DIFFERENTIAL-

UND

INTEGRALRECHNUNG

VON

RUDOLF LIPSCHITZ

BONN
VERLAG VON MAX COHEN & SOHN (FR. COHEN)
1880

Inhaltsverzeichniss.

Abschnitt I.

Differential- und Integralrechnung für reelle Grössen.

Capitel I.

Differentiation von Functionen einer reellen variabeln Grösse.

Capitel II.

Principien der Integration.

Capitel III.

Entwickelung von Functionen einer variabeln Grösse in Potenzreihen.

Capitel IV.

Anwendungen der nach den Potenzen einer variabeln Grösse fortschreitenden Reihen.

Capitel V.

Differentiation von Functionen mehrerer Variabeln.

Seite

Capitel VI.

Entwickelung von Functionen mehrerer Variabeln in Potenzreihen.

Capitel VII.

Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabeln.

Capitel VIII.

Anfangsgründe der Lehre von der Krümmung der Linien und Flächen.

Seite

Capitel IX.

Integrale von Functionen einer Variable.

Capitel X.

Darstellung von Functionen durch trigonometrische Reihen.

Capitel XI.

Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variable.

Capitel XII.

Doppelte und mehrfache Integrale.

Capitel XIII.

Integration vollständiger Differentiale.

Capitel II.

Umkehrung einer Function einer complexen variabeln Grösse.

Capitel III.

Integration von Functionen complexer Variabeln.

Capitel IV.

Entwickelung von Functionen einer complexen variabeln Grösse in Potenzreihen.

Abschnitt I.

Differential- und Integralrechnung für reelle Grössen.

Capitel I.

Differentiation von Functionen einer reellen variabeln Grösse.

§ 1. Ziele der Differential- und Integralrechnung.

Der Gegensatz, in welchem die drei Operationen des Addirens, Subtrahirens und Multiplicirens zur Operation des Dividirens stehen, äussert sich von den Elementen an stets auf neue Weise und beherrscht das gesammte Gebiet der Analysis. In der im ersten Bande des vorliegenden Buches gegebenen Darstellung ist nahe dem Anfange darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Ausführung der drei ersten Grundoperationen mit beliebigen positiven oder negativen ganzen Zahlen unbedingt zulässig sei und immer nur positive oder negative ganze Zahlen einschliesslich der Null erzeuge, dass dagegen die Theilung der Einheit durch einen bestimmten ganzen Divisor nur geschehen könne, sobald erlaubt ist, die Einheit gleich einer durch den Divisor bezeichneten Anzahl von einander gleichen neuen Einheiten zu setzen. Indem man annimmt, dass die Einheit in jede beliebige Anzahl von gleichen Theilen theilbar sei, kommt zu dem Inbegriff aller ganzen Zahlen der Inbegriff aller rationalen Brüche hinzu. Da *die Differenz zwischen zwei ganzen Zahlen*, welche einander nicht gleich sind, gleich einer von der Null verschiedenen ganzen Zahl ist, so muss der numerische Werth der Differenz mindestens gleich der Einheit sein. Dagegen kann *die Differenz zwischen zwei rationalen* Brüchen, die nicht zusammen fallen, jedem rationalen Bruche gleich werden und deshalb auch numerisch unter jeden gegebenen aliquoten Theil der Einheit herabsinken. Auf diesen Umstand stützt sich die Definition einer irrationalen Grösse als Grenzwerth einer durch ein gewisses Gesetz bestimmten Folge von Brüchen. Demnach bildet die unbeschränkte Theilbarkeit der Einheit eine wesentliche Voraussetzung, um zuerst von den ganzen Zahlen zu den rationalen Brüchen, dann von den letztern zu den irrationalen Grössen überzugehen und die Grundoperationen der Rechnung auf alle reellen bestimmten Grössen auszudehnen.

Es wurde so eben eine Eigenschaft der Differenz von zwei ganzen Zahlen und der Differenz von zwei rationalen Brüchen erwähnt. *Die Differenz von zwei reellen bestimmten Grössen* ist entweder der Null oder einer bestimmten positiven oder einer bestimmten negativen Grösse gleich, und kann jeden beliebigen Werth annehmen. Wenn nun vorausgesetzt wird, dass eine Grösse, mit der eine vorgeschriebene Folge von Rechnungsoperationen ausgeführt werden soll, nacheinander verschiedene bestimmte Werthe erhalte, die mit Berücksichtigung des Vorzeichens oder im algebraischen Sinne innerhalb gewisser Grenzen liegen, oder dass die Grösse innerhalb des betreffenden Intervalls veränderlich sei, so darf man sich denken, dass stets ein Werth derselben aus dem zunächst vorhergehenden entstehe, indem zu dem letztern die entsprechende Differenz der beiden Werthe hinzuaddirt wird. Je nachdem der folgende Werth grösser oder kleiner als der unmittelbar vorhergehende oder demselben gleich ist, findet bei jener Vorstellung für den vorhergehenden Werth ein Wachsen oder Abnehmen oder Gleichbleiben statt, und fällt die bezeichnete Differenz, welche gemäss dem allgemeinen Begriffe der Addition immer *das Increment oder die Zunahme des ursprünglichen Werthes* genannt wird, positiv oder negativ oder verschwindend aus. Sobald nun der veränderlichen Grösse jeder innerhalb des bezüglichen Intervalls liegende rationale oder irrationale Werth ertheilt, und deshalb der numerische Betrag der vorkommenden einzelnen Zunahmen so klein genommen werden darf als man nur will, heisst die veränderliche Grösse *eine innerhalb des gegebenen Intervalls stetig veränderliche Grösse.*

Das Resultat der für eine veränderliche Grösse vorgeschriebenen Folge von Rechnungsoperationen, welches bei verschiedenen Werthen dieser Grösse ebenfalls verschiedene Werthe erhalten kann, hängt somit von den erstgenannten Werthen ab und wird *eine Function der veränderlichen Grösse* genannt. Den Begriff einer Function lehrt der erste Band dieses Buches stufenweise kennen. Indem ich die bezüglichen Stellen anführe, werde ich, wie im Folgenden durchgehends, vor die Zahl des Paragraphen des ersten Bandes das Zeichen I setzen. Die Definition einer algebraischen rationalen ganzen und einer algebraischen rationalen gebrochenen Function findet sich I, § 22, die erste Erwähnung der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus I, § 30, die allgemeine Definition einer Function einer veränderlichen Grösse und die Definition der Exponentialfunction I, § 100 und 101, die Definition des Logarithmus I, § 102, die Erörterung der trigonometrischen Functionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens I, § 103, der inversen trigonometrischen Functionen I, § 104. Bei allen hervorgehobenen besonderen Functionen kommt es darauf an, sobald der veränderlichen Grösse nach einander verschiedene, innerhalb eines gewissen Intervalls befindliche Werthe beigelegt werden, *die Differenz der zugeordneten Werthe der Function* zu betrachten. Insbesondere wurde untersucht, ob für eine numerisch beliebig verkleinerte Differenz der Werthe der veränderlichen Grösse die Differenz der zugeordneten Werthe der Function ebenfalls numerisch beliebig klein werde. Die aufgeworfene Frage lässt sich allgemein so ausdrücken, *ob einer stetigen Aenderung der variabeln Grösse eine stetige Aenderung der Function entspreche*, und führt zu der I, § 108 gegebenen *Definition einer stetigen Function einer variabeln Grösse*, welche folgendermassen lautet: *Wenn eine Function $f(x)$, welche für alle der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ genügenden Werthe von x gegeben ist, die Eigenschaft hat, dass bei je zwei innerhalb dieses Intervalls befindlichen Werthen x und $x+h$ die Differenz der zugehörigen Werthe der Function $f(x+h)-f(x)$ für einen gegen die Null abnehmenden Werth der Grösse h selbst gegen die Null abnimmt, so wird $f(x)$ eine stetige Function der Variable x genannt.*

Wir sind hiermit bei dem Kreise von Begriffen angelangt, in dem sich Differential- und Integralrechnung entwickelt haben.

Die Aufgabe der Differential- und Integralrechnung besteht darin, die Beziehungen von Grössen, die stetig veränderlich sind, zu erforschen. Differential- und Integralrechnung unterscheiden sich durch die besondere Art der zu lösenden Probleme wie durch den Character der hierbei zu überwindenden Schwierigkeiten und ergänzen einander; sie werden unter dem gemeinsamen Namen der *Infinitesimalrechnung* zusammengefasst. Die Infinitesimalrechnung ruht auf dem allgemeinen Boden der Grössenlehre und bedarf keiner aus anderen Gebieten entlehnten Principien. Doch haben *Newton* und *Leibnitz*, die Entdecker der Infinitesimalrechnung, indem sie dieselbe auf andere Gebiete anwandten, neue Quellen der Einsicht erschlossen, und der Bereich der Anwendungen der Infinitesimalrechnung ist im Fortschritte der Zeit beständig gewachsen.

Da die Infinitesimalrechnung mit den stetig veränderlichen Grössen operirt, und da bei der stetigen Veränderung von Grössen die unbeschränkte Theilbarkeit der Einheit vorausgesetzt wird, so eignen sich solche Gegenstände zur Anwendung der Infinitesimalrechnung, welche nach Einheiten, die eine unbeschränkte Theilung zulassen, bestimmt werden können. Derlei Gegenstände liefert uns unsere Anschauung vom Raume und von der Zeit. Es verursacht Niemandem eine Schwierigkeit zu denken, dass eine gewisse begrenzte gerade Linie in eine beliebige Anzahl einander gleicher Theile, und dass ein gewisser Zeitraum in eine beliebige Anzahl einander gleicher Theile getheilt sei. Indem wir eine gewisse Linie als Einheit der Länge, einen gewissen Zeitraum als Einheit der Zeit auffassen, erhalten wir ein Mittel, um jede gegebene gerade Linie durch die erstere Einheit und jeden gegebenen Zeitraum durch die letztere Einheit zu messen. Auch können wir uns die Theilung eines begrenzten Stückes einer ebenen Fläche in beliebig viele gleiche Theile und die Theilung eines begrenzten Raumes in beliebig viele gleiche Theile vorstellen, und daraus die Messung aller Flächen durch eine Flächeneinheit und aller Räume durch eine Raumeinheit ableiten. Aus dem Umstande, dass wir darauf angewiesen sind, die Einheit der Zeit, der Länge, der Fläche und des Raumes als Einheiten aufzufassen, die unbeschränkt theilbar sind, entspringt die Möglichkeit, auf die Gegenstände, welche nach den erwähnten Einheiten gemessen werden, die Infinitesimalrechnung anzuwenden.

So eröffnen sich der Anwendung zwei grosse Gebiete. Nach dem Princip, auf welches *Descartes* die analytische Geometrie gegründet hat, und das I, § 42 und I, § 85 mitgetheilt ist, wird der Ort jedes beliebigen Punktes in einer Ebene und der Ort jedes beliebigen Punktes im Raume durch die Messung der Länge von geraden Linien bestimmt, deren Anzahl für die Ebene gleich zwei, für den Raum gleich drei ist, und die in beiden Fällen die Coordinaten der betreffenden Punkte heissen. Vermöge der vollständigen Definition eines jeden im Raume befindlichen Gebildes ergiebt sich, wie hier vorgreifend bemerkt wird, eine gesetzmässige Beziehung zwischen den Coordinaten der Punkte, welche dem Gebilde angehören. Die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Coordinaten der Punkte der räumlichen Gebilde ist daher nichts anderes als *die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Lehre von den räumlichen Gebilden oder auf die gesammte Geometrie.* Hiermit wird das erste der beiden angeführten Gebiete bezeichnet. In demselben kommt der Begriff der Zeit als solcher nicht vor. Sobald man aber den letzteren zu den auf den Raum bezüglichen Begriffen hinzufügt und *die Bewegungen* untersucht, *welche von Gebilden, die sich im Raume befinden, während des Verlaufes der Zeit ausgeführt werden,* so betritt man das zweite jener beiden Gebiete der Anwendung, *das Gebiet der Mechanik.* Mit den grossartigen Erfolgen, welche durch die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf Mechanik für das Begreifen des Gesetzmässigen in der Natur errungen sind, ist der Gedanke lebendig und mächtig geworden, dass die Erklärung der Naturerscheinungen durchaus in der Zurückführung auf einfache gesetzmässige Bewegungsvorgänge zu suchen sei. Gegenwärtig genügt es, auf den hohen Werth jener Anwendung hinzudeuten.

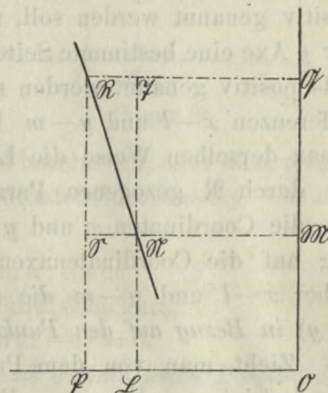
Nachdem wir versucht haben, an der Hand des Begriffes der Stetigkeit zu erklären, auf welche Objecte die Infinitesimalrechnung angewendet werden könne, liegt uns jetzt ob, die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung auseinander zu setzen. Hierzu ist es erforderlich, *den Begriff der Beziehung zwischen stetig veränderlichen Grössen,* oder, was gleichbedeutend ist, *den Begriff der Abhängigkeit stetig veränderlicher Grössen von andern stetig veränderlichen Grössen* sorgfältig zu untersuchen.

Die Abhängigkeit einer stetig veränderlichen Grösse von einer andern stetigen unabhängig veränderlichen Grösse fällt mit dem Begriff einer stetigen Function einer veränderlichen Grösse zusammen. Die vorhin wiederholte Definition desselben wird den Ausgangspunkt bilden. Es gewährt jedoch eine wesentliche Erleichterung für das Verständniss, wenn der Begriff der Function einer veränderlichen Grösse durch die Anwendung, welche er auf dem Gebiete der Geometrie gefunden hat, erläutert wird, bevor die rein analytischen Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung an die erwähnte Definition angeknüpft werden. Aus dieser Ursache mögen einige geometrische Betrachtungen eingeschaltet werden, welche, mit dem Plane dieses Buches übereinstimmend, nur die im ersten Bande vorgetragenen Elemente der analytischen Geometrie als bekannt voraussetzen.

§ 2. Zurückführung der analytischen Bestimmung eines geometrischen Ortes in der Ebene auf die Bestimmung einer Function einer veränderlichen Grösse.

Die in einer Ebene enthaltenen Gebilde, welche I, § 42 zur Sprache kamen, sind der Punkt, die gerade Linie und die Kreislinie. Wir haben uns jetzt mit dem allgemeinen Begriff einer in der Ebene befindlichen Linie zu beschäftigen. Gesetzt es sei für einen Punkt der Ebene eine Forderung gegeben, welche durch die sämmtlichen Punkte einer gewissen Linie befriedigt wird, so heisst dieselbe *der geometrische Ort der die Forderung erfüllenden Punkte.* Demnach ist der geometrische Ort derjenigen Punkte der Ebene, welche die Forderung befriedigen, von einem festen Punkte der Ebene um eine gegebene Strecke abzustehen, eine gewisse Kreislinie. Um eine Linie als geometrischen Ort zu definiren, muss eine Eigenschaft, welche allen Punkten der Linie und nur den Punkten derselben zukommt, benutzt werden; kennt man verschiedene Eigenschaften von dieser Beschaffenheit, dann lässt sich aus jeder derselben eine Definition der betreffenden Linie deduciren. Es wird nunmehr angenommen, dass die Punkte der Ebene auf ein System von rechtwinkligen Coordinaten x und y bezogen seien; während jede als geometrischer Ort definirte Linie unbegrenzt viele Punkte enthält, gehört zu jedem ihrer Punkte ein ganz bestimmtes Paar von Coordinaten x und y, und es kommt darauf an, die Eigenschaft anzugeben, durch welche die Coordinaten dieser sämmtlichen Punkte ausgezeichnet sind. Wir beginnen mit der Besprechung von einigen einfachen Beispielen.

Die rechtwinkligen Coordinaten x und y eines beliebigen Punktes ℜ der Ebene bezeichnen die Lage desselben in Bezug auf die zu einander senkrechten Coordinatenaxen; wie in I, § 42 wird die x Axe als horizontal und deren linke Seite als positiv, die y Axe als vertikal und deren obere Seite als positiv betrachtet, und es seien 𝔓, 𝔔 respective die Fusspunkte der von ℜ auf die erste und zweite Coordinatenaxe herabgelassenen Lothe. Ein beliebiger aber fester Punkt 𝔑 habe die Coordinaten l und m, die Fusspunkte der von 𝔑 auf die Axen gefällten Lothe mögen beziehungsweise 𝔏 und 𝔐 heissen. Das Loth 𝔑𝔐 ist dann zu der x Axe, das Loth 𝔑𝔏 zu der y Axe parallel, jedes der beiden Lothe werde von 𝔑 aus nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert, dann ergiebt sich leicht aus der Kenntniss der Coordinaten der Punkte ℜ und 𝔑 die Bestimmung für die relative Lage des Punktes ℜ in Bezug auf die bezeichneten, durch den Punkt 𝔑 laufenden, gegen einander senkrechten geraden Linien.



(Figur 1)

Es möge die Parallele zu der x Axe durch das Loth ℜ𝔓 in dem Punkte 𝔖, die Parallele zu der y Axe durch das Loth ℜ𝔔 in dem Punkte 𝔗 geschnitten werden. Die obenstehende Figur 1 ist für den Fall gezeichnet, dass x, y, l, m positive Grössen sind; daher werden die Strecken 𝔒𝔓, 𝔒𝔔, 𝔒𝔏, 𝔒𝔐 durch die Grössen x, y, l, m gemessen. Die Coordinatendifferenz $x-l$ bildet stets, abgesehen von dem Vorzeichen, das Mass der Strecke 𝔏𝔓 oder 𝔑𝔖, die Coordinatendifferenz $y-m$ in gleicher Weise das

Mass der Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{N}\mathfrak{T}$. Bei den getroffenen Annahmen liegt der Punkt $\mathfrak{P}$ links oder rechts von dem Punkte $\mathfrak{L}$ oder in dem Punkte $\mathfrak{L}$, je nachdem die Grösse $x-l$ positiv oder negativ oder gleich Null ist; ebenso liegt der Punkt $\mathfrak{Q}$ oberhalb oder unterhalb von dem Punkte $\mathfrak{M}$ oder im Punkte $\mathfrak{M}$, je nachdem die Grösse $y-m$ positiv oder negativ oder gleich Null ist. Da ferner der Punkt $\mathfrak{S}$ zu dem Punkte $\mathfrak{N}$ dieselbe relative Lage, wie der Punkt $\mathfrak{P}$ zu dem Punkte $\mathfrak{L}$ hat, und der Punkt $\mathfrak{T}$ zu dem Punkte $\mathfrak{N}$ dieselbe relative Lage wie der Punkt $\mathfrak{Q}$ zu dem Punkte $\mathfrak{M}$, und da auf diese Weise zu der positiven Seite der x Axe eine bestimmte Seite ihrer Parallele gehört, die positiv genannt werden soll, und ebenso zu der positiven Seite der y Axe eine bestimmte Seite ihrer Parallele gehört, die gleichfalls positiv genannt werden möge, so drücken die Coordinatendifferenzen $x-l$ und $y-m$ bei der getroffenen Verfügung in genau derselben Weise die Lage des Punktes $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die durch $\mathfrak{N}$ gezogenen Parallelen der Coordinatenaxen aus, wie die Coordinaten x und y die Lage des Punktes $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Coordinatenaxen selbst determiniren. Es werden daher $x-l$ und $y-m$ *die relativen Coordinaten des Punktes* (x, y) *in Bezug auf den Punkt* (l, m) genannt.

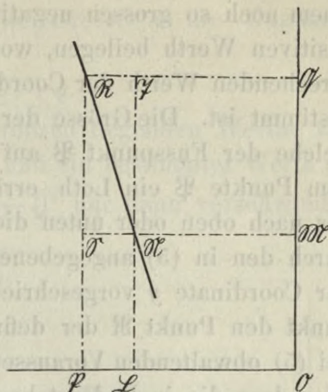
Zieht man von dem Punkte $\mathfrak{N}$ nach dem Punkte $\mathfrak{R}$ eine gerade Linie, so dienen zur Bestimmung ihrer Länge s und des Winkels φ, den die Linie $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ mit der positiven Seite der durch den Punkt gehenden Parallele zur x Axe bildet, und der bei einer von links nach rechts gerichteten Drehung für positiv gilt, solche auf das rechtwinklige Dreieck $\mathfrak{S}\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ bezügliche Ueberlegungen, wie sie I, pag. 140 u. ff. angestellt sind, und bringen die Gleichungen hervor

(1) $$s^2 = (x-l)^2 + (y-m)^2,$$

(2) $$\cos\varphi = \frac{x-l}{s}, \ \sin\varphi = \frac{y-m}{s}.$$

Es sei das erste Beispiel einer als geometrischer Ort zu definirenden Linie *eine beliebige gerade Linie, die durch den Punkt* $\mathfrak{N}$ *läuft. Jeder Punkt der Linie und nur ein solcher hat die Eigenschaft, dass seine Verbindungslinie mit dem Punkte* $\mathfrak{N}$, *die nothwendig in die gegebene Linie hineinfällt, gegen eine durch den Punkt* $\mathfrak{N}$ *gezogene feste Gerade, welche die positive*

Seite der Parallele zu der x Axe sein mag, immer denselben Winkel α bildet. Die gegebene gerade Linie ist deshalb der geometrische Ort der Punkte, welche jene Eigenschaft besitzen. Der Punkt 𝔑 mit den Coordinaten x und y bedeute irgend einen Punkt der eben definirten Linie, und diese sei in der Figur 2 dargestellt. Alsdann ist es vermöge der Definition nothwendig und hinreichend, dass bei dem für den Punkt 𝔑 construirten Dreiecke 𝔖𝔑𝔑 der vorhin mit dem Buchstaben φ notirte Winkel immer gleich dem gegebenen Winkel α sei, oder dass wegen der Gleichungen (2) für die Coordinatendifferenzen $y-m$ und $x-l$ die Proportion bestehe



(Figur 2)

(3) $$y-m : x-l = \sin\alpha : \cos\alpha.$$

Sie hat denselben Inhalt wie die Gleichung

(4) $$\cos\alpha\,(y-m) - \sin\alpha\,(x-l) = 0.$$

Zwischen den Coordinaten x und y eines jeden Punktes der definirten geraden Linie gilt daher die Gleichung (4), *deren linke Seite in Bezug auf jede der beiden Coordinaten vom ersten Grade ist, und welche die Gleichung jener geraden Linie genannt wird. Vermittelst dieser Gleichung wird die eine Coordinate als Function der anderen Coordinate bestimmt.* Wofern der Cosinus des Winkels α nicht gleich Null ist, ergiebt sich für die Coordinate y der folgende Ausdruck, der *eine rationale ganze Function des ersten Grades der Coordinate x* ist,

(5) $$y = m + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-l).$$

Wenn $\cos\alpha = 0$, mithin $\sin\alpha = 1$ oder -1 ist, so verschwindet die Coordinate y aus der Gleichung (4) und die Coordinate x nimmt den unveränderlichen Werth l an; dieser Fall tritt ein, sobald die betreffende gerade Linie mit der x Axe einen rechten Winkel macht, mithin zu der y Axe parallel ist. Man kann der Coordinate x in der rationalen ganzen

Function $m + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-l)$ alle möglichen reellen Werthe von einem noch so grossen negativen bis zu einem noch so grossen positiven Werth beilegen, wobei die Function, welche den entsprechenden Werth der Coordinate y angiebt, stets vollkommen bestimmt ist. Die Grösse der Coordinate x bezeichnet die Lage, welche der Fusspunkt $\mathfrak{P}$ auf der x Axe einnimmt. Sobald in dem Punkte $\mathfrak{P}$ ein Loth errichtet und auf demselben von $\mathfrak{P}$ aus nach oben oder unten die Länge abgeschnitten wird, welche durch den in (5) angegebenen positiven oder negativen Werth der Coordinate y vorgeschrieben ist, so erhält man als Endpunkt den Punkt $\mathfrak{R}$ der definirten geraden Linie. Wegen der bei (5) obwaltenden Voraussetzung, dass $\cos\alpha$ nicht gleich Null oder dass die in Rede stehende Linie der y Axe nicht parallel sei, muss offenbar jedes in einem Punkte $\mathfrak{P}$ der x Axe errichtete Loth die gerade Linie in einem und nur einem Punkte treffen, welcher eben der zugehörige Punkt $\mathfrak{R}$ ist. So entsprechen einander die geometrische Anschauung und deren analytische Darstellung.

Ein zweites Beispiel möge die oben erwähnte Definition einer Kreislinie liefern (Figur 3). *Die Kreislinie, deren Centrum in dem Punkte $\mathfrak{N}$ liegt und deren Radius gleich der Grösse ϱ ist, ist der geometrische Ort der Punkte $\mathfrak{R}$, für welche der Abstand $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ den unveränderlichen Werth ϱ hat.* Diese Definition erzeugt vermöge des für das Quadrat des Abstandes $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ oder s aufgestellten Ausdruckes (1) die zwischen den Coordinaten x und y des Punktes $\mathfrak{R}$ geltende Gleichung

(6) $$(x-l)^2 + (y-m)^2 = \varrho^2,$$

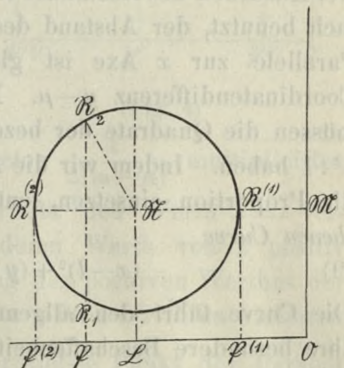
die Gleichung des definirten Kreises. Um aus derselben die Abhängigkeit der einen Coordinate von der anderen abzuleiten, bedarf es der Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung. Für die Coordinate y erscheint dadurch *der doppelte Ausdruck*

(7) $$\begin{cases} y_1 = m - \sqrt{\varrho^2 - (x-l)^2} \\ y_2 = m + \sqrt{\varrho^2 - (x-l)^2}, \end{cases}$$

wo das Wurzelzeichen den zu bestimmenden positiven Werth andeuten soll. Man bemerkt sogleich, dass hier die Grösse x nur solche Werthe erhalten darf, bei denen die unter dem Wurzelzeichen befindliche Grösse nicht negativ wird. Damit dies der Fall sei, muss die positive Grösse $(x-l)^2$ nicht grösser als ϱ^2, mithin $x-l$ zwischen den Grenzen $-\varrho$ und $+\varrho$ enthalten sein; es bestehen deshalb für die Grösse x die Ungleichheiten

(8) $$l-\varrho \leqq x \leqq l+\varrho.$$

Zu jedem innerhalb dieser Grenzen liegenden Werthe von x gehört ein bestimmter Werth y_1 und ein bestimmter Werth y_2, deren Differenz $y_2-y_1=2\sqrt{\varrho^2-(x-l)^2}$ nur dann verschwindet, wenn x entweder gleich dem kleinsten Werthe $l-\varrho$ oder gleich dem grössten Werthe $l+\varrho$ genommen wird. Die hervorgehobenen analytischen Thatsachen sind der Ausdruck von bekannten Eigenschaften der Kreislinie. Wenn man auf der x Axe in einem beliebigen Punkte ein Loth construirt, so wird dasselbe die Kreislinie entweder gar nicht, oder in zwei verschiedenen Punkten, oder in einem einzigen Punkte treffen, und berührt sie in dem letzten Falle. Die Berührung findet für die beiden Fusspunkte $\mathfrak{P}^{(1)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ und zwar in denjenigen Punkten $\mathfrak{R}^{(1)}$ und $\mathfrak{R}^{(2)}$ statt, in welchen die Kreislinie von einer durch das Centrum $\mathfrak{N}$ zu der x Axe gezogenen Parallele geschnitten wird.



(Figur 3)

In denselben nimmt die Coordinate x respective die beiden Werthe $x^{(1)}=l-\varrho$ und $x^{(2)}=l+\varrho$ an, während sowohl für den Punkt $\mathfrak{R}^{(1)}$ wie auch für den Punkt $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Coordinate y nur den einen Werth m erhält. Ein Werth von x, der den Bedingungen (8) genügt, bezeichnet einen Fusspunkt $\mathfrak{P}$, der zwischen den beiden Fusspunkten $\mathfrak{P}^{(1)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt. Die in einem solchen Punkte $\mathfrak{P}$ zu der x Axe errichtete Senkrechte schneidet den Kreis in zwei von einander verschiedenen Punkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, welchen die vorhin mit y_1 und y_2 bezeichneten Werthe der Coordinate y zugehören. Ein Werth der Coordinate x, welcher die Bedingungen (8) nicht erfüllt, giebt jedoch einen Fusspunkt

$\mathfrak{P}$ an, der sich ausserhalb der Strecke $\mathfrak{P}^{(1)}\,\mathfrak{P}^{(2)}$ befindet, so dass eine durch denselben zu der x Axe errichtete Senkrechte den Kreis niemals erreichen kann.

Um zu der geraden Linie und der Kreislinie eine andere Gattung von *ebenen krummen Linien* oder *ebenen Curven* hinzuzufügen, untersuchen wir *den geometrischen Ort derjenigen Punkte* $\mathfrak{R}$, *bei denen ihr Abstand von einem festen Punkte* $\mathfrak{N}$ *zu ihrem Abstande von einer festen geraden Linie, der mit* $y=\mu$ *bezeichneten Parallele zur* x *Axe, in einem gegebenen Verhältnisse* $\lambda:1$ *steht.* Der Ausdruck des Abstandes $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ oder s in (1) wurde schon mehrfach benutzt, der Abstand des Punktes $\mathfrak{R}$ von der bezeichneten Parallele zur x Axe ist gleich dem absoluten Werthe der Coordinatendifferenz $y-\mu$. Nach der aufgestellten Forderung müssen die Quadrate der bezeichneten Abstände das Verhältniss $\lambda^2:1$ haben. Indem wir die Ausdrücke der beiden Quadrate in die Proportion einsetzen, entsteht *die Gleichung der definirten ebenen Curve*

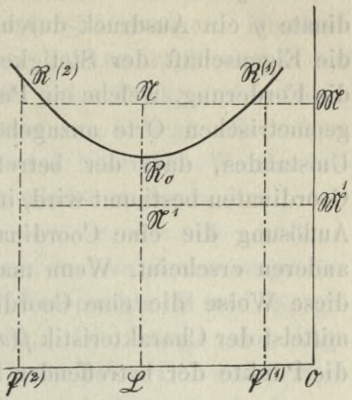
$$(9)\qquad (x-l)^2+(y-m)^2=\lambda^2(y-\mu)^2.$$

Die Curve führt den allgemeinen Namen *eines Kegelschnittes.* Ihre besondere Beschaffenheit richtet sich nach der Grösse der Constante λ; *je nachdem* λ *kleiner als die Einheit, gleich derselben oder grösser als die Einheit ist, wird die Linie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.* Wir beschränken uns hier auf die Discussion des Falles der Parabel. Bei der betreffenden Voraussetzung $\lambda=1$ hebt sich das auf beiden Seiten der Gleichung (9) auftretende Quadrat der Coordinate y fort, so dass (9) in die Gleichung

$$(10)\qquad (x-l)^2+m^2-\mu^2-2(m-\mu)y=0$$

übergeht. Es wird vorausgesetzt, dass der Punkt $\mathfrak{N}$ nicht in die feste Gerade $y=\mu$ hineinfalle, mithin die Differenz $m-\mu$ nicht gleich Null sei, und wir erhalten, indem die Gleichung (10) durch die Grösse $2(m-\mu)$ dividirt wird, da $m^2-\mu^2=(m-\mu)(m+\mu)$ ist, die Coordinate y als *rationale ganze Function des zweiten Grades von der Coordinate* x,

$$(11)\qquad y=\frac{m+\mu}{2}+\frac{(x-l)^2}{2(m-\mu)}.$$



(Fig. 4)

Die Zeichnung (4) ist für einen positiven Werth der Differenz $m-\mu$ ausgeführt; der Punkt $\mathfrak{N}$, dessen Coordinaten l und m sind, liegt darum oberhalb der festen geraden Linie $y=\mu$, die durch den Punkt $\mathfrak{M}'$ der Figur zu der x Axe parallel gezogen ist und von der Linie $\mathfrak{N}\,\mathfrak{L}$ in dem Punkte $\mathfrak{N}'$ geschnitten wird. Weil die auf der rechten Seite von (11) befindliche Function die Summe von der constanten Grösse $\frac{m+\mu}{2}$ und dem mit dem constanten Factor $\frac{1}{2(m-\mu)}$ multiplicirten Quadrat $(x-l)^2$ ist, ferner $(x-l)^2$ für den Werth $x=l$ verschwindet, dagegen für jeden anderen Werth von x positiv bleibt, so bewirkt die Voraussetzung des positiven Werthes der Differenz $m-\mu$, dass die Coordinate y für $x=l$ ihren kleinsten Werth erhält, nämlich $\frac{m+\mu}{2}$. Der tiefste Punkt der Parabel ist demnach der den Coordinaten $x=l$, $y=\frac{m+\mu}{2}$ entsprechende Scheitelpunkt $\mathfrak{N}_0$, in welchem sie von der Linie $\mathfrak{N}\,\mathfrak{L}$ getroffen wird und der in der Mitte zwischen den Punkten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ liegt. Für je zwei Werthe $x^{(1)}=l+\xi$ und $x^{(2)}=l-\xi$ nimmt die Ordinate y denselben Werth $\frac{m+\mu}{2}+\frac{\xi^2}{2(m-\mu)}$ an, der um so grösser ausfällt, je grösser der Betrag von ξ gewählt ist. Zu je zwei correspondirenden Werthen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ gehören zwei auf der x Axe befindliche Fusspunkte $\mathfrak{P}^{(1)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$, die von dem Punkte $\mathfrak{L}$ rechts und links die gleiche Entfernung haben. Aus dem angegebenen Grunde entsprechen denselben je zwei Punkte der Parabel $\mathfrak{N}^{(1)}$ und $\mathfrak{N}^{(2)}$, die von der x Axe gleich weit entfernt sind und sich über dieselbe um so mehr erheben, je weiter der Punkt $\mathfrak{P}^{(1)}$ und der Punkt $\mathfrak{P}^{(2)}$ von dem Punkte $\mathfrak{L}$ abstehen. Hieraus folgt die in der Zeichnung angedeutete Gestalt der Parabel.

In jedem der erörterten Beispiele hat sich für die Coordinate y ein Ausdruck durch die Coordinate x ergeben, bei dem die Eigenschaft der Stetigkeit nachweisbar ist. Zugleich geht die Forderung, welche ein Punkt der Ebene, um einem gewissen geometrischen Orte anzugehören, erfüllen muss, vermöge des Umstandes, dass der betreffende Punkt durch seine beiden Coordinaten bestimmt wird, in eine Gleichung über, durch deren Auflösung die eine Coordinate als eine stetige Function der anderen erscheint. Wenn man die Abhängigkeit, in welche auf diese Weise die eine Coordinate y von der anderen x geräth, mittelst der Charakteristik $f(x)$ andeutet, so wird das Gesetz, dem die Punkte der betreffenden Linie folgen, durch die Gleichung

$$y=f(x) \tag{12}$$

dargestellt. Die analytische Bestimmung eines geometrischen Ortes in der Ebene für den Punkt (x, y) läuft also auf die Aufsuchung derjenigen Function der Coordinate x hinaus, welcher die Coordinate y gleich zu setzen ist. Sobald die betreffende Function gefunden ist, bietet die zugehörige Gleichung (12) ein Werkzeug, um die Beschaffenheit der in Rede stehenden Linie durch die Methoden der Analysis zu studiren.

§ 3. Geometrische Deutung einer stetigen Function einer veränderlichen Grösse. Bestimmung der Lage einer Sehne einer ebenen Curve.

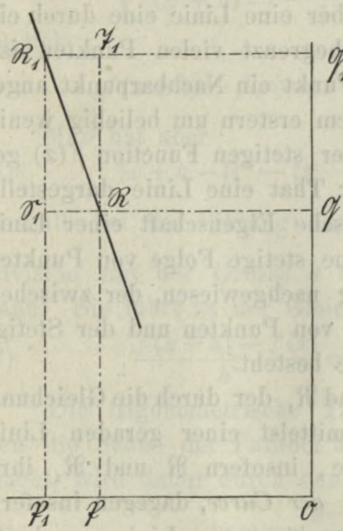
Die Art und Weise, wie aus der geometrischen Definition einer ebenen Curve das Gesetz abzuleiten sei, nach welchem die eine Coordinate y eines Punktes der Curve von der anderen Coordinate x abhängt, braucht hier nicht weiter verfolgt zu werden. Wir nehmen an, dass diese Abhängigkeit in dem einzelnen Falle bekannt sei und durch eine Function $f(x)$ ausgedrückt werde, welche die in § 1 wiederholte Definition der Stetigkeit erfüllt. Indem die Betrachtung diese Ausdehnung bekommt, ergiebt sich zugleich, dass jede beliebige stetige Function einer veränderlichen Grösse x geometrisch in der Weise gedeutet werden kann, dass man die Gleichung $y=f(x)$ bildet und x, y als die Coordinaten eines Punktes der Ebene auffasst.

In jener Definition wird die Function $f(x)$ für alle Werthe von x betrachtet, welche der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ genügen. Hiernach darf der Fusspunkt $\mathfrak{P}$ des von dem Punkte (x, y) oder $\mathfrak{R}$ auf die x Axe gefällten Lothes die Stelle jedes Punktes einnehmen, der zwischen den Punkten $x = a$ und $x = b$ liegt. Es mögen nun der veränderlichen Grösse x zwei bestimmte Werthe beigelegt werden, von denen der eine wieder x, der andere

(1) $$x_1 = x + h$$

heisse, und zu denen respective die Fusspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ gehören. Die Länge und Lage der Lothe $\mathfrak{P}\mathfrak{R} = \mathfrak{O}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{O}\mathfrak{Q}_1$ wird dann durch die zugeordneten Grössen

(2) $$y = f(x),\ y_1 = f(x + h)$$



(Figur 5)

bezeichnet. Der Schnittpunkt der unbegrenzten Linien $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_1$ werde $\mathfrak{S}_1$, derjenige der unbegrenzten Linien $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}_1\mathfrak{Q}_1$ werde $\mathfrak{T}_1$ genannt. Dann entsprechen in der zugehörigen Figur 5 die Punkte $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_1$ genau den Punkten $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{R}$ der Figur 1 im vorigen §, so dass die Coordinaten x, y, x_1, y_1 beziehungsweise an die Stelle der Coordinaten l, m, x, y treten. Mithin giebt *das Increment der Grösse x oder die Differenz der Werthe der unabhängigen Variable $x_1 - x = h$* den Abstand und die relative Lage der Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, *das Increment der Grösse y oder die Differenz der zugeordneten Werthe der Function* $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$ den Abstand und die relative Lage der Punkte $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ an. Die erwähnte Definition der Stetigkeit der Function $f(x)$ schreibt vor, dass für je zwei Werthe x und $x + h$ die Differenz der zugehörigen Werthe der Function $f(x + h) - f(x)$, sobald der Werth der Grösse h gegen die Null abnimmt, selbst gegen die Null abnehmen soll. Es muss sich also für eine beständige Verkleinerung des Abstandes $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ der Abstand $\mathfrak{S}_1\mathfrak{R}_1$ ebenfalls der Null nähern. Die beiden Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$

bilden daher die gegenüberliegenden Ecken eines Rechteckes $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{T}_1$, dessen zusammenstossende Seiten $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{R}_1$ die Eigenschaft haben, dass mit der Abnahme der Seite $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}_1$ gegen die Null auch die andere Seite $\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{R}_1$ gegen die Null abnimmt. Die Stetigkeit der Function $f(x)$ hat also die Folge, dass je zwei Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$, deren Coordinatenpaare x, y und x_1, y_1 die Gleichung $y = f(x)$ erfüllen, bei einer beständigen Annäherung der Fusspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, selbst einander so nahe kommen als man nur will. Da aber eine Linie eine durch ein Gesetz bestimmte Folge von unbegrenzt vielen Punkten ist, unter denen für jeden einzelnen Punkt ein Nachbarpunkt angegeben werden kann, der von dem erstern um beliebig wenig absteht, so wird durch die mit der stetigen Function $f(x)$ gebildete Gleichung $y = f(x)$ in der That eine Linie dargestellt. Man bezeichnet die characteristische Eigenschaft einer Linie durch den Ausdruck, dass sie eine stetige Folge von Punkten sei. Somit ist der Zusammenhang nachgewiesen, der zwischen der Stetigkeit einer solchen Folge von Punkten und der Stetigkeit einer Function einer Variable besteht.

Wenn man zwei Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ der durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellten Curve vermittelst einer geraden Linie verbindet, so heisst die letztere, insofern $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ ihre Endpunkte bezeichnen, *eine Sehne der Curve*, dagegen insofern die Curve von der unbegrenzt verlängerten Linie geschnitten wird, *eine Secante der Curve.* Die Lage der Linie $\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}_1$ hängt allein von dem Winkel φ ab, den sie mit der positiven Seite der durch den Punkt $\mathfrak{R}$ gezogenen Parallele zur x Axe bildet. Man kann daher die Frage nach der Lage jener Sehne leicht beantworten, indem man aus der Gleichung der Curve die Bestimmung der trigonometrischen Tangente des Winkels φ ableitet. Mit Hülfe der Formeln (2) des vorigen § ergiebt sich aus der Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{R}_1$ der Ausdruck

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die durch die Punkte (x, y) *und* (x_1, y_1) *gelegte Sehne mit der positiven Seite einer Parallele zur* x *Axe macht, ist gleich dem Quotienten, der durch Division der Differenz der Werthe der Variable* x *in* *die Differenz der zugeordneten Werthe der Function* $y = f(x)$ *entsteht.*

Der Ausdruck (3) möge für die Gleichung (11) des vorigen § aufgestellt werden, welche sich auf die Parabel bezieht. Hier ist

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{m+\mu}{2} + \dfrac{(x-l)^2}{2(m-\mu)} \\ f(x+h) = \dfrac{m+\mu}{2} + \dfrac{(x+h-l)^2}{2(m-\mu)}, \end{cases}$$

folglich

$$(5)\quad f(x+h) - f(x) = \frac{(x+h-l)^2}{2(m-\mu)} - \frac{(x-l)^2}{2(m-\mu)}.$$

Man hat aber

$$(6)\quad (x+h-l)^2 - (x-l)^2 = 2h(x-l) + h^2,$$

weshalb bei der Bildung des Quotienten $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ die Division mit der Grösse h algebraisch bewerkstelligt werden kann. Sie führt zu der Gleichung

$$(7)\quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x-l}{m-\mu} + \frac{h}{2(m-\mu)}.$$

Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels φ, den die Sehne der Parabel $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ mit der Parallele zur x Axe macht, wird daher durch den Ausdruck

$$(8)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x-l}{m-\mu} + \frac{h}{2(m-\mu)}$$

bezeichnet.

§ 4. Bestimmung der Lage der geraden Linie, durch welche eine ebene Curve in einem gegebenen Punkte berührt wird.

Um eine allgemeine Definition von der Berührung zwischen einer ebenen Curve und einer geraden Linie zu erhalten, denke man sich zwei Punkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ der gegebenen Curve durch eine Sehne verbunden und diese über den Punkt $\mathfrak{R}_1$ hinaus bis zu dem unbestimmten Punkte $\mathfrak{U}$ verlängert. Es werde, während der eine Punkt $\mathfrak{R}$ fest bleibt, der andere Punkt $\mathfrak{R}_1$ dem Punkte $\mathfrak{R}$ auf der Curve fortwährend genähert. Dadurch wird die Lage der Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ in solcher Weise geändert, dass sich die Secante allmählig um den Endpunkt $\mathfrak{R}$ herumdreht.

Wenn sich nun die Lage der Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ *bei fortwäh-*

rend abnehmender Sehne $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ einer bestimmten Lage $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ als Grenze nähert, so wird die Curve durch die gerade Linie $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ berührt. Die gerade Linie $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ heisst die Tangente der Curve in dem Punkte $\mathfrak{R}$.

Aus der aufgestellten Definition folgt die Bestimmung der Tangente in einem Punkte $\mathfrak{R}$ eines Kreises vermittelst der Bemerkung, dass die Sehne $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ mit dem von $\mathfrak{R}$ aus nach dem Centrum des Kreises gezogenen Radius einen spitzen Winkel bildet, der um so grösser wird, je näher der Punkt $\mathfrak{R}_1$ dem Punkte $\mathfrak{R}$ kommt, und der sich einem rechten Winkel als Grenze nähert. Die in dem Punkt $\mathfrak{R}$ senkrecht gegen den Kreisradius gezogene gerade Linie berührt also den Kreis in dem Punkte $\mathfrak{R}$.

Die Bestimmung der Lage der berührenden Linie für einen Punkt einer ebenen Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) \tag{1}$$

in den rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, bildet eine Grundaufgabe der analytischen Geometrie. Ihre Lösung lässt sich aus der Darstellung ableiten, welche im vorigen § für die trigonometrische Tangente des Winkels φ gefunden wurde, den die Sehne $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ mit der positiven Seite der Parallele zu der x Axe bildet, und die in den dortigen Bezeichnungen so lautet

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2}$$

Im vorigen § ist gezeigt worden, dass, wenn man die Grösse h gegen die Null abnehmen lässt, der Fusspunkt $\mathfrak{P}_1$ dem Fusspunkte $\mathfrak{P}$ und in Folge dessen der Punkt $\mathfrak{R}_1$ dem Punkte $\mathfrak{R}$ der Curve sich immer mehr nähert. Mithin muss in dem Quotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ die Grösse h numerisch ohne Ende abnehmen, falls der Winkel φ den Neigungswinkel einer Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ darstellt, die durch den festen Punkt $\mathfrak{R}$ und einen demselben auf der Curve beständig genäherten Punkt $\mathfrak{R}_1$ hindurchgeht. Die Voraussetzung, auf der die Definition einer die Curve in dem Punkte $\mathfrak{R}$ berührenden geraden Linie beruht, dass die Lage der Linie $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ sich einer Lage $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ als Grenze nähere, hat den Inhalt, dass der Winkel φ oder, was gleichzeitig geschieht, die trigonometrische Tangente des Winkels φ

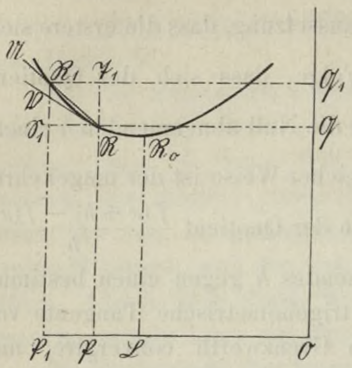
sich einem festen Grenzwerthe nähere. Weil nun nach (2) die trigonometrische Tangente von φ gleich dem Quotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist, so hat die Voraussetzung, dass die erstere sich einem Grenzwerth nähere, zur Folge, dass sich der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei einem gegen die Null abnehmenden h einem festen Grenzwerthe nähert. In gleicher Weise ist der umgekehrte Schluss gerechtfertigt, dass, wofern der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für ein gegen die Null abnehmendes h gegen einen bestimmten Grenzwerth convergirt, die trigonometrische Tangente von φ gegen denselben bestimmten Grenzwerth convergire, und dass alsdann die betreffende Curve in dem Punkte (x, y) durch diejenige gerade Linie berührt werde, für welche die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels zu der x Axe jenem Grenzwerthe gleich ist. *Die analytische Bestimmung der geraden Linie, durch welche die gegebene Curve in einem Punkte* (x, y) *berührt wird, hängt daher von der Aufgabe ab, zu untersuchen, ob der mit der Function* $f(x)$ *gebildete Quotient* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *für eine numerisch gegen die Null abnehmende Grösse* h *sich einem festen Grenzwerthe nähere, und, wenn dies der Fall ist, den Grenzwerth* $\lim.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *darzustellen. Für die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels* ω, *welchen die gesuchte berührende Linie mit der positiven Seite einer Parallele zur* x *Axe bildet, gilt dann die Gleichung*

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\omega = \lim.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Bei dem im vorigen § behandelten Beispiel der Parabel, auf welche sich die auf der nächsten Seite stehende Figur 6 bezieht, kann der aufzusuchende Grenzwerth leicht angegeben werden. Dort war

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{m+\mu}{2} + \frac{(x-l)^2}{2(m-\mu)} \\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x-l}{m-\mu} + \frac{h}{2(m-\mu)}. \end{aligned} \right.$$

Sobald sich die Grösse h von der positiven oder der negativen Seite her der Null nähert, so convergirt, da die Constante $m-\mu$ nach der getroffenen Voraussetzung einen von der Null verschiedenen Werth haben muss, der Werth $\frac{h}{2(m-\mu)}$ gegen die Null, mithin das zu untersuchende Aggregat gegen den von h unabhängigen Bestandtheil $\frac{x-l}{m-\mu}$ als Grenzwerth. Es entsteht daher das Resultat



(Figur 6)

$$\text{(5)} \qquad \lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x-l}{m-\mu}.$$

Demgemäss erhält die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels ω zwischen der an die Parabel gezogenen berührenden Linie und der positiven Seite der Parallele zur x Axe den Ausdruck

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{x-l}{m-\mu}.$$

Es hat sich gezeigt, dass in der vorliegenden Anwendung der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für ein positives und ein negatives abnehmendes h gegen denselben Grenzwerth convergirt. Was das Vorzeichen der Grösse h anlangt, so leuchtet überhaupt ein, dass, wofern die Function $f(x)$ für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegeben ist, die Grösse h bei dem extremen Werthe $x=a$ nur positiv, bei dem extremen Werthe $x=b$ nur negativ, dagegen bei jedem zwischen a und b liegenden Werthe sowohl positiv als negativ genommen werden darf. Unter den ersten beiden Voraussetzungen ist der zugeordnete Punkt (x, y) oder $\mathfrak{R}$ ein Endpunkt der gegebenen Curve; unter der letzten Voraussetzung liegt der Punkt innerhalb der Curve, und kann mit einem Punkte $\mathfrak{R}_1$ der Curve verbunden werden, der sich auf der einen oder auf der anderen Seite von $\mathfrak{R}$ befindet; die beiden Annahmen entsprechen den zwei verschiedenen Vorzeichen der Grösse h. Ist die mit einem positiven h gebildete Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ in die Tangente $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ übergegangen, und durchläuft ein Punkt, von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{B}$ fortschreitend, diese Tangente, so nimmt dabei seine Coordinate x zu. Ist die mit einem negativen h gebildete Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1\mathfrak{U}$ in die Tangente $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ übergegangen, und durchläuft ein Punkt, von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{B}$ fortschreitend, diese Tangente, so nimmt dabei seine Coordinate x ab. Mithin würde die Curve, wenn der Fall eintreten sollte, dass sich der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für ein positives h einem anderen Grenzwerthe näherte als für ein negatives h, in dem bezüglichen Punkte zwei verschiedene berührende Linien haben. Ein solcher Fall kann vorkommen, darf aber als Ausnahmefall angesehen werden. Sobald der zu einem positiven h und einem negativen h gehörende Grenzwerth derselbe ist, bilden die beiden entsprechenden berührenden Linien eine einzige von $\mathfrak{R}$ aus nach zwei Seiten ausgedehnte gerade Linie, und dieser Fall stellt die Regel dar.

Für die Einsicht in den Verlauf der durch die Gleichung (1) repräsentirten Curve ist es wesentlich zu unterscheiden, an welchen Stellen der Grenzwerth des Quotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, der gleich $\operatorname{tg}\omega$ ist, einen positiven oder negativen oder verschwindenden Werth annimmt. Bei einem verschwindenden Werthe von $\operatorname{tg}\omega$ ist die zugehörige die Curve berührende Linie mit der x Axe parallel, bei einem positiven Werthe steigt ein Punkt, welcher die berührende Linie, indem seine Coordinate x zunimmt, durchläuft, aufwärts, bei einem negativen Werthe sinkt ein Punkt, welcher die berührende Linie in der angegebenen Weise durchläuft, abwärts. Im ersten Falle sagt man, die berührende Linie sei nach oben, im zweiten Falle, sie sei nach unten geneigt.

Der in Bezug auf die Parabel abgeleitete Ausdruck (6) ist fähig, alle Fälle zu vergegenwärtigen. Wenn man, wie in § 2 geschehen, voraussetzt, dass die Differenz $m-\mu$ positiv sei, so wird der Ausdruck $\operatorname{tg}\omega = \frac{x-l}{(m-\mu)}$ positiv, negativ oder verschwindend, je nachdem die Grösse $x-l$ die erste, zweite oder dritte Eigenschaft hat. Nach der obigen Figur 6, die mit der dortigen Figur 4 übereinstimmt hängt dies davon ab, ob der zu dem Punkte (x, y) gehörende auf der x Axe befindliche Fusspunkt $\mathfrak{P}$ rechts von dem Punkte $\mathfrak{L}$, links von dem Punkte $\mathfrak{L}$ liegt oder mit demselben zusammenfällt. Es ist daher die berührende Linie der Parabel in dem Punkte $\mathfrak{R}_0$, der zu dem Fusspunkte $\mathfrak{L}$ gehört und nach § 2 den tiefsten Punkt der Parabel bezeichnet, mit der x Axe parallel, in jedem Punkte $\mathfrak{R}$, der rechts von $\mathfrak{R}_0$ liegt, nach unten, in jedem Punkte $\mathfrak{R}$, der links von $\mathfrak{R}_0$ liegt, nach oben geneigt.

§ 5. Definition des Differentialquotienten einer Function einer Variable als Grenzwerth des Quotienten bei der Division der Differenz zweier Werthe der Variable in die Differenz der zugeordneten Werthe der Function.

Die Ermittelung des Grenzwerthes, welcher nach dem vorigen § diejenige gerade Linie bestimmt, von der eine gegebene ebene Curve in einem gegebenen Punkte berührt wird, ist die Grundoperation, von welcher die Differentialrechnung ihren Namen empfangen hat. *Wenn $f(x)$ eine für alle zwischen den Grössen a und b liegenden Werthe von x gegebene stetige Function der variabeln Grösse x bedeutet, und wenn der durch die Division der Differenz der Variable in die Differenz der zugeordneten Werthe der Function entstehende Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für einen festen Werth x und für einen numerisch gegen die Null abnehmenden Werth h gegen einen bestimmten Grenzwerth* $\lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *convergirt, so heisst dieser Grenzwerth der nach der variabeln Grösse x genommene Differentialquotient der Function $f(x)$, und die Darstellung dieses Grenzwerthes die Differentiation der Function $f(x)$ in Bezug auf die variable Grösse x.*

Das von Leibnitz eingeführte Zeichen des Differentialquotienten wird durch die Gleichung

$$\lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d f(x)}{d x} \tag{1}$$

definirt.

Die nächste Aufgabe geht dahin, allgemeine Methoden für die Differentiation der Functionen einer variabeln Grösse zu entwickeln. Bei der Wahl der Reihenfolge, in welcher die verschiedenen Functionen zur Behandlung kommen, werden wir dieselben Gesichtspunkte festhalten, auf denen die Anordnung im ersten Bande beruht, und mit den algebraischen rationalen ganzen Functionen beginnen.

§ 6. Differentiation der Summe, der Differenz, des Products von zwei Functionen einer Variable. Differentiation einer algebraischen rationalen ganzen Function einer Variable.

Eine algebraische rationale ganze Function einer Variable x ist nach I, § 22 gleich einem Ausdruck, der aus einer beschränkten Zahl von constanten Grössen und aus der Variable x durch eine beliebige, der Zahl nach beschränkte Reihenfolge von Operationen des Addirens, Subtrahirens und Multiplicirens erhalten wird. Man kann daher zu der Regel für die Differentiation einer solchen Function gelangen, indem man zuerst den Differentialquotienten einer constanten Grösse, dann den Differentialquotienten der Variable x nach der Variable x bestimmt, und hierauf zeigt, wie aus den Differentialquotienten von zwei Functionen der Differentialquotient ihrer Summe, ihrer Differenz und ihres Products abgeleitet wird.

Es sei die zu differentiirende Function $f(x)$, für ein beliebig ausgedehntes Intervall der Variable x, gleich der constanten Grösse c,

(1) $$f(x) = c.$$

Legt man der Variable einen bestimmten Werth x und hierauf einen von diesem verschiedenen Werth $x + h$ bei, so ist in Folge der Definition (1) sowohl $f(x) = c$ wie auch $f(x+h) = c$, mithin $f(x+h) - f(x) = 0$ und deshalb auch $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$. Diese Gleichung bleibt noch bestehen, wofern die Grösse h numerisch immer abnehmende, positive oder negative Werthe erhält. Daher ist der gesuchte Grenzwerth des Quotienten ebenfalls die Null, und es folgt aus (1) die Gleichung

(2) $$\lim . \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

oder nach der im vorigen § festgestellten Bezeichnung

(3) $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Das gefundene Resultat hat in Worten den Ausdruck:

(1) *Der nach der Variable x genommene Differentialquotient einer constanten Grösse ist gleich der Null.*

Es sei ferner die zu differentiirende Function $f(x)$, für ein beliebig ausgedehntes Intervall von x, gleich der Variable x selbst,

(3) $$f(x) = x.$$

Dann gilt für je zwei differente Werthe x und $x+h$ die Gleichung $f(x+h) - f(x) = h$, aus der die Gleichung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1$ folgt. Der Werth des Bruches bleibt auch für ein numerisch beständig abnehmendes h gleich der Einheit, so dass die Gleichung

(4) $$\lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1,$$

oder

(5) $$\frac{dx}{dx} = 1$$

entsteht. Die so erhaltene Regel lautet demnach:

(2) *Der nach der Variable x genommene Differentialquotient der Variable x ist gleich der Einheit.*

Wir betrachten jetzt zwei für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene endliche und stetige Functionen $f(x)$ und $g(x)$, bei denen vorausgesetzt wird, dass jeder der Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{dg(x)}{dx}$, welche der Gleichung (1) des vorigen § entsprechend durch die beiden Gleichungen

(6) $$\begin{cases} \lim . \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{df(x)}{dx} \\ \lim . \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{dg(x)}{dx} \end{cases}$$

definirt sind, einen festen endlichen Werth habe; als endlich wird ein Werth bezeichnet, sobald er einen von vorne herein bestimmten Werth numerisch nicht überschreiten kann. Um den Differentialquotienten der Summe, der Differenz und des Products zu bestimmen, ist für die Summe $f(x) + g(x)$ der Quotient

$$(7)\qquad \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h},$$

für die Differenz $f(x)-g(x)$ der Quotient

$$(8)\qquad \frac{f(x+h)-g(x+h)-(f(x)-g(x))}{h},$$

für das Product $f(x)\,g(x)$ der Quotient

$$(9)\qquad \frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}$$

zu untersuchen. Die Quotienten lassen sich beziehungsweise in die folgende Gestalt bringen

$$(10)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

$$(11)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

$$(12)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\,h.$$

Sobald die Grösse h numerisch ohne Ende abnimmt, nähert sich nach der getroffenen Annahme der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dem festen Grenzwerthe $\frac{df(x)}{dx}$ und der Quotient $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ dem festen Grenzwerthe $\frac{dg(x)}{dx}$. Wie sich bei der Bewegung von h die Ausdrücke (10), (11), (12) verhalten, hängt daher von der Rechnung mit Grenzwerthen ab. Die Grundsätze für die Rechnung mit den Grenzwerthen, welchen sich Folgen von rationalen Brüchen nähern, sind in I, § 16 auseinander gesetzt worden, und es ist I, § 105 hervorgehoben, dass dieselben Grundsätze für die Rechnung mit den Grenzwerthen gültig bleiben, welchen sich Folgen von bestimmten Grössen nähern. Vermöge der so eben erwähnten Voraussetzung convergirt nach diesen Principien der Ausdruck (10) als Grenzwerth gegen die Summe $\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$, der Ausdruck (11) gegen die Differenz $\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$. Bei (12) nähert sich in dem ersten Summanden der erste Factor dem Grenzwerthe $\frac{df(x)}{dx}$, folglich der erste Summand dem Producte $\frac{df(x)}{dx}g(x)$, ebenso in dem zweiten Summanden der zweite Factor dem Grenzwerthe $\frac{dg(x)}{dx}$, mithin der zweite Summand dem Producte $f(x)\frac{dg(x)}{dx}$. In dem dritten Summanden nähert sich der erste Factor dem endlichen Grenzwerthe $\frac{df(x)}{dx}$, der zweite dem endlichen Grenzwerthe $\frac{dg(x)}{dx}$, während der dritte Factor die Grösse h ist und als solche gegen die Null convergirt, und daher convergirt das Product der drei Factoren, von denen die beiden ersten endlich sind, das heisst einen von vorne herein bestimmten Werth numerisch nicht übertreffen können, gegen den Grenzwerth Null. Der Ausdruck (12) erhält demnach für seinen Grenzwerth von dem verschwindenden Grenzwerthe des dritten Summanden keinen Beitrag und convergirt gegen denjenigen Werth, welcher aus der Addition der Grenzwerthe der beiden ersten Summanden $\frac{df(x)}{dx}g(x)$ und $f(x)\frac{dg(x)}{dx}$ hervorgeht. Auf diese Weise ergeben sich die Resultate

$$(13)\quad \lim.\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(14)\quad \lim.\frac{f(x+h)-g(x+h)-(f(x)-g(x))}{h}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(15)\quad \lim.\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

Sie haben in den eingeführten Bezeichnungen den Ausdruck

$$(16)\qquad \frac{d(f(x)+g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(17)\qquad \frac{d(f(x)-g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(18)\qquad \frac{d(f(x)\,g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx},$$

der sich in die folgenden Worte kleiden lässt:

(3) *Der Differentialquotient der Summe von zwei Functionen ist gleich der Summe ihrer Differentialquotienten. Der Differen-*

tialquotient der Differenz von zwei Functionen ist gleich der entsprechend gebildeten Differenz ihrer Differentialquotienten. Der Differentialquotient des Products von zwei Functionen ist gleich dem Aggregat der beiden Producte, die entstehen, indem jede Function mit dem Differentialquotienten der anderen multiplicirt wird. Alle drei Resultate beziehen sich auf die Werthe der Variable x in demjenigen Intervall, für welches die zu combinirenden Functionen gegeben sind.

Die Formeln (16), (17), (18) können leicht auf den Fall angewendet werden, dass die eine der beiden Functionen, etwa $g(x)$, gleich einer Constante c ist. Der Differentialquotient $\frac{dg(x)}{dx}$ verschwindet alsdann nach der Regel (1), so dass man die Gleichungen erhält

$$\frac{d(f(x)+c)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \tag{19}$$

$$\frac{d(f(x)-c)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \tag{20}$$

$$\frac{d(cf(x))}{dx} = \frac{c\,df(x)}{dx}. \tag{21}$$

Dieselben lehren, *dass, wenn zu einer Function eine Constante addirt wird, der Differentialquotient der Function ungeändert bleibt, und dass, wenn eine Function mit einer Constante multiplicirt wird, diese Constante zu dem Differentialquotienten der ursprünglichen Function als Factor hinzuzufügen ist, um den Differentialquotienten der neuen Function zu erhalten.*

Für die Bildung des Differentialquotienten einer Summe aus einer beliebigen beschränkten Anzahl von Functionen liefert die wiederholte Benutzung der Formel (16) die Regel: *Der Differentialquotient einer Summe aus einer beliebigen beschränkten Anzahl von Functionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Functionen.*

Nimmt man in der Formel (18) die Function $g(x)$ der Function $f(x)$ gleich, so werden die beiden Summanden der rechten Seite gleich dem Ausdrucke $f(x)\frac{df(x)}{dx}$. Demnach entsteht für den Differentialquotienten des Quadrats $(f(x))^2$ der Ausdruck

$$(22) \qquad \frac{d\,(f(x))^2}{dx} = 2\,f(x)\,\frac{d f(x)}{dx}.$$

Man kann ferner in der Formel (18) statt der Function $g(x)$ das Quadrat $(f(x))^2$ substituiren, wodurch sich für den Differentialquotienten des Cubus $(f(x))^3$ mit Hülfe von (22) die Bestimmung

$$(f(x))^2\,\frac{d f(x)}{dx} + f(x)\,2\,f(x)\,\frac{d f(x)}{dx} = 3\,(f(x))^2\,\frac{d f(x)}{dx}$$

ergiebt. Die Fortsetzung dieses Verfahrens erzeugt *den folgenden Ausdruck des Differentialquotienten der beliebigen positiven ganzen nten Potenz der Function* $f(x)$

$$(23) \qquad \frac{d\,(f(x))^n}{dx} = n\,(f(x))^{n-1}\,\frac{d f(x)}{dx}.$$

Da seine Gültigkeit für die Werthe $n=2$ und $n=3$ bewiesen ist, so besteht derselbe allgemein, wofern aus der für einen bestimmten Werth von n angenommenen Gültigkeit die Richtigkeit für den um die Einheit grösseren Werth der Zahl n folgt. Gesetzt, die Gleichung (23) sei für einen bestimmten Werth von n zutreffend, so ergiebt sich in (18) durch Einführung von $(f(x))^n$ statt der Function $g(x)$ auf der linken Seite der Differentialquotient der $(n+1)$ten Potenz $(f(x))^{n+1}$, auf der rechten Seite das Aggregat

$$(f(x))^n\,\frac{d f(x)}{dx} + f(x)\,n(f(x))^{n-1}\,\frac{d f(x)}{dx} = (n+1)(f(x))^n\,\frac{d f(x)}{dx}.$$

Der bezeichnete Ausdruck wird aus der rechten Seite von (23) hervorgebracht, indem man statt der Zahl n die Zahl $(n+1)$ substituirt. Mithin gilt die in Rede stehende Formel auch für den um die Einheit vergrösserten Werth der Zahl n, und deshalb für jeden positiven ganzen Werth der Zahl n, wie behauptet worden war.

Um den Differentialquotienten einer für jeden bestimmten Werth von x gegebenen beliebigen rationalen ganzen Function der Variable x zu erhalten, darf man annehmen, dass die behufs der Bildung der Function vorgeschriebenen Operationen ausgeführt seien, wodurch die Function nach I, § 23 in das Aggregat einer beschränkten Anzahl verschiedener positiver Potenzen der Variable x übergeht, deren Exponenten die von einer Zahl n bis zu der Null herabsteigende Reihe der positiven ganzen Zahlen bilden, und die respective mit den constanten Coefficienten a_0, a_1, ... a_n multiplicirt sind. Man hat demnach für die Function $f(x)$ den für jeden bestimmten Werth der Variable x geltenden Ausdruck

(24) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Vermöge der oben abgeleiteten Regel ist der Differentialquotient der vorliegenden Summe, bei der die Anzahl der Summanden eine beschränkte ist, gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Bestandtheile $a_0 x^n$, $a_1 x^{n-1}$, ... $a_{n-1} x$, a_n. Jeder von diesen entsteht durch die Multiplication einer positiven ganzen Potenz der Variable x mit einer Constante, weshalb der betreffende Differentialquotient nach der obigen Gleichung (21) gefunden wird, indem man den Differentialquotienten der jedesmaligen Potenz der Variable x mit der zugeordneten Constante multiplicirt. Es ist daher nur der Differentialquotient einer beliebigen positiven ganzen Potenz der Variable x abzuleiten. Dies geschieht mit Hülfe der Formel (23), indem die Function $f(x)$ durch die Variable x ersetzt wird. Der für die rechte Seite darzustellende Differentialquotient der Variable x nach dieser selbst ist gemäss der Regel (2) für jeden beliebigen Werth von x gleich der Einheit; man erhält daher *die für jeden gegebenen Werth von x gültige Bestimmung des Differentialquotienten der positiven ganzen Potenz x^n*,

(25) $$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}.$$

Wenn nunmehr die Differentialquotienten der erwähnten Summanden der Function $f(x)$ gebildet werden, so gehört zu $a_0 x^n$ der Ausdruck $n a_0 x^{n-1}$, zu $a_1 x^{n-1}$ der Ausdruck $(n-1) a_1 x^{n-2}$ u. s. f., zu $a_{n-1} x$ der Ausdruck a_{n-1}, zu der Constante a_n nach der Regel (1) der Werth Null. Die Addition der einzelnen Differentialquotienten liefert alsdann *für jeden bestimmten Werth von x den Differentialquotienten der in* (24) *dargestellten rationalen ganzen Function $f(x)$*,

(26) $$\frac{df(x)}{dx} = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Jede rationale ganze Function einer Variable x hat demnach für jeden bestimmten Werth derselben einen vollkommen bestimmten durch die vorstehende Formel darstellbaren Differentialquotienten. Dass jede solche Function für alle bestimmten Werthe der Variable x eine stetige Function derselben sei, ist I, § 108 mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes gezeigt worden. Aus diesem Satze lassen sich auch die obigen Gleichungen (25) und (26) ableiten, während die mitgetheilte Deduction von demselben unabhängig ist.

Wenn eine rationale ganze Function nicht nach den Potenzen der Variable x geordnet vorliegt, sondern als das Resultat von auszuführenden Additionen, Subtractionen und Multiplicationen rationaler ganzer Functionen gegeben ist, so kann der betreffende Differentialquotient vermittelst der Regeln (3) und ihrer Consequenzen gefunden werden, ohne dass die verlangten Operationen vorher wirklich ausgeführt sind. Es sei zum Beispiel

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(6x + 2) - (3x^2 + 2x + 1)^2.$$

Dann ist nach (18)

$$\frac{d\{(x^3 + x^2 + x + 1)(6x + 2)\}}{dx}$$
$$= (3x^2 + 2x + 1)(6x + 2) + (x^3 + x^2 + x + 1)6,$$

ferner nach (23)

$$\frac{d(3x^2 + 2x + 1)^2}{dx} = 2(3x^2 + 2x + 1)(6x + 2),$$

folglich nach (17)

$$\frac{df(x)}{dx} = -(3x^2 + 2x + 1)(6x + 2) + (x^3 + x^2 + x + 1)6.$$

Die gegebene Function $f(x)$ nimmt durch die vollständige Entwickelung der angedeuteten Operationen die Gestalt an

$$f(x) = -3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1,$$

so dass der gesuchte Differentialquotient vermöge der Vorschrift (26) den Ausdruck

$$\frac{df(x)}{dx} = -12x^3 - 12x^2 - 4x + 4$$

erhält, welcher dem zuerst gefundenen nothwendig gleich ist. Ein anderes Beispiel liefert die Function, die in (4) des § 4 behandelt ist und zu der Gleichung der Parabel gehört.

§ 7. Differentiation des Quotienten von zwei Functionen einer Variable. Differentiation einer algebraischen rationalen gebrochenen Function einer Variable.

Bei der Verbindung von zwei gegebenen Functionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division muss man den in I, § 22 hervorgehobenen Umstand beachten, dass zwei bestimmte Grössen immer addirt, subtrahirt und multiplicirt werden dürfen und dann als Resultat eine entsprechende bestimmte Grösse liefern, dass aber die Division nur mit einem von der Null verschiedenen Divisor gestattet ist. Hieraus folgt, dass, wenn zwei Functionen einer Variable $f(x)$ und $g(x)$ für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ bestimmte gegebene Werthe haben, ihre Summe wie ihre Differenz und ihr Product für dasselbe Intervall der Variable x ebenfalls vollkommen bestimmte Werthe erhalten, während ihr Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ nur für diejenigen Werthe von x definirt ist, für welche die Nennerfunction $g(x)$ nicht verschwindet. Wofern die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig sind, so überträgt sich die Eigenschaft der Stetigkeit für das gleiche Intervall auch auf die Summe $f(x) + g(x)$, die Differenz $f(x) - g(x)$ und das Product $f(x)\, g(x)$, was aus den Ausdrücken (10), (11), (12) des vorigen § hervorgeht, die zu der Entwickelung der Differentialquotienten der bezeichneten Verbindungen gedient haben; bei dem Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ braucht jedoch die Stetigkeit innerhalb des angegebenen Intervalls nicht überall zu bestehen. Es sei $f(x)$ gleich der Einheit, $g(x)$ gleich der mit der beliebigen constanten Grösse ξ gebildeten Differenz $x - \xi$, dann ist der Quotient $\frac{1}{x-\xi}$ für alle Werthe von x, den Werth $x - \xi$ ausgenommen, bestimmt. Der Zähler und der Nenner des Bruches sind in Bezug auf jeden Werth von x, oder mit anderen Worten in dem Intervall $-\alpha \leqq x \leqq \beta$ stetig, wo α und β beliebig grosse positive Werthe bedeuten. Der Quotient $\frac{1}{x-\xi}$ bildet aber das in I, § 108 angeführte Beispiel einer Function, welche sowohl für alle Werthe von x, bei denen $x - \xi$ positiv, wie auch für alle Werthe von x, bei denen $x-\xi$ negativ ist, stetig bleibt, allein bei dem Uebergange von einem unter ξ liegenden zu einem über ξ liegenden Werthe eine Unterbrechung der Stetigkeit zeigt. Indem man mit δ und ε beliebig kleine positive Werthe ausdrückt und für α und β die obige Bestimmung beibehält, darf man sagen, dass der Quotient $\frac{1}{x-\xi}$ für das Intervall

(1) $$-\alpha \leqq x \leqq \xi - \delta$$

und auch für das Intervall

(1*) $$\xi + \varepsilon \leqq x \leqq \beta$$

stetig sei. Nach einer am erwähnten Orte angestellten Betrachtung nähert sich die für zwei Werthe x und $x+h$ aufgestellte Differenz

(2) $$\frac{1}{x+h-\xi} - \frac{1}{x-\xi} = \frac{-h}{(x+h-\xi)(x-\xi)}$$

bei einem numerisch abnehmenden h der Null, sowohl wenn x und $x+h$ gleichzeitig in dem ersten Intervall, wie auch wenn dieselben gleichzeitig in dem zweiten Intervalle liegen; sie nimmt aber, wenn $x=\xi-\delta$, $x+h=\xi+\varepsilon$ gesetzt wird, den Werth $\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\delta}$ an, welcher für angemessen kleine Werthe von δ und ε beliebig gross wird.

Für jedes der beiden Intervalle, in welchen die Function $\frac{1}{x-\xi}$ stetig bleibt, lässt sich ihr nach der Variable x zu nehmender Differentialquotient dadurch bestimmen, dass die beiden Seiten der Gleichung (2) durch die Grösse h dividirt werden. Man erhält alsdann

(2) $$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h-\xi} - \frac{1}{x-\xi}\right) = \frac{-1}{(x+h-\xi)(x-\xi)}.$$

Unter der Voraussetzung des ersten Intervalls ist $x \leqq \xi - \delta$ und $x+h \leqq \xi - \delta$, mithin haben $x-\xi$ und $x+h-\xi$ das negative Vorzeichen; unter der Voraussetzung des zweiten Intervalles ist $\xi+\varepsilon \leqq x$ und $\xi+\varepsilon \leqq x+h$, so dass $x-\xi$ und $x+h-\xi$ das positive Vorzeichen führen. Wenn die Grösse h abnimmt, convergirt die Grösse $x+h-\xi$ ohne ihr Vorzeichen zu ändern gegen die von Null verschiedene Grösse $x-\xi$, folglich die rechte Seite von (2) gegen den bestimmten Werth $\frac{-1}{(x-\xi)^2}$. Somit wird *der Differentialquotient der Function* $\frac{1}{x-\xi}$ *in Bezug auf die Variable* x durch die Formel

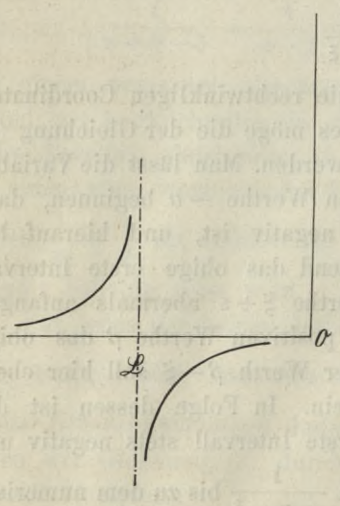
$$(4) \qquad \frac{d\left(\frac{1}{x-\xi}\right)}{dx} = \frac{-1}{(x-\xi)^2}$$

dargestellt.

Wir wollen die bei der Function $\frac{1}{x-\xi}$ auftretende *Unterbrechung der Stetigkeit* und das Verhalten des zugehörigen Differentialquotienten durch die in § 3 entwickelte geometrische Deutung veranschaulichen. Nachdem für die Variable y die Gleichung

$$(5) \qquad y = \frac{1}{x-\xi}$$

aufgestellt ist, seien x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene, und es möge die der Gleichung (5) entsprechende Curve untersucht werden. Man lässt die Variable x mit einem so grossen negativen Werthe $-\alpha$ beginnen, dass auch $-\alpha-\xi$ sehr gross und negativ ist, und hierauf bis zu dem Werthe $\xi-\delta$ fortschreitend das obige erste Intervall durchlaufen, dann mit dem Werthe $\xi+\varepsilon$ abermals anfangen und bis zu dem sehr grossen positiven Werthe β das obige zweite Intervall durchlaufen; der Werth $\beta-\xi$ soll hier ebenfalls sehr gross und positiv sein. In Folge dessen ist der Werth der Variable y für das erste Intervall stets negativ und geht von dem numerisch kleinen $\frac{1}{-\alpha-\xi}$ bis zu dem numerisch grossen $\frac{1}{-\delta}$, er ist hingegen für das zweite Intervall stets positiv und bewegt sich von dem grossen $\frac{1}{\varepsilon}$ bis zu dem kleinen $\frac{1}{\beta-\xi}$. Bei der in § 2 angenommenen Lage der Coordinatenaxen bleibt also der Punkt (x, y) der Curve für das erste Intervall der Coordinate x immer unterhalb der Abscissenaxe, steht von derselben anfangs um beliebig wenig ab, fällt fortwährend und kommt zu beliebig grossen Abständen. Für das zweite Intervall der Coordinate x ist der Punkt (x, y) stets oberhalb der Abscissenaxe befindlich, anfangs in beliebiger Höhe über derselben, sinkt beständig herab und rückt ihr schliesslich beliebig nahe. Es leuchtet ein, dass, wenn durch den Punkt $x = \xi$ der Abscissenaxe zu derselben eine Senkrechte gezogen wird, der zu dem ersten Intervall gehörende Theil der Curve sich mehr und mehr an die Abscissenaxe von unten und an die construirte Senkrechte von der rechten Seite anschliesst, während sich der zu dem zweiten Intervall gehörende Theil der Curve beständig jener Senkrechten von der linken Seite und der Abscissenaxe von oben nähert. Gerade Linien, denen eine Curve in ihrem Verlauf stets näher kommt, ohne sie jemals zu erreichen, werden *Asymptoten der Curve* genannt. Die erörterte Curve, die in Figur 7 so dargestellt wird, dass der Punkt $\mathfrak{L}$ der x Axe dem Werthe $x = \xi$ entspricht, ist *eine Hyperbel*; um die obige Gleichung (5) aus der in § 2 angeführten allgemeinen Gleichung abzuleiten, müsste die letztere durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems umgeformt und in Bezug auf die vorkommenden Constanten speciellen Einschränkungen unterworfen werden. Die beiden Theile oder Zweige der Curve werden durch die Asymptote $x = \xi$ vollständig von einander getrennt; sobald man auf den Werth der Abscisse $x = \xi - \delta$ den Werth $x = \xi + \varepsilon$ folgen lässt, springt der Punkt (x, y) von dem einen Zweige der Curve zu dem anderen hinüber. Der in (4) angegebene Werth des Differentialquotienten $\frac{-1}{(x-\xi)^2}$ bezeichnet nach § 4 die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels ω, welchen die in dem Punkte (x, y) berührende Linie mit der positiven Seite einer zu der x Axe gezogenen Pa-



(Figur 7)

rallele einschliesst. Die Grösse $\frac{-1}{(x-\xi)^2}$ ist stets negativ, ihr numerischer Werth wird für einen beliebig grossen numerischen Werth von $x-\xi$ beliebig klein, für einen beliebig kleinen numerischen Werth von $x-\xi$ beliebig gross. Die an die Hyperbel gezogene berührende Linie ist deshalb unter den geltenden Voraussetzungen stets nach unten geneigt; bei dem numerischen Wachsen von $\operatorname{tg}\omega$ nähert sich der Winkel ω einem Rechten. Lässt man die beiden Zweige der Curve, wie vorhin angegeben, von einem Punkte so durchlaufen, dass der Werth der zugehörigen Coordinate x fortwährend wächst, und verfolgt die in dem Punkte construirte berührende Linie, so bildet dieselbe auf dem ersten Zweige anfangs mit der Abscissenaxe einen beliebig kleinen Winkel, bei der Annäherung gegen die Asymptote $x=\xi$ einen von einem Rechten beliebig wenig abweichenden Winkel, auf dem zweiten Zweige in der Nähe der Asymptote $x=\xi$ ebenfalls fast einen rechten Winkel und zuletzt bei der Annäherung gegen die Abscissenaxe wieder einen beliebig kleinen Winkel.

Die in Betreff der gebrochenen Function $\frac{1}{x-\xi}$ gemachten Beobachtungen weisen darauf hin, dass, wenn zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ für ein gewisses Intervall der Variable x endlich und stetig sind, und wenn die zugehörigen Differentialquotienten bestimmte endliche Werthe haben, für die Ermittelung des Differentialquotienten des Quotienten aus den beiden Functionen $\frac{f(x)}{g(x)}$ nur Theile des ursprünglichen Intervalls der Variable benutzt werden dürfen, deren jeder so beschaffen ist, dass die Nennerfunction $g(x)$ in demselben das Vorzeichen nicht ändert und um eine bestimmte Grösse von der Null verschieden bleibt. Man hat alsdann den Grenzwerth des Verhältnisses

$$(6) \qquad \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

unter der Voraussetzung aufzusuchen, dass bei einem bestimmten Werthe von x und einem numerisch gegen die Null abnehmenden Werthe von h die Werthe $g(x)$ und $g(x+h)$ dasselbe Vorzeichen behalten und numerisch über einer gewissen bestimmten Grösse bleiben. Mit der Existenz des Differentialquotienten wird zugleich auch die Stetigkeit der Function innerhalb des betreffenden Intervalls nachgewiesen. Indem man das Product $f(x)g(x)$ zu dem Zähler des auf der rechten Seite stehenden Bruches addirt und subtrahirt, kommt

$$(7)\qquad \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)};$$

hier convergirt der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ gegen den Grenzwerth $\frac{df(x)}{dx}$, der Quotient $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ gegen den Grenzwerth $\frac{dg(x)}{dx}$, der Factor $g(x+h)$ des Nenners gegen den Grenzwerth $g(x)$, folglich der Zähler gegen den Grenzwerth $\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}$, der Nenner gegen den Grenzwerth $g(x)g(x)$. Nach den getroffenen Annahmen entsteht daher *der folgende Ausdruck für den Differentialquotienten des Quotienten* $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$(8)\qquad \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)g(x)}.$$

Der Zähler des Ausdruckes wird erhalten, indem man das aus dem Differentialquotienten der Zählerfunction und aus der Nennerfunction gebildete Product um das aus der Zählerfunction und dem Differentialquotienten der Nennerfunction gebildete Product vermindert, der Nenner des Ausdruckes ist das Quadrat der Nennerfunction.

Die gefundene Formel (8) enthält das Mittel zu der Differentiation einer beliebigen algebraischen rationalen gebrochenen Function der Variable x. Jede solche Function lässt sich nach I, § 22 als ein Bruch darstellen, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Functionen der Variable x sind. Ferner kann durch ein Verfahren, das in I, § 68 angegeben ist, diejenige Function des höchsten Grades in Bezug auf die Variable x, welche zugleich in den Zähler und den Nenner algebraisch aufgeht, oder ihr gröster gemeinsamer Theiler aufgesucht, und, falls ein solcher vorhanden ist, aus dem Bruche durch gleichzeitige Division des Zählers und Nenners fortgehoben werden. Auf diese Weise wird die gegebene gebrochene Function gleich einem Bruche $\frac{f(x)}{g(x)}$, bei dem die rationalen ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Die Differentialquotienten von $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich für jede Ausdehnung des Intervalls der Variable x vermöge der im vorigen § mitgetheilten Vorschriften bilden. *Es sei*

$$(9)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \\ g(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_{p-1} x + b_p, \end{cases}$$

dann erzeugt die Substitution der Ausdrücke

$$(9^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{df(x)}{dx} = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ \dfrac{dg(x)}{dx} = p b_0 x^{p-1} + (p-1) b_1 x^{p-2} + \ldots + b_{p-1} \end{cases}$$

in die Formel (8) *den Differentialquotienten der rationalen gebrochenen Function* $\frac{f(x)}{g(x)}$. Das auf die besondere Annahme $f(x) = 1$, $g(x) = x - \xi$ bezügliche Resultat ist vorher in (4) angegeben. Setzt man $f(x) = 1$, $g(x)$ gleich der $p$ten Potenz der Variable x, so entsteht das Resultat

$$(10)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{x^p}\right)}{dx} = \frac{-p}{x^{p+1}},$$

welches durch den Gebrauch der negativen Exponenten die Gestalt

$$(10^*)\qquad \frac{d(x^{-p})}{dx} = -p x^{-p-1}$$

annimmt.

§ 8. Fortsetzung. Unendlichwerden einer algebraischen rationalen gebrochenen Function einer Variable.

Die gefundene Regel für die Differentiation der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ gilt nach ihrer Ableitung für solche Intervalle der Variable x, in denen die ganze Function $g(x)$ ihr

Vorzeichen behält und um eine bestimmte Grösse von der Null verschieden bleibt. Es kommt hierbei vornehmlich auf die Betrachtung der Werthe an, für welche die ganze Function $g(x)$ verschwindet, das heisst der Wurzeln der zugehörigen Gleichung des $p$ten Grades $g(\omega)=0$. Da sich die Aufgaben, mit denen wir es gegenwärtig zu thun haben, nur auf reelle Grössen beziehen, so sind die Coefficienten der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ selbstverständlich reelle Grössen. Doch wird es erforderlich sein, bei der Gleichung $g(\omega)=0$ nicht nur ihre reellen, sondern ihre sämmtlichen reellen und complexen Wurzeln ins Auge zu fassen.

Der Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen (I, § 61 u. ff.) lehrt, dass jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten durch einen reellen oder complexen Werth befriedigt werden kann. Aus diesem Satze folgt nach I, § 67, dass für die gegebene Gleichung $g(\omega)=0$ die Anzahl p von reellen oder complexen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ existirt, mit Hülfe derer die Function $g(x)$ wie folgt in Factoren des ersten Grades zerlegt wird,

(1) $$g(x)=b_0(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_p).$$

Eine solche Zerlegung ist nur auf eine einzige Weise möglich. Unter den Wurzeln der Gleichung mögen sich die q reellen befinden $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_q$; falls es keine reellen Wurzeln gibt, ist $q=0$ zu nehmen. Sind complexe Wurzeln vorhanden, so gehört nach I, § 47 zu jeder Wurzel $\lambda+\mu i$, wo λ und μ reell sind, μ von Null verschieden ist und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet, die conjugirte Grösse $\lambda-\mu i$ als conjugirte Wurzel, da die Function $g(x)$ lauter reelle Coefficienten besitzt. Mithin muss die Anzahl der complexen Wurzeln $p-q$ gleich einer geraden Zahl $2r$ sein. Wenn daher

(2) $$\begin{cases} \omega_{q+1}=\lambda_1+\mu_1 i, & \omega_{q+3}=\lambda_3+\mu_3 i, \ \ldots\ \omega_{q+2r-1}=\lambda_{2r-1}+\mu_{2r-1} i \\ \omega_{q+2}=\lambda_1-\mu_1 i, & \omega_{q+4}=\lambda_3-\mu_3 i, \ \ldots\ \omega_{q+2r}\ \ =\lambda_{2r-1}-\mu_{2r-1} i \end{cases}$$

gesetzt wird, so lassen sich wie an dem angeführten Orte je zwei zugeordnete Factoren der rechten Seite von (1) nach dem Vorbilde

(3) $$(x-\omega_{q+1})(x-\omega_{q+2})=(x-\lambda_1)^2+\mu_1^{\,2}$$

zu einer Function des zweiten Grades vereinigen, deren Coefficienten reell sind und die nach I, § 25 als eine Summe von zwei Quadraten auf dem Gebiete der reellen Grössen weder verschwinden noch in Factoren des ersten Grades zerlegt werden kann. Hiermit entsteht für die Function $g(x)$ die Zerlegung

$$(4)\quad g(x) = b_0(x-\omega_1)..(x-\omega_q)((x-\lambda_1)^2+\mu_1^2)\ldots((x-\lambda_{2r-1})^2+\mu_{2r-1}^2),$$

in der also sämmtliche Factoren des ersten und zweiten Grades reelle Coefficienten haben, und die Factoren zweiten Grades auf dem Gebiete der reellen Grössen unfähig zu verschwinden und unzerlegbar sind. In der ersten wie in der zweiten Gruppe können einzelne Factoren mehrfach auftreten und entsprechen alsdann nach I, § 45 mehrfachen Wurzeln der Gleichung $g(\omega)=0$. Jeder der Factoren zweiten Grades bleibt für jeden reellen Werth von x positiv, der erste Factor erhält für $x=\lambda_1$ seinen kleinsten Werth μ_1^2, der nach der Voraussetzung von Null verschieden ist, und da von den anderen Factoren das entsprechende gilt, so ist das Product der r Factoren immer positiv und niemals kleiner als das Product $\mu_1^2\,\mu_3^2\ldots\mu_{2r-1}^2$. Wenn nun die Gleichung $g(\omega)=0$ keine reellen Wurzeln hat oder die Zahl q gleich Null ist, so kann die Function $g(x)$ für keinen reellen Werth von x verschwinden, ihr Vorzeichen ist stets gleich dem Vorzeichen der Constante b_0, und der numerische Werth von $g(x)$ sinkt nie unter den numerischen Werth der Grösse $b_0\,\mu_1^2\,\mu_3^2\ldots\mu_{2r-1}^2$ herab. Der entwickelte Ausdruck des Differentialquotienten der rationalen gebrochenen Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ gilt dann für jede Ausdehnung des Intervalls der Variable x, und die Function erfährt keine Unterbrechung der Stetigkeit, wie zum Beispiel die Function

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{6x-32}{x^2-4x+9},$$

wo $g(x) = (x-2-i\sqrt{5})\,(x-2+i\sqrt{5})$ ist.

Wenn aber zu der Gleichung $g(\omega)=0$ in der That reelle Wurzeln gehören, so bestimmt man die Intervalle der Variable x, innerhalb deren $g(x)$ das Vorzeichen nicht ändert und nicht verschwindet, in der folgenden Weise. Man denke sich die q reellen Wurzeln so geordnet, dass die kleinste oder, falls mehrere einander gleiche von den übrigen übertroffen werden, diese kleinsten Wurzeln den Anfang machen, und die übrigen ihrer Grösse nach folgen, dass also die Reihenfolge

$$(5)\qquad \omega_1 = \omega_2 \ldots = \omega_c < \omega_{c+1} = \omega_{c+2} \ldots = \omega_{c+d} < \omega_{c+d+1} \ldots \overline{\overline{<}}\, \omega_q$$

entsteht. Die Begriffe *grösser* und *kleiner* und die entsprechenden Zeichen werden hier wie früher und auch im Folgenden in der Bedeutung gebraucht, die I, § 20 definirt ist; wo eine Verwechselung mit dem Vergleichen der absoluten Werthe zu befürchten ist, wendet man in dem erklärten Sinne auch die Benennungen *algebraisch grösser* und *algebraisch kleiner* an. Die vorliegende Function $g(x)$ kann aus den angeführten Ursachen nur verschwinden und ihr Vorzeichen wechseln, sobald dies mit dem Product der in $g(x)$ enthaltenen reellen Factoren des ersten Grades geschieht. Vermöge (5) lassen sich die einander gleichen reellen Factoren zu Potenzen vereinigen, wodurch man die Darstellung

$$(6)\qquad (x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_q)$$
$$= (x-\omega_1)^c\,(x-\omega_{c+1})^d \ldots (x-\omega_{c+\ldots+e+1})^f$$

erhält. Das in Rede stehende Product behält nothwendig dasselbe Vorzeichen und bleibt von Null verschieden, wofern die Variable x solche auf einander folgende reelle Werthe annimmt, bei denen keine der von einander verschiedenen Differenzen $x-\omega_1,\ x-\omega_{c+1}, \ldots x-\omega_{c+\ldots+e+1}$ ihr Vorzeichen ändert oder verschwindet. Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn sich die Variable x von einem beliebig grossen negativen Werthe bis zu einem beliebig wenig unter ω_1 liegenden Werthe, von einem beliebig wenig über ω_1 liegenden Werthe bis zu einem beliebig wenig unter ω_{c+1} liegenden Werthe, u. s. f., schliesslich von einem über $\omega_{c+\ldots+e+1} = \omega_q$ liegenden Werthe bis zu einem beliebig grossen positiven Werthe bewegt. Die bezeichneten Intervalle sind mithin zugleich die gesuchten Intervalle, in denen die Function $g(x)$ weder ihr Vorzeichen ändert noch gleich Null wird.

Aus der Voraussetzung, dass der Zähler und Nenner der gebrochenen Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ ohne gemeinsamen Theiler sein sollen, folgt, dass die ganze Function $f(x)$ für keinen der Werthe verschwinden kann, welche die ganze Function $g(x)$ zu Null machen. Denn wenn dies für einen Werth ω der Fall wäre, so müsste nach I, § 43 die ganze Function $f(x)$ den algebraischen Theiler $x-\omega$ haben, der gleichzeitig ein Theiler der ganzen Function $g(x)$ ist, und dies widerspräche der Voraussetzung. Wofern man also in dem Bruche $\frac{f(x)}{g(x)}$ der Variable x einen reellen Werth beilegt, welcher einer der reellen Wurzeln $\omega_1, \omega_{c+1}, .. \omega_{c+..+e+1}$ der Gleichung $g(\omega)=0$ von unten oder oben her immer näher kommt, so nähert sich der Zähler $f(x)$ jedenfalls einer von Null verschiedenen Grösse, der Nenner nimmt dagegen numerisch beständig ab, mithin wächst der numerische Werth des Bruches über jedes Mass. Um die Annäherung an eine bestimmte Wurzel, etwa ω_1 zu verfolgen, möge x nach einander die beiden Werthe $\omega_1-\delta$ und $\omega_1+\varepsilon$ erhalten, wo δ und ε wieder beliebig kleine positive Grössen bedeuten. Dann nimmt der Factor $(x-\omega_1)^c$ von $g(x)$ das erste Mal den Werth $(-\delta)^c$, das zweite Mal den Werth $(\varepsilon)^c$ an, während die Vorzeichen aller übrigen Factoren beide Male dieselben bleiben. Die Grössen $(-\delta)^c$ und $(\varepsilon)^c$ haben aber entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen, je nachdem c eine ungerade oder gerade Zahl ist. Die Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ erhält daher für die Werthe $x=\omega_1-\delta$ und $x=\omega_1+\varepsilon$, wofern δ und ε abnehmen, wachsende Werthe von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Zahl c gerade oder ungerade ist, das heisst, je nachdem die Wurzel ω_1 in der Gleichung $g(\omega)=0$ eine gerade oder eine ungerade Zahl von Malen auftritt, mit demjenigen übereinstimmend, was im vorigen § für $c=1$ gezeigt worden ist. Bei der Annäherung der Variable x an eine andere reelle Wurzel der Gleichung $g(\omega)=0$ zeigt sich aus den gleichen Gründen die entsprechende Erscheinung.

Für den so eben erörterten Vorgang ist ein besonderer Ausdruck eingeführt worden. Wenn ein Werth bei dem Eintreten gewisser Umstände numerisch in solchem Masse wächst, dass er jede gegebene Grösse übertrifft, so sagt man, dass der Werth *unendlich gross* werde. Demnach darf man sich so ausdrücken, dass der in Rede stehende rationale Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$

bei der Annäherung der Variable x an eine der Wurzeln $\omega_1, \omega_{c+1}, \ldots \omega_{c+\ldots+e+1}$ der Gleichung $g(\omega)=0$ unendlich gross wird. Man gebraucht aber auch den kürzeren Ausdruck, dass die Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ für den Werth $x=\omega_1$, den Werth $x=\omega_{c+1}$ und auch $x=\omega_{c+\ldots+e+1}$ unendlich gross wird, wogegen nach unserer ursprünglichen Redeweise gesagt werden müsste, der Bruch sei für die bezeichneten Werthe, durch die sein Nenner verschwindet, nicht definirt. Der Begriff *unendlich gross* wird durch das Zeichen

$$\infty$$

angedeutet. Auch da, wo es sich um die Ausdehnung der unabhängigen Variable von einem beliebig grossen negativen zu einem beliebig grossen positiven Werth handelt, wendet man den Ausdruck an, dass sie sich von einem negativ unendlichen bis zu einem positiv unendlichen Werthe, oder von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecke. Es lassen sich demnach die vorhin aufgesuchten Intervalle der Variable x, für welche die Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ die Stetigkeit bewahrt, so bezeichnen, dass sich das erste von $-\infty$ bis ω_1, das zweite von ω_1 bis ω_{c+1}, u. s. f., das letzte von $\omega_{c+\ldots+e+1}$ bis $+\infty$ ausdehnt. Wählt man als Beispiel die Function

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{10x^4-22x^3-95x^2+60x+101}{x^5-x^4-3x^3+23x^2+16x-36},$$

wo $g(x)=(x+2)^2(x-1)\left(x-2-i\sqrt{5}\right)\left(x-2+i\sqrt{5}\right)$ ist, so wird $\omega_1=-2$, $\omega_2=-2$, $\omega_3=1$, mithin entstehen drei Intervalle, von denen das erste von $-\infty$ bis -2, das zweite von -2 bis $+1$, das dritte von $+1$ bis $+\infty$ ausgedehnt ist.

§ 9. Differentiation einer algebraischen mit Hülfe von Wurzelausziehung dargestellten Function einer Variable.

Wenn eine beliebige positive Grösse x gegeben ist, so existirt immer eine und nur eine positive Grösse y, welche zu der Potenz von dem positiven ganzen Exponenten n erhoben die Grösse x hervorbringt (I, § 17 und 20). Diese eindeutig definirte Wurzel der reinen Gleichung

(1) $$y^n = x$$
wird die positive $n$te Wurzel aus der Grösse x genannt, und durch das Zeichen

(2) $$y = \sqrt[n]{x},$$
oder auch als eine Potenz mit dem gebrochenen Exponenten $\frac{1}{n}$

(3) $$y = x^{\frac{1}{n}}$$
ausgedrückt. Insofern als die Grösse x beliebig veränderliche positive Werthe erhält, hängt die Grösse $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$ von x ab und bildet eine irrationale Function von x, wie in I, § 104 bemerkt worden. Sie hat die sogleich zu begründenden Eigenschaften, beständig zuzunehmen, sobald die Variable x zunimmt, und immer stetig zu bleiben. Es seien x und x_1 zwei beliebige positive Werthe, von denen x_1 der grössere ist; neben der Gleichung (3) gelte die Gleichung

(4) $$y_1 = x_1^{\frac{1}{n}}.$$
Dann erhält man für den Quotienten $\frac{y_1}{y}$ den Ausdruck

(5) $$\frac{y_1}{y} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{n}},$$
von dem sich zeigen lässt, dass sein Werth stets über der Einheit liegt und derselben beliebig nahe kommen muss, wenn die Grösse x_1 der Grösse x angemessen genähert wird. Wäre der positive Werth $\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ kleiner als die Einheit oder ihr gleich, so würde dessen $n$te Potenz $\frac{x_1}{x}$ gleichfalls beziehungsweise kleiner als die Einheit oder gleich der Einheit ausfallen, was gegen die Voraussetzung $x_1 > x$ verstiesse. Es ist deshalb der Werth $\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ grösser als die Einheit, oder

(5) $$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \varepsilon,$$

wo ε eine positive Grösse bedeutet. Sobald nun beide Seiten von (5) auf die $n$te Potenz erhoben werden, kommt

(6) $$\frac{x_1}{x} = (1+\varepsilon)^n.$$

Nach dem in I, § 46 begründeten binomischen Lehrsatze ergiebt sich für die rechte Seite die Entwickelung

(7) $$(1+\varepsilon)^n = 1 + \frac{n}{1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n,$$

ein Aggregat aus lauter positiven Gliedern, dessen Werth grösser sein muss als das Aggregat der beiden ersten Glieder $1 + n\varepsilon$. Es besteht deshalb die Ungleichheit

(8) $$\frac{x_1}{x} > 1 + n\varepsilon,$$

aus der die Ungleichheit

(9) $$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x} - 1\right) > \varepsilon$$

folgt. Die letztere lehrt, dass für einen hinreichend kleinen Werth der Differenz $\frac{x_1}{x} - 1$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Differenz $x_1 - x$, die positive Grösse ε beliebig klein wird, folglich die über der Einheit liegende Grösse $\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ oder $\frac{y_1}{y}$ der Einheit beliebig nahe rückt. Mithin gehört zu einem Werthe der Variable x_1, der grösser als x ist, immer ein Functionalwerth $x_1^{\frac{1}{n}}$, welcher grösser ist als der Functionalwerth $x^{\frac{1}{n}}$, und die Differenz $x_1^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}$ wird für eine gegen die Null abnehmende Differenz $x_1 - x$ beliebig klein. Hiermit ist der Inhalt der in Betreff der Function $x^{\frac{1}{n}}$ aufgestellten Behauptungen für jedes die Null übertreffende x erwiesen. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die Grösse $x^{\frac{1}{n}}$ für einen beliebig kleinen positiven Werth von x selbst beliebig klein wird. Dies folgt daraus, dass, wenn x einen kleineren Werth erhält als die in die Einheit dividirte $n$te Potenz einer beliebig grossen Zahl b, der

Werth von $x^{\frac{1}{n}}$ unmöglich grösser als $\frac{1}{b}$ sein kann; denn in Folge dieser Voraussetzung müsste die $n$te Potenz von $x^{\frac{1}{n}}$ grösser als die $n$te Potenz von $\frac{1}{b}$, oder x grösser als $\frac{1}{b^n}$ sein. Die Function $x^{\frac{1}{n}}$ hat also von dem Werthe $x=0$ an die Eigenschaft, zu wachsen und stetig zu sein.

Die Ermittelung des Differentialquotienten der Function $x^{\frac{1}{n}}$ in Bezug auf die Variable x lässt sich auf den Umstand gründen, dass diese Function aus der positiven ganzen Potenz einer Variable durch Umkehrung entstanden ist. Während in der obigen Gleichung (1) die Grösse y als die unabhängige Variable, die Grösse x als die abhängige Variable oder als Function von y auftritt, so vertauschen in der entsprechenden Gleichung (2) die Variabeln x und y ihre Rollen, die unabhängige Variable wird durch x, die abhängige Variable oder Function von x durch die Grösse y vertreten. Der aufzusuchende Differentialquotient der Function $x^{\frac{1}{n}}$ ist nach den obigen Bezeichnungen der Grenzwerth des Verhältnisses

$$(10) \qquad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x_1 - x},$$

bei einem bestimmten positiven Werth von x und einer gegen die Null abnehmenden Differenz $x_1 - x$. Vorhin wurde gezeigt, dass für eine solche Aenderung der Differenz $x_1 - x$ die Differenz $y_1 - y$ nothwendig abnimmt; weil indessen jedem positiven y ein einziges positives x entspricht und umgekehrt, so wird die beabsichtigte Annäherung des Werthes x_1 an den Werth x auch dadurch hervorgerufen, dass man den Werth y_1 dem Werthe y nähert. Nun kennt man durch die Formel (25) in § 5 den nach der Variable y zu nehmenden Differentialquotienten der ganzen Potenz $y^n = x$. Zu dem von y verschiedenen Werthe y_1 gehört der Werth der Function $y_1^n = x_1$, mithin ist der bezeichnete Differentialquotient gleich dem Grenzwerthe des Verhältnisses

$$(11) \qquad \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{y_1^n - y^n}{y_1 - y}$$

für eine gegen die Null convergirende Differenz $y_1 - y$, und hat den Werth ny^{n-1}. Allein der auf der linken Seite von (11) befindliche Bruch geht durch Umkehrung in den Bruch über, der auf der linken Seite von (10) steht; zugleich ist der Grenzwerth des erstern unter derselben Voraussetzung bekannt, für welche der Grenzwerth des letztern gefunden werden soll. Wenn daher der Grenzwerth von (11) nicht gleich Null ist, das heisst, wenn die Grösse y selbst einen von Null verschiedenen Werth hat, so wird der Grenzwerth von (10) erhalten, indem man den Grenzwerth ny^{n-1} in die Einheit dividirt. Es entsteht somit für *den Differentialquotienten der irrationalen Function* $y = x^{\frac{1}{n}}$ die Bestimmung

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}},$$

welche durch Substitution des Ausdruckes der Function y in die Gleichung

$$(13) \qquad \frac{d\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

übergeht.

Der Differentialquotient einer Potenz mit beliebigem positivem gebrochenem Exponenten $\frac{m}{n}$ ergiebt sich jetzt aus der Formel (23) des § 5, indem für den vorkommenden ganzen Potenzexponenten n das Zeichen m gebraucht und $f(x)$ durch die Function $x^{\frac{1}{n}}$ ersetzt wird. Man findet

$$(14) \qquad \frac{d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{dx} = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

und durch Zusammenziehung

$$(15) \qquad \frac{d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Zur Differentiation einer Potenz mit negativem gebrochenem

Exponenten $-\frac{m}{n}$ führt die Gleichung (8) des § 7, die durch die Annahme $f(x)=1$ zu der folgenden Gleichung wird

$$(16)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{-\frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}.$$

Es sei hier $g(x)=x^{\frac{m}{n}}$, so kommt

$$(17)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right)}{dx}=\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^2},$$

oder

$$(18)\qquad \frac{d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right)}{dx}=-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}.$$

In der letzten Formel ist auch die Gleichung (10*) des § 7 enthalten, wofern der in dem Bruche $-\frac{m}{n}$ vorhandene Nenner n gleich der Einheit genommen und statt der ganzen Zahl m die ganze Zahl p gesetzt wird. Die beiden Formeln (15) und (18) lassen sich in eine einzige zusammenfassen; denn ersetzt man in der ersteren den positiven rationalen Bruch $\frac{m}{n}$, in der letzteren den negativen rationalen Bruch $-\frac{m}{n}$ durch das Zeichen q, so entsteht beide Male die Gleichung

$$(19)\qquad \frac{d\left(x^q\right)}{dx}=qx^{q-1}.$$

Die hier aufgestellte Regel zur Differentiation einer Potenz mit beliebigem gebrochenem rationalem Exponenten ist für jeden von der Null verschiedenen positiven Werth der Variable x abgeleitet. Was die Anwendung des Werthes Null anlangt, so kommt es dabei auf die Grösse des Exponenten q an.

Ist der rationale Bruch q negativ, so folgt aus dem auseinandergesetzten Verhalten von $x^{\frac{1}{n}}$, dass sowohl die Function

x^q wie auch der numerische Werth des Differentialquotienten $q x^{q-1}$ bei abnehmendem x über jedes Mass wächst. Wenn dagegen der rationale Bruch q positiv ist, so ergiebt sich auf gleiche Weise, dass die Function x^q bei abnehmendem x gegen den Werth Null convergirt; daher kann man den zu dem Werthe $x = 0$ gehörenden Differentialquotienten direct aufsuchen, indem man die Differenz der Functionswerthe, welche zu $x = 0$ und zu einem positiven Werthe $x = h$ gehören, durch den Zuwachs h dividirt und hierauf h abnehmen lässt. Die bezeichnete Differenz $h^q - 0^q$ wird gleich h^q und liefert, durch h dividirt, den Quotienten h^{q-1}. Dieser Werth wächst bei abnehmendem h, sobald der rationale Bruch q kleiner als die Einheit ist, über jede Grösse; er hat den Werth der Einheit, wenn $q = 1$ ist, und wird zu Null, wenn q die Einheit übertrifft. Ein genau entsprechendes Verhalten zeigt der auf der rechten Seite von (19) befindliche Ausdruck $q x^{q-1}$, wofern der Werth der Variable x der Null genähert wird. Für einen Werth von q, der unter der Einheit liegt, wächst der Ausdruck $q x^{q-1}$ ohne Ende, für den Werth $q = 1$ ist er gleich der Einheit, und für jedes über der Einheit befindliche q wird er gleich Null. Vermittelst des im vorigen § erklärten Sprachgebrauches können die über die Function x^q für ein verschwindendes Argument x angestellten Beobachtungen folgendermassen ausgedrückt werden: Wenn der Exponent q negativ ist, wird für $x = 0$ sowohl die Function x^q wie auch ihr Differentialquotient unendlich gross. Wenn der Exponent q positiv aber kleiner als die Einheit ist, so wird für $x = 0$ die Function x^q gleich Null, dagegen ihr Differentialquotient unendlich gross. Bei $q = 1$ verschwindet für $x = 0$ die Function x^q, der Differentialquotient aber wird gleich der Einheit. Bei einem über der Einheit liegenden q verschwindet für $x = 0$ die Function x^q sammt ihrem Differentialquotienten.

Wie die Ausziehung einer beliebig hohen Wurzel aus einer gegebenen Grösse nach I, § 40 unter die algebraischen Operationen zu rechnen ist, so gehören auch die Functionen einer Variable, die durch eine beschränkte Zahl von Anwendungen der algebraischen rationalen Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens, und der algebraischen irrationalen Operation des Wurzelausziehens dargestellt werden, zu den algebraischen Functionen. Man kann eine solche algebraische Function mit Hülfe der bisher gegebenen Regeln differentiiren, sobald eine Vorschrift hinzugefügt wird, um den Differentialquotienten einer beliebig hohen Wurzel aus einer gegebenen Function zu finden, deren Differentialquotient schon bekannt ist. Es sei $f(x)$ eine für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegebene eindeutige stetige Function, die in dem Intervall positiv bleibt; dann bezeichnet die positive $n$te Wurzel aus $f(x)$

$$\sqrt[n]{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{n}} \tag{20}$$

eine eindeutige Function, deren Differentialquotient gesucht wird. Doch lässt sich mit denselben Mitteln auch der Differentialquotient einer Potenz von einem beliebigen gebrochenen rationalen Exponenten q ableiten

$$y = (f(x))^q, \tag{21}$$

was wir zu thun vorziehen.

Für einen von dem bestimmten Werthe x verschiedenen Werth $x+h$ nehme die Function y den Werth y_1 an, alsdann lässt sich der Quotient $\frac{y_1 - y}{h}$ in der folgenden Weise als ein Product von zwei Quotienten darstellen

$$\frac{y_1 - y}{h} = \frac{(f(x+h))^q - (f(x))^q}{f(x+h) - f(x)} \; \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{22}$$

Wenn man nun

$$f(x) = z, \; f(x+h) = z_1 \tag{23}$$

setzt, so verwandelt sich der erste Quotient in den Ausdruck

$$\frac{z_1^q - z^q}{z_1 - z}. \tag{24}$$

Bei abnehmendem h nimmt die Differenz $f(x+h) - f(x) = z_1 - z$ wegen der Stetigkeit der Function $f(x)$ ebenfalls gegen die Null ab. Der Quotient (24) convergirt aber, wenn dies geschieht, als Grenzwerth gegen den in Bezug auf die Variable z genommenen Differentialquotienten der Function z^q, welcher nach (19) durch $q z^{q-1}$ bezeichnet wird. Gleichzeitig geht der auf der rechten Seite von (22) befindliche zweite Bruch in den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ über. Mithin nähert sich die linke Seite von (22) bei abnehmendem h dem Product aus dem Grenzwerthe des ersten Factors $q z^{q-1}$ und dem Grenzwerthe des zweiten Factors $\frac{df(x)}{dx}$, und man erhält für den gesuchten Differentialquotienten der Function $y = (f(x))^q$ das Ergebniss

$$(25) \qquad \frac{d\,(f(x))^q}{dx} = q\,(f(x))^{q-1}\,\frac{df(x)}{dx}.$$

Hierin liegt das Bildungsgesetz des Differentialquotienten der Function $\sqrt[n]{f(x)}$, wofern der Exponent q gleich $\frac{1}{n}$ genommen wird.

Als Beispiel einer zu differentiirenden algebraischen vermittelst Wurzelausziehung dargestellten Function diene die folgende

$$y = \frac{7x^2 - 42x + 4}{\sqrt[3]{(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)}}.$$

Sie lässt sich vermittelst eines gebrochenen Potenzexponenten so ausdrücken

$$y = (7x^2 - 42x + 4)\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{1}{3}}.$$

Nach der Regel für die Differentiationen eines Products (18) in § 6 hat man

$$\frac{dy}{dx} = (14x - 42)\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{1}{3}}$$

$$+ (7x^2 - 42x + 4)\,\frac{d\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{1}{3}}}{dx},$$

ferner nach der obigen Formel (25)

$$\frac{d\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{1}{3}}}{dx}$$

$$= -\frac{1}{3}\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{4}{3}}\,(3x^2 - 10x + 13);$$

der gesuchte Differentialquotient wird deshalb

$$\frac{dy}{dx} = (14x - 12)\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{1}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\,(7x^2 - 42x + 4)\,(3x^2 - 10x + 13)\,(x^3 - 5x^2 + 13x - 9)^{-\frac{4}{3}}.$$

Wir werden im nächsten § zu der Differentiation solcher Functionen übergehen, die nicht dem Gebiete der Algebra angehören und deshalb transcendente Functionen genannt werden, bemerken jedoch, dass der bestehende Sprachgebrauch auch noch andere als die rationalen Operationen und die Ausziehung der Wurzeln zu den algebraischen Operationen rechnet, und die durch eine beschränkte Anzahl von algebraischen Operationen hervorgebrachten Functionen als algebraische Functionen bezeichnet. Es ist oben hervorgehoben, dass die Grösse $y = \sqrt[n]{x}$ eine bestimmte Wurzel der Gleichung (1) bedeutet; ebenso repräsentirt die Potenz mit positivem gebrochenem Exponenten $y = x^{\frac{m}{n}}$ eine Wurzel der Gleichung $y^n - x^m = 0$, die Potenz mit negativem gebrochenem Exponenten $y = x^{-\frac{m}{n}}$ eine Wurzel der Gleichung $y^n - \frac{1}{x^m} = 0$. In diesen Beispielen erscheint y als eine bestimmte Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen der Variable x sind. Dem entsprechend zählt man die Lösung der Aufgabe, die Wurzel y einer algebraischen Gleichung zu bestimmen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Variable x sind, ebenfalls zu den algebraischen Operationen. Wenn man die Coefficienten als Quotienten von rationalen ganzen Functionen ausdrückt, die alle denselben Nenner haben, so wird unter Anwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
(26)\qquad A_0 &= A_{0,0}x^{m_0} + A_{0,1}x^{m_0-1} + \dots + A_{0,m_0} \\
A_1 &= A_{1,0}x^{m_1} + A_{1,1}x^{m_1-1} + \dots + A_{1,m_1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_n &= A_{n,0}m^{m_n} + A_{n,1}x^{m_n-1} + \dots + A_{n,m_n}
\end{aligned}$$

die Gestalt der für die Grösse y geltenden Gleichung die folgende

$$(27)\qquad A_0y^n + A_1y^{n-1} + \dots + A_{n-1}y + A_n = 0.$$

Die Aufgabe, den Differentialquotienten einer in solcher Weise gegebenen algebraischen Function y von x aufzusuchen, bleibt der späteren Behandlung vorbehalten.

§ 10. Differentiation eines Logarithmen.

Sobald eine beliebige positive die Einheit übertreffende Grösse C als Basis gewählt ist, bezeichnet die Exponentialfunction

$$(1) \qquad y = C^x$$

nach I, § 101 für jedes negative oder positive x einen vollständig bestimmten positiven Werth; die Definition dieser Function erstreckt sich demnach auf den Bereich aller reellen Werthe der Variable x von $-\infty$ bis $+\infty$. Es ist ferner in I, § 102 erwiesen, dass, wenn ein beliebiger positiver Werth y gegeben und der zugehörige Werth x verlangt wird, die aus der in Rede stehenden Exponentialfunction durch Umkehrung hervorgehende logarithmische Function

$$(2) \qquad x = \operatorname{Log} y$$

ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Wir werden jetzt den Differentialquotienten des Logarithmus von y in Bezug auf die Variable y aufsuchen und hierauf die Differentiation der Function C^x nach der Variable x bewerkstelligen.

Man kann dem mit zwei verschiedenen positiven Werthen y und $y+k$ gebildeten Quotienten

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{Log}(y+k) - \operatorname{Log} y}{k}$$

vermöge des Umstandes, dass die Differenz zweier Logarithmen gleich dem Logarithmus des Quotienten ist, die Gestalt geben

$$(4) \qquad \frac{1}{k} \operatorname{Log}\left(\frac{y+k}{y}\right) = \frac{1}{y}\,\frac{y}{k} \operatorname{Log}\left(\frac{y+k}{y}\right),$$

und diese nach der für den Logarithmus einer Potenz geltenden Regel in die folgende verwandeln

$$(5) \qquad \frac{1}{y} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}}.$$

Es kommt nun darauf an zu ermitteln, ob der Ausdruck

$$(6) \qquad \left(1+\frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}},$$

wenn der positive Werth y festgehalten und der positive Werth k der Null genähert wird, sich einem bestimmten Grenzwerthe nähere, und für diesen Fall den Grenzwerth darzustellen. Dieser Zweck lässt sich erreichen, in dem man zuerst die specielle Voraussetzung betrachtet, dass statt des abnehmenden Werthes $\frac{k}{y}$ der reciproke Werth einer positiven ganzen Zahl n gesetzt werde, die über jedes Mass hinaus wächst. Dadurch geht der Ausdruck (6) in den einfacheren

$$(7) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

über; zur Discussion desselben soll der für einen ganzen positiven Exponenten n geltende binomische Lehrsatz benutzt werden, der auch in (7) des vorigen § gebraucht ist.

Wir theilen die $n+1$ Glieder der auszuführenden Entwickelung in zwei Theile, von denen der erste die $t+1$ ersten, der zweite die $n-t$ letzten Glieder umfasst. Demnach hat man

$$(8) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = A+B,$$

$$(9) \quad A = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)..(n-t+1)}{1.2\ldots.t}\left(\frac{1}{n}\right)^t,$$

$$(10) \quad B = \frac{n(n-1)\ldots(n-t)}{1.2\ldots.(t+1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{t+1}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)n}\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Da ferner der Zähler eines jeden Binomialcoefficienten soviel Factoren enthält wie in der zugehörigen Potenz von $\frac{1}{n}$ vorhanden sind, so entsteht durch Multiplication jedes einzelnen dieser Factoren mit $\frac{1}{n}$ die Darstellung

$$(11) \quad A = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{t-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots t},$$

$$(12)\quad B=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)..\left(1-\frac{t}{n}\right)}{1.2.3...(t+1)}+\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1.2.3...n}.$$

Man hat nunmehr Werthe aufzusuchen, die über und unter A, und Werthe, die über und unter B liegen. Kennt man erstens zwei Werthe, von denen A eingeschlossen wird und die bei wachsendem n gegen denselben Grenzwerth convergiren, und zweitens zwei Werthe, welche für B dieselbe Bedeutung haben, so ist damit auch der Grenzwerth des Aggregats $A+B$ oder des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gefunden.

Die einzelnen Glieder, aus denen die rechten Seiten von (11) und (12) zusammengesetzt sind, haben sämmtlich das positive Vorzeichen; daher wird die Summe durch eine numerische Vergrösserung eines einzelnen Gliedes vergrössert und durch eine bezügliche Verkleinerung verkleinert. Die in den Zählern vorkommenden Factoren $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, ... sind lauter echte Brüche, die vergrössert werden, sobald man sie durch die Einheit ersetzt. Aus diesem Grunde gelten die Ungleichheiten

$$(13)\quad A<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3...t},$$

$$(14)\quad B<\frac{1}{1.2.3..(t+1)}+\frac{1}{1.2.3..(t+2)}+\dots+\frac{1}{1.2.3...n}$$

Dagegen ist von den Producten, die in den Zählern der Summanden der rechten Seite von (11) stehen, das letzte Product das kleinste; deshalb findet sich die Ungleichheit

$$(15)\quad A>\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+..+\frac{1}{1.2.3..t}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)..\left(1-\frac{t-1}{n}\right).$$

Ferner ist

$$(16)\qquad B>0.$$

Das auf der rechten Seite von (15) erscheinende Product

$$(17)\qquad P=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{t-1}{n}\right)$$

nimmt einen kleineren Werth an, wofern statt jedes Factors der kleinste und zugleich letzte Factor $\left(1-\frac{t-1}{n}\right)$ gesetzt wird; es ist daher

(18) $$P > \left(1-\frac{t-1}{n}\right)^{t-1}.$$

Man kann die so eben eingeführte $(t-1)$te Potenz abermals nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und erhält den Ausdruck

(19) $$\left(1-\frac{t-1}{n}\right)^{t-1} = 1-\frac{t-1}{1}\frac{t-1}{n}+\frac{(t-1)(t-2)}{1.2}\left(\frac{t-1}{n}\right)^2 \mp \ldots,$$

wo die Vorzeichen der einzelnen Glieder regelmässig abwechseln. Ihre numerischen Werthe sind von dem des zweiten ab so beschaffen, dass jeder aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit einem Factor entsteht, der kleiner als der numerische Werth des zweiten Gliedes $\frac{(t-1)^2}{n}$ ist. Trifft man daher über die Zahl t, welche bis dahin jeden unter n liegenden Werth annehmen durfte, die Verfügung, dass der Bruch $\frac{(t-1)^2}{n}$ kleiner als die Einheit sei, so folgt daraus, dass der numerische Werth eines jeden Gliedes kleiner als der Werth des vorhergehenden wird. Eine Summe, deren Glieder regelmässig abwechselnde Vorzeichen haben und dem absoluten Werthe nach beständig abnehmen,

(20) $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^s a_s$$

lässt sich aber dadurch in Grenzen einschliessen, dass man die Addition der auf einander folgenden Glieder entweder nach einem negativen oder nach einem positiven Gliede abbricht. In dem ersteren Falle wird eine Summe fortgelassen

(21) $$(a_{2p} - a_{2p+1}) + (a_{2p+2} - a_{2p+3}) + \ldots,$$

die nach der Voraussetzung aus lauter positiven Differenzen und bei geradem s aus solchen und noch einem positiven Elemente besteht, und deshalb einen positiven Werth hat; in dem zweiten Falle dagegen eine Summe

(22) $$-(a_{2p+1} - a_{2p+2}) - (a_{2p+3} - a_{2p+4}) - \ldots,$$

die aus lauter negativen Differenzen und bei ungeradem s aus solchen und noch einem negativen Elemente besteht und deshalb einen negativen Werth hat. Mithin muss der Werth der Summe (20) stets grösser sein als die Summe

$$(23)\qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2p-2} - a_{2p-1}$$

und stets kleiner als die Summe

$$(24)\qquad a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2p-2} - a_{2p-1} + a_{2p}.$$

Unter der Voraussetzung, die wir nunmehr einführen, dass $\frac{(t-1)^2}{n}$ unter der Einheit befindlich sei, ist daher die linke Seite von (19) grösser als das Aggregat der beiden ersten Glieder, das heisst

$$(25)\qquad \left(1-\frac{t-1}{n}\right)^{t-1} > 1 - \frac{(t-1)^2}{n}.$$

Wenn man also in (15) statt des Products P den in Folge von (18) und (25) zu kleinen Werth $1 - \frac{(t-1)^2}{n}$ substituirt, so entsteht für A die Ungleichheit

$$(26)\qquad A > \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots t}\right)\left(1 - \frac{(t-1)^2}{n}\right),$$

bei welcher

$$(27)\qquad \frac{(t-1)^2}{n} < 1$$

sein muss.

Es ist leicht, einen von der Zahl n unabhängigen Werth anzugeben, welchen die rechte Seite von (14) und darum auch die Grösse B selbst niemals erreichen kann. Jedes Glied der rechten Seite von (14) wird aus dem vorhergehenden erhalten, indem zu dem Nenner successive eine der Zahlen $t+2, t+3, \ldots n$ als Factor hinzutritt. Die ganze Summe hat daher einen kleineren Werth als die folgende, bei der statt jedes neuen Factors überall die kleinere Zahl $t+1$ gesetzt ist,

$$(28)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(t+1)}\left(1 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(t+1)^{n-t-1}}\right).$$

Die in der Klammer befindlichen Brüche bilden eine geometrische Reihe, deren Summe gleich der Grösse

$$(29)\qquad \frac{1 - \frac{1}{(t+1)^{n-t}}}{1 - \frac{1}{t+1}}$$

ist. Weil hier $t+1$ mindestens gleich Zwei ist, so sind der Zähler und Nenner von (29) nothwendig positiv, und wird der Werth durch Weglassen der in dem Zähler zu subtrahirenden Potenz $\frac{1}{(t+1)^{n-t}}$ vergrössert, wodurch aus (29) der Ausdruck

$$(30)\qquad \frac{1}{1-\frac{1}{t+1}}=\frac{t+1}{t}$$

entsteht. Es ist also der Werth von (28) kleiner als das Product

$$(31)\qquad \frac{1}{1.2.3..t(t+1)}\cdot\frac{t+1}{t}=\frac{1}{(1.2.3...t)t},$$

und deshalb folgt aus (14) die Ungleichheit

$$(32)\qquad B<\frac{1}{(1.2.3...t)t}.$$

Wenn man dieselbe mit (13) durch Addition verbindet und in gleicher Weise (16) mit (26) combinirt, so ergeben sich für das Aggregat $A+B=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ die Einschränkungen

$$(33)\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+..+\frac{1}{1.2.3..t}+\frac{1}{(1.2.3..t)t},$$

$$(34)\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+..+\frac{1}{1.2.3..t}\right)\left(1-\frac{(t-1)^2}{n}\right).$$

Um zu erkennen, was hieraus unter der Voraussetzung, dass n immer grössere Werthe erhält, folge, muss man namentlich beachten, dass die für t gegebene Bedingung (27), sobald die Zahl t einem bestimmten Werthe der Zahl n entsprechend gewählt ist, für denselben Werth von t und für jeden grösseren Werth von n ebenfalls gilt. Die Bedingung (27) bedeutet in der That nur, dass die Zahl $t-1$ kleiner als die Quadratwurzel aus der Zahl n sein soll, und wenn $t-1$ kleiner als die Quadratwurzel aus einer bestimmten Zahl n ist, so bleibt $t-1$ von selbst kleiner als die Quadratwurzel aus jeder Zahl, welche über jenes bestimmte n hinausgeht. Beispielsweise darf t vermöge der Bedingung (27) für $n=100$ höchstens gleich 10, für $n=10000$ höchstens gleich 100 sein, u. s. f.

Nachdem also ein zu einem bestimmten Werthe N der

Zahl n gehöriger Werth von t angenommen ist, möge n nach und nach immer grössere Werthe $N', N'', \ldots$ bekommen und gleichzeitig der Werth von t festgehalten werden; dann bleibt in (34) die erste Klammer der rechten Seite ungeändert, während der in der zweiten Klammer von der Einheit abzuziehende Bruch $\frac{(t-1)^2}{n}$ durch das beständige Wachsen seines Nenners beliebig klein wird. Die rechte Seite von (34) nähert sich deshalb stets zunehmend dem Werthe der ersten Klammer

$$(35)\qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,t}$$

als Grenzwerth. Die rechte Seite von (33) ist gleichzeitig um den Betrag

$$(36)\qquad \frac{1}{(1\,.\,2\,.\,3\ldots t)t}$$

grösser als (35). Mithin zeigt sich, dass der Werth des Ausdruckes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei einem ohne Ende wachsenden n von der Summe (35) um eine Grösse abweicht, die zwischen einer beliebig kleinen negativen und der positiven Grösse (36) liegt. Allein es steht nichts im Wege, von vorne herein die zu der Bestimmung der Zahl t gebrauchte Zahl $n=N$ so gross zu wählen, dass der Werth $\frac{1}{t}$ und in Folge dessen auch der Werth (36) beliebig klein wird. Dadurch fällt die Differenz zwischen dem mit einer wachsenden Zahl n gebildeten Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und der mit der hinreichend grossen Zahl t gebildeten Summe (35) zwischen eine positive und eine negative Grösse von beliebig kleinem numerischen Werth. Nun hat aber die Summe (35) die Eigenschaft, bei einem genügend grossen t einem bestimmten Grenzwerthe beliebig nahe zu kommen und zwar ist der erforderliche Beweis im Vorhergehenden schon enthalten. Denn wenn die Summe (35) zuerst mit einem gewissen Werthe von t gebildet ist und daher aus $t+1$ Gliedern besteht, und wenn (35) hierauf mit der um beliebig viel grösseren Zahl t_1 gebildet und folglich auf t_1+1 Glieder ausgedehnt wird, so kommt zu dem ursprünglichen das Aggregat von (t_1-t) Gliedern

$$(35^*)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(t+1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(t+2)}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots t_1}$$

hinzu. Dasselbe unterscheidet sich von der rechten Seite von (14) nur insofern, als die Zahl n durch die Zahl t_1 ersetzt ist. Mithin finden alle Schlüsse Anwendung, die vorhin in Bezug auf die rechte Seite von (14) angestellt sind, und es leuchtet ein, dass das Aggregat (35*), wie gross auch immer die Zahl t_1 genommen werde, stets kleiner bleibt als der in (31) angegebene Ausdruck $\frac{1}{(1.2.3..t)t}$, von dem schon erwähnt worden ist, dass er für eine angemessen grosse Zahl t beliebig klein ausfällt. Hiermit ist gemäss den in I, § 105 aufgestellten Definitionen nachgewiesen, dass die Summe (35) bei beständig vergrösserter Gliederzahl $t+1$ sich einem festen Grenzwerthe nähert oder convergirt, und da der Werth des mit einer wachsenden Zahl n gebildeten Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ von jener Summe (35) um beliebig wenig differirt, so nähert sich der in Rede stehende Ausdruck demselben Grenzwerthe. Man hat daher das Resultat

$$(37)\qquad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3..t}$$

für einen beliebig grossen Werth der Zahl t oder eine unendliche Ausdehnung der betreffenden Summe. Die Reihe ist dieselbe, die in I, § 114 vorkommt, und deren Summenwerth

$$(38)\qquad e = 2{,}718281828459045\ldots$$

daselbst als *die Basis des natürlichen Logarithmensystems* bezeichnet ist. Der Werth e geht dort aus der unendlichen Reihe

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

durch Einführung des Werthes $z=1$ hervor; das Bildungsgesetz der letzteren Reihe entstand aber in I, § 112 auf die Weise, dass in der Entwickelung des Ausdruckes $(1+z)^n$ für die Grösse z der Bruch $\frac{z}{n}$ substituirt und statt der auftretenden Coefficienten der einzelnen Potenzen von z immer der Grenzwerth angewendet wurde, dem sich der betreffende Coefficient für eine ohne Ende wachsende Zahl n nähert.

