & & \\
\hline
G & F & E & p_{r-4} & p_{r-5} & \dots & p_1 & D & C & B & A
\end{array}$$

zu bilden. Die Reihe $p_{r-4} \dots p_1$ dieser Summe gehört der Periode an (ist ein Stück davon), die Reihe $G\ F\ E$ und $D\ C\ B\ A$ jedoch nicht. Setzt man nun die ausserhalb dieser Grenze stehenden Ziffern der vier Reihen vor die Endziffer jeder Reihe und beachtet, dass jede Reihe eine vollständige Phönixperiode, mithin $a_4\,a_3\,a_2\,a_1 = a_{r+4}\,a_{r+3}\,a_{r+2}\,a_{r+1}$, ebenso $b_3\,b_2\,b_1 = b_{r+3}\,b_{r+2}\,b_{r+1}$, ferner $c_2\,c_1 = c_{r+2}\,c_{r+1}$ und endlich $d_1 = d_{r+1}$ ist; so errichtet sich links von p_{r-4} die Summenformel

$$\begin{array}{cccc}
a_{r+4} & a_{r+3} & a_{r+2} & a_{r+1} \\
b_{r+3} & b_{r+2} & b_{r+1} & b_r \\
c_{r+2} & c_{r+1} & c_r & c_{r-1} \\
d_{r+1} & d_r & d_{r-1} & d_{r-2} \\
\hline
p_r & p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3}
\end{array}$$

deren resultirende Glieder p_r, p_{r-1}, p_{r-2}, p_{r-3} die Fortsetzung der Periode $p_{r-4} \ldots p_1$ bis zum Schlusse darstellen, sodass also die überschiessenden Anfangs- und Endglieder in dieser Stellung die Summe der in der Periode $p_{r-4} \ldots p_1$ fehlenden Glieder bilden.

Die übereinander gestellten Glieder, welche die Summe $p_r\, p_{r-1}\, p_{r-2}\, p_{r-3}$ hervorbringen, entsprechen nach ihrer Summe genau der Summe der übereinander gestellten Anfangs- und Endglieder des gebildeten Produktes, d. h. man hat

$$\begin{array}{cccc}
D & C & B & A \\
 & G & F & E \\
\hline
p_r & p_{r-1} & p_{r-2} & p_{r-3}
\end{array}$$

Hiernach ergeben die übereinander gestellten überschüssigen Anfangs- und Endglieder des gebildeten Produktes durch Summirung die fehlenden Ziffern der Phönixzahl unmittelbar.

Zur Erläuterung wollen wir sukzessiv die Werthe des 4-fachen, des 24-fachen, des 724-fachen, des 1724-fachen, des 71724-fachen und des 571724-fachen der Phönixzahl herstellen und betrachten. Diese Werthe ergeben sich folgendermaassen

```
   Phönixzahl =            0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1
                ----------------------------------------------
     4-faches =           |2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4|
     2-faches =          1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2
                               1         1 1 1 1   1 1 1 1
                ----------------------------------------------
    24-faches =          1|2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1|0 4
     7-faches =        3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
                         1 1       1 1 1       1 1 1
                ----------------------------------------------
   724-faches =        3 8|1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8|0 4
     1-faches =      0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1
                       1         1 1 1 1 1 1 1 1 1
                ----------------------------------------------
  1724-faches =      0 9 0|7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8|0 4
     7-faches =    3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
                     1         1         1 1 1 1   1
                ----------------------------------------------
 71724-faches =    3 7 7 4|9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6|2 7 8 0 4
     5-faches =  2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5
                 1 1   1 1 1 1   1 1 1 1         1
                ----------------------------------------------
571724-faches =  3 0 0 9 0|7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1|2 7 8 0 4
```

Die Theile dieser Vielfachen, welche der Periode der Phönixzahl angehören, sind zwischen Vertikalstriche gesetzt. Danach fehlt dem 4-fachen keine Ziffer; dasselbe hat auch keine überschüssigen Ziffern.

Dem 24-fachen fehlt die Ziffer 5; die Anfangs- und Endziffern liefern die Summe $\begin{array}{r}0\;4\\1\\\hline 5\end{array}$, welche ebenfalls $= 5$ ist. Dem 724-fachen fehlen die Ziffern 4, 2; die Anfangs- und Endziffern ergeben die Summe $\begin{array}{r}0\;4\\3\;8\\\hline 4\;2\end{array}$, welche ebenfalls die Ziffern 4, 2 darstellt. Dem 1724-fachen fehlen die Ziffern 9, 4; man hat aber auch $\begin{array}{r}0\;4\\0\;9\;0\\\hline 9\;4\end{array}$. Dem 71724-fachen fehlen die Ziffern 3, 1, 5, 7, 8; man hat aber auch $\begin{array}{r}2\;7\;8\;0\;4\\3\;7\;7\;4\\\hline 3\;1\;5\;7\;8\end{array}$. Dem 571724-fachen fehlen die Ziffern 5, 7, 8, 9, 4; man hat aber auch $\begin{array}{r}2\;7\;8\;0\;4\\3\;0\;0\;9\;0\\\hline 5\;7\;8\;9\;4\end{array}$.

17. Das vorstehende Gesetz der Konstanz der Ziffernsumme oder vielmehr der Unveränderlichkeit der ganzen Periode der Phönixzahl in dem Produkte der Phönixzahl mit einer mehrziffrigen Zahl unter der Voraussetzung, dass die überschüssigen Anfangs- und Endziffern des Produktes übereinander gestellt und summirt werden, behält für alle mehrziffrigen Faktoren, selbst für solche, welche mehr Stellen haben, als die Phönixzahl selbst, Gültigkeit. Man hat in diesem Falle, wo das Produkt keine Strecke der Phönixperiode, sondern nur fremde Ziffern enthält und wo Reihen von der Form

$$\begin{array}{lllllllllllll}
 & & & & & & & a_r & . & . & . & . & a_1\\
 & & & & & & b_1 & . & . & . & . & b_1 & \\
 & & & & & c_r & . & . & . & . & c_1 & & \\
 & & & & . & . & . & . & . & . & & & \\
 & & & d_r & . & . & . & . & d_1 & & & & \\
 & & e_r & . & . & . & . & e_1 & & & & & \\
 & f_r & . & . & . & . & f_1 & & & & & & \\
 g_r & . & . & . & . & g_1 & & & & & & & \\
h_r \;. & . & . & . & h_1 & & & & & & & &
\end{array}$$

zu addiren sind, welche sämmtlich die Länge der Phönixzahl haben, deren Anfangsglieder aber über die Endglieder der ersten Reihe nach links hinausragen, nur zu beachten, dass, wenn man den abschliessenden Vertikalstrich hinter das Anfangsglied h_1 der untersten Reihe setzt, die rechts von h_1 in den oberen Reihen abgeschlossenen Glieder bei der Anreihung an die links stehenden Glieder eine Folge bilden müssen, welche dem unausgesetzten Fortschritte der Phönixperiode entspricht. Danach ist die oberste, die zweite, die dritte Reihe u. s. f. in der Form

$$\begin{array}{l} . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; a_1 \;\; a_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; a_1 \;\; a_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; a_1 \\ . \;\; . \;\; . \;\; b_1 \;\; b_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; b_1 \;\; b_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; b_1 \\ . \;\; . \;\; c_1 \;\; c_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; c_1 \;\; c_r \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; c_1 \end{array}$$

u. s. w. so lange fortzusetzen, bis ein Glied davon sich über h_1 erhebt, und von hier aus sind so viel Glieder anzureihen, bis das letzte Glied über h_r liegt.

Übrigens kann es sich bei so langen Reihen ereignen, dass in dem Endpunkte rechts und links über die Phönixperiode Glieder überschiessen, welche dieser Periode nicht angehören und nochmals übereinander gesetzt und addirt werden müssen, um die Periode zu ergänzen. Das einfachste hierher gehörige Beispiel ist die Bildung der zweiten Potenz der aus der Zahl 2 entsprungenen Phönixzahl. Zu diesem Ende hat man das 1-fache, das 2-fache, das 4-fache, das 8-fache, das 6-fache u. s. w. der Phönixzahl unter Vorschiebung um je ein Glied zu addiren. Es erleichtert die Rechnung, wenn man beachtet, dass diese Vielfachen nicht berechnet zu werden brauchen, dass vielmehr von dem x-fachen der Phönixzahl, wenn x eine einfache Ziffer und $2x = {}^{n}a$ ist, die beiden Ziffern $a\,x$ den Anfang einer in der Phönixzahl liegenden Periode bilden, dass also das fragliche Vielfache ohne Weiteres aus der Phönixzahl entnommen werden kann. Wenn man als letztes der zu addirenden Vielfachen das 5-fache nimmt, also das 0-fache unberücksichtigt lässt; so kömmt

```
                            0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
                          1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
                        2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
                      4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8
                    3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6
                  1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3
                3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
              2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4
            4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9
          4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8
        3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7
      2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5
    0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1
  1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6 3
3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6
0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2
3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5
1 2 3 4 5 4 5 4 6 8 7 5 5 4 9 6 9 6 4 6 7 7 7 3 4 2 3 3 1
-----------------------------------------------------------
7 0 0 8 3 1 0 2 4 9 3 0 7 4 7 8 6 7 0 3 6 0 1 1 0 8 0 3 3 2
```

Die entstehende 35-ziffrige Zahl ist keine Phönixzahl und zeigt auch in ihrer Ziffernsumme 117 nicht die Ziffernsumme der Phönixzahl. Wenn man aber die rechts überschiessenden Ziffern über die links liegenden Ziffern in folgender Reihenfolge setzt; so ergiebt sich

	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6	10	6	5	8	10	11	12	7	10	6	10	11	8	6	5	4	9	
6	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	2

Das Resultat ist eine 19-ziffrige Zahl, welche von dem zweiten Gliede 7 bis zu dem vorletzten Gliede 9 in die Periode der Phönixzahl fällt, und wenn man die erste Ziffer 2 und die letzte Ziffer 6 nochmals übereinandersetzt und addirt (oder den vorn überschiessenden Addend 6 der Anfangsreihe zusetzt, wie in Nr. 18 näher erläutert werden wird), die fehlende Ziffer 8 der Phönixzahl, also die ganze 18-ziffrige Phönixzahl mit der Ziffernsumme 81 hervorbringt.

