[illegible]abenbuch für das LINEARZEICHNEN in Lehrerbildungsanstalten.

Zirkel- und Projektionszeichnen.
Elemente der Schattenkonstruktion
und Perspektive.

Bearbeitet

von

A. Marten,
Seminar-Oberlehrer a. D. in Hannover,

und

H. Sundermeyer,
weil. Rektor in Linden
und Lehrer an der Handwerker- und Kunstgewerbeschule in Hannover.

Mit 132 Figuren im Text.

Zweite Auflage.

Ferdinand Hirt,
Königliche Universitäts- und Verlagsbuchhandlung.
Breslau, am Königsplatz 1, **1918.**

Lehr- und Aufgabenbuch für das LINEARZEICHNEN in Lehrerbildungsanstalten.

Zirkel- und Projektionszeichnen.
Elemente der Schattenkonstruktion
und Perspektive

Bearbeitet

von

A. Marten,

Seminar-Oberlehrer a. D. in Hannover,

und

H. Sundermeyer,

weil. Rektor in Linden
und Lehrer an der Handwerker- und Kunstgewerbeschule in Hannover.

Mit 132 Figuren im Text.

Zweite Auflage.

Ferdinand Hirt,

Königliche Universitäts- und Verlagsbuchhandlung.

Breslau, am Königsplatz 1, **1918.**

Bemerkung zur 2. Auflage.

Die vorliegende 2. Auflage des

„Linearzeichnens"

ist auf dem Wege des photolithographischen Verfahrens hergestellt, und mußte allein schon aus diesem Grunde völlig unverändert bleiben.

Die Verlagsbuchhandlung.

Vorwort.

Die Bearbeitung des vorliegenden Buches für Linearzeichnen ist durch die Lehrpläne für die Präparandenanstalten und Seminare Preußens vom 1. Juli 1901 veranlaßt und nach den dort gegebenen Bestimmungen für diesen Zweig des Zeichnens auszuführen versucht.

Der Stoff des Linearzeichnens ist außerordentlich reich und die dafür zu Gebote stehende Zeit nur knapp; daher bedurfte es bei der Auswahl der Belehrungen und Übungen sorgfältiger Erwägungen.

Der Schwerpunkt des Linearzeichnens liegt ohne Frage im Projektionszeichnen. Es schwebte uns als nächstes Ziel vor, den Schüler zu befähigen, die geometrischen Körper in verschiedenen Stellungen ohne Schnitte und mit solchen und in gegenseitiger Durchdringung darzustellen, um ihm so ein gewisses Verständnis für technische Zeichnungen zu übermitteln. Dieses Ziel aber kann man, ohne deshalb unwissenschaftlich zu werden, auch erreichen, wenn man im Unterricht die Belehrungen und Übungen aus der reinen darstellenden Geometrie auf das Notwendigste beschränkt. Die Erörterungen über die Darstellung von Punkt, Linie und Ebene sind daher nur so weit gegeben, als sie die Darstellung des Körpers auf zweckmäßige Weise vorbereiten lehren. Die Aufgaben, die der Schüler im Projektionszeichnen lösen soll, beschränken sich lediglich auf die Darstellung von Körpern.

Ungeachtet dieser Beschränkung enthält unser Buch hier wie auch in seinem ersten Abschnitt, dem Zirkelzeichnen, noch etwa dreimal so viele Aufgaben, als der Durchschnittsschüler wird lösen können. Wir haben deshalb so viel Stoff geboten, um die Schüler entsprechend ihren Leistungen, die ja im Zeichnen ganz besonders verschieden sind, beschäftigen zu können, ohne auf einen regelrechten Massenunterricht verzichten zu müssen. Sodann wird der Lehrer schon der Abwechslung halber nicht gern jedes Jahr zu genau denselben Aufgaben greifen wollen. Und endlich möchten auch die Schüler für ihre etwaige spätere Weiterbildung, wozu sie das Amt eines Fortbildungsschullehrers häufig genug zwingt, in ihrem Buche gewiß noch gern passenden Stoff finden.

Man lasse also auf keinen Fall alle Aufgaben des Buches der Reihe nach lösen. Für das Zirkelzeichnen genügt es meistens, wenn außer dem ersten Blatt (Fig. 1) noch je eins mit gerad- und bogenlinigen Flächenmustern (Fig. 3 bis 9) gezeichnet wird. Das Zirkelzeichnen hat ja keinen Selbstzweck; es soll lediglich dazu betrieben werden, daß der Schüler mit Lineal, Zirkel und Ziehfeder arbeiten lernt. Für das Projektionszeichnen geben schon die Aufgaben in den §§ 5 und 6 und die Aufgaben in den Figuren 25, 34, 48, 49, 60, 73, 82 und 87 einen normalen Lehrgang. Eine wesentlich stärkere Beschränkung der zu lösenden Aufgaben darf aber nicht vorgenommen werden; denn sonst kommt der Schüler erfahrungsgemäß nicht zur Beherrschung des notwendigsten Stoffes aus der Projektionslehre. Man verzichte lieber ganz auf Schattenkonstruktion und Perspektive, ehe nicht die angeführten oder andere entsprechende Aufgaben gelöst sind.

Als selbstverständlich sehen wir es an, daß der Lehrer unter den Dingen der Umgebung gründliche Umschau hält nach sogenannten Anwendungen und die Schüler bei jeder passenden Gelegenheit darauf hinweist. Wie weit man mit der Darstellung derartiger Gegenstände oder von Teilen solcher Gegenstände gehen kann, hängt hauptsächlich von der zur Verfügung stehenden Zeit ab. Solche Übungen (vgl. § 8, Blatt 2, ferner die Figuren 117 bis 122) finden im Anschluß an die drei Abteilungen des zweiten Abschnitts einen geeigneten Platz. Als Beispiele seien genannt: Grabobelisken und -kreuze, einfache Säulen, Kasten, Schemel, einfache Schulmöbel, wie Bänke, Tische, Stühle, Pulte, Schränke usw.[1]) Ausgeführte Zeichnungen dieser Art enthält unser Buch nicht. Will der Lehrer derartige Dinge zeichnen lassen, so ist ihre Einordnung in den Lehrgang davon abhängig, wie die betreffenden zufällig vorhandenen Gegenstände beschaffen sind. Daß es sich da z. B. bei den Möbeln nur um die Darstellung des äußeren Umrisses, nicht aber auch um die Wiedergabe der Zusammenfügung (eine Aufgabe des sogenannten Fachzeichnens) handeln kann, braucht wohl kaum gesagt zu werden. Übrigens können Darstellungen dieser Art solche von rein geometrischen Körpern nicht ersetzen, weshalb wohl jene, nicht aber diese im Lehrgange fehlen dürfen.

Bei den Aufgaben für die Schattenkonstruktion haben wir uns auf die Darstellung des Eigenschattens einfacher geometrischer Körper und des Schlagschattens beschränkt, den sie auf die erste und zweite Projektionsebene werfen.

In der Perspektive haben wir eine Reihe perspektivischer Gesetze entwickelt, die zur verständigen Darstellung der Perspektive einfacher Gegenstände, die im Grund- und Aufriß gegeben sind, ausreichen, und deren Kenntnis unsers Erachtens zum Teil auch für das freihändige Zeichnen nach der Natur von großem Nutzen ist. In die Schattenkonstruktion und Perspektive durften wir eben nur einen Einblick gewähren, wenn unsere Belehrungen nicht gar zu weit über das im Seminar Erreichbare hinausgehen sollten. Wir glauben aber, wer den in unserm Buche gebotenen Stoff verarbeitet hat, der wird sich hier wie auch in der Projektionslehre ohne große Schwierigkeit mit Hilfe eingehenderer Werke in das weite Gebiet hineinarbeiten können.[2])

---

[1]) Die Darstellung solcher Gegenstände bietet für die Mittelschule und die stark gegliederte Knaben-Volksschule einen sehr zu empfehlenden Zeichenstoff, soweit sich dieser im Anschluß an die Projektion der einfachen geometrischen Körper (vgl. die erste Abteilung des zweiten Abschnitts dieses Buches!) bewältigen läßt.

[2]) Wir nennen als solche Werke: Bernhard, Darstellende Geometrie. Stuttgart, Enderlen. 5,20 ℳ. — Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Teil I u. II. Dresden, Kühtmann. 3,80 ℳ u. 2,20 ℳ. — Schröder, Darstellende Geometrie. Teil I. Leipzig,

Unser Buch will nicht nur ein Lehrbuch, sondern vor allen Dingen auch ein Aufgabenbuch sein, und wir glauben, daß in der Art und Weise, wie die meisten Aufgaben gestellt sind, eine Eigenart unserer Arbeit liegt. Die vom Schüler zu lösenden Aufgaben sind zu Gruppen zusammengestellt. Für die Verteilung der Figuren auf dem Blatte und für die Größe der darzustellenden Körper sind die nötigen Maßzahlen (in Millimetern) angegeben. Dabei war es nötig, ein Zeichenpapier von bestimmter Größe anzunehmen.[1]) Die einzelnen zu lösenden Aufgaben sind so gestellt, daß der Schüler in den Erläuterungsbeispielen wohl die nötige Anleitung für die Lösung, nicht aber eine ohne weiteres abzuzeichnende Vorlage findet. Selbst die Muster für das Zirkelzeichnen können als eigentliche Vorlegeblätter wohl kaum angesehen werden, da sie der Schüler nur zur Hälfte fertig vor sich hat und sie in der andern Hälfte selbständig ergänzen muß. Wer übrigens der Meinung ist, solche Übungen müßten nach wirklichen Fliesen, Bleifenstern, gestanzten Blechen u. dgl. gezeichnet werden, mag getrost seiner Überzeugung entsprechend arbeiten lassen, wenn nur in möglichst kurzer Zeit der oben angegebene Zweck damit erreicht wird.[2])

Verschiedene Gründe haben uns dazu veranlaßt, die Aufgaben in so bestimmter Form zu stellen. Wir wollten dem Lehrer die Auswahl und Zusammenstellung der Übungen erleichtern und ihm das sonst nötige zeitraubende Skizzieren und Diktieren der Aufgaben abnehmen, und wir wollten den Schüler möglichst schnell über das Aufzeichnen seiner Aufgaben hinweg zur eigentlichen Lösung derselben führen. Nur dann können die Lehrerbildungsanstalten im Linearzeichnen, wofür ihnen recht wenig Zeit zur Verfügung steht, Nennenswertes erreichen, wenn jede Minute gehörig ausgekauft und auch der häusliche Fleiß des Schülers noch etwas in Anspruch genommen

---

Göschen. 5 ℳ. — Eggers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Teil I u. II. Leipzig, Seemann. 3,50 ℳ. — Kajetan, Technisches Zeichnen für das Kunstgewerbe. Band 2 u. 3. Wien, Graeser. Je 3,60 ℳ. — Vonderlinn, Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Teil I u. II. Stuttgart, Maier. 3,30 ℳ. — Kleiber, Katechismus der angewandten Perspektive. Leipzig, Weber. 3 ℳ. — Seeberger, Prinzipien der Perspektive. München, Bassermann. 2,50 ℳ.

[1]) Wenn wir dabei den Gebrauch des Reißbrettes empfehlen, so bedarf das seiner für das Linearzeichnen klar auf der Hand liegenden Vorteile halber wohl kaum der Begründung. Der Zeichenblock, den gewiß kein Zeichenlehrer für das freie Zeichnen in den Schulen entbehren möchte, ist und bleibt für das Linearzeichnen ein mangelhafter und meist auch nicht einmal dem Preise nach vorteilhafter Notbehelf.

[2]) Ausschlaggebend für unsere Stellungnahme war hauptsächlich die Erwägung, daß der Schüler nach diesem Verfahren in derselben Zeit mehr Übungsstoff bewältigen kann als nach dem andern. Um übrigens unsern Standpunkt in dieser Frage von ziemlich untergeordneter Bedeutung noch genauer zu kennzeichnen, sei bemerkt, daß das Zirkelzeichnen in unserm Lehrgange eine ähnliche Stellung einnimmt, wie die Freiarmübungen und die ersten Arbeiten mit dem Pinsel in den neuen preußischen Lehrplänen für den Zeichenunterricht, nicht aber die Stellung, die darin dem freien Zeichnen nach Fliesen, Tapeten und Stoffmustern zugewiesen ist.

werden kann.[1]) Es liegt auf der Hand, daß Lehrern und Schülern eine passende Handreichung dazu willkommen sein muß, ja daß eine solche nicht gut wird entbehrt werden können.

Wie weit beim Projektionszeichnen Modelle zu benutzen sind, ergibt sich ohne weiteres aus dem allgemeinen Zweck der Projektionslehre. Sie gibt bekanntlich Anweisung: erstens für die Darstellung wirklich vorhandener Gegenstände, die geeignet ist, in andern Personen eine genaue Vorstellung ihrer Form zu erzeugen, und zweitens für die Darstellung von nur in Gedanken vorhandenen Gegenständen, so daß andere Personen danach genau die betreffenden Gegenstände herstellen können. Da nun das Zeichnen nach dem vor Augen stehenden Gegenstande das leichtere ist, so gehe man bei den einzelnen Aufgabengruppen auch zunächst davon aus, mache sich aber allmählich vom Gebrauch des Modells frei. Die nötigen Modelle lasse man entweder vom Tischler anfertigen oder stelle sie sich selbst aus Pappe her.

Was nun endlich den Gebrauch unseres Buches anlangt, so sind wir selbstverständlich nicht der Meinung, daß im Unterrichte, so wie das im Buche geschehen ist, die ganze Theorie eines Abschnittes oder einer Aufgabengruppe vorausgeschickt werden müsse, ehe man zu der zeichnerischen Darstellung schreitet. Es werde vielmehr den Schülern jeweilig nur so viel von den Erläuterungen geboten, als sie zur Lösung ihrer Aufgabengruppe bedürfen. Der voraneilende Schüler möge sich die Lösung weitergehender Aufgaben nach den gegebenen Anweisungen selbst suchen.

Bei den theoretischen Belehrungen ist auf das mathematische Wissen der Schüler zurückzugreifen und dieses, wo es nötig ist, zu vertiefen und zu erweitern. Da die für Seminare bestimmten mathematischen Lehrbücher bisher nur wenig oder auch gar nichts über die für die Projektionslehre so überaus wichtigen Kegelschnitte, Ellipse, Hyperbel und Parabel, bringen, so haben wir im Anhange über diese und über die so oft auftretende Projektion des Kreises und der Ellipse so viel gegeben, als uns zum vollen Verständnis der Darstellung dieser Kurven erforderlich schien. Wer selbst später im Projektionszeichnen zu unterrichten hat — und das muß mancher Lehrer —, muß diese Kurven nicht bloß darstellen, sondern soll das angewandte Verfahren auch begründen können.

Aus Rücksicht auf den Selbstunterricht sind wir mit den Anweisungen über die Ausführung der Zeichnungen ziemlich weit gegangen. Man sehe sie nicht überall für durchaus bindend an, als ob es nicht auch anders gemacht werden dürfe und könne.

Hannover und Linden, im Januar 1904.

Die Verfasser.

---

[1]) Die Präparandenanstalt muß jedenfalls außer dem I. Abschnitt auch noch die Abteilung A des II. Abschnittes in unserm Buche im großen und ganzen erledigen, wenn das Seminar den ihm vorgeschriebenen Stoff bewältigen soll.

Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkungen.

Werkzeuge und Werkstoffe für das Linearzeichnen.

Zur Ausführung der Linearzeichnungen sind erforderlich:

1. Ein **Reißzeug.** Es muß enthalten: a) einen Stechzirkel (Handzirkel) mit scharfen Spitzen und b) einen Einsatzzirkel (mit Nadelspitze) für Bleifeder und Reißfeder (Ziehfeder) — Wünschenswert ist auch eine Handreißfeder, die indes durch die Zirkelreißfeder ersetzt werden kann.

2. Ein **Reißbrett,** das etwa die Größe von 47 : 57 cm habe.

3. Eine **Reißschiene,** ein gleichschenkliges, rechtwinkliges **Dreieck** und ein **Zentimetermaß** mit Millimeterteilung. — Die Schiene habe einen festen Kopf und ein etwa 62 cm langes Blatt, das dem Kopfe auf-, nicht eingelegt ist. Die Katheten des Dreiecks seien 25 cm lang. — Für die Lösung der späteren Aufgaben kann ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkeln von 60^0 und 30^0 nicht gut entbehrt werden.

4. Gut geleimtes, ein wenig gekörntes **Papier.** Das Papier wird mit Reißnägeln (Heftzwecken) auf dem Brette befestigt. — Für die in diesem Buche geforderten Zeichnungen wird vorausgesetzt, daß das die Zeichnung umschließende Rechteck — man lasse dieses vordrucken — eine Größe von 36 : 46 cm habe. Die ganze Blattgröße betrage daher 44 : 54 cm.

5. Ein harter, gut gespitzter **Bleistift** (Nr. 4 oder 5) und zwei Stück **Gummi,** ein weicheres, um die Bleistiftlinien, und ein härteres, um fehlerhafte, mit Tusche ausgezogene Linien zu entfernen. — Zum Ziehen von Linien aus freier Hand verwende man einen weichen Stift (Nr. 2).

6. **Ausziehtusche** (flüssige Tusche), **Wasserfarben, Tuschnäpfchen** und ein **Doppelpinsel** (Größe 13/15). — Man füllt die Ziehfeder am besten mit einer reinen Schreibfeder. Nach dem Gebrauche ist die Reißfeder mit einem weichen Lappen oder mit gutem Löschpapier sorgfältig zu reinigen.

I. Abschnitt.

Zirkelzeichnen geometrischer Flächenmuster.

§ 1. Einteilung des Zeichenblattes. Darstellung verschiedener gerader Linien.

1. Der Schnittpunkt der Diagonalen auf dem 1. Zeichenblatt (Fig. 1) ist der Mittelpunkt desselben. Dieser ist zuerst zu bestimmen. (Von den Diagonalen ist nur je ein kleines Mittelstück zu ziehen.)

2. Durch den Mittelpunkt des Blattes ist mit einem harten, spitzen Bleistift an der Reißschiene die Wagerechte und an dem auf der Schiene liegenden Dreiecke die Senkrechte zu zeichnen.

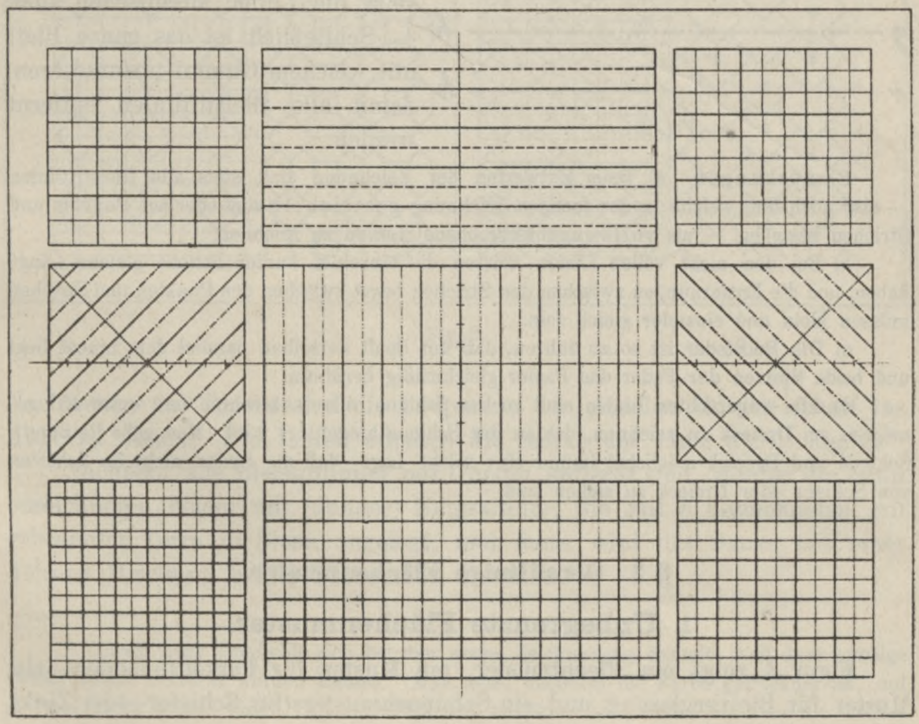


Fig. 1.

Bemerkung. Der Kopf der Schiene liegt stets an der linken Kante des Brettes; beim Auflegen des Dreiecks auf die Schiene ist diese festzuhalten. Die Bleifeder — wie auch hernach die Ziehfeder — wird beim Ziehen der Linien so geführt, daß sie immer dieselbe Lage beibehält; der kleine Finger gleitet dabei auf dem Lineale hin.

3. Auf den durch die Mitte gelegten Geraden (dem Achsenkreuze) trage mit dem Stechzirkel vom Mittelpunkte aus Strecken von je 1 cm Länge ab! (Nach rechts und links je 21, nach oben und unten je 16.)

Bemerkung. Der Zirkel wird mit den drei ersten Fingern am Kopfe gefaßt und senkrecht geführt. Man sticht mit dem Zirkel kleine Löcher in das Papier. Diese Zirkelstiche werden zweckmäßig mit einem kleinen Kreise (aus freier Hand und mit einem weichen Stifte) umzogen, damit sie leicht wiederzufinden sind.

4. Die Teilung der Quadratseiten der Eckfelder erfolge durch Probieren mit dem Stechzirkel, nicht durch Konstruktion. (1. Quadrat: Halbierungen; 2. Quadrat: Dreiteilungen; 3. Quadrat: Halbierungen und Dreiteilungen; 4. Quadrat: Halbierungen und Fünfteilungen.)

5. Die einzelnen Linien der Figur sind mit einem harten, spitzen Bleistifte (Nr. 5) vorzuzeichnen und dann mit Tusche auszuziehen. Figur 2 zeigt, in welcher Weise und wie stark die Linien auszuziehen sind. — Schließlich ist das ganze Blatt mit weichem Gummi abzuradieren, damit alle Bleistiftlinien entfernt werden.

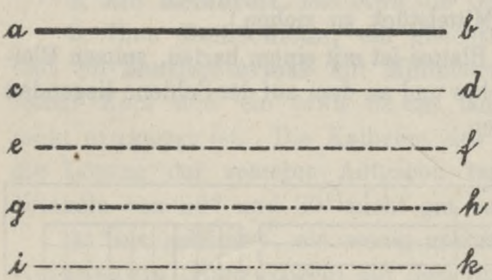


Fig. 2.

Bemerkungen. a) Beim Entwerfen der Zeichnung sind stets alle Bleistiftlinien — also auch die, welche in der fertigen Zeichnung gestrichelt sind oder aus Punkten und Strichen bestehen — als volle (ununterbrochene) Linien zu zeichnen.

b) Bei den nicht vollen Linien müssen die einzelnen kurzen Striche gleiche Länge haben, und die Entfernungen zwischen den Strichen bezw. zwischen den Punkten und Strichen müssen klein und einander gleich sein.

c) Die Reißfeder ist so zu führen, daß der Spalt derselben parallel dem Lineal liegt und beide Spitzen der Feder das Papier gleichmäßig berühren.

d) Alle wagerechten Linien sind an der Schiene, alle senkrechten und unter 45° geneigten am Dreieck zu zeichnen, das an der Schiene hingeführt wird. Man gebe Reißbrett. Schiene und Dreeick möglichst immer eine solche Lage daß die Linien nicht im Schatten von Schiene oder Dreieck zu ziehen sind.

§ 2. Geradlinige Flächenmuster.

1. Unbegrenzte Flächenmuster.

Figur 3 zeigt ein Flechtmuster, ein Muster für Parkettfußboden, ein Muster für Bleiverglasung und ein Schuppenmuster (für Schiefer- oder Zinkdächer).

Trage auf den Armen des Achsenkreuzes (Fig. 3) vom Kreuzpunkte aus Strecken von je 12 mm Länge ab (nach rechts und links je 17, nach oben und unten je 13) und entwirf mit dem harten Stifte (Nr. 5) das Quadratnetz! Nun zeichne mit einem weichen Stifte (Nr. 2) freihändig oder auch mit Hilfe von Schiene und Dreieck die Muster in des Netz, wobei der an der linken Seite jeder Einzelfigur angedeutete Gang zu beachten ist! Jedes Muster ist ganz so auszuführen, wie die rechte Hälfte der Figuren zeigt. — Beim

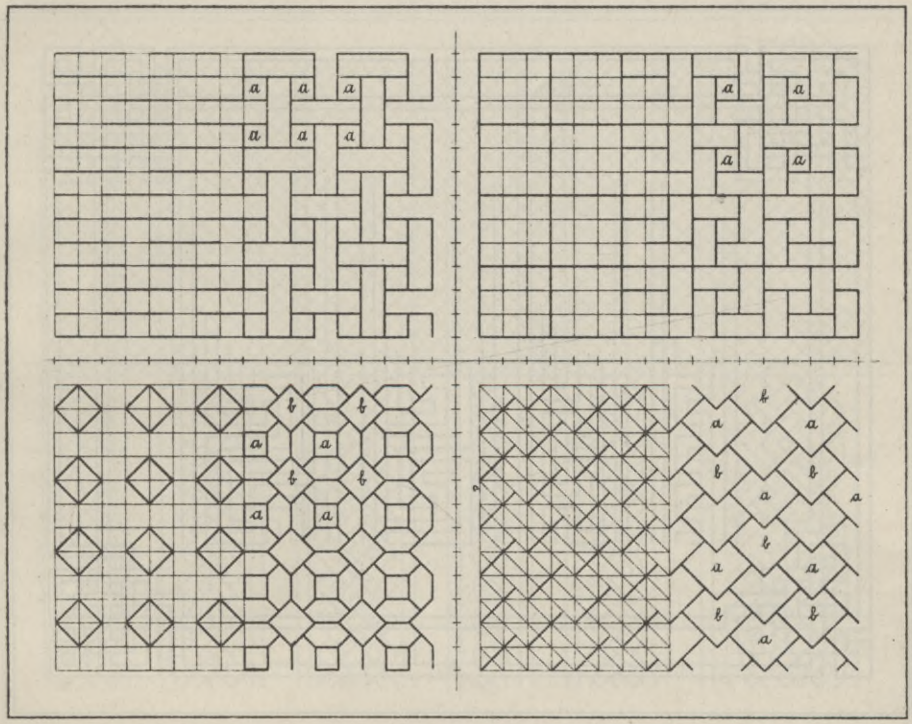


Fig. 3.

Nachziehen mit Tusche sind die Endpunkte der einzelnen Linien scharf ins Auge zu fassen. Die Linien erhalten die Stärke der Linie ab in Fig. 2.

Nachdem alle Bleistiftlinien mit Gummi entfernt sind, werden die mit a bezeichneten Felder mit (dünner) Neutraltinte, die mit b bezeichneten mit gebrannter Terra di Siena angelegt, und dann wird das Ganze mit einer dünnen Mischung beider Farbentöne übermalt.[1])

[1]) Dieser Gang empfiehlt sich bei den ersten Zeichnungen deshalb, weil dann etwaige Fehler leicht entfernt werden können. Man lege, nachdem die Farbe getrocknet ist, auf die übermalte Fläche einen Papierstreifen und entferne mit Gummi die über die Grenze gelaufene Farbe.

2. Mäander und Eckverzierungen.

Der Mäander (Fig. 4) ist ein Band, das seinen Namen von dem viel gewundenen kleinasiatischen Flusse Mäandros (jetzt Mènderes) erhalten haben soll. (Häufig wird der Mäander bei uns auch nach französischem Sprachgebrauch [Band] à la grecque genannt.) — Bänder sind zweiseitig begrenzte Flächenmuster und finden Verwendung als Umrahmungs- und

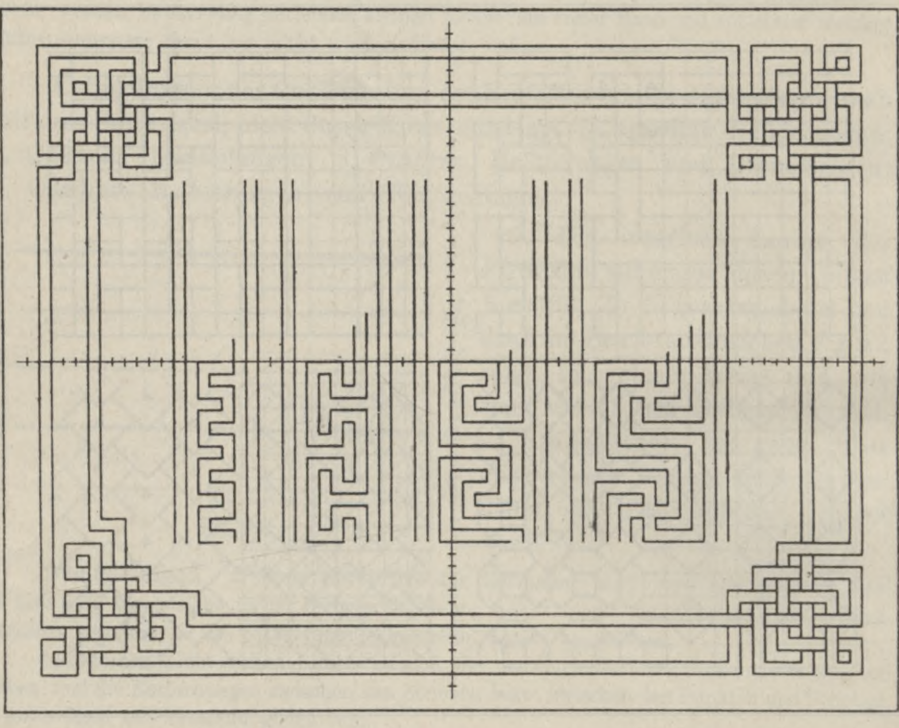


Fig. 4.

Trennungsglieder (bei Decken-, Wand- und Bodenfeldern), als Saum von Gewändern und Geweben, als Verzierung an Säulen, Friesen, Vasen usw. — Die beiden ersten Mäander unseres Blattes sind symmetrisch, die beiden andern sind unsymmetrisch; der letzte ist ein durchkreuzter Mäander.

Gib den Quadraten des Netzes 6 mm lange Seiten und zeichne die Bänder mit weichem Stift freihändig hinein! Bei den Eckverzierungen ist zu beachten, wie die beiden Bänder durcheinander geflochten sind. — Nachdem die Zeichnung mit Tusche ausgezogen ist und alle Bleistiftlinien mit weichem Gummi entfernt sind, werden die Bänder mit Neutraltinte oder mit gebrannter Terra di Siena angelegt.

3. Flechtbänder.

Flechtbänder (Fig. 5) bestehen aus zwei oder mehreren Streifen, die so durcheinandergeflochten sind, daß das Obenhinweg- mit dem Untenhindurchgehen regelmäßig wechselt. Sie finden Anwendung als Randverzierungen (Bordüren) in der Malerei, Weberei, Töpferkunst, Buchdruckerkunst usw.

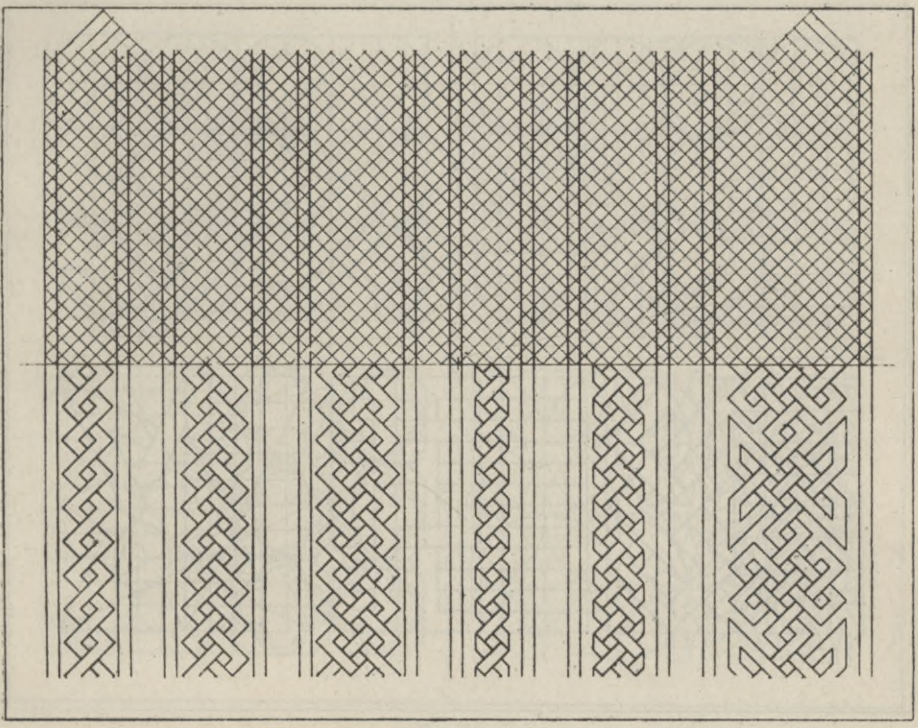


Fig. 5.

Um das der Figur 5 zugrunde liegende Netz zu erhalten, ziehe man durch den Blattmittelpunkt zwei gerade unter einem Winkel von 45° geneigte Linien und trage auf diesen 6 mm-Strecken vom Schnittpunkte aus ab. — Die Bänder werden freihändig mit Bleistift Nr. 2 eingezeichnet; die sie begleitenden Seitenstreifen sind so breit zu machen, wie ein Einzelband des Geflechtes. — Es empfiehlt sich hier, den Hintergrund der Bänder mit Neutraltinte (auch mit etwas Zusatz von Preußisch-Blau) zu bemalen. Die Bänder selbst lasse man weiß. Will man die Muster farbiger gestalten, so gebe man ihnen solche Farben, wie sie sich auf Tonfliesen finden.

4. Quadratfüllungen.

Füllungen (Fig. 6) sind allseitig begrenzte Flächenmuster und finden Verwendung in der Weberei, auf Eckfliesen, bei Einlegearbeiten (Intarsien) usw.

Die Quadrate des Blattes (Fig. 6) haben 13 cm lange Seiten und untereinander eine Entfernung von 1 bezw. 2 cm. Zur Gewinnung der den Figuren zugrunde liegenden Quadratnetze sind je zwei anstoßende Quadrat-

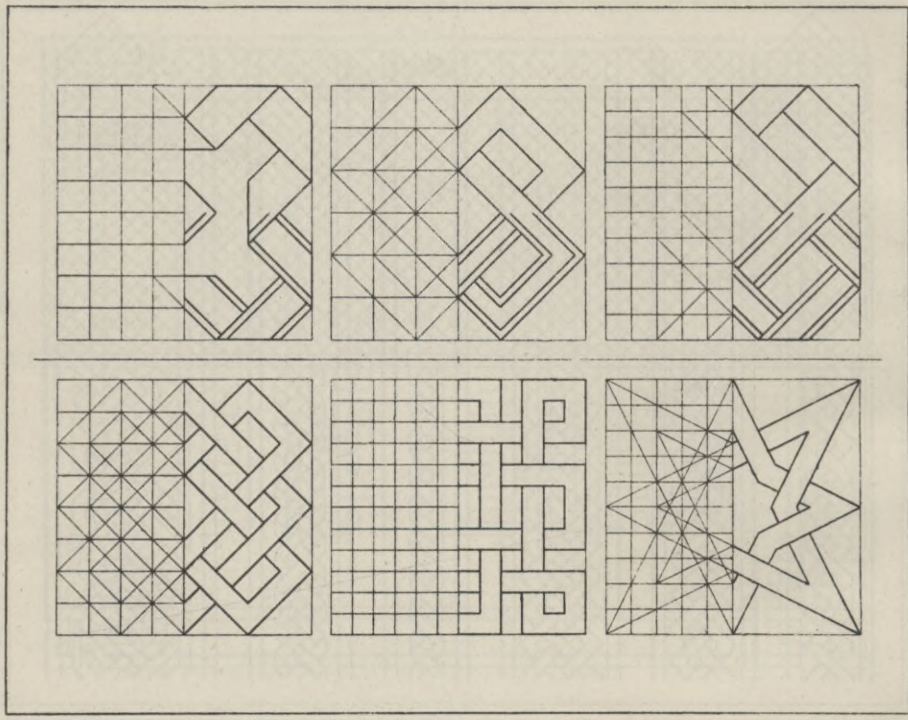


Fig. 6.

seiten durch Probieren (vgl. § 1, 4!) in bezw. 8, 6, 12 und 10 gleiche Teile zu teilen. — In bezug auf die Farben befolge die Angaben zu den vorigen Mustern!

§ 3. Bogenlinige Flächenmuster.

1. Unbegrenzte Flächenmuster.

Fig. 7 enthält vier Fliesenmuster. Fliesen nach Art des dritten Musters sind in der Regel in der Mitte noch mit Rosetten geschmückt.

Für die drei ersten Muster ist das zugrunde liegende Quadratnetz wie in Fig. 3 zu entwerfen, bei dem vierten Muster gehe man vom Schnittpunkte zweier Begrenzungslinien aus, dann ergeben sich die Mittelpunkte aller Kreise durch die Schnittpunkte der Kreise mit diesen Geraden und der Kreise unter sich. (Radius dieser Kreise 36 und 30 mm.) Die Durchschiebung der Ringe im letzten Muster ist freihändig mit weichem Blei einzuzeichnen.

Beim Vorzeichnen der Kreise ist in den Einsatzzirkel Blei Nr. 4 oder 5 zu nehmen. Bei der Ausführung mit Tusche sind zwei einander berührende

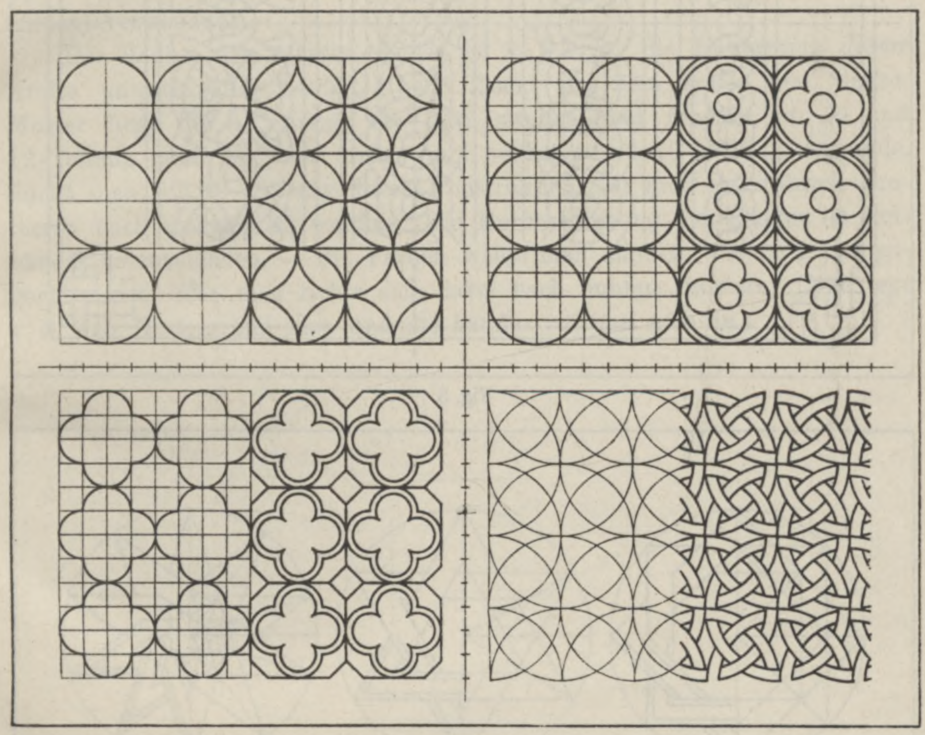


Fig. 7.

Kreise nicht unmittelbar nacheinander zu zeichnen, weil dann an den Berührungsstellen die Tusche leicht ausläuft. — Für das Bemalen wähle Farben, wie sie sich auf Fliesen finden!

2. Flechtbänder.

Flechtbänder (vergl. Blatt 4, Fig. 5!), wie sie Fig. 8 zeigt, dienen häufig zur Umrahmung von Fliesenfußböden.