Nachdem der Grenzwerth des Ausdruckes (7) ermittelt ist, lässt sich leicht einsehen, dass der Ausdruck (6)

$$\left(1+\frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}},$$

von dem die Frage ausging, bei der Annäherung der positiven Grösse k gegen die Null ebenfalls gegen den Grenzwerth e convergirt. Wofern nämlich der positive beliebig kleine Bruch $\frac{k}{y}$ nicht selbst dem reciproken Werthe einer ganzen Zahl gleich ist, muss derselbe, weil die Reihe der reciproken Werthe der natürlichen Zahlen beständig abnimmt und unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt, zwischen zwei mit derselben ganzen Zahl n gebildete Brüche $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ fallen. Alsdann ist

$$n<\frac{y}{k}<n+1. \tag{39}$$

Der Ausdruck (6) wird sowohl durch eine Verkleinerung der Basis wie durch eine solche des Exponenten verkleinert, durch eine Vergrösserung der beiden Elemente vergrössert. Deshalb bestehen die Ungleichheiten

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{40}$$

in denen man

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}, \tag{41}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

setzen darf. Nach (37) convergirt der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ ebenso wie der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei wachsendem n gegen den Grenzwerth e, während sich gleichzeitig sowohl der Factor $\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$ wie auch der Factor $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ der Einheit nähert.

Der Ausdruck $\left(1+\frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}}$ ist demnach zwischen zwei Grössen eingeschlossen, deren jede von dem Grenzwerthe e beliebig wenig abweicht, und convergirt deshalb, wie behauptet worden, gegen denselben Grenzwerth; es ergiebt sich also

$$\lim.\left(1+\frac{k}{y}\right)^{\frac{y}{k}}=e. \tag{42}$$

Durch die Substitution dieses Werthes in (5) erhält man *den gesuchten Ausdruck für den nach der Variable y zu nehmenden Differentialquotienten der Function* Log y, *welche zu dem System von der beliebig gewählten Basis C gehört,*

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,y}{dy}=\frac{1}{y}\,\mathrm{Log}\,e. \tag{43}$$

Es wurde schon vorher daran erinnert, dass, wenn die Constante e zur Basis eines Logarithmensystems genommen wird, die betreffenden Logarithmen *natürliche Logarithmen* genannt werden. An die Stelle der obigen Gleichungen (1) und (2) treten dann die Gleichungen

$$y=e^x, \tag{1*}$$

$$x=\log y, \tag{2*}$$

welches Zeichen, wie in I, auschliesslich für den natürlichen Logarithmus gebraucht werden wird. Da nun der Logarithmus der Basis in dem bezüglichen System gleich der Einheit ist, so folgt aus der Gleichung (43) *die Bestimmung für den Differentialquotienten des Logarithmus naturalis*

$$\frac{d\log y}{dy}=\frac{1}{y}. \tag{44}$$

Der Differentialquotient des Logarithmus naturalis einer Variable, nach dieser selbst genommen, ist somit gleich dem reciproken Werth der Variable.

Der Ableitung des Differentialquotienten einer Exponentialfunction lassen wir eine allgemeinere Betrachtung vorangehen.

§ 11. Beziehung zwischen den Differentialquotienten zweier Functionen, von denen die eine die umgekehrte Function der andern ist. Differentiation einer Exponentialfunction.

Es sei eine eindeutige endliche und stetige Function

$$(1) \qquad y = f(x)$$

für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegeben, ihr Werth bewege sich, während x von dem Werthe a bis zu dem Werthe b fortschreitet, von dem Werthe p bis zu dem Werthe q. Man setzt ausserdem voraus, dass zu jedem zwischen p und q liegenden Werthe von y ein eindeutig bestimmter Werth x gehöre und dass demgemäss die der Function $f(x)$ entsprechende umgekehrte Function

$$(2) \qquad x = \varphi(y)$$

für das Intervall $p \leqq y \leqq q$ gleichfalls eindeutig, endlich und stetig gegeben sei. Wenn dann der nach x genommene Differentialquotient der Function $f(x)$ bekannt ist, so kann aus demselben überall, wo er einen von Null verschiedenen Werth hat, der nach y zu nehmende Differentialquotient der Function $\varphi(y)$ erhalten werden, und umgekehrt.

Nachdem durch die Gleichung (1) zu einem bestimmten Werthe x der zugehörige Werth y und zu einem von x verschiedenen Werthe x_1 der zugehörige Werth

$$(3) \qquad y_1 = f(x_1)$$

determinirt ist, muss vermöge der getroffenen Annahme bei einer numerisch gegen die Null abnehmenden Differenz $x_1 - x$ die Differenz $f(x_1) - f(x)$ gleichfalls abnehmen, und es gilt die Gleichung

$$(4) \qquad \lim. \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{d f(x)}{dx}.$$

Da hier zu jedem Werth von y immer ein und nur ein Werth von x gehören soll, so entspringt aus der Gleichung (3) die Gleichung

$$(5) \qquad x_1 = \varphi(y_1),$$

und weiter folgt, dass, wenn der Werth y_1 dem Werthe y genähert wird, die Differenz $\varphi(y_1) - \varphi(y)$ sich nothwendig ebenfalls numerisch der Null nähert. Der Differentialquotient der Function $\varphi(y)$ in Bezug auf die Variable y ist dann der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\varphi(y_1)-\varphi(y)}{y_1-y}$, welcher einer gegen die Null abnehmenden Differenz y_1-y entspricht. Bildet man jetzt die Gleichungen

$$(6)\qquad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{y_1-y}{x_1-x},\quad \frac{\varphi(y_1)-\varphi(y)}{y_1-y}=\frac{x_1-x}{y_1-y},$$

so erweist sich der zweite Bruch als der reciproke Werth des ersten; der Grenzwerth von diesem wird für eine abnehmende Differenz x_1-x durch die Gleichung (4) dargestellt, die genannte Voraussetzung zieht aber die Abnahme der Differenz y_1-y nach sich, und der Grenzwerth des zweiten Bruches, der für eine abnehmende Differenz y_1-y gesucht wird, drückt den Differentialquotienten $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ aus. *Wofern also der Werth* $\frac{df(x)}{dx}$ *nicht verschwindet, ergiebt sich die Bestimmung des Differentialquotienten* $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ *aus der Gleichung*

$$(7)\qquad \frac{d\varphi(y)}{dy}\,\frac{df(x)}{dx}=1.$$

Vermöge dieser Gleichung ist der eine Differentialquotient gleich dem reciproken Werthe des andern, und entsteht ebenso, wenn der Differentialquotient $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ *vorliegt und einen von Null verschiedenen Werth hat, der zugehörige Differentialquotient* $\frac{df(x)}{dx}$.

Die hier angestellte Betrachtung schliesst die speciellere ein, durch welche in § 9 der Differentialquotient einer Potenz mit dem gebrochenen Exponenten $\frac{1}{n}$ abgeleitet ist. Dem obigen allgemeinen Satze (7) lässt sich ferner eine anschauliche geometrische Bedeutung beilegen, sobald x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene aufgefasst werden. Nimmt man an, dass die Abhängigkeit der Ordinate y von der Ordinate x durch die in Rede stehende Gleichung $y=f(x)$ festgesetzt sei, so gehört der betreffende Punkt (x, y) einer bestimmten Curve an, und nach § 4 und § 5 repräsentirt der Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ die trigonometrische Tangente des

Neigungswinkels ω, welchen die in dem Punkte (x, y) zu der Curve construirte berührende Linie gegen die positive Seite einer Parallele zu der x Axe macht. Die mit (2) bezeichnete Gleichung $x = \varphi(y)$ hängt aber mit der Gleichung (1) so zusammen, dass (2) für jeden Werth von y den zugehörigen Werth x eindeutig bestimmt. Man darf demgemäss die Ordinate y als die unabhängige, die Ordinate x als die abhängige Variable ansehen und gelangt dann zu dem Resultat, dass durch die Gleichung $x = \varphi(y)$ genau dieselbe Curve dargestellt wird, welche zuerst durch die Gleichung $y = f(x)$ bezeichnet wurde. Jetzt lege man unter der Voraussetzung, dass die erwähnte Abhängigkeit der Ordinate x von der Ordinate y bestehe, durch den Punkt (x, y) eine die Curve schneidende Linie und lasse diese durch Annäherung des zweiten Schnittpunkts an den ersten in die berührende Linie übergehen; alsdann drückt der Differentialquotient $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ die trigonometrische Tangente des Winkels α aus, welchen die berührende Linie mit der positiven Seite einer zu der y Axe gezogenen Parallele bildet. Weil aber die construirte berührende Linie eine einzige ist, welche nur auf zwei verschiedene Arten betrachtet wurde, weil ferner die x und y Axe gegeneinander senkrecht stehen, und weil die trigonometrischen Tangenten solcher Winkel, die von derselben Linie gegen die beiden Axen gebildet werden, reciproke Werthe haben, so müssen auch die auf dieselbe berührende Linie bezüglichen Werthe $\operatorname{tg}\omega$ und $\operatorname{tg}\alpha$ mit einander reciprok sein. In dieser Thatsache besteht der geometrische Inhalt der Gleichung (7).

Wir wenden uns nunmehr zu den Gleichungen (1*) und (2*) des vorigen §, die mit den Gleichungen (1) und (2) des gegenwärtigen § so correspondiren, dass $f(x)$ durch e^x und gleichzeitig $\varphi(y)$ durch $\log y$ zu ersetzen ist,

$$(8) \qquad y = e^x,\; x = \log y.$$

In Folge der Gleichung (7) ist mithin

$$(9) \qquad \frac{d(e^x)}{dx}\frac{d\log y}{dy} = 1.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\log y}{dy}$ wird nach (44) des vorigen

§ durch den Bruch $\frac{1}{y}$ dargestellt, welcher für keinen endlichen Werth der Variable y verschwindet. Man erhält daher *für den Differentialquotienten der Exponentialfunction* $y=e^x$ *die allgemein gültige Gleichung*

$$\frac{dy}{dx}=y, \tag{9}$$

oder, indem die Function selbst eingeführt wird,

$$\frac{d\left(e^x\right)}{dx}=e^x. \tag{10}$$

Der Differentialquotient der Exponentialfunction e^x, *nach der Variable* x *genommen, ist mithin gleich der Exponentialfunction* e^x *selbst.*

§ 12. Differentiation einer Function, deren Argument eine Function einer unabhängigen Variable ist. Anwendungen auf logarithmische Functionen, Exponentialfunctionen und Potenzausdrücke mit veränderlicher Basis und veränderlichem Exponenten.

In § 9 ergab sich, dass, sobald die Differentiation einer beliebigen rationalen gebrochenen Potenz der unabhängigen Variable bewerkstelligt werden kann, die Differentiation einer ebensolchen Potenz von einer gegebenen Function der unabhängigen Variable keine Schwierigkeiten darbietet. Eine besondere Anstrengung gehört immer nur dazu, eine Function von neuer Bildungsweise oder, nach einem in I, § 22 angewendeten Ausdrucke, von neuer *Characteristik* zu differentiiren. Wofern aber die Differentiation einer gewissen Characteristik $\psi(z)$ in Bezug auf das Argument z gefunden ist, so lässt sich der Differentialquotient derjenigen Function, die aus $\psi(z)$ entsteht, indem statt z eine Function $f(x)$ von bekanntem Differentialquotienten gesetzt wird, in Bezug auf die Variable x nach einer allgemeinen Regel erhalten. Es sei wieder x_1 ein von x verschiedener Werth, und man habe

$$z=f(x),\quad z_1=f(x_1). \tag{1}$$

Behufs der Differentiation der Function

$$u=\psi(f(x)) \tag{2}$$

wird dem zu untersuchenden Quotienten die Gestalt gegeben

$$(3)\qquad \frac{\psi(f(x_1))-\psi(f(x))}{x_1-x}=\frac{\psi(z_1)-\psi(z)}{z_1-z}\,\frac{z_1-z}{x_1-x}.$$

Die Abnahme der Differenz x_1-x zieht die Abnahme der Differenz z_1-z nach sich, und zwar convergirt dabei der Bruch $\frac{z_1-z}{x_1-x}$ gegen den als bekannt vorausgesetzten Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$, der Bruch $\frac{\psi(z_1)-\psi(z)}{z_1-z}$ gegen den ebenfalls als bekannt angenommenen Differentialquotienten $\frac{d\psi(z)}{dz}$. Es folgt daher *für die Differentiation einer Function, deren Argument eine Function der unabhängigen Variable ist, nach welcher differentiirt werden soll, die Vorschrift*

$$(4)\qquad \frac{d\psi(f(x))}{dx}=\frac{d\psi(z)}{dz}\,\frac{df(x)}{dx}.$$

Man erhält hiernach den Differentialquotienten des Logarithmus naturalis einer Function $f(x)$ und den Differentialquotienten einer Exponentialfunction $e^{f(x)}$, indem man erstens $\psi(z)$ durch die Characteristik $\log z$ ersetzt und die Gleichung (44) des § 10 benutzt, und zweitens für $\psi(z)$ die Characteristik e^z einführt und die Gleichung (10) des § 11 anwendet. Die Resultate sind, da statt z die Function $f(x)$ einzuführen ist,

$$(5)\qquad \frac{d\log f(x)}{dx}=\frac{1}{f(x)}\,\frac{df(x)}{dx},$$

$$(6)\qquad \frac{d\left(e^{f(x)}\right)}{dx}=e^{f(x)}\,\frac{df(x)}{dx}.$$

Mit Hülfe von (5) lässt sich der Differentialquotient des Logarithmus naturalis eines Products von beliebig vielen Functionen $f_1(x)f_2(x)\ldots f_\mu(x)$ auf doppelte Art darstellen. Man erhält unmittelbar die Gleichung

$$(7)\qquad \frac{d\log(f_1(x)f_2(x)..f_\mu(x))}{dx}$$

$$=\frac{1}{f_1(x)f_2(x)..f_\mu(x)}\,\frac{d(f_1(x)f_2(x)..f_\mu(x))}{dx},$$

ausserdem aber, weil der Logarithmus eines Products gleich der

Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren ist, statt der linken Seite von (7) den Ausdruck

$$\text{(8)} \quad \frac{d \log f_1(x)}{dx} + \frac{d \log f_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{d \log f_\mu(x)}{dx}$$
$$= \frac{1}{f_1(x)} \frac{d f_1(x)}{dx} + \frac{1}{f_2(x)} \frac{d f_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{1}{f_\mu(x)} \frac{d f_\mu(x)}{dx}.$$

Die Gleichsetzung der rechten Seiten von (7) und (8) bringt dann die auf die Differentiation eines Products von beliebig vielen Factoren bezügliche Regel

$$\text{(9)} \quad \frac{\dfrac{d(f_1(x) f_2(x) \ldots f_\mu(x))}{dx}}{f_1(x) f_2(x) \ldots f_\mu(x)}$$
$$= \frac{1}{f_1(x)} \frac{d f_1(x)}{dx} + \frac{1}{f_2(x)} \frac{d f_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{1}{f_\mu(x)} \frac{d f_\mu(x)}{dx}$$

hervor, welche bei einem Product von zwei Factoren mit der allgemeinen Regel (18) des § 6 zusammenfällt.

Die Gleichung (6) liefert ungezwungen die Differentiation einer Exponentialfunction mit einer beliebigen positiven Grösse C als Basis, von welcher Function in § 10 ausgegangen wurde. Wenn die Basis C mit Anwendung des natürlichen Logarithmensystems durch den gleichwerthigen Ausdruck $e^{\log C}$ ersetzt wird, so kommt

$$\text{(10)} \quad C^x = e^{x \log C}.$$

Mithin ist in (6) statt $f(x)$ die Function $x \log C$ anzuwenden, wodurch *die Formel für die Differentiation der Function* C^x entsteht,

$$\text{(11)} \quad \frac{d(C^x)}{dx} = C^x \log C.$$

Auch verdient der Umstand beachtet zu werden, dass die Formeln (5) und (6) zu der Differentiation *einer Potenz* x^n ausreichen, *bei welcher der Exponent* n *eine beliebige Grösse bedeutet.* Setzt man

$$\text{(12)} \quad x^n = e^{n \log x},$$

so muss nach (6) der Differentialquotient $\frac{d(x^n)}{dx}$ gleich dem Product aus der zu differentiirenden Function und dem Differentialquotienten von $n \log x$ sein, der vermöge (5) den Werth $\frac{n}{x}$ hat. Es resultirt daher die Gleichung

$$(13) \qquad \frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1},$$

welche aussagt, *dass der Differentialquotient einer mit einem beliebigen Exponenten gebildeten Potenz einer unabhängigen Variable in Bezug auf die letztere erhalten wird, indem man die mit dem um die Einheit kleineren Exponenten gebildete Potenz der Variable mit dem Potenzexponenten multiplicirt.* Diese Regel ist *für die positiven ganzen Exponenten* in (25) des § 6, *für die negativen ganzen Exponenten* in (10*) des § 7, *für die positiven oder negativen rationalen Exponenten* in (19) des § 9 ausgedrückt.

Insofern die gegebene Definition einer Exponentialfunction nur voraussetzt, dass die Basis eine positive Grösse sei, dürfen auch solche Potenzausdrücke in Betracht gezogen werden, deren Basis eine Function $\vartheta(x)$ von der Eigenschaft ist, für das in Anwendung kommende Intervall der Variable x ausschliesslich positiv zu sein, und deren Exponent eine beliebige Function $g(x)$ ist. Um eine so gebildete Function

$$(14) \qquad y = (\vartheta(x))^{g(x)}$$

in Bezug auf die Variable x zu differentiiren, stellt man, wie oben mehrfach geschehen, die Function $\vartheta(x)$ vermittelst ihres Logarithmus naturalis dar

$$(15) \qquad \vartheta(x) = e^{\log \vartheta(x)},$$

so dass aus (14) der Ausdruck

$$(16) \qquad y = e^{g(x) \log \vartheta(x)}$$

folgt. Die Anwendung von (6) giebt dann

$$(17) \qquad \frac{dy}{dx} = e^{g(x) \log \vartheta(x)} \frac{d(g(x) \log \vartheta(x))}{dx},$$

und vermöge (5) entsteht das Resultat,

$$(18) \qquad \frac{d(\vartheta(x))^{g(x)}}{dx} = (\vartheta(x))^{g(x)} \left(\frac{g(x)}{\vartheta(x)} \frac{d\vartheta(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} \log \vartheta(x) \right),$$

durch welches die gestellte Aufgabe gelöst wird.

§ 13. Differentiation der trigonometrischen Functionen.

Wie in I, § 30 und I, § 103 entwickelt worden, sind die trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus für jeden Werth des Arguments x in der Weise eindeutig bestimmt, dass sie ihrer Grösse nach stets zwischen der negativen und der positiven Einheit enthalten bleiben, und bei der Vergrösserung des Arguments um die Zahl 2π, durch welche das Verhältniss der Kreisperipherie zum Radius gemessen wird, immer wieder die ursprünglichen Werthe annehmen, oder die Periode 2π haben. Wenn x und h beliebig gegeben sind, werden der Sinus und Cosinus für die Summe der Argumente x und h vermöge der Additionsformeln

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sin(x+h) &= \sin x \cos h + \cos x \sin h \\ \cos(x+h) &= \cos x \cos h - \sin x \sin h \end{aligned}$$

durch den Sinus und Cosinus der einzelnen Argumente x und h ausgedrückt. Diese Formeln (1) führen zu der Darstellung des Differentialquotienten der Functionen $\sin x$ und $\cos x$. Man erhält für die Differenz $\sin(x+h) - \sin x$ den Ausdruck

$$(2)\qquad \sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h,$$

wo ausserdem

$$(3)\qquad \cos h - 1 = \frac{-(1-\cos h)(1+\cos h)}{1+\cos h} = \frac{-\sin^2 h}{1+\cos h}$$

gesetzt werden darf, so dass die Gleichung

$$(4)\qquad \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{1+\cos h}\frac{\sin h}{h}$$

entsteht. In derselben Weise findet sich die Gleichung

$$(5)\qquad \cos(x+h) - \cos x = \cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h,$$

und, unter Anwendung von (3),

$$(6)\qquad \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \frac{\sin h}{1+\cos h}\frac{\sin h}{h}.$$

Offenbar hängt die Bestimmung der Grenzwerthe, gegen welche die linke Seite von (4) und die linke Seite von (6) für eine gegen die Null abnehmende Grösse h convergiren, von dem entsprechenden Verhalten des Quotienten $\frac{\sin h}{h}$ ab. Es ist aber I, § 103 hervorgehoben, dass der geometrische Satz, nach welchem die Länge eines die halbe Kreisperipherie nicht übertreffenden Kreisbogens grösser als die Länge der zugehörigen Sehne, und kleiner als die Summe der beiden in den Endpunkten des Kreisbogens construirten und bis zu dem gemeinsamen Schnittpunkte verlängerten Tangenten sein muss, für jedes zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ befindliche Argument h die Ungleichheiten liefert,

$$\sin h < h < \frac{\sin h}{\sqrt{1-\sin^2 h}}. \tag{7}$$

Aus denselben ergiebt sich für den Quotienten $\frac{\sin h}{h}$ die Einschränkung

$$\frac{\sin h}{h} < 1, \; \sqrt{1-\sin^2 h} < \frac{\sin h}{h}, \tag{8}$$

um derentwillen der bezeichnete Werth stets zwischen der Einheit und der Grösse $\sqrt{1-\sin^2 h}$ liegt. Nun zeigt die erste der beiden Ungleichheiten, dass, wofern man die Grösse h fortwährend abnehmen lässt, die Function $\sin h$ sich ebenfalls der Null nähert. Dadurch rückt die Grösse $\sqrt{1-\sin^2 h}$ beliebig nahe an die Einheit heran, und der Quotient $\frac{\sin h}{h}$, der zwischen der Einheit und der Grösse $\sqrt{1-\sin^2 h}$ eingeschlossen ist, convergirt nothwendig gegen die Einheit selbst. Die rechte Seite der Gleichungen (4) und (6) enthält ausser dem Quotienten $\frac{\sin h}{h}$ noch den Quotienten $\frac{\sin h}{1+\cos h}$, der sich bei abnehmendem h der Null nähert, da der Zähler gegen den Grenzwerth Null, der Nenner gegen den Grenzwerth 2 convergirt. Demnach hat auf der rechten Seite von (4) der erste Summand die Grösse $\cos x$, der zweite die Null, auf der rechten Seite von (6) der erste Summand die Grösse $-\sin x$, der zweite abermals die Null zum Grenzwerthe. Es werden also *die in Bezug auf das Argument x genommenen Differentialquotienten der Functionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *für jeden Werth von x* durch die Formeln dargestellt

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \tag{9}$$

$$(10) \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Die vorhin unter (7) aufgeführten Ungleichheiten sind an dem erwähnten Orte I, § 103 benutzt, um zu zeigen, dass die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ für jede Ausdehnung des Intervalls von x stetig bleiben; ferner wird dort darauf aufmerksam gemacht, dass die Function $\operatorname{tg} x$ in jedem der Intervalle von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, von $+\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}, ..$ und auch von $-\frac{3\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}, ..$ stetig ist, dagegen bei dem Ueberschreiten von jedem der bezeichneten Werthe eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, dass ferner die Function $\operatorname{cotg} x$ in jedem der Intervalle von 0 bis π, von π bis $2\pi, ...$ und auch von $-\pi$ bis $0, ..$ stetig ist, dagegen bei dem Ueberschreiten von jedem der zuletzt genannten Werthe eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Nach der oben in § 8 eingeführten Ausdrucksweise sagt man hier, dass die Function $\operatorname{tg} x$ für die Werthe $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}, ... -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, ...,$ und die Function $\operatorname{cotg} x$ für die Werthe $x = 0, \pi, 2\pi, .., -\pi, -2\pi, ...$ unendlich gross wird. Der Differentialquotient der Function $\operatorname{tg} x$ und der Function $\operatorname{cotg} x$ in Bezug auf die Variable x ist jetzt für eines jener Intervalle aufzusuchen, in denen die Stetigkeit der betreffenden Function nicht verletzt wird. Man erhält die gewünschte Bestimmung aus den Gleichungen

$$(11) \qquad \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

indem man die zu der Differentiation eines Quotienten zweier Functionen dienende Regel (8) des § 7 anwendet.

Es sei zuerst $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, so wird

$$\frac{d f(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{d g(x)}{dx} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

bei der zweiten Annahme $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ kommt das Resultat

$$\frac{d f(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{d g(x)}{dx} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1.$$

Mithin entstehen *für die Differentialquotienten der Functionen* $\operatorname{tg} x$ *und* $\operatorname{cotg} x$ *die Ausdrücke*

$$(12)\qquad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Sobald die Regeln bekannt sind, nach welchen die trigonometrischen Functionen in Bezug auf ihr Argument differentiirt werden, ist man mit Hülfe des § 12 im Stande, sowohl trigonometrische Functionen, deren Argument gleich einer Function der unabhängigen Variable gesetzt ist, wie auch solche Functionen, deren Argument als eine trigonometrische Function der unabhängigen Variable gegeben ist, in Bezug auf die jedesmalige unabhängige Variable zu differentiiren. Die Gleichungen

$$(13)\qquad \frac{d \sin(x^2)}{dx} = 2x \cos(x^2), \quad \frac{d \cos(x^2)}{dx} = -2x \sin(x^2),$$

$$(14)\qquad \frac{d \log \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{d \log \cos x}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

mögen als Beispiele dienen.

§ 14. Differentiation der inversen trigonometrischen Functionen. Rein analytische Definition der inversen und directen trigonometrischen Functionen.

Zu jeder der im vorigen § behandelten trigonometrischen Functionen gehört eine umgekehrte oder inverse trigonometrische Function, so dass in dem folgenden Schema die in derselben Zeile befindlichen Gleichungen einander entsprechen,

(1) $y = \sin x, \quad x = \operatorname{arc} \sin y$

(2) $y = \cos x, \quad x = \operatorname{arc} \cos y$

(3) $y = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$

(4) $y = \operatorname{cotg} x, \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y.$

In I, § 104 ist auseinander gesetzt, dass jede umgekehrte trigonometrische Function an sich eine vieldeutige Function ihres Arguments ist, jedoch durch Hinzufügung einer Beschränkung zu einer eindeutigen gemacht werden kann. Wir lassen nun Beschränkungen dieser Art eintreten und setzen fest, dass die Werthe der Functionen $\operatorname{arc} \sin x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ nur zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, die Werthe der Functionen $\operatorname{arc} \cos x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ nur zwischen den Grenzen 0 und π

genommen werden sollen. Bei den Functionen arc sin x und arc cos x muss das Argument x zwischen der negativen und der positiven Einheit liegen; wenn dieses Intervall von dem Argument x beständig wachsend durchlaufen wird, bewegt sich die eindeutig definirte Function arc sin x beständig wachsend und stetig von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, dagegen die eindeutig definirte Function arc cos x beständig abnehmend und stetig von π bis 0. Bei den Functionen arc tg x und arc cotg x darf das Argument x jeden beliebigen negativen oder positiven Werth erhalten; sobald durch x das Intervall der Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ immer wachsend durchlaufen wird, bewegt sich die eindeutig definirte Function arc tg x immer wachsend und stetig von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, dagegen die eindeutig definirte Function arc cotg x immer abnehmend und stetig von π bis 0.

Unter den angegebenen Voraussetzungen kann man die nach dem Argument zu nehmenden Differentialquotienten der inversen trigonometrischen Functionen mit Hülfe der Formel (7) des § 11 bilden, indem die Characteristik $f(x)$ auf die directe, die Characteristik $\varphi(y)$ auf die correspondirende inverse trigonometrische Function bezogen wird, und die Differentialquotienten der directen trigonometrischen Functionen nach den Regeln des vorigen § ausgeführt werden. So entspringen aus dem System (1), (2), (3), (4) respective die Gleichungen

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\cos x} \tag{5}$$

$$\frac{d \arccos y}{dy} = \frac{-1}{\sin x} \tag{6}$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg} y}{dy} = \cos^2 x \tag{7}$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,cotg} y}{dy} = -\sin^2 x. \tag{8}$$

Die auf der rechten Seite erscheinenden Ausdrücke lassen sich sehr einfach durch die betreffende unabhängige Variable darstellen. In (5) findet man $\cos x = \sqrt{1-y^2}$, in (6) dagegen $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, und zwar in beiden Fällen mit positiver Bedeutung des Quadratwurzelzeichens, weil der Cosinus im negativen ersten und positiven ersten Quadranten, der Sinus in den beiden positiven ersten Quadranten das positive Vorzeichen hat; in (6) kommt $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$, endlich in (7) entsprechend $\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$. *Die Differentialquotienten der inversen trigonometrischen Function* arc sin y, arc cos y, arc tg y *und* arc cotg y werden daher folgendermassen bestimmt:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \tag{9}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos y}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \tag{10}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} y}{dy} = \frac{1}{1+y^2} \tag{11}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y}{dy} = \frac{-1}{1+y^2}. \tag{12}$$

Hier möge eine allgemeine Bemerkung über die directen und inversen trigonometrischen Functionen eine Stelle finden. Wir haben für dieselben im ersten Bande die gebräuchliche geometrische Definition zu Grunde gelegt und sind in diesem einen Stück von der sonst genau festgehaltenen Regel, geometrische Betrachtungen nur zur Erläuterung jedoch nicht zur Beweisführung anzuwenden, abgewichen, da eine rein analytische Behandlung dem Anfänger unverhältnissmässig grosse Schwierigkeiten verursacht haben würde. Um aber keinen Zweifel darüber zu lassen, dass die Lehre von den inversen und directen trigonometrischen Functionen in der That lediglich auf analytischen Principien beruht, sollen jetzt die Hauptsätze aus einer rein analytischen Definition abgeleitet werden. Am erwähnten Orte dienten die trigonometrischen Functionen zunächst zu der Darstellung einer beliebigen complexen Grösse $A+iB$ in der Gestalt

$$A + iB = P(\cos \Phi + i \sin \Phi).$$

Später ist die Aufgabe, eine complexe Grösse $a+ib$ zu bestimmen, deren Quadrat einer gegebenen complexen Grösse gleich ist, ohne Zuziehung der trigonometrischen Functionen gelöst worden. Indem wir die damals gefundene Lösung auf den besonderen Fall anwenden, in welchem die Norm der gegebenen Grösse gleich der Einheit ist, gelangen wir zu der in Rede stehenden rein analytischen Definition der inversen und damit auch der directen trigonometrischen Functionen.

Es sei α und β ein Paar reelle Grössen, deren Quadratsumme den Werth der Einheit hat, mithin $\alpha + i\beta$ eine complexe Grösse von der Norm $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Dann gestattet die Aufgabe, eine complexe Grösse $\alpha_1 + i\beta_1$ zu finden, deren Quadrat gleich $\alpha + i\beta$ ist, nach I, § 34 zwei und nur zwei Auflösungen; wofern ζ das Vorzeichen von β bedeutet, und das Quadratwurzelzeichen überall einen positiven Werth ausdrückt, sind dieselben

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} + i\zeta\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$$

und

$$\alpha_1 + i\beta_1 = -\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} - i\zeta\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Zu beiden gehört die Gleichung

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1.$$

Für das Folgende wird $\alpha \geqq 0$ und $\beta > 0$ vorausgesetzt, und von den beiden Auflösungen die erste genommen

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Vermöge dessen hat man nothwendig $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$. Es kann daher das betreffende Verfahren beliebig oft wiederholt und eine beliebig weit ausgedehnte Reihe von eindeutig bestimmten complexen Grössen abgeleitet werden *), deren sämmtliche Normen gleich der Einheit sind,

$$\alpha_2 + i\beta_2 = \sqrt{\frac{1+\alpha_1}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\alpha_1}{2}}$$

$$\alpha_3 + i\beta_3 = \sqrt{\frac{1+\alpha_2}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\alpha_2}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_s + i\beta_s = \sqrt{\frac{1+\alpha_{s-1}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\alpha_{s-1}}{2}}.$$

---

*) Vgl. L. Seidel, über eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrales erster Art durch unendliche Producte, Sitzungsbericht der Bayrischen Academie d. W., vom 9. November 1867.

In Bezug auf diese Reihe lässt sich nachweisen, dass die reellen positiven Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ gegen die Einheit, die reellen positiven Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$ gegen die Null convergiren und sich dabei so verhalten, dass für eine beständig wachsende Zahl s der Ausdruck

$$2^s(1-\alpha_s)$$

die Null, der Ausdruck

$$2^s \beta_s$$

eine gewisse positive Grösse zum Grenzwerth hat. Durch diesen Grenzwerth wird dann der Bogen definirt, zu dem die reellen Grössen α und β beziehungsweise als Cosinus und Sinus gehören.

Wenn man aus der complexen Grösse $\alpha + i\beta$ die reellen Verbindungen $\frac{\beta}{\alpha}$ und β, aus der folgenden Grösse $\alpha_1 + i\beta_1$ die correspondirenden $\frac{2\beta_1}{\alpha_1}$ und $2\beta_1$ ableitet, so ergeben sich durch Zusammenstellen die Ungleichheiten

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{2\beta_1}{\alpha_1} > 2\beta_1 > \beta.$$

Denn nach dem Obigen ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}, \quad \frac{2\beta_1}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} = \frac{2}{1+\alpha}\sqrt{1-\alpha^2},$$

und, insofern $\alpha > 0$ ist, $\frac{1}{\alpha} > \frac{2}{1+\alpha}$, mithin

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{2\beta_1}{\alpha_1}.$$

Für den Fall $\alpha = 0$, der vorhin zugelassen wurde, fällt diese Ungleichheit fort. Die Ungleichheit

$$\frac{2\beta_1}{\alpha_1} > 2\beta_1$$

folgt aus dem Umstande, dass α_1 ein positiver echter Bruch ist. Da endlich

$$2\beta_1 = 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} = \sqrt{2(1-\alpha)}, \quad \beta = \sqrt{1-\alpha^2} = \sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}$$

ist, so muss auch

$$2\beta_1 > \beta$$

sein; demnach sind die aufgestellten Ungleichheiten vollständig begründet. Genau entsprechende gelten offenbar für je zwei auf einander folgende complexe Grössen $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2, \ldots$, und zwar, weil α_1 nicht mehr den Werth Null annehmen kann, ohne irgend eine Ausnahme; nämlich

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} > \frac{2\beta_2}{\alpha_2} > 2\beta_2 > \beta_1,$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} > \frac{2\beta_3}{\alpha_3} > 2\beta_3 > \beta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{s-1}} > \frac{2\beta_s}{\alpha_s} > 2\beta_s > \beta_{s-1}.$$

Multiplicirt man die erste der vorstehenden Ungleichheiten mit 2, die zweite mit 4, u. s. f., die $(s-1)$te mit 2^{s-1}, so schliessen sich alle an einander an und liefern die auf eine beliebig grosse Zahl s bezügliche Folge

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{2\beta_1}{\alpha_1} > \frac{4\beta_2}{\alpha_2} \ldots > \frac{2^s\beta_s}{\alpha_s} > 2^s\beta_s > \ldots 4\beta_2 > 2\beta_1 > \beta.$$

Für eine stets wachsende Zahl s überschreitet die Potenz 2^s jeden noch so grossen gegebenen Werth. Weil nun das Product $2^s\beta_s$ für $\alpha > 0$ unter der festen Grösse $\frac{\beta}{\alpha}$, für $\alpha = 0$ jedenfalls unter der festen Grösse $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ liegt, so muss die positive Grösse β_s für eine hinreichend grosse Zahl s beliebig klein werden. Gleichzeitig kann sich die positive Grösse α_s wegen der Gleichung

$$\alpha_s^2 + \beta_s^2 = 1$$

nur der Einheit als Grenzwerth nähern. Deshalb wird der Unterschied der Grössen $\frac{2^s\beta_s}{\alpha_s}$ und $2^s\beta_s$ mit beständig zunehmendem s beliebig klein, und die aufgestellte Folge von Ungleichheiten drückt die eine der zu beweisenden Thatsachen aus, dass der Ausdruck $2^s\beta_s$ bei stets wachsendem s gegen einen festen positiven Grenzwerth convergirt. Der letztere heisse ϑ, so dass die Gleichung

$$\lim . 2^s \beta_s = \vartheta$$

besteht. Um den zweiten Theil der Behauptung zu erledigen, braucht man nur die Gleichung

$$2^s (1-\alpha_s)(1+\alpha_s) = 2^s \beta_s \beta_s$$

zu bilden und zu erwägen, dass für eine stets zunehmende Zahl s auf der linken Seite der Factor $1+\alpha_s$ gegen den Werth 2, auf der rechten der Factor $2^s \beta_s$ gegen den so eben eingeführten Grenzwerth ϑ, der Factor β_s gegen die Null convergirt. Alsdann ergiebt sich mit Nothwendigkeit die Gleichung

$$\lim . 2^s (1-\alpha_s) = 0.$$

Indem die Grösse ϑ als der Bogen bezeichnet wird, für welchen die gegebenen Grössen α und β die Gleichungen

$$\alpha = \cos \vartheta, \quad \beta = \sin \vartheta,$$

oder die eine Gleichung

$$\alpha + i\beta = \cos \vartheta + \sin i\, \vartheta$$

erfüllen, bleibt zu zeigen, dass aus der gewählten Definition die Grundeigenschaften der trigonometrischen Functionen hervorgehen. Hierzu betrachten wir noch eine zweite complexe Grösse $\gamma + i\delta$, bei welcher ebenfalls

$$\gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \gamma \geqq 0, \quad \delta > 0$$

ist, und setzen ausserdem voraus, dass

$$\alpha\gamma - \beta\delta > 0$$

sei. In Folge dessen befriedigt das Product

$$p + iq = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta),$$

in welchem

$$p = \alpha\gamma - \beta\delta, \quad q = \alpha\delta + \beta\gamma$$

ist, nach I, § 27 wieder die Bedingungen

$$p^2 + q^2 = 1, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Man kann nun für die complexen Grössen $\gamma + i\delta$ und $p + iq$ die entsprechenden Reihen von eindeutig bestimmten complexen Grössen wie für $\alpha + i\beta$ bilden und schliesst bei ähnlichen Bezeichnungen aus den Gleichungen

$$(p_1 + iq_1)^2 = p + iq$$
$$(\alpha_1 + i\beta_1)^2 = \alpha + i\beta$$
$$(\gamma_1 + i\delta_1)^2 = \gamma + i\delta,$$

dass entweder

$$p_1 + iq_1 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\gamma_1 + i\delta_1)$$

oder
$$p_1 + iq_1 = -(\alpha_1 + i\beta_1)(\gamma_1 + i\delta_1)$$
sein muss. Hier ist $p_1 > 0$, $q_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\delta_1 > 0$; weil nun vermöge der getroffenen Annahme
$$\alpha\gamma - \beta\delta > 0,$$
und ausserdem nach dem Obigen $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{2\beta_1}{\alpha_1}$, ferner auf gleiche Weise $\frac{\delta}{\gamma} > \frac{2\delta_1}{\gamma_1}$ ist, so folgt
$$1 > \frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma} > \frac{2\beta_1}{\alpha_1}\frac{2\delta_1}{\gamma_1}$$
und daher gewiss
$$\alpha_1\gamma_1 - \beta_1\delta_1 > 0.$$
Aus diesen Gründen besteht von den beiden für $p_1 + iq_1$ angegebenen möglichen Gleichungen in der That nur die erste. Ferner ergiebt sich durch Wiederholung derselben Schlüsse die Reihe von Relationen
$$p_2 + iq_2 = (\alpha_2 + i\beta_2)(\gamma_2 + i\delta_2)$$
$$p_3 + iq_3 = (\alpha_3 + i\beta_3)(\gamma_3 + i\delta_3)$$
$$\vdots$$
$$p_s + iq_s = (\alpha_s + i\beta_s)(\gamma_s + i\delta_s).$$
Es möge jetzt der zu der complexen Grösse $\gamma + i\delta$ gehörende vorhin definirte positive Grenzwerth λ, der ebenso zu der complexen Grösse $p + iq$ gehörende positive Grenzwerth φ heissen, so dass für eine ohne Ende wachsende Zahl s die den obigen entsprechenden Gleichungen
$$\lim .\, 2^s\,\delta_s = \lambda,$$
$$\lim .\, 2^s\,(1 - \gamma_s) = 0,$$
$$\lim .\, 2^s\,q_s = \varphi,$$
$$\lim .\, 2^s\,(1 - p_s) = 0$$
bestehen. Alsdann correspondiren mit der Gleichung
$$\alpha + i\beta = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$
die beiden Gleichungen
$$\gamma + i\delta = \cos\lambda + i\sin\lambda,$$
$$p + iq = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
und es leuchtet ein, dass wir die in (1) des § 13 enthaltenen Additionssätze der trigonometrischen Functionen bewiesen und

unser Ziel erreicht haben, sobald festgestellt worden, dass die Grösse φ gleich der Summe der Grössen ϑ und λ ist.

Man kann die beiden auf $\alpha + i\beta$ bezüglichen Gleichungen zu einer einzigen verbinden, in welcher die complexe Grösse $\alpha_s + i\beta_s$ erscheint, indem man die erste Gleichung mit i, die zweite mit -1 multiplicirt und hierauf addirt. Das Ergebniss lautet

$$\lim . 2^s (\alpha_s + i\beta_s - 1) = i\vartheta.$$

Ebenso entstehen respective für $\gamma + i\delta$ und $p + iq$ die Gleichungen

$$\lim . 2^s (\gamma_s + i\delta_s - 1) = i\lambda,$$

$$\lim . 2^s (p_s + i q_s - 1) = i\varphi.$$

Aus der Multiplication der beiden ersten von den dreien entsteht das Resultat

$$\lim . 2^s ((\alpha_s + i\beta_s)(\gamma_s + i\delta_s) - (\alpha_s + i\beta_s) - (\gamma_s + i\delta_s) + 1)$$
$$= \lim . \frac{-\vartheta\lambda}{2^s},$$

ferner durch Hinzufügung der beiden ursprünglichen

$$\lim . 2^s ((\alpha_s + i\beta_s)(\gamma_s + i\delta_s) - 1) = \lim . \left(i\vartheta + i\lambda - \frac{\vartheta\lambda}{2^s}\right).$$

Wegen der obigen Gleichung

$$(\alpha_s + i\beta_s)(\gamma_s + i\delta_s) = p_s + i q_s$$

darf die linke Seite durch $i\varphi$ ersetzt werden, ferner convergirt die rechte Seite, weil ϑ und λ feste Werthe bedeuten und 2^s mit der Zahl s über jedes Mass hinaus wächst, gegen den Grenzwerth $i\vartheta + i\lambda$; man gelangt daher nach Weglassung des für beide Seiten gemeinsamen Factors i zu der Gleichung

$$\varphi = \vartheta + \lambda,$$

welche zu beweisen war.

Für den bisher ausgeschlossenen Fall $\alpha = 1, \beta = 0$ bleiben die complexen Grössen $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots$ beständig gleich der positiven Einheit, so dass für jede Zahl s die Werthe $\alpha_s = 1, \beta_s = 0$ gelten und die Grösse ϑ gleich Null sein muss. In dem anderen extremen Falle $\alpha = 0, \beta = 1$ bringt das mitgetheilte Verfahren für ϑ einen gewissen Werth hervor, der nach der üblichen Bezeichnung $\frac{1}{2}\pi$ zu nennen ist. Wir können nun den Gang der zu $(p+iq)=(\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)$ gehörenden Grösse $\varphi=\vartheta+\lambda$ unter der Voraussetzung verfolgen, dass $\alpha+i\beta$ fest, $\gamma+i\delta$ veränderlich sei. Dann gehört zu $\alpha+i\beta$ der feste Werth ϑ, zu $\gamma+i\delta$ der veränderliche λ, der für $\gamma=1, \delta=0$ selbst gleich Null ist. Hier besteht zwischen den positiven Grössen α und p die Ungleichheit

$$\alpha>p,$$

da offenbar

$$\alpha-p=\alpha(1-\gamma)+\beta\,\delta>0$$

ist; gleichzeitig muss, weil $\alpha^2+\beta^2=1, p^2+q^2=1$ ist, zwischen den positiven Grössen β und q die Ungleichheit

$$\beta<q$$

Statt finden. Es entspricht also unter den geltenden Bedingungen jeder Zunahme der Grösse q eine Zunahme von λ und daher auch der zugehörigen Grösse $\varphi=\vartheta+\lambda$. Man darf hiernach folgern, dass, wofern die Grösse q stets wachsend von der Null bis zu der positiven Einheit fortschreitet, die zugehörige Grösse φ von der Null bis zu dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt. Die betreffende positive Grösse p ist dann vermittelst der Gleichung

$$p^2+q^2=1$$

eindeutig bestimmt und nimmt von der positiven Einheit bis zur Null ab. Somit überzeugt man sich leicht, dass zu einem beliebigen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gegebenen Werth φ eine vollkommen bestimmte positive Grösse q und eine ebensolche Grösse p gehört, und kann durch ein mehrfach angewandtes Verfahren die Grössen p und q, und daher auch die complexe Grösse

$$p+iq$$

mit beliebiger Genauigkeit angeben. Auf diese Weise werden für einen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gegebenen Bogen φ die zugehörigen trigonometrischen Functionen $p=\cos\varphi, q=\sin\varphi$ gefunden.

Bedenkt man, dass bei der Folge von Ungleichheiten, welche zu der Definition $\lim.\,2^s\,\beta_s=\vartheta$ geführt hat, der Grenzwerth ϑ zwischen den dort vorkommenden, links von der Mitte stehenden Grössen eingeschlossen ist, und setzt $\alpha = \cos\vartheta$, $\beta = \sin\vartheta$, so ergiebt sich die Relation

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} > \vartheta > \sin\vartheta,$$

die mit der Relation (7) des § 13 zusammenfällt, und wie diese für ein zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegendes Argument ϑ gilt. Bisher sind überhaupt nur complexe Grössen $\alpha + i\beta$ von der Norm Eins betrachtet worden, bei denen $\alpha \geqq 0, \beta > 0$ ist, und zu denen Bogen von der erwähnten Beschränkung gehören. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass jede complexe Grösse $a + ib$ von der Norm Eins, welche jene Bedingung nicht erfüllt, durch Multiplication mit $-1, i$ oder $-i$ in eine complexe Grösse von der bezeichneten Beschaffenheit verwandelt werden kann, glauben wir jedoch die für den gegenwärtigen Standpunkt noch erforderliche Vervollständigung, welche alle complexen Grössen von der Norm Eins und die trigonometrischen Functionen von beliebigen Bogen umfasst, übergehen zu dürfen.

In den letzten fünf §§ ist die Differentiation der fundamentalen transcendenten Functionen mitgetheilt worden. Bei einer Vergleichung der bezüglichen Differentialquotienten findet sich, dass der natürliche Logarithmus und die umgekehrten trigonometrischen Functionen zu einer Gruppe, die mit der Basis der natürlichen Logarithmen gebildete Exponentialfunction und die directen trigonometrischen Functionen zu einer anderen Gruppe gehören. Der nach dem Argument genommene Differentialquotient hat bei jeder Function der ersten Gruppe die Eigenschaft, gleich einer algebraischen Function des Arguments, bei jeder Function der zweiten Gruppe gleich einer transcendenten Function des Arguments zu sein. Wie tief dieser Unterschied gehe, wird sich im weiteren Verlaufe zeigen.

§ 15. Differenzen verschiedener Ordnungen einer Function einer Variable.

Der Differentialquotient einer Function einer Variable ist in § 5 als der Grenzwerth des Quotienten definirt worden, welcher aus der Division der Differenz von zwei Werthen der

Variable in die Differenz der zugehörigen Werthe der Function hervorgeht. Indem die Operation des Differenznehmens durch eine besondere Charakteristik angedeutet wird, erhält die Differenz der Werthe der Variable das Zeichen

$$(1)\qquad \Delta x = h,$$

die Differenz der entsprechenden Werthe der Function das Zeichen

$$(2)\qquad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

und der in Rede stehende Differenzenquotient den Ausdruck

$$(3)\qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Es kann nun die Operation des Differenznehmens wiederholt werden, nachdem der Variable x eine Reihe von beliebigen auf einander folgenden Werthen

$$(4)\qquad x, x_1, x_2, \ldots x_n$$

beigelegt ist. Zuerst entsteht *die Reihe der Differenzen der ersten Ordnung*

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x_1) - f(x) \\ \Delta f(x_1) &= f(x_2) - f(x_1) \\ &\vdots \\ \Delta f(x_{n-1}) &= f(x_n) - f(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Dann ergiebt sich *die Reihe der Differenzen der zweiten Ordnung*

$$(6)\qquad \begin{aligned} \Delta\Delta f(x) &= \Delta f(x_1) - \Delta f(x) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x) \\ \Delta\Delta f(x_1) &= \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1) = f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) \\ &\vdots \\ \Delta\Delta f(x_{n-2}) &= \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2}) = f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}). \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise folgt aus jeder Reihe von Differenzen die Reihe der Differenzen der nächst höheren Ordnung, so dass *die Reihe der Differenzen einer beliebigen pten Ordnung* diese ist,

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta^p f(x) = f(x_p) - \frac{p}{1} f(x_{p-1}) + \frac{p(p-1)}{1.2} f(x_{p-2}) - \ldots + (-1)^p f(x) \\ \Delta^p f(x_1) = f(x_{p+1}) - \frac{p}{1} f(x_p) + \frac{p(p-1)}{1.2} f(x_{p-1}) - \ldots + (-1)^p f(x_1) \\ \vdots \\ \Delta^p f(x_{n-p}) = f(x_n) - \frac{p}{1} f(x_{n-1}) + \frac{p(p-1)}{1.2} f(x_{n-2}) - \ldots + (-1)^p f(x_{n-p}). \end{cases}$$

In der Darstellung von $\Delta^p f(x), \Delta^p f(x_1), \ldots \Delta^p f(x_{n-p})$ erscheinen die verschiedenen Werthe der Function nach den absteigenden Zeigern der Werthe der Variable geordnet, mit abwechselnden Vorzeichen versehen und mit den successiven Binomialcoefficienten vom Exponenten p multiplicirt. Für $p=1$ fällt diese Darstellung mit der in (5) gegebenen Definition zusammen. Ihre allgemeine Gültigkeit schliesst man daraus, dass die Darstellung, wenn sie für einen beliebigen Werth von p richtig ist, für den um eine Einheit grösseren Werth ebenfalls gilt. Angenommen, die Gleichungen (7) seien für die Differenzen der $(p-1)$ten Ordnung zutreffend, so folgt aus der Definitionsgleichung

$$(8) \qquad \Delta^p f(x) = \Delta^{p-1} f(x_1) - \Delta^{p-1} f(x)$$

die Gleichung

$$(9) \quad \Delta^p f(x)$$
$$= f(x_p) - \frac{p-1}{1} f(x_{p-1}) + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} f(x_{p-2}) - .. + (-1)^{p-1} f(x_1)$$
$$- f(x_{p-1}) + \frac{p-1}{1} f(x_{p-2}) - .. + (-1)^{p-1} \frac{p-1}{1} f(x_1) + (-1)^p f(x).$$

Nun erfüllen die auftretenden Binomialcoefficienten die Gleichungen

$$(10) \quad \frac{p-1}{1} + 1 = \frac{p}{1}, \quad \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} + \frac{p-1}{1} = \frac{p(p-1)}{1.2} \ldots,$$

welche durch wirkliche Ausführung der Addition leicht zu begründen sind und auch aus den Gleichungen (10) in I, § 117 entstehen, indem daselbst die Zahl n gleich $p-1$ und n' gleich der Einheit gesetzt wird. Vermöge (10) geht aber die Gleichung (9) in die erste Gleichung (7) über, wodurch der erforderliche Beweis geführt ist.

Ganz entsprechend kann mit den Werthen $x, x_1, x_2, \ldots$ verfahren werden, so dass man die Gleichungen erhält

$$(5^*) \qquad \begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x \\ \Delta x_1 &= x_2 - x_1 \\ &\vdots \\ \Delta x_{n-1} &= x_n - x_{n-1}, \end{aligned}$$

$$(6^*) \qquad \Delta\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x = x_2 - 2x_1 + x,$$

$$(7^*) \qquad \begin{aligned} \Delta^p x &= \Delta^{p-1} x_1 - \Delta^{p-1} x \\ &= x_p - \frac{p}{1} x_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} x_{p-2} - \ldots + (-1)^p x. \end{aligned}$$

Für manche Zwecke reicht es aus, die Reihe der Werthe (4) so zu wählen, dass die Differenz von zwei auf einander folgenden immer dieselbe bleibt, mithin

$$(4_a) \qquad x_1 = x + h,\ x_2 = x + 2h,\ x_n = x + nh$$

ist. Dann verwandelt sich die erste Zeile von (7) in die Gleichung

$$(5_a) \qquad \varDelta^p f(x) = f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \ldots + (-1)^p f(x).$$

Die Operation, durch welche aus $f(x)$ der Differenzenquotient $\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}$ entsteht, lässt sich ebenfalls wiederholen; hierbei beschränken wir uns gegenwärtig auf die Annahme, dass die successiven Differenzen der Variable x constant sein sollen. Man nimmt nun von dem betreffenden Quotienten die Differenz $\frac{\varDelta f(x_1)}{\varDelta x_1} - \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}$, wo nach der genannten Voraussetzung $\varDelta x_1 = \varDelta x$ ist, und dividirt durch die Differenz $\varDelta x$. Die Differenz des Quotienten $\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}$ wird alsdann gleich dem Ausdruck $\frac{\varDelta(\varDelta f(x))}{\varDelta x}$; mithin erhält man die Gleichung

$$(11) \qquad \frac{\varDelta\left(\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\right)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta^2 f(x)}{(\varDelta x)^2},$$

und aus denselben Gründen vermittelst (4_a) und (7) durch $p$fache Wiederholung desselben Verfahrens das Resultat

$$(12) \qquad \frac{\varDelta\left(\frac{\varDelta^{p-1} f(x)}{\varDelta x^{p-1}}\right)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta^p f(x)}{\varDelta x^p}$$

$$= \frac{f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \ldots + (-1)^p f(x)}{h^p}.$$

Da für unsere Darstellung nur das Princip der so eben erörterten Operationen wesentlich ist, und überdies die Anwendung keine Schwierigkeiten darbietet, so unterlassen wir es Beispiele hinzuzufügen.

§ 16. Differentialquotienten verschiedener Ordnungen einer Function einer Variable.

Ebenso wie das Verfahren der Bildung eines Differenzenquotienten mehrfach nach einander angewendet wird, wiederholt man auch das Verfahren der Bildung eines Differentialquotienten und bezeichnet die durch diesen Process entspringenden Functionen einer Variable in ähnlicher Weise.

Der nach der Variable x genommene Differentialquotient der Function $f(x)$ heisst dann *der Differentialquotient der ersten Ordnung oder der erste Differentialquotient*, der nach der Variable x genommene Differentialquotient von diesem *der Differentialquotient der zweiten Ordnung oder der zweite Differentialquotient der Function $f(x)$ in Bezug auf die Variable x*, und allgemein der nach der Variable x genommene Differentialquotient des $(p-1)$ten Differentialquotienten *der Differentialquotient der $p$ten Ordnung oder der $p$te Differentialquotient der Function $f(x)$ in Bezug auf die Variable x.* Die von *Leibnitz* herrührende Notation, welche sich an die Notation der Gleichungen (11) und (12) des vorigen § anschliesst, ist die folgende

$$(1)\qquad \frac{d\left(\dfrac{d\,f(x)}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

$$(1_a)\qquad \frac{d\left(\dfrac{d^{p-1} f(x)}{dx^{p-1}}\right)}{dx}=\frac{d^p f(x)}{dx^p}.$$

Da die Aufstellung der höheren Differentialquotienten einer gegebenen Function auf die successive Bildung erster Differentialquotienten hinauskommt, so sind für den genannten Zweck keine eigenthümlichen Methoden erforderlich. Erwähnt zu werden verdient das Gesetz der aufeinander folgenden Differentialquotienten eines Products von zwei Functionen. Aus der Gleichung

$$(2)\qquad \frac{d\,(f(x)\,g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\,g(x)+f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

folgt durch die erste Differentiation

$$(2_a)\quad \frac{d^2\,(f(x)\,g(x))}{dx^2}=\frac{d^2f(x)}{dx^2}\,g(x)+\frac{2\,df(x)}{dx}\cdot\frac{dg(x)}{dx}+f(x)\,\frac{d^2g(x)}{dx^2},$$

und durch Fortsetzung, wie leicht zu beweisen ist, mit Anwendung der Binomialcoefficienten

$$(2_b)\quad \frac{d^p(f(x)\,g(x))}{dx^p}$$

$$= \frac{d^p f(x)}{dx^p}\, g(x) + \frac{p}{1}\,\frac{d^{p-1} f(x)}{dx^{p-1}}\,\frac{dg(x)}{dx} + \ldots + f(x)\,\frac{d^p g(x)}{dx^p}.$$

Auch lassen sich die aufeinander folgenden Differentialquotienten von den Grundfunctionen der Analysis leicht angeben, sobald die Darstellung ihrer ersten Differentialquotienten vorliegt.

Der erste Differentialquotient der mit dem beliebigen Exponenten n gebildeten Potenz x^n hat nach (13) des § 12 den Ausdruck

$$(3)\qquad \frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}.$$

Die Bestimmung der nach einander folgenden Differentialquotienten wird vermöge derselben Formel

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2(x^n)}{dx^2} = n(n-1)\,x^{n-2} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^p(x^n)}{dx^p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\,x^{n-p}. \end{cases}$$

Hierbei giebt sich ein Unterschied zwischen den ganzen positiven Potenzen und allen übrigen Potenzen der Variable x zu erkennen. Wofern n eine ganze positive Zahl ist, wird der $n$te Differentialquotient von x^n gleich dem Product der natürlichen Zahlen $n(n-1)(n-2)\ldots 1$ oder $n!$, welches n *Facultät* genannt wird; dann verschwindet der $(n+1)$te und jeder höhere Differentialquotient unbedingt. Wenn dagegen n nicht gleich einer ganzen positiven Zahl ist, so nimmt der numerische Factor $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ bei keinem Werthe der Ordnungszahl p den Werth Null an, und kein noch so hoher Differentialquotient der Potenz x bekommt die Eigenschaft, für ein unbestimmtes x zu verschwinden.

Mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient des natürlichen Logarithmus in Bezug auf den Numerus nach (44) des § 10 gleich dem reciproken Werthe des Numerus ist, erhält man die sämmtlichen Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus mit Zuziehung von (3) wie folgt

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\log x}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{d^2\log x}{dx^2} = \dfrac{-1}{x^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^p\log x}{dx^p} = (-1)^{p-1}\,\dfrac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(p-1)}{x^p}. \end{cases}$$

Die mit der Basis der natürlichen Logarithmen gebildete Exponentialfunction bringt nach (10) des § 11 als den auf das Argument bezüglichen Differentialquotienten sich selbst hervor. Jede neue Differentiation muss daher wieder dasselbe Resultat liefern, und es entsteht für jeden Werth der Zahl p die Gleichung

$$(6)\quad \frac{d^p(e^x)}{dx^p} = e^x.$$

Für die trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$ folgen aus (9) und (10) des § 13 die Ausdrücke der Differentialquotienten

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sin x}{d\,x} = \cos x \\ \dfrac{d^2\sin x}{d\,x^2} = -\sin x \\ \dfrac{d^3\sin x}{d\,x^3} = -\cos x \\ \dfrac{d^4\sin x}{d\,x^4} = \sin x, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\cos x}{d\,x} = -\sin x \\ \dfrac{d^2\cos x}{d\,x^2} = -\cos x \\ \dfrac{d^3\cos x}{d\,x^3} = \sin x \\ \dfrac{d^4\cos x}{d\,x} = \cos x. \end{cases}$$

Der Umstand, dass der vierte Differentialquotient von jeder der beiden Functionen mit der differentiirten Function selbst zusammenfällt, übt die Wirkung, dass bei fortgesetzter Differentiation stets dieselben Ausdrücke in der gleichen Reihenfolge wiederkehren. Nun liefert jede ganze positive Zahl p bei der Division mit der Zahl Vier einen bestimmten Quotienten q, und einen bestimmten Rest r aus den vier Zahlen 0, 1, 2, 3, so dass die Gleichung $p = 4q + r$ erfüllt wird (I, § 2). Dann lassen sich die Differentialquotienten der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ von einer beliebig hohen Ordnung so darstellen

$$\frac{d^{4q+r} \sin x}{d x^{4q+r}} = \frac{d^r \sin x}{d x^r}, \tag{9}$$

$$\frac{d^{4q+r} \cos x}{d x^{4q+r}} = \frac{d^r \cos x}{d x^r}; \tag{10}$$

dabei ist festgesetzt, dass für $r = 0$ die betreffende Function selbst eintrete, und dass für $r = 1, 2, 3$ die Ausdrücke aus (7) und (8) genommen werden.

Die Entwickelung der höheren Differentialquotienten der Functionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ kann man wie die Formation der ersten Differentialquotienten in § 13 darauf gründen, dass die in Rede stehenden Functionen gleich Quotienten aus den Functionen $\sin x$ und $\cos x$ sind.

Die ersten Differentialquotienten der umgekehrten trigonometrischen Functionen $\operatorname{arc} \sin x$ und $\operatorname{arc} \cos x$ sind nach (9) und (10) des § 14 respective gleich dem positiv oder negativ genommenen reciproken Werth des Radikals $\sqrt{1 - x^2}$, die umgekehrten trigonometrischen Functionen $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ nach (11) und (12) desselben § beziehungsweise gleich dem positiv oder negativ genommenen reciproken Werthe des rationalen ganzen Ausdruckes $1 + x^2$. Hieraus folgt vermöge der mitgetheilten Regeln für die Differentiation einer algebraischen Function, dass der nach x genommene $p$te Differentialquotient sowohl der Function $\operatorname{arc} \sin x$ wie auch der Function $\operatorname{arc} \cos x$ gleich einem Bruche ist, dessen Zähler eine rationale ganze Function von x, und dessen Nenner die $(2p - 1)$te Potenz des Radikals $\sqrt{1 - x^2}$ ist, und dass der nach x genommene $p$te Differentialquotient sowohl der Function $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ wie auch der Function $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ gleich einem Bruche ist, dessen Zähler eine rationale ganze Function von x, und dessen Nenner die $p$te Potenz des rationalen ganzen Ausdruckes $1 + x^2$ ist.

Die Begriffe, welche wir als den ersten, zweiten, $p$ten Differentialquotienten einer Function definirt haben, sind auch mit anderen Namen bezeichnet worden. *Newton* nannte sie beziehungsweise *erste, zweite, p te Fluxion*, *Lagrange* führte die Ausdrücke *abgeleitete Function der ersten, zweiten, p ten Ordnung* oder *erste, zweite, p te abgeleitete Function* ein, statt deren auch die Abkürzungen *erste, zweite, p te Ableitung* benutzt werden. Nach dem Vorgange von *Lagrange* notirt man die nach x genommenen Ableitungen der ersten, zweiten, p ten Ordnung einer Function $y=f(x)$ durch die Zeichen

$$(11) \qquad y'=f'(x),\ y''=f''(x), \ldots y^{(p)}=f^{(p)}(y).$$

An dieser Stelle haben wir darauf aufmerksam zu machen, dass in I, § 49 die Bezeichnung der auf einander folgenden Ableitungen einer rationalen ganzen Function

$$f(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

welche durch die Gleichungen

$$f'(x)=n a_0 x^{n-1} + (n-1)\, a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

$$f''(x)=n(n-1)\, a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)\, a_1 x^{n-3} + \ldots + 2.1.a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2) \ldots 2.1.a_0$$

erklärt sind, mit der so eben erörterten allgemeinen Bestimmung im Einklange steht. Die Ableitungen von $f(x)$ treten in der dortigen Gleichung (9) auf. Will man dieselbe in unseren gegenwärtigen Zeichen ausdrücken, so ist wie in I, § 94 statt z das Zeichen x und statt k das Zeichen h einzuführen; dann entsteht die Darstellung

$$(12) \qquad f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n}h^n.$$

Die gegebene rationale ganze Function, deren Argument durch den zweigliedrigen Ausdruck $x+h$ ersetzt ist, erscheint hier nach den auf einander folgenden ganzen positiven Potenzen der Grösse h entwickelt. Die Function $f(x)$ bildet das von h freie Glied, der Coefficient jeder einzelnen ganzen positiven Potenz von h ist gleich der Ableitung der Function $f(x)$ von gleich hoher Ordnung, durch die gleichnamige Facultät dividirt.

Capitel II.

Principien der Integration.

§ 17. Umkehrung der Aufgabe der Differentiation.

Man kann die Operation, durch welche von einer Function, die für ein gewisses Intervall der unabhängigen Variable gegeben ist, der auf die Variable bezügliche Differentialquotient bestimmt wird, in der folgenden Weise umkehren. Es sei für das zwischen den Grössen a und b ausgedehnte Intervall der Variable x *eine eindeutige, endliche und stetige Function* $f(x)$ gegeben; verlangt wird eine Function $y = \varphi(x)$ von solcher Beschaffenheit, dass der nach der Variable x genommene Differentialquotient von $\varphi(x)$ der Function $f(x)$ gleich sei, oder in Zeichen, der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

genüge. Die Lösung dieser Aufgabe heisst *die Integration der Function* $f(x)$ *in Bezug auf die variable Grösse* x. Mit dem Studium der so eben gestellten Frage betreten wir die Schwelle der Integralrechnung; wir werden uns aber dem gesteckten Ziele nicht unmittelbar sondern in der Art näheren, dass wir die Betrachtung einer einfacheren Aufgabe voranschicken, bei welcher an die Stelle des Differentialquotienten der Begriff des Differenzenquotienten gesetzt ist.

§ 18. Umkehrung der Aufgabe, einen Differenzenquotienten zu bilden.

Innerhalb des von a bis b ausgedehnten Intervalls der Variable x, für welches die im vorigen § bezeichnete Function $f(x)$ eindeutig, endlich und stetig gegeben ist, werde ein von α bis β reichendes Intervall so angenommen, dass die vier Werthe a, α, β, b, nach ihrer algebraischen Grösse auf einander folgen. Zwischen den äussersten Werthen α und β des engeren Intervalls schalte man eine beliebige Anzahl unter einander verschiedener Werthe ein, welche ebenfalls nach ihrer algebraischen Grösse geordnet sind, sonst keiner Beschränkung unterliegen und folgendermassen ausgedrückt werden,

$$\alpha = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ \beta = x_n. \tag{1}$$

Indem man die in § 15 eingeführten Bezeichnungen benutzt, sind die Differenzen von je zwei auf einander folgenden Werthen

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1, \ldots \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} \tag{2}$$

sämmtlich von Null verschieden und Grössen desselben Vorzeichens. Wofern für das in Rede stehende Intervall eine Function $F(x)$ gegeben wäre, so liesse sich mit den Differenzen (2) die Reihe von Differenzenquotienten bilden

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0},\ \frac{\Delta F(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$
$$\ldots \frac{\Delta F(x_{n-1})}{\Delta x_{n-1}} = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Man erhält nun die am Schlusse des vorigen § angedeutete Aufgabe, in dem man, die gegenwärtig beschriebene Operation umkehrend, die Forderung ausspricht, *es sollen die auf einander folgenden Functionswerthe $F(x_0)$, $F(x_1) \ldots F(x_n)$ so bestimmt werden, dass die Differenzenquotienten* (3) *der Reihe nach den entsprechenden Werthen der Function $f(x)$ gleich seien,*

$$f(x_0),\ f(x_1) \ldots f(x_{n-1}),$$

oder dass für die Werthe x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$ die Gleichung

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x) \tag{4}$$

befriedigt werde.

Die in (4) enthaltenen Gleichungen nehmen, nachdem jede mit der im Nenner auftretenden Differenz multiplicirt ist, die Gestalt an

$$\left\{\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) &= f(x_0)(x_1 - x_0) \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_1)(x_2 - x_1) \\ &\ \vdots \\ F(x_n) - F(x_{n-1}) &= f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ihre Behandlung beruht auf dem Princip, *dass der Bildung einer Differenz als umgekehrte Operation die Bildung einer Summe entspricht.* Indem man zuerst die zwei, dann die drei ersten, und so fort, zuletzt alle Gleichungen addirt, entstehen für die Differenzen $F(x_2) - F(x_0)$, $F(x_3) - F(x_0)$,.. $F_n(x) - F(x_0)$ die Ausdrücke

$$(6)\quad \begin{cases} F(x_2)-F(x_0)=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1) \\ F(x_3)-F(x_0)=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2) \\ \vdots \\ F(x_n)-F(x_0)=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+..+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}). \end{cases}$$

Es ist klar, dass die sämmtlichen Grössen $F(x_0)$, $F(x_1)$, ... $F(x_n)$ vollständig bestimmt sind, sobald eine derselben gegeben ist, und dass der Werth dieser einen beliebig gewählt werden darf. Wir setzen voraus, dass die Grösse $F(x_0)$ beliebig gegeben sei, und haben dann in den Gleichungen (6) *die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe.*

Die gegenwärtige Betrachtung schliesst sich an die Auseinandersetzung über Differenzenquotienten an, welche in § 15 des ersten Capitels gegeben ist, bindet sich jedoch nicht an die dort getroffene Annahme, dass die Differenzen der unabhängigen Variable sämmtlich einander gleich oder *constant* seien. Für diese specielle Voraussetzung werden die sämmtlichen Differenzen (2) gleich dem n ten Theile des Intervalls $(\beta - \alpha)$, so dass die Gleichungen (6) in die folgenden übergehen

$$(7)\quad \begin{cases} F(x_2) - F(x_0) = (f(x_0) + f(x_1))\,\dfrac{\beta - \alpha}{n} \\ F(x_3) - F(x_0) = (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2))\,\dfrac{\beta - \alpha}{n} \\ \vdots \\ F(x_n) - F(x_0) = (f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1}))\,\dfrac{\beta - \alpha}{n}. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (1) sind für die äussersten Werthe des benutzten engeren Intervalls die Zeichen $x_0 = \alpha$, $x_n = \beta$ eingeführt. Es wird daher durch die letzte Gleichung von (6) die Differenz $F(\beta) - F(\alpha)$, mithin bei einer beliebig gegebenen Grösse $F(\alpha)$ die Grösse $F(\beta)$ so ausgedrückt

$$(8)\quad \begin{aligned} &F(\beta) - F(\alpha) \\ &= f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+..+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Unter der Annahme constanter Differenzen tritt statt (8) die letzte Gleichung (7) ein

(9) $$F(\beta)-F(\alpha)=(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))\,\frac{\beta-\alpha}{n},$$

welche besonders zu beachten ist. Man nennt die durch die Anzahl dividirte Summe gegebener Grössen *das arithmetische Mittel der Grössen.* Hiernach darf der Inhalt der Gleichung (9) so ausgedrückt werden, dass die Differenz $F(\beta)-F(\alpha)$ gleich dem Product ist, das durch Multiplication des arithmetischen Mittels der gegebenen Functionswerthe $f(x_0)$, $f(x_1)$, . . $f(x_{n-1})$, und des Intervalls $(\beta-\alpha)$ entsteht.

§ 19. Geometrische Deutung eines Summenausdrucks.

Die im vorigen § gelöste Aufgabe zeigt die Eigenthümlichkeit, dass eine der Grössen $F(\alpha)$, $F(x_1)\ldots F(\beta)$, für die wir $F(\alpha)$ angenommen haben, willkürlich bleibt, dagegen jede Differenz aus zweien, mithin auch die Differenz $F(\beta)-F(\alpha)$ vollständig bestimmt ist. Nun bezieht sich die folgende Untersuchung auf den Summenausdruck, durch welchen die Differenz $F(\beta)-F(\alpha)$ dargestellt ist und der so lautet

(1) $$F(\beta)-F(\alpha)$$
$$=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}).$$

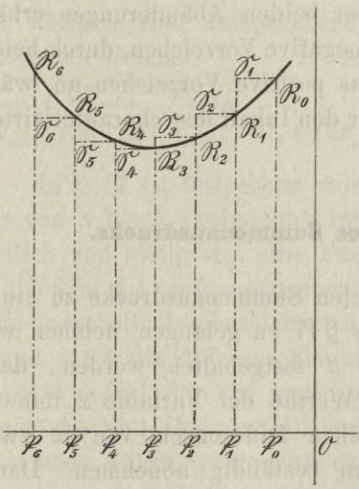
Er erlaubt eine einfache geometrische Interpretation mit Hülfe der Curve, welche für die rechtwinkligen Coordinaten x und u eines Punktes einer Ebene durch die Gleichung

(2) $$u=f(x)$$

bezeichnet wird. Das von α bis β ausgedehnte Intervall der Variable x giebt einen gewissen Theil der x Axe an, und die von den eingeschalteten Werthen zu erfüllende Bedingung erhält den Sinn, dass die Punkte dieser Axe $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_n$, welche den Werthen α, x_1, x_2,...x_{n-1}, β entsprechen, unter einander verschieden sind und gleichfalls der Reihe nach auf einander folgen. Der bequemeren Formulirung wegen werde vorausgesetzt, dass die Differenz $\beta-\alpha$ positiv sei und die Function $f(x)$ in dem betreffenden Intervall ebenfalls nur positive Werthe annehme. In Folge dessen haben die sämmtlichen Differenzen $x_1-\alpha$, x_2-x_1,...$\beta-x_{n-1}$ das positive Vorzeichen und geben das Mass des Abstandes von je zwei entsprechenden Punkten der x Axe an; diese folgen für wachsende Zeiger in derjenigen Richtung aufeinander, in welcher die x Coordinaten zunehmen. Die Lothe, welche in den betreffenden Punkten gegen die x Axe errichtet werden und deren zweite Endpunkte die auf einander folgenden Punkte $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_{n-1}, \mathfrak{R}_n$ der durch die Gleichung (2) definirten Curve sind, liegen sämmtlich auf derjenigen Seite der Abscissenaxe, auf der sich die positiven Ordinaten befinden; die Längen der Lothe werden beziehungsweise durch die Functionswerthe

$$f(\alpha), f(x_1), f(x_2) \ldots f(\beta)$$

ausgedrückt. In der nebenstehenden Figur (8) ist die Lage der Axen wie in der Figur (1) des § 2 angenommen, was auch stillschweigend immer in Zukunft geschehen wird. Zieht man durch jeden Punkt der Curve $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_{n-1}$ eine Parallele zur Abscissenaxe bis zu einem Punkte, der auf der Ordinate des nächstfolgenden Punktes oder auf deren Verlängerung liegt, und nennt die neuen Punkte respective $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_n$, so entsteht eine Reihe von Rechtecken, das erste von der Basis $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 = x_1 - \alpha$ und der Höhe $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{R}_0 = f(x_0)$, das zweite von der Basis $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = x_2 - x_1$ und der Höhe $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{R}_1 = f(x_1)$, u. s. f., das letzte von der Basis $\mathfrak{P}_{n-1} \mathfrak{P}_n = \beta - x_{n-1}$ und der Höhe $\mathfrak{P}_{n-1} \mathfrak{R}_{n-1} = f(x_{n-1})$. Der Flächeninhalt jedes Rechtecks wird durch das Product der Längen seiner Basis und Höhe gemessen. Folglich stellen die auf einander folgenden Bestandtheile des auf der rechten Seite von (1) befindlichen Summenausdrucks die Inhalte der construirten Rechtecke dar, und der ganze Ausdruck ist gleich der Summe der Inhalte aller Rechtecke, oder auch gleich dem Inhalte desjenigen Theiles der Ebene, welcher durch die Abscissenaxe, durch die erste Ordinate $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{R}_0$, durch die letzte Ordinate $\mathfrak{P}_n \mathfrak{R}_n$,



(Figur 8)

und durch die aus geraden Stücken bestehende gebrochene Linie $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{R}_{n-1} \mathfrak{S}_n$ begrenzt wird.

Sobald die Differenz $\beta - \alpha$ negativ ist, folgen die Punkte der Abscissenaxe $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_{n-1}, \mathfrak{P}_n$ in entgegengesetzter Richtung gegen das Wachsen der Abscissen auf einander; wenn die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalls nur negative Werthe erhält, liegen die Punkte der Curve $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_n$ auf derjenigen Seite der Abscissenaxe, welcher die negativen Ordinaten zugehören. Durch jede einzelne der beiden Abänderungen erhält der obige Summenausdruck das negative Vorzeichen, durch beide zusammen nimmt er wieder das positive Vorzeichen an, während sein absoluter Werth immer den Inhalt des charakterisirten Theiles der Ebene darstellt.

§ 20. Grenzwerth eines Summenausdrucks.

Um mit Hülfe des gebildeten Summenausdrucks zu einer Auflösung der Gleichung (1) des § 17 zu gelangen, nehmen wir an, dass die Grössen α und β festgehalten werden, dass die Anzahl der eingeschalteten Werthe der Variable x immerfort wachse, und die sämmtlichen Differenzen von je zwei auf einander folgenden Werthen beständig abnehmen. Dann lässt sich auf die Voraussetzung, dass die eindeutige und endliche Function $f(x)$ in einer sogleich zu erklärenden Weise die Bedingung der Stetigkeit erfülle, der Beweis gründen, dass der erwähnte Summenausdruck gegen einen festen Grenzwerth convergirt. Mit den Werthen von x möge in der Weise verfahren werden, dass, nachdem eine bestimmte Reihe eingeschaltet ist, die wie im vorigen § bezeichnet sei, zwischen je zwei Werthen eine Anzahl von Individuen eingeschoben werde, die ebenfalls ihrer algebraischen Grösse nach auf einander folgen und die Bezeichnungen haben:

$$
(1) \qquad \begin{array}{llll}
\alpha = x_{0,0} & = x_0, & x_{0,1}, \ldots x_{0,p-1} \\
x_{0,p} = x_{1,0} & = x_1, & x_{1,1}, \ldots x_{1,p_1-1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_{n-2,p_{n-2}} = x_{n-1,0} & = x_{n-1}, & x_{n-1,1}, \ldots x_{n-1,p_{n-1}-1} \\
x_{n-1,p_{n-1}} = x_{n,0} & = \beta. &
\end{array}
$$

Durch dieses Verfahren geht der Summenausdruck

(2) $f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$

in einen neuen Summenausdruck über, welcher durch Addition von n Theilen erhalten wird, von denen der erste aus dem Intervall zwischen x_0 und x_1, der zweite aus dem Intervall zwischen x_1 und x_2, u. s. f., der letzte aus dem Intervall zwischen x_{n-1} und x_n herrührt. Der erste Theil hat die Gestalt

(3) $f(x_{0,0})(x_{0,1}-x_{0,0})+f(x_{0,1})(x_{0,2}-x_{0,1})+\ldots+f(x_{0,p-1})(x_{0,p}-x_{0,p-1})$,

die übrigen sind entsprechend gebildet, der letzte Theil ist gleich der Summe

(4) $f(x_{n-1,0})(x_{n-1,1}-x_{n-1,0})$

$+f(x_{n-1,1})(x_{n-1,2}-x_{n-1,1})+\ldots+f(x_{n-1,p_{n-1}-1})(x_{n-1,p_{n-1}}-x_{n-1,p_{n-1}-1})$.

In § 17 ist festgesetzt worden, dass die Function $f(x)$ für das von a bis b ausgedehnte Intervall der Variable x eindeutig, endlich und stetig sei; eine Function heisst aber nach der aus I, § 108 in § 1 aufgenommenen Definition stetig, wofern bei je zwei innerhalb des bezeichneten Intervalls befindlichen Werthen x und $x+h$ die Differenz der zugehörigen Werthe der Function $f(x+h)-f(x)$ für ein gegen die Null abnehmendes h selbst gegen die Null abnimmt. Bisher haben wir diese Definition nur in solchen Fällen gebraucht, wo von den Werthen x und $x+h$ der eine x festgehalten, der andere $x+h$ dem ersteren immer näher gerückt wurde. Wenn jedoch die Aussage in vollkommener Strenge von je zwei innerhalb des bezüglichen Intervalls zu nehmenden Werthen x und $x+h$ gelten soll, deren Differenz h der Null genähert wird, so steht es frei, jeden der beiden Werthe x und $x+h$ nach und nach so zu ändern, dass dabei die Differenz h kleiner und kleiner wird, und auch dann muss die entsprechende Differenz $f(x+h)-f(x)$ nach der aufgestellten Definition gegen die Null abnehmen. Gegenwärtig fügen wir noch die Voraussetzung hinzu, dass der numerische Werth der Differenz $f(x+h)-f(x)$ für jedes innerhalb der Werthe a und b liegende Paar von Werthen x und $x+h$, sobald der numerische Werth von h unter eine gewisse kleine Grösse δ herabsinkt, kleiner bleibe als eine beliebig kleine Grösse λ. Alsdann kann man zeigen, dass derjenige Summenausdruck, in welchen sich der Summenausdruck (2) unter Anwendung der eingeschalteten Werthe (1) verwandelt, wenn nur die Werthe $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ hinreichend nahe an einander liegen, von dem Werthe des Summenausdrucks (2) beliebig wenig abweicht.

Es seien die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ so gewählt, dass die Differenzen $x_1 - \alpha$, $x_2 - x_1, \ldots \beta - x_{n-1}$, die nach § 18 sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben, numerisch unter der kleinen Grösse δ liegen. In Folge dessen sind die entsprechend genommenen Differenzen von je zwei auf einander folgenden Werthen aus (1) ebenfalls von demselben Vorzeichen und numerisch kleiner als die Grösse δ. Auch leuchtet es ein, dass die ähnlich gebildeten Differenzen von irgend zwei Werthen der Variable, die in dem Ausdrucke (3) vorkommen, gleichfalls dasselbe Vorzeichen haben und kleiner als δ sind, und dass für die nicht hingeschriebenen ähnlichen Ausdrücke und den letzten Ausdruck (4) das gleiche gilt. Weil nun die Voraussetzung besteht, dass der numerische Werth der Differenz $f(x+h) - f(x)$ kleiner als λ wird, sobald der numerische Werth von h kleiner als δ ist, so darf man schliessen, dass die Differenz von je zwei Functionswerthen, die in dem Ausdrucke (3) vorkommen, numerisch kleiner als λ ist, und denselben Schluss auf die folgenden ähnlichen Ausdrücke bis zu dem letzten Ausdruck (4) anwenden. So ergeben sich die Ungleichheiten

$$(5)\begin{cases} -\lambda < f(x_{0,1}) - f(x_{0,0}) < \lambda, -\lambda < f(x_{0,2}) - f(x_{0,0}) < \lambda, \ldots -\lambda < f(x_{0,p-1}) - f(x_{0,0}) < \lambda, \\ -\lambda < f(x_{1,1}) - f(x_{1,0}) < \lambda, -\lambda < f(x_{1,2}) - f(x_{1,0}) < \lambda, \ldots -\lambda < f(x_{1,p_1-1}) - f(x_{1,0}) < \lambda, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -\lambda < f(x_{n-1,1}) - f(x_{n-1,0}) < \lambda, -\lambda < f(x_{n-1,2}) - f(x_{n-1,0}) < \lambda, \ldots\ldots\ldots \\ \qquad -\lambda < f(x_{n-1,p_{n-1}-1}) - f(x_{n-1,0}) < \lambda. \end{cases}$$

Aus der ersten Reihe folgt, dass jeder der Functionswerthe $f(x_{0,0}), f(x_{0,1}) \ldots f(x_{0,p-1})$ zwischen den Grössen $f(x_{0,0}) - \lambda$ und $f(x_{0,0}) + \lambda$, aus der zweiten Reihe, dass jeder der Functionswerthe $f(x_{1,0}), f(x_{1,1}), \ldots f(x_{1,p_1-1})$ zwischen den Grössen $f(x_{1,0}) - \lambda$ und $f(x_{1,0}) + \lambda$ liegt, u. s. f., schliesslich aus der letzten Reihe, dass jeder der Functionswerthe $f(x_{n-1,0}), f(x_{n-1,1}), \ldots f(x_{n-1,p_{n-1}-1})$ zwischen den Grössen $f(x_{n-1,0}) - \lambda$ und $f(x_{n-1,0}) + \lambda$ enthalten ist. Man substituire in (3), den ähnlich gebildeten folgenden

Ausdrücken und dem letzten (4) statt der auftretenden Functionswerthe zuerst gleichzeitig die entsprechenden zu kleinen, dann gleichzeitig die entsprechenden zu grossen Werthe. Dann gehen aus (3) die beiden Ausdrücke

$$(6)\qquad (f(x_{0,0})-\lambda)(x_{0,p}-x_{0,0}),\ (f(x_{0,0})+\lambda)(x_{0,p}-x_{0,0})$$

hervor, da die Summe der successiven Differenzen $x_{0,1}-x_{0,0}$, $x_{0,2}-x_{0,1}, \ldots x_{0,p}-x_{0,p-1}$ gleich der Differenz $x_{0,p}-x_{0,0}$ ist, und diese beiden Ausdrücke schliessen den Werth von (3) in Grenzen ein. Man erhält ferner successive die Paare von Ausdrücken

$$(7)\ \begin{cases} (f(x_{1,0})-\lambda)(x_{1,p_1}-x_{1,0}), & (f(x_{1,0})+\lambda)(x_{1,p_1}-x_{1,0}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (f(x_{n-1,0})-\lambda)(x_{n-1,p_{n-1}}-x_{n-1,0}), & (f(x_{n-1,0})+\lambda)(x_{n-1,p_{n-1}}-x_{n-1,0}), \end{cases}$$

welche beziehungsweise die gleiche Bedeutung haben.

Die Werthe der Variable x, die in (6) und (7) vorkommen, gehören, wie sich aus (1) zeigt, sämmtlich zu der ersten Reihe, die zwischen α und β eingeschaltet wurden, so dass (6) in die Gestalt

$$(8)\qquad (f(x_0)-\lambda)(x_1-x_0),\ (f(x_0)+\lambda)(x_1-x_0),$$

und (7) in die Gestalt

$$(9)\qquad \begin{cases} (f(x_1)-\lambda)(x_2-x_1), & (f(x_1)+\lambda)(x_2-x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (f(x_{n-1})-\lambda)(x_n-x_{n-1}), & (f(x_{n-1})+\lambda)(x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

gebracht werden kann. Für den Fall, dass $\beta-\alpha$ positiv ist, haben die sämmtlichen Differenzen x_1-x_0, $x_2-x_1, \ldots x_n-x_{n-1}$ das positive Vorzeichen und liefert überall der Ausdruck links den zu kleinen, der Ausdruck rechts den zu grossen Werth; für den Fall, dass $\beta-\alpha$ negativ ist, gilt durchweg das Umgekehrte. In beiden Fällen ist der Werth des zu untersuchenden Summenausdrucks, welcher durch Addition der Ausdrücke von (3) bis (4) entsteht, zwischen den beiden Resultaten eingeschlossen, von denen das eine durch Addition der Ausdrücke links in (8) und (9), das andere durch Addition der Ausdrücke rechts in (8) und (9) erhalten wird. Bei der auszuführenden Addition lässt sich das erste Mal als Factor von $-\lambda$, das zweite Mal als Factor von λ die Summe der Differenzen

$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots x_n - x_{n-1}$ herausziehen, deren Werth vermöge einer so eben benutzten Bemerkung gleich der Differenz $x_n - x_0 = \beta - \alpha$ ist. Dadurch werden die bezeichneten beiden Resultate gleich den Ausdrücken

$$(10)\left\{\begin{array}{l} f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})-\lambda(\beta-\alpha) \\ f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\lambda(\beta-\alpha), \end{array}\right.$$

welche von dem Summenausdruck (2) um das positiv oder negativ zunehmende Product aus der Grösse λ und der Differenz $(\beta-\alpha)$ abweichen. Weil aber die Grösse λ für einen hinreichend kleinen Werth der Grösse δ, unter welcher der numerische Werth der sämmtlichen Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots x_n - x_{n-1}$ angenommen ist, beliebig klein wird, und weil die Differenz $\beta - \alpha$ einen bestimmten endlichen Werth hat, so bekommt auch das Product $\lambda(\beta-\alpha)$ einen beliebig kleinen Werth. Mithin ist der Summenausdruck, in welchen sich (2) bei einer noch soweit fortgesetzten Theilung des Intervalls verwandelt, von den beiden Werthen (10) eingeschlossen, deren jeder von (2) um beliebig wenig differirt, und daher hat der Ausdruck (2), wie behauptet worden, die Eigenschaft, bei fortwährendem Wachsen der Zahl n und gleichzeitiger Annäherung der sämmtlichen zwischen α und β eingeschalteten Werthe, gegen einen festen Grenzwerth zu convergiren.

Man kann sich durch eine Wiederholung der angewendeten Schlüsse davon überzeugen, dass es erlaubt ist, bei den Ungleichheiten (5) in der ersten Reihe statt des Functionswerthes $f(x_{0,0})$ stets den Functionswerth $f(x_{1,0})$ in der zweiten Reihe statt des Functionswerthes $f(x_{1,0})$ stets den Functionswerth $f(x_{2,0})$ u. s. f., in der letzten Reihe statt des Functionswerthes $f(x_{n-1,0})$ stets den Functionswerth $f(x_{n,0})$ anzuwenden, und gelangt so zu dem Ergebniss, dass der zu untersuchende Summenausdruck, welcher der Anwendung der eingeschalteten Werthe (1) entspricht, bei einer hinreichend kleinen Grösse δ um beliebig wenig von dem folgenden Summenausdruck abweicht

$$(2^*) \qquad f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Hierin liegt der Beweis der Thatsache, dass der Werth des Ausdrucks (2*) bei genügender Vergrösserung der Zahl n und gleichzeitiger Annäherung der sämmtlichen zwischen α und β eingeschalteten Werthe sich von dem Werthe des Ausdrucks (2) ebenfalls beliebig wenig unterscheidet, oder in andern Worten, dass der Ausdruck (2) und der Ausdruck (2*) für ein wachsendes n gegen denselben Grenzwerth convergiren.

Wenn man zwischen den Werthen α und β einen Werth $\beta^{(1)}$ einschaltet und nach dem Schema des Ausdrucks (2) einen Summenausdruck für das Intervall von α bis $\beta^{(1)}$, einen zweiten Summenausdruck für das Intervall von $\beta^{(1)}$ bis β bildet, so leuchtet vermöge des geführten Beweises ein, dass unter den erwähnten Voraussetzungen bei fortgesetzter Vermehrung der eingeschalteten Werthe der eine wie der andere Summenausdruck gegen einen bestimmten Grenzwerth convergirt, und dass das Aggregat dieser beiden Grenzwerthe gleich dem Grenzwerthe ist, gegen welchen der auf das Intervall von α bis β bezügliche Summenausdruck (2) convergirt. Ein entsprechendes Resultat muss entstehen, sobald das von α bis β ausgedehnte Intervall durch die Einschaltung von mehreren Zwischenwerthen in eine grössere Anzahl von kleineren Intervallen zerlegt und für jedes dieser Intervalle der dem Schema (2) entsprechende Summenausdruck aufgestellt wird.

§ 21. Bestimmung des Inhalts eines ebenen Flächenstücks.

Die geometrische Deutung, welche in § 19 von dem Summenausdruck

$$(1) \quad f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

gegeben ist, lässt sich leicht mit der im vorigen § angestellten Betrachtung verbinden. Durch die Einführung der daselbst unter (1) angegebenen Zwischenwerthe tritt an die Stelle von jedem einzelnen der Rechtecke, deren Inhalte ursprünglich zu addiren sind, eine Summe von Inhalten neuer Rechtecke, und der so eben bewiesene Satz sagt aus, dass die Gesammtsumme der Inhalte aller Rechtecke, die einer noch so weit getriebenen Theilung des von α bis β reichenden Intervalls entsprechen, gegen einen festen Grenzwerth convergirt. Wir legen auch jetzt die in § 19 erwähnte Voraussetzung zu Grunde, dass die Differenz $\beta - \alpha$ positiv sei und in dem betreffenden Intervall die Function $f(x)$ nur positive Werthe erhalte. Nun weist die Anschauung sogleich darauf hin, dass der Grenzwerth der bezeichneten Summe von Rechtecken den Inhalt des Flächenstückes darstellt, welches durch die Abscissenaxe, die erste Ordinate $x = \alpha$, die letzte Ordinate $x = \beta$ und die gegebene Curve $u = f(x)$ begrenzt wird. Hier gilt aber eine ähnliche Bemerkung, wie sie I, § 103 in Bezug auf die Messung der Länge eines Kreisbogens gemacht worden ist. Dort wurde die Nothwendigkeit betont, das Mass für die Länge eines Kreisbogens zu definiren. In entsprechender Weise muss gegenwärtig das Mass für den Inhalt eines Flächenstückes definirt werden, welches zum Theil durch eine Curve und zum Theil durch gerade Linien begrenzt wird. Es möge auf der betreffenden Curve zwischen ihren Endpunkten eine Reihe von Punkten eingeschaltet und jeder einzelne mit dem nächsten durch eine Sehne verbunden werden; dann hat das Flächenstück, welches durch die ursprünglich gegebenen geraden Linien und die so eben bezeichneten Sehnen begrenzt wird, einen bestimmten durch das Quadrat der eingeführten Längeneinheit messbaren Inhalt. Wenn dieser Inhalt, indem die Anzahl der auf der Curve eingeschalteten Punkte beständig vergrössert wird und die Punkte einander näher rücken, gegen einen Grenzwerth convergirt, so bezeichnet der letztere den Inhalt des Flächenstückes, das von den erwähnten geraden Linien und der gegebenen Curve begrenzt wird. Dass die Bestimmung des Inhaltes oder die Quadratur einer Kreisfläche auf dem Nachweise der Existenz eines Grenzwerthes für den Inhalt der eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone beruhe, ist durch die Geometrie der Griechen bekannt. Bei dem vorhin erwähnten Flächenstück, welches durch die Abscissenaxe, die zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehörenden Ordinaten und die Curve $u = f(x)$ begrenzt wird, lässt sich eine entsprechende Betrachtung anstellen. Dieselbe vereinfacht sich, sobald die Function $f(x)$ innerhalb des von α bis β ausgedehnten Intervalls entweder beständig wächst oder beständig abnimmt. Falls die

Function innerhalb des ganzen Intervalls mehrere Male vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, so zerlege man das Intervall in eine Anzahl von kleineren, die sich von α bis $\beta^{(1)}$ von $\beta^{(1)}$ bis $\beta^{(2)}, \ldots$ erstrecken und in deren jedem die Function $f(x)$ die verlangte Beschaffenheit besitzt, und behandle jedes dieser Intervalle für sich. Die zu § 19 gehörende Figur (1) ist so eingerichtet, dass die Function $f(x)$ für den ersten Theil des Intervalls, der von dem Punkte $\mathfrak{O}$ bis zu dem Punkte $\mathfrak{P}_3$ der Abscissenaxe geht, fortwährend sinkt, für den zweiten Theil des Intervalls, der von dem Punkte $\mathfrak{P}_3$ bis zu dem Punkte $\mathfrak{P}_6$ der Abscissenaxe reicht, fortwährend steigt. Der Kürze halber beschäftigen wir uns nur mit dem ersten Theile des Intervalls und untersuchen demgemäss das Verhalten einer Function $f(x)$, die von $x=\alpha$ bis $x=\beta^{(1)}$ stets abnimmt; die auf der Curve liegenden Punkte $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_{m-1}, \mathfrak{R}_m$ sollen den Werthen der Abscisse $\alpha = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}, \beta^{(1)} = x_m$, mithin den Punkten $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_{m-1}, \mathfrak{P}_m$ entsprechen. Wenn jetzt eine Sehne von $\mathfrak{R}_0$ nach $\mathfrak{R}_1$, von $\mathfrak{R}_1$ nach $\mathfrak{R}_2$, u. s. f., zuletzt von $\mathfrak{R}_{m-1}$ nach $\mathfrak{R}_m$ gezogen wird, so ist der in der Definition bezeichnete Flächenraum durch die Reihe von Sehnen, die erste Ordinate $\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{R}_0$, die letzte Ordinate $\mathfrak{P}_m\,\mathfrak{R}_m$ und das Stück der Abscissenaxe $\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_m$ begrenzt. Es kommt nun darauf an, diesen Flächenraum F_m mit der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke zu vergleichen, die beziehungsweise über den Basen

$$\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{m-1}\,\mathfrak{P}_m$$

mit den Höhen $\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{R}_0, \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{P}_{m-1}\,\mathfrak{R}_{m-1}$ errichtet sind, nämlich mit

$$(2) \quad f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{m-1})(x_m-x_{m-1}),$$

und hierauf zu zeigen, dass beide Werthe für eine wachsende Zahl m gegen denselben Grenzwerth convergiren. Da die Function $f(x)$ in dem vorliegenden Intervall stets abnimmt, so leuchtet ein, dass die Summe der Rechtecke (2) grösser als der Flächenraum F_m und auch grösser als ein Flächenraum F ist, der durch das vorgeschriebene Verfahren, bei der Einschaltung von beliebig vielen neuen Punkten zwischen den ursprünglich angenommenen, erhalten werden kann. In gleicher

Weise folgt aus dem beständigen Abnehmen der Function $f(x)$, dass die Summe der Flächeninhalte von den Rechtecken, bei denen zu den Basen $\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$, .. $\mathfrak{P}_{m-1}\,\mathfrak{P}_m$ respective die Höhen $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{R}_2$, .. $\mathfrak{P}_m\,\mathfrak{R}_m$ genommen sind,

(2*) $$f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_m)(x_m-x_{m-1}),$$

welche Summe dasselbe Bildungsgesetz wie der im vorigen § mit (2*) bezeichnete Ausdruck befolgt, kleiner als der Flächenraum F_m und auch kleiner als ein Flächenraum F ist, der durch das angegebene Verfahren, vermöge der Einschaltung von beliebig vielen neuen Punkten zwischen den ursprünglich angenommenen Punkten, hervorgebracht werden kann. Wenn aber die Differenzen x_1-x_0, x_2-x_1, ... x_m-x_{m-1} sämmtlich kleiner als eine gewisse kleine Grösse δ sind, so müssen nach der schon eingeführten Voraussetzung die numerischen Werthe der im gegenwärtigen Falle negativen Differenzen

$$f(x_1)-f(x_0),\ f(x_2)-f(x_1),\ ..\ f(x_m)-f(x_{m-1})$$

sämmtlich kleiner als die beliebig kleine Grösse λ ausfallen. Folglich wird die Summe (2*) von der Summe (2) um eine Grösse übertroffen, die stets kleiner bleibt als das Aggregat $\lambda(x_1-x_0)+\lambda(x_2-x_1)+\,..+\lambda(x_m-x_{m-1})$, welches gleich dem Product $\lambda(x_m-x_0)$ oder $\lambda(\beta^{(1)}-\alpha)$ ist. Aus diesen Gründen ist das Mass des definirten Flächenraumes F zwischen den beiden Ausdrücken (2) und (2*) enthalten, die um weniger als die beliebig kleine Grösse $\lambda(\beta^{(1)}-\alpha)$ von einander abweichen, und deshalb convergirt das Mass des Flächenraumes F gegen einen Grenzwerth und zwar gegen denselben, dem sich die beiden Ausdrücke (2) und (2*) beliebig nähern. Eine ähnliche Erörterung kann in Bezug auf ein Intervall angestellt werden, in welchem die Function $f(x)$ fortwährend zunimmt. Der Inhalt des Flächenraumes, der zu der von α bis β ausgedehnten Strecke gehört, ist aber gleich der Summe der Inhalte der Flächenräume, welche zu den einzelnen von α bis $\beta^{(1)}$, von $\beta^{(1)}$ bis $\beta^{(2)}$,... reichenden Strecken gehören. Insofern nun nach einer am Schlusse des vorigen § gemachten Bemerkung der dortige Summenausdruck (2) eine Zerlegung in Theile gestattet, die sich auf die einzelnen Theile des gegebenen Intervalls beziehen, und da nachgewiesen ist, dass der einzelne für ein bestimmtes Theilintervall gebildete Summenausdruck die Darstellung des zu diesem Intervall gehörenden Flächenraumes liefert, so gilt das Resultat, dass der Inhalt des Flächenstückes, welches von der Abscissenaxe, der zu $x=\alpha$ und der zu $x=\beta$ gehörenden Ordinate und der Curve $u=f(x)$ begrenzt wird, gleich dem Grenzwerthe ist, gegen den der Summenausdruck (1) für eine stets wachsende Zahl n und eine gleichzeitige Annäherung der eingeschalteten Werthe convergirt. Man darf annehmen, dass ein beliebig begrenztes ebenes Flächenstück sich immer in Flächenstücke zerlegen lasse, von denen jedes die vorausgesetzte Art der Begrenzung hat. Mithin ist jetzt ein Princip aufgestellt, welches zu der Ausmessung oder Quadratur von ebenen Flächenstücken überhaupt genügt.

§ 22. Beweis der Möglichkeit, eine gegebene Function einer Variable zu integriren.

Für die Untersuchung des Grenzwerthes, gegen den ein auf die angegebene Weise gebildeter Summenausdruck convergirt, ist es wesentlich, von vorne herein Grössen zu kennen, innerhalb deren der Grenzwerth gelegen ist. Bei dem Summenausdruck

$$(1) \quad f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1}),$$

der sich auf das von α bis β ausgedehnte Intervall bezieht, müssen nach der bestehenden Voraussetzung alle dem Intervall angehörenden Functionswerthe endlich sein, das heisst, zwischen zwei bestimmten Grössen M und N liegen, von denen M im algebraischen Sinne die kleinere sein möge. Da die sämmtlichen Differenzen x_1-x_0, x_2-x_1, .. x_n-x_{n-1} dasselbe Vorzeichen haben, welches die Differenz $\beta-\alpha$ hat, so entstehen aus dem Summenausdruck (1) zwei Grössen, zwischen denen sein Werth enthalten sein muss, sobald alle Functionswerthe das erste Mal durch M, das andere Mal durch N ersetzt werden. In dem ersten Falle ergiebt sich das Product $M(\beta-\alpha)$, in dem zweiten das Product $N(\beta-\alpha)$. Beide Ausdrücke sind von der Anzahl n der eingeschalteten Werthe und der Art ihrer Einschaltung vollkommen unabhängig, und schliessen deshalb auch den Grenzwerth ein, gegen welchen der Summenausdruck (1) bei einer wachsenden Zahl n convergirt. Der vorhin bezeichnete Zweck wird deshalb durch den folgenden Satz erreicht:

(I) *Wenn die Function $f(x)$ innerhalb des von α bis β reichenden Intervalls die Ungleichheiten $M < f(x) < N$ erfüllt, so ist der Grenzwerth des zugehörigen Summenausdrucks* (1) *zwischen den Grössen $M(\beta - \alpha)$ und $N(\beta - \alpha)$ eingeschlossen.*

Aus diesem Satze folgt als Corollar, *dass der Grenzwerth eines Summenausdrucks* (1), *bei dem die Grössen α und β zusammenfallen, gleich Null ist.*

Wir sind in § 17 von der Annahme ausgegangen, dass die Function $f(x)$ für das von a bis b ausgedehnte Intervall gegeben sei, und haben in § 18 innerhalb dieses Intervalls den Anfangs- und Endwerth α und β eines engeren Intervalls gewählt. Die Grössen α und β wurden bis jetzt festgehalten. Von nun ab sollen jedoch auch diese als veränderlich gelten, und zwar zunächst so dass α ungeändert bleibt, β dagegen in einen anderen Werth $\beta + h$ übergeht, wo $\alpha, \beta, \beta + h$ nach ihrer algebraischen Grösse geordnet sind, und $\beta + h$ äussersten Falles gleich b werden kann. Denkt man sich den Grenzwerth des Summenausdruckes (1) zuerst für das Intervall von α bis β, dann für das Intervall von α bis $\beta + h$ gebildet, so erfährt der Grenzwerth eine entsprechende Veränderung und darf deshalb als *eine Function $\psi(\beta)$ des Endwerthes β* angesehen werden. Das von α bis $\beta + h$ reichende Intervall lässt sich in zwei Intervalle zerlegen, von denen das erste von α bis β, das zweite von β bis $\beta + h$ geht; nach einem am Schlusse des § 20 mitgetheilten Satze ist dann der Grenzwerth des Summenausdrucks, der sich auf das ganze Intervall bezieht, gleich dem Aggregat der Grenzwerthe der beiden Summenausdrücke, welche den Theilintervallen entsprechen. Wenn daher zwischen $x = \beta$ und $x = \beta + h$ die folgenden Werthe eingeschaltet werden

$$(2) \qquad \beta = \xi_0, \; \xi_1, \; \xi_2, \; \ldots \; \xi_{q-1}, \; \beta + h = \xi_q,$$

so entstehen für die Grenzwerthe $\psi(\beta)$ und $\psi(\beta + h)$ die Ausdrücke

$$(3) \quad \psi(\beta) = \lim.\left(f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\right),$$

$$(4) \quad \psi(\beta + h) = \lim.\left(f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\right)$$
$$+ \lim.\left(f(\xi_0)(\xi_1 - \xi_0) + f(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + \ldots + f(\xi_{q-1})(\xi_q - \xi_{q-1})\right),$$

wo die Zahlen n und q über jedes Mass hinaus wachsen.

Die Betrachtung der so eben eingeführten Function $\psi(\beta)$ wird eine Lösung der Aufgabe liefern, welche in § 17 durch die dortige Gleichung (1) ausgedrückt ist. In der letzteren bedeutet x einen zwischen den Grössen a und b liegenden variabeln Werth; substituirt man statt x das Zeichen β, so verwandelt sie sich in die jetzt anzuwendende Gestalt

$$(5) \qquad \frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} = f(\beta).$$

Nach der Bedeutung, welche die Grösse β bei der Function $\psi(\beta)$ empfangen hat, kann β jeden Werth annehmen, der zwischen dem festzuhaltenden Anfangswerthe α des engeren Intervalls und dem Endwerthe b des ursprünglichen Intervalls liegt, für das die Function $f(x)$ gegeben ist. Vermöge der entwickelten Eigenschaften der Function $\psi(\beta)$ lässt sich nun die Frage beantworten, *welches der Differentialquotient der Function* $\psi(\beta)$ *in Bezug auf die Variable* β *sei.* Dem Increment h von β entspricht das Increment der Function $\psi(\beta+h) - \psi(\beta)$, das nach den Gleichungen (3) und (4) den Ausdruck erhält

$$(6) \quad \psi(\beta+h) - \psi(\beta) = \lim.(f(\xi_0)(\xi_1 - \xi_0) + \cdots + f(\xi_{q-1})(\xi_q - \xi_{q-1})).$$

Für den auf der rechten Seite befindlichen Grenzwerth liefert aber der so eben abgeleitete Satz (I) zwei einschliessende Grössen. Es möge die Function $f(x)$ in dem betreffenden Intervall, das sich von β bis $\beta+h$ erstreckt, zwischen den Werthen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ liegen, so bekommen die betreffenden Grössen, da die Differenz $\beta+h-\beta$ gleich dem Zuwachs h selbst ist, die Werthe $\mathfrak{M}\,h$ und $\mathfrak{N}\,h$. Hieraus folgt, indem man beide Seiten von (6) durch den Zuwachs h dividirt, dass der Quotient $\frac{\psi(\beta+h)-\psi(\beta)}{h}$ zwischen den Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ liegen muss. Nun ist der Quotient $\frac{\psi(\beta+h)-\psi(\beta)}{h}$ unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die Grösse h nach und nach stets kleinere Werthe erhält und dadurch das von β bis $\beta+h$ reichende Intervall beständig verengert. Es darf aber aus der Bedingung, welche in § 20 für die Stetigkeit der Function $f(x)$ vorgeschrieben ist, geschlossen werden, dass, sobald der numerische Werth des Increments h unter eine gewisse kleine Grösse δ herabgeht, die Differenz von je zwei Functionswerthen des von β bis $\beta+h$ ausgedehnten Intervalls numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse λ bleibt. Indem man also den numerischen Werth von h kleiner als δ voraussetzt und die in dem genannten Intervall vorkommenden Functionswerthe mit dem ersten Functionswerth $f(\xi_0)=f(\beta)$ vergleicht, zeigt sich, dass alle zwischen den Grössen $f(\beta)-\lambda$ und $f(\beta)+\lambda$ liegen müssen, und dass es daher erlaubt ist, die letztern Ausdrücke beziehungsweise an die Stelle von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zu setzen. Der Werth des Quotienten $\frac{\psi(\beta+h)-\psi(\beta)}{h}$ ist demnach zwischen den Grössen $f(\beta)-\lambda$ und $f(\beta)+\lambda$ eingeschlossen, und convergirt, da für ein ohne Ende abnehmendes δ die Grösse λ beliebig klein wird, gegen den Grenzwerth $f(\beta)$. Mithin gilt für die Differentiation der Function $\psi(\beta)$ der folgende Satz:

(II) *Der Differentialquotient der durch die Gleichung* (3) *definirten Function $\psi(\beta)$, die zu einem von α bis β ausgedehnten Intervall gehört, in Bezug auf die Variable β genommen, ist gleich dem Functionswerth $f(\beta)$, der dem Endwerth β des betreffenden Intervalls entspricht.*

Hiernach hat die Function $\psi(\beta)$ die Eigenschaft, an die Stelle der Function $\varphi(\beta)$ in die Gleichung (5) substituirt, dieselbe zu befriedigen, und bildet eine Lösung der durch die Gleichung bezeichneten Aufgabe. *Die Function $\psi(\beta)$ wird das von der Grenze α bis zu der Grenze β ausgedehnte Integral der Function $f(x)$ genannt und vermittelst des von Leibnitz eingeführten Integralzeichens $\int$ so bezeichnet*

$$\int f(x)\,dx,$$

wobei die Grenzen α und β ausserdem zu bemerken sind. Bei der später nach dem Vorgange Fouriers angenommenen Notation setzt man die untere Grenze der Integration α unter, die obere Grenze der Integration β über das Integralzeichen, so dass die Darstellung

$$\psi(\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

entsteht. Durch die Bildung der Function $\psi(\beta)$ wird die Inte-

gration der gegebenen Function $f(\beta)$ in Bezug auf die Variable β bewerkstelligt. Mit dem Nachweise der Existenz der Function $\psi(\beta)$ ist zugleich bewiesen, dass die Aufgabe, die gegebene Function $f(\beta)$ zu integriren, immer eine Lösung hat.

Das in § 21 entwickelte Princip für die Quadratur von ebenen Flächenstücken lässt sich jetzt so aussprechen, dass bei einer positiven Differenz $\beta-\alpha$ und einer positiv bleibenden Function $f(x)$ der Inhalt des Flächenstücks, welches durch die Abscissenaxe, die zu α und β gehörenden Ordinaten und die Curve $y=f(x)$ begrenzt wird, gleich dem Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ist. Mit Rücksicht hierauf pflegt man die Ermittelung des Werthes eines Integrals abgekürzt eine Quadratur zu nennen.

§ 23. Ausführung der Integration für einzelne Fälle.

Der vorige § enthält eine Vorschrift zur thatsächlichen Ausführung der Integration, das heisst derjenigen Operation, welche nach § 17 die umgekehrte Operation der Differentiation ausmacht. Da das zwischen den Grenzen α und β zu nehmende Integral der Function $f(x)$ als der Grenzwerth definirt wird, gegen welchen der Summenausdruck

$$(1) \qquad f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

bei stets wachsender Zahl n und abnehmenden Differenzen der eingeschalteten Werthe convergirt, ist es klar, dass der Werth des Integrals in jedem einzelnen Falle mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann, indem man den Summenausdruck (1) für eine hinreichend grosse Zahl n und eine genügend fortgesetzte Theilung des Intervalls wirklich berechnet. Der hierbei begangene Fehler ist dann nach (10) des § 20 zwischen den zugehörigen Grössen $-\lambda(\beta-\alpha)$ und $\lambda(\beta-\alpha)$ eingeschlossen, wobei wir an die I, § 105 mitgetheilten Erörterungen erinnern. Um die Abhängigkeit des Integrals

$$(2) \qquad \psi(\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

von dem Werthe β seiner oberen Grenze auszudrücken, muss die Rechnung für einen festen Werth α der unteren Grenze und für eine Folge von verschiedenen Werthen der oberen Grenze β angestellt werden. Ungeachtet dieser sicheren allgemeinen Methode bleibt jedoch bei jeder gegebenen Function $f(x)$ die Aufgabe bestehen, den Werth des Integrals $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ wo möglich als das fertige Resultat von leicht zu übersehenden analytischen Operationen darzustellen. Ohne eine systematische Betrachtung zu beginnen, wollen wir das Wesen der letzteren Aufgabe durch die Behandlung einzelner Fälle zu erläutern suchen.

Es sei die Function $f(x)$ gleich einer Potenz von x mit ganzem oder gebrochenem Exponenten

$$f(x) = x^k, \tag{3}$$

zugleich seien α und β irgend zwei positive Werthe und α der kleinere derselben. Die Function $f(x)$ bleibt dann für das von α bis β ausgedehnte Intervall eindeutig, endlich und stetig. In Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und u stellt die Gleichung

$$u = x^k \tag{4}$$

für den Werth $k = 2$, wie sich durch die Vergleichung mit (11) des § 2 ergiebt, eine Parabel, für den Werth $k = -1$, wie aus (5) des § 7 folgt, eine Hyperbel dar. Für alle rationalen Werthe des Exponenten k mit Ausnahme des Werthes -1 ist die Bestimmung der durch die verschiedenen Curven begrenzten Flächenräume vor Entdeckung der Infinitesimalrechnung von *P. de Fermat* in der Abhandlung: *de aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se et cum rectilineis comparationem* gegeben worden. Der Grundgedanke dieser merkwürdigen in ein geometrisches Gewand gekleideten Arbeit, welcher darin besteht, in dem Intervall der zu der Curve gehörenden Abscissenaxe eine Folge von Punkten so anzunehmen, dass ihre von einem bestimmten Punkte gemessenen Entfernungen eine geometrische Reihe bilden, lässt den vorgesetzten Zweck schnell erreichen.

Man schalte demnach, um für die angegebenen Voraussetzungen den Grenzwerth des Ausdrucks (1) zu erhalten, zwischen die positiven Grössen α und β eine Folge von $(n-1)$

Grössen so ein, dass sie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten ϱ darstellen, und setze

(5) $x_0 = \alpha,\ x_1 = \alpha\varrho,\ x_2 = \alpha\varrho^2, \ldots x_{n-1} = \alpha\varrho^{n-1},\ x_n = \alpha\varrho^n = \beta.$

In Folge dessen muss der Quotient ϱ gleich der positiven $n$ten Wurzel aus der über der Einheit liegenden positiven Grösse $\frac{\beta}{\alpha}$ sein, mithin selbst einen über der Einheit liegenden Werth haben. Der Summenausdruck (1) geht dann vermöge der Gleichung (3), durch welche die Function $f(x)$ definirt ist, in den folgenden über

(6) $\alpha^k(\alpha\varrho - \alpha) + (\alpha\varrho)^k(\alpha\varrho^2 - \alpha\varrho) + \ldots + (\alpha\varrho^{n-1})^k(\alpha\varrho^n - \alpha\varrho^{n-1}).$

Hier ist in allen Summanden der Factor $(\varrho - 1)$ enthalten, durch dessen Absonderung der Ausdruck (6) die Gestalt annimmt

(7) $$\left(\alpha^{k+1} + (\alpha\varrho)^{k+1} + (\alpha\varrho^2)^{k+1} + \ldots + (\alpha\varrho^{n-1})^{k+1}\right)(\varrho - 1).$$

Die in der Klammer befindlichen n Grössen bilden eine geometrische Reihe mit dem ersten Gliede α^{k+1} und dem Quotienten ϱ^{k+1}, welcher für keinen Werth von k, mit Ausnahme des Werthes der negativen Einheit, gleich der positiven Einheit, dagegen für $k = -1$ gerade gleich der positiven Einheit ist. Aus diesem Grunde wird die Summe der vorliegenden geometrischen Reihe, wenn k nicht gleich -1 ist, durch die Formel

(8) $$\frac{(\alpha\varrho^n)^{k+1} - \alpha^{k+1}}{\varrho^{k+1} - 1},$$

wenn dagegen $k = -1$ ist, indem die n Glieder sämmtlich gleich der Einheit werden, durch die Zahl

(8*) $$n$$

dargestellt. Dem entsprechend erhält der Summenausdruck (7) für einen von der negativen Einheit verschiedenen Werth von k die Bestimmung

(9) $$\frac{(\alpha\varrho^n)^{k+1} - \alpha^{k+1}}{\varrho^{k+1} - 1}(\varrho - 1),$$

für $k = -1$ die Bestimmung

(9*) $$n(\varrho - 1).$$

Da nach (5) das Product $\alpha\varrho^n$ gleich der Grösse β ist, so darf der Ausdruck (9) durch den folgenden

$$(10) \qquad (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}) \frac{\varrho - 1}{\varrho^{k+1} - 1}$$

ersetzt werden. Es handelt sich jetzt darum, die Grenzwerthe zu finden, gegen welche (10) und (9*) convergiren, sobald man die Zahl n über jedes Mass hinaus wachsen lässt. Die Grösse

$$(11) \qquad \varrho = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$$

hat alsdann, da $\frac{\beta}{\alpha}$ grösser als die Einheit ist, die in I, § 100 nachgewiesene Eigenschaft, über der Einheit bleibend derselben beliebig nahe zu kommen, wobei die sämmtlichen Differenzen $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots x_n - x_{n-1}$ der Voraussetzung gemäss fortwährend abnehmen. In dem Ausdrucke (10) ist der Factor $\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}$ von der Veränderung der Grösse ϱ unabhängig. Für den Quotienten $\frac{\varrho - 1}{\varrho^{k+1} - 1}$ unterscheiden wir nach der Beschaffenheit des Exponenten k mehrere Fälle.

Wenn k und daher auch $k+1$ eine positive ganze Zahl ist, so gilt die Gleichung

$$(12) \qquad \frac{\varrho^{k+1} - 1}{\varrho - 1} = 1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^k;$$

während sich nun die über der Einheit liegende Grösse ϱ der Einheit nähert, convergirt jedes Glied der rechten Seite gegen die Einheit, mithin die Summe und daher auch der auf der linken Seite befindliche Werth gegen die Zahl $k+1$.

Ist k gleich einem positiven ganzzahligen Bruche $\frac{r}{s}$, folglich

$$(13) \qquad \frac{\varrho^{k+1} - 1}{\varrho - 1} = \frac{\varrho^{\frac{r+s}{s}} - 1}{\varrho - 1},$$

so kann man

$$(14) \qquad \varrho^{\frac{1}{s}} = \sigma$$

setzen, wodurch (13) in den Ausdruck

$$(15) \qquad \frac{\sigma^{r+s} - 1}{\sigma^s - 1} = \frac{\sigma^{r+s} - 1}{\sigma - 1} \; \frac{\sigma - 1}{\sigma^s - 1}$$

übergeht. Die durch (14) definirte Grösse σ hat ebenso wie ϱ

die Eigenschaft, abnehmend gegen die Einheit zu convergiren. Vermöge der für den Bruch (12) angestellten Betrachtung nähert sich der Bruch $\frac{\sigma^{r+s}-1}{\sigma-1}$ der ganzen Zahl $r+s$, der Bruch $\frac{\sigma^s-1}{\sigma-1}$ der ganzen Zahl s als Grenzwerth, mithin convergirt der Ausdruck (15) gegen den Quotienten $\frac{r+s}{s}$, der gleich $k+1$ ist. Wofern k und auch $k+1$ gleich einer negativen ganzen Zahl ist, hat man

$$(16)\qquad \frac{\varrho^{k+1}-1}{\varrho-1}=-\frac{1-\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{-k-1}}{\varrho\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)}=-\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}+\ldots+\frac{1}{\varrho^{-k-1}}\right)$$

und findet als Grenzwerth die Grösse $-(-k-1)=k+1$. Sobald k gleich dem negativen ganzzahligen Bruche $\frac{-r}{s}$ ist, führt die Substitution (14) zu der Darstellung

$$(17)\qquad \frac{\varrho^{k+1}-1}{\varrho-1}=\frac{\sigma^{-r+s}-1}{\sigma^s-1}=\frac{\sigma^{-r+s}-1}{\sigma-1}\,\frac{\sigma-1}{\sigma^s-1};$$

der Bruch $\frac{\sigma^s-1}{\sigma-1}$ convergirt in Folge der für (12) abgeleiteten Vorschrift gegen die Zahl s, der Bruch $\frac{\sigma^{-r+s}+1}{\sigma-1}$ nähert sich, falls $-r+s$ positiv ist, aus demselben Grunde, falls $-r+s$ negativ ist, nach der für (16) gegebenen Vorschrift dem Werthe $-r+s$, daher nähert sich der Ausdruck (17) beide Male dem Quotienten $\frac{-r+s}{s}=k+1$.

Auf diese Weise geht hervor, dass der Quotient $\frac{\varrho^{k+1}-1}{\varrho-1}$ bei jedem von der negativen Einheit verschiedenen rationalen Werthe von k gegen den Grenzwerth $k+1$, und deshalb der umgekehrte Quotient $\frac{\varrho-1}{\varrho^{k+1}-1}$ gegen den reciproken Werth $\frac{1}{k+1}$ convergirt. Demnach liefert der Ausdruck (10) für das gesuchte Integral der Function x^k, falls k nicht gleich -1 ist, die Darstellung

$$(18)\qquad \int_\alpha^\beta x^k\,dx = \frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{k+1}.$$

Der Ausdruck (9*), welcher zu der Voraussetzung $k=-1$ gehört, verwandelt sich mit Hülfe von (11) in das Product

$$(19)\qquad n\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

welches auch als der Quotient

$$(20)\qquad \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

aufgefasst werden kann. Der Grenzwerth, gegen welchen derselbe für eine wachsende Zahl n convergirt, ist aber nichts anderes als der Differentialquotient der mit der positiven Basis $\frac{\beta}{\alpha}$ gebildeten Exponentialfunction $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z$ für den Werth $z=0$; denn weil diese Function für $z=0$ der Einheit gleich wird, so entspricht dem zu dem Werthe Null der Variable z hinzugefügten Increment $\frac{1}{n}$ das Increment der Function $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}-1$. Nach der Formel (11) des § 12 wird der Differentialquotient der Function $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z$ so ausgedrückt

$$(21)\qquad \frac{d\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z}{dz} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^z \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

und ist deshalb für den Werth $z=0$ gleich dem Logarithmus naturalis des Bruches $\frac{\beta}{\alpha}$. Folglich ist der gesuchte Grenzwerth des Quotienten (20) gleich $\log\frac{\beta}{\alpha}$, woraus für das verlangte Integral die folgende Bestimmung entsteht

$$(22)\qquad \int_\alpha^\beta x^{-1}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}.$$

Hiermit ist die Aufgabe der Quadratur für die Function x^k bei allen rationalen Werthen des Exponenten k gelöst. Für den Exponenten $k = 0$, wo sich die Functon x^k in die Einheit verwandelt, ist der Summenausdruck, dessen Grenzwerth das bestimmte Integral ergiebt, durch Fortheben der eingeschalteten Werthe gleich der Differenz $\beta - \alpha$, und stellt nach der eingeführten geometrischen Deutung den Flächeninhalt eines Rechtecks dar, dessen Basis durch $\beta - \alpha$ und dessen Höhe durch die Einheit gemessen wird. Die Gleichung (18) enthält bei $k = 2$ die von *Archimedes* gefundene Quadratur eines von einem Parabelbogen begrenzten Flächenstücks. Durch die Gleichung (22) wird die Quadratur eines von einem Hyperbelbogen begrenzten Flächenstücks auf die Bildung des natürlichen Logarithmus zurückgeführt, der wegen dieser Eigenschaft auch der hyperbolische Logarithmus heisst.

§ 24. Unbestimmtes und bestimmtes Integral.

Am Anfange des § 19 wurde bemerkt, dass bei der Aufgabe, welche in § 18 für die Functionswerthe $F(\alpha), F(x_1), F(x_2), \ldots F(\beta)$ gestellt ist, einer derselben willkürlich bleibt, und als solcher galt $F(\alpha)$. Für die entsprechende Aufgabe, welche durch die Gleichung (1) des § 17 ausgedrückt wird,

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x),$$

und die Integration einer gegebenen Function $f(x)$ verlangt, ist in § 22 gezeigt worden, dass sie eine Lösung erlaubt oder möglich ist. Man sieht aber leicht ein, dass diese Aufgabe mehr als eine Lösung zulässt. Denn gesetzt, es sei auf irgend eine Weise eine Function $\varphi(x)$ gefunden, welche der Gleichung (1) genügt, so muss das Aggregat von $\varphi(x)$ und einer willkürlichen von x unabhängigen oder constanten Grösse c

$$(2) \qquad \varphi(x) + c$$

die Gleichung ebenfalls erfüllen, da der Differentialquotient einer constanten Grösse gleich der Null und der Differentialquotient eines Aggregats gleich dem Aggregat der Differentialquotienten der beiden Summanden ist. In § 6 sind beide Sätze bewiesen und durch die dortige Gleichung (19) auf den gegenwärtigen Fall angewendet.

Um aber zu erfahren, ob es möglich sei, die sämmtlichen Auflösungen der Aufgabe (1) dadurch aus einer einzigen abzuleiten, dass man zu der letzteren eine willkürliche Constante addirt, wollen wir annehmen, dass zwei gegebene Functionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ der Aufgabe genügen, und untersuchen, was hieraus für die beiden Functionen folge. Die Subtraction der Gleichung (1) von der auf die Function $\chi(x)$ bezüglichen entsprechenden Gleichung

$$(3) \qquad \frac{d\chi(x)}{dx} = f(x)$$

erzeugt die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{d\chi(x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0,$$

deren linke Seite gleich dem Differentialquotienten der Differenz $\chi(x) - \varphi(x)$ ist. Wenn daher die Bezeichnung

$$(5) \qquad \chi(x) - \varphi(x) = \sigma(x)$$

gebraucht wird, so geht (4) in die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{d\sigma(x)}{dx} = 0$$

über. Die Function $f(x)$ ist für das von a bis b ausgedehnte Intervall der Variable x gegeben. Aus der Voraussetzung, dass sowohl die Function $\varphi(x)$ wie die Function $\chi(x)$ für das ganze Intervall die Gleichung (1) respective (3) erfüllen, folgt alsdann, dass auch die Differenz $\sigma(x)$ innerhalb des ganzen Intervalls der Gleichung (6) genüge, das heisst, einen verschwindenden Differentialquotienten habe.

Jetzt bleibt zu entscheiden, ob der in § 6 mit (1) bezeichnete Satz umgekehrt werden dürfe, das heisst, ob eine Function $v(x)$, deren Differentialquotient für ein gewisses Intervall der Variable gleich Null ist, innerhalb desselben nothwendig constant sei. Es wird sich zeigen, dass die Frage unter einer noch zu erwähnenden Bedingung zu bejahen ist.