Die Hinzufügung der ausgeschlossenen 18ten Reihe, welche lauter Nullglieder enthält, ändert an dem vorstehenden Resultate weiter nichts, als dass die Gesammtsumme noch den Zusatz einer 0 als Endglied erhält, wodurch sie 36 Ziffern lang wird, ohne dass sich die der 0 vorangehenden Ziffern ändern. Lässt man die Phönixzahl mit 0 beginnen und mit 5 endigen; so ergiebt sich dasselbe Resultat.

Statt die rechts überschiessenden Ziffern über die links überschiessenden zu setzen, kann man auch die links überschiessenden unter die rechts überschiessenden setzen. Diess giebt die Summe

	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
4	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	1

Auch in dieser Summe liegt zwischen dem ersten und letzten Gliede die Phönixzahl mit Ausnahme der Ziffer 5, welche der Summe der beiden überschiessenden Ziffern $4 + 1 = 5$ gleich ist.

18. Die Konstanz der Ziffernsumme in jedem Produkte der Phönixzahl ist in Nr. 16 und 17 durch spezielle Operationen veranschaulicht

und bestätigt. Ein strenger und allgemeiner Beweis ergiebt sich folgendermaassen. Die mit der Einheit 1 beginnende und mit dem Nullgliede 0 schliessende Phönixzahl habe die Ziffernzahl z und der Faktor, womit dieselbe multiplizirt werden soll, sei eine beliebige mehrziffrige Zahl x. Dieser Faktor hat immer den Werth $x = a_r . 10^r + \ldots + a_2 . 100 + a_1 . 10 + a_0$, worin $a_0, a_1, a_2, \ldots a_r$ einziffrige Zahlen sind. Da das Produkt der Phönixzahl mit einer einziffrigen Zahl wie $a_0, a_1, a_2, \ldots a_r$ nach Nr. 15 unbedingt die Phönixzahl von einer gewissen Stelle an darstellt; so ist das p-fache der Phönixzahl die Summe von $r + 1$ immer um eine Stelle vorgeschobenen z-gliedrigen Reihen, von welchen eine jede die Periode der Phönixzahl mit dem einer jeden Reihe zukommenden Anfangsgliede darstellt.

Denken wir uns jetzt eine jede dieser Reihen sowohl nach der linken wie nach der rechten Seite durch fortgesetzte Wiederholung ihrer z-gliedrigen Periode ins Unendliche verlängert; so stehen $r + 1$ unendliche Reihen untereinander, welche gleiche Periodizität haben, jedoch in jeder vertikalen Linie verschiedene Ziffern darbieten können. In allen Fällen wiederholen sich offenbar in zwei vertikalen Linien, welche um z Glieder voneinander abstehen, dieselben Ziffern, und wenn man diese unendlichen Reihen addirt, liefern alle um z Glieder voneinander abstehenden vertikalen Linien auch denselben Addend für die nächstfolgende Linie. Hieraus folgt, dass die Summe der $r + 1$ unendlichen Reihen eine unendliche periodische Reihe darstellt, deren Periode die Gliederzahl z der Phönixzahl ist. Ausserdem ist diese Periode nicht nur nach ihrer Gliederzahl, sondern auch nach ihrer Ziffernfolge der Phönixzahl gleich, wie aus Folgendem hervorgeht.

Betrachten wir zunächst die aus dem Faktor $z = 2$ entspringende Phönixperiode.

Die im Anfange von Nr. 15 aus den sukzessiven Potenzen $\ldots 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ abgeleiteten Ziffern der aus dem Faktor 2 entspringenden Phönixzahl sind die Anfangsziffern, welche sich aus der Summirung gewisser Zahlen ergeben. Wenn man diese Zahlen und ihre Summen in ihrer Ganzheit stehen lässt, erhält man Werthe, welche den Phönixziffern nicht gleich, aber äquivalent sind, indem ihre Anfangsglieder die Phönixziffern bilden. Diese Darstellung zeichnet sich durch Anschaulichkeit aus; man erhält nämlich, wenn man für die sukzessiven Potenzen von 2 ihre Werthe in Dezimalform setzt, wodurch die den Phönixziffern äquivalenten Zahlen in der Form $2^r + Aa = 2^r + A . 10 + a = Ba = B . 10 + a$ erscheinen, indem man die nächstfolgende Zahl nach der Formel $2^{r+1} + B$ bildet, was der Vorschiebung der nächsten Phönixziffer in der Dezimalreihe der Phönixzahl unter Zurücklassung der Ziffer a in der vorhergehenden Stelle entspricht, folgende von rechts nach links zu lesende Reihe R.

128	64	32	16	8	4	2	1
6	3	1	0	0	0	0	0
134	67	33	16	8	4	2	1 . . .

$$\begin{array}{rrrrrr} 8192 & 4096 & 2048 & 1024 & 512 & 256 \\ 431 & 215 & 107 & 53 & 26 & 13 \\ \hline 8623 & 4311 & 2155 & 1077 & 538 & 269 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 131072 & 65536 & 32768 & 16384 \\ 6898 & 3449 & 1724 & 862 \\ \hline 137970 & 68985 & 34492 & 17246 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & 524288 & 262144 \\ & 27594 & 13797 \\ \hline \ldots & 551882 & 275941 \end{array}$$

Die Anfangsziffern dieser Zahlen

$$\ldots\ 2\ 1 \mid 0\ 5\ {}^{1}2\ 6\ 3\ {}^{1}1\ {}^{1}5\ {}^{1}7\ {}^{1}8\ 9\ {}^{1}4\ 7\ {}^{1}3\ {}^{1}6\ 8\ 4\ 2\ 1 \mid \ldots$$

sind die aufeinander folgenden Ziffern der Phönixzahl, welche nach den ihnen in der Form ${}^{n}a$ zukommenden Addenden n wohl zu unterscheiden sind, indem z. B. der Werth $2155 \equiv {}^{1}5$, dagegen der Werth $68985 \equiv {}^{0}5$ ist. Dass die Anfangsziffern der vorstehenden Zahlen den Phönixziffern nothwendig äquivalent sein müssen, ergiebt sich aus der Bildung jener Zahlen, welche dem Gesetze der erzeugenden Multiplikation vollkommen entspricht. Ein Hauptmerkmal der Phönixzahl besteht aber darin, dass sie sich nach diesem Gesetze ins Unendliche fortsetzt oder reproduzirt.

Diese Darstellung von Grössen, welche den Phönixziffern äquivalent sind, führt sofort zu einer Darstellung von Grössen, welche den Summen zweier Phönixzahlen a und b, sowie von Grössen $a + b + r = c$, welche den Ziffern zweier übereinander gestellter Phönixzahlen $\ldots a_3\, a_2\, a_1$ und $\ldots b_3\, b_2\, b_1$ äquivalent sind. Setzt man nämlich, um die Summe $\ldots c_3\, c_2\, c_1$

$$\begin{array}{cccc} \ldots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \ldots & b_3 & b_2 & b_1 \\ {\scriptstyle r_3} & {\scriptstyle r_2} & {\scriptstyle r_1} & {\scriptstyle r_0} \\ \hline \ldots & c_3 & c_2 & c_1 \end{array}$$

zu bilden, für a_1 und b_1 die vorstehenden äquivalenten Werthe A_1 und B_1; so muss die Summe $a_1 + b_1 \equiv A_1 + B_1$ nothwendig ein der Phönixzahl angehöriges Glied (also für die aus dem Faktor 2 entspringende Phönixzahl ein Glied ${}^{0}d$ oder ${}^{1}d$) sein, weil die Phönixzahl alle möglichen in Betracht kommenden Glieder enthält. Ist nun $a_1 + b_1 = {}^{n_1}d_1$; so ist damit eine Stelle der Phönixzahl genau gegeben, welche einem ganz bestimmten der vorstehenden Werthe aus der Reihe R äquivalent ist. Dieser Werth sei D_1, also $A_1 + B_1 \equiv D_1$. Ist $D_1 > A_1 + B_1$; so hat man $A_1 + B_1 + y_1 = D_1$ (worin y_1 jedenfalls eine mit 0 beginnende Zahl, also $\equiv 0$ ist), mithin $y_1 = D_1 - (A_1 + B_1)$: ist $D_1 < A_1 + B_1$; so hat man $A_1 + B_1 - y_1 = D_1$, also $y_1 = (A_1 + B_1) - D_1$, folglich in beiden Fällen $A_1 + B_1 \mp y_1 = D_1$, worin für y_1 das positive oder das negative Zeichen gilt, jenachdem D_1

oder der Werth von $^{m_1}d_1$ in der Phönixreihe über den von $a_1 + b_1$ hinaus oder vor demselben liegt. Die Grösse D_1 ist $\equiv {}^{m_1}d_1$, und wenn der Addend $r_0 = 0$ ist, auch $\equiv {}^{r_1}c_1$, wenn aber der Addend $r_0 = 1$ ist, hat man $A_1 + B_1 + 1 = D_1 \equiv {}^{m_1}d_1 \equiv {}^{r_1}c_1$.