Auf der durch die Blattmitte gelegten Wagerechten sind von der Mitte aus Strecken von 6 mm Länge abzutragen, dann sind die vier Senkrechten, die durch die Mitte der Bänder gehen sollen, zu zeichnen und auf diesen

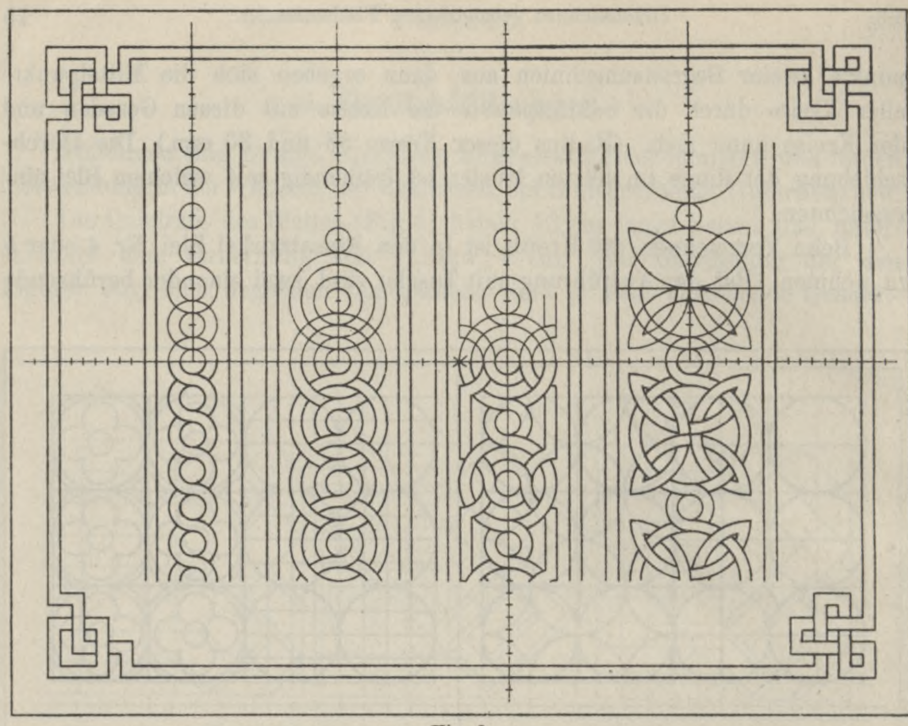


Fig. 8.

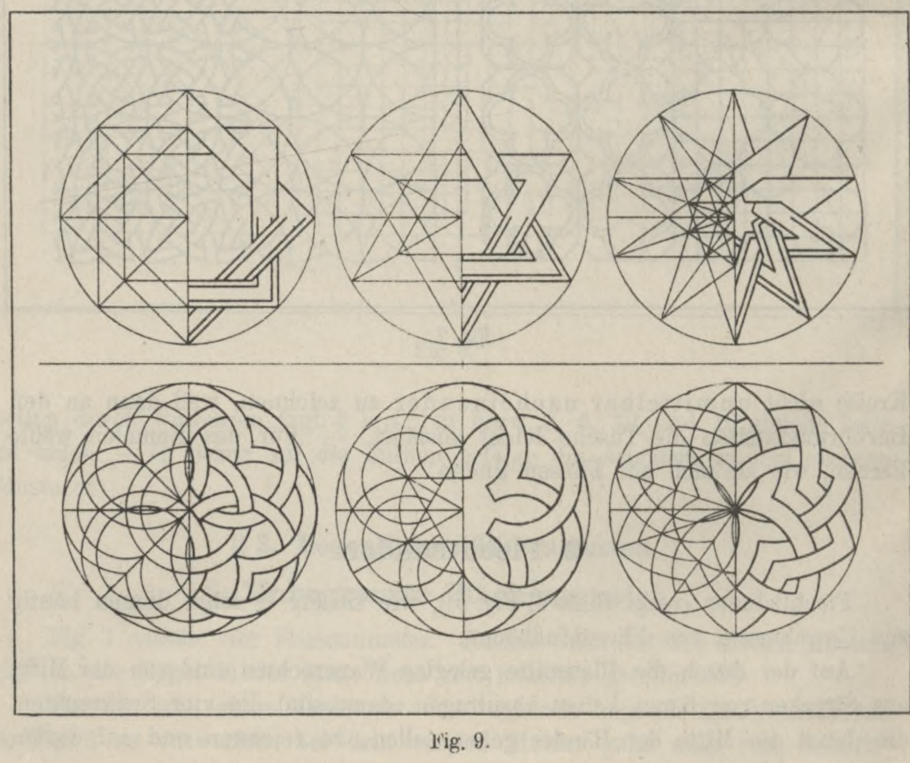


Fig. 9.

ebenfalls 6 mm-Strecken nach oben und unten abzutragen. Die Ring- und Bandbreite und die Breite der Begleitstreifen beträgt überall 6 mm.

Für die Eckverzierungen (aber auch nur für diese) ist das quadratische Liniennetz herzustellen. — Die Farben sind nach guten Fliesenmustern zu wählen.

3. Kreisfüllungen.

Die Kreisfüllungen in Fig. 9 sind für Bleiverglasung passend; die drei ersten Muster finden auch in der Weberei und in Holzeinlegearbeiten (Intarsien) Verwendung.

Der Radius der äußeren Kreise ist = 6,5 cm, die Entfernung dieser Kreise untereinander beträgt 1 bezw. 2 cm. Bei dem ersten und vierten Muster liegt die 8-Teilung, bei dem zweiten und fünften die 6- und 12-Teilung und bei dem dritten und sechsten die 10-Teilung zugrunde. Sucht man die 10-Teilung durch Konstruktion, so muß doch durch Probieren noch nachgeprüft werden. Die Durchschiebung der Bänder ist freihändig vorzuzeichnen. — Die Farben wähle man ähnlich, wie in § 2, 1 angegeben ist, oder man richte sich dabei nach bunten Fenstern. (Man lege z. B. den Hintergrund blau und die Bänder rot und gelb an.)

II. Abschnitt.

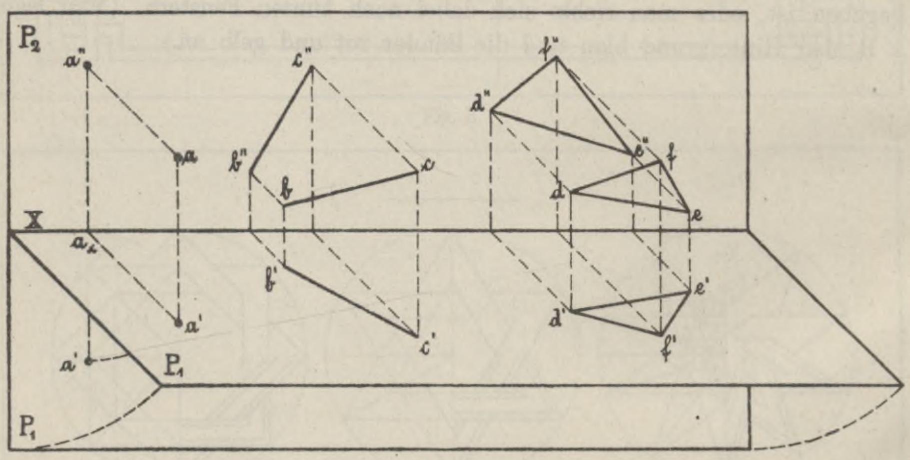
Projektionszeichnen.

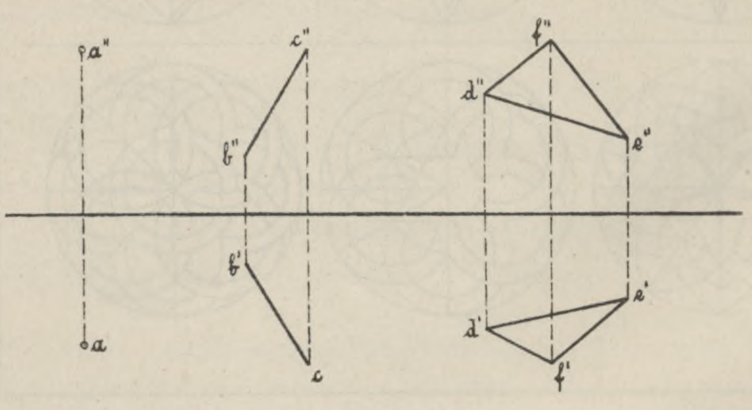
A. Grund- und Aufriß einfacher Körper. Schiefwinklige Parallelprojektion.

§ 4. Einführung in das Projektionszeichnen.

1. Fällt man von einem Punkte im Raume das Lot auf eine Ebene, so ist dadurch der Punkt auf die Ebene projiziert. Der Fußpunkt des Lotes ist die Projektion des Punktes auf die Ebene. Das Lot heißt die pro-

a b Fig. 10. c





a b Fig. 11. c

jizierende Linie oder der Projektionsstrahl, und die Ebene ist die Projektionsebene.

Die Wörter projizieren und Projektion stammen aus dem Lateinischen: projicĕre = vorwärts werfen, vorstrecken, ausstrecken; projectio = das Hervorwerfen, Ausstrecken (z. B. des Armes).

Die Projektionslehre oder darstellende (deskriptive) Geometrie lehrt, alle im Raume auszuführenden Konstruktionen in einer Ebene darzustellen. Als eigentlicher Schöpfer und wissenschaftlicher Begründer der darstellenden Geometrie gilt der französische Mathematiker Gaspard Monge (1795).

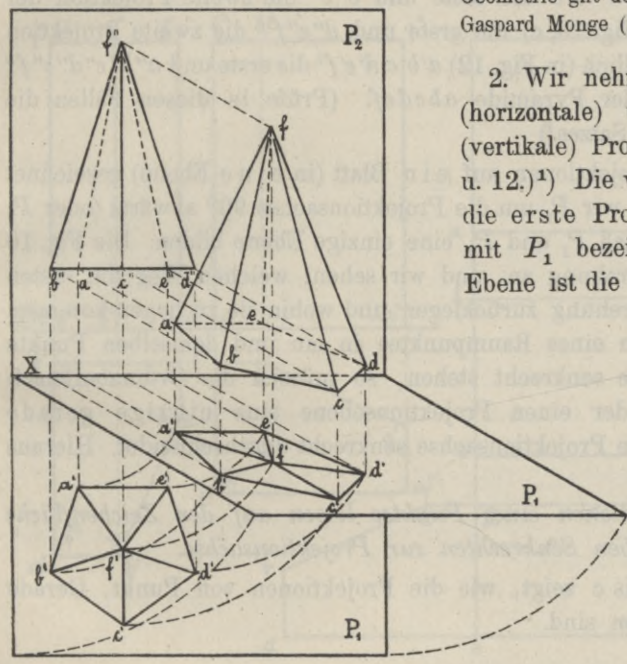


Fig. 12.

2. Wir nehmen eine wagerechte (horizontale) und eine senkrechte (vertikale) Projektionsebene. (Fig. 10 u. 12.)[1]) Die wagerechte Ebene heißt die erste Projektionsebene und wird mit P_1 bezeichnet, die senkrechte Ebene ist die zweite und hat die Bezeichnung P_2. Die Schnittlinie beider Ebenen ist die Projektionsachse und wird mit X bezeichnet, daher auch die X-Achse genannt.

3. a) In dem Raume zwischen den beiden Projektionsebenen liege ein Punkt a (Fig. 10, a). Wir fällen von ihm auf beide Ebenen die Lote. Dann ist a' (lies a eins!) die erste, a'' (lies a zwei!) die zweite Projektion des Punktes a. Legen wir durch aa' und aa'' eine Ebene, so steht diese auf beiden Projektionsebenen senkrecht und schneidet die Projektionsachse in a_x, die Ebene P_1 in $a'a_x$ und P_2 in $a''a_x$. Die Schnittlinien $a'a_x$ und $a''a_x$ stehen auf der X-Achse senkrecht und heißen Ordinaten; $a'a_x$ ist die erste, $a''a_x$ ist die zweite Ordinate.

---

[1]) Zur Veranschaulichung diene eine sogenannte Projektionstafel: zwei (oder drei) durch Scharniere verbundene Holztafeln. In Ermangelung einer solchen kann man zwei (drei) Reißbretter oder Papptafeln benutzen. Die Lote werden durch Stäbchen veranschaulicht.

Es ergibt sich der Satz:

Die erste Ordinate gibt die Entfernung des Raumpunktes von P_2, die zweite die Entfernung desselben von P_1 an.

Das Wort Ordinate ist lateinisch (von ordo = Ordnung, Reihe) und hat hier den Sinn einer zugeordneten Linie.

b) Genau so, wie mit dem Punkte a, verfahren wir mit den beiden Endpunkten der Linie bc (Fig. 10, b), mit den drei Eckpunkten des Dreiecks def (Fig 10, c) und mit den sechs Eckpunkten der Pyramide $abcdef$ (Fig. 12). Es ist dann (in Fig. 10, b $b'c'$ die erste und $b''c''$ die zweite Projektion der Geraden bc, $d'e'f'$ (in Fig. 10, c) die erste und $d''e''f''$ die zweite Projektion des Dreiecks def und endlich (in Fig. 12) $a'b'c'd'e'f'$ die erste und $a''b''c''d''e''f''$ die zweite Projektion der Pyramide $abcdef$. (Prüfe in diesen Fällen die Richtigkeit des obigen Satzes!)

4. Damit beide Projektionen auf ein Blatt (in eine Ebene) gezeichnet werden können, drehen wir P_1 um die Projektionsachse 90° abwärts (oder P_2 um 90° rückwärts), so daß P_1 und P_2 eine einzige Ebene bilden. Die Fig. 10 und 12 deuten diese Drehung an, und wir sehen, welchen Weg die ersten Projektionen bei der Drehung zurücklegen und wohin sie zu liegen kommen.

Da beide Ordinaten eines Raumpunktes in ein und demselben Punkte auf der Projektionsachse senkrecht stehen, so müssen die Ordinaten nach ausgeführter Drehung der einen Projektionsebene eine einzige gerade Linie bilden, welche die Projektionsachse senkrecht durchschneidet. Hieraus folgt der wichtige Satz:

Die beiden Projektionen eines Punktes liegen auf der Zeichenfläche stets in ein und derselben Senkrechten zur Projektionsachse.

5. Die Fig. 11, a bis c zeigt, wie die Projektionen von Punkt, Gerade und Dreieck zu zeichnen sind.

§ 5. Grundriß, Aufriß und Netz gerader Prismen.

Ein unregelmäßiges, gerades, fünfseitiges Prisma, das auf P_1 steht, ist auf P_1 und P_2 zu projizieren, und dann ist das Netz dieses Körpers herzustellen. — Die Ecken der Grundfläche des Prismas heißen $abcde$, die Ecken der Deckfläche $fghik$. (Fig. 13 bis 15.)

a) Die Projektion des Prismas. (Fig. 13 u. 14.)

1. Da die Grundfläche des Prismas in P_1 liegt, so fällt sie mit ihrer Projektion $a'b'c'd'e'$ zusammen. Es gilt der Satz:

Liegt ein Punkt, eine Linie oder eine Fläche in der Projektionsebene, so fallen diese Raumgebilde mit ihren Projektionen zusammen.

2. Die Seitenkanten und Seitenflächen des Prismas stehen senkrecht auf P_1, daher fallen die Lote von den Endpunkten der Deckfläche mit den

Seitenkanten zusammen, die Projektion der Deckfläche deckt genau die der Grundfläche, und die Projektionen der Seitenflächen sind gerade Linien. — Vergleiche die Projektionen der Endflächen auf P_2!

Es ergeben sich die Sätze:

a) Die (senkrechte) Projektion des Lotes auf eine Ebene ist ein Punkt.

b) Steht eine ebene Fläche (eine Ebene) senkrecht auf der Projektionsebene, so ist ihre Projektion eine gerade Linie.

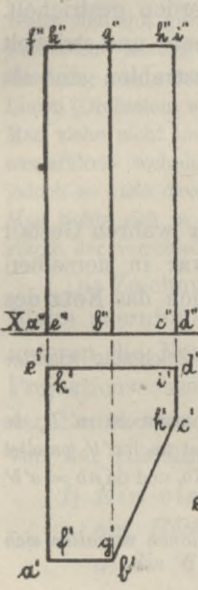


Fig. 13.

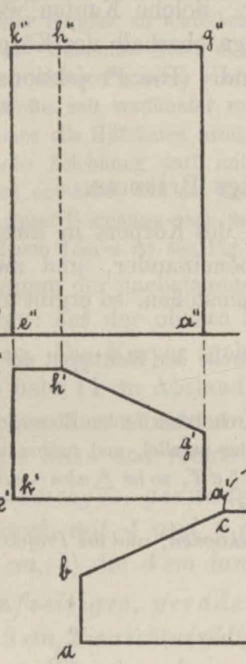


Fig. 14.

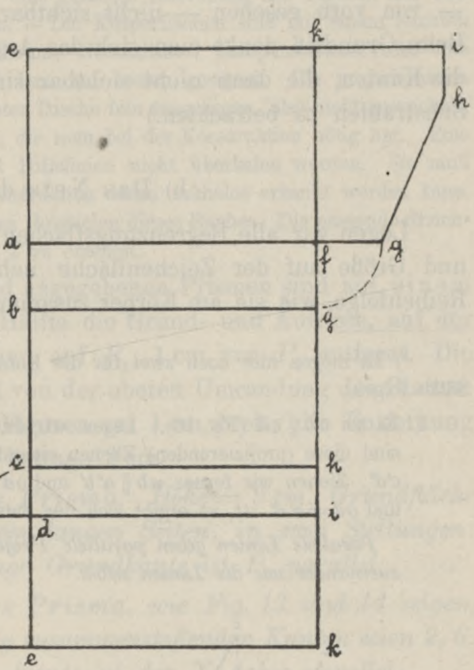


Fig. 15.

3. Die Seitenkanten und je zwei obere und untere Endkanten des Prismas sind parallel P_2; es ist leicht zu erkennen, daß sie ihren Projektionen auf P_2 parallel und gleich sein müssen. Vergleiche auch die Kanten der Deckfläche mit ihren ersten Projektionen Wir merken die Sätze:

a) Ist eine Gerade der Projektionsebene parallel, so hat ihre Projektion dieselbe Richtung (Lage) und Länge.

b) Ist eine begrenzte ebene Fläche der Projektionsebene parallel, so ist sie ihrer Projektion kongruent.

4. Die Kanten bc und gh (Fig. 13 u. 14) stehen schräg zu P_2; in Fig. 13 ist der Neigungswinkel dieser Kanten zu P_2 größer als in Fig. 14, und wir sehen, daß die zweite Projektion derselben in Fig. 13 kleiner ist als in Fig. 14. Wir merken daher den Satz:

Die Projektion einer Geraden (und auch einer Fläche) ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel zur Projektionsebene ist. (Vergl. die Sätze unter 2 und 3!)[1])

Ist α der Neigungswinkel der Geraden a und p ihre Projektion, so ist $p = a \cdot \cos \alpha$.

5. Die Projektion des Körpers auf die erste Projektionsebene (die erste Projektion) wird Grundriß, die auf die zweite (die zweite Projektion) wird Aufriß genannt. — Bei der Stellung des Körpers in Fig. 14 ist die Kante ch — von vorn gesehen — nicht sichtbar. Solche Kanten werden gestrichelt. Beim Grundriß denkt man sich das Auge oberhalb des Körpers und strichelt die Kanten, die dann nicht sichtbar sind. (Die Projektionsstrahlen sind als Sehstrahlen zu betrachten.)

b) Das Netz des Prismas.

Legen wir alle Begrenzungsflächen des Körpers in ihrer wahren Gestalt und Größe auf der Zeichenfläche nebeneinander, und zwar in derselben Reihenfolge, wie sie am Körper zusammenstoßen, so ergibt sich das **Netz** des

---

[1]) Es mögen hier noch zwei für die Kontrolle der Richtigkeit der Zeichnung wichtige Sätze folgen:

1. Es sei $ab \parallel cd$ (Fig. 16). Legen wir durch beide Linien Ebenen senkrecht zu P_1, so sind diese (projizierenden) Ebenen einander parallel, und mithin ist auch $a'b'$ parallel $c'd'$. Ziehen wir ferner $nb \parallel a'b'$ und $od \parallel c'd'$, so ist $\triangle abn \sim cdo$, und da $nb = a'b'$ und $od = c'd'$ ist, so ergibt sich der Satz:

   Parallele Linien geben parallele Projektionen, und die Projektionen verhalten sich zueinander wie die Linien selbst.

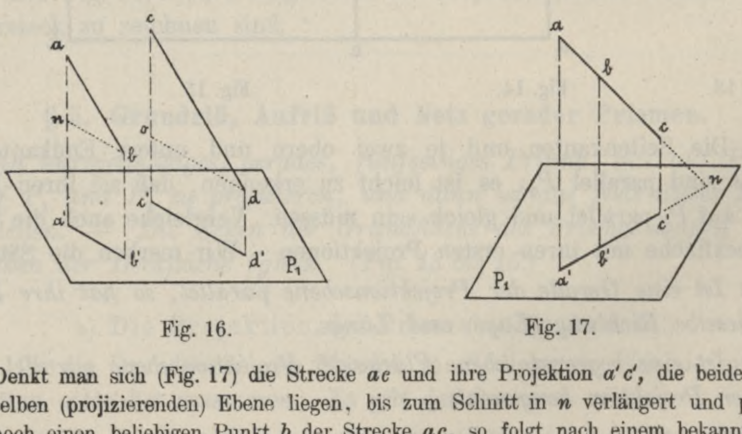


Fig. 16. Fig. 17.

2. Denkt man sich (Fig. 17) die Strecke ac und ihre Projektion $a'c'$, die beide in derselben (projizierenden) Ebene liegen, bis zum Schnitt in n verlängert und projiziert noch einen beliebigen Punkt b der Strecke ac, so folgt nach einem bekannten Proportionalsatze der Planimetrie:

   In demselben Verhältnisse, wie eine Linie geteilt ist, ist auch ihre Projektion geteilt. — Ist daher eine Linie in gleiche Teile geteilt, so ist auch ihre Projektion in gleiche Teile geteilt.

Körpers oder seine **Abwickelung** (Fig. 15). Die Maße sind dem Grund- und Aufriß zu entnehmen. — Schneidet man das Netz aus und klebt es gehörig zusammen, so erhält man den Körper.

An die Ecken des Netzes schreibt man dieselben Buchstaben, die im Grundriß und Aufriß stehen, aber mit Weglassung der Strichelchen.

Aufgaben.

Vorbemerkung. Die Zeichenfläche ist 36 : 46 cm groß angenommen. Sauberkeit, Schärfe und Genauigkeit der Zeichnung und eine gefällige Anordnung der Figuren auf dem Blatte sind mit größter Sorgfalt zu erstreben. — Die Körperflächen sind mit einem leichten Farbentone anzulegen. Gebrannte Terra di Siena, Neutraltinte, Lampenschwarz oder eine Mischung von zweien dieser Pigmente sind dazu am besten geeignet. Die projizierenden Linien (Ordinaten) werden mit verdünnter roter Tusche fein ausgezogen, also nicht gestrichelt. Man ziehe nicht immer alle Hilfslinien nach, die man bei der Konstruktion nötig hat. Eine ausgeführte technische Zeichnung darf mit Hilfslinien nicht überladen werden. Sie muß jedoch so viele davon enthalten, daß die Konstruktion daran mühelos erkannt werden kann. Man richte sich in dieser Beziehung nach den Beispielen dieses Buches. Die passende Strichstärke der verschiedenen Linien ist aus Fig. 2 zu ersehen.

Die Zeichnungen der nachstehend angegebenen Prismen sind auf einem Blatte auszuführen: auf der oberen Hälfte die Grund- und Aufrisse, auf der unteren die Netze. Die Körper stehen auf P_1, 1 cm von P_2 entfernt. Die Projektionsachse habe 11 cm Abstand von der oberen Umrandung des Blattes; der Raum zwischen den einzelnen Figuren sei 1 cm breit, die Entfernung von der Randlinie links und rechts betrage 2 cm.

1) *Ein vierseitiges, gerades Prisma. Höhe = 9 cm, Grundfläche ein Rechteck mit 4 und 6 cm langen Seiten, in zwei Stellungen: a) die 6 cm, b) die 4 cm lange Grundkante ist P_2 parallel.*

2) *Ein fünfseitiges, gerades Prisma, wie Fig. 13 und 14 zeigen. Höhe = 9 cm, die rechtwinklig zusammenstoßenden Kanten seien 2, 6. 4, $1^1/_2$ cm. Die 6 cm lange Kante sei der X-Achse parallel.*

3) *Ein sechsseitiges, regelmäßiges Prisma. Höhe = 9 cm, Grundkanten = 3 cm. Eine Grundkante sei P_2 parallel.*

4) *Ein Keil (dreiseitiges, gerades Prisma). Höhe = 9 cm, Rücken ein Rechteck mit 4 und 6 cm langen Seiten, Schneide = 6 cm. Zwei Stellungen: a) der Keil steht auf dem Rücken, b) auf der dreieckigen Seitenfläche.*

Auf die untere Blatthälfte zeichne das Netz eines der beiden ersten Prismen und das des Keils!

§ 6. Ermittelung der wahren Größe von Strecken und begrenzten Ebenen aus ihren Projektionen.

1. Linien und begrenzte ebene Flächen sind nur dann ihren Projektionen kongruent, wenn sie in der Projektionsebene liegen (§ 5, 1) oder mit

dieser parallel sind (§ 5, 3). Sind diese Raumgebilde der ersten (oder zweiten) Projektionsebene parallel, so ist ihre zweite (oder erste) Projektion eine Gerade, die der X-Achse parallel ist, und umgekehrt.[1]) Daraus ergeben sich folgende Sätze:

a) *Wenn der Grundriß einer geraden Linie der X-Achse parallel läuft, so zeigt der Aufriß ihre wahre Größe, ist dagegen der Aufriß der X-Achse parallel, so hat man im Grundriß die wahre Größe der Geraden.*

b) *Ist die Projektion einer begrenzten Ebene im Aufriß (Grundriß) eine der X-Achse parallele Gerade, so ist der Grundriß (Aufriß) der projizierten Ebene kongruent.*

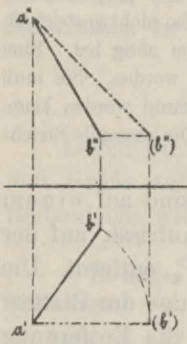


Fig. 18.

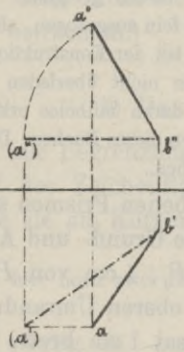


Fig. 19.

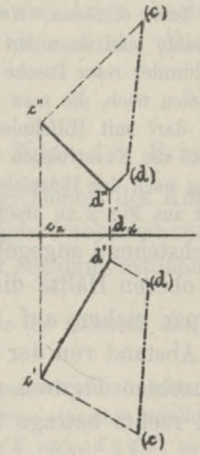


Fig. 20.

2. Die wahre Größe und Gestalt einer Linie oder begrenzten Ebene können, wenn sie nicht nach den beiden voraufgegangenen Sätzen dem Grund- oder Aufriß zu entnehmen sind, auf doppelte Weise gefunden werden: a) man dreht sie so, daß sie einer Projektionsebene parallel laufen, oder b) man legt sie in eine der Projektionsebenen nieder.

a) Die Drehung. Die Raumgerade ab (Fig. 18 u. 19) bildet mit ihrer ersten Projektion $a'b'$ und den beiden Projektionsstrahlen aa' und bb' das Trapez $aba'b'$. Dieses Trapez ist in Fig. 18 um aa' in die parallele Lage zu P_2 gedreht. Punkt b beschreibt bei dieser Drehung einen Bogen parallel P_2, dessen wahre Größe der Grundriß $b'(b')$ zeigt. Der Aufriß dieses Bogens ist $b''(b'')$. Der Grundriß von ab ist jetzt $a'(b')$, der Aufriß $a''(b'')$; es ist nun $a''(b'') = ab$ (§ 5, 3, a). — In Fig. 19 ist das Trapez $aa''bb''$ um bb'' in die parallele Lage zu P_1 gedreht. Dann gibt der Grundriß $b'(a')$ die wahre Länge von ab an.

b) Das Umlegen (Niederlegen, Umklappen; Fig. 20). Wir legen das Trapez $cdc'd'$ um $c'd'$ in P_1 nieder: $c'(c) = c''c_x$, $d'(d) = d''d_x$; es ist dann im Grundriß $(c)(d) = cd$; oder wir legen Trapez $cdc''d''$ um $c''d''$ in P_2 nieder: $c''(c) = c'c_x$, $d''(d) = d'd_x$; es ist dann im Aufriß $(c)(d) = cd$.

[1]) Es folgt dies aus dem stereometrischen Lehrsatze: Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

3. In Fig. 21 ist die Seitenkante da der Pyramide in die parallele Lage zu P_2 gedreht; $d''(a'')$ im Aufriß ist ihre wahre Länge. — Die Seitenkante dc ist um ihre erste Projektion $d'c'$ in P_1 niedergelegt; $c'(d)$ ist ihre wahre Länge. ($d'(d) = d''(d_x) =$ Höhe der Pyramide.) — Bei der Stellung der Pyramide in Fig. 22 erhalten wir die Seitenkante da in der zweiten Projektion in wahrer Länge. (Weshalb?) — Da jetzt die wahren Längen aller Kanten der Pyramide in den Projektionen gegeben oder gefunden sind, so ist das Netz der Pyramide (Fig. 23) leicht zu zeichnen.

Fig. 21. Fig. 22.

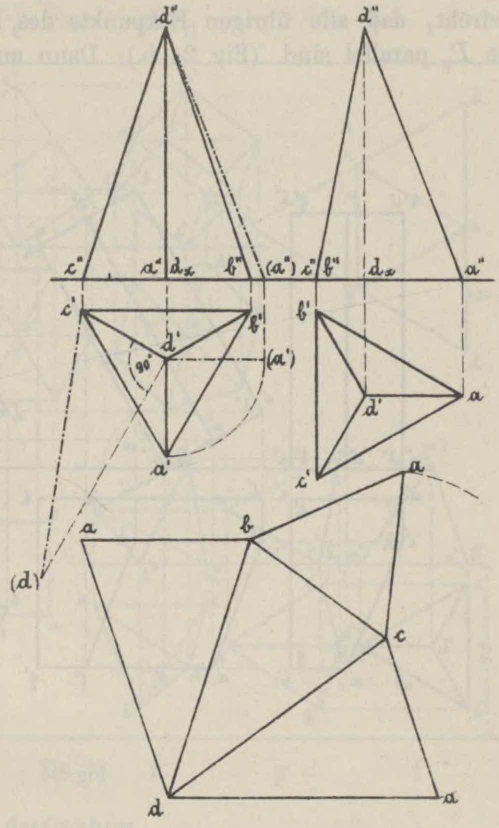


Fig. 23.

Aufgaben.

Auf die obere Hälfte des Blattes zeichne Grund- und Aufriß der unter 1) bis 5) aufgeführten Körper, die auf P_1 stehen! Die Projektionsachse sei 11 cm vom oberen Rande entfernt; die Entfernung der Figuren untereinander und von der Achse im Grundriß betrage 1 cm. Die Körper sind:

1) *Eine regelmäßige, dreiseitige (gerade) Pyramide. Höhe = 9 cm, Grundkante = 6 cm. Eine Grundkante parallel der Achse.*
2) *Eine regelmäßige, fünfseitige Pyramide. Höhe = 9 cm, Radius des Umkreises der Grundfläche = 3 cm. Zwei Stellungen: eine Grundkante ist a) parallel, b) senkrecht zur X-Achse.*
3) *Ein gerader Zylinder.* $h = 9$ *cm,* $r = 3$ *cm.*
4) *Ein gerader Kegel.* $h = 9$ *cm,* $r = 3$ *cm.*
5) *Eine Kugel.* $r = 3^1/_2$ *cm.*

Auf die untere Hälfte des Blattes zeichne das Netz der Pyramiden, des Zylinders (in halber oder dreiviertel der wahren Größe) und das des Kegels. Die Seitenkanten und Seitenflächen der Pyramiden erscheinen in unseren Projektionen nicht (alle?) in ihrer wahren Größe. Diese ist für das

Zeichnen der Netze zu ermitteln. — Den Umfang des Kreises setzen wir $= 3^1/_7$ Durchmesser; $\pi = 3^1/_7$ genügt für die praktische Ausführung fast immer.

§ 7. Drehungen der Körper.

1. Das fünfseitige, auf P_1 stehende Prisma (Fig. 24, a) werde nach rechts verschoben und dann um die Grundkante bc (nach rechts hin) so gedreht, daß alle übrigen Eckpunkte des Körpers Kreisbogen beschreiben, die P_2 parallel sind. (Fig. 24, b.) Dann muß der Aufriß in seiner Gestalt

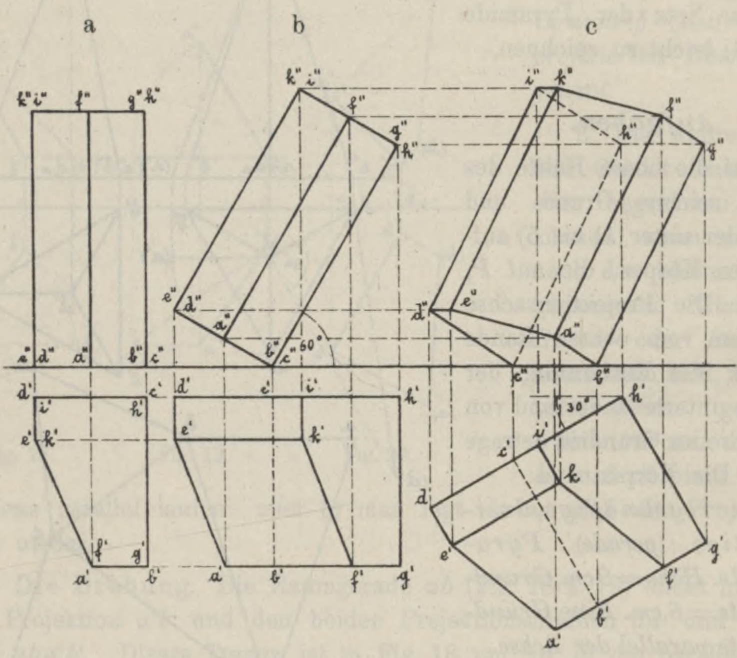


Fig. 24.

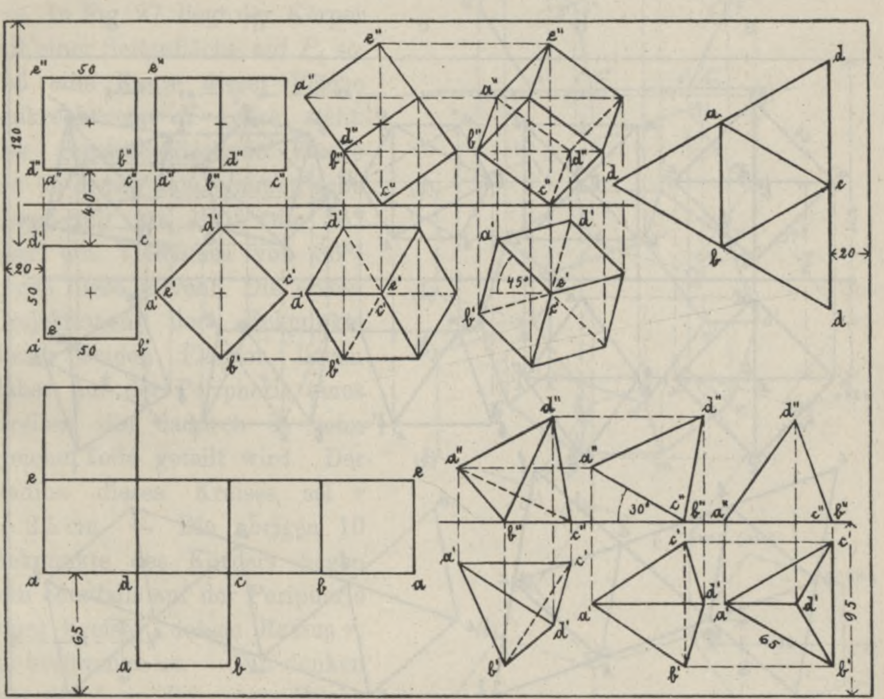
unverändert bleiben (§ 5, 3), er erhält nur eine andere, durch die Größe des Drehungswinkels (hier $= 30^0$) bestimmte Lage. Es behalten ferner alle Punkte des Körpers denselben Abstand von P_2 und daher auch alle ersten Ordinaten dieselbe Länge. — Fig. 24, b ist daher leicht aus Fig. 24, a abzuleiten: Man bringe zuerst den Aufriß von a in die neue Lage b, dann ergeben sich die Bestimmungspunkte für den Grundriß in b durch die Senkrechten von den entsprechenden Punkten des Aufrisses b und durch die Wagerechten von den Punkten des Grundrisses a.

2. Jetzt schieben wir das Prisma wiederum weiter nach rechts und drehen es (hier entgegengesetzt den Zeigern der Uhr und um 30^0) so, daß alle Punkte des Körpers sich in Kreisbogen bewegen, die parallel P_1 sind.

(Fig. 24, c.) Der Grundriß in c ist kongruent dem Grundriß in b und daher zuerst zu zeichnen. Den Aufriß Fig. 24, c erhält man mittels der Senkrechten vom Grundriß c und der Wagerechten vom Aufriß b. Wir merken den Satz:

Wird ein Körper so gedreht, daß alle Punkte desselben von der Projektionsebene denselben Abstand behalten, so bleibt die Gestalt der Projektion ganz unverändert, und ihre neue Lage hängt von dem Drehungswinkel ab.

a b c d i



e Fig. 25. h g f

Aufgaben.

Blatt 1.[1]) *Drehung und Netz des Würfels und des Tetraeders.*

a) In Fig. 25 ist der Würfel aus der Stellung a parallel zu P_1 um 45° in die Stellung b gedreht, so daß *b'd'* senkrecht zur X-Achse steht. Dann ist der Körper aus dieser Stellung parallel zu P_2 so weit gedreht, daß $c'' e''$ senkrecht auf der X-Achse steht; der Umriß des Grundrisses in c wird ein regelmäßiges Sechseck (§ 5, 4). Endlich ist der Würfel aus Stellung c parallel zu P_1 um 45° gedreht. — Fig. 25, e zeigt das Netz des Würfels.

---

[1]) Die hier und im folgenden unter Blatt 1, Blatt 2 usw. zusammengestellten Aufgaben sind jedesmal auf ein Zeichenblatt zu bringen. Die Maße für die Größe der Körper und für die Verteilung der Figuren auf dem Blatte sind auf den Figurentafeln in mm angegeben.

Der Schüler hat diese Zeichnung so abzuändern, daß der Würfel aus Stellung a zuerst parallel zu P_2, dann parallel zu P_1 und endlich wieder parallel zu P_2 gedreht wird.

b) Ein Tetraeder oder Vierflächner ist ein regelmäßiger Körper (d. h.?), der von vier kongruenten, regelmäßigen Dreiecken begrenzt wird. (Modell!) — In Fig. 25, f bis h ist der Körper zuerst parallel zu P_2, dann aus dieser Stellung (g) parallel zu P_1 gedreht. Fig. 25, i zeigt das Netz des Tetraeders.

Der Schüler soll die Drehungen in umgekehrter Folge ausführen.