Eine Function muss innerhalb des ganzen von a bis b reichenden Intervalls von x constant sein, sobald für je zwei in demselben angenommene Werthe α und β die Gleichung $v(\beta) = v(\alpha)$ besteht. Für eine Function $v(x)$, von der angenommen wird, dass innerhalb des von a bis b ausgedehnten Intervalls der Variable x der Differentialquotient $\frac{dv(x)}{dx}$ gleich

Null sei, wähle man zwei beliebige Werthe der Variable α und β, schalte zwischen denselben wie in § 18 eine Folge von Grössen ein, welche wie dort bezeichnet werden und geordnet sind,

$$(7) \qquad \alpha = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ \beta = x_n,$$

und stelle die Folge von Differenzenquotienten auf

$$(8) \qquad \frac{v(x_1)-v(x_0)}{x_1-x_0},\ \frac{v(x_2)-v(x_1)}{x_2-x_1}, \ldots \frac{v(x_n)-v(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

Sobald die Differenz $x_1 - x_0$ numerisch beliebig klein wird, nähert sich der erste Quotient dem in Bezug auf die Variable x genommenen Differentialquotienten der Function $v(x)$ für $x = x_0$; in gleicher Weise convergirt der zweite Quotient, wenn $x_2 - x_1$ numerisch beliebig klein wird, gegen den Differentialquotienten der Function $v(x)$ für $x = x_1$, und das entsprechende gilt für jeden in (8) vorkommenden Quotienten. Die Voraussetzung, dass der nach der Variable x genommene Differentialquotient der Function $v(x)$ in dem ganzen von a bis b ausgedehnten Intervall gleich Null sei, betrifft deshalb jeden Werth, der zwischen α und β liegt oder einem von diesen Werthen gleich ist. Deshalb convergirt jeder der in (8) enthaltenen Quotienten bei beliebiger Verkleinerung der im Nenner stehenden Differenz als Grenzwerth gegen die Null. Es muss also der numerische Werth eines jeden Quotienten, wofern der numerische Werth des Nenners unter eine gewisse kleine Grösse δ herabgeht, beliebig klein werden. Die vorhin erwähnte Bedingung, die wir nunmehr eintreten lassen, besteht darin, dass der Quotient $\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$ für jedes zwischen a und b angenommene Paar von Werthen x und $x+h$ stets numerisch kleiner werden soll als eine und dieselbe beliebig kleine Grösse μ, sobald die Differenz h numerisch kleiner als die kleine Grösse δ ist. Nachdem durch eine hinreichende Vergrösserung der Zahl n und entsprechende Annäherung der Zwischenwerthe die sämmtlichen Differenzen $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \ldots x_n - x_{n-1}$ kleiner als δ geworden sind, folgen aus der festgesetzten Bedingung für die sämmtlichen in (8) enthaltenen Quotienten die Ungleichheiten

(9)
$$-\mu < \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} < \mu$$
$$-\mu < \frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1} < \mu$$
$$\vdots$$
$$-\mu < \frac{v(x_n) - v(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} < \mu.$$

Die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, .. $x_n - x_{n-1}$ haben einerlei Vorzeichen wie die Differenz $\beta - \alpha$, so dass durch Multiplication jeder Ungleichheit mit dem betreffenden Nenner für $\beta - \alpha > 0$ die Ungleichheiten

(10)
$$-\mu(x_1 - x_0) < v(x_1) - v(x_0) < \mu(x_1 - x_0)$$
$$-\mu(x_2 - x_1) < v(x_2) - v(x_1) < \mu(x_2 - x_1)$$
$$\vdots$$
$$-\mu(x_n - x_{n-1}) < v(x_n) - v(x_{n-1}) < \mu(x_n - x_{n-1}),$$

für $\beta - \alpha < 0$ diejenigen Ungleichheiten entstehen, welche aus (10) durch die Vertauschung von $-\mu$ und μ erhalten werden. Die Addition der Ungleichheiten (10) ergiebt durch einen mehrfach benutzten Schluss für eine positive Differenz $\beta - \alpha$ das Resultat

(11)
$$-\mu(\beta - \alpha) < v(x_n) - v(x_0) < \mu(\beta - \alpha),$$

während bei einer negativen Differenz $\beta - \alpha$ auf entsprechende Weise das Resultat

(11*)
$$\mu(\beta - \alpha) < v(x_n) - v(x_0) < -\mu(\beta - \alpha)$$

hervorgeht. Mithin ist die Differenz $v(x_n) - v(x_0) = v(\beta) - v(\alpha)$ immer zwischen den Grössen $-\mu(\beta - \alpha)$ und $\mu(\beta - \alpha)$ eingeschlossen, und muss, weil der Werth μ unter jede Grösse herabgedrückt werden kann und gleichzeitig die Differenz $\beta - \alpha$ endlich ist, selbst unter jede noch so kleine Grösse herabsinken oder gleich Null sein. *Unter der angegebenen Voraussetzung besteht also der Satz, dass eine Function $v(x)$, deren nach x genommener Differentialquotient innerhalb des von a bis b ausgedehnten Intervalls von x gleich Null ist, in diesem Intervall einen constanten Werth haben muss.*

Der gegenwärtige Satz lässt schliessen dass die Differenz $\chi(x) - \varphi(x)$, welche nach (5) und (6) gleich einer Function $\sigma(x)$ ist, deren Differentialquotient für das von a bis b ausgedehnte Intervall von x verschwindet, in dem ganzen Intervall gleich einer Constante sein muss. Wenn die Functionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ für das von a bis b reichende Intervall von x die Gleichung (1) so erfüllen, dass $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-f(x)$ bei hinreichend kleinem h für jedes x unter derselben beliebig kleinen Grösse liegt, und $\frac{\chi(x+h)-\chi(x)}{h}-f(x)$ der gleichen Forderung genügt, so entspricht die Differenz $\chi(x)-\varphi(x)=\sigma(x)$ den Bedingungen des für $v(x)$ bewiesenen Satzes, und $\chi(x)$ entsteht aus $\varphi(x)$ durch Addition einer Constante c. *Alle Auflösungen der Aufgabe* (1) *werden alsdann in dem Ausdrucke* (2) *vermittelst einer einzigen Auflösung* $\varphi(x)$ *dargestellt.*

Diese Betrachtung lässt sich anwenden, um diejenige Auflösung, welche in den vorhergehenden §§ nachgewiesen und als Grenzwerth eines Summenausdrucks definirt ist, mit einer beliebig gegebenen Auflösung zu vergleichen. Damit die Bezeichnungen übereinstimmen, werde wieder mit β ein veränderlicher Werth angedeutet, der zwischen einer beliebigen festen Grösse α und der gegebenen Grösse b liegt, und ferner

$$(12) \qquad \psi(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

gesetzt. In § 22 ist am Schlusse des Beweises von Satz (II) aus der für $f(x)$ vorgeschriebenen Stetigkeitsbedingung gefolgert, dass der Quotient $\frac{\psi(\beta+h)-\psi(\beta)}{h}$, falls h unter einer kleinen Grösse δ liegt, von der Grösse $f(\beta)$ um einen Betrag abweicht, der unter der dort eingeführten beliebig kleinen Grösse λ enthalten ist. Diese Thatsache bedeutet nichts anderes, als dass der Ausdruck $\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-f(x)$, sobald h kleiner als δ ist, für jedes vorkommende $x=\beta$ unter derselben beliebig kleinen Grösse λ bleibt. Wenn daher durch eine zweite gegebene Function $\varphi(x)$ für das von a bis b reichende Intervall die Gleichung

$$(13) \qquad \frac{d\varphi(\beta)}{d\beta}=f(\beta)$$

in der Weise erfüllt wird, dass der Ausdruck $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-f(x)$

bei hinreichend kleinem h für jedes vorkommende $x=\beta$ unter derselben beliebig kleinen Grösse enthalten bleibt, so haben die Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ die Eigenschaften, welche vorhin von den Functionen $\chi(x)$ und $\varphi(x)$ verlangt wurden, und die Function $\varphi(\beta)$ muss gleich dem Aggregat von $\psi(\beta)$ und einer Constante c sein,

$$(14) \qquad \psi(\beta) = \varphi(\beta) + c.$$

Der Werth der Constante c kann durch die Betrachtung eines einzelnen Falles bestimmt werden. Das Corollar zu dem Satze (I) des § 22 hat nach der jetzt eingeführten Ausdrucksweise den Inhalt, *dass das über eine Function $f(x)$ von α bis β ausgedehnte Integral gleich Null wird, sobald die obere Grenze β mit der unteren Grenze α zusammenfällt.* Daher verschwindet das Integral $\psi(\alpha)$, und bei der Substitution des Werthes $\beta = \alpha$ in (14) entsteht die Gleichung

$$(15) \qquad 0 = \varphi(\alpha) + c,$$

vermöge welcher die Constante c gleich dem negativ genommenen Functionswerthe $\varphi(\alpha)$ ist. Die Subtraction der Gleichung (15) von der vorhergehenden (14) erzeugt aber die folgende Darstellung des Integrals $\psi(\beta)$ oder $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ durch die Function $\varphi(x)$

$$(16) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,d(x) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Mit der vorstehenden Gleichung öffnet sich der Einblick in die Verknüpfung zwischen dem Integral, welches über eine Function $f(x)$ zwischen den gewählten Grenzen α und β genommen wird, und einer gegebenen Function $\varphi(x)$, deren Differentialquotient gleich der vorgeschriebenen Function $f(x)$ ist. Ersetzt man die als veränderlich geltende obere Grenze β des Integrals durch das Zeichen x, so folgt für die Function $\varphi(x)$ die Darstellung

$$(16_a) \qquad \varphi(x) = \varphi(\alpha) + \int_\alpha^x f(x)\,dx.$$

Es wird daher jede Function $\varphi(x)$, deren Differentialquotient gleich der betreffenden Function $f(x)$ ist, erhalten, indem man zu dem von α bis x ausgedehnten Integral von $f(x)$ die Constante $\varphi(\alpha)$ hinzuaddirt. Das um eine Constante vermehrte von einem beliebigen Werthe α bis zu dem Werthe x genommene Integral der Function $f(x)$ wird ein *unbestimmtes Integral der Function* $f(x)$ genannt und durch das Zeichen $\int f(x)\,dx$ angedeutet, so dass die Gleichung (16_a) in die Gleichung

$$(16_b) \qquad \varphi(x) = \int f(x)\,dx$$

übergeht; vermöge derselben heisst die Function $\varphi(x)$ ebenfalls ein unbestimmtes Integral der Function $f(x)$. *Dagegen hat das von der Grenze α bis zu der Grenze β ausgedehnte Integral der Function $f(x)$, welches als Grenzwerth eines Summenausdrucks definirt worden ist, den Namen eines innerhalb der Grenzen α und β genommenen oder bestimmten Integrals. Die Gleichung* (16) *verwandelt sich durch die angegebenen Benennungen in den Satz, dass das von der Grenze α bis zu der Grenze β ausgedehnte bestimmte Integral der Function $f(x)$ gleich der Differenz von den Werthen des zugehörigen unbestimmten Integrals $\varphi(x)$ ist, welche der unteren und der oberen Grenze entsprechen; bei dieser Differenz muss der zu der oberen Grenze gehörende Functionswerth positiv, der zu der unteren Grenze gehörende negativ genommen werden. Zugleich leuchtet ein, dass die in der obigen Gleichung* (1) *enthaltene Aufgabe der Integration durch die Bedingung, dass die gesuchte Function y für den Werth $x = \alpha$ einen beliebigen Werth y_0 annehme, eindeutig bestimmt wird, und dass alsdann die Function y den Ausdruck $y_0 + \int_\alpha^x f(x)\,dx$ bekommt.*

Die im vorigen § ausgeführten bestimmten Integrationen sollen jetzt unter dem neu gewonnenen Gesichtspunkte betrachtet werden. Dort ist die Function $f(x)$ gleich der mit dem ganzen oder gebrochenen Exponenten k gebildeten Potenz x^k; die Vollziehung der unbestimmten Integration bietet keine Schwierigkeiten dar, da nach der Gleichung (13) des § 12 für den Differentialquotienten einer mit dem beliebigen Exponenten q gebildeten Potenz die Bestimmung gilt

(17) $$\frac{d(x^q)}{dx} = q x^{q-1}.$$

Sobald q nicht gleich Null ist, dürfen beide Seiten durch q dividirt werden, so dass die Gleichung

(18) $$\frac{d\left(\frac{1}{q} x^q\right)}{dx} = x^{q-1}$$

entsteht. Hier kann für jeden Werth einer Grösse k, die negative Einheit ausgenommen, statt des Exponenten q der Exponent $k+1$ geschrieben werden; dadurch erhält man die Gleichung

(19) $$\frac{d\left(\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right)}{dx} = x^k,$$

und diese sagt aus, dass für jeden Werth von k mit Ausnahme der negativen Einheit das unbestimmte Integral der Potenz x^k durch den Ausdruck

(20) $$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \text{const.}$$

bezeichnet wird. In dem Falle $k = -1$ giebt dagegen die zu der Differentiation des Logarithmus naturalis dienende Formel (44) des § 10 das Resultat

(21) $$\frac{d \log x}{dx} = x^{-1},$$

vermöge dessen das unbestimmte Integral der Potenz x^{-1} gleich dem Ausdrucke

(22) $$\int x^{-1} \, dx = \log x + \text{const.}$$

ist. Der Werth des innerhalb der positiven Grenzen α und β zu nehmenden bestimmten Integrals der Function x^k ist jetzt nach (16) gleich der Differenz der zugehörigen Functionswerthe $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ oder $\log x$, je nachdem der Exponent k von der negativen Einheit verschieden oder derselben gleich ist. Demnach erhält man beziehungsweise die erste oder zweite der Gleichungen

(23) $$\int_\alpha^\beta x^k \, dx = \frac{\beta^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}}{k+1},$$

(24) $$\int_\alpha^\beta x^{-1} \, dx = \log \beta - \log \alpha,$$

von denen die erste mit der Gleichung (18), die zweite mit der Gleichung (22) des vorhergehenden § zusammenfällt.

§ 25. Hauptsätze der Rechnung mit Integralen. Transformation eines Integrals durch Einführung einer neuen Variable.

Nachdem die Begriffe der Differentiation und Integration einer Function einer variabelen Grösse entwickelt sind, erinnern wir daran, dass in § 1 ausgesprochen ist, die Aufgabe der Differential- und Integralrechnung bestehe in der Erforschung der Beziehungen von Grössen, die stetig veränderlich sind, die beiden Disciplinen unterschieden sich indessen durch die besondere Art der zu lösenden Probleme und durch den Character der hierbei zu überwindenden Schwierigkeiten. Der angedeutete Unterschied kann jetzt genauer so bezeichnet werden, dass die Aufgabe, eine gegebene Function in Bezug auf ihre unabhängige Variable zu differentiiren, auf die Anwendung einer beschränkten Zahl von Regeln hinausläuft, dass dagegen die Untersuchung der durch Integration einer gegebenen Function entstehenden Functionen einen unerschöpflichen Reichthum neuer Aufgaben in sich schliesst. Aus dieser Ursache nehmen in der Rechnung mit Integralen nicht die Vorschriften zur Ausführung der unbestimmten Integration sondern solche Sätze die erste Stelle ein, die zu der Ergründung von Eigenschaften der Integrale dienen. Hierher gehören die im Gange der Darstellung bereits mitgetheilten Sätze (I) und (II) des § 22; andere werden gegenwärtig angeführt und bewiesen werden.

(I) *Wenn für das von a bis b ausgedehnte Intervall der Variable x zwei eindeutige, endliche und stetige Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben sind, wenn die Grössen α und β beliebig zwischen a und b gewählt, und die auszuführenden Integrationen von der Grenze α bis zu der Grenze β genommen werden, so ist das Integral über die Summe der Functionen $f(x)+g(x)$ gleich der Summe des Integrals über $f(x)$ und des Integrals über $g(x)$, ferner das Integral über die Differenz der Functionen $f(x)-g(x)$*

gleich dem Resultat der Subtraction des Integrals über $g(x)$ von dem Integral über $f(x)$.

Es seien wieder $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ der Reihe nach zwischen den Grenzen $x_0 = \alpha$ und $x_n = \beta$ eingeschaltet; dann sind die betreffenden bestimmten Integrale nach § 22 gleich den Grenzwerthen der folgenden Summenausdrücke bei stets wachsender Zahl n und beständiger Annäherung der Zwischenwerthe:

$$(1) \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim.(f(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}))$$

$$(2) \quad \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = \lim.(g(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots + g(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})).$$

$$(3) \quad \int_\alpha^\beta (f(x) + g(x))\,dx$$

$$= \lim.\big((f(x_0) + g(x_0))(x_1 - x_0) + \ldots + (f(x_{n-1}) + g(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1})\big)$$

$$(4) \quad \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \lim.(f(x_0) - g(x_0))(x_1 - x_0) + \ldots + (f(x_{n-1}) - g(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1})).$$

Verbindet man die Gleichungen (1) und (2) zuerst durch Addition, hierauf durch Subtraction, so ergeben sich durch eine Schlussweise die zuerst I, § 16 entwickelt ist, die zu beweisenden Gleichungen

$$(5) \quad \int_\alpha^\beta (f(x) + g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

$$(6) \quad \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

(II) *Das von α bis β über das Product aus einer Constante c und der Function $f(x)$ genommene Integral ist gleich dem Product aus der Constante c und dem innerhalb derselben Grenzen über die Function $f(x)$ genommenen Integral.*

Vermöge der aufgestellten Definition hat man

$$(7) \quad \int_\alpha^\beta c\,f(x)\,dx$$

$$= \lim.(cf(x_0)(x_1 - x_0) + cf(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + cf(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})).$$

Durch Multiplication der obigen Gleichung (1) mit der Constante c entsteht hiernach mit Hülfe des erwähnten Schlussverfahrens die verlangte Gleichung

$$(8) \qquad \int_\alpha^\beta cf(x)\,dx = c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

(III) *Ein Integral, bei dem sich die zu integrirende Function als das Product von zwei Factoren darstellen lässt, von denen der eine* $f(x)$, *der andere der vollständige Differentialquotient* $\frac{dg(x)}{dx}$ *der Function* $g(x)$ *ist, und wo* $f(x)$ *und* $g(x)$ *die für den Satz* (I) *aufgestellten Bedingungen erfüllen, wird durch eine Methode, welche man die theilweise Integration nennt, folgendermassen als das Aggregat eines von dem Integralzeichen freien Ausdruckes und eines anderen Integrals dargestellt:*

$$(9) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dg(x)}{dx}\,dx = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta \frac{df(x)}{dx}g(x)\,dx.$$

Der vollständige Differentialquotient des Products der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ hat den Ausdruck

$$(10) \qquad \frac{d(f(x)\,g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

Da in Folge dessen das unbestimmte Integral der auf der rechten Seite befindlichen Summe von Verbindungen nach dem vorhergehenden § gleich $f(x)\,g(x) + \text{const.}$ ist, so wird das über die rechte Seite von α bis β genommene Integral durch die Differenz der Functionswerthe $f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha)$ dargestellt. Mit Hülfe der Abkürzung

$$(11) \qquad \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = [\varphi(x)]_\alpha^\beta$$

erhält man demnach die Gleichung

$$(12) \qquad \int_\alpha^\beta \left(\frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}\right)dx = [f(x)\,g(x)]_\alpha^\beta.$$

Das auf der linken Seite befindliche Integral ist aber nach dem Satze (I) oder der Gleichung (5) als eine Summe von zwei Integralen darstellbar

$$(13) \quad \int_\alpha^\beta \left(\frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}\right)dx = \int_\alpha^\beta \frac{df(x)}{dx}g(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dg(x)}{dx}\,dx.$$

Substituirt man in (12) und bringt das eine Integral durch Subtraction auf die andere Seite, so geht die Gleichung

$$(14)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \frac{df(x)}{dx}g(x)dx$$

hervor, welche mit der zu beweisenden Gleichung (9) zusammenfällt.

Aus den Sätzen (I), (II), (III), welche für bestimmte Integrale formulirt sind, erhält man correspondirende Sätze, die sich auf unbestimmte Integrale beziehen, indem man statt der Grösse β, durch welche die obere Grenze der Integrale angedeutet ist, das Zeichen x einführt, und vermöge der im vorigen § aufgestellten Definitionen die Bezeichnungen

$$\int_\alpha^x f(x)dx+\text{const.}=\int f(x)dx,$$

$$\int_\alpha^x g(x)dx+\text{const.}=\int g(x)dx$$

anwendet. Alsdann verwandeln sich die obigen Gleichungen (5), (6), (8), (9), respective in die folgenden,

$$(5_a)\qquad \int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx+\text{const.},$$

$$(6_a)\qquad \int (f(x)-g(x))dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx+\text{const.},$$

$$(8_a)\qquad \int cf(x)dx \qquad = c\int f(x)dx+\text{const.},$$

$$(9_a)\qquad \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx=f(x)g(x)-\int\frac{df(x)}{dx}g(x)dx+\text{const.},$$

welche leicht in Worte gekleidet werden können.

(IV) *Sobald die zu integrirende Function $f(x)$ innerhalb des von α bis β ausgedehnten Intervalls der Integration ihr Vorzeichen nicht ändert, so ist das Vorzeichen für den Werth des zugehörigen bestimmten Integrals von vorne herein angebbar; es wird positiv oder negativ, je nachdem das Vorzeichen der Function $f(x)$ und das Vorzeichen der Differenz $\beta-\alpha$ gleich oder entgegengesetzt sind.*

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus der

Definitionsgleichung (1), da in den einzelnen Summanden des zu bildenden Ausdrucks die sämmtlichen Functionswerthe $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots f(x_{n-1})$ das gegebene Vorzeichen, und die sämmtlichen Differenzen $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots x_n - x_{n-1}$ das Vorzeichen der Differenz $\beta - \alpha$ haben.

Für den Fall, dass man das unbestimmte Integral von $f(x)$, das heisst eine Function $\varphi(x)$ kennt, deren nach x genommener Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, dass mithin nach dem vorigen § die Gleichung $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ gilt, lässt sich der gegenwärtige Satz so aussprechen, dass bei einer positiven Differenz $\beta - \alpha$ die Differenz $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem $f(x)$ dauernd positiv oder dauernd negativ ist. Hieraus ergiebt sich, *dass, wenn der Differentialquotient $f(x)$ einer Function $\varphi(x)$ für das von a bis b gehende Intervall sein Vorzeichen nicht ändert, die Function $\varphi(x)$ innerhalb dieses Intervalls im algebraischen Sinne beständig wächst oder beständig abnimmt, je nachdem $f(x)$ positiv oder negativ ist.*

(V) *Ein zwischen bestimmten Grenzen genommenes Integral geht durch Vertauschung der oberen mit der unteren Grenze in den entgegengesetzt gleichen Werth über.*

Mit dem in (1) definirten Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ werde das Integral $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ verglichen. Zu dem Ende ist zwischen β und α eine Reihe von Grössen einzuschalten

(15) $$\xi_0 = \beta,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_{n-1},\ \xi_n = \alpha,$$

und für diese der Summenausdruck (1) herzustellen, so dass die Gleichung

(16) $$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$
$$= \lim.(f(\xi_0)(\xi_1 - \xi_0) + f(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(\xi_n - \xi_{n-1}))$$

entsteht. Allein es hindert nichts, die Grössen (15) in der Art zu wählen, dass sie der Reihe nach mit den Grössen

(17) $$x_n = \beta,\ x_{n-1},\ x_{n-2}, \ldots x_1,\ x_0 = \alpha$$

zusammenfallen, die bei der Bildung der rechten Seite von (1) angewendet sind. Dadurch kehrt sich die Ordnung der Zeiger um, und die Gleichung (16) wird zu der folgenden

(18) $$\int_\beta^\alpha f(x)dx$$
$$=\lim.(f(x_n)(x_{n-1}-x_n)+f(x_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-1})+..+f(x_1)(x_0-x_1)).$$

Die auf der rechten Seite befindliche Summe ist aber gleich der in die negative Einheit multiplicirten Summe (2*) in § 20

$$f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_n)(x_n-x_{n-1}),$$

welche nach einer dortigen Bemerkung bei wachsender Zahl n gegen denselben Grenzwerth wie die auf der rechten Seite von (1) stehende Summe convergirt, und daher ebenfalls das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ repräsentirt. Daher gilt die zu begründende Gleichung

(19) $$\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

(VI) *Es bezeichne $\beta^{(1)}$ einen zwischen den Grenzen α und β eines bestimmten Integrals beliebig angenommenen Werth, dann ist das über die gegebene Function $f(x)$ von α bis β ausgedehnte Integral gleich der Summe der beiden über dieselbe Function ausgedehnten Integrale, von denen das erste von α bis β_1, das zweite von β_1 bis β geht.*

Der Beweis des Satzes ist am Ende des § 20 geführt.

(VII) *Der nach der oberen Grenze β genommene Differentialquotient des bestimmten Integrals $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ist gleich dem zu der oberen Grenze gehörenden Functionswerth $f(\beta)$. Der nach der unteren Grenze α genommene Differentialquotient desselben Integrals ist gleich dem mit der negativen Einheit multiplicirten zu der unteren Grenze gehörenden Functionswerth, $-f(\alpha)$.*

Während sich der erste Theil des Satzes mit dem Satze (II) des § 22 deckt, lässt sich der zweite Theil auf ähnliche Art beweisen. Man schalte zwischen α und β die Grösse $\alpha+h$ ein, so liefert der Satz (VI) die Gleichung

(20) $$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx + \int_{\alpha+h}^\beta f(x)dx.$$

Insofern die untere Grenze α des Integrals für veränderlich, die obere β für unveränderlich gilt, möge dasselbe als die Function $\omega(\alpha)$ bezeichnet werden, wodurch (20) die folgende Gestalt annimmt

$$(21) \qquad \omega(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx + \omega(\alpha+h).$$

Hiernach entsteht für die Differenz $\omega(\alpha+h) - \omega(\alpha)$ der Ausdruck

$$(22) \qquad \omega(\alpha+h) - \omega(\alpha) = -\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx.$$

Indem man hier die Betrachtungen wiederholt, welche in § 22 an die dortige Gleichung (6) angeknüpft sind, gelangt man zu dem Resultat, dass der Quotient $\frac{\omega(\alpha+h) - \omega(\alpha)}{h}$ bei numerisch abnehmendem h zwischen zwei Grössen eingeschlossen ist, die von dem negativ genommenen zu α gehörenden Functionswerthe $-f(\alpha)$ beliebig wenig abweichen. Der nach der unteren Grenze α genommene Differentialquotient des Integrals $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ist also gleich der Grösse $-f(\alpha)$, wie behauptet worden war.

(VIII) *Wenn eine von α bis β zu integrirende Function als ein Product von zwei Factoren $p(x)\,q(x)$ dargestellt werden kann, deren jeder innerhalb des Intervalls der Integration eindeutig, endlich und stetig ist, von denen ferner in demselben Intervall der erste sein Vorzeichen nicht ändert, der zweite algebraisch zwischen den Grössen M und N enthalten bleibt, so ist der Werth des Integrals $\int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx$ algebraisch zwischen denjenigen Grössen eingeschlossen, die entstehen, indem man das über die Function $p(x)$ ausgedehnte Integral $\int_\alpha^\beta p(x)\,dx$ das eine Mal mit der Grösse M, das andere Mal mit der Grösse N multiplicirt.*

Die in dem Satze gemachte Annahme bewirkt, dass, falls $M < N$ ist, die beiden Differenzen $q(x) - M$ und $N - q(x)$ innerhalb des ganzen von α bis β erstreckten Intervalls der Integration positiv sind. Wenn man daher jede derselben mit der Function $p(x)$ multiplicirt, so haben beide Producte nothwendig das Vorzeichen von $p(x)$. In Folge dessen lässt sich durch den Satz (IV) das Vorzeichen der beiden über diese Producte ausgedehnten Integrale bestimmen. Je nachdem das Vorzeichen von $p(x)$ und der Differenz $\beta - \alpha$ zusammenfallen oder nicht, sei $\varepsilon = 1$ oder $= -1$; dann wird jedes der beiden Integrale, mit ε multiplicirt, gleich einer positiven Grösse, oder in Zeichen

$$(23)\quad \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,(q(x) - M)\,dx > 0, \quad \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,(N - q(x))\,dx > 0.$$

Die zu integrirende Function ist hier beziehungsweise gleich der Differenz $p(x)\,q(x) - Mp(x)$ und $Np(x) - p(x)\,q(x)$. Man darf nun vermöge des Satzes (I) statt jedes Integrals eine entsprechende Differenz von zwei Integralen substituiren,

$$(24)\quad \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx - \varepsilon \int_\alpha^\beta Mp(x)\,dx > 0, \quad \varepsilon \int_\alpha^\beta Np(x)\,dx - \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx > 0,$$

hierauf nach dem Satze (II) sowohl die Constante M wie auch die Constante N vor das betreffende Integralzeichen setzen, und schliesslich die beiden Ungleichheiten ableiten

$$(25)\quad \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx > \varepsilon M \int_\alpha^\beta p(x)\,dx, \quad \varepsilon N \int_\alpha^\beta p(x)\,dx > \varepsilon \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx,$$

welche bei $\varepsilon = 1$ die Ungleichheiten

$$(26)\qquad M \int_\alpha^\beta p(x)\,dx < \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx < N \int_\alpha^\beta p(x)\,dx,$$

bei $\varepsilon = -1$ die Ungleichheiten

$$(27)\qquad N \int_\alpha^\beta p(x)\,dx < \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx < M \int_\alpha^\beta p(x)\,dx$$

ausdrücken, und daher in beiden Fällen den Inhalt des zu beweisenden Satzes darstellen.

Unter der Voraussetzung, dass die Function $p(x)$ gleich der positiven Einheit genommen wird, geht das Integral $\int_\alpha^\beta p(x)\,dx$ in den Werth der Differenz $\beta - \alpha$ über, und der gegenwärtige Satz (VIII) verwandelt sich in den Satz (I) des § 22. Dem im Eingange des § 22 hervorgehobenen Bedürfniss, für ein gegebenes bestimmtes Integral Grössen zu erhalten, innerhalb deren sein Werth eingeschlossen ist, entspricht der Satz (VIII) in vollkommenerer Weise, als der erwähnte specielle Satz, weil eine vorgelegte zu integrirende Function je nach dem zu erreichenden Zweck auf verschiedene Arten als das Product einer Function von ungeändertem Vorzeichen und eines vollständigen Differentialquotienten dargestellt werden kann.

(IX) *Ein bestimmtes Integral* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *kann durch Einführung einer neuen Integrationsvariable in ein anderes transformirt werden. Es sei die Integrationsvariable* x *gleich einer stetigen Function* $\chi(t)$ *einer Variable* t*; während* t *beständig wachsend oder abnehmend von einem Werthe* ϱ *zu einem Werthe* σ *fortschreitet, bewege sich* x *ebenfalls beständig wachsend oder abnehmend von dem Werthe* α *zu dem Werthe* β*; innerhalb des bezeichneten Intervalls sei die Differenz zwischen dem Quotienten* $\frac{\chi(t+h)-\chi(t)}{h}$ *und dem Differentialquotienten* $\frac{d\chi(t)}{dt}$ *für ein numerisch hinreichend kleines* h *numerisch kleiner als dieselbe beliebig kleine Grösse* λ*; dann verwandelt sich das gegebene Integral* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *durch Einführung der Variable* t *in das Integral*

$$\int_\varrho^\sigma f(\chi(t))\,\frac{d\chi(t)}{dt}\,dt.$$

Indem zwischen den Werthen ϱ und σ der Variable t eine Reihe von auf einander folgenden Grössen eingeschaltet wird,

(28) $$\varrho = t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots\ t_{n-1},\ \sigma = t_n,$$

entstehen für die Variable x die entsprechenden Werthe

(29) $$\alpha = x_0 = \chi(t),\ x_1 = \chi(t_1), \ldots x_{n-1} = \chi(t_{n-1}),\ \beta = x_n = \chi(t_n);$$

setzt man diese in die Definitionsgleichung (1) des zu transformirenden bestimmten Integrals ein, und dividirt und multiplicirt die auf einander folgenden Glieder respective mit den Differenzen $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$, so gelangt man zu der Gleichung

$$(30)\quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$$= \lim . \left(f(\chi(t_0)) \frac{\chi(t_1)-\chi(t_0)}{t_1 - t_0}(t_1 - t_0) + \ldots + f(\chi(t_{n-1})) \frac{\chi(t_n)-\chi(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}(t_n - t_{n-1}) \right).$$

Der Grenzwerth ist vermöge der getroffenen Voraussetzungen in der Weise zu bilden, dass die Anzahl n ohne Ende wächst, und die Grössen (28) einander beständig genähert werden. Bezeichnet man den Differentialquotienten $\frac{d\chi(t)}{dt}$ mit $\chi'(t)$, so folgt aus der über seine Beschaffenheit gemachten Annahme, dass für die auf der rechten Seite von (30) vorkommenden Quotienten die Ungleichheiten gelten

$$(31)\quad \chi'(t_0) - \lambda < \frac{\chi(t_1)-\chi(t_0)}{t_1 - t_0} < \chi'(t_0) + \lambda$$

$$\chi'(t_1) - \lambda < \frac{\chi(t_2)-\chi(t_1)}{t_2 - t_1} < \chi'(t_1) + \lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\chi'(t_{n-1}) - \lambda < \frac{(t_n)-\chi(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} < \chi'(t_{n-1}) + \lambda.$$

Es ist festgestellt worden, dass die sämmtlichen Differenzen $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$ dasselbe Vorzeichen haben, welches durch die Differenz $\sigma - \varrho$ bestimmt wird, und welches wir ohne Beeinträchtigung des zu liefernden Beweises positiv voraussetzen können. Alsdann wird die rechte Seite von (30) verkleinert, sobald man den als Factor des Functionswerthes $f(\chi(t))$ auftretenden Quotienten für einen positiven Functionswerth verkleinert, für einen negativen vergrössert; durch das umgekehrte Verfahren wird sie vergrössert. Bedeutet nun A eine positive Grösse, welche jeden der vorkommenden Functionswerthe $f(\chi(t))$ numerisch übertrifft, so folgt aus dem Obigen, dass die rechte Seite von (30) zwischen zwei Grössen enthalten ist, welche erzeugt werden, indem man zu der Summe

$$(32)\quad f(\chi(t_0))\,\chi'(t_0)\,(t_1 - t_0) + \ldots + f(\chi(t_{n-1}))\,\chi'(t_{n-1})\,(t_n - t_{n-1})$$

den Werth $A\lambda(\sigma - \varrho)$ negativ oder positiv hinzufügt. Bei Vergrösserung der Zahl n und beständiger Abnahme der Differenzen $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$ wird aber λ, während A und $\sigma - \varrho$ ungeändert bleiben, beliebig klein, so dass sich der Ueberschuss

$A\lambda(\sigma-\varrho)$ beliebig der Null nähert. Gleichzeitig convergirt die Summe (32) gegen einen Grenzwerth, welcher das bestimmte Integral

(33) $$\int_{\varrho}^{\sigma} f(\chi(t))\,\chi'(t)\,dt$$

darstellt. Mithin fällt der Werth des gegebenen Integrals mit dem Werthe des vorliegenden zusammen, und das war behauptet worden.

Die abgeleitete Transformationsgleichung eines Integrals gewinnt an Durchsichtigkeit, sobald in dem transformirten Integral (33) für $\chi(t)$ das Zeichen x beibehalten und für den Differentialquotienten $\frac{d\chi(t)}{dt}$ das entsprechende Zeichen $\frac{dx}{dt}$ gebraucht wird; dadurch bekommt sie die Gestalt

(34) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\varrho}^{\sigma} f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Da ferner die obere Grenze σ derjenige Werth von t ist, zu welchem als Werth von x die obere Grenze β gehört, so ergiebt sich für das betreffende unbestimmte Integral die Transformationsgleichung

(35) $$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt,$$

die mit der Regel des § 12, nach welcher die Function einer Function differentiirt wird, correspondirt.

§ 26. Satz vom Mittelwerthe.

Man kann den Satz (VIII) des vorigen §, welcher für den Werth eines bestimmten Integrals zwei Ungleichheiten liefert, vermittelst einer gewissen Modification in die zur Anwendung bequemere Gestalt einer Gleichung bringen. Dort wurde angenommen, dass die mit $q(x)$ bezeichnete Function für das von α bis β ausgedehnte Intervall algebraisch zwischen den Grössen M und N liege. Mithin darf man sich die Grössen M und N so gewählt denken, dass die Function $q(x)$ in dem betreffenden Intervall zwar gleich M, aber nie kleiner als M, und ausserdem zwar gleich N, aber nie grösser als N werden kann.

Diese Voraussetzung möge jetzt gelten, so dass in jenem Intervall die Grösse M den kleinsten oder einen der unter einander gleichen kleinsten Werthe, die Grösse N den grösten oder einen der unter einander gleichen grösten Werthe von $q(x)$ darstellt. Im vorigen § wurde die positive oder negative Einheit ε so definirt, dass das Integral $\varepsilon\int_\alpha^\beta p(x)\,dx$ einen positiven von Null verschiedenen Werth bekommt. Die Division desselben in den Werth des Integrals $\varepsilon\int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx$ liefert daher einen vollkommen bestimmten Quotienten

$$(1)\qquad \frac{\varepsilon\int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx}{\varepsilon\int_\alpha^\beta p(x)\,dx} = R,$$

für welchen aus den Ungleichheiten (25) des vorigen § die Ungleichheiten

$$(2)\qquad M < R < N$$

folgen. Vermöge der so eben hinzugefügten Voraussetzung wird bei jeder von beiden Ungleichheiten der Fall der Gleichheit nicht ausgeschlossen, was wir durch die Zeichen

$$(2^*)\qquad M \leqq R \leqq N$$

andeuten. Demnach ist die Grösse R algebraisch zwischen dem kleinsten Werthe M und dem grösten Werthe N enthalten, den die Function $q(x)$ in dem von α bis β ausgedehnten Intervall empfängt. Wofern nun aus der Beschaffenheit der Function $q(x)$ geschlossen werden kann, dass dieselbe, während die Variable x von α bis β fortschreitet, jedem zwischen M und N enthaltenen Werthe wenigstens ein Mal gleich wird, dann muss sie auch wenigstens ein Mal gleich jenem Werthe R werden. Gesetzt dies geschehe für *den Mittelwerth der Variable* $\alpha + \theta\,(\beta - \alpha)$, wo θ eine zwischen Null und der positiven Einheit liegende Grösse bedeutet, so ist die Grösse R gleich *einem Mittelwerthe der Function* $q(x)$, *der zu dem von* α *bis* β *ausgedehnten Intervall der Variable* x *gehört*, und man hat

$$(3)\qquad R = q\,(\alpha + \theta(\beta - \alpha)).$$

Diese Gleichung vertritt die Ungleichheiten (2*). Es entsteht daher, sobald man für R den in (1) angegebenen Quotienten einführt und den Nenner durch Multiplication entfernt, an Stelle der im vorigen § bewiesenen Ungleichheiten (25) die Gleichung

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx = q(\alpha+\theta(\beta-\alpha))\int_\alpha^\beta p(x)\,dx.$$

Sie enthält den folgenden Satz, welchen man *den Satz vom Mittelwerthe* nennt:

Wenn eine von α bis β zu integrirende Function als ein Product von zwei Factoren $p(x)\,q(x)$ dargestellt werden kann, deren jeder innerhalb des Intervalls der Integration eindeutig, endlich und stetig ist, von denen ferner der erste in demselben Intervall sein Vorzeichen nicht ändert, so ist der Werth des Integrals $\int_\alpha^\beta p(x)\,q(x)\,dx$ gleich dem Product aus dem Integral $\int_\alpha^\beta p(x)\,dx$ und einem zu dem Integrationsintervall gehörenden Mittelwerthe der Function $q(x)$.

Zu der vollständigen Begründung dieses Satzes fehlt noch der Beweis des Postulats, dass die in dem von α bis β ausgedehnten Intervall von x eindeutige, endliche und stetige Function $q(x)$, wenn die Variable x jeden zwischen α und β befindlichen Werth annimmt, mit Nothwendigkeit wenigstens ein Mal jedem beliebigen Werthe gleich wird, der zwischen dem kleinsten Functionswerth M und dem grösten Functionswerth N enthalten ist. Der Beweis lässt sich unter Voraussetzungen in Betreff der Function $q(x)$, wie sie in § 21 für die Function $f(x)$ gemacht sind, in der folgenden Weise führen. Wir betrachten zuerst eine Function $q(x)$, die innerhalb des von α bis β erstreckten Intervalls entweder beständig wächst oder beständig abnimmt. Wenn $q(x)$ die Eigenschaft hat, während x sich von α bis β bewegt, beständig zu wachsen, so erzeugt die Einschaltung der Reihe von auf einander folgenden Werthen $x_0=\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n=\beta$ eine Reihe von Functionswerthen, von denen $q(\alpha)=M$ der kleinste, $q(\beta)=N$ der gröste ist, und die der Ordnung nach die Ungleichheiten erfüllen

$$(5)\qquad M=q(\alpha)<q(x_1)<q(x_2)\ldots<q(x_{n-1})<q(\beta)=N.$$

Die Stetigkeit der Function $q(x)$ bringt es mit sich, dass, sobald die Differenzen $x_1-\alpha$, x_2-x_1, .. $\beta-x_{n-1}$ sämmtlich numerisch unter einer beliebig kleinen Grösse liegen, die entsprechenden Differenzen der Functionswerthe

$$q(x_1)-q(\alpha),\; q(x_2)-q(x_1),\; \ldots q(\beta)-q(x_{n-1})$$

ebenfalls numerisch beliebig klein werden. Hierzu wird noch die Bedingung hinzugefügt, welche bei den in der Analysis vorkommenden Functionen in der Regel erfüllt ist, dass, wenn die Differenzen der Werthe der Variable sämmtlich kleiner als eine Grösse δ sind, die entsprechenden Differenzen der Functionswerthe unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabsinken; die gegenwärtig vorgenommene Einschaltung sei so eingerichtet, dass sie der genannten Voraussetzung genügt.

Nun bezeichne R einen beliebigen algebraisch zwischen M und N enthaltenen Werth; es soll die Existenz eines Werthes von x nachgewiesen werden, für welchen $q(x)=R$ ist. Der Werth R werde seiner algebraischen Grösse nach mit den Functionswerthen $q(\alpha)$, $q(x_1)$, ... $q(x_{n-1})$, $q(\beta)$ verglichen. Entweder ist R einem der betreffenden Werthe selbst gleich; in diesem Falle hat man den Werth von x, für welchen $q(x)=R$ wird, direct gefunden und damit ist das Postulat selbstverständlich erledigt. Oder R ist keinem der gewählten Functionswerthe gleich; dann muss, weil R zwischen M und N enthalten ist, und weil die Ungleichheiten (5) bestehen, die Grösse R zwischen zwei bestimmten von jenen Functionswerthen $q(x_m)$ und $q(x_{m+1})$ eingeschlossen sein, so dass die Ungleichheiten

(6) $$q(x_m)<R<q(x_{m+1})$$

gelten. In Folge der getroffenen Voraussetzung ist hier die Differenz $x_{m+1}-x_m$ numerisch unter δ, die Differenz $q(x_{m+1})-q(x_m)$ numerisch unter λ gelegen. Es hat daher sowohl die Differenz $R-q(x_m)$ wie die Differenz $q(x_{m+1})-R$ einen unter der beliebig kleinen Grösse λ enthaltenen numerischen Werth. Mithin wird die Gleichung $q(x)-R=0$, sowohl durch den Werth $x=x_m$ wie auch durch den Werth $x=x_{m+1}$ mit beliebiger Genauigkeit erfüllt, der Unterschied $x_{m+1}-x_m$ ist gleichzeitig beliebig klein, und desshalb wird der gesuchte Werth sowohl durch x_m wie durch x_{m+1} mit beliebiger Genauigkeit dargestellt.

Das Postulat ist also auch für den zweiten der unterschiedenen Fälle erwiesen.

Wofern die Function $q(x)$ so beschaffen ist, dass sie, während x von α bis β läuft, stets abnimmt, so wird der gewünschte Zweck durch eine genau entsprechende Betrachtung erreicht. Wenn die Function $q(x)$ in dem von α bis β ausgedehnten Intervall mehrere Male vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, sind diejenigen Intervalle zu sondern, in welchen die Function fortwährend zunimmt, ferner diejenigen, in welchen sie fortwährend abnimmt, und, falls solche vorkommen, diejenigen, in welchen die Function ihren Werth nicht ändert oder constant bleibt. Wir setzen voraus, dass die Anzahl der Intervalle von jeder der drei Arten eine beschränkte sei. Der kleinste Werth M und der gröste Werth N, welchen die Function $q(x)$ in dem ganzen von α bis β reichenden Intervall annimmt, bilden alsdann in einem oder in mehreren durch die Zerlegung entstandenen Intervallen äusserste Werthe, und zwar sind sie die äussersten unter allen, welche in den einzelnen Intervallen als solche Werthe erscheinen. Ein beliebig gegebener algebraisch zwischen M und N enthaltener Werth R ist jetzt zunächst mit den äussersten Werthen der vorhandenen einzelnen Intervalle zu vergleichen, und muss nothwendig zwischen den äussersten Werthen von wenigstens einem dieser Intervalle gelegen sein, kann aber auch zwischen den äussersten Werthen von mehr als einem Intervall vorkommen. Für jedes einzelne Intervall, das die Eigenschaft hat, dass R zwischen dessen äussersten Werthen liegt, lässt sich wieder eine der angestellten ähnliche Betrachtung durchführen, und jedes Mal ergiebt sich daraus die Bestimmung eines Werthes x, durch welchen die Gleichung $q(x)-R_1=0$ erfüllt wird. Hiermit ist das in Rede stehende Postulat in dem bezeichneten Umfange erwiesen und ebenso auch der Satz vom Mittelwerthe gerechtfertigt.

Capitel III.

Entwickelung von Functionen einer variabeln Grösse in Potenzreihen.

§ 27. Taylorscher Satz mit vollständigem Restausdruck.

Die Methoden des Differentiirens und Integrirens zeichnen sich dadurch aus, dass mit ihrer Hülfe verschiedene Gattungen von Aufgaben gelöst werden, die ohne die Zuziehung der Infinitesimalrechnung von einander unabhängig zu sein scheinen. Als Bestätigung hiervon lassen sich aus dem Bisherigen die beiden geometrischen Grundprobleme anführen, an eine beliebige ebene Curve in einem bestimmten Punkte eine berührende Linie zu construiren, und den Inhalt eines von einer beliebigen Curve begrenzten ebenen Flächenstücks zu messen, welche Probleme einzeln zu überwinden so grosse Anstrengungen verursacht hat. Eine fernere Bestätigung wird durch die Behandlung der Aufgabe erhalten, auf welche I, § 112 hingewiesen wurde, und die dahin geht, eine bestimmte gegebene Function einer variabeln Grösse, falls dies möglich ist, in eine nach den ganzen positiven Potenzen der Variable fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Wie in dem vorigen Capitel sei für das von a bis b ausgedehnte Intervall der Variable x eine eindeutige, endliche und stetige Function $f(x)$ gegeben. Ausserdem wird angenommen, dass innerhalb desselben Intervalls der erste auf x bezügliche Differentialquotient von $f(x)$ als eindeutige, endliche und stetige Function von x vorliege; später wird in gleicher Weise das Vorhandensein der Differentialquotienten der successiven höheren Ordnungen vorausgesetzt werden, und zwar bedienen wir uns der in § 16 erklärten von *Lagrange* eingeführten Bezeichnungen $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(p)}(x)$. Indem nun x und $x+h$ zwei innerhalb des bezeichneten Intervalls liegende Werthe bedeuten, suchen wir zuerst den Werth der Function $f(x+h)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den ganzen positiven Potenzen des zu der Grösse x hinzugefügten Increments h geordnet ist.

Vermöge der Definition des ersten Differentialquotienten der Function $f(x)$

$$(1)\qquad \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

darf man die Function $f(x)$ als unbestimmtes Integral der Function $f'(x)$ ansehen, und die Differenz von zwei Functionswerthen $f(\beta) - f(\alpha)$, die zu den im gegebenen Intervall beliebig gewählten Werthen α und β gehören, durch ein Integral ausdrücken, das über die Function $f'(x)$ von der Grenze α bis zu der Grenze β genommen ist,

$$(2)\qquad f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx.$$

Die linke Seite lässt sich nach (11) des § 25 durch das Zeichen $[f(x)]_\alpha^\beta$ andeuten. Da es aber freisteht, in diesem Ausdruck einer Differenz wie auch in dem eines bestimmten Integrals den für die Variable, beziehungsweise die Integrationsvariable, gewählten Buchstaben durch jeden anderen zu ersetzen, so schreiben wir statt der Gleichung (2) die folgende

$$(3)\qquad [f'(t)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f'(t)\,dt.$$

Das gewünschte Ziel wird erreicht, indem man für das gegenwärtige Integral in einer passenden Weise die in (III) des § 25 angegebene Methode der theilweisen Integration benutzt.

Die Function $f'(t)$ ist gleich dem Product von sich selbst in die Einheit, die Einheit gleich dem nach t genommenen Differentialquotienten der um eine Constante vermehrten Variable t. Wählt man die zu addirende Constante gleich dem negativen Werth einer Grösse c, so verschwindet das Aggregat für den Werth $t = c$, und es kommt

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta f'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f'(t)\frac{d(t-c)}{dt}\,dt = -\int_\alpha^\beta f'(t)\frac{d(c-t)}{dt}\,dt.$$

Alsdann entsteht, indem vermöge der Formel (14) des § 25 theilweise integrirt wird, weil die nach der Variable ausgeführte Differentiation des ersten Differentialquotienten den zweiten erzeugt, die Umformung

$$(5)\quad -\int_\alpha^\beta f'(t)\frac{d(c-t)}{dt}\,dt = -[f'(t)(c-t)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f''(t)(c-t)\,dt.$$

Die Gültigkeit derselben setzt voraus, dass auch der zweite Differentialquotient $f''(x)$ innerhalb des betreffenden Intervalls eine eindeutige, endliche und stetige Function von x sei. Der Factor $c-t$ lässt sich als der negativ genommene vollständige Differentialquotient der Function $\frac{(c-t)^2}{2}$ in Bezug auf die Variable t auffassen; unter der Annahme, dass die successive zu bildenden Differentialquotienten der Function $f(x)$ die für die beiden ersten Differentialquotienten vorgeschriebenen Eigenschaften haben, ergiebt also die abermalige theilweise Integration das Resultat

$$(6)\quad -\int_\alpha^\beta f''(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{(c-t)^2}{2}\right)dt = -\left[f''(t)\frac{(c-t)^2}{2}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'''(t)\frac{(c-t)^2}{2}\,dt.$$

Ferner entsteht durch die beliebig ausgedehnte Fortsetzung dieses Verfahrens, da

$$(c-t)^2 = -d\left(\frac{(c-t)^3}{3}\right),\quad (c-t)^3 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{(c-t)^4}{4}\right),\dots$$

ist, eine Reihe von Gleichungen

$$(7)\begin{cases} -\int_\alpha^\beta f'''(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{(c-t)^3}{2.3}\right)dt = -\left[f'''(t)\frac{(c-t)^3}{2.3}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f^{(4)}(t)\frac{(c-t)^3}{2.3}\,dt \\ \qquad\vdots \\ -\int_\alpha^\beta f^{(p)}(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{(c-t)^p}{2.3..p}\right)dt = -\left[f^{(p)}(t)\frac{(c-t)^p}{2.3..p}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f^{(p+1)}(t)\frac{(c-t)^p}{2.3..p}\,dt. \end{cases}$$

Die Addition der Gleichungen (3), (5), (6), (7) führt dann zu der folgenden Gleichung, in welcher rechts nur das auf der rechten Seite der letzten Gleichung (7) befindliche Integral übrig bleibt und links alle anderen Glieder vereinigt sind

$$(8)\quad [f(t)]_\alpha^\beta + [f'(t)(c-t)]_\alpha^\beta + \left[f''(t)\frac{(c-t)^2}{2}\right]_\alpha^\beta + .. + \left[f^{(p)}(t)\frac{(c-t)^p}{2.3..p}\right]_\alpha^\beta$$
$$= \int_\alpha^\beta f^{(p+1)}(t)\frac{(c-t)^p}{2.3..p}\,dt;$$

ihre Richtigkeit kann auch durch directe Ausführung der Differentiation der linken Seite bewiesen werden.

Das auf der linken Seite von (8) befindliche Aggregat ist gleich der Differenz von zwei Aggregaten

$$(9)\quad f(\beta)+f'(\beta)(c-\beta)+f'(\beta)\frac{(c-\beta)^2}{2}+\ldots+f^{(p)}(\beta)\frac{(c-\beta)^p}{2.3\ldots p}$$
$$-\left(f(\alpha)+f'(\alpha)(c-\alpha)+f''(\alpha)\frac{(c-\alpha)^2}{2}+\ldots+f^{(p)}(\alpha)\frac{(c-\alpha)^p}{2.3\ldots p}\right).$$

Legt man der verfügbaren Constante c den Werth β bei, so reducirt sich das positiv zu nehmende Aggregat durch das Verschwinden von allen auf das erste folgenden Gliedern auf den einzigen Functionswerth $f(\beta)$, während das zu subtrahirende Aggregat die Gestalt bekommt,

$$(10)\quad f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)^2+..+\frac{f^{(p)}(\alpha)}{2.3..p}(\beta-\alpha)^p.$$

Der Functionswerth $f(\beta)$ wird daher gleich der Summe aus dem Aggregat (10) und dem Integral, in welches die rechte Seite von (8) durch die Substitution des Werthes β für die Grösse c übergeht,

$$(11)\quad f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(p)}(\alpha)}{2.3..p}(\beta-\alpha)^p+\int_\alpha^\beta f^{(p+1)}(t)\frac{(\beta-t)^p}{2.3..p}dt.$$

Hier braucht man nur statt α das Zeichen x, statt $\beta-\alpha$ das Zeichen h einzuführen, um auf der linken Seite den Werth der Function $f(x+h)$, auf der rechten eine nach den ganzen positiven Potenzen des Increments h fortschreitende Reihe zu erhalten, zu deren $(p+1)$ auf einander folgenden Gliedern das bestimmte Integral als Restausdruck hinzuaddirt wird,

$$(12)\quad f(x+h)$$
$$=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(x)}{2.3..p}h^p+\int_x^{x+h}f^{(p+1)}(t)\frac{(x+h-t)^p}{2.3..p}dt.$$

Diese Gleichung enthält die Taylorsche Entwickelung der Function $f(x+h)$ als eine nach den ganzen Potenzen des Increments h geordnete Summe mit Hinzufügung eines den Rest vollständig ausdrückenden bestimmten Integrals; hierbei gilt die Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ und deren sämmtliche Differen-

tialquotienten $f'(x), f''(x), .. f^{(p+1)}(x)$ *innerhalb des bezüglichen Intervalls eindeutig, endlich und stetig sind.*

In § 16 ist hervorgehoben, dass die Potenzen einer Variable mit ganzen positiven Exponenten die Eigenschaft besitzen, bei einer Differentiation von eben so hoher Ordnung, als der Exponent andeutet, eine Constante, bei einer Differentiation von höherer Ordnung die Null hervorzubringen. Hieraus folgt, dass jede rationale ganze Function einer Variable von einem beliebigen $n$ten Grade bei $n$facher Differentiation eine Constante, bei $(n+1)$facher Differentiation den Werth Null ergibt. Alle Differentialquotienten einer rationalen ganzen Function von x sind für jede Ausdehnung des Intervalls eindeutig, endlich und stetig. Wenn daher die Gleichung (12) auf eine rationale ganze Function $f(x)$ des $n$ten Grades angewendet und die Zahl $p=n$ genommen wird, so ist, welchen Werth auch die Grössen x und $x+h$ empfangen mögen, die in dem Restausdruck unter dem Integralzeichen auftretende Function $f^{(n+1)}(t)$ dauernd gleich Null, so dass der Restausdruck überhaupt verschwindet; mithin wird (12) zu der Gleichung

$$(12^*)\quad f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{2.3..n}h^{(n)},$$

die mit der Gleichung (12) des § 16, und, wie dort erwähnt, auch mit (7) in I, § 49 zusammenfällt.

Das auf der rechten Seite von (11) befindliche Integral ist über das Product der beiden Factoren $f^{(p+1)}(t)$ und $\frac{(\beta-t)^p}{2.3..p}$ auszudehnen, von denen der zweite während des Laufes der Integration das Vorzeichen der Grösse $(\beta-\alpha)^p$ unveränderlich festhält. Der Werth des Integrals kann deshalb mit Hülfe des Satzes (VIII) des § 25 abgeschätzt werden. Nach einer schon wiederholt gebrauchten Bemerkung ist das unbestimmte Integral der Function $\frac{(\beta-t)^p}{2.3..p}$ gleich der Function $\frac{-(\beta-t)^{p+1}}{2.3..p(p+1)}+\text{const.}$, folglich erhält das von α bis β genommene bestimmte Integral den Werth

$$(13)\quad \int_\alpha^\beta \frac{(\beta-t)^p}{2.3..p}dt=\left[\frac{-(\beta-t)^{p+1}}{2.3..p(p+1)}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^{p+1}}{2.3..p\,(p+1)}.$$

Wenn also der Werth der Function $f^{(p+1)}(t)$, während t von α bis β geht, algebraisch zwischen den Grössen M_{p+1} und N_{p+1} liegt, so ist der Werth des abzuschätzenden Integrals algebraisch zwischen den Grössen

$$(14)\qquad M_{p+1}\,\frac{(\beta-\alpha)^{p+1}}{2.3..p(p+1)} \text{ und } N_{p+1}\,\frac{(\beta-\alpha)^{p+1}}{2.3..p(p+1)}$$

eingeschlossen. Durch Anwendung des in § 26 entwickelten Satzes vom Mittelwerthe lässt sich der Werth des Integrals folgendermassen ausdrücken

$$(15)\qquad \int_\alpha^\beta f^{(p+1)}(t)\,\frac{(\beta-t)^p}{2.3..p}\,dt = f^{(p+1)}(\alpha+\theta(\beta-\alpha))\,\frac{(\beta-\alpha)^{p+1}}{2.3..p(p+1)},$$

wo θ eine zwischen der Null und der Einheit liegende Grösse bezeichnet. Die Einsetzung von (15) in (11) erzeugt daher die Gleichung

$$(16)\qquad f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(p)}(\alpha)}{2.3..p}(\beta-\alpha)^p+\frac{f^{(p+1)}(\alpha+\theta(\beta-\alpha))}{2.3...(p+1)}(\beta-\alpha)^{p+1},$$

und die Entwickelung der Function $f(x+h)$ in (12) nimmt die entsprechende Gestalt an

$$(17)\qquad f(x+h)$$
$$=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(x)}{2.3..p}h^p+\frac{f^{(p+1)}(x+\theta h)}{2.3..(p+1)}h^{p+1}.$$

Die Darstellung des Restes hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich an das Bildungsgesetz der Glieder der Reihe anschliesst. Das allgemeine $m$te Glied der Reihe ist gleich dem Product des $(m-1)$ten Differentialquotienten der Function $f(x)$ und der $(m-1)$ten Potenz des Increment h, durch das aus den natürlichen Zahlen gebildete Product $(m-1)!$ dividirt. Der Restausdruck, welcher zu der auf $(p+1)$ Glieder ausgedehnten Entwickelung hinzuzufügen ist, wird aus dem $(p+2)$ten Gliede der Reihe abgeleitet, indem man bei dem $(p+1)$ten Differentialquotienten der Function $f(x)$ an die Stelle des bestimmten Arguments x den Mittelwerth $x+\theta h$ setzt, welcher sich auf das von x bis $x+h$ ausgedehnte Intervall der unabhängigen Variable bezieht.

§ 28. Mac Laurin'scher Satz mit vollständigem Restausdruck.

Für das Verständniss der Gleichung (11) des vorigen § ist es wesentlich, zu beachten, dass innerhalb des von a bis b ausgedehnten Intervalls, für welches die Function $f(x)$ und ihre Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig gegeben sind, die Grössen α und β beliebig geändert werden dürfen. Bei dem in (12) dargestellten *Taylor*'schen Satze liegt der Nachdruck darauf, dass das ausgewählte engere Intervall mit einem beliebigen Werthe x beginnt. Man kann jedoch auch der Auffassung den Vorzug geben, dass der Werth α, mit welchem das Intervall anfängt, ein bestimmter und die Grösse des Intervalls $\beta-\alpha=x$ eine beliebige sei. Dann nimmt die erwähnte Gleichung (11) des vorigen § die Gestalt an

$$(1)\qquad f(\alpha+x)$$

$$=f(\alpha)+f'(\alpha)x+\frac{f''(\alpha)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(\alpha)}{2.3\ldots p}x^p+\int\limits_{\alpha}^{\alpha+x}\frac{f^{(p+1)}(t)}{2.3\ldots p}(\alpha+x-t)^p\,dt,$$

und gleichzeitig wird aus der zugehörigen (15) die folgende

$$(2)\qquad \int\limits_{\alpha}^{\alpha+x}\frac{f^{(p+1)}(t)}{2.3\ldots p}(\alpha+x-t)^p\,dt=\frac{f^{(p+1)}(\alpha+\theta x)}{2.3\ldots(p+1)}x^{p+1},$$

wo θ wie früher einen positiven echten Bruch bedeutet. Die vorstehende Gleichung (1) löst die Aufgabe, eine gegebene Function $f(\alpha+x)$ in eine nach den positiven ganzen Potenzen der Variable x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Unter der Voraussetzung, dass das von a bis b erstreckte Intervall, in welchem $f(x)$ und seine successiven Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig sind, den Werth der Null in sich begreift, kann nun auch der Werth α gleich Null angenommen werden. Alsdann liefern die Gleichungen (1) und (2) für die Function $f(x)$ die folgende Entwickelung, die nach den positiven ganzen Potenzen der Variable x geordnet ist,

$$(3)\qquad f(x)$$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(0)}{2.3\ldots p}x^p+\int\limits_0^x\frac{f^{(p+1)}(t)}{2.3\ldots p}(x-t)^p\,dt,$$

$$(4) \qquad \int_0^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{2.3\ldots p}(x-t)^p\,dt = \frac{f^{(p+1)}(\theta x)}{2.3\ldots.(p+1)}x^{p+1}.$$

Sie stellt den Mac Laurin'schen Satz mit Hinzufügung des vollständigen Restausdrucks dar.

Durch die gefundene Gleichung (3) wird die Function $f(x)$ in die Gestalt einer Reihe gebracht, bei welcher die Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen der Variable x Constanten sind, die aus der Division von den zu dem Werthe $x=0$ gehörenden successiven Differentialquotienten durch die entsprechenden Zahlenfacultäten entstehen.

§ 29. Unbegrenzte Entwickelung einer Function durch den Taylor'schen und Mac Laurin'schen Satz.

Aus der Ableitung des mitgetheilten Verfahrens geht hervor, dass dasselbe auf eine beliebige Anzahl von Gliedern ausgedehnt werden darf, wofern nur die zu entwickelnde Function und ihre Differentialquotienten bis zu der entsprechenden Ordnung die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen. Auch haben die Glieder der Reihe ein solches Bildungsgesetz, dass, wenn die Anzahl p zuerst einen bestimmten Werth empfangen hat und später einen grösseren Werth p_1 erhält, die ersten $(p+1)$ Glieder der Reihe dieselben bleiben, und statt des zu den $(p+1)$ Gliedern gehörenden Restausdrucks die Summe der (p_1-p) folgenden Glieder und des neuen zu den (p_1+1) Gliedern gehörenden Restausdrucks eintritt. Man kann daher unter der Voraussetzung, dass die zu entwickelnde Function und ihre sämmtlichen Differentialquotienten bis zu einer beliebig hohen Ordnung die verlangte Beschaffenheit besitzen, der betreffenden Entwickelung eine unbegrenzte Ausdehnung geben, indem man sich auf die allgemeine Definition stützt, die in I, § 105 von der Convergenz einer unbegrenzt ausgedehnten Summe gegeben ist. Hiernach leuchtet es ein, dass die in Rede stehende Summe bei unbegrenzter Ausdehnung dann und nur dann convergirt, wenn der als bestimmtes Integral dargestellte Rest die Eigenschaft hat, für einen hinreichend grossen Werth der Zahl p numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse zu werden.

Sobald dies festgestellt ist, giebt die convergente Reihe nothwendig eine Darstellung der betreffenden Function, und demzufolge führt die Gleichung (17) des § 27, die Gleichung (1) und (3) des § 28 respective zu den folgenden *Entwickelungen einer Function einer Variable in eine unendliche Reihe:*

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(x)}{2.3\ldots p}h^p+\ldots$$

$$(2)\qquad f(a+x)=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(a)}{2.3\ldots p}x^p+\ldots$$

$$(3)\qquad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(0)}{2.3\ldots p}x^p+\ldots$$

Die erste und zweite Gleichung drückt den Taylor'schen, die dritte den Mac Laurin'schen Satz aus.

Beide Sätze sind ursprünglich zu dem Zwecke gebildet worden, eine gegebene Function in eine unendliche Reihe zu entwickeln, während die Hinzufügung des Restausdrucks und die Erörterung der Convergenz aus einer späteren Zeit herrührt.

§ 30. Binomialreihe.

Mit Hülfe der dargestellten allgemeinen Methode sollen jetzt die Grundfunctionen der Analysis entwickelt werden, deren auf einander folgende Differentialquotienten in § 16 angegeben sind. Den Anfang macht eine Potenz der Variable von beliebigem Exponenten x^n; die Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen haben den folgenden Ausdruck

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(x^n)}{dx}=n x^{n-1} \\ \dfrac{d^2(x^n)}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^p(x^n)}{dx^p}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)x^{n-p}. \end{cases}$$

Dass die Function und ihre sämmtlichen Differentialquotienten bei einem ganzen positiven Werth von n für jeden gegebenen Werth von x eindeutig, endlich und stetig sind, ist mehrfach erwähnt worden. Nach § 8 wird die Function und ihre sämmtlichen Differentialquotienten bei einem ganzen negativen Exponenten n für $x=0$ unendlich, sie bleiben aber für alle positiven und negativen Werthe der Variable eindeutig, endlich und stetig.

In dem Falle, dass der Exponent n nicht einer ganzen Zahl gleich ist, setzt die von der Function x^n gegebene Definition einen positiven Werth der Variable x voraus, und zwar gelten die aufgestellten Gleichungen (1) vermöge einer in § 9 gemachten Bemerkung auch mit Einschluss des Werthes $x=0$, so lange der auf der rechten Seite erscheinende Exponent einen positiven Werth hat. Weil aber der gegebene Exponent n bei nach und nach steigender Ordnung der Differentiation um stets grössere Zahlen vermindert wird, so gelangt man in (1) schliesslich immer zu solchen Gleichungen, bei denen der auf der rechten Seite vorkommende Exponent negativ ist und nun auch negativ bleibt. Aus diesen Gründen ist man nur dann sicher, dass die Function x^n und ihre sämmtlichen Differentialquotienten bei einem Werthe von n, der keiner ganzen positiven Zahl gleich ist, überall eindeutig, endlich und stetig sind, wenn man festsetzt, dass die Variable x jeden beliebigen positiven Werth, mit Ausschluss des Werthes Null, erhalten darf. Wir machen die bezügliche Annahme und fordern also, indem wir die Function $f(x)=x^n$ in die Gleichung (1) des § 28 substituiren, dass die Grössen a und $a+x$ die Null übertreffen. So entsteht die Gleichung

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}a^{n-p}x^p + R_{p+1},\\ &R_{p+1} = \int_a^{a+x} \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p}\, t^{n-p-1}(a+x-t)^p\, dt. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (2) des § 28 liefert für den Restausdruck R_{p+1} die Darstellung

$$(3)\qquad R_{p+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p+1)}(a+\theta x)^{n-p-1}x^{p+1},$$

in welcher mit θ ein positiver echter Bruch bezeichnet ist. Die gegenwärtige Entwickelung der $n$ten Potenz des Binoms $a+x$ wird bei unendlicher Ausdehnung zu der in I, § 112 u. s. f. untersuchten *Binomialreihe*. Um dieselbe Gestalt hervorzubringen, sind beide Seiten der vorstehenden Gleichung (2) durch die positive Grösse a^n zu dividiren und hierauf ist $\frac{x}{a}$ durch z zu ersetzen.

Die Convergenz der gefundenen Reihe wird jetzt vermöge des Restausdrucks R_{p+1} beurtheilt werden, wobei mehrere Fälle zu unterscheiden sind. Es sei erstens die Grösse x positiv und kleiner als a; dann kann man aus (3) schliessen, dass sich R_{p+1} für beständig wachsende Werthe der Zahl p der Null nähern muss. Indem aus den $(p+1)$ successiven Factoren des vorliegenden Zählers die negative Einheit als Factor herausgezogen, und von der Potenz $(a+\theta x)^{n-p-1}$ der Factor $(a+\theta x)^n$ abgelöst wird, findet sich

$$(4)\quad R_{p+1}$$
$$=(a+\theta x)^n(-1)^{p+1}\left(\frac{-n}{1}\right)\left(\frac{1-n}{2}\right)\left(\frac{2-n}{3}\right)\cdots\left(\frac{p-n}{p+1}\right)\left(\frac{x}{a+\theta x}\right)^{p+1}.$$

Die Anzahl $(p+1)$ der Brüche $\left(\frac{-n}{1}\right)$, $\left(\frac{1-n}{2}\right)$, $\ldots\left(\frac{p-n}{p+1}\right)$ stimmt mit dem Exponenten, zu dem die Verbindung $\frac{x}{a+\theta x}$ erhoben ist, überein, so dass jedem der Brüche einer der Factoren der $(p+1)$ten Potenz zugeordnet werden darf. Die genannten Brüche sind von einer bestimmten Stelle ab nothwendig positiv und kommen bei wachsendem Stellenzeiger der Einheit beliebig nahe; die Verbindung $\frac{x}{a+\theta x}$ hat vermöge der getroffenen Voraussetzung einen positiven Werth, welcher zwischen $\frac{x}{a}$ und $\frac{x}{a+x}$ liegt, mithin höchstens gleich der Grösse $\frac{x}{a}$ ist, deren Werth kleiner als die Einheit sein soll. Man ist somit immer im Stande, einen Stellenzeiger $\mathfrak{p}$ anzugeben, für welchen das Product $\left(\frac{\mathfrak{p}-n}{\mathfrak{p}+1}\right)\frac{x}{a}$ und daher auch das Product $\left(\frac{\mathfrak{p}-n}{\mathfrak{p}+1}\right)\frac{x}{a+\theta x}$, sowie die sämmtlichen Producte $\left(\frac{\mathfrak{p}+1-n}{\mathfrak{p}+2}\right)\frac{x}{a+\theta x}, \cdots\left(\frac{p-n}{p+1}\right)\frac{x}{a+\theta x}$ unter einer Grösse ξ liegen, die selbst kleiner als die Einheit ist. Der in (4) aufgestellte Ausdruck von R_{p+1} besteht aus dem von p unabhängigen Factor $(a+\theta x)^n$, aus dem Factor

$(-1)^{p+1}$, der nur das Vorzeichen betrifft, aus dem Product der beschränkten Anzahl von Factoren

$$\left(\frac{-n}{1}\right)\frac{x}{\alpha+\theta x},\ \left(\frac{1-n}{2}\right)\frac{x}{\alpha+\theta x},\ldots\left(\frac{\mathfrak{p}-1-n}{\mathfrak{p}}\right)\frac{x}{\alpha+\theta x}$$

und endlich aus dem Product P der so eben characterisirten positiven $p-\mathfrak{p}+1$ Factoren. Das Product P ist aber von kleinerem Werthe als ein Product von $p-\mathfrak{p}+1$ Factoren, deren jeder gleich der unter der Einheit enthaltenen Grösse ξ ist, oder als die Potenz $\xi^{p-\mathfrak{p}+1}$. Weil nun die positive Zahl $p-\mathfrak{p}+1$ beliebig gross genommen werden darf, und weil nach I, § 19 eine Potenz einer unter der Einheit liegenden Grösse ξ für einen beliebig hohen Exponenten beliebig klein wird, so hat das Product P und deshalb auch der Restausdruck R_{p+1} für eine wachsende Zahl p die Null zum Grenzwerthe, wie behauptet worden.

Für den zweiten Fall, in welchem die Grösse x negativ und numerisch kleiner als die positive Grösse α ist, gelangt man durch eine andere Schätzung des Integrals R_{p+1} zum Ziele. Bei den beiden unter dem Integralzeichen vorkommenden Potenzen hat für die von α bis $\alpha+x$ auszudehnende Integration die Basis t beständig das positive, die Basis $\alpha+x-t$ beständig das Vorzeichen von x, welches gegenwärtig negativ sein soll. Wenn man daher die Potenz t^{n-p-1} in das Product von t^{n-1} und t^{-p} zerlegt, so kann der Factor $t^{-p}(\alpha+x-t)^{+p}$ abgesondert werden, und das über den Factor t^{n-1} auszuführende Integral liefert den Werth

$$(5)\qquad \int_{\alpha}^{\alpha+x} t^{n-1}\,dt=\left[\frac{t^n}{n}\right]_{\alpha}^{\alpha+x}=\frac{(\alpha+x)^n-\alpha^n}{n}.$$

Mithin giebt die Anwendung des Satzes vom Mittelwerthe den folgenden Ausdruck, in welchem die Grösse n im Zähler und Nenner fortgehoben und durch σ ein positiver echter Bruch angedeutet ist,

$$(6)\qquad R_{p+1}=\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p}\left((\alpha+x)^n-\alpha^n\right)\frac{(x-\sigma x)^p}{(\alpha+\sigma x)^p}.$$

Statt der negativen Grösse $x-\sigma x$ kann deren absoluter Werth

$-x+\sigma x$ eingeführt werden; durch Vertheilung der p negativen Einheiten an die p Factoren des Zählers kommt dann

$$(7)\ R_{p+1}=\left(\frac{1-n}{1}\right)\left(\frac{2-n}{2}\right)\cdots\left(\frac{p-n}{p}\right)\left((a+x)^n-a^n\right)\left(\frac{-x+\sigma x}{a+\sigma x}\right)^p.$$

Der auf die $p$te Potenz zu erhebende Bruch hat hier einen Werth, der höchstens gleich der unter der Einheit liegenden Grösse $\frac{-x}{a}$ ist, wie aus der Gleichung

$$\frac{-x+\sigma x}{a+\sigma x}=\frac{-x}{a}+\frac{\sigma x\,(a+x)}{a\,(a+\sigma x)}$$

hervorgeht, da $a, a+x, a+\sigma x, \sigma$ positive Grössen sind, x aber negativ ist. Demnach gilt in Bezug auf die rechte Seite von (7) dieselbe Betrachtung, die über die rechte Seite von (4) angestellt ist, und man erhält das Resultat, dass der Restausdruck R_{p+1} unter der angegebenen zweiten Voraussetzung bei einer stets wachsenden Zahl p ebenfalls gegen die Null convergirt.

Sobald die Grösse x einen positiven über a liegenden Werth hat, genügt die Betrachtung der einzelnen Glieder der Reihe, um zu erkennen, dass ihre numerischen Werthe mit wachsendem Stellenzeiger jedes Mass überschreiten, und dass aus diesem Grunde eine unendliche Ausdehnung der Reihe nicht zulässig ist. Auf gleiche Weise, wie aus (3) der Ausdruck (4) hervorgebracht wird, erhält man für das $(p+1)$te Glied der rechten Seite von (2) die Gestalt

$$(8)\qquad a^n(-1)^p\left(\frac{-n}{1}\right)\left(\frac{1-n}{2}\right)\left(\frac{2-n}{3}\right)\cdots\left(\frac{p-1-n}{p}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^p.$$

Indem man wieder jeden der p Factoren $\frac{x}{a}$ mit jedem der p Bruche multiplicirt, leuchtet es ein, dass bei einer hinreichend grossen Zahl p immer eine Zahl $\mathfrak{p}$ gefunden werden kann, für welche sowohl das Product $\left(\frac{\mathfrak{p}-n}{\mathfrak{p}+1}\right)\frac{x}{a}$ wie auch die sämmtlichen folgenden Producte $\left(\frac{\mathfrak{p}+1-n}{\mathfrak{p}+2}\right)\frac{x}{a},\cdot\cdot\left(\frac{p-1-n}{p}\right)\frac{x}{a}$ grösser als eine über der Einheit liegende Grösse ξ sind. Hieraus folgt aber, dass das in (8) dargestellte $(p+1)$te Glied der zu untersuchenden Reihe seinem absoluten Werthe nach von einem gewissen Zeiger $(\mathfrak{p}+1)$ ab grösser sein muss als das Product einer festen Grösse in die $(p-\mathfrak{p})$te Potenz einer über der Einheit liegenden Grösse ξ, und deshalb in der That nach und nach jede gegebene Grösse übertrifft.

Dass in der vorliegenden Reihe die Variable x einen negativen Werth erhalte, welcher den Werth a numerisch übertrifft, ist durch die Voraussetzung, dass die Grössen a und $a+x$ positiv sein sollen, ausgeschlossen. Man sieht aber vermöge der so eben durchgeführten Betrachtung, dass alsdann ebenfalls die einzelnen Glieder der Reihe für zunehmende Zeiger numerische Werthe erhalten würden, die über jedes Mass hinaus wüchsen.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich dahin zusammenfassen, dass die auf der rechten Seite von (2) befindliche Reihe bei unendlicher Ausdehnung convergirt und die Function $(a+x)^n$ darstellt, so lange der numerische Werth der Grösse x kleiner ist als die positive Grösse a, dass dagegen die unendliche Reihe nicht convergirt, wofern der numerische Werth der Grösse x grösser ist als die positive Grösse a. Jetzt fehlt noch die Untersuchung der Fälle, in denen $x=a$ und $x=-a$ ist.

Bei der Annahme $x=a$ kann der in (4) enthaltene Ausdruck des Restes R_{p+1} in der Weise benutzt werden, dass man die Bedingungen aufsucht, unter denen sich das daselbst vorkommende Product

$$(9) \qquad \left(\frac{-n}{1}\right)\left(\frac{1-n}{2}\right)\cdots\left(\frac{p-n}{p+1}\right)$$

für eine wachsende Zahl p der Null nähert. Von der Verbindung $\frac{x}{a+\theta x}$, bei der der echte Bruch für geänderte Werthe von p ebenfalls andere Werthe erhalten kann, und die nunmehr gleich $\frac{1}{1+\theta}$ wird, kennt man keine obere Grenze als die Einheit selbst; mithin darf nicht geschlossen werden, dass die Potenz $\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{p+1}$ für eine wachsende Zahl p abnehmen müsse. Das Product (9) entsteht aus dem Product

$$(10) \qquad \left(1-\frac{\gamma}{1}\right)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\cdots,$$

sobald γ den Werth $n+1$ erhält, und convergirt also nach

I, § 111 für eine unbegrenzt wachsende Zahl von Factoren gegen die Null, sobald $n+1$ positiv ist. Da nun keiner der auf der rechten Seite von (4) zu dem Product (9) hinzutretenden Factoren bei wachsender Zahl p einen festen Werth überschreiten kann, so nähert sich der Restausdruck R_{p+1} der Null, wofern die Grösse $n+1$ positiv ist, oder n oberhalb der negativen Einheit liegt. Unter dieser Voraussetzung convergirt daher die unendlich ausgedehnte Reihe (2) auch für den Werth $x=\alpha$.

Wenn $n=-1$ ist, werden die Coefficienten der Reihe abwechselnd der positiven oder negativen Einheit gleich, und die hervorgehende geometrische Reihe convergirt für $x=\alpha$ nicht. Bei einem unter der negativen Einheit liegenden Werthe von n erhält das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\alpha^n$$

die Eigenschaft, für eine wachsende Stellenzahl p jede gegebene Grösse zu übertreffen, wie in I, § 119 aus dem Verhalten der untersuchten unendlichen Producte abgeleitet ist; die Convergenz der Reihe wird hierdurch ausgeschlossen.

In Betreff der Annahme $x=-\alpha$ verweisen wir auf die ebenfalls in I, § 119 ausgeführte endliche Summation der Reihe, wonach die unendliche Reihe so lange convergirt, als der Exponent n positiv ist. Die gegenwärtig ermittelten Bedingungen der Convergenz sind in den a. a. O. mitgetheilten Bedingungen eingeschlossen; die letzteren beziehen sich auf reelle und complexe Werthe der Variable, während jetzt nur reelle Werthe zugelassen werden.

§ 31. Logarithmische Reihe. Vergleichung eines Logarithmus mit der Summe einer harmonischen Reihe.

Wie sich die Definition der Function Logarithmus auf alle positiven Werthe des Numerus mit Ausschluss der Null erstreckt, so gelten auch die Ausdrücke der auf einander folgenden Differentialquotienten, nämlich

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d \log x}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{d^2 \log x}{dx^2} = \dfrac{-1}{x^2} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^p \log x}{dx^p} = (-1)^{p-1} \dfrac{1.2.3..(p-1)}{x^p} \end{cases}
$$

in demselben Umfange und sind eindeutig, endlich und stetig. Wenn daher, wie im vorigen §, zwei positive Grössen α und $\alpha + x$ gewählt werden, so bringt die Einführung der Function $f(x) = \log x$ in die Gleichung (1) des § 28 das Resultat

$$
(2)\begin{cases} \log(\alpha + x) = \log \alpha + \dfrac{x}{\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{p-1}}{p}\dfrac{x^p}{\alpha^p} + R_{p+1} \\ R_{p+1} = (-1)^p \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+x} \dfrac{(\alpha + x - t)^p}{t^{p+1}}\, dt; \end{cases}
$$

ferner folgt aus (2) desselben §, indem θ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$
(3)\qquad R_{p+1} = \frac{(-1)^p}{p+1} \frac{x^{p+1}}{(\alpha + \theta x)^{p+1}}.
$$

Dadurch, dass man die Grösse $\log \alpha$ auf beiden Seiten der ersten Gleichung (2) subtrahirt, erhält man für die Differenz $\log(\alpha + x) - \log \alpha$, die gleich $\log\left(1 + \dfrac{x}{\alpha}\right)$ ist, eine nach den Potenzen des Quotienten $\dfrac{x}{\alpha}$ fortschreitende Reihe, die unendlich ausgedehnt mit der in I, § 120 mitgetheilten *logarithmischen Reihe* zusammenfällt.

Um die Voraussetzungen ihrer Convergenz mit Hülfe des Restausdruckes R_{p+1} zu erkennen, werde wie im vorigen § verfahren. Sobald x positiv und kleiner als die positive Grösse α oder auch derselben gleich ist, so convergirt die Reihe, weil sich der Ausdruck (3) des Restes R_{p+1} für eine beständig zunehmende Zahl p der Null nähert. Denn derselbe ist, abgesehen von dem Vorzeichen $(-1)^p$, gleich dem Product des gegen die Null abnehmenden Quotienten $\dfrac{1}{p+1}$ und der $(p+1)$ten

Potenz des positiven Bruches $\frac{x}{a+\theta x}$, dessen Werth nicht kleiner als $\frac{x}{a+x}$ und nicht grösser als $\frac{x}{a}$ ist, mithin unter der Einheit liegt oder nur äussersten Falles derselben gleichkommt; also kann der Werth der Potenz niemals die Einheit übertreffen. Bei einem negativen Werthe von x, der numerisch kleiner als a ist, benutzen wir die in (2) enthaltene ursprüngliche Darstellung des Restes R_{p+1} als Integral, und zerlegen die unter dem Integralzeichen vorkommende Function in die beiden Factoren $\frac{(a+x-t)^p}{t^p}$ und $\frac{1}{t}$, die während der Integration ihr Vorzeichen nicht ändern. Die über den zweiten Factor auszuführende Integration wird durch das für positive und negative Werthe von x geltende Integral

$$(4)\qquad \int_a^{a+x} \frac{dt}{t} = \log(a+x) - \log a = \log\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

bewerkstelligt. Wenn daher wieder mit σ ein positiver echter Bruch bezeichnet wird, so folgt für das in Rede stehende Integral aus dem Mittelwerthsatze die Schätzung

$$(5)\qquad R_{p+1} = (-1)^p \frac{(x-\sigma x)^p}{(a+\sigma x)^p} \log\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Da nun nach der im vorigen § angestellten Erwägung die Grösse $\frac{-x+\sigma x}{a+\sigma x}$ einen unter dem echten Bruche $\frac{-x}{a}$ befindlichen Werth hat, so nähert sich der vorstehende Ausdruck R_{p+1} für eine stets wachsende Zahl p der Null, und demgemäss muss die logarithmische Reihe convergiren.

Positive Werthe von x, die grösser als a sind, haben zur Folge, dass das allgemeine Glied der logarithmischen Reihe bei wachsendem Stellenzeiger numerisch jede Grösse übertrifft, und widersprechen deshalb der Convergenz der Reihe. Es genügt, das $(p+1)$ te Glied der rechten Seite von (2) in die Gestalt zu bringen

$$(6)\qquad (-1)^{p-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{p-1}{p}\left(\frac{x}{a}\right)^p,$$

und die im vorigen § bei dem Ausdrucke (8) benutzten Schlüsse zu wiederholen. Ein negativer Werth, der numerisch grösser als a oder auch gleich $-a$ ist, darf der Variable x nicht beigelegt werden. Die Discussion der sämmtlichen zulässigen reellen Werthe lehrt also, dass die logarithmische Reihe dann und nur dann convergirt, wenn die Variable x zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ enthalten ist, die erstere ausgeschlossen und die zweite eingeschlossen, wie auch in I, § 120 gefunden war.

Es möge jetzt eine merkwürdige Eigenschaft der durch das Integral (4) gegebenen Darstellung der logarithmischen Function entwickelt werden, und zwar wird hier x positiv vorausgesetzt. Theilt man die Grösse x in n gleiche Theile, so dass $x = n\,\delta$ ist, und bildet den nach § 19 zu dem Integral gehörenden Summenausdruck, dann ergiebt sich eine Reihe von Brüchen, deren Zähler derselbe ist und deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden; so entsteht *die harmonische Reihe*

$$\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{a+\delta} + \frac{\delta}{a+2\,\delta} + \ldots + \frac{\delta}{a+(n-1)\,\delta}. \tag{7}$$

Wir machen die fernere Annahme, dass δ nicht grösser als a sei, und benutzen die Gleichung (2), in welcher x positiv und ebenfalls nicht grösser als a angenommen wird, für $p=0$ und $p=1$. Hier ist R_1 positiv und kleiner als $\frac{x}{a}$, R_2 negativ und numerisch kleiner als $\frac{x^2}{2a^2}$, woraus die Ungleichheiten

$$\left\{\begin{aligned} &\log(a+x) - \log a < \frac{x}{a}, \\ &\log(a+x) - \log a > \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

folgen. Dieselben lassen sich auch mit Hülfe eines in § 10 benutzten Princips aus dem Umstande ableiten, dass die auf einander folgenden Glieder der rechten Seite von (2) regelmässig abwechselnde Vorzeichen haben und numerisch beständig abnehmen. Setzt man in (8) statt x die Grösse δ, statt a nach einander die Grössen a, $a+\delta$, $\ldots a+(n-1)\delta$, die vermöge der über δ gemachten Annahme von der ersten ab sämmtlich grösser als δ sind, so entstehen die Ungleichheiten

$$(9)\quad \begin{cases} \log(\alpha+\delta)-\log\alpha<\dfrac{\delta}{\alpha} \\ \log(\alpha+2\delta)-\log(\alpha+\delta)<\dfrac{\delta}{\alpha+\delta} \\ \vdots \\ \log(\alpha+n\delta)-\log(\alpha+(n-1)\delta)<\dfrac{\delta}{\alpha+(n-1)\delta} \end{cases}$$

und

$$(9^*)\quad \begin{cases} \log(\alpha+\delta)-\log\alpha>\dfrac{\delta}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2}{\alpha^2} \\ \log(\alpha+2\delta)-\log(\alpha+\delta)>\dfrac{\delta}{\alpha+\delta}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2}{(\alpha+\delta)^2} \\ \vdots \\ \log(\alpha+n\delta)-\log(\alpha+(n-1)\delta)>\dfrac{\delta}{\alpha+(n-1)\delta}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2}{(\alpha+(n-1)\delta)^2}, \end{cases}$$

aus denen man respective durch Addition die Ungleichheiten

$$(10)\quad \begin{cases} \log(\alpha+n\delta)-\log\alpha<\sum\limits_{m=1}^{m=n}\dfrac{\delta}{\alpha+(m-1)\delta} \\ \log(\alpha+n\delta)-\log\alpha>\sum\limits_{m=1}^{m=n}\dfrac{\delta}{\alpha+(m-1)\delta}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{m=n}\dfrac{\delta^2}{(\alpha+(m-1)\delta)^2} \end{cases}$$

erhält. Da die linke Seite den Werth des Integrals (4) ausdrückt, so dienen dieselben dazu, den Werth von (4) mit der zugehörigen Summe (7) zu vergleichen, und begründen die Aussage, dass die Summe (7), um den Werth des Integrals vermindert, eine Differenz liefert, die positiv und gleichzeitig kleiner als die Summe

$$(11)\quad \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta^2}{(\alpha+(m-1)\delta)^2}$$

ist. Bei der geometrischen Interpretation des § 7, nach welcher $y=\frac{1}{t}$ die Gleichung einer Hyperbel bildet, drückt diese Differenz das Flächenstück aus, um welches das durch den Summenausdruck (7) gemessene Aggregat von Rechtecken den von der Abscissenaxe, der ersten und letzten Ordinate und der Hyperbel begrenzten Flächenraum übertrifft.

Man vergrössert ein einzelnes Glied der Summe (11), indem man in dem Nenner $(\alpha+(m-1)\delta)^2$ statt des einen der beiden gleichen Factoren den um δ kleineren für $m\geqq 1$ ebenfalls positiven Factor $\alpha+(m-2)\delta$ setzt; wegen des Werthes $m=1$ wird hier $\alpha>\delta$ angenommen. Es ist aber

$$(12)\quad \frac{\delta}{(\alpha+(m-2)\delta)\,(\alpha+(m-1)\delta)}=\frac{1}{\alpha+(m-2)\delta}-\frac{1}{\alpha+(m-1)\delta}.$$

Nun heben sich, falls von $m=1$ bis $m=n$ summirt wird, die Bestandtheile der einzelnen Differenzen auf der rechten Seite so gegen einander auf, dass die Differenz $\frac{1}{\alpha-\delta}-\frac{1}{\alpha+(n-1)\delta}$ übrig bleibt, und es kommt

$$(13)\quad \sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta}{(\alpha+(m-2)\delta)\,(\alpha+(m-1)\delta)}=\frac{1}{\alpha-\delta}-\frac{1}{\alpha+(n-1)\delta}.$$

Somit gilt die Ungleichheit

$$(14)\quad \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta^2}{(\alpha+(m-1)\delta)^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha-\delta}-\frac{\delta}{\alpha+(n-1)\delta}\right)<\frac{1}{2}\frac{\delta}{\alpha-\delta}.$$

Dieselbe lehrt, dass, wenn statt α ein Werth β gesetzt wird, für welchen der Quotient $\frac{\beta}{\delta}$ hinreichend gross ist, die betreffende Summe

$$(15)\quad \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=r}\frac{\delta^2}{(\beta+(r-1)\delta)^2}$$

kleiner als $\frac{\delta}{2(\beta-\delta)}$, folglich auch bei einer ohne Ende wachsenden Zahl r beliebig klein ausfällt. Hieraus folgt erstens, dass die auf der linken Seite von (14) befindliche Summe bei unendlicher Ausdehnung convergirt, da bei der Bestimmung $\beta=\alpha+n\delta$ die Gleichung

$$(16)\quad \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=n+r}\frac{\delta^2}{(\alpha+(m-1)\delta)^2}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta^2}{(\alpha+(m-1)\delta)^2}+\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=r}\frac{\delta^2}{(\beta+(r-1)\delta)^2}$$

besteht, und $\beta=\alpha+n\delta$ durch eine passende Wahl von n beliebig gross gemacht werden kann, mithin die bis $m=n+r$ ausgedehnte von der bis $m=n$ ausgedehnten Summe um eine beliebig kleine Grösse abweicht. Zweitens aber folgt in derselben Weise, dass sich die erwähnte Differenz

$$(17)\quad \sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta}{\alpha+(m-1)\delta}-\big(\log(\alpha+n\delta)-\log\alpha\big)$$

bei einer über jedes Mass zunehmenden Zahl n ebenfalls einem festen Grenzwerth nähert. Denn wenn die Summation, wie vorhin, zuerst von $m=1$ bis zu einem gewissen Werthe n, dann aber weiter von $n+1$ bis zu einem Werthe $n+r$ ausgedehnt wird, so kommt zu (17) ein Ausdruck hinzu, der für $\beta=\alpha+n\delta$ die Gestalt

$$(18)\qquad \sum_{q=1}^{q=r}\frac{\delta}{\beta+(r-1)\delta}-\big(\log(\beta+(n+r)\delta)-\log\beta\big)$$

annimmt, folglich positiv und kleiner als die Summe (15), also auch kleiner als die Grösse $\frac{\delta}{2(\beta-\delta)}$ ist, und deshalb für eine genügend grosse Zahl n beliebig klein wird. *Somit ist die Thatsache bewiesen, dass sowohl der Werth des Integrals*

$$\int_\alpha^{\alpha+n\delta}\frac{dt}{t}=\log(\alpha+n\delta)-\log\alpha$$

wie auch der Summe (7) *für eine unbegrenzt wachsende Zahl n über jedes Mass hinaus wächst, dagegen die in* (17) *gebildete Differenz der beiden Werthe gegen einen festen von $\frac{\alpha}{\delta}$ abhängenden Grenzwerth convergirt.* Es möge derselbe mit $\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ bezeichnet werden, so dass

$$(17_a)\qquad \lim.\left(\sum_{m=1}^{m=n}\frac{\delta}{\alpha+(m-1)\delta}-\big(\log(\alpha+n\delta)-\log\alpha\big)\right)=\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$$

ist. Die auf diese Weise definirte Function $\psi(z)$ hängt mit der Function $\Psi(z)$, welche *Gauss* in den *disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x+\ldots$ untersucht und berechnet hat durch die Gleichung $-\Psi(z-1)=\psi(z)-\log z$ zusammen. Für $\delta=1$, $\alpha=1$ wird die harmonische Reihe (7) zu der Summe der in die Einheit dividirten natürlichen Zahlen, von welcher in I, § 105 gezeigt worden ist, dass ihr Werth bei unendlicher Ausdehnung über jedes Mass wächst. Die entsprechende Grösse

$$(17_b)\qquad \lim.\left(\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{m}-\log(n+1)\right)=\psi(1)$$

heist *die Mascheronische Constante* und hat, auf 18 Decimalstellen berechnet, den Werth

$$\psi(1)=0{,}577215664901532861.$$

Unter der gleichen Annahme $\delta=1$, $\alpha=1$ geht die Reihe (14) in die Summe der in die Einheit dividirten Quadrate der natürlichen Zahlen über, eine Summe, deren Convergenz aus dem in I, § 111 bewiesenen allgemeineren Satze folgt, dass die Summe

$$\frac{1}{1^{1+\sigma}}+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\frac{1}{3^{1+\sigma}}+\dots$$

für jeden über der Einheit liegenden Exponenten $1+\sigma$ convergirt.

§ 32. Reihen für die Exponentialfunction und die trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus.

Sowohl die Exponentialfunction e^x wie auch die trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$ haben für jeden negativen oder positiven Werth von x mit Einschluss ihrer sämmtlichen Differentialquotienten die Eigenschaft, eindeutig, endlich und stetig zu sein. Man kann daher bei der Entwickelung von jeder dieser Functionen durch den in § 28 angegebenen *Mac Laurin*'schen Satz der Variable x einen beliebigen Werth beilegen. Die Exponentialfunction e^x hat lauter Differentialquotienten, die ihr selbst gleich sind und deshalb für $x=0$ in die positive Einheit übergehen. Durch die Substitution der Function $f(x)=e^x$ in (3) und (4) des § 28 folgt demnach die für jeden Werth von x geltende Bestimmung

$$(1)\quad\begin{cases} e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\,.\,.+\dfrac{x^p}{2.3\ldots p}+R_{p+1}\\[2ex] R_{p+1}=\displaystyle\int_0^x\frac{e^t}{2.3\ldots p}(x-t)^p\,dt=\frac{e^{\theta x}}{2.3\ldots(p+1)}\,x^{p+1}.\end{cases}$$

Man sieht leicht ein, dass der Restausdruck R_{p+1} für wachsende Werthe der Zahl p stets beliebig klein werden muss. Der mit dem positiven echten Bruche θ gebildete Factor $e^{\theta x}$ kann für einen beliebig gewählten bestimmten Werth von x niemals über eine feste Grösse hinausgehen. Der andere Factor ist aber gleich dem Product $\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{p+1}$, welches schliesslich immer gegen die Null convergirt. Denn man kann für jeden gegebenen Werth von x eine ganze Zahl $\mathfrak{p}$ bezeichnen, welche

x absolut genommen, übertrifft, und hierauf für einen über $\mathfrak{p}$ liegenden Werth der Zahl p das Product

$$\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{p+1}=\left(\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{x}{\mathfrak{p}+1}\frac{x}{\mathfrak{p}+2}\cdots\frac{x}{p+1}\right)$$

als ein Product von zwei Producten auffassen, deren erstes $\mathfrak{p}$ Factoren enthält und bei zunehmendem p ungeändert bleibt, deren zweites aber aus $p-\mathfrak{p}+1$ Factoren besteht, die numerisch unter der Grösse $\frac{x}{\mathfrak{p}}$ liegen, welches deshalb numerisch kleiner ist als die $(p-\mathfrak{p}+1)$ te Potenz des echten Bruches $\frac{x}{\mathfrak{p}}$, mithin für einen angemessenen Werth von p unter jeden noch so kleinen numerischen Werth herabsinkt. Aus diesem Grunde convergirt die für die Exponentialfunction e^x erhaltene Entwickelung, welche bei unendlicher Ausdehnung gleich der in I, § 112 u. ff. behandelten *Exponentialreihe* ist, für jeden beliebigen reellen Werth der Variable x.

Die aufeinander folgenden Differentialquotienten der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ werden nach (7), (8), (9) und (10) des § 16 folgendermassen ausgedrückt

$$(2)\quad \frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x,\ \frac{d^3\sin x}{dx^3}=-\cos x,$$
$$\frac{d^4\sin x}{dx^4}=\sin x,\ \frac{d^{4q+r}\sin x}{dx^{4q+r}}=\frac{d^r\sin x}{dx^r},$$

$$(3)\quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\ \frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x,\ \frac{d^3\cos x}{dx^3}=\sin x,$$
$$\frac{d^4\cos x}{dx^4}=\cos x,\ \frac{d^{4q+r}\cos x}{dx^{4q+r}}=\frac{d^r\cos x}{dx^r}.$$

Für den Werth $x=0$ verschwindet $\sin x$ sammt allen Differentialquotienten gerader Ordnung, während die Differentialquotienten ungerader Ordnung abwechselnd der positiven und negativen Einheit gleich werden. Für denselben Werth von x werden dagegen $\cos x$ und seine Differentialquotienten gerader Ordnung abwechselnd gleich der positiven oder negativen Einheit, während alle Differentialquotienten ungerader Ordnung verschwinden. Wenn man daher in (3) und (4) des § 28 statt

p das Vierfache einer Zahl q setzt, für x einen beliebigen Werth wählt, und zuerst $f(x) = \sin x$, dann $f(x) = \cos x$ nimmt, so entstehen die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{2\,.\,3} + \ldots - \dfrac{x^{4q-1}}{2.3\ldots(4q-1)} + R_{4q+1}, \\ R_{4q+1} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos t}{2.3\ldots(4q)}(x-t)^{4q}\,dt = \dfrac{\cos(\theta x)}{2.3\ldots(4q+1)}x^{4q+1}. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^{4q}}{2.3\ldots(4q)} + R_{4q+1}, \\ R_{4q+1} = -\displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{2.3\ldots(4q)}(x-t)^{4q}\,dt = -\dfrac{\sin(\theta x)}{2.3\ldots(4q+1)}x^{4q+1}. \end{cases}$$

Sowohl der Restausdruck der ersten Entwickelung

$$\frac{\cos(\theta x)}{2.3\ldots(4q+1)}x^{4q+1}$$

wie der der zweiten Entwickelung $\dfrac{-\sin(\theta x)}{2.3\ldots(4q+1)}x^{4q+1}$ haben die Eigenschaft, stets beliebig klein zu werden, sobald die Zahl q ohne Ende wächst, da die mit den positiven echten Brüchen θ gebildeten Factoren $\cos\theta x$ und $\sin\theta x$ numerisch niemals die Einheit übertreffen, und da sich der Factor $\dfrac{x^{4q+1}}{2.3\ldots(4q+1)}$, wie vorhin gezeigt worden, für jeden bestimmten Werth von x bei wachsendem q beliebig der Null nähert. Wir schliessen also wieder aus dem Verhalten der Restausdrücke, dass die für die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ aus (4) und (5) hervorgehenden unendlichen Reihen bei jedem reellen Werth der Variable x convergiren. Dieselben Reihen sind in I, § 115 erörtert.

§ 33. Reihe für die Function Arcus tangentis. Differentiation von algebraischen rationalen aus einer reellen Variable und aus complexen constanten Grössen gebildeten Functionen.

In § 16 ist bemerkt worden, dass, weil die ersten nach dem Argument genommenen Differentialquotienten der inversen trigonometrischen Functionen gleich algebraischen Functionen des Arguments sind, die sämmtlichen höheren Differentialquotienten von allen vier Functionen ebenfalls gleich algebraischen Functionen, dass ferner die sämmtlichen Differentialquotienten der Functionen Arcus tangentis und Arcus cotangentis gleich algebraischen rationalen Functionen des Arguments werden. Wir kommen nun zu der Bildung der successiven Differentialquotienten der Function Arcus tangentis, schlagen aber einen Weg ein, der später zu viel umfassenderen Ergebnissen führen wird.

Der Differentialquotient von $\operatorname{arc\,tg} x$ hat nach § 14 den Ausdruck

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \tag{1}$$

dessen Nenner gleich der Summe der Quadrate von der reellen Grösse x und der Einheit ist. Wenn man nun von der in I, § 26 u. f. begründeten Rechnung mit reellen und imaginären oder complexen Grössen Gebrauch macht und wie dort die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet, so kann die Summe der Quadrate x^2+1 in ein Product von zwei Factoren zerlegt werden

$$x^2+1 = (x-i)(x+i), \tag{2}$$

zugleich erzeugt die Division der Einheit durch die complexe Grösse $x-i$ den Bruch

$$\frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{i}{x^2+1}. \tag{3}$$

Demzufolge ist der Differentialquotient $\frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx}$ gleich dem von dem Factor i befreiten imaginären Theile des Bruches $\frac{1}{x-i}$. Dieser Umstand erlaubt das Bildungsgesetz für die successiven Differentialquotienten der Function $\operatorname{arc\,tg} x$ in sehr einfacher Gestalt anzugeben, wofern die Operation des Differentiirens in der folgenden Weise auf den reellen und imaginären Theil von algebraischen rationalen Functionen ausgedehnt wird, welche aus einer reellen Variable x und aus Grössen zusammengesetzt sind, die einen constanten reellen und imaginären Theil haben.

Es bedeute $f(x)$ einen Ausdruck, der aus der reellen Variable x und den in beliebiger aber beschränkter Anzahl gegebenen Grössen $a+ib$, $a_1+ib_1, \ldots$ durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division dargestellt ist; die reellen Grössen $a, a_1, ..$ und $b, b_1, ..$ haben unveränderliche Werthe, die Verbindungen $a + ib, a_1 + ib_1, ..$ werden *constante complexe Grössen* genannt. *Nachdem in* $f(x)$ *der reelle und imaginäre Theil getrennt sind, habe man*

$$(4) \qquad f(x) = \varphi(x) + i\chi(x);$$

dann soll diejenige complexe Grösse, deren reeller Theil gleich dem nach x *genommenen Differentialquotienten von* $\varphi(x)$ *und deren imaginärer Theil gleich dem mit* i *multiplicirten nach* x *genommenen Differentialquotienten von* $\chi(x)$ *ist, der in Bezug auf die Variable* x *genommene Differentialquotient der Function* $f(x)$ *heissen. Diese Definition lautet in Zeichen*

$$(5) \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d\chi(x)}{dx}.$$

Setzt man statt $f(x)$ eine beliebige complexe constante Grösse $a + ib$, so hat nach (3) in § 6 sowohl $\frac{da}{dx}$ wie auch $\frac{db}{dx}$ den Werth Null, folglich auch das Aggregat $\frac{da}{dx} + i\frac{db}{dx}$, und es entsteht der Satz:

(I) *Der nach der Variable* x *genommene Differentialquotient einer complexen constanten Grösse ist gleich Null.*

Um jede algebraische rationale Function, die aus der reellen Variable x und complexen Constanten gebildet ist, differentiiren zu können, sind die Regeln aufzusuchen, nach denen die Differentialquotienten für die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten von zwei solchen Functionen gebildet werden, falls die Differentialquotienten von jeder derselben gegeben sind. Man betrachtet neben der obigen Function $f(x)$ eine von gleicher Beschaffenheit $g(x)$, welche durch Trennung des reellen und imaginären Theils die Gleichung

$$(5) \qquad g(x) = \psi(x) + i\omega(x)$$

liefert, und erhält durch Anwendung der vier Grundoperationen der Rechnung nach I, § 26 und § 27 die Gleichungen

$$(6) \qquad f(x) + g(x) = \varphi(x) + \psi(x) + i(\chi(x) + \omega(x)),$$

$$(7) \qquad f(x) - g(x) = \varphi(x) - \psi(x) + i(\chi(x) - \omega(x)),$$

$$(8) \quad f(x)g(x) = \varphi(x)\psi(x) - \chi(x)\omega(x) + i(\varphi(x)\omega(x) + \chi(x)\psi(x)),$$

$$(9)\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)\,\psi(x) + \chi(x)\,\omega(x) - i\,(\varphi(x)\,\omega(x) - \chi(x)\,\psi(x))}{\psi(x)\,\psi(x) + \omega(x)\,\omega(x)}.$$

Die Ausführung der Differentiation des reellen Theiles und des Factors von i in den rechts geschriebenen Ausdrücken giebt die folgende Bestimmung der Differentialquotienten der links stehenden Verbindungen

$$(10)\quad \frac{d\big(f(x)+g(x)\big)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx} + i\left(\frac{d\chi(x)}{dx} + \frac{d\omega(x)}{dx}\right),$$

$$(11)\quad \frac{d\big(f(x)-g(x)\big)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx} + i\left(\frac{d\chi(x)}{dx} - \frac{d\omega(x)}{dx}\right),$$

$$(12)\quad \frac{d\big(f(x)g(x)\big)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}\psi(x) + \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\chi(x)}{dx}\omega(x) - \chi(x)\frac{d\omega(x)}{dx}$$
$$+ i\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\omega(x) + \varphi(x)\frac{d\omega(x)}{dx} + \frac{d\chi(x)}{dx}\psi(x) + \chi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right),$$

$$(13)\quad \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}$$
$$= \frac{\frac{d\big(\varphi(x)\psi(x)+\chi(x)\omega(x)\big)}{dx}}{\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)} - \frac{\big(\varphi(x)\psi(x)+\chi(x)\omega(x)\big)}{\big(\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)\big)^2}\,\frac{d\big(\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)\big)}{dx}$$
$$- i\left(\frac{\frac{d\big(\varphi(x)\omega(x)-\chi(x)\psi(x)\big)}{dx}}{\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)} - \frac{\big(\varphi(x)\omega(x)-\chi(x)\psi(x)\big)}{\big(\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)\big)^2}\,\frac{d\big(\psi(x)\psi(x)+\omega(x)\omega(x)\big)}{dx}\right).$$

Man kann aber die erhaltenen Ausdrücke folgendermassen zusammenfassen

$$(14)\quad \frac{d\big(f(x)+g(x)\big)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d\chi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx} + i\frac{d\omega(x)}{dx},$$

$$(15)\quad \frac{d\big(f(x)-g(x)\big)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d\chi(x)}{dx} - \left(\frac{d\psi(x)}{dx} + i\frac{d\omega(x)}{dx}\right),$$

$$(16)\quad \frac{d\big(f(x)g(x)\big)}{dx}$$
$$= \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d\chi(x)}{dx}\right)\big(\psi(x)+i\omega(x)\big) + \big(\varphi(x)+i\chi(x)\big)\left(\frac{d\psi(x)}{dx} + i\frac{d\omega(x)}{dx}\right),$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\psi(x)\,\psi(x) + \omega(x)\,\omega(x) = \big(\psi(x)+i\omega(x)\big)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)$$

$$(17)\quad \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}$$
$$= \frac{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}+i\frac{d\chi(x)}{dx}\right)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)+\big(\varphi(x)+i\chi(x)\big)\left(\frac{d\psi(x)}{dx}-i\frac{d\omega(x)}{dx}\right)}{\big(\psi(x)+i\omega(x)\big)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)}$$
$$-\frac{\big(\varphi(x)+i\chi(x)\big)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)\frac{d\Big(\big(\psi(x)+i\omega(x)\big)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)\Big)}{dx}}{\big(\psi(x)+i\omega(x)\big)^2\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)^2}.$$

Alsdann lässt sich die rechte Seite von (14), (15) und (16) unmittelbar durch $f(x)$, $g(x)$ und deren Differentialquotienten darstellen. Substituirt man ferner auf der rechten Seite von (17) statt des Differentialquotienten des Products

$$\big(\psi(x)+i\,\omega(x)\big)\big(\psi(x)-i\,\omega(x)\big)$$

den nach der Vorschrift (16) gebildeten Ausdruck

$$\left(\frac{d\psi(x)}{dx}+i\frac{d\omega(x)}{dx}\right)\big(\psi(x)-i\omega(x)\big)+\big(\psi(x)+i\omega(x)\big)\left(\frac{d\psi(x)}{dx}-i\frac{d\omega(x)}{dx}\right),$$

so verwandelt sie sich in den Ausdruck

$$(17^*)\quad \frac{\frac{d\varphi(x)}{dx}+i\frac{d\chi(x)}{dx}}{\psi(x)+i\omega(x)}-\frac{\big(\varphi(x)+i\chi(x)\big)\left(\frac{d\psi(x)}{dx}+i\frac{d\omega(x)}{dx}\right)}{\big(\psi(x)+i\omega(x)\big)^2},$$

der ebenfalls auf die angegebene Art darstellbar ist. Demnach gelten die vier Gleichungen

$$(18)\quad \frac{d\big(f(x)+g(x)\big)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(19)\quad \frac{d\big(f(x)-g(x)\big)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(20)\quad \frac{d\big(f(x)\,g(x)\big)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx},$$

$$(21)\quad \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)\,g(x)},$$

welche beziehungsweise mit den Gleichungen (16), (17), (18) des § 6 und der Gleichung (8) des § 7 übereinstimmen und deshalb den folgenden Satz begründen:

(II) *Der Differentialquotient der Summe, der Differenz, des Products und des Quotienten von zwei algebraischen rationalen Functionen, die aus einer reellen Variable x und complexen con-*

stanten Grössen gebildet sind, wird in Bezug auf die Variable x nach den gleichen Regeln abgeleitet, die für das Gebiet der reellen Grössen bestehen.

Aus der Verbindung der Sätze (I) und (II) ergiebt sich die Folgerung, *dass der Differentialquotient einer jeden algebraischen rationalen aus einer reellen Variable x und complexen constanten Grössen gebildeten Function in Bezug auf die Variable x ebenfalls nach den für das Gebiet der reellen Grössen geltenden Regeln erhalten wird.* Betrachten wir, um dies allgemeine Resultat durch eine besondere Anwendung deutlicher zu machen, das Aggregat der Variable x und einer complexen Constante $a+ib$, so folgt aus (18), da $\frac{dx}{dx}=1$ und nach dem Satze (I) $\frac{d(a+ib)}{dx}=0$ ist, die Bestimmung

$$\frac{d(x+a+ib)}{dx}=1. \tag{22}$$

Nun zieht die wiederholte Anwendung von (20), wie in § 6 ausgeführt ist, für eine beliebige positive ganze Zahl n die Gleichung

$$\frac{d\big(f(x)\big)^n}{dx}=n\big(f(x)\big)^{n-1}\frac{df(x)}{dx} \tag{23}$$

nach sich, und auf gleiche Weise ergiebt (21) für eine beliebige positive ganze Zahl p die Gleichung

$$\frac{d\big(g(x)\big)^{-p}}{dx}=-p\big(g(x)\big)^{-p-1}\frac{dg(x)}{dx}. \tag{24}$$

Wird also in (23) statt $f(x)$ und in (24) statt $g(x)$ die Verbindung $x+a+ib$ substituirt, so entsteht für den Differentialquotienten einer beliebigen positiven oder negativen Potenz derselben der Ausdruck

$$\frac{d\big((x+a+ib)^n\big)}{dx}=n(x+a+ib)^{n-1}, \tag{25}$$

$$\frac{d\big((x+a+ib)^{-p}\big)}{dx}=-p(x+a+ib)^{-p-1}. \tag{26}$$

Nachdem durch (5) der in Bezug auf x genommene Differentialquotient einer Function $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ definirt ist, kann man, wie früher, den in Bezug auf die Variable x gebildeten Differentialquotienten dieses Differentialquotienten als den zweiten Differentialquotienten der Function $f(x)$ bezeichnen, und so fortfahrend die successiven Differentialquotienten der Function $f(x)$ definiren. Für den Differentialquotienten der beliebig hohen $n$ten Ordnung gilt dann die Gleichung

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} + i\,\frac{d^n \chi(x)}{dx^n}. \tag{27}$$

Mit Hülfe der Relation (26) lassen sich nun die auf einander folgenden Differentialquotienten eines Bruches $\frac{1}{x+a+ib}$ oder $(x+a+ib)^{-1}$ leicht angeben. Man findet

$$\text{(28)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\left((x+a+ib)^{-1}\right)}{dx} = -(x+a+ib)^{-2}, \\[2ex] \dfrac{d^2\left((x+a+ib)^{-1}\right)}{dx} = 1.2\,(x+a+ib)^{-3}, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^r\left((x+a+ib)^{-1}\right)}{dx} = (-1)^r\, 1.2\ldots r\,(x+a+ib)^{-r-1}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist die Beantwortung der Frage enthalten, von der wir ausgingen, und die sich auf das Bildungsgesetz der auf einander folgenden Differentialquotienten des von dem Factor i befreiten imaginären Theiles des Quotienten $\frac{1}{x-i}$ bezog. Setzt man in (27) $f(x) = \frac{1}{x-i}$, so folgt vermöge der in (3) angegebenen Zerlegung

$$\frac{d^r\left(\dfrac{1}{x-i}\right)}{dx^r} = \frac{d^r\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)}{dx^r} + i\,\frac{d^r\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{dx^r}. \tag{29}$$

Andrerseits hat man nach (28), indem $a = 0$, $b = -1$ gesetzt wird,

$$\frac{d^r\left(\dfrac{1}{x-i}\right)}{dx^r} = (-1)^r\,\frac{1.2\ldots r}{(x-i)^{r+1}}. \tag{30}$$

Um den reellen und imaginären Theil dieses Ausdrucks zu trennen, bemerke man, dass da x reell ist, nach einem in I, § 27 bewiesenen Satze der conjugirte Ausdruck erhalten wird, indem $-i$ durch $+i$ ersetzt wird, dass ferner die halbe Summe von zwei conjugirten complexen Grössen ihren gemeinsamen reellen Theil, die halbe Differenz derselben den imaginären Theil der als Minuendus genommenen complexen Grösse hervorbringt. Demnach entstehen aus (29) und (30) die beiden Gleichungen

$$(31)\qquad \frac{d^r\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{dx^r} = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^r 1.2.3..r}{(x-i)^{r+1}} + \frac{(-1)^r 1.2.3..r}{(x+i)^{r+1}}\right),$$

$$(32)\qquad \frac{d^r\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{dx^r} = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^r 1.2.3..r}{(x-i)^{r+1}} - \frac{(-1)^r 1.2.3..r}{(x+i)^{r+1}}\right).$$

Die letztere giebt für die aufeinander folgenden Differentialquotienten der Function $\operatorname{arctg} x$, da der $p$te Differentialquotient dieser Function gleich dem $(p-1)$ten Differentialquotienten des ersten Differentialquotienten $\frac{1}{x^2+1}$ ist, die gesuchte Bestimmung

$$(33)\qquad \frac{d^p \operatorname{arctg} x}{dx^p} = (-1)^{p-1}\frac{1.2.3(p-1)}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^p} - \frac{1}{(x+i)^p}\right);$$

sie soll dazu dienen, die Function $f(x) = \operatorname{arctg} x$ in die Gleichungen (3) und (4) des § 28 einzuführen. Die Function $\operatorname{arctg} x$, welche wie in § 14 von den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen wird, verschwindet für $x=0$, desgleichen verschwinden mit x zusammen alle ihre Differentialquotienten gerader Ordnung, weil für eine gerade Zahl p der Werth $(-i)^p$ dem Werthe $(i)^p$ gleich ist. Dagegen kommt für eine ungerade Zahl p

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2i}\left(\frac{1}{(-i)^p} - \frac{1}{i^p}\right) = i^{p-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

so dass der Differentialquotient der ungeraden $p$ten Ordnung für $x=0$ gleich dem Ausdrucke

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} 1.2.3\ldots(p-1)$$

wird. Mithin gelangt man durch die angegebene Substitution, indem p gleich dem um die Einheit verminderten Doppelten einer Zahl q genommen wird, zu der Gleichung

$$
(34)\quad \begin{cases}
\operatorname{arctg} x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{q-1}\dfrac{x^{2q-1}}{2q-1} + R_{2q+1}, \\[2ex]
R_{2q+1} = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(t-i)^{2q+1}} - \frac{1}{(t+i)^{2q+1}}\right)(x-t)^{2q}\,dt \\[2ex]
\qquad = \dfrac{1}{(2q+1)}\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{(\theta x-i)^{2q+1}} - \dfrac{1}{(\theta x+i)^{2q+1}}\right)x^{2q+1},
\end{cases}
$$

wo θ wieder einen positiven echten Bruch bezeichnet.

In Folge einer in § 31 bei dem allgemeinen Gliede der logarithmischen Reihe gemachten Bemerkung würde auch das allgemeine Glied der vorliegenden $\dfrac{(-1)^{q-1}x^{2q-1}}{2q-1}$ für eine hinreichend grosse Zahl q numerisch beliebig gross werden, wenn man der Grösse x einen die Einheit übersteigenden numerischen Werth beilegte. Für die Convergenz der unendlichen Reihe, welche als *die zur Darstellung der Function Arcus tangentis bestimmte Reihe* in (I), § 120 vorkommt, sind demnach nur solche Werthe von x zu betrachten, die numerisch unter der Einheit liegen oder sie höchstens erreichen, und bei solchen lässt sich leicht nachweisen, dass der Restausdruck R_{2q+1} mit wachsender Zahl q einen beliebig kleinen Werth annimmt.

Für jede complexe Grösse $g+ih$ ist offenbar sowohl der absolute Werth von g wie auch der von h niemals grösser als der absolute Betrag $\sqrt{g^2+h^2}$. Setzt man

$$
(35)\qquad \frac{1}{(\theta x-i)^{2q+1}} = g + ih,
$$

so wird nach einem vorhin angewendeten Schlusse, weil θx eine reelle Grösse bezeichnet,

$$
(35^*)\qquad \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(\theta x-i)^{2q+1}} - \frac{1}{(\theta x+i)^{2q+1}}\right) = h;
$$

mithin ist der absolute Werth von h keinenfalls grösser als der absolute Betrag der complexen Grösse $\dfrac{1}{(\theta x-i)^{2q+1}}$. Weil nun nach einem in I, § 27 bewiesenen Satze die Norm des Products von zwei complexen Grössen gleich dem Product der Normen der beiden Factoren, folglich die Norm des Products von mehreren complexen Grössen gleich dem Product der Normen der sämmtlichen Factoren, und deshalb auch der absolute Betrag eines Products von mehreren complexen Grössen gleich dem Product der absoluten Beträge der sämmtlichen Factoren ist, so wird der absolute Betrag der complexen Grösse $\frac{1}{(\theta x - i)^{2q+1}}$ erhalten, indem man den absoluten Betrag des Bruches $\frac{1}{\theta x - i}$, das heisst den Werth $\frac{1}{\sqrt{\theta^2 x^2 + 1}}$, auf die $(2q+1)$te Potenz erhebt. Der absolute Werth des Restausdrucks R_{2q+1} übertrifft daher unter keinen Umständen, wenn $\pm x$ den absoluten Werth der Variable x andeutet, den Werth

$$(36) \qquad \frac{1}{2q+1} \frac{(\pm x)^{2q+1}}{(\sqrt{\theta^2 x^2 + 1})^{2q+1}}.$$

Da $\pm x$ höchstens gleich der Einheit sein darf, so erreicht die Grösse $\frac{\pm x}{\sqrt{\theta^2 x^2 + 1}}$ und folglich auch ihre $(2q+1)$te Potenz im äussersten Falle nur die Einheit; darum nähert sich der Werth (36) bei einer wachsenden Zahl q vermöge des Factors $\frac{1}{2q+1}$ nothwendig der Null. Es muss sich aber der Restausdruck R_{2q+1} ebenso verhalten; die in (34) für die Function arctg x aufgestellte Reihe convergirt also bei unendlicher Ausdehnung, wofern die Grösse x numerisch kleiner als die Einheit oder derselben gleich ist.

Hiermit haben wir die Grundfunctionen der Analysis für reelle Werthe des Arguments durch den *Taylor*'schen und *Mac Laurin*'schen Satz in Potenzreihen entwickelt, und die Bedingungen der Convergenz aus den bezüglichen Restausdrücken abgeleitet.

Capitel IV.

Anwendungen der nach den Potenzen einer variabeln Grösse fortschreitenden Reihen.

§ 34. Bestimmung der grösten und kleinsten Werthe von Functionen einer variablen Grösse.

Wie die Tangentenprobleme gehören *die Probleme de maximis et minimis* oder die Fragen nach den grösten und kleinsten Werthen, welche Grössen, die von veränderlichen Grössen abhängen, annehmen können, zu den Aufgaben, durch deren besondere Schwierigkeiten die Entdeckung der Infinitesimalrechnung herbeigeführt ist. Schon früher hatte *Fermat* in der Arbeit *methodus ad disquirendam maximam et minimam* eine Vorschrift zur Lösung der hier bezeichneten Aufgaben mitgetheilt, und die Construction der Tangenten an gegebene Curven darauf zurückgeführt. Auch Leibnitz erwähnt beide Gattungen von Aufgaben in der Abhandlung, durch die er in den Leipziger actis eruditorum von 1684 die Grundzüge der Infinitesimalrechnung publicirte, und die den Titel führt: *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* Die Behandlung der Probleme de maximis et minimis gründet sich darauf, dass man von der Entwickelung einer Function, die nach den Potenzen einer passend gewählten Grösse geordnet ist, eine gewisse Anzahl der ersten Glieder benutzt, und enthält ein Vorbild für die übrigen demnächst mitzutheilenden Anwendungen der Potenzreihen.

Bei der Untersuchung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$ wird vorausgesetzt, dass dieselbe für ein gewisses Intervall der Variable x, das sich wieder von a bis b erstrecken möge, eindeutig, endlich und stetig sei. Es bezeichne c einen bestimmten Werth von x, h eine positive oder negative veränderliche Grösse, die an die Bedingung geknüpft ist, dass das Aggregat $c + h$ zwischen zwei Grössen α und β, die innerhalb des von a bis b ausgedehnten Intervalls liegen, eingeschlossen sei. Man sagt nun, dass die Function $f(x)$ für den Werth $x = c$ einen grösten Werth oder ein Maximum habe, wenn der Functionswerth $f(c)$ algebraisch grösser ist als jeder andere Functionswerth $f(c+h)$, und dass die Function $f(x)$ für den Werth $x = c$ einen kleinsten Werth oder ein Minimum habe, wenn der Functionswerth $f(c)$ algebraisch kleiner ist als jeder andere Functionswerth $f(c+h)$. Es wird also der Functionswerth $f(c)$ immer nur mit den Nachbarwerthen $f(c+h)$ verglichen, für welche $\alpha \leqq c+h \leqq \beta$ ist, und wo die Grösse des Intervalls $\beta - \alpha$ je nach den Umständen bedeutender oder geringer ausfallen kann. Demnach ist es möglich, dass die Function $f(x)$ innerhalb des ganzen von a bis b reichenden Intervalls für verschiedene Werthe von x verschiedene Maxima und Minima annimmt.

Es lässt sich die angegebene Definition auch so ausdrücken, dass die Function $f(x)$ für $x = c$ zu einem Maximum wird, sobald die Differenz $f(c+h) - f(c)$ für jeden von Null verschiedenen innerhalb der Grenzen $\alpha - c$ und $\beta - c$ liegenden Werth von h negativ ist, und dass die Function $f(x)$ für $x = c$ zu einem Minimum wird, sobald die bezeichnete Differenz für jeden von Null verschiedenen innerhalb der Grenzen $\alpha - c$ und $\beta - c$ liegenden Werth von h positiv ist. Um die Bedingungen zu erkennen, unter denen das eine oder andere geschieht, werde für den betreffenden Werth c die Function $f(c+h)$ in eine nach den Potenzen der Grösse h fortschreitende Reihe entwickelt, und diese nach dem in h multiplicirten Gliede durch den entsprechenden Restausdruck ergänzt. Hierzu dient der in der Gleichung (17) des § 27 enthaltene *Taylor'sche Satz;* die bei der Function $f(x)$ erforderlichen Voraussetzungen sind in demselben § angeführt. Sie bestehen zunächst darin, dass die in der Entwickelung auftretenden Differentialquotienten $f'(x)$ und $f''(x)$ innerhalb des bezüglichen Intervalls eindeutig, endlich und stetig sein müssen. Dann findet man für die Differenz $f(c+h) - f(c)$ die folgende mit einem positiven echten Bruche θ gebildete Darstellung

$$(1) \qquad f(c+h) - f(c) = f'(c)\,h + \frac{f''(c+\theta h)}{2} h^2.$$

Aus derselben ist leicht zu folgern, dass die Function $f(x)$ für $x = c$ weder einen grösten noch einen kleinsten Werth besitzt, sobald der erste Differentialquotient $f'(c)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Durch Herausziehen des Factors h bekommt die rechte Seite von (1) die Gestalt

$$(2) \qquad \left(f'(c) + h\, f''(c + \theta h)\right) h;$$

man kann nun der Grösse h solche Grenzen $\alpha - c$ und $\beta - c$ vorschreiben, dass für jeden innerhalb derselben liegenden Werth das in der Klammer befindliche Aggregat stets dasselbe Vorzeichen wie die von Null verschiedene Grösse $f'(c)$ behält. Wegen der Voraussetzungen, die für den Gebrauch des Taylorschen Satzes nothwendig sind, darf die Grösse h von vorne herein nur einen solchen Spielraum erhalten, dass der zweite Differentialquotient $f''(c + \theta h)$ bei jedem Werthe des positiven echten Bruches θ einen endlichen Werth hat, das heisst numerisch kleiner bleibt, als eine gewisse feste Grösse k. Wofern nun die der Grösse h zu steckenden Grenzen $\alpha - c$ und $\beta - c$ numerisch kleiner gewählt werden als der Bruch $\frac{f'(c)}{k}$, so muss der Ausdruck

$$(3) \qquad 1 + h\,\frac{f''(c + \theta h)}{f'(c)}$$

stets positiv sein, folglich das in der Klammer von (2) befindliche Aggregat das Vorzeichen des Factors $f'(c)$ haben. Legt man alsdann der Grösse h innerhalb der festgesetzten Grenzen zuerst einen negativen, dann einen positiven Werth bei, so wird der in (2) angegebene Werth der Differenz $f(c + h) - f(c)$ im ersten Falle das mit $f'(c)$ übereinstimmende, im zweiten Falle das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen; die Differenz ist also fähig, nach Belieben das positive oder das negative Vorzeichen zu erhalten, und das verträgt sich weder mit der Natur des Maximums noch mit der des Minimums, indem die Differenz bei dem erstern immer negativ, bei dem zweiten immer positiv sein müsste.