Gehen wir jetzt zur nächsten Summe $a_2 + b_2 \equiv A_2 + B_2 \equiv D_2$ über; so hat man auch jetzt $A_2 + B_2 \mp y_2 \equiv D_2 \equiv {}^{m_2}d_2$ und zugleich ${}^{r_2}c_2$ entweder $\equiv {}^{m_2}d_2$ oder $\equiv {}^{m_2}d_2 + 1$, jenachdem der Addend r_1 den Werth 0 oder 1 hat, d. h. jenachdem $a_1 + b_1 + r_0 < 10$ oder $\geqq 10$ ist.

Da nicht nur $a_1 \equiv A_1$ und $b_1 \equiv B_1$, sondern auch, wenn s_1 und t_1 zwei mit 0 beginnende Zahlen sind, $a_1 \equiv A_1 + s_1$ und $b_1 \equiv B_1 + t_1$ ist; so hat man zugleich $a_1 + b_1 \equiv A_1 + B_1 + s_1 + t_1 \equiv A_1 + B_1 \mp y_1$, worin $s_1 + t_1 = \mp y_1$ gesetzt ist. Wenn m_1 und n_1 die durch die erzeugende Multiplikation bedingten Addenden sind, so ist ferner $a_2 = 2\,a_1 + m_1$ und $b_2 = 2\,b_1 + n_1$, aber auch $A_2 = 2\,A_1 + m_1$ und $B_2 = 2\,B_1 + n_1$ (so ist z. B. für $a_1 = 3$, $m_1 = 1$ sowohl $a_2 = 7 = 2 . 3 + 1$, als auch, da dann $A_1 = 33$ und $A_2 = 67$ ist, $67 = 2 . 33 + 1$). Hiernach hat man $a_2 + b_2 = 2\,a_1 + 2\,b_1 + m_1 + n_1$, also wegen der Werthe von a_1 und b_1

$$a_2 + b_2 = 2\,A_1 + 2\,s_1 + 2\,B_1 + 2\,t_1 + m_1 + n_1$$

und nun wegen der Werthe von $2\,A_1 + m_1$ und $2\,B_1 + n_1$ und weil $s_1 + t_1 = \mp y_1$ ist, $a_2 + b_2 = A_2 + B_2 \mp 2 . y_1$. Hieraus geht hervor, dass $y_2 = 2 . y_1$ oder dass $A_2 + B_2 \mp y_2 = A_2 + B_2 \mp 2 . y_1$ und sodann $A_3 + B_3 \mp y_3 = A_3 + B_3 \mp 2 . y_2 = A_3 + B_3 \mp 2^2 . y_1$, $A_4 + B_4 \mp y_4 = A_4 + B_4 \mp 2 . y_3 = A_4 + B_4 \mp 2^3 . y_2$ u. s. w. ist. Ausserdem ist klar, dass, wenn irgend einer dieser Ausdrücke $a + b \equiv A + B \mp y$ genau $= D$ ist, $a + b$ keinen aus der Summirung der beiden Reihen entspringenden Addenden r hat, d. h. dass $r = 0$ ist, dass dagegen, wenn $A + B \mp y + 1 = D$ ist, $a + b$ den Addenden $r = 1$ hat.

Das erste y oder $\mp y_1$ hat nach der Formel $a_1 + b_1 \equiv A_1 + B_1 \mp y_1$ den Werth $\mp y_1 \equiv (a_1 + b_1) - (A_1 + B_1)$, welcher sich dadurch bestimmt, dass man für A_1 und B_1 ihre äquivalenten Werthe aus der obigen Reihe R und für $a_1 + b_1$ den ebenfalls schon bezeichneten äquivalenten Werth, welchen $a_1 + b_1$ in der Phönixzahl einnimmt, substituirt. Dieser Werth von $\mp y_1$ bedingt dann alle folgenden Werthe von $\mp y_2 = \mp 2 . y_1$, $\mp y_3 = \mp 2^2 . y_1$ u. s. w. und lässt die Ziffern c der Summe der beiden Reihen A und B, jenachdem bei dem Addenden $r = 0$ die Grösse $a + b$ oder bei dem Addenden $r = 1$ die Grösse $a + b + 1$ der betreffenden Stelle der obigen Reihe R entspricht, also $= c$ ist, als Ziffern der Phönixzahl erscheinen. Das Wachsthum der Werthe von y_1, $2 . y_1$, $2^2 . y_1$ u. s. w. ist ausserdem von der Art, dass jedes folgende c_1 nur der zunächst auf c folgenden Ziffer entsprechen (nicht über dieselbe hinausschiessen) kann. Hierdurch ist der strenge Beweis erbracht, dass die Ziffern c der Summe der beiden Reihen A und B nothwendig die sukzessiven Ziffern der Phönixzahl, d. h. die Phönixperiode ergeben müssen.

Bilden wir beispielsweise die Summe der beiden Reihen

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
 & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} \\
\dots & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 \\
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\
\dots & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 \\
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} \\
\hline
\dots & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7
\end{array}$$

so hat man nach den obigen Äquivalenzwerthen der Reihe R

$$\begin{array}{c}
{}^{0}7 \equiv 67 \\
{}^{0}8 \equiv 8 \\
\hline
7 + 8 \equiv 75 + y_1
\end{array}$$

und da $7 + 8 = {}^{1}5 \equiv 2155$ (nicht $= {}^{0}5$, also nicht $\equiv 68985$), also $7 + 8 \equiv 5 = c_1$, und wegen $75 + y_1 = 2155$ die Grösse $y_1 = 2080$ ist; so hat man für die folgenden Summen (indem man für 4 den in der Reihe R auf $7 \equiv 67$ folgenden Werth 134 und für 6 den auf $8 \equiv 8$ folgenden Werth 16 setzt, sodass 67 dem ${}^{0}7$, dagegen 134 dem ${}^{1}4$ entspricht) und wegen des der Zahl $7 + 8 = 15 = {}^{1}5$ anhaftenden Addends $r = 1$, indem man für die auf 7 und 8 in der ersten und zweiten Reihe folgenden Ziffern 4 und 6 die auf 67 und 8 folgenden Äquivalenzwerthe einführt,

$$\begin{array}{rcl}
4 & \equiv & 134 \\
6 & \equiv & 16 \\
1 & \equiv & 1 \\
\hline
4 + 6 + 1 & \equiv & 151 \\
y_2 = 2 \,.\, y_1 & = & \underline{4160} \\
4 + 6 + 1 & \equiv & 4311 \equiv 1 = c_2
\end{array}$$

Hierauf folgt wegen $4 + 6 + 1 = 11 = {}^{1}1$

$$\begin{array}{rcl}
9 & \equiv & 269 \\
3 & \equiv & 33 \\
1 & = & 1 \\
\hline
 & & 303 \\
y_3 = 2\, y_2 & = & \underline{8320} \\
 & & 8623 \equiv 3 = c_3
\end{array}$$

Sodann ist wegen $9 + 3 + 1 = 13 = {}^{1}3$

$$\begin{array}{rcl}
8 & \equiv & 538 \\
7 & \equiv & 67 \\
1 & = & 1 \\
\hline
 & & 606 \\
y_4 = 2 \,.\, y_3 & = & \underline{16640} \\
 & & 17246 \equiv 6 = c_4
\end{array}$$

Hierauf wegen $8 + 7 + 1 = 16 = {}^1 6$

$$\begin{array}{rcr} 7 & \equiv & 1077 \\ 4 & \equiv & 134 \\ 1 & = & 1 \\ \hline & & 1212 \\ y_5 = 2\,y_4 & = & 33280 \\ \hline & & 34492 \equiv 2 = c_5 \end{array}$$

u. s. f. Diese Summen können nach dem Werthe der Grössen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ offenbar die Äquivalenzwerthe der in der Phönixperiode folgenden Ziffern nicht überschreiten, die nächste Summe muss also, da sie jedenfalls einer Phönixziffer äquivalent ist, nothwendig der nächsten Ziffer entsprechen. Demgemäss sind die Anfangsziffern ... 2 6 3 1 5 dieser Summen oder die Ziffern ... $c_5\ c_4\ c_3\ c_2\ c_1$ die aufeinander folgenden Ziffern der Phönixzahl.