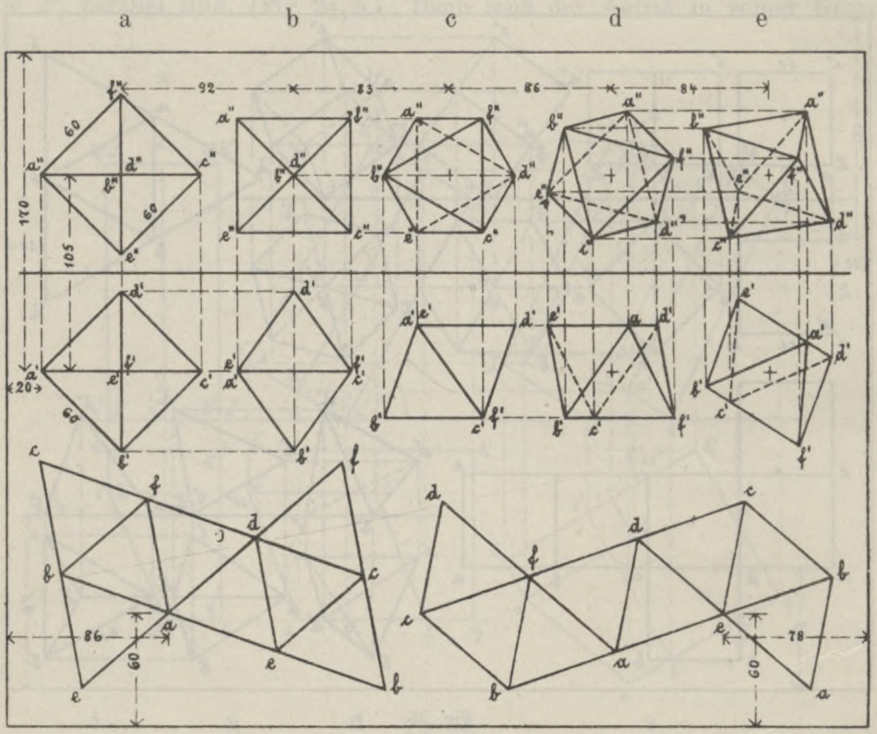


Fig. 26.

Blatt 2. *Drehung und Netz des Oktaeders oder Achtflächners. (Fig. 26.)* Das Oktaeder oder der Achtflächner ist ein regelmäßiger Körper, der von acht kongruenten, gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. (Modell! Zahl der Ecken und Kanten des Körpers sind zu bestimmen.)

In Fig. 26 ist das Oktaeder stets um eine Gerade durch seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar zuerst parallel zu P_2 (Fig. 26, b), dann parallel zu P_1 (Fig. 26, c), dann wieder parallel zu P_2 (d) und endlich wiederum parallel zu P_1.

Der Schüler hat von Stellung a aus die Drehungen in genau umgekehrter Folge, jedoch in gleicher Größe, wie in Fig. 26 angegeben, auszuführen.

Blatt 3.[1]) *Projektion und Drehung des Dodekaëders (Zwölfflächners) und Ikosaeders (Zwanzigflächners) und Darstellung ihrer Netze. (Fig. 27 bis 29.)*

a) Das Dodekaeder ist ein regelmäßiger Körper, der von 12 kongruenten, regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird. Er hat 20 Ecken und 30 Kanten. (Modell!)

In Fig. 27 liegt der Körper mit einer Seitenfläche auf P_1 so, daß eine Kante dieser Fläche senkrecht zur X-Achse steht. Die gegenüberliegende Fläche hat zu dieser eine symmetrische Lage, nur um 180° (um 36° oder ein Vielfaches von 36°) gegen diese gedreht. Die ersten Projektionen der Eckpunkte dieser beiden Flächen liegen daher auf der Peripherie eines Kreises, die dadurch in zehn gleiche Teile geteilt wird. Der Radius dieses Kreises sei $r = 2{,}5$ cm. — Die übrigen 10 Eckpunkte des Körpers liegen nun ebenfalls auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius r_1 zu bestimmen ist. — Wir denken uns die 5 an die untere Fläche anstoßenden Fünfecke in die Ebene P_1 niedergelegt, wodurch das halbe Netz des Körpers sich ergibt. D i e s e s h a l b e N e t z i s t z u e r s t z u z e i c h n e n. (Mittelpunkt des inneren Fünfecks 8 cm rechts vom linken Blattrande und 7 cm unter der Achse, die 10 cm unter dem oberen Blattrande liege.) Jetzt denken wir uns die 5 äußeren Fünfecke gehoben, bis je 2 benach-

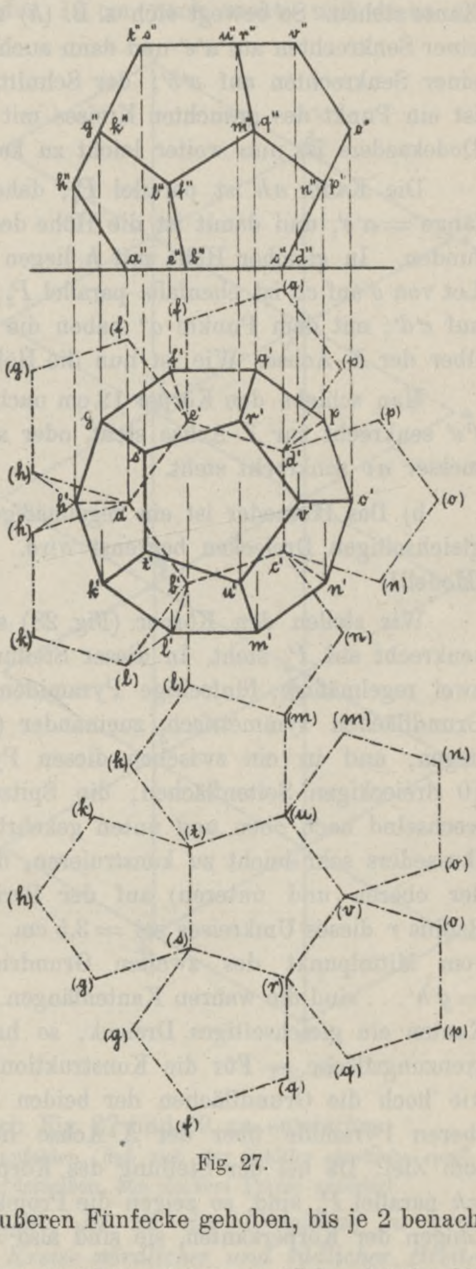


Fig. 27.

[1]) Die Aufgaben dieses und des folgenden Blattes sind aus sachlichen Gründen hier aufgeführt. Sollten sie den Schülern zu schwer fallen, so stelle man sie weiter zurück oder lasse sie ganz fort.

barte Kanten zusammenstoßen und sie zusammen mit der unteren Fläche eine Art Schüssel bilden. Bei dieser Drehung beschreiben die 3 äußeren Punkte jedes Fünfecks Kreisbogen, deren Projektionen senkrecht zu der festliegenden Kante stehen. So bewegt sich z. B. (h) als Punkt des Fünfecks über $a'e'$ in einer Senkrechten auf $a'e'$ und dann auch als Punkt des Fünfecks über $a'b'$ in einer Senkrechten auf $a'b'$; der Schnittpunkt h' dieser beiden Senkrechten ist ein Punkt des gesuchten Kreises mit r_1 als Radius. — Der Grundriß des Dodekaeders ist nun weiter leicht zu konstruieren.

Die Kante ah ist parallel P_2, daher ist $a''h''$ = der wahren Kantenlänge $= a'e'$, und damit ist die Höhe des Punktes h'' über der X-Achse gefunden. In gleicher Höhe mit h liegen die Punkte l, n, p und f. — Das Lot von o auf cd ist ebenfalls parallel P_2, daher ist $c''o''$ = dem Lote von (o) auf $c'd'$; mit dem Punkte o'' haben die Punkte g, k, m und q gleiche Höhe über der X-Achse. Wie ist nun die Höhe der obersten Punkte zu finden? [1])

Man schiebe den Körper 12 cm nach rechts und drehe ihn $\parallel P_1$ so, daß $f'e'$ senkrecht zur X-Achse steht, oder man drehe ihn $\parallel P_2$, daß der Durchmesser av senkrecht steht.

b) Das Ikosaeder ist ein regelmäßiger Körper, der von 20 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Er hat 12 Ecken und 30 Kanten. (Modell!)

Wir stellen den Körper (Fig. 28) so, daß eine Eckenachse desselben senkrecht auf P_1 steht. In dieser Stellung zerfällt uns der Körper leicht in zwei regelmäßige, fünfseitige Pyramiden (je eine oben und unten), deren Grundflächen symmetrisch zueinander (Drehung 36^0) und parallel zu P_1 liegen, und in ein zwischen diesen Pyramiden liegendes Prismatoïd mit 10 dreieckigen Seitenflächen; die Spitzen dieser Seitendreiecke sind abwechselnd nach oben und unten gekehrt. — Hiernach ist der Grundriß des Ikosaeders sehr leicht zu konstruieren, da sämtliche Ecken (mit Ausnahme der oberen und unteren) auf der Peripherie eines Kreises liegen. Der Radius r dieses Umkreises sei $= 3{,}5$ cm, sein Mittelpunkt liege 10 cm rechts vom Mittelpunkt des zweiten Grundrisses des Dodekaeders. $b'c' = c'd' = g'h' \ldots$ sind die wahren Kantenlängen. Konstruiert man über einer dieser Kanten ein gleichseitiges Dreieck, so hat dies die wahre Größe einer Begrenzungsfläche. — Für die Konstruktion des Aufrisses muß man ermitteln, wie hoch die Grundflächen der beiden Pyramiden und die Spitze m der oberen Pyramide über der X-Achse liegen. Folgende Überlegung führt zum Ziel: Da bei der Stellung des Körpers in Fig. 28 die Kanten ae und mh parallel P_2 sind, so zeigen die Projektionen $a''e''$ und $m''h''$ die wahren Längen der Körperkanten, sie sind also $= b'c'$. Ferner sieht man, daß die

[1]) Die Höhenlage über der X-Achse ist bei den Punkten $h'', l'' \ldots = r$, bei $g'', k'' \ldots = r_1$, bei $t'', s'' \ldots = r + r_1$. Den Beweis dafür zu geben, würde zu weit führen.

Seitenflächen ekl und hbc senkrecht zu P_2 stehen und sich daher auf P_2 als Gerade projizieren, die so lang sind, als die wahren Höhen einer Seitenfläche. Mithin ist $e''l'' = b''h'' = (a)n'$ im Dreiecke $c'd'(a)$.[1])

Man schiebe jetzt das Ikosaeder 10 cm nach rechts und drehe es parallel zu P_1 so, daß $d'g'$ senkrecht zur X-Achse steht, oder man drehe es parallel zu P_2, daß die Fläche abc auf P_1 liegt.

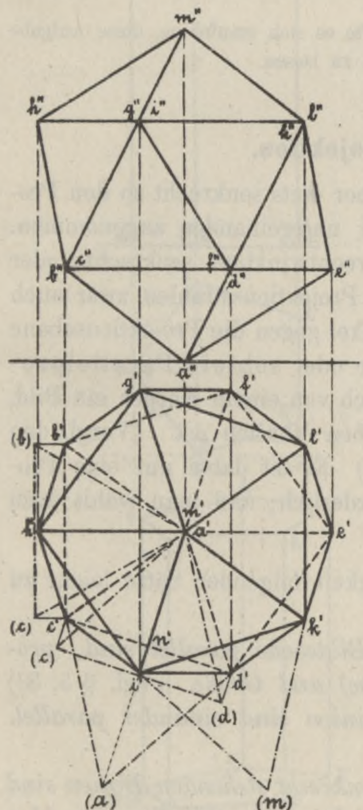


Fig. 28.

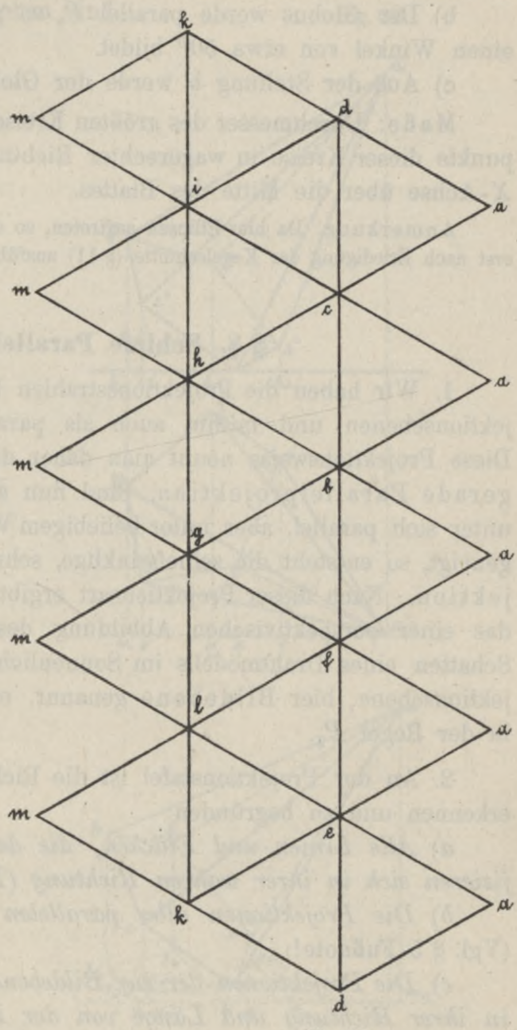


Fig. 29.

Das Netz beider Körper ist nach Fig. 27 und 29 zu entwerfen.

Bemerkung. Es ist dringend zu empfehlen, daß sich der Schüler sämtliche regelmäßigen Körper, wenigstens aber die Netze derselben, aus starkem Papier anfertigt.

Blatt 4. *Projektion der Kugel. Es sei der Erdglobus zu projizieren mit dem Äquator, dem 45. Kreise nördlicher und südlicher Breite und mit den Längenkreisen von je 45° Abstand, in drei Stellungen.*

---

[1]) Der senkrechte Abstand zwischen $b''e''$ und $h''l''$ ist $= r$.

a) Die Erdachse stehe senkrecht auf P_1. Es ist der Umkreis des Grundrisses der Äquator, der des Aufrisses ein Meridian. Die Projektionen der Breitenkreise sind im Grundriß Kreise, im Aufriß Gerade, die der Längenkreise im Grundriß Gerade, im Aufriß (im allgemeinen) Ellipsen.

b) Der Globus werde parallel P_2 so gedreht, daß die Achse mit P_1 einen Winkel von etwa 50^0 bildet.

c) Aus der Stellung b werde der Globus parallel P_1 um 30^0 gedreht.

Maße: Durchmesser des größten Kreises = 12 cm; Abstände der Mittelpunkte dieser Kreise in wagerechter Richtung 14 cm, in senkrechter 16 cm; X-Achse über die Mitte des Blattes.

Anmerkung. Da hier Ellipsen auftreten, so dürfte es sich empfehlen, diese Aufgabe erst nach Erledigung der Kegelschnitte (§ 11) ausführen zu lassen.

§ 8. Schiefe Parallelprojektion.

1. Wir haben die Projektionsstrahlen bisher stets senkrecht zu den Projektionsebenen und mithin auch als parallel untereinander angenommen. Diese Projektionsweise nennt man daher die rechtwinklige, senkrechte oder gerade Parallelprojektion. Sind nun alle Projektionsstrahlen zwar auch unter sich parallel, aber unter beliebigem Winkel gegen die Projektionsebene geneigt, so entsteht die schiefwinklige, schräge oder schiefe Parallelprojektion. Nach dieser Projektionsart ergibt sich von einem Körper ein Bild, das einer perspektivischen Abbildung desselben ähnlich ist. (Vergl. den Schatten eines Drahtmodells im Sonnenlichte!) Es ist dabei nur eine Projektionsebene, hier Bildebene genannt, erforderlich, und man wählt dazu in der Regel P_2.

2. An der Projektionstafel ist die Richtigkeit folgender Sätze leicht zu erkennen und zu begründen:

a) *Alle Linien und Flächen, die der Bildebene parallel sind, projizieren sich in ihrer wahren Richtung (Lage) und Größe.* (Vgl. § 5, 3!)

b) *Die Projektionen aller parallelen Linien sind einander parallel.* (Vgl. § 5 Fußnote!)

c) *Die Projektionen der zur Bildebene senkrecht stehenden Linien sind in ihrer Richtung und Länge von der Richtung der Projektionsstrahlen abhängig.*

3. Die Richtung der Projektionsstrahlen kann nun zwar beliebig sein, man muß sie aber so annehmen, daß von dem darzustellenden Körper ein möglichst klares und gefälliges, kein verzerrtes Bild entsteht. Am häufigsten wählt man ihre Richtung so, daß die Projektionen der zur Bildebene senkrecht stehenden Geraden mit der X-Achse einen Winkel (w) von 30^0 oder 45^0 bilden (auch $w = 60^0$ und $w = 90^0$ kommen vor), und daß ihre Länge die Hälfte oder ein Drittel der wahren Größe beträgt. (Verkürzungsverhältnis

$v = {}^1/_3$ bezw. $v = {}^1/_2$; auch $v = 1$ wird in besonderen Fällen angewandt.)[1] Leitet man, was meistens der Fall ist, die schiefe Projektion aus Grund- und Aufriß (der senkrechten Projektion) ab, so ist zu beachten, daß alle ersten Ordinaten zur Bildebene senkrecht stehende Linien sind, die zweiten dagegen als dieser parallel anzusehen sind.

Fig. 30.

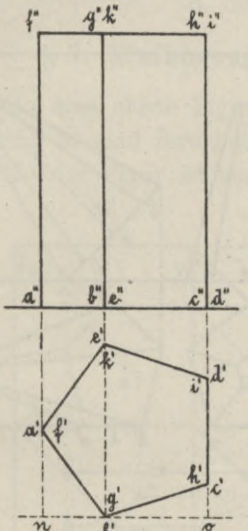
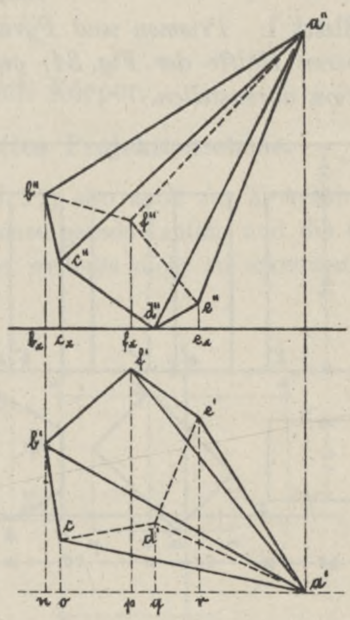


Fig. 32.



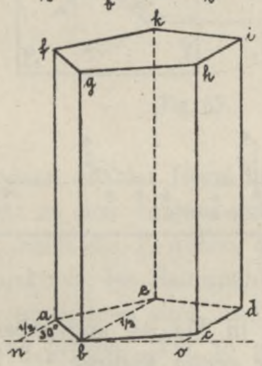


Fig. 31.

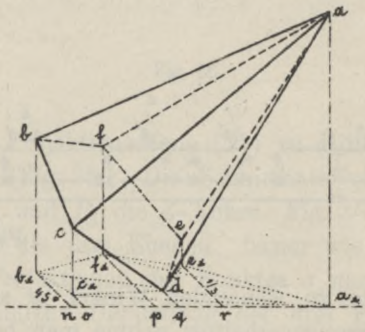


Fig. 33.

4. Zwei Beispiele zur schiefen Parallelprojektion.

a) In Fig. 30 sind Auf- und Grundriß eines fünfseitigen Prismas gegeben. Fig. 31 zeigt die schiefe Parallelprojektion desselben, in der $w = 30^0$ und $v = {}^1/_2$ ist. Es ist $nbo = nb'o$, $na = {}^1/_2 na'$, $be = {}^1/_2 b'e'$, $ocd = {}^1/_2 oc'd'$; $af = a''f''$, $bg = b''g''$ usw.

[1]) Ist $w = 45^0$ und $v = 1$, so nennt man die Projektion Kavalierperspektive.

b) In Fig. 32 sind Auf- und Grundriß einer zu beiden Ebenen schief liegenden Pyramide gegeben. In der schiefwinkligen Parallelprojektion derselben (Fig. 33) ist $w = 45^0$, $v = {}^1/_3$. Es ist $n\,o\,p\,q\,r\,a_x = n\,o\,p\,q\,r\,a'$, $n\,b_x = {}^1/_3\,n\,b'$, $o\,c_x = {}^1/_3\,o\,c'$ usw.; $b_x b = b_x b''$, $c_x c = c_x c''$ usw.

Aufgaben.

Blatt 1. *Prismen und Pyramiden, deren Grund- und Aufrisse (in der oberen Hälfte der Fig. 34) gegeben sind, sind in schiefer Parallelprojektion darzustellen.*

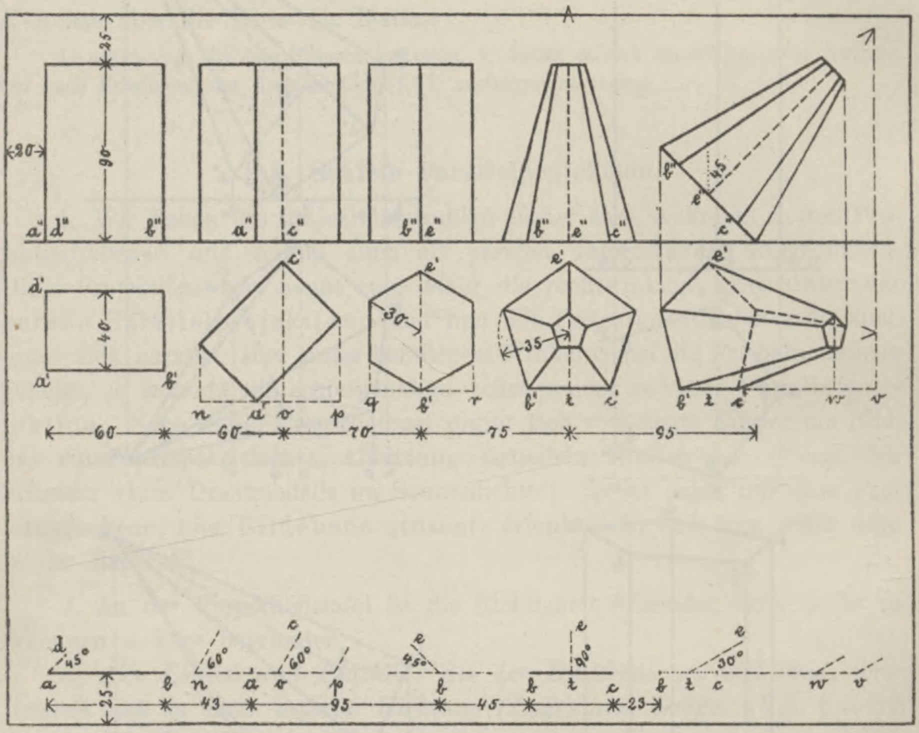


Fig. 34.

Die zu wählenden Winkel w sind unten in Fig. 34 angegeben. Als Verkürzungsverhältnis nehme man bei den vier ersten Figuren ${}^1/_3$, bei der letzten ${}^1/_2$.

Blatt 2. *Man stelle die schiefe Parallelprojektion von einfachen Körpern und Gebrauchsgegenständen (im verjüngten Maßstabe) her, von denen die Höhen, Breiten (Ausdehnung parallel zur Bildebene) und Tiefen (Ausdehnung senkrecht zur Bildebene) bekannt sind, ohne vorher Grund- und Aufriß derselben zu konstruieren.*

Mehrere der bekannten Stuhlmannschen Holzmodelle, ferner Schreibkasten, Zigarrenkiste, Schemel, Schrank, Tisch u. a. sind dazu geeignete

Körper. Man nehme $w = 45^0$ oder 30^0 und $v = {}^1/_3$ oder ${}^1/_2$. — Projiziert man Zylinder oder Kegel, so lege man durch den wagerechten Durchmesser des Grundkreises mehrere senkrechte Sehnen. Man bekommt bei diesen Körpern ein gutes Bild, wenn man $w = 90^0$ und $v = {}^1/_2$ oder ${}^1/_3$ annimmt.

B. Schnitte durch Körper.

§ 9. Einführung einer dritten Projektionsebene.

Wenn eine ebene Figur zu P_1 und P_2, also auch zur X-Achse senkrecht steht, so sind ihre beiden Projektionen gerade Linien, und die Gestalt und Größe der Figur ist aus ihnen ohne weiteres nicht zu erkennen. Man

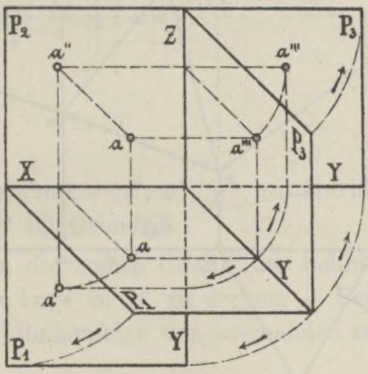


Fig. 35.

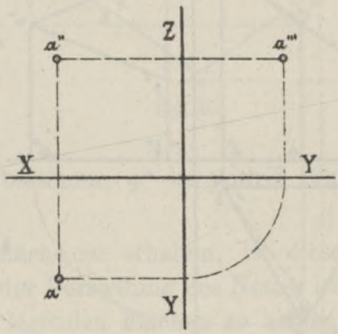


Fig. 36.

nimmt dann in der Regel eine dritte Projektionsebene (P_3) zu Hilfe, die senkrecht zu den beiden ersten steht. (Fig. 35.) Die Schnittlinie von P_1 und P_3 heißt die Y-Achse, die von P_2 und P_3 die Z-Achse. Fig. 35 zeigt die Projektion des Raumpunktes a auf die drei Ebenen, ferner wie diese Ebenen umzulegen sind, und wo die Projektionen des Punktes a nach der Umlegung liegen. Fig. 36 gibt die übliche Darstellung der drei Projektionen des Punktes a an. Man erkennt leicht, daß der Abstand a''' von der Y-Achse gleich ist dem Abstand a'' von der X-Achse, und daß der Abstand a''' von der Z-Achse gleich ist dem Abstand a' von der X-Achse. Es folgt daraus der Satz:

Die drei Projektionen eines Punktes sind so voneinander abhängig, daß durch je zwei die dritte bestimmt ist.

Die dritte Projektion eines Raumgebildes heißt (wenn P_3 senkrecht zu P_1 und P_2 steht) dessen Seitenriß (Kreuzriß, Profil, Seitenansicht).

§ 10. Schnitte durch ebenflächige Körper (Polyeder).

1. Ein dreiseitiges, gerades Prisma ist von einer Ebene, die senkrecht zu P_2 und geneigt zu P_1 und P_3 steht, so geschnitten, daß alle Seitenkanten des Prismas getroffen werden. Grund-, Auf- und Seitenriß mit dem Schnitt und das Netz des Körpers sind zu zeichnen. (Fig. 37 u. 38.)

Die erste Projektion der Schnittfläche muß mit der ersten Projektion des Prismas zusammenfallen (§ 5, 2, a), die zweite Projektion des Schnittes ist eine gerade Linie (§ 5, 2, b). Die dritte Projektion des Prismas mit dem Schnitte ist durch Bestimmung jedes einzelnen Eckpunktes nach § 9 leicht zu finden.

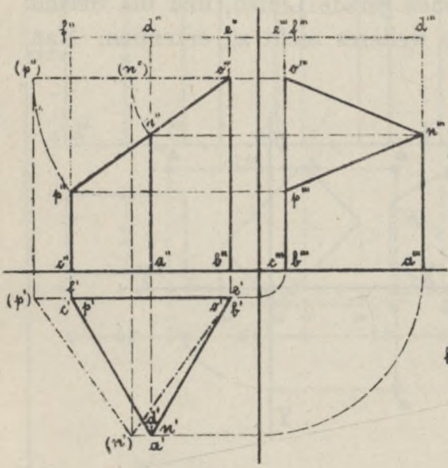


Fig. 37.

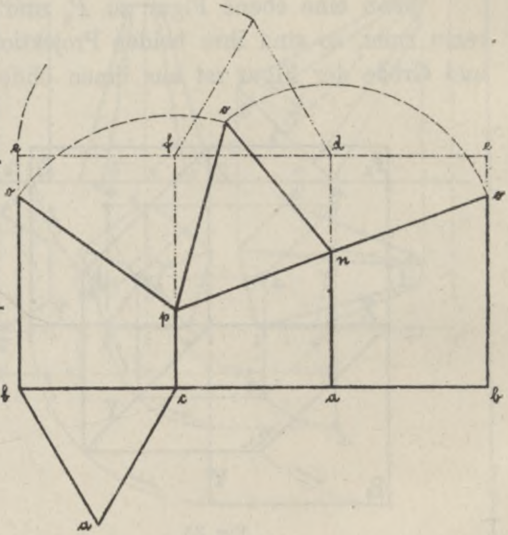


Fig. 38

Um die wahre Größe und Gestalt der Schnittfläche zu erhalten, ist diese so zu drehen, daß sie parallel P_1 liegt; $o''(p'')$ ist dann ihre zweite, $o'(n')(p')$ ihre erste Projektion. Letztere ist der Schnittfläche kongruent (§ 5, 3, b). — Bei der Darstellung des Netzes ist zuerst der Mantel des ganzen Prismas zu zeichnen, alsdann sind aus dem Auf- oder Seitenrisse die Längen der geschnittenen Kanten auf den Seitenlinien des Netzes abzutragen ($bo = b''o'' = b'''o'''$, $cp = c''p'' = c'''p'''$ usw.), und endlich sind die Grund- und die Schnittfläche nach dem Grundrisse hinzuzufügen.

2. Ein fünfseitiges, gerades Prisma steht auf P_1. Die Schnittebene steht senkrecht zu P_3 und trifft die obere Endfläche und drei Seitenkanten des Prismas. (Fig. 39 u. 40.)

Die dritte Projektion des Schnittes ist nach § 5, 2, b eine gerade Linie ($q'''o'''$) und als gegeben angenommen. Durch die Schnittpunkte dieser Linie mit den Kanten des Prismas sind die Punkte r' und q' im Grundriß

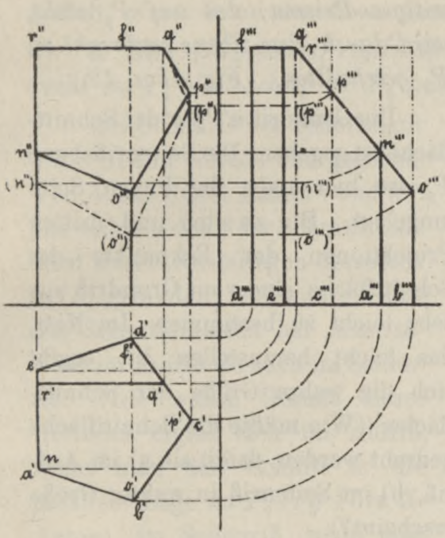


Fig. 39.

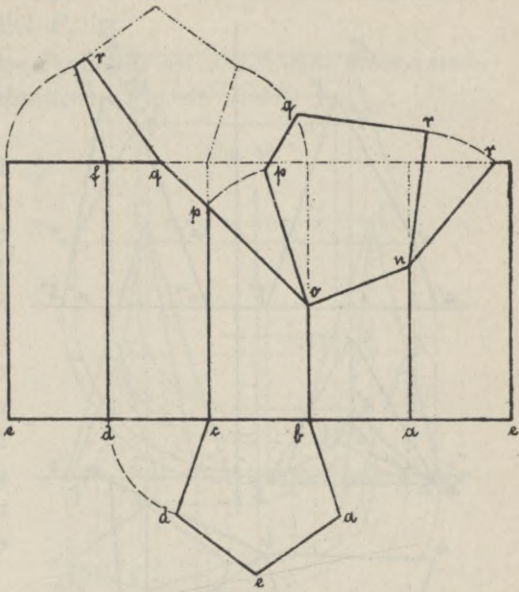


Fig. 40.

und die Punkte n'', o'', p'' im Aufriß bestimmt; q'' im Aufriß erhält man durch q' im Grundriß.

Um die wahre Gestalt der Schnittfläche zu erhalten, ist diese in die parallele Lage zu P_2 zu drehen. — Bei der Darstellung des Netzes ist auf die richtige Reihenfolge der aneinander zu legenden Flächen zu achten.

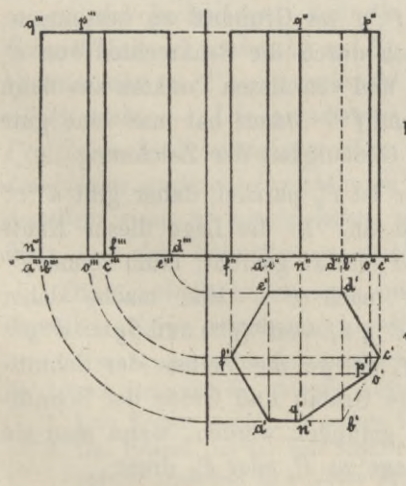


Fig. 41.

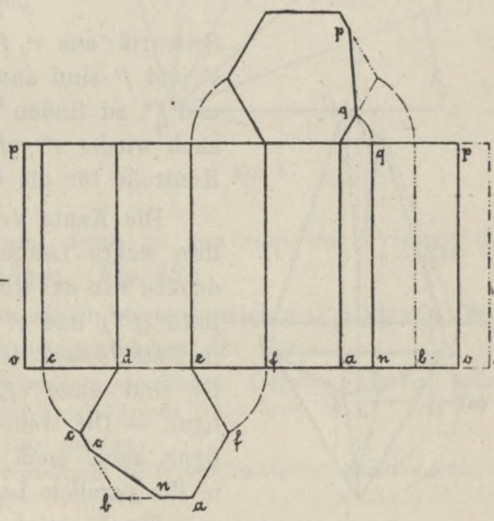
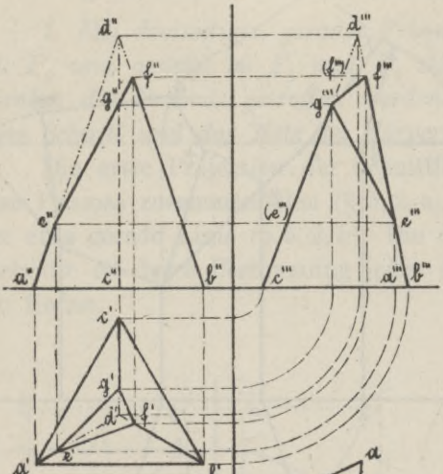


Fig. 42.

Fig. 43.



3. Ein regelmäßiges, sechsseitiges Prisma, das auf P_1 steht, wird durch eine Ebene senkrecht zu P_1 geschnitten. (*Fig. 41 u. 42.*)

Der Grundriß $n'o'p'q'$ der Schnittfläche ist gegeben. Die Seitenrißebene P_3 ist hier nach der linken Seite umgelegt. Die zweiten und dritten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfläche sind vom Grundriß aus sehr leicht zu bestimmen. Im Netz, das leicht herzustellen ist, ergibt sich die wahre Größe der Schnittfläche. (Wie müßte die Schnittfläche gedreht werden, damit sie a) im Aufriß, b) im Seitenriß in wahrer Größe erscheint?)

4. Eine regelmäßige, dreiseitige Pyramide, die auf P_1 steht, wird von einer Ebene senkrecht zu P_2 und geneigt zu P_1 und P_3 durchschnitten. (*Fig. 43 u. 44.*)

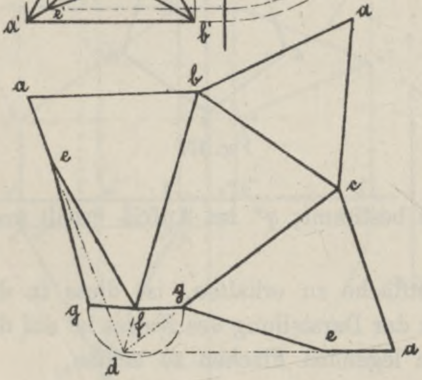


Fig. 44.

Die zweite Projektion der Schnittfigur ist eine Gerade (§ 5, 2, b). Mit dieser Geraden sind die Punkte e'', f'', g'' gegeben. Vom Aufriß aus sind e''', f''', g''' im Seitenriß und vom Seitenriß aus e', f', g' im Grundriß zu bestimmen; e' und f' sind auch durch die Senkrechten von e'' und f'' zu finden und von diesen Punkten aus dann auch wieder e''' und f'''. Damit hat man eine gute Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung.

Die Kante dc ist P_3 parallel, daher gibt $d'''c'''$ ihre wahre Länge an. In die Lage dieser Kante denken wir uns da und db gedreht; dann kommt f''' nach (f''') und e''' nach (e'''). Man mache daher im Netz $de = d'''(e''')$, $df = d'''(f''')$ und $dg = d'''g'''$ Es sind dann ef, fg, ge die Seiten der Schnittfigur. — Die wahre Gestalt und Größe der Schnittfigur kann auch gefunden werden, wenn man sie in die parallele Lage zu P_1 oder P_3 dreht.

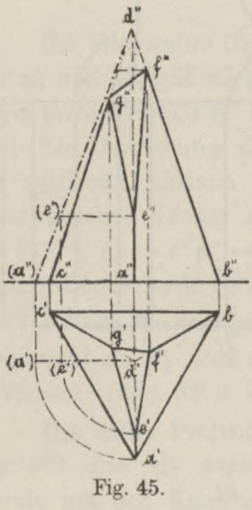


Fig. 45.

Fig 45 zeigt, wie man aus Grund- und Aufriß die wahren Längen der Seitenkanten und der Abschnitte dieser Kanten ermittelt, wenn keine derselben parallel P_2 ist.

5. Eine fünfseitige, regelmäßige Pyramide ist durch eine Ebene senkrecht zu P_1 und schief zu P_2 geschnitten. (Fig. 46 u. 47.)

Der Grundriß der Schnittfigur $g'h'i'$ ist eine Gerade und gegeben. Von h' aus findet man h'' und h'''. Die wahre Gestalt der Schnittfläche wird durch Niederlegen derselben in P_1 gefunden; die wahre Höhe des Schnittdreiecks hat man sowohl im Aufriß als auch im Seitenriß. (Die wahre Gestalt dieses Dreiecks ergibt sich im Aufriß, wenn man den Schnitt in die parallele Lage zu P_2 ($i'g' \parallel$ der X-Achse), im Seitenriß, wenn man ihn $\parallel$ zu P_3 bringt ($i'g' \parallel$ zur Y-Achse).

Im Netz ist $fh = f''' (h''')$ (weshalb?); $\triangle\, igh \cong i'g'(h)$ und $bcdegi \cong b'c'd'e'g'i'$.

Fig. 46.

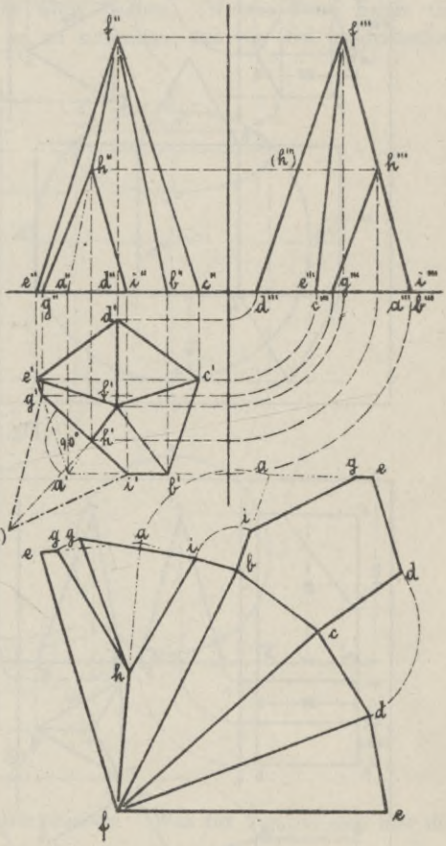


Fig. 47.

Aufgaben.

1. **Blatt 1.** *Drei verschiedene regelmäßige Prismen sind so zu durchschneiden, daß die Schnittfläche a) senkrecht zu P_2, b) senkrecht zu P_3, c) senkrecht zu P_1 steht. — Die geradlinige Projektion des Schnitts ist gegeben, die beiden anderen Projektionen desselben sind zu konstruieren, und dann ist von zwei der Prismen das Netz mit den Schnitten zu zeichnen. (Fig. 48.)*

Die Schnittfläche ist stets mit einem etwas dunkleren (kräftigeren) Tone derselben Farbe anzulegen, als die Seitenflächen des Körpers.

Anmerkung. Um den einzelnen Schülern verschiedene Aufgaben zu geben, ändere der Lehrer diese und die nächsten Aufgaben auf folgende Weise etwas um:

1. Dem Körper werde eine andere Lage gegeben.
2. Das Prisma, das der eine Schüler senkrecht zu P_2 durchschneidet, durchschneide ein anderer senkrecht zu P_1 oder P_3.
3. Die gerade Schnittlinie erhalte eine etwas andere Lage.