Wenn also die Function $f(x)$ für $x = c$ ein Maximum oder ein Minimum haben soll, so muss der erste Differentialquotient derselben $f'(x)$ für den bezüglichen Werth verschwinden. Hierdurch fällt auf der rechten Seite von (1) das in h multiplicirte Glied fort, und es entsteht die Gleichung

$$(4) \qquad f(c+h)-f(c)=\frac{f''(c+\theta h)}{2}h^2.$$

Dieselbe erlaubt über das Vorhandensein eines Maximums oder eines Minimums zu entscheiden, wofern der zweite Differentialquotient $f''(x)$ bei $x=c$ einen von Null verschiedenen Werth erhält. Für die Function $f''(x)$ gilt die Voraussetzung der Stetigkeit, das heisst, für je zwei innerhalb des benutzten Intervalls befindliche Werthe x und $x+\xi$ ist die Differenz $f(x+\xi)-f(x)$ bei einem numerisch hinreichend kleinen Werthe von ξ kleiner als eine noch so kleine gegebene Grösse. Sobald daher $f''(c)$ nicht gleich Null ist, kann der numerische Werth der Grösse h in solchem Masse eingeschränkt werden, dass die Differenz $f''(c+\theta h)-f''(c)$ zwischen zwei Grössen p und q, die numerisch kleiner als der Werth $f''(c)$ selbst sind, enthalten bleibt; dann muss $f''(c+\theta h)$ einen von Null verschiedenen Werth haben, dessen Vorzeichen mit $f''(c)$ übereinstimmt. Aus den Ungleichheiten

$$p<f''(c+\theta h)-f''(c)<q$$

folgen nämlich durch Addition von $f''(c)$ die Ungleichheiten

$$p+f''(c)<f''(c+\theta h)<q+f''(c),$$

wo die Grössen $p+f''(c)$ und $q+f''(c)$ nach der getroffenen Voraussetzung dasselbe Vorzeichen wie $f''(c)$ haben und nothwendig von Null differiren. Es wird demnach festgesetzt, dass die Grösse h innerhalb solcher Grössen $\alpha-c$ und $\beta-c$ liegen soll, für welche $f''(c+\theta h)$ das Vorzeichen von $f''(c)$ festhält. Da die Grösse $f''(c+\theta h)$ in (4) mit dem Factor $\frac{1}{2}h^2$ multiplicirt ist, der für ein positives wie für ein negatives h positiv bleibt und nur mit h zusammen verschwindet, so hat die rechte Seite von (4) für jeden zulässigen Werth von h, die Null ausgenommen, einen von Null verschiedenen Werth, der positiv oder negativ bleibt, je nachdem $f''(c)$ positiv oder negativ ist. Nun wird aber das Wesen des Maximums dadurch characterisirt, dass für einen von Null verschiedenen Werth h die auf der linken Seite von (4) befindliche Differenz immer negativ, das

Wesen des Minimums dadurch, dass diese Differenz immer positiv bleibt. Also darf man den Schluss ziehen, *dass die Function $f(x)$ für $x = c$ zu einem Maximum wird, wenn für diesen Werth von x der erste Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet und der zweite Differentialquotient $f''(x)$ einen negativen Werth erhält, dass dagegen die Function $f(x)$ für $x = c$ zu einem Minimum wird, wenn für diesen Werth von x der erste Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet, und der zweite Differentialquotient $f''(x)$ einen positiven Werth erhält.*

In dem Falle, dass für einen Werth $x = c$ sowohl der erste wie auch der zweite Differentialquotient der Function $f(x)$ gleich Null ist, genügt die in der Gleichung (1) enthaltene Entwickelung zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage nicht mehr. Wir führen dann die in der Gleichung (17) des § 27 angegebene Reihe bis zu dem mit h^3 multiplicirten Gliede und dem sich anschliessenden Restausdruck, und erhalten, indem die mit h und h^2 multiplicirten Glieder verschwinden, die Gleichung

$$(5) \qquad f(c+h) - f(c) = \frac{f'''(c)}{2.3} h^3 + \frac{f^{(4)}(c+\theta h)}{2.3.4} h^4,$$

bei der auch die Differentialquotienten $f'''(x)$ und $f^{(4)}(x)$ eindeutig, endlich und stetig vorausgesetzt werden. Diese Gleichung zeigt ein ähnliches Verhalten wie die obige (1). Wenn der Werth $f'''(c)$ von Null verschieden ist, so nimmt die rechte Seite von (5) für Werthe von h, die numerisch unter einer gewissen Grösse liegen, nothwendig das Vorzeichen des Gliedes $\frac{f'''(c)}{2.3} h^3$ an, welches eine ungerade Potenz von h als Factor enthält und deshalb mit der Grösse h gleichzeitig sein Vorzeichen ändert. Aus diesem Grunde wechselt jetzt die Differenz $f(c+h) - f(c)$ ihr Vorzeichen, sobald die Grösse h von einem negativen zu einem positiven Werthe übergeht, es tritt also bei der Function $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum auf. Wenn aber $f'''(c)$ gleich Null ist, so wird aus (5) die Gleichung

$$(6) \qquad f(c+h) - f(c) = \frac{f^{(4)}(c+\theta h)}{2.3.4} h^4,$$

bei der es auf die Grösse $f^{(4)}(c)$ ankommt. Für einen von Null verschiedenen Werth derselben kann man vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit der Function $f^{(4)}(x)$ das Intervall von h so klein wählen, dass $f^{(4)}(c+\theta h)$ das Vorzeichen von $f^{(4)}(c)$ behält. Die Differenz $f(c+h)-f(x)$ ist nach (6) gleich dem Product des in Rede stehenden Mittelwerthes und der durch die Zahl 2.3.4 dividirten vierten Potenz der Grösse h, welche als eine gerade Potenz stets positiv ist und nur mit h zusammen verschwindet, und kann daher niemals ein anderes Vorzeichen annehmen, als die Grösse $f^{(4)}(c)$ hat. Mithin wird die Function $f(x)$ für $x=c$ zu einem Maximum unter den Bedingungen

$$f'(c)=0,\ f''(c)=0,\ f'''(c)=0,\ f^{(4)}(c)<0,$$

dagegen zu einem Minimum unter den Bedingungen

$$f'(c)=0,\ f''(c)=0,\ f'''(c)=0,\ f^{(4)}(c)>0.$$

Wie man sieht, fehlt auch hier wieder die endgültige Antwort, sobald $f^{(4)}(c)$ gleich Null ist, so dass es nöthig wird, die Entwickelung der Differenz $f(c+h)-f(c)$ noch weiter zu treiben. In der That muss man die Reihe der Differentialquotienten $f''(c), f'''(c), \ldots$ so lange untersuchen, bis man zu dem ersten Differentialquotienten $f^{(p+1)}(c)$ gelangt, der nicht gleich Null ist. Dann liefert der Taylor'sche Satz die Gleichung

$$(7) \qquad f(c+h)-f(c)=\frac{f^{(p+1)}(c+\theta h)}{2.3\ldots(p+1)}h^{p+1},$$

bei der die rechte Seite für numerisch hinreichend kleine Werthe von h ihr Vorzeichen mit h zusammen wechselt, falls $p+1$ eine ungerade Zahl ist, hingegen das Vorzeichen von $f^{(p+1)}(c)$ behält, falls $p+1$ eine gerade Zahl ist. *Die Function $f(x)$ hat also für einen Werth $x=c$, der ihren ersten Differentialquotienten zu Null macht, ein Maximum, wenn der niedrigste für $x=c$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist und für $x=c$ einen negativen Werth annimmt, sie hat ein Minimum, wenn der niedrigste für $x=c$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist und für $x=c$ einen positiven Werth annimmt, sie hat endlich weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn der niedrigste für $x=c$ nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist.*

Hierin bestehen die vollständigen Kriterien der Maxima und der Minima einer Function einer variabeln Grösse.

§ 35. Geometrische Deutung der Maxima und Minima einer Function einer variabeln Grösse.

Indem wie früher mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene bezeichnet werden, betrachten wir die durch die Gleichung

(1) $$y=f(x)$$

dargestellte Curve. Der Werth y misst den Abstand des Punktes (x, y) von der Abscissenaxe und bekommt auf der einen Seite derselben, nach der in § 2 eingeführten Vorstellung der oberen, das positive, auf der anderen Seite das negative Vorzeichen. Wenn daher die Function $f(x)$ für einen Werth $x=c$ nach der Definition des vorigen § zu einem Maximum wird, so hat der betreffende Punkt der Curve im Vergleich zu seinen Nachbarpunkten den grösten Abstand von der Abscissenaxe; wird dagegen $f(x)$ für $x=c$ zu einem Minimum, so hat der zugehörige Punkt im Vergleich zu seinen Nachbarpunkten den kleinsten Abstand von der Abscissenaxe, beides unter der Voraussetzung, dass der in Rede stehende Werth $f(x)$ positiv ist. Für negative Werthe von $f(x)$ kehren sich die Benennungen um.

Da der erste Differentialquotient $f'(x)$ die trigonometrische Tangente des Winkels ausdrückt, den die in dem betreffenden Punkte an die Curve gezogene berührende Linie mit der Abscissenaxe bildet, so hat die für das Maximum und Minimum geltende Bedingung, dass $f'(x)$ für $x=c$ verschwinde, zur Folge, dass die berührende Linie in dem Punkte $x=c$, $y=f(c)$ zu der Abscissenaxe parallel wird. Auf diesen Umstand ist schon in § 4 aufmerksam gemacht worden. Ferner bezeichnet die Differenz $f(c+h)-f(c)$ den je nach der Lage positiv oder negativ genommenen Abstand des Punktes der Curve, für welchen $x=c+h$ ist, von der Parallele zur Abscissenaxe, die durch den Punkt $x=c$, $y=f(c)$ läuft und hier eben die Curve berührt. Bei der getroffenen Annahme ist die Differenz $f(c+h)-f(c)$ für Punkte $x=c+h$, $y=f(c+h)$, die oberhalb der berührenden Linie liegen, positiv, für unterhalb liegende Punkte negativ. Fassen wir daher die Gleichung (7) des vorigen § ins Auge, worin vermittelst der Voraussetzung, dass $f^{(p+1)}(c)$ den niedrigsten für $x=c$ nicht verschwindenden Differentialquotienten von $f(x)$ bedeutet, sämmtliche Fälle eingeschlossen sind, so wird klar, dass die zu dem Punkte $x=c$, $y=f(c)$ benachbarten Punkte der Curve bei einer geraden Zahl $p+1$ und einem negativen Werthe von $f^{(p+1)}(c)$ sämmtlich unter, bei einer geraden Zahl $p+1$ und einem positiven Werthe von $f^{(p+1)}(c)$ sämmtlich über der genannten berührenden Linie liegen, sich hingegen bei einer ungeraden Zahl $p+1$ auf der einen, z. B. der linken Seite des Punktes unterhalb, auf der anderen Seite desselben oberhalb der berührenden Linie befinden. Sowohl in den Fällen, wo die Function $f(x)$ für $x=c$ ein Maximum, wie auch in den Fällen, wo sie ein Minimum wird, liegt derjenige Theil der entsprechenden Curve, welchem der Punkt $x=c$, $y=f(c)$ angehört, auf derselben Seite der dort berührenden zu der Abscissenaxe parallelen Linie. Wenn dagegen für einen Werth $x=c$ zwar der erste Differentialquotient der Function $f(x)$ verschwindet, allein die Function weder ein Maximum noch ein Minimum wird, so zeigt die entsprechende Curve die Erscheinung, dass sie von der zugehörigen berührenden Linie zu gleicher Zeit geschnitten wird.

§ 36. Einzelne Aufgaben de Maximis et Minimis.

Um die sämmtlichen Werthe der Variable x zu erhalten, für welche eine gegebene Function $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum wird, ist es nach § 34 erforderlich, alle diejenigen Werthe zu kennen, für welche der nach x genommene erste Differentialquotient der Function $f'(x)$ gleich Null wird. Nachdem die zugehörige Gleichung

$$(1) \qquad f'(x)=0$$

gebildet ist, hat man zuerst die sämmtlichen reellen Wurzeln $c_1, c_2, ..$ aufzusuchen, welche sie besitzt, und hierauf jede einzelne in die Reihenfolge der Differentialquotienten

$$(2) \qquad f''(x),\ f'''(x), ..$$

zu substituiren, bis man zu dem ersten gelangt, der für den betreffenden Werth nicht verschwindet; man kann dann aus der Beschaffenheit des Ergebnisses nach der in § 34 aufgestellten Regel beurtheilen, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden vorliege.

I. Es sei $f(x)$ gleich einer rationalen ganzen Function von x von einem beliebigen Grade

(3) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Dann ist $f'(x)$ die Function des um eine Einheit niedrigeren Grades

(4) $$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$$

und es handelt sich um die Auflösung der algebraischen Gleichung $f'(x) = 0$. Auf die rationalen ganzen Functionen einer Variable bezieht sich die in § 34 erwähnte Methode *Fermats*, durch welche die Auffindung der Maxima und Minima der gegebenen Function von der Auflösung der so eben gebildeten Gleichung abhängig gemacht wird. Nach dem Fundamentalsatze der algebraischen Gleichungen, der in I, § 61 und f. f. bewiesen ist, hat die Gleichung $f'(x) = 0$ immer eine reelle oder complexe Wurzel, und in Folge dessen genau $n-1$ reelle oder complexe Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$, vermöge deren die Zerlegung in $n-1$ Factoren ersten Grades

(5) $$f'(x) = n a_0 (x - \eta_1)(x - \eta_2) \ldots (x - \eta_{n-1})$$

besteht. Unter den Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ sind die reellen Werthe, falls solche überhaupt vorkommen, auszuwählen; diese liefern dann die Grössen $c_1, c_2, \ldots$, welchen ein Maximum oder Minimum der Function $f(x)$ entsprechen kann. Bezeichnet man eine dieser Grössen wieder mit c, so lassen sich die Bedingungen der Maxima und Minima von $f(x)$ unmittelbar vermöge der folgenden Darstellung ableiten

(3*) $$f(c+h) = f(c) + \frac{f''(c)}{2} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{2 \cdot 3 \ldots n} h^n,$$

die aus I, § 94 herrührt.

Für die Function des zweiten Grades

(6) $$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

hat man

(7) $$f'(x) = 2 a_0 x + a_1$$

Die letztere Function verschwindet für den einzigen Werth

$$(8) \qquad c = \frac{-a_1}{2a_0},$$

und giebt

$$(9) \qquad f(c) = \frac{-a_1^2 + 4a_0 a_2}{4a_0}.$$

Da $f''(x)$ den constanten Werth $2a_0$ hat, so wird die Gleichung (3*) zu der folgenden

$$(10) \qquad f(c+h) = \frac{-a_1^2 + 4a_0 a_2}{4a_0} + a_0 h^2.$$

Die Grösse a_0 darf nicht gleich Null sein, weil sonst die Function $f(x)$ nicht vom zweiten Grade wäre; mithin kann der Werth $f''(x) = 2a_0$ nicht verschwinden und begründet, falls a_0 positiv ist, das Auftreten eines Minimums, falls a_0 negativ ist, eines Maximums. Durch die Zusammenstellung der Gleichung (11) des § 2 mit der obigen (10) ergibt sich, dass die Gleichung

$$(11) \qquad y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

in Bezug auf die rechtwinkeligen Coordinaten x, y eine Parabel ausdrückt. Man erhält eine vollständige Uebereinstimmung, indem man

$$(12) \qquad \frac{-a_1^2 + 4a_0 a_2}{4a_0} = \frac{m+\mu}{2}, \quad a_0 = \frac{1}{2(m-\mu)}, \quad c = l$$

setzt. Für die Discussion in § 2 ist die Differenz $m-\mu$ positiv angenommen; hierdurch wird der Punkt $x=c, y=f(c)$ zu dem tiefsten Punkte der Parabel, der in der beigefügten Figur mit R_0 bezeichnet ist und den Scheitelpunkt der Parabel bildet. Bei einem negativen Werthe von $m-\mu$ kehrt sich die Lage der Parabel von oben nach unten um, und bestimmen die gleichnamigen Coordinaten den höchsten Punkt der Parabel, der wieder ihr Scheitelpunkt ist.

Der niedrigste Grad von $f(x)$, bei dem es vorkommen kann, dass $f'(x)$ und $f''(x)$ für denselben Werth von x verschwinden, ist der dritte. Alsdann sind die zu betrachtenden Functionen

$$(13) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \\ f'(x) = 3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 \\ f''(x) = 6a_0 x + 2a_1. \end{cases}$$

Die quadratische Gleichung $f'(x) = 0$ hat demnach die Wurzeln

$$(14)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2}}{3a_0} \\ \eta_2 = \dfrac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2}}{3a_0}. \end{cases}$$

Sobald die Verbindung $a_1^2 - 3a_0 a_2$ negativ ist, werden dieselben complex und conjugirt, so dass der Differentialquotient $f'(x)$ für keinen reellen Werth von x verschwinden kann. In jedem anderen Falle sind η_1 und η_2 reell, und die Substitution in den Ausdruck $f''(x)$ giebt

$$(15)\quad \begin{cases} f''(\eta_1) = 2(3a_0\eta_1 + a_1) = 2\sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} \\ f''(\eta_2) = 2(3a_0\eta_2 + a_1) = -2\sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2}. \end{cases}$$

Wenn daher die Verbindung $a_1^2 - 3a_0 a_2$ positiv ist, so bringt der eine der Werthe η_1 und η_2 ein Maximum, der andre ein Minimum hervor. Bei dem Verschwinden der Verbindung $a_1^2 - 3a_0 a_2$ fallen die Werthe η_1 und η_2 in einen zusammen, für den $f''(x)$ verschwindet, und da $f'''(x) = 6a_0$ bei der vorliegenden Function dritten Grades nicht gleich Null werden kann, so zeigt sich, dass $f(x)$ weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum wird. Die Verbindung, von deren Vorzeichen die Entscheidung zwischen den drei möglichen Fällen abhängt, bildet den Zähler des auf der rechten Seite der Gleichung (12) in I, § 57 befindlichen Ausdrucks, nachdem man denselben auf den gemeinsamen Nenner a_0^2 gebracht hat.

II. Die Maxima und Minima einer rationalen gebrochenen Function

$$(16)\quad f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

wo $A(x)$ und $B(x)$ rationale ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler sind, erfordern das Verschwinden des ersten Differentialquotienten

$$(17)\quad f'(x) = \frac{A'B - AB'}{B^2}.$$

Die Bezeichnung des Arguments x ist der Kürze halber weggelassen und wird auch im Folgenden fortbleiben, wo kein Missverständniss zu befürchten ist. Hier sind alle reellen Werthe von x in Betracht zu ziehen, welche der algebraischen Gleichung genügen

$$(18)\quad A'B - AB' = 0.$$

Unter den Wurzeln von (18) kann eine Grösse ξ, welche zugleich die Function B zu Null macht, nur dann vorkommen, wenn für dieselbe das Product AB' verschwindet. Weil nun $A(x)$ und $B(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so verschwindet $A(x)$ für keinen Werth, der $B(x)$ zu Null macht; für jede Grösse ξ muss also $B'(x)$ mit $B(x)$ zusammen verschwinden. Umgekehrt wird die Gleichung (18) durch jeden Werth befriedigt, für den $B(x)$ und $B'(x)$ gleich Null sind. Diejenigen Werthe, welche diese Eigenschaft haben, sind aber zufolge I, § 49 die mehrfachen Wurzeln der Gleichung $B(x)=0$; mit diesen fallen daher die Grössen ξ zusammen. Hiernach gelangt man zu dem Resultat, dass, wenn die Gleichung $B(x)=0$ keine mehrfachen Wurzeln oder die Function $B(x)$ bei ihrer Zerlegung in Factoren des ersten Grades keine mehrfachen Factoren besitzt, die Gleichung (18) keine Wurzeln haben kann, für welche die Function $B(x)$ verschwindet. Andernfalls existiren zwar solche Wurzeln, dürfen aber bei der Aufsuchung der Maxima und Minima der Function $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ nicht angewendet werden, da nach § 8 die letztere für dieselben aufhörte stetig zu sein, und da in dem für $f'(x)$ angegebenen Ausdruck (17) der Nenner mit dem Zähler zusammen verschwände.

Der zweite Differentialquotient von $f(x)$ erhält den Ausdruck

$$(19) \qquad f''(x)=\frac{A''B-AB''}{B^2}-\frac{2(A'B-AB')}{B^3}B'.$$

Bei der Substitution eines Werthes von x, der die Gleichung (18) erfüllt, ohne die Gleichung $B=0$ zu befriedigen, verschwindet der zu subtrahirende Bestandtheil der rechten Seite, und weil der Nenner B^2 nothwendig positiv wird, so entscheidet die Verbindung

$$(20) \qquad A''B-AB''$$

durch ein negatives Vorzeichen für ein Maximum, durch ein positives für ein Minimum. Wir übergehen die Erörterung der höheren Differentialquotienten der Function $f(x)$, welche, falls es nothwendig ist, nach einander aufzustellen keine Schwierigkeit verursacht.

III. Als Beispiel einer transcendenten Function diene die folgende, mit den ganzen Functionen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$

und der Basis der natürlichen Logarithmen e gebildete Function

(21) $$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} e^{\frac{C(x)}{D(x)}}.$$

Aus derselben ergiebt sich

(22) $$f'(x) = \frac{d\left(\frac{A}{B}\right)}{dx} e^{\frac{C}{D}} + \frac{A}{B} \frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx} e^{\frac{C}{D}}$$

oder entwickelt

(22*) $$f'(x) = \frac{A'B - AB'}{B^2} e^{\frac{C}{D}} + \frac{A}{B} \frac{C'D - CD'}{D^2} e^{\frac{C}{D}},$$

und ferner

(23) $$f''(x)$$
$$= \frac{d^2\left(\frac{A}{B}\right)}{dx^2} e^{\frac{C}{D}} + 2 \frac{d\left(\frac{A}{B}\right)}{dx} \frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx} e^{\frac{C}{D}} + \frac{A}{B}\left(\frac{d^2\left(\frac{C}{D}\right)}{dx^2} + \left(\frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx}\right)^2\right) e^{\frac{C}{D}}.$$

Weil die Exponentialfunction $e^{\frac{C(x)}{D(x)}}$ für jeden Werth von x, für den der Exponent $\frac{C(x)}{D(x)}$ nicht mit negativem Vorzeichen über jedes Mass hinauswächst, positiv und von Null verschieden ist, so hat man, abgesehen von den Werthen, die den Nenner $D(x)$ zum Verschwinden bringen, nur diejenigen Werthe zu ermitteln, für welche der auf der rechten Seite von (22) mit der Exponentialfunction $e^{\frac{C(x)}{D(x)}}$ multiplicirte algebraische Ausdruck

(24) $$\frac{d\left(\frac{A}{B}\right)}{dx} + \frac{A}{B} \frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx},$$

gleich Null wird. Diese sind die reellen Wurzeln der algebraischen Gleichung

(25) $$(A'B - AB')D^2 + AB(C'D - CD') = 0.$$

Ferner bleibt das Vorzeichen von $f''(x)$ bei dem Fortlassen der Exponentialfunction $e^{\frac{C(x)}{D(x)}}$ ungeändert, so dass dasselbe durch den algebraischen Factor

(26) $$\frac{d^2\left(\frac{A}{B}\right)}{dx^2} + 2 \frac{d\left(\frac{A}{B}\right)}{dx} \frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx} + \frac{A}{B}\left(\frac{d^2\left(\frac{C}{D}\right)}{dx^2} + \left(\frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx}\right)^2\right)$$

bestimmt werden kann. Hier kommt noch in Betracht, dass vermöge des Verschwindens von (24) der Ausdruck (26) gleich dem folgenden wird

$$(27)\qquad \frac{d^2\left(\frac{A}{B}\right)}{dx^2} - \frac{A}{B}\left(\frac{d\left(\frac{C}{D}\right)}{dx}\right)^2 + \frac{A}{B}\frac{d^2\left(\frac{C}{D}\right)}{dx^2}.$$

Eine sehr einfache Anwendung entsteht, indem man $A(x)$ gleich der ganzen Potenz x^n, $B(x)=1$, $C(x)$ gleich der in eine Constante c_0 multiplicirten Variable x, $D(x)=1$ setzt, mithin

$$(21^*)\qquad f(x)=x^n e^{c_0 x}.$$

Dann wird aus (25) die Gleichung

$$(25^*)\qquad nx^{n-1}+x^n c_0=0,$$

und aus (27) der Ausdruck

$$(27^*)\qquad n(n-1)x^{n-2}-x^n c_0^2.$$

Die Wurzel von (25*), die gleich $-\frac{n}{c_0}$ ist, giebt für (27*) den Werth

$$\left(\frac{-n}{c_0}\right)^{n-2}(n(n-1)-n^2)=\frac{(-n)^{n-1}}{c_0^{n-2}},$$

der nach der allgemeinen Regel durch ein negatives Vorzeichen ein Maximum, durch ein positives Vorzeichen ein Minimum anzeigt.

§ 37. Berührungen verschiedener Ordnungen zwischen ebenen Curven.

Insofern die Entwickelung einer Function in eine Potenzreihe die Aenderungen der Function darstellt, welche bestimmten Aenderungen der Variable entsprechen, kann man durch dieses Mittel die simultanen Aenderungen von zwei Functionen derselben Variable in der Art vergleichen, dass entweder die Differenz oder der Quotient der beiden Functionen untersucht wird. Zu der Betrachtung der Differenz veranlasst die Frage, wie sich zwei ebene Curven, die durch denselben Punkt gehen, in der Nachbarschaft von diesem gegen einander verhalten. Wenn für dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem die Gleichungen zweier Curven gegeben sind

(1) $$y = f(x),\ \eta = \varphi(\xi),$$
und diese sich in dem Punkte $x = x_0, y = y_0$ treffen, so gelten die Gleichungen

(2) $$y_0 = f(x_0),\ y_0 = \varphi(x_0).$$
Es werde nun x wie auch ξ durch das Aggregat $x_0 + h$ ersetzt und hierauf $f(x_0 + h)$ und $\varphi(x_0 + h)$ nach den Potenzen der Grösse h entwickelt; dann kommt nach (17) des § 27 bei zwei positiven echten Brüchen θ und λ

(3) $$y = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{2.3\ldots p} h^p + \frac{f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)}{2.3\ldots(p+1)} h^{p+1},$$

(4) $$\eta = \varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\,h + \frac{\varphi''(x_0)}{2} h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varphi^{(p)}(x_0)}{2.3\ldots p} h^p + \frac{\varphi^{(p+1)}(x_0 + \lambda h)}{2.3\ldots(p+1)} h^{p+1}.$$
Hieraus erhält man für die Differenz der Ordinaten $\eta - y$, welche zu demselben Werth der Abscisse $x_0 + h$ gehören, da wegen (2) die Differenz $\varphi(x_0) - f(x_0)$ gleich Null ist, den Ausdruck

(5) $$\eta - y = (\varphi'(x_0) - f'(x_0))\,h + \frac{\varphi''(x_0) - f''(x_0)}{2} h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varphi^{(p)}(x_0) - f^{(p)}(x_0)}{2.3\ldots p} h^p + \frac{\varphi^{(p+1)}(x_0 + \lambda h) - f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)}{2.3\ldots(p+1)} h^{p+1}.$$
Die Grösse $\eta - y$ bezeichnet das Stück der in dem Punkte $x_0 + h$ der Abscissenaxe errichteten Ordinate, das zwischen den beiden Curven liegt, und zwar bei der eingeführten Lage der Axen mit dem positiven oder negativen Vorzeichen genommen, je nachdem der Punkt der zweiten Curve $\eta = \varphi(\xi)$ über oder unter dem Punkte der ersten Curve $y = f(x)$ liegt. Sobald noch eine dritte Curve hinzukommt, die auch durch denselben Punkt hindurchgeht, und deren Gleichung

(6) $$\mathfrak{y} = \psi(\mathfrak{x})$$
heissen möge, so folgt für einen positiven echten Bruch μ auf dieselbe Weise

(7) $$\mathfrak{y} - y = (\psi'(x_0) - f'(x_0))\,h + \frac{\psi''(x_0) - f''(x_0)}{2} h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\psi^{(p)}(x_0) - f^{(p)}(x_0)}{2.3\ldots p} h^p + \frac{\psi^{(p+1)}(x_0 + \mu h) - f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)}{2.3\ldots(p+1)} h^{p+1}.$$

Wir denken uns jetzt die erste Curve beliebig gegeben und setzen für die zweite und dritte Curve verschiedene Gebilde von einer gewissen Gattung, die zuerst gerade Linien sein mögen. Bei einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt x_0, y_0 läuft, ist nur noch der Winkel α willkürlich, den sie mit einer bekannten Linie, etwa der Abscissenaxe, einschliesst. Die Gleichung einer so bestimmten Geraden entsteht aus (5) des § 2, indem $l = x_0, m = y_0$ genommen wird und α seine Bedeutung behält,

$$(8) \qquad \mathfrak{y} = y_0 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\mathfrak{x} - x_0).$$

Unter den Geraden, die den verschiedenen Werthen von α entsprechen, hat diejenige, welche die gegebene erste Curve in dem Punkte (x_0, y_0) berührt, zu derselben eine besondere Beziehung; für diese ist die Tangente des Winkels α gleich dem ersten Differentialquotienten $f'(x_0)$, so dass ihre Gleichung folgendermassen lautet

$$(9) \qquad \eta = y_0 + f'(x_0)(\xi - x_0).$$

Die respective in (8) und (9) angegebenen Functionen $\psi(\mathfrak{x})$ und $\varphi(\xi)$ sind ganze Functionen des ersten Grades, bei denen die ersten Differentialquotienten die Werthe

$$(9_a) \qquad \psi'(x_0) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

haben, dagegen die nach dem Argument genommenen Differentialquotienten von der zweiten und von den höheren Ordnungen verschwinden. Mithin gehen die Gleichungen (5) und (7) für $p = 1$ in die folgenden über

$$(10) \qquad \eta - y = \qquad\qquad -\frac{f''(x_0 + \theta h)}{2}h^2,$$

$$(11) \qquad \mathfrak{y} - y = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - f'(x_0)\right)h - \frac{f''(x_0 + \theta h)}{2}h^2.$$

Für jede durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgehende gerade Linie mit Ausnahme der die Curve berührenden ist die Differenz $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - f'(x_0)$, welche auf der rechten Seite von (11) als Factor von h erscheint, von Null verschieden. Es folgt daher durch solche Schlüsse, wie sie in § 34 angewendet sind, dass für alle Werthe von h, die numerisch unter einer hinreichend kleinen Grösse liegen, die Differenz $\eta - y$ numerisch kleiner als die Differenz $\mathfrak{y} - y$ bleibt. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn man die Punkte, in welchen die zu dem Werthe $x_0 + h$ gehörende Ordinate die Curve $y = f(x)$, die Berührende (9) und die Gerade (8) schneidet, der Reihe nach als den ersten, zweiten und dritten Punkt bezeichnet, der dritte Punkt niemals zwischen den ersten und zweiten fallen kann. Durch diese Eigenschaft wird die Berührende von allen übrigen durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden Graden unterschieden, so dass man die Berührung der gegebenen Curve und einer geraden Linie mit Hülfe dieser Eigenschaft definiren darf.

Damit die beiden in (1) dargestellten Curven in dem gemeinsamen Punkte (x_0, y_0) dieselbe berührende Gerade haben, ist es nothwendig und hinreichend, dass sich die Tangente des Neigungswinkels α bei beiden auf dieselbe Weise bestimme, oder dass die Werthe der ersten Differentialquotienten $f'(x_0)$ und $\varphi'(x_0)$ einander gleich seien. Alsdann sagt man, dass die beiden Curven mit einander *eine Berührung der ersten Ordnung* haben. Dieser Begriff ist in der Weise ausgedehnt worden, dass das Hinzukommen der Gleichheit der Differentialquotienten der zweiten Ordnung $f''(x_0)$ und $\varphi''(x_0)$ *eine Berührung der zweiten Ordnung*, und allgemein das Bestehen der $(m+1)$ Gleichungen

$$(12) \quad f(x_0) = \varphi(x_0),\; f'(x_0) = \varphi'(x_0), \ldots f^{(m)}(x_0) = \varphi^{(m)}(x_0)$$

eine Berührung der m ten Ordnung characterisirt. Das Wesen der Berührung der $m$ten Ordnung zwischen den Curven $y = f(x)$ und $\eta = \varphi(\xi)$ besteht aber darin, dass, wenn die Curve $y = f(x)$ in demselben Punkte $(x_0 y_0)$ mit einer Curve $\mathfrak{y} = \psi(\mathfrak{x})$ eine Berührung von einer niedrigeren Ordnung hat, welche die l te sein möge, und wenn man wieder die Schnittpunkte einer zu der Abscisse $x_0 + h$ gehörenden Ordinate mit den drei Curven in der Reihenfolge, in der sie angeführt sind, den ersten, zweiten und dritten Punkt nennt, alsdann der dritte Punkt niemals zwischen den ersten und zweiten Punkt fallen kann. Nimmt man die Zahl p gleich m, so werden wegen der getroffenen Voraussetzungen aus (5) und (7) die Gleichungen

$$(12)\quad \eta - y = \frac{\varphi^{(m+1)}(x_0 + \lambda h) - f^{(m+1)}(x_0 + \theta h)}{2 \,.\, 3 \ldots (m+1)} h^{m+1},$$

$$(13)\quad \mathfrak{y} - y = \frac{\psi^{(l+1)}(x_0) - f^{(l+1)}(x_0)}{2 \,.\, 3 \ldots (l+1)} h^{l+1} + \ldots + \frac{\psi^{(m+1)}(x_0 + \mu h) - f^{(m+1)}(x_0 + \theta h)}{2 \,.\, 3 \ldots (m+1)} h^{m+1}.$$

Weil die Curven $y = f(x)$ und $\mathfrak{y} = \psi(\mathfrak{x})$ nur eine Berührung der $l$ten und keine Berührung der $(l+1)$ten Ordnung haben sollen, so ist die Differenz $\psi^{(l+1)}(x_0) - f^{(l+1)}(x_0)$, welche den Zähler des Factors von h^{l+1} auf der rechten Seite von (13) ausmacht, nicht gleich Null. Für einen numerisch hinreichend kleinen Werth von h überwiegt daher das mit h^{l+1} multiplicirte Glied numerisch das Aggregat, das aus den absoluten Werthen der übrigen mit den höheren Potenzen von h multiplicirten Glieder der rechten Seite von (13) und aus dem absoluten Werthe der mit h^{m+1} multiplicirten rechten Seite von (12) besteht. Wie leicht einzusehen, ist ferner die rechte Seite von (13) numerisch grösser als der Ausdruck, welcher entsteht, indem der absolute Werth des ersten Gliedes positiv genommen, das Aggregat der absoluten Werthe der übrigen Glieder negativ hinzugefügt wird.

Da nun der so eben bezeichnete Ausdruck unter der angegebenen Bedingung grösser bleibt als der absolute Werth der rechten Seite von (12), so muss der absolute Werth der Differenz $\mathfrak{y} - y$ stets grösser sein als der absolute Werth der Differenz $\eta - y$; und damit ist die ausgesprochene geometrische Behauptung begründet. Man kann dieselbe auch in die Worte kleiden, dass, wenn eine Curve mit einer gegebenen Curve eine Berührung von einer gewissen Ordnung hat, es unmöglich ist, in dem Berührungspunkte zwischen die beiden Curven eine dritte Curve zu legen, deren Berührung mit der ersten Curve von niedrigerer Ordnung ist als diejenige zwischen der ersten und zweiten Curve.

Auf die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen gründet sich die für den Fortschritt der gesammten Geometrie massgebende Untersuchung der Berührung einer ebenen Curve und eines Kreises. Nach § 2 ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x = a$, $y = b$ hat und dessen Radius gleich ϱ ist, in Bezug auf einen Punkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ diese

$$(14)\qquad (\mathfrak{x} - a)^2 + (\mathfrak{y} - b)^2 = \varrho^2;$$

hieraus folgen für die Ordinate $\mathfrak{y}$ die beiden Werthe

$$(15) \qquad \mathfrak{y} = b + \varepsilon\left(\varrho^2 - (\mathfrak{x} - a)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo ε gleich der positiven oder negativen Einheit zu nehmen ist, und der Werth der gebrochenen Potenz positiv sein soll. Für einen Kreis, welcher mit einer gegebenen Curve $y = f(x)$ in dem Punkte (x_0, y_0) eine Berührung der ersten Ordnung hat, muss die durch die rechte Seite von (15) dargestellte Function $\psi(\mathfrak{x})$ die Bedingungen $\psi(x_0) = f(x_0)$, $\psi'(x_0) = f'(x_0)$ befriedigen. Es ist aber

$$(16) \qquad \psi'(\mathfrak{x}) = \frac{-\varepsilon(\mathfrak{x} - a)}{\left(\varrho^2 - (\mathfrak{x} - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

mithin kommt

$$(17) \quad f(x_0) = b + \varepsilon\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x_0) = \frac{-\varepsilon(x_0 - a)}{\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Durch Einführung der Ordinate $y_0 = f(x_0)$ des Berührungspunktes verwandelt sich die zweite Gleichung in die folgende

$$(18) \qquad f'(x_0) = \frac{-(x_0 - a)}{y_0 - b},$$

welche ausdrückt, dass die von dem Kreismittelpunkte (a, b) nach dem Punkte (x_0, y_0) gezogene Gerade zu der berührenden Geraden der Curve senkrecht steht. Denn die trigonometrische Tangente des Winkels, den die erstere mit der Abscissenaxe macht, hat den Ausdruck $\operatorname{tg}\omega = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$, während für den Neigungswinkel α der berührenden Geraden gegen die Abscissenaxe die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ gilt; mithin bedeutet (18) dasselbe wie Gleichung

$$(18^*) \qquad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega = -1,$$

nach welcher die Differenz $\omega - \alpha$ gleich einem rechten Winkel ist.

Es bestätigt sich also, dass eine Berührung der ersten Ordnung zwischen einem Kreise und der gegebenen Curve nur verlangt, dass beide in dem Punkte (x_0, y_0) dieselbe berührende Gerade haben, oder dass der Mittelpunkt des Kreises auf derjenigen Geraden liegt, welche in dem Punkte der Curve auf der berührenden Geraden senkrecht steht und *die Normale der Curve* genannt wird.

Unter allen bezeichneten Kreisen hat aber nur einer mit der in Rede stehenden Curve *eine Berührung der zweiten Ordnung oder eine Osculation.* Die auf die Coordinaten ξ, η bezogene Gleichung desselben

$$(19)\qquad \eta = b + \varepsilon\left(\varrho^2 - (\xi - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

muss so beschaffen sein, dass die auf der rechten Seite befindliche Function $\varphi(\xi)$ ausser den Gleichungen $\varphi(x_0) = f(x_0)$ und $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$ noch die Gleichung $\varphi''(x_0) = f''(x_0)$ befriedigt. Die bezüglichen Ausdrücke sind

$$(20)\qquad \varphi'(\xi) = \frac{-\varepsilon(\xi - a)}{\left(\varrho^2 - (\xi - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \varphi''(\xi) = \frac{-\varepsilon\varrho^2}{\left(\varrho^2 - (\xi - a)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

so dass die drei Gleichungen gelten

$$(21)\qquad \begin{cases} f(x_0) = b + \varepsilon\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad f'(x_0) = \dfrac{-\varepsilon(x_0 - a)}{\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ f''(x_0) = \dfrac{-\varepsilon\varrho^2}{\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

durch welche die drei Grössen a, b, ϱ, wie sich sogleich zeigen wird, vollständig bestimmt sind. Der hiermit definirte Kreis wird *der Osculationskreis oder Krümmungskreis,* sein Radius *der Krümmungsradius,* sein Mittelpunkt *der Krümmungsmittelpunkt* genannt. Indem man die zweite Gleichung (21) quadrirt und auf beiden Seiten die Einheit addirt, ergiebt sich

$$(22)\qquad 1 + f'(x_0) f'(x_0) = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - (x_0 - a)^2}.$$

Durch Erhebung dieser positiven Grösse auf die $\frac{3}{2}$ te Potenz, die wie früher positiv verstanden wird, kommt

$$(23)\qquad \left(1 + f'(x_0) f'(x_0)\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\varrho^3}{\left(\varrho^2 - (x_0 - a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dividirt man jetzt (23) in die dritte Gleichung (21), so entsteht für *den reciproken Werth des Krümmungsradius* der Ausdruck

$$(24)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{-\varepsilon f''(x_0)}{\left(1 + f'(x_0) f'(x_0)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier bestimmt sich das Vorzeichen ε auf die folgende Weise. Als das Mass einer Länge ist ϱ und daher auch $\frac{1}{\varrho}$ nothwendig positiv. Weil nun die im Nenner der rechten Seite befindliche Potenz ebenfalls eine positive Grösse bedeutet, so muss der Zähler des Bruches auch positiv sein, folglich ist die Grösse ε dem Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten entgegengesetzt, das heisst, gleich der positiven oder negativen Einheit zu nehmen, je nachdem der zweite Differentialquotient $f''(x_0)$ negativ oder positiv ausfällt.

Nachdem der Werth ϱ gefunden ist, erhält man durch Verbindung von (22) und den ersten Gleichungen (21), indem wieder die Ordinate $y_0 = f(x_0)$ benutzt wird, eine Darstellung *der Coordinaten a und b des Krümmungsmittelpunktes* mit Hülfe der relativen Coordinaten des Punktes (x_0, y_0) in Bezug auf den Punkt (a, b)

$$(25)\quad \begin{cases} x_0 - a = \dfrac{-\varepsilon f'(x_0)}{\left(1+f'(x_0)f'(x_0)\right)^{\frac{1}{2}}}\,\varrho, \\[2ex] y_0 - b = \dfrac{\varepsilon}{\left(1+f'(x_0)f'(x_0)\right)^{\frac{1}{2}}}\,\varrho. \end{cases}$$

Hier spielt das so eben definirte Vorzeichen ε eine wesentliche Rolle. Wir haben bemerkt, dass der Mittelpunkt eines jeden die Curve in dem Punkte (x_0, y_0) berührenden Kreises und daher auch des Krümmungskreises auf der in dem Punkte (x_0, y_0) errichteten Normale der Curve liegen muss; ferner giebt die Länge ϱ die Entfernung zwischen dem letzteren Punkte und dem Krümmungsmittelpunkte an. Weil aber die Normale von dem Punkte der Curve aus nach zwei Seiten gezogen werden kann, so bedarf es einer Entscheidung darüber, auf welcher Seite der Krümmungsmittelpunkt liegen soll, und diese folgt aus dem Umstande, dass nach (25) die Ordinatendifferenz $y_0 - b$ das Vorzeichen ε hat. Bei der angenommenen Lage der Coordinatenaxen ist die Differenz $y_0 - b$ positiv oder negativ, je nachdem sich der Punkt (x_0, y_0) oberhalb oder unterhalb des Punktes (a, b) befindet. Wenn also $f''(x_0)$ negativ, mithin ε positiv ist, so liegt der Krümmungsmittelpunkt (a, b) unterhalb des Punktes (x_0, y_0) oder auf der unteren Seite der Normale, wenn dagegen

$f''(x_0)$ positiv, mithin ε negativ ist, oberhalb des Punktes (x_0, y_0) oder auf der oberen Seite der Normale. Dass sich die beiden Seiten der Normale auf diese Weise unterscheiden lassen, rührt davon her, dass stets ein endlicher Werth der Grösse $f'(x_0)$ vorausgesetzt ist, und dass in Folge dessen der Neigungswinkel, den die in dem Punkte (x_0, y_0) die Curve berührende Gerade mit der Abscissenaxe macht, nie gleich einem Rechten ist, also die construirte Normale nie der Abscissenaxe parallel, mithin bei unserer Annahme nie horizontal werden kann.

Die Bestimmung des Krümmungskreises für einen Punkt einer Curve liefert das Mittel zur Kenntniss *der Krümmung der Curve* an der betreffenden Stelle. Weil sich der Krümmungskreis der Curve näher anschliesst als irgend ein anderer berührender Kreis, so ist die concave Seite der Krümmung nach demjenigen Theile der Normale gerichtet, in dem sich der Krümmungsmittelpunkt befindet. Der reciproke Werth des Krümmungsradius bildet das Mass der Krümmung selbst, indem einem grösseren Radius eine geringere, einem kleineren eine stärkere Krümmung entspricht. Eine Ausnahme macht der Fall, in welchem für den betreffenden Punkt der Curve der nach der Abscisse genommene zweite Differentialquotient der Ordinate verschwindet. Dann wird der reciproke Werth des Krümmungsradius gleich Null, und man darf den Krümmungsradius als unendlich gross bezeichnen. Prüft man unter der in Rede stehenden Voraussetzung die Berührung zwischen der betreffenden Geraden und der Curve, so überzeugt man sich, dass sie von der zweiten Ordnung wird, während sie sonst vermöge der obigen Ausführungen nur von der ersten Ordnung ist. Es nimmt also die berührende Gerade die Stelle des Krümmungskreises ein. Indem die Function $f''(x)$, die für $x = x_0$ gleich Null wird, bei dem Durchschreiten des Werthes x_0 das Vorzeichen wechselt, geht die Lage des Krümmungsmittelpunktes oder der Sinn der Krümmung von der einen zu der anderen Seite der Curve über und die Krümmung wendet sich, weshalb der bezeichnete Punkt der Curve *ein Wendepunkt* genannt wird.

Als Beispiele für die Bestimmung des Krümmungsradius mögen die Functionen des zweiten und dritten Grades genommen werden, die in (6) und (13) des § 36 betrachtet sind und deren erstere die Gleichung einer Parabel liefert. Für die erstgenannte hat man

$$(26)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \\ f'(x) = 2a_0 x + a_1 \\ f''(x) = 2a_0, \end{cases}$$

mithin erhält der reciproke Krümmungsradius nach (24) den Ausdruck

$$(27)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{-2\varepsilon a_0}{(1+(2a_0x_0+a_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Vorzeichen ε ist dem Coefficienten a_0 entgegengesetzt, also für $a_0 > 0$ negativ, für $a_0 < 0$ positiv zu nehmen. Die concave Seite der Krümmung kehrt sich daher in allen Punkten bei der getroffenen Annahme für $a_0 > 0$ nach oben, für $a_0 < 0$ nach unten. Die Figur (5) des § 2 entspricht, wie in § 36 erwähnt worden, der Voraussetzung $a_0 > 0$, und würde bei der entgegenstehenden Voraussetzung von oben nach unten umzudrehen sein.

Aus den Gleichungen (13) des § 36 ergiebt sich als Ausdruck des reciproken Krümmungsradius

$$(28)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{-\varepsilon(6a_0x_0+2a_1)}{(1+(3a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier ist die concave Seite der Krümmung für den Theil der Curve, in welchem der Ausdruck $6a_0x_0+2a_1$ positiv ist, nach oben, für den Theil, in welchem der Ausdruck negativ ist, nach unten gerichtet. Zwischen den beiden Theilen der Curve liegt der Punkt, für welchen $6a_0x_0+2a_1$ gleich Null wird, der also vermöge der gegebenen Erklärung ein Wendepunkt der Curve ist.

Man übersieht jetzt mit Leichtigkeit, auf welche Weise die Beurtheilung des Maximums und Minimums der Ordinate einer Curve mit deren Krümmung zusammenhängt. Nach § 35 handelt es sich dort um solche Punkte der Curve, bei denen die berührende gerade Linie mit der Abscissenaxe parallel läuft. Sobald der zweite nach der Abscisse genommene Differentialquotient der Ordinate in dem betreffenden Punkte der Curve nicht verschwindet, ergiebt die Construction des Krümmungskreises eine bestimmte Lage für dessen Mittelpunkt; für einen negativen Werth jenes Differentialquotienten liegt bei der geltenden Voraussetzung der Mittelpunkt unterhalb des zugehörigen Punktes der Curve und bezeichnet ein Maximum, für einen positiven Werth liegt er oberhalb und bezeichnet ein Minimum der Ordinate. Wenn jedoch der in Rede stehende zweite Differentialquotient in einem Punkte der Curve gleich Null wird, ohne dass der entsprechende dritte Differentialquotient verschwindet, so hat die berührende Gerade mit der Curve eine Berührung der zweiten Ordnung; der Punkt ist ein Wendepunkt, und die Ordinate wird an der betreffenden Stelle weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum.

§ 38. Grenzwerthe von Quotienten gleichzeitig gegen die Null abnehmender Functionen.

Die Frage nach dem Verhalten des Quotienten zweier Functionen derselben Grösse, die sich in der Nähe eines gewissen Werthes ändert, hat nur dann eine eigenthümliche Bedeutung, wenn beide Functionen bei einer auf den betreffenden Werth hin gerichteten Bewegung der Variable gegen die Null convergiren. Es folgt schon aus I, § 16, dass, falls unter den erwähnten Umständen die Nennerfunction gegen einen Grenzwerth convergirt, der nicht gleich Null ist, der Quotient gegen den Quotienten der beiden Grenzwerthe convergiren muss, dass ferner, falls die Nennerfunction gegen die Null und gleichzeitig die Zählerfunction gegen einen von der Null verschiedenen Grenzwerth convergirt, der Quotient seinem absoluten Werthe nach über jedes Mass hinaus wächst oder nach der in § 8 eingeführten Ausdrucksweise unendlich gross wird. Demnach bleiben nur solche Quotienten übrig, bei denen die Zähler- und Nennerfunction gleichzeitig gegen die Null convergiren. Hierher gehört auch die Aufgabe, bei einer Function $f(x)$, deren Variable x den besonderen Werth x_0 erhalten soll, den Grenzwerth des Quotienten der beiden Differenzen $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für numerisch abnehmende Werthe der im Nenner stehenden Differenz $x-x_0$ zu untersuchen, oder die Bildung des Differentialquotienten der Function $f(x)$ in Bezug auf die Variable x.

Gegenwärtig denken wir uns für ein gewisses Intervall der Variable x zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ eindeutig, endlich und stetig gegeben, und setzen voraus, dass beide für einen gewissen Werth $x=x_0$ gleich Null werden; dann kommt es darauf an, zu erkennen, ob der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ bei der Annäherung der Variable x gegen den Werth x_0 gegen einen festen Grenzwerth convergirt, und, wenn dem so ist, den Grenzwerth zu bestimmen.

Es sei wieder $x=x_0+h$, und man habe für jede der beiden Functionen, wie im vorigen §, eine nach den Potenzen des Increments h fortschreitende Entwickelung

$$(1)\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\ldots+\frac{f^{(p)}(x_0)}{2.3\ldots p}h^p+\frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta h)}{2.3\ldots(p+1)}h^{p+1},$$

$$(2)\quad g(x)=g(x_0)+g'(x_0)h+\frac{g''(x_0)}{2}h^2+\ldots+\frac{g^{(q)}(x_0)}{2.3\ldots q}h^q+\frac{g^{(q+1)}(x_0+\lambda h)}{2.3\ldots(q+1)}h^{q+1}.$$

Nach der gemachten Annahme ist $f(x_0)=g(x_0)=0$; die Zahl p wird so gewählt, dass, wenn die auf einander folgenden Differentialquotienten $f'(x_0)$, $f''(x_0),\ldots$ vom ersten ab ebenfalls verschwinden, der $(p+1)$te Differentialquotient $f^{(p+1)}(x_0)$ der erste ist, der nicht verschwindet, desgleichen die Zahl q in der Weise, dass, wenn die auf einander folgenden Differentialquotienten $g'(x_0)$, $g''(x_0),\ldots$ verschwinden, der $(q+1)$te Differentialquotient $g^{(q+1)}(x_0)$ der erste ist, der nicht verschwindet. Mithin wird $f(x)$ durch den Restausdruck in (1), $g(x)$ durch den Restausdruck in (2) dargestellt, und es entsteht für den zu untersuchenden Quotienten der Ausdruck

$$(3)\qquad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(q+1)!}{(p+1)!}\,\frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta h)}{g^{(q+1)}(x_0+\lambda h)}h^{p-q}.$$

In Folge der gemachten Annahmen convergirt der Factor $\frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta h)}{g^{(q+1)}(x_0+\lambda h)}$ bei abnehmendem h gegen den Grenzwerth $\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{g^{(q+1)}(x_0)}$, und da der numerische Factor $\frac{(q+1)!}{(p+1)!}$, der für $p=q$ gleich der Einheit wird, von h unabhängig ist, so richtet sich das Verhalten des Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ nach der Beschaffenheit der Potenz h^{p-q}. Wenn $p > q$ und daher der Exponent positiv ist, nähert sich die zugehörige Potenz der Null; für $p = q$ hat sie den Werth der Einheit; wenn $p < q$ und daher der Exponent negativ ist, so wächst die betreffende Potenz numerisch über jedes Mass hinaus. Hieraus geht das Resultat hervor, dass der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ bei einer Annäherung der Variable x an den Werth x_0 gegen die Null, oder gegen den von Null verschiedenen Grenzwerth $\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{g^{(q+1)}(x_0)}$ convergirt, oder über jedes Mass hinaus wächst, je nachdem der erste Differentialquotient von $f(x)$, der für $x = x_0$ nicht verschwindet, von einer höheren, oder von der gleichen, oder von einer niedrigeren Ordnung als der erste Differentialquotient von $g(x)$ ist, der für $x = x_0$ nicht verschwindet.

Beispiel. Es soll der Grenzwerth des mit den Constanten a und b gebildeten Quotienten

$$\frac{\operatorname{tg}(ax) - ax}{\operatorname{tg}(bx) - bx}$$

bei der Annäherung von x gegen die Null bestimmt werden.

Aus den Gleichungen

$$f(x) = \operatorname{tg}(ax) - ax, \quad g(x) = \operatorname{tg}(bx) - bx$$

folgt durch Differentiation

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2(ax)} - a, \qquad g'(x) = \frac{b}{\cos^2(bx)} - b,$$

$$f''(x) = \frac{2a^2 \sin(ax)}{\cos^3(ax)}, \qquad g''(x) = \frac{2b^2 \sin bx}{\cos^3(bx)},$$

$$f'''(x) = \frac{2a^3(3 - 2\cos^2(ax))}{\cos^4(ax)}, \quad g'''(x) = \frac{2b^3(3 - 2\cos^2(bx))}{\cos^4(bx)}.$$

Für $x = 0$ verschwinden $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, während $f'''(x)$ den Werth $2a^3$, $g'''(x)$ den Werth $2b^3$ annimmt. Der gegebene Quotient convergirt daher gegen den Grenzwerth $\frac{a^3}{b^3}$.

Die im gegenwärtigen § behandelten Aufgaben pflegen in den früheren Schriften so ausgesprochen zu werden, dass der wahre Werth eines Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ zu ermitteln sei, der für einen Werth $x = x_0$ in der Gestalt von *Null dividirt durch Null* erscheint. Diese Benennung kann zu einem Zweifel Anlass geben, ob es nothwendig sei, ausdrücklich zu fordern, dass bei der Anwendung der Division der jedesmalige Divisor nicht gleich Null sei, wie in I, § 21 geschehen ist Sobald man aber auf die in I, § 16 angestellte Erörterung zurückgeht, durch welche die Division von Grenzwerthen und damit die Division von bestimmten Werthen überhaupt begründet wird, so überzeugt man sich, dass daselbst ein Divisor, dessen Grenzwerth gleich Null ist, ausgeschlossen werden muss. Es sind an jener Stelle zwei Reihen von Brüchen gegeben

$$(3) \qquad \gamma', \gamma'', \ldots \text{ und } \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$$

bei deren jeder die auf einander folgenden Brüche nach der in I, § 15 aufgestellten Definition sich einem bestimmten Grenzwerthe nähern. Ein Individuum der einen und ein Individuum der anderen Reihe werden successive durch die fundamentale Rechnungsoperation der Division verbunden, wodurch die Reihe der Quotienten

$$(4) \qquad \frac{\gamma'}{\varepsilon'}, \frac{\gamma''}{\varepsilon''}, \ldots$$

entsteht. Von diesen Quotienten wird gezeigt, dass sie sich unter der Einschränkung, dass die Brüche $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ numerisch nicht unter einen festen Zahlenwerth herabgehen, wieder einem bestimmten Grenzwerthe nähern; dagegen bleibt der Fall ausgeschlossen, dass die Brüche $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ numerisch beliebig klein werden oder gegen Null als Grenzwerth convergiren. Um den Unterschied deutlich zu machen, der zwischen dem so eben beschriebenen und dem zum Grenzwerthe eines Bruches $\frac{f(x)}{g(x)}$ führenden Process obwaltet, stellen wir der Reihe (4) die Werthe gegenüber, welche der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ erhält, indem statt x eine Reihe von Grössen $x_0 + h', x_0 + h'', \ldots$ substituirt wird, in denen die Incremente $h', h'', \ldots$ auf irgend eine Weise numerisch abnehmen, nämlich

$$(5) \qquad \frac{f(x_0 + h')}{g(x_0 + h')}, \frac{f(x_0 + h'')}{g(x_0 + h'')}, \ldots$$

Weil der Zähler und Nenner Functionen derselben Variable sind, so gehört hier zu jedem der Werthe h', h''..., ein bestimmtes Paar von Werthen der beiden Functionen. In der Reihe der Quotienten (4) ist jedoch die Beziehung eines Individuums der einen Reihe von Brüchen γ', γ'',... auf ein Individuum der andern Reihe ε', ε'',.. nach der Natur der Sache nicht strenge vorgeschrieben; denn die hier anzustellenden Betrachtungen gelten auch dann noch, wenn man aus den beiden Reihen je zwei Individuen zusammenfasst, die hinreichend weit vorgerückt sind, ohne genau gleich weit vorgerückt zu sein. Ich habe diesen Umstand an der erwähnten Stelle nicht hervorgehoben, weil derselbe dem Anfänger leicht als eine unnütze Subtilität erscheinen kann; dagegen ist in I, § 16 nach den Gleichungen (10) bis (13) die Bedeutung des Gleichheitszeichens so definirt, dass von einem hinreichend weit vorgerückten Bruche aus jeder der beiden Reihen die Rede ist, ohne für die combinirten Brüche die gleiche Stellenzahl zu fordern. Die Sicherheit der Rechnung mit bestimmten Grössen beruht gerade darauf, dass bei allen vier Grundoperationen aus jeder der beiden Reihen zwei hinreichend weit vorgerückte Individuen genommen werden dürfen, ohne dass die Stellenzahl gleich ist. Offenbar würde sich aber nicht nachweisen lassen, dass die Reihe der Quotienten (4) auch dann gegen einen festen Grenzwerth convergire, wenn sowohl die γ', γ'',... wie auch die ε', ε'',... numerisch ohne Ende abnähmen, und zugleich bei der Combination der einzelnen Individuen zu den Quotienten die bezeichnete Willkür stattfände. Bei der Rechnung mit Grenzwerthen, wie sie von den *Griechen* ausgebildet ist, darf man statt jedes Grenzwerthes ein in gewissem Umfange beliebig gewähltes Individuum der zugehörigen Reihe von Brüchen setzen, und deshalb ist der Grenzwerth einer Reihe von Brüchen, die numerisch ohne Ende abnehmen, nicht als Divisor anwendbar. Eine Reihe von Quotienten, bei denen zu jedem Nenner ein bestimmter Zähler vorgeschrieben ist, kann aber gegen einen bestimmten Grenzwerth convergiren, indem die Zähler mit den Nennern zugleich numerisch abnehmen. Mit diesem Process fängt die Infinitesimalrechnung an.

§ 39. Uebergang von Differenzenquotienten zu Differentialquotienten gleich hoher Ordnung. Umformung der Interpolationsformel von Lagrange in eine von Newton herrührende Gestalt.

In § 16 sind die von einer Function genommenen Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen so definirt, dass der von dem Differentialquotienten einer gewissen Ordnung gebildete Differentialquotient den Differentialquotienten der nächst höheren Ordnung ergiebt. Jeder erste Differentialquotient entsteht aus dem zugeordneten ersten Differenzenquotienten durch einen Uebergang zu einem Grenzwerthe oder, wie man auch sagt, durch einen Grenzprocess. Mithin schliesst die gegebene Definition eines Differentialquotienten der $p$ten Ordnung die successive Ausführung von p Grenzprocessen in sich. Man kann indessen den $p$ten Differentialquotienten einer Function auch aus dem zugeordneten $p$ten Differenzenquotienten ableiten, wozu nur ein einziger Grenzprocess erforderlich ist. Der Ausdruck des mit der constanten Differenz $\Delta x = h$ gebildeten $p$ten Differenzenquotienten einer Function $f(x)$ ist in (12) des § 15 angegeben; jetzt handelt es sich darum zu zeigen, dass derselbe für eine numerisch gegen die Null abnehmende Grösse h gegen den $p$ten Differentialquotienten der Function $f(x)$ convergirt.

Bei der Entwickelung einer Function nach dem *Taylor*'schen Satze, welche zu diesem Zwecke benutzt werden wird, sind die auf einander folgenden Potenzen des Increments der Variable mit Coefficienten multiplicirt, die erhalten werden, indem man die betreffenden Differentialquotienten durch die gleichnamigen Zahlenfacultäten dividirt, nämlich

$$(1)\qquad \frac{df(x)}{dx},\ \frac{1}{2!}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ \ldots\ \frac{1}{p!}\,\frac{d^p f(x)}{dx^p}.$$

Denselben entsprechen die mit den erwähnten Differenzenquotienten zu bildenden Ausdrücke

$$(2)\qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},\ \frac{\Delta\Delta f(x)}{2!\,(\Delta x)^2},\ \ldots\ \frac{\Delta^p f(x)}{p!\,(\Delta x)^p}.$$

Statt dieser wollen wir Ausdrücke betrachten, die aus einer beliebigen Reihe von Werthen der Variable

$$(3) \qquad x,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$$

erhalten werden und durch die Annahme einer constanten Differenz $\Delta x = h$ in (2) übergehen.

Nach den in § 15 eingeführten mit der vorstehenden Reihe (3) correspondirenden Bezeichnungen hat man

$$(4) \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},\quad \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Wird nun die entsprechende Differenz dês Ausdrucks $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ durch die Grösse $x_2 - x$ dividirt, so kommt nach einer Reduction

$$(5) \qquad \frac{\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}{x_2 - x}$$

$$= \frac{f(x_2)}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Wenn man die Differenz dieses Ausdrucks bildet und durch die Grösse $x_3 - x$ dividirt, und dasselbe Verfahren wiederholt, so entsteht nach $(p-1)$ Anwendungen der folgende Ausdruck, bei dem die Reihenfolge der Zeiger umgekehrt geschrieben ist

$$(6) \qquad \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{p-1})}$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_{p-1})} + \ldots + \frac{f(x_{p-1})}{(x_{p-1} - x)(x_{p-1} - x_1)\ldots(x_{p-1} - x_{p-2})}.$$

Die allgemeine Richtigkeit der gegebenen Darstellung folgt aus der leicht zu beweisenden Thatsache, dass, wenn die Differenz des Ausdrucks (6) durch die Grösse $x_p - x$ dividirt wird, der folgende Ausdruck entsteht, der dasselbe Bildungsgesetz hat,

$$(7) \qquad \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p)}$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_p)} + \ldots + \frac{f(x_p)}{(x_p - x)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})}.$$

Dieser Ausdruck muss sich, sobald die Differenzen $x_1 - x$, $x_2 - x_1, \ldots$ gleich derselben Grösse h gesetzt werden, in den durch $p!$ dividirten in (12) des § 15 dargestellten $p$ten Differenzenquotienten verwandeln, weil die nach einander erfolgenden Divisionen durch die Grössen $x_1 - x$, $x_2 - x$, $x_3 - x, \ldots x_p - x$

alsdann eben so viel bedeuten wie die successiven Divisionen durch die Grössen h, $2h$, $3h, \ldots ph$. Auch sieht man sofort ein, dass unter der betreffenden Annahme die Nenner, mit denen in (7) die Functionswerthe $f(x)$, $f(x_1), \ldots f(x_p)$ behaftet sind, respective die folgenden Werthe erhalten

$$(8) \qquad (-1)(-2)..(-p)h^p,\ (1)(-1)(-2)..(-p+1)h^p, \ldots$$
$$p(p-1)(p-2)\ldots 1 h^p,$$

woraus die behauptete Uebereinstimmung durch Vergleichung mit dem Bildungsgesetz der Binomialcoefficienten ebenfalls hervorgeht.

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$(9) \qquad x = x_0 + h_0, \quad x_1 = x_0 + h_1, \ldots x_p = x_0 + h_p$$

verwandelt sich (7) in den Ausdruck

$$(10) \quad \frac{f(x_0+h_0)}{(h_0-h_1)(h_0-h_2)..(h_0-h_p)} + \frac{f(x_0+h_1)}{(h_1-h_0)(h_1-h_2)..(h_1-h_p)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f(x_0+h_p)}{(h_p-h_0)(h_p-h_1)..(h_p-h_{p-1})}.$$

Wir suchen jetzt den Grenzwerth von (10) für abnehmende Grössen $h_0, h_1, \ldots h_p$ und entwickeln dazu die Zähler nach dem *Taylor*'schen Satze:

$$(11) \quad f(x_0+h_\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)h_\alpha + \frac{f''(x_0)}{2!} h_\alpha^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} h_\alpha^p + \frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta_\alpha h_\alpha)}{(p+1)!} h_\alpha^{p+1};$$

daselbst bedeutet α nach einander jede der Zahlen $0, 1, 2, ..p$, und θ_α einen positiven echten Bruch. Die Ausführung der erforderlichen Additionen gelingt mit Hülfe eines algebraischen Satzes, dessen Quelle sich in I, § 95 befindet. Dort ist die Zerlegung eines rationalen echten Bruches mit einer Variable in Partialbrüche für den Fall auseinandergesetzt, dass die Nennerfunction nur ungleiche Factoren des ersten Grades enthält. Mit den $p+1$ von einander verschiedenen Grössen $h_0, h_1, ..h_p$ werde die Function des $(p+1)$ ten Grades

$$(12) \qquad N(z) = (z-h_0)(z-h_1)\ldots(z-h_p)$$

gebildet, $M(z)$ bezeichne eine beliebige rationale ganze Function des p ten oder eines niedrigeren Grades; dann gilt die Gleichung

(13) $$\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{M(h_0)}{N'(h_0)}\frac{1}{z-h_0}+\frac{M(h_1)}{N'(h_1)}\frac{1}{z-h_1}+\ldots+\frac{M(h_p)}{N'(h_p)}\frac{1}{z-h_p},$$

wo die Werthe des Differentialquotienten $N'(z)$ die Bedeutung

(14) $$N'(h_0)=(h_0-h_1)(h_0-h_2)\ldots(h_0-h_p),$$
$$N'(h_1)=(h_1-h_0)(h_1-h_2)\ldots(h_1-h_p)$$

u. s. f. haben. Für die ganze Function $M(z)$ ergiebt sich daraus die nach I, § 96 mit *der Interpolationsformel von Lagrange* zusammenfallende Darstellung

(15) $$M(z)=\frac{M(h_0)}{N'(h_0)}\frac{N(z)}{z-h_0}+\frac{M(h_1)}{N'(h_1)}\frac{N(z)}{z-h_1}+\ldots+\frac{M(h_p)}{N'(h_p)}\frac{N(z)}{z-h_p}.$$

Hier müssen nach I, § 44 die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von z auf beiden Seiten einander gleich sein. Weil nun die sämmtlichen Ausdrücke $\frac{N(z)}{z-h_0}, \frac{N(z)}{z-h_1}, \ldots$ aus (12) durch Weglassung von einem der Factoren ersten Grades entstehen, so ist jeder einzelne gleich einer ganzen Function des p ten Grades, in welcher z^p mit der Einheit multiplicirt ist; man erhält daher den Coefficienten der Potenz z^p auf der rechten Seite von (15), in dem man jeden der bezüglichen Ausdrücke durch die Einheit ersetzt. So entsteht der folgende Satz:

Wenn $N(z)=(z-h_0)(z-h_1)\ldots(z-h_p)$ ist, wo die Grössen $h_0, h_1, \ldots h_p$ sämmtlich von einander verschieden sind, und wenn $M(z)$ eine rationale ganze Function von z bedeutet, die höchstens vom p ten Grade und bei der $\mathfrak{M}$ den Coefficienten von z^p ausdrückt, so gilt die Gleichung

(16) $$\mathfrak{M}=\frac{M(h_0)}{N'(h_0)}+\frac{M(h_1)}{N'(h_1)}+\ldots+\frac{M(h_p)}{N'(h_p)}.$$

Für jede Function $M(z)$ von niedrigerem als dem p ten Grade ist der Coefficient $\mathfrak{M}$ gleich Null, folglich die rechte Seite von (16) *ebenfalls gleich Null.*

Die Summen, welche bei der Substitution der $(p+1)$ Ausdrücke (11) in (10) respective als Factoren von $f(x_0), f'(x_0), \ldots \frac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}, \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$ auftreten, werden durch die Gleichung

(16) bestimmt, indem man für $M(z)$ successive die ganzen positiven Potenzen der Variable z setzt

$$(17)\qquad z^0 = 1,\ z^1,\ z^2, \ldots z^{p-1},\ z^p.$$

Insofern die sämmtlichen Potenzen mit Ausnahme der p ten von niedrigerem als dem p ten Grade sind, bekommen die zugehörigen Summen sämmtlich verschwindende Werthe; dagegen nimmt die zu z^p gehörende Summe den Werth der Einheit an. Man findet somit die Resultate

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{N'(h_0)} + \dfrac{1}{N'(h_1)} + \ldots + \dfrac{1}{N'(h_p)} = 0 \\[2ex] \dfrac{h_0}{N'(h_0)} + \dfrac{h_1}{N'(h_1)} + \ldots + \dfrac{h_p}{N'(h_p)} = 0 \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\[2ex] \dfrac{h_0^{p-1}}{N'(h_0)} + \dfrac{h_1^{p-1}}{N'(h_1)} + \ldots + \dfrac{h_p^{p-1}}{N'(h_p)} = 0 \\[2ex] \dfrac{h_0^p}{N'(h_0)} + \dfrac{h_1^p}{N'(h_1)} + \ldots + \dfrac{h_p^p}{N'(h_p)} = 1. \end{cases}$$

Demnach fallen in dem zu bildenden Aggregat (10) die Factoren von $f(x_0), f'(x_0), \ldots$ bis $\dfrac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}$ fort, der Factor von $\dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$ wird gleich der Einheit, und es ergiebt sich

$$(19)\qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \frac{f(x_0+h_\alpha)}{N'(h_\alpha)} = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta_\alpha h_\alpha)}{(p+1)!} \frac{h_\alpha^{p+1}}{N'(h_\alpha)}.$$

Wenn man jetzt die Grössen $h_0, h_1, \ldots h_p$ numerisch in der Weise abnehmen lässt, dass sie sämmtlich differiren, und dass die aus ihnen gebildeten $p+1$ Brüche $\dfrac{h_\alpha^p}{N'(h_\alpha)}$ numerisch unter einem festen Werthe enthalten bleiben, so wird jeder der $p+1$ Brüche $\dfrac{f^{(p+1)}(x_0+\theta_\alpha h_\alpha)}{(p+1)!}\dfrac{h_\alpha^{p+1}}{N'(h_\alpha)}$ durch den hinzutretenden Factor $\dfrac{f^{(p+1)}(x_0+\theta_\alpha h_\alpha)}{(p+1)!} h_\alpha$, dessen erster Theil endlich ist und dessen zweiter Theil abnimmt, beliebig klein. Es nähert sich deshalb die auf der rechten Seite von (19) vorkommende Summe der Null, und die rechte Seite convergirt gegen den Grenzwerth $\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$, wodurch die gewünschte Gleichung entsteht

$$(20)\qquad \lim . \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \frac{f(x_0+h_\alpha)}{N'(h_\alpha)} = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}.$$

Die für die gleichzeitige Abnahme der Grössen $h_0, h_1, \ldots h_p$ aufgestellten Bedingungen gestatten, dass man h_0 gleich Null nimmt; dann wird vermöge der Gleichungen (9) aus (20) die für abnehmende Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0, \ldots$ geltende Gleichung

$$(20^*)\quad \lim . \left(\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_p)} + \ldots + \frac{f(x_p)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})} \right) = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}.$$

Wenn man ferner $h_0 = 0$, ausserdem aber $h_1, h_2, \ldots h_p$ respective gleich den durch den Zeiger angegebenen Vielfachen derselben Grösse h setzt und diese abnehmen lässt, gelangt man zu dem Differenzenquotienten der p ten Ordnung, der für eine constante Differenz h gebildet ist, und erhält statt (20) die zu Anfang erwähnte Gleichung

$$(21)\qquad \lim . \left(\frac{f(x_0+ph) - pf(x_0+(p-1)h) + \ldots + (-1)^p f(x_0)}{p!\, h^p} \right) = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}.$$

Der auf der linken Seite von (19) und (20) auftretende Ausdruck zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, ungeändert zu bleiben, wenn man die $p+1$ Werthe $h_0, h_1, \ldots h_p$ auf alle möglichen Arten unter einander vertauscht, oder, mit Anwendung der I, § 46 gebrauchten Bezeichnung, in Bezug auf diese $p+1$ Werthe symmetrisch zu sein.

Man gelangt zu Ausdrücken, die dasselbe Bildungsgesetz wie (10) haben, sobald man sich die Aufgabe stellt, die in (15) enthaltene Interpolationsformel von *Lagrange* in eine Gestalt zu bringen, die im 5ten Lemma des dritten Buches der *Principien Newtons* angegeben ist. Es sei $M(z)$ eine rationale ganze

Function des $p$ten Grades, deren Werthe für die $p+1$ von einander verschiedenen Werthe $h_0, h_1, \ldots h_p$ der Variable z gegeben sind, und welche dadurch vollständig bestimmt ist. In gleicher Weise sind diejenigen $p+1$ Constanten $M_0, M_1, \ldots M_p$ eindeutig bestimmt, mit deren Hülfe $M(z)$ die folgende Gestalt annimmt

$$(22)\quad \begin{aligned} M(z) = M_0 + M_1(z-h_0) + M_2(z-h_0)(z-h_1) + \ldots \\ \ldots + M_p(z-h_0)(z-h_1)\ldots(z-h_{p-1}). \end{aligned}$$

Wenn man nun die Constanten $M_0, M_1, \ldots M_p$ durch die Functionswerthe $M(h_0), M(h_1), \ldots M(h_p)$ ausdrückt, so liefert die Gleichung (22) eine Darstellung von $M(z)$, bei welcher nur die gegebenen $(p+1)$ Functionswerthe angewendet werden. Hiermit entsteht die erwähnte *Newton*'sche Interpolationsformel, welche jetzt abgeleitet werden wird.

Indem man in (22) für z nach der Reihe die Werthe $h_0, h_1, \ldots h_p$ substituirt, ergeben sich die Gleichungen

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & M(h_0) = M_0 \\ & M(h_1) = M_0 + M_1(h_1-h_0) \\ & M(h_2) = M_0 + M_1(h_2-h_0) + M_2(h_2-h_0)(h_2-h_1) \\ & \quad \vdots \\ & M(h_p) = M_0 + M_1(h_p-h_0) + M_2(h_p-h_0)(h_p-h_1) + \ldots \\ & \qquad\qquad \ldots + M_p(h_p-h_0)\ldots(h_p-h_{p-1}). \end{aligned} \right.$$

Die erste derselben zeigt, dass $M_0 = M(h_0)$ ist. Man kann nun die erste Gleichung nach einander von jeder der folgenden subtrahiren und hierauf respective durch $h_1-h_0, h_2-h_0, \ldots h_p-h_0$ dividiren; dann entsteht das ähnlich gebildete System von Gleichungen

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{M(h_1)-M(h_0)}{h_1-h_0} = M_1 \\ & \frac{M(h_2)-M(h_0)}{h_2-h_0} = M_1 + M_2(h_2-h_1) \\ & \qquad \vdots \\ & \frac{M(h_p)-M(h_0)}{h_p-h_0} = M_1 + M_2(h_p-h_1) + \ldots \\ & \qquad\qquad \ldots + M_p(h_p-h_1)\ldots(h_p-h_{p-1}), \end{aligned} \right.$$

durch deren erste die Constante $M_1 = \frac{M(h_1) - M(h_0)}{h_1 - h_0}$ bestimmt wird. Auf die gleiche Weise fortfahrend erhält man nach einander die gesuchte Darstellung der sämmtlichen Constanten, und überzeugt sich durch ein häufig angewendetes Schlussverfahren, dass die folgenden Ausdrücke für jeden Werth der Zahl β zwischen 1 und p gültig sind,

$$(25)\quad \begin{cases} M_0 = M(h_0) \\ M_1 = \dfrac{M(h_0)}{h_0 - h_1} + \dfrac{M(h_1)}{h_1 - h_0} \\ M_2 = \dfrac{M(h_0)}{(h_0 - h_1)(h_0 - h_2)} + \dfrac{M(h_1)}{(h_1 - h_0)(h_1 - h_2)} + \dfrac{M(h_2)}{(h_2 - h_0)(h_2 - h_1)} \\ \vdots \\ M_\beta = \dfrac{M(h_0)}{(h_0 - h_1)(h_0 - h_2)\ldots(h_0 - h_\beta)} + \dfrac{M(h_1)}{(h_1 - h_0)\ldots(h_1 - h_\beta)} + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \dfrac{M(h_\beta)}{(h_\beta - h_0)\ldots(h_\beta - h_{\beta-1})}. \end{cases}$$

Der vorliegende Ausdruck von M_β geht in den obigen (10) über, sobald statt der Zahl β die Zahl p, und statt der Functionswerthe $M(h_0)$, $M(h_1)$, .. respective die Functionswerthe $f(x_0 + h_0)$, $f(x_0 + h_1)$, .. substituirt werden. Nach einer vorhin gemachten Bemerkung hat der zu einer beliebigen Zahl β gehörende Ausdruck M_β die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wofern man die betreffenden Grössen h_0, h_1, .. h_β auf irgend eine Weise permutirt. Hieraus folgt für die in (22) gegebene Darstellung der rationalen ganzen Function $\mathfrak{M}(z)$, dass, wenn aus der Mitte der Grössen h_0, h_1, .. h_p eine Gruppe von auf einander folgenden herausgegriffen und permutirt wird, während die Grössen der ersten und der letzten Zeiger ungeändert bleiben, etwa die Gruppe

$$(26)\qquad h_\mathfrak{g},\ h_{\mathfrak{g}+1},\ \ldots h_\mathfrak{l},$$

alsdann die Constanten M_0, M_1, .. $M_{\mathfrak{g}-1}$ ungeändert bleiben, weil sie von der Permutation nicht berührt werden, und die Constanten $M_\mathfrak{l}$, $M_{\mathfrak{l}+1}$, .. M_p sich ebenfalls nicht ändern, weil sie durch die Permutation in sich selbst übergehen. Da nun von den Factoren $(z - h_0)$, $(z - h_0)(z - h_1)$, .. genau das entsprechende gilt, jedes solche Product aber ebenso viel Factoren enthält als der Zeiger des Coefficienten Einheiten zählt, so ändert die Permutation der Grössen (26) bei jener Darstellung nur den Inbegriff derjenigen Summanden, deren Coefficienten die Zeiger $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}+1, \ldots \mathfrak{l}$ haben.

Mit Hülfe der obigen Gleichung (21) überzeugt man sich, dass bei beständiger Abnahme der Differenzen

$$h_1 - h_0,\ h_2 - h_0, \ldots h_p - h_0,$$

die Grössen M_1, $M_2, \ldots$ respective gegen die Werthe convergiren, welche die von $M(z)$ nach z genommenen durch Facultäten dividirten Differentialquotienten $M'(z)$, $M''(z), \ldots$ für $z = h_0$ haben. Bei dem bezeichneten Process gehen die Verbindungen $z - h_0$, $(z - h_0)(z - h_1), \ldots$ beziehungsweise in die auf einander folgenden Potenzen der Differenz $(z - h_0)$ über, und die Interpolationsformel (22) verwandelt sich in die Darstellung der rationalen ganzen Function $\mathfrak{M}(z)$ durch den *Taylor*'schen Satz, welche in (12*) des § 27 angeführt und daselbst besprochen ist.

§ 40. Kleine Grössen verschiedener Ordnungen.

Die Erörterungen des vorigen § lenken die Aufmerksamkeit auf den Umstand, dass die Entwickelung einer Function $f(x+h)$ nach den Potenzen des Increments h nichts anderes ist, als die ebenso geordnete Entwickelung der Differenz $f(x+h) - f(x)$,

$$(1)\quad f(x+h) - f(x)$$
$$= f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(p)}(x)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}(x+\theta h)}{(p+1)!}h^{p+1}.$$

Indem die Zahl p successive gleich $1, 2, \ldots$ gesetzt wird, lässt sich diese Entwickelung der Differenz unter Hinzufügung des zugehörigen Restes auf ein Glied, auf zwei und auf mehrere Glieder ausdehnen. Man kann nun den betreffenden Darstellungen eine andere Gestalt geben, bei welcher der Rest hinzugedacht und nicht hingeschrieben wird. Statt (1) notirt man die Gleichung

$$(2)\quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(p)}(x)}{p!}h^p,$$

und erklärt die Bedeutung des Gleichheitszeichens dahin, dass die Differenz der linken und der rechten Seite numerisch kleiner sein soll als der gröste vorkommende Werth des aus der Function $\frac{f^{(p+1)}(x+\theta h)}{(p+1)!}$ und der Potenz h^{p+1} zusammengesetzten Products. Das in Rede stehende Product ist das Mass der Abweichung zwischen den Werthen der beiden Seiten oder auch eine numerische obere Grenze des Fehlers, der begangen wird, sobald man statt der linken Seite die rechte setzt; diese ist eine algebraische rationale ganze Function des Increments h vom $p$ten Grade.

Ehe auf das Wesen der Gleichung (2) näher eingegangen wird, sei daran erinnert, dass alle Massbestimmungen von Gegenständen der Wirklichkeit zu Gleichungen führen, bei denen das dargestellte von dem darzustellenden um eine gewisse Grösse abweicht, und dass daher jede Anwendung der Rechnung auf wirkliche Gegenstände, die dem Masse unterworfen sind, den Gebrauch von Gleichungen in sich schliesst, die mit gewissen Fehlern behaftet sind. Für die Gleichung (2), die dem rein analytischen Gebiete angehört, ist characteristisch, dass ihre rechte Seite ein Aggregat von Potenzen des Increments h vom ersten bis zum $p$ten Grade ist, und der zugehörige Fehler durch die in eine feste Grösse multiplicirte $(p+1)$te Potenz von h bezeichnet wird. Es besteht aber eine in diesem Capitel vielfach benutzte Grundeigenschaft der positiven ganzen Potenzen einer veränderlichen Grösse darin, dass, wenn zwei mit nicht verschwindenden Constanten A, B multiplicirte Potenzen einer solchen Grösse Ah^{λ} und Bh^{μ} vorliegen, und wenn μ den höheren Exponenten bedeutet, man immer eine solche Grösse angeben kann, dass bei allen numerisch unter derselben befindlichen Werthen von h die Grösse Bh^{μ} numerisch um beliebig viel kleiner ausfällt als die Grösse Ah^{λ}. Sobald nun die in einer Untersuchung auftretenden von einer Variable h unabhängigen Werthe sämmtlich numerisch unter einer gewissen positiven Constante K liegen, so stellen die Producte von K in die auf einander folgenden positiven ganzen Potenzen von h

$$(3) \qquad Kh,\ Kh^2,\ Kh^3,\ \ldots$$

eine Reihe von Grössen dar, die für hinreichend kleine numerische Werthe von h in steigender Folge nach einem beliebig zu wählenden Verhältniss fortwährend abnehmen, und mit denen die in der Untersuchung vorkommenden in Bezug auf die Variable h rationalen ganzen Ausdrücke verglichen werden können. Ein beliebig gegebener Ausdruck Ah^{λ}, wo A wieder von Null verschieden ist, steht mit der aus (3) genommenen zugehörigen Grösse Kh^{λ} in dem Verhältniss $\frac{A}{K}$, mit der vorhergehenden $Kh^{\lambda-1}$ in dem Verhältniss $\frac{Ah}{K}$, mit der folgenden in dem Verhältniss $\frac{A}{Kh}$. Die Grösse Ah^{λ} hat also zu Kh^{λ} ein endliches Verhältniss, sie ist bei einem numerisch hinreichend kleinen h beliebig viel kleiner als $Kh^{\lambda-1}$ und beliebig viel grösser als $Kh^{\lambda+1}$. Mit Rücksicht hierauf ordnet man die von einer Variable h abhängenden und mit derselben zusammen abnehmenden Grössen nach deren auf einander folgenden Potenzen, und nennt Grössen, je nachdem sie zu der Grösse h selbst, zu dem Quadrat von h, zu der dritten oder irgend einer λ ten Potenz von h in einem endlichen Verhältnisse stehen, *kleine Grössen der ersten, zweiten, dritten oder λ ten Ordnung.* Ein Aggregat einer beschränkten Anzahl von Grössen, deren jede von der λ ten oder von höherer als der λ ten Ordnung ist, bildet, falls die Grössen der λ ten Ordnung sich nicht fortheben, eine Grösse der λ ten, sonst eine Grösse einer höheren Ordnung. Mit Hülfe dieser Begriffe lässt sich der Inhalt der obigen Gleichung (2) so aussprechen, dass die Differenz $f(x+h)-f(x)$ durch das auf der rechten Seite befindliche Aggregat unter Zulassung eines Fehlers ersetzt werden kann, der in Bezug auf das Increment h von der $(p+1)$ ten Ordnung ist.

Vergleicht man die Beschaffenheit des Fehlers, welcher bei der Messung eines Gegenstandes der Wirklichkeit begangen wird, mit der Beschaffenheit des in Rede stehenden Fehlers einer rein analytischen Gleichung, so muss das gröste Gewicht auf den Umstand gelegt werden, dass der Fehler einer bestimmten Messung nie unter eine gewisse gegebene Grösse herabgedrückt werden kann, dass es dagegen möglich ist, den Fehler der analytischen Gleichung numerisch *beliebig klein* zu machen. Indem man der Grösse h, nachdem derselben einmal ein gewisser Werth gegeben ist, später einen kleineren Werth beilegt und diesen Process beliebig oft wiederholt, wird erreicht, dass der bei der Gleichung (2) zugelassene Fehler für jeden einzelnen Werth von p beliebig klein ausfällt Sei als Grenze des Fehlers eine beliebig kleine Grösse ω gegeben, so muss für $p=1$ der Rest $\frac{f''(x+\theta h)}{2!}h^2$, für $p=2$ der Rest $\frac{f'''(x+\theta h)}{3!}h^3$, für ein beliebiges p der Rest $\frac{f^{(p+1)}(x+\theta h)}{(p+1)!}h^{p+1}$ numerisch kleiner als ω bleiben. Wenn nun die Ausdrücke $\frac{f''(x+\theta h)}{2!}$, $\frac{f'''(x+\theta h)}{3!}, \ldots \frac{f^{(p+1)}(x+\theta h)}{(p+1)!}$ sämmtlich numerisch kleiner als eine Grösse K sind, so wird der gestellten Forderung genügt, indem man für $p=1$ das Quadrat von h, für $p=2$ die dritte Potenz von h, für ein beliebiges p die $(p+1)$ te Potenz von h numerisch kleiner als den Werth $\frac{\omega}{K}$, oder h selbst beziehungsweise kleiner als die Grössen $\left(\frac{\omega}{K}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\omega}{K}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots \left(\frac{\omega}{K}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ wählt. Die für den absoluten Werth von h vorzuschreibende obere Grenze wird daher bei demselben Werthe von ω um so grösser, je grösser die Zahl p angenommen ist.

Paare von Grössen, deren Unterschied numerisch kleiner gemacht werden kann als ein beliebig gegebener Werth, sind zuerst in I, § 14 und den folgenden §§ betrachtet worden, wo die Rechnung mit Grenzwerthen von Folgen von Brüchen begründet ist; dort handelt es sich um den bei einer Folge von Brüchen vorhandenen Unterschied zweier Individuen, von denen das erste eine angemessen zu wählende, das andere eine beliebig weit vorzurückende Stellenzahl hat. Ferner kommt eine numerisch beliebig zu verkleinernde Differenz in I, § 105 vor; hier wird die Definition aufgestellt, dass es für die Convergenz einer unendlich ausgedehnten Summe möglich sein muss, wenn s_q das Aggregat ihrer $q+1$ ersten Glieder bedeutet, für einen beliebig kleinen Werth ω die Zahl q so gross zu wählen, dass bei jedem Werth der Zahl t die Differenz $s_{q+t} - s_q$ numerisch kleiner als ω bleibt. In beiden Fällen gehören die Grössen, deren Differenz betrachtet wird, einer unbegrenzten Folge an, und bewerkstelligt man die beständige Verringerung des numerischen Werths der Differenz, indem man die betreffenden Stellenzeiger immer weiter fortrückt. Dagegen wird der Unterschied zwischen der linken und rechten Seite der Gleichung (2) dadurch beliebig verkleinert, dass man der veränderlichen Grösse h hinreichend kleine Werthe vorschreibt. Die absolute Grösse der für h geltenden oberen Grenze bedingt aber den Umfang, innerhalb dessen die Gleichung (2) angewendet wird.

Die rechte Seite von (2) setzt sich nach der eingeführten Ausdrucksweise durch Addition von Grössen zusammen, die in Bezug auf die kleine Grösse h von der ersten bis zur p ten Ordnung gehen, während der bezügliche Fehler von einer höheren, der $(p+1)$ ten Ordnung ist. Hierfür ist die Bezeichnung im Gebrauch, *dass die auf der linken Seite befindliche Differenz $f(x+h)-f(x)$ vermittelst der rechten Seite bis zu den Grössen genau dargestellt werde, die in Bezug auf die kleine Grösse h von der p ten Ordnung sind.*

Aus Gleichungen der bezeichneten Art, die bis zu kleinen Grössen einer gewissen Ordnung genau sind, können durch geeignete Modification der Rechnungsoperationen neue Gleichungen deducirt werden, die denselben Grad von Genauigkeit besitzen. Gesetzt, man habe die in Bezug auf die kleine Grösse h bis zu der p ten Ordnung genau geltenden Gleichungen

$$(4) \qquad \varphi(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_p h^p$$
$$\chi(h) = c'_0 + c'_1 h + c'_2 h^2 + \ldots + c'_p h^p,$$

wo die Grössen $c_0, c_1, \ldots c'_0, c'_1, \ldots$ von h unabhängig sind. Die Addition, Subtraction und Multiplication von $\varphi(h)$ und $\chi(h)$ entspricht genau der Ausführung derselben Operationen für zwei convergente unendliche Summen, wie sie in I, § 109 auseinandergesetzt ist. Dass die Addition und Subtraction der einzelnen Glieder ein ebenfalls bis zu der $p$ten Ordnung genau richtiges Resultat liefert, leuchtet ein. Bei der Ausführung der Multiplication hat man die Glieder fortzulassen, die in Potenzen von h von der $p+1$ten bis zu der $2p$ten Ordnung multiplicirt sind, weil ein Aggregat einer beschränkten Anzahl Grössen von höherer als der $p$ten Ordnung als äquivalent mit einer Grösse von höherer als der $p$ten Ordnung angesehen werden muss. Die Coefficienten der Potenzen von h von der nullten bis zu der $p$ten befolgen aber das in I, § 109 unter (7) aufgestellte Bildungsgesetz

$$\begin{cases} g_0 = c_0 c'_0 \\ g_1 = c_0 c'_1 + c_1 c'_0 \\ g_2 = c_0 c'_2 + c_1 c'_1 + c_2 c'_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ g_p = c_0 c'_p + c_1 c'_{p-1} + \ldots + c_{p-1} c'_1 + c_p c'_0. \end{cases}$$

Demnach folgt aus (4) die Gleichung

$$(5) \qquad \varphi(h)\chi(h) = g_0 + g_1 h + g_2 h^2 + \ldots + g_p h^p.$$

Die Division von $\varphi(h)$ durch $\chi(h)$ erörtern wir hier nur für den im Eingange von § 38 erwähnten und dann ausgeschlossenen Fall, dass die Nennerfunction bei stets abnehmendem h gegen einen von Null verschiedenen Grenzwerth convergirt, oder dass die in (4) mit c'_0 bezeichnete Grösse nicht gleich Null ist.

Der leichteren Uebersicht halber mögen den Gleichungen (4) die Ausdrücke R_{p+1} und R'_{p+1}, welche die zulässigen Fehler darstellen, zugeschrieben werden, woraus die Gestalt hervorgeht

$$(6) \qquad \begin{aligned} \varphi(h) &= c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_p h^p + R_{p+1} \\ \chi(h) &= c'_0 + c'_1 h + c'_2 h^2 + \ldots + c'_p h^p + R'_{p+1}. \end{aligned}$$

Weil nun c'_0 als von Null verschieden vorausgesetzt ist, so kann man für h eine so kleine numerische obere Grenze festsetzen, dass der Quotient

$$(7) \qquad \frac{c'_1 h + c'_2 h^2 + \ldots + c'_p h^p + R'_{p+1}}{c'_0} = \alpha$$

numerisch kleiner als die Einheit bleibt. Alsdann liefert die nach den Potenzen von α geordnete Entwickelung des Bruches $\frac{1}{\chi(h)}$ nach I, § 98 die folgende convergente geometrische Reihe

(8) $$\frac{1}{\chi(h)} = \frac{1}{c'_0(1+\alpha)} = \frac{1}{c'_0}(1-\alpha+\alpha^2 - .. + (-1)^p \alpha^p + \ldots).$$

In Folge dessen ergiebt sich aus den streng gültigen Gleichungen (6) die ebenfalls strenge gültige Gleichung

(9) $$\frac{\varphi(h)}{\chi(h)}$$

$$= \frac{1}{c'_0}(c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_p h^p + R_{p+1})(1-\alpha+\alpha^2 - .. + (-1)^p \alpha^p + \ldots).$$

Dieselbe führt zu der gesuchten Gleichung, die bis auf Grössen der $p$ten Ordnung genau sein soll, indem man in dem zweiten Factor der rechten Seite den Rest R_{p+1}, in dem Ausdruck (7) von α den Rest R'_{p+1} fortlässt, ferner die in dem dritten Factor der rechten Seite auftretende geometrische Reihe mit dem Gliede $(-1)^p \alpha^p$ abbricht, und von dem resultirenden Gesammtausdruck das Aggregat S_p aller Glieder, die in Potenzen der Grösse h von höherer als der $p$ten Ordnung multiplicirt sind, subtrahirt. Mit Hülfe der Bezeichnung

(10) $$\frac{c'_1 h + c'_2 h^2 + \ldots + c'_p h^p}{c'_0} = \beta$$

kommt demnach die verlangte Gleichung

(11) $$\frac{\varphi(h)}{\chi(h)} = \frac{1}{c'_0}(c_0 + c_1 h + \ldots + c_p h^p)(1-\beta+\beta^2 - \ldots + (-1)^p \beta^p) - S_p,$$

durch welche die Division von $\varphi(h)$ durch $\chi(h)$ bis zu Grössen der $p$ten Ordnung genau ausgeführt wird.

§ 41. Differentiale verschiedener Ordnungen. Unendlich kleine Grössen.

Nimmt man in der Gleichung (2) des vorigen § die Zahl p gleich der Einheit, so ergiebt sich die Gleichung

(1) $$f(x+h) - f(x) = f'(x)\, h,$$

welche sagt, dass die mit dem Increment h gebildete Differenz $f(x+h) - f(x)$ bis auf die Ordnung der kleinen Grösse h genau durch das Product von $f'(x)$ in das Increment h ausgedrückt wird. Indem das Increment h als die Differenz der Variable x mit $\varDelta x$, die zugehörige Differenz der Function $f(x)$ mit $\varDelta f(x)$ bezeichnet wird, geht die Gleichung (3) in die Gestalt

$$\varDelta f(x) = f'(x) \varDelta x \tag{2}$$

über.

Diese Gleichung führt zu dem Ursprung der Differentialrechnung zurück. Wenn bei einer Function $f(x)$ die Differenz der Variable x als eine kleine Grösse festgesetzt und die zugehörige Differenz der Function bis auf die Ordnung dieser kleinen Grösse genau dargestellt wird, so heisst nach der von *Leibnitz* gegründeten Bezeichnung die Differenz der Variable *das Differential* dx, die zugehörige Differenz der Function *das Differential* $df(x)$. *Auf diese Weise wird die Gleichung* (2) *zu der Gleichung*

$$df(x) = f'(x)\, dx. \tag{3}$$

In der erwähnten Abhandlung *nova methodus* etc. hat *Leibnitz* die Regeln auseinandergesetzt, nach welchen die Differentiale gegebener Functionen zu bilden sind, oder, wie er selbst sagt, *den Algorithmus der Differentialrechnung* mitgetheilt. Seine Formeln haben denselben Inhalt wie die in § 6 und f. f. entwickelten Formeln für die Bildung von Differentialquotienten, erscheinen aber *als Regeln für den Gebrauch des Differentialzeichens d*, so dass den Formeln (16) bis (18) in § 6, und (8) in § 7 respective die folgenden entsprechen, bei denen ein Fehler von höherer Ordnung als dx erlaubt ist,

$$d\,(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x) \tag{4}$$

$$d\,(f(x) - g(x)) = df(x) - dg(x) \tag{5}$$

$$d\,(f(x)\, g(x)) = df(x)\, g\, x + f(x)\, dg(x) \tag{6}$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x)\, g(x) - f(x)\, dg(x)}{g(x)\, g(x)}. \tag{7}$$

Von den Beweisen der Formeln bemerkt *Leibnitz*, sie würden einem, der in diesen Dingen geübt sei, leicht werden, sobald er nur das eine bedenkt, was bisher noch nicht hinreichend erwogen sei, dass die dx, dy, dv, dw, dz, als proportional mit den augenblicklichen Differenzen, das heisst den Incrementen oder Decrementen der x, y, v, w, z, nach ihrer Folge genommen, gelten können.

Um von einer zwischen den Differentialen von Functionen aufgestellten Gleichung zu der für die correspondirenden Differentialquotienten geltenden überzugehen, hat man darauf zu achten, dass die erstere nur bis auf die Grössen von der Ordnung dx genau gilt, und dass bei denselben ein Fehler gestattet wird, der in Bezug auf dx von höherer als der ersten Ordnung ist; eine solche Grösse hat die Eigenschaft durch dx dividirt, gleich einer mit dx zusammen abnehmenden Grösse zu bleiben. Wenn daher beide Seiten jener Gleichung durch dx dividirt werden, so behält ihr Unterschied noch die Eigenschaft, für einen beliebig kleinen Werth von dx selbst numerisch beliebig klein zu werden; deshalb convergiren beide Seiten der erhaltenen Gleichung gegen denselben Grenzwerth, und die zwischen den Differentialen gegebene Gleichung erzeugt eine zwischen den Differentialquotienten bestehende Gleichung, die in aller Strenge richtig ist.

Man sieht jetzt, in welchem Sinne das Zeichen des Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ den Quotienten der Division des Differentials $df(x)$ durch das Differential dx andeutet. Ich habe vorgezogen, die Definition, welche den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ als Grenzwerth eines Verhältnisses erklärt, an die Spitze zu stellen, weil sie mir leichter fasslich scheint. Es können aber die Grundregeln der Differentialrechnung mit ganz derselben Schärfe abgeleitet werden, indem man von dem Begriffe des Differentials ausgeht und die vorhin entwickelte Rechnung mit kleinen Grössen einer vorgeschriebenen Ordnung anwendet. Der Leser, welcher diesen Weg einschlägt, wird im Stande sein, die bisher mitgetheilten Deductionen in der entsprechenden neuen Form zu wiederholen. Für jeden, der Differentialrechnung treibt, ist es überhaupt nothwendig, sich eben sowohl in dem Gebrauch der Differentiale wie in demjenigen der Differentialquotienten zu üben.

Dadurch, dass von dem Differential einer Function abermals das Differential genommen und dieselbe Operation beliebig oft angewendet wird, erhält *Leibnitz* beziehungsweise *das Differential der zweiten, der dritten und einer beliebig hohen Ordnung.* Wie aber bei der Wiederholung zu verfahren sei, bedarf einer Erläuterung. Wir haben früher gesehen, dass sich die Bildung der Differenzenquotienten wesentlich danach richtet, ob die erforderlichen Differenzen der unabhängigen Variable constant angenommen werden oder nicht. Bei der Darstellung der successiven Differentiale einer Function verhält es sich ebenso. Nimmt man zuerst das Differential dx als constant an, wodurch die successive anzuwendenden Werthe der Variable x diese werden

$$x,\ x+dx,\ x+2dx, \ldots$$

so kann man aus der obigen Gleichung (2), ähnlich wie im vorigen § geschehen ist, die Gleichungen ableiten

$$d^2 f(x) = f''(x)\, dx^2, \tag{8}$$

$$d^3 f(x) = f'''(x)\, dx^3, \tag{9}$$

$$d^p f(x) = f^{(p)}(x)\, dx^p, \tag{10}$$

indem bei der ersten, zweiten, letzten Gleichung respective ein Fehler von höherer als der zweiten, dritten, $p$ten Ordnung zugelassen wird. Mithin erhält man, nachdem (8) durch dx^2, (9) durch dx^3, (10) durch dx^p dividirt ist, rechts und links vom Gleichheitszeichen zusammengehörige Ausdrücke, deren Unterschied für ein beliebig kleines dx beliebig klein wird; diese liefern die Gleichung (21) des § 39. Dies motivirt die auf *Leibnitz* zurückgehende Notation der auf einander folgenden Differentialquotienten einer Function.

In den Gleichungen (8) bis (10) zeigt sich, dass, nachdem das Differential dx constant vorausgesetzt ist, das zweite Differential der Function $f(x)$ in Bezug auf dx eine Grösse der zweiten, das $p$te Differential von $f(x)$ eine Grösse der $p$ten Ordnung wird. Um zu definiren, was unter den Differentialen der verschiedenen Ordnungen in dem Falle verstanden werden soll, dass das Differential dx nicht constant ist, beginnen wir damit, die Werthe der Variable x aufzustellen, welche gegebenen Differenzen der verschiedenen Ordnungen Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x, \ldots$ entsprechen. Aus den in (5*), (6*) und (7*) des § 15 gegebenen Gleichungen

$$\Delta x = x_1 - x,\quad \Delta^2 x = x_2 - 2x_1 + x, \tag{11}$$

$$\Delta^p x = x_p - \frac{p}{1} x_{p-1} + \frac{p(n-1)}{1.2} x_{p-2} - \ldots + (-1)^p x,$$

folgen nach mehrfach benutzten Eigenschaften der Binomialcoefficienten die Bestimmungen

$$(11^*) \qquad x_1 = x + \Delta x,\ x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \ldots$$

$$x_p = x + \frac{p}{1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 x + \ldots + \Delta^p x.$$

Nun setzt man für die zugehörigen auf einander folgenden Differenzen der Function $f(x)$ voraus, dass, wofern in Bezug auf die kleine Grösse Δx die Differenz $\Delta^p x$ für jede Zahl p als eine kleine Grösse der $p$ten Ordnung angenommen wird, die Differenz $\Delta^p f(x)$ ebenfalls mit Zulassung eines Fehlers von höherer als der $p$ten Ordnung gleich einer Grösse der $p$ten Ordnung ist.

Dem entsprechend werden die auf einander folgenden Differenzen von x als die gleichnamigen Differentiale

$$dx,\quad d^2 x,\quad d^3 x, \ldots,$$

bezeichnet und gelten der Reihe nach in Bezug auf dx als kleine Grössen der ersten, zweiten, dritten Ordnung u. s. f.; zugleich heissen die zugehörigen Differenzen der Function $f(x)$ die Differentiale

$$df(x),\quad d^2 f(x),\quad d^3 f(x), \ldots,$$

und sind respective gleich kleinen Grössen der entsprechenden Ordnung. Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Darstellung der in Rede stehenden Differentiale von $f(x)$ durch die successiven Differentialquotienten von $f(x)$ und Differentiale von dx aus der Gleichung (3) ableiten, indem man die rechte Seite als Product der beiden Factoren $f'(x)$ und dx auffasst und die in (6) enthaltene Regel für die Bildung des Differentials eines Products benutzt. Durch jede neue Anwendung des Zeichens d auf eine gegebene Gleichung entsteht eine neue, welche kleine Grössen einer um eine Einheit höheren Ordnung enthält und bis auf diese genau gilt. Denn der vorhandene Unterschied zwischen der linken und rechten Seite der ursprünglichen Gleichung wird bei der Anwendung des Zeichens d auf beide Seiten der Gleichung stillschweigend ebenfalls dem Zeichen d unterworfen.

Vermöge der Definitionsgleichungen

$$(12) \qquad d(d^{p-1} f(x)) = d^p f(x),\quad d(d^{p-1} g(x)) = d^p g(x)$$

folgt aus (6) durch wiederholten Gebrauch, wie in § 16 die Formel (2_b) aus (2) erhalten ist, die mit den Binomialcoefficienten gebildete Gleichung

$$(13)\quad d^p\,(f(x)g(x)) \\ = d^p f(x).g(x) + \frac{p}{1} d^{p-1} f(x)\,dg(x) + \ldots + f(x)\,d^p\,g(x).$$

Für die successiven Differentialquotienten von $f(x)$ und die successiven Differentiale von x gelten die Relationen

$$(14)\qquad df^{(p-1)}(x) = f^{(p)}(x)\,dx, \quad d(d^{p-1}x) = d^p\,x.$$

Wenn man daher in (13) $f(x)$ durch $f'(x)$, $g(x)$ durch dx ersetzt und p von der Einheit ab steigende Werthe beilegt, so ergiebt sich

$$(15)\quad d^2 f(x) = d(f'(x)\,dx) = df'(x).dx + f'(x)\,d^2x$$
$$d^3 f(x) = d^2(f'(x)\,dx) = d^2 f'(x).dx + 2df'(x).d^2x + f'(x)\,d^3x$$
$$\cdots\cdots$$

Mithin entstehen nach ausgeführter Entwickelung die gesuchten Ausdrücke

$$(16)\qquad d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x$$
$$d^3 f(x) = f'''(x)(dx)^3 + 3f''(x)dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x$$
$$\cdots\cdots$$

Die gefundene Darstellung von $d^2 f(x)$ ist nach den getroffenen Voraussetzungen gleich einem Aggregat von Grössen der zweiten, die Darstellung von $d^3 f(x)$ gleich einem Aggregat von Grössen der dritten Ordnung in Bezug auf dx u. s. f., jede Gleichung gilt für die Ordnung der beziehungsweise auftretenden Grössen genau. Wenn man daher annimmt, dass die Grösse x in irgend einer Weise von einer anderen Variable t abhänge, so ist dx, d^2x, $d^3x, \ldots$ respective von derselben Ordnung mit den Grössen dt, dt^2, $dt^3, \ldots$ Man darf deshalb die erste Gleichung durch dt^2, die zweite durch dt^3 dividiren u. s. f., und erhält die Ausdrücke der successiven nach t genommenen Differentialquotienten der Function $f(x)$. Unter der Voraussetzung eines constanten Differentials dx verschwinden d^2x und die höheren Differentiale von x, so dass die Formeln (16) in die Formeln (8), (9), ... übergehen.

Um eine genauere Einsicht in die Gleichungen (16) zu gewinnen, kann man den Ausdruck (7) aus § 39 heranziehen, nämlich

$$(17)\quad \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)..(x-x_\mathfrak{b})} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_2)..(x_1-x_\mathfrak{b})} + \dots$$
$$\dots + \frac{f(x_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{b}-x)(x_\mathfrak{b}-x_1)..(x_\mathfrak{b}-x_{\mathfrak{b}-1})},$$

der sich bei der Abnahme sämmtlicher Differenzen dem durch $\mathfrak{b}!$ dividirten Differentialquotienten $f^{(\mathfrak{b})}(x)$ nähert, und die Frage aufwerfen, wie sich die mit dem System von Werthen $x, x_1, x_2, \dots x_p$ gebildeten Differenzen der Function $f(x)$ durch die zu den Zahlen $\mathfrak{b} = 1, 2, \dots p$ gehörenden Verbindungen (17) darstellen lassen. Die $\mathfrak{b}$te Differenz von $f(x)$ hat nach (7) des § 15 den Ausdruck

$$(18)\quad \Delta^\mathfrak{b} f(x)$$
$$= f(x_\mathfrak{b}) - \frac{\mathfrak{b}}{1} f(x_{\mathfrak{b}-1}) + \frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)}{1.2} f(x_{\mathfrak{b}-2}) - .. + (-1)^\mathfrak{b} f(x).$$

Weil hier nur die Functionswerthe vorkommen, die zu den Werthen der Variable $x, x_1, \dots x_\mathfrak{b}$ gehören, so ist es selbstverständlich, dass wenn $\mathfrak{b} \leqq p$ ist, und wenn man einen Ausdruck kennt, der für die Werthe $x, x_1, \dots x_\mathfrak{b}, x_{\mathfrak{b}+1}, \dots x_p$ die Werthe der Function darstellt, der betreffende Ausdruck statt der Function benutzt werden kann, um die Differenzen $\Delta^\mathfrak{b} f(x)$ zu bilden. Einen solchen Ausdruck liefert aber jede Interpolationsformel, welche für die in Rede stehenden $p+1$ Werthe der Variable die zugehörigen Functionswerthe $f(x), f(x_1), \dots f(x_p)$ annimmt. In (22) des § 40 ist *Newtons* Interpolationsformel mitgetheilt, die sich für den vorliegenden Zweck eignet.

Wenn man für die Variable z das Zeichen ξ, statt der Werthe $h, h_1, \dots h_p$ respective die Werthe $x, x_1, \dots x_p$ einführt, so findet sich für diejenige rationale ganze Function des $(p+1)$ten Grades $F(\xi)$, welche für die genannten Werthe von ξ den betreffenden Werthen der gegebenen Function $f(\xi)$ gleich wird, der Ausdruck

$$(19)\quad F(\xi) = f_0 + f_1(\xi - x) + f_2(\xi - x)(\xi - x_1) + \dots$$
$$\dots + f_p(\xi - x)\dots(\xi - x_{p-1}),$$

wo die Coefficienten $f_0, f_1, \dots$ nach den dortigen Gleichungen (25) folgendermassen bestimmt sind,

$$(20)\begin{cases} f_0=f(x) \\ f_1=\dfrac{f(x)}{x-x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_1-x} \\ f_2=\dfrac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}+\dfrac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_2)}+\dfrac{f(x_2)}{(x_2-x)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

und wo die Grösse $f_\mathfrak{b}$ allgemein in (17) dargestellt ist. Da aus den angeführten Gründen die Differenz $\varDelta^\mathfrak{b} f(\xi)$ der Differenz $\varDelta^\mathfrak{b} F(\xi)$ gleich werden muss, so lange die Zahl $\mathfrak{b}$ den Werth p nicht übertrifft, so kann man $\varDelta^\mathfrak{b} f(\xi)$ unmittelbar bilden, indem man die Differenz der $\mathfrak{b}$ten Ordnung von den einzelnen Gliedern der rechten Seite von (19) nimmt. Hier ist ξ die variable Grösse, die Coefficienten $f_0, f_1, f_2, \ldots$ werden von dem Verfahren des Differenznehmens nicht berührt, und die Differenz des constanten Gliedes f_0 verschwindet, so dass die Gleichung gilt

$$(21)\quad \varDelta^\mathfrak{b} F(\xi)=f_1\varDelta^\mathfrak{b}(\xi-x)+f_2\varDelta^\mathfrak{b}((\xi-x)(\xi-x_1))+\ldots$$
$$\ldots+f_p\varDelta^\mathfrak{b}((\xi-x)\ldots(\xi-x_{p-1})).$$

Weil nun die Differenz der $\mathfrak{b}$ten Ordnung mit den Werthen $\xi=x, x_1, \ldots x_\mathfrak{b}$ so aufzustellen ist, dass für irgend eine Function $g(\xi)$ die Definition gilt

$$(22)\quad \varDelta^\mathfrak{b} g(\xi)$$
$$=g(x_\mathfrak{b})-\frac{\mathfrak{b}}{1}g(x_{\mathfrak{b}-1})+\frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)}{1\,.\,2}g(x_{\mathfrak{b}-2})-\ldots+(-1)^\mathfrak{b} g(x),$$

und weil die auf der rechten Seite von (21) vorkommenden Producte

$$(\xi-x)(\xi-x_1)\ldots(\xi-x_\mathfrak{b}),\ (\xi-x)(\xi-x_1)\ldots(\xi-x_\mathfrak{b})(\xi-x_{\mathfrak{b}+1}),\ldots$$

sämmtlich für alle bezeichneten Werthe von ξ verschwinden, so ist auch die Differenz der $\mathfrak{b}$ten Ordnung jedes einzelnen Products gleich Null. Mithin fallen alle diejenigen Bestandtheile fort, die in $f_\mathfrak{b}, f_{\mathfrak{b}+1}, \ldots f_p$ multiplicirt sind, und es entsteht für die Differenz $\varDelta^\mathfrak{b} f(x)$, die der Differenz $\varDelta^\mathfrak{b} F(\xi)$ gleich ist, der Ausdruck

$$(23)\quad \varDelta^\mathfrak{b} f(\xi)$$
$$=f_1\varDelta^\mathfrak{b}(\xi-x)+f_2\varDelta^\mathfrak{b}((\xi-x)(\xi-x_1))+\ldots+f_\mathfrak{b}\varDelta^\mathfrak{b}((\xi-x)\ldots(\xi-x_{\mathfrak{b}-1})).$$

Die vollständige Darstellung der hier auftretenden Differenzen der $\mathfrak{b}$ten Ordnung geht ebenfalls aus (22) hervor, indem statt $g(\xi)$ die einzelnen Producte eingesetzt werden. Das letzte derselben verschwindet für alle anzuwendenden Werthe von ξ mit Ausnahme des Werthes $\xi = x_{\mathfrak{b}}$, das vorletzte mit Ausnahme der Werthe $\xi = x_{\mathfrak{b}}$ und $x_{\mathfrak{b}-1}$, u. s. f. Es reducirt sich daher die Entwickelung, wenn die Producte in umgekehrter Reihenfolge genommen werden, beziehungsweise auf ein Glied, auf zwei Glieder, u. s. f. Demnach erhält man die Bestimmungen

$$(24)\quad \begin{cases} \varDelta^{\mathfrak{b}}((\xi-x)..(\xi-x_{\mathfrak{b}-1})) = (x_{\mathfrak{b}}-x)(x_{\mathfrak{b}}-x_1)..(x_{\mathfrak{b}}-x_{\mathfrak{b}-1}) \\ \varDelta^{\mathfrak{b}}((\xi-x)..(\xi-x_{\mathfrak{b}-2})) = (x_{\mathfrak{b}}-x)..(x_{\mathfrak{b}}-x_{\mathfrak{b}-2}) - \frac{\mathfrak{b}}{1}(x_{\mathfrak{b}-1}-x)..(x_{\mathfrak{b}-1}-x_{\mathfrak{b}-2}) \\ \quad\vdots \\ \varDelta^{\mathfrak{b}}(\xi-x) \qquad = (x_{\mathfrak{b}}-x) - \frac{\mathfrak{b}}{1}(x_{\mathfrak{b}-1}-x) + \frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)}{1.2}(x_{\mathfrak{b}-2}-x) - \dots \end{cases}$$

Nach der in (22) enthaltenen Definition fällt der Ausdruck $\varDelta^{\mathfrak{b}} f(\xi)$ mit demjenigen zusammen, der früher durch $\varDelta^{\mathfrak{b}} f(x)$ bezeichnet worden ist. Mithin wird die Aufgabe, die Differenz $\varDelta^{\mathfrak{b}} f(x)$ vermittelst der Ausdrücke $f_1, f_2, \dots$ darzustellen, durch die rechte Seite von (23) gelöst. Bei umgekehrter Anordnung der Glieder ergiebt sich

$$(25)\qquad \varDelta^{\mathfrak{b}} f(x) = f_{\mathfrak{b}} \varDelta^{\mathfrak{b}}((\xi-x)..(\xi-x_{\mathfrak{b}-1})) + \dots + f_1 \varDelta^{\mathfrak{b}}(\xi-x),$$

wobei die rechts angedeuteten Operationen nach (24) auszuführen sind. Setzt man $\mathfrak{b}$ gleich 2 und 3, so kommen die Gleichungen

$$(26)\qquad \begin{aligned} \varDelta^2 f(x) &= f_2\,(x_2-x)\,(x_2-x_1) + f_1\,(x_2-2x_1+x), \\ \varDelta^3 f(x) &= f_3\,(x_3-x)\,(x_3-x_1)\,(x_3-x_2) \\ &\quad + f_2\,((x_3-x)\,(x_3-x_1) - 3\,(x_2-x)\,(x_2-x_1)) \\ &\quad + f_1\,(x_3-3x_2+3x_1-x), \end{aligned}$$

deren rechte Seiten mit Hülfe von (11) in die Zeichen $\varDelta x$, $\varDelta^2 x$, $\varDelta^3 x$ übergeführt werden können. Man findet

$$\begin{aligned} x_2 - x &= 2\varDelta x + \varDelta^2 x, \quad x_2 - x_1 = \varDelta x + \varDelta^2 x, \\ x_2 - 2x_1 + x &= \varDelta^2 x, \\ x_3 - x &= 3\varDelta x + 3\varDelta^2 x + \varDelta^3 x, \\ x_3 - x_1 &= 2\varDelta x + 3\varDelta^2 x + \varDelta^3 x, \\ x_3 - x_2 &= \varDelta x + 2\varDelta^2 x + \varDelta^3 x, \\ x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x &= \varDelta^3 x. \end{aligned}$$

Unter den vorhin angegebenen Voraussetzungen verwandelt sich die Differenz $\varDelta^{\mathfrak{b}} f(x)$ in das Differential $d^{\mathfrak{b}} f(x)$, die Ausdrücke $f_1, f_2, \dots$ gehen respective in die Werthe $f'(x), \frac{f''(x)}{2!}, \dots$ über, und die auf der rechten Seite von (25) erscheinenden Differentiale der b ten Ordnung stimmen bis auf Grössen der b ten Ordnung genau mit den Factoren überein, mit denen auf der rechten Seite von (16) beziehungsweise die Ausdrücke $\frac{f'(x)}{1!}, \frac{f''(x)}{2!}, \ldots$ zu multipliciren sind.

Bei dem aus auseinandergesetzten Verfahren der Rechnung mit kleinen Grössen bestimmter Ordnung haben wir die Voraussetzung festgehalten, dass diejenige Grösse, durch deren Potenzen die verschiedenen kleinen Grössen ausgedrückt werden, numerisch beliebig verkleinert werden könne. Eine Grösse, die beliebig oder ohne Ende verkleinert werden kann, wird *eine unendlich kleine Grösse* genannt; die Grössen, welche in Bezug auf eine solche Grösse von der zweiten, dritten p ten Ordnung sind, heissen respective *unendlich kleine Grössen der zweiten, dritten, p ten Ordnung.* Aus diesem Grunde führt die Rechnung mit kleinen Grössen verschiedener Ordnungen den Namen *der Rechnung mit unendlich kleinen Grössen oder der Infinitesimalrechnung.* Indem das *erste Differential* einer variabeln Grösse als *eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung* aufgefasst wird, sind das *zweite, dritte, p te Differential* derselben Variable beziehungsweise als *unendlich kleine Grössen der zweiten, dritten, p ten Ordnung* zu betrachten. In gleicher Weise hat man die Theile, in welche das Intervall einer Variable getheilt wird, um die Integration einer Function auszuführen, als unendlich kleine Grössen aufzufassen. Bei dem Ausdrucke des Integrals $\int f(x)\, dx$ ist dx das Differential der Variable x, das Product $f(x)\, dx$ wird *das Element des Integrals* genannt, und das Integralzeichen $\int$ deutet die Ausführung der Summation an, durch welche das Integral definirt worden ist. Daher sind Differential- und Integralrechnung Theile der Infinitesimalrechnung. Wie vorhin erwähnt, hat *Leibnitz* die Regeln für den Gebrauch des Differentialzeichens aufgestellt. Die Principien der Infinitesimalrechnung, welche *Newton* früher entdeckt hatte, sind von demselben in der ersten Section des ersten Buches der *principia philosophiae naturalis* unter dem Titel: *de methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur*, auseinandergesetzt und mit vollkommener Strenge bewiesen.

Capitel V.

Differentiation von Functionen mehrerer Variabeln.

§ 42. Functionen von mehreren Variabeln. Einfach und mehrfach ausgedehnte, unstetige und stetige Mannigfaltigkeiten.

Man begegnet dem Begriffe der Abhängigkeit einer Grösse von mehreren anderen Grössen, sobald aus mehreren beliebig zu wählenden Grössen durch irgend welche Operationen eine neue Grösse bestimmt wird. So hängt der Werth der Summe, der Differenz, des Products, des Quotienten zweier ganzen Zahlen von den Werthen dieser beiden Zahlen ab. Eine algebraische rationale Funtion von mehreren veränderlichen Grössen ist in I, § 22, eine Function von zwei veränderlichen Grössen überhaupt in I, § 108 erörtert worden. An der letzteren Stelle wird von einer Function zweier Variabeln $f(x, y)$ insbesondere unter der Voraussetzung gesprochen, dass $f(x, y)$ für alle diejenigen Verbindungen je zweier Werthe gegeben sei, bei denen x zwischen zwei Grössen a und b, y zwischen zwei Grössen c und d liegt.

Ehe wir uns mit dem dort ebenfalls erklärten Begriffe der Stetigkeit der Function $f(x, y)$ beschäftigen, der für die Ausdehnung der Operation des Differentiirens unentbehrlich ist, werden wir den Begriff der Abhängigkeit einer Grösse von mehreren Grössen durch Vergleichung mit der Abhängigkeit einer Grösse von einer einzigen Grösse näher erläutern.

Wenn eine Function $f(x)$ der einzigen Variable x für jeden zwischen a und b befindlichen Werth von x gegeben ist, wenn man dann innerhalb dieses Intervalls einen bestimmten Werth x auswählt, um die Aenderungen der Function zu untersuchen, die einer Aenderung der Variable entsprechen, so kann die letztere nur so geändert werden, dass sie um eine gewisse Grösse zu- oder abnimmt. Werden die Werthe der Variable noch durch die Bedingung beschränkt, gleich ganzen Zahlen zu sein, so kann man, um, ohne einen Werth zu überspringen, von einem Werthe zu einem andern zu gelangen, von jedem einzelnen Werthe entweder nur um eine Einheit vorwärts oder um eine Einheit rückwärts gehen. Wenn Werthe, deren Grösse um eine Einheit differirt, Nachbarwerthe genannt werden, so hat jeder zwischen den Grenzen a und b befindliche Werth einen vorwärts und einen rückwärts liegenden Nachbarwerth, also zwei Nachbarwerthe.

Bei einer Function $f(x, y)$ von zwei Variabeln x und y, die wie an der vorhin angeführten Stelle für alle Werthverbindungen gegeben ist, die den Bedingungen $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ genügen, kann man von einer beliebig gewählten Werthverbindung x, y so fortschreiten, dass die erste Variable x entweder wächst oder abnimmt, und gleichzeitig die zweite Variable y entweder wächst oder abnimmt. Es werde auch hier die Voraussetzung berücksichtigt, dass sowohl die erste wie die zweite Variable nur gleich ganzen Zahlen sein dürfen, und es mögen diejenigen Werthverbindungen zu einer bestimmten Werthverbindung benachbart heissen, bei denen die Werthe der einen Variable um eine Einheit, die Werthe der andern Variable aber gar nicht differiren; dann entsprechen jeder Verbindung (x, y), indem die erste Variable ab- oder zunimmt, die benachbarten $(x-1, y)$ und $(x+1, y)$, ferner, indem die zweite Variable ab- oder zunimmt, die benachbarten $(x, y-1)$ und $(x, y+1)$, so dass zu jeder Werthverbindung vier benachbarte Werthverbindungen gehören.

Während bei einer Function einer Variable die ganzzahligen Werthe der Variable eine einzige Reihe darstellen, lassen sich bei einer Function von zwei Variabeln die Verbindungen der ganzzahligen Werthe beider Variabeln auf doppelte Art in Reihen von Reihen ordnen. Entweder man beginnt mit denjenigen Reihen, bei denen die zweite Variable ungeändert bleibt, dagegen die erste ihre Werthe durchläuft, und nimmt die Reihe von den Reihen, welche verschiedenen Werthen der zweiten Variable zugehören; oder man beginnt mit denjenigen Reihen, bei denen die erste Variable ungeändert bleibt, dagegen die zweite ihre Werthe durchläuft, und nimmt dann die Reihe von den Reihen, welche verschiedenen Werthen der ersten Variable zugehören. Nach dem Ausdruck, den *Gauss* in seiner Anzeige der zweiten Abhandlung über die Theorie der biquadratischen Reste eingeführt hat, bilden Gegenstände, die in eine einzige Reihe geordnet sind, *eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension*, Gegenstände, die in Reihen von Reihen geordnet sind, *eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen*, und Gegenstände, bei deren Anordnung der angedeutete Process des Herstellens von Reihen n mal wiederholt wird, *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen*, welche auch *eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit* genannt wird. Demgemäss constituiren die ganzzahligen Werthe einer Variable x eine einfach ausgedehnte, die Verbindungen der ganzzahligen Werthe von zwei Variabeln x, y eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und die Verbindungen der ganzzahligen Werthe von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ in gleicher Weise eine $n$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

Es wird dem Leser dieses Buches nicht entgehen, dass der in I, § 3 gegebene Beweis des Satzes, dass das Product gegebener Zahlen, wie auch die Factoren vertauscht oder in Gruppen zusammengefasst werden, immer denselben Werth habe, auf der Betrachtung von Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Dimensionen beruht. Ich habe den Beweis des auf zwei Factoren bezüglichen Satzes ohne Hülfe der räumlichen Anschauung geführt und hierauf die Bemerkung hinzugefügt, dass auch die für drei Factoren angewendete Schlussweise, bei welcher die räumliche Anschauung benutzt ist, im Grunde nicht der räumlichen Anschauung, sondern der inneren Anschauung angehöre. Bei dem für zwei Factoren geltenden Satze werden an der angeführten Stelle b Gruppen zusammenaddirt, deren jede a Einheiten enthält. Nun braucht man sich nur vorzustellen, dass jede der a Einheiten durch einen Gegenstand vertreten sei, der sich in Bezug auf eine bestimmte Eigenschaft z. B. durch den Stoff von jedem anderen Gegenstande derselben Gruppe unterscheidet, dass ferner in jeder Gruppe Gegenstände von denselben a verschiedenen Stoffen enthalten sind, während die Gegenstände in jeder einzelnen Gruppe in Bezug auf eine andere Eigenschaft, etwa die Farbe, übereinstimmen, von Gruppe zu Gruppe aber differiren. Auf diese Weise entsteht ein Substrat, an dem sich der Beweis des auf zwei Factoren bezüglichen Satzes führen lässt, und es leuchtet ein, dass für den Beweis des auf drei Factoren bezüglichen Satzes eine neue Eigenschaft benutzt werden kann, die den Gegenständen von jeder der zu bildenden neuen Gruppen gemeinsam ist und von Gruppe zu Gruppe wechselt. Hierdurch wird die angeführte Behauptung, dass bei dem Beweise jenes Satzes die räumliche Anschauung entbehrlich sei, bestätigt.

Das in I, § 108 zur bequemeren Auffassung einer Function von zwei Variabeln $f(x, y)$ angegebene Verfahren, x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene zu betrachten, fällt für ganzzahlige Werthe der beiden Variabeln mit der Vertheilung der Zahlen in horizontale und vertikale Reihen in I, § 3 zusammen; dasselbe bringt eine quadratische Anordnung von Punkten in der Ebene hervor, welche als der einfachste Fall in der parallelogrammatischen Anordnung enthalten ist, die in I, § 80 behandelt wurde. Der Nutzen dieser geometrischen Darstellung zeigt sich namentlich auch bei der für die Betrachtung der Mannigfaltigkeiten höchst wesentlichen Aufgabe, von einer gegebenen Werthverbindung zu einer andern so überzugehen, dass nur durch Verbindungen fortgeschritten wird, die zu einander benachbart sind. Innerhalb einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit besteht bei zwei entsprechenden ganzzahligen Werthen $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$ der Variable x entweder der Fall der Gleichheit oder der Ungleichheit. Wofern beispielsweise $x^{(0)} < x^{(1)}$, so kann man von $x^{(0)}$ nach $x^{(1)}$ durch lauter benachbarte Werthe nur so gelangen, dass jeder der Zwischenwerthe $x^{(0)}+1$, $x^{(0)}+2$, .. $x^{(1)}-1$ wenigstens ein Mal berührt wird; wenn aber noch die Bedingung hinzukommt, dass hierbei die Variable entweder nur wachsen oder nur abnehmen darf, so ist auch die Reihenfolge der Werthe, welche durchlaufen werden muss, eindeutig bestimmt.

Soll in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von der ganzzahligen Werthverbindung $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ zu der ganzzahligen Werthverbindung $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ übergegangen werden, so kann jede der beiden Differenzen $x^{(1)} - x^{(0)}$ und $y^{(1)} - y^{(0)}$ entweder positiv oder negativ oder verschwindend sein; ferner werden die zu durchlaufenden einander benachbarten Werthsysteme keines-weges durch die Bedingung eindeutig bestimmt, dass weder bei der ersten Variable noch bei der zweiten Variable das Wachsen mit dem Abnehmen wechseln darf. Selbst der Uebergang von einer Werthverbindung (x, y) zu der Werthverbindung $(x+1, y+1)$ kann bei dieser Einschränkung auf doppelte Art, nämlich entweder mit Benutzung von $(x+1, y)$ oder mit Benutzung von $(x, y+1)$ erfolgen, wodurch die allgemeine Behauptung erwiesen ist. Bei der Vorstellung, dass x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene bedeuten, entsprechen den Werthverbindungen, bei denen nur eine der Variabeln differirt und die mithin nur *eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit* bilden, Punkte auf einer bestimmten, zu einer der Axen parallelen Geraden; die beiden Nachbarwerthe $x-1$ und $x+1$ der einen Variable x liefern daher die zwei Punkte, die auf der betreffenden Geraden von dem betreffenden Punkte um die Einheit abstehen und beziehungsweise vor und hinter demselben liegen. Dagegen gehören zu den vier Verbindungen, die in der *zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* mit der Verbindung (x, y) benachbart sind, diejenigen vier Punkte, die respective auf zwei durch den Punkt (x, y) zu den Axen gezogenen Parallelen von demselben um die Einheit abstehen und sich respective links, rechts, unterhalb und oberhalb befinden. Ferner sieht man ein, dass das Uebergehen von einem Punkte $x^{(0)}$ zu einem Punkte $x^{(1)}$ durch benachbarte Werthe der betreffenden einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dazu nöthigt, auf jener eindeutig bestimmten geraden Linie fortzuschreiten, während das Uebergehen von einer Werthverbindung $(x^{(0)}, y^{(0)})$ zu einer Werthverbindung $(x^{(1)}, y^{(1)})$ mit Benutzung von benachbarten Werthverbindungen der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auch bei der oben hinzugefügten Beschränkung immer noch gestattet, in der zugehörigen Ebene verschiedene Wege einzuschlagen.