Als zweites Beispiel wollen wir die Summirung

$$\begin{array}{cccccccccc|c} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} \\ \ldots & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 \\ & & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} \\ \ldots & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ {\scriptstyle 1} & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \\ \hline \ldots & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

wählen. Hier ist

$$\begin{array}{rcl} {}^0 7 & \equiv & 67 \\ {}^1 1 & \equiv & 4311 \\ \hline 7 + 1 & \equiv & 4378 \equiv 8 = c_1 \end{array}$$

und da $7 + 1 = {}^0 8 \equiv 538 < 4378$ ist; so hat man $- y_1 = 3840$ und ferner wegen $7 + 1 = 8 = {}^0 8$

$$\begin{array}{rcr} 4 & \equiv & 134 \\ 3 & \equiv & 8623 \\ 0 & = & 0 \\ \hline 4 + 3 + 0 & = & 8757 \\ - y_2 = - 2\,y_1 & = & - 7680 \\ \hline 4 + 3 + 0 & \equiv & 1077 \equiv 7 = c_2 \end{array}$$

Sodann wegen $4 + 3 = {}^0 7$

$$\begin{array}{rcr} 9 & \equiv & 269 \\ 6 & \equiv & 17246 \\ 0 & = & 0 \\ \hline 9 + 6 & \equiv & 17515 \\ - y_3 = - 2\,y_2 & = & - 15360 \\ \hline 9 + 6 & \equiv & 2155 \equiv 5 = c_3 \end{array}$$

Hierauf wegen $9 + 6 = 15 = {}^{1}5$

$$
\begin{array}{rcr}
 & 8 \equiv & 538 \\
 & 2 \equiv & 34492 \\
 & 1 = & 1 \\
\hline
8 + 2 + 1 & \equiv & 35031 \\
- y_4 = - 2 \,.\, y_3 & = - & 30720 \\
\hline
8 + 2 + 1 & = & 4311 \equiv 1 = c_4
\end{array}
$$

Weiter folgt wegen $8 + 2 + 1 = 11 = {}^{1}1$

$$
\begin{array}{rcr}
 & 7 \equiv & 1077 \\
 & 5 \equiv & 68985 \\
 & 1 = & 1 \\
\hline
7 + 5 + 1 & \equiv & 70063 \\
- y_5 = - 2 y_4 & = - & 61440 \\
\hline
7 + 5 + 1 & \equiv & 8623 \equiv 3 = c_5
\end{array}
$$

u. s. f. Die Anfangsziffern . . . 3 1 5 7 8 oder . . . $c_5\ c_4\ c_3\ c_2\ c_1$ ergeben stets die Ziffern der Phönixzahl in richtiger Reihenfolge.

Diese Beispiele bestätigen den Satz, dass die Summirung zweier unendlichen Reihen, welche Wiederholungen der Phönixperiode von zwei beliebigen Stellen aus darstellen, wiederum eine sich unendlich wiederholende Periode derselben Phönixzahl erzeugt. Dieses Gesetz gilt allgemein für jede Phönixzahl: man hat dabei nur zu beachten, dass für eine Phönixzahl, welche aus dem Faktor x entspringt, die sukzessiven Potenzen von x an die Stelle der vorstehenden sukzessiven Potenzen von 2 treten, dass also die Werthe der y um das x-fache wachsen, dass jedoch die durch Summirung zweier Reihen entstehenden Addenden r nur die Werthe 0 oder 1 haben können, sodass man immer nur nachzusehen hat, ob in der Gleichung $A + B + r = D$, worin D einen ganz bestimmten Werth hat, $r = 0$ oder $= 1$ ist. So beginnt z. B. für die in Nr. 8 betrachtete, aus dem Faktor 3 entspringende Phönixzahl die Reihe R mit folgenden Gliedern.

	6561	2187	729	243	81	27	9	3	1
	226	75	25	8	2	0	0	0	0
. . .	6787	2262	754	251	83	27	9	3	1

Wenn nun eine unendliche Reihe A mit der Reihe B eine Summe C von gleicher Periodizität ergiebt; so ergiebt auch die Reihe C mit einer ferneren Reihe D eine Reihe E von gleicher Periodizität, d. h. die Summe der drei Reihen $A + B + C = D$, sowie jede Summe $A + B + C + \ldots$ von unendlichen Reihen, welche die Periodizität der Phönixzahl haben, hat dieselbe Periodizität. Hieraus folgt aber, dass jedes Produkt einer unendlichen Phönixzahl mit jeder beliebigen ein- oder mehrziffrigen Zahl, welche doch immer nach ihrer Form $\ldots a_2 \,.\, 100 + a_1 \,.\, 10 + a_0$ die Summe von verschobenen Phönixreihen bildet, eine unendliche Phönixreihe darstellt, insofern der Faktor des Produktes nicht die mehr erwähnte Ausnahme bildet, welche eine Nullreihe erzeugt.

Diese Konstanz der Periodizität der vervielfachten Phönixzahl findet natürlich nicht in dem auf z Glieder beschränkten Produkte pP der endlichen Phönixzahl P statt. Das Gesetz der Ziffernsumme des Vielfachen der endlichen Phönixzahl, insbesondere die Konstanz dieser Summe bei geeigneter Aufstellung, soll in der nächsten Nummer bewiesen werden.

19. Wenn der Satz, dass das Produkt einer unendlich wiederholten Periode einer Phönixzahl mit einer in dieser Phönixzahl enthaltenen Zahl dieselbe unendliche Periode erzeugt, als bewiesen gilt; so ergiebt sich der Satz, dass auch das Produkt mit jedem beliebigen Vielfachen einer solchen Zahl, abgesehen von den vorhin gedachten Ausnahmen, dieselbe unendliche Periode hervorruft, und ferner der Satz, dass die Summe zweier solchen unendlichen Perioden wiederum dieselbe Periodizität zeigt, durch folgende einfache Betrachtung.

Die eben erwähnten Ausnahmen betreffen für die aus dem Faktor 2 entstandene Phönixperiode das Produkt mit der nicht in dieser Periode vorkommenden Zahl $^{1}9 = 19$ und mit Vielfachen von 19. Das Produkt der unendlichen Phönixperiode mit 19 oder einem Vielfachen von 19 ist die unendliche Reihe . . . 9999 . . ., in welche sich weder rechts noch links eine andere Ziffer als 9 einmischt (nur die Produkte endlicher Phönixzahlen können andere Ziffern als 9 aufnehmen). Da eine in unendlicher Entfernung auf der rechten Seite gedachte Einheit 1 nur einen verschwindenden Werth hat, mithin dieser Reihe zugesetzt werden kann, ohne deren Werth zu ändern; so ist der Werth der unendlichen Reihe . . . 9999 . . . auch gleich der aus lauter Nullen bestehenden und nach der linken Seite hin auf eine in unendlicher Entfernung liegende Einheit hinstrebenden unendlichen Reihe 1000 . . . 0000 . . ., welche für die Operationen mit allen von einem gegebenen Anfangspunkte nach rechts und links sich erstreckenden Reihen den äquivalenten Werth . . . 0000 . . . hat, worin der unendlich weit nach links liegende Endwerth 1 unterdrückt ist.

Hiernach haben alle Produkte der unendlichen Phönixperiode mit einer der Zahlen 1, 2, 3, . . . 9, 10, 11, 12, . . . 18 die Phönixperiode, während das Produkt mit 19 die Periode . . . 0000 . . . hat. Handelt es sich nun um das Produkt der unendlichen Periode mit irgend einer Zahl z, welche > 19, aber kein Vielfaches von 19 ist; so kann stets $z = 19 . a + b$ gesetzt werden, worin a einen beliebigen und b einen Werth < 19 hat. Da aber die Periode des 19-fachen eine Nullreihe ist; so ist es auch die des $(19 . a)$-fachen: diese Periode verschwindet also und es bleibt für das z-fache nur die Periode von b übrig, welche die der Phönixzahl ist, weil $b < 19$ ist. Für $b = 0$ würde auch das z-fache, nämlich das $(19 . a)$-fache, eine Nullreihe werden.

Hiermit ist also der Satz erwiesen, dass das Produkt der unendlichen Phönixperiode mit jedem beliebigen Faktor, welcher kein Vielfaches von 19 ist, wiederum eine unendliche Phönixperiode ist, während der Faktor $19 . a$ eine unendliche Nullreihe ergiebt.

Das Produkt der vorstehenden endlichen Phönixzahl mit dem Faktor 19 oder $19 \,.\, a$ bildet die endliche Periode 999 . . . 999.