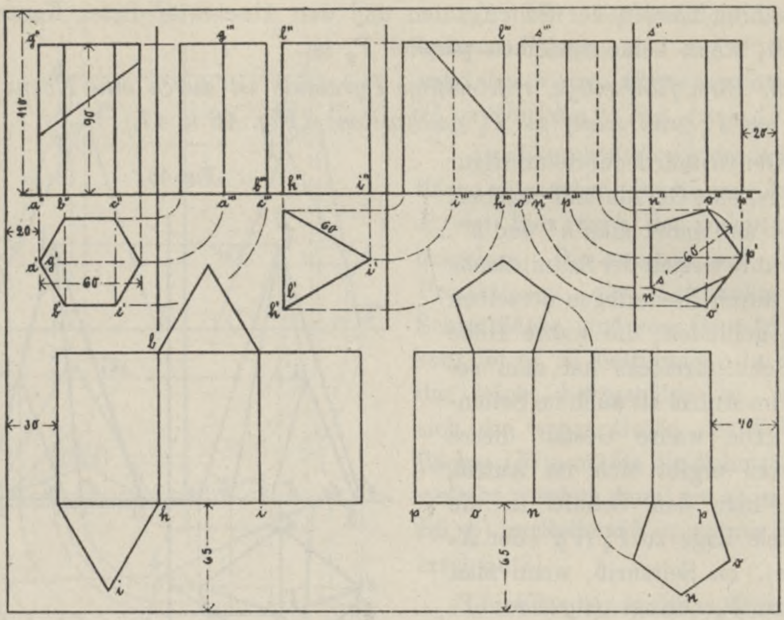


Fig. 48.

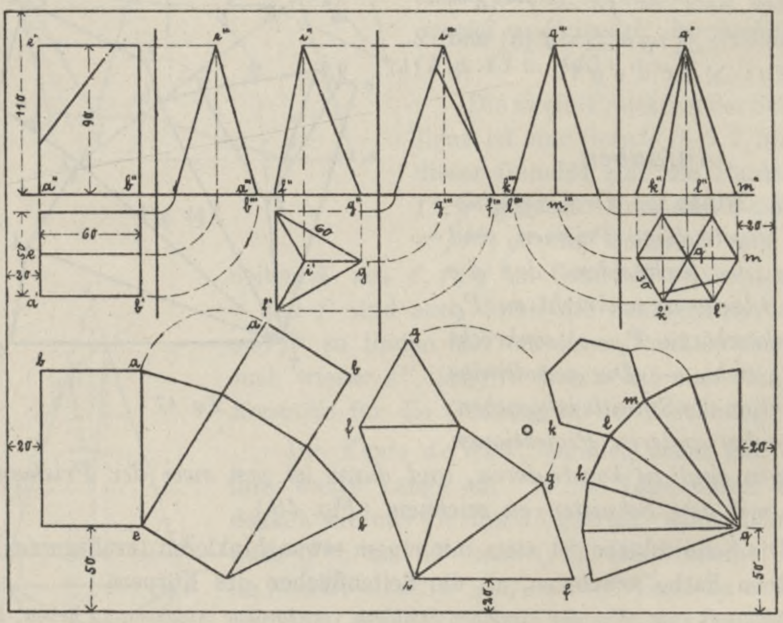


Fig. 49.

2. **Blatt 2.** *Ein Keil und zwei verschiedene Pyramiden sind senkrecht zu einer der drei Projektionsebenen zu durchschneiden und dann die Netze der abgeschnittenen Körper zu konstruieren.* (*Fig. 49.*)

Anmerkung. Von geübteren Schülern können noch folgende Drehungsaufgaben nach den Maßen der Aufgaben zu § 7 gelöst werden:

1. Die regelmäßigen Körper sind so zu durchschneiden (und mit den Schnittflächen zu drehen), daß die Schnittfläche ein regelmäßiges Polygon wird, und zwar a) beim Würfel ein Sechseck, b) beim Tetraeder ein Quadrat, c) beim Oktaeder ein Sechseck, d) beim Dodekaeder ein Zehneck, e) beim Ikosaeder ein Zehneck.
2. Vom Tetraeder und Oktaeder sind die Ecken derart abzuschneiden, daß von den dreieckigen Flächen regelmäßige Sechsecke übrig bleiben. (Welche Form haben die Schnittflächen?) — Der Würfel ist so zu schneiden, daß von den quadratischen

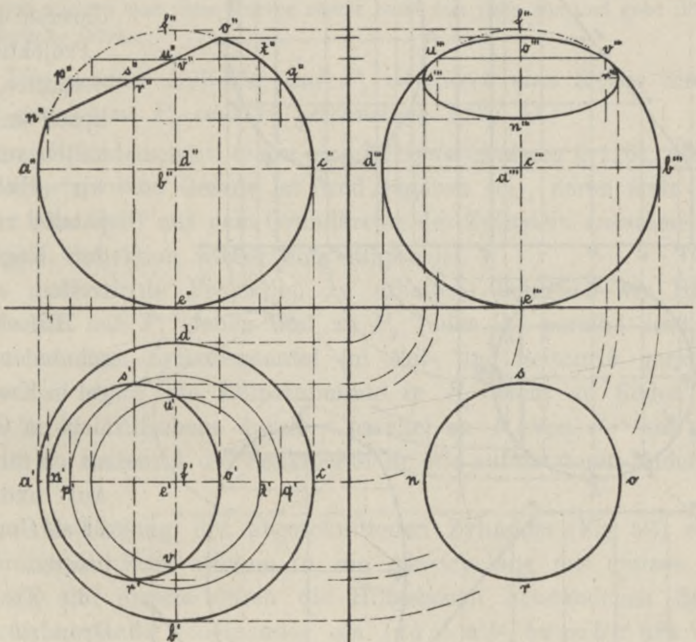


Fig. 50.

Würfelflächen regelmäßige Achtecke zurückbleiben. (Was für Figuren sind hier die Schnittflächen?)

3. In die regelmäßigen Polyeder sind Körper einzuzeichnen, deren Eckpunkte in die Mitten der Begrenzungsflächen der Polyeder fallen, und diese Doppelkörper sind zu drehen.

§ 11. Schnitte durch krummflächige Körper.

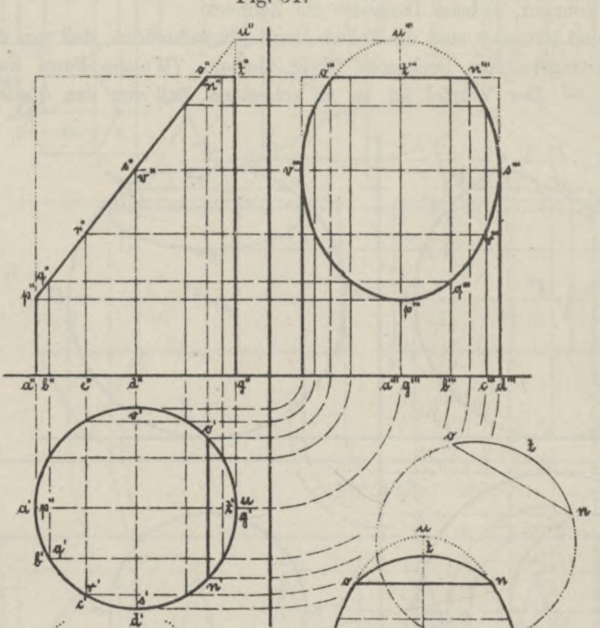
1. Schnitt durch die Kugel. (Fig. 50.)

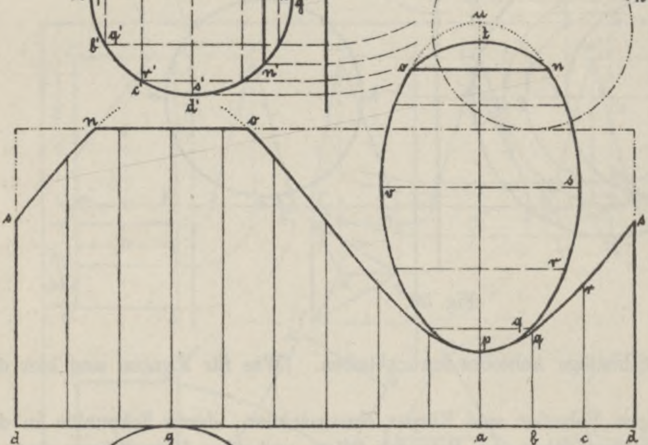
Jeder ebene Schnitt durch die Kugel ergibt einen Kreis. Von der senkrechten Projektion eines Kreises gilt folgendes: Steht der Kreis senkrecht zur Projektionsebene. so ist seine Projektion eine gerade Linie (§ 5, 2, b), die gleich seinem Durchmesser ist; liegt der Kreis parallel zur Projektionsebene, so ist seine Projektion ein kongruenter Kreis (§ 5, 3, b); hat der

Kreis zur Projektionsebene eine geneigte Lage, so ist seine Projektion eine Ellipse (Anh. § 1, 7, a). Ellipsen[1]) sind punktweise zu konstruieren.

In Fig. 50 steht der Kugelschnitt senkrecht zu P_2 und schief zu P_1 und P_3. Seine zweite Projektion ist daher eine Gerade $(n'' o'')$; sie sei gegeben. Um die erste und dritte Projektion des Schnittes, die Ellipsen sind, zu erhalten, verwenden wir Hilfsebenen parallel zu P_1, die den Kugelschnitt treffen. — Diese Hilfsebenen schneiden die Kugel in Kreisen, die sich im Grundriß als Kreise, im Auf- und Seitenriß als Gerade projizieren. Wo sich die Kreise im Grundriß mit den Senkrechten von den entsprechenden Punkten des Aufrisses begegnen, da sind die Ellipsenpunkte im Grundriß. So liegen z. B. die Punkte r und s des Schnittkreises auf der Hilfsebene durch p und q, mithin im Grundriß auf dem Kreise, dessen Durchmesser $p'q' = p''q''$ ist; das Lot von $r''s''$ bestimmt auf diesem Kreise die ersten Projektionen r' und s'

Fig. 51.





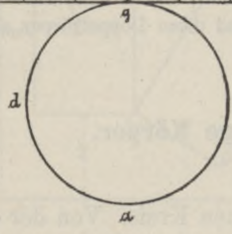


Fig. 52.

[1]) Im Anhange dieses Buches sind verschiedene Ellipsenkonstruktionen angegeben. Es dürfte sich empfehlen, an dieser Stelle das Wichtigste über die Ellipse zu erörtern und mehrere Ellipsen, sowie eine Hyperbel und eine Parabel zeichnen zu lassen.

dieser Punkte. Mit Hilfe der ersten Projektionen dieser Punkte sind dann ihre dritten Projektionen in bekannter Weise zu finden. — Der Kreis unten rechts in Fig. 50 zeigt die wahre Größe des Schnittkreises, $no = n''o''$.

Bemerkung. Man hat so viele Hilfsebenen zu nehmen, daß sich eine hinreichende Anzahl von Ellipsenpunkten ergibt, um die Ellipse sicher zeichnen zu können. Wendet man die „Papierstreifenkonstruktion" an (Anh. § 1, 5, b und c), so genügen zur Konstruktion der Ellipse ihre beiden Achsen, also hier im Grundriß $r's'$ und $n'o'$, im Seitenriß $r'''s'''$ und $n'''o'''$. Um die große Achse $r's'$ bezw. $r'''s'''$ zu erhalten, muß die Hilfsebene pq durch die Mitte von $n''o''$ gelegt werden. — Beim freihändigen Ausziehen der Ellipsen mit einer Zeichenfeder zeichne man diese Kurven zuerst recht fein ganz aus und gebe ihnen nachher die erforderliche Stärke.

2. Ein gerader Zylinder auf P_1 ist durch eine Ebene senkrecht zu P_2 und geneigt zu P_1 und P_3 geschnitten. (*Fig. 51.*)

Dieser Zylinderschnitt ergibt eine Ellipse (Anhang § 1, 6), deren zweite Projektion $p''u''$ eine Gerade ist (und gegeben sei), deren erste Projektion (hier nur zum Teil) mit dem Grundkreise des Zylinders zusammenfällt, und deren dritte Projektion wieder eine Ellipse ist.

Um diese dritte Projektion zu erhalten, benutzen wir Hilfsebenen, die senkrecht auf P_1 stehen und zu P_2 (oder P_3) parallel sind. Sie bestimmen auf dem Zylindermantel im Auf- und Seitenriß gerade Linien, durch welche dann die Ellipsenpunkte in P_3 leicht zu finden sind. So ergibt z. B. die Hilfsebene durch r parallel zu P_2 von $c'r'$ aus im Aufriß $c''r''$ und im Seitenriß die Senkrechte in c'''; auf letzterer findet man von r'' aus r'''.

Die Abwickelung des abgeschnittenen Zylinders (Fig. 52) ergibt sich folgendermaßen: Man zeichne in die Abwickelung des ganzen Zylindermantels die auf diesem durch die Hilfsebenen entstandenen Seitenlinien im wahren Abstande voneinander ein ($ab = a'b'$, $bc = b'c'$ usw.) und bestimme auf diesen die Höhen nach dem Aufriß ($ap = a''p''$, $bq = b''q''$ usw.) Die große Achse der Ellipse hat man im Aufriß in wahrer Größe ($pu = p''u''$), und die Breiten der Ellipse bei q, r usw. finden sich in der ersten und dritten Projektion in wahrer Größe, z. B. $vs = v's' = v'''s'''$, $on = o'n' = o'''n'''$ Auf diese Weise ergibt sich in der Abwickelung die wahre Größe der Ellipse.

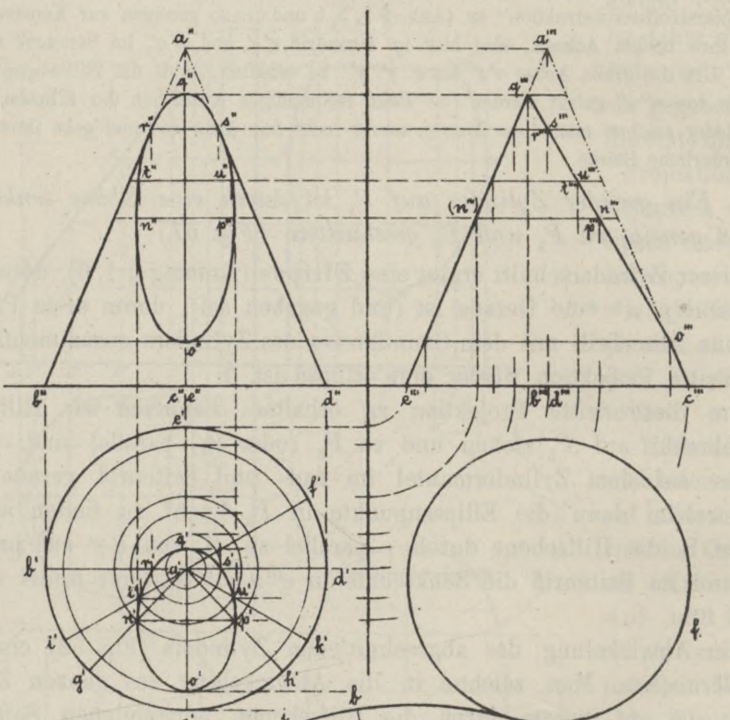
Anmerkung. Die wahre Größe und Gestalt der Ellipse ist auch dadurch leicht zu finden, daß man die Schnittfläche in die parallele Lage zu P_1 ($u''p'' \parallel$ zur X-Achse) oder zu P_3 ($u''p'' \parallel$ zur Z-Achse) bringt, oder daß man sie in P_2 niederlegt.

3. Ebene Schnitte durch gerade Kegel (*Kegelschnitte*).

a) Die Schnittebene trifft alle Seitenlinien des Kegels. ***Ellipsenschnitt.*** (*Anhang § 1, 6.*)

Der Schnitt (Fig. 53) ist senkrecht zu P_3 angenommen, daher ist $o''' \ldots q'''$ eine Gerade. Wir legen Hilfsebenen durch den Kegel parallel zu P_1, die den Kegel in Kreisen schneiden deren Projektionen im Grundriß Kreise, im Auf- und Seitenriß gerade Linien sind. Durch diese Kreise und geraden Linien findet man die Ellipsenpunkte im Grund- und Aufriß. So ist z. B. die Wagerechte durch $t'''u'''$ der Durchmesser des Kreises im Grundriß, auf

Fig. 53.



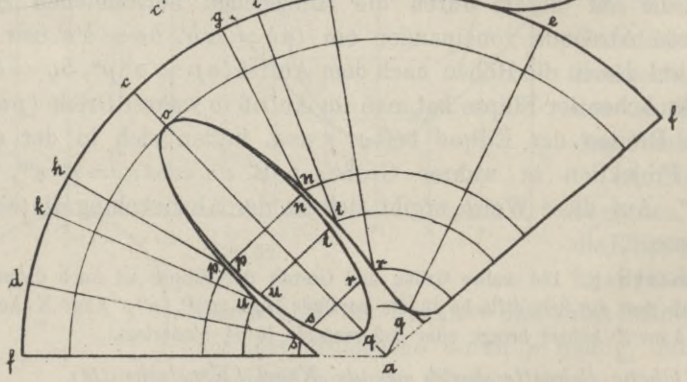


Fig. 54.

dem t' und u' liegen. Von diesen Punkten aus findet man dann t'' und u'', die in derselben Höhe wie t''' und u''' und senkrecht über t' und u' liegen.

Den Ausschnitt in der Abwickelung des Kegelmantels (Fig. 54) findet man unter Benutzung der Achsenschnitte, deren erste Projektionen $a'b'$,

$a'i' \ldots a'e'$ sind; die Entfernung der Punkte $n, t, r \ldots$ von a hat man im Auf- und Seitenriß, z. B. $an = a'''(n''')$. — Die große Achse der Ellipse und Abschnitte auf dieser hat man im Seitenriß, die entsprechenden Breiten im Grund- und Aufriß. Die Ellipse erscheint dann in der Abwickelung in ihrer wahren Gestalt. (Vergl. die Anmerkung zu 2!)

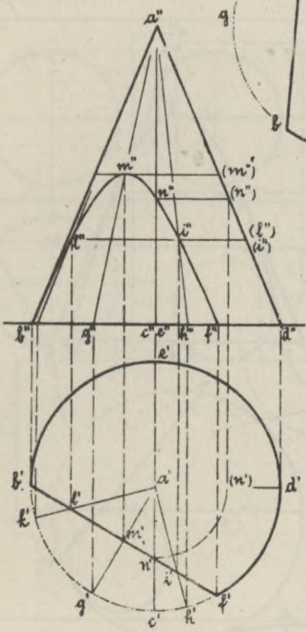


Fig. 55.

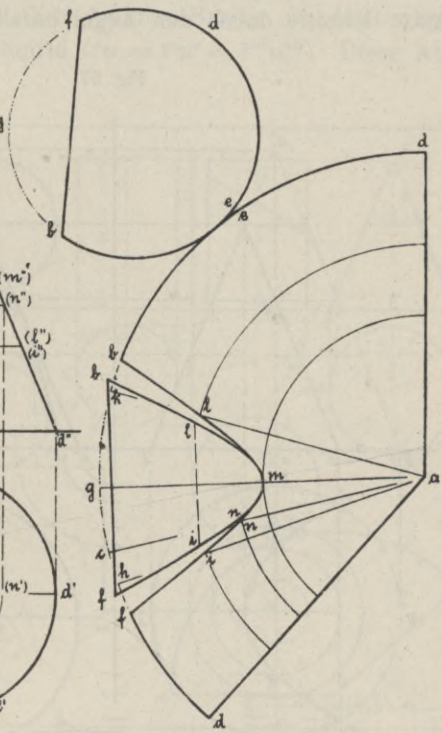


Fig. 56.

b) Die Schnittebene ist der Achse parallel. ***Hyperbelschnitt.*** (*Anhang § 2, 2.*)

Da die Schnittebene (Fig. 55) senkrecht auf P_1 steht, so ist ihre erste Projektion $b'f'$ eine Gerade. Die zweite Projektion erhält man mit Hilfe der Achsenschnitte, deren erste Projektionen $a'k', a'g' \ldots$ sind. Um den Punkt n'' zu finden, ist die durch den Achsenschnitt entstandene Seitenlinie ac in die parallele Lage zu P_2 zu drehen, dann erhält man durch Hinaufloten von (n') den Punkt (n'') und von diesem aus Punkt n''.

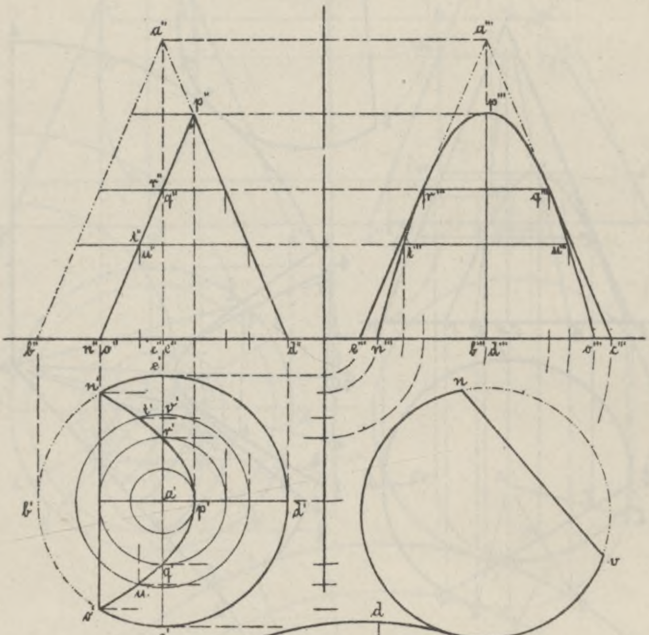
In der Abwickelung des Kegelmantels (Fig. 56) ist $al = ai = a''(l'') = a''(i'')$, $an = a''(n'')$, $am = a''(m'')$. — Für die Hyperbel hat man die Achse (und Abschnitte auf dieser) im Aufriß, die entsprechenden Breiten im Grundriß, z. B. $il = i'l'$. In Fig. 56 haben wir die Hyperbel in wahrer Gestalt.

Anmerkung. Die wahre Gestalt der Hyperbel ergibt sich auch, wenn man den Schnitt in die parallele Lage zu P_2 bringt ($b'f' \parallel$ zur X-Achse), oder wenn man die Schnittfläche in P_1 niederlegt.

c) *Die Schnittebene ist einer Seitenlinie des Kegels parallel.* ***Parabelschnitt.*** (*Anhang § 3, 2.*)

Die Schnittebene (Fig. 57) steht senkrecht zu P_2, daher ist $n''p''$ eine gerade Linie. Schnitte durch den Kegel parallel zu P_1, die $n''p''$ treffen,

Fig. 57.



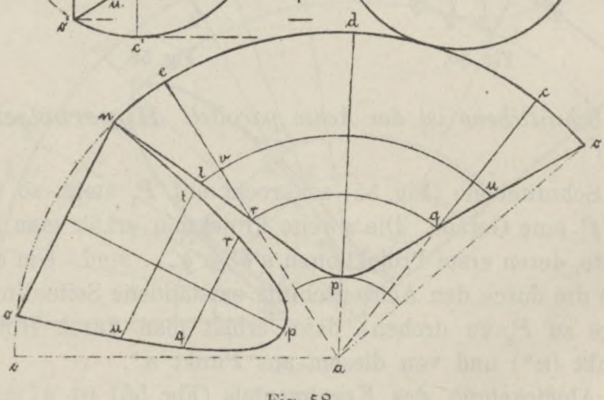


Fig. 58.

bestimmen im Grundriß Kreise, auf welchen die Kurvenpunkte des Grundrisses senkrecht unter den betreffenden Punkten des Aufrisses liegen. Vom Grund- und Aufriß aus erhält man die Kurvenpunkte im Seitenriß.

Für die Abwickelung des abgeschnittenen Kegelmantels (Fig. 58) sind außer den Seitenlinien ac, ad und ae hier nur die Hilfskreise benutzt, die im Grundriß im ganzen und in Abschnitten in wahrer Größe vorhanden sind, z. B. Bogen $vt = v't'$, $en = e'n'$. — Die Punkte n und o der Parabel liegen im Grundkreise des Kegels ($no = n'o'$), die Parabelachse fällt in die Mittelsenkrechte von no, die wahre Länge der Achse und ihrer Abschnitte hat man im Aufriß und die ihrer wahren Breiten in den entsprechenden Punkten im Grund- und Seitenriß ($tu = t'u' = t'''u'''$). Diese Abwickelung

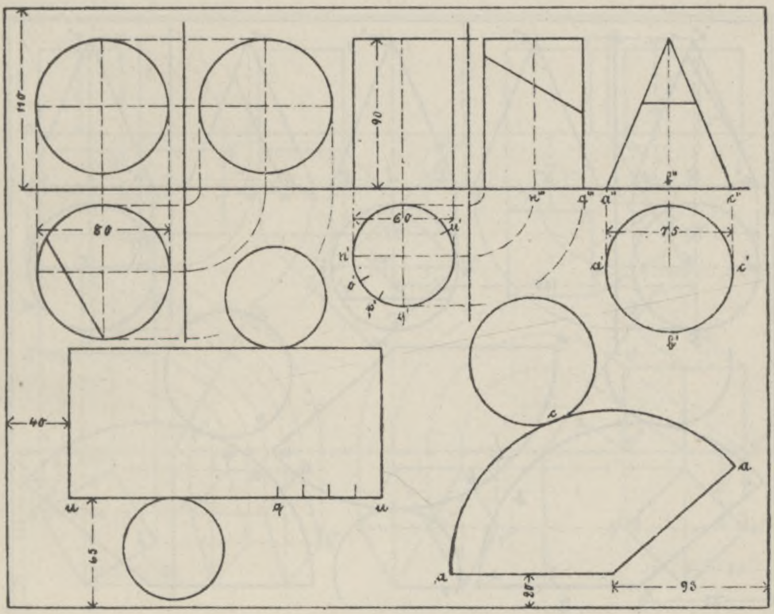


Fig. 59.

zeigt dann die wahre Gestalt der Parabel; man kann sie auch gewinnen, wenn man den Schnitt in P_1 umlegt oder ihn in die parallele Lage zu P_2 oder P_3 dreht.

Aufgaben.

Blatt 1. *Es ist zu durchschneiden a) eine Kugel senkrecht zu P_1 und schräg zu P_2 und P_3; b) ein Zylinder senkrecht zu P_3 und schräg zu P_1 und P_2; c) ein Kegel parallel zu P_1. (Fig. 59.)*

Bei der Kugel sowohl wie beim Zylinder sind Hilfsebenen zu benutzen, die parallel zu P_2 sind. — Für die Abwickelung ist der Zylindermantel bei u, der Kegelmantel bei a aufzuschneiden.

Blatt 2. *Kegelschnitte: Ellipsen-, Hyperbel-, Parabelschnitt. Die Lage der Schnitte ist aus Fig. 60 zu ersehen.*

Beim Ellipsen- und Parabelschnitt benutze Hilfsebenen parallel zu P_1, beim Hyperbelschnitt lege die Hilfsebenen durch die Achse des Kegels (Achsenschnitte).

Die Buchstaben bei den Abwickelungen geben an, an welcher Stelle der Kegelmantel aufzuschneiden ist.[1])

Anmerkung. Man ändere für die einzelnen Schüler diese Aufgaben in der Weise um, daß die gegebene geradlinige Projektion der Schnittfläche in einer anderen als in den (in Fig. 59 u. 60) angenommenen Projektionsebenen liegt, oder daß man dieser Linie eine etwas andere Lage gibt, oder endlich daß man bei der Abwickelung den Mantel nicht von allen Schülern in derselben Seitenlinie aufschneiden läßt.

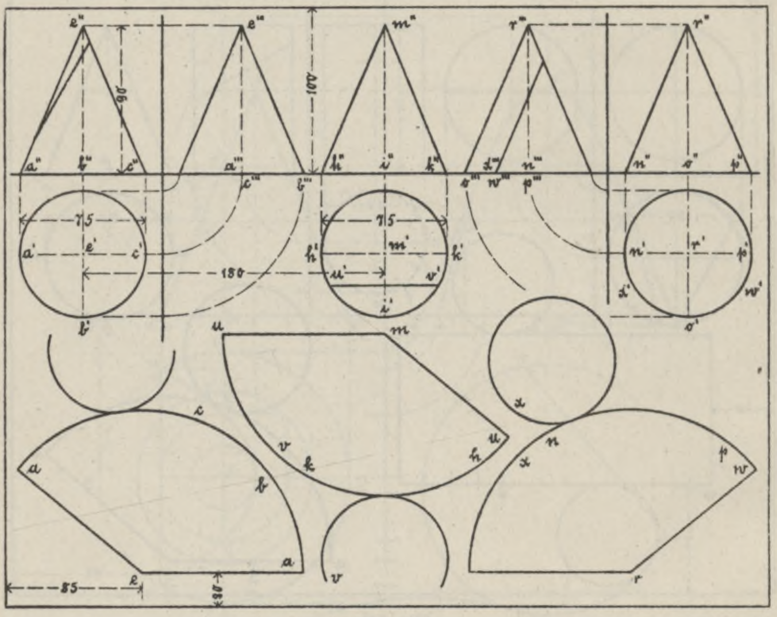


Fig. 60.

§ 12. Verschiedene Lage der dritten Projektionsebene.

Bisher haben wir die dritte Projektionsebene stets senkrecht zu P_1 und P_2 angenommen. Es ist aber häufig sehr vorteilhaft, ja notwendig, P_3 so zu stellen, daß sie nur zu einer dieser beiden Ebenen senkrecht, zu der andern aber unter einem beliebigen oder durch gewisse Bedingungen bestimmten Winkel geneigt steht. — Die Schnittlinie von P_1 und P_3 soll auch hier als Y-Achse, die von P_2 und P_3 als Z-Achse bezeichnet werden. In Fig. 61, a bis e ist ein Würfel auf die drei Ebenen projiziert:

a) P_3 hat die gewöhnliche Lage, ist aber so umgelegt, daß sie mit P_1 in eine Ebene fällt.

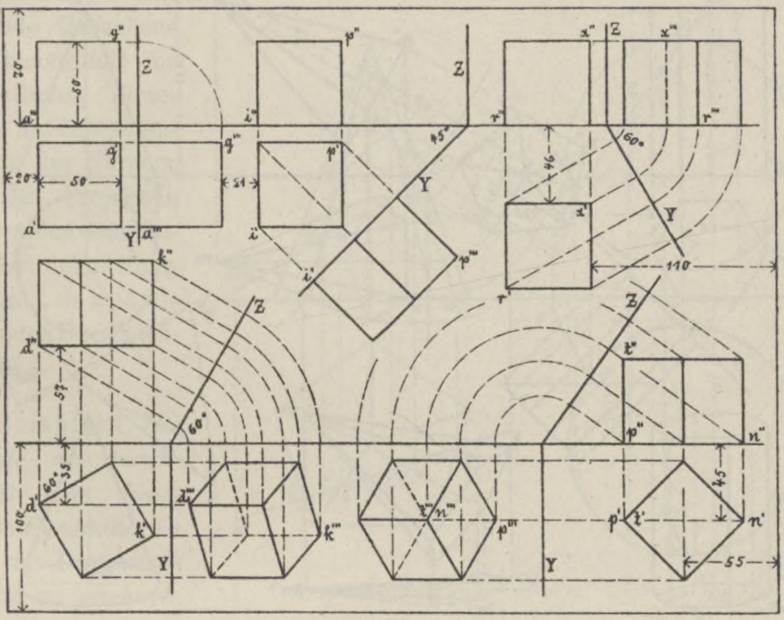
[1]) Bei der Ausführung dieser Zeichnung beachte man in bezug auf die Hilfslinien (die rot nachzuziehen sind) ganz besonders, was darüber auf S. 23 gesagt ist.

b) P_3 steht senkrecht auf P_1 und bildet mit P_2 einen Winkel von 45^0. Den gleichen Winkel bildet dann auch die Y-Achse mit der X-Achse, die Z-Achse aber muß senkrecht auf der X-Achse stehen, weil P_2 und P_3 senkrecht zu P_1 sind. [1]) — P_3 ist um die Y-Achse in P_1 niedergelegt.

c) P_3 steht senkrecht auf P_1 und unter 60^0 geneigt zu P_2. — Sie ist um die Z-Achse durch Drehung um 60^0 in P_2 niedergelegt.

d) P_3 senkrecht zu P_2, unter 60^0 geneigt zu P_1. — Sie ist um die Y-Achse in P_1 niedergelegt.

a b c



d Fig. 61. e

e) P_3 steht senkrecht auf P_2. Ihr Neigungswinkel zu P_1 ist dadurch bestimmt, daß die Z-Achse senkrecht auf der Diagonale $n'' t''$ des Aufrisses stehen soll; der Umriß der dritten Projektion des Würfels wird dann ein regelmäßiges Sechseck. — P_3 ist um die Y-Achse in P_1 niedergelegt.

Aufgaben.

Blatt 1. *Vom Würfel sind die 8 Ecken so abzuschneiden, daß von den quadratischen Seitenflächen a) Quadrate oder b) regelmäßige Achtecke übrig bleiben. Dieser Körper ist nach Fig. 61 auf die drei Ebenen zu projizieren.*

[1]) Nach dem stereometrischen Satze: Wenn zwei einander schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittsgerade auf der dritten Ebene senkrecht.

Der im ersten Falle entstehende Körper hat 14 Flächen, 12 Ecken und 24 Kanten, der im zweiten Falle entstehende 14 Flächen, 24 Ecken und 36 Kanten.

Blatt 2. *Prisma, Pyramide und Kegel sind durch eine zu P_1 und P_2 geneigte Ebene zu schneiden und die abgeschnittenen Körper (die Restkörper) in gerader und schiefer Parallelprojektion darzustellen. (Fig. 62.)*

Die dritte Projektionsebene ist so zu legen, daß die Projektion des Schnittes auf diese eine gerade Linie wird. (Beim Aufzeichnen der Pyramide

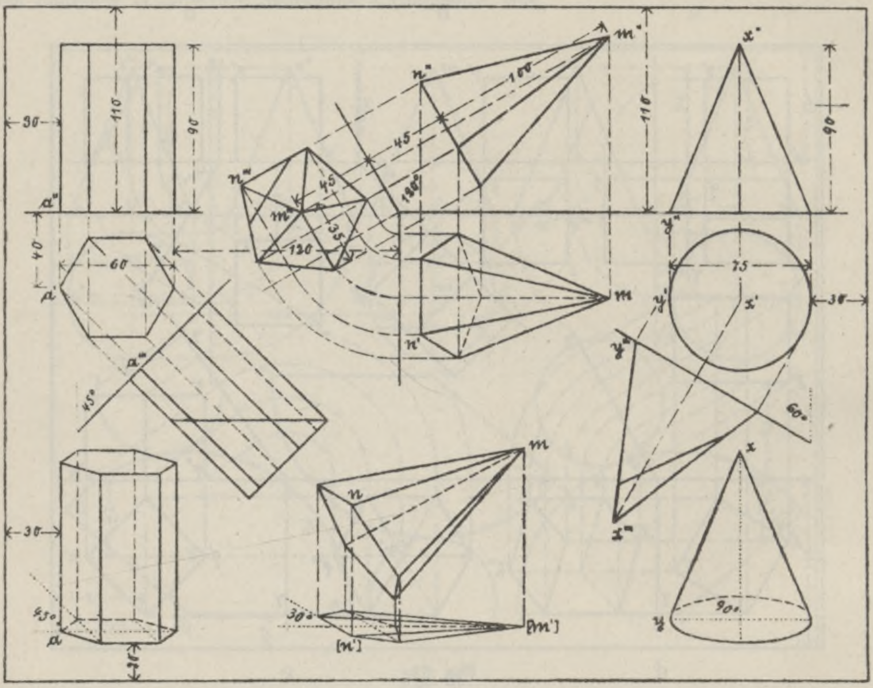


Fig. 62.

ist von der dritten Projektion auszugehen. Für die Herstellung der schiefen Parallelprojektion derselben vergl. Fig. 33!)

C. Durchdringungen.

§ 13. Einleitung.

Zu den allgemeinen Eigenschaften der physischen Körper gehört ihre Undurchdringlichkeit, d. h. zwei Naturkörper können nicht gleichzeitig denselben Raum einnehmen. Sofern es sich nun beim Projektionszeichnen nicht um rein mathematische Körper handelt, versteht man unter Durchdringung die Darstellung der Schnittfiguren, die die Oberfläche des einen Körpers mit der des anderen bildet, bezw. auch die Darstellung des Raum-teiles, den beide Körper gemeinsam haben. Durchbohrt der eine Körper den andern, so ist die Durchdringung vollständig, und die Durchdringungsfigur besteht aus (wenigstens zwei) völlig getrennten Teilen. Es kann aber auch der eine Körper nur ein seitliches Stück aus dem andern ausschneiden, dann entsteht als Durchdringungsfigur nur ein einziger, in sich geschlossener Linienzug.

Um die Durchdringungsfiguren zweier Körper zu konstruieren, muß man die Durchstoßpunkte einer Geraden mit der Oberfläche eines Körpers bestimmen können. Zur Bestimmung dieser Punkte legt man durch die gegebene Gerade eine passende Hilfsebene und konstruiert die Schnittlinien dieser Ebene mit den Seitenflächen des Körpers. Wo die Projektion der Geraden dem Umriß der Schnittfigur begegnet, da sind die gesuchten Durchstoßpunkte.

Beispiel 1. *Die Gerade ab durchdringt eine fünfseitige Pyramide. Es sind die Durchstoßpunkte zu zeichnen.* (*Fig. 63.*)

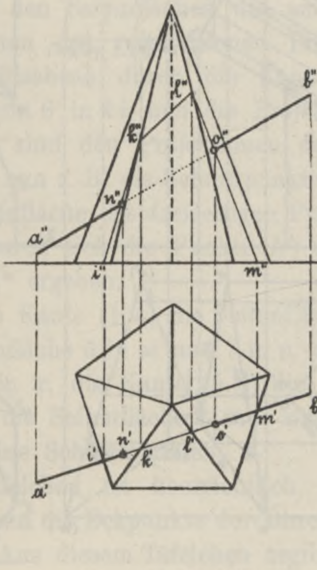


Fig. 63.

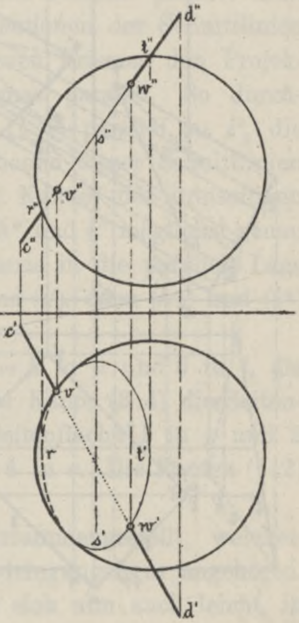


Fig. 64.

Wir legen (Fig. 63) eine Hilfsebene durch ab senkrecht zu P_1. Sie schneidet die Pyramide in einem Vierecke, dessen zweite Projektion $i''\,k''\,l''\,m''$ ist. (Vergl. § 10, 5!) Die zweite Projektion der Geraden $a\,b$ begegnet dem Umriß dieser Schnittfläche in den gesuchten Durchdringungspunkten n'' und o''. Von diesen Punkten aus ergeben sich dann die ersten Projektionen n' und o' auf $a'b'$. — Die Hilfsebene durch ab hätte ebensogut senkrecht zu P_2 gelegt werden können.

Beispiel 2. *Es sind die Projektionen der Durchstoßpunkte der Geraden cd mit einer Kugel zu bestimmen.* (*Fig. 64.*)

Die Hilfsebene durch cd stehe senkrecht auf P_2. Sie schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen erste Projektion eine Ellipse ist. Die erste Projektion der Geraden begegnet dieser Ellipse in den verlangten Durchstoßpunkten v' und w'; senkrecht über diesen Punkten liegen in der zweiten

Projektion der Geraden die Punkte v'' und w''. — Die Hilfsebene durch cd hätte ebensogut senkrecht zu P_1 gelegt werden können.