Die bisher entwickelten Begriffe existiren auch für Functionen von beliebig vielen Variabeln. Wenn der Inbegriff der Werthverbindungen von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ definirt ist, und zu jeder in demselben enthaltenen Werthverbindung $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine gewisse Grösse gehört, so stellt der Inbegriff dieser Grössen *eine von den n Variabeln abhängige Function* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dar. Der Inbegriff der Werthverbindungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heisst auch mit einem in I, § 108 für zwei Variable gebrauchten Ausdrucke *das Gebiet der n Variabeln.*

Wir denken uns zunächst wieder ein solches Gebiet, bei dem jede Variable jeden innerhalb gewisser ihr zugehörigen Grenzen enthaltenen Werth annehmen darf,

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1,\ a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots a_n \leqq x_n \leqq b_n.$$

Die Aenderung einer Werthverbindung kann nun so erfolgen, dass jede Variable für sich entweder wächst oder abnimmt oder sich gleich bleibt; somit ist das Verhalten jeder einzelnen Variable unabhängig von dem Verhalten aller übrigen, weshalb ihre Gesammtheit *ein System unabhängiger Variabeln* genannt wird. Bei der Voraussetzung, dass jede Variable nur ganzzahlige Werthe annehme, stellen die sämmtlichen Werthverbindungen nach der obigen Definition *eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit* dar. Hier sollen wieder zwei Werthverbindungen benachbart heissen, die sich nur in Bezug auf eine einzige Variable und in Bezug auf diese nur um eine Einheit unterscheiden. Vermöge dessen sind zu einer bestimmten Werthverbindung $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die $2n$ Werthverbindungen

$$(x_1 - 1, x_2, \ldots x_n),\ (x_1, x_2 - 1, x_3, \ldots x_n), \ldots (x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n - 1)$$
$$(x_1 + 1, x_2, \ldots x_n),\ (x_1, x_2 + 1, x_3, \ldots x_n), \ldots (x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n + 1)$$

benachbart. Offenbar bildet die Gesammtheit der Werthverbindungen, die nur in Bezug auf eine einzige Variable abweichen, eine einfach ausgedehnte, die Gesammtheit der Werthverbindungen, die nur in Bezug auf dieselben zwei Variabeln differiren, eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, u. s. f. *Mithin sind in der gegebenen Mannigfaltigkeit der n ten Ordnung Mannigfaltigkeiten von allen niedrigeren Ordnungen enthalten.* Wenn also zwei Werthverbindungen $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$ und $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots x_n^{(2)})$ gegeben sind, so kann man zuerst feststellen, in Bezug auf welche Variabeln sie wirklich differiren, und, falls die Anzahl derselben k beträgt, die beiden Werthverbindungen zu einer Mannigfaltigkeit der $k$ten Ordnung rechnen; dann kann man fordern, dass innerhalb der letztern Mannigfaltigkeit von der einen Verbindung zu der andern durch benachbarte Verbindungen übergegangen werde. Schreibt man noch ausserdem vor, dass bei diesem Verfahren die auf einander folgenden Werthe derselben Variable entweder nur wachsen oder nur abnehmen dürfen, so zeigt sich, wie oben, dass die Reihe der zu durchlaufenden Verbindungen eindeutig bestimmt ist, wofern die Zahl k gleich der Einheit ist, dagegen auf mehrere verschiedene Arten bestimmt werden kann, wofern die Zahl k grösser als die Einheit ausfällt.

Bei Systemen von drei Variabeln lässt sich, wie bei denen von zweien, die räumliche Anschauung zu Hülfe nehmen. In I, § 85 ist auseinandergesetzt, auf welche Weise ein Punkt im Raume durch drei rechtwinklige Coordinaten bestimmt wird; als solche kann man die drei Variabeln x, y, z betrachten, von denen eine Function $f(x, y, z)$ abhängt. Dem Inbegriff der Verbindungen der ganzzahligen Werthe der Variabeln, welcher *eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit* ausmacht, entspricht dann vermöge der drei Dimensionen des Raumes eine cubische Anordnung von Punkten, der einfachste Fall der parallelepipedischen Anordnung, die in I, § 87 vorkommt. *Das Constantsetzen von je zwei Variabeln erzeugt eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, zu der eine, mit einer der drei Coordinatenaxen parallele gerade Linie gehört, das Constantsetzen von je einer Variable eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, zu der eine mit einer der drei Coordinatenebenen parallele Ebene gehört. Mit einer Werthverbindung (x, y, z) sind die sechs Werthverbindungen*

$$(x-1, y, z),\ (x, y-1, z),\ (x, y, z-1)$$
$$(x+1, y, z),\ (x, y+1, z),\ (x, y, z+1)$$

benachbart, die zugeordneten sechs Nachbarpunkte des Punktes (x, y, z) liegen auf den drei durch den Punkt mit den Coordinatenaxen parallel gezogenen Geraden auf beiden Seiten des Punktes (x, y, z) in der Entfernung der Einheit. In dieser Weise entsteht das räumliche Bild der Uebergänge, welche man in der Mannigfaltigkeit der dritten Ordnung von einer Werthverbindung zu einer anderen durch lauter benachbarte Werthverbindungen machen kann, während die Lösungen der analogen

Aufgaben bei Mannigfaltigkeiten von höherer als der dritten Ordnung nur in der combinatorischen Gestalt vorhanden sind.

Wir haben uns bisher mit denjenigen Mannigfaltigkeiten beschäftigt, die erhalten werden, indem man den einzelnen Variabeln eines Systems ganzzahlige Werthe beilegt. Die angestellten Beobachtungen ändern sich jedoch in keinem entscheidenden Stück, sobald vorgeschrieben wird, dass die Variabeln gleich beliebigen Vielfachen eines bestimmten aliquoten Theiles der Einheit sein dürfen. Dies rührt von dem in I, § 11 hervorgehobenen Umstande her, dass die Division der Einheit durch eine bestimmte ganze Zahl M nichts anderes als die Einführung der neuen Einheit $\frac{1}{M}$ ist. Bei der gegenwärtigen Untersuchung kommt es nicht auf die Grösse der Zahl M, sondern darauf an, dass die einmal als Divisor gewählte Zahl festgehalten werde; dadurch bekommt keine der Variabeln andere Werthe, als in der Reihe der rationalen Brüche

$$\ldots, -\frac{3}{M}, -\frac{2}{M}, -\frac{1}{M}, 0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \frac{3}{M}, \ldots$$

enthalten sind. In Folge dessen liegt innerhalb der endlichen für jede Variable gesteckten Grenzen immer nur eine beschränkte Anzahl von Werthen der Variable; auch kann der Unterschied von je zwei Werthen, absolut genommen, niemals kleiner als die Grösse $\frac{1}{M}$ werden. Jene Werthe werden *discrete oder unstetige Werthe* genannt und die aus denselben entnommenen Verbindungen bilden *eine discrete oder unstetige Mannigfaltigkeit*, die nach der Anzahl der unabhängigen Elemente einfach, zweifach oder $n$fach ausgedehnt ist.

Im Eingange dieses Bandes ist bemerkt worden, dass eine einzige Variable, wenn sie jeden innerhalb eines gewissen Intervalls befindlichen Werth annehmen darf, der gleich einem beliebigen Vielfachen irgend eines bestimmten Theiles der Einheit oder auch gleich einer beliebigen irrationalen Grösse ist, *eine innerhalb des bezüglichen Intervalls stetig veränderliche Grösse* genannt wird. Die Werthe, welche der Variable innerhalb des zwischen den endlichen Grössen a und b ausgedehnten Intervalls beigelegt werden können, sind alsdann nicht mehr in beschränkter Anzahl vorhanden; denn wie viele Werthe auch ein Mal angenommen sein mögen, ein zweites Mal kann die Anzahl beliebig vergrössert werden. Auch giebt es alsdann, wie in § 1 erwähnt, keine so kleine Grösse, dass nicht in dem gegebenen Intervall die Differenz zwischen zwei Werthen der Variable numerisch noch kleiner als jene Grösse gemacht werden könnte. Allein es existirt zwischen den sämmtlichen innerhalb des Intervalls zulässigen Werthen der Grösse nach eine bestimmte Reihenfolge, weil nach I, § 20 *die Differenz von zwei bestimmten Grössen* immer nur *positiv* oder *negativ* oder *gleich Null* ist, wie ebenfalls in § 1 hervorgehoben worden. Deshalb wendet man auf die sämmtlichen innerhalb eines gewissen Intervalls befindlichen Werthe einer Variable ebenfalls den Ausdruck der Mannigfaltigkeit an, und sagt, dass sie *eine concrete oder stetige einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit* darstellen. In gleicher Weise bildet der Inbegriff aller innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossenen Werthverbindungen von zwei Variabeln *eine zweifach ausgedehnte*, von n Variabeln *eine nfach ausgedehnte concrete oder stetige Mannigfaltigkeit.* Als benachbarte Werthverbindungen kann man jetzt solche betrachten, die nur in Bezug auf eine einzige Variable und in Bezug auf diese um eine beliebig kleine Grösse differiren, und zählt dann in einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu jeder Werthverbindung wieder $2n$ zugehörige benachbarte Werthverbindungen. Auch ist leicht einzusehen, *dass zwei Werthverbindungen, die innerhalb einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit nur in Bezug auf k Variable wirklich differiren, zu einer Mannigfaltigkeit der $k$ten Ordnung, welche in der Mannigfaltigkeit der $n$ten Ordnung vorkommt, gerechnet werden dürfen, und dass überhaupt in jeder stetigen Mannigfaltigkeit der $n$ten Ordnung stetige Mannigfaltigkeiten von allen niedrigeren Ordnungen enthalten sind.* Durch den Umstand, *dass unsere räumliche Anschauung in der Linie ein Bild für eine einfach ausgedehnte, in der Fläche für eine zweifach ausgedehnte, in dem Raume für eine dreifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit darbietet*, hat die Entwickelung des Begriffs der stetigen Mannigfaltigkeiten den bedeutendsten Einfluss erfahren.

§ 43. Stetige Functionen von mehreren Variabeln.

Die Definition einer stetigen Function von zwei Variabeln, die in I, § 108 gegeben ist, lässt sich zu der folgenden Definition einer stetigen Function von beliebig vielen Variabeln erweitern:

Eine für ein gewisses Gebiet von Werthverbindungen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegebene Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ heisst eine stetige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$, sobald der absolute Werth der Differenz von je zwei in dem Gebiete vorkommenden Functionswerthen $f(z_1, z_2, \ldots z_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für hinreichend kleine absolute Werthe der Differenzen der Variabeln $z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots z_n - x_n$ beliebig klein wird.

Bei dieser Bestimmung ist darauf zu achten, dass, indem die Grössen $z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots z_n - x_n$ respective numerisch unter den kleinen Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ liegen oder die Ungleichheiten erfüllen

(1) $-\omega_1 < z_1 - x_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < z_2 - x_2 < \omega_2, \ldots -\omega_n < z_n - x_n < \omega_n,$

für die zu einer bestimmten Werthverbindung $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zugehörigen Werthverbindungen $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ ein in dem gegebenen Werthgebiete von n Dimensionen befindliches engeres Werthgebiet von ebenso viel Dimensionen abgegrenzt wird, innerhalb dessen die letztere Werthverbindung liegen muss. Ebenso gut kann man auch die Werthverbindung $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ festhalten, wobei durch die Ungleichheiten (1) ein engeres Werthgebiet von n Dimensionen bestimmt wird, innerhalb dessen die zugehörigen Werthverbindungen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eingeschlossen sind, und zwar hat jede der Variabeln bei der ersten und der zweiten engeren Begrenzung beziehungsweise einen ebenso grossen Spielraum. Bedient man sich für eine Variable, für zwei und drei Variabeln der im vorigen § angewendeten räumlichen Anschauung, so wird das in Rede stehende engere Gebiet bei einer Variable durch ein gewisses Stück einer geraden Linie, ferner bei zwei Variabeln durch einen Theil einer Ebene, der die Gestalt eines gewissen Rechtecks besitzt, endlich bei drei Variabeln durch einen Theil des Raumes vertreten, der einem gewissen rechtwinkligen Parallelepipedon gleich ist.

Auf gleiche Weise, wie in I, § 108 gezeigt worden, dass jede rationale ganze Function einer Variable für jeden Umfang der letztern eine stetige Function derselben, und dass jede rationale ganze Function von zwei Variabeln für jede Ausdehnung beider Variabeln eine stetige Function von diesen ist, ergiebt sich auch, dass jede rationale ganze Function von beliebig vielen Variabeln für jede Ausdehnung der einzelnen Variabeln die Bedingungen einer stetigen Function derselben erfüllt. Man kann jedoch das betreffende Resultat noch anders begründen. Eine gegebene rationale ganze Function von beliebig vielen Variabeln lässt sich als das Aggregat einer beschränkten Anzahl von Gliedern darstellen, deren jedes durch Multiplication von einem constanten Coefficienten mit den ganzen positiven Potenzen der einzelnen Variabeln gebildet ist. Wir denken uns die verschiedenen constanten Coefficienten in Zahlen gegeben und unterscheiden bei jedem einzelnen, ob derselbe gleich einer rationalen oder irrationalen Grösse ist. Wo das letztere der Fall ist, substituiren wir statt des Coefficienten ein neues variables Element, nehmen an, dass demselben der betreffende irrationale Werth beigelegt sei, und verwandeln dadurch die gegebene rationale ganze Function in eine andere rationale ganze Function von einer grösseren Anzahl von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, bei der die sämmtlichen Coefficienten rationale Grössen sind. Die neu entstandene Function, mit der wir es jetzt allein zu thun haben, ist nun zunächst, da die Operationen des Addirens, Subtrahirens und Multiplicirens ursprünglich für rationale Brüche definirt sind, für alle Werthverbindungen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bestimmt, bei denen die einzelnen Variabeln gleich irgend welchen rationalen Brüchen sind. Indem man sich vorsetzt, für die einzelnen Variabeln nur solche rationale Brüche anzuwenden, die den Ungleichheiten

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \; a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

genügen und deren sämmtliche Nenner Theiler einer bestimmten Zahl M sind, stellen die sämmtlichen Combinationen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ diejenige discrete Mannigfaltigkeit der $n$ten Ordnung dar, welche im vorigen § betrachtet worden ist. Auch bleibt sie eine discrete Mannigfaltigkeit, wenn man mehrere Male nach einander statt der Zahl M andere grössere Zahlen setzt. Um dagegen den Werth der Function für eine stetige Mannigfaltigkeit ihrer Variabeln zu bestimmen, ist die Function auch für solche Werthverbindungen zu definiren, bei denen einzelne Variabeln gleich irrationalen Grössen sind, und dazu muss festgestellt werden, was die Addition, Subtraction, Multiplication von irrationalen Grössen bedeuten solle. Dies ist für die in Rede stehenden drei Operationen und auch für die Division in I, § 16 geschehen; es kann der Inhalt der dort gegebenen Definitionen in der jetzt eingeführten Sprache so ausgedrückt werden, dass die aus gegebenen Elementen durch die vier Grundoperationen gebildeten Functionen *stetige Functionen der Elemente* sein sollen. Die rationalen ganzen Functionen von beliebig vielen Variabeln sind also darum stetige Functionen der letztern, weil die genannten Functionen durch eine beschränkte Anzahl von Anwendungen der drei ersten Grundoperationen erhalten werden, und weil die allgemeine Definition dieser Grundoperationen den Begriff der Stetigkeit in sich schliesst.

§ 44. Vollständige und partielle Differenzen von Functionen mehrerer Variabeln.

Unter der Differenz einer Function von n Variabeln wird die Differenz von zwei Functionswerthen verstanden, die zwei verschiedenen Werthsystemen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}$ entsprechen. Indem man sowohl die Differenzen der einzelnen Variabeln wie auch die Differenz der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch das Zeichen $\varDelta$ ausdrückt, ergiebt sich die Darstellung

$$(1) \qquad x_1^{(1)} - x_1 = \varDelta x_1, \;\; x_2^{(1)} - x_1 = \varDelta x_2, \ldots x_n^{(1)} - x_n = \varDelta x_n,$$

$$(2) \quad f(x_1 + \varDelta x_1, x_2 + \varDelta x_2, \ldots x_n + \varDelta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ = \varDelta f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Wir werden jetzt eine Umformung der Differenz $\varDelta f(x_1, x_2, .. x_n)$ ausführen, welche dazu geeignet ist, dieselbe unter der Voraussetzung, dass die Differenzen $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \ldots \varDelta x_n$ kleine Grössen von einer und derselben Ordnung sind, mit der diesen Grössen entsprechenden Genauigkeit zu bestimmen.

Es sei die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zuerst gleich einem Product von Factoren, von denen jeder nur eine der Variabeln enthält

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots\ldots \varphi_n(x_n).$$

Vermittelst der Bezeichnungen

$$(4) \qquad \varphi_1(x_1 + \Delta x_1) - \varphi_1(x_1) = \Delta \varphi_1(x_1), \ldots$$
$$\varphi_n(x_n + \Delta x_n) - \varphi_n(x_n) = \Delta \varphi_n(x_n)$$

folgt dann aus der Definition (2) die Bestimmung

$$(5) \quad \Delta(\varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n))$$
$$= (\varphi_1(x_1) + \Delta\varphi_1(x_1))\, (\varphi_2(x_2) + \Delta\varphi_2(x_2)) \ldots (\varphi_n(x_n) + \Delta\varphi_n(x_n))$$
$$- \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n).$$

Man kann nun das erste Product der rechten Seite so entwickeln, dass der erste Bestandtheil gleich dem Product der ersten Summanden der n Factoren wird und daher mit dem zu subtrahirenden Product übereinstimmt, dass der zweite Bestandtheil die Glieder enthält, welche in je eine der Differenzen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ der dritte Bestandtheil die Glieder, welche in die Producte von je zwei verschiedenen Differenzen multiplicirt sind, u. s. f., und dass das Product der sämmtlichen Differenzen den Schluss bildet. So entsteht die Darstellung

$$(6) \quad \Delta(\varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n))$$
$$= \Delta\varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n) + \ldots + \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \Delta\varphi_n(x_n)$$
$$+ \Delta\varphi_1(x_1)\, \Delta\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n) + \ldots$$
$$+ \ldots$$
$$+ \Delta\varphi_1(x_1)\, \Delta\varphi_2(x_2) \ldots \Delta\varphi_n(x_n).$$

Jeder hier vorkommende Summand lässt sich hervorbringen, indem man die Operation des Differenznehmens auf die Function $\varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$ in der Weise anwendet, dass einzelne Variable als veränderlich, die übrigen als unveränderlich gelten. Wird nur die Variable x_1 um Δx_1, jedoch keine der übrigen Variabeln geändert, so entsteht der erste Summand, und auf dieselbe Weise durch die entsprechende Aenderung der einzelnen Variabeln je ein Summand der ersten Zeile. Eine Differenz, bei der nur die Variable $x_\mathfrak{a}$ um $\Delta x_\mathfrak{a}$ und ausser dieser keine Variable geändert wird, wo $\mathfrak{a}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnet, heisst *eine in Bezug auf die Variable* $x_\mathfrak{a}$

genommene partielle Differenz und kann folgendermassen durch Anhängung der betreffenden Variable an das Zeichen Δ angedeutet werden,

$$(7)\quad f(x_1, \ldots x_a + \Delta x_a, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots x_a, \ldots x_n)$$
$$= \Delta_{x_a} f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Das Zeichen Δ bleibt dann für die Bildung derjenigen Differenzen, bei denen alle Variabeln geändert werden und die *vollständige oder totale Differenzen* genannt werden. Demnach sind die einzelnen Summanden der ersten Zeile der rechten Seite von (6) gleich den nach den bezüglichen einzelnen Variabeln genommenen partiellen Differenzen der Function $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)..\varphi_n(x_n)$. Die einzelnen Summanden der zweiten Zeile sind Producte von n Factoren, unter denen je zwei mit den gleichnamigen Differenzen der Functionen $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$, die $n-2$ übrigen mit den übrigen Functionen selbst übereinstimmen. Der erste Summand $\Delta\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$ lässt sich entweder erzeugen, indem von dem ersten Summanden der ersten Zeile die partielle Differenz nach x_2, oder indem von dem zweiten Summanden der ersten Zeile die partielle Differenz nach x_1 genommen wird; eine entsprechende doppelte Erzeugungsart hat man für die übrigen Summanden der zweiten Zeile. Genau ebenso entspringen die Summanden jeder neuen Zeile der rechten Seite von (6) dadurch, dass auf einen Summanden der vorhergehenden Zeile die Operation des partiellen Differenznehmens nach einer Variable ausgeführt wird, die in dem Summanden bis dahin ungeändert geblieben war; es leuchtet ein, dass hier jeder Summand der $l$ten Zeile auf so viele verschiedene Weisen hervorgebracht werden kann als es verschiedene Permutationen für l Elemente giebt, nämlich $1.2.3.l$ oder $l!$, wie in I, § 46 aus einander gesetzt ist.

Wir können also die einzelnen Summanden der auf der rechten Seite von (6) befindlichen Entwickelung als Resultate der wiederholten Operation des partiellen Differenznehmens auffassen. Hierauf wird sich auch die vorzunehmende Umformung der vollständigen Differenz $\Delta f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für eine beliebige Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gründen; um jenen Process kennen zu lernen, lassen wir die Zahl n der Variabeln von dem Werthe zwei an nach und nach zunehmen.

Für $n=2$ giebt die Formel (7) die beiden partiellen nach x_1 und x_2 genommenen Differenzen

$$(8)\qquad \begin{aligned} f(x_1+\Delta x_1,\, x_2)-f(x_1,\, x_2) &= \Delta_{x_1} f(x_1,\, x_2) \\ f(x_1,\, x_2+\Delta x_2)-f(x_1,\, x_2) &= \Delta_{x_2} f(x_1,\, x_2). \end{aligned}$$

Wenn man jetzt von $\Delta_{x_1} f(x_1,\, x_2)$ die partielle Differenz nach x_2 bildet, so kommt

$$(9)\; f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)-f(x_1, x_2+\Delta x_2)-f(x_1+\Delta x_1, x_2)+f(x_1, x_2) \\ = \Delta_{x_2}(\Delta_{x_1} f(x_1,\, x_2)).$$

Nimmt man ferner von $\Delta_{x_2} f(x_1,\, x_2)$ die partielle Differenz nach x_1, so findet sich

$$(10)\; f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)-f(x_1+\Delta x_1, x_2)-f(x_1, x_2+\Delta x_2)+f(x_1, x_2) \\ = \Delta_{x_1}(\Delta_{x_2} f(x_1,\, x_2)).$$

Die linken Seiten von (9) und (10) sind nur in Betreff der Anordnung der Glieder verschieden und haben denselben Werth. Mithin gilt die Gleichung

$$(11)\qquad \Delta_{x_2}(\Delta_{x_1} f(x_1,\, x_2)) = \Delta_{x_1}(\Delta_{x_2} f(x_1,\, x_2)).$$

In Uebereinstimmung mit dem Sprachgebrauch, der in § 15 für Differenzen von Functionen einer Variable angewendet ist, wird das Ergebniss der zweifachen, dreifachen, $p$fachen Wiederholung des Differenznehmens *eine Differenz der zweiten, dritten, p ten Ordnung genannt.* Demnach enthält die Gleichung (11) den folgenden Satz:

(1) *Die partielle Differenz der zweiten Ordnung, welche von einer Function zweier Variabeln zuerst nach der ersten, dann nach der zweiten Variable genommen wird, ist gleich derjenigen partiellen Differenz der zweiten Ordnung, welche zuerst nach der zweiten, dann nach der ersten Variable genommen wird.*

Bei der vorhin erörterten speciellen Voraussetzung (3) haben wir bemerkt, dass die in Bezug auf zwei verschiedene Variabeln nach einander genommenen partiellen Differenzen der zweiten Ordnung gleich den Summanden der zweiten Zeile der rechten Seite von (6) sind. Für den Fall $n=2$ giebt es nur das eine Glied

$$(12)\qquad \Delta\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2),$$

durch welches die linke Seite von (9) oder (10) als ein Product dargestellt wird. Ohne die bezeichnete Voraussetzung hat die nach x_1 und x_2 genommene partielle zweite Differenz der Function $f(x_1, x_2)$ diese Beschaffenheit nicht. Sobald aber in (12) die Differenzen vollständig hingeschrieben werden, wodurch der Ausdruck

(12*) $$(\varphi_1(x_1+\Delta x_1)-\varphi_1(x_1))\,(\varphi_2(x_2+\Delta x_2)-\varphi_2(x_2)),$$

entsteht, so kann man die nach x_1 und x_2 genommene partielle zweite Differenz der Function $f(x_1, x_2)$ erhalten, indem man in (12*) die Multiplication der beiden Factoren ausführt und hierauf jeden Werth des Products $\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_2(\xi_2)$ durch den für die gleiche Verbindung der Variabeln gebildeten Werth der Function $f(\xi_1, \xi_2)$ ersetzt. *Das Product* $\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_1(\xi_2)$ *wird dadurch ein Symbol des Functionswerthes* $f(\xi_1, \xi_2)$. Vermittelst dieses Princips liefert der Ausdruck (12) *eine symbolische Darstellung der nach* x_1 *und* x_2 *genommenen partiellen zweiten Differenz der Function* $f(x_1, x_2)$. Auch erkennt man, dass ebenso die Ausdrücke $\Delta\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)$, $\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2)$ respective die nach x_1 und x_2 genommenen partiellen Differenzen der ersten Ordnung (8) symbolisch darstellen.

In dem Falle $n=3$ existiren die drei partiellen Differenzen der ersten Ordnung in Bezug auf x_1, x_2, x_3

(13) $$\begin{aligned} f(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3)-f(x_1, x_2, x_3) &= \Delta_{x_1} f(x_1, x_2, x_3)\\ f(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3)-f(x_1, x_2, x_3) &= \Delta_{x_2} f(x_1, x_2, x_3)\\ f(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3)-f(x_1, x_2, x_3) &= \Delta_{x_3} f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Was die auf zwei verschiedene Variable bezüglichen Differenzen der zweiten Ordnung anlangt, so folgt schon aus dem Vorigen, dass ihr Werth von der Vertauschung der Reihenfolge der beiden Variabeln unabhängig sein muss; denn der Satz (1) ist für Functionen von zwei Variabeln bewiesen und kann durch das Vorhandensein einer dritten Variable, die bei der jedesmal auszuführenden Differenzenbildung ungeändert bleibt, nicht modificirt werden. Man hat demnach, um eine dieser Differenzen wirklich aufzustellen,

(14) $$\begin{aligned} f(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) &- f(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3)\\ &- f(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) + f(x_1, x_2, x_3)\\ &= \Delta_{x_2}\Delta_{x_3} f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Es mögen nun wieder unter der Annahme $n=3$ die einzelnen Bestandtheile der rechten Seite von (6) verglichen werden. Die erste Zeile enthält die Summanden

(15) $\Delta\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_3(x_3),\ \ \varphi_1(x_1)\Delta\varphi_2(x_2)\varphi_3(x_3),\ \ \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\Delta\varphi_3(x_3),$

die zweite Zeile die Summanden

(16) $$\Delta\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2)\,\varphi_3(x_3),\quad \Delta\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\Delta\varphi_3(x_3),$$
$$\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2)\,\Delta\varphi_3(x_3),$$

die dritte Zeile das eine Glied

(17) $$\Delta\varphi_1(x_1)\,\Delta\varphi_2(x_2)\,\Delta\varphi_3(x_3).$$

In derselben Weise wie früher zeigt sich, dass, wenn die Differenzen $\Delta\varphi_1(x_1)$, $\Delta\varphi_2(x_2)$, $\Delta\varphi_3(x_3)$ durch die zugehörigen Functionswerthe explicite ausgedrückt, die angedeuteten Multiplicationen vollzogen werden, und wenn dann jeder Werth des Products $\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_2(\xi_2)\,\varphi_3(\xi_3)$ durch den mit den gleichen Variabeln gebildeten Werth der Function $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ersetzt wird, die Ausdrücke (15) respective in die partiellen Differenzen der ersten Ordnung (13), die Ausdrücke (16) in die partiellen Differenzen der zweiten Ordnung nach x_1 und x_2, nach x_1 und x_3, nach x_2 und x_3 übergehen, deren letzte in (14) hingeschrieben ist.

Wir bilden jetzt die partielle Differenz von (14) in Bezug auf die Variable x_1. Zu diesem Ende nehmen wir diejenigen vier Glieder, welche aus den vier mit ihren Vorzeichen versehenen Gliedern von (14) entstehen, indem x_1 in $x_1 + \Delta x_1$ verwandelt wird, und subtrahiren von diesen die genannten vier Glieder von (14). Nun hat sich ergeben, dass durch das eingeführte Substitutionsprincip aus der Verbindung

$$\varphi_1(x_1)\,(\varphi_2(x_2 + \Delta x_2) - \varphi_2(x_2))\,(\varphi_3(x_3 + \Delta x_3) - \varphi_3(x_3))$$

das Aggregat (14) hervorgeht. Die vier Glieder, bei denen x_1 in $x_1 + \Delta x_1$ verwandelt worden ist, entstehen also durch dasselbe Princip aus der Verbindung

$$\varphi_1(x_1 + \Delta x_1)\,(\varphi_2(x_2 + \Delta x_2) - \varphi_2(x_2))\,(\varphi_3(x_3 + \Delta x_3) - \varphi_3(x_3)).$$

Die nach x_1 zu nehmende partielle Differenz von (14) geht daher aus dem Ausdrucke

$$(\varphi_1(x_1 + \Delta x_1) - \varphi_1(x_1))\,(\varphi_2(x_2 + \Delta x_2) - \varphi_2(x_2))\,(\varphi_3(x_3 + \Delta x_3) - \varphi_3(x_3))$$

hervor, der durch Subtraction der vorletzten von der letzten Verbindung abgeleitet ist und mit dem obigen Ausdruck (17) zusammenfällt. Hiermit ist bewiesen, dass, wenn man das Product $\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_2(\xi_2)\,\varphi_3(\xi_3)$ zu einem Symbol des Functionswerthes

$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ macht, die partiellen ersten Differenzen der Function $f(x_1, x_2, x_3)$ in (15), die nach je zwei verschiedenen Variabeln genommenen partiellen zweiten Differenzen in (16), die Differenz $\Delta_{x_1} \Delta_{x_2} \Delta_{x_3} f(x_1, x_2, x_3)$ in (17) symbolisch dargestellt sind. Sobald bei der Bildung der dritten Differenz der Function $f(x_1, x_2, x_3)$ die Reihenfolge der partiellen Operationen geändert wird, so erhält man statt (17) einen Ausdruck, bei dem die Reihenfolge der Factoren $\Delta\varphi(x_1)$, $\Delta\varphi(x_2)$, $\Delta\varphi(x_3)$ auf entsprechende Weise geändert ist. Nun bleibt der Ausdruck (17) als Product bei jeder Aenderung der Reihenfolge seiner Factoren ungeändert. Weil aber das anzuwendende Substitutionsprincip dasselbe ist, so folgt für die partielle dritte nach den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 genommene Differenz der Function $f(x_1, x_2, x_3)$ die Eigenschaft, von der Reihenfolge der Operationen des partiellen Differenznehmens unabhängig zu sein.

Offenbar lässt sich die für Functionen von zwei und drei Variabeln angestellte Betrachtung fortsetzen, indem man immer von einer gewissen Anzahl Variabeln zu der um eine Einheit grösseren Anzahl übergeht. So entsteht der folgende allgemeine Satz:

(2) *Die partielle Differenz der $l$ten Ordnung einer Function von n Variabeln $f(x_1, x_2, .. x_n)$, welche nach den l Variabeln $x_\mathfrak{a}, x_\mathfrak{b}, \ldots$ genommen werden soll, wird erhalten, indem man in einem Product von n Factoren $\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)$ die zu den Zeigern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, ..$ gehörenden l Factoren in die respectiven Differenzen $\Delta\varphi_\mathfrak{a}(x_\mathfrak{a}) = \varphi_\mathfrak{a}(x_\mathfrak{a} + \Delta x_\mathfrak{a}) - \varphi_\mathfrak{a}(x_\mathfrak{a})$, $\Delta\varphi_\mathfrak{b}(x_\mathfrak{b}) = \varphi_\mathfrak{b}(x_\mathfrak{b} + \Delta x_\mathfrak{b}) - \varphi_\mathfrak{b}(x_\mathfrak{b})$, .. verwandelt, die übrigen Factoren ungeändert lässt, und hierauf in dem entwickelten Product statt jedes Ausdrucks*

$$\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_2(\xi_2)\cdot\cdot\,\varphi_n(\xi_n)$$

den zugehörigen Functionswerth $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ substituirt. Aus dieser Darstellung folgt, dass die bezeichnete partielle Differenz der $l$ten Ordnung bei keiner Vertauschung der angewendeten Operationen des partiellen Differenznehmens geändert wird.

Es sind somit für die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die sämmtlichen partiellen Differenzen aller Ordnungen, von der ersten bis zu der $n$ten, die sich auf irgend eine Combination verschiedener Variabeln unter den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ beziehen, der Reihe nach durch die auf einander folgenden Summanden der rechten Seite von (6) symbolisch dargestellt. Bei der Addition dieser Summanden heben sich die sämmtlichen Functionswerthe des Products $\varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)\ldots\varphi_n(\xi_n)$ fort, so dass nur die auf der linken Seite von (6) angegebene Differenz

$$(18)\quad \varphi_1(x_1+\varDelta x_1)\,\varphi_2(x_2+\varDelta x_2)\ldots\varphi_n(x_n+\varDelta x_n)-\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)$$

übrig bleibt. Wenn man nun in jedem einzelnen Summanden statt eines Products $\varphi_1(\xi_1)\,\varphi_2(\xi_2)\ldots\varphi_n(\xi_n)$ immer den entsprechenden Functionswerth $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ substituirt und dadurch den betreffenden Summanden zu der correspondirenden partiellen Differenz der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ macht, so müssen sich die auftretenden Functionswerthe genau wie vorher gegenseitig zerstören; es kann also nur die Differenz der beiden Functionswerthe

$$(19)\qquad f(x_1+\varDelta x_1, x_2+\varDelta x_2, \ldots x_n+\varDelta x_n)-f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

erhalten bleiben, welche bei dem angewendeten Substitutionsprincip aus der Differenz (18) hervorgeht. Die Differenz (19) ist aber gerade die vollständige Differenz der ersten Ordnung $\varDelta f(x_1, x_2, \ldots x_n)$; die Uebereinstimmung derselben mit dem zu bildenden Aggregat von partiellen Differenzen liefert die gesuchte Umformung, deren Inhalt wir in dem folgenden Satze aussprechen:

(3) *Die vollständige Differenz der ersten Ordnung einer Function von beliebig vielen Variabeln ist gleich dem Aggregat aus allen von der Function in Bezug auf die einzelnen Variabeln genommenen partiellen Differenzen der ersten Ordnung, aus allen partiellen Differenzen der zweiten Ordnung in Bezug auf alle Combinationen von je zwei verschiedenen Variabeln, und so fort, das heisst gleich dem Aggregat aus allen partiellen Differenzen der $l$ten Ordnung in Bezug auf alle Combinationen von je l verschiedenen Variabeln, für alle Zahlen von $l=1$ bis $l=n$.*

Dass die vollständige Differenz der ersten Ordnung der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vermittelst des gebrauchten Substitutionsprincips durch die rechte Seite der Gleichung (6) symbolisch dargestellt wird, ist nur ein anderer Ausdruck der Ableitung des vorstehenden Satzes. Eine bemerkenswerthe

Eigenschaft der mitgetheilten Entwickelung scheint aber die zu sein, dass in dem Ausdrucke der vollständigen Differenz der ersten Ordnung einer Function von mehreren Variabeln partielle Differenzen von höheren Ordnungen auftreten, deren Ordnungszahl bis zu der Anzahl der in die Function eingehenden Variabeln steigt.

§ 45. Differentiale von Functionen mehrerer Variabeln. Partielle Differentialquotienten.

Bei der Ausdehnung der Differentialrechnung auf Functionen mehrerer Variabeln kann man entweder, wie bei den Functionen einer Variable geschehen ist, mit dem Begriffe des Differentialquotienten beginnen und zu dem des Differentials übergehen, oder den umgekehrten Weg einschlagen, den wir jetzt wählen. Einer im vorigen § enthaltenen Andeutung entsprechend betrachten wir eine für ein gewisses Gebiet der n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ gegebene stetige Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, heben zwei verschiedene Werthsysteme $x_1, x_2, \dots x_n$ und $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_n^{(1)}$ heraus und nehmen an, dass die Differenzen der einzelnen Variabeln

(1) $\quad x_1^{(1)} - x_1 = \varDelta x_1, \; x_2^{(1)} - x_2 = \varDelta x_2, \dots x_n^{(1)} - x_n = \varDelta x_n$

kleine Grössen von einer und derselben Ordnung sind. Dieser Ausdruck bedeutet im Einklang mit dem in § 40 eingeführten Sprachgebrauch, dass die absoluten Werthe der Verhältnisse aller n Grössen zu einer unter denselben beliebig gewählten Grösse innerhalb endlicher Grenzen bleiben, während die absoluten Werthe der einzelnen Grössen selbst beliebig klein werden. Indem die Differenzen $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \dots \varDelta x_n$ als kleine Grössen der ersten Ordnung gelten, kann man verlangen, die entsprechende vollständige Differenz der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ bis auf kleine Grössen der ersten Ordnung genau, das heisst nach § 40, so darzustellen, dass der dabei erlaubte Fehler eine kleine Grösse von höherer als der ersten Ordnung ist. *Unter der erwähnten Voraussetzung werden die Differenzen der unabhängigen Variabeln respective die Differentiale der unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ genannt und mit den Zeichen*

(2) $$d\,x_1,\ d\,x_2, \ldots d\,x_n$$

bezeichnet; gleichzeitig heisst die bis auf die Ordnung dieser kleinen Grössen genaue Darstellung der zugehörigen Differenz der Function $f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ *das Differential der Function* $f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ *und wird durch das Zeichen*

(3) $$d f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$$

ausgedrückt.

Nach dem Satze (3) des vorigen § ist die vollständige Differenz $\Delta f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ gleich einem Aggregat, das aus den sämmtlichen nach den einzelnen Variabeln genommenen partiellen Differenzen der ersten Ordnung und aus den dort angegebenen partiellen Differenzen von höheren Ordnungen zusammengesetzt wird. Wenn nun $f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ als eine Summe von einzelnen Functionen gegeben ist, so lässt sich jede partielle Differenz der Function $f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ von einer bestimmten Ordnung als die Summe der gleichnamigen partiellen Differenzen der einzelnen Functionen auffassen, weil die auszuführenden Operationen nur Additionen und Subtractionen sind. Sobald ferner eine Function gleich einem Product von Factoren ist, deren jeder nur eine einzige Variable enthält, so wird die vollständige Differenz der Function, die wieder mit $\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$ bezeichnet werden möge, in der Gleichung (6) des vorigen § angegeben. Hier zeigt sich, dass, wofern $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ kleine Grössen der ersten Ordnung sind, jede partielle Differenz von höherer als der ersten Ordnung durch das Product der eingehenden Differenzen zu einer kleinen Grösse von derselben, also ebenfalls von höherer als der ersten Ordnung wird. Bei einer Function, die gleich einer Summe von Producten ist, deren einzelne Factoren Functionen der einzelnen Variabeln sind, muss daher unter der gleichen Voraussetzung eine partielle Differenz von höherer als der ersten Ordnung ebenfalls eine kleine Grösse von höherer als der ersten Ordnung sein. Demnach wird für alle Functionen von dieser Beschaffenheit die vollständige Differenz $\Delta f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ bis auf kleine Grössen von der Ordnung der Differenzen $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ genau durch das Aggregat der sämmtlichen in Bezug auf die einzelnen Variabeln genommenen partiellen Differenzen der ersten Ordnung dargestellt, während die auftretenden partiellen Differenzen von höheren Ordnungen als kleine Grössen von höheren Ordnungen wegfallen. Alle rationalen ganzen Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ haben die in Rede stehende Beschaffenheit, gleich Summen von Producten zu sein, die ausser einem constanten Coefficienten die ganzen positiven Potenzen der einzelnen Variabeln enthalten. Daher gilt die gemachte Aussage unzweifelhaft für alle rationalen ganzen Functionen. Sie gilt überhaupt vermöge des Satzes (3) des vorigen § für jede Function von beliebig vielen Variabeln, welche so geartet ist, dass die nach mehreren verschiedenen Variabeln genommene partielle Differenz der Function, wenn die Differenzen der Variabeln als kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, gleich einer kleinen Grösse wird, deren Ordnungszahl mit der Ordnungszahl der Differenz selbst übereinstimmt. Man betrachtet aber alle Functionen von beliebig vielen Variabeln, die dieser Bedingung genügen, als regelmässig, diejenigen, welche ihr nicht genügen, als Ausnahmen. Auf diese Weise giebt man der in Rede stehenden Aussage eine allgemeine Gültigkeit und bildet den Satz, *dass die vollständige Differenz einer Function von n Variabeln* $\Delta f(x_1, x_2, \dots x_n)$ *bis auf kleine Grössen von der Ordnung der Differenzen* $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ *genau durch das Aggregat der sämmtlichen in Bezug auf die einzelnen Variabeln genommenen partiellen Differenzen der ersten Ordnung dargestellt wird.*

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe, die partielle Differenz der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ in Bezug auf eine beliebig gewählte Variable x_α bis auf kleine Grössen der ersten Ordnung genau auszudrücken. In dieser Differenz

(4) $f(x_1, \dots x_\alpha + \Delta x_\alpha, \dots x_n) - f(x_1, \dots x_\alpha, \dots x_n) = \Delta_{x_\alpha} f(x_1, \dots x_n)$

behalten die sämmtlichen Variabeln mit Ausnahme der einen x_α ihre ursprünglichen Werthe; man hat also die Differenz der Functionswerthe, welche zu der Differenz Δx_α der Variable x_α gehört, bis auf kleine Grössen der Ordnung Δx_α darzustellen. Das heisst aber nichts anderes als das Differential derjenigen Function der einzigen Variable x_α bilden, welche aus der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ entsteht, indem nur das Element x_α

als veränderlich, jedes andere Element als constant betrachtet wird. Demnach wird hier nur verlangt, das Differential einer Function einer einzigen Variable aufzustellen, was nach den bisher entwickelten Regeln geschehen kann.

Das Differential einer Function einer einzigen Variable, durch das Differential der letztern dividirt, bringt nach § 41 den Differentialquotienten der Function hervor, und umgekehrt ist das Differential einer Function einer einzigen Variable gleich dem Product des Differentialquotienten und des Differentials der Variable. In demselben Sinne ist auch das Differential der Function der einzigen Variable x_α, in welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch Constantsetzen der übrigen Elemente verwandelt ist, gleich dem Product des unter der bezüglichen Voraussetzung nach der Variable x_α genommenen Differentialquotienten und des Differentials der Variable x_α. *Man bezeichnet den Differentialquotienten einer Function von mehreren Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, welcher in Bezug auf die einzige Variable x_α gebildet wird, während die übrigen Variabeln ungeändert bleiben, als den nach der Variable x_α genommenen partiellen Differentialquotienten, und notirt denselben nach dem Vorgange Jacobis mit dem Differentialzeichen ∂, wie folgt,*

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha}. \tag{5}$$

Vermöge dieses Begriffs ergiebt sich für die partielle Differenz (4) der bis auf kleine Grössen der Ordnung $\varDelta x_\alpha$ genaue Ausdruck

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \varDelta x_\alpha. \tag{6}$$

Im Gegensatze zu den partiellen Differentialquotienten einer Function mehrerer Variabeln werden die Differentialquotienten einer Function von einer Variable *gewöhnliche Differentialquotienten* genannt.

Nach dem vorhin angeführten Satze wird die vollständige Differenz $\varDelta f x_1, x_2, \ldots x_n)$ bis auf kleine Grössen von der Ordnung der Differenzen $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \ldots \varDelta x_n$ genau durch die Summe der partiellen Differenzen dargestellt, welche aus (4) hervorgehen, indem der Zeiger α successive die sämmtlichen Werthe

$1, 2, \ldots n$ erhält. Ersetzt man jede partielle Differenz (4) durch den zugehörigen Ausdruck (6), so entsteht die in derselben Bedeutung geltende Gleichung

$$(7) \qquad \Delta f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Indem hier statt der Differenzen Δx_α beziehungsweise die Differentiale $d x_\alpha$ eingeführt werden, verwandelt sich die linke Seite in das vollständige Differential $df(x_1, x_2, \ldots x_n)$. *Mithin wird das vollständige Differential einer Function* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *von beliebig vielen Variabeln durch den Ausdruck dargestellt*

$$(8) \qquad df(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1} d x_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_n} d x_n.$$

Das vollständige Differential einer Function von mehreren Variabeln ist gleich der Summe der Producte, die erhalten werden, indem der in Bezug auf jede einzelne Variable genommene partielle Differentialquotient mit dem Differential der betreffenden Variable multiplicirt wird.

Aus der Definition eines partiellen Differentialquotienten geht, wie schon erwähnt worden, hervor, dass zu seiner Bildung die Regeln für die Differentiation von Functionen einer einzigen Variable ausreichen. Die fehlerfreie praktische Ausführung von partiellen Differentiationen verlangt indessen eine gewisse besondere Uebung.

Der in (8) aufgestellte Ausdruck für das vollständige Differential einer Function von mehreren Variabeln erlaubt für den Fall, dass jede dieser Variabeln als Function einer einzigen Variable t betrachtet wird, den Differentialquotienten der Function in Bezug auf die letztere zu bilden. Die Gleichung (8) gilt mit Zulassung eines Fehlers, der von höherer Ordnung ist als die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$. Durch die angenommene Abhängigkeit der bis dahin unabhängigen Variabeln von der Variable t werden die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ von dem

Differential dt der Variable t so abhängig, dass die Division derselben durch dt als Grenzwerthe respective die Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$ liefert. Sobald man daher das in Rede stehende Differential $df(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch das Differential dt dividirt, erhält man nach den im vorigen Capitel entwickelten Grundsätzen für den gesuchten Differentialquotienten die folgende Bestimmung

$$\frac{df(x_1, x_2, \ldots x_n)}{dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \ldots \tag{9}$$
$$\ldots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Der auf diese Weise gebildete Differentialquotient der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird *der nach der unabhängigen Variable t genommene vollständige Differentialquotient* genannt, und, wie so eben geschehen, zum Unterschiede von den partiellen Differentialquotienten mit dem Differentialzeichen d bezeichnet.

Aus der Definition des vollständigen Differentials einer Function von mehreren Variabeln kann man leicht erkennen, dass, wenn zwei Functionen mehrerer Variabeln vorliegen, das Differential der Summe, der Differenz, des Products und des Quotienten der beiden Functionen nach denselben Regeln gebildet werden, die in den Gleichungen (4) bis (6) des § 41 für Differentiale von zwei Functionen einer Variable mitgetheilt sind. Wir schreiben dieselben mit Weglassung der Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ folgendermassen

$$d(f+g) = df + dg \tag{10}$$

$$d(f-g) = df - dg \tag{11}$$

$$d(fg) = df.g + f.dg \tag{12}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df.g - f.dg}{gg}, \tag{13}$$

und bemerken ausdrücklich, dass, wenn die linke und rechte Seite nach (8) vollständig ausgeführt werden, die Factoren der gleichen Differentiale links und rechts einander gleich sind. Mit Hülfe von (9) erhält man aus denselben die Bestimmung der entsprechenden vollständigen Differentialquotienten.

§ 46. Partielle Differentialquotienten von rationalen ganzen Functionen mehrerer Variabeln. Euler'scher Satz von den ganzen homogenen Functionen. Vollständiges Differential einer Determinante.

Algebra und Infinitesimalrechnung stehen unter einander in einer solchen Wechselwirkung, dass eine gewisse Entwickelung der Algebra vorhanden sein muss, damit die Infinitesimalrechnung fortschreiten kann, und dass umgekehrt die Fortschritte der letztern eine weitere Entwickelung der erstern herbeiführen. Daher konnte es nicht vermieden werden, bei der im ersten Bande gegebenen Darstellung der Elemente der Algebra einige Begriffe, die allgemeiner gefasst der Infinitesimalrechnung angehören, durch specielle Definitionen zu anticipiren. Wir haben dort bei den rationalen ganzen Functionen einer Variable die aufeinander folgenden Ableitungen betrachtet, welche später als die auf einander folgenden nach der Variable genommenen Differentialquotienten der Function erschienen sind. In Bezug auf die rationalen ganzen Functionen mehrerer Variabeln lässt sich jetzt eine entsprechende Ergänzung hinzufügen.

In I, § 81 ist eine beliebige ganze homogene Function des zweiten Grades oder quadratische Form mit beliebig vielen Variabeln, wie folgt, dargestellt

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}\, x_1^2 &+ 2a_{12}\, x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n}\, x_1 x_n \\ &+ \quad a_{22}\, x_2^2 + \ldots + 2a_{2n}\, x_2 x_n \\ &\qquad\qquad + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ &\qquad\qquad\qquad + \; a_{nn}\, x_n^2 ; \end{aligned}$$

bei der Notation der Coefficienten $a_{11}, \ldots$ wurde bemerkt, dass $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ sein soll. Alsdann wurden in demselben § unter (8) die n Functionen des ersten Grades gebildet

$$(2)\quad \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ &\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n , \end{aligned}$$

mit deren Hülfe sich der unter (11) mitgetheilte Ausdruck der ursprünglichen Function ergab,

$$(3)\qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x_1 + \ldots + f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x_n.$$

Die Functionen $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sind aber gleich den halbgenommenen Werthen der in Bezug auf die respectiven Variabeln gebildeten partiellen Differentialquotienten der gegebenen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Bei der partiellen Differentiation nach einer bestimmten Variable, etwa x_1, liefert das Glied $a_{11}x_1^2$ den Beitrag $2a_{11}x_1$, jedes Glied, in dem das Product von x_1 und einer der andern Variabeln auftritt, wie z. B. $2a_{12}x_1x_2$, einen Beitrag von der Gestalt $2a_{12}x_2$, während alle diejenigen Glieder, welche die Variable x_1 nicht enthalten, gar keinen Beitrag geben. Hieraus folgt die Richtigkeit der behaupteten Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1} &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_2} &= 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \ldots + 2a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_n} &= 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \ldots + 2a_{2n}x_n. \end{aligned}$$

Durch dieselben verwandelt sich obige Gleichung (3), nachdem sie mit der Zahl 2 multiplicirt ist, in die folgende

$$(4_a)\qquad 2f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_1}\, x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_n}\, x_n.$$

Der auf der rechten Seite befindliche Ausdruck geht aus dem in (8) des vorigen § angegebenen vollständigen Differential der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hervor, sobald jedes einzelne Differential dx_a durch die zugehörige Variable x_a ersetzt wird. Mithin hat die Gleichung (4_a) den Inhalt, dass durch die Anwendung des so eben bezeichneten Verfahrens auf eine ganze homogene Function des zweiten Grades von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ der doppelte Werth dieser Function hervorgeht. Die Anwendung des gleichen Verfahrens auf eine ganze homogene Function eines beliebig hohen Grades liefert einen für die Lehre dieser Functionen fundamentalen Satz, der von *Euler* herstammt und nach demselben genannt wird.

Da das vollständige Differential einer Summe von zwei Functionen nach (10) des vorigen § gleich der Summe der vollständigen Differentiale der beiden Functionen ist, und zwar so, dass die Factoren der einzelnen Differentiale respective einander gleich sind, so darf man in der Gleichung

$$(5)\qquad \frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial(f+g)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial(f+g)}{\partial x_n}dx_n$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n,$$

wo bei der Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten die Argumente der Functionen fortgelassen sind, auf beiden Seiten statt jedes einzelnen Differentials einer unabhängigen Variable eine beliebige Grösse, mithin auch die betreffende Variable selbst einsetzen. Durch diese Substitution entsteht die Gleichung

$$(6)\qquad \frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial(f+g)}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial(f+g)}{\partial x_n}x_n$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x_n+\frac{\partial g}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial g}{\partial x_n}x_n.$$

Nun hat eine ganze homogene Function des $p$ten Grades von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Gestalt

$$(7)\qquad f(x_1,x_2,\ldots x_n)=Mx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}+M'x_1^{\lambda'_1}x_2^{\lambda'_2}\ldots x_n^{\lambda'_n}+\ldots;$$

die Coefficienten $M, M', \ldots$ sind von den Variabeln unabhängig, und die Summe der ganzen Potenzexponenten eines jeden Gliedes ist gleich der Zahl p. Um für die Function (7) den Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$ zu erhalten, braucht man nur auf Grund von (6) für die einzelnen Summanden den entsprechenden Ausdruck zu bilden und von den Resultaten die Summe zu nehmen. Es ist aber für den ersten Summanden

$$\frac{\partial(Mx_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n})}{\partial x_1}x_1=\lambda_1 Mx_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n},\ldots\ \frac{\partial(Mx_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n})}{\partial x_n}x_n=\lambda_n Mx_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n},$$

folglich durch Addition, weil $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$ gleich der Zahl p ist,

$$(8) \qquad \frac{\partial(M x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n})}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial(M x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n})}{\partial x_n} x_n = p M x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Das mit dem ersten Summanden vorgenommene Verfahren erzeugt also den p fachen Werth desselben; da für jeden folgenden Summanden das entsprechende gilt, so wird die Summe der bezüglichen Resultate gleich dem p fachen Werthe der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. *Es gilt daher für jede ganze homogene Function des p ten Grades von den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Gleichung*

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = pf,$$

deren Inhalt den in Rede stehenden *Euler'schen Satz* ausmacht.

Der Begriff der partiellen Differentialquotienten hat auch für die Lehre der Determinanten, deren Principien in I, Cap. IV auseinander gesetzt sind, eine grosse Bedeutung. Es ist daselbst in § 74 hervorgehoben, dass die aus den n^2 Elementen

$$(10) \qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{matrix}$$

gebildete Determinante R in Bezug auf die sämmtlichen n^2 Elemente eine ganze homogene Function des n ten Grades ist, dass dieselbe aber für jede in einer Horizontalreihe befindliche Gruppe von Elementen

$$(11) \qquad b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots b_{\lambda n}$$

eine homogene Function des ersten Grades, für jede in einer Vertikalreihe des Schemas befindliche Gruppe von Elementen

$$(12) \qquad b_{1\nu}, b_{2\nu}, \ldots b_{n\nu}$$

ebenfalls eine homogene Function des ersten Grades bildet. Bezeichnet man die Verbindungen von Elementen, die in I, § 75 als *die adjungirten Elemente des Systems* eingeführt sind wie in § 74 mit $B_{\lambda\mu}$, so gilt für jeden Werth λ die in der Gleichung (6) des § 74 enthaltene Darstellung der Determinante

(13) $$R = b_{\lambda 1} B_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} B_{\lambda 2} + \ldots b_{\lambda n} B_{\lambda n}.$$

Da die Verbindungen $B_{\lambda 1}, B_{\lambda 2}, \ldots B_{\lambda n}$ von den Elementen $b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots b_{\lambda n}$ vollkommen frei sind, kann hieraus geschlossen werden, dass, wenn die Determinante R als Function der n^2 Elemente (10) betrachtet wird, der partielle Differentialquotient von R nach $b_{\lambda 1}$ gleich $B_{\lambda 1}$, nach $b_{\lambda 2}$ gleich $B_{\lambda 2}$, und allgemein nach $b_{\lambda\mu}$ gleich $B_{\lambda\mu}$ sein muss. *Das beliebig gewählte adjungirte Element $B_{\lambda\mu}$ ist also gleich dem nach dem zugehörigen Element $b_{\lambda\mu}$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Determinante R,*

(14) $$\frac{\partial R}{\partial b_{\lambda\mu}} = B_{\lambda\mu}.$$

Weil der nach einer bestimmten Variable genommene partielle Differentialquotient einer Function mehrerer Variabeln gar nicht davon berührt wird, ob man die übrigen Variabeln oder einen Theil derselben später ändert oder nicht ändert, so gilt die Gleichung (14) auch für den Fall, dass die Determinante nur als eine Function der n Elemente (11) aufgefasst wird; in Bezug auf diese ist sie aber, wie bemerkt, eine homogene Function des ersten Grades, und darum verwandelt sich unter dem gegenwärtigen Gesichtspunkt der *Euler*'sche Satz (9) in die Gleichung (13) selbst. Weil ferner R zugleich eine homogene Function der Elemente (12) ist, so kann der *Euler*'sche Satz auch für diese Auffassung gebildet werden und liefert dann die Gleichung

(15) $$R = b_{1\nu} B_{1\nu} + b_{2\nu} B_{2\nu} + \ldots + b_{n\nu} B_{n\nu}$$

die in I, § 74 unter (7) angeführt ist. Das in Bezug auf die n^2 Elemente (10) genommene vollständige Differential der Determinante R hat ferner nach der Bestimmung (14) den Ausdruck der Doppelsumme

(16) $$dR = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} B_{\lambda\mu}\, db_{\lambda\mu}.$$

§ 47. Geometrische Deutung des Differentials einer Function zweier Variabeln.

Wenn für ein gewisses Gebiet zweier unabhängigen Variabeln x und y eine stetige Function $f(x, y)$ gegeben ist, so kann eine Verbindung der Variabeln $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ gewählt und die Frage nach allen denjenigen Verbindungen x, y aufgeworfen werden, für welche die Function denselben Werth $f(x^{(0)}, y^{(0)})$ behält, oder welche *die Gleichung zwischen den Unbekannten x und y*

(1) $$f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

erfüllen. Es ist möglich, dass hier ausser $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ kein anderes Werthsystem, oder nur eine beschränkte Anzahl von Werthsystemen genügt. Diese Fälle betrachten wir als Ausnahmen und setzen als Regel voraus, dass die Gleichung (1) in der Weise befriedigt werden könne, dass die eine Variable in einem bestimmten Intervall nach der Stetigkeit geändert wird und dabei die zugehörige andere Variable eine oder mehrere Reihen von stetig zusammenhängenden Werthen durchläuft. Alsdann ist die zweite Variable von der ersteren abhängig; *innerhalb der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der x, y bilden die Werthsysteme, welche die Gleichung* (1) *erfüllen, eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die unter Umständen aus mehreren Stücken besteht.* Sobald x, y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene gedeutet werden, so erscheint die durch die Gleichung (1) bestimmte einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit als eine Linie, was in § 2 auf andere Weise ausgedrückt worden ist.

Setzt man in der Gleichung (1) an die Stelle von $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ successive andere Verbindungen $x^{(1)}$, $y^{(1)} \ldots$, so werden dadurch unter der gleichen Voraussetzung andere und andere Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung characterisirt, in denen beziehungsweise die Function $f(x, y)$ constant ist, oder der betreffende Werth derselben herrscht. Statt den Werth der Function festzusetzen, kann man auch bei der Differenz der Function

(2) $$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

ein bestimmtes Werthsystem (x, y) auswählen, und alle diejenigen Werthsysteme $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ betrachten, für welche die Differenz den für ein gewisses Werthsystem eintretenden Werth beibehält. Unter diesem Gesichtspunkt soll die Differenz (2) geometrisch gedeutet werden. Um die hier auftretenden Begriffe zunächst an einem Beispiel anschaulich zu machen, nehmen wir für (1) die mit den Constanten a, b und c gebildete Function des ersten Grades

$$(3) \qquad ax + by + e.$$

Es wird vorausgesetzt, dass a und b nicht gleichzeitig gleich Null sind, da sonst die Function (3) gleich einer Constante sein würde. Für diese Function erhält die zugehörige Differenz (2) die Gestalt

$$(4) \qquad a\Delta x + b\Delta y.$$

Wir sehen wieder die Werthe x, y als fest, die Differenzen Δx und Δy als unabhängig veränderlich an, und denken uns a, b als die relativen Coordinaten eines in der Ebene befindlichen Punctes S in Bezug auf den Punkt (x, y) oder O, während Δx, Δy die relativen Coordinaten des Punktes $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ oder T in Bezug auf denselben Punkt O sind.

Es seien nun ϱ und t positive Grössen, ω und φ bestimmte Winkel, für welche wie in § 2 die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \varrho, & a = \varrho\cos\omega, \quad b = \varrho\sin\omega \\ \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = t, & \Delta x = t\cos\varphi, \quad \Delta y = t\sin\varphi \end{cases}$$

gelten. Dann erhält die Differenz (4) den Ausdruck

$$(6) \qquad \varrho t(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi) = \varrho t\cos(\varphi - \omega).$$

Sie ist also gleich dem Product aus der Länge ϱ der Linie OS, aus der Länge t der Linie OT und dem Cosinus des Neigungswinkels SOT oder $\varphi - \omega$, und hat demnach das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem der betreffende Winkel spitz oder stumpf ist. Wenn von dem Punkte T auf die unbegrenzt verlängerte Linie OS ein Loth herabgelassen wird, so trifft der Fusspunkt desselben U je nach den beiden unterschiedenen Fällen entweder auf dieselbe Seite von O, auf der S liegt, oder auf die entgegengesetzte. Die Länge der Linie OU, im ersten Falle positiv, im zweiten negativ genommen, heisst mit einem in I, § 85 gebrauchten Ausdrucke *die Projection der Linie OT in Bezug auf die Linie OS*, und hat nach dem Obigen den Werth $t\cos(\varphi - \omega)$. Mithin kann die Differenz (4) als das Product aus der Länge OS und der genannten Projection aufgefasst werden. Die Differenz (4) bleibt daher für diejenigen Punkte $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ oder T constant, für welche die zugehörige Projection den gleichen Werth behält oder der betreffende Fusspunkt des Lothes U derselbe bleibt. Dies geschieht in *allen denjenigen geraden Linien, welche auf der Linie OS senkrecht stehen.* Die Werthe der Differenz (4) ändern sich mit der Lage des Fusspunktes U auf der unbegrenzten Linie OS und bilden eine nach ihrer algebraischen Grösse geordnete Reihe, wobei die positiven Werthe derjenigen Seite, auf welcher sich der Punkt S befindet, die negativen Werthe der entgegengesetzten Seite entsprechen, der Werth Null aber zu dem Punkte O selbst gehört. Nach einer vorhin gemachten Bemerkung sind die auf der Linie OS senkrechten geraden Linien zugleich diejenigen, in denen *die Function $ax + by + e$ einen constanten Werth* hat, was auf andere Weise auch aus § 2 hervorgeht. Vermöge dieser Eigenschaft wird eine ganze rationale Function des ersten Grades von zwei Variabeln *eine lineare Function von zwei Variabeln* genannt, und dieselbe Bezeichnung auch auf ganze rationale Functionen von mehreren Variabeln übertragen.

Das vollständige Differential der Function (3) entsteht aus der Differenz derselben (4), in dem statt der Differenzen Δx, Δy respective die Differentiale dx, dy gesetzt werden, also nur die Schreibweise geändert wird. Für das vollständige Differential einer beliebigen Function $f(x, y)$ hat man aber nach § 45 den Ausdruck

$$(7) \qquad df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy.$$

Auch hier denken wir uns das Werthsystem (x, y) als beliebig gewählt und festgehalten, die Differentiale dx und dy dagegen als unabhängig veränderlich. Ihrem absoluten Werthe nach sind dieselben von gewissen kleinen Grössen eingeschlossen, innerhalb dieser Grenzen kann aber jede für sich einen beliebigen Werth erhalten, so dass der Inbegriff ihrer Werthverbindungen nach einer in § 43 ausgesprochenen Bemerkung eine Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung bildet. In diesem engeren Bezirk stellt das Differential $df(x, y)$ die Differenz der zugehörigen Functionswerthe bis auf kleine Grössen von der Ordnung der Differentiale dx und dy genau dar; dasselbe ist jedoch gleich einer linearen Function der Differentiale dx und dy. Bei der angenommenen geometrischen Deutung entspricht dem Inbegriff der Verbindungen der Differentiale dx und dy ein kleiner Theil der Ebene, in welchem sich der feste Punkt (x, y) befindet; in diesem Stück der Ebene hat aber das Differential $df(x, y)$ in Bezug auf die Differentiale dx und dy dieselbe Gestalt, wie die so eben erörterte Differenz (4) in Bezug auf die Differenzen Δx und Δy, weshalb die über die Differenz (4) angestellten Betrachtungen unmittelbar angewendet werden können.

An die Stelle der Constanten a, b treten beziehungsweise die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, von denen ebenfalls angenommen wird, dass sie nicht zusammen verschwinden. In Folge dessen erhält nach der ersten Gleichung (5) die Grösse $\varrho = \sqrt{a^2+b^2}$ den von Null verschiedenen Werth

$$(8) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}.$$

Man ziehe nun von dem Punkte (x, y) oder O nach dem Punkte S, dessen relative Coordinaten in Bezug auf den Punkt O die Werthe $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ haben, eine gerade Linie, und desgleichen von dem Punkte O nach einem Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ oder T. Dann ist das Differential (7) gleich dem Product der positiven Grösse (8) und der in Bezug auf die Linie OS genommenen Projection der Linie OT. Das Differential (7) behält für diejenigen geraden Linien, welche auf OS senkrecht stehen, einen ungeänderten Werth; einen positiven für diejenigen, welche OS auf der Seite des Punktes O, auf der S liegt, treffen, einen negativen für diejenigen, welche OS auf der entgegengesetzten Seite treffen, den Werth Null für die Senkrechte, welche durch den Punkt O hindurchgeht.

Hieraus folgt, dass für eine durch den Punkt O gezogene Linie, die nicht auf OS senkrecht steht, das Differential $df(x, y)$ auf der einen Seite von O einen negativen, auf der anderen einen positiven von Null verschiedenen Werth haben muss, während dasselbe für die auf OS senkrechte Gerade gleich Null ist. Die Differenz $f(x+dx,\ y+dy) - f(x, y)$ ist daher auf der zuletzt genannten Geraden bis auf kleine Grössen von der Ordnung dx und dy gleich Null, auf den übrigen durch den Punkt O gehenden Geraden, den Punkt O selbst ausgenommen, nicht gleich Null. Aus diesem Grunde stellt die auf OS senkrechte

Gerade für diejenige Linie, in welcher die gegebene Function den in dem Punkte O vorhandenen Werth behält, *die berührende Gerade* dar. Die gerade Linie OS ist nach der in § 37 gegebenen Definition *die Normale* der in Rede stehenden Linie oder Curve.

Wenn eine Curve und die in einem Punkte derselben berührende Gerade gezeichnet vorliegen, so kann die Normale von dem Punkte aus auf der einen oder der anderen Seite der Curve gezogen werden. In der obigen Untersuchung wird zuerst die Normale OS und darnach die berührende Gerade als auf der ersten senkrecht stehend bestimmt. Man darf daher fragen, wodurch die Seite der Curve kenntlich sei, nach welcher die Normale OS gerichtet ist. Die Antwort ergiebt sich durch die Betrachtung des Differentials $df(x,y)$. Offenbar wird das Vorzeichen, welches das Differential für zwei bestimmte zusammengehörige Werthe dx und dy annimmt, nicht geändert, wofern man jeden von ihnen mit derselben positiven Grösse multiplicirt, oder, in der Sprache der Geometrie, das Vorzeichen wird nicht geändert, wenn man von dem Punkte (x,y) oder O aus auf derselben geraden Linie stets in demselben Sinne fortschreitet. Man findet daher das Vorzeichen des Differentials $df(x,y)$, welches dem Fortschreiten auf der Normale OS entspricht, indem man statt der Differentiale dx und dy respective die in Bezug auf den Punkt O genommenen relativen Coordinaten des Punktes S, nämlich die Grössen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ substituirt. Auf diese Weise verwandelt sich (7) in den Ausdruck

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2,$$

der als *eine Summe von zwei Quadraten stets positiv* ist. Bei dem Fortschreiten auf der entgegengesetzt gerichteten Normale sind statt dx und dy die entgegengesetzten Grössen $-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ zu substituiren, wodurch nothwendig ein negatives Resultat entsteht. *Die Normale OS ist demnach nach der-*

jenigen Seite der Curve gerichtet, auf welcher das Differential $df(x, y)$ *einen positiven Werth hat.*

Man kann die gegebene Entscheidung auch folgendermassen aussprechen. Durch die Linie, in welcher die Function $f(x, y)$ den constanten Werth $f(x^{(0)}, y^{(0)})$ behält, werden die Theile der Ebene, in welchen $f(x, y) > f(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist, von denen getrennt, in welchen $f(x, y) < f(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist. Die Normale, vom Punkte (x, y) nach demjenigen Punkte gezogen, dessen relative Coordinaten in Bezug auf (x, y) die Werthe $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ haben, ist nach derjenigen Seite der betreffenden Linie gerichtet, auf welcher die Function $f(x, y)$ im algebraischen Sinne zunimmt.

Als Beispiel möge die Function

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{10}$$

dienen. Eine Linie, in welcher die Function ihren Werth festhält,

$$x^2 + y^2 = x^{(0)2} + y^{(0)2},$$

ist ein Kreis, dessen Centrum in dem Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Jede solche Kreislinie trennt den Theil der Ebene, für dessen Punkte das Quadrat der Entfernung grösser als das Quadrat des Kreisradius ist, von demjenigen Theil, für dessen Punkte das Umgekehrte stattfindet. Der erste Theil ist ausserhalb, der zweite innerhalb der betreffenden Kreislinie gelegen. Die im Punkte (x, y) für die zugehörige Kreislinie construirte Normale, nach demjenigen Punkte gezogen, welcher in Bezug auf (x, y) die durch partielle Differentiation der Function (10) entstehenden relativen Coordinaten $2x$ und $2y$ hat, ist mithin nach der äusseren Seite der Kreislinie gerichtet.

§ 48. Bestimmung der Ebene, von welcher eine Fläche in einem gegebenen Punkte berührt wird.

Am Schlusse des § 42 ist darauf hingewiesen, dass eine im Raume gegebene Fläche eine zweifach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit von Punkten bilde, die sich in einer dreifach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit befindet. Innerhalb der Mannigfaltigkeit der drei Variabeln x, y, z wird eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bestimmt, indem man vorschreibt, dass eine Variable z gleich einer Function der beiden anderen $f(x, y)$ sei. Bedeuten nun x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, so stellt demgemäss die Gleichung

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

das Gesetz einer Fläche, oder, wie man meistens sagt, eine Fläche dar. Insofern $f(x, y)$ für ein gewisses Gebiet der Variabeln x, y, das heisst für einen Theil der Coordinatenebene der $x\,y$ gegeben ist, wird für jeden in demselben enthaltenen Punkt (x, y) durch das Vorzeichen und den absoluten Werth der Grösse z die Richtung und die Länge eines auf der Ebene zu construirenden Lothes bezeichnet; dann bildet der Inbegriff der Endpunkte der zugehörigen Lothe die bezügliche Fläche. Die Differenz von zwei Functionswerthen, die respective den Verbindungen x, y und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ entsprechen, giebt die Differenz der betreffenden z Coordinaten

$$\varDelta z = f(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y) - f(x, y). \tag{2}$$

Es leuchtet ein, dass, wenn die Werthe der Variabeln x, y betrachtet werden, die einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit oder einer gewissen Linie angehören, die correspondirenden Punkte der Fläche ebenfalls eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit oder eine Linie ausmachen. Sobald ein bestimmtes Werthsystem x, y beliebig angenommen und über die Differenzen $\varDelta x$, $\varDelta y$ so verfügt wird, dass ihr Verhältniss ungeändert bleibt, so beschreibt der Punkt $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ in der $x\,y$ Ebene eine durch den Punkt (x, y) gehende gerade Linie; die in den Punkten derselben auf der Ebene errichteten Perpendikel bilden eine zu der $x\,y$ Ebene senkrechte Ebene, von welcher die gegebene Fläche in einer ebenen Curve geschnitten wird. Hierher gehören namentlich auch die Fälle, in denen entweder nur die eine Variable x oder nur die andere y geändert wird, für welche also der Punkt $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$, je nachdem $\varDelta y = 0$ oder $\varDelta x = 0$ ist, eine Parallele zu der x Axe oder zu der y Axe beschreibt.

Für die im vorigen § erörterte Function (3) wird aus der obigen Gleichung (1) die Gleichung

$$z = ax + by + e, \tag{1a}$$

mithin erhält die Differenz Δz den Ausdruck

(3) $$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y.$$

Die Beschaffenheit der in (1_a) dargestellten Fläche ergiebt sich durch Betrachtung der Linien, welche einer partiellen Aenderung von x und von y entsprechen. Es sei zuerst $\Delta y = 0$, so zeigt die Gleichung $\Delta z = a\Delta x$ an, dass die Fläche in dem Punkte (x, y, z) durch eine zu der xz Ebene parallele Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird, welche mit der Parallele zur positiven x Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente den Werth a hat. Indem hierauf $\Delta x = 0$ gesetzt wird, lehrt die Gleichung $\Delta z = b\Delta y$, dass die Fläche in dem Punkte (x, y, z) durch eine zu der yz Ebene parallele Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird, die mit der Parallele zur positiven y Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente den Werth b besitzt. Es gehören nun zu den drei Punkten der xy Ebene

(4) $$(x, y), \quad (x + \Delta x, y), \quad (x, y + \Delta y)$$

drei Punkte der Fläche, für welche die mit Rücksicht auf den ersten Punkt genommene Differenz der z Coordinate respective die Werthe

(5) $$0, \quad a\Delta x, \quad b\Delta y$$

annimmt. Wenn man jetzt einen Punkt construirt, für welchen die mit Bezug auf den ersten Punkt genommene Differenz der z Coordinate gleich der algebraischen Summe $a\Delta x + b\Delta y$ ist, so bildet derselbe die dem ersten Punkt gegenüber liegende vierte Ecke des Parallelogramms, dessen zweite und dritte Ecke der zweite und dritte Punkt sind. Vermöge der Gleichung (3) ist aber der bezeichnete vierte Punkt derjenige Punkt der in Rede stehenden Fläche, welcher zu dem Punkte $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ der xy Ebene gehört; dieser letztere bildet mit den in (4) characterisirten Punkten ein Rechteck, und liegt dem Punkte (x, y) gegenüber. Weil sich also der vierte Punkt der Fläche mit den drei ersten stets in der gleichen Ebene befindet, der zweite und dritte aber stets in zwei durch den ersten Punkt laufenden vollkommen bestimmten geraden Linien liegen, so gehört der vierte Punkt nothwendig einer und derselben Ebene an, und diese Ebene ist es, welche durch die Gleichung (1_a) dargestellt wird. Auch sieht man leicht ein, dass die Gleichung jeder Ebene, die nicht zu der xy Ebene senkrecht steht, in der Form (1_a) enthalten ist, und dass jede andere Ebene durch eine Gleichung $ax + by + e = 0$ ausgedrückt wird. Dieselben Ergebnisse lassen sich vermittelst der in I, § 86 angestellten Ueberlegung ableiten.

Bei der allgemeinen Gleichung (1) wird die Differenz der z Coordinaten bis auf kleine Grössen von der Ordnung der Differentiale dx und dy genau durch das vollständige Differential $df(x, y)$ ausgedrückt, so dass statt (2) die Gleichung

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \tag{6}$$

erscheint. Für einen durch den Punkt (x, y, z) geführten mit der xz Ebene parallelen Schnitt ist dy gleich Null, dx unabhängig veränderlich, für einen mit der yz Ebene parallelen Schnitt dx gleich Null, dy unabhängig veränderlich, so dass sich (6) beziehungsweise in je eine der Gleichungen

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx, \tag{6_a}$$

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \tag{6_b}$$

verwandelt. Ihre Bedeutung folgt aus demjenigen, was über die Construction der berührenden Linie für ebene Curven mitgetheilt ist. Die erste Gleichung sagt aus, dass die berührende Linie der Schnittcurve in der mit der xz Ebene parallelen Ebene gegen die Parallele zur x Axe einen Winkel α, die zweite Gleichung, dass die berührende Linie der Schnittcurve in der mit der yz Ebene parallelen Ebene gegen die Parallele zur y Axe einen Winkel β macht, deren trigonometrischen Tangenten durch die partiellen Differentialquotienten der Function $f(x, y)$ in der folgenden Weise ausgedrückt werden

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \tag{7}$$

Weil nun die allgemeine Gleichung (6) aus der Gleichung (3) entsteht, indem Δx, Δy, Δz, a, b respective durch dx, dy, dz, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ersetzt werden, so schliesst man, dass ein durch die Gleichung (6) bestimmter Punkt von den Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ in derjenigen Ebene liegt, welche die beiden durch (7) bestimmten berührenden Linien enthält. Der Unterschied der z Coordinaten, welche bei demselben Punkte der xy Ebene $(x+dx,\ y+dy)$ zu der durch (1) gegebenen Fläche und zu der so eben definirten Ebene gehören, ist gleich dem Unterschiede zwischen der Differenz $f(x+dx,\ y+dy)-f(x,y)$ und dem in Rede stehenden Werthe von dz, und muss eine kleine Grösse von höherer Ordnung als die Grössen dx und dy sein. Würde durch den Punkt (x, y, z) der Fläche eine andere Ebene hindurch gelegt, so hätte man für diese nach dem Obigen die Gleichung $z = a_1 x + b_1 y + e_1$, wo wenigstens eine der beiden Gleichungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = a_1$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = b_1$ nicht erfüllt wäre; demnach müsste der Unterschied zwischen der Differenz $f(x+dx,\ y+dy)-f(x,y)$ und dem Werthe $a_1\,dx + b_1\,dy$ nothwendig eine kleine Grösse der ersten Ordnung sein. Aus diesem Grunde kommt die mit Hülfe von (7) bestimmte Ebene der gegebenen Fläche näher als jede andere durch den Punkt (x, y, z) gelegte Ebene; die erstere ist daher *eine Ebene, von welcher die gegebene Fläche in dem betreffenden Punkte berührt wird.* Wenn durch den Punkt der Fläche (x, y, z) eine beliebige auf der xy Ebene senkrechte Schnittebene gelegt wird, und die Differentiale dx, dy so geändert werden, dass ihr gegenseitiges Verhältniss dasselbe bleibt, so erhält man die für die Schnittcurve aufzusuchende berührende Linie als Durchschnitt der construirten berührenden Ebene mit der genannten Ebene. Man darf daher auch sagen, dass die berührende Ebene den Inbegriff der berührenden Linien jener sämmtlichen Schnittcurven bildet.

Die im vorigen § angestellten Erörterungen über die Bedingungen, unter denen das Differential $df(x,y)$ einen positiven, negativen oder verschwindenden Werth annimmt, gewinnen gegenwärtig dadurch eine andere Gestalt, dass statt $df(x,y)$ das Differential der z Coordinate angewendet werden darf. Zu den in der xy Ebene durch den Punkt (x, y) gehenden Linien, für welche $df(x,y)$ positiv, negativ oder gleich Null ist, gehören Linien in der berührenden Ebene der gegebenen Fläche, für welche beziehungsweise der Werth der z Coordinate im algebraischen Sinne steigt oder fällt, oder sich gleich bleibt. Hierbei können statt der Anfangselemente der in der berührenden Ebene befindlichen Linien auch die Anfangselemente der entsprechenden Linien genommen werden, die in der gegebenen Fläche selbst liegen.

§ 49. Differentiation einer durch eine Gleichung gegebenen Function einer Variable.

Es begegnet oft, dass Fragen der Analysis nicht in demjenigen Gebiete, in dem sie ihren Ursprung haben, sondern erst in einem höheren Gebiet ihre Erledigung finden. So lässt sich die Aufgabe der Differentiation einer Function einer Variable für den Fall, dass die Function mit der Variable durch eine noch aufzulösende Gleichung verknüpft ist, nur mit Hülfe der Differentiation von Functionen zweier Variabeln allgemein beantworten. Die Bestimmung der Abhängigkeit einer Variable y von einer Variable x durch eine Gleichung kommt auf die Forderung hinaus, dass eine gewisse mit den beiden Variabeln zu bildende Function $f(x, y)$ den Werth Null annehme. Soll die Forderung erfüllbar sein, so muss ein Werthsystem $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ existiren, welches derselben genügt. Dann darf man aber die Forderung durch die Gleichung

$$(1) \qquad f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

ersetzen, welche in § 47 erörtert ist und auf die wir jetzt zurückgehen. Wie dort wird angenommen, dass, wenn eine der beiden Variabeln, etwa x, ausgewählt und von einem bestimmten Werthe $x^{(0)}$ an stetig geändert wird, die entsprechende zweite Variable sich von einem gewissen Werthe $y^{(0)}$ an ebenfalls stetig ändere. Hierbei ist die Möglichkeit zugelassen, dass zu demselben $x^{(0)}$ ausser $y^{(0)}$ noch andere Werthe $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$,... gehören, und wird vorausgesetzt, dass in Folge der stetigen Aenderung der ersten Variable die zweite Variable von jedem jener Werthe aus sich ebenfalls stetig ändere. Die auf diese Weise entstehenden Reihen zusammengehöriger Werthsysteme oder Stücke von einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten müssen aber in der Betrachtung strenge von einander gesondert werden. Mit einem anderen Ausdrucke lässt sich sagen, dass durch die

Gleichung (1) die Variable y als eine ein- oder mehrdeutige Function der Variable x bestimmt sein kann, dass aber in dem letztern Falle die einzelnen Zweige von einander unterschieden werden müssen, und die Function in jedem einzelnen Zweige als eine eindeutige aufgefasst wird. Die Frage nach der Bestimmung des von der Function y in Bezug auf die Variable x genommenen Differentialquotienten bezieht sich nothwendig auf einen einzelnen Zweig der Function. Unter dieser Voraussetzung kommt es darauf an, die Variabeln von einem bestimmten Werthsystem x, y ausgehend um solche Differenzen zunehmen zu lassen, dass die Gleichung (1) befriedigt bleibt. Weil aber die Grenze des Verhältnisses der gleichzeitig abnehmenden Differenzen gesucht wird, so darf man statt der Gleichung (1) die Forderung substituiren, dass das mit den Differentialen dx und dy gebildete Differential der Function $f(x, y)$ verschwinde, oder dass

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = 0 \tag{2}$$

sei. Hieraus folgt der gesuchte Differentialquotient als der Werth des Quotienten der betreffenden Differentiale, wofern nur die Bedingung erfüllt ist, dass für das angewendete Werthsystem x, y der partielle Differentialquotient $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nicht gleich Null sei,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}. \tag{3}$$

Auf gleiche Art kann die Variable x als Function der Variable y aufgefasst und der Differentialquotient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}} \tag{4}$$

bestimmt werden, sobald für das angewendete Werthsystem x, y der partielle Differentialquotient $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nicht gleich Null ist. Nunmehr wird auch der Zusammenhang einleuchtend, welcher zwischen der in § 47 und der in § 4 gegebenen Construction der berührenden Linie an eine Curve besteht. Der Umstand, dass die für $\frac{dy}{dx}$ in (3) und für $\frac{dx}{dy}$ in (4) aufgestellten Ausdrücke einander reciprok sind, entspricht der in § 11 besprochenen Beziehung zwischen den Differentialquotienten zweier Functionen, von denen die eine die umgekehrte Function der andern ist.

Durch das so eben entwickelte Verfahren wird auch die am Schlusse des § 9 erwähnte Aufgabe gelöst, den Differentialquotienten einer algebraischen Function einer Variable x zu bilden, welche Function als die Wurzel einer algebraischen Gleichung gegeben ist, deren Coefficienten rationale Functionen der Variable x sind. An jener Stelle sind mit den Constanten $A_{0,0}, A_{0,1}, \ldots A_{0,m_0}, \ldots A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots A_{n,m_n}$ die Functionen von x

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_0 &= A_{0,0}\, x^{m_0} + A_{0,1}\, x^{m_0-1} + \ldots + A_{0,m_0} \\ A_1 &= A_{1,0}\, x^{m_1} + A_{1,1}\, x^{m_1-1} + \ldots + A_{1,m_1} \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n,0}\, x^{m_n} + A_{n,1}\, x^{m_n-1} + \ldots + A_{n,m_n} \end{aligned}$$

gebildet, welche die Coefficienten der nach den Potenzen von y geordneten rationalen ganzen Function $f(x, y)$ ausmachen,

$$(6)\qquad f(x,y) = A_0\, y^n + A_1\, y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\, y + A_n;$$

dann lautet die betreffende Gleichung, deren Coefficienten respective gleich den rationalen Functionen $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots \frac{A_n}{A_0}$ sind,

$$(7)\qquad f(x, y) = 0.$$

Man darf hier voraussetzen, dass es keine ganze Function giebt, welche ein gemeinsamer Theiler von jeder der Functionen $A_0, A_1, \ldots A_n$ ist. Jedoch dürfen die Werthe von x, für welche dann noch die Function A_0 verschwindet, nicht von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Ein beliebig gewählter Werth $x = x^{(0)}$ ist somit der Reihe nach in die Functionen $A_0, A_1, \ldots$ zu substituiren, und hierauf die erste derselben A_ν herauszuheben, welche nicht verschwindet. Sollten alle verschwinden, so müssten sie sämmtlich nach I, § 43 durch die Differenz

$x - x^{(0)}$ algebraisch aufgehen, mithin der Voraussetzung entgegen diese Differenz zum gemeinsamen Theiler haben. Es giebt daher einen Coefficienten A_ν, welcher für $x = x^{(0)}$ nicht gleich Null ist. Demnach wird die Gleichung (7) für $x = x^{(0)}$ zu einer algebraischen Gleichung des $n - \nu$ten Grades in Bezug auf die Grösse y, und liefert nach I, § 67 für y genau $n - \nu$ reelle oder complexe Wurzeln. Bei der gegenwärtigen Betrachtung muss ermittelt werden, ob es unter denselben reelle giebt; falls solche vorhanden sind, stellen sie die zu $x^{(0)}$ gehörenden Werthe $y^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots$ dar, unter denen ein beliebiger $y^{(0)}$ auszuwählen ist.

Nun bestimmt sich der Werth des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ auf die angegebene Weise mit Hülfe der partiellen Differentialquotienten

$$(8)\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{dA_0}{dx} y^n + \frac{dA_1}{dx} y^{n-1} + \ldots + \frac{dA_{n-1}}{dx} y + \frac{dA_n}{dx},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = nA_0 y^{n-1} + (n-1) A_{n-1} y^{n-2} + \ldots + A_{n-1},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ für die einzusetzenden Werthe $x^{(0)}, y^{(0)}$ nicht den Werth Null bekomme. Weil dieser Ausdruck die für ein ungeändertes x in Bezug auf y genommene erste Ableitung der Function $f(x,y)$ bezeichnet, und weil dieselbe vermöge I, § 49 für $y = y^{(0)}$ dann und nur dann verschwindet, wenn unter den angeführten Wurzeln $y^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots$ noch eine zweite vorkommt, die gleich $y^{(0)}$ ist, so fällt die in Rede stehende Voraussetzung mit der Bedingung zusammen, dass keine der übrigen Wurzeln $y_1^{(0)}, \ldots$ gleich der gewählten Wurzel $y^{(0)}$ sei.

§ 50. Geometrische Deutung des Differentials einer Function von drei Variabeln.

Bei der Betrachtung der Functionen von drei Variabeln $f(x, y, z)$ gewährt die Auffassung der drei Variabeln als rechtwinklige Coordinaten eines im Raume befindlichen Punktes ähnliche Vortheile, wie in § 47 für Functionen von zwei Variabeln durch Beziehung auf die Ebene gewonnen sind. Die Erörterung einer mit den Constanten a, b, c, e gebildeten linearen Function, mit der wir wieder beginnen,

$$(1)\qquad f(x, y, z) = ax + by + cz + e$$

lässt sich hier kürzer zusammenfassen, da der vorige § daran erinnert hat, dass die Flächen, in welchen die Function einen constanten Werth behält, leicht zu construirende Ebenen sind. Die zu den Werthsystemen x, y, z und $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ gehörende Differenz der Function (1) hat den Ausdruck

$$(2)\qquad a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z.$$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass wenigstens eine der drei Constanten a, b, c einen von Null verschiedenen Werth habe, da andernfalls die Function (1) gleich einer Constante wäre. Der Punkt mit den beliebig gewählten und dann festgehaltenen Coordinaten x, y, z heisse wieder O; der Punkt, dessen in Bezug auf O genommene relative Coordinaten die Werthe a, b, c haben, S; der Punkt mit den Coordinaten $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ sei T. Alsdann stellt der Ausdruck (2) nach I, § 86 das Product aus der Länge OS, der Länge OT und dem Cosinus des Winkels SOT dar, und zwar ist

$$(3)\qquad \begin{aligned} OS^2 &= a^2 + b^2 + c^2, \\ OT^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \\ \cos(SOT) &= \frac{a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}. \end{aligned}$$

Das Product der Länge OT und des Cosinus des Winkels SOT ist die von der Linie OT in Bezug auf die Linie OS genommene Projection; jenachdem der Fusspunkt U des Lothes, das von T auf die unbegrenzt verlängerte Linie OS herabgelassen wird, auf dieselbe Seite von O wie der Punkt S oder auf die entgegengesetzte fällt, hat die betreffende Projection ein positives oder negatives Vorzeichen, während ihr absoluter Werth durch die Länge OU gemessen wird. Nun bleibt der Fusspunkt U so lange und nur so lange ungeändert, als sich der zugehörige Punkt T auf derselben gegen OS senkrechten Ebene befindet. Mithin hat die Differenz (2), welche gleich dem Product der positiven unveränderlichen Grösse OS und der bezeichneten Projection ist, für alle Punkte einer gegen OS senkrechten Ebene einen constanten Werth, der positiv, negativ oder gleich Null ist, jenachdem der zugehörige Punkt U, von dem Punkte O aus betrachtet, auf derselben Seite wie der Punkt S, auf der entgegengesetzten Seite oder in dem Punkte O selbst liegt. Die Ebenen, in welchen die Differenz (2) ihren Werth behält, sind zugleich diejenigen, in denen die Function (1) constant ist; insofern die construirte Linie OS auf der bezüglichen durch den Punkt O gehenden Ebene senkrecht steht, wird OS *die in dem Punkte O errichtete Normale der Ebene* genannt.

Für das vollständige Differential einer beliebigen Function von drei Variabeln

$$(4)\qquad df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

ergiebt sich durch Vergleichung mit der Differenz (2) die folgende geometrische Deutung. Von dem Punkte (x,y,z) oder O aus ziehe man nach dem Punkte S, dessen in Bezug auf O genommene relative Coordinaten die Werthe

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

haben, eine gerade Linie. Vermöge der Annahme, dass nicht jeder der drei angegebenen Werthe gleich Null sein darf, muss der Punkt S von dem Punkte O verschieden sein. Es werde ferner von dem Punkte O aus eine gerade Linie nach dem Punkte mit den Coordinaten $x+dx, y+dy, z+dz$, oder T gezogen; dann ist der Werth des Differentials (4) gleich dem Product der positiven Quadratwurzel

$$(5)\qquad \sqrt{Q} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)^2},$$

und der von der Linie OT in Bezug auf die Linie OS genommenen Projection. Die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, für welche die Function $f(x,y,z)$ den in einem Punkte $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ vorhandenen Werth behält oder die Gleichung

$$(6)\qquad f(x,y,z) = f(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$$

befriedigt, bildet eine Fläche im Raume. Wählt man einen Punkt x, y, z derselben beliebig aus, der fest bleibe, und legt den Differentialen dx, dy, dz veränderliche Werthe bei, so gehört ein Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$, für welchen das Differential $df(x,y,z)$ gleich Null ist, wie sich aus den mitgetheilten Ausführungen schliessen lässt, derjenigen Ebene an, von welcher die bezeichnete Fläche in dem Punkte (x,y,z) berührt wird. Die von dem Punkte O ausgehende Linie OS, für welche die Cosinus der mit den Parallelen zu der x, y, z Axe gebildeten Neigungswinkel respective die Werthe

$$(7)\qquad \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}}{\sqrt{Q}},\quad \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}}{\sqrt{Q}},\quad \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}}{\sqrt{Q}}$$

haben, und welche auf der berührenden Ebene senkrecht steht, heisst *die in dem Punkte (x,y,z) errichtete Normale der Fläche.* Nun kann eine Normale nach den beiden Seiten der berührenden Ebene gerichtet sein; es ist also wieder eine Unterscheidung zu treffen. Wenn man für dx, dy, dz beziehungsweise drei Grössen substituirt, die aus der Multiplication der drei Ausdrücke (7) mit dem Differential du einer unabhängigen Grösse u entstehen, so gehört zu einem positiven du das Fortschreiten von O nach S, zu einem negativen du das Fortschreiten auf derselben Linie in entgegengesetztem Sinne. Bei der Anwendung dieser Werthe von dx, dy, dz auf das Differential (4) verwandelt sich das letztere in den Ausdruck

$$(8)\qquad \sqrt{Q}\,du,$$

welcher wegen des positiven Vorzeichens von $\sqrt{Q}$ dasselbe Vorzeichen wie das Differential du annimmt. Daher wird die Normale der Fläche, welche den drei in (7) angegebenen Cosinus entspricht, dadurch bestimmt, dass für einen von dem Punkte x, y, z der Fläche auf dieser Normale fortschreitenden Punkt das Differential der Function $f(x,y,z)$ positiv ist. Die durch die Gleichung (6) dargestellte Fläche sondert Theile des Raumes, in denen die Function den vorgeschriebenen constanten Werth algebraisch übertrifft von Theilen, in denen das Umgekehrte Statt findet; mithin ist die in einem Punkte der Fläche auf die angegebene Weise construirte Normale aus den erwähnten Gründen nach derjenigen Seite der Fläche gerichtet, auf welcher die Function $f(x, y, z)$ algebraisch grösser wird.

Die als Beispiel gewählte Function

$$(9) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

bedeutet das Quadrat der Entfernung des Punktes (x, y, z) vom Anfangspunkte der Coordinaten, und ist deshalb auf jeder um den letztern beschriebenen Kugelfläche constant. Jede Kugelfläche scheidet die Punkte des Raumes, für welche das Quadrat der Entfernung grösser als das Quadrat des Kugelradius, von den Punkten, für welche das Quadrat der Entfernung kleiner ist, so dass der erste Theil ausserhalb, der zweite Theil innerhalb der betreffenden Kugelfläche liegt. Die in einem Punkte (x, y, z) für die gewählte Kugelfläche nach der gegebenen Vorschrift zu errichtende Normale wird nach demjenigen Punkte gezogen, der als relative Coordinaten in Bezug auf den Punkt (x, y, z) die partiellen Differentialquotienten der Function (9) $2x$, $2y$, $2z$ hat; die Richtung dieser Normale geht vermöge der aufgestellten Regel nach der äusseren Seite der Kugelfläche.

Für die Deutung des in (4) dargestellten vollständigen Differentials gilt die selbstverständliche Voraussetzung, dass die drei partiellen Differentialquotienten der Function $f(x, y, z)$ für das betrachtete Werthsystem (x, y, z) nicht gleichzeitig verschwinden. Ein solcher Fall tritt bei der Function $x^2 + y^2 - z^2$ für das Werthsystem $x=0, y=0, z=0$ ein, und kommt daher bei der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ vor. Diese Gleichung stellt eine Kegelfläche dar, deren Spitze sich in dem Punkte $x=0$, $y=0$, $z=0$ befindet; für diesen verlieren die Formeln (7) ihre Bedeutung, während gleichzeitig der Begriff einer eindeutig bestimmten Tangentialebene aufhört. Mit der Betrachtung der singulären Punkte einer Fläche, in denen keine Tangentialebene existirt, werden wir uns nicht beschäftigen, und schliessen deshalb das gleichzeitige Verschwinden von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ aus.

§ 51. Analytischer Ausdruck der Begrenzung einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Die aufgestellte Definition einer Function von einer und von mehreren Variabeln setzt voraus, dass der Inbegriff der Werthsysteme der unabhängigen Variabeln, auf welchen sich die Function bezieht und der eine stetige Mannigfaltigkeit von einer mit der Anzahl der unabhängigen Variabeln gleichnamigen Ordnung bildet, genau bestimmt sei. Für die einfach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit einer Variable x kann die Bestimmung nur auf die Art erfolgen, dass die Variable x alle zwischen zwei gegebenen Werthen a und b, oder ausserdem alle zwischen zwei gegebenen Werthen $a^{(1)}$ und $b^{(1)}$ befindlichen Werthe erhalten darf, und so fort in beliebiger Wiederholung. Man hat hier entweder ein Intervall oder eine Folge von vollständig getrennten Intervallen, so dass es bisher genügte, immer nur *ein* Intervall der unabhängigen Variable ins Auge zu fassen. Bei der $n$fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ wurde in § 42 angenommen, dass jede einzelne Variable eine durch gewisse Werthe abgeschlossene stetige Ausdehnung bekomme, was vermittelst der Ungleichheiten

$$(1) \qquad a_1 \leqq x_1 \leqq b_1,\; a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

ausgedrückt wird. Wir haben aber schon an der angeführten Stelle I, § 108 darauf aufmerksam gemacht, dass ein Gebiet von zwei Variabeln oder eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit auch in anderer Weise bestimmbar sei. In der dort angewendeten geometrischen Ausdrucksweise wurde gesagt, dass die Function von zwei Variabeln x und y für einen Theil der Ebene oder für Theile der Ebene gegeben sein könne; ferner wurde ausser der Bestimmung, die den Ungleichheiten (1) entspricht und zu einem Rechteck gehört, das Beispiel erwähnt, dass eine Function für alle Werthverbindungen x, y, bei denen die Quadratsumme $x^2 + y^2$ kleiner als eine Grösse R^2 ist, das heisst für alle Punkte innerhalb eines Kreises gegeben sei, der in der Ebene um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius R beschrieben ist. Alsdann bildet die durch die

Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ bestimmte Kreislinie die Begrenzung des in Rede stehenden Theils der Ebene; jenachdem bei der Ungleichheit

$$(2) \qquad x^2 + y^2 < R^2$$

der Fall der Gleichheit ausgeschlossen oder mit eingeschlossen wird, sind die Punkte der Kreislinie als ausgeschlossen oder mit eingeschlossen zu betrachten.

Man sieht, dass das vorliegende Beispiel sich auf dieselbe Function bezieht, von der am Schlusse des § 47 gesprochen ist, und dass die allgemeinen daselbst angestellten Erörterungen ebenfalls benutzt werden können. In der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Variabeln x, y bilden hiernach die Werthverbindungen, für welche eine Function $f(x,y)$ den constanten Werth $f(x^{(0)}, y^{(0)})$ behält, eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche die Werthverbindungen, für die $f(x,y) < f(x^{(0)}, y^{(0)})$, von denjenigen trennt, für die $f(x,y) > f(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist. Das analytische Mittel, um den einen wie den andern Theil der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu bezeichnen, ist die Anwendung von einer der zugehörigen Ungleichheiten

$$(3) \qquad f(x,y) < f(x^{(0)}, y^{(0)}); \; f(x,y) > f(x^{(0)}, y^{(0)}),$$

während die Gleichung

$$(4) \qquad f(x,y) = f x^{(0)}, y^{(0)})$$

die für beide Theile vorhandene Begrenzung ausdrückt.

In dem angeführten Beispiel ist die Function $x^2 + y^2$ für alle Werthverbindungen x, y überhaupt definirt, wobei auch solche Verbindungen zugelassen sind, für welche eine der Variabeln oder beide numerische Werthe erhalten, die jede gegebene Grösse übertreffen oder unendlich gross werden; durch die Ungleichheiten $x^2 + y^2 < R^2$ und $x^2 + y^2 > R^2$ wird die Gesammtheit aller Werthverbindungen in zwei Theile gesondert. Wenn eine Function $f(x,y)$ für alle Werthverbindungen x, y definirt ist, so bewirkt man mit Hülfe der Ungleichheiten (3) eine ebensolche Sonderung. Die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche durch eine der beiden Ungleichheiten (3), etwa die erste bestimmt ist, lässt sich dann vermittelst der Einführung einer neuen Function $g(x,y)$ durch die Ungleichheiten

(5) $$g(x,y) < g(x^{(1)}, y^{(1)});\quad g(x,y) > g(x^{(1)}, y^{(1)})$$

weiter zerlegen. Die Function $g(x,y)$ braucht dann nur für diejenige Mannigfaltigkeit definirt zu sein, für welche sie zur Anwendung kommt. In dieser Weise kann fortgefahren und der Umfang einer Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung analytisch ausgedrückt werden, indem man vermittelst einer Folge von Functionen der unabhängigen Variabeln eine bestimmte Folge von Ungleichheiten aufstellt. Es bleibt hierauf übrig, für den einzelnen Fall zu entscheiden, wie sich die Begrenzung aus den durch verschiedene Gleichungen dargestellten Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung zusammensetze, wozu die geometrische Deutung nützlich aber nicht unentbehrlich ist. Fügt man beispielsweise zu der obigen Ungleichheit (2) eine Ungleichheit

(2*) $$lx + my < 0$$

hinzu, wo l und m Constanten bezeichnen, so wird der Theil des Innern der Kreisfläche herausgehoben, der auf einer bestimmten Seite einer durch den Mittelpunkt laufenden geraden Linie liegt; die Begrenzung besteht daher aus einem gewissen Halbkreise und aus dem Durchmesser, welcher die Endpunkte des Halbkreises mit einander verbindet. Auch die in (1) enthaltene Beschränkung jeder der beiden Variabeln auf ein gewisses Intervall wird durch ein System von Ungleichheiten dargestellt, bei denen die Variabeln selbst die Rolle von Functionen übernehmen, die unterhalb oder oberhalb von gewissen festen Werthen dieselben bleiben müssen.

Alles, was über die Begrenzung von Mannigfaltigkeiten der zweiten Ordnung mitgetheilt ist, lässt sich in gleicher Weise auf die Begrenzung von Mannigfaltigkeiten der dritten und einer beliebig hohen Ordnung übertragen. Daher reicht es aus, nur von Mannigfaltigkeiten der dritten Ordnung zu sprechen. Mit Hülfe einer Function $f(x, y, z)$, die für jedes Werthsystem der drei Variabeln x, y, z gegeben ist, kann der Inbegriff aller Werthverbindungen durch die mit einem festen Werthsystem $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ gebildeten Ungleichheiten

(6) $$f(x,y,z) < f(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)});\quad f(x,y,z) > f(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$$

in zwei Theile zerlegt werden, deren gemeinsame Begrenzung die Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung ist, welche der Gleichung

(7) $$f(x, y, z) = f(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$$

entspricht. Für einen der abgesonderten Theile, zum Beispiel den zuerst bezeichneten, liefert eine in Bezug auf denselben definirte Function $g(x, y, z)$ eine neue Zerlegung, sobald man mit einem festen Werthsystem $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ die Ungleichheiten

(8) $$g(x, y, z) < g(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}); \quad g(x, y, z) > g(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$$

aufstellt. Hiernach ergiebt sich der analytische Ausdruck für die Ausdehnung einer Mannigfaltigkeit der dritten Ordnung als eine mit einer Anzahl von Functionen der unabhängigen Variabeln gebildete Folge von Ungleichheiten. Ebenso gilt auch hier die Bemerkung, dass die in (1) enthaltene Bestimmung, bei welcher jede einzelne Variable innerhalb gegebener Grenzen veränderlich ist, mit einem System von Ungleichheiten zusammenfällt, in denen die Variabeln selbst die Functionen ersetzen, welche unterhalb oder oberhalb von gewissen festen Werthen bleiben müssen.

Bei den Mannigfaltigkeiten der dritten Ordnung ist noch der Vortheil der geometrischen Deutung vorhanden, der bei den Mannigfaltigkeiten der höheren Ordnungen verloren geht. Die nach dem Muster von (1) gebildeten Ungleichheiten

(1*) $$a < x < A, \quad b < y < B, \quad c < z < C$$

drücken aus, dass der auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Punkt (x, y, z) innerhalb eines rechteckigen Parallelepipedons gelegen sei, bei welchem die drei Paare von parallelen Ebenen respective den Coordinatenebenen parallel sind und durch die Gleichungen $x = a$, $x = A$; $y = b$, $y = B$; $z = c$, $z = C$ bezeichnet werden. Nehmen wir als zweites Beispiel die beiden Ungleichheiten

(9) $$x^2 + y^2 + z^2 < x^{(0)2} + y^{(0)2} + z^{(0)2}, \quad lx + my + nz < 0,$$

wo l, m, n Constanten sind; dann stellt nach dem vorigen § die erstere den im Innern einer Kugelfläche befindlichen Raum dar, während die zweite Ungleichheit den Theil herausnimmt, welcher auf einer bestimmten Seite einer gewissen durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene liegt. Die Begrenzung des auf diese Weise bestimmten Raumes wird daher durch eine halbe

Kugelfläche und durch das von dem entsprechenden grösten Kreise eingeschlossene Stück einer Ebene gebildet. Man erhält den analytischen Ausdruck der beiden Theile der Begrenzung, indem in (9) zuerst nur das erste Zeichen der Ungleichheit, hierauf nur das zweite Zeichen der Ungleichheit durch ein Gleichheitszeichen ersetzt wird.

§ 52. Partielle Differenzen und Differentialquotienten verschiedener Ordnungen.

Durch die in § 44 angestellte Betrachtung der vollständigen Differenz einer Function mehrerer Variabeln ergaben sich die Begriffe der in Bezug auf eine einzelne Variable und auf mehrere Variabeln genommenen partiellen Differenzen. Da für jede Variable immer nur eine einmalige Differenz gebildet wurde, waren die nach einer einzelnen Variable genommenen partiellen Differenzen von der ersten, die nach mehreren Variabeln genommenen Differenzen von einer mit der Anzahl der Variabeln gleichen Ordnung.

Bei der in § 45 mitgetheilten Darstellung des vollständigen Differentials einer Function kamen jedoch nur solche partielle Differentialquotienten vor, die nach einer einzelnen Variable genommen sind. Man kann nun die Bildung der partiellen Differenzen und der partiellen Differentialquotienten auf die Weise wiederholen, dass man zuerst mit einer Variable, alsdann mit einer anderen und wieder mit einer anderen Variable mehrfach operirt, und hierauf zu einer oder zu mehrern der früher angewendeten Variabeln zurückkehrt; die Ordnungszahl ist hierbei gleich der Anzahl der sämmtlichen einzelnen vorgenommenen Operationen. Ohne die so erzeugten partiellen Differenzen verschiedener Ordnungen speciell zu erörtern, führen wir den Satz an, dass der Werth einer aus einer bestimmten Reihenfolge von einzelnen Differenzenformationen hervorgegangenen partiellen Differenz sich bei einer beliebigen Vertauschung der einzelnen Differenzenformationen nicht ändert. Dieser Satz, welcher in § 44 für die daselbst auftretenden Differenzen mehrfacher Ordnung bewiesen ist, lässt sich mit Hülfe des gleichen Verfahrens allgemein beweisen. Von den partiellen Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen wird dagegen ausführlicher zu sprechen sein.

Wir beginnen wie in § 43 mit einer Function, die durch Multiplication von lauter Functionen der einzelnen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsteht,

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n).$$

Es möge nun $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in der folgenden Anordnung partiell differentiirt werden: zuerst λ_1 mal nach x_1, dann λ_2 mal nach $x_2, \ldots \lambda_n$ mal nach x_n, hierauf μ_1 mal nach x_1, μ_2 mal nach $x_2, \ldots \mu_n$ mal nach x_n. Da jede partielle Differentiation immer nur einen Factor des Products berührt, so bekommt man nach einander die Ausdrücke

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l}
\dfrac{d^{\lambda_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1}}\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n), \\[2ex]
\dfrac{d^{\lambda_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1}}\,\dfrac{d^{\lambda_2}\varphi_2(x_2)}{d x_2^{\lambda_2}} \ldots \varphi_n(x_n), \\[2ex]
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d^{\lambda_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1}}\,\dfrac{d^{\lambda_2}\varphi(x_2)}{d x_2^{\lambda_2}} \ldots \dfrac{d^{\lambda_n}\varphi_n(x_n)}{d x_n^{\lambda_n}}, \\[2ex]
\dfrac{d^{\lambda_1+\mu_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1+\mu_1}}\,\dfrac{d^{\lambda_2}\varphi_2(x_2)}{d x_2^{\lambda_2}} \ldots \dfrac{d^{\lambda_n}\varphi_n(x_n)}{d x_n^{\lambda_n}}, \\[2ex]
\dfrac{d^{\lambda_1+\mu_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1+\mu_1}}\,\dfrac{d^{\lambda_2+\mu_2}\varphi_2(x_2)}{d x_2^{\lambda_2+\mu_2}} \ldots \dfrac{d^{\lambda_n}\varphi_n(x_n)}{d x_n^{\lambda_n}}, \\[2ex]
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d^{\lambda_1+\mu_1}\varphi_1(x_1)}{d x_1^{\lambda_1+\mu_1}}\,\dfrac{d^{\lambda_2+\mu_2}\varphi_2(x_2)}{d x_2^{\lambda_2+\mu_2}} \ldots \dfrac{d^{\lambda_n+\mu_n}\varphi_n(x_n)}{d x_n^{\lambda_n+\mu_n}}.
\end{array} \right.$$

Es muss der letzte Ausdruck stets derselbe bleiben, wie auch die Reihenfolge der successiven partiellen Differentiationen abgeändert werde, weil die $\lambda_1 + \mu_1$ nach x_1 zu vollziehenden Differentiationen nur den ersten Factor, die $\lambda_2 + \mu_2$ nach x_2 zu vollziehenden Differentiationen nur den zweiten Factor angehen,

u. s. f., und weil sich das zu bildende Endproduct immer aus denselben Factoren zusammensetzt.

Der in der Formel (10) des § 45 enthaltene Satz, dass der nach einer einzelnen Variable genommene partielle Differentialquotient einer Summe von Functionen gleich der Summe der betreffenden partiellen Differentialquotienten der einzelnen Summanden ist, zieht den Satz nach sich, dass, um den partiellen Differentialquotienten einer Summe nach mehreren in einer bestimmten Reihenfolge gegebenen Variabeln zu bilden, für die einzelnen Summanden das entsprechende Verfahren auszuführen und von den so entstandenen partiellen Differentialquotienten die Summe zu nehmen ist. Für eine Summe von Producten, bei denen jeder Factor nur von einer einzigen Variable abhängt, wird daher ein auf eine bestimmte Reihenfolge von Variabeln bezüglicher partieller Differentialquotient hervorgebracht, indem man jeden Summanden wie die obige Function (1) behandelt. Es hat sich aber herausgestellt, dass die so erzeugten einzelnen partiellen Differentialquotienten bei einer beliebigen Vertauschung der erforderlichen partiellen Differentiationen nicht geändert werden; diese Eigenschaft geht auf die Summe von mehreren partiellen Differentialquotienten über. Mithin ist der Werth des partiellen Differentialquotienten einer Summe, deren Summanden Producte aus Functionen der einzelnen Variabeln sind, von der Vertauschung der Ordnung der einzelnen partiellen Differentiationen unabhängig. Hierauf darf man, ähnlich wie in § 45, den Schluss gründen, dass bei allen rationalen ganzen Functionen mehrerer Variabeln die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten die Eigenschaft haben, von der Reihenfolge der einzelnen partiellen Differentiationen unabhängig zu sein, und kann alle Functionen mehrerer Variabeln, welche an dieser Eigenschaft Theil nehmen, als regelmässige erklären. Indessen lässt sich auch ein System von besondern Voraussetzungen der Stetigkeit aufstellen, die für einen weiten Inbegriff von Functionen die in Rede stehende Eigenschaft zur Folge haben.

Die Reihenfolge, in welcher bei einer gegebenen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die successiven partiellen Differentiationen auszuführen sind, sei durch die Reihenfolge der betreffenden Variabeln bezeichnet,

(3) $$x_{\mathfrak{a}},\ x_{\mathfrak{b}},\ x_{\mathfrak{c}},\ x_{\mathfrak{d}},\ x_{\mathfrak{e}},\ldots,$$

wo die aus der Reihe von 1 bis n genommenen Zeiger in beliebigen Wiederholungen auftreten dürfen. Durch irgend eine Vertauschung der Zeiger entstehe die Anordnung

(4) $$x_{\mathfrak{a}'},\ x_{\mathfrak{b}'},\ x_{\mathfrak{c}'},\ x_{\mathfrak{d}'},\ x_{\mathfrak{e}'},\ldots;$$

es kommt nun darauf an, die zu den Anordnungen (3) und (4) gehörenden partiellen Differentialquotienten zu vergleichen und deren Uebereinstimmung zu begründen. Zunächst lässt sich zeigen, dass jede Permutation erhalten werden kann, indem eine hinreichende Anzahl von Malen immer nur solche Elemente unter einander vertauscht werden, die neben einander stehen. Nach I, § 73 ist es möglich, jede gegebene Permutation durch lauter gegenseitige Vertauschungen von je zwei Zeigern hervorzubringen; man hat daher nur noch den Beweis zu führen, dass jede gegenseitige Vertauschung von zwei Zeigern durch eine Anzahl von Vertauschungen neben einanderstehender Zeiger erzeugt werden kann. Ein zu diesem Zwecke geeignetes Verfahren möge an einem Beispiel auseinandergesetzt werden. Um in (3) die Elemente $x_{\mathfrak{b}}$ und $x_{\mathfrak{e}}$ mit einander zu vertauschen, lassen sich die folgenden Permutationen von der vorgeschriebenen Beschaffenheit benutzen, bei denen die vor $x_{\mathfrak{b}}$ und nach $x_{\mathfrak{e}}$ vorkommenden Elemente ungeändert bleiben und deshalb nicht notirt werden,

$$\begin{array}{cccc}
x_{\mathfrak{b}} & x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{e}}\\
x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{b}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{e}}\\
x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{b}} & x_{\mathfrak{e}}\\
x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{e}} & x_{\mathfrak{b}}\\
x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{e}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{b}}\\
x_{\mathfrak{e}} & x_{\mathfrak{c}} & x_{\mathfrak{d}} & x_{\mathfrak{b}}.
\end{array}$$

Die Anzahl von Permutationen benachbarter Elemente, welche gebraucht wird, um das Element $x_{\mathfrak{b}}$ von der ersten Stelle der aus 4 Elementen bestehenden Gruppe an die letzte Stelle zu bringen, beträgt 3; die Anzahl, welche ferner noch nöthig ist, um $x_{\mathfrak{c}}$ an die erste Stelle und die mittleren Elemente an ihre urspünglichen Plätze zu rücken, beträgt 2, so dass im ganzen 5 Permutationen benachbarter Elemente zur Anwendung kommen. Damit zwei Elemente gegenseitig ihre Plätze vertauschen, die das erste und letzte Element einer Gruppe von q auf einander folgenden Individuen ausmachen, hat man für den ersten der beschriebenen Processe die Anzahl $q-1$, für den zweiten die Anzahl $q-2$ von Vertauschungen neben einanderstehender Elemente zu benutzen, womit die aufgestellte Behauptung vollständig erwiesen ist. Wenn man daher von der Anordnung (3) zu der Anordnung (4) durch eine Folge von Permutationen je zweier benachbarter Elemente übergeht, und für die sämmtlichen aufgestellten Anordnungen die zugehörigen partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bildet, so genügt der Nachweis, dass jedes Mal zwei partielle Differentialquotienten einander gleich werden, bei denen die nach zwei benachbarten Elementen genommenen Differentiationen vertauscht sind, um das allgemeine Resultat abzuleiten, dass die auf die Anordnungen (3) und (4) bezüglichen partiellen Differentialquotienten einander gleich werden. In letzter Instanz sind also immer nur zwei Elemente x und y zu betrachten und die Bedingungen aufzusuchen, unter denen eine Function $g(x, y)$ derselben die Eigenschaft besitzt, dass der nach y genommene partielle Differentialquotient von $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ dem nach x genommenen partiellen Differentialquotienten von $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ gleich wird.

Des bequemern Ausdrucks wegen setze man

$$(5) \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = g_1(x,y), \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y).$$

Für das einmal gewählte Werthsystem x, y möge die Variable x das Increment h, die Variable y das Increment k erhalten, und es werde von der Function $g(x, y)$ wie in (9) und (10) des § 44 die auf beide Variabeln bezügliche partielle Differenz der zweiten Ordnung gebildet

$$(6) \quad g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x, y);$$

dieselbe ist sowohl gleich der nach y genommenen Differenz der Differenz

$$(7) \qquad g(x+h, y) - g(x, y)$$

wie auch gleich der nach x genommenen Differenz der Differenz

(8) $$g(x, y+k) - g(x, y).$$

Der Ausdruck (7) hat, als Function der einzigen Variable y aufgefasst, den nach y genommenen Differentialquotienten

(9) $$g_2(x+h, y) - g_2(x, y),$$

der Ausdruck (8), als Function der einzigen Variable x betrachtet, den nach x genommenen Differentialquotienten

(10) $$g_1(x, y+k) - g_1(x, y).$$

Nun enthalten die §§ 24 u. f. Hülfsmittel, um die Differenz einer Function einer Variable $F(z+l) - F(z)$ vermittelst des nach z genommenen Differentialquotienten $F'(z)$ auszudrücken. Wenn die Function $F'(\zeta)$ für das von $\zeta = z$ bis $\zeta = z+l$ ausgedehnte Intervall eindeutig, endlich und stetig ist, so wird die bezeichnete Differenz nach (16) des § 24 durch das folgende bestimmte Integral dargestellt

(11) $$F(z+l) - F(z) = \int_z^{z+l} F'(\zeta)\, d\zeta.$$

Sobald ferner die Function $F'(\zeta)$ in dem genannten Intervall nur eine beschränkte Anzahl von Malen vom Wachsen zum Abnehmen übergeht und in der Weise stetig ist, dass bei der Einschaltung einer Folge von Werthen $z, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{n-1}, z+l$, bei der je zwei auf einanderfolgende Werthe um weniger als eine kleine Grösse δ differiren, die entsprechenden Differenzen der Werthe der Function $F'(\zeta)$ numerisch kleiner als dieselbe beliebige kleine Grösse λ ausfallen, dann lässt sich nach § 26 die rechte Seite der obigen Gleichung (11) durch das Product der Grösse l und eines Mittelwerthes der Function $F'(\zeta)$ ersetzen, so dass die Gleichung

(12) $$F(z+l) - F(z) = l\, F'(z+\theta l)$$

entsteht, in der θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck (9) als Function von y und der Ausdruck (10) als Function von x die für die Function $F'(\zeta)$ vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt, folgt also, indem θ_1 und θ_2 positive echte Brüche bezeichnen, für die Differenz (6) die zweifache Darstellung

(13) $$g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x, y) \\ = k(g_2(x+h, y+\theta_2 k) - g_2(x, y+\theta_2 k)),$$

(14) $$g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x, y) \\ = h(g_1(x+\theta_1 h, y+k) - g_1(x+\theta_1 h, y)).$$

Dividirt man beide Ausdrücke durch das Produkt hk und setzt sie einander gleich, so kommt

$$(15)\qquad \frac{g_2(x+h, y+\theta_2 k) - g_2(x, y+\theta_2 k)}{h} = \frac{g_1(x+\theta_1 h, y+k) - g_1(x+\theta_1 h, y)}{k}.$$

Der Quotient links differirt für einen beliebig kleinen Werth h um beliebig wenig von dem partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}$, bei dem das erste Argument gleich x, das zweite Argument gleich $y+\theta_2 k$ ist, der Quotient rechts für einen beliebig kleinen Werth k um beliebig wenig von dem partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}$, bei dem das erste Argument gleich $x+\theta_1 h$, das zweite Argument gleich y ist. Es wird jetzt ferner vorausgesetzt, dass sich der partielle Differentialquotient $\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}$ stetig mit der Variable y, und der partielle Differentialquotient $\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}$ stetig mit der Variable x ändere. Dann erhält man die zu beweisende Gleichung

$$(16)\qquad \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}.$$

Aus den Gültigkeitsbedingungen von (16) fliesst das System von Bedingungen für den allgemeinen Satz, dass der Werth eines partiellen Differentialquotienten einer beliebig hohen Ordnung durch keine veränderte Anordnung der zugehörigen einzelnen Differentiationen verändert wird. Die Anzahl der partiellen Differentialquotienten einer gewissen Ordnung, welche von einer Function einer bestimmten Anzahl von Variabeln gebildet werden können, lässt sich leicht angeben. Bei einer Function von n Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ existiren die n erwähnten partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Die partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung werden entweder zwei Mal nach derselben Variable oder nach zwei verschiedenen Variabeln genommen; von den ersteren giebt es n, von den andern $\frac{n(n-1)}{2}$, mithin im ganzen $\frac{n(n+1)}{2}$. Man ersieht die übliche Bezeichnung an den folgenden Beispielen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2},$$

wo in Folge des obigen Satzes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}$$

ist. Um die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten der $p$ten Ordnung zu erhalten, kann man dieselben in solche eintheilen, die sich auf eine einzige Variable, auf zwei, auf drei Variable beziehen u. s. f. Nach einer einzigen Variable z. B. x_1 muss $p$mal differentiirt werden, es existirt also nur ein zugehöriger partieller Differentialquotient

$$(17) \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_1^p}.$$

In Bezug auf zwei Variable z. B. x_1 und x_2 hat man die partiellen Differentialquotienten

$$(18) \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_1^\alpha\, \partial x_1^\beta},$$

wo die ganzen positiven Zahlen α, β die Gleichung $\alpha+\beta=p$ erfüllen; in Bezug auf drei Variable z. B. x_1, x_2, x_3 die partiellen Differentialquotienten

$$(19) \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_1^\alpha\, \partial x_2^\beta\, \partial x_3^\gamma},$$

wo die ganzen positiven Zahlen α, β, γ die Gleichung $\alpha+\beta+\gamma=p$ befriedigen, u. s. f. Es ergiebt sich demnach die Anzahl der partiellen Differentialquotienten von jeder der bezeichneten Arten beziehungsweise gleich der Anzahl der Auflösungen der Gleichungen

$$(20) \qquad \alpha+\beta=p, \quad \alpha+\beta+\gamma=p, \ldots$$

wofern α, β, γ lauter von der Null verschiedene ganze positive Zahlen bedeuten. Die erste der Gleichungen (20) besitzt $p-1$ Auflösungen, weil die Grösse α successive gleich den Zahlen $1, 2, 3, \ldots p-1$ gesetzt werden kann, und die Grösse β durch den Werth von α vollständig bestimmt wird. In der zweiten

Gleichung (20) darf α successive gleich den Zahlen $1, 2, 3, .. p-2$ genommen werden, während für β und γ jedes Mal die sämmtlichen Auflösungen der Gleichung $\beta+\gamma=(p-\alpha)$ zu bilden sind, deren Anzahl nach dem Vorhergehenden $p-\alpha-1$ beträgt. Die Anzahl der sämmtlichen Auflösungen wird deshalb durch die Summe

$$(p-2)+(p-3)+\ldots+1$$

ausgedrückt, deren Werth gleich $\frac{(p-1)(p-2)}{1\,.\,2}$ ist.

Bezeichnet man die Anzahl der Auflösungen der ϱten Gleichung (20), in der $\varrho+1$ Summanden vorkommen, durch $E_{\varrho+1}(p)$, so ist die Anzahl der Auflösungen der $(\varrho+1)$ten Gleichung, wo die Grösse α vermöge des angegebenen Verfahrens die Werthe $1, 2, \ldots p-\varrho-1$ bekommen darf, gleich der Summe

$$(21)\quad E_{\varrho+1}(p-1)+E_{\varrho+1}(p-2)+\ldots+E_{\varrho+1}(\varrho+1)=E_{\varrho+2}(p).$$

Durch directe Betrachtung hat sich gezeigt, dass

$$(22)\qquad E_2(p)=p-1,\ E_3(p)=\frac{(p-1)(p-2)}{1\,.\,2}$$

ist. Wegen der Gleichung (21) muss die Function $E_{\varrho+2}(p)$ der Differenzengleichung

$$(23)\qquad E_{\varrho+2}(p+1)-E_{\varrho+2}(p)=E_{\varrho+1}(p)$$

genügen, und nach der gegebenen Definition für $p=\varrho+2$ gleich der Einheit sein; diese Eigenschaften enthalten eine vollständige Bestimmung. Es wird die gesuchte Anzahl der Auflösungen der $(\varrho+1)$ten Gleichung in (20) oder die Anzahl derjenigen partiellen Differentialquotienten der $p$ten Ordnung, welche sich auf $\varrho+2$ von einander verschiedene bestimmte Variable beziehen, durch den Ausdruck

$$(24)\qquad E_{\varrho+2}(p)=\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-\varrho-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(\varrho+1)}$$

dargestellt, welcher für $p=\varrho+2$ gleich der Einheit ist und vermöge der Relation

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-\varrho)}{1.2.3\ldots(\varrho+1)}-\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-\varrho-1)}{1.2.3\ldots(\varrho+1)}$$
$$=\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-\varrho)}{1.2.3\ldots\varrho}$$

die Gleichung (23) befriedigt. Wenn man jetzt hinzunimmt, was in I, § 46 auseinander gesetzt ist, dass bei n Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Anzahl der ohne Wiederholung gebildeten Combinationen zu einem Element n, zu zwei Elementen $\frac{n(n-1)}{1.2}$, zu σ Elementen $\frac{n(n-1)\ldots(n-\sigma+1)}{1.2\ldots\sigma}$ beträgt, so findet man für die Gesammtzahl der partiellen Differentialquotienten der $p$ten Ordnung den Ausdruck

$$(25)\qquad n + \frac{n(n-1)}{1.2}(p-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{(p-1)(p-2)}{1.2} + \ldots$$

Derselbe lässt sich in der folgenden Weise zusammenfassen. Es möge zu den n Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine zweite Gruppe von $(p-1)$ neuen Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{p-1}$ hinzugefügt werden, so dass das System von $(n+p-1)$ Elementen

$$x_1, x_2, \ldots x_n;\; t_1, t_2, \ldots t_{p-1}$$

entsteht. Nach dem Obigen ist hier die Anzahl der sämmtlichen ohne Wiederholung gebildeten Combinationen zu p Elementen gleich dem Werth

$$(26)\qquad \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Man kann aber diese sämmtlichen Combinationen auch dadurch hervorbringen, dass man je ein Element der ersten Gruppe mit allen Elementen der zweiten Gruppe, hierauf jede Ambe aus der ersten mit jeder Combination zu $p-2$ aus der zweiten, überhaupt jede Combination zu σ Elementen aus der ersten mit jeder Combination zu $p-\sigma$ Elementen aus der zweiten Gruppe verbindet, wobei die Wiederholungen stets ausgeschlossen sind. Nun sieht man leicht, dass die Anzahl der so entstehenden Verbindungen durch den Ausdruck (25) dargestellt wird; also muss der Werth desselben gleich dem in (26) angegebenen Ausdrucke sein, welcher demnach die Gesammtzahl der partiellen Differentialquotienten der $p$ten Ordnung einer Function von n Variabeln bezeichnet.

Der vorliegende Gegenstand hat eine nahe Verwandtschaft mit der Lehre von den rationalen ganzen homogenen Functionen des $p$ten Grades von n Variabeln. Jedes Glied einer solchen Function ist ein Product von ganzen positiven Potenzen der einzelnen Variabeln, wobei die Summe der Exponenten beständig den Werth der Zahl p hat. Sobald daher die n Variabeln der homogenen Function durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet werden, so entspricht jedem der oben betrachteten partiellen Differentialquotienten ein bestimmtes Glied der erwähnten homogenen Function in der Weise, dass die einzelnen Variabeln hier so oft zu einem Product vereinigt sind, als dort nach ihnen differentiirt wird. Die Anzahl der sämmtlichen verschiedenen Glieder, die in der homogenen Function des $p$ten Grades vorkommen können, fällt deshalb mit der Anzahl der sämmtlichen partiellen Differentialquotienten der $p$ten Ordnung zusammen; sie ist gleich der Anzahl aller aus n Elementen mit Wiederholung gebildeten Combinationen zu p Elementen und wird durch die obige Formel (26) ausgedrückt.

§ 53. Vollständige Differentiale und Differentialquotienten verschiedener Ordnungen.