Was nun die Summirung zweier unendlichen Phönixperioden betrifft; so stellt jede solche Periode, welche an einer bestimmten Stelle der Phönixzahl beginnt, das 1- oder 2- oder 3- . . . oder 9- oder 10- oder 11- oder 12- . . . oder 18-fache der unendlichen Phönixperiode dar, kann also, wenn man diese Periode mit Q bezeichnet, $= v_1 \,.\, Q$ gesetzt werden, worin v_1 einen der Werthe 1, 2, 3, . . . 18 hat. Der Werth einer zweiten Periode ist $= v_2 \,.\, Q$, worin v_2 ebenfalls einen Werth aus der letzteren Reihe hat. Setzen wir nun $v_1 + v_2 = w$; so ist die Summe jener beiden Perioden $v_1 \,.\, Q + v_2 \,.\, Q = w \,.\, Q$, und aus dem Vorhergehenden folgt, dass diese Summe eine unendliche Phönixperiode ist, wenn w kein Vielfaches von 19 ist, dagegen eine Reihe . . . 9999 . . . $\equiv$ . . . 0000 . . ., wenn w ein Vielfaches von 19 ist. Nimmt man beispielsweise $v_1 = 12$ und $v_2 = 7$, wodurch $v_1 + v_2 = w = 19$ wird; so hat man in der That

$$\begin{array}{rcrcl|l}
12 \,.\, Q & = & {}^{1}2 \,.\, Q & = & \ldots\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2 & 6\ 3\ \ldots \\
7 \,.\, Q & = & {}^{0}7 \,.\, Q & = & \ldots\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7 & 3\ 6\ \ldots \\
\hline
19 \,.\, Q & = & & & \ldots\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 & 9\ 9\ \ldots \\
& \equiv & & & \ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ \ldots
\end{array}$$

wie vorherzusehen war.

Für die nicht aus dem Faktor 2, sondern aus 3, 6 oder einem anderen Faktor x entspringende Phönixperiode tritt nach Nr. 14 an die Stelle von $19 = {}^{1}9$ der Werth $29 = {}^{2}9$, $59 = {}^{5}9$ und allgemein ${}^{x-1}9 = (x - 1) \,.\, 10 + 9$.

Hiermit ist auch der zweite Satz erwiesen, dass die Summe zweier unendlichen Phönixperioden wiederum eine unendliche Phönixperiode giebt, wofern nicht $v_1 + v_2 = w = {}^{x-1}9$ ist, in welchem Falle die Summe stets eine Nullreihe wird.

Was für die aus zwei Reihen $v_1 \,.\, Q$ und $v_2 \,.\, Q$ bestehende Summe gilt, hat für jede aus beliebig viel Reihen bestehende Summe $v_1 \,.\, Q + v_2 \,.\, Q + v_3 \,.\, Q + \ldots = w \,.\, Q$ Gültigkeit, da die Summe $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = w$ stets $= 19 \,.\, a + b$ ist, worin $b < 19$ ist, sodass $w \,.\, Q$ die Periode von b, also die Phönixperiode hat. So ist für $w = 12 + 5 + 2 = 19$

$$\begin{array}{rcrcl|l}
12 \,.\, Q & = & {}^{1}2 \,.\, Q & = & \ldots\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1\ 0\ 5\ 2 & 6\ 3\ \ldots \\
5 \,.\, Q & = & {}^{0}5 \,.\, Q & = & \ldots\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1\ 0\ 5 & 2\ 6\ \ldots \\
2 \,.\, Q & = & {}^{0}2 \,.\, Q & = & \ldots\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2 & 1\ 0\ \ldots \\
\hline
19 \,.\, Q & = & & & \ldots\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 & 9\ 9\ \ldots \\
& \equiv & & & \ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ \ldots
\end{array}$$

Die Konstanz der Ziffernsumme eines Vielfachen der endlichen Phönixzahl P, insofern der Faktor dieses Vielfachen nicht ein Vielfaches von ${}^{x-1}9$ ist, ergiebt sich aus diesen Gesetzen der unendlichen Phönixperiode nach Nr. 17 und 18, am einfachsten jedoch folgendermaassen.

Jedes Vielfache $w \,.\, P$ der Phönixzahl P kann als die Summe von w übereinander gestellten, mit 1 beginnenden Phönixzahlen angesehen werden; so ist z. B. $3\,P$ die Summe der 3 gleichen Phönixzahlen

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
0 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
{\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & & & \\
\hline
1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3
\end{array}$$

Solange $w < 19$ ist, stellt $w \,.\, P$ genau die Periode der Phönixzahl P dar, für Werthe von w, welche > 19 sind, jedoch nicht (für $w = a \,.\, 19$ ist $w \,.\, P \equiv \ldots 000 \ldots$). Setzen wir allgemein die vollständige Reihe jeder Phönixzahl $= p_s \ldots p_3\, p_2\, p_1$; so ist ihr w-faches die Summe der w gleichen Reihen

$$\begin{array}{ccccc}
p_s & \ldots & p_3 & p_2 & p_1 \\
p_s & \ldots & p_3 & p_2 & p_1 \\
. & . & . & . & . \\
p_s & \ldots & p_3 & p_2 & p_1 \\
{\scriptstyle n_s} & & {\scriptstyle n_3} & {\scriptstyle n_2} & {\scriptstyle n_1} \\
\hline
n_s\, c_s & \ldots & c_3 & c_2 & c_1
\end{array}$$

man hat also $w \,.\, P = n_s\, c_s \ldots c_3\, c_2\, c_1$, worin $n_1, n_2, n_3, \ldots n_s$ die bei der Addition dieser Reihe sich ergebenden Addenden sind. Die ersten Glieder $p_1 \ldots p_1$ haben den Addend 0, und der letzte Addend n_s kann eine mehrziffrige Zahl, z. B. eine dreiziffrige Zahl, sein, welche wir mit $n_s = r_2\, r_1\, r_0$ bezeichnen wollen, sodass also in einfachen Ziffern

$$w \,.\, P = r_2\, r_1\, r_0\, c_s \ldots c_3\, c_2\, c_1$$

ist. Offenbar kann dieser Werth von $w \,.\, P$ nicht die Phönixreihe sein, da ja den ersten Gliedern $p_1 \ldots p_1$ der Addend fehlt, welchen eine nach rechts fortgesetzte unendliche Phönixperiode Q erzeugen würde und welcher zur Herstellung einer genauen Phönixreihe durchaus nothwendig ist. Andererseits findet der links überschiessende Addend $n_s = r_2\, r_1\, r_0$ nicht die in der unendlichen Periode über ihm entstehenden Glieder $p_{s+3}\, p_{s+2}\, p_{s+1}$, derselbe kann also ebenfalls nicht der Phönixperiode angehören. Nun sind aber die in den unendlichen Perioden nach der rechten Seite über p_1 hinaus sich fortsetzenden Ziffern den nach der linken Seite über p_s hinaus sich fortsetzenden Ziffern absolut gleich, und daraus folgt, dass der im Anfange über c_1 fehlende Addend dem links überschiessenden Addenden $n_s = r_2\, r_1\, r_0$ gleich ist. Wird also dieser Addend zu den ersten Gliedern $c_3\, c_2\, c_1$ gefügt, d. h. wird die Summe

$$\begin{array}{ccccc}
 & & r_2 & r_1 & r_0 \\
c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\
\hline
p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1
\end{array}$$

nach algebraischen Regeln gebildet, was möglicherweise eine Wirkung um ein oder um zwei Glieder über c_3 hinaus (jedoch in keinem Falle weiter) hervorbringen kann, sodass $c_5 \ldots c_1$ in $p_5 \ldots p_1$ verwandelt wird; so müssen diese Glieder nothwendig der Phönixperiode angehören. Ausserdem müssen die auf p_5 folgenden Glieder von c_6 bis c_s die periodischen Glieder p_6 bis p_s sein, die Glieder

$$c_s \ldots c_6\, p_5\, p_4\, p_3\, p_2\, p_1 = p_6 \ldots p_1$$

müssen also genau die Phönixperiode darstellen. Diese Periode und ihre Ziffernsumme ergiebt sich hiernach aus den Gliedern $c_s \ldots c_6$, welche der Phönixzahl angehören, und aus der Übereinanderstellung und Summirung der links überschiessenden Reihe $r_2\, r_1\, r_0$ und der rechts ausserhalb der Periode liegenden oder überschiessenden Ziffernreihe $c_5\, c_4\, c_3\, c_2\, c_1$.