§ 14. Durchdringungen ebenflächiger Körper.

Man bestimme (nach § 13) die Punkte, in welchen die Kanten des ersten Körpers die Flächen des zweiten und die Kanten des zweiten Körpers

Fig. 65.

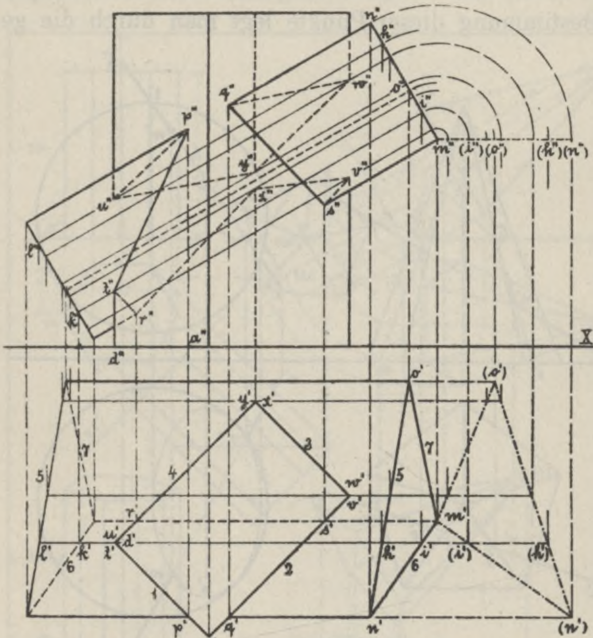
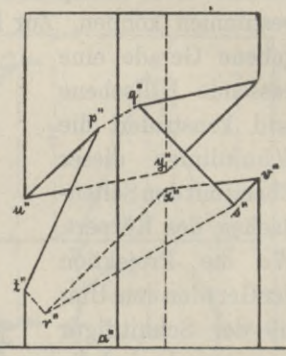


Fig. 67.



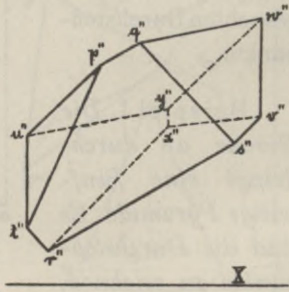


Fig. 68.

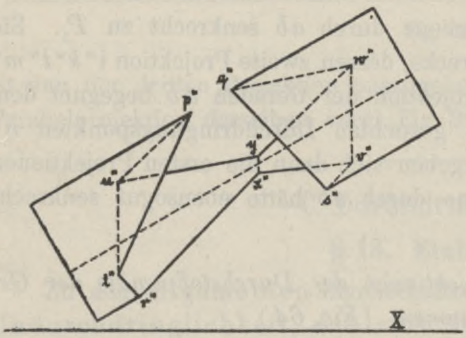


Fig. 66.

die Flächen des ersten durchstoßen. Die dadurch gefundenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur müssen dann in richtiger Reihenfolge verbunden werden, wobei als Regel gilt, *daß zwei Punkte dann, und nur dann, zu verbinden sind, wenn sie in einer Seitenfläche des ersten Körpers und zugleich in einer und derselben Seitenfläche des zweiten Körpers liegen.* Sind diese Seitenflächen bei beiden Körpern sichtbar, so ist auch die Verbindungslinie sichtbar, andernfalls ist sie unsichtbar. — Beim Antuschen gibt man jedem Körper einen besonderen und den sichtbaren Endflächen derselben einen etwas kräftigeren Farbenton.

Beispiel 1. *Ein vierseitiges, gerades Prisma (ein Rechtecker), senkrecht auf P_1, wird von einem dreiseitigen Prisma parallel zu P_2 und schief zu P_1 durchdrungen.* (*Fig. 65.*)

Die Seitenflächen der Prismen seien mit 1, 2, 3 ... 7 und die Kanten, in welchen sich je zwei Seitenflächen schneiden, mit (1.2), (2.3) ... (7.5) bezeichnet. Durch jede Seitenkante des einen Prismas werde die Hilfsebene so gelegt, daß sie mit den Seitenkanten des anderen Prismas parallel läuft (hier also parallel P_2), dann sind auch die Projektionen der Schnittlinien dieser Hilfsebene mit den Seitenflächen des anderen Prismas den Projektionen der Seitenkanten des geschnittenen Prismas parallel. So durchschneidet z. B. die Hilfsebene durch die Kante (1.4) parallel zu P_2 die Seitenfläche 5 in lh und 6 in ki, und die Projektionen dieser Schnittlinien ($l'h'$, $k'i'$, $l''h''$, $k''i''$) sind den Projektionen der Kanten des dreiseitigen Prismas parallel. Um nun z. B. die Schnittpunkte h'' und i'' möglichst genau zu erhalten, ist die Endfläche des dreiseitigen Prismas in die parallele Lage zu P_1 zu drehen, wodurch sich die Punkte (h') und (i'), dann (h'') und (i'') und endlich h'' und i'' ergeben.

Es durchstößt die Kante (1.4) die Seitenfläche 5 in u und 6 in t, die Kante (2.3) die Seitenfläche 5 in w und 7 in v, die Kante (3.4) die Seitenfläche 5 in y und 7 in x, die Kante (5.6) die Seitenfläche 1 in p und 2 in q, die Kante (6.7) die Seitenfläche 2 in s und 4 in r. Die Kanten (1.2) und (5.7) ergeben keine Schnittpunkte.

Im folgenden Täfelchen ist übersichtlich zusammengestellt, welchen Kanten und Seitenflächen die Eckpunkte der Durchdringungsfigur angehören.

$u =$	(1.4) 5
$t =$	(1.4) 6
$w =$	(2.3) 5
$v =$	(2.3) 7
$y =$	(3.4) 5
$x =$	(3.4) 7
$p =$	(5.6) 1
$q =$	(5.6) 2
$s =$	(6.7) 2
$r =$	(6.7) 4

Aus diesem Täfelchen ergibt sich nun auch leicht, in welcher Reihenfolge die Punkte zu verbinden sind. Es liegt z. B. u in den Seiten 1, 4 und 5; nun liegt, wie das Täfelchen zeigt, in 5 und 1 Punkt p und in 5 und 4 Punkt y, daher ist u mit p und y zu verbinden; y liegt in 3, 4 und 5, in 5 und 3 liegt auch w, daher ist y mit w zu verbinden usw.

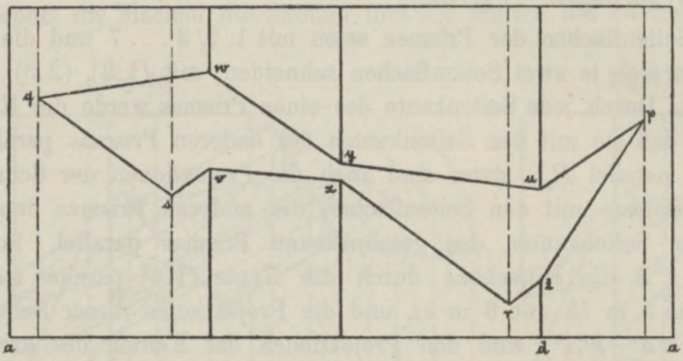
Die Schnittlinie pt liegt in den im Aufriß sichtbaren Seitenflächen 1 und 6, daher ist sie voll auszuziehen; desgleichen qs in den sichtbaren Flächen 2 und 6. Alle anderen Schnittlinien sind unsichtbar.

Fig. 68 zeigt das beiden Körpern gemeinsame Stück. Nehmen wir dieses aus jedem Prisma weg, so kommt als Aufriß des vierseitigen Prismas Fig. 67 und als Aufriß des dreiseitigen Prismas Fig. 66.

Zeichnen wir den abgewickelten Mantel beider Prismen mit der Durchdringungsfigur, so ergeben sich die Figuren 69 und 70. Die Eckpunkte der

Schnittfigur, welche auf den Seitenkanten der Prismen liegen. erhält man leicht, wenn man ihren Abstand von den Endflächen des Prismas beachtet. Um die Eckpunkte zu erhalten, die auf den Flächen liegen, ermittele man

Fig. 69.



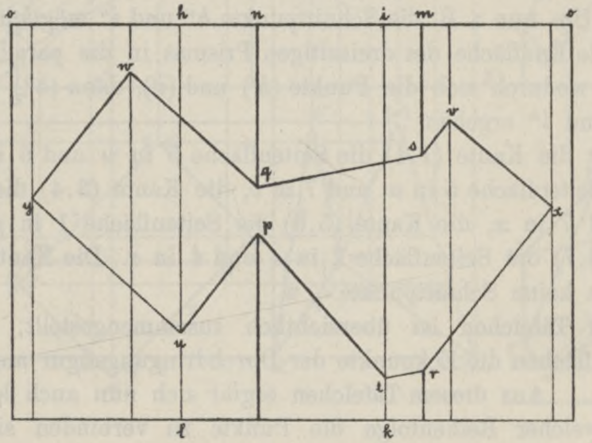


Fig. 70.

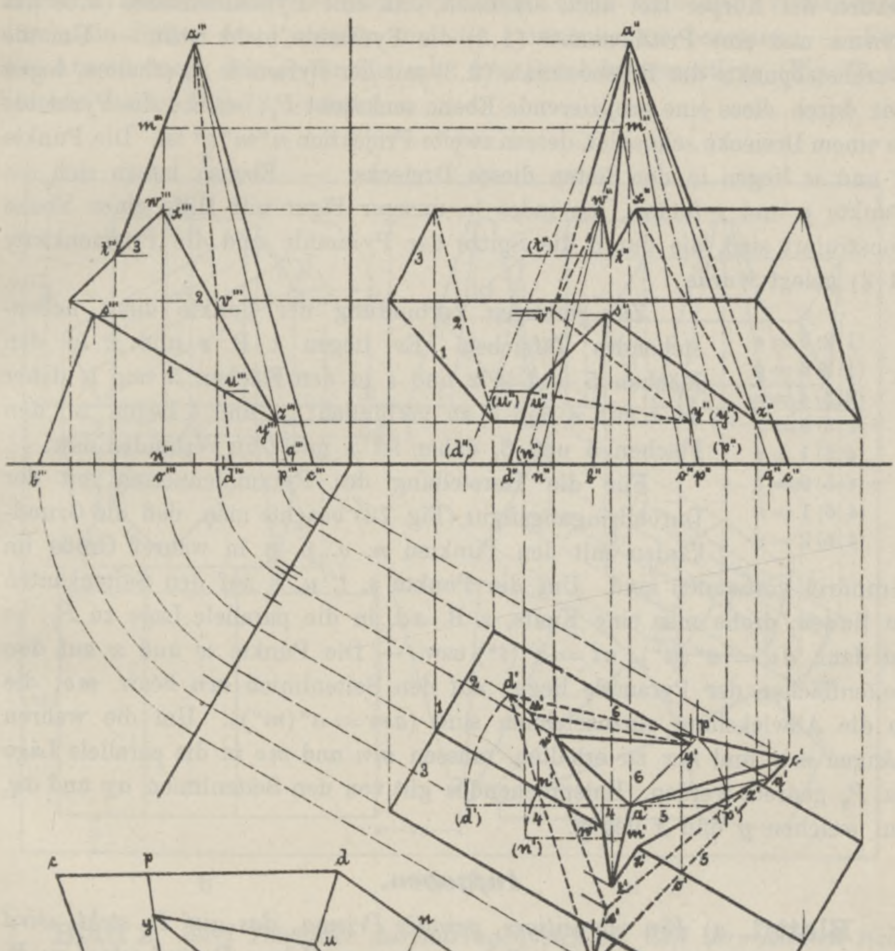
ihren Abstand von einer Seitenkante und einer Grundkante der betreffenden Fläche.

Anmerkung. Schneidet man aus dem Netze des einen Prismas (z. B. aus dem des Rechteckers) die Schnittfigur aus und klebt dann die Flächen zusammen, so läßt sich das andere volle (hier das dreiseitige) Prisma durch das erstere hindurchschieben, und man erhält auf diese Weise das Modell der sich durchdringenden Körper.

Beispiel 2. *Ein dreiseitiges, gerades Prisma, parallel P_1 und schief zu P_2, durchdringt eine regelmäßige Pyramide, die auf P_1 steht.* (*Fig. 71.*)

Wir projizieren beide Körper auf P_3, die parallel zur Grundfläche des Prismas angenommen wird, und legen P_3 in P_2 nieder. Auf P_3 haben wir unmittelbar die Projektionen der Durchstoßpunkte zweier Pyramidenkanten mit je zwei Prismenflächen (s''', t''', u''', v'''), von welchen aus man leicht die

Fig. 71.



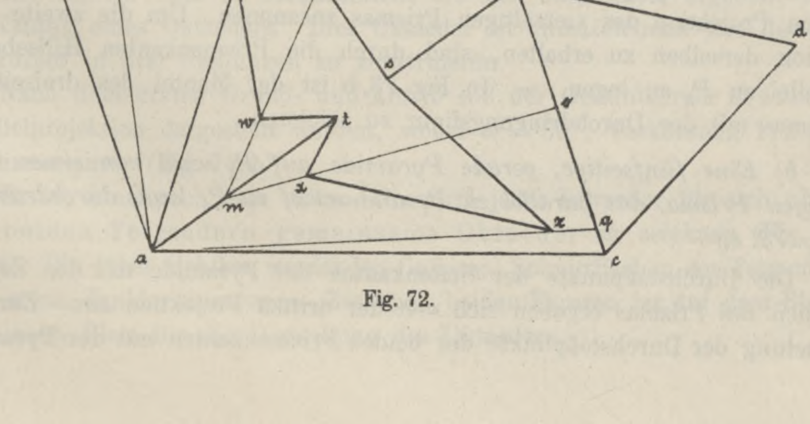


Fig. 72.

ersten und zweiten Projektionen derselben Punkte findet. Die dritte Projektion der Körper läßt auch erkennen, daß eine Pyramidenkante (5.6) das Prisma und eine Prismenkante (1.3) die Pyramide nicht trifft. — Um die Durchstoßpunkte der Prismenkante (2.3) mit der Pyramide zu erhalten, legen wir durch diese eine projizierende Ebene senkrecht P_1, welche die Pyramide in einem Dreiecke schneidet, dessen zweite Projektion $n''m''o''$ ist. Die Punkte x und w liegen in den Seiten dieses Dreiecks. — Ebenso lassen sich die Punkte y und z finden, die indes in unserer Figur mit Hilfe einer Ebene konstruiert sind, die durch die Spitze der Pyramide und die Prismenkante (1.2) gelegt wurde.

(1.2)	$5 = z$
(1.2)	$6 = y$
(2.3)	$4 = w$
(2.3)	$5 = x$
(4.5)	$1 = s$
(4.5)	$3 = t$
(4.6)	$1 = u$
(4.6)	$2 = v$

Zur richtigen Verbindung der Punkte dient nebenstehendes Täfelchen. Es liegen z. B. z und x in den Flächen 5 und 2, z und s in den Flächen 5 und 1, daher ist z mit x und s zu verbinden; x und t liegen in den Flächen 5 und 3, daher ist x mit t zu verbinden usw.

Für die Herstellung des Pyramidennetzes mit der Durchdringungsfigur (Fig. 72) beachte man, daß die Grundkanten mit den Punkten n, o, p, q in wahrer Größe im Grundriß vorhanden sind. Um die Punkte s, t, u, v auf den Seitenkanten zu finden, drehe man eine Kante, z. B. ad, in die parallele Lage zu P_2; es ist dann $au = a''(u'')$, $at = a''(t'')$ usw. — Die Punkte w und x auf den Seitenflächen der Pyramide liegen auf den Seitenlinien mn bezw. mo, die in die Abwickelung einzuzeichnen sind ($am = a''(m'')$). Um die wahren Längen mw und mx zu erhalten, müssen mn und mo in die parallele Lage zu P_2 gedreht werden. Entsprechendes gilt von den Seitenlinien ap und aq, auf welchen y und z liegen.

Aufgaben.

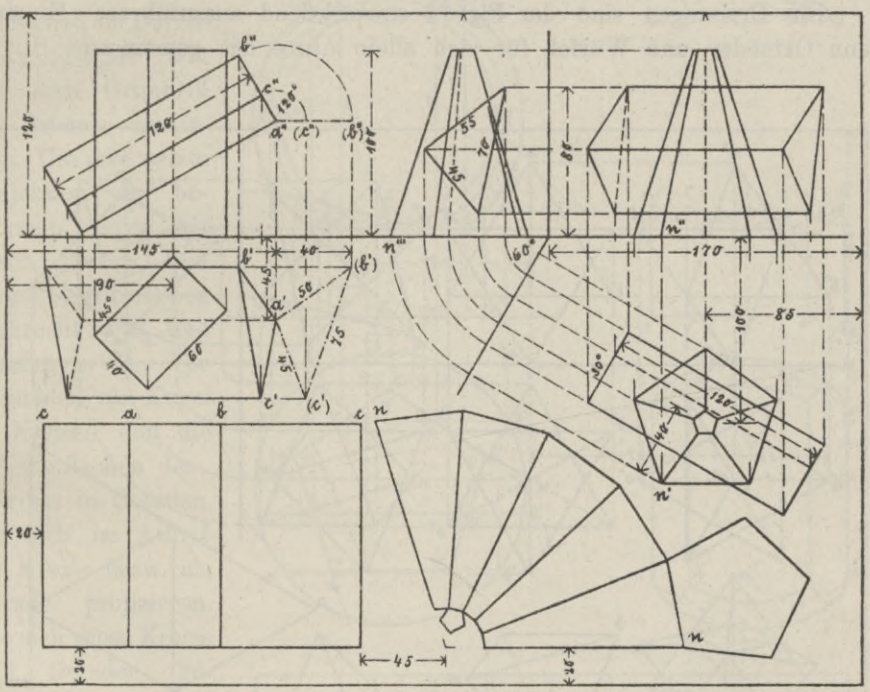
Blatt 1. *a) Ein vierseitiges, gerades Prisma, das auf P_1 steht, wird von einem dreiseitigen, geraden Prisma, das parallel zu P_2 und schief zu P_1 liegt, durchdrungen. (Fig. 73, a.)*

Die erste Projektion der Durchdringungsfigur (Fig. 73, a) fällt mit der ersten Projektion des vierseitigen Prismas zusammen. Um die zweite Projektion derselben zu erhalten, sind durch die Prismenkanten Hilfsebenen parallel zu P_2 zu legen. — In Fig. 73, b ist der Mantel des dreiseitigen Prismas mit der Durchdringungsfigur zu zeichnen.

b) Eine fünfseitige, gerade Pyramide auf P_1 wird von einem dreiseitigen Prisma, das parallel zu P_1 und schief zu P_2 liegt, durchdrungen. (Fig. 73, c.)

Die Durchstoßpunkte der Seitenkanten der Pyramide mit den Seitenflächen des Prismas ergeben sich von der dritten Projektion aus. Zur Ermittelung der Durchstoßpunkte der beiden Prismenkanten mit der Pyramide sind durch letztere Hilfsebenen senkrecht zu P_1 zu legen, die die Pyramide in einem Dreiecke bezw. Vierecke schneiden. (Man kann auch Hilfsebenen durch die Spitze der Pyramide und die Prismenkanten benutzen.) — Für die Abwickelung der Pyramide mit der Durchdringungsfigur (Fig. 73, d) beachte das zu Fig. 72 Gesagte!

a c



b Fig. 73. d

Blatt 2. *Zwei Tetraeder durchdringen sich so, daß ihre Kanten sich in der Mitte treffen.* (*Fig. 74.*)

Jede Tetraederfläche schneidet drei Flächen des anderen Tetraeders in den Mittellinien. Die 12 Schnittlinien, die sich unmittelbar ergeben, sind die Kanten eines Oktaeders. Dies Oktaeder ist einzuzeichnen und der Gesamtkörper in drei Stellungen zu konstruieren.

Nach dem ersten Grund- und Aufriß soll der Gesamtkörper in schiefer Parallelprojektion dargestellt werden, wobei $w = 30^0$, Verkürzung $1:2$ anzunehmen sind. (Fig. 74, b.)

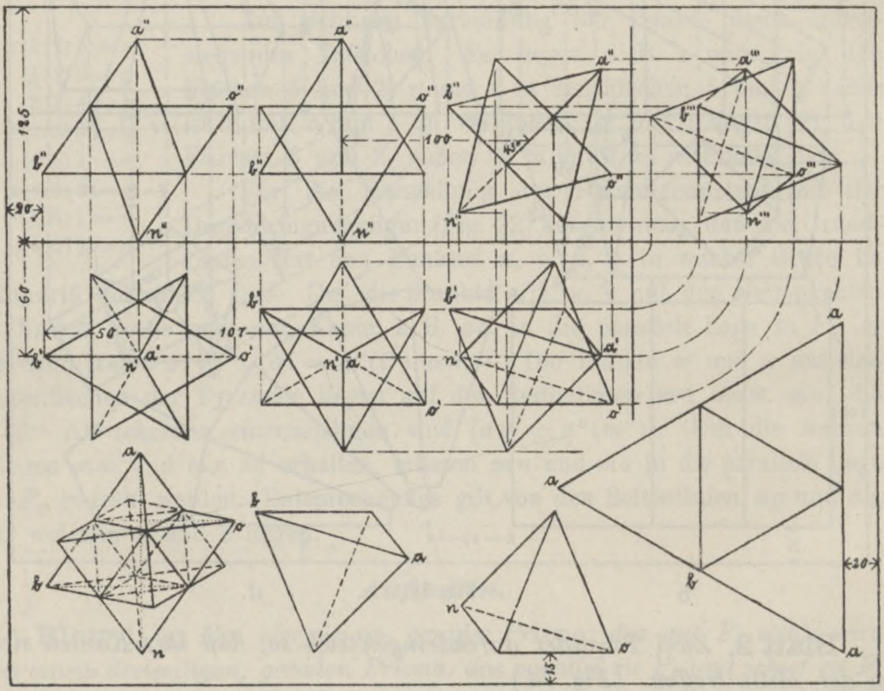
Es ist dann nach dem dritten Grundriß jedes Tetraeder für sich ohne das beiden Tetraedern gemeinsame Oktaeder zu zeichnen (Fig. 74, c u. d). Die dabei sichtbar werdenden (inneren) Schnittflächen des Tetraeders sind etwas dunkler anzulegen. Zwischen beiden Figuren ist auf dem Blatte auch noch Platz für die Darstellung des Oktaeders.

Endlich ist das Netz des einen Tetraeders herzustellen. (Fig. 74, e.) Zu beachten ist, daß jede Tetraederfläche durch die Durchdringungsfigur in vier gleichseitige Dreiecke geteilt wird, von welchen das eine herausfällt.

Blatt 3. *Würfel und Oktaeder durchdringen sich so, daß sich Würfel- und Oktaederkanten in der Mitte (rechtwinklig) schneiden. (Oktaederkante = 7 cm; damit ist die Würfelkante [fast 5 cm] gegeben.)*

Die Drehungen sind der Fig. 74 entsprechend auszuführen. Es sind dann Oktaeder und Würfel für sich allein ohne das gemeinsame Stück.

a



b c Fig. 74. d e

ferner dieses gemeinsame Stück (ein Körper mit 12 Ecken, 24 Kanten und 14 Flächen : 8 gleichseitigen Dreiecken und 6 Quadraten) allein darzustellen, und endlich ist der Gesamtkörper in schiefer Parallelprojektion zu konstruieren.

§ 15. Durchdringungen ebenflächiger und krummflächiger Körper.

Die Durchdringungsfiguren sind von Kurven begrenzt, die wir in § 11 kennen gelernt haben. Um Punkte dieser Kurven zu erhalten, bedient man sich solcher Hilfsebenen, die leicht zu konstruierende Schnitte, wenn möglich Gerade oder Kreise, ergeben.

Beispiel 1. *Ein regelmäßiges, fünfseitiges Prisma, senkrecht auf P_1, durchdringt eine Kugel. Die Achse des Prismas geht durch den Kugelmittelpunkt.* (*Fig. 75.*)

Fig. 75.

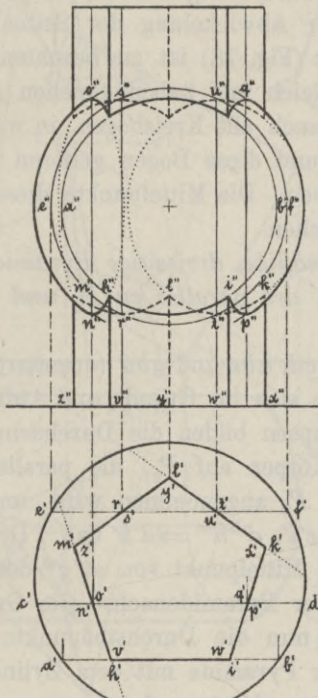
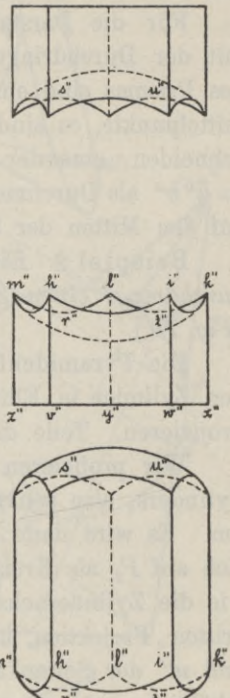


Fig. 76 u. 77.



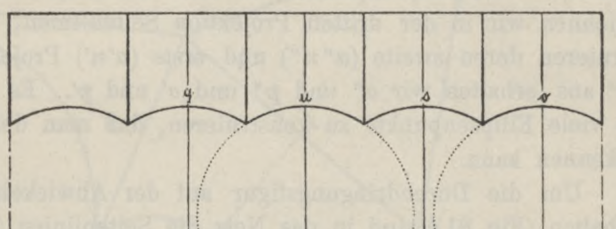


Fig. 78.

Grund- und Aufriß der Körper sind gegeben. Die erste Projektion der Durchdringungsfigur fällt mit dem Grundriß des Prismas zusammen. Um ihre zweite Projektion zu bekommen, legen wir durch Prisma und Kugel Hilfsebenen senkrecht zu P_1 und parallel zu P_2. Sie schneiden die Kugel in Kreisen und die Seitenflächen des Prismas in Geraden, die sich im Aufriß als Kreise bezw. als Gerade projizieren. Wo sich diese Kreise und Geraden begegnen, da sind die gesuchten Kurvenpunkte. Z. B. die Hilfsebene durch die Vorderfläche des Prismas ergibt im Aufriß den Kreis $a''b''$, auf dem die Durchstoßpunkte der beiden Vorderkanten des Prismas mit der Kugel liegen; durch den Schnitt ef (Grundriß $e'f'$) erhält man den Kreis $e''f''$ und auf diesem von r', s', t', u' aus die Punkte r'', s'', t'', u''. — Die zweiten Projektionen der Kugelkreise, in welchen vier (erweiterte) Prismenflächen die Kugel schneiden, sind Ellipsen, von denen zwei in unserer Figur ganz gezeichnet sind.

Fig. 76 zeigt den Aufriß des Restkörpers vom Prisma, Fig. 77 den Aufriß von dem Stücke, das beiden Körpern gemeinsam ist.

Für die Darstellung der Abwickelung der Seitenflächen des Prismas mit der Durchdringungsfigur (Fig. 78) ist zu beachten: Alle Seitenflächen des Prismas sind einander gleich und haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte, es sind daher auch alle Kreisbogen, in welchen sie die Kugel schneiden, einander gleich, und diese Bogen gehören Kreisen an die $a'b' = a''b''$ als Durchmesser haben. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen hier auf den Mitten der Seitenflächen.

Beispiel 2. *Eine regelmäßige, dreiseitige Pyramide, senkrecht auf P_1, durchdringt einen Zylinder, der parallel zu P_2 und geneigt zu P_1 liegt. (Fig. 79.)*

Die Pyramidenflächen acd, abc und abd (erweitert gedacht) schneiden den Zylinder in Ellipsen, die sich im Grund- und Aufriß auch als Ellipsen projizieren. Teile dieser Ellipsen bilden die Durchdringungsfigur.

Wir projizieren beide Körper auf P_3, die parallel der Endfläche des Zylinders, also senkrecht zu P_2 angenommen wird, und legen diese in P_2 um. Es wird dann $c'''i''' = c'i'$, $d'''h''' = d'h'$ usw. Der Zylinder projiziert sich auf P_3 als Kreis, dessen Mittelpunkt von $a'''g'''$ denselben Abstand hat, wie die Zylinderachse von der Pyramidenachse (im Grundriß). — In der dritten Projektion hat man nun die Durchstoßpunkte s''', q''', r''', t''', v''' und u''' der Seitenkanten der Pyramide mit dem Zylinder; von diesen aus erhält man s'', q'', r'', t'', v'' und u'', und letztere ergeben s', q', r', t', v' und u'. — Um Ellipsenpunkte auf den Seitenflächen der Pyramide zu finden, zeichnen wir in der dritten Projektion Seitenlinien, z. B. $a'''n'''$, und konstruieren deren zweite ($a''n''$) und erste ($a'n'$) Projektionen. Von o''' und p''' aus erhalten wir o'' und p'' und o' und p'. Es sind in dieser Weise so viele Ellipsenpunkte zu konstruieren, daß man den Verlauf der Kurven erkennen kann.

Um die Durchdringungsfigur auf der Abwickelung der Pyramide zu erhalten (Fig. 81), sind in das Netz die Seitenlinien (wie an, wo $bn = b'n'$ ist) einzuzeichnen und auf diesen wie auf den Pyramidenkanten die Punkte zu bestimmen. Im Aufriß müssen zuvor die wahren Längen dieser Linien und Kanten hergestellt werden, dann ist z. B. $ar = a''(r'')$, $aq = a''(q'')$ und $ap = a''(p'')$.

Fig. 80 zeigt das beiden Körpern gemeinsame Stück im Aufriß.

Aufgaben.

Blatt 1. *a) Ein regelmäßiges, fünfseitiges Prisma, parallel zu P_2 und schief zu P_1, durchdringt eine Kugel; die Prismenachse geht durch den Kugelmittelpunkt. (Fig. 82, a.)*

Fig. 79.

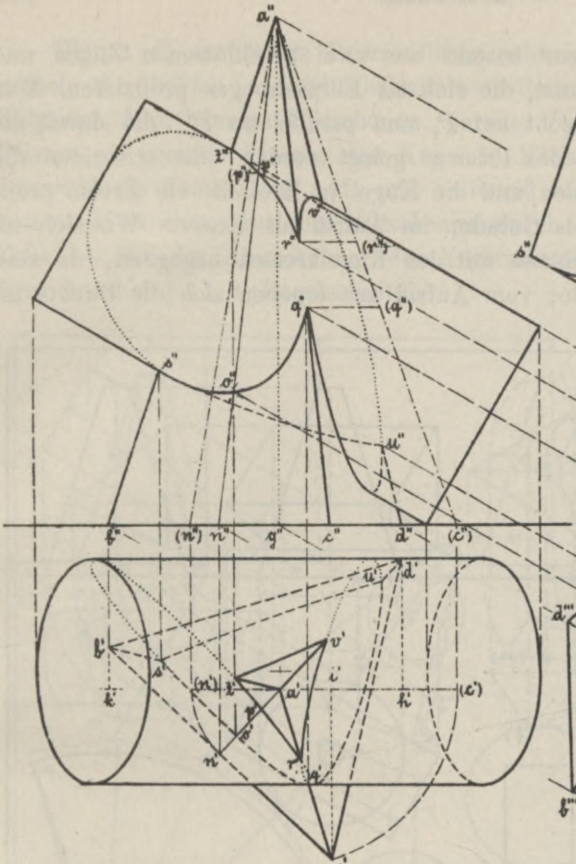
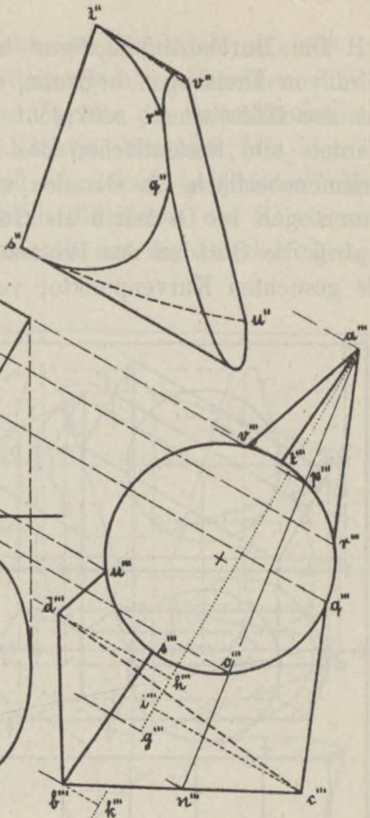


Fig. 80.



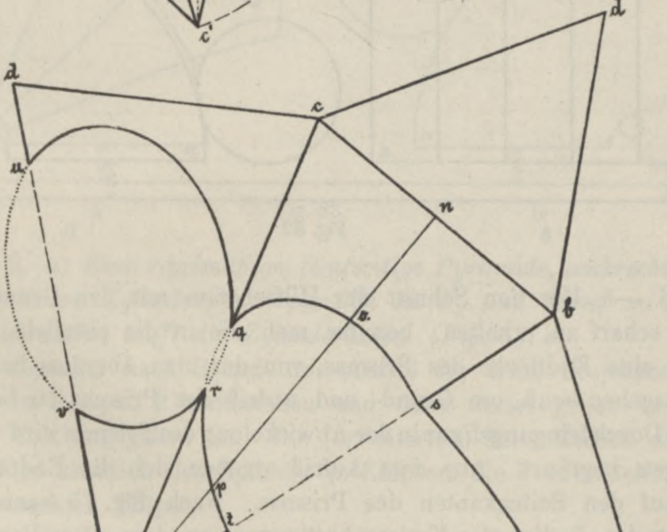
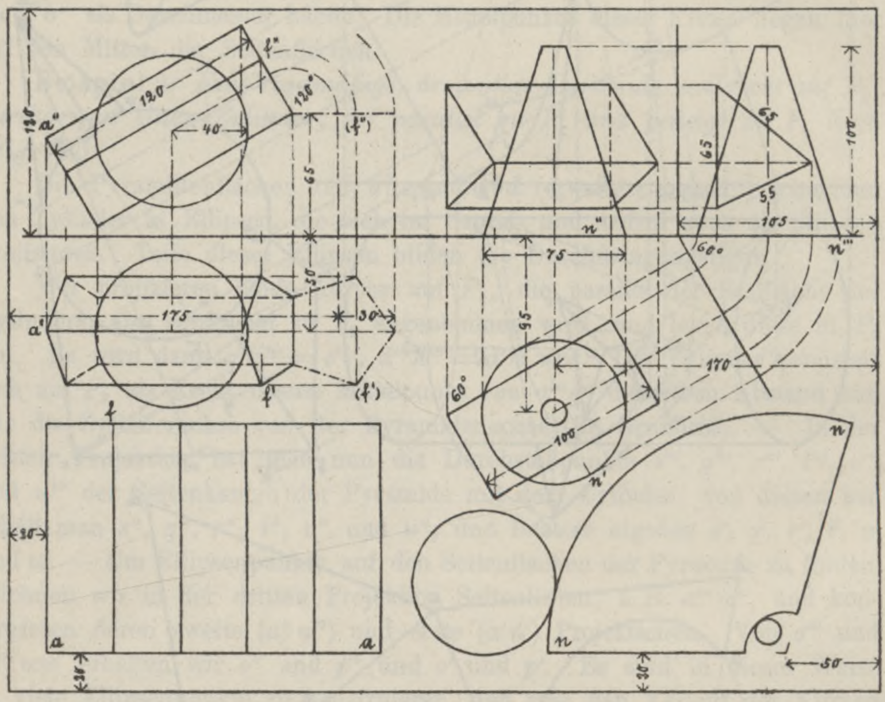


Fig. 81.

Die Durchdringungsfigur besteht aus zwei geschlossenen Zügen und wird von Kreisbogen begrenzt, die sich als Ellipsenbogen projizieren. Man benutze Hilfsebenen, senkrecht auf P_1 und parallel zu P_2, die durch die Kanten und Seitenflächen des Prismas gelegt werden. Sie schneiden die Prismenoberfläche in Geraden und die Kugel in Kreisen; die Kreise projizieren sich im Grundriß als Gerade, im Aufriß als Kreise. Wo sich im Aufriß die Geraden des Prismas mit den Kugelkreisen begegnen, da sind die gesuchten Kurvenpunkte; vom Aufriß aus ergeben sich die Punkte im



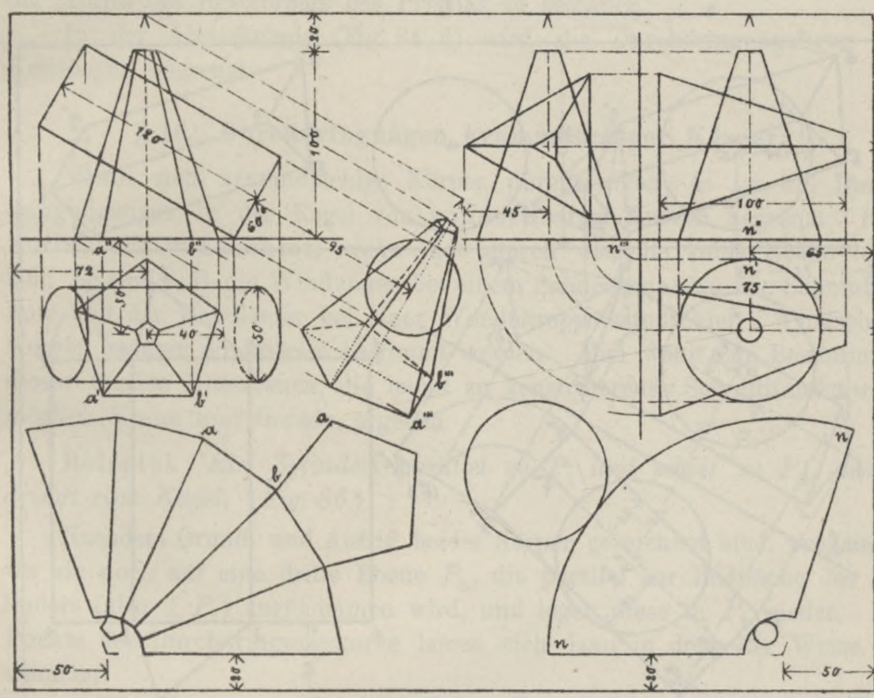
a Fig. 82. b

Grundriß. — Um den Schnitt der Hilfsebenen mit den Grundkanten des Prismas scharf zu erhalten, benutze man die in die parallele Lage zu P_1 gedrehte eine Endfläche des Prismas, von der man überdies bei der Zeichnung ausgehen muß, um Grund- und Aufriß des Prismas zu bekommen.

Die Durchdringungsfigur in der Abwickelung des Prismas wird von gleichen Kreisbogen begrenzt. Aus dem Aufriß ergeben sich die Endpunkte dieser Bogen auf den Seitenkanten des Prismas. Nach Fig. 75 kann man auch unschwer den Radius des Kreises bestimmen, zu dem diese Bogen gehören.

b) Ein gerader Kegel, senkrecht auf P_1, wird von einem geraden, dreiseitigen Prisma durchdrungen, das parallel zu P_1 und schief zu P_2 liegt; die eine Seitenfläche des Prismas steht senkrecht auf P_1. (*Fig. 82, b.*)

Die zu P_1 senkrechte Prismenfläche schneidet den Kegel in einer Hyperbel, die beiden anderen (erweiterten) Seitenflächen schneiden ihn in Ellipsen. Man benutze Hilfsebenen, parallel P_1, die die Seitenflächen des Prismas in geraden Linien, den Kegel in Kreisen schneiden, die sich im Grundriß als Kreise, im Auf- und Seitenriß als Gerade projizieren. Man kommt auch ebensogut mit Hilfsebenen durch die Achse des Kegels zum Ziele. — Bei der Abwickelung des Kegelmantels mit der Durchdringungsfigur beachte § 11, 3 (Kegelschnitte)!



a Fig. 83. b

Blatt 2. *a) Eine regelmäßige, fünfseitige Pyramide, senkrecht auf P_1, durchdringt einen Zylinder, der parallel zu P_2 und schief zu P_1 liegt. Die Pyramidenachse trifft die Zylinderachse. (Fig. 83, a.)*

Es ist zunächst nach Grund- und Aufriß die dritte Projektion beider Körper wie in Beispiel 2 herzustellen und dann weiter genau so zu verfahren, wie dort angegeben ist. Die (erweiterten) Seitenflächen der Pyramide schneiden sämtlich den Zylinder in Ellipsen, die Vorderfläche in einer sehr langgestreckten Ellipse.