Die Darstellung des vollständigen Differentials einer Function von mehreren Variabeln beruht, wie in § 45 hervorgehoben ist, auf der Voraussetzung, dass die bezüglichen Differentiale der Variabeln sämmtlich kleine Grössen derselben Ordnung sind; alsdann ist das vollständige Differential gleich dem bis auf kleine Grössen dieser Ordnung genauen Ausdruck der vollständigen Differenz der Function. In Uebereinstimmung mit demjenigen, was in § 41 über die Differentiale verschiedener Ordnungen ausgeführt wurde, ist das zweite vollständige Differential der Function gleich dem bis auf kleine Grössen der zweiten Ordnung genauen Ausdruck der zweiten Differenz der Function, welcher für die Annahme gebildet wird, dass die zweiten Differenzen der einzelnen Variabeln kleine Grössen der zweiten Ordnung seien; die höheren Differentiale der Function werden durch ein entsprechend fortschreitendes Verfahren definirt. Während die ersten Differenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ als kleine Grössen der ersten Ordnung die Differentiale der ersten Ordnung $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ heissen, werden die Differenzen der zweiten, dritten Ordnung u. s. f. als kleine Grössen der entsprechenden Ordnung beziehungsweise die Differentiale der zweiten, dritten Ordnung u. s. f. genannt, und mit den Zeichen $d^2x_1, d^2x_2, .. d^2x_n; d^3x_1, d^3x_2, .. d^3x_n, ...$ notirt. Der Ausdruck der höheren vollständigen Differentiale einer Function $f(x_1, x_2, .. x_n)$ geht aus dem Ausdruck des ersten vollständigen Differentials

$$(1)\quad df(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

ähnlich wie in § 41, mit Hülfe der Regel hervor, nach welcher das erste vollständige Differential einer Summe von Producten gebildet wird. Wir haben in § 45 darauf aufmerksam gemacht, dass die Regeln zur Bildung des Differentials einer Summe, einer Differenz, eines Products und eines Quotienten, welche dort von (10) bis (12) gehen, dieselbe Gestalt haben, mögen sie sich auf Functionen von einer oder von mehreren Variabeln beziehen. In § 41 wurde aus der Regel für die Darstellung des ersten Differentials eines Products von zwei Functionen einer Variable der Ausdruck (13) eines beliebig hohen Differentials desselben Products abgeleitet. Insofern nun für Functionen mehrerer Variabeln dieselbe Grundregel gilt, so folgt auch ein entsprechendes Endresultat, das für das $p$te Differential des Products zweier Functionen von n Variabeln

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \text{ und } g(x_1, x_2, \dots x_n)$$

folgendermassen lautet

$$(2)\quad d^p(fg) = d^pf.g + \frac{p}{1} d^{p-1}f.dg + \frac{p(p-1)}{1.2} d^{p-2}f.d^2g + .. + f.d^pg.$$

Hier gilt jedes Differential einer gewissen Ordnung von einer der beiden Functionen als eine kleine Grösse von der gleichnamigen Ordnung, so dass die rechte Seite ein Aggregat von kleinen Grössen der $p$ten Ordnung, mithin selbst gleich einer kleinen Grösse der $p$ten Ordnung ist. Wird nach dieser Regel das $(p-1)$te vollständige Differential von jedem Summanden der rechten Seite von (1) genommen, indem der partielle erste Differentialquotient den einen, das erste Differential der entsprechenden Variable den anderen Factor des Products liefert, so giebt die Addition der einzelnen Bestandtheile für das $p$te vollständige Differential der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ die Bestimmung

$$(3)\quad d^p f(x_1, x_2, \dots x_n)$$
$$= d^{p-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{p-1}{1} d^{p-2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^p x_1$$
$$+ d^{p-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{p-1}{1} d^{p-2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^p x_2$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ d^{p-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n + \frac{p-1}{1} d^{p-2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) d^2 x_n + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d^p x_n;$$

die verschiedenen Differentiale der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ wie auch der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ sind kleine Grössen von derjenigen Ordnung, welche durch die Ordnung der Differentiation angezeigt wird, und folglich ist das zu bildende Aggregat gleich einer kleinen Grösse der $p$ten Ordnung.

In dem Falle $p = 2$ hat man die Entwickelungen auszuführen

$$(4)\quad d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n,$$
$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} dx_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n,$$

und hierauf, nachdem die einzelnen Ausdrücke der Reihe nach mit den Differentialen $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ multiplicirt sind, von allen Producten die Summe zu nehmen. Das Ergebniss lässt sich als eine doppelte Summe darstellen, $\Sigma\,\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}}} dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}$, bei der jeder der beiden Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ für sich allein die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchläuft. Diese Summe ist eine ganze homogene Function des zweiten Grades oder quadratische Form in Bezug auf die n Differentiale $dx_1, dx_2, \dots dx_n$, während die zugehörigen Coefficienten die nach den gleichnamigen Variabeln genommenen zweiten partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sind. Weil die auf zwei verschiedene Variabeln bezüglichen partiellen Differentialquotienten vermöge des im vorigen § erörterten Satzes einen von der Anordnung der Differentiationen unabhängigen Werth haben, so dass z. B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}$ ist, und weil jeder von zwei solchen partiellen Differentialquotienten mit dem Product derselben beiden Differentiale multiplicirt wird, so treten in der vorliegenden quadratischen Form die mit dem Product von zwei verschiedenen Differentialen multiplicirten Glieder doppelt auf, während die mit den Quadraten der einzelnen Differentiale multiplicirten Glieder nur ein Mal vorkommen. Die quadratische Form erhält daher eine mit I, § 81 übereinstimmende Bezeichnung. Indem man die mit den zweiten Differentialen der Variabeln multiplicirten Glieder hinzufügt, liefert die Gleichung (3) für das zweite vollständige Differential der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ den Ausdruck

$$(5)\quad d^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f}{\partial x_\mathfrak{a}}\, d^2 x_\mathfrak{a}.$$

Wir wollen die Entwickelung der vollständigen Differentiale von einer beliebig hohen Ordnung nur unter einer Einschränkung durchführen, welche auch bei den Functionen einer Variable zur Sprache gekommen ist und darin besteht, dass für alle Variabeln die ersten Differentiale constant, mithin die Differentiale von höherer als der ersten Ordnung verschwindend sein sollen. Bei dieser Annahme fallen auf der rechten Seite von (3) alle Glieder mit Ausnahme derjenigen fort, die in $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ multiplicirt sind; gleiches gilt für die demnächst zu bildenden $(p-1)$ten Differentiale, und man erhält demnach das in Rede stehende $p$te Differential gleich einer $p$fachen Summe, bei der jeder der p Zeiger $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{k}$ für sich die Zahlen von 1 bis n durchläuft,

$$(6)\quad d^p f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \cdots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \frac{\partial^p f}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b} \ldots \partial x_\mathfrak{k}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b} \ldots dx_\mathfrak{k}.$$

So entsteht eine ganze homogene Function oder Form des $p$ten Grades von den n Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, bei welcher jedes aus diesen Differentialen gebildete Product den nach den entsprechenden Variabeln genommenen $p$ten partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zum Coefficienten hat. Jede Verbindung von Zeigern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$ kommt hier ein Mal und nur ein Mal vor; wenn nun zwei solche Verbindungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{f}'$, abgesehen von der Anordnung, einander gleich sind, so fallen erstens die Producte $dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b} \ldots dx_\mathfrak{f}$ und $dx_{\mathfrak{a}'}\, dx_{\mathfrak{b}'} \ldots dx_{\mathfrak{f}'}$ wegen der Grundeigenschaft eines Products, und zweitens die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^p f}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b} \ldots \partial x_\mathfrak{f}}$ und $\frac{\partial^p f}{\partial x_{\mathfrak{a}'}\, \partial x_{\mathfrak{b}'} \ldots \partial x_{\mathfrak{f}'}}$ nach dem Satze des vorigen § zusammen. Es kommt daher das Glied

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b} \ldots \partial x_\mathfrak{f}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b} \ldots dx_\mathfrak{f}$$

in der homogenen Function so oft vor, als verschiedene Verbindungen von Zeigern $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \ldots \mathfrak{f}'$, abgesehen von der Anordnung, der Verbindung $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$ gleich werden können. Die Anzahl aller möglichen Permutationen der p Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$ beträgt $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p$ oder $p!$. Sobald unter diesen α gleich einem bestimmten Zeiger, ferner β gleich einem zweiten, und γ gleich einem dritten Zeiger sind u. s. f., so giebt es offenbar die Anzahl von $\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!$ Permutationen, die überhaupt keine Veränderung in der Verbindung hervorrufen und deshalb hier nicht mitzurechnen sind. Die Anzahl der Verbindungen $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}' \ldots \mathfrak{f}'$, die mit der Verbindung $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$, abgesehen von der Anordnung, übereinstimmen, wird somit gefunden, indem man die Anzahl der sämmtlichen Permutationen $p!$ durch die Anzahl der unwirksamen $\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!$ dividirt; sie ist daher gleich dem Quotienten

$$\frac{p!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!}.$$

Durch die angestellte Ueberlegung leuchtet es ein, dass die auf der rechten Seite von (6) befindliche homogene Function des $p$ten Grades so viel verschiedene Glieder enthält, als eine solche Function nach der am Schlusse des vorigen § gegebenen Ausführung überhaupt enthalten kann. Die so eben bestimmten Zahlencoefficienten treten schon bei der vorzugsweise einfachen homogenen Function des $p$ten Grades hervor, die entsteht, indem *die Summe von n veränderlichen Grössen oder das Polynom* $z_1 + z_2 + \ldots z_n$ auf die $p$te Potenz erhoben wird. Mit Anwendung der bei der Gleichung (6) gebrauchten Bezeichnungen erhält man, da die zu potenzirende Summe durch $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} z_{\mathfrak{a}}, \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} z_{\mathfrak{b}}, \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} z_{\mathfrak{k}}$ bezeichnet werden kann, die Gleichung

$$(7)\qquad (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^p = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} z_{\mathfrak{a}} z_{\mathfrak{b}} \ldots z_{\mathfrak{k}}.$$

Wenn man jetzt diejenigen Glieder vereinigt, welche in dasselbe Product von Potenzen der einzelnen Variabeln multiplicirt sind, so bekommt ein Glied $z_{\mathfrak{a}}^{\alpha} z_{\mathfrak{b}}^{\beta} z_{\mathfrak{c}}^{\gamma} \ldots z_{\mathfrak{k}}^{\varepsilon}$ den oben bestimmten Zahlencoefficienten $\frac{p!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!}$, der sich auf die Einheit reducirt, wofern nur ein einziger der Zahl p gleicher Exponent vorhanden ist. Auf diese Weise entsteht *die Entwickelung der pten Potenz des Polynoms* $z_1 + z_2 + \ldots z_n$,

$$(8)\quad (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^p = z_1^p + \ldots + \frac{p!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!} z_{\mathfrak{a}}^{\alpha} z_{\mathfrak{b}}^{\beta} z_{\mathfrak{c}}^{\gamma} \ldots z_{\mathfrak{k}}^{\varepsilon} + \ldots z_n^p,$$

welche unter dem Namen *des polynomischen Lehrsatzes* bekannt ist, und für eine Summe von zwei Grössen in den in I, § 46 angeführten binomischen Lehrsatz übergeht. Die Zahlencoefficienten der verschiedenen Producte von Potenzen der Variabeln werden *Polynomialcoefficienten* genannt. Man darf demnach sagen, dass die auf der rechten Seite von (6) befindliche Form des $p$ten Grades als Coefficienten der verschiedenen Verbindungen $dx_{\mathfrak{a}}, dx_{\mathfrak{b}}, \ldots dx_{\mathfrak{k}}$ Producte enthält, deren jedes aus dem betreffenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^p f}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}}}$ und dem zugehörigen Polynomialcoefficienten $\frac{p!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \varepsilon!}$ gebildet ist. Eine entsprechende Darstellungsweise lässt sich für jede Form eines beliebigen Grades anwenden; sie ist im Vorhergehenden für die quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln benutzt worden, und zwar sind die Zahlencoefficienten Eins bei den Quadraten und die Zahlencoefficienten Zwei bei den Producten der Variabeln die aus dem Quadrate eines Polynoms stammenden respectiven Polynomialcoefficienten. Durch das angeführte Princip entsteht auch beispielsweise für eine homogene Function des $p$ten Grades mit zwei Variabeln die Darstellung

$$f(x,y) = a_{p,0}\, x^p + p\, a_{p-1,1}\, x^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} a_{p-2,2} x^{p-2} y^2 + .. + a_{0,p}\, y^p.$$

Der allgemeine Begriff des beliebig oft genommenen vollständigen Differentials einer Function mehrerer Variabeln bezieht sich auf unabhängige Veränderungen der letztern. Denkt man sich die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ in irgend einer Weise von einer Variable t abhängig, so werden die sämmtlichen nach t genommenen vollständigen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch Division des vollständigen Differentials $d^p f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit der $p$ten Potenz des Differentials dt ebenso erhalten, wie in § 45 der erste vollständige Differentialquotient aus dem ersten vollständigen Differential abgeleitet ist. Mithin folgt aus (5) für den zweiten vollständigen Differentialquotienten der Ausdruck

$$(9) \qquad \frac{d^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d t^2} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt} \frac{d x_{\mathfrak{b}}}{dt} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2}.$$

Die Voraussetzung, dass die ersten Differentiale der sämmtlichen Variabeln constant sind und alle folgenden Differentiale verschwinden, deckt sich, falls die sämmtlichen Variabeln von einer Variable t abhängen, damit, dass die sämmtlichen Differentialquotienten $\frac{d x_1}{dt}, \frac{d x_2}{dt}, \cdots \frac{d x_n}{dt}$ constante Werthe haben. Dies geschieht aber nur dann, wenn jede Variable $x_{\mathfrak{a}}$ in Bezug auf t eine Function des ersten Grades ist. Für diese Annahme folgt aus (6) die Gleichung

$$(10) \qquad \frac{d^p f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d t^p} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \cdots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}}} \frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt} \frac{d x_{\mathfrak{b}}}{dt} \cdots \frac{d x_{\mathfrak{k}}}{dt},$$

die im nächsten Capitel benutzt werden wird.

Capitel VI.

Entwickelung von Functionen mehrerer Variabeln in Potenzreihen.

§ 54. Ausdehnung des Taylor'schen Satzes auf Functionen mehrerer Variabeln.

Die Aufgabe, den Werth einer Function einer Variable $f(x+h)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen der Grösse h geordnete Reihe zu entwickeln, ist in § 27 durch den *Taylor*'schen Satz gelöst worden. Bei Functionen von mehreren Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kann man jede Variable durch einen zweigliedrigen Ausdruck ersetzen und jene Aufgabe dahin erweitern, dass der Werth $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ in eine Reihe entwickelt werden soll, die nach den ganzen positiven Potenzen und den Producten aus den ganzen positiven Potenzen der Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ fortschreitet; eine solche Reihe wird ebenfalls eine Potenzreihe genannt. Es lässt sich aber die zweite Aufgabe dadurch auf die erste zurückführen, dass man mit Hülfe einer neuen unabhängigen Variable t, welche die Werthe von der Null bis zu der positiven Einheit zu durchlaufen hat, den Functionswerth $f(x_1+t\,h_1, x_2+t\,h_2 \ldots x_n+t\,h_n)$ bildet, in demselben sowohl die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ wie auch die Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ als fest, hingegen die Grösse t als veränderlich ansieht, und den betreffenden Werth durch eine nach den ganzen positiven Potenzen der Grösse t geordnete Reihe darstellt. Eine Function $\varphi(t)$, welche für das von Null bis Eins ausgedehnte Intervall der Variable t mit Einschluss der auf einander folgenden nach t genommenen Differentialquotienten $\varphi'(t), \varphi''(t), \ldots \varphi^{p+1}(t)$ eindeutig, endlich und stetig ist, kann nach § 28 durch den *Mac Laurin*'schen Satz folgendermassen entwickelt werden,

$$
(1) \begin{cases} \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \dfrac{\varphi''(0)}{2} t^2 + \ldots + \dfrac{\varphi^{p}(0)}{2.3\ldots p} t^p + R_{p+1}, \\ R_{p+1} = \displaystyle\int_0^t \dfrac{\varphi^{(p+1)}(u)}{2.3\ldots p} (t-u)^p \, du, \end{cases}
$$

wo der Rest R_{p+1} mit Hülfe eines positiven echten Bruches θ auch durch den Ausdruck

$$
(2) \qquad R_{p+1} = \frac{\varphi^{(p+1)}(\theta t)}{2.3\ldots(p+1)} t^{p+1}
$$

ersetzt werden kann. Damit nun der Functionswerth

$$f(x_1 + h_1 t, x_2 + h_2 t, \ldots x_n + h_n t)$$

an die Stelle von $\varphi(t)$ treten könne, muss derselbe sammt seinen vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten von der ersten bis zu der $(p+1)$ten Ordnung für das von Null bis Eins reichende Intervall der Variable t eindeutig, endlich und stetig sein. In der n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durchläuft das Werthsystem

$$x_1 + h_1 t, x_2 + h_2 t, \ldots x_n + h_n t,$$

während t von der Null bis zu der positiven Einheit fortschreitet, eine bestimmte Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die mit dem Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ beginnt und mit dem Werthsystem $x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n$ schliesst. Wenn man für $n=2$ die Variabeln x_1 und x_2 als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, für $n=3$ die Variabeln x_1, x_2, x_3 als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume deutet, so wird die bezeichnete Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung durch diejenige gerade Linie vertreten, welche beziehungsweise den Punkt $(x_1, \ldots\ldots x_n)$ mit dem Punkte $(x_1 + h_1, \ldots x_n + h_n)$ verbindet.

Die auf einander folgenden vollständigen Differentialquotienten von $f(x_1 + h_1 t, x_2 + h_2 t, \ldots x_n + h_n t)$ in Bezug auf die Grösse t liefert die Gleichung (10) des vorigen §, da die einzelnen Argumente $x_1 + h_1 t$, $x_2 + h_2 t, \ldots x_n + h_n t$ Functionen des ersten Grades von t sind und beziehungsweise die constanten Differentialquotienten $h_1, h_2, \ldots h_n$ ergeben. Bei dem einzuführenden Werthe $t = 0$ geht das Werthsystem

$$x_1 + h_1 t, x_2 + h_2 t, \ldots x_n + h_n t$$

in das Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ über, so dass man für die auf der rechten Seite von (1) vorkommenden Ausdrücke die folgenden Bestimmungen erhält,

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(0) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \varphi'(0) = \sum\limits_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} h_{\mathfrak{a}} \\ \varphi''(0) = \sum\limits_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum\limits_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}}, \\ \vdots \\ \varphi^{(p)}(0) = \sum\limits_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum\limits_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \ldots \sum\limits_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \dfrac{\partial^p f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}} \ldots h_{\mathfrak{k}}, \end{cases}$$

wobei wie im vorigen § angenommen ist, dass die Anzahl der Zeiger $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}$ gleich der Zahl p sei. Der Mittelwerth $\varphi^{(p+1)}(\theta t)$, dem das Werthsystem

$$x_1 + h_1 \theta t, x_2 + h_2 \theta t, \ldots x_n + h_n \theta t$$

entspricht, lässt sich alsdann so darstellen

$$(4) \quad \varphi^{(p+1)}(\theta t) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{l}=n} \frac{\partial^{(p+1)} f(x_1 + h_1 \theta t, \ldots x_n + h_n \theta t)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}} \partial x_{\mathfrak{l}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}} \ldots h_{\mathfrak{k}} h_{\mathfrak{l}}.$$

Sobald in der Gleichung (1) der Werth $t=1$ eingeführt wird, bringt die linke Seite den Functionswerth $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n)$ hervor, und es ergiebt sich die gesuchte Ausdehnung des *Taylor*'schen Satzes auf n Variable

$$(5) \quad \begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) \\ & = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ & + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} h_{\mathfrak{a}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + \frac{1}{2.3 \ldots p} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \frac{\partial^p f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}} \ldots h_{\mathfrak{k}} \\ & + R_{p+1}, \end{aligned}$$

$$R_{p+1} = \frac{1}{2.3 \ldots (p+1)} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{k}=n} \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{l}=n} \frac{\partial^{(p+1)} f(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \ldots x_n + \theta h_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}} \ldots \partial x_{\mathfrak{k}} \partial x_{\mathfrak{l}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}} \ldots h_{\mathfrak{k}} h_{\mathfrak{l}}.$$

Die Glieder der Entwickelung sind nach den Potenzen der Incremente $h_1, h_2, \ldots h_n$ in der Weise geordnet, dass das erste von denselben unabhängig ist, dass hierauf das Aggregat der Glieder des ersten Grades, dann das Aggregat der Glieder des zweiten Grades bis zu dem Aggregat der Glieder des p ten Grades folgt, wodurch nach einander lauter homogene Functionen der Incremente $h_1, h_2, \ldots h_n$ von beständig wachsendem Grade auftreten, deren Coefficienten aus den zugeordneten partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ entspringen. Wie man durch den *Taylor*'schen Satz für eine *Function einer Variable* eine nach den ganzen Potenzen des Increments fortschreitende *einfache Summe* erhalten hat, so liefert die Gleichung (5) bei einer *Function von zwei*, *drei*, *n Variabeln* respective eine *doppelte*, *dreifache*, *n fache Summe*. Der Restausdruck R_{p+1} hat ein ähnliches Bildungsgesetz wie bei einer weiter fortgesetzten Entwickelung das Aggregat des $(p+1)$ ten Grades haben würde, und unterscheidet sich von dem letzteren nur dadurch, dass in den sämmtlichen vorkommenden partiellen Differentialquotienten der $(p+1)$ ten Ordnung statt des Werthsystems $x_1, x_2, \ldots x_n$ das mit dem positiven echten Bruche θ hergestellte Werthsystem $x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \ldots x_n + \theta h_n$ substituirt ist. In dem Falle, dass der Restausdruck R_{p+1} die Eigenschaft besitzt, für eine wachsende Zahl p numerisch beliebig klein zu werden, liefert die mitgetheilte Entwickelung einen Ausdruck der Function $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n)$ durch eine convergente n fach unendliche Potenzreihe.

§ 55. Darstellung einer rationalen ganzen Function mehrerer Variabeln durch den Taylor'schen Satz. Darstellung einer solchen Function durch eine Verallgemeinerung der Newton'schen Interpolationsformel.

Aus dem Umstande, dass jede rationale ganze Function eines bestimmten Grades von mehreren Variabeln gleich einem Aggregat von Producten der positiven Potenzen der Variabeln ist, bei denen die Summe der Exponenten höchstens den Grad p der Function erreicht, lässt sich leicht schliessen, dass jeder von der Function in Bezug auf die Variabeln genommene partielle Differentialquotient von der $p$ten Ordnung gleich einer Constante, von höherer als der $p$ten Ordnung gleich Null sein muss. Wenn man daher den in der Gleichung (5) des vorigen § enthaltenen *Taylor*'schen Satz auf eine rationale ganze Function des $p$ten Grades von n Variabeln anwendet, so zeigt sich dieselbe Erscheinung, die in § 27 bei einer Function einer Variable wahrgenommen ist, dass nämlich der Restausdruck R_{p+1} verschwindet und die Function unter Weglassung desselben genau dargestellt wird. Eine rationale ganze Function des $p$ten Grades $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ der n Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ muss, wenn $z_1 = x_1 + h_1, z_2 = x_2 + h_2, \ldots z_n = x_n + h_n$ gesetzt wird, zu einer rationalen ganzen Function des $p$ten Grades der Elemente $h_1, h_2, \ldots h_n$ werden, und lässt sich als solche wie in I, § 70 auseinandergesetzt ist, in eine Summe von Aggregaten zerlegen, die in Bezug auf die Elemente $h_1, h_2, \ldots h_n$ homogen sind und respective auf den nullten, 1ten, 2ten bis $p$ten Grad gehen.

Der *Taylor*'sche Satz löst nun die Aufgabe, die Coefficienten, mit denen die verschiedenen Verbindungen der Elemente $h_1, h_2, \ldots h_n$ behaftet sind, von vorne herein zu bestimmen, und weist nach, dass diese Coefficienten bis auf gewisse numerische Factoren mit dem Werthe der Function $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ und den Werthen ihrer sämmtlichen nach den Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten bis zu der $p$ten Ordnung einschliesslich für das Werthsystem $z_1 = x_1, z_2 = x_2, \ldots z_n = x_n$ zusammenfallen. Die Gesammtzahl dieser Coefficienten ist der der Gesammtzahl der Coefficienten der allgemeinen Function des $p$ten Grades von n Variabeln gleich und hat vermöge der Formel (26) des § 52 den Werth

$$(1) \quad 1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3..p}.$$

Da jedoch nach einer in I, § 70 ausgeführten Bemerkung die Gesammtzahl der Coefficienten der allgemeinen Function des $p$ten Grades von n Variabeln ebenso gross ist wie die Gesammtzahl der Coefficienten der allgemeinen homogenen Function des $p$ten Grades von $n+1$ Variabeln, so lässt sich die in (1) angegebene Summe durch den Ausdruck

$$(2)\qquad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1.2.3\ldots p}$$

ersetzen. Denkt man sich, dass bei einer rationalen ganzen Function des $p$ten Grades von n Variabeln der Werth der Function und ihrer sämmtlichen partiellen Differentialquotienten bis zur $p$ten Ordnung einschliesslich für das einzelne Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben sei, so liegt eine mit der Anzahl der sämmtlichen Coefficienten der Function gleiche Anzahl von Daten vor, mit deren Hülfe die Function durch den *Taylor*schen Satz für die beliebigen Argumente $x_1+h_1, x_2+h_2, .. x_n+h_n$, das heisst vollständig, dargestellt wird.

Wir haben früher gesehen, dass eine rationale ganze Function des $p$ten Grades von einer Variable vollständig ausgedrückt werden kann, sobald die Werthe bekannt sind, welche sie für $p+1$ verschiedene Werthe der Variable annimmt. Die hierzu dienende *Newton*'sche Interpolationsformel, die in (22) des § 39 aufgestellt ist, möge in Bezug auf eine Function des $p$ten Grades $f(x)$ wiederholt werden, deren Werthe für die von einander verschiedenen Werthe $x=a_0, a_1, \ldots a_p$ gegeben sind. Die Gleichung lautet

$$(3)\qquad f(x)=f_0+f_1(x-a_0)+f_2(x-a_0)(x-a_1)+..+f_p(x-a_0)..(x-a_{p-1}),$$

wo die Factoren $f_0, f_1, \ldots f_p$ folgende Bestimmung haben:

$$(4)\qquad \begin{cases} f_0 = f(a_0) \\ f_1 = \dfrac{f(a_0)}{a_0-a_1} + \dfrac{f(a_1)}{a_1-a_0} \\ f_2 = \dfrac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \dfrac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \dfrac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}. \\ \vdots \end{cases}$$

Sobald die Abkürzungen

$$(5)\qquad \pi_1(x)=x-a_0,$$
$$\pi_2(x)=(x-a_0)(x-a_1), .. \pi_{p+1}(x)=(x-a_0)(x-a_1)..(x-a_p)$$

eingeführt werden, lassen sich die vorkommenden Producte von Differenzen durch die nach x genommenen Differentialquotienten $\pi'_2(x), \pi'_3(x), ..$ darstellen,

$$(6)\quad \begin{cases} \pi'_2(a_0)=a_0-a_1,\ \pi'_2(a_1)=a_1-a_0, \\ \pi'_3(a_0)=(a_0-a_1)(a_0-a_2), \\ \pi'_3(a_1)=(a_1-a_0)(a_1-a_2),\ \pi'_3(a_2)=(a_2-a_0)(a_2-a_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

und es nehmen (3) und (4) beziehungsweise die Gestalt an

$$(7)\quad f(x)=f_0+f_1\pi_1(x)+f_2\pi_2(x)+\ldots+f_p\pi_p(x),$$

$$(8)\quad \begin{cases} f_0=f(a_0) \\ f_1=\dfrac{f(a_0)}{\pi'_2(a_0)}+\dfrac{f(a_1)}{\pi'_2(a_1)} \\ f_2=\dfrac{f(a_0)}{\pi'_3(a_0)}+\dfrac{f(a_1)}{\pi'_3(a_1)}+\dfrac{f(a_2)}{\pi'_3(a_2)} \\ \vdots \\ f_\alpha=\dfrac{f(a_0)}{\pi'_{\alpha+1}(a_0)}+\dfrac{f(a_1)}{\pi'_{\alpha+1}(a_1)}+\ldots\dfrac{f(a_\alpha)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\alpha)}. \end{cases}$$

Nach einem bei Gelegenheit der Gleichung (10) des § 39 mitgetheilten Satze hat der Ausdruck f_α die Eigenschaft, wenn für $f(x)$ eine rationale ganze Function des αten Grades genommen wird, den in derselben vorkommenden Coefficienten von x^α darzustellen, und zu verschwinden, sobald für $f(x)$ eine rationale ganze Function von niedrigerem als dem αten Grade gesetzt wird. Ausserdem ist offenbar das Bildungsgesetz von f_α so beschaffen, dass, wenn die bezügliche Function $f(x)$ in Summanden zerlegt wird, es bei der Herstellung von f_α erlaubt ist, den vorgeschriebenen Process mit jedem Summanden auszuführen und von den sämmtlichen Resultaten die Summe zu nehmen. Hieraus geht hervor, dass bei der nach den Potenzen von x geordneten Entwickelung der Function des p ten Grades $f(x)$ diejenigen Glieder, welche in Potenzen von x vom αten und von höherem Grade multiplicirt sind, einen Beitrag zu f_α liefern, welcher die betreffenden Coefficienten im ersten Grade enthält, dass dagegen die Coefficienten der Potenzen von niedrigerem als dem αten Grade keinen Beitrag liefern. Auf diese Thatsache gestützt kann man aus der Gleichung (7) eine zur Darstellung von rationalen ganzen Functionen mehrerer Variabeln dienende Verallgemeinerung der Newton'schen Interpolationsformel ableiten.

Es sei $f(x,y)$ eine rationale ganze Function des $p$ten Grades von den beiden Variabeln x und y. Insofern dieselbe eine rationale ganze Function des $p$ten Grades von x ist, wird sie unter Anwendung von $p+1$ differenten Werthen $a_0, a_1, \ldots a_p$ durch die rechte Seite von (7) dargestellt, wofern man die nunmehr von y abhängenden Factoren $f_0(y), f_1(y), \ldots f_p(y)$ mittelst der folgenden Gleichungen definirt,

$$(9)\quad \begin{cases} f_0(y)=f(a_0,y) \\ f_1(y)=\dfrac{f(a_0,y)}{\pi'_2(a_0)}+\dfrac{f(a_1,y)}{\pi'_2(a_1)} \\ \vdots \\ f_\alpha(y)=\dfrac{f(a_0,y)}{\pi'_{\alpha+1}(a_0)}+\dfrac{f(a_1,y)}{\pi'_{\alpha+1}(a_1)}+\ldots+\dfrac{f(a_\alpha,y)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\alpha)}. \end{cases}$$

Wenn man die Function $f(x,y)$ nach den steigenden Potenzen der Variable x ordnet, so ist der Coefficient von x^0 eine Function des $p$ten, der Coefficient von x^1 nur eine Function des $(p-1)$ten, der Coefficient von x^α nur eine Function des $(p-\alpha)$ten Grades in Bezug auf y. Nach der obigen Bemerkung enthält $f_0(y)$ alle Coefficienten dieser Entwickelung von $f(x,y)$ und ist deshalb eine Function des $p$ten, $f_1(y)$ alle Coefficienten mit Ausnahme des ersten und ist deshalb eine Function des $(p-1)$ten, $f_\alpha(y)$ alle Coefficienten mit Ausnahme der α ersten und ist deshalb eine Function des $(p-\alpha)$ten Grades von y. Indem man also $p+1$ von einander verschiedene Werthe $y=b_0, b_1, \ldots b_p$ wählt und die Bezeichnungen

$$(10)\quad \varrho_1(y)=y-b_0, \varrho_2(y)=(y-b_0)(y-b_1), \ldots \varrho_{p+1}(y)=(y-b_0)\ldots(y-b_p)$$

anwendet, lassen sich die in (9) vorkommenden Functionen mit Hülfe der Formel (7) wie folgt ausdrücken

$$(11)\quad \begin{cases} f_0(y)=f_{0,0}+f_{0,1}\,\varrho_1(y)+\ldots+f_{0,p}\,\varrho_p(y) \\ f_1(y)=f_{1,0}+f_{1,1}\,\varrho_1(y)+\cdots+f_{1,p-1}\,\varrho_{p-1}(y) \\ \vdots \\ f_\alpha(y)=f_{\alpha,0}+f_{\alpha,1}\,\varrho_1(y)+\ldots+f_{\alpha,p-\alpha}\,\varrho_{p-\alpha}(y). \end{cases}$$

Die hier angedeuteten Coefficienten haben die mit Hinzuziehung von (8) zu bildenden Werthe

$$(12)\begin{cases} f_{0,0}=f_0(b_0),\, f_{0,1}=\dfrac{f_0(b_0)}{\varrho'_2(b_0)}+\dfrac{f_0(b_1)}{\varrho'_2(b_1)},\cdots f_{0,p}=\dfrac{f_0(b_0)}{\varrho'_{p+1}(b_0)}+\cdots+\dfrac{f_0(b_p)}{\varrho'_{p+1}(b_p)} \\ f_{1,0}=f_1(b_0),\, f_{1,1}=\dfrac{f_1(b_0)}{\varrho'_2(b_0)}+\dfrac{f_1(b_1)}{\varrho'_2(b_1)},\cdots f_{1,p-1}=\dfrac{f_1(b_0)}{\varrho'_p(b_0)}+\cdots+\dfrac{f_1(b_{p-1})}{\varrho'_p(b_{p-1})} \\ \vdots \\ f_{\alpha,0}=f_\alpha(b_0),\, f_{\alpha,1}=\dfrac{f_\alpha(b_0)}{\varrho'_2(b_0)}+\dfrac{f_\alpha(b_1)}{\varrho'_2(b_1)},\cdots f_{\alpha,p-\alpha}=\dfrac{f_\alpha(b_0)}{\varrho_{p-\alpha+1}(b_0)}+\cdots+\dfrac{f_\alpha(b_{p-\alpha})}{\varrho_{p-\alpha+1}(b_{p-\alpha})}. \end{cases}$$

Hiernach setzt sich $f_{\alpha,\beta}$ aus den Werthen der Function $f(x,y)$ folgendermassen zusammen:

$$(13)\begin{cases} f_{\alpha,\beta}=\dfrac{f(a_0,b_0)}{\pi'_{\alpha+1}(a_0)\,\varrho'_{\beta+1}(b_0)}+\dfrac{f(a_1,b_0)}{\pi'_{\alpha+1}(a_1)\,\varrho'_{\beta+1}(b_0)}+\cdots+\dfrac{f(a_\alpha,b_0)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\alpha)\,\varrho'_{\beta+1}(b_0)} \\ \quad+\dfrac{f(a_0,b_1)}{\pi'_{\alpha+1}(a_0)\,\varrho'_{\beta+1}(b_1)}+\dfrac{f(a_1,b_1)}{\pi'_{\alpha+1}(a_1)\,\varrho'_{\beta+1}(b_1)}+\cdots+\dfrac{f(a_\alpha,b_1)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\alpha)\,\varrho'_{\beta+1}(b_1)} \\ \quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad+\dfrac{f(a_0,b_\beta)}{\pi'_{\alpha+1}(a_0)\,\varrho'_{\beta+1}(b_\beta)}+\dfrac{f(a_1,b_\beta)}{\pi'_{\alpha+1}(a_1)\,\varrho'_{\beta+1}(b_\beta)}+\cdots+\dfrac{f(a_\alpha,b_\beta)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\alpha)\,\varrho'_{\beta+1}(b_\beta)}. \end{cases}$$

Somit entsteht für die Function des $p$ten Grades $f(x,y)$, indem $\pi_0(x)=1$, $\varrho_0(y)=1$ genommen wird, die Darstellung

$$(14)\qquad f(x,y)=\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta}\,\pi_\alpha(x)\,\varrho_\beta(y),$$

wo die Summe über alle Verbindungen α,β von ganzen positiven Zahlen einschliesslich der Null auszudehnen ist, deren Summe kleiner als p oder gleich p ist. Die Anzahl der Grössen $f_{\alpha,\beta}$ stimmt mit der Anzahl der Coefficienten der Function $f(x,y)$ überein und hat nach der obigen Formel (2) den Werth $\dfrac{(p+1)(p+2)}{1.2}$.

Ebenso gross ist die Anzahl der Werthverbindungen $x=a_\lambda$, $y=b_\mu$, für welche die Functionswerthe $f(a_\lambda,b_\mu)$ bekannt sein müssen, um die sämmtlichen $f_{\alpha,\beta}$ zu erhalten; denn es kommen in einem einzelnen Ausdrucke $f_{\alpha,\beta}$ nur solche Werthverbindungen vor, bei denen die Zeiger λ und μ den Ungleichheiten $0\leqq\lambda\leqq\alpha$, $0\leqq\mu\leqq\beta$ genügen, folglich in allen Ausdrücken nur diejenigen, bei denen die Summe der Zeiger $\lambda+\mu\leqq p$ ist. Demnach repräsentirt die Gleichung (14) eine Interpolationsformel, vermöge welcher eine rationale ganze Function des p ten Grades ausgedrückt wird, sobald die betreffenden $\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}$ Functionswerthe gegeben sind.

Durch Wiederholung des angewendeten Verfahrens gelangt man zu einer Interpolationsformel für eine beliebige rationale ganze Function von beliebig vielen Variabeln; es wird genügen, noch den Fall einer Function des p ten Grades von drei Variabeln $f(x, y, z)$ auszuführen. Die Systeme von $p+1$ differenten Werthen, welche der ersten und zweiten Variable beizulegen sind, mögen wie im Vorstehenden bezeichnet werden, für die dritte Variable habe man das System von $p+1$ differenten Werthen $z = c_0, c_1, \ldots c_p$, und es sei

$$(15) \qquad \sigma_1(z) = z - c_0,\ \sigma_2(z) = (z-c_0)(z-c_1), \ldots$$
$$\ldots \sigma_{p+1}(z) = (z-c_0)(z-c_1)\ldots(z-c_p).$$

Als eine rationale ganze Function des p ten Grades von der Variable x kann $f(x, y, z)$ durch die Formel (7) ausgedrückt werden, und zwar sind aus den angegebenen Gründen die auf einander folgenden Factoren $f_0(y, z), f_1(y, z), \ldots f_p(y, z)$ der Verbindungen $\pi_1(x), \pi_2(x), \ldots \pi_p(x)$ Functionen der Variabeln y und z, deren Grad respective durch die Zahlen $p, p-1, \ldots 0$ bezeichnet wird. Für jede einzelne Function $f_\alpha(y, z)$ liefert die Formel (14) eine Darstellung

$$(16) \qquad f_\alpha(y, z) = \sum_{\beta, \gamma} f_{\alpha, \beta, \gamma}\, \varrho_\beta(y)\, \sigma_\gamma(z),$$

bei welcher sich die Summation auf alle Verbindungen β, γ von ganzen positiven Zahlen einschliesslich der Null erstreckt, deren Summe kleiner als die Gradzahl $p - \alpha$ oder höchstens derselben gleich ist. Der Ausdruck $f_{\alpha, \beta, \gamma}$ ist durch Uebertragung der in (13) für $f_{\alpha, \beta}$ aufgestellten Regel zu bilden; derselbe erscheint als eine dreifache Summe, in welcher der Zeiger λ von 0 bis α, μ von 0 bis β, ν von 0 bis γ geht,

$$(17) \qquad f_{\alpha, \beta, \gamma} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\alpha} \sum_{\mu=0}^{\mu=\beta} \sum_{\nu=0}^{\nu=\gamma} \frac{f(a_\lambda, b_\mu, c_\nu)}{\pi'_{\alpha+1}(a_\lambda)\, \varrho'_{\beta+1}(b_\mu)\, \sigma'_{\gamma+1}(c_\nu)}.$$

Die Function $f(x, y, z)$ erhält dann durch Anwendung von (16) auf (7) den Ausdruck

$$(18) \qquad f(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} f_{\alpha, \beta, \gamma}\, \pi_\alpha(x)\, \varrho_\beta(y)\, \sigma_\gamma(z),$$

wo α, β, γ jede Verbindung von ganzen positiven Zahlen einschliesslich der Null bedeutet, für die $\alpha + \beta + \gamma \leqq p$ ist. Man überzeugt sich leicht, dass hier wieder die Anzahl der Grössen $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ wie die Anzahl der zur Herstellung der $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ erforderlichen Werthe der Function $f(x, y, z)$ gleich der Anzahl $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3}$ der Coefficienten der Function $f(x, y, z)$ ist, weshalb die Gleichung (18) die für $f(x, y, z)$ gesuchte Interpolationsformel bildet.

In § 39 sind die Modificationen erörtert, welche die in dem obigen Schema (8) definirten Ausdrücke $f_0, f_1, \ldots f_p$ erfahren, sobald die Grössen $a_0, a_1, \ldots a_p$ eine constante Differenz haben oder durch die Gleichungen

(19) $$a_1 = a_0 + a, \ldots a_\alpha = a_0 + \alpha a, \ldots a_p = a_0 + pa$$

bestimmt sind; dann wird nämlich f_α gleich der durch $\alpha ! a^\alpha$ dividirten mit der constanten Differenz a gebildeten α ten Differenz der Function $f(x)$ für $x = a_0$. Es werde nun angenommen, dass bei einer Function von zwei Variabeln ausser den Grössen a_α auch die Grössen b_β, und bei einer Function von drei Variabeln auch die Grössen c_γ eine constante Differenz besitzen, so dass

(20) $$b_1 = b_0 + b, \ldots b_\beta = b_0 + \beta b, \ldots b_p = b_0 + pb,$$

(21) $$c_1 = c_0 + c, \ldots c_\gamma = c_0 + \gamma c, \ldots c_p = c_0 + pc$$

ist. In Folge dessen muss wegen der Gleichungen (12) der Ausdruck $f_{\alpha,\beta}$ gleich der durch $\beta ! b^\beta$ dividirten mit der constanten Differenz gebildeten β ten Differenz der Function $f_\alpha(y)$ für $y = b_0$, mithin gleich der durch das Product $\alpha ! \beta ! a^\alpha b^\beta$ dividirten $(\alpha + \beta)$ ten partiellen Differenz der Function $f(x, y)$ sein, die für $x = a_0$, $y = b_0$ α mal mit der constanten Differenz a nach x, β mal mit der constanten Differenz b nach y genommen ist. Ebenso bewirkt die angegebene Voraussetzung, dass $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ gleich der durch das Product $\alpha ! \beta ! \gamma ! a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dividirten $(\alpha + \beta + \gamma)$ ten partiellen Differenz der Function $f(x, y, z)$ wird, für das Werthsystem $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$ α mal mit der constanten Differenz a nach x, β mal mit der constanten Differenz b nach y, γ mal mit der constanten Differenz c nach z genommen.

Die aus (19) und (20) herrührenden Verbindungen, für welche die Function $f(x,y)$ in (14), und die aus (19), (20) und (21) herrührenden Verbindungen, für welche die Function $f(x,y,z)$ in (18) als gegeben gilt, liefern bei der oft gebrauchten geometrischen Interpretation ein einfaches Schema von Punkten in der Ebene und im Raume. Für zwei Variabeln sind die Punkte in der Ebene nach zwei mit den beiden Coordinatenaxen parallelen Richtungen, für drei Variabeln die Punkte im Raume nach drei mit den drei Coordinatenaxen parallelen Richtungen in gleichen Abständen geordnet. Die durch die Ungleichheiten $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha + \beta \leqq p$ characterisirten Punkte der Ebene erfüllen parallelogrammatisch das Innere und die Seitenlinien desjenigen Dreiecks, dessen Ecken respective die Coordinaten

$$x = a_0, y = b_0;\; x = a_0 + pa, y = b_0;\; x = a_0, y = b_0 + pb$$

haben. Die durch die Ungleichheiten

$$\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \gamma \geqq 0, \alpha + \beta + \gamma \leqq p$$

characterisirten Punkte des Raumes nehmen parallelepipedisch das Innere und die Seitenflächen desjenigen Tetraeders ein, dessen Ecken respective die Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x = a_0, & y = b_0, & z = c_0; \\ x = a_0 + pa, & y = b_0, & z = z_0; \\ x = a_0, & y = b_0 + pb, & z = z_0; \\ x = a_0, & y = b_0, & z = z_0 + pc \end{array}$$

haben. Gleichzeitig sind die zu einem bestimmten Ausdruck $f_{\alpha,\beta}$ gehörenden Punkte der Ebene, deren Zeiger λ und μ die Ungleichheiten $0 \leqq \lambda \leqq \alpha, 0 \leqq \mu \leqq \beta$ befriedigen, in einem Parallelogramm, die zu einem bestimmten Ausdruck $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ gehörenden Punkte des Raumes, deren Zeiger λ, μ, ν die Ungleichheiten $0 \leqq \lambda \leqq \alpha, 0 \leqq \mu \leqq \beta, 0 \leqq \nu \leqq \gamma$ befriedigen, in einem Parallelepipedon enthalten, von denen das erstere in dem bezeichneten Dreieck, das letztere in dem bezeichneten Tetraeder liegt.

Aus der Art, wie die Ausdrücke $f_\alpha, f_{\alpha,\beta}, f_{\alpha,\beta,\gamma}$, sobald für die einzelnen Variabeln Werthreihen von constanten Differenzen wie in (19), (20) und (21) angenommen werden, in Brüche übergehen, bei denen der Zähler eine gewisse Differenz der zu Grunde liegenden Function, der Nenner das Product aus einem Zahlenfactor und den entsprechenden Potenzen der constanten Differenzen der Variabeln ist, lässt sich schliessen, dass, wenn die constanten Differenzen a, b, c der Null genähert werden, f_α gegen einen durch einen Zahlenfactor dividirten Differentialquotienten von $f(x), f_{\alpha,\beta}$ gegen einen durch einen Zahlenfactor dividirten partiellen Differentialquotienten von $f(x,y)$, $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ gegen einen durch einen Zahlenfactor dividirten partiellen Differentialquotienten von $f(x,y,z)$ convergirt, deren Ausdrücke die folgenden sind,

$$(22)\quad \lim . f_\alpha \;=\frac{1}{\alpha!}\frac{d^\alpha f(x)}{d x^\alpha}, \text{ für } x=a_0,$$

$$(23)\quad \lim . f_{\alpha,\beta} \;=\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial x^\alpha\;\partial y^\beta}, \text{ für } x=a_0,\; y=b_0,$$

$$(24)\quad \lim . f_{\alpha,\beta,\gamma}=\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(x,y,z)}{\partial x^\alpha\;\partial y^\beta\;\partial z^\gamma}, \text{ für } x=a_0, y=b_0, z=c_0.$$

Für eine Function einer Variable $f(x)$ ist in § 39 unter Voraussetzung ihrer Entwickelung durch den *Taylor*'schen Satz nachgewiesen, dass der mit einer Werthreihe $x=a_0, a_1, \ldots a_p$ gebildete Ausdruck f_α sich dem so eben angeführten Grenzwerthe auch dann nähert, wenn die Differenzen $a_1-a_0, a_2-a_0, \ldots a_p-a_0$ als kleine Grössen derselben Ordnung auf eine beliebige Weise gleichzeitig abnehmen. Sobald für eine Function $f(x,y)$ von zwei Variabeln und $f(x,y,z)$ von drei Variabeln auch eine nach dem *Taylor*'schen Satze erfolgende Entwickelung angenommen wird, zeigt sich auf demselben Wege, dass die mit Hinzufügung der Werthreihen $y=b_0, b_1, \ldots b_p$, $z=c_0, c_1, \ldots c_p$ gebildeten Ausdrücke $f_{\alpha,\beta}$ und $f_{\alpha,\beta,\gamma}$, wofern auch die Differenzen

$$b_1-b_0, b_2-b_0, \ldots b_p-b_0, \text{ und } c_1-c_0, c_2-c_0, \ldots c_p-c_0$$

in der bezeichneten Weise beliebig abnehmen, ebenfalls gegen die in (23) und (24) angegebenen Grenzwerthe convergiren.

Dem Vorgange des § 39 entsprechend kann man ferner untersuchen, wie sich die zur Darstellung einer rationalen ganzen Function dienende Interpolationsformel (14) und (18) verhält, wenn die Differenzen

$$a_1-a_0, a_2-a_0, \ldots a_p-a_0;\; b_1-b_0, b_2-b_0, \ldots b_p-b_0;$$
$$c_1-c_0, c_2-c_0, \ldots c_p-c_0$$

auf die angegebene Weise gleichzeitig abnehmen. Alsdann convergirt das Product $\pi_\alpha(x)$ gegen die Potenz $(x-a_0)^\alpha$, $\varrho_\beta(y)$ gegen $(y-b_0)^\beta$, $\sigma_\gamma(z)$ gegen $(z-c_0)^\gamma$, und aus (14) und (18) werden respective die Gleichungen

$$(25)\quad f(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}\right)_{a_0,\,b_0} (x-a_0)^\alpha (y-b_0)^\beta,$$

$$(26)\quad f(x,y,z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(x,y,z)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}\right)_{a_0,\,b_0,\,c_0} (x-a_0)^\alpha (y-b_0)^\beta (z-c_0)^\gamma;$$

an die Stelle des Zeichens einer Zahlenfacultät hat man bei verschwindendem Argument die Einheit zu setzen. Die hervorgehende Darstellung ist genau dieselbe, welche bei der betreffenden rationalen ganzen Function der in der Gleichung (5) des vorigen § ausgedrückte *Taylor*'sche Satz ergiebt, und von der im Anfange dieses § die Rede war. Die vollständige Uebereinstimmung leuchtet ein, sobald man bedenkt, dass in der nach (5) des vorigen § auszuführenden Entwickelung der partielle Differentialquotient $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}$ die Anzahl $\dfrac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}$ von Malen auftritt und mit der Zahl $(\alpha+\beta)!$ dividirt werden muss, der partielle Differentialquotient $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(x,y,z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ die Anzahl $\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ von Malen auftritt und mit der Zahl $(\alpha+\beta+\gamma)!$ zu dividiren ist.

Capitel VII.

Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabeln.

§ 56. Absolute Maxima und Minima.

Der Begriff des Maximums und Minimums, der bei einer Function einer Variable in § 34 entwickelt ist, wird auf Functionen mehrerer Variabeln dadurch übertragen, dass man festsetzt, eine solche Function habe für ein bestimmtes Werthsystem der Variabeln dann ein Maximum oder Minimum, wenn der zugehörige

Functionswerth, mit denjenigen Functionswerthen verglichen, welche einer innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossenen stetigen Aenderung der Variabeln entsprechen, beziehungsweise der gröste oder kleinste ist. Da die stetige Aenderung eines Systems von mehreren Variabeln entweder so geschehen kann, dass dieselben von einander unabhängig bleiben oder so, dass sie durch gegebene Bedingungen eingeschränkt werden, so giebt es auch, diesen beiden Annahmen entsprechend, zwei verschiedene Arten von Maximis und Minimis, die nach einander zu behandeln sind; die erste Art umfasst *die absoluten*, die zweite Art *die relativen Maxima und Minima.*

Eine Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ erreicht für das Werthsystem $x_1 = c_1, x_2, = c_2, \ldots x_n = c_n$ ihrer n Variabeln ein absolutes Maximum, sobald innerhalb der stetigen Mannigfaltigkeit der n ten Ordnung dieser Variabeln, das heisst, für alle Incremente $h_1, h_2, \ldots h_n$, die bei einem gegebenen System von positiven kleinen Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ den Ungleichheiten

$$(1) \qquad -\omega_1 < h_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < h_2 < \omega_2, \ldots -\omega_n < h_n < \omega_n$$

genügen, die Differenz der Functionswerthe

$$(2) \qquad f(c_1 + h_1, \, c_2 + h_2, \ldots c_n + h_n) - f(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

stets negativ ist; sie erreicht für das genannte Werthsystem ein absolutes Minimum, sobald die zugehörige Differenz (2) stets positiv ist. Es versteht sich von selbst, dass die Differenz (2) für das Werthsystem $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots h_n = 0$ verschwindet; die aufgestellte Forderung, negativ oder positiv zu sein, ist aber so aufzufassen, dass die Differenz für kein anderes Werthsystem gleich Null werden darf. Ein Mittel zur Aufsuchung der Maxima und Minima einer Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bietet der in § 54 unter (5) angeführte *Taylor*'sche Satz. Wir wenden denselben an, um eine Differenz

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

durch ein nach den Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ lineares Aggregat unter Hinzufügung des Restausdrucks R_2 darzustellen, einer Function der zweiten Ordnung von den Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$, deren Coefficienten Mittelwerthe sind,

$$(3)\qquad f(x_1+h_1,\, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n) - f(x_1,\, x_2, \ldots x_n)$$
$$= \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f(x_1,\, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\, h_{\mathfrak{a}} + R_2,$$
$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f(x_1+\theta h_1, \ldots x_n+\theta h_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}}\, h_{\mathfrak{a}}\, h_{\mathfrak{b}}.$$

Für das in (2) mit $c_1, c_2, \ldots c_n$ bezeichnete Werthsystem, bei dem ein Maximum oder Minimum auftreten soll, ist hier die Benennung $x_1, x_2, \ldots x_n$ beibehalten. Damit die linke Seite von (3) für alle Werthverbindungen $h_1, h_2, \ldots h_n$, die ein System von Ungleichheiten (1) erfüllen, entweder stets negativ oder stets positiv sein könne, muss das Aggregat $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} h_{\mathfrak{a}}$ für jedes beliebige System von Werthen $h_{\mathfrak{a}}$, oder müssen die in dem Aggregat auftretenden einzelnen Factoren von $h_1, h_2, \ldots h_n$ verschwinden. Denn geschähe dies nicht, so könnte durch hinreichende Verkleinerung der Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ bewirkt werden, dass der numerische Werth des Restausdrucks R_2, welcher in Bezug auf $h_1, h_2, \ldots h_n$ eine Function des zweiten Grades ist, unbedingt kleiner würde als der numerische Werth des Aggregats $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} h_{\mathfrak{a}}$, und es stünde frei, weil dasselbe die Grössen $h_{\mathfrak{a}}$ in der ersten Potenz enthält, durch eine Aenderung der Vorzeichen die rechte Seite von (3) nach Willkür positiv oder negativ zu machen. Eine Forderung, welche in gleicher Weise bei dem Vorhandensein eines Maximums wie bei dem eines Minimums erfüllt sein muss, besteht also darin, dass für das betreffende Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n ersten partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ verschwinden, oder die n Gleichungen gelten

$$(4)\quad \frac{\partial f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f(x_1, x_2, .. x_n)}{\partial x_n} = 0.$$

In Folge derselben wird die linke Seite von (3) dem Restausdrucke R_2 gleich, und dieser ist es, welcher in dem Falle eines Maximums stets negativ, in dem Falle eines Minimums stets positiv zu sein hat. Da es vermöge der gegebenen Definition eines Maximums und Minimums erlaubt ist, die in den

Ungleichheiten (1) enthaltenen Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ so klein anzunehmen, als es die Umstände verlangen, und da für die in dem Ausdrucke R_2 auftretenden partiellen Differentialquotienten die Eigenschaft der Stetigkeit vorausgesetzt wird, so betrachtet man den Ausdruck R_2 mit der Veränderung, dass die in den partiellen Differentialquotienten erscheinenden Variabeln statt der mit dem echten Bruche θ gebildeten Werthe

$$x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta h_2, \ldots x_n + \theta h_n$$

beziehungsweise die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ erhalten. Dadurch kommt statt R_2 die homogene Function des zweiten Grades

$$(5) \qquad S_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} h_{\mathfrak{a}} h_{\mathfrak{b}},$$

und es bleibt zu entscheiden, unter welchen Bedingungen diese für die zulässigen Werthverbindungen $h_1, h_2, \ldots h_n$ stets negativ, unter welchen sie stets positiv ist. Hierbei ist der Umstand von grossem Belang, dass S_2 eine homogene Function des zweiten Grades der Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ ist. Wenn eine solche Function für ein bestimmtes Werthsystem der Variabeln $h_1, h_2, \ldots h_n$ einen gewissen Werth Ω annimmt, so erhält dieselbe, falls jeder Variable der mit demselben Factor ϱ multiplicirte frühere Werth beigelegt oder das Werthsystem $\varrho h_1, \varrho h_2, \ldots \varrho h_n$ substituirt wird, den durch Multiplication mit dem Factor ϱ^2 entstehenden Werth $\varrho^2 \Omega$. Gegenwärtig sind die Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ an die Ungleichheiten (1) gebunden, bei welchen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ angemessene kleine Werthe erhalten dürfen. Offenbar lässt sich aber für jedes gegebene System von endlichen Werthen $h_1, h_2, \ldots h_n$ eine Grösse ϱ so bestimmen, dass die Werthe $\varrho h_1, \varrho h_2, \ldots \varrho h_n$ den vorgeschriebenen Ungleichheiten (1) genügen. Sobald daher die Function S_2 für irgend ein System von endlichen Werthen gleich einer Grösse Ω wird, so nimmt sie für das die Ungleichheiten (1) befriedigende Werthsystem $\varrho h_1, \varrho h_2, \ldots \varrho h_n$ den Werth $\varrho^2 \Omega$ an. Der Werth $\varrho^2 \Omega$ hat, wenn Ω von Null verschieden ist, mit Ω dasselbe Vorzeichen, und verschwindet mit Ω zusammen. Damit also die Function S_2 die Eigenschaft habe, für jedes die Ungleichheiten (1) erfüllende Werthsystem mit Ausnahme des Werthsystems

$h_1=0, h_2=0, \ldots h_n=0$ negativ zu sein, muss S_2 dieselbe Eigenschaft für jedes Werthsystem $h_1, h_2, \ldots h_n$ überhaupt besitzen, und damit die Function S_2 für jedes die Ungleichheiten (1) erfüllende Werthsystem mit Ausnahme des Werthsystems $h_1=0, h_2=0, \ldots h_n=0$ die Eigenschaft habe, positiv zu sein, muss sich wieder S_2 für jedes Werthsystem $h_1, h_2, \ldots h_n$ überhaupt ebenso verhalten. Nach I, 84 heisst eine homogene Function des zweiten Grades oder eine quadratische Form von n Variabeln, welche für alle möglichen reellen Werthsysteme der Variabeln Werthe von demselben Vorzeichen annimmt und nur verschwindet, wenn jede einzelne Variable gleich Null wird, eine wesentlich positive Form, sobald sie nur positive Werthe, eine wesentlich negative Form, sobald sie nur negative Werthe erhalten kann. In demselben § werden die Criterien aufgestellt, welche erkennen lassen, ob eine gegebene quadratische Form von n Variabeln wesentlich positiv oder wesentlich negativ oder keines von beiden sei. Wie man gesehen hat, hängt nun die bei den Aufgaben de maximis et minimis zu treffende Entscheidung davon ab, ob die in (5) definirte Function S_2 der Variabeln $h_1, h_2, \ldots h_n$ wesentlich negativ, wesentlich positiv oder keines von beiden ist. Die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hat für ein Werthsystem, das die Gleichungen (4) befriedigt, ein Maximum, ein Minimum oder keines von beiden, jenachdem sich die Function S_2 in dem ersten, zweiten oder dritten Falle befindet; die in I entwickelten Criterien des Verhaltens einer quadratischen Form liefern daher zugleich die Bedingungen, unter denen der erste, zweite oder dritte Fall eintritt. An der Stelle der Forderung, dass die n Gleichungen (4) erfüllt sein sollen, stand vorher die zusammenfassende Forderung, dass das Aggregat $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} h_{\mathfrak{a}}$ für jedes beliebige System von Werthen $h_1, h_2, \ldots h_n$ zu verschwinden habe; es leuchtet ein, dass aus jeder der beiden Forderungen die andere mit Nothwendigkeit folgt. Werden die einzelnen Incremente $h_{\mathfrak{a}}$ durch die gleichnamigen Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$ ersetzt, so geht vermöge der Formeln (1) und (6) des § 53 das genannte Aggregat in das vollständige erste Differential $df(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die obige Summe (5) in den halben Werth des vollständigen zweiten Differentials $d^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ über, welcher mit constanten ersten Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ gebildet ist. Hiernach rechtfertigt sich die Aussage, dass die gegebene Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für ein Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ dann ein Maximum oder Minimum wird, wenn das vollständige erste Differential $df(x_1, x_2, \ldots x_n)$ unabhängig von den Werthen der Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ verschwindet, und das mit constanten Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ gebildete vollständige zweite Differential $d^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, respective eine wesentlich negative oder eine wesentlich positive quadratische Form dieser Elemente ist. Auf den Fall, in welchem die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung für das Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwinden, mithin die Function S_2 unbedingt gleich Null ist, wird unsere Untersuchung nicht ausgedehnt werden.

§ 57. Absolute Maxima und Minima von Functionen von zwei und drei Variabeln.

Aus der im vorigen § angestellten Erörterung geht hervor, dass die Anzahl der Variabeln, von denen die Function, die ein Maximum oder Minimum werden soll, abhängt, zugleich die Anzahl der Elemente der quadratischen Form bestimmt, deren Beschaffenheit über das Auftreten eines Maximums oder Minimums entscheidet. Da nun die Bedingungen, welche eine quadratische Form zu einer wesentlich positiven oder wesentlich negativen machen, um so einfacher sind, je kleiner die Anzahl ihrer Elemente ist, so mögen die Functionen von zwei und drei Variabeln zur Erleichterung der Uebersicht speciell behandelt werden. Die Function S_2 in (5) des vorigen § lässt sich in der Weise darstellen, dass anstatt jedes daselbst vorkommenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}}$ das Zeichen $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ gebraucht wird, für welches die Gleichung $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ besteht; sie nimmt dann bei der Voraussetzung von zwei Variabeln die Gestalt an

$$(1) \qquad S_2 = \frac{1}{2}(a_{11}\,h_1^2 + 2\,a_{12}\,h_1\,h_2 + a_{22}\,h_2^2).$$

Damit S_2 wesentlich positiv oder negativ sei, muss nach I, § 79 die Determinante

$$(2) \qquad a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$$

einen die Null übertreffenden Werth haben; S_2 ist wesentlich positiv oder negativ, je nachdem der Coefficient a_{11}, der alsdann nicht verschwinden kann, positiv oder negativ ist.

Nimmt man wie in § 48 an, dass eine Fläche im Raume dadurch bestimmt sei, dass von den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes derselben die eine z als Function der beiden anderen gegeben ist, welche jetzt x_1 und x_2 heissen mögen, so bezieht sich die in Rede stehende Aufgabe auf die Punkte der durch die Gleichung

$$(3) \qquad z = f(x_1, x_2)$$

characterisirten Fläche, in welchen der Abstand von der $x_1\,x_2$ Ebene ein gröster oder kleinster ist. Die von dem Werthsystem x_1, x_2 jedenfalls zu erfüllenden Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

welche aus (4) des vorigen § hervorgehen, drücken dann aus, dass die in (7) des § 48 vorkommenden Grössen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ zu verschwinden haben; demnach muss die in dem betreffenden Punkte an die Fläche gelegte Tangentialebene mit der $x_1\,x_2$ Ebene parallel sein. In Folge dessen bezeichnet die Differenz $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)$ den Abstand eines Punktes der Fläche $(x_1 + h, x_2 + h_2, z)$ von der erwähnten Tangentialebene; diese Differenz wird aber nach dem Taylor'schen Satze bis auf kleine Grössen, die in Bezug auf h_1, h_2 von der zweiten Ordnung sind, durch den obigen Ausdruck S_2 dargestellt. Bei einer wesentlich negativen Function S_2 liegt die ganze Fläche mit Ausnahme des Maximumspunktes auf der Seite der Tangentialebene, auf der die z Coordinaten abnehmen, bei einer wesentlich positiven Function S_2 mit Ausnahme des Minimumspunktes dagegen auf der Seite, auf der sie wachsen. Wie in I, § 79 gezeigt ist, erfüllt die Function S_2 weder die eine noch die andere Forderung, sobald die Determinante

(2) gleich Null oder negativ wird. Verschwindet dieselbe, so ist S_2 gleich einem einzigen Quadrat, das, falls a_{11} nicht auch verschwindet, durch die Gleichung

$$(1^*)\qquad S_2 = \frac{1}{2}\, a_{11}\left(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\, h_2\right)^2,$$

oder, falls a_{11} verschwindet und folglich auch a_{12} gleich Null ist, durch die Gleichung

$$(1^{**})\qquad S_2 = \frac{1}{2}\, a_{22}\, h_2^2$$

dargestellt wird. Beide Male kann S_2 kein anderes Vorzeichen als das der Coefficienten a_{11} oder a_{22} annehmen, verschwindet aber im ersten Falle für $h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} h_2 = 0$, im zweiten Falle für $h_2 = 0$. Jede dieser Gleichungen bestimmt eine von dem vorhin definirten Punkte (x_1, x_2, z) ausgedehnte gerade Linie, längs welcher die construirte Tangentialebene mit der gegebenen Fläche bei einer bis auf kleine Grössen der zweiten Ordnung gehenden Genauigkeit zusammenfällt, das heisst zufolge § 37 eine Berührung der zweiten Ordnung hat. Insofern liefert alsdann die z Coordinate weder ein absolutes Maximum noch ein absolutes Minimum. Wenn die Determinante (2) einen negativen Werth hat, so kann die Function S_2 sowohl positive wie auch negative Werthe annehmen. Sie verschwindet für zwei nothwendig unter einander verschiedene Verhältnisse der Grössen h_1 und h_2; diese bestimmen zwei in der Tangentialebene des Punktes (x_1, x_2, z) durch denselben laufende gerade Linien, in Bezug auf welche sich die Function S_2 so verhält, dass, wer die vier von dem Punkte (x_1, x_2, z) ausgehenden halb unendlichen Linien nach einander überschreitet, regelmässig abwechselnd von positiven Werthen von S_2 zu negativen und von diesen wieder zu positiven gelangt.

Ein sehr einfaches Beispiel bildet eine Function des zweiten Grades von x_1, x_2, die absichtlich so geschrieben wird, dass die für die zweiten partiellen Differentialquotienten eingeführten Bezeichnungen a_{11}, a_{12}, a_{13} übereinstimmen,

$$(5)\qquad f(x_1, x_2)$$
$$= \frac{1}{2}\,(a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 + 2\, e_{13}\, x_1 + 2\, e_{23}\, x_2 + e_{33}).$$

Die obigen Gleichungen (4) werden dann zu den folgenden

$$(6)\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + e_{13} = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + e_{23} = 0,$$

welche nach I, § 71 für x_1, x_2 ein einziges vollständig bestimmtes Werthsystem ergeben, so lange die Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ nicht gleich Null ist. Zu dieser Bedingung kommt, damit ein Maximum oder Minimum vorhanden sei, noch die vorhin nachgewiesene Bedingung hinzu, dass die in Rede stehende Determinante positiv sein muss; für einen negativen Werth von a_{11} tritt dann ein Maximum, für einen positiven Werth desselben Coefficienten ein Minimum auf. Die bei der Function (5) durch die Gleichung (3) dargestellte Fläche wird *ein Paraboloid* genannt.

In dem Falle von drei Variabeln geht die Function S_2 durch die abgekürzte Bezeichnung der zweiten partiellen Differentialquotienten in den Ausdruck über

$$(7)\quad S_2 = \frac{1}{2}(a_{11}h_1^2 + a_{22}h_2^2 + a_{33}h_3^2 + 2a_{23}h_2h_3 + 2a_{31}h_3h_1 + 2a_{12}h_1h_2).$$

In I, § 85 sind dafür, dass S_2 eine wesentlich positive oder eine wesentlich negative Form sei, verschiedene Systeme von Bedingungen angegeben und verglichen; bezeichnet man, wie dort, bei dem symmetrischen Schema

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

die adjungirten Elemente beziehungsweise mit

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}, \end{matrix}$$

die Determinante mit D, so ist ein System von nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für den wesentlich positiven Character von S_2

$$(8)\qquad a_{11} > 0,\ A_{33} > 0,\ D > 0,$$

für den wesentlich negativen Character

$$(9)\qquad a_{11} < 0,\ A_{33} > 0,\ D < 0.$$

Als Beispiel diene die Function des zweiten Grades, die nach demselben Gesichtspunkte wie die Function (5) bezeichnet ist,

$$(10)\quad f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3 + 2 a_{31}\, x_3 x_1 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2)$$

$$+ \frac{1}{2}(2 e_{14}\, x_1 + 2 e_{24} x_2 + 2\, e_{34} x_3 + e_{44}).$$

Zuerst sind dann die Gleichungen (4) des vorigen § zu bilden; sie nehmen die Gestalt an

$$(11)\quad \begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + e_{14} &= 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + e_{24} &= 0 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + e_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben liefern nach I, § 72 dann und nur dann ein einziges vollständig bestimmtes Werthsystem, wenn die so eben definirte Determinante D nicht gleich Null ist. Unter dieser Voraussetzung entstehen mit Hülfe der eingeführten adjungirten Elemente die Ausdrücke

$$(12)\quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{-A_{11}\, e_{14} - A_{21}\, e_{24} - A_{31}\, e_{34}}{D} \\ x_2 &= \frac{-A_{12}\, e_{14} - A_{22}\, e_{24} - A_{32}\, e_{34}}{D} \\ x_3 &= \frac{-A_{13}\, e_{14} - A_{23}\, e_{24} - A_{33}\, e_{34}}{D}. \end{aligned}$$

Dieses eine Werthsystem bringt ein Maximum hervor, falls die Bedingungen (9), ein Minimum, falls die Bedingungen (8) erfüllt sind. Für die Darstellung des Werthes, welchen die Function $f(x_1, x_2, x_3)$ bei dem Werthsystem (12) annimmt, ergiebt sich eine Vereinfachung, indem in (11) der erste Ausdruck links mit x_1, der zweite mit x_2, der dritte mit x_3 multiplicirt und von den Producten die Summe genommen wird. Sobald man zu dieser Summe noch den Ausdruck

$$(13)\quad e_{14}\, x_1 + e_{24}\, x_2 + e_{34}\, x_3 + e_{44}$$

hinzuaddirt, so ergiebt sich der doppelte Werth der Function $f(x_1, x_2, x_3)$; derselbe muss deshalb für das den Gleichungen (11) genügende Werthsystem gleich dem Ausdrucke (13) werden, woraus die Bestimmung

$$(14)\qquad f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= \frac{-(A_{11}\,e_{14}^2 + A_{22}\,e_{24}^2 + A_{33}\,e_{34}^2 + 2A_{23}\,e_{24}\,e_{34} + 2A_{31}\,e_{34}\,e_{14} + 2A_{12}\,e_{14}\,e_{24}) + D\,e_{44}}{D}$$

folgt. Auf entsprechende Weise kann mit der Function (5) von zwei Variabeln und auch mit einer Function des zweiten Grades von beliebig vielen Variabeln verfahren werden.

§ 58. Relative Maxima und Minima.

Nach der in § 56 aufgestellten Definition nimmt eine Function von n Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für ein bestimmtes Werthsystem ein relatives Maximum oder Minimum an, wenn der Functionswerth für eine solche stetige Aenderung der Variabeln ein gröster oder kleinster ist, bei der sich die Variabeln nach gegebenen Bedingungen richten. Solche Bedingungen sind Gleichungen, vermittelst deren man eine mit der Zahl der Gleichungen übereinstimmende Zahl von Variabeln als Functionen der übrigen Variabeln darzustellen vermag. Während die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, für welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gegeben ist, eine Mannigfaltigkeit der n ten Ordnung ausmachen, bewirkt das Auftreten der in Rede stehenden Bedingungsgleichungen, deren Anzahl l genannt werden möge, dass nur $n - l$ Variabeln unabhängig veränderlich bleiben; hiermit wird innerhalb der ursprünglichen Mannigfaltigkeit der n ten Ordnung eine Mannigfaltigkeit der $(n-l)$ ten Ordnung bestimmt, auf welche sich das relative Maximum oder Minimum bezieht. Wir denken uns die l Bedingungsgleichungen, deren Zahl offenbar kleiner sein muss als die Zahl n der Variabeln, so ausgedrückt, dass jede der Functionen

$$(1)\qquad \varphi_1(x_1, \ldots x_n),\ \varphi_2(x_1, \ldots x_n),\ \ldots \varphi_l(x_1, \ldots x_n)$$

einen vorgeschriebenen constanten Werth habe, und setzen voraus, dass die Variabeln

$$(2)\qquad x_{n-1+1},\ x_{n-2+2},\ \ldots x_n$$

diesen Forderungen gemäss als Functionen der übrigen Variabeln

$$(3)\qquad x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$$

bestimmt werden können. Indem die Ausdrücke der Variabeln

(2) in die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ substituirt werden, verwandelt sich dieselbe in eine Function der $n-l$ Variabeln (3). Die aufzusuchenden relativen Maxima und Minima der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sind aber nichts anderes als die absoluten Maxima und Minima der so eben bestimmten Function von $n-l$ Variabeln. Wenn man daher durch Anwendung der in den vorigen § mitgetheilten Regeln die Maxima und Minima der letztern aufsucht, so ist damit die betreffende Aufgabe der relativen Maxima und Minima gelöst.

Aus der vorstehenden Ueberlegung geht hervor, dass die Behandlung der relativen Maxima und Minima keine principiellen Schwierigkeiten sondern nur Schwierigkeiten der Darstellung enthalten kann. Bevor wir eine eigenthümliche Methode auseinander setzen, welche zur Ueberwindung der in der That vorhandenen Schwierigkeiten aufgefunden ist, behandeln wir den Fall einer Function von zwei Variabeln $f(x_1, x_2)$, für welche eine Bedingungsgleichung $\varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$ gegeben ist, auf die angedeutete directe Art.

Nachdem die gegebene Function $f(x_1, x_2)$ durch Einsetzung des aus der Bedingungsgleichung $\varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$ genommenen Werthes von x_2 in eine Function von x_1 allein übergegangen ist, sind die Regeln für die Maxima und Minima einer Function von einer Variable anzuwenden. Man hat folglich den Werth x_1 so zu bestimmen, dass der vollständige nach x_1 genommene erste Differentialquotient der Function $f(x_1, x_2)$ verschwindet; bei dem zweiten nach x_1 genommenen vollständigen Differentialquotienten bedeutet das negative Vorzeichen ein Maximum, das positive Vorzeichen ein Minimum. Der vollständige Differentialquotient der ersten und zweiten Ordnung der Function $f(x_1, x_2)$ in Bezug auf x_1 ist nach den Regeln zu bilden, vermittelst deren eine Function mehrerer Variabeln vollständig nach einer einzigen Variable differentiirt wird, von der die Variabeln der Function in einer bekannten Weise abhängen; die bezüglichen Regeln sind unter (9) in § 45, und unter (9) in § 53 angegeben. Gegenwärtig fällt aber die Variable, nach welcher vollständig differentiirt werden soll, mit der einen Variable x_1 zusammen, weshalb in den genannten Formeln für die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

respective die Ausdrücke

$$1, \frac{d\,x_2}{d\,x_1}, \quad 0, \frac{d^2\,x_2}{d\,x_1^2}$$

eintreten. Hiernach erhält man

$$(4)\quad \frac{df(x_1, x_2)}{d\,x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial\,x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial\,x_2}\frac{d\,x_2}{d\,x_1},$$

$$(5)\quad \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{d\,x_1^2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{d\,x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\frac{d\,x_2}{d\,x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial\,x_2^2}\left(\frac{d\,x_2}{d\,x_1}\right)^2 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial\,x_2}\frac{d^2\,x_2}{d\,x_1^2}.$$

Die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\,x_2}{dx_1}$ und $\frac{d^2\,x_2}{d\,x_1^2}$ sind aus der Bedingungsgleichung $\varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$ zu entnehmen. Der erste ergiebt sich dem § 49 entsprechend aus dem Umstande, dass, weil die Function sich nicht ändern darf, das erste vollständige Differential der Function, mithin auch ihr nach x_1 genommener erster vollständiger Differentialquotient verschwindet, der zweite aus der Bemerkung, dass auch der zweite nach x_1 genommene vollständige Differentialquotient der Function gleich Null werden muss.

Es gelten also die Gleichungen

$$(6)\quad 0 = \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial\,x_2}\frac{d\,x_2}{d\,x_1},$$

$$(7)\quad 0 = \frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial\,x_1^2} + 2\frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial^2\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\left(\frac{d\,x_2}{d\,x_1}\right)^2 + \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial\,x_2}\frac{d^2\,x_2}{d\,x_1^2},$$

deren erste zu der Bestimmung

$$(8)\quad \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_1}}{\dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_2}}$$

führt; die Argumente x_1, x_2, werden hier wie im weitern Verlaufe fortgelassen. Das nothwendige Verschwinden des vollständigen ersten Differentialquotienten (4) liefert demnach die Gleichung

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = 0;$$

der vollständige zweite Differentialquotient (5) erhält durch Substitution des Werthes $\frac{d^2 x_2}{d x_1^2}$ die Gestalt

$$(10)\qquad \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{d x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{d x_2}{d x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{d x_2}{d x_1}\right)^2$$
$$- \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{d x_2}{d x_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\left(\frac{d x_2}{d x_1}\right)^2\right)\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}},$$

wo der Werth von $\frac{d x_2}{d x_1}$ aus (8) einzusetzen ist. Bei der getroffenen Annahme, dass die Variable x_2 mit Hülfe der Bedingungsgleichung $\varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$ als Function von x_1 ausgedrückt sei, bestimmt die Gleichung (9) die Werthe x_1, für welche $f(x_1, x_2)$ ein relatives Maximum oder Minimum werden kann, während das Vorzeichen des vollständigen zweiten Differentialquotienten in der angegebenen Weise über das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums entscheidet. Insofern aber die linke Seite von (9) noch die beiden Variabeln x_1 und x_2 enthält, hat man sich vorzustellen, dass durch die Verbindung dieser Gleichung und der gegebenen Bedingungsgleichung die Werthsysteme (x_1, x_2) bestimmt werden, welche der gegebenen Aufgabe genügen. Für den im Nenner vorkommenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ wird angenommen, dass er einen von Null verschiedenen Werth erhalte.

Wird die Aufgabe wie im vorigen § auf eine Fläche bezogen, deren Gleichung

$$z = f(x_1, x_2)$$

lautet, so drückt die Bedingungsgleichung $\varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$ eine in der $x_1\,x_2$ Ebene gegebene Linie aus; es handelt sich dann um die grösten und kleinsten Werthe des Abstandes z für diejenigen Punkte der Fläche, bei denen das herabgelassene Loth einen Punkt der bezeichneten Linie trifft. Man kann sich auch umgekehrt in den sämmtlichen Punkten dieser Linie Lothe errichtet, und durch deren in die Fläche fallende Endpunkte die Linie bestimmt denken, für welche die grösten und kleinsten Werthe der z Coordinate gesucht werden. Der Unterschied zwischen dem absoluten und dem relativen Maximum oder Minimum zeigt sich also darin, dass bei der ersten Gattung von Fragen ein Punkt der Fläche allen in der Nähe befindlichen Punkten der Fläche, bei der zweiten Gattung nur denjenigen in der Nähe befindlichen Punkten der Fläche gegenübergestellt wird, die in einer bestimmten Linie liegen. Als vorzugsweise einfach zeichnet sich der Fall aus, in welchem $\varphi(x_1, x_2)$ gleich einer rationalen ganzen Function des ersten Grades von x_1 und x_2 ist; dann erhalten die partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung constante und diejenigen der zweiten Ordnung verschwindende Werthe. Mithin wird der aus (8) folgende Werth des Differentialquotienten $\frac{d x_2}{d x_1}$ gleich einer Constante, und in dem für $\frac{d^2 f(x_1, x_2)}{d x_1^2}$ aufgestellten Ausdrucke (10) bleibt nur das Aggregat der drei Glieder

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\frac{d x_2}{d x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{d x_2}{d x_1}\right)^2$$

übrig. Da die gewählte Bedingungsgleichung die geometrische Bedeutung hat, dass der Punkt der Ebene (x_1, x_2) auf einer bestimmten geraden Linie liege, so bilden die in den betreffenden Punkten errichteten Lothe eine auf der $x_1\, x_2$ Ebene senkrecht stehende Ebene, von welcher die Fläche $z = f(x_1, x_2)$ in derjenigen Linie geschnitten wird, für die das relative Maximum oder Minimum der z Coordinate aufzusuchen ist. Durch Vergleichung der betreffenden Resultate ergiebt sich auch leicht Folgendes. Wenn die Function $f(x_1, x_2)$ für ein gewisses Werthsystem x_1, x_2 ein absolutes Maximum erreicht, und wenn den Variabeln x_1 und x_2 eine Bedingungsgleichung vorgeschrieben wird, welche wie oben in Bezug auf x_1 und x_2 vom ersten Grade ist und durch jenes Werthsystem erfüllt wird, so bildet die Function $f(x_1, x_2)$ für dasselbe Werthsystem gleichzeitig ein zu der erwähnten Bedingungsgleichung gehörendes relatives

Maximum. In Betreff des Minimums einer Function findet selbstverständlich die entsprechende Erscheinung statt.

§ 59. Methode der unbestimmten Multiplicatoren.

Im Eingange des vorigen § ist die allgemeine Aufgabe des relativen Maximums oder Minimums einer Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für die l Bedingungen

$$(1)\quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}, \ldots \varphi_l(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}$$

darauf zurückgeführt, zuerst die Variabeln

$$(2)\qquad x_{n-l+1}, x_{n-l+2}, \ldots x_n$$

durch die übrigen Variabeln

$$(3)\qquad x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$$

auszudrücken, dann die Werthe der erstern in die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ einzusetzen, und nun für die hervorgehende Function F der $n-l$ Variabeln (3) die absoluten Maxima und Minima zu ermitteln. Hierbei darf man der letztern Aufgabe die gegen das Ende des § 56 bezeichnete Gestalt geben und verlangen, dass das vollständige in Bezug auf die unabhängigen Variabeln (3) genommene erste Differential der betreffenden Function F unabhängig von den Werthen der Differentiale der Variabeln gleich Null werde; das Verhalten des mit den constanten Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-}$ gebildeten vollständigen zweiten Differentials der Function F entscheidet dann über das Auftreten des Maximums oder Minimums. Das vollständige Differential dF entsteht aus dem nach den sämmtlichen n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ genommenen Differential

$$(4)\qquad df(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

indem die Differentiale der l Variabeln (2) vermittelst der Differentiale der $n-l$ Variabeln (3) dargestellt werden. In Folge der gegebenen Bedingungsgleichungen (1) hat das vollständige Differential jeder einzelnen Function $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l$ einen verschwindenden Werth. Wenn daher jeder der Ausdrücke

$$(5)\qquad \begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n \\ d\varphi_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n \\ &\vdots \\ d\varphi_l &= \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

gleich Null gesetzt wird, so entsteht zwischen den n Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ die Anzahl l von homogenen Gleichungen des ersten Grades, welche nach den in I, § 74 entwickelten Regeln in Bezug auf die l Differentiale $dx_{n-l+1}, dx_{n-l+2}, \ldots dx_n$ als Unbekannte aufgelöst werden können. Die Gleichungen liefern für jedes der l Differentiale einen eindeutigen, nach $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ homogenen Ausdruck vom ersten Grade, wofern die Determinante des Systems

$$(6)\qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-l+1}} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-l+2}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-l+1}} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-l+2}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_{n-l+1}} & \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_{n-l+2}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} \end{matrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Durch die Einführung der gefundenen Werthe von $dx_{n-l+1}, dx_{n-l+2}, \ldots dx_n$ in das vollständige Differential (4) wird dasselbe gleich dem zu bildenden nach den Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ homogenen Ausdruck des ersten Grades; man befriedigt die Forderung, dass dieser Ausdruck unabhängig von den Werthen der betreffenden Differentiale verschwinden soll, indem man den Factor jedes einzelnen Differentials gleich Null setzt. Die auf diese Weise erhaltenen $n-l$ Gleichungen dienen in Vereinigung mit den l Gleichungen (1) zur Bestimmung der Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche den gesuchten Maximis oder Minimis entsprechen.

Der Ausdruck, in welchen df durch die auf die Gleichungen

$d\varphi_1, = 0, d\varphi_2 = 0, \ldots d\varphi_l = 0$ gegründete Elimination der Differentiale $dx_{n-l+1}, \ldots dx_n$ übergeht, kann aber auch dadurch erzeugt werden, dass man ein System von Multiplicatoren λ_1 für $d\varphi_1, \lambda_2$ für $d\varphi_2, \ldots \lambda_l$ für $d\varphi_l$ aufsucht, welche so eingerichtet sind, dass in dem Ausdrucke

$$df + \lambda_1 d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2 + \ldots + \lambda_l d\varphi_l \tag{7}$$

nach ausgeführter Entwickelung die l Differentiale $dx_{n-l+1}, \ldots dx_n$ herausfallen und nur die $n-l$ Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ zurück bleiben. Die bezeichnete Forderung liefert das System von l Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_{n-l+1}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-l+1}} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{n-l+1}} = 0\\
&\frac{\partial f}{\partial x_{n-l+2}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-l+2}} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{n-l+2}} = 0\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

in welchem die Coefficienten der l Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ bei Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen das Schema (6) bilden. Wenn daher die nach I, § 74 von einer solchen Vertauschung unabhängige Determinante des Schemas (6) nicht gleich Null ist, so werden die l Multiplicatoren durch Auflösung der Gleichungen (8) eindeutig bestimmt. Der Ausdruck, in welchen (7) vermöge der Substitution der bezüglichen Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ übergeht und der nur noch die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ enthält, ist unter der Voraussetzung der l Gleichungen $d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = 0, \ldots d\varphi_l = 0$ dem vollständigen Differential df gleich und kann deshalb nicht von demjenigen Ausdrucke differiren, welcher aus df durch die vorhin besprochene Elimination der Differentiale $dx_{n-l+1}, \ldots dx_n$ entspringt. Nach dem entwickelten Verfahren muss nun, damit ein Maximum oder Minimum zu Stande komme, der durch Einführung der Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ aus (7) entstehende Ausdruck unabhängig von den Werthen der in denselben eingehenden Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ gleich Null sein, das heisst, es müssen respective die Factoren der einzelnen Differentiale verschwinden. Hieraus folgen die $n-l$ Gleichungen

$$(8_a)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_{n-l}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-l}} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{n-l}} = 0. \end{aligned}$$

Fügt man zu denselben die l Gleichungen (8) hinzu, so leuchtet ein, dass alle einzelnen Factoren, mit denen in dem Ausdruck (7) die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ multiplicirt werden, nach einander gleich Null gesetzt sind. Die Systeme von Gleichungen (8_a) und (8) haben mithin, zusammen genommen, eine ähnliche Gestalt wie die n Gleichungen (4) des § 56, welche zu dem Auftreten eines absoluten Maximums oder Minimums der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gehören. Man kann daher die in Rede stehenden n Gleichungen vermittelst der folgenden Regel hervorbringen:

Wenn die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ unter der Voraussetzung der l Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}, \ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}, \ldots \varphi_l(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}$$

zu einem Maximum oder Minimum werden soll, so versehe man jede der letztern Functionen mit einem unbestimmten Multiplicator $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$, addire die Producte $\lambda_1\varphi_1, \lambda_2\varphi_2, \ldots \lambda_l\varphi_l$ nach einander zu der Function f, und bilde in Bezug auf den Ausdruck

$$(9)\qquad f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_l\varphi_l$$

diejenigen n Gleichungen, welche, falls die Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ wie Constanten behandelt werden, zu einem absoluten Maximum oder Minimum des Ausdrucks gehören; ihre Gestalt ist

$$(10)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_\mathfrak{a}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\mathfrak{a}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\mathfrak{a}} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0,$$

wo $\mathfrak{a}$ die Zahlen von 1 bis n durchläuft. Aus der Combination dieser n Gleichungen und der l gegebenen Bedingungsgleichungen sind die Werthe der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ und der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen; die letztern genügen der gestellten Aufgabe des Maximums oder Minimums.

Auf diese Regel gründet sich *die Methode zur Behandlung der relativen Maxima und Minima vermittelst unbestimmter Multiplicatoren.* Ein wesentlicher Vorzug des mittelst der l Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ gebildeten Systems von n Gleichungen (10) besteht darin, dass in demselben der Unterschied zwischen den l Variabeln $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ und den $n-l$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ ausgelöscht ist. Geht man bei der vorgenommenen Untersuchung von der Annahme aus, dass die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf irgend eine andere Weise in zwei Gruppen getheilt werden, deren erste l und deren zweite $n-l$ Variable umfasst, und dass vermöge der Bedingungsgleichungen (1) die Variabeln der ersten Gruppe durch die Variabeln der zweiten Gruppe ausgedrückt werden, so ist für diejenige Determinante, welche aus (6) durch Einführung der Variabeln der ersten Gruppe entsteht, ein von Null verschiedener Werth vorauszusetzen; die Gestalt der n Gleichungen (10) bleibt jedoch genau dieselbe. Man darf demnach in dem System (10) eine beliebig herausgehobene Gruppe von l Gleichungen zur Bestimmung der l Multiplicatoren verwenden, wenn nur die zugehörige Determinante des l ten Grades nicht verschwindet. Ein anderer Vorzug des Systems (10) ist der, dass es freisteht, die n Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der l Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ aufzufassen, und durch die Substitution der betreffenden Ausdrücke in die l Bedingungsgleichungen zu einer Bestimmung der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ zu gelangen, aus der eine übersichtliche Darstellung der Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ fliesst.

Auch die Entscheidung über das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums, die oben von der Beschaffenheit des mit den constanten Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ gebildeten vollständigen zweiten Differentials der daselbst definirten Function F abhängig gemacht war, lässt sich mit Hülfe der eingeführten Multiplicatoren zusammen ziehen. Ein für constante Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ geltender Ausdruck $d^2 F$ entsteht aus dem für beliebige Differentiale gebildeten Ausdruck $d^2 F$, indem die zweiten Differentiale $d^2 x_1, \ldots d^2 x_{n-l}$ gleich Null gesetzt werden. Der für beliebige Differentiale gebildete Ausdruck $d^2 F$ kann aber aus dem vollständigen zweiten Differential

$$(11)\qquad d^2 f = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} d x_{\mathfrak{a}}\, d x_{\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial f}{\partial x_{\mathfrak{a}}} d^2 x_{\mathfrak{a}}$$

dadurch erhalten werden, dass man die zweiten Differentiale $d^2 x_{n-l+1}, \ldots d^2 x_n$, den gegebenen Bedingungsgleichungen entsprechend, vermittelst der Differentiale $d^2 x_1, \ldots d^2 x_{n-l}$ ausdrückt. Für die vollständigen zweiten Differentiale der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l$, welche in Folge der Bedingungsgleichungen auch gleich Null sein müssen, bestehen die wie (11) gebildeten Ausdrücke

$$(12)\qquad d^2 \varphi_1 = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} d x_{\mathfrak{a}}\, d x_{\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}} d^2 x_{\mathfrak{a}}$$

$$\vdots$$

$$d^2 \varphi_l = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} d x_{\mathfrak{a}}\, d x_{\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{\mathfrak{a}}} d^2 x_{\mathfrak{a}}.$$

Weil nun in jedem von diesen die einzelnen Differentiale $d^2 x_{\mathfrak{a}}$ respective mit denselben partiellen Differentialquotienten multiplicirt sind wie die Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$ in den in (5) aufgestellten Differentialen $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots d\varphi_l$, so erfordert die Aufgabe, aus den Gleichungen $d^2 \varphi_1 = 0$, $d^2 \varphi_2 = 0, \ldots d^2 \varphi_l = 0$ die Werthe der Differentiale $d^2 x_1, d^2 x_2, \ldots d^2 x_{n-l}$ zu finden, nur eine Wiederholung des Verfahrens, das zu der Darstellung der Differentiale $dx_{n-l+1}, \ldots dx_n$ aus den Gleichungen $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0, \ldots d\varphi_l = 0$ gedient hat. Man erreicht deshalb den beabsichtigten Zweck auch dadurch, dass man mit Anwendung der vorhin bestimmten Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ den Ausdruck

$$(13)\qquad d^2 f + \lambda_1 d^2 \varphi_1 + \lambda_2 d^2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_l d^2 \varphi_l$$

aufstellt, in welchem die Differentiale

$$d^2 x_{n-l+1}, d^2 x_{n-l+2}, \ldots d^2 x_n$$

aus den angeführten Gründen fortfallen. Derselbe wird, sobald die Gleichungen $d^2 \varphi_1 = 0$, $d^2 \varphi_2 = 0, \ldots d^2 \varphi_l = 0$ in Kraft treten, gleich dem Ausdruck $d^2 f$ und repräsentirt daher das gesuchte vollständige Differential $d^2 F$, wobei die noch vorhandenen Differentiale $dx_{n-l+1}, \ldots dx_n$ in der angegebenen Weise durch die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n-l}$ auszudrücken sind. In dem vollständigen zweiten Differential $d^2 F$ waren noch die eingehenden zweiten Differentiale $d^2 x_1, \ldots d^2 x_{n-l}$ gleich Null zu setzen; dies muss gegenwärtig in dem Ausdruck (13) geschehen. Weil aber die zweiten Differentiale $d^2 x_{n-l+1}, \ldots d^2 x_n$ schon aus demselben verschwunden sind, so fallen alle zweiten Differentiale heraus, und man darf statt (13) einen Ausdruck betrachten, der nach demselben Gesetz, aber mit lauter verschwindenden zweiten Differentialen $d^2 x_1, d^2 x_2, \ldots d^2 x_n$ gebildet ist,

$$(14)\quad \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}} + \lambda_1 \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}} + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_l \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=n} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}.$$

Auch in diesem Ausdruck ist die Sonderung der n Variabeln in die Gruppe von l Variabeln $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ und die Gruppe von $n-l$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ nicht mehr sichtbar, so dass statt der zuerst gewählten Gruppirung irgend eine andere genommen werden darf. Sobald aus den l Gleichungen

$$(15)\qquad d\varphi_1 = 0,\ d\varphi_2 = 0, \ldots d\varphi_l = 0$$

die Differentiale von l Variabeln als Functionen der Differentiale der $n-l$ übrigen Variabeln bestimmt und in den Ausdruck (14) substituirt werden, so zeigt die hervorgehende quadratische Form der $n-l$ betreffenden Differentiale, falls sie wesentlich negativ ist, ein Maximum, falls sie wesentlich positiv ist, ein Minimum an. Es liegt in dem Wesen einer Mannigfaltigkeit der $(n-l)$ten Ordnung, welche für n Variabeln durch l Gleichungen bestimmt wird, dass auf verschiedene Arten Gruppen von $n-l$ unabhängigen Variabeln ausgewählt werden können, um die übrigen l Variabeln darzustellen; an die hierbei zulässige Willkür schliesst sich die entwickelte Methode der unbestimmten Multiplicatoren auf das genaueste an und nimmt darum in der Analysis einen hervorragenden Platz ein.

§ 60. Besondere Aufgaben der relativen Maxima und Minima. Hauptaxenproblem eines Kegelschnitts.

Als Beispiele der entwickelten Theorie wählen wir zwei Aufgaben, die sich auf Functionen von zwei und drei Variabeln beziehen und eine mannigfache Anwendung finden.

I. Es soll die Quadratsumme der beiden Variabeln x_1, x_2 zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, während eine beliebig gegebene ganze homogene Function der Variabeln vom zweiten Grade einen unveränderlichen Werth behält.

Nach den im vorigen § gebrauchten Bezeichnungen ist

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2; \tag{1}$$

die constant zu setzende Function sei

$$\varphi(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2, \tag{2}$$

ihr vorgeschriebener Werth werde gleich der Einheit angenommen. Dann hat man zufolge der Regel des vorigen § vermittelst eines unbestimmten Factors λ den Ausdruck

$$f(x_1, x_2) + \lambda \varphi(x_1, x_2) \tag{3}$$

aufzustellen und dessen nach x_1 und x_2 genommene erste partielle Differentialquotienten zum Verschwinden zu bringen. Hieraus entstehen, indem der gemeinsame Factor 2 weggelassen wird, die Gleichungen

$$\begin{cases} x_1 + \lambda(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) = 0 \\ x_2 + \lambda(a_{21} x_1 + a_{22} x_2) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

in denen wieder $a_{21} = a_{12}$ ist. Diese Gleichungen sind in Bezug auf x_1 und x_2 homogen und vom ersten Grade; sie haben, nach den Variabeln geordnet, die Gestalt

$$\begin{cases} (1 + \lambda a_{11}) x_1 + \lambda a_{12} x_2 = 0 \\ \lambda a_{21} x_1 + (1 + \lambda a_{22}) x_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

In einem solchen System können die Grössen x_1 und x_2, wie in I, § 75 bemerkt worden, keine anderen als verschwindende Werthe erhalten, wenn die betreffende Determinante nicht gleich Null ist. Die Verbindung der Werthe $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ widerspricht aber der gegebenen Bedingung, dass die homogene Function (2) gleich der Einheit sein soll. Mithin muss die Determinante des Systems (5) gleich Null werden, falls die gestellte Aufgabe überhaupt eine Auflösung besitzt. Hieraus folgt für λ die Gleichung

$$(1 + \lambda a_{11})(1 + \lambda a_{22}) - \lambda^2 a_{12}^2 = 0. \tag{6}$$

Die weitere Behandlung gewinnt an Durchsichtigkeit, sobald statt λ der negativ genommene reciproke Werth dieser Grösse

$$(7) \qquad \omega = -\frac{1}{\lambda}$$

eingeführt wird; hierdurch entstehen aus (5) und (6) beziehungsweise die Gleichungen

$$(5_a) \qquad \begin{cases} (\omega - a_{11})\, x_1 - a_{12}\, x_2 = 0 \\ -a_{21}\, x_1 + (\omega - a_{22})\, x_2 = 0, \end{cases}$$

$$(6_a) \qquad (\omega - a_{11})(\omega - a_{22}) - a_{12}^2 = 0.$$

Die letzte für ω geltende Gleichung ist vom zweiten Grade und hat die beiden Auflösungen

$$(8) \qquad \omega^{(1)} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

$$\omega^{(2)} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Dieselben sind stets reell, weil der unter dem Wurzelzeichen befindliche Ausdruck durch die folgende einfache Umformung als eine Summe von zwei Quadraten darstellbar ist,

$$(9) \qquad \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2.$$

Für jeden der gefundenen Werthe ω wird durch die Gleichungen (5_a) das Verhältniss der Grössen x_1 und x_2 bestimmt, und zwar kann zu diesem Behufe die erste oder zweite Gleichung verwandt werden. Nur in dem einem Falle versagen beide Gleichungen den Dienst, dass ω einen Werth bekommt, bei dem alle Coefficienten verschwinden, oder dass

$$\omega - a_{11} = 0, \; a_{12} = 0, \; \omega - a_{22} = 0$$

ist. Dies kann jedoch nur geschehen, wofern

$$a_{11} - a_{22} = 0, \; a_{12} = 0$$

ist, mithin der Ausdruck (9) gleich Null wird, und die Function (2) die besondere Gestalt hat

$$a_{11}\, x_1^2 + 2 a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 = a_{11}\, (x_1^2 + x_2^2).$$

Dieser Fall, in welchem die Bedingungsfunction aus der Function $x_1^2 + x_2^2$ durch Multiplication mit einem constanten Factor entsteht, wird von der Betrachtung ausgeschlossen. Offenbar sind die beiden Werthe $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ nothwendig von einander verschieden, sobald der Ausdruck (9) von Null verschieden ist.

Weil nun dieser Ausdruck für keine reellen Elemente, von denen hier allein die Rede ist, verschwinden kann, ohne dass gleichzeitig $a_{11} - a_{22} = 0$ und $a_{12} = 0$ ist, so ist diese Voraussetzung ebenfalls ausgeschlossen; wir können daher nur zwei von einander verschiedene reelle Werthe $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ erhalten. Zu $\omega^{(1)}$ und zu $\omega^{(2)}$ gehört nach dem Obigen ein bestimmtes Verhältniss der Variabeln; durch die Bedingungsgleichung bestimmen sich für jedes solche Verhältniss zwei Werthpaare, von denen das eine aus dem andern durch Multiplication mit der negativen Einheit hervorgeht. Mithin entsprechen der Wurzel $\omega^{(1)}$ zwei Werthsysteme $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ und $-x_1^{(1)}$, $-x_2^{(1)}$, der Wurzel $\omega^{(2)}$ zwei Werthsysteme $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ und $-x_1^{(2)}$, $-x_2^{(2)}$.

In Betreff dieser Werthsysteme sind noch mehrere Bemerkungen zu machen. Multiplicirt man die erste Gleichung (5_a) mit x_1, die zweite mit x_2, und addirt, so tritt als Factor von ω die Function $x_1^2 + x_2^2$ auf, während die von ω freien Glieder den negativen Werth der Bedingungsfunction $\varphi(x_1, x_2)$ liefern. Weil diese gleich der Einheit sein soll, so muss demnach für jedes unsere Aufgabe lösende Werthsystem x_1, x_2 die Gleichung

$$(10) \qquad \omega(x_1^2 + x_2^2) = 1$$

gelten. Wenn man ferner die Gleichungen (5_a) für ein zu der Wurzel $\omega^{(1)}$ gehörendes Werthsystem $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ reproducirt,

$$(\omega^{(1)} - a_{11})\, x_1^{(1)} - a_{12}\, x_2^{(1)} = 0$$
$$-a_{21}\, x_1^{(1)} + (\omega^{(1)} - a_{22})\, x_2^{(1)} = 0,$$

hierauf die erste Gleichung mit der ersten Variable, die zweite Gleichung mit der zweiten Variable eines zu $\omega^{(2)}$ gehörenden Werthsystems $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ multiplicirt und addirt, so bekommt $\omega^{(1)}$ den Factor $x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_2^{(1)} x_2^{(2)}$, und das Aggregat der von $\omega^{(1)}$ unabhängigen Glieder wird gleich dem negativ genommenen Ausdrucke

$$(11) \qquad (a_{11}\, x_1^{(1)} + a_{12}\, x_2^{(1)})\, x_1^{(2)} + (a_{21}\, x_1^{(1)} + a_{22}\, x_2^{(1)})\, x_2^{(2)}.$$

Nach einer in I, § 81 mit (9) bezeichneten Relation bleibt der Ausdruck (11) ungeändert, sobald das Werthsystem $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$

mit dem Werthsystem $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ vertauscht wird. Wenn daher das System der Gleichungen (5_a) für das zu der Wurzel $\omega^{(2)}$ gehörende Werthsystem $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ gebildet und das Werthsystem $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ für die Multiplicatoren verwendet wird, so ist das Resultat aus dem mit dem Ausdrucke $x_1^{(1)}\, x_1^{(2)} + x_2^{(1)}\, x_2^{(2)}$ multiplicirten Werthe $\omega^{(2)}$ und dem negativ genommenen Ausdrucke (11) zusammengesetzt. Aus dem Verschwinden der beiden Ergebnisse folgt durch Subtraction die Gleichung

$$(12) \qquad (\omega^{(1)} - \omega^{(2)})\,(x_1^{(1)}\, x_1^{(2)} + x_2^{(1)}\, x_2^{(2)}) = 0,$$

mithin, weil nach der bestehenden Voraussetzung die Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ von einander verschieden sind, die auf die Werthsysteme $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ und $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ bezügliche Gleichung

$$(13) \qquad x_1^{(1)}\, x_1^{(2)} + x_2^{(1)}\, x_2^{(2)} = 0.$$

Die Gleichung (10) kann ebenso wie die Bedingungsgleichung dazu dienen, für das zu einem bestimmten Werthe ω gehörende Verhältniss von x_1 und x_2 die Werthe selbst zu ermitteln, und zeigt zugleich, dass unsere Aufgabe nur dann eine reelle Auflösung gestattet, wie hier allein verlangt wird, wenn ω einen positiven Werth erhält. Die Vorzeichen der Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ lassen sich leicht beurtheilen, indem man die linke Seite der Gleichung (6_a) nach ω geordnet darstellt,

$$(14) \qquad \omega^2 - (a_{11} + a_{22})\,\omega + a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Da nach I, § 28 die Summe der Wurzeln gleich der Verbindung $a_{11} + a_{22}$, das Product derselben gleich der Verbindung $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$, der Determinante der quadratischen Form $\varphi(x_1, x_2)$ ist, so haben beide Wurzeln das positive Zeichen für

$$(15) \qquad a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 > 0, \; a_{11} > 0,$$

beide Wurzeln das negative Zeichen für

$$(16) \qquad a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 > 0, \; a_{11} < 0,$$

dagegen entgegengesetzte Zeichen für

$$(17) \qquad a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 < 0.$$

Die Voraussetzung $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = 0$, bei der eine der Wurzeln verschwindet, wird von hier ab nicht weiter verfolgt. Wie wir uns erinnern, muss die quadratische Form $\varphi(x_1, x_2)$ bei den

Bedingungen (15) wesentlich positiv, bei den Bedingungen (16) wesentlich negativ sein, während sie bei den Bedingungen (17) sowohl positive als negative Werthe annehmen kann. Da eine wesentlich negative Form niemals der positiven Einheit gleich wird, so sind die Bedingungen (16) gegenwärtig auszuschliessen. Bei (15) kommen für die gestellte Aufgabe die beiden positiven Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ zur Anwendung, bei (17) nur die eine positive Wurzel.

Für die Darstellung von x_1 und x_2 waren die aus (5_a) folgenden Proportionen angegeben

$$(18) \qquad \begin{cases} x_1 : x_2 = a_{12} : \omega - a_{11} \\ x_1 : x_2 = \omega - a_{22} : a_{12}. \end{cases}$$

Wird die linke Seite der ersten mit x_2, die linke Seite der zweiten mit x_1 multiplicirt, so stimmen auf beiden Seiten das erste Glied des ersten Verhältnisses und das zweite Glied des zweiten überein; mithin lassen sich die Proportionen zu der folgenden fortlaufenden vereinigen

$$(19) \qquad x_1^2 : x_1\, x_2 : x_2^2 = \omega - a_{22} : a_{12} : \omega - a_{11}.$$

Insofern durch dieselbe das Verhältniss $x_1^2 : x_2^2$, durch die Gleichung (10) der Werth $\frac{1}{\omega}$ der Summe $x_1^2 + x_2^2$ gegeben ist, resultiren für x_1^2, x_2^2, $x_1\, x_2$ die Werthe

$$(20) \qquad \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{\omega - a_{22}}{\omega\,(2\omega - a_{11} - a_{22})} \\[2ex] x_2^2 = \dfrac{\omega - a_{11}}{\omega\,(2\omega - a_{11} - a_{22})} \\[2ex] x_1\, x_2 = \dfrac{a_{12}}{\omega\,(2\omega - a_{11} - a_{22})}, \end{cases}$$

welche mit Benutzung der für ω geltenden Gleichung (14) die folgende Gestalt annehmen

$$(21) \qquad \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{(\omega - a_{22})}{\omega^2 - a_{11}\, a_{22} + a_{12}^2} \\[2ex] x_2^2 = \dfrac{(\omega - a_{11})}{\omega^2 - a_{11}\, a_{22} + a_{12}^2} \\[2ex] x_1\, x_2 = \dfrac{a_{12}}{\omega^2 - a_{11}\, a_{22} + a_{12}^2}. \end{cases}$$

Wann ein Maximum, wann ein Minimum vorhanden sei, hängt nach der Formel (14) des vorigen § von dem Verhalten des Ausdruckes

$$(22) \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \lambda(a_{11}\,dx_1^2 + 2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2)$$

ab, in welchem das Verhältniss der Differentiale dx_1 und dx_2 durch das Verschwinden des Differentials $d\varphi$,

$$(23) \qquad (a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2)\,dx_1 + (a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2)\,dx_2 = 0$$

bestimmt wird. Vermöge der Gleichungen (4) darf statt (23) die Gleichung

$$(24) \qquad x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0$$

eintreten, um derentwillen

$$(25) \qquad dx_1 : dx_2 = -x_2 : x_1$$

ist. Hieraus folgt die Berechtigung, in (22) die Differentiale dx_1 und dx_2 durch Grössen, die in dem bezeichneten Verhältnisse stehen, und daher respective auch durch $-x_2$ und x_1 selbst zu ersetzen, wodurch der Ausdruck

$$(26) \qquad x_2^2 + x_1^2 + \lambda(a_{11}\,x_2^2 - 2\,a_{12}\,x_2\,x_1 + a_{22}\,x_1^2),$$

entsteht. Indem nach (7) für λ die Grösse $-\frac{1}{\omega}$ eingeführt wird, verwandelt sich (26) in

$$(27) \qquad \left(1 - \frac{a_{22}}{\omega}\right)x_1^2 + \frac{2}{\omega}\,a_{12}\,x_1\,x_2 + \left(1 - \frac{a_{11}}{\omega}\right)x_2^2.$$

Die Substitution der Werthe von $x_1^2, x_2^2, x_1\,x_2$ aus (21) giebt dann das Resultat

$$(28) \qquad \frac{(\omega - a_{22})^2 + 2\,a_{12}^2 + (\omega - a_{11})^2}{\omega\,(\omega^2 - a_{11}\,a_{22} + a_{12}^2)},$$

bei welchem der Zähler als eine Summe von drei Quadraten, der Factor ω des Nenners nach der getroffenen Voraussetzung positiv ist, folglich das Vorzeichen durch das Vorzeichen der Differenz $\omega^2 - a_{11}\,a_{22} + a_{12}^2$ bestimmt wird. Da die Grösse $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ gleich dem Product der beiden Wurzeln $\omega^{(1)}\omega^{(2)}$ ist, so hat die Differenz unter den Bedingungen (15), wo es zwei verschiedene positive Wurzeln giebt, für die grössere Wurzel das positive, für die kleinere das negative Vorzeichen; dagegen hat die in Rede stehende Differenz unter den Bedingungen

(17), wo zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen vorhanden sind, für die zu wählende positive Wurzel stets das positive Vorzeichen. Demnach liefert in dem Falle (15) die grössere Wurzel ein Minimum, die kleinere ein Maximum, während in dem Falle (17) die positive Wurzel stets ein Minimum hervorbringt.

Die so eben gelöste Aufgabe berührt sich mit einer Fundamentalaufgabe aus der Lehre von den Kegelschnitten. Für rechtwinklige Coordinaten x_1, x_2 stellt die Gleichung

$$(29)\qquad a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 1$$

eine *Ellipse* oder *Hyperbel* dar, jenachdem von den Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} die Bedingungen (15) oder (17) erfüllt werden. Wenn der Gleichung (29) ein Werthsystem x_1, x_2 genügt, so genügt ihr auch, wie schon oben bemerkt worden, das zugehörige Werthsystem $-x_1, -x_2$; die betreffenden beiden Punkte der Curve liegen auf einer durch den Coordinatenanfangspunkt laufenden Geraden zu beiden Seiten desselben in gleichen Entfernungen, mithin wird jede durch den Coordinatenanfangspunkt gezogene Sehne der Curve in diesem Punkte halbirt. Eine solche Sehne heisst *ein Durchmesser*, und der zum Coordinatenanfangspunkt gewählte Punkt *der Mittelpunkt* des durch (29) gegebenen Kegelschnitts. Die Function

$$(1)\qquad x_1^2 + x_2^2$$

bedeutet also das Quadrat der Entfernung des Punktes (x_1, x_2) von dem Mittelpunkte des Kegelschnitts, und die behandelte Aufgabe giebt diejenigen Punkte des Kegelschnitts an, für welche das Quadrat jener Entfernung, folglich auch die Entfernung selbst, einen grösten oder kleinsten Werth erhält. Wie sich gezeigt hat, liegen bei der Ellipse auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden zwei Maxima, auf einer andern durch den Mittelpunkt gehenden Geraden zwei Minima, während bei der Hyperbel nur auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden zwei Minima vorkommen.

Bei der Ellipse werden der Cosinus und Sinus des Winkels, welchen die von dem Mittelpunkt nach dem Punkte $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ gezogene Gerade mit der positiven x_1 Axe bildet, respective durch die Ausdrücke

$$(30)\qquad \frac{x_1^{(1)}}{\sqrt{x_1^{(1)}x_1^{(1)}+x_2^{(1)}x_2^{(1)}}},\quad \frac{x_2^{(1)}}{\sqrt{x_1^{(1)}x_1^{(1)}+x_2^{(1)}x_2^{(1)}}}$$

bezeichnet; für den Punkt $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ gelten die entsprechenden Ausdrücke

$$(31)\qquad \frac{x_1^{(2)}}{\sqrt{x_1^{(2)}x_1^{(2)}+x_2^{(2)}x_2^{(2)}}},\quad \frac{x_2^{(2)}}{\sqrt{x_1^{(2)}x_1^{(2)}+x_2^{(2)}x_2^{(2)}}}.$$

Wegen der Gleichung (10) darf man aber statt der ersten Quadratsumme den Werth $\frac{1}{\omega^{(1)}}$, statt der zweiten den Werth $\frac{1}{\omega^{(2)}}$ setzen, und erhält beziehungsweise die Ausdrücke

$$(32)\qquad \begin{cases} \sqrt{\omega^{(1)}}\,x_1^{(1)},\ \sqrt{\omega^{(1)}}\,x_2^{(1)} \\ \sqrt{\omega^{(2)}}\,x_2^{(1)},\ \sqrt{\omega^{(2)}}\,x_2^{(2)}. \end{cases}$$

Wenn in dem Falle der Hyperbel $\omega^{(1)}$ die positive Wurzel bedeutet, so gelten die ersten beiden Ausdrücke ebenfalls in Bezug auf die Verbindungslinie des zugehörigen Punktes $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ mit dem Mittelpunkte. Die andere negative Wurzel $\omega^{(2)}$ liefert keine Auflösung der Aufgabe des Maximums oder Minimums und wurde deshalb vorhin ausgeschlossen. Hält man aber die rein algebraische Frage fest, so finden sich für $x_1^{(2)}$ und $x_2^{(2)}$ rein imaginäre Werthe, aus denen für (31) reelle zusammengehörige Werthe des Cosinus und Sinus eines von einer gewissen durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden mit der positiven x Axe gebildeten Winkels folgen, die auch durch die beiden letzten Ausdrücke in (32) darstellbar sind. Demnach werden sowohl bei der Ellipse wie bei der Hyperbel vermittelst (32) die Richtungen von zwei durch den Mittelpunkt gehenden Geraden bestimmt; dieselben stehen auf einander senkrecht, weil der Cosinus des Neigungswinkels den Werth

$$(13^*)\qquad \sqrt{\omega^{(1)}}\,\sqrt{\omega^{(2)}}\,(x_1^{(1)}x_1^{(2)}+x_2^{(1)}x_2^{(2)})$$

hat, also in Folge der Gleichung (13) verschwindet. Diese zu einander senkrechten Geraden heissen *die beiden Hauptaxen des Kegelschnitts.*

Nachdem auf dem eingeschlagenen Wege die Lage der

Hauptaxen gefunden ist, kann man die Gleichung des Kegelschnitts umformen, indem man statt der ursprünglichen Coordinaten x_1 und x_2 neue einführt, welche denselben Anfangspunkt haben und sich auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen beziehen. Wie in I, § 80 hervorgehoben ist, gehören die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $(x_1\, x_2)$ zu der daselbst entwickelten Interpretation der obigen quadratischen Form (1), welche das Quadrat des betreffenden Punktes von dem Coordinatenanfangspunkt ausdrückt. Nimmt man bei demselben Coordinatenanfangspunkt ein anderes rechtwinkliges Axensystem ξ, η, so muss das Quadrat der Entfernung des Punktes (ξ, η) von jenem Punkte wieder durch die Quadratsumme $\xi^2 + \eta^2$ dargestellt werden; ausserdem hängen die Coordinaten desselben Punktes in den beiden Systemen durch Gleichungen des ersten Grades zusammen, welche mit den constanten Coefficienten α, β, γ, δ gebildet, die folgende Gestalt haben

$$(33)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha\xi + \beta\eta \\ x_2 &= \gamma\xi + \delta\eta. \end{aligned}$$

Hier entsprechen die Werthe $x_1 = \alpha, x_2 = \gamma$ den Werthen $\xi = 1, \eta = 0$, die Werthe $x_1 = \beta, x_2 = \delta$ den Werthen $\xi = 0, \eta = 1$. Auch ist a. a. O. nachgewiesen, dass die neuen positiven Axen ξ, η die gleiche oder entgegengesetzte relative Lage wie die ursprünglichen positiven Axen x_1, x_2 haben, je nachdem die Determinante der Substitution

$$(34)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma$$

einen positiven oder negativen Werth hat. Vermittelst der Substitution (33) muss die Gleichung

$$(35)\qquad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2$$

erfüllt werden, oder, wie man auch sagt, die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2$ in sich selbst übergehen. Weil nun nach (28) in I, § 78 die Determinante der neuen Form gleich dem Product aus der Determinante der ursprünglichen Form und dem Quadrate der Substitutionsdeterminante ist, die Determinanten der beiden gegenwärtigen Formen jedoch gleich der Einheit, also einander gleich sind, so muss das Quadrat der Substitutionsdeterminante ebenfalls gleich der Einheit sein; sie selbst ist also entweder gleich der positiven oder gleich der negativen

Einheit. Wegen der Gleichung (35) folgen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relationen

$$(36)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten bestimmt sich ein Winkel χ, aus der zweiten ein Winkel ψ, wie folgt,

$$(37)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos\chi & \beta = \cos\psi \\ \gamma = \sin\chi & \delta = \sin\psi, \end{cases}$$

nach der dritten muss

$$(38)\qquad \cos\chi\cos\psi + \sin\chi\sin\psi = \cos(\psi - \chi) = 0$$

sein, also ist die Differenz $\psi - \chi$ entweder gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich $-\frac{\pi}{2}$. Die Substitutionsdeterminante (34) verwandelt sich in den Ausdruck

$$(39)\qquad \cos\chi\sin\psi - \cos\psi\sin\chi = \sin(\psi - \chi).$$

Je nachdem derselbe gleich der positiven oder negativen Einheit ist, wird $\psi - \chi$ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, so dass für den ersten Fall aus (33) die Formeln

$$(40_a)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \cos\chi \,.\, \xi - \sin\chi \,.\, \eta \\ x_2 &= \sin\chi \,.\, \xi + \cos\chi \,.\, \eta, \end{aligned}$$

für den zweiten Fall die Formeln

$$(40_b)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \cos\chi \,.\, \xi + \sin\chi \,.\, \eta \\ x_2 &= \sin\chi \,.\, \xi - \cos\chi \,.\, \eta \end{aligned}$$

entstehen. Man überzeugt sich leicht, dass in dem ersten Falle die positiven Axen x_1 und x_2 durch Drehung um den Winkel χ mit Beibehaltung der Reihenfolge in die positiven Axen der ξ und η übergeführt werden können, was in dem zweiten Falle nicht möglich ist.

Um bei der Gleichung des Kegelschnitts Coordinaten ξ, η einzuführen, welche zu den Hauptaxen gehören, hat man also die Werthe der in (37) angeführten Grössen in derselben Reihenfolge aus (32) zu nehmen; den beiden ersten Gleichungen von (36) entspricht die mit $\omega = \omega^{(1)}$ und $\omega = \omega^{(2)}$ gebildete Gleichung (10), der dritten Gleichung von (36) das Verschwinden des Ausdrucks (13*). So ergiebt sich die Substitution

$$(41)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_1^{(1)}\,\xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_1^{(2)}\,\eta \\ x_2 &= \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_2^{(1)}\,\xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_2^{(2)}\,\eta. \end{aligned}$$

Die daraus hervorgehende Transformation der quadratischen Form $\varphi(x_1, x_2)$ vereinfacht sich durch die Bildung der halbgenommenen partiellen Differentialquotienten

$$(42)\qquad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= \sqrt{\omega^{(1)}}\,(a_{11} x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)})\,\xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\,(a_{11} x_1^{(2)} + a_{12} x_2^{(2)})\,\eta \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= \sqrt{\omega^{(1)}}\,(a_{21} x_1^{(1)} + a_{22} x_2^{(1)})\,\xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\,(a_{21} x_1^{(2)} + a_{22} x_2^{(2)})\,\eta, \end{aligned}$$

welche mit Hülfe der auf $\omega = \omega^{(1)}$ und $\omega = \omega^{(2)}$ angewendeten Gleichungen (5_a) die Gestalt bekommen

$$(43)\qquad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= \omega^{(1)} \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_1^{(1)}\,\xi + \omega^{(2)} \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_1^{(2)}\,\eta \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= \omega^{(1)} \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_2^{(1)}\,\xi + \omega^{(2)} \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_2^{2)}\,\eta. \end{aligned}$$

Multiplicirt man jetzt bei (41) und (43) die erste mit der ersten, die zweite mit der zweiten Gleichung, und zwar einerseits die Ausdrücke links, andrerseits die Ausdrücke rechts, und addirt, so geht auf der linken Seite die Function $\varphi(x_1, x_2)$ hervor, auf der rechten Seite erhält dagegen nach den schon mehrfach benutzten Relationen der Coefficient von ξ^2 den Werth $\omega^{(1)}$, der Coefficient von η^2 den Werth $\omega^{(2)}$, und der zu $2\xi\eta$ gehörige Coefficient den Werth Null. Man findet demnach das Resultat

$$(44)\qquad a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = \omega^{(1)} \xi^2 + \omega^{(2)} \eta^2.$$

Dasselbe zeigt, dass die Gleichung der Ellipse wie der Hyperbel, wenn die Hauptaxen zu den Coordinatenaxen gemacht werden, dadurch ausgezeichnet ist, dass sie nur die Quadrate der Coordinaten und nicht ihr Product enthält. Bei der Ellipse stellen $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ die reciproken Werthe der Quadrate der halben zu den Hauptaxen gehörenden Durchmesser dar, welche ebenfalls Hauptaxen genannt werden; bei der Hyperbel gilt der gleiche Ausdruck eigentlich nur für die positive Wurzel $\omega^{(1)}$, wird aber auch von beiden Wurzeln gebraucht.

Hiernach löst die so eben durchgeführte Untersuchung die Aufgabe, die Hauptaxen eines Kegelschnitts nach Lage und Grösse zu bestimmen, oder dessen *Hauptaxenproblem*. Man kann den Inhalt der Gleichungen (35) und (44) dahin zusammenfassen, dass durch die Substitution (41) die beiden quadratischen Formen $x_1^2 + x_2^2$ und $\varphi(x_1, x_2)$ gleichzeitig so transformirt werden, dass die erstere in sich selbst, die zweite in eine Form übergeht, welche nur die Quadrate der neuen Variabeln enthält. Auf diese Weise werden die beiden Formen, welche in dem gestellten Problem des relativen Maximums oder Minimums vorkommen, gleichzeitig transformirt, und es lässt sich die Auflösung in Bezug auf die neuen Variabeln ξ und η so ausdrücken, dass die zugehörigen Werthsysteme diejenigen sind, für welche entweder die zweite Variable η oder die erste Variable ξ verschwindet.

§ 61. Fortsetzung. Hauptaxenproblem einer Fläche zweiten Grades.

Die zweite Aufgabe, welche wegen ihrer Analogie mit der ersten eine kürzere Behandlung zulässt, ist die folgende:

II. Die Quadratsumme der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 unter der Bedingung zu einem Maximum oder Minimum zu machen, dass eine beliebig gegebene ganze homogene Function der Variabeln vom zweiten Grade einen unveränderlichen Werth behält.

Es ist hier

(1) $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

die gegebene Function sei in der früheren Weise bezeichnet

(2) $$\varphi(x_1, x_2, x_3)$$
$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2,$$

ihr fester Werth sei wieder gleich der Einheit. Mit Hülfe eines unbestimmten Factors λ bilde man nach § 59 den Ausdruck

(3) $$f(x_1, x_2, x_3) + \lambda \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

und erzeuge durch Nullsetzen der nach x_1, x_2, x_3 genommenen partiellen Differentialquotienten die Gleichungen

(4) $$\begin{cases} x_1 + \lambda(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) = 0 \\ x_2 + \lambda(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) = 0 \\ x_3 + \lambda(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) = 0. \end{cases}$$

Dieses System von Gleichungen des ersten Grades für x_1, x_2, x_3 würde aus der im vorigen § angeführten Ursache nur durch die Werthe $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ erfüllt werden, wenn die Determinante des Schemas der Coefficienten

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & 1+\lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & 1+\lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null wäre. Mithin muss die betreffende Determinante verschwinden und bestimmt auf solche Weise den Werth λ. Nun werde abermals

$$(6)\qquad \omega = -\frac{1}{\lambda}$$

gesetzt, so dass aus (4) das System von Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} (\omega - a_{11})\,x_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 = 0 \\ -a_{21}\,x_1 + (\omega - a_{22})\,x_2 - a_{23}\,x_3 = 0 \\ -a_{31}\,x_1 - a_{32}\,x_2 + (\omega - a_{33})\,x_3 = 0 \end{cases}$$

folgt, dessen Determinante

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \omega - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \omega - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \omega - a_{33} \end{vmatrix} = D(\omega)$$

durch ihr Verschwinden für ω die Gleichung

$$(9)\qquad D(\omega) = 0$$

liefert. Die Wurzeln dieser Gleichung können von einander verschieden sein, oder es können unter ihnen gleiche vorkommen; wir schliessen die Fälle, in denen das letztere geschieht, von der Betrachtung aus. Nach I, § 49 tritt bei einer algebraischen Gleichung dann und nur dann eine doppelte Wurzel auf, wenn für deren Werth die erste Ableitung der gleich Null zu setzenden Function mit der Function gleichzeitig verschwindet. Die erste Ableitung oder der nach ω genommene erste Differentialquotient der Function $D(\omega)$ ist der Ausdruck

$$(10)\quad \frac{dD(\omega)}{d\omega} = (\omega - a_{22})(\omega - a_{33}) - a_{23}^2 + (\omega - a_{33})(\omega - a_{11}) - a_{31}^2 + (\omega - a_{11})(\omega - a_{22}) - a_{12}^2.$$

Die getroffene Annahme besteht also darin, dass derselbe durch keine Wurzel der Gleichung (9) zum Verschwinden kommen darf.

Sobald für ω eine Wurzel der Gleichung (9) genommen wird, dient das System von Gleichungen (7), wie am Schlusse von I, § 75 auseinandergesetzt ist, dazu, die Verhältnisse der Grössen x_1, x_2, x_3 zu bestimmen. Es mögen die adjungirten Elemente des Schemas (8) in der entsprechenden Ordnung folgendermassen bezeichnet werden

$$(11)\qquad \begin{matrix} D_{11}(\omega) & D_{12}(\omega) & D_{13}(\omega) \\ D_{21}(\omega) & D_{22}(\omega) & D_{23}(\omega) \\ D_{31}(\omega) & D_{32}(\omega) & D_{33}(\omega), \end{matrix}$$

wo aus der Symmetrie des Schemas (8) die Symmetrie des vorliegenden folgt; falls nicht alle adjungirten Elemente verschwinden, werden die Verhältnisse der Grössen x_1, x_2, x_3 durch die Verhältnisse der entsprechend geordneten Elemente irgend einer Horizontalreihe ausgedrückt. Die Möglichkeit, dass alle Elemente in (11) gleich Null werden, ist indessen dadurch beseitigt, dass der Ausdruck (10) für keine Wurzel von (9) gleich Null werden darf; denn es leuchtet ein, dass derselbe mit dem Aggregat der drei Elemente

$$(12)\qquad D_{11}(\omega) + D_{22}(\omega) + D_{33}(\omega)$$

übereinstimmt, und daher bei dem Verschwinden aller Elemente ebenfalls verschwinden müsste. Demnach gelten die drei Proportionen

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = D_{11}(\omega) : D_{12}(\omega) : D_{13}(\omega) \\ x_1 : x_2 : x_3 = D_{21}(\omega) : D_{22}(\omega) : D_{23}(\omega) \\ x_1 : x_2 : x_3 = D_{31}(\omega) : D_{32}(\omega) : D_{33}(\omega) \end{cases}$$

Wird die linke Seite der ersten mit x_1, der zweiten mit x_2, der dritten mit x_3 multiplicirt, so lässt sich wegen der Gleichungen $D_{12}(\omega) = D_{21}(\omega)$, u. s. f. wieder eine fortlaufende Proportion ableiten,

$$(14)\qquad \begin{aligned} & x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_2\,x_3 : x_3\,x_1 : x_1\,x_2 \\ & \quad = D_{11}(\omega) : D_{22}(\omega) : D_{33}(\omega) : D_{23}(\omega) : D_{31}(\omega) : D_{12}(\omega). \end{aligned}$$

Ein geeignetes Hülfsmittel zur ferneren Untersuchung des Systems (7) besteht darin, die erste, zweite und dritte Gleichung respective mit drei unbestimmten Grössen u, v, w zu multipliciren und hierauf zu addiren, so dass die Gleichung

$$(15)\qquad \begin{aligned} & \omega(x_1 u + x_2 v + x_3 w) \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} u + \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} v + \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} w\right) = 0 \end{aligned}$$

entsteht. Nach einer im vorigen § erwähnten Bemerkung hat der in der zweiten Klammer befindliche Ausdruck die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wofern die Grössen x_1, x_2, x_3 der Reihe nach mit den Grössen u, v, w vertauscht werden, oder die Relation

$$(16)\quad \frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}u+\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}v+\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}w$$
$$=\frac{\partial\varphi(u,v,w)}{\partial u}x_1+\frac{\partial\varphi(u,v,w)}{\partial v}x_2+\frac{\partial\varphi(u,v,w)}{\partial w}x_3$$

zu erfüllen. Setzt man in (15) erstens $u=x_1, v=x_2, w=x_3$, so wird das zu subtrahirende Aggregat nach dem *Euler*'schen Satze von den homogenen Functionen gleich der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, und insofern deren Werth gleich der Einheit sein soll, dieser selbst gleich; hieraus geht für jede Wurzel von (9) die Gleichung

$$(17)\quad \omega(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=1$$

hervor. Die drei nach der bestehenden Voraussetzung verschiedenen Wurzeln von (9) mögen mit $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ bezeichnet, die zu einer jeden gehörigen Werthe x_1, x_2, x_3 durch Hinzufügung des entsprechenden oberen Zeigers kenntlich gemacht werden. Es werde nun in (15) einmal für ω eine bestimmte Wurzel $\omega^{(1)}$ gewählt, demzufolge $x_1=x_1^{(1)}, x_2=x_2^{(1)}, x_3=x_3^{(1)}$ genommen, ferner mit Anwendung einer zweiten Wurzel $\omega^{(2)}$ die Bestimmung $u=x_1^{(2)}$, $v=x_2^{(2)}$, $w=x_3^{(2)}$ getroffen; ein zweites Mal werde für ω die Wurzel $\omega^{(2)}$ substituirt, so dass $x_1=x_1^{(2)}, x_2=x_2^{(2)}, x_3=x_3^{(2)}$ sind, ferner umgekehrt $u=x_1^{(1)}, v=x_2^{(1)}$, $w=x_3^{(1)}$ gesetzt; dann nimmt die erste Klammer und wegen (16) auch das zu subtrahirende Aggregat beide Male denselben Werth an, so dass durch Subtraction der Resultate die Gleichung

$$(18)\quad (\omega^{(1)}-\omega^{(2)})(x_1^{(1)}x_1^{(2)}+x_2^{(1)}x_2^{(2)}+x_3^{(1)}x_3^{(2)})=0$$

entsteht. Weil aber vermöge der getroffenen Annahme $\omega^{(1)}-\omega^{(2)}$ nicht gleich Null sein kann, so muss die Gleichung

$$(19)\quad x_1^{(1)}x_1^{(2)}+x_2^{(1)}x_2^{(2)}+x_3^{(1)}x_3^{(2)}=0$$

erfüllt sein; in derselben Weise gelten für die zu zwei andern Paaren von Wurzeln gehörenden Werthe die Gleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} x_1^{(2)}x_1^{(3)}+x_2^{(2)}x_2^{(3)}+x_3^{(2)}x_3^{(3)}=0, \\ x_1^{(3)}x_1^{(1)}+x_2^{(3)}x_2^{(1)}+x_3^{(3)}x_3^{(1)}=0. \end{cases}$$

Aus der Verbindung der Gleichung (17) mit der Proportion (14) folgt für die auf der linken Seite der letztern vorkommenden Grössen die Bestimmung

$$(21)\quad x_1^2 = \frac{D_{11}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))}, \quad x_2^2 = \frac{D_{22}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))},$$

$$x_3^2 = \frac{D_{33}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))},$$

$$x_2 x_3 = \frac{D_{23}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))}, \quad x_3 x_1 = \frac{D_{31}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))},$$

$$x_1 x_2 = \frac{D_{12}(\omega)}{\omega(D_{11}(\omega)+D_{22}(\omega)+D_{33}(\omega))}.$$

Der zweite Factor des gemeinsamen Nenners ist der obige Ausdruck (12) und darf als solcher für keinen der Werthe $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ gleich Null werden. Dass einer der drei Werthe selbst gleich Null sei, schliessen wir durch die Festsetzung aus, dass die Determinante der quadratischen Form $\varphi(x_1, x_2, x_3)$

$$(22)\qquad a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}^2 - a_{22}\, a_{31}^2 - a_{33}\, a_{12}^2 + 2 a_{23}\, a_{31}\, a_{12},$$

in deren negativ genommenen Werth die Determinante (8) für $\omega = 0$ übergeht, von Null verschieden sein soll.