Ob man das Produkt $w \,.\, P$ als eine aus w gleichen Phönixzahlen bestehende Summe oder nach den gewöhnlichen Multiplikationsregeln, wenn w den Dezimalwerth $\ldots w_3\, w_2\, w_1$ hat, als die Summe der immer um eine Stelle vorgeschobenen Produkte $\ldots w_3 P,\ w_2 P,\ w_1 P$, also in der Form

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & a_s & & \ldots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
 & & b_s & b_{s-1} & \ldots & b_3 & b_2 & b_1 & & \\
 & . & . & . & \ldots & . & . & & & \\
. & . & . & . & \ldots & . & & & & \\
\hline
r_2 & r_1 & r_0 & c_6 & \ldots & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 &
\end{array}$$

darstellt, ist in der Hinsicht gleichgültig, dass das entstehende Resultat genau der vorhin betrachteten Reihe gleich sein, also am Anfange und Ende überschiessende Ziffern haben muss, welche sich durch Übereinanderstellung zu den fehlenden Ziffern der Phönixzahl zusammensetzen. Wenn wir aber nun in jeder vorstehenden Reihe die rechts stehenden Ziffern, welche ausserhalb der ersten Stelle der untersten Reihe liegen, nach links übertragen und dadurch lauter gleich lange und an derselben Stelle beginnende Reihen von der Form

$$\begin{array}{cccccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_s & \ldots & a_4 \\
b_2 & b_1 & b_s & b_{s-1} & \ldots & b_3 \\
. & . & . & . & \ldots & . \\
. & . & . & . & \ldots & . \\
\hline
c_s & c_{s-1} & c_{s-2} & c_{s-3} & \ldots & c_1
\end{array}$$

bilden; so setzen wir damit über die links überschiessenden Ziffern $r_2\, r_1\, r_0$ diejenigen Ziffern, welche in den unendlichen Perioden Q mit den darunter stehenden Ziffern fortschreitende Phönixziffern bilden, und wir entziehen den rechts überschiessenden Ziffern $c_3\, c_2\, c_1$ alle Summanden, sodass sich nun vom Anfange bis zum Ende eine vollständige Phönixzahl, welche nur bei sehr grossen Werthen von w, die in dem Resultate kein Stück der Phönixperiode aufkommen lassen, eine unvollständige Phönixzahl von der Art bilden muss, dass die rechts und links überschiessenden Ziffern nach dem vorher erörterten Satze durch Übereinanderstellung eine den fehlenden Phönixziffern gleiche Summe darstellen, wie es an den Beispielen in Nr. 16 und 17 gezeigt ist.

Nach den vorstehenden Beweisführungen erscheinen die in Nr. 15 bis 18 ausgeführten Operationen zwar für den Zweck dieser Beweise als entbehrlich; sie sind jedoch von Wichtigkeit für die Erkenntniss des Wesens und der Gesetze der Phönixzahlen, wovon wir ein interessantes Beispiel am Schlusse der Nr. 22 im Satze 16 geben werden.

20. Die vorstehenden Gesetze der gewöhnlichen und der erzeugenden Multiplikation gelten auch für gewöhnliche und erzeugende Division. Während die Multiplikation im Sinne der Dezimalrechnung von rechts nach links fortschreitet, schreitet die Division von links nach rechts vor. Demzufolge setzt sich der Prozess, welcher aus dem Anfangsgliede a mittelst des Faktors x die Periode einer Phönixzahl von rechts nach links bildet, durch erzeugende Division von links nach rechts reproduzirend fort. So haben wir für $x = 2$ aus $a = 1$ die Phönixzahl

$$4\ 2\ 1 | 0\ 5\ 2\ 6\ \ldots\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1 |$$

erhalten, deren Werth durch ein Dezimalkomma bestimmt ist, welches unmittelbar dem Anfangsgliede 1 voranzustellen ist. Die erzeugende Division mit dem Divisor a besteht nun darin, dass, wenn eine Anfangsziffer x gegeben ist, zuerst $\frac{x}{a}$ die in $\frac{x}{a}$ enthaltene grösste Zahl b gebildet, die Zahl n aber, um welche x grösser ist als $a \,.\, b$, also die Zahl $x - a \,.\, b = n$ links hoch neben b gesetzt oder der Werth von ${}^{n}b = 10\,n + b$ hergestellt und durch a in derselben Weise wie vorher x dividirt wird, sodass $\frac{10\,n + b}{a} = {}^{n_1}b_1$, $\frac{10\,n_1 + b_1}{a} = {}^{n_2}b_2$ wird. Hierdurch wird als Quotient die Reihe $b\ b_1\ b_2\ \ldots$ hergestellt. Für $a = 2$ und $x = 1$ erhält man auf diese Weise folgende Zahlen. $\frac{1}{2}$ giebt ${}^{1}0 = 10$, $\frac{10}{2}$ giebt 5, $\frac{5}{2}$ giebt ${}^{1}2 = 12$, $\frac{12}{2}$ giebt 6, $\frac{6}{2}$ giebt 3, $\frac{3}{2}$ giebt ${}^{1}1 = 11$, $\frac{11}{2}$ giebt ${}^{1}5 = 15$, $\frac{15}{2}$ giebt ${}^{1}7 = 17$, $\frac{17}{2}$ giebt ${}^{1}8 = 18$, $\frac{18}{2}$ giebt 9, $\frac{9}{2}$ giebt ${}^{1}4 = 14$, $\frac{14}{2}$ giebt 7, $\frac{7}{2}$ giebt ${}^{1}3 = 13$, $\frac{13}{2}$ giebt ${}^{1}6 = 16$, $\frac{16}{2}$ giebt 8, $\frac{8}{2}$ giebt 4, $\frac{4}{2}$ giebt 2, $\frac{2}{2}$ giebt 1, $\frac{1}{2}$ giebt ${}^{1}0 = 10$ u. s. w.

Der gesuchte Quotient ist

$$| 0\ 5\ 2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 7\ 8\ 9\ 4\ 7\ 3\ 6\ 8\ 4\ 2\ 1 | 0\ \ldots$$

also genau die durch erzeugende Multiplikation mit 2 aus 1 entstehende Phönixzahl.

Auf dieselbe Weise erhält man durch erzeugende Division aus dem Divisor 3 die Werthe

$$\frac{1}{3} \text{ giebt } {}^{1}0 = 10, \quad \frac{10}{3} \text{ giebt } {}^{1}3 = 13, \quad \frac{13}{3} \text{ giebt } {}^{1}4 = 14,$$

$$\frac{14}{3} \text{ giebt } {}^{2}4 = 24, \quad \frac{24}{3} \text{ giebt } {}^{0}8 = 8, \quad \frac{8}{3} \text{ giebt } {}^{2}2 = 22$$

u. s. w., also die in Nr. 8 vorgeführte Ziffernreihe der Phönixzahl 0 3 4 4 8 2 . . .

Der Divisor 11 liefert die Werthe

$$\frac{1}{11} \text{ giebt } {}^{1}0 = 10, \quad \frac{10}{11} \text{ giebt } {}^{10}0 = 100, \quad \frac{100}{11} \text{ giebt } {}^{1}9 = 19,$$

$$\frac{19}{11} \text{ giebt } {}^{8}1 = 81, \quad \frac{81}{11} \text{ giebt } {}^{4}7 = 47, \quad \frac{47}{11} \text{ giebt } {}^{3}4 = 34$$

u. s. w., also die in Nr. 13 erwähnte Ziffernreihe der Phönixzahl 0 0 9 1 7 4 . . .

Dass das x-fache, sowie das $2x$-, das $3x$-, . . . das nx-fache einer Phönixzahl durch x theilbar ist, also durch gewöhnliche Division mit x das 1-, 2-, 3-, . . . n-fache der Phönixzahl, mithin eine ihr gleiche Periode oder, wenn n gross genug ist, eine Reihe von gleicher Ziffernsumme (mit der in Nr. 16 erörterten Bedeutung) wieder hervorbringt, ist selbstverständlich. So ergiebt die Division mit 3 in die Zahl 1578 . . . 263, welche das 3-fache der Phönixzahl 052 . . . 421 ist, wiederum diese Phönixzahl, aber die Division mit 3 in die Zahl 368 . . . 947, welche das 7-fache der Phönixzahl ist, liefert nicht wieder die Phönixzahl, wohl aber eine mit 18 Gliedern abschliessende Zahl, weil die Phönixzahl, welche die Ziffernsumme 81 hat, durch 3 theilbar ist, und der sich ergebende Quotient

$$0{,}1\,2\,2\,8\,0\,7\,0\,1\,7\,5\,4\,3\,8\,5\,9\,6\,4\,9$$

hat wiederum die Ziffernsumme 81.

Auf diese Weise ergeben sich für die gewöhnliche Division der Phönixperiode durch verschiedene Divisoren noch manche Besonderheiten; dieselben nehmen jedoch nur geringes Interesse in Anspruch, da sie auf Spezialitäten beruhen und keine Allgemeinheit haben.

21. Bemerkenswerth ist, dass, während nach Nr. 15 die Periode einer Phönixzahl, welche aus der Einheit 1 mittelst des Faktors a entspringt, durch die unendliche Summe

$$\ldots + a^3 . 10^3 + a^2 . 10^2 + a^1 . 10^1 + a^0 . 10^0$$

dargestellt werden kann, Diess auch mittelst des Divisors a durch die unendliche Summe

$$a^0 . 10^0 + a^{-1} . 10^{-1} + a^{-2} . 10^{-2} + a^{-3} . 10^{-3} + \ldots$$

oder durch die immer um eine Stelle vorrückenden Werthe von a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} . . . oder von $\frac{1}{a^0}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ . . . geschehen kann, dass also die nach links und rechts ins Unendliche sich ausstreckende Summe

$$\ldots a^2 . 10^2 + a^1 . 10^1 + a^0 . 10^0 + a^{-1} . 10^{-1} + a^{-2} . 10^{-2} \ldots$$

die Periode der Phönixzahl reproduzirt, insofern nur a einen dazu geeigneten Werth hat.