Das Netz der Pyramide mit der Durchdringungsfigur ist nach Beispiel 2 zu konstruieren.

*b) **Eine regelmäßige, dreiseitige Pyramide, deren Achse parallel P_1 und P_2 ist, durchdringt einen auf P_1 stehenden geraden Kegel. (Fig. 83, b.)***

Da die eine Seitenfläche der Pyramide senkrecht auf P_1 steht, so schneidet sie den Kegel in einer Hyperbel, die nach § 11, 3, b zu konstruieren ist. Die beiden anderen Seitenflächen, die erweitert zu denken sind, schneiden Ellipsen aus. — Man benutze Hilfsebenen, parallel P_1. Sie schneiden den Kegel in Kreisen, die sich auf P_1 als Kreise projizieren, und die Pyramide in Dreiecken, deren erste Projektionen man von ihren dritten aus finden kann. Im Grundriß sind die Schnitte der Kreise mit den Dreiecksseiten Punkte der Durchdringungskurve; von diesen aus sind die Kurven-

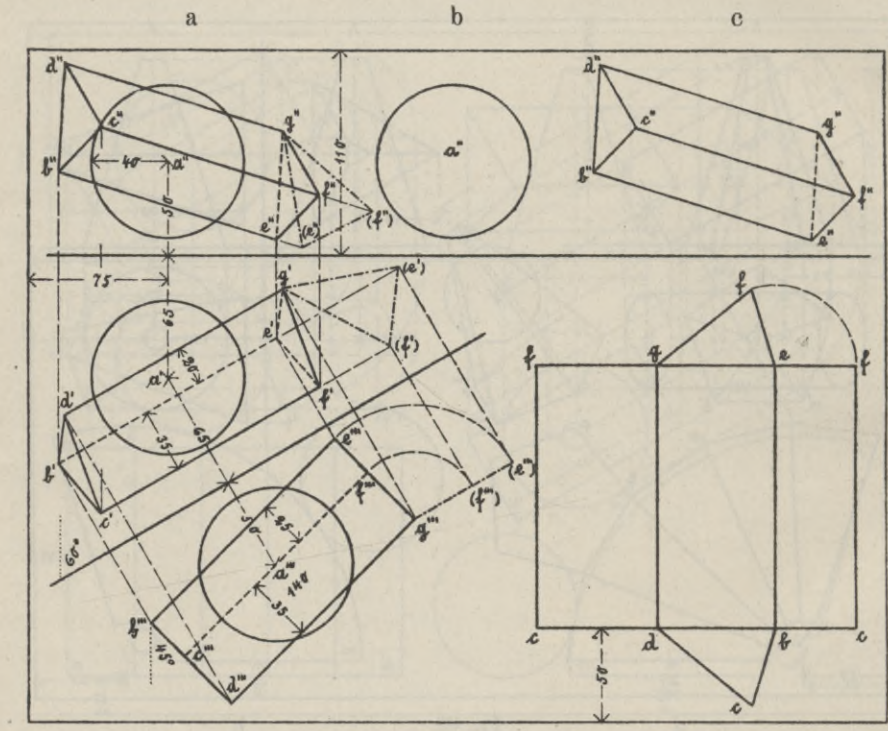


Fig. 84.

punkte im Auf- und Seitenriß zu bestimmen. — Man kann auch Hilfsebenen durch die Achse des Kegels verwenden; sie schneiden den Kegelmantel und die Seitenflächen der Pyramide in geraden Linien. Wo sich die Linien derselben Schnitte begegnen, da hat man die gesuchten Kurvenpunkte.

In die Abwickelung des Kegelmantels sind die Seitenlinien, auf welchen die Kurvenpunkte liegen, einzuzeichnen und auf diesen die wahren Entfernungen der Punkte von der Kegelspitze zu bestimmen.

Blatt 3. *Ein dreiseitiges, gerades Prisma, das geneigt zu P_1 und P_2 liegt, durchdringt eine Kugel. (Fig. 84.)*

Man lege P_3 senkrecht zu P_1, parallel den Seitenkanten des Prismas und projiziere auf diese den Gesamtkörper mit Schnitten parallel P_3. Die

Kugelschnitte projizieren sich auf P_3 als Kreise, deren Radius man im Grundriß hat. Dieselben Schnitte erzeugen auf den Prismenflächen Gerade, deren dritte und zweite Projektionen man mit Hilfe der in P_1 und P_2 niedergelegten einen Endfläche des Prismas scharf und leicht findet. $g''(e'') = g'(e')$, $g''(f'') = g'(f')$. Von der dritten Projektion ausgehend, wo Kreise und Gerade sich schneiden, findet man die Kurvenpunkte im Grundriß und von hier aus die im Aufriß.

In Fig. 84, b ist der Aufriß des Restkörpers der Kugel, in Fig. 84, c der Aufriß des Restkörpers des Prismas zu zeichnen.

In der Abwickelung (Fig. 84, d) wird die Durchdringungsfigur von Kreisbogen begrenzt.

§ 16. Durchdringungen krummflächiger Körper.

Wenn sich krummflächige Körper durchdringen, so ist die Durchdringungsfigur in der Regel von windschiefen Kurven begrenzt. Eine Kurve heißt windschief, wenn sich durch dieselbe keine Ebene legen läßt. So sind z. B. die Windungen bei einem Schneckenhause, die Schraubenlinie und der Handläufer bei einer Wendeltreppe windschief. Windschiefe Kurven müssen punktweise bestimmt werden. Man wählt zur Bestimmung dieser Punkte Hilfsebenen, die leicht zu konstruierende Schnittlinien, wenn möglich Kreise und Gerade, ergeben.

Beispiel. *Ein Zylinder, parallel zu P_1 und schief zu P_2, durchdringt eine Kugel. (Fig. 85.)*

Nachdem Grund- und Aufriß beider Körper gezeichnet sind, projizieren wir sie noch auf eine dritte Ebene P_3, die parallel zur Endfläche des Zylinders (also $\perp P_1$) angenommen wird, und legen diese in P_1 nieder. Die Punkte der Durchdringungskurve lassen sich dann in doppelter Weise bestimmen:

a) Man lege durch die Kugel Ebenen parallel P_3 (also $\perp P_1$). Es sei z. B. $c'd'$ die erste Projektion einer solchen Ebene. Sie schneidet die Kugel in einem Kreise, der sich auf P_3 als Kreis mit dem Radius $a'''d'''$ projiziert. Dieser Kreis begegnet der dritten Projektion des Kreises, in welchem die Hilfsebene den Zylinder schneidet, in r''' und q'''. Von diesen Punkten aus findet man r' und q', und diese ergeben dann $r''q''$.

b) Man benutze Hilfsebenen parallel P_1. Sie schneiden den Zylinder in parallelen Seitenlinien und die Kugel in Kreisen, die sich auf P_2 und P_3 als Gerade und auf P_1 als Kreise projizieren. Es sei z. B. $g'''h'''$ die dritte und der Kreis mit dem Radius $a'g'$ die zweite Projektion des Kugelschnittes einer solchen Hilfsebene. Man erhält zunächst die dritten Projektionen der Kurvenpunkte s, t, u, v (s''', t''', u''', v'''), und diese bestimmen die Schnittlinien auf dem Zylindermantel, durch welche man dann s', t', u', v' erhält; von letzteren ergeben sich s'', t'', u'', v''. — Es ist in Rücksicht auf

Fig. 85.

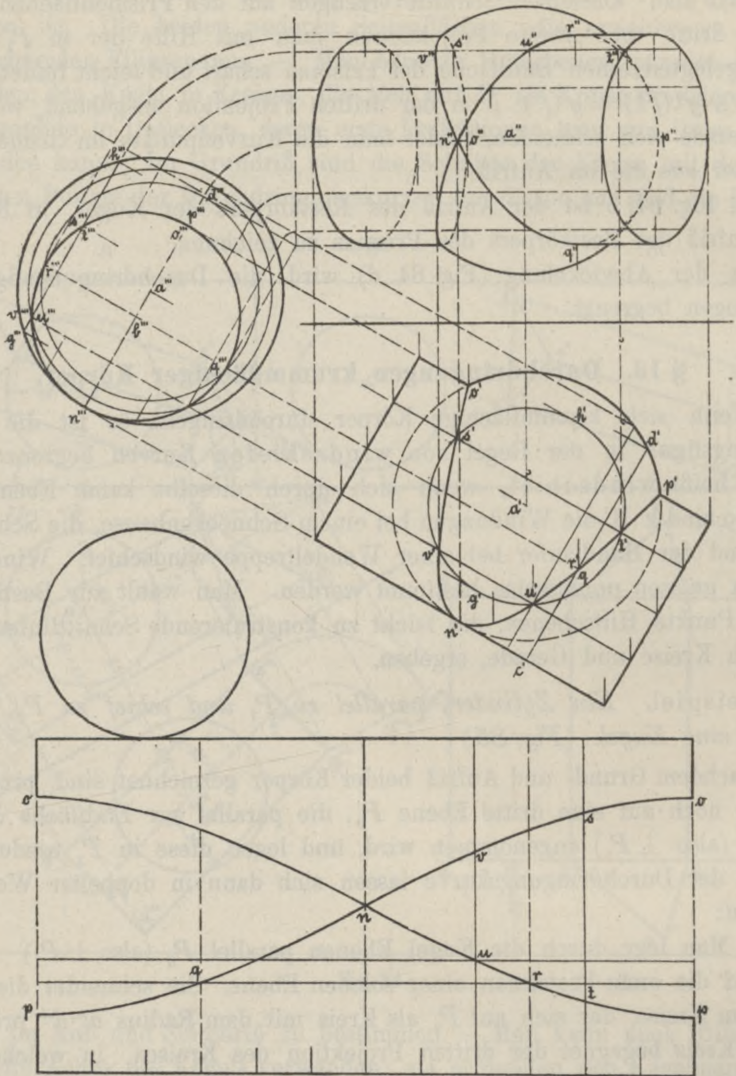
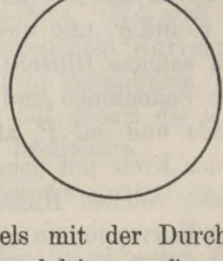


Fig. 86.



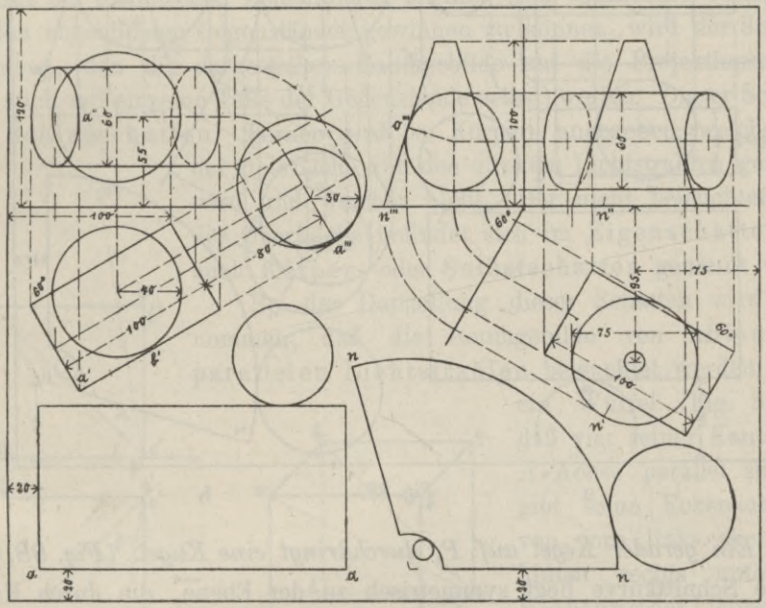
die Abwickelung hier sowohl wie bei a) zweckmäßig, so viele Hilfsebenen zu nehmen und sie so zu legen, daß auf dem Zylindermantel 12 Seitenlinien in gleichen Abständen voneinander sich ergeben.

Für die Abwickelung des Zylindermantels mit der Durchdringungsfigur bemerke man: die Kurvenpunkte der Durchdringungsfigur liegen auf den Seitenlinien des Zylinders; den Abstand dieser Linien untereinander hat man in der dritten, den Abstand der Kurvenpunkte auf diesen Linien von den Endflächen des Zylinders in der ersten Projektion des Körpers.

Aufgaben.

Blatt 1. *a) Ein gerader Zylinder, parallel P_1 und schief zu P_2, durchdringt eine Kugel. (Fig. 87, a.)*

Man verfahre nach dem gegebenen Beispiele. Die Durchdringungskurve hat aber hier sowohl im Aufriß wie auch in der Abwickelung eine wesentlich andere Gestalt. — (Der Grundriß der Kugel sei bei b' etwa 1 mm von dem Grundriß der vorderen Seitenlinie des Zylinders entfernt.)



a Fig. 87. b

b) Ein gerader Zylinder, parallel P_1 und schief zu P_2, durchdringt einen geraden, auf P_1 stehenden Kegel. (Fig. 87, b.)

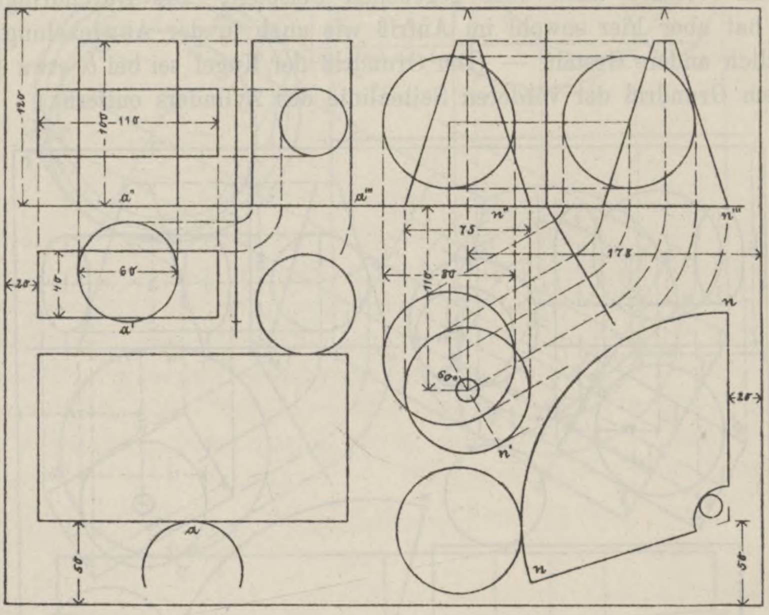
Teile im Grundriß den Grundkreis des Kegels in 12 gleiche Teile und lege durch diese Teilpunkte und die Kegelachse Ebenen. Diese Ebenen schneiden den Kegelmantel in Geraden. Den Schnitt dieser Geraden mit dem Zylindermantel und die Punkte der Durchschnittskurve hat man in der dritten Projektion; von hier aus sind die Punkte im Auf- und Grundriß zu ermitteln.

In die Abwickelung des Kegelmantels sind sämtliche Seitenlinien des Kegels einzuzeichnen und auf diesen die wahren Entfernungen der Punkte der Durchdringungskurve von der Spitze des Kegels zu bestimmen.

Blatt 2. *a) Ein gerader Zylinder auf P_1 wird von einem zweiten geraden Zylinder, der parallel zu P_1 und P_2 liegt, durchdrungen. (Fig. 88, a.)*

Man teile den Kreis in der dritten Projektion in 12 gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Ebenen, parallel zu P_2; sie schneiden den Mantel beider Zylinder in Geraden, die sich in den Punkten der Durchdringungskurve begegnen.

In die Abwickelung sind die Mantellinien, auf welchen die Kurvenpunkte liegen, einzuzeichnen.



a Fig. 88. b

b) Ein gerader Kegel auf P_1 *durchdringt eine Kugel.* (*Fig. 88, b.*)

Die Schnittkurve liegt symmetrisch zu der Ebene, die durch Kegelachse und Kugelmittelpunkt geht. Auf der Mantellinie, die diese Ebene (die Symmetrie-Ebene) auf dem Kegel ausschneidet, liegen der höchste und tiefste Punkt der Kurve. P_3 ist parallel der Symmetrie-Ebene anzunehmen und in P_2 umzulegen. — Man benutze Hilfsebenen, parallel P_1; sie schneiden aus beiden Körpern Kreise aus, die sich in P_1 als Kreise, in P_2 und P_3 als Gerade projizieren. Die Punkte, welche auf dem zweiten Umriß des Kegels und auf dem ersten Umriß der Kugel liegen, findet man am sichersten mit Hilfe der Ebenen, welche diese Umrisse ausschneiden.

Die Abwickelung des Kegels erfolgt in jetzt bekannter Weise.

III. Abschnitt.

Elemente der Schattenkonstruktion.

§ 17. Einleitung.

Um bei technischen Zeichnungen leichter eine deutlichere Vorstellung von den abgebildeten Gegenständen gewinnen zu können, wird der Schatten angegeben, den die dargestellten Raumgebilde auf die Projektionsebenen (oder auch auf einzelne Teile der Gegenstände selbst) werfen. Dieser Schatten heißt Schlagschatten. Ferner wird bei Körpern angegeben, welcher Teil der Oberfläche von den direkten Lichtstrahlen getroffen wird und welcher nicht. Der nicht beleuchtete Teil der Oberfläche befindet sich im Eigenschatten, der auch Körper- oder Selbstschatten genannt wird.

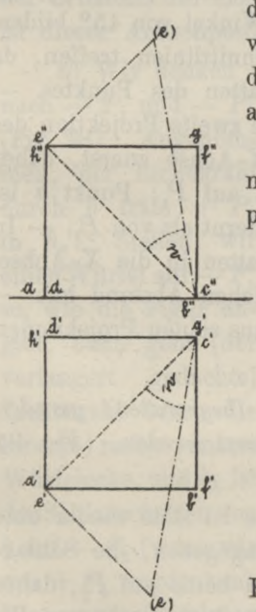


Fig. 90.

Bei der Darstellung dieser Schatten wird angenommen, daß die Raumgebilde von unter sich parallelen Lichtstrahlen beleuchtet werden. Steht ein Würfel (Fig. 89) so, daß vier seiner Kanten der X-Achse parallel sind, so gibt seine Eckenachse ec von vorn links oben nach hinten rechts unten die Richtung der Lichtstrahlen an, die man (aus praktischen Gründen) fast stets wählt. Es bilden dann nämlich die Projektionen der Lichtstrahlen mit der Projektionsachse Winkel von 45°, die sich mit Hilfe des Dreiecks leicht zeichnen lassen. (In Fig. 90 ist $e'c'$ die erste und $e''c''$ die zweite Projektion des durch die Würfelecken e und c gehenden Lichtstrahles; sie treffen die X-Achse unterm Winkel von 45°.) Die Aufgaben der Schattenkonstruktion sind mithin in der Regel Aufgaben der schiefen Parallelprojektion.

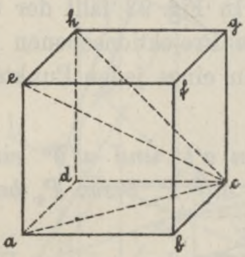


Fig. 89.

Den Winkel w, den der Lichtstrahl ec mit den Projektionsebenen bildet, findet man durch Niederlegen des Dreiecks ace in P_1 oder des Dreiecks che in P_2.

Anmerkung. Ist die Kante des Würfels $a'(e) = 1$, so ist $a'c' = \sqrt{2}$, mithin $tang\, w = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, woraus $w = 35^\circ 16'$. — Da $1 : \sqrt{2}$ annähernd $5 : 7$ ist, so erhält man den Winkel w mit hinreichender Genauigkeit im rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten 5 und 7 gleiche Längeneinheiten haben.

§ 18. Schlagschatten von Punkten, Linien und Flächen.

1. Die Projektionen eines Raumpunktes a seien a' und a". Es ist aus diesen Projektionen der Schlagschatten von a auf P_1 (der Horizontalschatten a_h) oder auf P_2 (der Vertikalschatten a_v) zu bestimmen. (Fig. 91 bis 93.)

Der Schlagschatten eines Punktes liegt da, wo der Lichtstrahl durch diesen Punkt die erste oder zweite Projektionsebene trifft. Denken wir uns durch den Lichtstrahl Ebenen senkrecht zu P_1 und P_2 gelegt, so fallen die Projektionen des Lichtstrahles in die Schnittlinien dieser Ebenen mit P_1 und P_2, die mit der X-Achse Winkel von 45° bilden. Wo sich beide Schnittlinien treffen, da ist der Schlagschatten des Punktes. — In Fig. 91 trifft die zweite Projektion des Lichtstrahls die X-Achse zuerst, daher liegt der Schatten auf P_1; Punkt a ist weiter von P_2 entfernt als von P_1. — In Fig. 92 ist es umgekehrt. — In Fig. 93 fällt der Schatten in die X-Achse, weil hier Punkt a von beiden Projektionsebenen gleichen Abstand hat. — Hiernach ist der Schlagschatten eines jeden Punktes aus seinen Projektionen leicht zu konstruieren.

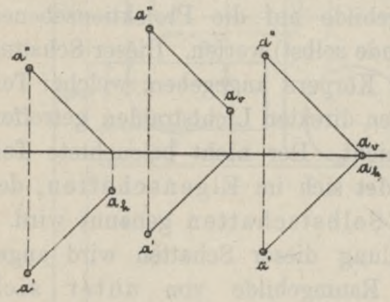


Fig. 91. Fig. 92. Fig. 93.

2. Aus den Projektionen a'b' und a"b" einer (begrenzten) geraden Linie soll ihr Schlagschatten auf P_1 bezw. P_2 bestimmt werden. (Fig. 94 bis 98.)

Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene ist stets wieder eine Gerade. — Wir bestimmen zunächst, wie unter 1 angegeben, die Schlagschatten der Endpunkte der Strecke. In Fig. 94 fallen beide auf P_2, daher ist $a_v b_v$ der Schlagschatten von ab. — In Fig. 95 steht ab senkrecht auf P_1; die Projektion a' von a ist auch zugleich der Schlagschatten von a; der Schatten von b fällt in P_1, daher ist $a'b_h$ der Schlagschatten von ab. — In Fig. 96 fällt der Schatten von a auf P_2, der von b auf P_1; in diesem Falle ist der Schlagschatten von ab eine in der X-Achse gebrochene Linie. Der Brechungspunkt in der X-Achse ist auf doppelte Weise zu finden:

a) Wir bestimmen noch den Schlagschatten eines beliebigen Punktes in der Geraden ab (Fig. 96). Fällt dieser auf P_2, wie der Schatten von c, so gibt $a_v c_v$ die Richtung des Schattens auf P_2 an, fällt er hingegen auf P_1, wie der von d, so hat man in $b_h d_h$ die Richtung der Schattenlinie im Grundriß; in beiden Fällen ergibt sich derselbe Punkt der Achse. — Sollte

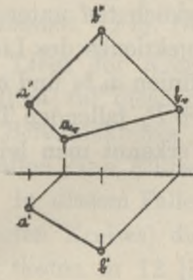


Fig. 94.

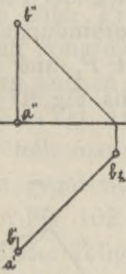


Fig. 95.

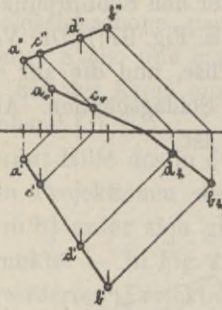


Fig. 96.

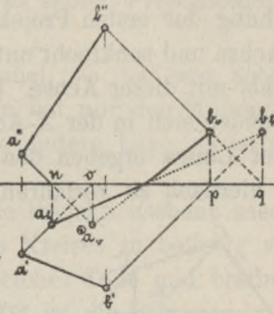


Fig. 97.

der Schatten des angenommenen Punktes genau in die X-Achse fallen, so ist dieser Achsenpunkt mit a_v und b_h zu verbinden.

b) Wir denken uns die Projektionsebenen über die X-Achse erweitert nach $-P_1$ und $-P_2$ (Fig. 98). Angenommen, der Lichtstrahl durch b träfe $+P_2$ in b_v. Stellen wir einen Würfel auf $-P_1$ so, wie die Figur angibt, dann geht (der verlängert gedachte) Lichtstrahl durch die hintere rechte untere Würfelecke, und b_h ist der Schlagschatten von b auf $-P_1$ (wenn wir uns $+P_2$ wegdenken). Die zweite Projektion des Lichtstrahls geht durch b_v, die erste nach b_h. Wird nun die erste Projektionsebene in die senkrechte Lage gedreht,

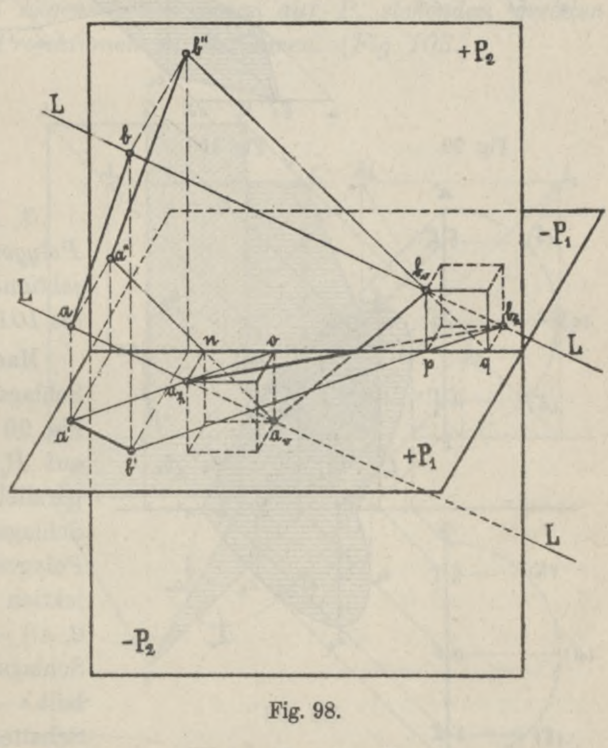


Fig. 98.

so erkennt man, daß b_v und b_h gleich hoch über der X-Achse liegen, und zwar liegt b_v senkrecht über dem Punkte p, in dem die erste Projektion des Lichtstrahls die X-Achse trifft, und b_h senkrecht über dem Punkte q, in dem die zweite Projektion des Lichtstrahls die X-Achse schneidet. (S. Fig. 97!) — Der Lichtstrahl durch a trifft $+P_1$ in a_h und $-P_2$ in a_v. Nach der Drehung der ersten Projektionsebene liegen a_h und a_v gleich tief unter der X-Achse und senkrecht unter den Schnittpunkten der Projektionen des Lichtstrahls mit dieser Achse. (S. Fig. 97!) Die Verbindungslinien $a_h b_h$ und $a_v b_v$ schneiden sich in der X-Achse, und die auf $+P_1$ und $+P_2$ fallenden Teile dieser Linien ergeben den Schlagschatten. Aus Fig. 97 erkennt man leicht, wie hiernach zu verfahren ist.

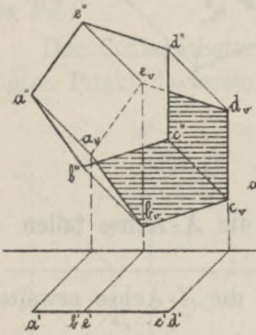


Fig. 99.

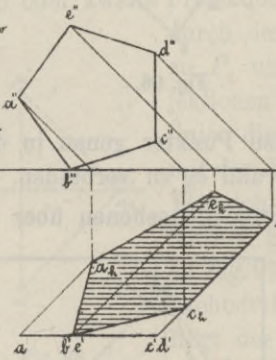


Fig. 100.

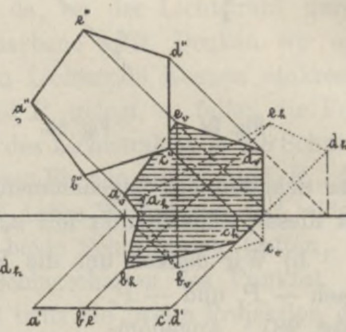


Fig. 101.

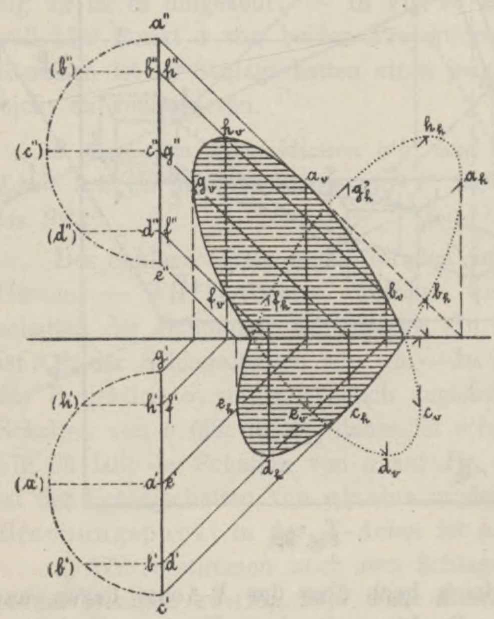


Fig. 102.

3. Der Schlagschatten eines Polygons ist aus seinen Projektionen zu bestimmen. (*Fig. 99 bis 101.*)

Man bestimmt nach 2 den Schlagschatten der Seiten. — In Fig. 99 fällt der Schatten ganz auf P_2, und da das Fünfeck parallel P_2 steht, so ist sein Schlagschatten kongruent dem Polygon und der zweiten Projektion desselben. (Vergl. § 8, 2, a!) — In Fig. 100 fällt der Schlagschatten ganz auf P_1. Weshalb? — In Fig. 101 liegt der Schatten des Fünfecks auf P_1 und P_2. Man verfahre nach 2, b. Nehmen wir P_1 weg, so entsteht das Schattenbild $a_v b_v c_v d_v e_v$ auf P_2 (vergl. Fig. 99!), nehmen wir dagegen P_2 fort, so ergibt sich der Schatten $a_h\, b_h\, c_h\, d_h\, e_h$ auf P_1. (Vergl. Fig. 100!)

4. Es ist der Schlagschatten eines Kreises aus seinen Projektionen zu bestimmen. (Fig. 102.)

Liegt der Kreis einer Projektionsebene parallel, so ist sein Schlagschatten auf diese ein kongruenter Kreis, und man hat nur den Mittelpunkt des Schattenkreises zu suchen; hat der Kreis eine andere Lage, so ist sein Schatten eine Ellipse. (Vgl. Anhang § 1, 8!)

In diesem Falle teilt man (mit Hilfe des in die Projektionsebene niedergelegten Kreises) die gegebenen Projektionen des Kreises in beliebig viele (am besten in 12 [in Fig. 102 in 8] unter sich gleiche) Teile und bestimmt die Schlagschatten dieser Teilpunkte. — In Fig. 102 ist die Begrenzung des Schlagschattens auf beiden erweiterten Projektionsebenen ganz ausgeführt (2 Ellipsen); es genügt indes, nur die Begrenzung des sichtbaren Teiles des Schattens zu konstruieren.

§ 19. Schlag- und Eigenschatten der Körper.

1. Der Schlag- und Eigenschatten eines auf P_1 stehenden geraden Prismas ist aus seinen Projektionen zu bestimmen. (Fig. 103.)

Man konstruiere nach § 18, 3 den Schlagschatten der Begrenzungsflächen. (Es genügt die Darstellung des Schattens auf den positiven Teilen der Projektionsebenen.) — Die Seitenflächen $acfd$ und $bcfe$ des Prismas werden von den Lichtstrahlen nicht getroffen, sie befinden sich deshalb im Eigenschatten. Von diesen beiden Flächen ist die letztere im Aufriß sichtbar.

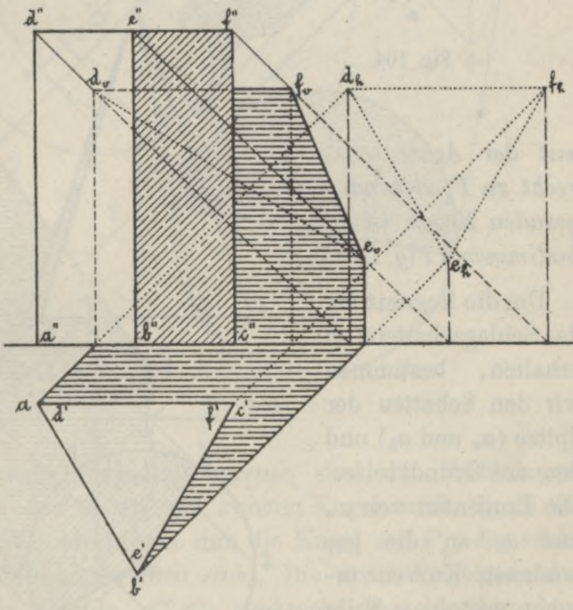
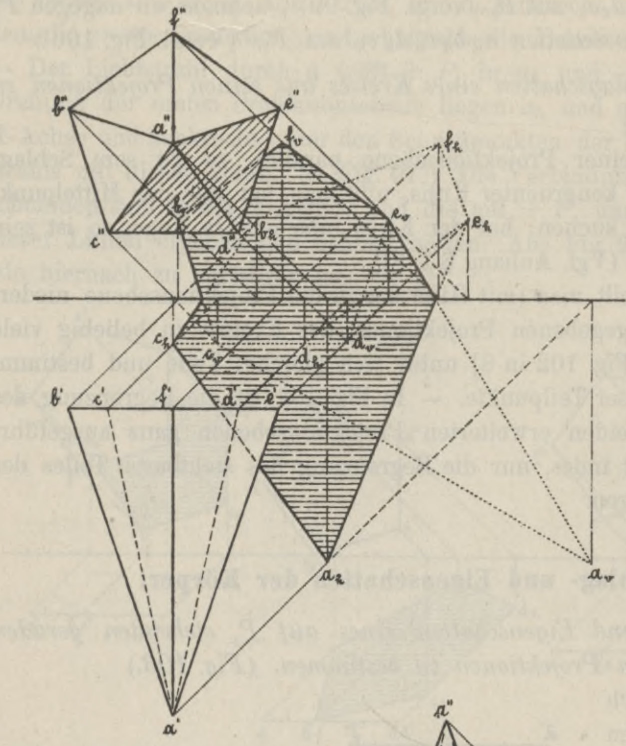


Fig. 103.

2. Man sucht den Schlag- u. Eigenschatten einer geraden, mit ihrer Achse senkrecht zu P_2 stehenden Pyramide zu bestimmen. Gegeben sind wieder die erste und zweite Projektion. (Fig. 104.)



Wir bestimmen zuerst den Schlagschatten der Spitze (a_h) und den der Grundfläche; dadurch ist auch der Schatten der Seitenkanten gefunden, von denen indes nur die beiden äußeren nachzuziehen sind.

Aus dem Aufriß erkennt man, daß die beiden Seitendreiecke acd und ade, von denen aber keins im Grundriß sichtbar ist, sich im Eigenschatten befinden.

Fig. 104.

3. Der Schlag- und Eigenschatten eines mit der Achse senkrecht zu P_1 stehenden geraden Kegels ist zu bestimmen. (*Fig. 105.*)

Um die Begrenzung des Schlagschattens zu erhalten, bestimmen wir den Schatten der Spitze (a_v und a_h) und den des Grundkreises. Die Tangenten von a_v und a_h an die gefundenen Kurven ergeben mit einem Teile dieser Kurven die verlangte Umgrenzung des Schattens.

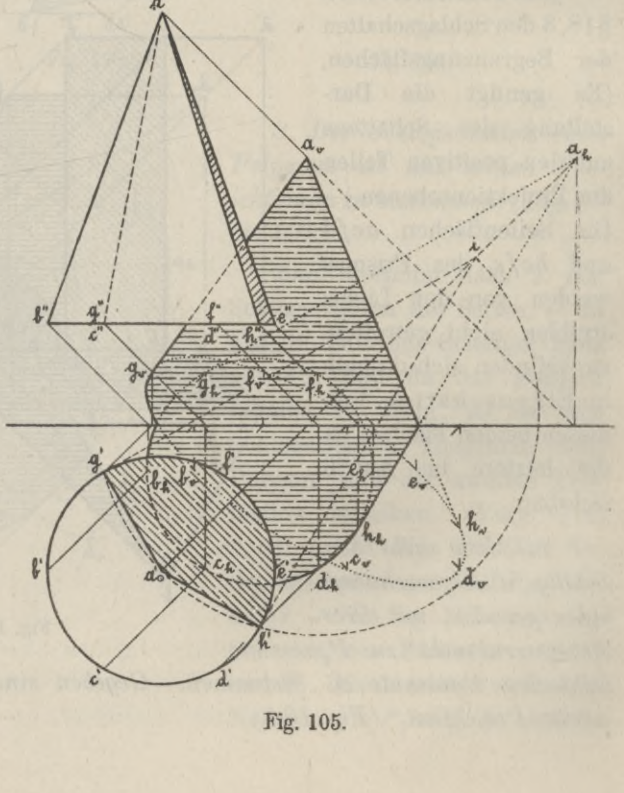


Fig. 105.

Die Tangenten $a_h g_h$ und $a_h h_h$ sind die horizontalen Schatten der Seitenlinien ag und ah des Kegels, welche die Begrenzung des Eigenschattens ergeben. Um die Punkte g' und h' im Grundkreise zu erhalten, zieht man durch g_h und h_h Parallele zu den Lichtstrahlen, bis sie den Grundkreis treffen. Schärfer ergeben sich die Punkte g_1 und h_1, wenn man an den Grundkreis Tangenten konstruiert, die $a_h g_h$ bezw. $a_h h_h$ parallel sind. Der Endpunkt dieser Tangenten ist i. Die Punkte a', g', h', i liegen auf der Peripherie eines Kreises.

4. Der Schlag- und Eigenschatten einer Kugel ist zu bestimmen. (*Fig. 106.*) Die Eigenschattengrenze der Kugel ist der zur Richtung der Lichtstrahlen senkrecht stehende größte Kugelkreis. Die erste und zweite Projektion dieses Kreises sind kongruente Ellipsen; seine Schlagschatten auf P_1 und P_2, die ebenfalls kongruente Ellipsen sind, ergeben die Begrenzung des Kugelschlagschattens. —

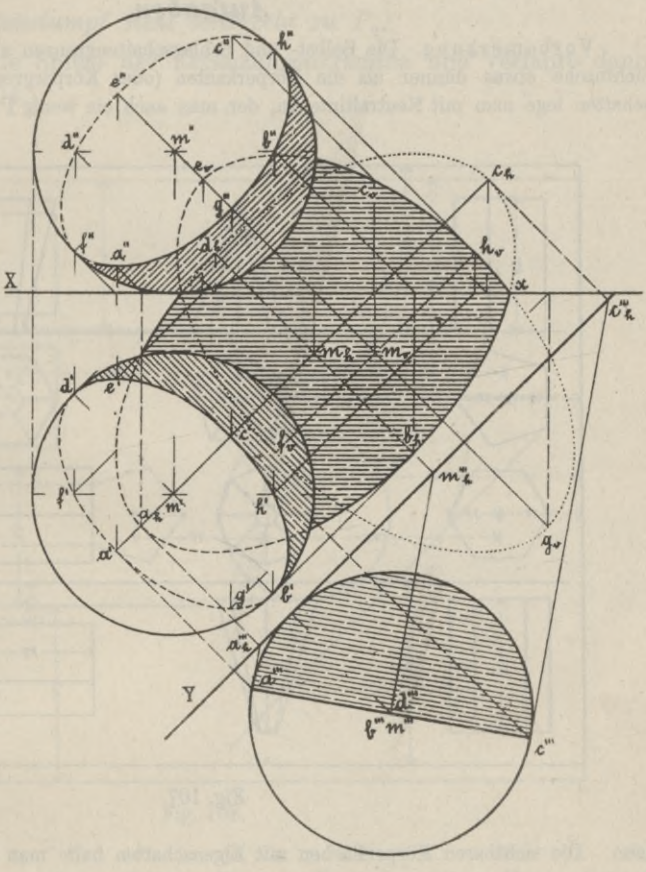


Fig. 106.