Es lässt sich nachweisen, dass die drei Wurzeln $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ der Gleichung (9) stets reell sind. Als eine Gleichung mit reellen Coefficienten könnte dieselbe nach § 53 nur entweder drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei complexe conjugirte Wurzeln haben. Wäre das letztere der Fall und hiessen die conjugirten Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$, so erhielte man vermöge (21) für $\omega = \omega^{(1)}$ ein durch bestimmte algebraische Operationen gebildetes Werthsystem $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, für $\omega = \omega^{(2)}$ ein auf dieselbe Art gebildetes Werthsystem $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$. Die vorkommenden algebraischen Operationen sind erstens rationale, und von diesen ist in I, § 27 gezeigt, dass bei Anwendung der gleichen Operationen auf Elemente, die mit gegebenen Elementen conjugirt sind, nothwendig ein mit dem ursprünglichen conjugirter Werth hervorgeht; zu der Darstellung von x_1, x_2, x_3 gehören ferner Ausziehungen von Quadratwurzeln, in Betreff deren nach I, § 39 der Satz gilt, dass je eine der beiden Quadratwurzeln aus einer Grösse $A + iB$ mit je einer der beiden Quadratwurzeln aus der conjugirten Grösse $A - iB$ conjugirt ist. Aus diesen Gründen liesse sich in dem obigen Falle bewirken, dass $x_1^{(2)}$

mit $x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}$ mit $x_2^{(1)}$, $x_3^{(2)}$ mit $x_3^{(1)}$ conjugirt würde. Trennte man demnach den reellen und imaginären Theil und setzte

$$(23)\qquad \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \lambda_1 + i\mu_1,\ x_2^{(1)} = \lambda_2 + i\mu_2,\ x_3^{(1)} = \lambda_3 + i\mu_3, \\ x_1^{(2)} = \lambda_1 - i\mu_1,\ x_2^{(2)} = \lambda_2 - i\mu_2,\ x_3^{(2)} = \lambda_3 - i\mu_3, \end{array}$$

so würde sich (19) in die Gleichung

$$(24)\qquad \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \lambda_3^2 + \mu_3^2 = 0$$

verwandeln, welche nicht anders als durch Verschwinden der sämmtlichen reellen Grössen $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$ erfüllt werden könnte. Dann müssten aber auch $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ selbst gleich Null sein, was mit Rücksicht auf die für $\omega = \omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ geltende Gleichung (17) unmöglich ist. Mithin sind alle drei Wurzeln $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$, wie behauptet worden, reell. Hieraus ergiebt sich, dass die Ausdrücke der rechten Seite der in (21) zusammengefassten Gleichungen ebenfalls für $\omega = \omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ reell werden. Für x_1, x_2, x_3 können hiernach nur Werthe erscheinen, die entweder reell sind, oder negative reelle Quadrate haben, das heisst, rein imaginär ausfallen. Weil aber die Producte $x_2\,x_3$, $x_3\,x_1$, $x_1\,x_2$ wieder nothwendig reell sind, so können x_1, x_2, x_3 nur entweder sämmtlich reell oder sämmtlich rein imaginär sein, und zwar muss das eine oder andere eintreten, je nachdem die Summe ihrer Quadrate einen positiven oder negativen Werth hat. Diese ist aber nach (17) dem reciproken Werth der betreffenden Grösse ω gleich. Es werden daher x_1, x_2, x_3 gleichzeitig reell oder rein imaginär, je nachdem die zugehörige Wurzel $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ positiv oder negativ ist. In Folge dessen haben die neun Grössen

$$(25)\qquad \begin{array}{lll} \sqrt{\omega^{(1)}}\,x_1^{(1)} & \sqrt{\omega^{(2)}}\,x_1^{(2)} & \sqrt{\omega^{(3)}}\,x_1^{(3)} \\ \sqrt{\omega^{(1)}}\,x_2^{(1)} & \sqrt{\omega^{(2)}}\,x_2^{(2)} & \sqrt{\omega^{(3)}}\,x_2^{(3)} \\ \sqrt{\omega^{(1)}}\,x_3^{(1)} & \sqrt{\omega^{(2)}}\,x_3^{(2)} & \sqrt{\omega^{(3)}}\,x_3^{(3)} \end{array}$$

die Eigenschaft, immer reell zu sein. Auflösungen der gestellten Aufgabe des relativen Maximums oder Minimums erhält man jedoch nur für die positiven Werthe der Grösse ω.

Wir benutzen die Grössen (25) als Coefficienten für drei neue Variabeln ξ, η, ζ und bilden die Substitution

$$(26)\quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_1^{(1)}\, \xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_1^{(2)}\, \eta + \sqrt{\omega^{(3)}}\, x_1^{(3)}\, \zeta \\ x_2 = \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_2^{(1)}\, \xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_2^{(2)}\, \eta + \sqrt{\omega^{(3)}}\, x_2^{(3)}\, \zeta \\ x_3 = \sqrt{\omega^{(1)}}\, x_3^{(1)}\, \xi + \sqrt{\omega^{(2)}}\, x_3^{(2)}\, \eta + \sqrt{\omega^{(3)}}\, x_3^{(3)}\, \zeta, \end{cases}$$

vermittelst deren die quadratischen Formen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ gleichzeitig transformirt werden. Für die erstere ergiebt sich, indem die Gleichung (17) für $\omega = \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$, ferner (19) und (20) benutzt wird, die Gleichung

$$(27)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Um $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ umzuformen, leitet man mit Zuziehung von (7) die Gleichungen ab

$$(28)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \omega^{(1)}\sqrt{\omega^{(1)}}\, x_1^{(1)}\, \xi + \omega^{(2)}\sqrt{\omega^{(2)}}\, x_1^{(2)}\, \eta + \omega^{(3)}\sqrt{\omega^{(3)}}\, x_1^{(3)}\, \zeta \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \omega^{(1)}\sqrt{\omega^{(1)}}\, x_2^{(1)}\, \xi + \omega^{(2)}\sqrt{\omega^{(2)}}\, x_2^{(2)}\, \eta + \omega^{(3)}\sqrt{\omega^{(3)}}\, x_2^{(3)}\, \zeta \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \omega^{(1)}\sqrt{\omega^{(1)}}\, x_3^{(1)}\, \xi + \omega^{(2)}\sqrt{\omega^{(2)}}\, x_3^{(2)}\, \eta + \omega^{(3)}\sqrt{\omega^{(3)}}\, x_3^{(3)}\, \zeta, \end{cases}$$

woraus durch Multiplication und Addition der entsprechenden Ausdrücke nach abermaliger Anwendung von (17), (19) und (20) die Gleichung

$$(29)\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \omega^{(1)}\, \xi^2 + \omega^{(2)}\, \eta^2 + \omega^{(3)}\, \zeta^2$$

entsteht. Durch die Substitution (26) wird also einerseits die Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ in sich selbst, andrerseits die quadratische Form $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ in eine solche quadratische Form verwandelt, die nur die Quadrate der neuen Variabeln und als deren Coefficienten die drei Wurzeln $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ der cubischen Gleichung (9) enthält. Nach dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, das in I, § 88 bewiesen worden, ist die Anzahl von positiv und von negativ genommenen Quadraten, in deren Aggregat eine mit reellen Coefficienten versehene quadratische Form durch eine reelle Substitution verwandelt werden kann, unveränderlich dieselbe. Bei der in (29) gegebenen Darstellung der Form $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ wird die Zahl der positiven und negativen Quadrate durch die Zahl der positiven und negativen Werthe unter den drei Grössen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ bestimmt. Offenbar ist die Form $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ wesentlich positiv, wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ positiv, wesentlich negativ, wenn alle drei Grössen negativ sind; die letztere Voraussetzung macht es unmöglich, dass die Form für irgend ein reelles Werthsystem der Variabeln den vorgeschriebenen Werth der Einheit annehme, und wird deshalb von jetzt ab ausgeschlossen. Gilt die erstere Voraussetzung nicht, so können unter den drei Werthen, von welchen in Folge der obigen Annahme keiner verschwinden darf, zwei positiv und einer negativ, oder einer positiv und zwei negativ sein. Es bleiben demnach drei Fälle, welche sich folgendermassen bezeichnen lassen,

$$\text{(I)} \quad \omega^{(1)} > \omega^{(2)} > \omega^{(3)} > 0$$

$$\text{(II)} \quad \omega^{(1)} > \omega^{(2)} > 0;\ 0 > \omega^{(3)}$$

$$\text{(III)} \quad \omega^{(1)} > 0;\ 0 > \omega^{(2)} > \omega^{(3)}.$$

Die Entscheidung zwischen dem Maximum und Minimum wird nach der Formel (14) des § 59 durch den Ausdruck

$$(30) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$
$$+ \lambda\,(a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + a_{33}dx_3^2 + 2a_{23}dx_2dx_3 + 2a_{31}dx_3dx_1 + 2a_{12}dx_1dx_2)$$

gegeben, in welchem die Differentiale der Variabeln durch die Gleichung

$$(31) \qquad d\,\varphi\,(x_1, x_2, x_3) = 0$$

eingeschränkt sind. Man darf hier die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 durch die Differentiale der neuen Variabeln $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ausdrücken, indem man in den Gleichungen (26) die vollständigen Differentiale der linken und rechten Seiten bildet. Weil aber die Coefficienten von ξ, η, ζ constant sind, so entstehen hierbei gerade diejenigen Resultate, welche aus (26) hervorgehen, indem statt jeder der sechs Variabeln ihr Differential gesetzt wird. Ferner ergiebt sich durch denselben Process der Ausdruck (30) aus dem Ausdrucke (3). Man ist daher vermöge der Gleichungen (27) und (29) im Stande, das Ergebniss der Einführung der Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ in (30) folgendermassen hinzuschreiben, wobei für λ nach (6) der Werth $-\frac{1}{\omega}$ gesetzt ist,

$$(32) \qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \frac{1}{\omega}(\omega^{(1)}d\xi^2 + \omega^{(2)}d\eta^2 + \omega^{(3)}d\zeta^2);$$

zugleich verwandelt sich die Gleichung (31) in die folgende

$$(33) \qquad d\,(\omega^{(1)}\,\xi^2 + \omega^{(2)}\,\eta^2 + \omega^{(3)}\,\zeta^2) = 0.$$

Die Werthsysteme ξ, η, ζ, bei denen ein Maximum oder Minimum auftreten kann, sind diejenigen, für welche

$$(34)\quad \begin{cases} \omega=\omega^{(1)};\ x_1=x_1^{(1)},\ x_2=x_2^{(1)},\ x_3=x_3^{(1)};\\ \omega=\omega^{(2)};\ x_1=x_1^{(2)},\ x_2=x_2^{(2)},\ x_3=x_3^{(2)};\\ \omega=\omega^{(3)};\ x_1=x_1^{(3)},\ x_2=x_2^{(3)},\ x_3=x_3^{(3)}\end{cases}$$

wird, und haben daher wegen der Gleichungen (26) die Bestimmung

$$(35)\quad \begin{cases} \omega=\omega^{(1)};\ \sqrt{\omega^{(1)}}\,\xi=1, & \eta=0, & \zeta=0;\\ \omega=\omega^{(2)};\ \xi=0, & \sqrt{\omega^{(2)}}\,\eta=1, & \zeta=0;\\ \omega=\omega^{(3)};\ \xi=0, & \eta=0, & \sqrt{\omega^{(3)}}\,\zeta=1.\end{cases}$$

Je nach den drei Annahmen geht der Ausdruck (32) in einen der drei folgenden über

$$(36)\quad \begin{cases} \omega=\omega^{(1)},\ d\eta^2+d\zeta^2-\left(\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(1)}}d\eta^2+\frac{\omega^{(3)}}{\omega^{(1)}}d\zeta^2\right);\\ \omega=\omega^{(2)},\ d\xi^2+d\zeta^2-\left(\frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}}d\xi^2+\frac{\omega^{(3)}}{\omega^{(2)}}d\zeta^2\right);\\ \omega=\omega^{(3)},\ d\xi^2+d\eta^2-\left(\frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(3)}}d\xi^2+\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(3)}}d\eta^2\right).\end{cases}$$

Aus der Gleichung (33) wird aber beziehungsweise

$$(37)\quad \begin{cases} \sqrt{\omega^{(1)}}\,d\xi=0;\\ \sqrt{\omega^{(2)}}\,d\eta=0;\\ \sqrt{\omega^{(3)}}\,d\zeta=0,\end{cases}$$

so dass immer dasjenige Differential verschwinden muss, welches in dem zugehörigen Ausdrucke (36) gar nicht vorkommt.

Zufolge der zu benutzenden Regel giebt es ein Maximum, ein Minimum, oder keines von beiden, je nachdem die betreffende der in (36) aufgestellten Formen wesentlich negativ, wesentlich positiv oder keines von beiden ist. Welche Erscheinung jedes Mal eintrete, lässt sich leicht aus der Beschaffenheit der Grössen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$ und ihrer Differenzen erkennen, so dass je nach den oben unterschiedenen Fällen I, II, III die folgenden Resultate entstehen:

(I) $\omega=\omega^{(1)}$, Minimum;
$\omega=\omega^{(2)}$, weder Maximum noch Minimum;
$\omega=\omega^{(3)}$, Maximum;

(II) $\omega = \omega^{(1)}$, Minimum;

$\omega = \omega^{(2)}$, weder Maximum noch Minimum;

(III) $\omega = \omega^{(1)}$, Minimum.

In Bezug auf ihre geometrische Bedeutung schliesst sich die gegenwärtige Aufgabe ebenfalls an die Aufgabe des vorigen § an. Werden die drei Variabeln zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so repräsentirt die mit der Function (2) gebildete Gleichung

(2*) $$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 1$$

eine Fläche des zweiten Grades, welche den Coordinatenanfangspunkt zu ihrem Mittelpunkte hat; jede durch diesen Punkt gezogene Verbindungslinie von zwei Punkten der Fläche wird in dem erstern halbirt, da, wenn die Coordinaten des einen Punktes x_1, x_2, x_3 genannt werden, die Coordinaten des andern Punktes $-x_1, -x_2, -x_3$ sind. Weil nun die Function (1)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

das Quadrat der Entfernung des Punktes (x_1, x_2, x_3) von dem Mittelpunkte der Fläche ausdrückt, so bestimmt die gelöste Aufgabe die Punkte der Fläche, für welche das Quadrat dieser Entfernung, mithin auch die Entfernung, ein Maximum oder Minimum wird. Die Substitution (26) entspricht der Verwandlung des Systems der rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 in ein anderes zu demselben Anfangspunkte gehörendes System von eben solchen Coordinaten ξ, η, ζ. Nach den allgemeinen in I, § 86 u. s. f. mitgetheilten Erörterungen müssen alsdann die rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 mit den andern ξ, η, ζ durch Gleichungen von der Gestalt

(38) $$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}\,\xi + \gamma_{12}\,\eta + \gamma_{13}\,\zeta \\ x_2 &= \gamma_{21}\,\xi + \gamma_{22}\,\eta + \gamma_{23}\,\zeta \\ x_3 &= \gamma_{31}\,\xi + \gamma_{32}\,\eta + \gamma_{33}\,\zeta \end{aligned}$$

zusammenhängen, und die Ausdrücke, welche das Quadrat der Entfernung desselben Punktes von dem gemeinsamen Anfangspunkt bezeichnen, einander gleich sein, so dass die Gleichung

(39) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

erfüllt ist. Die quadratische Form (1) geht dadurch in sich selbst über. Da ferner nach I, § 81 die Determinante der transformirten Form gleich dem Product aus der Determinante der ursprünglichen Form und dem Quadrate der Substitutionsdeterminante Γ ist, und da in (39) die beiden Determinanten der Formen gleich der Einheit sind, so muss die betreffende Substitutionsdeterminante Γ gleich der positiven oder negativen Einheit sein. Ob das erstere oder das zweite der Fall sei, richtet sich, wie a. a. O. auseinander gesetzt ist, danach, ob das System der positiven Axen x_1, x_2, x_3 durch Drehung in der gegebenen Reihenfolge in das System der positiven Axen ξ, η, ζ übergeführt werden kann oder nicht. Aus (39) folgen die zwischen den 9 Coefficienten der Substitution (38) geltenden Gleichungen

$$
(40)\qquad
\begin{aligned}
\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^2 &= 1\\
\gamma_{12}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{32}^2 &= 1\\
\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{33}^2 &= 1\\
\gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_{22}\gamma_{23} + \gamma_{32}\gamma_{33} &= 0\\
\gamma_{13}\gamma_{11} + \gamma_{23}\gamma_{21} + \gamma_{33}\gamma_{31} &= 0\\
\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22} + \gamma_{31}\gamma_{32} &= 0,
\end{aligned}
$$

welche ihrerseits wieder das Bestehen der Gleichung (39) nach sich ziehen. Bei der obigen Substitution (26) haben die neuen Variabeln gerade deshalb die Eigenschaft, ein System von neuen rechtwinkligen Coordinaten darzustellen, weil dort die Gleichung (27), welche mit (39) identisch ist, erfüllt wird, während die letzten drei Gleichungen (40) durch (19) und (20) repräsentirt werden. Die in (26) bestimmten rechtwinkligen Axen der ξ, η, ζ heissen *die Hauptaxen* der durch die Gleichung (2*) ausgedrückten Fläche des zweiten Grades. Nach Einführung der auf die Hauptaxen bezüglichen Coordinaten nimmt die Gleichung (2*) vermöge der Transformation (29) die folgende Gestalt an

$$
(41)\qquad \omega^{(1)}\xi^2 + \omega^{(2)}\eta^2 + \omega^{(3)}\zeta^2 = 1,
$$

in welcher nur die Quadrate der neuen Coordinaten vorkommen, und die ein geeignetes Princip zur Eintheilung der in Rede stehenden Flächen darbietet. In dem vorhin mit (I) bezeichneten Falle, wo alle drei Coefficienten $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ positiv sind, bildet die Fläche ein einziges Stück, dessen Theile sich an keiner Stelle über eine gewisse Länge hinaus vom Mittelpunkte entfernen, und heisst *ein Ellipsoid.* In dem Falle (II), wo zwei Coefficienten positiv sind, der dritte negativ ist, besteht die Fläche aus einem einzigen Stücke, dessen Theile sich unendlich weit vom Mittelpunkte erstrecken; sie heisst *ein einflächiges Hyperboloid.* In dem Falle (III), wo ein Coefficient positiv ist, die beiden andern negativ sind, zerfällt die Fläche in zwei Stücke, deren jedes sich vom Mittelpunkte unendlich weit entfernt, und wird *ein zweiflächiges Hyperboloid* genannt. Bei dem Ellipsoid werden alle drei Hauptaxen, bei dem einflächigen Hyperboloid zwei Hauptaxen, bei dem zweiflächigen Hyperboloid wird nur eine Hauptaxe von der Fläche selbst, und zwar immer in zwei gegen den Mittelpunkt symmetrisch liegenden Punkten getroffen. Die auf solche Weise begrenzten Durchmesser haben ebenfalls den Namen Hauptaxen, so dass $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ gleich den reciproken Werthen der Quadrate von den drei halben Hauptaxen sind; derselbe Ausdruck wird auch von dem Ellipsoid auf das einflächige und zweiflächige Hyperboloid übertragen. Demgemäss bezieht sich der gegenwärtige § auf das Problem, die Hauptaxen einer Fläche des zweiten Grades nach Lage und Grösse zu bestimmen, welches als *das Hauptaxenproblem* der Fläche bekannt ist.

Capitel VIII.

Anfangsgründe der Lehre von der Krümmung der Linien und Flächen.

§ 62. Bestimmung der Tangente an eine im Raume gegebene Linie. Messung der Länge einer Linie.

Die Punkte einer Linie im Raume bilden, wie in § 42 bemerkt worden, eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Man theilt die Linien oder Curven in solche, deren sämmtliche Punkte in derselben Ebene liegen und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Die ersteren, von denen schon früher die

Rede war, werden *ebene Curven*, die letzteren *Raumcurven* genannt. Wenn ein Punkt im Raume durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, so kann das Gesetz einer Curve durch zwei Gleichungen ausgedrückt sein

(1) $$\varphi_1(x, y, z) = l_1, \varphi_2(x, y, z) = l_2,$$

wo l_1 und l_2 vorgeschriebene Constanten bedeuten; dann ist die Curve als die für zwei Mannigfaltigkeiten der zweiten Ordnung gemeinsame Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, oder als der Durchschnitt zweier Flächen definirt. In anderen Fällen sind, den Gleichungen (1) entsprechend, zwei Coordinaten als Functionen der dritten bestimmt,

(1*) $$y = P(x), z = Q(x);$$

oder es können auch die drei Coordinaten als Functionen einer unabhängigen Variable t gegeben sein,

(1**) $$x = A(t), y = B(t), z = C(t).$$

Die letzten Gleichungen verwandeln sich in Gleichungen von der Gestalt (1*), sobald statt t eine der Coordinaten und zwar x genommen wird.

Da jede gerade Linie als der Durchschnitt von zwei Ebenen bestimmt werden kann, und da umgekehrt zwei Ebenen nur eine Linie als Durchschnitt haben können, so wird jede gerade Linie durch zwei Gleichungen (1) dargestellt, bei denen $\varphi_1 = l_1$ und $\varphi_2 = l_2$ zwei sich schneidende Ebenen bedeuten. In diesem Falle hat man φ_1 und φ_2 als rationale ganze Ausdrücke des ersten Grades von den Coordinaten x, y, z zu nehmen und, wie leicht ersichtlich, die Coefficienten $g_1, h_1, k_1, g_2, h_2, k_2$ so einzurichten, dass in den Gleichungen

$$g_1 x + h_1 y + k_1 z = l_1,$$
$$g_2 x + h_2 y + k_2 z = l_2$$

nicht die Proportion

$$g_1 : h_1 : k_1 = g_2 : h_2 : k_2$$

besteht; die Befriedigung derselben würde ausdrücken, dass die beiden Ebenen parallel wären, oder zusammenfielen. Wählt man irgend einen Punkt $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ der geraden Linie, so ergeben sich für die Coordinatendifferenzen $x - x^{(0)}, y - y^{(0)}, z - z^{(0)}$, oder die relativen Coordinaten des beliebigen Punktes (x, y, z) in Bezug auf den festen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} g_1(x-x^{(0)})+h_1(y-y^{(0)})+k_1(z-z^{(0)})=0,\\ g_2(x-x^{(0)})+h_2(y-y^{(0)})+k_2(z-z^{(0)})=0, \end{array}\right.$$

aus denen für $x-x^{(0)}, y-y^{(0)}, z-z^{(0)}$ die festen Verhältnisse

$$x-x^{(0)}:y-y^{(0)}:z-z^{(0)}=h_1k_2-h_2k_1:k_1g_2-k_2g_1:g_1h_2-g_2h_1$$

folgen. Nach der vorhin gemachten Voraussetzung können die drei Ausdrücke der rechten Seite nicht gleichzeitig verschwinden. Wenn durch den Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ Parallelen zu den Coordinatenaxen gezogen werden, so sind $x-x^{(0)}, y-y^{(0)}, z-z^{(0)}$ die Projectionen des Theiles der geraden Linie, welcher von dem Punkte $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ bis zu dem Punkte (x, y, z) reicht, mit Bezug auf jene drei Parallelen. In dem festen Verhältnisse der drei Projectionen beruht eine characteristische Eigenschaft der geraden Linie; es leuchtet ein, dass, falls die Winkel, welche von der geraden Linie mit den drei Coordinatenaxen x, y, z gebildet werden, respective p, q, r heissen, die drei Projectionen diesen Cosinus proportional sind, mithin die Relation

$$x-x^{(0)}:y-y^{(0)}:z-z^{(0)}=\cos p:\cos q:\cos r$$

gilt.

Denkt man sich die Coordinaten x, y, z des Punktes einer Curve durch die Gleichungen (1**) als Functionen der unabhängigen Variable t gegeben, und betrachtet zwei Punkte, die den Werthen t und $t+\Delta t$ entsprechen, so können die zu dem letztern Werthe gehörenden Coordinaten, falls $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ nach dem *Taylor*'schen Satz entwickelbar sind, beziehungsweise folgendermassen dargestellt werden

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{dx}{dt}\Delta t+\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2+\dots\\ y+\dfrac{dy}{dt}\Delta t+\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2y}{dt^2}(\Delta t)^2+\dots\\ z+\dfrac{dz}{dt}\Delta t+\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2z}{dt^2}(\Delta t)^2+\dots \end{array}\right. .$$

Wofern hier nur diejenigen Glieder beibehalten werden, welche von Δt unabhängig und in die erste Potenz von Δt multiplicirt sind, so liefern die betreffenden Ausdrücke nach den in § 37 für ebene Curven ausgeführten, im nächsten § weiter anzuwendenden Grundsätzen und den gegenwärtigen

Erörterungen die rechtwinkligen Coordinaten *derjenigen geraden Linie, welche durch den Punkt* (x, y, z) *hindurchgeht und der in Rede stehenden Curve unter allen geraden Linien am nächsten kommt oder dieselbe berührt. Um die sämmtlichen Punkte dieser Tangente zu erhalten, sind der Grösse* $\varDelta t$ *alle möglichen negativen und positiven Werthe beizulegen. Die relativen Coordinaten eines zu einem beliebigen* $\varDelta t$ *gehörenden Punktes der Tangente in Bezug auf den zu* $\varDelta t = 0$ *gehörenden Punkt* (x, y, z) *haben respective die Werthe*

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt}\varDelta t, \quad \frac{dy}{dt}\varDelta t, \quad \frac{dz}{dt}\varDelta t.$$

Wenn daher p, q, r *die Winkel bedeuten, welche von der Tangente beziehungsweise mit den drei Coordinatenaxen gebildet werden, so besteht die Proportion*

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \cos p : \cos q : \cos r,$$

mittelst deren die Construction der aufzusuchenden Tangente ausgeführt werden kann. Hierbei ist zu beachten, dass alle bisherigen Resultate gültig bleiben, wofern statt der unabhängigen Variable t eine der Coordinaten, etwa x gesetzt wird. Dann geht $\frac{dx}{dt}$ in die Einheit, $\frac{dy}{dt}$ in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dt}$ in $\frac{dz}{dx}$ über, und die Proportion (4) erhält die Gestalt

$$(4^*) \qquad 1 : \frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \cos p : \cos q : \cos r.$$

Wenn daher das Gesetz einer Curve durch die Abhängigkeit bestimmt ist, in welcher die zweite und dritte rechtwinklige Coordinate eines Punktes zu der ersten Coordinate stehen, so geben die nach der ersten Coordinate genommenen Differentialquotienten der zweiten und dritten in Verbindung mit der Einheit die Verhältnisse zwischen den Cosinus der Winkel, die von der Tangente der Curve mit den drei Axen gebildet werden. Da zwischen den Cosinus der Winkel p, q, r die Gleichung

$$\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1$$

besteht, so lassen sich aus (4) die folgenden Ausdrücke für $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$ ableiten

$$\cos p = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \cos q = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\cos r = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

welche bei der Substitution von x für t eine entsprechende Vereinfachung erfahren.

Wie die Aufgabe, *an eine gegebene Curve eine Tangente zu construiren,* so gründet sich auch die Aufgabe, *die Länge einer gegebenen Curve zu messen,* auf die Vergleichung einer krummen Linie mit einer geraden; allein die letztere Aufgabe birgt andere Schwierigkeiten in sich als die erstere. Dass die Länge jeder begrenzten geraden Linie durch die Länge einer beliebigen begrenzten geraden Linie als Einheit gemessen werden könne, gehört zu den Grundvoraussetzungen, auf welche sich *Descartes* gestützt hat, indem er den Ort eines Punktes im Raume durch die Messung von gewissen geraden Linien bestimmte. Die Messung einer begrenzten nicht geraden Linie wird aber dadurch auf die Messung von geraden Linien zurückgeführt, dass man zwischen den Endpunkten $\mathfrak{R}^{(0)}$ und $\mathfrak{R}^{(\mu)}$ der gegebenen Linie eine Folge von Punkten $\mathfrak{R}^{(1)}, \mathfrak{R}^{(2)}, \ldots \mathfrak{R}^{(m-1)}$ einschaltet, hierauf $\mathfrak{R}^{(0)}$ mit $\mathfrak{R}^{(1)}$, $\mathfrak{R}^{(1)}$ mit $\mathfrak{R}^{(2)}$, u. s. f., zuletzt $\mathfrak{R}^{(m-1)}$ mit dem Endpunkte $\mathfrak{R}^{(m)}$, das ist $\mathfrak{R}^{(\mu)}$, durch gerade Linien verbindet, von ihren Längen die Summe bildet, und die Länge der gegebenen Linie als den Grenzwerth definirt, gegen welchen diese Summe convergirt, sobald die Anzahl $m-1$ der eingeschalteten Punkte und ihre gegenseitige Näherung ohne Ende zunimmt. Dieser Process ist in I, § 103 für die Bestimmung der Länge eines Kreisbogens auseinandergesetzt und in § 21 dieses Bandes bei einer beliebigen Curve wiederholt, um einen ebenen Flächenraum zu definiren, welcher von der Curve und von geraden Linien eingeschlossen wird. Gegenwärtig liegt uns ob, den Nachweis zu führen, dass die vorhin bezeichnete Summe von geraden Linien unter gewissen auf die

Stetigkeit bezuglichen Voraussetzungen in der That gegen einen Grenzwerth convergirt.

Wenn man einen Zeiger α die Zahlen $0, 1, 2, \ldots m-1, m$ durchlaufen lässt, dem Punkte $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ die rechtwinkligen Coordinaten $x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}$ beilegt und deren Differenzen folgendermassen bezeichnet

$$\varDelta x^{(\alpha)} = x^{(\alpha+1)} - x^{(\alpha)}, \varDelta y^{(\alpha)} = y^{(\alpha+1)} - y^{(\alpha)}, \varDelta z^{(\alpha)} = z^{(\alpha+1)} - z^{(\alpha)},$$

so wird die Entfernung zweier Punkte $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{R}^{(\alpha+1)}$ durch die positive Quadratwurzel aus der Quadratsumme der betreffenden Coordinatendifferenzen

$$\sqrt{(\varDelta x^{(\alpha)})^2 + (\varDelta y^{(\alpha)})^2 + (\varDelta z^{(\alpha)})^2}$$

ausgedrückt. Die Summe der Längen der auf einander folgenden Verbindungslinien $\mathfrak{R}^{(0)}\mathfrak{R}^{(1)}, \mathfrak{R}^{(1)}\mathfrak{R}^{(2)}, \ldots \mathfrak{R}^{(m-1)}\mathfrak{R}^{(m)}$ ist daher gleich der von $\alpha=0$ bis $\alpha=m-1$ auszudehnenden Summe

$$(5) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sqrt{(\varDelta x^{(\alpha)})^2 + (\varDelta y^{(\alpha)})^2 + (\varDelta z^{(\alpha)})^2}.$$

Das in (1) gegebene Gesetz einer Curve sei in die Gestalt (1**) gebracht; man habe $t^{(\mu)} - t^{(0)} > 0$, und es werde angenommen, dass, während die unabhängige Variable t successive die nach ihrer Grösse geordneten Werthe $t^{(0)}, t^{(1)}, \ldots t^{(m)} = t^{(\mu)}$ durchläuft, von den Coordinaten (x, y, z) die Werthe durchlaufen werden, welche nach der obigen Annahme zu den Punkten von entsprechendem Zeiger gehören. Die positiven Differenzen der Werthe von t bezeichnen wir übereinstimmend

$$\varDelta t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} - t^{(\alpha)},$$

und geben der Summe (5), indem deren allgemeines Glied mit $\varDelta t^{(\alpha)}$ dividirt und multiplicirt wird, die Gestalt

$$(5^*) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sqrt{\left(\frac{\varDelta x^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta z^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}\right)^2}\, \varDelta t^{(\alpha)}.$$

Insofern x, y, z stetige Functionen von t sind, die in Bezug auf t bestimmte endliche Differentialquotienten haben, nähern sich die Differenzenquotienten $\frac{\varDelta x^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}, \frac{\varDelta y^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}, \frac{\varDelta z^{(\alpha)}}{\varDelta t^{(\alpha)}}$ bei abnehmendem $\varDelta t^{(\alpha)}$ respective den für $t=t^{(\alpha)}$ zu bildenden Werthen $\xi^{(\alpha)}, \eta^{(\alpha)}, \zeta^{(\alpha)}$ der Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Wir machen ferner eine ähnliche Voraussetzung, wie sie bei dem Satze IX des § 25 gebraucht ist, dass nämlich die Quadratsumme der Differenzen $\frac{\Delta x^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} - \xi^{(\alpha)}, \frac{\Delta y^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} - \eta^{(\alpha)}, \frac{\Delta z^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} - \zeta^{(\alpha)}$ für ein hinreichend kleines $\Delta t^{(\alpha)}$ immer numerisch unter dem Quadrat derselben kleinen Grösse λ bleibt, und dass folglich in den Gleichungen

$$(6)\quad \frac{\Delta x^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} = \xi^{(\alpha)} + a^{(\alpha)}\lambda,\ \frac{\Delta y^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} = \eta^{(\alpha)} + b^{(\alpha)}\lambda,\ \frac{\Delta z^{(\alpha)}}{\Delta t^{(\alpha)}} = \zeta^{(\alpha)} + c^{(\alpha)}\lambda$$

die Quadratsumme $(a^{(\alpha)})^2 + (b^{(\alpha)})^2 + (c^{(\alpha)})^2$ kleiner als die Einheit ist. Auch schliessen wir das gleichzeitige Verschwinden von $\xi^{(\alpha)}, \eta^{(\alpha)}, \zeta^{(\alpha)}$ aus, so dass die Quadratsumme $(\xi^{(\alpha)})^2 + (\eta^{(\alpha)})^2 + (\zeta^{(\alpha)})^2$ nie unter einen gewissen von Null verschiedenen Werth herabsinken kann. Aus (6) folgt für die in (5*) unter dem Summenzeichen befindliche Grösse der Ausdruck

$$(7)\quad \sqrt{(\xi^{(\alpha)} + a^{(\alpha)}\lambda)^2 + (\eta^{(\alpha)} + b^{(\alpha)}\lambda)^2 + (\zeta^{(\alpha)} + c^{(\alpha)}\lambda)^2}\,\Delta t^{(\alpha)}.$$

Nun hat sich vorhin gezeigt, dass eine gerade Linie, welche von dem Punkte $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ nach einem Punkte gezogen wird, dessen in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ genommene relative Coordinaten den Differentialquotienten $\frac{dx}{dt} = \xi^{(\alpha)}, \frac{dy}{dt} = \eta^{(\alpha)}, \frac{dz}{dt} = \zeta^{(\alpha)}$ proportional sind, *eine Tangente der Curve im Punkte* $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ ist. Bezeichnet man den auf dieser Tangente liegenden Punkt, dessen in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ genommene relative Coordinaten die Werthe

$$\xi^{(\alpha)}\Delta t^{(\alpha)},\ \eta^{(\alpha)}\Delta t^{(\alpha)},\ \zeta^{(\alpha)}\Delta t^{(\alpha)}$$

haben, mit $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$, so lehren die beiderseits mit $\Delta t^{(\alpha)}$ multiplicirten Gleichungen (6), dass $a^{(\alpha)}\lambda\Delta t^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}\lambda\Delta t^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}\lambda\Delta t^{(\alpha)}$ die relativen Coordinaten des Punktes $\mathfrak{R}^{(\alpha+1)}$ in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ sind. Demnach wird die Länge $\mathfrak{R}^{(\alpha)}\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ durch

$$(8)\quad \sqrt{(\xi^{(\alpha)})^2 + (\eta^{(\alpha)})^2 + (\zeta^{(\alpha)})^2}\,\Delta t^{(\alpha)},$$

die Länge $\mathfrak{T}^{(\alpha)}\mathfrak{R}^{(\alpha+1)}$ durch

$$(9)\quad \sqrt{(a^{(\alpha)}\lambda)^2 + (b^{(\alpha)}\lambda)^2 + (c^{(\alpha)}\lambda)^2}\,\Delta t^{(\alpha)}$$

gemessen. Es ist aber die Länge $\mathfrak{R}^{(\alpha)}\mathfrak{R}^{(\alpha+1)}$ niemals grösser als die Summe und niemals kleiner als der absolute Werth der Differenz der Längen $\mathfrak{R}^{(\alpha)}\mathfrak{T}^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{T}^{(\alpha)}\mathfrak{R}^{(\alpha+1)}$; denn das Quadrat der rechten Seite von (7) setzt sich durch Addition aus dem Quadrat von (8), dem Quadrat von (9), und dem Ausdrucke

$$2(\xi^{(\alpha)} a^{(\alpha)}\lambda + \eta^{(\alpha)} b^{(\alpha)}\lambda + \zeta^{(\alpha)} c^{(\alpha)}\lambda)(\varDelta t^{(\alpha)})^2$$

zusammen, der absolute Werth des letztern ist aber niemals grösser als das doppelte Product von (8) und (9), wie mit Hülfe der Relation

$$\begin{aligned}(10)\quad ((\xi^{(\alpha)})^2 + (\eta^{(\alpha)})^2 + (\zeta^{(\alpha)})^2)((a^{(\alpha)}\lambda)^2 + (b^{(\alpha)}\lambda)^2 + (c^{(\alpha)}\lambda)^2)\\ = (\xi^{(\alpha)} a^{(\alpha)}\lambda + \eta^{(\alpha)} b^{(\alpha)}\lambda + \zeta^{(\alpha)} c^{(\alpha)}\lambda)^2\\ + (\eta^{(\alpha)} c^{(\alpha)}\lambda - \zeta^{(\alpha)} b^{(\alpha)}\lambda)^2 + (\zeta^{(\alpha)} a^{(\alpha)}\lambda - \xi^{(\alpha)} c^{(\alpha)}\lambda)^2\\ + (\xi^{(\alpha)} b^{(\alpha)}\lambda - \eta^{(\alpha)} a^{(\alpha)}\lambda)^2\end{aligned}$$

bewiesen wird. Der so eben für Aggregate von drei Quadraten ausgesprochene Satz entspricht einem für Aggregate von zwei Quadraten geltenden Satze, welcher in anderer Gestalt in I, § 61, (9) mitgetheilt ist. Beide haben den geometrischen Inhalt, *dass in einem Dreieck die Summe zweier Seiten stets grösser als die dritte Seite oder höchstens derselben gleich ist.*

Nunmehr sind wir im Stande, für die Summe (5) zwei Werthe anzugeben, zwischen denen sie enthalten sein muss. Der erstere entsteht, indem statt des allgemeinen Gliedes (7) die Summe von (8) und (9) genommen wird, bei der Bildung des zweiten hat man den Ausdruck (9) von (8) zu subtrahiren und ist dann unter den getroffenen Voraussetzungen sicher, die Differenz mit positivem Vorzeichen zu erhalten; denn die Quadratsumme $(\xi^{(\alpha)})^2 + (\eta^{(\alpha)})^2 + (\zeta^{(\alpha)})^2$ darf niemals kleiner werden als eine gewisse von Null verschiedene Grösse, und die Quadratsumme $(a^{(\alpha)}\lambda)^2 + (b^{(\alpha)}\lambda)^2 + (c^{(\alpha)}\lambda)^2$ wird für einen hinreichend kleinen Werth der Grösse $\varDelta t^{(\alpha)}$ wegen des Factors λ^2 beliebig klein. Es liegt also die Summe (5) zwischen den beiden Werthen

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sqrt{(\xi^{(\alpha)})^2 + (\eta^{(\alpha)})^2 + (\zeta^{(\alpha)})^2}\,\varDelta t^{(\alpha)} \pm \lambda \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sqrt{(a^{(\alpha)})^2 + (b^{(\alpha)})^2 + (c^{(\alpha)})^2}\,\varDelta t^{(\alpha)}.$$

Weil sich die zweite Summe vergrössert, sobald statt $(a^{(\alpha)})^2 + (b^{(\alpha)})^2 + (c^{(\alpha)})^2$ die Einheit gesetzt wird, und weil

$\sum\limits_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \Delta t^{(\alpha)}$ gleich der Differenz $t^{(\mu)} - t^{(0)}$ ist, so befindet sich der positiv oder negativ zu nehmende Werth unter der Grösse $\lambda\,(t^{(\mu)} - t^{(0)})$, die für eine hinreichend fortgesetzte Theilung des Intervalls beliebig klein wird. Dagegen hat die erste Summe das Bildungsgesetz einer Summe, von der in § 20 nachgewiesen ist, dass sie gegen einen festen Grenzwerth convergirt; der betreffende Grenzwerth ist das bestimmte Integral

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(\mu)}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{11}$$

Auf diese Weise haben wir gezeigt, dass die in Rede stehende Summe von geraden Linien einem festen Grenzwerth beliebig nahe kommt, und zugleich den Ausdruck desselben durch das bestimmte Integral (11) gefunden. Bei dem betreffenden Integral wird für die Coordinaten x, y, z eine solche Abhängigkeit von der Variable t vorausgesetzt, welche den zu der Curve gehörenden Gleichen (1) entspricht. Damit ist jedoch an sich nur die Abhängigkeit bestimmt, in welcher zwei der Coordinaten zu der dritten stehen, und es kann die Abhängigkeit der letztern von der Variable t auf unbeschränkt viele Arten eingerichtet werden. Deshalb sind in dem Integral (11) unbeschränkt viele Darstellungen von der Länge einer gegebenen Linie enthalten, welche eine solche Beziehung zu einander haben, wie die nach dem erwähnten Satze IX des § 25 möglichen Transformationen $\int f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt$ des Integrals $\int f(x)\,dx$. Am Schlusse des § 41 ist erwähnt worden, dass das Product $f(x)\,dx$ das Element des Integrals $\int f(x)\,dx$ genannt wird; nach derselben Ausdrucksweise ist das Element des transformirten Integrals mit $f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt$ zu bezeichnen, und man darf sagen, dass das Element des zweiten Integrals dem Element des erstern gleich ist. In demselben Sinne heisst das Element des Integrals (12), nämlich der Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt, \tag{12}$$

das Element einer Linie im Raume, und wird auch durch *die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z*

$$(12^*) \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

angedeutet.

Es möge jetzt das Integral (11) unter der Voraussetzung gebildet werden, dass eine der Coordinaten an die Stelle der unabhängigen Variable tritt. Von hier ab werden wir statt x, y, z die Zeichen x_1, x_2, x_3 anwenden, welche den Vorzug haben, dass Summationen, welche sich auf die drei Coordinaten beziehen, durch Summenzeichen für die Zeiger ausgedrückt werden können.

Die unabhängige Variable sei x_1, so dass das Integral (11) in das folgende übergeht:

$$(13) \qquad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2}\, dx_1.$$

Aus den für die Curve gegebenen Gleichungen $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=l_1$ und $\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=l_2$ hat man auf das Verschwinden der Differentiale $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ zu schliessen; die betreffenden Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} dx_3 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} dx_3 = 0, \end{aligned}$$

liefern, falls die Determinante $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}$ nicht verschwindet, die Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{dx_2}{dx_1}$ und $\frac{dx_3}{dx_1}$

$$(15) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}}.$$

Bezeichnet ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die im Nenner stehende Determinante positiv oder negativ ausfällt, so nimmt das Integral (13) nach Einführung der gefundenen Ausdrücke die Gestalt an

$$(16)\quad \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \frac{\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2}\,dx_1}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}}.$$

Bei einer ebenen Curve, die in den rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2 durch die Gleichung

$$(17)\qquad \varphi(x_1, x_2) = \text{const.}$$

gegeben ist, wird $\frac{d\,x_3}{d\,x_1} = 0$, wodurch sich (13) in das Integral

$$(18)\qquad \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \sqrt{1+\left(\frac{d\,x_2}{d\,x_1}\right)^2}\,d\,x_1$$

verwandelt. Man hat ferner, indem $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird,

$$(19)\qquad \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}.$$

Wenn daher ε das Vorzeichen von $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ bedeutet, so tritt an die Stelle von (16) der Ausdruck

$$(20)\qquad \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}\;\frac{d\,x_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}.$$

Als Beispiel werde eine Ellipse genommen, deren Gleichung nach § 60 die Gestalt

$$(21)\qquad \frac{x_1^2}{A}+\frac{x_2^2}{B} = 1$$

hat. A und B bedeuten positive Grössen, von denen A die grössere sei. Dann hat die Länge eines von $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ bis $(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)})$ ausgedehnten Curvenbogens nach (20) den Werth

$$(22)\qquad \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \varepsilon\sqrt{\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{x_2^2}{B^2}}\;\frac{B\,d\,x_1}{x_2},$$

welcher durch Substitution der aus (21) folgenden Bestimmung

$$(23)\qquad x_2 = \pm\sqrt{B\left(1 - \frac{x_1^2}{A}\right)}$$

in den Werth

$$(24\qquad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \sqrt{\frac{1 - \frac{A-B}{A}\frac{x_1^2}{A}}{1 - \frac{x_1^2}{A}}}\, d x_1$$

übergeht. Die in (21) dargestellte Ellipse verwandelt sich, sobald $B=A$, mithin die eine Hauptaxe der anderen gleich wird, in einen Kreis mit dem Halbmesser $\sqrt{A}$. Dabei nimmt der Zähler des in (24) unter dem Wurzelzeichen befindlichen Bruches den Werth der Einheit an. Weil nun nach § 14 die Gleichung

$$(25)\qquad \frac{d \arcsin u}{d u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

besteht, so kann man die unbestimmte Integration ausführen,

$$(26)\qquad \int \frac{dx_1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A}}} = \sqrt{A}\arcsin\left(\frac{x_1}{\sqrt{A}}\right) + \text{const.},$$

und findet durch Einsetzen der Integrationsgrenzen den folgenden Ausdruck des Länge des betreffenden Kreisbogens

$$(27)\qquad \sqrt{A}\left(\arcsin\frac{x_1^{(\mu)}}{\sqrt{A}} - \arcsin\frac{x_1^{(0)}}{\sqrt{A}}\right),$$

welcher offenbar den Grundeigenschaften des Kreises entspricht.

§ 63. Krümmungskreis einer Raumcurve.

Wie im vorigen § von der Berührung einer ebenen Curve und einer geraden Linie zu der Berührung einer Raumcurve und einer geraden Linie übergegangen wurde, so lassen sich die Begriffe der Berührung verschiedener Ordnungen, die in § 37 für ebene Curven auseinander gesetzt sind, auf die Beziehung zwischen beliebigen im Raume gegebenen Curven ausdehnen. Es werde in demselben rechtwinkligen Coordinatensystem ein Punkt einer ersten Curve mit x_1, x_2, x_3, ein Punkt einer zweiten mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet, und man betrachte x_2

und x_3 als von x_1, X_2 und X_3 als von X_1 abhängig. Damit alsdann die beiden Curven einen Punkt gemeinsam haben, müssen für einen gewissen Werth $x_1 = X_1$ die Gleichungen

$$x_2 = X_2,\ x_3 = X_3 \tag{1}$$

erfüllt sein. Zu einer Berührung der ersten Ordnung ist ferner das Gleichwerden der ersten Differentialquotienten

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dX_2}{dx_1},\quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{dX_3}{dx_1}, \tag{2}$$

zu einer Berührung der zweiten Ordnung noch das Gleichwerden der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d^2X_2}{dx_1^2},\quad \frac{d^2x_3}{dx_1^2} = \frac{d^2X_3}{dx_1^2}, \tag{3}$$

zu einer Berührung der $m$ten Ordnung das Bestehen aller entsprechenden Gleichungen bis zu den folgenden

$$\frac{d^mx_2}{dx_1^m} = \frac{d^mX_2}{dx_1^m},\quad \frac{d^mx_3}{dx_1^m} = \frac{d^mX_3}{dx_1^m} \tag{4}$$

nothwendig und hinreichend. Bei der Aufstellung der Bedingungen (1), (2), (3), (4) lässt sich leicht einsehen, und von den in § 37 formulirten hätte das entsprechende bemerkt werden können, dass, wenn man eine andere Coordinate als unabhängig wählt, aus den vorgelegten Bedingungen andere folgen, die aus den ersteren durch eine der neuen Annahme entsprechende Zeigervertauschung erhalten werden. Allein der willkürliche Vorzug einer Variable verschwindet, sobald angenommen wird, dass die drei Variabeln x_1, x_2, x_3 und die drei Variabeln X_1, X_2, X_3 nach der Art von (1**) im vorigen § gegebene Functionen einer unabhängigen Variable t seien, und sobald ferner diejenigen Variabeln, welche vorher als unabhängig galten, in den obigen Gleichungen x_1 und X_1, in einer solchen Weise von t abhängig gemacht werden, dass für den betreffenden Werth von t sowohl x_1 und X_1 selbst wie auch ihre sämmtlichen in Gebrauch kommenden, nach t zu bildenden Differentialquotienten übereinstimmen. Drückt man die nach x_1 und X_1 auszuführenden Differentiationen durch Differentiationen nach t aus, indem man die Relationen

$$(5)\qquad \frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}},\ \frac{d^2x_2}{dx_1^2}=\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{-1},\ldots\frac{d^m x_2}{dx_1^m}=\frac{d\left(\frac{d^{m-1}x_2}{dx_1^{m-1}}\right)}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{-1}$$

und die correspondirenden für X_2, x_3, X_3 anwendet, so zeigt sich durch Vergleichung, was mit Hülfe der Gleichungen (2) des vorigen § auch direct erkennbar ist, dass statt der obigen Systeme von Gleichungen (1), (2), (3), (4) respective die folgenden gesetzt werden dürfen, welche sich auf den bezeichneten Werth der Variable t beziehen,

$$(1_a)\qquad x_1=X_1,\qquad x_2=X_2,\qquad x_3=X_3,$$

$$(2_a)\qquad \frac{dx_1}{dt}=\frac{dX_1}{dt},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{dX_2}{dt},\quad \frac{dx_3}{dt}=\frac{dX_3}{dt},$$

$$(3_a)\qquad \frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{d^2X_1}{dt^2},\quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{d^2X_2}{dt^2},\quad \frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{d^2X_3}{dt^2},$$

$$(4_a)\qquad \frac{d^mx_1}{dt^m}=\frac{d^mX_1}{dt^m},\quad \frac{d^mx_2}{dt^m}=\frac{d^mX_2}{dt^m},\quad \frac{d^mx_3}{dt^m}=\frac{d^mX_3}{dt^m}.$$

Eine auf die Coordinaten X_1, X_2, X_3 bezogene gerade Linie, welche durch den Punkt (x_1, x_2, x_3) einer Curve hindurchgeht, wird durch das feste Verhältniss unter den Differenzen $X_1-x_1, X_2-x_2, X_3-x_3$ bestimmt. Damit nun die Curve von dieser Geraden berührt werde, müssen die Gleichungen (2_a) befriedigt sein, mithin die betreffenden drei Grössen in demselben Verhältnisse stehen, wie die drei Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$, was im vorigen § erwähnt worden ist.

In § 37 wurde für eine ebene Curve der Kreis bestimmt, mit welchem dieselbe in einem gegebenen Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung hat, und der ihr Krümmungskreis heisst.

Wir werden jetzt auch für eine Raumcurve den Kreis aufsuchen, mit welchem sie in einem gegebenen Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt, und welcher den gleichen Namen trägt, hierauf aber die Betrachtung der Raumcurven nicht weiter fortsetzen.

Die gegenwärtige Aufgabe unterscheidet sich von der correspondirenden früheren besonders insofern, als die Ebene des

Krümmungskreises dort durch die Ebene der Curve gegeben war, hier aber erst zu bestimmen ist. Man kann diesen Kreis als den Durchschnitt einer Kugelfläche und einer Ebene ansehen, welche durch den Mittelpunkt der ersteren hindurchgeht. Es mögen die Coordinaten des Punktes, auf welchen sich die Aufgabe bezieht, mit x_1, x_2, x_3, die Coordinaten eines veränderlichen Punktes mit X_1, X_2, X_3, diejenigen des Mittelpunkts einer Kugelfläche mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet werden, ihr Radius sei ϱ; dann lautet die Gleichung der Kugelfläche

$$(6)\qquad (X_1-m_1)^2+(X_2-m_2)^2+(X_3-m_3)^2=\varrho^2.$$

Ferner hat die Gleichung einer Ebene, welche durch den Mittelpunkt (m_1, m_2, m_3) geht, den mit drei festen Werthen a, b, c zu bildenden Ausdruck

$$(7)\qquad a(X_1-m_1)+b(X_2-m_2)+c(X_3-m_3)=0,$$

dessen linke Seite in Bezug auf die Coordinaten X_1, X_2, X_3 vom ersten Grade ist, und für die Werthe $X_1=m_1$, $X_2=m_2$, $X_3=m_3$ verschwindet. Nun geht unsere Aufgabe dahin, die vier Grössen m_1, m_2, m_3, ϱ und die Verhältnisse der drei Grössen a, b, c so zu bestimmen, dass die obigen Gleichungen (1_a), (2_a), (3_a) durch die zu der Curve gehörenden Werthe der Coordinaten x_1, x_2, x_3 und ihrer Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung erfüllt werden. Da die rechte Seite von (6) eine Constante, die von (7) die Null ist, so muss der vollständige nach t genommene erste und zweite Differentialquotient der linken Seite von (6) und von (7), wobei X_1, X_2, X_3 als Functionen von t gelten, gleich Null sein. Die betreffenden vier Gleichungen genügen, um die vier Grössen $\frac{dX_2}{dt}$, $\frac{dX_3}{dt}$, $\frac{d^2X_2}{dt^2}$, $\frac{d^2X_3}{dt^2}$ zu definiren, falls die Abhängigkeit der Variable X_1 von t, mithin die Werthe $\frac{dX_1}{dt}$, $\frac{d^2X_2}{dt^2}$ als bekannt angenommen wird. Wir haben wegen der zu befriedigenden Gleichungen (1_a), (2_a), (3_a) die Grössen X_1, X_2, X_3 sammt ihren nach t genommenen Differentialquotienten durch die gleichnamigen in x_1, x_2, x_3 geschriebenen Ausdrücke zu ersetzen; dann folgen aus (6) die Gleichungen

$$(8)\quad (x_1-m_1)\frac{dx_1}{dt}+(x_2-m_2)\frac{dx_2}{dt}+(x_3-m_3)\frac{dx_3}{dt}=0,$$

$$(9)\quad (x_1-m_1)\frac{d^2x_1}{dt^2}+(x_2-m_2)\frac{d^2x_2}{dt^2}+(x_3-m_3)\frac{d^2x_3}{dt^2}$$
$$+\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2=0,$$

aus (7) die Gleichungen

$$(10)\qquad a\frac{dx_1}{dt}+b\frac{dx_2}{dt}+c\frac{dx_3}{dt}=0,$$

$$(11)\qquad a\frac{d^2x_1}{dt^2}+b\frac{d^2x_2}{dt^2}+c\frac{d^2x_3}{dt^2}=0.$$

Mit Hülfe der beiden letzten werden die Verhältnisse von a, b, c bestimmt; weil aber die Grössen selbst überhaupt keine sonstige Bestimmung haben, so darf man ihre Werthe, wie folgt, annehmen

$$(12)\qquad \begin{aligned} a&=\frac{dx_2}{dt}\,\frac{d^2x_3}{dt^2}-\frac{dx_3}{dt}\,\frac{d^2x_2}{dt^2}\\ b&=\frac{dx_3}{dt}\,\frac{d^2x_1}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\,\frac{d^2x_3}{dt^2}\\ c&=\frac{dx_1}{dt}\,\frac{d^2x_2}{dt^2}-\frac{dx_2}{dt}\,\frac{d^2x_1}{dt^2}.\end{aligned}$$

Ferner findet man durch Verbindung von (8) mit der Gleichung, die bei der Substitution $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, $X_3=x_3$ aus (7) entsteht, für die Verhältnisse der Grössen

$$x_1-m_1,\ x_2-m_2,\ x_3-m_3$$

die Ausdrücke

$$(13)\qquad \frac{dx_2}{dt}c-\frac{dx_3}{dt}b,\quad \frac{dx_3}{dt}a-\frac{dx_1}{dt}c,\quad \frac{dx_1}{dt}b-\frac{dx_2}{dt}a.$$

Vermöge derjenigen Gleichung, welche bei der Substitution $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, $X_3=x_3$ aus (6) hervorgeht, ist die Summe der Quadrate der Grössen x_1-m_1, x_2-m_2, x_3-m_3 gleich dem Quadrat von ϱ. Wird daher für die Summe der Quadrate der Ausdrücke (13) die Abkürzung eingeführt

$$(14)\quad \left(\frac{dx_2}{dt}c-\frac{dx_3}{dt}b\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}a-\frac{dx_1}{dt}c\right)^2+\left(\frac{dx_1}{dt}b-\frac{dx_2}{dt}a\right)^2=N,$$

so ergiebt sich

$$(15)\qquad x_1 - m_1 = \frac{\frac{dx_2}{dt}c - \frac{dx_3}{dt}b}{\sqrt{N}}\varrho$$

$$x_2 - m_2 = \frac{\frac{dx_3}{dt}a - \frac{dx_1}{dt}c}{\sqrt{N}}\varrho$$

$$x_3 - m_3 = \frac{\frac{dx_1}{dt}b - \frac{dx_2}{dt}a}{\sqrt{N}}\varrho.$$

Für den Ausdruck N darf man die mit der Gleichung (10) des vorigen § übereinstimmende Umformung

$$(16)\quad N = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right)(a^2+b^2+c^2) - \left(\frac{dx_1}{dt}a + \frac{dx_2}{dt}b + \frac{dx_3}{dt}c\right)^2$$

benutzen, wo in Folge von (10) das zu quadrirende Aggregat verschwindet; es ist daher

$$(17)\quad \sqrt{N} = \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Summe der drei ersten Glieder in (9) zieht sich bei der Substitution der Werthe (15) wegen der Gleichungen (12) so zusammen

$$(18)\quad (x_1-m_1)\frac{d^2x_1}{dt^2} + (x_2-m_2)\frac{d^2x_2}{dt^2} + (x_3-m_3)\frac{d^2x_3}{dt^2}$$
$$= -\frac{(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{N}}\varrho.$$

Sobald jetzt der Werth von $\sqrt{N}$ aus (17) genommen wird, liefert die Gleichung (9) den folgenden Ausdruck für *den in die Einheit dividirten Radius des verlangten Krümmungskreises*

$$(19)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

die Mittelpunktscoordinaten m_1, m_2, m_3 sind durch die Gleichungen (15) *bestimmt, die Kreisebene ist in* (7) *angegeben.* Vermittelst des Verfahrens, auf welchem die Gleichung (16) beruht, erhält man statt der Quadratsumme $a^2+b^2+c^2$ den Ausdruck

$$(20)\quad a^2+b^2+c^2$$
$$= \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right)\left(\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{dt^2}\right)^2\right)$$
$$- \left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt}\frac{d^2x_3}{dt^2}\right)^2.$$

Der reciproke Werth des Krümmungsradius ϱ verschwindet nur dann, wenn die drei Grössen a, b, c gleichzeitig verschwinden, oder wenn die nach t genommenen zweiten Differentialquotienten der Coordinaten x_1, x_2, x_3 in demselben Verhältniss zu einander stehen wie die entsprechenden ersten Differentialquotienten.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass sich weder die Coordinaten m_1, m_2, m_3 noch die Grösse ϱ ändern, sobald die Variabeln x_1, x_2, x_3 statt von der Variable t von einer anderen Variable u in der Weise abhängig gemacht werden, dass t eine beliebige Function von u bedeutet. Da für jede Variable zwei Gleichungen gelten, die für die erste so lauten

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{dx_1}{dt}\frac{dt}{du}, \quad \frac{d^2 x_1}{du^2} = \frac{dx_1}{dt}\frac{d^2 t}{du^2} + \frac{d^2 x_1}{dt^2}\left(\frac{dt}{du}\right)^2,$$

so verwandeln sich die Ausdrücke a, b, c, wofern $\frac{dx_1}{du}$ für $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{d^2 x_1}{du^2}$ für $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ substituirt wird, u. s. f., in correspondirende Ausdrücke, die aus a, b, c durch Multiplication mit dem Factor $\left(\frac{dt}{du}\right)^3$ entstehen, die Ausdrücke $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$ erhalten den Factor $\frac{dt}{du}$; mithin bleiben in (15) die drei Brüche rechts, mit denen ϱ multiplicirt erscheint, so wie in (19) ϱ selbst ungeändert, und daraus folgt das Behauptete.

§ 64. Krümmungskreis eines senkrechten oder schiefen ebenen Schnittes einer Fläche.

In den § 48 und 50 ist gezeigt worden, wie in einem Punkte einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche die berührende Ebene und die auf dieser senkrecht stehende Gerade oder Normale bestimmt wird. Um die Beschaffenheit einer Fläche in der Nähe eines gewissen Punktes genauer zu untersuchen, denkt man sich dieselbe in diesem Punkte durch Ebenen geschnitten, und betrachtet die Krümmungskreise der so erzeugten ebenen Schnittcurven. Es sei die Gleichung einer Fläche für die rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 in der Gestalt

(1) $$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$$

gegeben. Als Bedingung für das Vorhandensein einer Tangentialebene in einem Punkte der Fläche (x_1, x_2, x_3) ist in § 50 die Forderung angegeben, dass die drei partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ für das zugehörige Werthsystem nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Bei der gegenwärtigen Untersuchung wird noch ausserdem vorausgesetzt, dass für dasselbe Werthsystem nicht alle zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mathfrak{a} \partial x_\mathfrak{b}}$ gleich Null werden. Die Gleichung einer Ebene, von welcher die Fläche geschnitten werden soll, habe den mit (1) in § 50 übereinstimmenden Ausdruck

$$(2) \qquad a x_1 + b x_2 + c x_3 + e = 0.$$

Man kann nun den Krümmungskreis der betreffenden Schnittcurve hervorbringen, indem man eine durch den gewählten Punkt (x_1, x_2, x_3) gelegte Kugelfläche ebenfalls mit der bezeichneten Ebene schneidet. Bedeuten wieder X_1, X_2, X_3 die beweglichen Coordinaten eines Punktes der Kugelfläche, m_1, m_2, m_3 die Coordinaten ihres Mittelpunktes, und ist σ der Radius derselben, so lautet die Gleichung

$$(3) \qquad (X_1 - m_1)^2 + (X_2 - m_2)^2 + (X_3 - m_3)^2 = \sigma^2;$$

die Gleichung der schneidenden Ebene, welche für x_1, x_2, x_3 in (2) angegeben ist, hat für Coordinaten X_1, X_2, X_3 dieselbe Gestalt

$$(4) \qquad a X_1 + b X_2 + c X_3 + e = 0.$$

Hier lässt sich das im vorigen § entwickelte Verfahren anwenden, indem man wieder x_1, x_2, x_3 wie auch X_1, X_2, X_3 von einer Variable t abhängig annimmt, und die Erfüllung der daselbst mit ($1_\mathfrak{a}$), ($2_\mathfrak{a}$), ($3_\mathfrak{a}$) bezeichneten Gleichungen fordert. An dem Inhalte der Gleichungen ($2_\mathfrak{a}$) und ($3_\mathfrak{a}$) ändert sich nichts, wenn in der erstern der gemeinsame Nenner dt, in der zweiten der gemeinsame Nenner $(dt)^2$ fortgelassen wird; dann treten statt der nach t genommenen Differentialquotienten die entsprechenden Differentiale; dadurch entstehen die Gleichungen

$$(5) \qquad x_1 = X_1, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3,$$

$$(6) \qquad dx_1 = dX_1, \quad dx_2 = dX_2, \quad dx_3 = dX_3,$$

$$(7) \qquad d^2 x_1 = d^2 X_1, \; d^2 x_2 = d^2 X_2, \; d^2 x_3 = d^2 X_3.$$

Bei der gegenwärtigen Aufgabe hat man für die Differentiale von x_1, x_2, x_3 die Bestimmung, dass die ersten und zweiten vollständigen Differentiale der linken Seiten von (1) und (2), für die Differentiale von X_1, X_2, X_3, dass die entsprechenden Differentiale der linken Seiten von (3) und (4) verschwinden müssen. Demnach gelten die Gleichungen

$$(8)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3=0$$

$$(9)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}d^2x_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}d^2x_3+\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mathfrak{a}\,\partial x_\mathfrak{b}}dx_\mathfrak{a}\,dx_\mathfrak{b}=0$$

$$(10)\qquad a\,dx_1+b\,dx_2+c\,dx_3=0$$

$$(11)\qquad a\,d^2x_1+b\,d^2x_2+c\,d^2x_3=0$$

$$(12)\qquad (X_1-m_1)dX_1+(X_2-m_2)dX_2+(X_3-m_3)dX_3=0$$

$$(13)\qquad (X_1-m_1)d^2X_1+(X_2-m_2)d^2X_2+(X_3-m_3)d^2X_3+dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2=0$$

$$(14)\qquad a\,dX_1+b\,dX_2+c\,dX_3=0$$

$$(15)\qquad a\,d^2X_1+b\,d^2X_2+c\,d^2X_3=0;$$

bei der in (9) angedeuteten Summe hat jeder der Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Zahlen 1, 2, 3 zu durchlaufen. Vermöge der Gleichungen (6) und (7) geht nun (10) in (14) und (11) in (15) über. Ferner lässt sich bewirken, dass mit Zuziehung von (5), (6), die Gleichung (12) zu einer Folge von (8) wird, indem man den Mittelpunkt (m_1, m_2, m_3) der eingeführten Kugelfläche der Bedingung unterwirft, dass die Grössen x_1-m_1, x_2-m_2, x_3-m_3 respective den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ proportional sein sollen. Dies liefert, sobald

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2=Q$$

gesetzt, mit ε die positive oder negative Einheit bezeichnet und statt der Summe $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2$ das Quadrat des Kugelradius σ eingeführt wird, die Gleichungen

$$(17)\qquad x_1-m_1=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\sqrt{Q}}\varepsilon\sigma$$

$$x_2-m_2=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{\sqrt{Q}}\varepsilon\sigma$$

$$x_3-m_3=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}}{\sqrt{Q}}\varepsilon\sigma.$$

Wie in § 50 gezeigt worden, stellen die drei Grössen, welche rechts mit $\varepsilon\sigma$ multiplicirt sind, die Cosinus derjenigen Winkel dar, welche von der in dem Punkte (x_1, x_2, x_3) construirten Normale beziehungsweise mit den positiven Axen der x_1, x_2, x_3 gebildet werden, und zwar ist die Normale nach derjenigen Seite von $\varphi = \text{const.}$ gezogen anzunehmen, für welche das Differential $d\varphi$ einen positiven Werth bekommt. Andrerseits bedeuten die Quotienten $\frac{x_1 - m_1}{\sigma}$, $\frac{x_2 - m_2}{\sigma}$, $\frac{x_3 - m_3}{\sigma}$ die Cosinus der Winkel, welche die von dem Kugelmittelpunkte (m_1, m_2, m_3) nach dem Punkte (x_1, x_2, x_3) der Fläche gezogene gerade Linie mit den positiven Axen der x_1, x_2, x_3 macht. Für $\varepsilon = 1$ stimmen die ersten drei Cosinus mit den anderen drei Cosinus überein, für $\varepsilon = -1$ mit den negativ genommenen Werthen derselben. Daher sind in dem ersten Falle die Richtungen der bezeichneten Normale und der von dem Kugelmittelpunkte aus gezogenen Geraden einander gleich, in dem zweiten Falle entgegengesetzt. Der Kugelmittelpunkt (m_1, m_2, m_3) befindet sich mithin beide Male auf der in dem Punkte (x_1, x_2, x_3) zu der Fläche construirten unbegrenzten Normale, so dass die Tangentialebenen der Fläche $\varphi = \text{const.}$ und der in Rede stehenden Kugelfläche zusammenfallen; der Punkt (m_1, m_2, m_3) liegt aber, wenn $\varepsilon = 1$ ist, auf derjenigen Seite der Fläche, welche einem negativen Differential $d\varphi$, wenn $\varepsilon = -1$ ist, auf der entgegengesetzten Seite, welche einem positiven Differential $d\varphi$ entspricht.

Von den Gleichungen (12) bis (15) bleibt jetzt nur noch die Gleichung (13) zu befriedigen. Substituirt man mit Rücksicht auf (5), (6), (7) die kleinen statt der grossen Buchstaben und führt hierauf die Werthe (17) ein, so kommt

$$(18)\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} d^2 x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} d^2 x_3\right) \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{Q}} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0.$$

Das mit dem Factor $\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{Q}}$ multiplicirte, die drei zweiten Differentiale enthaltende Aggregat ist jedoch dasselbe, welches auf der linken Seite von (9) vorkommt. Aus diesem Grunde kann man die Grösse σ so bestimmen, dass die Gleichung (18) aus der Gleichung (9) hervorgeht, und dadurch die Aufgabe vollständig lösen. Hierbei ergiebt sich für den reciproken Werth des Kugelradius σ der Ausdruck

$$(19) \qquad \frac{1}{\sigma} = \frac{\varepsilon \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mathfrak{a} \partial x_\mathfrak{b}} dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b}}{\sqrt{Q}\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)},$$

mit dessen Hülfe die Mittelpunktscoordinaten m_1, m_2, m_3 durch die Gleichungen (17) dargestellt werden.

Merkwürdiger Weise enthalten die gefundenen Resultate als Andeutung der Ebene, von welcher die Fläche $\varphi = \text{const.}$ in dem Punkte (x_1, x_2, x_3) geschnitten wird, nur die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 des auf der Schnittlinie fortschreitenden Punktes. Diese Differentiale haben der obigen Gleichung (8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = 0$$

zu genügen, das heisst, das Fortschreiten des Punktes muss in der Fläche $\varphi = \text{const.}$ erfolgen, oder, genauer gesprochen, die Tangente der Schnittcurve muss in der Tangentialebene der Fläche liegen. Wenn also die Verhältnisse der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 auf irgend eine mit der Gleichung (8) verträgliche Art angenommen sind und die Tangente der Schnittcurve dadurch bestimmt ist, so steht es frei, durch diese Gerade die schneidende Ebene (4) auf beliebige Weise zu legen, ohne dass sich der Radius σ und die Mittelpunktscoordinaten m_1, m_2, m_3 der Kugelfläche verändern. Unter allen durch dieselbe Tangente zu führenden Ebenen giebt es nur eine einzige, welche zugleich durch die dem Punkte (x_1, x_2, x_3) entsprechende Flächennormale hindurchgeht und einen *senkrechten Schnitt oder Normalschnitt der Fläche* hervorbringt. Diese Ebene geht auch durch den Mittelpunkt der construirten Kugelfläche und schneidet dieselbe in einem grösten Kreise, welcher vermöge der gegebenen Definition *der Krümmungskreis des erwähnten Normalschnitts* ist. Für den letztern Schnitt bildet daher (m_1, m_2, m_3) den Mittelpunkt und σ den Radius des Krümmungskreises. Wir haben vorhin gesehen, wie durch die in (19) eingeführte positive oder negative Einheit ε die Seite der Fläche bestimmt wird, auf welcher sich der Mittelpunkt (m_1, m_2, m_3) befindet. Man kann nun die mit dem Vorzeichen ε versehene Grösse σ durch einen Buchstaben ϱ

andeuten, und festsetzen, dass ϱ den Krümmungsradius des definirten Normalschnitts der Fläche bezeichne. Dann hat *der reciproke Werth des Krümmungsradius eines Normalschnitts* den Ausdruck

$$(20)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b}}{\sqrt{Q}\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)},$$

und giebt durch sein positives oder negatives Vorzeichen an, ob der Krümmungsmittelpunkt auf derjenigen Seite der Fläche liegt, für welche das Differential $d\varphi$ negativ oder für welche es positiv ist.

Eine Ebene, welche durch die einmal gewählte Tangente *nicht senkrecht, sondern in schiefer Richtung gegen die Fläche* gelegt wird, ist vermittelst des Neigungswinkels ψ bestimmt, den sie mit der senkrechten Ebene macht. Ferner ist nach unserer Untersuchung der Krümmungskreis der Curve, in welcher die Fläche $\varphi = \text{const.}$ von der bezeichneten Ebene geschnitten wird, derjenige Kreis, in welchem die construirte Kugelfläche von derselben Ebene geschnitten wird. Weil nun die Kugelfläche für die gewählte Tangente ungeändert bleibt, so sind die Krümmungskreise der Schnittcurven, welche zu verschiedenen Werthen des Winkels ψ gehören, diejenigen Kreise, welche auf dieser Kugelfläche durch die verschiedenen schneidenden Ebenen angegeben werden. Der Mittelpunkt eines jeden Krümmungskreises liegt demnach in dem Fusspunkt des Lothes, welches von dem Kugelmittelpunkt (m_1, m_2, m_3) auf die schneidende Ebene herabgelassen wird; eine von diesem Fusspunkt nach dem Punkte (x_1, x_2, x_3) und eine von dem Kugelmittelpunkt nach demselben Punkte gezogene Gerade schliessen mit einander den Neigungswinkel ψ ein, folglich ist der Radius des in Rede stehenden Krümmungskreises gleich dem mit $\cos\psi$ multiplicirten Werthe des Kugelradius σ, oder, was dasselbe bedeutet, des Krümmungsradius des zu derselben Tangente gehörenden Normalschnitts. Dieses Resultat wird nach seinem Urheber *der Meusnier'sche Satz* genannt.

Wenn das Gesetz einer Fläche durch die Abhängigkeit ausgedrückt ist, in welcher eine Coordinate x_3 von den beiden andern x_1 und x_2 steht, so darf in (1) statt der Function

$\varphi(x_1, x_2, x_3)$ eine Differenz

(21) $$x_3 - f(x_1, x_2),$$

statt der Constante der rechten Seite die Null gesetzt werden. In Folge dessen verwandelt sich das Differential $d\varphi$ in den Ausdruck

(22) $$dx_3 - \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2,$$

dessen Vorzeichen später zu berücksichtigen ist. Um jetzt den in (20) angegebenen Werth des reciproken Krümmungsradius $\frac{1}{\varrho}$ zu bilden, hat man für den Zähler den Ausdruck

(23) $$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{b}} dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} dx_1\, dx_2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2,$$

welcher nur die Differentiale dx_1 und dx_2 enthält; ferner kommt nach der in (16) aufgestellten Definition

(24) $$Q = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2.$$

Die Gleichung (8), welche von den Differentialen dx_1, dx_2, dx_3 erfüllt werden muss, bedingt das Verschwinden von (22), so dass das Differential dx_3 gleich der Verbindung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

wird; dadurch entsteht die Gleichung

(25) $$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2\right)^2.$$

Führt man noch für die partiellen Differentialquotienten der Function $f(x_1, x_2)$, welche mit den partiellen Differentialquotienten der Coordinate x_3 zusammenfallen, die Abkürzungen ein

(26) $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = f_{22},$$

so ergiebt sich die Darstellung

(27) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{-f_{11}\, dx_1^2 - 2 f_{12}\, dx_1\, dx_2 - f_{22}\, dx_2^2}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}\left((1 + f_1^2)\, dx_1^2 + 2 f_1 f_2\, dx_1\, dx_2 + (1 + f_2^2)\, dx_2^2\right)},$$

in welcher die Variabeln x_1, x_2 und daher auch ihre Differentiale dx_1, dx_2 von einander unabhängig sind.

§ 65. Hauptkrümmungsradien einer Fläche. Krümmungsmass.

Nachdem im vorigen § der einfache Zusammenhang entwickelt ist, in dem die Krümmungskreise der verschiedenen durch dieselbe Tangente gehenden Schnitte einer Fläche zu dem Krümmungskreise des betreffenden Normalschnittes stehen, werden gegenwärtig die Krümmungskreise der verschiedenen Normalschnitte verglichen werden, die durch denselben Punkt der Fläche gelegt werden können. Hierzu dient die Untersuchung der Frage nach denjenigen unter den zu einem Punkte gehörenden Normalschnitten, für welche der Werth des reciproken Krümmungsradius $\frac{1}{\varrho}$ ein Maximum oder Minimum wird. Wir wollen dabei den Ausdruck (27) des vorigen § benutzen, in welchem die Werthe x_1, x_2 den gewählten Punkt der Fläche, durch welchen die Normalschnitte gelegt werden, und dx_1, dx_2 die Tangente bezeichnen, zu welcher der einzelne Normalschnitt gehört. Der Werth $\frac{1}{\varrho}$ ändert sich von Normalschnitt zu Normalschnitt, sobald das Verhältniss der Differentiale dx_1, dx_2 geändert wird; wegen des Umstandes, dass sowohl der Zähler wie der Nenner des Bruches ganze homogene Functionen des zweiten Grades von den Differentialen dx_1, dx_2 sind, kommt hierbei nur das Verhältniss derselben in Betracht, wie es auch nach der Natur des dargestellten geometrischen Begriffs nicht anders sein kann. Demnach ist eine Aufgabe de Maximis et Minimis für eine Function der veränderlichen Grösse $\frac{dx_2}{dx_1}$ zu lösen. Doch bleibt die Symmetrie der beiden Coordinaten erhalten, sobald man die Differentiale dx_1 und dx_2 als zwei unabhängig veränderliche Grössen ansieht, deren Function $\frac{1}{\varrho}$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll; die Coordinaten x_1 und x_2 des Punktes der Fläche werden hierbei selbstverständlich nicht geändert. Nach den für die bezüglichen Probleme in § 56 aufgestellten Regeln sind die partiellen

Differentialquotienten des für $\frac{1}{\varrho}$ angegebenen Bruches nach den Variabeln dx_1 und dx_2 zu nehmen und gleich Null zu setzen. Hieraus entstehen, sobald man

$$(1) \qquad \frac{1}{\varrho} = \omega$$

setzt, wieder $Q = 1 + f_1^2 + f_2^2$ nimmt, ferner jeden partiellen Differentialquotienten mit dem Nenner des Bruches multiplicirt und durch die Zahl Zwei dividirt, die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} -f_{11}\,dx_1 - f_{12}\,dx_2 + \omega\sqrt{Q}\,((1+f_1^2)\,dx_1 + f_1 f_2\,dx_2) = 0 \\ -f_{21}\,dx_1 - f_{22}\,dx_2 + \omega\sqrt{Q}\,(f_2 f_1\,dx_1 + (1+f_2^2)\,dx_2) = 0. \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen, deren linke Seiten homogene Ausdrücke des ersten Grades in Bezug auf dx_1 und dx_2 sind, ausser einer Lösung, bei der die Elemente verschwinden, überhaupt eine Lösung zulassen, muss nach einem auch in § 60 angewendeten Schlusse die aus den Coefficienten der beiden Ausdrücke gebildete Determinante

$$(3) \quad (\omega\sqrt{Q}(1+f_1^2) - f_{11})(\omega\sqrt{Q}(1+f_2^2) - f_{22}) - (\omega\sqrt{Q}\,f_1 f_2 - f_{12})^2$$

verschwinden. Dies liefert bei ausgeführter Rechnung die folgende quadratische Gleichung für ω

$$(4) \; Q^2\omega^2 - (f_{11}(1+f_2^2) - 2f_{12}\,f_1 f_2 + f_{22}(1+f_1^2))\sqrt{Q}\,\omega + f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0,$$

nach deren Auflösung mit Hülfe von (2) für jede der beiden Wurzeln das zugehörige Verhältniss der Differentiale dx_1 und dx_2 bestimmt wird.

Zum Zwecke der ferneren Discussion möge jetzt eine Voraussetzung eintreten, welche stets erfüllt werden kann, und durch die sich die Gestalt der vorkommenden Ausdrücke erheblich vereinfacht. Da es erlaubt ist, das rechtwinklige Coordinatensystem, in welchem die Gleichung einer bestimmten Fläche dargestellt wird, nach Belieben zu ändern, so darf man für den in jedem einzelnen Falle betrachteten Punkt der Fläche die $x_1\,x_2$ Ebene mit der Tangentialebene zusammen fallen lassen. Dadurch verschwinden für den betreffenden Punkt, wie sich aus § 48 und § 57 ergiebt, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2$, die mit Q bezeichnete Grösse $1 + f_1^2 + f_2^2$

wird gleich der Einheit; ferner erhält der reciproke Krümmungshalbmesser den Ausdruck

$$(5)\qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{-f_{11}\,dx_1^2-2f_{12}\,dx_1\,dx_2-f_{22}\,dx_2^2}{dx_1^2+dx_2^2},$$

das Vorzeichen des Differentials $d\varphi$ ist nach Massgabe des Ausdrucks (22) im vorigen § auf derjenigen Seite der Fläche positiv, auf welcher dx_3 positiv ist oder die Coordinate x_3 wächst, und die obigen Gleichungen (2) verwandeln sich in die folgenden

$$(6)\qquad \begin{cases} -f_{11}\,dx_1-f_{12}\,dx_2+\omega\,dx_1=0\\ -f_{21}\,dx_1-f_{22}\,dx_2+\omega\,dx_2=0. \end{cases}$$

Zugleich wird aus (4) die Gleichung

$$(7)\qquad \omega^2-(f_{11}+f_{22})\,\omega+f_{11}\,f_{22}-f_{12}^2=0.$$

Stellt man die Gleichungen (6) neben die Gleichungen (5_a) des schon erwähnten § 60, der sich auf das Hauptaxenproblem eines Kegelschnitts bezieht, so leuchtet ein, dass die erstern aus den letztern hervorgehen, sobald respective

$$\begin{array}{lcccccc} & f_{11} & f_{12} & f_{22} & dx_1 & dx_2 & \omega\\ \text{für} & a_{11} & a_{12} & a_{22} & x_1 & x_2 & \omega \end{array}$$

gesetzt wird, und dass auf dieselbe Weise die vorstehende Gleichung (7) aus der dortigen Gleichung (6_a) entsteht. Während daselbst x_1, x_2 die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Ebene bedeuten, darf man hier dx_1, dx_2 als die relativen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf den festen Punkt (x_1, x_2) auffassen. Vermöge der getroffenen Annahme ist die gegenwärtige $x_1\ x_2$ Ebene die Tangentialebene der gegebenen Fläche, der Punkt (dx_1, dx_2) liegt dem festen Berührungspunkt beliebig nahe, und die Verbindungslinie der beiden Punkte ist die Tangente des Normalschnitts, dessen Krümmungshalbmesser betrachtet wird. Man kann daher die in § 60 abgeleiteten Resultate sofort dahin übertragen, dass die Gleichung (7) stets zwei reelle Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ hat, und dass die Richtungen, welche durch die zugehörigen Verhältnisse $\frac{dx_2}{dx_1}$ bestimmt werden, auf einander senkrecht stehen. Den Fall, dass $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ einander gleich seien, schliessen wir, wie dort, vorläufig aus. *Es existiren alsdann in der Tangentialebene der Fläche zwei von dem Berührungspunkt ausgehende zu einander senkrechte Richtungen, für welche der reciproke Krümmungshalbmesser des Normalschnitts* $\frac{1}{\varrho}$ *seine äussersten Werthe annimmt; die beiden den Werthen* $\omega^{(1)}$ *und* $\omega^{(2)}$ *entsprechenden Krümmungshalbmesser* $\varrho^{(1)}$ *und* $\varrho^{(2)}$ *werden die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche in Bezug auf den betreffenden Punkt genannt.*

Wir haben in § 60, nachdem die Richtungen der Hauptaxen des Kegelschnitts bestimmt waren, statt x_1 und x_2 neue rechtwinklige Coordinaten ξ, η eingeführt, welche sich auf die Hauptaxen beziehen. Verfährt man bei der gegenwärtigen Aufgabe auf entsprechende Weise, und giebt dem Punkt (dx_1, dx_2) der Tangentialebene die Coordinaten ξ, η, welche den Richtungen der Hauptnormalschnitte der Fläche entsprechen und mit dx_1 und dx_2 von gleicher Ordnung sind, so fliessen aus den Gleichungen (35) und (44) des § 60 die Gleichungen

$$dx_1^2 + dx_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \tag{8}$$

$$f_{11}\, dx_1^2 + 2 f_{12}\, dx_1\, dx_2 + f_{22}\, dx_2^2 = \omega^{(1)} \xi^2 + \omega^{(2)} \eta^2. \tag{9}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (1) und (5) durch Division die Gleichung

$$\omega = \frac{\omega^{(1)} \xi^2 + \omega^{(2)} \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \tag{10}$$

statt deren auch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{1}{\varrho^{(1)}} \xi^2 + \frac{1}{\varrho^{(2)}} \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \tag{11}$$

genommen werden kann. Sobald man den Winkel, welchen die von dem Berührungspunkte nach dem Punkte (ξ, η) gezogene Gerade mit der positiven ξ Axe bildet und der zugleich der Neigungswinkel des bezüglichen Normalschnitts der Fläche mit dem zu $\omega^{(1)}$ gehörenden Hauptnormalschnitte ist, durch ϑ bezeichnet, so wird

$$\xi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cos \vartheta, \quad \eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \sin \vartheta,$$

und die Gleichung (11) geht in die Gleichung

$$(12) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho^{(1)}} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\varrho^{(2)}} \sin^2 \vartheta$$

über. *Dieselbe drückt einen von Euler gefundenen und nach ihm benannten Satz aus, durch welchen die Bestimmung des Krümmungshalbmessers für einen beliebigen Normalschnitt einer Fläche auf die Kenntniss der Lage der Hauptnormalschnitte und der Werthe der zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser zurückgeführt wird.*

Weil die Grösse ϱ so definirt ist, dass sie durch ihr Vorzeichen die Seite der Fläche angiebt, auf welcher sich der zugehörige Krümmungsmittelpunkt befindet, so hängen die verschiedenen Erscheinungen, die in der Nähe eines bestimmten Punktes einer Fläche auftreten, davon ab, welche Vorzeichen die betreffenden Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho^{(1)}$, $\varrho^{(2)}$ haben. Im vorigen § wurde festgesetzt, dass der Krümmungsmittelpunkt bei einem positiven Werthe von ϱ auf derjenigen Seite der Fläche, auf welcher das Differential $d\varphi$ negativ ist, und im entgegengesetzten Falle entgegengesetzt liege; wegen der gegenwärtig angewendeten Vereinfachung ist aber das Differential $d\varphi$ auf der Seite der Fläche positiv, nach welcher die Ordinate x_3 zunimmt. Nun lehrt die Gleichung (12), dass, wenn $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ dasselbe Vorzeichen haben, die Grösse ϱ ebenfalls stets dasselbe Zeichen behält; mithin sind unter dieser Voraussetzung die Krümmungen aller Normalschnitte nach derselben Seite gerichtet, und die Werthe $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ geben wirklich den grösten und kleinsten Werth von ϱ an. Eine Ausnahme bildet der vorhin ausgeschlossene Fall, in welchem für die Grössen f_{11}, f_{12}, f_{22} die Bedingungen

$$f_{11} - f_{22} = 0, f_{12} = 0$$

erfüllt sind, die für ω aufgestellte Gleichung zwei einander gleiche Wurzeln hat, und der Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ den unveränderlichen Werth $-f_{11}$ annimmt. Auch hier sind die Krümmungen aller Normalschnitte nach derselben Seite gerichtet, doch werden die sämmtlichen Krümmungsradien einander gleich. Ein Punkt einer Fläche, für den dies geschieht, heisst *ein Nabelpunkt.* Da alle Normalschnitte, welche durch einen Punkt einer Kugelfläche gelegt werden, gröste Kreise sind, so haben die sämmtlichen Punkte einer Kugelfläche eine solche Beschaffenheit.

Wenn die Werthe $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ entgegengesetzte Vorzeichen tragen, so sind die Krümmungen in den beiden Hauptnormalschnitten nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; alsdann folgt aus der Gleichung (12), dass $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ respective den höchsten positiven und negativen Werth des Krümmungshalbmessers darstellen, dass für eine Drehung des Normalschnitts von der einen Hauptlage in die andere ein allmähliger Uebergang von einem positiven Werthe von ϱ zu einem negativen stattfindet, und dass für zwei leicht zu bezeichnende Normalschnitte, welche mit den Hauptnormalschnitten gleiche Winkel einschliessen, die Grösse $\frac{1}{\varrho}$ einen verschwindenden Werth erhält. Man überzeugt sich, dass die Fläche unter den angegebenen Bedingungen in dem betrachteten Punkte die Beschaffenheit eines Sattels hat.

Die Uebereinstimmung zwischen der in § 60 behandelten Aufgabe des relativen Maximums oder Minimums und der auf die Grösse $\frac{1}{\varrho}$ bezüglichen Aufgabe beruht auf sehr allgemeinen Gründen. Wenn das Maximum oder Minimum einer gewissen Function f mehrerer Variabeln unter der Bedingung aufgesucht werden soll, dass eine zweite Function g derselben Variabeln einen gegebenen Werth behält, so hat man nach der in § 59 entwickelten Methode mit Hülfe eines unbestimmten Factors λ den Ausdruck $f + \lambda g$ zu bilden, und dessen nach den sämmtlichen Variabeln genommene erste partielle Differentialquotienten einzeln gleich Null zu setzen. Wird umgekehrt das Maximum oder Minimum der Function g unter der Bedingung verlangt, dass die Function f einen festen Werth habe, so stellt man nach derselben Methode mit einem unbestimmten Factor μ den Ausdruck $\mu f + g$ auf und setzt dessen nach den sämmtlichen Variabeln genommene erste partielle Differentialquotienten einzeln gleich Null. Man kann nun jede der letztern Gleichungen durch den Factor μ dividiren und sieht dann, dass dieselben aus den entsprechenden Gleichungen des ersten Problems entstehen, wofern in den letztern das Zeichen λ durch das Zeichen $\frac{1}{\mu}$ ersetzt wird. Sobald insbesondere f und g

rationale ganze homogene Functionen desselben Grades von den betreffenden Variabeln sind, so folgt aus dem in § 46 mitgetheilten *Euler*'schen Satze, dass die Summe, welche erhalten wird, indem man jeden partiellen Differentialquotienten des homogenen Ausdrucks $f+\lambda g$ mit der betreffenden Variable multiplicirt und hierauf alle Producte addirt, gleich dem mit der Gradzahl multiplicirten Ausdrucke selbst wird; das entsprechende gilt für den Ausdruck $\mu f+g$, weshalb bei dem ersten Problem $f+\lambda g=0$, bei dem zweiten Problem $\mu f+g=0$ sein muss. Es werden daher durch das erwähnte dem ersten Problem zugehörende System und durch das zu dem zweiten Problem gehörende System von Gleichungen die zwischen den Variabeln bestehenden Verhältnisse in genau derselben Weise bestimmt. Man gelangt aber endlich wieder zu der gleichen Bestimmung dieser Verhältnisse, wenn gefordert wird, dass der Quotient der beiden Functionen $\frac{f}{g}$ ein Maximum oder Minimum werden soll; nach dem Obigen muss die Grösse λ gleich dem Werthe $-\frac{f}{g}$, die Grösse μ gleich dem reciproken Werthe $-\frac{g}{f}$ sein. In unserem Falle sind f und g homogene Functionen des zweiten Grades von zwei Variabeln, von denen eine Function wesentlich positiv ist.

Die aus der Darstellung (5) von $\frac{1}{\varrho}$ abgeleiteten Resultate gelten allgemein, da, wie erwähnt worden, die vorausgesetzte Aenderung des Coordinatensystems immer ausführbar ist. Insofern die Hauptkrümmungshalbmesser durch die für $\omega=-\frac{1}{\varrho}$ aufgestellte quadratische Gleichung (4) bestimmt sind, liefern die Coefficienten der durch den Factor von ω^2 dividirten linken Seite die symmetrischen Verbindungen Summe und Product der Wurzeln $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$, und zwar ist der negativ genommene Factor von ω der Summe $\omega^{(1)}+\omega^{(2)}$, das von ω freie Glied dem Product $\omega^{(1)}\omega^{(2)}$ gleich. Hieraus entstehen *für die Summe und das Product der beiden reciproken Hauptkrümmungshalbmesser die Ausdrücke*:

$$(13)\qquad \frac{1}{\varrho^{(1)}}+\frac{1}{\varrho^{(2)}}=-\frac{f_{11}(1+f_2^2)-2f_{12}f_1f_2+f_{22}(1+f_1^2)}{(1+f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\varrho^{(1)}\varrho^{(2)}}=\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}}{(1+f_1^2+f_2^2)^2}.$$

Wie wir sahen, sind die beiden Hauptkrümmungen nach derselben Seite oder nach verschiedenen Seiten gerichtet, je nachdem $\varrho^{(1)}$ und $\varrho^{(2)}$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben; darüber, ob das eine oder das andere der Fall sei, entscheidet das Vorzeichen des Products der beiden reciproken Hauptkrümmungshalbmesser. Dieses Product ist von *Gauss* in den *disquisitiones generales circa superficies curvas das Krümmungsmass der Fläche in dem betreffenden Punkte* genannt worden. Durch die angeführte geometrische und die physicalische Abhandlung: *principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* hat *Gauss* für die späteren die Theorie der Krümmung betreffenden Untersuchungen den Grund gelegt. Nehmen wir als Beispiel das in § 57 erwähnte *Paraboloid*, welches die Gleichung

$$(15)\qquad x_3=\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2e_{13}x_1+2e_{23}x_2+e_{33})$$

hat, so findet sich

$$(16)\qquad \begin{cases} f_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+e_{13},\quad f_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+e_{23},\\ f_{11}=a_{11},\quad f_{12}=a_{12},\quad f_{22}=a_{22},\end{cases}$$

wonach

$$(17)\qquad f_{11}f_{22}-f_{12}^2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

ist. Dem zufolge erhält das Krümmungsmass den Werth

$$(18)\qquad \frac{1}{\varrho^{(1)}\varrho^{(2)}}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{(1+f_1^2+f_2^2)^2};$$

derselbe ist für jeden Punkt des Paraboloids entweder positiv oder negativ, je nachdem die Verbindung $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ positiv oder negativ ist. Die Fläche heisst in dem ersteren Falle *ein elliptisches*, in dem zweiten Falle *ein hyperbolisches Paraboloid.*

Für eine tiefere Einsicht in das Wesen der Hauptkrümmungshalbmesser ist es von Bedeutung, die Ausdrücke derselben nicht nur unter der bisherigen Voraussetzung, dass die Gleichung der Fläche in der Gestalt $x_3 - f(x_1, x_2) = 0$ gegeben ist, sondern auch dann zu kennen, wenn die Gleichung die im vorigen § ursprünglich angenommene Beschaffenheit hat,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \tag{19}$$

Wir erreichen diesen Zweck, indem wir das für die Grösse $\frac{1}{\varrho}$ gelöste Problem des Maximums oder Minimums bei dem Ausdruck von $\frac{1}{\varrho}$ wiederholen, welcher im vorigen § unter (20) mitgetheilt ist; dieser ist vermittelst der Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \varphi_3, \\ &\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\mathfrak{a}}\, \partial x_{\mathfrak{b}}} = \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \varphi_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}, \\ &\qquad Q = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \end{aligned}\right. \tag{20}$$

so gebildet

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}}{\sqrt{Q}\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}. \tag{21}$$

Die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 sind durch die aus (19) folgende Gleichung

$$\varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 = 0 \tag{22}$$

verbunden. Demnach lässt sich die bezeichnete Aufgabe als eine Aufgabe des relativen Maximums oder Minimums auffassen, bei der $\frac{1}{\varrho}$ eine Function der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 ist, und zwischen diesen die Bedingungsgleichung (22) besteht. Vermöge der in § 59 entwickelten Methode hat man also die linke Seite von (22), mit einem unbestimmten Factor multiplicirt, zu dem Ausdruck (21) von $\frac{1}{\varrho}$ hinzuzuaddiren, und dann die drei nach dx_1, dx_2, dx_3 genommenen ersten partiellen Differentialquotienten des Aggregats zum Verschwinden zu bringen. Wird jede dieser Gleichungen mit dem halben Werthe des Nenners der rechten Seite von (21) multiplicirt, das Product aus diesem Factor und dem eingeführten Multiplicator mit τ bezeichnet, die obige Gleichung (1) benutzt, und die Gleichung

(22) zu den erhaltenen drei Gleichungen hinzugefügt, so entsteht das System

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi_{11}\,dx_1+\varphi_{12}\,dx_2+\varphi_{13}\,dx_3+\omega\sqrt{Q}\,dx_1+\varphi_1\,\tau=0\\ \varphi_{21}\,dx_1+\varphi_{22}\,dx_2+\varphi_{23}\,dx_3+\omega\sqrt{Q}\,dx_2+\varphi_2\,\tau=0\\ \varphi_{31}\,dx_1+\varphi_{32}\,dx_2+\varphi_{33}\,dx_3+\omega\sqrt{Q}\,dx_3+\varphi_3\,\tau=0\\ \varphi_1\,dx_1+\varphi_2\,dx_2+\varphi_3\,dx_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\; =0. \end{cases}$$

Hier sind die linken Seiten homogene Ausdrücke des ersten Grades in Bezug auf die drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 und den Factor τ; die betreffenden Coefficienten bilden das symmetrische Schema

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi_{11}+\omega\sqrt{Q} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_1\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}+\omega\sqrt{Q} & \varphi_{23} & \varphi_2\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33}+\omega\sqrt{Q} & \varphi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0, \end{cases}$$

dessen Determinante aus früher angegebenen Gründen verschwinden muss. Ihr Ausdruck, nach den in I, § 74 mitgetheilten Regeln gebildet und dann negativ genommen, ist der folgende

$$(25)\quad \begin{aligned} &((\varphi_{22}+\omega\sqrt{Q})(\varphi_{33}+\omega\sqrt{Q})-\varphi_{23}^2)\varphi_1^2+((\varphi_{33}+\omega\sqrt{Q})(\varphi_{11}+\omega\sqrt{Q})-\varphi_{31}^2)\varphi_2^2\\ &+((\varphi_{11}+\omega\sqrt{Q})(\varphi_{22}+\omega\sqrt{Q})-\varphi_{12}^2)\varphi_3^2+2\,(\varphi_{31}\varphi_{12}-(\varphi_{11}+\omega\sqrt{Q})\varphi_{23})\varphi_2\varphi_3\\ &+\;2\,(\varphi_{12}\varphi_{23}-(\varphi_{22}+\omega\sqrt{Q})\varphi_{31})\varphi_3\varphi_1+2\,(\varphi_{23}\varphi_{31}-(\varphi_{33}+\omega\sqrt{Q})\varphi_{12})\varphi_1\varphi_2. \end{aligned}$$

Wenn man jetzt die adjungirten Elemente, die zu dem Schema der $\varphi_{\mathfrak{ab}}$ gehören, respective mit $\Phi_{\mathfrak{ab}}$ bezeichnet, so dass

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi_{22}\varphi_{33}-\varphi_{23}^2\;=\Phi_{11},\ \varphi_{33}\varphi_{11}-\varphi_{31}^2\;=\Phi_{22},\ \varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}^2\;=\Phi_{33},\\ \varphi_{31}\varphi_{12}-\varphi_{11}\varphi_{23}=\Phi_{23},\ \varphi_{12}\varphi_{23}-\varphi_{22}\varphi_{31}=\Phi_{31},\ \varphi_{23}\varphi_{31}-\varphi_{33}\varphi_{12}=\Phi_{12} \end{cases}$$

ist, dann erhält (25) die Gestalt

$$(27)\quad \begin{aligned} &Q^2\omega^2\\ &+((\varphi_{22}+\varphi_{33})\varphi_1^2+(\varphi_{33}+\varphi_{11})\varphi_2^2+(\varphi_{11}+\varphi_{22})\varphi_3^2-2\varphi_{23}\varphi_2\varphi_3-2\varphi_{31}\varphi_3\varphi_1-2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2)\sqrt{Q}\,\omega\\ &+\Phi_{11}\varphi_1^2+\Phi_{22}\varphi_2^2+\Phi_{33}\varphi_3^2+2\Phi_{23}\varphi_2\varphi_3+2\Phi_{31}\varphi_3\varphi_1+2\Phi_{12}\varphi_1\varphi_2. \end{aligned}$$

Mithin ergeben sich für die symmetrischen Verbindungen

$$-\omega^{(1)}-\omega^{(2)}=\frac{1}{\varrho^{(1)}}+\frac{1}{\varrho^{(2)}}\ \text{ und }\ \omega^{(1)}\,\omega^{(2)}=\frac{1}{\varrho^{(1)}\,\varrho^{(2)}}$$

die gesuchten Ausdrücke

$$(28)\qquad \frac{1}{\varrho^{(1)}}+\frac{1}{\varrho^{(2)}}$$

$$=\frac{(\varphi_{22}+\varphi_{33})\varphi_1^2+(\varphi_{33}+\varphi_{11})\varphi_2^2+(\varphi_{11}+\varphi_{22})\varphi_3^2-2\varphi_{23}\varphi_2\varphi_3-2\varphi_{31}\varphi_3\varphi_1-2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2}{Q\sqrt{Q}},$$

$$(29)\qquad \frac{1}{\varrho^{(1)}\varrho^{(2)}}=\frac{\Phi_{11}\varphi_1^2+\Phi_{22}\varphi_2^2+\Phi_{33}\varphi_3^2+2\Phi_{23}\varphi_2\varphi_3+2\Phi_{31}\varphi_3\varphi_1+2\Phi_{12}\varphi_1\varphi_2}{Q^2}.$$

Der Zähler von dem das Krümmungsmass der Fläche darstellenden Ausdrucke (29) ist nach I, § 83 die zu der quadratischen Form $\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}$ adjungirte Form, in welcher die drei Variabeln beziehungsweise durch die drei ersten partiellen Differentialquotienten φ_1, φ_2, φ_3 vertreten sind.

Capitel IX.

Integrale von Functionen einer Variable.

§ 66. Eintheilung der Integrale nach der Beschaffenheit der zu integrirenden Function.

Die Betrachtung der Integrale von Functionen einer Variable, welche in Capitel II angestellt wurde, setzt in Betreff der zu integrirenden Function nur voraus, dass dieselbe für ein gewisses Intervall der Variable eindeutig, endlich und stetig gegeben sei, nimmt aber auf die Operationen, durch welche die Function hervorgebracht wird, keine Rücksicht. Dagegen beziehen sich die Regeln, nach denen eine gegebene Function differentiirt wird, wie auch früher bemerkt worden, im Grunde immer auf die Operationen, durch welche die zu differentiirende Function entstanden ist. Gegenwärtig soll für die Integration von Functionen einer Variable derselbe Gesichtspunkt absichtlich geltend gemacht werden, welcher sich für die Differentiation von Functionen von vorne herein ergab. Dadurch wird es möglich, solche Gattungen von Functionen zu bezeichnen, bei welchen die unbestimmte Integration ausgeführt, das heisst, auf die Bildung von anderweitig bekannten Functionen zurückgeführt werden kann.

Bei der Differentiation unterscheiden sich die algebraischen Functionen scharf von denjenigen, welche nicht algebraisch oder mit einem andern Worte transcendent sind. Auf gleiche Weise theilt man die Integrale in diejenigen, für welche die zu integrirende Function algebraisch, und in diejenigen, für welche sie nicht algebraisch ist. Eine algebraische Function wird nach § 9 durch die Anwendung einer beschränkten Zahl von algebraischen Operationen erzeugt, und zwar setzen sich diese aus den vier rationalen und aus irrationalen Operationen zusammen; die letzteren umfassen das Ausziehen von beliebig hohen Wurzeln und das Auflösen von algebraischen Gleichungen überhaupt. Demzufolge werden unter den Integralen der algebraischen Functionen die Integrale der rationalen Functionen und die Integrale von solchen Functionen unterschieden, zu deren Bildung irrationale Operationen erforderlich sind. Wir gehen jetzt zur Erörterung der ersteren über, bemerken aber sogleich, dass wir uns mit den letzteren nur in einem beschränkten Umfange beschäftigen werden.

§ 67. Integrale von rationalen Functionen der Integrationsvariable.

Insofern die rationalen Functionen in ganze und gebrochene Functionen zerfallen, sind zuerst die Integrale der rationalen ganzen Functionen zu erwähnen. Eine solche Function der Integrationsvariable x vom $n$ten Grade hat den Ausdruck

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n. \tag{1}$$

Nach der Gleichung (5_a) des § 25 ist das unbestimmte Integral einer Summe von Functionen gleich dem Aggregat der unbestimmten Integrale der einzelnen Summanden, nach der Gleichung (8_a) desselben § das unbestimmte Integral einer mit einer Constante multiplicirten Function gleich dem Product aus der bezüglichen Constante und dem unbestimmten Integral der in Rede stehenden Function. Es bleibt daher nur für jedes einzelne Glied der Summe (1) das unbestimmte Integral einer ganzen positiven Potenz der Variable x zu bilden. Der Werth desselben folgt aus der Gleichung (20) des § 24, indem man daselbst den Exponenten k gleich einer beliebigen ganzen positiven Zahl einschliesslich der Null nimmt, nämlich

$$(2) \qquad \int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \text{const.}$$

Mithin wird *das unbestimmte Integral der rationalen ganzen Function* (1) durch die Gleichung

$$(3) \qquad \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n)\,dx$$

$$= \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \frac{a_2 x^{n-1}}{n-1} + \ldots + a_n x + \text{const.}$$

dargestellt. Aus derselben geht hervor, dass das unbestimmte Integral einer gegebenen rationalen ganzen Function einer Variable gleich einer rationalen ganzen Function derselben Variable von einem um eine Einheit höheren Grade ist.

Eine rationale gebrochene Function von x ist gleich einem Bruche, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Functionen von x sind. Bei einer zu integrirenden rationalen gebrochenen Function sei die Zählerfunction $e(x)$ vom $s$ten, die Nennerfunction $f(x)$ vom $n$ten Grade

$$(4) \qquad e(x) = e_0 x^s + e_1 x^{s-1} + \ldots + e_s,$$

$$(5) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Alsdann ist der gegebene Bruch $\frac{e(x)}{f(x)}$ nach I, § 89 ein unechter, wenn die Gradzahl s grösser als die Gradzahl n oder ihr gleich, ein echter, wenn s kleiner als n ist. In dem erstern Falle lassen sich stets, wie in I, § 68 gezeigt worden, zwei ganze Functionen $q(x)$ und $r(x)$ auf eine einzige Weise so bestimmen, dass die Gleichung

$$(6) \qquad e(x) = f(x)\,q(x) + r(x)$$

erfüllt wird, wo $r(x)$ von niedrigerem Grade als $f(x)$ ist. Das an der erwähnten Stelle für diesen Zweck angegebene Verfahren ist die nach den fallenden Potenzen der Variable x geordnete Division; es haben hierbei $e(x)$, $f(x)$, $q(x)$, $r(x)$ beziehungsweise die Namen Dividendus, Divisor, Quotient und Rest. Weil nun die verlangten Functionen $q(x)$ und $r(x)$ nicht auf zwei verschiedene Arten bestimmt werden können, so gelangt man durch jedes andere Verfahren zu demselben Ergebniss, und kann deshalb auch die in I, § 91 entwickelte Methode der unbestimmten Coefficienten anwenden. Da $q(x)$ vom $(s-n)$ten, $r(x)$ vom

$(n-1)$ten oder einem niedrigeren Grade sein muss, so haben die Functionen die Gestalt

(7) $$q(x) = E_0 x^{s-n} + E_1 x^{s-n-1} + \ldots + E_{s-n},$$

(8) $$r(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die zu befriedigende Gleichung (6) und setzt vermöge des in I, § 44 bewiesenen Princips die Coefficienten der gleichen Potenzen der Variable x einander gleich, so ergeben sich für die Coefficienten $E_0, E_1, \ldots E_{s-n}$, $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ die Gleichungen

(9) $$\begin{aligned} e_0 &= a_0 E_0 \\ e_1 &= a_0 E_1 + a_1 E_0 \\ &\vdots \\ e_{s-n} &= a_0 E_{s-n} + a_1 E_{s-n-1} + a_2 E_{s-n-2} + \ldots, \end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned} e_{s-n+1} &= r_0 + a_1 E_{s-n} + a_2 E_{s-n-1} + \ldots \\ e_{s-n+2} &= r_1 + a_2 E_{s-n} + \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus (9) werden nach einander die Coefficienten $E_0, E_1, \ldots E_{s-n}$ gefunden, indem man jedesmal mit der Grösse a_0 dividirt; diese ist von Null verschieden vorausgesetzt, da die Function $f(x)$ von keinem niedrigeren als dem $n$ten Grade sein soll. Darauf liefern die Gleichungen (10) die Determination der Coefficienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ ohne Ausführung einer neuen Division.

Nachdem die Gleichung (6) durch $f(x)$ dividirt ist, kommt wie in I, § 89,

(11) $$\frac{e(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)},$$

wodurch der gegebene Bruch $\frac{e(x)}{f(x)}$ als die Summe der ganzen Function $q(x)$ und des echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ erscheint. Das gesuchte unbestimmte Integral wird daher gleich dem Aggregat der unbestimmten Integrale der ganzen Function $q(x)$ und des echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$,

(12) $$\int \frac{e(x)}{f(x)}\, dx = \int q(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{f(x)}\, dx;$$

wie auch im Folgenden geschehen wird, ist die hinzuzuaddirende Integrationsconstante fortgelassen. Das erste der beiden Integrale lässt sich vermöge der obigen Regel (3) ausführen, und erhält mit Hülfe der in (7) angenommenen Bezeichnung der Coefficienten den Ausdruck

$$(13)\qquad \int q(x)\,dx = \frac{E_0 x^{s-n+1}}{s-n+1} + \frac{E_1 x^{s-n}}{s-n} + \ldots + E_{s-n}\,x,$$

so dass nur das zweite Integral zu untersuchen bleibt. Wenn die Function $e(x)$ von vorne herein niedrigeren Grades als die Function $f(x)$ ist, so muss in der Gleichung (6) $q(x)$ verschwinden und $r(x) = e(x)$ sein; man hat es daher in beiden Fällen mit dem Integral

$$(14)\qquad \int \frac{r(x)}{f(x)}\,dx$$

zu thun.

Ein Mittel zur Behandlung dieses Integrals liegt in der Lösung der Aufgabe, *den Bruch* $\frac{r(x)}{f(x)}$ *in Partialbrüche zu zerlegen*, welche in I, § 93 erörtert ist. Wir nehmen, wie dort, mit Zuziehung des Fundamentalsatzes der algebraischen Gleichungen an, dass die Zerlegung der Function $f(x)$ in ihre Factoren ersten Grades ausgeführt sei, dass man die gleichen Factoren des ersten Grades zu Potenzen vereinigt und die Darstellung

$$(15)\qquad f(x) = a_0\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}$$

gebildet habe, wo $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(\xi) = 0$ sind. Dies vorausgesetzt, ist an der angeführten Stelle gezeigt, dass der echte Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ immer und nur auf eine Weise als ein Aggregat von echten Partialbrüchen ausgedrückt werden könne, deren Nennerfunctionen ohne gemeinsamen Theiler und insbesondere gleich den Potenzen $(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}, (x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2}, \ldots (x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}$ sind,

$$(16)\qquad \frac{r(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2}} + \ldots + \frac{\varphi_\lambda(x)}{(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}};$$

hier sind also die Grade der ganzen Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ respective niedriger als die Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\lambda$. Ferner ist in I, § 95 darauf aufmerksam gemacht, dass, wofern $f(x)$ nur ungleiche Factoren des ersten Grades enthält, mithin λ gleich n ist, und die sämmtlichen Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ gleich der Einheit sind, alsdann $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ respective gleich Constanten $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots r^{(n)}$ werden, die sich vermittelst der ersten Ableitung $f'(x)$ folgendermassen ausdrücken lassen,

$$(17) \qquad r^{(1)} = \frac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)}, \quad r^{(2)} = \frac{r(\xi_2)}{f'(\xi_2)}, \ldots r^{(n)} = \frac{r(\xi_n)}{f'(\xi_n)}.$$

Um Missverständnissen vorzubeugen erwähne ich, dass die betreffenden Formeln, welche in I, § 95 unter der Annahme abgeleitet sind, der Coefficient a_0 von x^n in der Function $f(x)$ sei gleich der Einheit, offenbar gültig bleiben, sobald man diesen Coefficienten beibehält, wie jetzt geschieht. Es gehört demnach zu der Voraussetzung, dass

$$(18) \qquad f(x) = a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$$

sei und alle Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der zugehörigen Gleichung unter einander verschieden sind, die Partialbruchzerlegung

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{r(x)}{f(x)} = \dfrac{r^{(1)}}{x - \xi_1} + \dfrac{r^{(2)}}{x - \xi_2} + \ldots + \dfrac{r^{(n)}}{x - \xi_n}, \\ r^{(1)} = \dfrac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)}, \quad r^{(2)} = \dfrac{r(\xi_2)}{f'(\xi_2)}, \ldots r^{(n)} = \dfrac{r(\xi_n)}{f'(\xi_n)}, \end{cases}$$

von welcher auch in § 39 dieses Bandes Gebrauch gemacht worden ist.

Für den Fall, dass die Function $f(x)$ nicht lauter verschiedene Factoren des ersten Grades hat, ist a. a. O. nachgewiesen, dass die zu der Gleichung (16) gehörenden Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ stets durch das Verfahren der Aufsuchung des grösten gemeinsamen Theilers zweier Functionen einer Variable, und auch vermittelst der Auflösung eines Systems von Gleichungen des ersten Grades bestimmt werden können. Wir wollen jetzt die allgemeinen Endresultate durch Anwendung der Differentiation ableiten, wobei unter der Voraussetzung $\lambda = n$ die Darstellung von (19) wieder erscheinen wird.

Wenn man die Gleichung (16) auf beiden Seiten mit $f(x)$ multiplicirt, so entsteht ein Ausdruck der ganzen Function $r(x)$ durch ein Aggregat von Producten, von denen jedes eine der ganzen Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ und diejenige ganze Function zu Factoren hat, welche aus der Division von $f(x)$ durch die zugehörige Potenz $(x-\xi_1)^{\alpha_1}, (x-\xi_2)^{\alpha_2}, \ldots (x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}$ entsteht. Der Kürze halber werde

$$(20) \quad \frac{f(x)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1}} = D_1(x), \quad \frac{f(x)}{(x-\xi_2)^{\alpha_2}} = D_2(x), \ldots \frac{f(x)}{(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}} = D_\lambda(x)$$

gesetzt, dann hat man

$$(21) \qquad r(x) = \varphi_1(x)\, D_1(x) + \varphi_2(x)\, D_2(x) + \ldots + \varphi_\lambda(x)\, D_\lambda(x).$$

Hier sind die sämmtlichen Functionen $D_2(x), D_3(x), \ldots D_\lambda(x)$ durch die Potenz $(x-\xi_1)^{\alpha_1}$ algebraisch theilbar, folglich auch die sämmtlichen mit denselben gebildeten Producte, und daher ist es die Summe dieser Producte ebenfalls. Aus diesem Grunde wird die Differenz

$$(22) \qquad r(x) - \varphi_1(x)\, D_1(x)$$

gleich dem Product einer ganzen Function $K_1(x)$ und der Potenz $(x-\xi_1)^{\alpha_1}$,

$$(23) \qquad K_1(x)\,(x-\xi_1)^{\alpha_1}.$$

Nun findet man in der Gleichung (2_b) des § 16 eine Vorschrift, um die auf einander folgenden Differentialquotienten des Products zweier Functionen zu bilden. An der betreffenden Stelle ist vorausgesetzt, dass beide Functionen dem reellen Gebiete angehören. Da aber in § 33 für rationale Functionen, die aus einer reellen Variable x und complexen Constanten gebildet sind, der erste und die successiven nach x zu nehmenden Differentialquotienten definirt sind, da in dem dortigen Satze (II) ausgesprochen ist, dass der erste Differentialquotient der Summe, der Differenz, des Products und des Quotienten von zwei rationalen Functionen, die aus einer reellen Variable x und complexen Constanten bestehen, nach denselben Regeln erhalten werden, die auf dem reellen Gebiete gelten, und da die Gleichung (2_b) des § 16 nur auf der wiederholten Anwendung der Regel beruht, nach welcher der erste Differentialquotient eines Products gebildet wird, so darf die genannte Formel auch dann auf das Product (23) angewendet werden, wenn die Wurzel ξ_1 der Gleichung $f(\xi) = 0$ eine complexe Grösse ist und die ganze

Function $K_1(x)$ complexe Constanten enthält. Die auf einander folgenden Differentialquotienten der Potenz $(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}$ haben vermöge (25) des § 33 die Ausdrücke

$$
(24)\qquad \begin{aligned}
\frac{d(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}{dx} &= \mathfrak{a}_1\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1},\\
\frac{d^2(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}{dx^2} &= \mathfrak{a}_1\,(\mathfrak{a}_1-1)\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-2},\\
&\;\;\vdots\\
\frac{d^p(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}{dx^p} &= \mathfrak{a}_1\,(\mathfrak{a}_1-1)\,.\,.\,(\mathfrak{a}_1-p+1)\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-p}.
\end{aligned}
$$

Demnach liefert die angeführte Gleichung für den nach x genommenen $p$ten Differentialquotienten des Products (23) die Darstellung

$$
(25)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d^p K_1(x)}{dx^p}\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1} + p\,\frac{d^{p-1}K_1(x)}{dx^{p-1}}\,\mathfrak{a}_1\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1} +\\
&\qquad \ldots + K_1(x)\,\mathfrak{a}_1\,(\mathfrak{a}_1-1)\ldots(\mathfrak{a}_1-p+1)\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-p}.
\end{aligned}
$$

So lange die Zahl p kleiner als $\mathfrak{a}_1$ ist, sind die Factoren jedes Gliedes dieser Summe eine Potenz der Basis $x-\xi_1$ von positivem Exponenten, eine Zahl und ein Differentialquotient der Function $K_1(x)$, welcher wie diese selbst eine ganze Function von x ist. Daher verschwindet bei der Substitution des Werthes $x=\xi_1$ jedes einzelne Glied und folglich auch die Summe. Also hat das Product (23) die Eigenschaft, dass dasselbe mit seinen sämmtlichen nach x genommenen Differentialquotienten von der ersten, zweiten bis zur $(\mathfrak{a}_1-1)$ten Ordnung für den Werth $x=\xi_1$ gleich Null wird. Man sieht übrigens leicht eins, dass sich das eben bewiesene Resultat mit dem Inhalte des letzten Satzes in I, § 49 deckt. Mithin muss die mit dem Product (23) gleiche Differenz (22), wie auch jeder ihrer Differentialquotienten bis zur $(\mathfrak{a}_1-1)$ten Ordnung einschliesslich für den Werth $x=\xi_1$ gleich Null sein. Das giebt die folgenden $\mathfrak{a}_1$ Gleichungen, in denen die nach x genommenen Differentialquotienten, wie in § 16, nach *Lagrange* durch Accente angedeutet sind,

$$(26)\qquad \begin{aligned} r(\xi_1) &= \varphi_1(\xi_1)\, D_1(\xi_1) \\ r'(\xi_1) &= \varphi'_1(\xi_1)\, D_1(\xi_1) + \varphi_1(\xi_1) D'_1(\xi_1) \\ &\vdots \\ r^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1) &= \varphi_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)\, D_1(\xi_1) + (\mathfrak{a}_1-1)\, \varphi_1^{(\mathfrak{a}_1-2)}(\xi_1)\, D'_1(\xi_1) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \varphi_1(\xi_1)\, D_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1). \end{aligned}$$

Die Function

$$D_1(x) = a_0(x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2} \ldots (x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}$$

hat für $x=\xi_1$ einen von Null verschiedenen Werth, weil nach der Voraussetzung ξ_1 von jedem der Werthe $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\lambda$ differirt. Man erhält daher aus den Gleichungen (26) nach einander die $\mathfrak{a}_1$ Werthe

$$(27)\qquad \varphi_1(\xi_1),\ \varphi'_1(\xi_1), \ldots \varphi_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1),$$

durch welche die ganze Function $\varphi_1(x)$, deren Grad höchstens der $(\mathfrak{a}_1-1)$te sein kann, vollständig bestimmt wird. In § 16 ist hervorgehoben, dass für rationale ganze Functionen mit reellen Coefficienten der Begriff und die im ersten Bande gebrauchte Bezeichnung der successiven Ableitungen respective mit dem Begriffe und der von *Lagrange* herrührenden Bezeichnung der successiven Differentialquotienten der Function zusammenfallen. Dieselbe Bemerkung dehnt sich jetzt auf rationale ganze Functionen mit complexen Coefficienten aus; man darf die rationale ganze Function $\varphi_1(x)$, als eine Function des $(\mathfrak{a}_1-1)$ten Grades, stets folgendermassen durch die Gleichung (18) in I, § 93 darstellen

$$(28)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_1(\xi_1) + \varphi'_1(\xi_1)(x-\xi_1) + \frac{\varphi''_1(\xi_1)}{2!}(x-\xi_1)^2 + \ldots \\ &\qquad + \frac{\varphi_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)}{(\mathfrak{a}_1-1)!}(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}, \end{aligned}$$

welche genau der Gleichung (12) in dem angeführten § 16 des vorliegenden Bandes entspricht.

Der Werth $\varphi_1(\xi_1)$ ist nach der ersten Gleichung (26) gleich dem Bruche $\dfrac{r(\xi_1)}{D_1(\xi_1)}$ oder dem Werthe der Function $\dfrac{r(x)}{D_1(x)} = s_1(x)$ für $x=\xi_1$. Für die Darstellung von $\varphi'_1(\xi_1), \varphi''_1(\xi_1)\ldots$ durch die übrigen Gleichungen kann man die Bemerkung benutzen, dass sich die auf einander folgenden nach x genommenen Differentialquotienten des Quotienten $s_1(x)$ bestimmen lassen, indem die beiden Seiten der Gleichung $r(x) = D_1(x)s_1(x)$ wiederholt nach x differentiirt und die gesuchten Differentialquotienten durch Auflösung der betreffenden Gleichungen ermittelt werden; diese Werthe sind hierdurch, so lange $D_1(x)$ nicht verschwindet, eindeutig bestimmt. Die erwähnten Gleichungen verwandeln sich aber in die obigen Gleichungen (26), sobald in den erstgenannten zuerst x durch ξ_1, hierauf $s_1(\xi_1)$ durch $\varphi_1(\xi_1)$, $s'_1(\xi_1)$ durch $\varphi'_1(\xi_1)$ u. s. f., zuletzt $s_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)$ durch $\varphi^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)$ ersetzt wird. Demzufolge müssen die Werthe

$$\varphi_1(\xi_1), \varphi'_1(\xi_1), \ldots \varphi_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)$$

beziehungsweise den Werthen gleich sein, welche die gebrochene Function $s_1(x)$ und ihre successiven nach x gebildeten Differentialquotienten für $x = \xi_1$ annehmen, und man erhält die Ausdrücke

$$(29)\quad \left\{ \begin{array}{c} \varphi_1(\xi_1) = s_1(\xi_1), \varphi'_1(\xi_1) = s'_1(\xi_1), \ldots \varphi_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1) = s_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1), \\ s_1(x) = \dfrac{r(x)}{D_1(x)}. \end{array} \right.$$

Vermittelst genau entsprechender Betrachtungen werden die zu der Gleichung (21) gehörenden übrigen ganzen Functionen $\varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ determinirt. So kommt für die Function $\varphi_2(x)$ nach der Analogie von (28) der Ausdruck

$$(30)\quad \varphi_2(x) = \varphi_2(\xi_2) + \varphi'_2(\xi_2)(x-\xi_2) + \frac{\varphi''_2(\xi_2)}{2!}(x-\xi_2)^2 + \ldots + \frac{\varphi_2^{(\alpha_2-1)}(\xi_2)}{(\alpha_2-1)!}(x-\xi_2)^{\alpha_2-1},$$

mit den nach (29) gebildeten Werthen

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{c} \varphi_2(\xi_2) = s_2(\xi_2), \varphi'_2(\xi_2) = s'_2(\xi_2), \ldots \varphi_2^{(\alpha_2-1)}(\xi_2) = s_2^{(\alpha_2-1)}(\xi_2), \\ s_2(x) = \dfrac{r(x)}{D_2(x)}. \end{array} \right.$$

Desgleichen bekommt man die Ausdrücke der übrigen Functionen aus (28) und (29) durch Fortrücken der Zeiger in der Reihe $3, 4, \ldots \lambda$. Da schon im ersten Bande gezeigt worden, dass die Bestimmung der Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ immer und nur auf eine einzige Weise möglich ist, und da das gegenwärtige Verfahren unter der Voraussetzung der Möglichkeit eine einzige Bestimmung liefert, so muss dieselbe richtig sein.

Die in (20) definirten Functionen $D_1(x), D_2(x), \ldots D_\lambda(x)$ können vermöge der Differentialquotienten der Function $f(x)$ dargestellt werden, indem man die Gleichung (28) auf diese Function selbst anwendet und bedenkt, dass nach einem vorhin bewiesenen Satze, wofern die ganze Function $f(x)$ durch die ganze Potenz $(x-\xi)^{\mathfrak{a}}$ theilbar ist, sowohl $f(x)$ wie auch dessen sämmtliche nach x genommenen Differentialquotienten bis zu der $(\mathfrak{a}-1)$ten Ordnung einschliesslich für $x=\xi$ verschwinden müssen. Aus der allgemein gültigen Gleichung

$$(32)\quad f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

folgen dann durch Einführung der besondern Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ die gesuchten Ausdrücke

$$(33)\quad \begin{cases} D_1(x)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_1)}(\xi_1)}{\mathfrak{a}_1!}+\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_1+1)}(\xi_1)}{(\mathfrak{a}_1+1)!}(x-\xi_1)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-\xi_1)^{n-\mathfrak{a}_1} \\ D_2(x)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_2)}(\xi_2)}{\mathfrak{a}_2!}+\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_2+1)}(\xi_2)}{(\mathfrak{a}_2+1)!}(x-\xi_2)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(x-\xi_2)^{n-\mathfrak{a}_2} \\ \vdots \\ D_\lambda(x)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_\lambda)}(\xi_\lambda)}{\mathfrak{a}_\lambda!}+\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_\lambda+1)}(\xi_\lambda)}{(\mathfrak{a}_\lambda+1)!}(x-\xi_\lambda)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(\xi_\lambda)}{n!}(x-\xi_\lambda)^{n-\mathfrak{a}_\lambda}. \end{cases}$$

Dieselben eignen sich für den vorliegenden Zweck insofern, als bei der Ausführung der Gleichungen (29) die Werthe der Function $D_1(x)$ und ihrer Differentialquotienten für $x=\xi_1$, und in Betreff der übrigen Functionen $D_2(x), \ldots D_\lambda(x)$ die entsprechenden Werthe gebraucht werden. Wir haben nun die Werthe der Functionen

$$(34)\quad \begin{cases} D_1(\xi_1)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_1)}(\xi_1)}{\mathfrak{a}_1!} \\ D_1(\xi_2)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_2)}(\xi_2)}{\mathfrak{a}_2!} \\ \vdots \\ D_\lambda(\xi_\lambda)=\dfrac{f^{(\mathfrak{a}_\lambda)}(\xi_\lambda)}{\mathfrak{a}_\lambda!}, \end{cases}$$

und können die Werthe der betreffenden Differentialquotienten leicht hinzufügen. Sobald einer der Potenzexponenten $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_\lambda$ gleich der Einheit ist, geht der zugehörige Functionswerth der linken Seite in den Werth über, welchen der Differentialquotient $f'(x)$ für die betreffende einfache Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ annimmt. Sei ξ_1 eine solche Wurzel, dann ergiebt sich $D_1(\xi_1)=f'(\xi_1)$, folglich nach (29) $\varphi_1(\xi_1)=\frac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)}$, mithin entsteht, falls das gleiche bei allen n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Fall ist, wie vorhergesagt war, die Partialbruchzerlegung (19).