Indem wir die auf einander folgenden Potenzen von a durch Division der vorhergehenden Potenz durch a also $\frac{1}{a^{n+1}}$ durch $\frac{1}{a} . \frac{1}{a^n}$ bilden, erhalten wir z. B. für $a = 2$ aus den Werthen von

$$\ldots 2^2 \; 2^1 \; 2^0 \; 2^{-1} \; 2^{-2} \; 2^{-3} \; \ldots$$

oder vielmehr aus den Werthen

$$\ldots 100 . 2^2, \; 10 . 2^1, \; 1 . 2^0, \; \frac{1}{10 . 2}, \; \frac{1}{100 . 2^2}, \; \frac{1}{1000 . 2^3} \ldots$$

folgende Summe

```
        1
      2   0 5
... 4       0 2 5
              0 1 2 5
                0 0 6 2 5
                  0 0 3 1 2 5
                    0 0 1 5 6 2 5
                      0 0 0 7 8 1 2 5
                        0 0 0 3 9 0 6 2 5
                          0 0 0 1 9 5 3 1 2 5
                            0 0 0 0 9 7 6 5 6 2 5
                              0 0 0 0 4 8 8 2 8 1 2 5
                                0 0 0 0 2 4 4 1 4 0 6 2 5
                          1 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1   1
------------------------------------------------------
...|4 2 1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8|4 0 8 2 6 3 1 2 5
```

welche die Periode der durch erzeugende Multiplikation mit 2 nach Nr. 5 entstehenden Phönixzahl deutlich erkennen lässt.

Da bei der Summirung der durch Division entstehenden, nach rechts vorrückenden Zahlen die Werthe der einzelnen Summen von den Addenden abhängen, welche die weiter rechts stehenden Zahlen liefern; so werden, wenn man die Operation abbricht, die letzten Ziffern der Summe, da sie von unbekannten Perioden abhängen, unrichtig, also auszuschliessen sein: es fragt sich daher, bis zu welcher Stelle die erzeugte Summe richtige Ziffern enthält. Diese Frage entscheidet sich am einfachsten dadurch, dass man die Operation so lange fortsetzt, bis in den Vordergliedern eine wiederkehrende Periode deutlich hervortritt. Im vorstehenden Beispiele ist Diess, wenn man mit $2^2 = 4$ beginnt, die Periode 42 . . . 68, wenn man mit $2^1 = 2$ beginnt, die Periode 21 . . . 84. Wenn man jedoch mit $2^0 = 1$ beginnt, würde 10 . . . 42 die Periode sein, welche bei vorstehender Operation noch nicht hervorgetreten ist, sondern erst bei der Fortsetzung hervortritt.

Der Faktor $a = 2$ liefert für alle Potenzen von $\frac{1}{2}$ endliche Werthe. Der Faktor $a = 3$, welcher nach Nr. 8 ebenfalls eine Phönixzahl erzeugt, liefert dagegen lauter unendliche periodische Werthe. Diess hindert jedoch nicht das vorstehende Gesetz, indem man z. B. aus 3^8, 3^7, 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3^1, 3^0, 3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, 3^{-4} . . . folgende Summe erhält, bei welcher wir die Werthe von $\frac{1}{10 \, . \, 3}$, $\frac{1}{100 \, . \, 3^2}$, $\frac{1}{1000 \, . \, 3^3}$ etc. voll unter einander gesetzt haben.

```
                    1
                  3     0 3 3 3 3 3 3 3 3 . . .
                9       0 0 1 1 1 1 1 1 1 . . .
            2 7         0 0 0 3 7 0 3 7 . . .
          8 1           0 0 0 0 0 1 2 3 4 . . .
      2 4 3             0 0 0 0 0 0 0 4 1 . . .
    7 2 9               0 0 0 0 0 0 0 0 1 . . .
  2 1 8 7               . . . . . . . . . . . .
6 5 6 1                 . . . . . . . . . . . .
. . . . .
    1 1 1 1                     1   1 1
. . . . 7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 . . . .
```

worin man die Periode der 28-ziffrigen Phönixzahl erkennt.

22. Nach allem Vorhergehenden lässt sich das Wesen der Phönixzahlen durch folgende Sätze charakterisiren, wenn mit p eine Ziffer der Phönixzahl, mit P die ganze Phönixzahl von endlicher Länge oder ihre Periode und mit Q die nach links und rechts ins Unendliche wiederholte Periode P bezeichnet wird.

1. Die Phönixzahl P entspringt aus der Anfangsziffer 1 durch erzeugende Multiplikation mit einem bestimmten Faktor x, welcher unter Anderem den Werth 2, 3, 6, 11, 15, 18, sowie manchen höheren Werth haben kann. Die Endziffer der Phönixzahl ist 0.

2. Die Anzahl der Ziffern einer Phönixzahl ist $= 10 \, . \, x - 2$ und ihre Ziffernsumme $= 9 \, (5 \, . \, x - 1)$.

3. Die Phönixzahl enthält alle Ziffern 1, 2, 3, . . . 9, $^{1}0$, $^{1}1$, $^{1}2$, . . . $^{1}9$ u. s. w. bis $^{x-1}0$, $^{x-1}1$, $^{x-1}2$, . . . $^{x-1}8$, jedoch nicht $^{0}0$ und nicht $^{x-1}9$, und zwar jede dieser Zahlen nur einmal.

4. Die Periode der Phönixzahl lässt sich durch erzeugende Multiplikation und Division nach links und rechts ins Unendliche fortsetzen oder reproduziren und bildet dann die unendliche Periode Q.

5. Die gewöhnliche Multiplikation der Phönixzahl P mit einer darin enthaltenen Zahl ^{n}a ergiebt wiederum eine Phönixperiode, welche nur an einer anderen Stelle beginnt.

6. Die Multiplikation mit einer nicht in der Phönixzahl P enthaltenen Zahl ^{n}a ergiebt im Allgemeinen eine Reihe, deren Ziffern nach Werth und Anzahl von denen der Phönixzahl abweichen, welche jedoch,

wenn der Multiplikator den Werth der Phönixzahl nicht übersteigt, eine Strecke der Phönixzahl und ausserdem überschiessende Ziffern enthält. Die Ziffernsumme dieses Produktes bleibt konstant gleich der Ziffernsumme der Phönixzahl, wenn die nach links überschiessenden Ziffern über die nach rechts überschiessenden gesetzt und so addirt werden.

7. Wenn der Multiplikator $= {}^{x-1}9$ oder ein Vielfaches davon ist, ergiebt sich stets das Produkt $999\ldots999$. Der Multiplikator $0 = {}^{x-1}9 \,.\, 0$ ergiebt das Produkt $000\ldots000$.

8. Die unendliche Periode Q wird durch die Multiplikation oder Division mit irgend einer einfachen oder zusammengesetzten Zahl nicht geändert, insofern diese Zahl nicht $= {}^{x-1}9 \,.\, a$ ist, in welchem Falle das Produkt stets die unendliche Reihe $\ldots 9999 \ldots = 1000 \ldots 0000 \ldots \equiv \ldots 0000 \ldots$ bildet. (Die Werthe ${}^{x-1}9 = {}^{x-1}9 \,.\, 1$ und $0 = {}^{x-1}9 \,.\, 0$ sind als Vielfache von ${}^{x-1}9$ zu betrachten).

9. Die Summe von zwei oder mehr unendlichen Perioden Q ergiebt wiederum dieselbe unendliche Periode Q, insofern nicht die Faktoren, deren Produkte die zu summirenden Perioden bilden, die Summe ${}^{x-1}9 \,.\, a$ haben, in welchem Falle die Summe stets $\equiv \ldots 0000 \ldots$ ist.

10. Das Nämliche gilt von der Differenz zweier unendlichen Perioden Q. Denn wenn $Q_1 - Q_2 = R$ ist, muss $Q_2 + R = Q_1$ sein, was nur möglich ist, wenn auch $R = Q_3$ die Periode Q darstellt. Beispielsweise ist für $x = 2$, also ${}^{x-1}9 = {}^{1}9 = 19$, da aus $P = \ldots 6\,8\,4\,2\,1 | 0\,5 \ldots$ der Werth $20 \,.\, P = \ldots 3\,6\,8\,4\,2\,1 | 0\,5 \ldots \equiv 1 \,.\, P$ folgt, .

$$\begin{array}{rcl}
Q_1 = 20 \,.\, P &=& \ldots 3\;6\;8\;4\;2\;1 \,|\, 0\;5 \ldots \\
Q_2 = 1 \,.\, P &=& \ldots 3\;6\;8\;4\;2\;1 \,|\, 0\;5 \ldots \\
\hline
Q_1 - Q_2 = 19 \,.\, P &=& \ldots 0\;0\;0\;0\;0\;0 \,|\, 0\;0 \ldots
\end{array}$$

11. Da die Multiplikation mit a und die Division mit b die Periode Q nicht ändert; so lässt auch die Multiplikation mit dem rationalen Faktor $\frac{a}{b}$ diese Periode ungeändert.

12. Ebenso folgt, dass jede ganze Potenz Q^a und jede ganze Wurzel $Q^{\frac{1}{b}}$, sowie dass jede rationale Potenz $Q^{\frac{a}{b}}$ die unendliche Periode Q besitzt.