Die Punkte b', d', f'', h'' der Eigenschattengrenze sind die Berührungspunkte der Lichtstrahlen an den ersten und zweiten Kugelumriß; durch sie erhält man b'', d'', f', h'. Wir projizieren nun die Kugel auf P_3, die senkrecht zu P_1 und parallel den Lichtstrahlen steht. Die dritte Projektion der Eigenschattengrenze ist die Gerade $a''' c'''$, senkrecht zur Lichtstrahlenrichtung $m''' m'''_h$. Die Lichtstrahlenrichtung ergibt sich, wenn man den Horizontalschatten m_h des Kugelmittelpunktes ermittelt und diesen auf die Y-Achse nach m'''_h projiziert (oder man konstruiert sie nach § 17). Von

a''' und c''' aus erhält man a' und c', und a'' bezw. c'' liegen so hoch über der X-Achse, wie a''' bezw. c''' über der Y-Achse. Es ist ferner $e''g'' = a'c'$, $c''g'' = c'g' = a''e'' = a'e'$. Zur Konstruktion der Schlagschattenellipsen. bestimme man in bekannter Weise die Schlagschatten der gefundenen Punkte der Eigenschattengrenze. (Wendet man die Papierstreifenkonstruktion an, so genügen schon die Endpunkte der Achsen: $a_h c_h$, $b_h d_h$ und $e_v g_v$, $f_v h_v$.)

Aufgaben.

Vorbemerkung. Die Selbst- und Schlagschattengrenzen ziehe man mit blauer Ausziehtusche etwas dünner als die Körperkanten (oder Körpergrenzen) nach. Den Schlagschatten lege man mit Neutraltinte an, der man auch ein wenig Preußisch-Blau hinzufügen

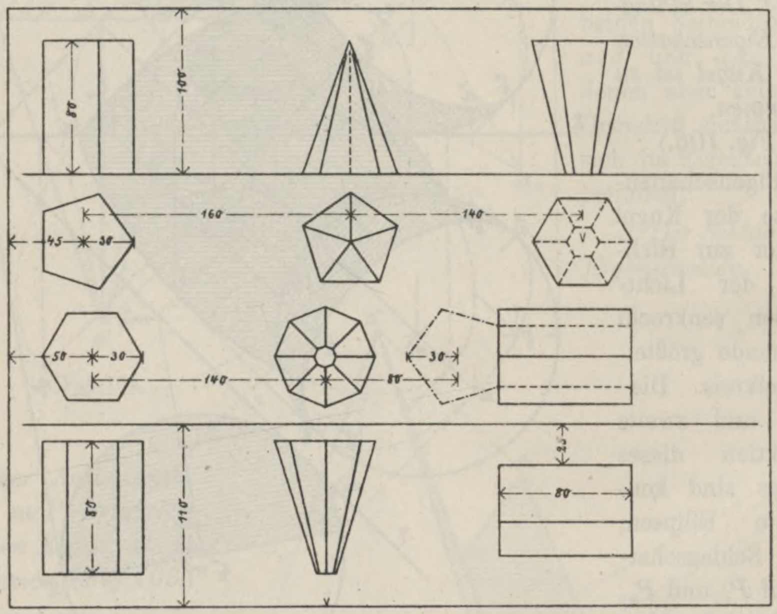


Fig. 107.

kann. Die sichtbaren Körperflächen mit Eigenschatten halte man heller in der Farbe. Ein Gemisch von Neutraltinte und gebrannter Terra di Siena gibt einen geeigneten Farbenton. Die beleuchteten Flächen lasse man weiß.

Blatt 1. *Der Schlag- und Eigenschatten ebenflächiger Körper ist zu konstruieren. (Fig. 107.)*

1. Ein fünfseitiges, gerades Prisma steht auf P_1.

Man verfahre nach § 19, 1. (Fig. 103.)

2. Eine fünfseitige, gerade Pyramide steht auf P_1.

Man bestimme zuerst den Schlagschatten der Spitze auf P_2 und — P_1. Aus dem Grundriß ersieht man leicht, welche Seitenflächen im Eigenschatten liegen.

3. Ein Pyramidenstumpf steht auf P_1.

Es ist der Schlagschatten der oberen Endfläche und zweier Seitenkanten zu bestimmen. — Eine der im Aufriß sichtbaren Seitenflächen hat Eigenschatten.

4. Ein sechsseitiges, gerades Prisma steht senkrecht zu P_2.

Man verfahre nach § 19,1. (Fig. 103.)

5. Ein Pyramidenstumpf steht senkrecht zu P_2.

Man bestimme die Spitze der Ergänzungspyramide und verfahre dann nach § 19, 2. (Fig. 104.)

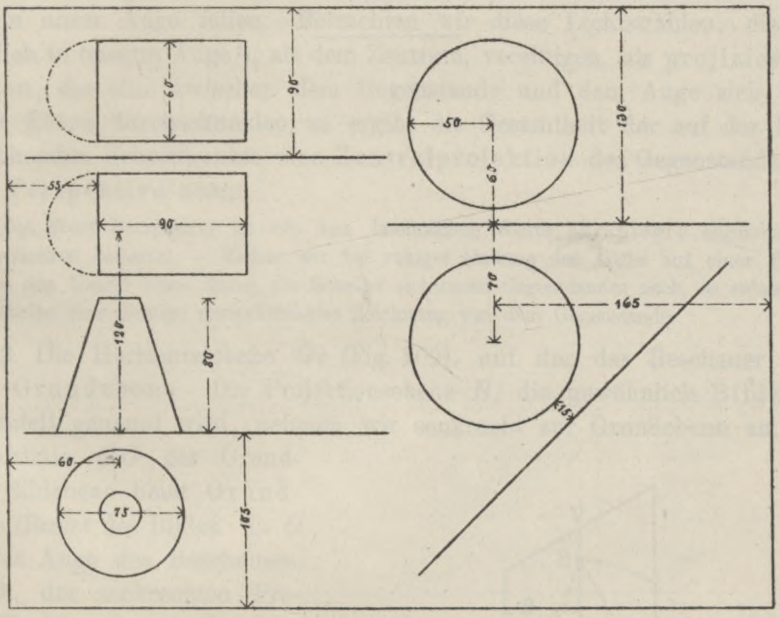


Fig. 108.

6. Ein fünfseitiges, gerades Prisma liegt parallel zu P_1 und P_2.

Um Grund- und Aufriß dieses Körpers zu erhalten, ist eine Endfläche desselben in P_2 niederzuklappen. — Von den sichtbaren Seitenflächen hat keine Eigenschatten.

Blatt 2. *Der Schlag- und Eigenschatten krummflächiger Körper ist zu bestimmen. (Fig. 108.)*

1. Ein gerader Zylinder liegt parallel zu P_1 und P_2.

Der Schlagschatten der Endkreise ist nach § 18, 4 (Fig. 102) zu konstruieren; die Tangenten an die gefundenen Kurven sind die Schlagschatten der Seitenlinien. — Die Eigenschattenbegrenzung wird durch die Lichtstrahlen. gefunden, die den niedergelegten Endkreis berühren.

2. Ein gerader Kegelstumpf steht auf P_1.

Der Schatten des Grundkreises fällt mit seiner ersten Projektion zusammen. Um die Begrenzung des Schlag- und Eigenschattens zu finden, verfahre man wie in § 19, 3. (Fig. 105.)

3. Schatten der Kugel.

Man verfahre nach § 19, 4. — Zu beachten ist, daß hier die Kugel über P_1 liegt.

IV. Abschnitt.

Elemente der Perspektive.

§ 20. Erklärungen.

1. Ein Gegenstand ist uns dann sichtbar, wenn Lichtstrahlen von ihm aus in unser Auge fallen. Betrachten wir diese Lichtstrahlen, die sich sämtlich in unserm Auge[1]), als dem Zentrum, vereinigen, als projizierende Linien, die eine zwischen dem Gegenstande und dem Auge sich befindende Ebene durchschneiden, so ergibt die Gesamtheit der auf der Ebene entstehenden Schnittpunkte eine Zentralprojektion des Gegenstandes, die man Perspektive nennt.

Das Wort Perspektive ist von dem lateinischen Worte perspicĕre abgeleitet, das hindurchsehen bedeutet. — Ziehen wir bei ruhiger Haltung des Auges auf einer Fensterscheibe den Umriß eines durch die Scheibe sichtbaren Gegenstandes nach, so entsteht auf der Scheibe eine richtige perspektivische Zeichnung von dem Gegenstande.

2. Die Horizontalebene *Ge* (Fig. 109), auf der der Beschauer steht, heißt Grundebene. Die Projektionsebene *B*, die gewöhnlich Bildebene (Glastafel) genannt wird, nehmen wir senkrecht zur Grundebene an. Die Schnittlinie *GG* der Grund- und Bildebene heißt Grundlinie (Basis) des Bildes. In *O* ist das Auge des Beschauers. in *O'*, der senkrechten Projektion von *O* auf *Ge*, sein Fußpunkt. Die Senkrechte von *O* auf die Bildebene *B* ist der Hauptstrahl; er gibt die Entfernung — die Distanz — des Auges von der Bildebene an. Der Fußpunkt *A* des Hauptstrahles ist der Hauptpunkt oder der Augenpunkt des Bildes. Wir legen durch den Hauptstrahl eine Horizontal- und eine Vertikalebene; erstere schneidet die Bildebene in *HH*, letztere in *VV*. Die Linie *HH*

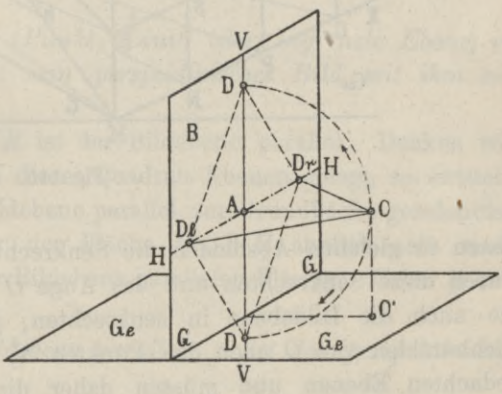


Fig. 109.

[1]) Die Perspektive setzt das Sehen mit einem Auge voraus.

heißt der Horizont, VV die Vertikallinie des Bildes; beide schneiden sich im Haupt- oder Augenpunkte. Die Punkte Dl und Dr im Horizonte, die so weit von A entfernt sind wie das Auge vom Bilde, heißen Distanzpunkte. (Denkt man sich das gleichschenklige Dreieck $Dl\,O\,Dr$ um seine Basis in die Bildebene gelegt, so fällt O in die Vertikallinie nach D oben oder unten.)

Damit keine verzerrten Bilder entstehen, nehme man die Distanz nie kleiner an, als die größte Ausdehnung des zu zeichnenden Gegenstandes im Bilde beträgt, am zweckmäßigsten $1^1/_2$ bis 2 mal so groß (bei kleinen Gegenständen noch größer). Der Augenpunkt wird am besten ungefähr in die Mitte des Bildes gelegt oder dahin, wohin die Aufmerksamkeit des Beschauers besonders gelenkt werden soll.

§ 21. Einige perspektivische Gesetze.

1. In Fig. 110 gehen von den senkrecht übereinander liegenden Punkten M und R der Bildebene zwei parallele Gerade, MX und RY, aus, zwischen

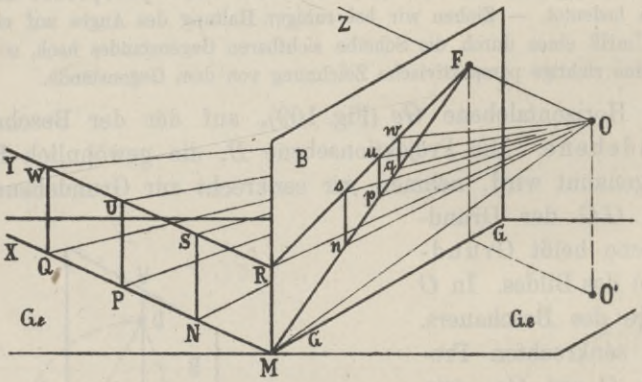


Fig. 110.

denen in gleichen Abständen die Senkrechten NS, PU, QW gezogen sind. Durch diese Senkrechten und das Auge O denken wir uns Ebenen gelegt, die auch die Bildebene in senkrechten, geraden Linien schneiden. Die Lichtstrahlen von O nach den Punkten N, S, P . . . liegen ebenfalls in den gedachten Ebenen und müssen daher die Senkrechten in der Bildebene treffen. Dadurch ergeben sich auf der Bildebene die Punkte n, s, p . . ., und mit diesen Punkten hat man die perspektivischen Bilder der gegebenen Linien.

Vergleicht man die Linien im Raume mit ihren perspektivischen Bildern auf der Ebene B, so erkennt man die Richtigkeit folgender Sätze:

I. Das perspektivische Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.

II. Das perspektivische Bild einer Senkrechten ist wieder eine Senkrechte.

III. Je weiter eine Senkrechte hinter der Bildebene liegt, um so kleiner ist ihr perspektivisches Bild.

2. Zu den Parallelen MX und RY (Fig. 110) ziehen wir durch unser Auge den Parallelstrahl OZ, der die Bildebene in F durchdringt. OW liegt diesem Parallelstrahl näher als z. B. OS und OU. Denken wir uns die Punkte X und Y auf den Parallelen weiter fortgerückt, so nähern sich ihre Lichtstrahlen nach O um so mehr der Linie OZ, je weiter sie sich von der Bildebene entfernen. Liegen X und Y unendlich weit, so müssen die Strahlen OX und OY mit OZ zusammenfallen. Mithin ist der Punkt F das Bild der unendlich fernen Punkte X und Y, und MF und RF sind die perspektivischen Bilder der unendlich langen Linien MX und RY. Die perspektivischen Bilder der parallelen Strecken MQ und RW (und aller mit diesen parallelen Geraden) sind daher nach demselben Punkte F gerichtet; dieser Punkt heißt der Fluchtpunkt oder Verschwindepunkt dieser Linien. — Es gilt das Gesetz:

IV. Der Fluchtpunkt einer jeden geraden Linie liegt da, wo ihr Parallelstrahl durchs Auge die Bildebene durchdringt. Parallele gerade Linien haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Anmerkung. Man beachte Eisenbahnschienen, eine Allee, eine lange, gerade Straße usw.

3. a) Ein Würfel (Fig. 111) stehe auf Ge so, daß seine Vorderfläche in die Bildebene fällt. Man sieht, daß das Bild der Würfelfläche $NPUS$ diese selbst ist.

V. Liegt ein Raumgebilde (Punkt, Linie oder begrenzte Ebene) in der Bildebene, so fällt sein perspektivisches Bild mit ihm zusammen.

b) Die Würfelfläche $MQWR$ ist der Bildebene parallel. Denken wir uns durchs Auge und die Seiten dieses Quadrats Ebenen gelegt, so entsteht eine Pyramide, die durch die Bildebene parallel zur Grundfläche geschnitten wird, weshalb das Bild $mqwr$ der Fläche $MQWR$ ähnlich sein muß. Entsprechendes gilt von allen der Bildebene parallelen Flächen. Daher gelten folgende Sätze:

VI. Ist eine Fläche der Bildebene parallel, so ist das perspektivische Bild ihr ähnlich.

VII. Alle der Bildebene parallelen Linien behalten im Bilde dieselbe Richtung und Gestalt.

4. Aus dem nach Fig. 110 gefundenen Satze IV ergeben sich noch einige Folgesätze, die für das perspektivische Zeichnen von besonderer Wichtigkeit sind:

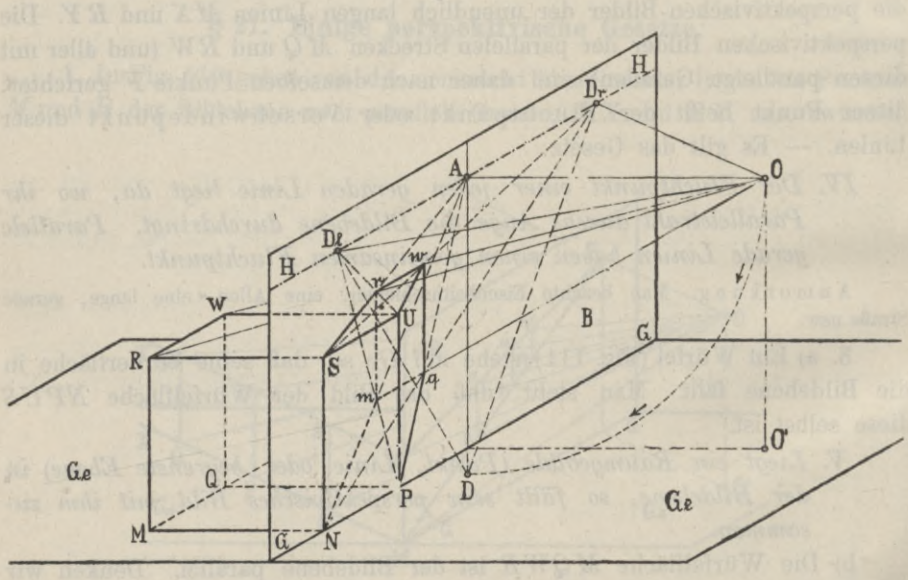
a) Es stehen (Fig. 111.) die Würfelkanten *NM, PQ, SR* und *UW* senkrecht zur Bildebene. Ihr Parallelstrahl durchs Auge ist also der Hauptstrahl *OA*, und die perspektivischen Bilder dieser Kanten: *Nm, Pq, Sr* und *Uw* müssen daher nach dem Augenpunkte *A* gerichtet sein. Darum der Satz:

VIII. Der Fluchtpunkt aller zur Bildebene senkrecht stehenden Linien ist der Hauptpunkt.

b) Die wagerecht liegenden Seitendiagonalen des Würfels: *NQ, PM, SW* und *UR* (Fig. 111) treffen die Bildebene unter einem Winkel von 45°. Die Parallelstrahlen zu ihnen durch *O* müssen daher auch den Horizont *HH* unter 45°, also diesen in den Distanzpunkten treffen.

IX. Der Fluchtpunkt aller wagerechten, die Bildebene unter 45° treffenden Geraden ist der linke oder rechte Distanzpunkt.

Fig. 111.



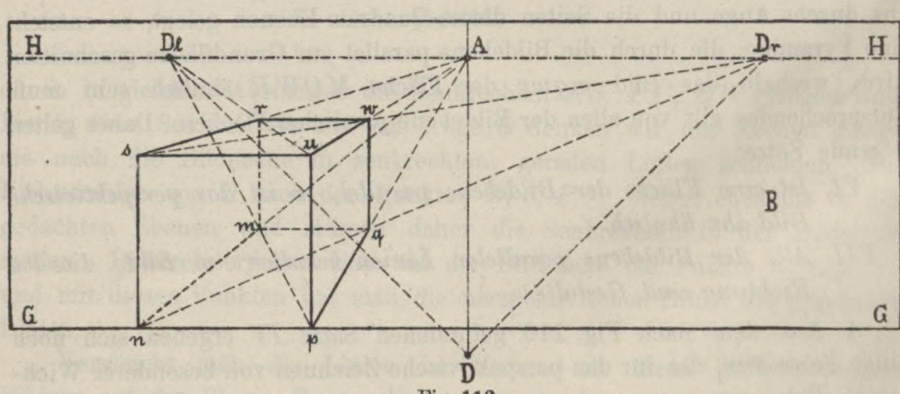


Fig. 112.

X. Alle wagerechten Linien haben ihren Fluchtpunkt im Horizonte, und zwar um so weiter vom Hauptpunkte (links oder rechts) entfernt, je kleiner ihr Winkel zur Bildebene ist.

c) Die Würfelflächen $MNSR$ und $QPUW$ (Fig. 111) sind der Vertikalebene parallel, mithin auch die Diagonalen dieser Flächen. Der Parallelstrahl durch O zu diesen Diagonalen muß also auch die Vertikallinie treffen, daher haben diese Diagonalen ihre Fluchtpunkte in der Vertikallinie.

XI. Alle zur Vertikalebene parallelen Linien haben ihren Fluchtpunkt in der Vertikallinie, und zwar um so weiter vom Hauptpunkte (nach oben oder unten) entfernt, je kleiner ihr Winkel zur Bildebene ist.

XII. Die Fluchtpunkte aller zur Bild-, Grund- und Vertikalebene zugleich geneigten Linien liegen über oder unter dem Horizonte und links oder rechts von der Vertikallinie.

Anmerkung. Denken wir uns das Dreieck $D_l O D_r$ (Fig. 111) in die Bildebene niedergelegt (O fällt nach D unter die Grundlinie) und die Bildebene mit dem Bilde des Würfels in wahrer Gestalt gezeichnet, so entsteht Fig. 112. Man ersieht leicht, wie das perspektivische Bild des Würfels in dieser Stellung nach den gefundenen Gesetzen zu konstruieren ist.

5. Es sei (Fig. 113) P ein Punkt im Raume und p sein perspektivisches Bild. Projizieren wir P rechtwinklig auf B, so ist das Bild der projizierenden

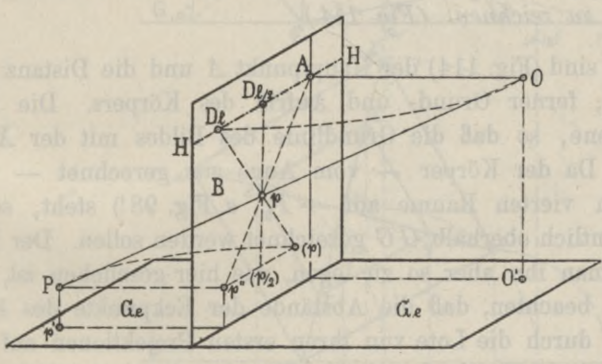


Fig. 113.

Linie Pp'' nach dem Augenpunkte A gerichtet (*VIII*), und p liegt auf (dem Fahrstrahl) Ap''. Da nun OA parallel Pp'' ist, so folgt die Proportion $OA : Pp'' = Ap : p''p$. Hieraus ergibt sich der wichtige Satz:

XIII. Das perspektivische Bild eines jeden Punktes liegt auf der Geraden, welche seine senkrechte Projektion auf die Bildebene mit dem Hauptpunkte verbindet, und das Bild teilt diese Verbindungslinie (denah Frstrahl) im Verhältnis der Distanz zum Abstande des Punktes von der Bildebene.

Zieht man durch p'' in der Bildebene die Parallele zum Horizonte HH, macht $p''(p) = p''P$ und verbindet (p) mit dem Distanzpunkte Dl, so muß auch diese Verbindungslinie durch p gehen, weil sie den Fahrstrahl Ap'' ebenfalls im Verhältnis $OA : Pp''$ teilt. Man sieht leicht, daß man den Punkt p auch erhält, wenn man $^1/_2$ ($^1/_3$, $^1/_4$) der Distanz von A aus auf dem Horizonte (nach links oder rechts hin) und entsprechend $^1/_2$ ($^1/_3$, $^1/_4$) des Abstandes des Raumpunktes von B auf der Wagerechten durch p'' nach der entgegengesetzten Seite hin (also nach rechts oder links) abträgt und dann diese Punkte verbindet, z. B. $Dl/_2(p/_2)$ schneidet Ap'' in p. Wir erhalten hieraus folgende Regel, die bezeichnet werde als Satz:

XIV. Um das perspektivische Bild eines Punktes zu erhalten, verbinde man seinen Aufriß auf der Bildebene mit dem Hauptpunkte, trage auf der Horizontalen durch den Aufriß die Tiefe des Punktes (d. h. seinen Abstand von B) nach rechts (oder links) hin ab und verbinde den so erhaltenen Punkt mit dem linken (oder rechten) Distanzpunkte. — Statt der ganzen Distanz und der ganzen Tiefe kann man auch einen beliebigen Teil davon nehmen.

§ 22. Beispiele und Aufgaben.

1. Eine abgestumpfte Pyramide mit aufgesetzter kleiner Pyramide ist perspektivisch zu zeichnen. (Fig. 114.)

Gegeben sind (Fig. 114) der Hauptpunkt A und die Distanz (die Punkte Dl und $Dl/_2$), ferner Grund- und Aufriß des Körpers. Die Aufrißebene werde Bildebene, so daß die Grundlinie des Bildes mit der X-Achse zusammenfällt. Da der Körper — vom Auge aus gerechnet — hinter der Bildebene (im vierten Raume auf $-P_2$, s. Fig. 98!) steht, so hätte der Grundriß eigentlich oberhalb GG gezeichnet werden sollen. Der Deutlichkeit wegen pflegt man ihn aber so zu legen, wie hier geschehen ist, es ist aber dann wohl zu beachten, daß die Abstände der Eckpunkte des Körpers von der Bildebene durch die Lote von ihren ersten Projektionen auf die Gerade $B'B'$, welche durch b' (da b auf der X-Achse liegt) parallel zu GG gezogen ist, bestimmt sind. Wir ermitteln die perspektivischen Bilder aller Eckpunkte des Körpers nach Satz *XIV*; z. B. Punkt a ist der Schnittpunkt der Linien $a''A$ und $(a)Dl$, wo $a''(a)$ gleich dem Abstande des Punktes a' von $B'B'$ ist; Punkt d ist Schnittpunkt von $d''A$ und $(d)Dl$ (oder $(d/_2)Dl/_2$), wo (d) senkrecht über (d_x) und $(d/_2)$ senkrecht über $(d_x/_2)$ liegt; Punkt i ist Schnittpunkt von $i''A$ und $(i)Dl$, wo $i''(i)$ dem Abstande des Punktes i' von $B'B'$ gleich ist, usw.

Unter Benutzung der Fluchtpunkte kommt man durchweg einfacher und rascher zum Ziele, wie die folgenden Beispiele zeigen.

2. Ein rechteckiger Sockel mit aufgesetzter Pyramide ist perspektivisch zu zeichnen. (Fig. 115.)

Gegeben sind (Fig. 115) Grund- und Aufriß des Körpers, der Hauptpunkt und die Distanz. Es sei D' die senkrechte Projektion des Auges auf P_1 Wir verbinden D' mit i' (der Mitte der Grundfläche des Körpers) und legen durch die vordere Sockelkante die Bildebene so, daß ihr Grundriß $E'L'$

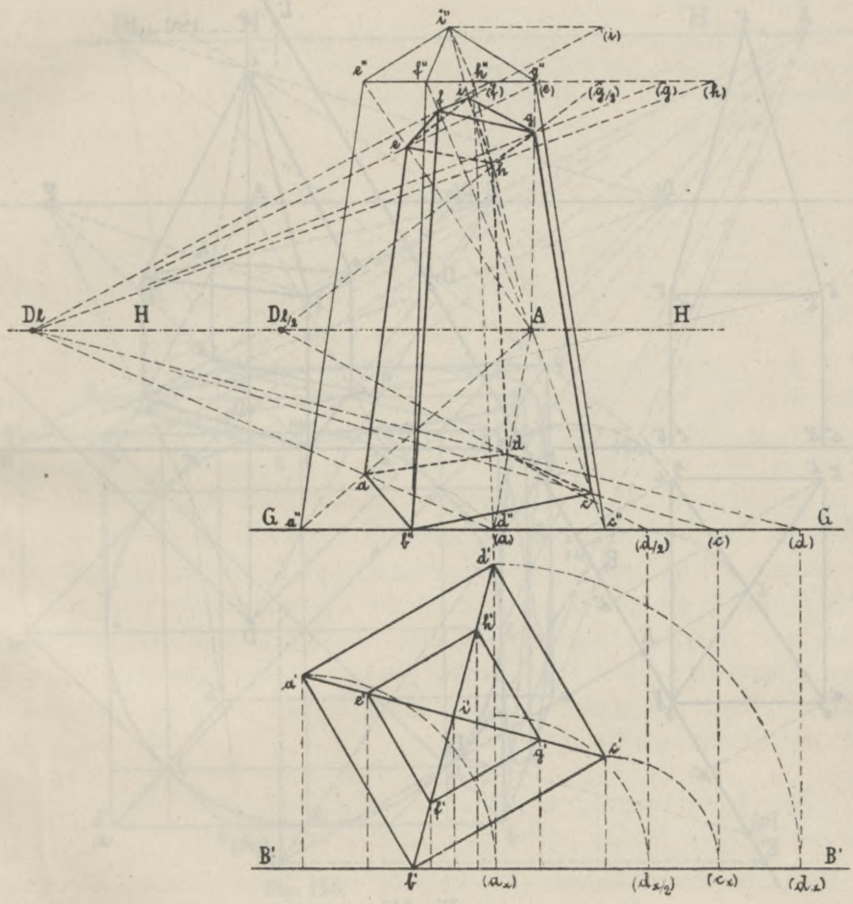


Fig. 114.

senkrecht auf $D'i'$ steht; A' ist dann Grundriß des Hauptpunktes. Auf die Bildebene werden sämtliche Eckpunkte des Körpers rechtwinklig projiziert. Um die Fluchtpunkte aller wagerecht liegenden Kanten und die der beiden Diagonalen bd und fh des Sockels zu erhalten, ziehen wir vom Auge aus zu diesen Linien die Parallelstrahlen DE, DF und DL, deren erste Projektionen $D'E'$, $D'F'$ und $D'L'$ sind. Jetzt werde (Fig. 115 oben rechts) die Bildebene mit dem Horizonte und mit den auf diesem und auf der

Grundlinie liegenden — gegebenen oder gefundenen — Punkten in die Zeichenebene gelegt und das zur Bildebene senkrecht stehende Strahlenbüschel (*DA, DE, DF*) in diese niedergeklappt. — Die Kante bf liegt in der Bildebene und ist deshalb in wahrer Größe senkrecht zu zeichnen (Satz *V*). Die Punkte c und i sind nach Satz *XIV* gefunden. (Man benutze die ganze oder halbe Distanz.) Punkt a liegt auf $a''A$ (*XIII*) und bE (*IV*), Punkt d

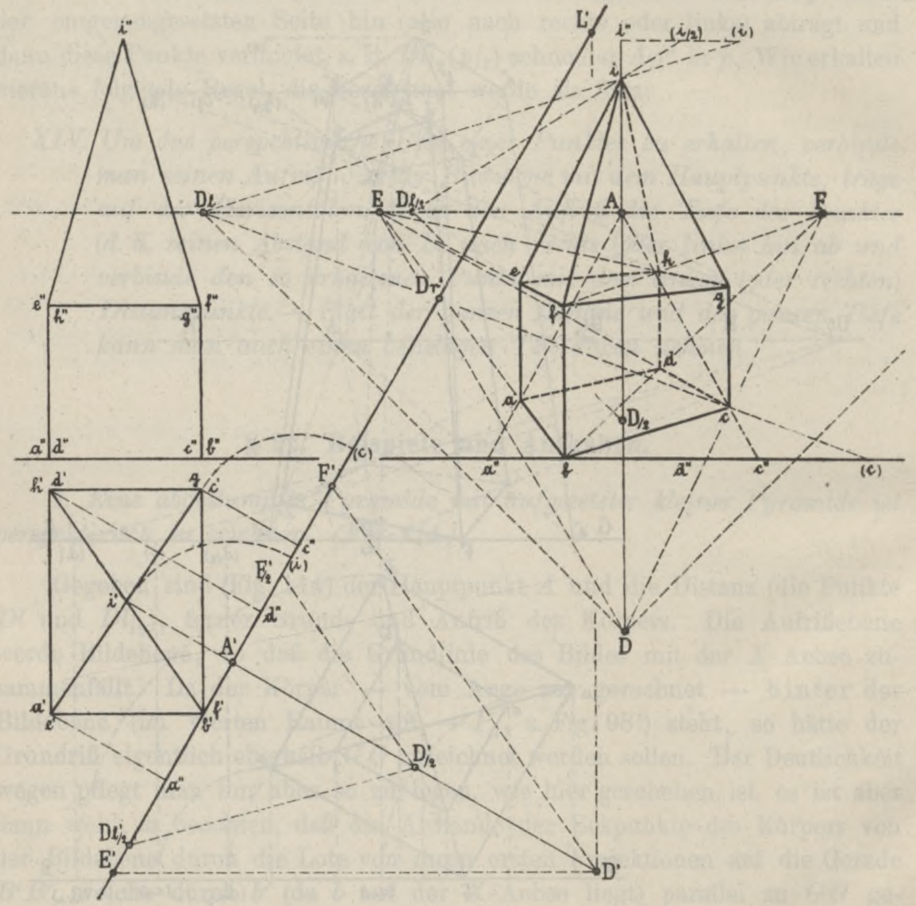


Fig. 115.

auf bF und cE (*IV*); die Punkte e, g und h liegen senkrecht über bezw a, c und d (*II* und *VII*), ferner liegt e in fE, h in fF und g in Eh (*IV*).

Anmerkung. Kann im Grundriß — wegen Raummangel auf dem Blatte — nur die halbe Distanz ($D'/_2$) zur Ermittelung der Fluchtpunkte benutzt werden, so ist auf dem Horizonte das Doppelte der im Grundriß erhaltenen Strecken abzutragen, z. B. $AF = 2\,A'F'/_2$, $ADl = 2\,A'Dl'/_2$. — Man erkennt leicht, daß die Strahlen bei D' und daher auch bei D dieselben Winkel miteinander bilden, wie im Auge. Mit dem Hauptstrahl DA schließen die Parallelstrahlen Winkel ein, die den Komplementen der Winkel gleich sind, welche die betreffenden Linien des Körpers mit der Bildebene bilden. Man kann daher den Grundriß der Parallelstrahlen auch ganz entbehren.

3. Es sind Kreise perspektivisch zu zeichnen. (Fig. 116.)

Die Kreise (Fig. 116) liegen in den drei sichtbaren Flächen eines perspektivisch gezeichneten Würfels. Hauptpunkt und Dritteldistanz sind gegeben. Da die Vorderfläche des Würfels in die Bildebene fallen soll, so ist

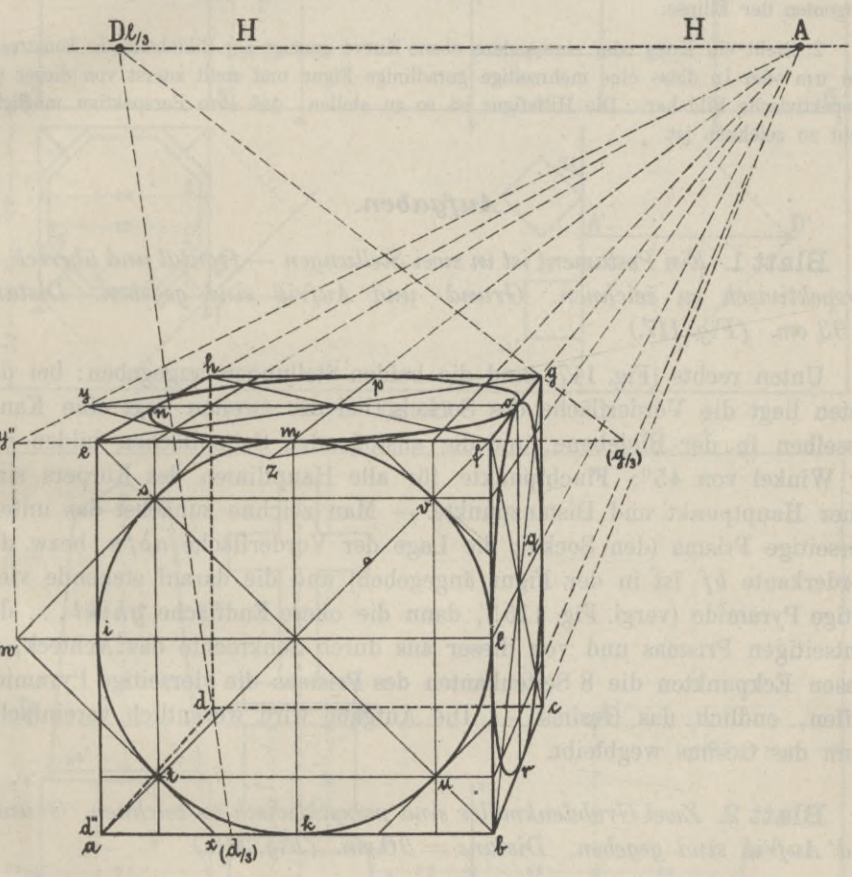


Fig. 116.

die Perspektive des Kreises dieser Fläche ein Kreis (V). Die perspektivischen Bilder der beiden anderen Kreise sind Ellipsen. Mit Hilfe der Diagonalen in den perspektivischen Quadraten bestimmen wir zuerst die perspektivischen Mitten der Quadratseiten (n, o, m, p und o, r, l, q), womit für jede Ellipse 4 Punkte gefunden sind. Legt man nun durch die Punkte s, t, u, v des vorderen Kreises senkrechte und wagerechte Linien und zieht von den Punkten aus, wo sie die Würfelkanten treffen, gerade Linien nach A, so ergeben diese in den anstoßenden Quadraten die Perspektiven von geraden

Linien, die den Linien im vorderen Quadrate entsprechen (*VIII*), und man erhält durch sie 4 Ellipsenpunkte auf den Diagonalen. Die 8 gefundenen Punkte genügen zur Konstruktion der Ellipse.

Anmerkung. 1. Bei größeren Kreisen benutzt man besser zwei dem Kreise umschriebene Quadrate, die so gestellt sind, daß ein dem Kreise umschriebenes regelmäßiges Achteck entsteht. (In Fig. 116 ist an der linken Seite die Konstruktion dieses zweiten Quadrates ausgeführt.) Die Achteckseiten sind Tangenten am Kreise und werden daher auch Tangenten der Ellipse.

2. Steht ein Kreis oder eine andere ebene Kurve geneigt zur Bildebene, so konstruiert man um oder in diese eine mehrseitige geradlinige Figur und stellt zuerst von dieser das perspektivische Bild her. Die Hilfsfigur ist so zu stellen, daß ihre Perspektive möglichst leicht zu zeichnen ist.

Aufgaben.

Blatt 1. *Ein Postament ist in zwei Stellungen — frontal und übereck — perspektivisch zu zeichnen. Grund- und Aufriß sind gegeben. Distanz = 33 cm. (Fig. 117.)*

Unten rechts (Fig. 117) sind die beiden Stellungen angegeben: bei der ersten liegt die Vorderfläche des Sockels, bei der zweiten liegt eine Kante desselben in der Bildebene, und die anstoßenden Seitenflächen bilden mit ihr Winkel von 45°; Fluchtpunkte für alle Hauptlinien des Körpers sind daher Hauptpunkt und Distanzpunkte. — Man zeichne zunächst das untere vierseitige Prisma (den Sockel; die Lage der Vorderfläche *abfn*, bezw. der Vorderkante *bf* ist in der Figur angegeben) und die darauf stehende vierseitige Pyramide (vergl. Fig. 115!), dann die obere Endfläche *ghikl* . . . des achtseitigen Prismas und von dieser aus durch Senkrechte das Achteck, in dessen Eckpunkten die 8 Seitenkanten des Prismas die vierseitige Pyramide treffen, endlich das Gesims. — Die Aufgabe wird wesentlich vereinfacht wenn das Gesims wegbleibt.

Blatt 2. *Zwei Grabdenkmäler sind perspektivisch zu zeichnen. Grund- und Aufriß sind gegeben. Distanz = 30 cm. (Fig. 118.)*

Die Lage der Bildebene (Fig. 118) zu den Körpern ist im Grundriß, und umgekehrt die Stellung der Körper zur Bildebene ist in der Nebenfigur unten rechts angegeben. In dieser Nebenfigur ($^1/_3$ der Größe der Hauptfiguren) sind die Fluchtpunkte aller Hauptlinien bestimmt. (*Dl'* ist Fluchtpunkt für *bc* und für alle Parallelen zu dieser Linie, ebenso *F'* für *ac*, *L'* für *no* und *E'* für *nr*.) — Für die von *e* aus schräg aufsteigende Linie ist Punkt *z* maßgebend. Die Maße für die Höhe der Teile des Grabkreuzes sind aus den eingezeichneten kleinen Kreuzchen zu ermitteln. — Man beachte, daß die Diagonalen der einzelnen Rechtecke bei dem Grabobelisken nicht dieselben Fluchtpunkte haben.

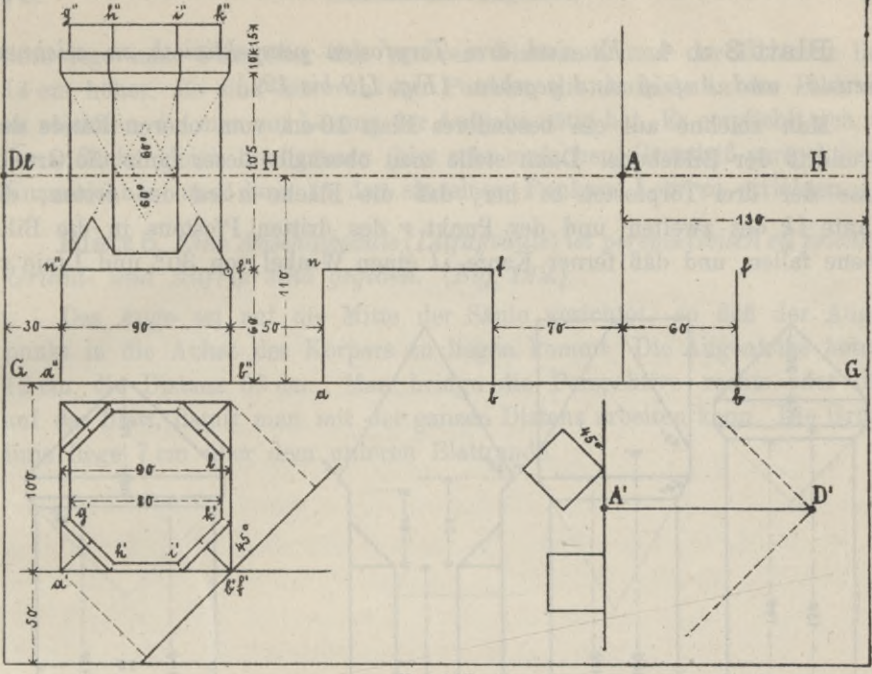


Fig. 117.

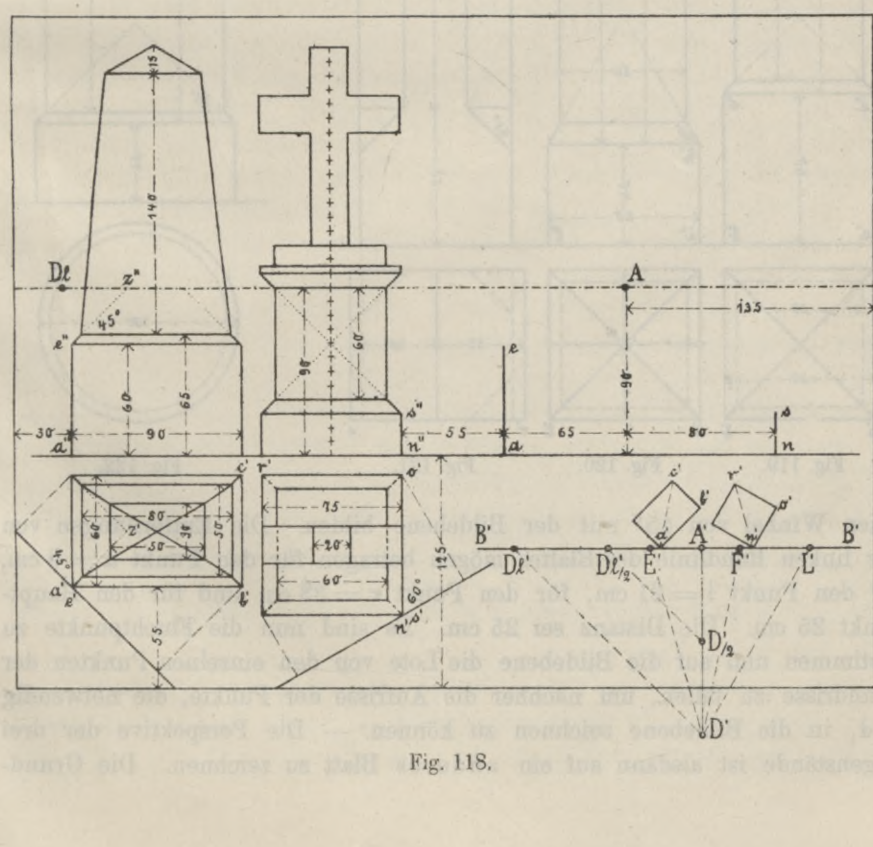


Fig. 118.

Blatt 3 u. 4. *Es sind drei Torpfosten perspektivisch zu zeichnen. Grund- und Aufriß sind gegeben.* (*Fig. 119 bis 121.*)

Man zeichne auf ein besonderes Blatt 10 cm vom oberen Rande den Grundriß der Bildebene. Dann stelle man oberhalb dieser Linie die Grundrisse der drei Torpfosten so her, daß die Fläche *abcd* des ersten, die Kante *ik* des zweiten und der Punkt *r* des dritten Pfostens in die Bildebene fallen, und daß ferner Kante *il* einen Winkel von 30° und Linie *rs*

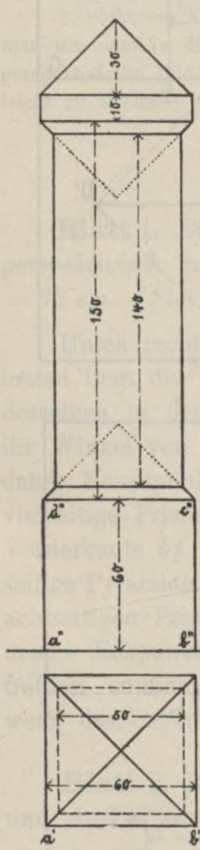


Fig. 119.

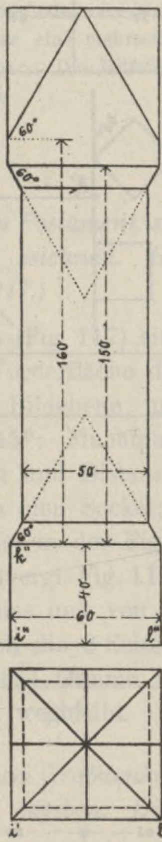


Fig. 120.

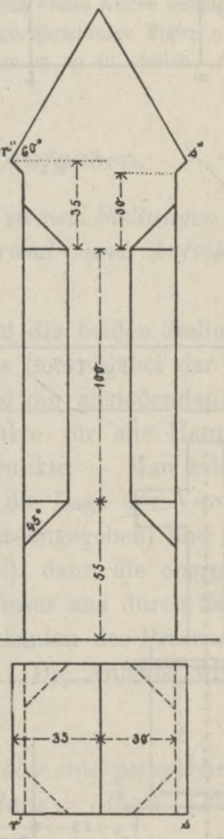


Fig. 121.

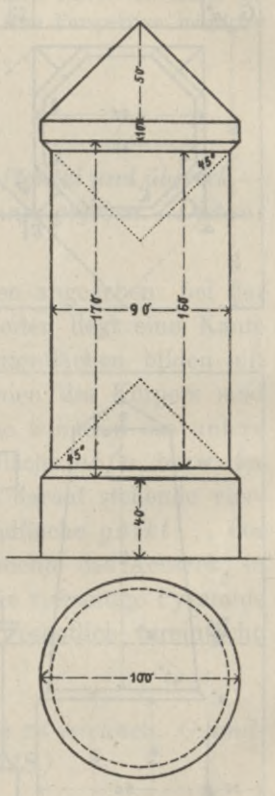


Fig. 122.

einen Winkel von 45° mit der Bildebene bilden. Die Entfernungen von der linken Randlinie des Blattes mögen betragen für den Punkt $a = 9$ cm, für den Punkt $i = 21$ cm, für den Punkt $r = 33$ cm und für den Hauptpunkt 25 cm. Die Distanz sei 25 cm. Es sind nun die Fluchtpunkte zu bestimmen und auf die Bildebene die Lote von den einzelnen Punkten der Grundrisse zu fällen, um nachher die Aufrisse der Punkte, die notwendig sind, in die Bildebene zeichnen zu können. — Die Perspektive der drei Gegenstände ist alsdann auf ein anderes Blatt zu zeichnen. Die Grundlinie lege man 6 cm über den unteren Blattrand, und der Horizont liege 14 cm höher. Es sind nur von den Punkten die Aufrisse in die Bildebene zu zeichnen, die man zur Lösung der Aufgabe nötig hat. Es empfiehlt sich, der Grundfläche gleich den ganzen (hier sehr einfachen) Grundriß perspektivisch einzuzeichnen und dann in den einzelnen Punkten Lote zu errichten.

Blatt 5. *Eine Anschlagsäule (Litfaßsäule) ist perspektivisch zu zeichnen. Grund- und Aufriß sind gegeben. (Fig. 122.)*

Das Auge sei auf die Mitte der Säule gerichtet, so daß der Augenpunkt in die Achse des Körpers zu liegen kommt. Die Augenhöhe betrage 12 cm, die Distanz 36 cm. Man bringe die Perspektive rechts oder links auf das Blatt, damit man mit der ganzen Distanz arbeiten kann. Die Grundlinie liege 7 cm über dem unteren Blattrande.

Anhang.

Einiges über die Kegelschnitte und die Projektion von Kreis und Ellipse.

§ 1. Die Ellipse.

1. *Eine Kurve von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände eines jeden ihrer Punkte von zwei festen Punkten dieselbe ist, heißt Ellipse.*

Es sei Fig. 123 eine Ellipse. Die festen Punkte F und F_1 heißen Brennpunkte. Die Gerade AB durch die Brennpunkte ist die große Achse; sie sei $= 2a$. Die Mitte M der großen Achse ist der (Ellipsen-) Mittelpunkt. Die Senkrechte CD auf AB in M ist die kleine Achse: sie sei $= 2b$. Jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade, z. B. OP_1, ist ein Durchmesser der Ellipse; die große Achse ist der größte, die kleine Achse der kleinste Durchmesser. $MF = MF_1 = e$ ist die (lineare) Exzentrizität der Ellipse. Eine Gerade vom Brennpunkte bis an die Peripherie der Ellipse heißt Leitstrahl (radius vector).

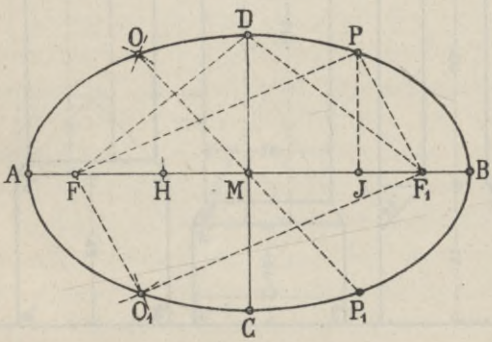


Fig. 123.

Zu jedem Ellipsenpunkte gehören zwei Leitstrahlen. Nach der Erklärung der Ellipse ist die Summe der beiden Leitstrahlen konstant, und zwar ist sie gleich der großen Achse: $PF + PF_1 = DF + DF_1 = AF + AF_1 = BF + BF_1 = AB = 2a$. — Da $DF = DF_1 = a$ und Dreieck DMF rechtwinklig ist, so folgt $DM^2 = DF^2 - MF^2$ oder $b^2 = a^2 - e^2$. — Der Quotient $\frac{e}{a}$ (die numerische Exzentrizität) ist stets ein echter Bruch. Wird $\frac{e}{a} = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, wird $\frac{e}{a} = 1$, so geht sie in eine gerade Linie über.

2. Aus dem Begriff der Ellipse ergeben sich folgende zwei Konstruktionen:

a) Man befestigt in den Brennpunkten die beiden Enden eines Fadens von der Länge $2a$, spannt diesen in einem beliebigen Punkte mit einem

Schreibstifte an und fährt mit dem Stifte an dem stets gespannten Faden auf der Zeichenebene herum bis zum Ausgangspunkte zurück. (Fadenkonstruktion.)

b) Man teilt die große Achse in zwei beliebige Teile, z. B. AH und BH (Fig. 123), und beschreibt mit diesen Strecken von F und F_1 aus die Kreuzpunkte P, P_1, O, O_1, die Ellipsenpunkte sind. (Je zwei Ellipsenpunkte liegen symmetrisch zu den Achsen.)

3. Fällt man von irgend einem Punkte der Ellipse, z. B. vom Punkte P (Fig. 123), das Lot auf die große Achse, so nennt man dieses Lot ($PJ = y$) die Ordinate, und den Abstand des Fußpunktes dieses Lotes vom Mittelpunkte ($MJ = x$) die Abszisse des Punktes P in bezug auf die beiden Achsen der Ellipse (Koordinatenachsen). Da $MF = MF_1 = e$, also $FJ = e + x$ und $F_1J = e - x$ ist, so folgt nach dem Pythagoras:

$$FP^2 = (e + x)^2 + y^2 \text{ und } F_1P^2 = (e - x)^2 + y^2,$$

$$\text{also } FP + F_1P = 2a = \sqrt{(e + x)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

Schafft man die Wurzeln weg und ordnet, so kommt $a^2(a^2 - e^2) = x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2$. Da nun (s. Nr. 1!) $a^2 - e^2 = b^2$ ist, so hat man $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Dies ist die Mittelpunktgleichung der Ellipse.

4. Konstruiert man um die große Achse der Ellipse als Durchmesser einen Kreis (Fig. 124), verlängert die Ellipsenordinate JP bis an diesen Kreis und bezeichnet JK (die Kreisordinate) mit z, so ist nach einem Satze der Planimetrie[1]) $z^2 = AJ \cdot BJ = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$. Da nach der Ellipsengleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ist, so folgt $z^2 : y^2 = a^2 : b^2$ oder $z : y = a : b$, d. h.

a) Die Kreisordinate verhält sich zur Ellipsenordinate, wie die halbe große Achse zur halben kleinen Achse.[2])

Wird umgekehrt die Proportion $z : y = a : b$ als gegeben vorausgesetzt, so folgt durch Quadrieren der Glieder $z^2 : y^2 = a^2 : b^2$ und daraus $a^2y^2 = b^2z^2$. Wird hierin $z^2 = a^2 - x^2$ gesetzt, so erhält man $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, das ist wieder die Ellipsengleichung. Mithin gilt auch die Umkehrung des obigen Satzes:

b) Wenn das Verhältnis der Kurvenordinate zur Kreisordinate konstant ($= b : a$) *ist, so ist die Kurve eine Ellipse.*

5. Aus dem letzten Satze (in 4) ergeben sich folgende Ellipsenkonstruktionen:

a) Um beide Achsen (Fig. 124) als Durchmesser werden Kreise beschrieben und durch den gemeinsamen Mittelpunkt beliebige Gerade gelegt, z. B KK_1. Von den Schnittpunkten dieser Geraden mit dem großen Kreise (K und K_1)

---

[1]) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der zur Hypotenuse gehörenden Höhe gleich dem Rechteck aus den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

[2]) Nimmt man CD als Abszissenachse an, so ist NH Kreis- und NU Ellipsenordinate, und man hat $NH : NU = MH : MG = b : a$.

ziehe man Parallele zur kleinen Achse und von den Schnittpunkten mit dem kleinen Kreise (L und L_1) Parallele zur großen Achse; diese Parallelen schneiden sich in Ellipsenpunkten (P und P_1), denn es verhält sich $JP : JK = ML : MK = b : a$.

b) Zieht man (Fig. 124) $PV \parallel KM$, so ist $PV = KM = a$ und $PO = LM = b$. Trägt man nun auf einem Papierstreifen die beiden Halbachsen der Ellipse ab, so daß $PV = a$ und $PO = b$ wird, und legt dann den Streifen so quer über beide Achsen, daß V stets auf der kleinen und O stets auf der großen Achse sich befindet, so gibt P Ellipsenpunkte an. (Erste Papierstreifen-Konstruktion.)

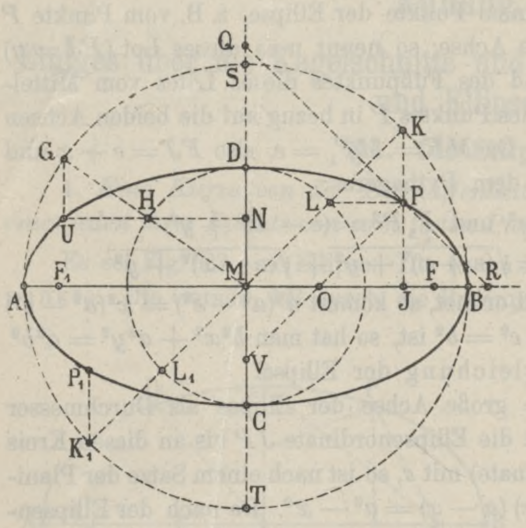


Fig. 124.

c) Macht man (Fig. 124) $JR = JO$ und verlängert RP bis Q, so ersieht man leicht, daß $PR = PO = b$ und $PQ = PV = a$, also $RQ = a + b$ ist. Bezeichnet man daher am Rande eines Papierstreifens die Punkte R, P und Q so, daß $PR = b$ (gleich der halben kleinen Achse) und $PQ = a$ (gleich der halben großen Achse) wird, und legt den Streifen in der Weise auf zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade, daß R stets auf der einen und Q stets auf der anderen Geraden sich befindet, so gibt P Ellipsenpunkte an. (Zweite Papierstreifen-Konstruktion.)

6. *Wird ein gerader Zylinder oder ein gerader Kegel von einer Ebene, die nicht parallel der Grundfläche ist, so durchschnitten, daß alle Seitenlinien (des Mantels) getroffen werden, so ist die Schnittfigur eine Ellipse.*

In Fig. 125 ist ein gerader Zylinder, in Fig. 126 ein gerader Kegel durch die Ebene E in der angegebenen Weise geschnitten. Die geschlossene Schnittkurve in beiden Figuren ist APB; es ist nachzuweisen, daß diese eine Ellipse ist. — Man lege in die Körper zwei Kugeln, die die Mantelflächen in den Kreisen CD und C_1D_1 und die Ebene E in den Punkten F und F_1 berühren. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve mit F und F_1 und zieht durch P die Mantellinie GG_1 bis an die Kugeln, so sind PF und PG Tangenten an die untere und PF_1 und PG_1 Tangenten an die obere Kugel. Weil nun aber die Tangenten, welche man von einem Punkte an die Kugel ziehen kann, gleich lang sind, und weil ferner auch die Mantellinien (Tangenten) zwischen den Kugeln gleiche Länge haben, so folgt: $PF + PF_1 = PG + PG_1 = GG_1 = CC_1 = DD_1 = AB$.[1]) Dasselbe gilt von jedem andern Punkte der Schnittkurve, und daher ist sie eine Ellipse.

7. *a) Die gerade Parallelprojektion eines Kreises, der schief zur Projektionsebene liegt, ist stets eine Ellipse.*

b) Die gerade Parallelprojektion einer Ellipse ist im allgemeinen wieder eine Ellipse, im besonderen Falle aber auch ein Kreis.[2])

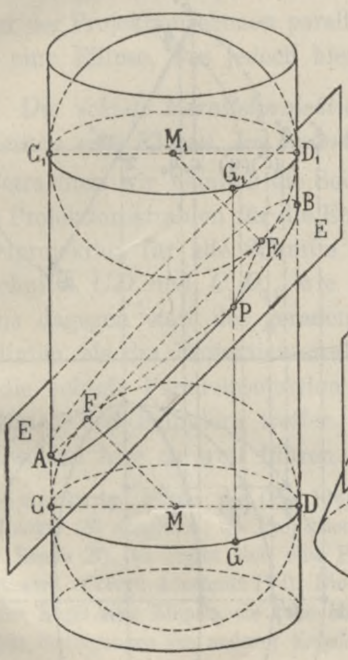


Fig. 125.

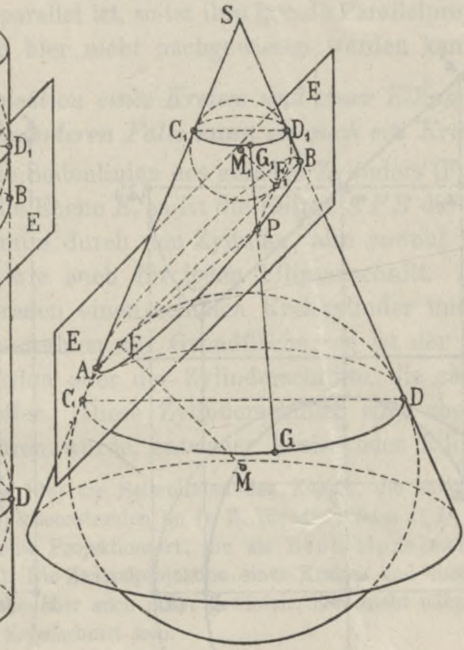


Fig. 126.

Zu a). Ein Kreis habe eine beliebige schiefe Lage zu P_1 und P_2. Wir drehen ihn — was immer möglich ist — so, daß seine erste Projektion $a'c'b'd'$ der Gestalt nach unverändert bleibt und seine zweite Projektion eine gerade Linie $c''d''$ wird (Fig. 127). Es ist nachzuweisen, daß die Kurve $a'c'b'd'$ eine Ellipse ist. Zu diesem Zwecke bringen wir den Kreis durch Drehung um den zu P_2 senkrechten Durchmesser ab in die parallele Lage zu P_1, so daß seine erste Projektion ein Kreis wird. Von einem beliebigen Punkte (x') dieses Kreises werde das Lot $(x')\,z'$ auf $a'b'$ gefällt, und man erkennt leicht die Gleichheit folgender Verhältnisse:

$$z'x' : z'(x') = m''x_0 : m''x'' = m''c_0 : m''c'' = m'c' : m'(c').$$

[1]) Es ist (Fig. 125 und 126) $AC + AC_1 = AF + AF_1$ und $BD + BD_1 = BF + BF_1$. Durch Addition kommt $CC_1 + DD_1 = 2AB$, also $CC_1 = DD_1 = AB$.

[2]) Eine gerade Linie dann, wenn die Ellipse senkrecht zur Projektionsebene steht (§ 5, 2, b).

Da nun für jede Abszisse das Verhältnis der Kurvenordinate $z'x'$ zur entsprechenden Kreisordinate $z'(x')$ wie $m'c' : m'(c')$, also konstant ist, so folgt nach 4 b, daß $a'c'x'b'd'$ eine Ellipse ist.

Zu b). Es sei (Fig. 128) $a'c'b'd'$ die erste und $c''d''$ die zweite Projektion einer zu P_1 geneigten und mit der großen Achse zu P_2 senkrecht stehenden Ellipse. Um nun nachzuweisen, daß die Kurve $a'c'b'd'$ eine Ellipse ist, drehen wir die Ellipse $acbd$ um die Achse ab in die parallele Lage zu P_1.

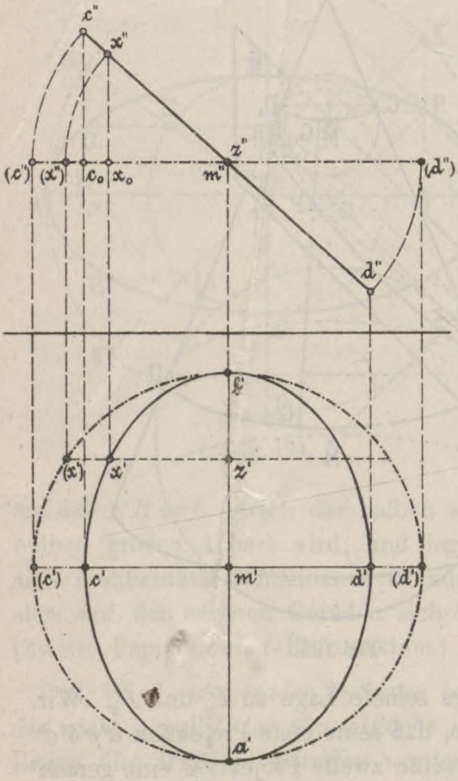


Fig. 127.

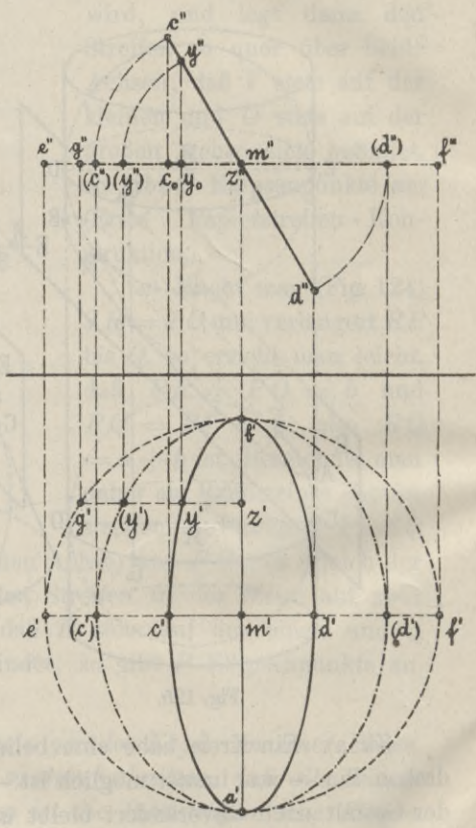


Fig. 128.

Dann ist $a'(c')b'(d')$ nach § 5, 3, b eine Ellipse. Jetzt beschreiben wir um $a'b'$ als Durchmesser einen Kreis und fällen von einem beliebigen Punkte g' der Peripherie dieses Kreises das Lot $g'z'$ auf $a'b'$. Es ist alsdann

$$z'y' : z'(y') = m''y_0 : m''y'' = m''c_0 : m''(c'') = m'c' : m'(c'),$$

also $z'y' : z'(y') = m'c' : m'(c')$ (*1*). Weil nun $z'(y')$ Ellipsenordinate und $z'g'$ die zugehörige Kreisordinate ist, so ist auch $z'g' : z'(y') = m'e' : m'(c')$ (*2*). Aus (*1*) und (*2*) folgt $z'y' : z'g' = m'c' : m'e'$, und hieraus ergibt sich nach 4 b, daß $a'c'y'b'd'$ eine Ellipse ist.

Legt man die Ellipse so, daß ihre kleine Achse senkrecht zu P_2 steht, so ist der Beweis derselbe. Es wird aber in diesem Falle die Projektion der Ellipse auf P_1 dann ein Kreis, wenn $a \cdot \cos \alpha = b$ wird, wo a und b die Halbachsen der Ellipsen sind und α den Winkel bezeichnet, den die Ellipse mit P_1 bildet. — Wenn man in Fig. 125 die Seitenlinien des Zylinders als Projektionsstrahlen für seine Grundfläche annimmt, so findet auch hier die Relation $a \cdot \cos \alpha = b$ statt, und es ist, wie man leicht ersieht, der Grundkreis des Zylinders die gerade Parallelprojektion aller Ellipsenschnitte durch den Zylinder. — Hat die Ellipse eine solche schiefe Lage, daß keine ihrer Achsen zu einer der Projektionsebenen parallel ist, so ist ihre gerade Parallelprojektion immer eine Ellipse, was jedoch hier nicht nachgewiesen werden kann.

8. *Die schiefe Parallelprojektion eines Kreises und einer Ellipse ist im allgemeinen eine Ellipse, im besonderen Falle kann sie auch ein Kreis sein.*

Betrachten wir nämlich die Seitenlinien des geraden Zylinders (Fig. 125) als die Projektionsstrahlen für die Ebene E, so ist die Ellipse APB die schiefe Parallelprojektion für alle Schnitte durch den Zylinder, also sowohl für die Kreisschnitte CD und C_1D_1, wie auch für jeden Ellipsenschnitt. Denken wir uns dagegen statt des geraden einen schiefen Kreiszylinder und seine Seitenlinien als die Projektionsstrahlen zur Grundfläche, so ist der Grundkreis die schiefe Parallelprojektion aller der Zylinderschnitte, die sämtliche Seitenlinien des Zylinders treffen. Diese Zylinderschnitte sind aber, was nachzuweisen hier zu weit führen würde, entweder Kreise oder Ellipsen.

Anmerkung. Sehen wir (Fig. 126) die Seitenlinien des Kegels, die sämtlich von einem Punkte (S) ausgehen, als Projektionsstrahlen an (z. B. für die Kreise C_1D_1 und CD auf die Ebene E), so ergibt sich eine Projektionsart, die als Zentralprojektion bezeichnet wird. (Vergl. Abschnitt IV!) Die Zentralprojektion eines Kreises und einer Ellipse ist in der Regel eine Ellipse, sie kann aber auch unter gewissen, hier nicht näher zu erörternden Bedingungen ein anderer Kegelschnitt sein.

§ 2. Die Hyperbel.

1. *Eine Kurve von der Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Punkte von zwei festen Punkten dieselbe ist, heißt Hyperbel.*

Aus dieser Erklärung ergibt sich folgende Konstruktion der Hyperbel: Gegeben seien (Fig. 129) die beiden festen Punkte F und F_1, deren Entfernung voneinander $2e$ betrage, und eine Strecke $KL = 2a$, die kleiner als $2e$ ist. Wir legen durch F und F_1 eine unbegrenzte Gerade und machen $MF = MF_1 = e$ und $MA = MA_1 = a$. Es sei Z ein beliebiger Punkt auf der Geraden durch F und F_1. Werden nun von F und F_1 aus mit AZ und A_1Z Kreisbogen beschrieben, so sind ihre Schnittpunkte P, Q, P_1 und Q_1, wie auch A und A_1 Hyperbelpunkte, denn man hat: $FP_1 - F_1P_1 = F_1P - FP = F_1Q - FQ = FQ_1 - F_1Q_1 = AF_1 - A_1F_1 = A_1F - AF = AA_1 = 2a.$

Die Hyperbel besteht aus zwei getrennt liegenden Teilen (Ästen), die mit je zwei Zweigen sich bis ins Unendliche erstrecken; sie ist eine nicht geschlossene Kurve. — Die beiden festen Punkte F und F_1 heißen die **Brennpunkte**, der Halbierungspunkt M der Strecke FF_1 der **Mittelpunkt** und die Entfernung des Mittelpunktes von den Brennpunkten die **Exzentrizität** der Hyperbel. Die Verbindungslinien eines Hyperbelpunktes mit den Brennpunkten (wie PF und PF_1) sind die Leitstrahlen (Brennstrahlen), A und A_1 die Scheitel, und die Strecke AA_1 ist die **Hauptachse** der Hyperbel. Wird über der Strecke FF_1 ein Kreis und in diesen das Rechteck $BCDE$ konstruiert, so nennt man die Mittelsenkrechte $GH = 2b$ die **Nebenachse** und die verlängerten Diagonalen des Rechtecks die **Asymptoten** (d. h. die Nichtzusammenfallenden) der Hyperbel; letztere nähern sich den Hyperbelzweigen immer mehr, ohne sie jedoch im Endlichen zu erreichen.

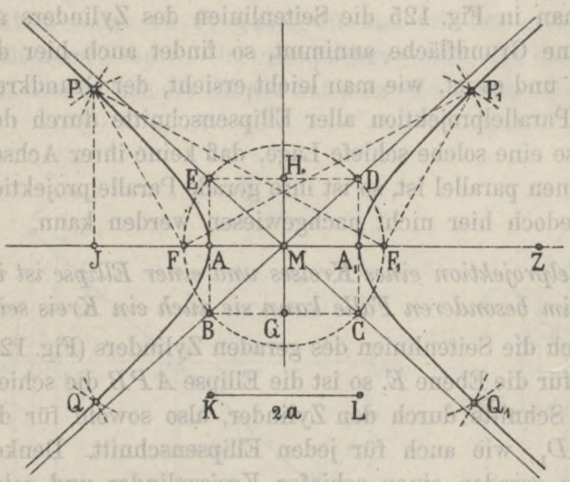


Fig. 129.

Anmerkung. Ist PJ senkrecht auf der verlängerten Achse und $= y$, $MJ = x$, also $JF = x - e$ und $JF_1 = x + e$, so ist $PF_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ und $PF = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, mithin $PF_1 - PF = 2a = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, woraus folgt $x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$. Da nun $e^2 - a^2 = b^2$ ist, so kommt $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Das ist die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

2. *Wird ein gerader Kegel von einer Ebene so geschnitten, daß auch sein Scheitelkegel getroffen wird, so ist die Schnittfigur eine Hyperbel.*

Den Scheitelkegel erhält man, wenn man sich den Mantel des Kegels TUS (Fig. 130) über die Spitze S hinaus erweitert denkt. Eine (in Fig. 130 nicht gezeichnete) Ebene E, die auch der Kegelachse parallel sein kann, schneidet den unteren Kegel in der Kurve KAJ und den oberen in der Kurve $K_1A_1J_1$. In beide Kegel werde je eine Kugel gelegt, die den Kegelmantel in den Kreisen GH und G_1H_1 und die Ebene E in den Punkten F und F_1 berühren. Man verbinde einen beliebigen Punkt P der Kurve mit F und F_1 und ziehe durch P eine Mantellinie, welche die Kugeln in den Punkten N und N_1 der Berührungskreise tangiert. Dann ist $PF_1 - PF = PN_1 - PN = NN_1 = GG_1$

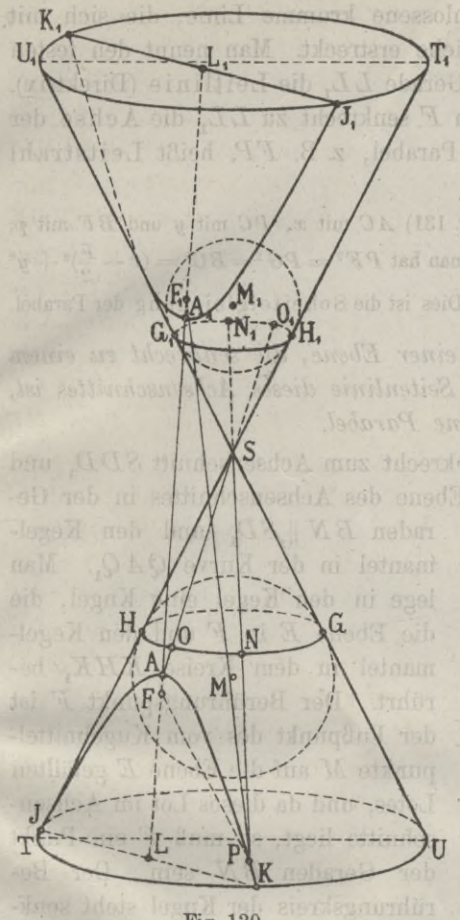


Fig. 130.

$= HH_1$,[1]) d. h. die Differenz der Abstände des Punktes P von den Punkten F_1 und F ist gleich dem Abschnitte einer inneren Tangente an die Kugeln zwischen ihren Berührungspunkten. Da sich für jeden anderen Punkt der Kurve dieselbe Differenz zwischen seinen Abständen von F_1 und F ergibt, so ist die Kurve eine Hyperbel. F und F_1 sind ihre Brennpunkte.

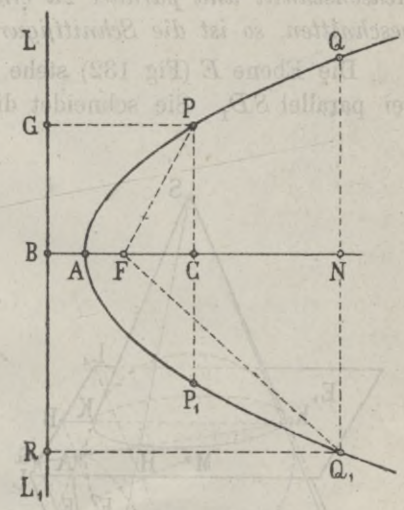


Fig. 131.

§ 3. Die Parabel.

1. *Eine Kurve von der Beschaffenheit, daß jeder ihrer Punkte von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleichen Abstand hat, heißt Parabel.*

Aus der Erklärung der Parabel ergibt sich folgende Konstruktion: Gegeben sei (Fig. 131) der feste Punkt F und die feste Gerade LL_1. Man fälle das Lot FB auf LL_1, so ist die Mitte A dieses Lotes ein Parabelpunkt. Um weitere Parabelpunkte zu erhalten, ziehe man Parallele zu LL_1, die die Verlängerung von BF schneiden, z. B. in den Punkten C und N. Beschreibt man nun von F aus mit den Abständen der Punkte C, N usw. von B Kreise, dann sind die Schnittpunkte dieser Kreise mit den entsprechenden Parallelen Punkte der Parabel ($FP = BC = PG$).

[1]) HH_1 ist auch $= AA_1$, was sich jedoch an unserer Figur nicht gut nachweisen läßt, weil sie durch die erforderlichen Hilfslinien undeutlich geworden wäre.

Die Parabel ist eine nicht geschlossene krumme Linie, die sich mit ihren beiden Zweigen bis ins Unendliche erstreckt. Man nennt den festen Punkt F den Brennpunkt, die feste Gerade LL_1 die Leitlinie (Direktrix), A den Scheitel und die Gerade durch F senkrecht zu LL_1 die Achse der Parabel; jede Gerade von F an die Parabel, z. B. FP, heißt Leitstrahl (Brennstrahl).

Anmerkung. Bezeichnet man (in Fig. 131) AC mit x, PC mit y und BF mit p, so ist $FC = x - \frac{p}{2}$ und $BC = x + \frac{p}{2}$, und man hat $PF^2 = PG^2 = BC^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$, woraus sich $y = \sqrt{2px}$ ergibt. Dies ist die Scheitelgleichung der Parabel.

2. *Wird ein gerader Kegel von einer Ebene, die senkrecht zu einem Achsenschnitt und parallel zu einer Seitenlinie dieses Achsenschnittes ist, geschnitten, so ist die Schnittfigur eine Parabel.*

Die Ebene E (Fig. 132) stehe senkrecht zum Achsenschnitt SDD_1 und sei parallel SD_1. Sie schneidet die Ebene des Achsenschnittes in der Geraden $BN \parallel SD_1$ und den Kegelmantel in der Kurve QAQ_1. Man lege in den Kegel eine Kugel, die die Ebene E in F und den Kegelmantel in dem Kreise KHK_1 berührt. Der Berührungspunkt F ist der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkte M auf die Ebene E gefällten Lotes, und da dieses Lot im Achsenschnitte liegt, so muß F ein Punkt der Geraden BN sein. Der Berührungskreis der Kugel steht senkrecht zum Achsendreieck, deshalb schneiden sich E und die Ebene des Berührungskreises E_1 in einer Geraden LL_1, die senkrecht zum Achsenschnitt steht ($\sphericalangle LBN = 90^0$). Verbindet man einen beliebigen Kurvenpunkt P mit F und S, dann erhält man auf dem Berührungskreise den Schnittpunkt H. Die Ebene durch $\triangle SK_1H$ gibt mit Ebene E die Schnittlinie PG, die $\parallel SD_1$ und daher auch $\parallel BN$ ist, mithin auch senkrecht auf LL_1 steht. Nun ist $\triangle SK_1H \sim \triangle PGH$, und weil $SK_1 = SH$ (Tangenten) ist, so folgt $PG = PH$, und da ferner (als Tangenten) $PH = PF$ ist, so hat man endlich $PF = PG$, d. h. Punkt P hat von F und LL_1 gleichen Abstand. Dasselbe gilt von jedem anderen Punkt der Kurve (auch von A, denn $\triangle ABK \sim \triangle SKK_1$ und $AK = AF$); daher ist sie eine Parabel.

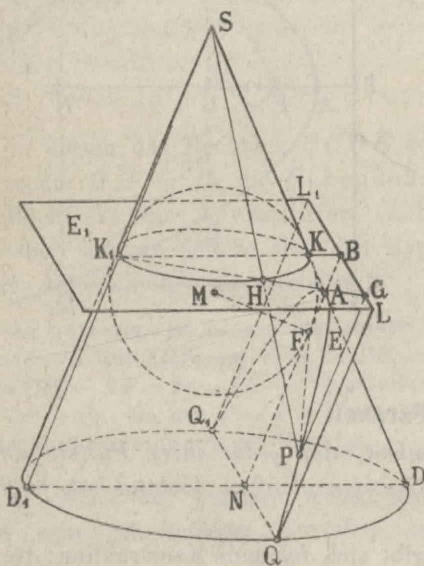


Fig. 132.