13. Die unendliche Periode Q ist daher, abgesehen von den bezeichneten Ausnahmen, welche die Periode $\ldots 0000 \ldots$ ergeben, weder durch Addition oder Subtraktion gleicher Perioden, noch durch Multiplikation oder Division mit beliebigen Zahlen, noch durch Potenzirung oder Wurzelausziehung zu verändern.

14. Diese Eigenthümlichkeit kömmt nur den Phönixzahlen P, bezw. ihren Perioden Q, keiner anderen Zahlenreihe zu.

15. Die Werthe des Faktors x, welche ausserhalb der im Satze 1 angeführten Zahlen liegen, also die Werthe 0, 1, 4, 5 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, . 17 und andere liefern keine vollständige, aber eine unvollständige Phönixzahl P, welcher ebenfalls eine unendliche Periode Q ent-

spricht. Die vollständigen und die unvollständigen Phönixzahlen haben die Sätze 5, 7, 8, 9, 10, 11 mit einander gemein, wenn die im Satze 7, 8, 11 erwähnte gewöhnliche Multiplikation oder Division mit Zahlen ausgeführt wird, welche in der unvollständigen Phönixzahl enthalten sind und wenn die im Satze 9 und 10 erwähnte Addition oder Subtraktion auf Produkte aus solchen Zahlen zurückführt.

16. Die Frage, welche Faktoren x vollständige und welche unvollständige Phönixzahlen ergeben, findet ihre Beantwortung durch die Herstellung aller x-fachen der Einheit 1 durch erzeugende Multiplikation: ein anderes interessantes Bildungsgesetz ergiebt sich jedoch folgendermaassen. Nach Nr. 15 kann die durch den Faktor x erzeugte Phönixzahl P als die aus $10 . x - 2$ Ziffern bestehende Anfangsstrecke der Summe unausgesetzt vorgeschobener Potenzen der Zahl x von der Potenz x^0 bis zur Potenz $x^{10x-2-1} = x^{10x-3}$ dargestellt werden, indem die darüber hinausschiessenden Ziffern für die Phönixzahl nur die Bedeutung haben, dass sie mit den höheren Potenzen von x die Fortsetzung oder vielmehr die Reproduktion der Phönixperiode erzeugen. Bezeichnen wir die Summe dieser ausgeschlossenen Ziffern mit A und die ganze Summe einschliesslich der Ziffern A mit S; sodass also $S = A + P$ ist; so hat man

$$S = (x . 10)^{10x-3} + (x . 10)^{10x-4} \ldots + (x . 10)^2 + (x . 10)^1 + (x . 10)^0$$

Multiplizirt man S mit $(x . 10)^1$ und subtrahirt von dem Produkte $(x . 10)\ S$ den Werth von S; so ergiebt sich

$$(x . 10 - 1)\ S = (x . 10)^{10x-2} - (x . 10)^0$$

also

$$S = \frac{(x . 10)^{10x-2} - 1}{x . 10 - 1}$$

Hieraus folgt, dass der Zähler von S durch den Nenner $x . 10 - 1$ theilbar sein muss, welchen ganzen Zahlwerth die Grösse x auch haben möge, und dass die ersten $10x - 2$ Ziffern dieses Quotienten S die Ziffernreihe der Phönixzahl P darstellen. Beginnt diese Reihe mit 1 und schliesst sie mit 0 und bildet sie eine einzige Periode; so ist P eine vollständige Phönixzahl; beginnt sie aber nicht mit 1 oder schliesst sie nicht mit 0 oder bildet sie eine Reihe gleicher Perioden; so ist P eine unvollständige Phönixzahl.

Zur Erläuterung diene der Fall $x = 2$, also die durch den Faktor 2 entspringende Phönixzahl mit der Ziffernanzahl $10x - 2 = 18$. Man hat hierfür

$$S = \frac{(2 . 10)^{18} - 1}{19}$$

Da $2^{18} = ((2^2)^3)^3 = 262\,144$ ist; so ist

$$(2 . 10)^{18} = 2^{18} . 10^{18} = 262\,144\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

$$(2 . 10)^{18} - 1 = 262\,143\,999\,999\,999\,999\,999\,999$$

Dividirt man diese Reihe durch 19; so kömmt

$$S = 1\,3\,7\,9\,7\,0\,5\,2\,6\,3\,1\,5\,7\,8\,9\,4\,7\,3\,6\,8\,4\,2\,1$$

Diese Reihe beginnt mit 1, schliesst in den ersten 18 Gliedern mit 0 und bildet eine einzige Periode, stellt also eine vollständige Phönixzahl

$$P = 0\,5\,2\,6\,3\,1\,5\,7\,8\,9\,4\,7\,3\,6\,8\,4\,2\,1$$

dar.

Nähme man einmal $x = 1$, also $10\,x - 2 = 8$ und $10\,.\,x - 1 = 9$; so wäre

$$S = \frac{(1\,.\,10)^8 - 1}{9} = \frac{100000000 - 1}{9}$$

$$= \frac{99999999}{9} = 11111111$$

Diese Reihe beginnt zwar mit 1, schliesst aber in den ersten 8 Gliedern nicht mit 0 und bildet auch keine einzige Periode, sondern das 8-fache der Periode 1, ist mithin keine vollständige, sondern eine unvollständige Phönixzahl vom Werthe 1.

Dividirt man diese Reihe durch 19, so kommt

$S =$ [illegible]

Diese Reihe beginnt mit 1, schliesst in den ersten 18 Gliedern mit 0 und bildet eine einzige Periode, stellt also eine vollständige Phönixzahl dar

$$L = 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1.$$

Nimmt man einmal $x = 1$, also $10x - 2 = 8$ und $10^{x-1} = 10$, so wird

$$S = \frac{[illegible] - 1}{9} = \frac{10000000000 - 1}{9} = \frac{9999999999}{9} = 1111111111.$$

Diese Reihe beginnt zwar mit 1, schliesst aber in den ersten 8 Gliedern nicht mit 0 und bildet auch keine einzige Periode, sondern das [illegible]-fache der Periode 1, ist mithin keine vollständige, sondern eine unvollständige Phönixzahl vom Werthe 1.

Von dem Verfasser sind folgende Werke erschienen:

Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur. 2. Bde. Auf Grundlage des englischen Werkes von Moseley.

Die Prinzipien der Hydrostatik und Hydraulik. 2 Bde., enthaltend die Statik und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Die Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken.

Die Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken.

Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind.

Über Gitter- und Bogenträger.

Über die Festigkeit der Gefässwände, insbesondere über die Haltbarkeit der Dampfkessel.

Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Zentrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytropes, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens.

Die Ursache der Dampfkesselexplosionen und das Dampfkesselthermometer als Sicherheitsapparat.

Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen.

Der Situationskalkul, eine arithmetische Darstellung der Geometrie auf Grund abstrakter Auffassung der räumlichen Grössen.

Die unbestimmte Analytik, enthaltend die diophantischen Gleichungen des ersten und zweiten Grades, die endlichen und die periodischen Kettenbrüche, die Theorie der Ungleichheiten, die Kongruenz der Zahlen, die Zahlentheorie u. s. w. in reellen und komplexen Zahlen.

Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und komplexen Zahlen.

Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus duas incognitas implicantem per numeros integros solvendi. Dissertatio inauguralis.

Die Umbildung der deutschen Rechtschreibung mit Bemerkungen über die Umgestaltung der deutschen **Maassordnungen.**

Körper und Geist. Betrachtungen über den menschlichen Organismus und sein Verhältniss zur Welt.

Die physiologische Optik. Eine Darstellung der Gesetze des Auges. 2 Bde.

Die Gesetze des räumlichen Sehens. Supplement der physiologischen Optik.

Die Theorie der Augenfehler und der Brille.

Sterblichkeit und Versicherungswesen.

Betheiligung am Gewinne und Nationalversorgung.

Die Regelung der Steuer-, Einkommen- und Geldverhältnisse.

Vorschläge für die Alters- und Invalidenversicherung.

Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.

Die magischen Figuren.

Die Naturgesetze. 4 Theile und 3 Supplemente:

1. Theil: Die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze.
2. „ Die Theorie der Erscheinung oder die physischen Gesetze.
3. „ Die Theorie der Erkenntniss oder die logischen Gesetze.
4. „ Die Theorie des Bewusstseins oder die philosophischen Gesetze.
1. Supplement: Wärme und Elastizität.
2. „ Elektrizität, Galvanismus und Magnetismus.
3. „ Die Theorie des Lichtes.

Die Welt nach menschlicher Auffassung.

Die Grundlagen der Wissenschaft.

Die Hydraulik auf neuen Grundlagen.

Die Vorbildung für das Staatsbaufach und die Schulreform.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen.

Beiträge zur Zahlentheorie.

Die quadratische Zerfällung der Primzahlen.

Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie.

Die Äquivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz.

Das Wesen der Mathematik und der Aufbau der Welterkenntniss auf mathematischer Grundlage.

Die Grundfesten der Welt, als Anhang: **Selbstkritik.**