Bei der Anwendung, welche von der Zerlegung des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ für die Integration desselben gemacht werden soll, kommt in Betracht, dass in dem ursprünglich gegebenen Bruche $\frac{e(x)}{f(x)}$ Zähler und Nenner ganze Functionen mit reellen Coefficienten sind, und für die Function $r(x)$ nach ihrer Entstehung dasselbe gilt. Wenn nun ξ_α eine reelle Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ bedeutet, so ist die zugehörige Function $D_\alpha(x)$ und der Bruch $s_\alpha(x)=\frac{r(x)}{D_\alpha(x)}$ durchaus reell, mithin auch die betreffende Function $\varphi_\alpha(x)$ sowie der Bestandtheil $\frac{\varphi_\alpha(x)}{(x-\xi_\alpha)^{\mathfrak{a}_\alpha}}$ der rechten Seite von (16). Was die nicht reellen Wurzeln anlangt, so haben wir in I, § 47 nachgewiesen und in § 8 dieses Bandes wiederholt, dass eine rationale ganze Function $f(x)$, deren sämmtliche Coefficienten reelle Grössen sind, wenn sie durch einen nicht reellen Werth $\varrho_1 + i\sigma_1$ von x zum Verschwinden gebracht wird, immer auch für den conjugirten Werth $\varrho_1 - i\sigma_1$ verschwindet, und dass, falls die höchste Potenz des Ausdrucks $x - \varrho_1 - i\sigma_1$, durch welche $f(x)$ aufgeht, die $\mathfrak{a}$te ist, $f(x)$ ebenfalls genau durch die $\mathfrak{a}$te Potenz des conjugirten Ausdrucks $x - \varrho_1 + i\sigma_1$ theilbar ist. Sobald daher bei unserm Bruche $\frac{r(x)}{f(x)}$ die Gleichung $f(\xi)=0$ Wurzeln hat, die nicht reell sind, so ordnen sich dieselben zu Paaren von conjugirten. Nimmt man beispielsweise an, dass

$$(35) \qquad \xi_1 = \varrho_1 + i\sigma_1, \; \xi_2 = \varrho_1 - i\sigma_1$$

sei, so muss nach den eingeführten Bezeichnungen zwischen den Potenzexponenten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der Darstellung (15) die Gleichung $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ bestehen; auch existirt für jedes neue Paar von conjugirten Wurzeln die entsprechende Beziehung. Hieraus lässt sich ableiten, dass in der durch (16) dargestellten Partialbruchzerlegung das Aggregat von je zwei Brüchen, deren Nenner Potenzen von conjugirten mit der reellen Variable x gebildeten Ausdrücken des ersten Grades sind, gleich einer rationalen Function von x mit reellen Coefficienten sein muss. Sobald dies für ein Paar bewiesen ist, gilt es für alle Paare. Nach I, § 27 besteht der Satz, dass, wenn man den Werth eines aus einer beliebigen aber beschränkten Anzahl von complexen Elementen $a+ib$, $c+id$, ... gebildeten rationalen Ausdrucks nach Trennung des reellen und imaginären Theiles mit $r+is$ bezeichnet, der Werth, welchen der Ausdruck erhält, sobald jedes der Elemente durch das zu demselben conjugirte Element, $a+ib$ durch $a-ib$, $c+id$ durch $c-id$ u. s. f., ersetzt wird, gleich der zu $r+is$ conjugirten Grösse $r-is$ ist. Bei den gegebenen Functionen $r(x)$ und $f(x)$ hat man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x als constante reelle Elemente, die Grösse x als ein variables reelles Element aufzufassen. Da jede reelle Grösse sich selbst conjugirt ist, so bleiben bei der Einführung der conjugirten Elemente sowohl die genannten Coefficienten wie auch die Variable x ungeändert. Unter der Voraussetzung der Gleichungen (35), aus denen die Gleichung $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ abgeleitet ist, sind daher in Folge der in (20) aufgestellten Definition $D_1(x)$ und $D_2(x)$ zu einander conjugirte, das heisst solche Functionen, bei denen beziehungsweise die Coefficienten der gleich hohen Potenzen der reellen Variable x conjugirte Grössen sind. Dies tritt durch die in (33) enthaltene Darstellung deutlich hervor; denn wegen der Gleichung $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ hat man zur Gewinnung von $D_1(x)$ und $D_2(x)$ die gleich hohen Differentialquotienten der Function $f(x)$ zu bilden und in denselben die conjugirten Werthe ξ_1 und ξ_2 zu substituiren, während die hinzutretenden Factoren die gleich hohen und mit denselben Zahlen multiplicirten Potenzen der conjugirten Ausdrücke $x-\xi_1$ und $x-\xi_2$ sind. Auch sieht man sogleich, dass der nach x zu nehmende beliebige $p$te Differentialquotient von $D_1(x)$, für

$x=\xi_1$, und der ebenso hohe Differentialquotient von $D_2(x)$, für $x=\xi_2$, conjugirte Werthe erhalten. Da nun ausserdem $r(x)$ eine Function mit reellen Coefficienten ist, so führt die Anwendung des erwähnten Satzes zu dem Ergebniss, dass respective die in (29) und (31) angegebenen Werthe von $\varphi_1(\xi_1), \varphi'_1(\xi_1), \ldots$ und $\varphi_2(\xi_2), \varphi'_2(\xi_2), \ldots$ und folglich auch die in (28) und (30) dargestellten ganzen Functionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zu einander conjugirt sind. Hieraus ist aber der Schluss zu ziehen, dass das in (16) vorkommende Aggregat

$$\text{(36)} \qquad \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-\xi_2)^{\alpha_2}}.$$

durch Fortheben des imaginären Theils gleich einer rationalen Function von x mit reellen Coefficienten wird, womit die aufgestellte Behauptung gerechtfertigt ist. Also besteht die rechte Seite von (16) aus reellen Partialbrüchen, die von den reellen Wurzeln der Gleichung $f(\xi)=0$ herrühren, und aus Paaren von conjugirten Partialbrüchen, die den Paaren conjugirter Wurzeln entsprechen und zusammengenommen ebenfalls reell sind. Die Summe der unbestimmten Integrale dieser Bestandtheile bildet das gesuchte unbestimmte Integral.

Wir kehren jetzt zu dem Falle zurück, dass die Gleichung $f(\xi)=0$ lauter ungleiche Wurzeln besitzt, worauf sich die Gleichung (19) bezieht. Wenn ausserdem die sämmtlichen Wurzeln reell sind, so haben auch alle Constanten, welche die Zähler der Partialbrüche bilden, reelle Werthe, und es handelt sich um die unbestimmten Integrationen

$$\int \frac{dx}{x-\xi_\alpha},$$

wo α nach der Reihe gleich $1, 2, 3, \ldots n$ zu setzen ist. Wie in (22) des § 24 für das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x}$ der Logarithmus naturalis von x gefunden wurde, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\text{(37)} \qquad \frac{d \log(x-\xi_\alpha)}{dx} = \frac{1}{x-\xi_\alpha}.$$

die unbestimmte Integration

$$\text{(38)} \qquad \int \frac{dx}{x-\xi_\alpha} = \log(x-\xi_\alpha) + \text{const.}$$

Deshalb entsteht aus der Gleichung (19) das Resultat

$$(39)\quad \int \frac{r(x)}{f(x)}dx = \frac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)}\log(x-\xi_1) + \frac{r(\xi_2)}{f'(\xi_2)}\log(x-\xi_2) + \ldots + \frac{r(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\log(x-\xi_n).$$

Sobald nicht alle Wurzeln der Gleichung $f(\xi)=0$ reell sind, mögen die reellen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_l$, die Paare von conjugirten Wurzeln folgendermassen bezeichnet werden

$$(40)\quad \begin{aligned} \xi_{l+1} &= \varrho_1 + i\sigma_1,\ \xi_{l+3} = \varrho_3 + i\sigma_3, \ldots \xi_{l+2m-1} = \varrho_{2m-1} + i\sigma_{2m-1}, \\ \xi_{l+2} &= \varrho_1 - i\sigma_1,\ \xi_{l+4} = \varrho_3 - i\sigma_3, \ldots \xi_{l+2m} \quad = \varrho_{2m-1} - i\sigma_{2m-1}. \end{aligned}$$

Dann bringt die reelle Wurzel ξ_1 in (19) den reellen Bestandtheil $\frac{r^{(1)}}{x-\xi_1}$ hervor, dessen unbestimmtes Integral nach (38) den Ausdruck

$$(41)\quad r^{(1)}\log(x-\xi_1)$$

hat; ebenso liefern alle reellen Wurzeln entsprechend gebildete Ausdrücke. Für die Zähler der Brüche in (19), die zu complexen Wurzeln gehören, habe man durch Trennung der reellen und imaginären Theile die Werthe

$$(42)\quad \begin{aligned} \frac{r(\xi_{l+1})}{f'(\xi_{l+1})} &= h_1 + ik_1, \ldots \frac{r(\xi_{l+2m-1})}{f'(\xi_{l+2m-1})} = h_{2m-1} + ik_{2m-1}, \\ \frac{r(\xi_{l+2})}{f'(\xi_{l+2})} &= h_1 - ik_1, \ldots \frac{r(\xi_{l+2m})}{f'(\xi_{l+2m})} \quad = h_{2m-1} - ik_{2m-1}. \end{aligned}$$

Nunmehr ist das unbestimmte Integral der Aggregate aufzusuchen, welche zu den verschiedenen Paaren conjugirter Wurzeln gehören; das erste derselben heisst

$$(43)\quad \frac{h_1 + ik_1}{x-\varrho_1 - i\sigma_1} + \frac{h_1 - ik_1}{x-\varrho_1 + i\sigma_1} = \frac{2h_1(x-\varrho_1) - 2k_1\sigma_1}{(x-\varrho_1)^2 + \sigma_1^2}.$$

Wir trennen den reellen und imaginären Theil des Bruches

$$(44)\quad \frac{1}{x-\varrho_1 - i\sigma_1} = \frac{x-\varrho_1}{(x-\varrho_1)^2 + \sigma_1^2} + \frac{i\sigma_1}{(x-\varrho_1)^2 + \sigma_1^2},$$

und bemerken, dass der Zähler des reellen Theiles gleich dem halben Werthe von dem nach x genommenen Differentialquotienten des Nenners, mithin der reelle Theil nach (5) des § 12 gleich dem halben Werthe des Differentialquotienten des Logarithmus naturalis des Nenners ist,

$$(45) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{d\log((x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2)}{dx}=\frac{x-\varrho_1}{(x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2}.$$

Für die besondern Werthe $\varrho_1=0, \sigma_1=1$ geht die in (44) vorgenommene Zerlegung in diejenige über, welche in (3) des § 33 den Differentialquotienten der Function Arcus tangentis geliefert hat; in entsprechender Weise lässt sich der durch i dividirte imaginäre Theil von (44) als der nach x genommene Differentialquotient eines Arcus tangentis ausdrücken, dessen Argument der Quotient $\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}$ ist,

$$(46) \qquad \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right)}{dx}=\frac{\sigma_1}{(x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2}.$$

Man hat demnach die unbestimmten Integrationen

$$(47) \qquad \int\frac{(x-\varrho_1)\,dx}{(x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2}=\frac{1}{2}\log((x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2),$$

$$(48) \qquad \int\frac{\sigma_1\,dx}{(x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right).$$

Es wird wie früher vorausgesetzt, dass die Werthe der Function $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right)$ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen; sie ist alsdann eine eindeutige und stetige Function ihres Arguments $\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}$, mithin auch eine eben solche Function von x. Das Aggregat (43), dessen Werth entsteht, indem man die rechte Seite von (45) mit $2h_1$, die rechte Seite von (46) mit $-2k_1$ multiplicirt und addirt, giebt jetzt die unbestimmte Integration

$$(49) \qquad \int\left(\frac{h_1+ik_1}{x-\varrho_1-i\sigma_1}+\frac{h_1-ik_1}{x-\varrho_1+i\sigma_1}\right)dx=h_1\log((x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2)-2k_1\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right).$$

Durch die Anwendung von (41) auf die reellen, und von (49) auf die paarweise conjugirten Bestandtheile der rechten Seite von (19) wird daher die Aufgabe folgendermassen gelöst

$$(50) \qquad \int\frac{r(x)}{f(x)}\,dx=r^{(1)}\log(x-\xi_1)+\ldots+r^{(l)}\log(x-\xi_l)$$
$$+h_1\log((x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2)-2k_1\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right)+\ldots$$
$$\ldots+h_{2m-1}\log((x-\varrho_{2m-1})^2+\sigma_{2m-1}^2)-2k_{2m-1}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_{2m-1}}{\sigma_{2m-1}}\right).$$

Hiernach ist das unbestimmte Integral eines echten rationalen Bruches, dessen Nenner in Bezug auf die Integrationsvariable x nur ungleiche Factoren ersten Grades enthält, eine Summe, deren Bestandtheile Producte aus Constanten in Logarithmen und in umgekehrte trigonometrische Functionen sind.

Für den jetzt zu erörternden Fall, wo $f(x)$ mehrfache Factoren enthält und in (15) dargestellt ist, wollen wir wieder annehmen, dass unter den von einander verschiedenen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ die reellen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_l$ und die Paare von conjugirten wie in (40) bezeichnet werden. Auf der rechten Seite von (16) kann nun der Bruch $\dfrac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}$ mit Hülfe von (28) die folgende Gestalt bekommen, die in I, § 93 unter (18*) angegeben ist,

$$(51)\quad \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}=\frac{\varphi_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}+\frac{\varphi'_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}}+\frac{1}{2!}\frac{\varphi''_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-2}}+\ldots+\frac{1}{(\mathfrak{a}_1-1)!}\frac{\varphi_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)}{x-\xi_1}.$$

Die entsprechende Gestalt der anderen Brüche wird durch Fortrücken der Zeiger erhalten; die Substitution der Resultate in (16) bringt die am Schlusse von I, § 93 erwähnte Partialbruchzerlegung hervor. Auch darf vermöge (29) statt (51) die Gleichung

$$(52)\quad \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}=\frac{s_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}+\frac{s'_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}}+\ldots+\frac{1}{(\mathfrak{a}_1-1)!}\frac{s_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)}{x-\xi_1}$$

gesetzt werden. Bei der als reell angenommenen Wurzel ξ_1 lässt sich die unbestimmte Integration der einzelnen Brüche sogleich ausführen. Wenn ein Exponent $\mathfrak{a}$ die Einheit übertrifft, so kommt

$$(53)\quad \int\frac{dx}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}}}=\frac{1}{-\mathfrak{a}+1}\frac{1}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}-1}},$$

dagegen bringt der letzte Bruch nach (38) einen Logarithmus naturalis hervor. Es ist daher

$$(54)\quad \int\frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}dx=\frac{s_1(\xi_1)}{(-\mathfrak{a}_1+1)}\frac{1}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}}+\frac{s'_1(\xi_1)}{(-\mathfrak{a}_1+2)}\frac{1}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{s_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)}{(\mathfrak{a}_1-1)!}\log(x-\xi_1).$$

Für zwei conjugirte complexe Wurzeln ξ_{l+1} und ξ_{l+2} muss nach dem Obigen $\mathfrak{a}_{l+1}=\mathfrak{a}_{l+2}$ und $s_{l+1}(x)$ mit $s_{l+2}(x)$ conjugirt sein; deshalb sind in den mit (52) correspondirenden Gleichungen

$$(55)\quad \frac{\varphi_{l+1}(x)}{(x-\xi_{l+1})^{\mathfrak{a}_{l+1}}}$$
$$=\frac{s_{l+1}(\xi_{l+1})}{(x-\xi_{l+1})^{\mathfrak{a}_{l+1}}}+\frac{s'_{l+1}(\xi_{l+1})}{(x-\xi_{l+1})^{\mathfrak{a}_{l+1}-1}}+\ldots+\frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)!}\frac{s_{l+1}^{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)}(\xi_{l+1})}{x-\xi_{l+1}},$$

$$(56)\quad \frac{\varphi_{l+2}(x)}{(x-\xi_{l+2})^{\mathfrak{a}_{l+1}}}$$
$$=\frac{s_{l+2}(\xi_{l+2})}{(x-\xi_{l+2})^{\mathfrak{a}_{l+1}}}+\frac{s'_{l+2}(\xi_{l+2})}{(x-\xi_{l+2})^{\mathfrak{a}_{l+1}-1}}+\ldots+\frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)!}\frac{s_{l+2}^{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)}(\xi_{l+2})}{x-\xi_{l+2}}$$

die einzelnen Theile der Ausdrücke rechts respective conjugirt. In Bezug auf diejenigen Brüche, deren Nenner eine höhere als die erste Potenz ist, dürfen wir das Princip anwenden, dass die Differentiation eines Ausdrucks, welcher die reelle Variable x und complexe Constanten enthält, nach denselben Regeln erfolgt, die für rationale Functionen mit reellen Constanten gelten; wir können mittelst der hierauf beruhenden Gleichung (26) des § 33 die Brüche angeben, durch deren Differentiation die vorgelegten entstehen. Um die Brüche zu behandeln, deren Nenner nach x vom ersten Grade sind, dient das vorhin auseinandergesetzte Verfahren; es möge wieder bei den betreffenden Constanten die Trennung des reellen und imaginären Theiles folgendermassen ausgedrückt werden

$$(57)\quad \frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)!}s_{l+1}^{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)}(\xi_{l+1})=h_1+ik_1,\ldots$$
$$\frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+2m-1}-1)!}s_{l+2m-1}^{(\mathfrak{a}_{l+2m-1}-1)}(\xi_{l+2m-1})=h_{2m-1}+ik_{2m-1},$$
$$\frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)!}s_{l+2}^{(\mathfrak{a}_{l+1}-1)}(\xi_{l+2})=h_1-ik_1,\ldots$$
$$\frac{1}{(\mathfrak{a}_{l+2m-1}-1)!}s_{l+2m}^{(\mathfrak{a}_{l+2m-1}-1)}(\xi_{l+2m})=h_{2m-1}-ik_{2m-1}.$$

Setzt man ferner, wie in (40), $\xi_{l+1}=\varrho_1+i\sigma_1$, $\xi_{l+2}=\varrho_1-i\sigma_1,\ldots$ so ergiebt sich für die unbestimmte Integration des Aggregats der linken Seiten von (55) und (56) der Ausdruck

$$(58)\quad \int\left(\frac{\varphi_{l+1}(x)}{(x-\varrho_1-i\sigma_1)^{\mathfrak{a}_{l+1}}}+\frac{\varphi_{l+2}(x)}{(x-\varrho_1+i\sigma\,)^{\mathfrak{a}_{l+1}}}\right)dx$$

$$=\frac{s_{l+1}(\varrho_1+i\sigma_1)}{(-\mathfrak{a}_{l+1}+1)}\frac{1}{(x-\varrho_1-i\sigma_1)^{\mathfrak{a}_{l+1}-1}}+\frac{s'_{l+1}(\varrho_1+i\sigma_1)}{(-\mathfrak{a}_{l+1}+2)}\frac{1}{(x-\varrho_1-i\sigma_1)^{\mathfrak{a}_{l+1}-2}}+\ldots$$

$$+\frac{s_{l+2}(\varrho_1-i\sigma_1)}{(-\mathfrak{a}_{l+1}+1)}\frac{1}{(x-\varrho_1+i\sigma_1)^{\mathfrak{a}_{l+1}-1}}+\frac{s'_{l+2}(\varrho_1-i\sigma_1)}{(-\mathfrak{a}_{l+1}+2)}\frac{1}{(x-\varrho_1+i\sigma_1)^{\mathfrak{a}_{l+1}-2}}+\ldots$$

$$+h_1\log\left((x-\varrho_1)^2+\sigma_1^2\right)-2k_1\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\varrho_1}{\sigma_1}\right).$$

Hier haben die gleichstelligen Brüche der ersten und zweiten Zeile zu einander conjugirte Werthe, weshalb die Summe eines jeden Paares reell ist. *Die Gleichung* (54) *bildet das Schema, nach welchem auf der rechten Seite von* (16) *die Partialbrüche von reellen Nennern, die Gleichung* (58) *dasjenige, nach welchem die Aggregate der Partialbrüche von conjugirten complexen Nennern zu integriren sind, und die Summe der betreffenden Resultate ist das gesuchte Integral des rationalen echten Bruches* $\frac{r(x)}{f(x)}$.

Bei unserer Definition eines zwischen gewissen Grenzen auszudehnenden Integrals wurde vorausgesetzt, dass die zu integrirende Function in dem betreffenden Intervall eindeutig, endlich und stetig sei. Diese Bedingungen werden von einer rationalen ganzen Function der Variable x stets erfüllt, weshalb die Integration einer solchen Function überall ausführbar ist. Eine rationale gebrochene Function kann dagegen für einzelne Werthe der Variable x die Bedingung der Endlichkeit und Stetigkeit verletzen, wie in § 8 entwickelt worden ist. Nach den dortigen Erörterungen treten diese Ausnahmen bei dem Quotienten $\frac{e(x)}{f(x)}$ von zwei ganzen Functionen ohne gemeinsamen Theiler $e(x)$ und $f(x)$ ausschliesslich für diejenigen reellen Werthe der Variable x ein, für welche der Nenner $f(x)$ verschwindet. In dem gegenwärtigen § ist bisher nicht vorausgesetzt worden, dass der Zähler und Nenner des zu integrirenden Bruches $\frac{e(x)}{f(x)}$ keinen gemeinsamen Theiler haben; sowohl die Bestimmung der ganzen Function $q(x)$ in (6) wie die Partialbruchzerlegung in (16) können auch dann erfolgen, wenn $e(x)$ und $f(x)$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, derselbe muss jedoch selbstverständlich aus den Resultaten herausfallen. Sobald nun angenommen wird, wie von jetzt ab geschieht, dass $e(x)$ und $f(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so sind die Werthe, für welche $\frac{e(x)}{f(x)}$ aufhört, endlich und stetig zu sein, die reellen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_l$ der Gleichung $f(\xi)=0$; demnach ist das Intervall der auszuführenden Integration so zu wählen, dass die Variable x durch keinen der genannten Werthe hindurchgeht. Von dieser Voraussetzung werden nur diejenigen Theile des zu bildenden Integrals betroffen, welche aus dem Schema (54) herrühren. Hier darf die Integrationsvariable x nur einen solchen Spielraum bekommen, dass die Differenz $x-\xi_1$ ihr Vorzeichen nicht ändert. Insofern die Function Logarithmus allein für positive Werthe des Arguments definirt ist, bezieht sich die obige Gleichung allein auf die Annahme, dass die Differenz $x-\xi_1$ immer positiv sei. Für den Fall, dass die Differenz $x-\xi_1$ innerhalb des ganzen Integrationsintervalls stets negativ ist, hat man aus der Gleichung

$$\frac{d \log(-x+\xi_1)}{dx} = \frac{-1}{-x+\xi_1}$$

das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{x-\xi_1} = \log(-x+\xi_1) + \text{const.}$$

abzuleiten, und in jener Gleichung den Ausdruck $\log(x-\xi_1)$ durch den Ausdruck $\log(-x+\xi_1)$ zu ersetzen.

Das in § 8 angeführte Beispiel eines rationalen Bruches liefert, da für den Nenner die Zerlegung

$$x^5-x^4-3x^3+23x^2+16x-36=(x+2)^2(x-1)(x-2-i\sqrt{5})(x-2+i\sqrt{5})$$

besteht, die Partialbruchzerlegung

$$\frac{10x^4-22x^3-95x^2+60x+101}{x^5-x^4-3x^3+23x^2+16x-36} = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-1}$$
$$+ \frac{3+2i\sqrt{5}}{x-2-i\sqrt{5}} + \frac{3-2i\sqrt{5}}{x-2+i\sqrt{5}}.$$

Mithin hat das unbestimmte Integral des betreffenden Bruches den Ausdruck

$$\frac{-1}{x+2}+3\log(x+2)\quad+\log(x-1)\quad+3\log((x-2)^2+5)-4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\text{oder} -\frac{1}{x+2}+3\log(x+2)\quad+\log(-x+1)+3\log((x-2)^2+5)-4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\text{oder} -\frac{1}{x+2}+3\log(-x-2)+\log(-x+1)+3\log((x-2)^2+5)-4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right),$$

je nachdem das Intervall der Integration zwischen den Grenzen $+1$ und $+\infty$, oder -2 und $+1$, oder $-\infty$ und -2 liegt.

§ 68. Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function einer Variable in die Theile, welche integrirt den algebraischen und transcendenten Theil des Gesammtintegrals hervorbringen.

Man kann die Theile einer rationalen gebrochenen Function, aus denen die verschiedenen Bestandtheile des Gesammtintegrals hervorgehen, mit Hülfe der Gleichungen (11), (16), (52) des vorigen § in der folgenden Weise zusammenstellen

$$(1)\qquad \frac{e(x)}{f(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{f(x)},$$

$$(2)\qquad \frac{r(x)}{f(x)}=\frac{s_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1}}+\frac{s'_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{1}{(\alpha_1-1)!}\,\frac{s_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)}{x-\xi_1}$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{s_\lambda(\xi_\lambda)}{(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}}+\frac{s'_\lambda(\xi_\lambda)}{(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda-1}}+\ldots+\frac{1}{(\alpha_\lambda-1)!}\,\frac{s_\lambda^{(\alpha_\lambda-1)}(\xi_\lambda)}{x-\xi_\lambda}$$

durch die Integration entsteht aus der ganzen Function des $(s-n)$ten Grades $q(x)$ eine ganze Function des $(s-n+1)$ten Grades, aus der Gesammtheit der Brüche, deren Nenner in Bezug auf die Integrationsvariable x von höherem als dem ersten Grade sind, eine Summe von rationalen echten Brüchen, die gleich einem rationalen echten Bruche ist, aus der Gesammtheit der Brüche, deren Nenner in Bezug auf x vom ersten Grade sind, eine Summe von Ausdrücken, welche Producte von Constanten in Logarithmen und umgekehrte trigonometrische Functionen sind. Wenn die Brüche der rechten Seite von (2), deren Nenner $x-\xi_1, x-\xi_2, \ldots x-\xi_\lambda$, und deren Zähler Constanten sind, zusammenaddirt werden, so ergiebt sich ein rationaler Bruch, dessen Nenner gleich dem mit der Constante a_0 multiplicirten Product der einzelnen Nenner

$$(3) \qquad \beta(x) = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\lambda)$$

und dessen Zähler eine ganze Function eines niedrigeren, also höchstens des $(\lambda-1)$ten Grades ist, die $\alpha(x)$ heissen möge. Das Aggregat der übrigen auf der rechten Seite von (2) vorkommenden Brüche ist gleich dem vollständigen nach x genommenen Differentialquotienten eines Aggregats von Brüchen, deren Zähler Constanten und deren Nenner respective die um eine Einheit niedrigeren Potenzen

$$(x-\xi_1), \ldots (x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}, (x-\xi_2), \ldots (x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2-1}, \ldots (x-\xi_\lambda), \ldots (x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda-1}$$

sind. Die Addition dieser Brüche liefert einen Bruch, dessen Nenner das Product

$$(4) \qquad \delta(x) = (x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}(x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2-1}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda-1}$$

und dessen Zähler eine Function von niedrigerem, mithin höchstens dem $(n-\lambda-1)$ten Grade ist, die $\gamma(x)$ genannt werden möge. Demnach existirt die Zerlegung der Function $\frac{e(x)}{f(x)}$,

$$(5) \qquad \frac{e(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{d\left(\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\right)}{dx} + \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

bei welcher der erste, zweite und dritte Bestandtheil integrirt respective die ganze Function, den rationalen echten Bruch und das Aggregat von transcendenten Ausdrücken erzeugen, deren Summe gleich dem Integral der Function $\frac{e(x)}{f(x)}$ ist.

In I, § 94 wurde beiläufig bemerkt, dass das obige Product $\delta(x)$ ein gemeinsamer Theiler der Function $f(x)$ und ihrer ersten Ableitung $f'(x)$ ist. Doch lässt sich leicht zeigen, dass $\delta(x)$ der gröste gemeinsame Theiler der beiden Functionen ist. Aus der Darstellung (15) des vorigen § erhält man die Gleichungen

$$(6) \quad f(x) = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\lambda)\,\delta(x)$$

$$f'(x) = a_0\big(\mathfrak{a}_1(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\lambda) + \ldots + \mathfrak{a}_\lambda(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{\lambda-1})\big)\,\delta(x).$$

Wäre $\delta(x)$ nicht der gröste Theiler von $f(x)$ und $f'(x)$, so müssten die ganzen Functionen $\frac{f(x)}{\delta(x)}$ und $\frac{f'(x)}{\delta(x)}$ noch einen gemeinsamen Theiler haben, und da $\frac{f(x)}{\delta(x)}$ in lauter Factoren des ersten Grades zerlegt ist, so könnte ein solcher Theiler nur einer der Factoren des ersten Grades oder ein Product solcher Factoren sein. Sobald aber dies der Fall wäre und in dem Theiler etwa der Factor $x-\xi_1$ vorkäme, so müsste $\frac{f'(x)}{\delta(x)}$ für den Werth $x=\xi_1$ verschwinden. Allein $\frac{f'(x)}{\delta(x)}$ wird bei dieser Substitution gleich dem Ausdruck $a_0 \mathfrak{a}_1 (\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)\ldots(\xi_1-\xi_\lambda)$, der unmöglich verschwinden kann, weil nach den bestehenden Voraussetzungen keiner seiner Factoren gleich Null ist. Hieraus folgt, dass $\delta(x)$ wirklich der gröste gemeinsame Theiler der Function $f(x)$ und ihres Differentialquotienten $f'(x)$ ist.

Mit Hülfe des Verfahrens, welches in I, § 68 auseinandergesetzt ist, kann der gröste gemeinsame Theiler von zwei ganzen Functionen einer Variable ermittelt werden, ohne dass die Zerlegung derselben in Factoren ersten Grades vorausgesetzt wird. Wird daher dieses Verfahren auf die vorliegende Function $f(x)$ und ihren ersten Differentialquotienten $f'(x)$ angewendet, so erhält man unmittelbar deren grösten gemeinsamen Theiler. Da ferner der gröste gemeinsame Theiler von zwei ganzen Functionen durch die Multiplication mit einer beliebigen Constante nicht wesentlich geändert wird, so darf man dem grösten gemeinsamen Theiler von $f(x)$ und $f'(x)$ die Bestimmung auferlegen, dass die höchste in demselben vorkommende Potenz von x die Einheit zum Coefficienten habe; dann muss der betreffende Theiler mit der in (4) definirten Function $\delta(x)$ identisch sein. Nachdem so die Function $\delta(x)$ vollständig bestimmt ist, ergeben sich durch Division die von einem gemeinsamen Theiler freien ganzen Functionen $\frac{f(x)}{\delta(x)}$ und $\frac{f'(x)}{\delta(x)}$, deren erste mit der in (3) eingeführten Function $\beta(x)$ zusammenfällt.

Die Functionen $\delta(x)$ und $\beta(x)$ bilden die Nenner der auf der rechten Seite von (5) befindlichen echten Brüche $\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$ und

$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Wir werden jetzt die merkwürdige Thatsache begründen, dass, so wie $\delta(x)$ und $\beta(x)$ ohne vorhergehende Zerlegung von $f(x)$ in Factoren ersten Grades bestimmbar sind, auch die Zähler $\gamma(x)$ und $\alpha(x)$ ohne jene Zerlegung durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden werden können *). Dass die Gleichung (5) nicht erfüllt werden kann, indem statt der Functionen $\gamma(x)$ und $\alpha(x)$ beziehungsweise zwei andere Functionen $\Gamma(x)$ und $A(x)$ gesetzt werden, deren erste niedrigeren Grades als $\delta(x)$ und deren zweite niedrigeren Grades als $\beta(x)$ ist, lässt sich folgendermassen erkennen. Gesetzt, man hätte zwei solche Functionen, für die

$$(5_a)\qquad \frac{e(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{d\left(\frac{\Gamma(x)}{\delta(x)}\right)}{d x} + \frac{A(x)}{\beta(x)}$$

wäre, so entstände durch Subtraction die Gleichung

$$(5_b)\qquad 0 = \frac{d\left(\frac{\Gamma(x)-\gamma(x)}{\delta x}\right)}{d(x)} + \frac{A(x)-\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Dann wäre der Bruch $\frac{A(x)-\alpha(x)}{\beta(x)}$ gleich einem Aggregat von Brüchen, deren Zähler Constanten und deren Nenner die einzelnen Factoren $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ sind, dagegen der nach x genommene vollständige Differentialquotient des Bruches $\frac{\Gamma(x)-\gamma(x)}{\delta(x)}$ gleich einem Aggregat von Brüchen, deren Zähler Constanten und deren Nenner Potenzen der Factoren $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ von einem jedenfalls die Einheit übertreffenden Grade sind. Weil nun unter den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ nicht zwei einander gleich sind, und daher irgend welche ganze Potenzen von je zweien der Ausdrücke $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ nie einen gemeinsamen Theiler haben, so würde die Gleichung (5_b) dem im vorigen § erwähnten Satze widersprechen, dass ein rationaler echter Bruch nur auf eine einzige Weise in echte Partialbrüche mit gegebe-

*) *Vgl. Hermite*, cours d'analyse, calcul intégral, *intégration des fonctions rationelles*, wo die Erscheinung in etwas anderer Gestalt zuerst nachgewiesen ist.

nen Nennern zerlegt werden kann, von denen kein Paar einen gemeinsamen Theiler hat. Demnach muss $\Gamma(x) - \gamma(x) = 0$, $A(x) - \alpha(x) = 0$ sein, wodurch die aufgestellte Behauptung gerechtfertigt ist.

Nimmt man nun für $\gamma(x)$ und $\alpha(x)$ die Gestalt

(7) $$\gamma(x) = \gamma_0 x^{n-\lambda-1} + \gamma_1 x^{n-\lambda-2} + \ldots + \gamma_{n-\lambda-1},$$

(8) $$\alpha(x) = \alpha_0 x^{\lambda-1} + \alpha_1 x^{\lambda-2} + \ldots + \alpha_{\lambda-1},$$

so lassen sich die $n-\lambda$ Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-\lambda-1}$ und die λ Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{\lambda-1}$ nur auf eine einzige Weise so bestimmen, dass die aus (1) und (5) folgende Gleichung

(9) $$\frac{r(x)}{f(x)} = \frac{d\left(\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)}\right)}{dx} + \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

befriedigt wird. Dass die rechte Seite, mit der ganzen Function $f(x)$ multiplicirt, in der That gleich einer ganzen Function werden muss, zeigt sich, sobald für die Function $\delta(x)$ und deren nach x genommenen Differentialquotienten $\delta'(x)$ abermals der gröste gemeinsame Theiler $\zeta(x)$ aufgesucht wird. Es sei

(10) $$\delta(x) = \varepsilon(x)\ \zeta(x),$$
$$\delta'(x) = \varepsilon_1(x)\,\zeta(x),$$

wo die ganzen Functionen $\varepsilon(x)$ und $\varepsilon_1(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Hier übernimmt $\varepsilon(x)$ bei $\delta(x)$ dieselbe Rolle, welche $\beta(x)$ in Bezug auf $f(x)$ spielt. Da nun $\beta(x)$ gleich dem Product der unter einander verschiedenen Ausdrücke ersten Grades ist, welche in der in (15) des vorigen § gegebenen Zerlegung von $f(x)$ enthalten sind, so muss $\varepsilon(x)$ gleich dem Product derjenigen untereinander verschiedenen Ausdrücke ersten Grades sein, welche in der in (4) aufgestellten Zerlegung der Function $\delta(x)$ vorkommen. Weil ferner $\delta(x)$ nur solche Ausdrücke ersten Grades enthält, die in $\beta(x)$ vorhanden sind, so enthält auch $\varepsilon(x)$ nur solche Ausdrücke ersten Grades, die in $\beta(x)$ vorkommen, und da jeder einzelne Ausdruck sowohl in $\beta(x)$ wie in $\varepsilon(x)$ nur ein einziges Mal auftritt, so muss der Quotient $\dfrac{\beta(x)}{\varepsilon(x)}$ gleich einer ganzen Function von x sein.

Durch die Ausführung der Differentiation und Berücksichtigung der Gleichung $f(x) = \beta(x)\,\delta(x)$ wird aus (9) die Gleichung

$$(11)\qquad \frac{r(x)}{\beta(x)\,\delta(x)} = \frac{\gamma'(x)\,\delta(x) - \gamma(x)\,\delta'(x)}{\delta(x)\,\delta(x)} + \frac{\alpha(x)}{\beta(x)};$$

mithin entsteht, indem mit dem Product $\beta(x)\,\delta(x)$ multiplicirt und $\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}$ nach (10) durch $\frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon(x)}$ ersetzt wird, die Gleichung

$$(12)\qquad r(x) = \gamma'(x)\,\beta(x) - \gamma(x)\,\frac{\beta(x)}{\varepsilon(x)}\,\varepsilon_1(x) + \alpha(x)\,\delta(x),$$

in welcher $\frac{\beta(x)}{\varepsilon(x)}$, wie oben bemerkt, eine ganze Function von x bezeichnet. Man hat nun die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich zu setzen, und erhält, weil die Function $r(x)$ vom $(n-1)$ten Grade ist, n Gleichungen des ersten Grades, mittelst deren die in den Functionen $\gamma(x)$ und $\alpha(x)$ enthaltenen n Coefficienten eindeutig bestimmt werden können. Damit ist die in der Gleichung (5) vorgeschriebene Zerlegung des rationalen Bruches $\frac{e(x)}{f(x)}$, unabhängig von jeder Zerlegung der Function $f(x)$ in Factoren, ausgeführt, und gleichzeitig der algebraische Theil des Integrals $\int \frac{e(x)}{f(x)}\,dx$ angegeben.

In dem Beispiel des vorigen § findet sich

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 - x^4 - 3x^3 + 23x^2 + 16x - 36\\
f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 46x + 16\\
\delta(x) &= x + 2\\
\delta'(x) &= 1\\
\varepsilon(x) &= x + 2\\
\beta(x) &= x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 17x - 18\\
r(x) &= 10x^4 - 22x^3 - 95x^2 + 60x + 101\\
\gamma(x) &= -1\\
\alpha(x) &= 10x^3 - 43x^2 - 4x + 55,
\end{aligned}$$

so dass die obige Gleichung (5) zu der folgenden wird

$$\frac{10x^4 - 22x^3 - 95x^2 + 60x + 101}{x^5 - x^4 - 3x^3 + 23x^2 + 16x - 36} = \frac{d\left(\frac{-1}{x+2}\right)}{dx} + \frac{10x^3 - 43x^2 - 4x + 55}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 17x - 18}.$$

Bei der Zerlegung in Factoren hatte $\beta(x)$ den Ausdruck

$$\beta(x) = (x+2)\,(x-1)\,(x-2-i\sqrt{5})\,(x-2+i\sqrt{5}).$$

§ 69. Integrale von Ausdrücken, die in Bezug auf die Integrationsvariable und eine Wurzelgrösse rational sind.

Eine Function $K(x, \omega)$, die in Bezug auf die Variable x und eine von x abhängende Grösse ω rational ist, kann als ein Bruch dargestellt werden, dessen Zähler und Nenner gleich Summen von Producten aus ganzen positiven Potenzen von ω und aus rationalen ganzen Functionen von x sind. Wenn nun ω die Wurzel einer algebraischen Gleichung des $n$ten Grades bedeutet, deren nach x rationale Coefficienten als Quotienten von ganzen Functionen desselben Nenners dargestellt seien, so kann man mit Hülfe der Gleichung

$$(1) \qquad \omega^n + \frac{A_1}{A_0}\omega^{n-1} + \frac{A_2}{A_0}\omega^{n-2} + \ldots + \frac{A_n}{A_0} = 0,$$

die Potenz ω^n und alle höheren ganzen Potenzen von ω durch Ausdrücke ersetzen, welche nur die $(n-1)$te und die niedrigeren Potenzen von ω, mit rationalen Functionen von x multiplicirt, enthalten. Daher lässt sich statt der gegebenen Function $K(x, \omega)$ ein Bruch substituiren, dessen Zähler und Nenner in Bezug auf ω höchstens vom $(n-1)$ten Grade sind, und die wieder ganze Functionen von x zu Coefficienten haben. Hieraus folgt für $K(x, \omega)$, sobald die Zahl $n = 2$ und deshalb die Gleichung (1) eine quadratische ist, der Ausdruck

$$(2) \qquad K(x, \omega) = \frac{K_0(x)\omega + K_1(x)}{L_0(x)\omega + L_1(x)},$$

in welchem die Coefficienten ganze Functionen von x sind. Wir wollen ferner annehmen, dass (1) eine reine quadratische Gleichung sei

$$(3) \qquad \omega^2 - R(x) = 0,$$

wo $R(x)$ eine ganze Function von x bedeutet; dann ist ω gleich der Quadratwurzelgrösse

$$(4) \qquad \omega = \sqrt{R(x)}.$$

In Folge dessen verwandelt sich die rechte Seite von (2) durch Multiplication mit der Verbindung $L_0(x)\omega - L_1(x)$ und durch Benutzung von (3) in den folgenden Ausdruck

$$(5) \quad K(x, \omega)$$
$$= \frac{K_0(x)L_0(x)R(x) - K_1(x)L_1(x)}{(L_0(x))^2 R(x) - (L_1(x))^2} - \frac{K_0(x)L_1(x) - K_1(x)L_0(x)R(x)}{(L_0(x))^2 R(x) - (L_1(x))^2}\frac{R(x)}{\omega}.$$

Somit wird das nach x genommene Integral der Function $K(x, \omega)$ gleich der Summe der Integrale einer rationalen Function von x, und einer Function, die durch Division einer rationalen Function von x mit der Quadratwurzelgrösse ω gebildet ist. Weil nun die Integrale der rationalen Functionen im vorigen § vollständig behandelt sind, so bleibt nur noch der zweite Bestandtheil zu untersuchen; derselbe erhält, sobald die vorkommende beliebige rationale Function von x mit $F(x)$ bezeichnet wird, die Gestalt

$$(6) \qquad \int F(x) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Wir werden das vorliegende Integral zunächst unter der einfachen Voraussetzung betrachten, dass die ganze Function $R(x)$ vom ersten oder zweiten Grade ist; in diesen beiden Fällen lässt sich dasselbe durch Einführung einer neuen Variable in das Integral einer rationalen Function verwandeln, mithin nach dem vorigen § mit Hülfe von Logarithmen und umgekehrten trigonometrischen Functionen darstellen.

In § 25 ist unter (IX) die Aufgabe gelöst worden, ein Integral durch Einführung einer neuen Variable zu transformiren; daselbst wurde das Integral $\int f(x)\, dx$, indem man x als eine Function einer neuen Variable t auffasste, vermöge der Gleichung transformirt

$$(7) \qquad \int f(x)\, dx = \int f(x) \frac{dx}{dt}\, dt,$$

wo auf der rechten Seite für x und $\frac{dx}{dt}$ ihre in t dargestellten Werthe zu substituiren sind. Es sei nun die in dem Integral (6) vorkommende Function $R(x)$ vom ersten Grade

$$(8) \qquad R(x) = ax + b.$$

Da die Quadratwurzel dieses Ausdrucks zu bilden ist, so muss derselbe in dem ganzen Integrationsintervall positiv bleiben. Man kann ihn daher gleich dem Quadrat einer neuen Variable t setzen

$$(9) \qquad ax + b = t^2,$$

und erhält

$$(10) \qquad x = \frac{t^2 - b}{a}, \quad \sqrt{ax+b} = t,$$

ferner durch Differentiation

(11) $$\frac{dx}{dt}dt = \frac{2t}{a}\,dt.$$

Demzufolge liefert die Anwendung der Transformationsgleichung (7) auf (6) das Resultat

(12) $$\int F(x)\frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \int F\left(\frac{t^2-b}{a}\right)\frac{2\,dt}{a};$$

da aber eine rationale Function einer Variable x, wenn statt x eine rationale Function einer neuen Variable t substituirt wird, in eine rationale Function von t übergeht, so befindet sich auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, wie behauptet worden, das nach t genommene Integral einer rationalen Function von t. Nachdem die Integration vermittelst der im vorigen § mitgetheilten Vorschriften ausgeführt ist, kann man statt der Variable t wieder ihren Ausdruck $t = \sqrt{ax+b}$ setzen und erhält dadurch den in x dargestellten Ausdruck des Integrals.

In dem zweiten Falle, wo $R(x)$ gleich einer Function des zweiten Grades von x ist, habe man

(13) $$R(x) = ax^2 + 2bx + c.$$

Dabei ist zu unterscheiden, ob der Coefficient a, welcher hier nicht gleich Null sein darf, positiv oder negativ ist. Es sei erstens a positiv, mithin $R(x)$ für das ganze Intervall der Integration mit a von gleichem Zeichen. Setzt man nun $R(x)$ gleich dem mit a multiplicirten Quadrat einer Summe von x und einer neuen Variable t, so werden x und $\sqrt{R(x)}$ gleich rationalen Functionen von t. Die Gleichung

(14) $$ax^2 + 2bx + c = a(x+t)^2$$

liefert, da ax^2 auf beiden Seiten fortfällt, die Bestimmung

(15) $$x = \frac{-at^2+c}{2(at-b)},$$

aus welcher

(16) $$x + t = \frac{at^2-2bt+c}{2(at-b)}$$

entsteht. Weil aber vermöge (14) die Quadratwurzelgrösse $\sqrt{R(x)}$ gleich $\sqrt{a}\,(x+t)$ ist, so kommt

(17) $$\sqrt{R(x)} = \sqrt{a}\,\frac{at^2-2bt+c}{2(at-b)}.$$

Aus (15) ergiebt sich durch Differentiation

$$(18) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{a(at^2 - 2bt + c)}{2(at - b)^2};$$

mithin geht das Integral (6) in das folgende Integral einer rationalen Function von t über

$$(19) \quad \int F(x) \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = -\int F\left(\frac{-at^2 + c}{2(at - b)}\right) \frac{\sqrt{a}\,dt}{at - b}.$$

Für die Variable t erhält man aus (14) durch Ausziehung einer Quadratwurzel die Darstellung

$$(20) \qquad t = -x + \frac{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{\sqrt{a}}.$$

Sobald der Coefficient a negativ ist, kann die Function $R(x)$ nicht zu denjenigen gehören, die niemals ihr Vorzeichen ändern und für keinen reellen Werth von x verschwinden; denn sonst würde sie stets das negative Vorzeichen haben und keinen reellen Werth der Quadratwurzelgrösse $\sqrt{R(x)}$ liefern. Es muss daher $R(x)$ für zwei von einander verschiedene reelle Werthe ξ_1 und ξ_2 verschwinden, und zerfällt mithin wie folgt in zwei reelle Factoren des ersten Grades

$$(21) \qquad ax^2 + 2bx + c = a(x - \xi_1)(x - \xi_2).$$

Zugleich darf die Variable x nur ein Integrationsintervall durchlaufen, in dem die Ausdrücke $x - \xi_1$ und $x - \xi_2$ verschiedene Vorzeichen haben. Unter diesen Umständen ist es erlaubt, den negativ genommenen Quotienten der beiden Ausdrücke gleich dem Quadrat einer neuen Variable zu setzen,

$$(22) \qquad \frac{-x + \xi_2}{x - \xi_1} = u^2.$$

In Folge dieser Annahme wird

$$(23) \qquad x = \frac{\xi_2 + \xi_1 u^2}{1 + u^2}, \quad u = \sqrt{\frac{-x + \xi_2}{x - \xi_1}},$$

mithin

$$(24) \qquad x - \xi_1 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + u^2},$$

ferner

$$(25) \quad \sqrt{R(x)} = \sqrt{-a}\sqrt{\frac{-x + \xi_2}{x - \xi_1}}(x - \xi_1) = \sqrt{-a}\, u \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + u^2},$$

$$(26) \qquad \frac{dx}{du} = -\frac{2(\xi_2 - \xi_1)u}{(1 + u^2)^2}.$$

Hieraus entsteht die Transformation des Integrals (6) in das Integral einer rationalen Function von u

$$(27)\quad \int F(x)\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\int F\left(\frac{\xi_2+\xi_1 u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{\sqrt{-a}}\frac{du}{1+u^2}.$$

Die zu leistenden Integrationen sollen für die Annahme, dass $F(x)$ gleich der Einheit ist, wirklich ausgeführt werden. Man erhält in (19) einen Logarithmus naturalis, in (27) eine umgekehrte trigonometrische Function

$$(28)\quad -\int\frac{\sqrt{a}\,dt}{at-b} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\log(at-b),$$

$$(29)\quad -\int\frac{2}{\sqrt{-a}}\frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\,2\operatorname{arc\,tg} u,$$

daher entstehen durch Anwendung von (20) und (23) die Resultate

$$(30)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(-ax-b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}\right),$$

$$(31)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-x+\xi_2}{x-\xi_1}}.$$

Bei Gelegenheit der letzten Gleichung machen wir darauf aufmerksam, dass die umgekehrten trigonometrischen Functionen die Eigenschaft haben, durch einander ersetzt werden zu können. Beispielsweise ergiebt sich aus der Gleichung $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{u} = \vartheta$ oder $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{u}$ die Gleichung $\cos 2\vartheta = \frac{1-u}{1+u}$, vermöge deren $2\vartheta = \arccos\frac{1-u}{1+u}$ ist. Man hat deshalb

$$2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-x+\xi_2}{x-\xi_1}} = \arccos\left(\frac{2x-\xi_1-\xi_2}{\xi_2-\xi_1}\right),$$

und darf statt (31) die Gleichung

$$(31^*)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\left(\frac{2x-\xi_1-\xi_2}{\xi_2-\xi_1}\right)$$

gebrauchen.

Mit der Voraussetzung, dass die Function $R(x)$ vom ersten oder zweiten Grade sei, hören die in (6) enthaltenen Integrale auf, welche unbedingt auf Logarithmen und umgekehrte trigonometrische Functionen reducirbar sind. Die Integrale, bei welchen $R(x)$ eine aus lauter ungleichen Factoren ersten Grades bestehende Function vom 3ten oder 4ten Grade ist, werden *elliptische*, diejenigen, bei welchen $R(x)$ eine derartige Function vom $2p+1$ten oder $2p+2$ten Grade ist, ***hyperelliptische Integrale der** $(p-1)$**ten Ordnung*** genannt. Um in Kürze den eigenthümlichen Umstand zu erläutern, dass die Ordnung der erwähnten Integrale für den $2p+1$ten und $2p+2$ten Grad der ganzen Function $R(x)$ als gleich angesehen wird, denken wir uns $R(x)$ als eine Function des $(2p+2)$ten Grades, welche wenigstens einen reellen Factor ersten Grades besitzt; wir werden dann zeigen, wie sich die zugehörigen Integrale (6) in Integrale von entsprechender Gestalt transformiren lassen, die nur eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function des $2p+1$ten Grades enthalten. Insofern $R(x)$ eine ganze Function des $(2p+2)$ten Grades mit reellen Coefficienten ist, treten die complexen Factoren des ersten Grades nur conjugirt auf, so dass das Vorhandensein eines reellen Factors auch noch das Vorhandensein eines zweiten reellen Factors bedingt; der letztere muss ferner von dem ersteren differiren, da alle Factoren des ersten Grades von einander verschieden sein sollen. Man habe nun

$$R(x) = a(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_{2p+2}) \tag{32}$$

und es seien $x-\xi_1$ und $x-\xi_2$ jene beiden reellen Factoren; dann wird das bezeichnete Resultat erreicht, indem man durch die Gleichung

$$\frac{x-\xi_2}{x-\xi_1} = s \tag{33}$$

eine neue Variable s einführt. Für x findet sich die Bestimmung

$$x = \frac{\xi_1 s - \xi_2}{s-1}, \tag{34}$$

aus welcher die Gleichungen

$$x-\xi_1 = \frac{\xi_1-\xi_2}{s-1}, \quad x-\xi_2 = \frac{(\xi_1-\xi_2)s}{s-1}, \tag{35}$$

und

$$x-\xi_\alpha = \frac{(\xi_1-\xi_\alpha)s-(\xi_2-\xi_\alpha)}{s-1} \tag{36}$$

für jeden Werth $\alpha = 3, 4, .. 2p+2$ folgen. Ferner kommt durch Differentiation der ersten unter (35) angegebenen Gleichung

$$\frac{dx}{ds} = \frac{-\xi_1+\xi_2}{(s-1)^2}. \tag{37}$$

Führt man jetzt die rationale ganze Function $\mathfrak{R}(s)$ des $(2p+1)$ten Grades ein

$$(38)\quad \mathfrak{R}(s) = a\,s\,((\xi_1-\xi_3)s-(\xi_2-\xi_3))\ldots((\xi_1-\xi_{2p+2})s-(\xi_2-\xi_{2p+2})),$$

so ergiebt sich

$$(39)\qquad R(x) = \frac{(-\xi_1+\xi_2)^2\,\mathfrak{R}(s)}{(s-1)^{2p+2}},$$

folglich

$$(40)\qquad \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{R(x)}} = \frac{(s-1)^{p-1}}{\sqrt{\mathfrak{R}(s)}}.$$

Mithin wird das Integral (6) durch die Gleichung

$$(41)\qquad \int F(x)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int F\left(\frac{\xi_1 s-\xi_2}{s-1}\right)\frac{(s-1)^{p-1}\,ds}{\sqrt{\mathfrak{R}(s)}}$$

in das Integral einer Function transformirt, welche, wie behauptet worden, gleich dem Product einer rationalen Function von s und der reciproken Quadratwurzel aus einer ganzen Function des $(2p+1)$ten Grades von s ist. Die Substitution (33) verwandelt sich für den Fall, dass $p=0$ und a negativ ist, mit Hülfe der Gleichung $s=-u^2$ in die obige Substitution (22), durch welche das betreffende Integral (6) in das Integral einer rationalen Function verwandelt worden ist.

Für einen die Zwei übertreffenden Werth von n in der Gleichung (1) heben wir nur die Annahme heraus, dass (1) eine reine Gleichung sei, bei welcher das von ω freie Glied eine Function ersten Grades von x ist. Zu der Gleichung

$$(42)\qquad \omega^n-(ax+b)=0$$

gehört alsdann der Werth

$$(43)\qquad \omega = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Aus der Substitution

$$(44)\qquad ax+b=t^n$$

folgen die Ausdrücke von x durch die neue Variable t, und von t durch x

$$(45)\qquad x=\frac{t^n-b}{a},\ \sqrt[n]{ax+b}=t,$$

mithin kommt

$$(46)\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{nt^{n-1}}{a}.$$

Also geht das nach x zu nehmende Integral einer gegebenen rationalen Function $K(x, \omega)$ von den Elementen x und ω wieder in das Integral einer rationalen Function der neuen Integrationsvariable t über,

$$(47)\qquad \int K(x, \omega)\, dx = \int K\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \frac{n t^{n-1}}{a}\, dt;$$

dasselbe kann durch einen in Bezug auf die Grösse t rationalen Ausdruck, durch Logarithmen und umgekehrte trigonometrische Functionen dargestellt werden.

§ 70. Integrale von Ausdrücken, welche Logarithmen oder umgekehrte trigonometrische Functionen enthalten.

In den beiden letzten § hat sich gezeigt, dass die Integrale der algebraischen Functionen, welche in Bezug auf die Integrationsvariable allein oder in Bezug auf diese und eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function des ersten oder zweiten Grades rational sind, vermittelst einer beschränkten Zahl von algebraischen Ausdrücken, Logarithmen und umgekehrten trigonometrischen Functionen dargestellt werden können. In gleicher Weise lässt sich die Integration von Ausdrücken bewerkstelligen, die durch Multiplication eines Logarithmen oder einer umgekehrten trigonometrischen Function der Integrationsvariable mit algebraischen Functionen von einer gewissen Beschaffenheit entstehen. Sei $\varphi(x)$ eine algebraische Function, welche die Eigenschaft hat, gleich dem nach x genommenen Differentialquotienten einer algebraischen Function $g(x)$ zu sein, so entstehen durch das in (9_a) § 25 ausgedrückte Verfahren der theilweisen Integration

$$(1)\qquad \int f(x) \frac{dg(x)}{dx}\, dx = f(x)\, g(x) - \int \frac{df(x)}{dx}\, g(x)\, dx + \text{const.},$$

indem $f(x)$ nach einander gleich $\log x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$ und $\frac{dg(x)}{dx} = \varphi(x)$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$(2)\qquad \int \log x\ \varphi(x)\, dx = \log x\ g(x) - \int \frac{dx}{x}\, g(x),$$

$$(3)\qquad \int \operatorname{arc\,tg} x\ \varphi(x)\, dx = \operatorname{arc\,tg} x\ g(x) - \int \frac{dx}{1+x^2}\, g(x),$$

$$(4)\qquad \int \arcsin x\ \varphi(x)\, dx = \arcsin x\ g(x) - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, g(x).$$

Wenn daher $g(x)$ eine rationale Function von x allein, oder in (2) und (3) eine rationale Function von x und einer Quadratwurzel aus einem beliebigen Ausdruck des zweiten Grades, oder in (4) eine rationale Function von x und der Quadratwurzel $\sqrt{1-x^2}$ ist, so gehören die auf der rechten Seite angedeuteten Integrationen in die vorhin bezeichnete Gattung und können entsprechend behandelt werden. Die durch Integration von $\varphi(x)$ erhaltene Function $g(x)$ wird nothwendig eine ganze Function, sobald $\varphi(x)$ eine ganze Function ist; in diesem Falle ist also die behufs der Integration aufgestellte Bedingung stets erfüllt.

Auch das Integral des Products einer ganzen Function in eine positive ganze Potenz eines Logarithmus erlaubt eine ähnliche Behandlung. Es sei

$$(5) \qquad \varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

so folgt durch theilweises Integriren die Relation

$$(6) \qquad \int (\log x)^p \varphi(x)\, dx = (\log x)^p \left(\frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \ldots + a_n x\right)$$
$$- \int p (\log x)^{p-1} \left(\frac{a_0 x^n}{n+1} + \frac{a_1 x^{n-1}}{n} + \ldots + a_n\right) dx,$$

welche so oft zu wiederholen ist, bis man von der positiven ganzen $p$ten Potenz des Logarithmus zu der Potenz vom Grade Null, das heisst der Einheit gelangt.

§ 71. Integrale von Ausdrücken, die Exponentialfunctionen und trigonometrische Functionen enthalten.

Wenn a und b reelle Constanten bedeuten, so erhält man nach § 12 und 13 für die in Bezug auf x genommenen Differentialquotienten der Exponentialfunction e^{ax} und der trigonometrischen Functionen $\cos bx$ und $\sin bx$ die Bestimmungen

$$(1) \qquad \frac{de^{ax}}{dx} = a e^{ax},$$

$$(2) \qquad \frac{d \cos bx}{dx} = -b \sin bx,$$

$$(3) \qquad \frac{d \sin bx}{dx} = b \cos bx.$$

Hieraus folgen die Ausdrücke der Integrale einer Exponentialfunction e^{ax}, bei der a nicht gleich Null ist, und der trigonometrischen Functionen $\cos bx$ und $\sin bx$, bei denen b nicht gleich Null ist,

$$(4)\qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a},$$

$$(5)\qquad \int \cos bx\,dx = \frac{\sin bx}{b},$$

$$(6)\qquad \int \sin bx\,dx = -\frac{\cos bx}{b}.$$

An die Thatsache, dass die unbestimmte Integration einer Exponentialfunction auf diese selbst, die unbestimmte Integration eines Cosinus auf einen Sinus, die des letzteren auf den ersteren zurückführt, knüpft sich die Möglichkeit, das unbestimmte Integral des Products einer ganzen Function der Integrationsvariable mit einer der drei erwähnten transcendenten Functionen durch eine beschränkte Zahl von Ausdrücken von der Art der zu integrirenden Function darzustellen. Es sei $\varphi(x)$ eine ganze Function, so ergiebt sich durch theilweises Integriren

$$(7)\quad \int e^{ax}\,\varphi(x)\,dx = \int \frac{d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}{dx}\,\varphi(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\,\varphi(x) - \int \frac{e^{ax}}{a}\,\varphi'(x)\,dx,$$

$$(8)\quad \int \cos bx\,\varphi(x)\,dx = -\int \frac{d\left(\frac{\sin bx}{b}\right)}{dx}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\sin bx}{b}\,\varphi(x) - \int \frac{\sin bx}{b}\,\varphi'(x)\,dx,$$

$$(9)\quad \int \sin bx\,\varphi(x)\,dx = -\int \frac{d\left(\frac{\cos bx}{b}\right)}{dx}\,\varphi(x)\,dx = -\frac{\cos bx}{b}\,\varphi(x) + \int \frac{\cos bx}{b}\,\varphi'(x)\,dx.$$

Der mit $\varphi'(x)$ bezeichnete Differentialquotient von $\varphi(x)$ nach x ist eine ganze Function von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als $\varphi(x)$; durch den wiederholten Gebrauch der betreffenden Gleichung sinkt daher der Grad der unter dem Integralzeichen bleibenden ganzen Function bis zur Null herab, und dadurch verwandelt sich das auszuführende Integral in eine Summe von Ausdrücken, die mit der zu integrirenden Function gleichartig sind.

Vermittelst Einführung einer neuen Variable lässt sich bewirken, dass bei einem vorgelegten Integral statt der Exponentialfunction ein Logarithmus, statt einer trigonometrischen Function eine umgekehrte trigonometrische Function eintritt.

Die Annahme

(10) $$e^{ax} = y$$

giebt die Folgerungen

(11) $$x = \frac{1}{a}\log y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{ay},$$

während die Annahme

(12) $$\sin bx = z$$

die Folgerungen

(13) $$x = \frac{1}{b}\arcsin z, \quad \cos bx = \sqrt{1-z^2}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

hervorbringt. Es kann aber die zu integrirende Function so beschaffen sein, dass bei der Substitution (10) der Logarithmus und bei der Substitution (12) die umgekehrte trigonometrische Function fortfällt, und nur algebraische Bestandtheile erscheinen. So hat man bei einer rationalen Function $f(\xi)$ eines Arguments ξ, und einer rationalen Function $g(\xi, \eta)$ von zwei Argumenten ξ und η die Transformationen

(14) $$\int f(e^{ax})\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{ay},$$

(15) $$\int g(\cos bx, \sin bx)\,dx = \int g(\sqrt{1-z^2}, z)\,\frac{dz}{b\sqrt{1-z^2}};$$

hier gehören die auf der rechten Seite auszuführenden Integrale von algebraischen Functionen zu denen, die in § 68 und 69 absolvirt sind.

Auch die Integrale von Ausdrücken, welche durch Multiplication einer Exponentialfunction mit einem Sinus oder einem Cosinus entstehen, können durch Verbindungen derselben Art dargestellt werden. Vermöge (1), (2) und (3) bewerkstelligt man die Differentiationen

(16) $$\frac{d\,(e^{ax}\cos bx)}{dx} = a e^{ax}\cos bx - b e^{ax}\sin bx,$$

$$\frac{d\,(e^{ax}\sin bx)}{dx} = a e^{ax}\sin bx + b e^{ax}\cos bx.$$

Da die Ausdrücke der rechten Seite in Bezug auf die Elemente $e^{ax}\cos bx$ und $e^{ax}\sin bx$ zwei Functionen des ersten Grades sind, bei denen die Determinante der Coefficienten den nicht verschwindenden Werth $a^2 + b^2$ hat, so werden diese Elemente durch Auflösung der betreffenden Gleichungen als Aggregate von vollständigen Differentialquotienten dargestellt,

$$(17)\quad e^{ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}\frac{d(e^{ax}\cos bx)}{dx} + \frac{b}{a^2+b^2}\frac{d(e^{ax}\sin bx)}{dx},$$

$$e^{ax}\sin bx = -\frac{b}{a^2+b^2}\frac{d(e^{ax}\cos bx)}{dx} + \frac{a}{a^2+b^2}\frac{d(e^{ax}\sin bx)}{dx}.$$

Mithin ergiebt sich für die in Rede stehenden Integrale die Bestimmung

$$(18)\quad \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx.$$

Integrale von Producten aus $\cos bx$ oder $\sin bx$ in $\cos cx$ oder $\sin cx$, wo c ebenfalls einen beliebigen reellen Werth bezeichnet, werden mit Hülfe der Additionsformeln der trigonometrischen Functionen auf die Integrale (5) und (6) zurückgeführt. In Folge der Gleichungen

$$(19)\quad \cos bx\cos cx = \frac{1}{2}\cos\overline{(b+c)x} + \frac{1}{2}\cos\overline{(b-c)x},$$

$$\sin bx\cos cx = \frac{1}{2}\sin\overline{(b+c)x} + \frac{1}{2}\sin\overline{(b-c)x},$$

$$\sin bx\sin cx = \frac{-1}{2}\cos\overline{(b+c)x} + \frac{1}{2}\cos\overline{(b-c)x}$$

hat man die Integrationen

$$(20)\quad \int\cos bx\cos cx\,dx = \frac{1}{2(b+c)}\sin\overline{(b+c)x} + \frac{1}{2(b-c)}\sin\overline{(b-c)x},$$

$$\int\sin bx\cos cx\,dx = \frac{-1}{2(b+c)}\cos\overline{(b+c)x} + \frac{-1}{2(b-c)}\cos\overline{(b-c)x},$$

$$\int\sin bx\sin cx\,dx = \frac{-1}{2(b+c)}\sin\overline{(b+c)x} + \frac{1}{2(b-c)}\sin\overline{(b-c)x}.$$

Die Resultate gelten für alle Verbindungen von reellen Werthen b und c, mit Ausnahme derjenigen, bei denen b gleich $\pm c$ ist. Für $b=c$ geht $b+c$ in $2b$, $b-c$ in Null, der Cosinus des verschwindenden Winkels in die Einheit, sein Sinus in Null über; alsdann entstehen aus (19) die Gleichungen

$$(21) \qquad \begin{aligned} \int (\cos bx)^2\, dx &= \frac{1}{4b} \sin 2bx + \frac{x}{2}, \\ \int (\cos bx \sin bx)\, dx &= -\frac{1}{4b} \cos 2bx, \\ \int (\sin bx)^2\, dx &= -\frac{1}{4b} \sin 2bx + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Auf die Gleichungen (20) und (21) wird später zurückgegangen werden.

§ 72. Vollziehung von Integrationen mit Hülfe unendlicher Summen.

Im Vorhergehenden sind mehrere Gattungen von Integralen characterisirt worden, welche sich durch eine beschränkte Anzahl von algebraischen und fundamentalen transcendenten Functionen ausdrücken lassen. Da aber nur ein kleines Gebiet von Integralen einer derartigen Behandlung fähig ist, so hat man gesucht, umfassendere Methoden auszubilden. Eine solche Methode gründet sich auf die Annahme, dass die zu integrirende Function oder ein Factor derselben in eine convergente unendliche Summe entwickelt werden könne, und stellt das betreffende Integral selbst als eine convergente unendliche Summe dar. Da der Werth eines bestimmten Integrals gleich dem Grenzwerthe einer gewissen Summation ist, so besteht das Wesen des bezeichneten Verfahrens darin, dass ein ins Unendliche laufender Process in einen anderen ins Unendliche laufenden Process verwandelt wird. Wir betrachten das innerhalb der Grenzen a und b auszuführende Integral

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

und setzen die Entwickelung der Function $g(x)$

$$(2) \qquad g(x) = g_0(x) + g_1(x) + \ldots + g_q(x) + \Re_{q+1}(x)$$

voraus; der Restausdruck $\Re_{q+1}(x)$ habe die Eigenschaft, *in Bezug auf jeden zwischen a und b befindlichen Werth von x bei einem hinreichend grossen Werthe der Zahl q numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω zu sein.* Sowohl der Factor $f(x)$ wie auch die einzelnen Glieder der angeführten Summe $g_0(x)$, $g_1(x)$,.. müssen dabei die allgemeinen Bedingungen der Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit erfüllen. Nach dem Satze (I) des § 25 wird nun das Integral (1) gleich der Summe von Integralen

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\, g_0(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g_1(x)\, dx + \ldots + \int_a^b f(x)\, g_q(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, \mathfrak{R}_{q+1}(x)\, dx,$$

und zwar lässt sich zeigen, dass das letzte derselben für einen genügend grossen Werth der Zahl q unter einer beliebig kleinen Grösse bleibt. Insofern die Function $f(x)$ in dem Integrationsintervall endlich ist, liegt sie numerisch unter einer festen Grösse $\mathfrak{F}$, der Ausdruck $\mathfrak{R}_{q+1}(x)$ befindet sich in Folge der getroffenen Voraussetzung für eine genügend grosse Zahl q unter der beliebig kleinen Grösse ω, mithin die zu integrirende Function unter dem Werthe des Products $\mathfrak{F}\,\omega$. Vermöge des Satzes (I) in § 22 ist daher der Werth des betreffenden Integrals kleiner als der durch Multiplication mit der Differenz $b-a$ gebildete Ausdruck $\mathfrak{F}\,\omega\,(b-a)$, welcher für eine wachsende Zahl q durch den beliebig abnehmenden Factor ω selbst beliebig klein wird.

Die in (3) *aufgestellte Summe von Integralen hat also unter den angeführten Bedingungen die Eigenschaft, bei unendlicher Ausdehnung zu convergiren und durch ihren Grenzwerth das Integral* (1) *auszudrücken, so dass die Gleichung*

$$(4)\quad \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$$= \int_a^b f(x) g_0(x)\, dx + \int_a^b f(x) g_1(x) dx + \int_a^b f(x) g_2(x) dx + \ldots.$$

besteht.

Um das Verfahren bei einem gegebenen Integral anzuwenden, hat man die Wahl der Function $g(x)$ und deren Darstellung durch eine unendliche Summe so einzurichten, dass die auszuführenden Integrationen keine Schwierigkeit verursachen. In dieser Hinsicht nehmen die nach den ganzen Potenzen der Variable fortschreitenden Summen die erste Stelle ein, und es verdient bemerkt zu werden, dass durch Benutzung dieses Mittels auch die Potenzreihen erhalten werden können, welche zu der Darstellung des Logarithmus und der umgekehrten trigonometrischen Functionen dienen.

In den Integralen

$$(5)\qquad \int_a^b \frac{dx}{1+x},\ \int_a^b \frac{dx}{1+x^2},\ \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

lassen sich die unter dem Zeichen vorkommenden algebraischen Functionen, so lange die Variable x einen numerisch unter der Einheit befindlichen Werth hat, nach I, § 107 und I, § 119 durch die folgenden, nach den positiven Potenzen von x fortschreitenden convergenten Reihen ausdrücken,

$$(6)\qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \mp \ldots + (-1)^q x^q + \cdots,$$

$$(7)\qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \mp \ldots + (-1)^q x^{2q} + \ldots,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2q-1)}{2.4\ldots(2q)}x^{2q} + \ldots$$

Demgemäss kann man die auf der rechten Seite von (4) angedeuteten Integrationen sofort ausführen. Nimmt man die untere Integrationsgrenze a gleich Null und setzt statt der oberen das Zeichen x, so kommt

$$(9)\qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \log(1+x),\quad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x;$$

denn $\log(1)$ ist gleich Null, und die Functionen $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\arcsin x$ verschwinden ebenfalls für $x=0$, wenn sie, wie früher, auf das von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ ausgedehnte Intervall eingeschränkt werden. Indem also die einzelnen Glieder der in (6), (7), (8) angegebenen Reihen von 0 bis x integrirt werden, entstehen die Resultate

$$(10)\qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots + (-1)^q \frac{x^{q+1}}{q+1} + \ldots,$$

$$(11)\qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \ldots + (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{2q+1} + \ldots,$$

$$(12)\qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2q-1)}{2.4\ldots(2q)(2q+1)}x^{2q+1} + \ldots,$$

von denen die beiden ersten im vorigen und auch im gegenwärtigen Bande abgeleitet sind.

Der so eben eingeschlagene Weg lässt sich auch für das Integral einer beliebigen rationalen Function der Integrationsvariable benutzen. In § 67 wurde auseinandergesetzt, wie man hier ohne die Zerlegung der betreffenden Nennerfunction in Factoren ersten Grades zu kennen, den algebraischen Theil und den rationalen Bruch bestimmen kann, aus dessen Integration der transcendente Theil entsteht. Nach den dortigen Bezeichnungen ist bei dem zuletzt genannten Bruche $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ die Nennerfunction $\beta(x)$ gleich dem Product von lauter ungleichen Factoren ersten Grades

(13) $$\beta(x) = a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\lambda),$$

die Zählerfunction $\alpha(x)$ höchstens vom $(\lambda-1)$ten Grade. Es möge ausserdem angenommen werden, dass das von x freie Glied in $\beta(x)$ einen von Null verschiedenen Werth habe, mithin keine der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ gleich Null sei. Der Bruch $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ war gleich einer Summe von Partialbrüchen

(14) $$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{t^{(1)}}{x-\xi_1} + \frac{t^{(2)}}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{t^{(\lambda)}}{x-\xi_\lambda},$$

wo die in den Zählern auftretenden Constanten $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots t^{(\lambda)}$ in § 67 bestimmt sind. Wenn nun die Grösse x solche Werthe bekommt, die numerisch kleiner als der absolute Betrag von irgend einer der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ sind, so kann jeder der auf der rechten Seite von (14) befindlichen Brüche zufolge I, § 107 durch eine nach den positiven Potenzen der Variable x fortschreitende convergente geometrische Reihe dargestellt werden. Man erhält hier die Reihen

(15) $$\begin{cases} \dfrac{t^{(1)}}{x-\xi_1} = -t^{(1)}\xi_1^{-1} - t^{(1)}\xi_1^{-2}x - t^{(1)}\xi_1^{-3}x^2 - \ldots \\ \vdots \\ \dfrac{t^{(\lambda)}}{x-\xi_\lambda} = -t^{(\lambda)}\xi_\lambda^{-1} - t^{(\lambda)}\xi_\lambda^{-2}x - t^{(\lambda)}\xi_\lambda^{-3}x^2 - \ldots, \end{cases}$$

deren Summe wieder gleich einer nach den positiven Potenzen von x geordneten convergenten Reihe ist. Vermittelst der in I, Abschnitt III entwickelten Grundsätze ist aber leicht zu beweisen, dass dieselbe Reihe entstehen muss, sobald für den Bruch $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ eine nach den steigenden Potenzen der Variable x geordnete Entwickelung ausgeführt wird, wie sie in I, § 107 angedeutet ist; ferner wird derselbe Zweck erreicht, indem man in der Gleichung

$$(16) \qquad \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1 x + \mathfrak{T}_2 x^2 + \ldots$$

beide Seiten mit der Nennerfunction $\beta(x)$ multiplicirt, bei welcher das von x unabhängige Glied als von Null verschieden vorausgesetzt ist, und die eingeführten Coefficienten $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, ..$ durch Gleichsetzen der gleich hohen Potenzen von x bestimmt. Weil die Function $\beta(x)$ vom λten Grade ist, bilden die Coefficienten $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$ eine recurrente Reihe der λten Ordnung. Für die gegenwärtige Untersuchung ist vor allem wesentlich, dass $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$ ohne den Gebrauch der Zerlegung der Function $\beta(x)$ in ihre Factoren gefunden sind. Als bekannt gilt der Bereich der Variable x, für welchen die auf der rechten Seite von (16) befindliche Entwickelung convergirt. Unter der Annahme, dass die Grenzen a und b der für den Bruch $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ zu vollziehenden Integration, so beschaffen sind, dass jeder zwischen a und b liegende Werth x numerisch kleiner als eine Grösse ist, die unter jedem der absoluten Beträge der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ liegt, darf nach dem Obigen die Gleichung (16) gebraucht werden; mithin ergiebt die allgemeine Gleichung (4) den Ausdruck des bezeichneten Integrals

$$(17) \quad \int_a^b \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx = \mathfrak{T}_0(b-a) + \frac{\mathfrak{T}_1}{2}(b^2-a^2) + \frac{\mathfrak{T}_2}{3}(b^3-a^3) + \ldots.$$

Hier wird also vermittelst einer convergenten unendlichen Summe die Integration eines vorgelegten rationalen Bruches ohne die Kenntniss der Zerlegung der Nennerfunction in Factoren ersten Grades bewerkstelligt. In dem Beispiel der §§ 67 und 68 hatte die Function $\beta(x)$ den Ausdruck

$$(x+2)(x-1)(x-2-i\sqrt{5})(x-2+i\sqrt{5}),$$

so dass die absoluten Beträge der Wurzeln respective 1, 2, 3 sind. Demgemäss gilt die Gleichung (17) unter der Bedingung, dass a und b numerisch unter der Einheit gewählt werden. Wie sich aus § 67 ergiebt, bekommt in diesem Falle das unbestimmte Integral des Bruches $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ die Gestalt

$$\int \frac{10x^3 - 43x^2 - 4x + 55}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 17x - 18}\, dx$$

$$= 3\log(x+2) + \log(-x+1) + 3\log((x-2)^2+5) - 4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + \text{const.}$$

Die Coefficienten $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$ werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 55 &= -18\mathfrak{T}_0 \\ -4 &= 17\mathfrak{T}_0 - 18\mathfrak{T}_1 \\ -43 &= 3\mathfrak{T}_0 + 17\mathfrak{T}_1 - 18\mathfrak{T}_2 \\ 10 &= -3\mathfrak{T}_0 + 3\mathfrak{T}_1 + 17\mathfrak{T}_2 - 18\mathfrak{T}_3 \\ 0 &= \mathfrak{T}_0 - 3\mathfrak{T}_1 + 3\mathfrak{T}_2 + 17\mathfrak{T}_3 - 18\mathfrak{T}_4 \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

bestimmt, also stellt die auf der rechten Seite von (17) befindliche Reihe den Werth

$$3\log(b+2) + \log(-b+1) + 3\log((b-2)^2+5) - 4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{b-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$-3\log(a+2) - \log(-a+1) - 3\log((a-2)^2+5) + 4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-2}{\sqrt{5}}\right)$$

dar.

Als Beispiel für die Entwickelung eines nicht auf Logarithmen und umgekehrte trigonometrische Functionen zurückführbaren Integrals in eine unendliche Summe nehmen wir das Integral, welches die Länge des Bogens einer Ellipse ausdrückt; von demselben ist die Benennung auf die in § 69 definirte Kategorie von elliptischen Integralen übergegangen. In § 62 wurde der Bogen einer Ellipse, deren auf die rechtwinkligen Coordinaten x_1 und x_2 bezogene Gleichung

$$\frac{x_1^2}{A} + \frac{x_2^2}{B} = 1$$

lautet, durch das Integral

$$(18) \qquad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(\mu)}} \sqrt{\frac{1 - \frac{A-B}{A}\frac{x_1^2}{A}}{1 - \frac{x_1^2}{A}}}\, dx_1$$

bestimmt. Da A und B positive Grössen bezeichnen und $A > B$ sein soll, so liegt der positive Werth

$$(19) \qquad \frac{A-B}{A} = \mathfrak{e}^2$$

unter der Einheit; die Grösse $\mathfrak{e}$ wird die Excentricität der Ellipse genannt. Das Integral (18), bei dem die untere Grenze durch die Null, die obere Grenze durch x_1 ersetzt werden möge, geht bei der Einführung einer neuen Variable

$$(20) \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{A}}$$

mit Anwendung von (19) in das Integral

$$(21) \qquad \sqrt{A}\int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1-\mathfrak{e}^2\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi = \sqrt{A}\int_0^{\xi} \frac{(1-\mathfrak{e}^2\xi^2)\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\mathfrak{e}^2\xi^2)}}$$

über; die zweite Gestalt entspricht der obigen Definition eines elliptischen Integrals. Da der numerische Werth der Variable ξ wegen der Quadratwurzelgrösse $\sqrt{1-\xi^2}$ niemals die Einheit übertreffen darf und $\mathfrak{e}$ ebenfalls einen echten Bruch bezeichnet, so ist auch der Werth $\mathfrak{e}^2\xi^2$ stets kleiner als die Einheit und die Quadratwurzelgrösse $\sqrt{1-\mathfrak{e}^2\xi^2}$ erlaubt nach I, § 119 die folgende convergente Entwickelung

$$(22) \qquad \sqrt{1-\mathfrak{e}^2\xi^2} = 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{e}^2\xi^2 - \frac{1}{2\,.\,4}\mathfrak{e}^4\xi^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\mathfrak{e}^6\xi^6 - \ldots$$

Nach der in (4) enthaltenen Vorschrift ist jedes Glied der rechten Seite mit dem Factor $\dfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ zu multipliciren und von 0 bis ξ zu integriren. Setzt man also

$$(23) \qquad J_{2q}(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\xi^{2q}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

so ist zunächst

$$(24) \qquad J_0(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin\xi,$$

und das Integral (21) wird durch die folgende convergente Summe dargestellt

(25) $\sqrt{A}\left(\arcsin\xi - \frac{1}{2}J_2(\xi)\mathfrak{e}^2 - \frac{1}{2\,.\,4}J_4(\xi)\mathfrak{e}^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}J_6(\xi)\mathfrak{e}^6 - \ldots\right)$.

Die Integrale $J_{2q}(\xi)$, welche nur die Quadratwurzelgrösse $\sqrt{1-\xi^2}$ enthalten, können durch ein recurrirendes Verfahren bestimmt werden. Aus der Darstellung

$$(26)\qquad \int_0^\xi \frac{\xi^{2q}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\int_0^\xi \frac{d\sqrt{1-\xi^2}}{d\xi}\,\xi^{2q-1}\,d\xi$$

folgt durch theilweise Integration

$$(27)\qquad \int_0^\xi \frac{\xi^{2q}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\sqrt{1-\xi^2}\,\xi^{2q-1} + (2q-1)\int_0^\xi \frac{(1-\xi^2)\xi^{2q-2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

mithin

$$(28)\qquad 2q\int_0^\xi \frac{\xi^{2q}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\sqrt{1-\xi^2}\,\xi^{2q-1} + (2q-1)\int_0^\xi \frac{\xi^{2q-2}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

oder, indem durch $2q$ dividirt wird,

$$(29)\qquad J_{2q}(\xi) = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\xi^{2q-1}}{2q} + \frac{2q-1}{2q}J_{2q-2}(\xi).$$

Offenbar nehmen die Glieder der Reihe (25) um so schneller ab, je kleiner die Excentricität $\mathfrak{e}$ der betreffenden Ellipse ist. Sobald die Excentricität $\mathfrak{e}$ verschwindet, geht die Ellipse in einen Kreis von dem Radius $\sqrt{A}$ über, und die Reihe (25) reducirt sich auf ihr erstes Glied

$$(30)\qquad \sqrt{A}\arcsin\xi,$$

das in der Formel (27) des § 62 angegeben ist.

§ 73. Ausdehnung der Definition eines Integrals auf Functionen, die für einzelne Stellen der Integration unendlich gross, unstetig oder unbestimmt werden.

Die Definition eines bestimmten Integrals

$$(1)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

von der wir ausgegangen sind, und bei welcher $f(x)$ für das

Integrationsintervall eindeutig, endlich und stetig angenommen ist, hat zur Folge, dass ein Integral, welches sich von dem Integral (1) dadurch unterscheidet, dass die eine Integrationsgrenze um beliebig wenig verschoben ist, einen Werth annimmt, der ebenfalls nur um beliebig wenig von dem Werthe von (1) abweicht. Es möge die Differenz $\beta-\alpha$ positiv sein, und δ eine kleine positive Grösse bedeuten, so dass die Werthe $\alpha+\delta$ und $\beta-\delta$ innerhalb des ursprünglichen Intervalls liegen; alsdann liefert der Satz (VI) des § 25 die beiden Gleichungen

$$(2)\qquad \int_{\alpha+\delta}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} f(x)\,dx,$$

$$(3)\qquad \int_{\alpha}^{\beta-\delta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\beta-\delta}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Nun ist der numerische Werth des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} f(x)\,dx$$

nach dem Satze (I) des § 22 kleiner als das Product von δ in eine Constante, unter welcher $f(x)$ enthalten bleibt; das gleiche gilt für den numerischen Werth des Integrals

$$\int_{\beta-\delta}^{\beta} f(x)\,dx,$$

und daher wird der numerische Werth eines jeden der beiden Integrale für eine beliebig kleine Grösse δ beliebig klein, woraus das Behauptete hervorgeht. Man darf deshalb auch sagen, dass der Werth des Integrals (1) der Grenzwerth sei, welchem sich sowohl das Integral (2) wie das Integral (3) für eine gegen die Null abnehmende Grösse δ nähert.

Diese Definition wird dahin führen, den Begriff des bestimmten Integrals von gewissen Beschränkungen zu befreien, denen er bisher unterworfen war.

Wenn nämlich die Function $f(x)$ für das von α bis β gehende Intervall so gegeben ist, dass sie überall eindeutig, endlich und stetig bleibt, jedoch bei der Annäherung von x an eine der Grenzen über jedes Mass hinaus wächst, so ist es jedenfalls erlaubt, die Integration in einem Bereich auszuführen, welcher die betreffende Grenze nicht einschliesst. Da in dieser Hinsicht zwischen den beiden Grenzen kein Unterschied besteht, so genügt es, die Voraussetzung zu erörtern, *dass $f(x)$ an der untern Grenze α unendlich gross werde. Alsdann existirt für das Integral*

$$\int_{\alpha+\delta}^{\beta} f(x)\, dx \tag{4}$$

die doppelte Möglichkeit, dass sein Werth für einen gegen die Null abnehmenden Werth δ gegen einen festen Grenzwerth convergirt, oder kein solches Verhalten zeigt. In dem erstern Falle wird der betreffende Grenzwerth das von α bis β genommene Integral der Function $f(x)$ genannt und durch das Zeichen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \tag{5}$$

dargestellt; in dem zweiten Falle fehlt die Berechtigung, das Intervall der Integration bis zu dem Werthe $x=\alpha$ auszudehnen.

Ob der eine oder der andere Fall eintrete, hängt von dem Process ab, durch welchen die Function $f(x)$ für $x=\alpha$ unendlich gross wird. Eine allgemeine Entscheidung lässt sich treffen, wofern $f(x)$ gleich dem Product einer endlich bleibenden Function und einer negativen Potenz der Basis $(x-\alpha)$ ist; es sei demnach

$$f(x) = (x-\alpha)^{-k} \varphi(x). \tag{6}$$

Um für einen bestimmten Exponenten $-k$ zu untersuchen, ob sich das Integral (4) bei abnehmendem δ einem bestimmten Grenzwerth nähere, schaltet man zwischen $\alpha+\delta$ und β den mit einer positiven über δ liegenden Grösse ε gebildeten Werth $\alpha+\varepsilon$ ein, wodurch die Gleichung

$$\int_{\alpha+\delta}^{\beta} (x-\alpha)^{-k} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} (x-\alpha)^{-k} \varphi(x)\, dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta} (x-\alpha)^{-k} \varphi(x)\, dx \tag{7}$$

entsteht; dann handelt es sich um das erste der auf der rechten Seite angegebenen Integrale. Liegt der Exponent $-k$ zwischen Null und der negativen Einheit, ohne der letztern gleich zu werden, so lässt sich die Grösse ε so wählen, dass, wie nahe δ an die Null gerückt werde, das bezeichnete erste Integral unter einer beliebig kleinen Grösse bleibt, mithin das Integral (7) gegen einen festen Grenzwerth convergirt. In dem betreffenden Integral

$$(8) \qquad \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} (x-\alpha)^{-k} \varphi(x)\,dx$$

hat der Factor $(x-\alpha)^{-k}$ die Eigenschaft, stets das positive Vorzeichen beizubehalten, während der Factor $\varphi(x)$ für jedes δ zwischen den festen Werthen $-\mathfrak{P}$ und $+\mathfrak{P}$ bleibt. Zugleich liefert das über den ersten Factor genommene Integral den Ausdruck

$$(9) \qquad \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} (x-\alpha)^{-k} dx = \left[\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}\right]_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1} - \frac{\delta^{-k+1}}{-k+1}.$$

Man erhält daher durch den Satz (VIII) des § 25 zwei Grenzen, welche den Werth des Integrals (8) einschliessen, indem man den Werth von (9) beziehungsweise mit den Grössen $-\mathfrak{P}$ und $+\mathfrak{P}$ multiplicirt. Weil vermöge der gemachten Annahme $-k+1$ eine positive Grösse und $\varepsilon > \delta$ ist, so folgt, dass

$$(10) \qquad \frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1} > \frac{\delta^{-k+1}}{-k+1} > 0,$$

und dass der Werth von (9) kleiner als die Grösse $\frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1}$ ist. Der Werth von (8) liegt daher gewiss zwischen dem Product der letztern Grösse mit $-\mathfrak{P}$ und ihrem Product mit $+\mathfrak{P}$, oder er ist numerisch kleiner als das Product

$$(11) \qquad \frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1}\mathfrak{P}.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{P}$ eine von δ unabhängige Constante, der Factor $\frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1}$ ist ebenfalls von δ unabhängig und kann durch eine passende Wahl der Grösse ε so klein gemacht werden, dass das Product (11) unter jede gegebene Grösse herabsinkt. Damit ist aber die in Betreff des Integrals (8) aufgestellte Behauptung gerechtfertigt. *Man darf also bei dem Integral*

$$(12) \qquad \int^{\beta} (x-\alpha)^{-k} \varphi(x)\,dx,$$

in welchem die Function $\varphi(x)$ endlich bleibt, die Integration bis *zu dem Werthe $x=\alpha$ ausdehnen, so lange der Exponent $-k$ algebraisch grösser als die negative Einheit ist.*

Dieser Satz gilt nicht für Exponenten $-k$, die gleich der negativen Einheit oder algebraisch kleiner als dieselbe sind; denn schon für die einfachste Annahme, dass $\varphi(x)$ gleich Eins sei, tritt eine characteristische Aenderung ein. Das in diesem Falle zu prüfende Integral (9) bekommt für $-k=-1$ den Werth

$$(13)\qquad \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon}(x-\alpha)^{-1}dx=[\log(x-\alpha)]_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon}=\log\varepsilon-\log\delta,$$

welcher bei abnehmendem δ über jedes Mass hinaus wächst. Ebenso überschreitet der Ausdruck

$$(14)\qquad \frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1}-\frac{\delta^{-k+1}}{-k+1},$$

der das Integral (9) auch für einen algebraisch unter der negativen Einheit befindlichen Exponenten $-k$ darstellt, wegen des alsdann negativen Werthes $-k+1$ bei abnehmendem δ jede gegebene Grösse. Dass ein Integral von der Gestalt

$$(12^*)\qquad \int_{\alpha}(\beta-x)^{-k}\varphi(x)dx,$$

dessen Function für $x=\beta$ unendlich wird, unter den entsprechenden Bedingungen entsprechende Eigenschaften wie das Integral (12) hat, lehrt eine Wiederholung der angestellten Betrachtungen.

Die Frage nach dem Verhalten des Integrals (4) erhält eine anschauliche geometrische Bedeutung, sobald dasselbe, wie in § 21, als der Ausdruck des Inhalts eines ebenen Flächenstücks aufgefasst wird, welches durch die der Gleichung

$$(15)\qquad y=f(x)$$

genügende Curve, die Abscissenaxe und die beiden Ordinaten, die zu den Abscissenwerthen $x=\alpha+\delta$ und $x=\beta$ gehören, begrenzt wird. Wegen der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ für $x=\alpha$ unendlich gross werde, hat die betreffende Curve nach der in § 7 mitgetheilten Erklärung in dem Punkte $x=\alpha$ eine zu der Abscissenaxe senkrechte Asymptote; bei dem Abnehmen der Grösse δ rückt die mit der Asymptote parallele erste Ordinate, welche den auszumessenden Flächenraum begrenzt, der Asymptote immer näher, und die oben hervorgehobene doppelte Möglichkeit äussert sich in der Weise, dass der Inhalt des bezüglichen Flächenraumes entweder einen festen Werth zur Grenze hat oder nicht. Der Werth der negativen Einheit, welcher für die Function (6) die Scheide zwischen den beiden Fällen bildet, ergiebt, wenn $\varphi(x)$ wieder gleich Eins genommen wird, die Gleichung

$$(16) \qquad y = \frac{1}{x-\alpha},$$

welche in § 7 discutirt wurde und sich auf die Hyperbel bezieht. Hier wächst der Inhalt des in Rede stehenden Flächenraumes über jedes Mass.

Nachdem erkannt worden ist, dass die Integration einer Function unter der entwickelten Bedingung bis zu einem Werth der Variable erstreckt werden darf, für welchen die Function unendlich wird, hat man bei jeder zu untersuchenden Gattung von Integralen die Frage zu beantworten, ob die einzelnen Werthe der Variable, für welche die Function unendlich wird, eine bis zu ihnen ausgedehnte Integration gestatten oder nicht. Bei einer rationalen Function der Integrationsvariable zeigt die Zerlegung in Partialbrüche, deren Zähler Constanten und deren Nenner Ausdrücke des ersten Grades in Bezug auf die Integrationsvariable oder ganze Potenzen von solchen Ausdrücken sind, dass die Function dann und nur dann unendlich wird, wenn einzelne dieser Partialbrüche durch das Verschwinden des Nenners unendlich werden. Da nun jeder Ausdruck der bezeichneten Art $x-\alpha$, wo α eine reelle Grösse bedeutet, nur in einer ganzen negativen Potenz auftritt, so darf nach dem Obigen die Integration nicht bis zu dem betreffenden Werthe α erstreckt werden, und es sind deshalb alle Werthe der Variable zu vermeiden, für welche die zu integrirende rationale Function ins Unendliche zunimmt. Dagegen ergiebt sich die folgende Unterscheidung für das in § 69 mit (6) bezeichnete Integral

$$\int F(x) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}};$$

hier bedeutet $F(x)$ eine rationale Function, $R(x)$ eine ganze Function von x, deren Factoren ersten Grades sämmtlich von einander verschieden sind. Wenn $R(x)$ einen reellen Factor ersten

Grades $(x-\alpha)$ enthält, und $F(x)$ für $x=\alpha$ endlich bleibt, so darf nach dem obigen Satze die Integration bis $x=\alpha$ ausgedehnt werden; denn man kann die zu integrirende Function in die Gestalt $\frac{1}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}}\varphi(x)$ oder $\frac{1}{(\alpha-x)^{\frac{1}{2}}}\varphi(x)$ bringen, wo $\varphi(x)$ für $x=\alpha$ endlich bleibt, und der negative Exponent des Ausdrucks ersten Grades zwischen Null und der negativen Einheit liegt. Dagegen lässt sich die Integration aus den vorher angeführten Gründen nicht bis zu solchen Werthen erstrecken, für welche die rationale Function $F(x)$ unendlich wird. Zu den in Rede stehenden Integralen gehört auch das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{17}$$

welches von Null bis x genommen die in der früheren Weise definirte Function $\arcsin x$ ausdrückt. Die unter dem Wurzelzeichen befindliche Function $1-x^2=(1-x)(1+x)$ verschwindet für die extremen Werthe der Variable $+1$ und -1; es ist erlaubt, die Integration bis zu jedem derselben auszudehnen. Weil nun die Function $\arcsin x$ bei einer Annäherung des Arguments gegen die positive Einheit stetig bleibt und gegen den Werth $\frac{\pi}{2}$ convergirt, bei einer Annäherung gegen die negative Einheit ebenfalls stetig bleibt und sich dem Werthe $-\frac{\pi}{2}$ nähert, so gelten die Gleichungen

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},\quad \int\limits_0^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

aus deren Verbindung die Gleichung

$$\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi \tag{18*}$$

hervorgeht.

Bisher ist nur von solchen Unterbrechungen der Stetigkeit gesprochen worden, bei denen die betreffende Function ins Unendliche wächst. Allein es kann eine Function für ein gewisses Intervall der Variable x auch die Beschaffenheit haben, dass sie an einzelnen Stellen die Stetigkeit verliert, ohne unendlich zu werden. Dies geschieht in dem von α bis β ausgedehnten Intervall etwa für einen Werth $x=c$, sobald die Function von α bis c stetig, von c bis β ebenfalls stetig, jedoch so gegeben ist, dass sie bei der Annäherung von x an den Werth c in dem einen und dem andern Theilintervall gegen zwei von einander verschiedene Werthe convergirt. In der erwähnten geometrischen Interpretation stellt dann die Gleichung $y=f(x)$ für das von α bis c reichende Intervall ein erstes, für das von c bis β reichende Intervall ein zweites Curvenstück dar, welche Stücke in den zu dem Abscissenwerth $x=c$ gehörenden Punkten nicht zusammentreffen. Die Function $f(x)$ kann in den beiden Intervallen durch verschiedene analytische Ausdrücke definirt sein, zum Beispiel von $x=\alpha$ bis $x=c$ durch den Ausdruck ersten Grades $lx+r$, von $x=c$ bis $x=\beta$ durch den mit andern Constanten gebildeten Ausdruck ersten Grades $l'x+r'$, wobei die zu $x=c$ gehörenden Werthe $lc+r$ und $l'c+r'$ von einander differiren; bei dieser Annahme repräsentirt die Gleichung $y=f(x)$ zwei nicht zusammenstossende begrenzte gerade Linien.

Insofern die Function $f(x)$ von α bis c und von c bis β stetig verläuft, lässt sich unsere ursprüngliche Definition auf das von α bis c und das von c bis β auszudehnende Integral der Function $f(x)$ anwenden. Bei einer von α bis β stetig gegebenen Function ist das für dieses Intervall genommene Integral gleich der Summe der über die beiden Theilintervalle ausgedehnten Integrale. Demgemäss wird bei der in c unstetigen Function das von α bis β auszuführende Integral als die Summe der erwähnten Integrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^c f(x)\,dx+\int_c^\beta f(x)\,dx \tag{19}$$

definirt; auf entsprechende Art verfährt man bei einer mit mehreren Unterbrechungen der Stetigkeit behafteten Function. Man sieht, wie sich die Flächenräume, welche bei der obigen Interpretation durch die Integrale der rechten Seite von (19) ausgedrückt werden, längs Theilen der geraden Linie aneinander schliessen, welche zugleich die letzte Ordinate des ersten und die erste Ordinate des letzten Flächenstücks ausmacht.

Zu Betrachtungen ähnlicher Art, wie sie bei dem Unendlichwerden der Function unter dem Integralzeichen angestellt sind, führt die Integration von Quotienten, deren Zähler und Nenner für einen gewissen Werth der Integrationsvariable gegen die Null abnehmen, und die in § 38 untersucht sind. Sei $x = \alpha$ ein Werth, für welchen bei dem zu integrirenden Quotienten $f(x)$ diese Erscheinung eintritt, so ist wieder festzustellen, ob sich das zugehörige in (4) angegebene Integral für eine gegen die Null abnehmende Grösse δ einem festen Grenzwerthe nähert; sobald dies geschieht, bezeichnet man den Grenzwerth durch das Integral (5). Wenn der in Rede stehende Quotient $f(x)$ bei der Annäherung von x gegen α selbst gegen einen festen Grenzwerth convergirt, so ist leicht zu schliessen, dass für das betreffende Integral dasselbe gilt; wenn dagegen $f(x)$ bei der Annäherung von x gegen α über jedes Mass wächst, dann muss die Art des Wachsthums wie oben betrachtet werden, um über das Verhalten des Integrals zu entscheiden. Als Beispiel untersuchen wir das Integral

$$(20) \qquad \int_0^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, d\,x,$$

in welchem q eine beliebige positive Constante und β eine ebensolche bedeutet, die nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist, ferner das allgemeinere Integral

$$(21) \qquad \int_0^\beta \frac{\sin qx}{(\sin x)^k}\, d\,x,$$

wo β und q die angegebene Bedeutung haben und k ebenfalls eine positive Constante ist. Die im Nenner befindliche Function $\sin x$ verschwindet für $x = 0$ und für jeden Werth von x, der gleich einem ganzen Vielfachen der Zahl π ist, mithin verschwindet sie innerhalb der Integrationsgrenzen nur für $x = 0$, und bleibt sonst überall positiv. Ebenso verschwindet die im Zähler stehende Function $\sin q\, x$ für $x = 0$. Eine Einsicht in den Verlauf der gebildeten Quotienten gewährt der in § 13 enthaltene Satz, dass der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ für einen gegen die Null abnehmenden Werth von x sich der positiven Einheit als Grenzwerth nähert. Giebt man den in (20) und (21) vorkommenden Functionen die Gestalt

$$\frac{\sin q x}{\sin x} = \left(\frac{\sin q x}{q x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) q, \tag{22}$$

$$\frac{\sin q x}{(\sin x)^k} = \left(\frac{\sin q x}{q x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^k q x^{-k+1}, \tag{23}$$

so leuchtet ein, dass die linke Seite von (22) bei abnehmendem x gegen die positive Constante q convergirt, folglich das Integral (20) eine der aufgestellten Definition entsprechende bestimmte Bedeutung hat. Die linke Seite von (23) erscheint aber als ein Product der Factoren $\frac{\sin q x}{q x}$ und $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^k$, deren jeder von irgend einem kleinen positiven Werth $x = \delta$ bis $x = \beta$ endlich bleibt, und des Factors $q x^{-k+1}$, welcher für $0 < k < 1$ gegen die Null, für $k = 1$, wie schon bemerkt, gegen die positive Einheit convergirt, und für $1 < k < 2$ in einer solchen Weise unendlich wird, dass nach dem obigen Satze die bis zu dem Werthe $x = 0$ ausgedehnte Integration erlaubt ist. Mithin darf das Integral (21) unter der Voraussetzung gebildet werden, dass die positive Grösse k einen kleinern Werth als die Zahl Zwei erhält.

Man wendet die Definition eines bestimmten Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d x = \lim . \int_{\alpha+\delta}^{\beta} f(x)\, d x, \tag{24}$$

wo der Grenzwerth der rechten Seite für eine gegen die Null convergirende Grösse δ zu nehmen ist, auch auf solche Functionen an, die bei der Annäherung der Variable x gegen den besondern Werth α zwischen zwei bestimmten Grössen eingeschlossen bleiben, sich jedoch keinem festen Grenzwerthe nähern. Wenn wieder mit ε eine positive über δ liegende Grösse bezeichnet wird, so hat man

$$\int_{\alpha+\delta}^{\beta} f(x)\, d x = \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} f(x)\, d x + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta} f(x)\, d x; \tag{25}$$

sobald nun der numerische Werth von $f(x)$ in dem ersten Integral der rechten Seite für ein noch so kleines δ unter einer bestimmten Grösse $\mathfrak{F}$ bleibt, so ist der numerische Werth des Integrals nach dem oft benutzten Satze unter der Grösse $\mathfrak{F}(\varepsilon-\delta)$ enthalten, die für ein hinreichend kleines ε beliebig klein wird. Es bedarf also in dem vorliegenden Falle keiner einschränkenden Voraussetzung, um zu schliessen, dass die linke Seite von (25) für ein abnehmendes δ sich einem Grenzwerthe nähert, und um demgemäss das Integral (24) zu definiren. Ein Beispiel der erwähnten Eigenthümlichkeit bietet die Function

$$(26) \qquad \sin\frac{1}{x}$$

für einen gegen die Null abnehmenden Werth der Variable x. In Bezug auf jeden Werth von x ist die Function eindeutig, stetig und zwischen der positiven und negativen Einheit eingeschlossen; sie verschwindet für die positiven Werthe

$$x = \frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi}, \dots$$

und für die gleichen negativen, wechselt bei dem Durchgange durch diese Werthe stets das Vorzeichen, und erreicht auch immer wieder die extremen Werthe der positiven und negativen Einheit.

§ 74. Ausdehnung der Definition eines Integrals auf unendlich grosse Integrationsintervalle.

Sobald das Intervall, für welches eine zu integrirende Function $f(x)$ gegeben ist, nach der Seite der positiven oder negativen Werthe von x beliebig weit reicht, dass heisst, sobald die Function $f(x)$ für unbegrenzt wachsende positive oder negative Werthe ihres Arguments definirt ist, entsteht die Frage, ob sich das von α bis β genommene Integral

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

wo wieder $\beta > \alpha$ sein möge, einem festen Grenzwerth nähere, falls die obere Grenze β algebraisch wachsend jede positive Grösse übertrifft, oder die untere Grenze α algebraisch abnehmend unter jede negative Grösse herabsinkt. *Unter der Voraussetzung, dass ein solcher Grenzwerth vorhanden ist, nennt man denselben beziehungsweise das von α bis $+\infty$, oder das von*

$-\infty$ bis β genommene Integral der Function $f(x)$, und gebraucht die Bezeichnungen

$$(2)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim.\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\ \beta=\infty,$$

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^\beta f(x)\,dx = \lim.\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\ \alpha=-\infty.$$

Bei der im vorigen § angewendeten geometrischen Interpretation geht die entsprechende Aufgabe dahin, zu ermitteln, ob der Inhalt des gemessenen Flächenraumes, zu welchem durch unbegrenztes Fortrücken der einen Ordinate immer neue Theile hinzukommen, sich einem festen Grenzwerth nähere oder nicht. Es werden jetzt Regeln angeführt werden, nach denen sich gewisse Gruppen von Fällen beurtheilen lassen.

(I) *Wenn die zu integrirende Function gleich dem Product einer Function $\varphi(x)$, die bei unendlich wachsendem x endlich bleibt, und einer negativen Potenz x^{-k} ist, so darf die Integration nach der Variable x ins Unendliche ausgedehnt werden, wofern der Exponent $-k$ algebraisch unter der negativen Einheit liegt.*

Der Beweis des vorstehenden Satzes wird durch ein ähnliches Verfahren wie das im vorigen § angewendete geführt; man zeigt die Möglichkeit, die obere Grenze β des Integrals

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta x^{-k}\varphi(x)\,dx$$

so gross zu wählen, dass der Werth des Integrals

$$(5)\qquad \int_\alpha^{\beta+h} x^{-k}\varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta x^{-k}\varphi(x)\,dx + \int_\beta^{\beta+h} x^{-k}\varphi(x)\,dx$$

für einen beliebig grossen Werth von h von dem Werthe des Integrals (4) beliebig wenig abweicht. Bei dem von β bis $\beta+h$ ausgedehnten Integral, welches die Differenz von (4) und (5) ausdrückt, behält der Factor x^{-k} stets das positive Vorzeichen, und nach der bestehenden Voraussetzung darf die Function $\varphi(x)$ niemals eine gewisse Constante $\mathfrak{P}$ numerisch übertreffen. Das über den Factor x^{-k} genommene Integral hat den Werth

$$(6)\qquad \int_\beta^{\beta+h} x^{-k}\,dx = \left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_\beta^{\beta+h} = \frac{(\beta+h)^{-k+1}}{-k+1} - \frac{\beta^{-k+1}}{-k+1};$$

derselbe muss, weil $-k+1$ vermöge der Voraussetzung eine negative Grösse ist, kleiner als der Ausdruck $\frac{-\beta^{-k+1}}{-k+1}$ sein. In Folge des Satzes (VIII) in § 25 ist wieder der numerische Werth des Integrals

$$(7) \qquad \int_{\beta}^{\beta+1} x^{-k}\varphi(x)\,dx$$

kleiner als das Product der Grösse $\mathfrak{P}$ in den Werth von (6), mithin auch kleiner als das Product

$$(8) \qquad \frac{-\beta^{-k+1}}{-k+1}\mathfrak{P}.$$

Dieses wird wegen des negativen Exponenten $-k+1$ für einen hinreichend grossen Werth von β beliebig klein, woraus das behauptete folgt. Für ein Fortrücken der unteren Grenze ins negativ Unendliche kann eine ähnliche Betrachtung angestellt werden; doch bedarf der Satz wegen des Umstandes einer Modification, dass die Potenz x^{-k} bei beliebigem Exponenten nur für positive Werthe des Arguments definirt ist.

In dem gegenwärtigen Satze bleibt für den Exponenten $-k$ ein zwischen 0 und -1 liegender Werth und auch der Werth -1 selbst ausgeschlossen, da bei der Voraussetzung $\varphi(x)=1$ das Integral (6) massgebend ist, welches für $0>-k>-1$ durch die obige Gleichung dargestellt wird, für $k=-1$ den Ausdruck

$$(6_a) \qquad \int_{\beta}^{\beta+h} x^{-1}\,dx = [\log x]_{\beta}^{\beta+h} = \log(\beta+h) - \log\beta$$

erhält, und in beiden Fällen mit wachsendem h über jedes Mass hinaus wächst. Die betreffende Eigenschaft von (6_a) ist in § 31 ausführlich erörtert.

Weil das unbestimmte Integral jeder ganzen Function der Integrationsvariable selbst eine ganze Function ist, und daher mit wachsender Grenze ins Unendliche wächst, so muss eine rationale Function der Integrationsvariable, damit die Integration auf ein unendliches Intervall erstreckt werden darf, jedenfalls gleich einem echten Bruche sein. Für einen solchen war in § 67 die Bezeichnung

$$(9)\qquad \frac{r(x)}{f(x)}$$

gebraucht, und zwar

$$(10)\qquad \begin{aligned} r(x) &= r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1} \\ f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned}$$

gesetzt worden. Das Integral der Function (9) darf nach dem Satze (I) ins Unendliche ausgedehnt werden, sobald $r_0 = 0$, oder die Zählerfunction von einem um zwei Einheiten niedrigeren Grade als die Nennerfunction ist. Denn unter dieser Voraussetzung erlaubt die Function (9) die Darstellung

$$(11)\qquad \frac{r(x)}{f(x)} = x^{-2} \frac{r_1 + r_2 x^{-1} + \ldots + r_{n-1} x^{-n+2}}{a_0 + a_1 x^{-1} + \ldots + a_n x^{-n}},$$

wo der mit der Potenz x^{-2} multiplicirte Quotient für ein wachsendes x gegen den festen Grenzwerth $\frac{r_1}{a_0}$ convergirt, folglich die Bedingungen der in dem Satze vorgeschriebenen Gestalt $x^{-k}\varphi(x)$ mit dem unter der negativen Einheit liegenden Exponenten -2 erfüllt sind. Es versteht sich, dass, wenn die Function $f(x)$ für reelle Werthe von x verschwindet, das unendlich auszudehnende Integrationsintervall ausserhalb der äussersten von diesen Werthen liegen muss. Ein besonders einfaches Integral, bei dem der Nenner einen um zwei Einheiten niedrigeren Grad als der Zähler hat und für keinen reellen Werth von x gleich Null wird, ist das folgende, welches der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Function Arcus tangentis gleich ist,

$$(12)\qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Für ein über jede positive Grösse wachsendes x convergirt die vorliegende umgekehrte trigonometrische Function gegen den Werth $\frac{\pi}{2}$, für ein unter jede negative Grösse herabgehendes x gegen den Werth $-\frac{\pi}{2}$; auf diese Weise entstehen die Gleichungen

(13) $$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2},$$

welche man zu der Gleichung

(13*) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

vereinigen kann.

Bit Hülfe des Satzes (I) lässt sich auch beurtheilen, wann die Integration bei dem in § 69 mit (6) bezeichneten Integral

(14) $$\int F(x) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ins Unendliche erstreckt werden darf. Hier möge die ganze Function $R(x)$ wieder vom $2p+1$ten oder $2p+2$ten Grade, ferner $F(x)$ gleich einem rationalen Bruche sein, bei dem der Grad des Zählers in Bezug auf x um g Einheiten höher als der des Nenners ist. Demnach ist $F(x)$ gleich dem Product der Potenz x^g in eine Function, die sich für wachsendes x einer Constante nähert, der Factor $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ respective gleich dem Product der Potenz $x^{-\frac{2p+1}{2}}$ oder x^{-p-1} in eine Function, die für wachsendes x ebenfalls gegen eine Constante convergirt, mithin $\frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}}$ beziehungsweise gleich dem Product der Potenz $x^{g-\frac{2p+1}{2}}$ oder x^{g-p-1} in eine mit zunehmendem x endlich bleibende Function. Der Satz (I) erlaubt, die Integration in Unendliche auszudehnen, sobald respective

$$g - \frac{2p+1}{2} < -1, \text{ oder } g - p - 1 < -1$$

ist, das heisst, sobald die ganze Zahl g einen unter der ganzen Zahl p liegenden Werth hat. Dieser Bedingung genügt insbesondere die Annahme einer ganzen Function $F(x)$, welche nach den in § 69 aufgestellten Definitionen für $p=1$ oder bei den elliptischen Integralen gleich einer Constante, für grössere Werthe von p oder bei den hyperelliptischen Integralen der $(p-1)$ten Ordnung vom $(p-1)$ten Grade sein muss.

Wenn die mehrfach erwähnte geometrische Interpretation für die im Satze (I) characterisirte Function vorgenommen, und die Gleichung

(15) $$y = x^{-k} \varphi(x)$$

gebildet wird, so folgt aus der zu einem beständigen Wachsen von x gehörenden Abnahme von y, dass sich die Curve der Abscissenaxe als Asymptote nähert. Ein grösserer Werth von k bedingt eine schnellere Abnahme des Werthes x^{-k} und daher eine stärkere Annäherung der Curve an die Abscissenaxe. So lange $k > 1$ ist, reicht die Annäherung aus, damit der durch das Integral $\int y\,dx$ dargestellte Flächenraum bei unbegrenztem Fortrücken der einen Ordinate endlich bleibt; für den Fall der Hyperbel, in welchem $k = 1$, $\varphi(x) = 1$ ist, hört auch diese Eigenschaft auf.

Mit dem Abnehmen einer negativen Potenz x^{-k} für positive wachsende Werthe von x, kann das für dieselben Werthe erfolgende Abnehmen einer Exponentialfunction e^{-ax}, bei der a eine positive Constante bedeutet, verglichen werden. Dass der Werth der Exponentialfunction kleiner wird als jede gegebene Grösse, ist in I, § 101 gezeigt worden; es lässt sich aber auch beweisen, *dass der Quotient der Function e^{-ax} durch die negative Potenz x^{-k} oder das Product*

(16) $$e^{-ax} x^k$$

bei positivem wachsendem x gegen die Null convergirt. Dieses Resultat vermittelt die Beurtheilung einer zweiten Gattung von Integralen in Betreff der unendlichen Ausdehnung ihres Intervalls.

Um die über die Function (16) gemachte Behauptung zuerst für den Werth $k = 1$ zu rechtfertigen, setzen wir statt der Variable x nach einander die Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Anfangsglied positiv und kleiner als die Einheit, deren Differenz gleich der Einheit genommen werde,

(17) $$\xi,\ \xi + 1,\ \xi + 2, \ldots$$

Dem entsprechend bilden die Werthe der Function e^{-ax} eine geometrische Reihe mit dem Quotienten e^{-a}; die zu untersuchende Function erhält die Werthe

(18) $$e^{-a\xi}\xi,\ e^{-a(\xi+1)}(\xi + 1),\ e^{-a(\xi+2)}(\xi + 2), \ldots e^{-a(\xi+t)}(\xi + t), \ldots$$

Indem man jeden Werth durch den vorhergehenden dividirt, entstehen respective die Ausdrücke

$$(19)\qquad e^{-a}\left(\frac{\xi+1}{\xi}\right),\ e^{-a}\left(\frac{\xi+2}{\xi+1}\right),\ldots e^{-a}\left(\frac{\xi+t}{\xi+t-1}\right),\ldots$$

Hier ist der Factor e^{-a} gleich einem positiven echten, der andere Factor $\frac{\xi+t}{\xi+t-1}=1+\frac{1}{\xi+t-1}$ gleich einem positiven unechten Bruche, welcher mit zunehmendem Zeiger t fortwährend abnimmt und der Einheit beliebig nahe kommt. Deshalb kann man dem Zeiger einen so grossen Werth t beilegen, dass das Product

$$(20)\qquad e^{-a}\left(\frac{\xi+\mathrm{t}}{\xi+\mathrm{t}-1}\right)=\omega$$

für $\xi=0$, wo es ω_0 heissen möge, und daher auch für jeden positiven Werth von ξ kleiner als die Einheit ist. Die Ausdrücke in (19), welche den sämmtlichen folgenden Zeigern $\mathrm{t}+1$, $\mathrm{t}+2,\ldots$ entsprechen, sind kleiner als (20) und daher ebenfalls unter der Einheit gelegen. Nun lässt sich ein beliebiger Functionswerth aus (18), bei dem die Zahl t grösser als t ist, so umformen

$$(21)\qquad e^{-a(\xi+t)}(\xi+t)=e^{-a(\xi+\mathrm{t}-1)}(\xi+\mathrm{t}-1)\left(e^{-a}\frac{\xi+\mathrm{t}}{\xi+\mathrm{t}-1}\right)\ldots\left(e^{-a}\frac{\xi+t}{\xi+t-1}\right).$$

Hier ist der Functionswerth $e^{-a(\xi+\mathrm{t}-1)}(\xi+\mathrm{t}-1)$ für jeden zwischen 0 und 1 liegenden Werth ξ kleiner als die durch Vergrösserung der beiden Bestandtheile erhaltene Grösse

$$(22)\qquad e^{-a(\mathrm{t}-1)}\,\mathrm{t},$$

der nächste Factor vermöge (20) gleich ω, jeder der auf diesen folgenden kleiner als ω. Mithin ist das Product aller $t-\mathrm{t}+1$ Factoren kleiner als die ebenso hohe Potenz von ω, und, weil ω für jeden vorkommenden Werth von ξ kleiner als die nach der Voraussetzung unter der Einheit befindliche Grösse

$$(23)\qquad e^{-a}\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}-1}=\omega_0$$

ist, auch kleiner als die gleiche Potenz von ω_0. So entsteht die Ungleichheit

$$(24)\qquad e^{-a(\xi+t)}(\xi+t)<e^{-a(\mathrm{t}-1)}\,\mathrm{t}\,\omega_0^{t-\mathrm{t}+1};$$

auf der rechten Seite überschreitet der zu dem echten Bruche ω^0 gehörende Potenzexponent $t-\mathrm{t}+1$ mit wachsender Zahl

t jede Grösse. Damit erhält die Potenz ω_0^{t-t+1}, und folglich auch ihr mit der festen Grösse $e^{-a(t-1)}t$ genommenes Product einen beliebig kleinen Werth, und dieser ist grösser als der auf der linken Seite von (24) mit einem zwischen 0 und 1 beliebig angenommenen Werthe von ξ und der wachsenden Zahl t gebildete Functionswerth $e^{-a(\xi+t)}(\xi+t)$. Weil nun $\xi+t$ jeden auf irgend eine Art wachsenden Werth des Arguments x ausdrückt, so ist erwiesen, dass die Function $e^{-ax}x$ für positive über jede Grenze zunehmende Werthe von x gegen die Null convergirt.

Dass die Function (16), in welcher k einen beliebigen positiven Werth bedeutet, dieselbe Eigenschaft hat, folgt daraus, dass die mit den gegebenen positiven Werthen a und k dargestellte Function

$$(25) \qquad e^{-\frac{a}{k}x}\,x$$

nach dem so eben begründeten Satze für ein positives wachsendes x unter jede noch so kleine Grösse fällt, dass durch Erhebung von (25) auf die $k$te Potenz die Function (16) erzeugt wird, und dass das Resultat der Erhebung einer beliebig kleinen Grösse auf eine Potenz von bestimmtem positiven Exponenten ebenfalls eine beliebig kleine Grösse ist. Das zuletzt genannte Lemma ist in § 9 für einen Exponenten $\frac{1}{n}$, bei dem n eine positive ganze Zahl darstellt, bewiesen und auf positive rationale Exponenten ausgedehnt; dasselbe kann auch leicht auf einen beliebigen positiven Exponenten übertragen werden. Wenn nämlich $\frac{m}{n}$ einen rationalen Bruch, der unter dem gegebenen positiven Werthe k angenommen ist, und ϱ einen unter der Einheit liegenden Werth bezeichnet, so gilt nach I, § 100 die Ungleichheit $\varrho^k < \varrho^{\frac{m}{n}}$. Sobald daher unter gewissen Bedingungen $\varrho^{\frac{m}{n}}$ beliebig klein wird, so muss ϱ^k ebenfalls beliebig klein werden, woraus sich das Gesagte ergiebt.

Die nachgewiesene Eigenschaft der Function (16) erlaubt zunächst einzusehen, dass das über dieselbe zwischen zwei positiven Werthen α und β genommene Integral

$$(26)\qquad \int_{\alpha}^{\beta+h} e^{-ax} x^k\, dx,$$

wo a eine positive von Null verschiedene, k eine positive oder verschwindende Constante bezeichnet, bei stets wachsender oberer Grenze gegen einen festen Werth convergirt. Denn man kann die positive Grösse a immer als die Summe von zwei positiven Grössen b und c betrachten, mithin dem Integral (26) die Gestalt geben

$$(27)\qquad \int_{\alpha}^{\beta+h} e^{-bx} e^{-cx} x^k\, dx,$$

und die Integration wieder von α bis zu einem festen Werthe β, dann von β bis $\beta+h$ führen. Der Factor $e^{-cx} x^k$, welcher mit wachsendem x beliebig klein wird, bleibt für alle über einer gewissen Grösse ξ liegenden Werthe von x kleiner als eine feste Grösse $\mathfrak{C}$; indem β grösser als ξ gewählt wird, gilt diese Eigenschaft für das ganze von β bis $\beta+h$ ausgedehnte Intervall. Da der andere Factor e^{-bx} stets positiv ist, so liegt der Werth des von β bis $\beta+h$ erstreckten Integrals vermöge des oft angewendeten Satzes unter dem Product der Grösse $\mathfrak{C}$ in das auf e^{-bx} bezügliche Integral

$$(28)\qquad \int_{\beta}^{\beta+h} e^{-bx}\, dx = \left[\frac{-e^{-bx}}{b}\right] = \frac{e^{-b\beta} - e^{-b(\beta+h)}}{b},$$

dessen Werth für jedes positive h kleiner als die Grösse $\dfrac{e^{-b\beta}}{b}$ ist. Daher besteht die Ungleichheit

$$(29)\qquad \int_{\beta}^{\beta+h} e^{-bx} e^{-cx} x^k\, dx < \frac{e^{-b\beta}}{b}\,\mathfrak{C},$$

wo der Factor $e^{-b\beta}$ für einen hinreichend grossen Werth von β so klein wird, dass auch sein mit dem festen Quotienten $\dfrac{\mathfrak{C}}{b}$ gebildetes Product unter jeder gegebenen Grösse liegt. Also lässt sich die Grösse β so einrichten, dass der Werth des Integrals (27), wie gross auch $\beta+h$ gemacht werden möge, von dem

Integral, das über dieselbe Function von α bis β ausgedehnt ist, um beliebig wenig abweicht, und das war behauptet worden.

Eine genau entsprechende Betrachtung gilt für die Integration des Products aus der Function (16) und einer Function $\varphi(x)$, welche für positive über jedes Mass wachsende Werthe von x innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, und liefert den folgenden Satz:

(II) *Wenn die zu integrirende Function gleich dem Product einer Function $\varphi(x)$, welche bei positiven unendlich wachsenden Werthen von x gewisse Grenzen nicht überschreitet, und eines Ausdrucks $e^{-ax}x^k$ ist, in dem a eine positive von Null verschiedene, k eine positive oder verschwindende Constante bedeutet, so darf die Integration nach der Variable x auf positiv unendlich wachsende Werthe erstreckt werden.*

Die Untersuchungen des gegenwärtigen und des vorigen § stehen zu einander in naher Beziehung. Falls in dem obigen Integral (7) statt x eine neue Variable

$$y = \frac{1}{x} \tag{30}$$

eingeführt wird, so geht dasselbe nach dem mitgetheilten Verfahren in das Integral

$$-\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta+h}} y^{k-2}\,\varphi\left(\frac{1}{y}\right)dy = \int_{\frac{1}{\beta+h}}^{\frac{1}{\beta}} y^{k-2}\,\varphi\left(\frac{1}{y}\right)dy \tag{31}$$

über. Die untere Grenze des Integrals $\frac{1}{\beta+h}$ nähert sich bei beständig wachsendem h der Null, die Function $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ bleibt nach der Voraussetzung immer endlich, der Exponent $k-2$ der Grösse y ist ein negativer echter Bruch. Es liegt also ein Integral vor, das mit dem Integral (8) des vorigen §, auf welches der dortige Satz gegründet ist, übereinstimmt. Die obige Function (16) verwandelt sich durch Substitution einer neuen Variable

$$z = e^{-x}, \tag{32}$$

die für einen positiven unendlich wachsenden Werth von x gegen die Null convergirt, und durch welche x vermöge der Gleichung

$$(33)\qquad x = \log \frac{1}{z}$$

ausgedrückt wird, in die Function

$$(34)\qquad z^a \left(\log \frac{1}{z}\right)^k = \frac{z^a}{\left(\log \frac{1}{z}\right)^{-k}}.$$

In der zweiten Darstellung nähert sich bei der gegen die Null gerichteten Abnahme des positiven z sowohl die im Zähler befindliche positive Potenz von z wie auch die im Nenner stehende negative Potenz von $\log \frac{1}{z}$ der Null, und zwar geschieht dies wegen der vorhin für die Function (16) nachgewiesenen Eigenschaft in der Weise, dass der Quotient gegen die Null convergirt. Man sieht also, *dass sich eine Potenz von z, deren Exponent irgend eine wenn auch kleine positive Grösse ist, stärker der Null nähert als eine negative Potenz der Function* $\log \frac{1}{z}$. Wendet man die Substitution (32) auf ein Integral

$$(35)\qquad \int_{\beta}^{\beta+h} e^{-ax} x^k \varphi(x)\, dx$$

an, das unter den Bedingungen des Satzes (II) für einen angemessen gewählten Werth β und einen ohne Ende wachsenden Werth $\beta + h$ numerisch beliebig klein bleibt, so entsteht, weil

$$(36)\qquad \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z}$$

ist, das Integral

$$(37)\qquad \int_{e^{-(\beta+h)}}^{e^{-\beta}} z^{a-1} \left(\log \frac{1}{z}\right)^k \varphi\left(\log \frac{1}{z}\right) dz,$$

in welchem die untere Grenze $e^{-(\beta+h)}$ gegen die Null convergirt, der Exponent $a-1$ zwischen -1 und $+\infty$ mit Ausschluss der negativen Einheit liegt, der Exponent k positiv oder verschwindend ist, und die Function $\varphi\left(\log \frac{1}{z}\right)$ bei der Annäherung von z gegen die Null endlich bleibt. Somit folgt aus dem Satze (II) die Berechtigung, bei dem zugehörigen Integral

$$(38)\qquad \int z^{a-1} \left(\log \frac{1}{z}\right)^k \varphi\left(\log \frac{1}{z}\right) dz,$$

auch wenn der Exponent $a-1$ gleich einem negativen echten Bruche ist und dadurch die Function für $z=0$ unendlich gross wird, die Integration bis zu dem Werthe $z=0$ auszudehnen. Durch dieses Ergebniss wird die im vorigen § aufgestellte Regel erweitert.

§ 75. Differentiation eines bestimmten Integrals nach einer von den Integrationsgrenzen unabhängigen Grösse.

In dem Satze (VII) des § 25 wird gelehrt, dass der Differentialquotient eines von α bis β ausgedehnten Integrals $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, nach der oberen Grenze β genommen, gleich dem Functionswerth $f(\beta)$, nach der unteren Grenze α genommen, gleich dem negativ gesetzten Functionswerth $f(\alpha)$ ist. Für die Integrale von Functionen, die ausser der Integrationsvariable x noch eine unabhängig veränderliche Grösse oder, wie man zu sagen pflegt, einen Parameter c enthalten, macht sich bisweilen das Bedürfniss geltend, eine Differentiation in Bezug auf diesen letztern auszuführen. Wir bezeichnen die betreffende Function mit $f(x, c)$, und betrachten das von α bis β erstreckte Integral derselben als den Grenzwerth des nach der Vorschrift des § 20 gebildeten Summenausdrucks

$$(1) \quad f(x_0, c)(x_1-x_0)+f(x_1, c)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1}, c)(x_n-x_{n-1}),$$

wo $x_0=\alpha$, $x_n=\beta$ ist und die Werthe $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ der algebraischen Grösse nach auf einander folgen. Die Differentiation von (1) nach c geschieht in der Weise, dass die der Zunahme von c um Δc entsprechende Differenz von (1) durch Δc dividirt und der zu einem stets kleiner werdenden Δc gehörige Grenzwerth des Quotienten aufgesucht wird. Wenn $\mathfrak{a}$ die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ durchläuft, so hat man in demselben Umfange die Summe der Quotienten

$$(2) \qquad \frac{f(x_\mathfrak{a}, c+\Delta c)-f(x_\mathfrak{a}, c)}{\Delta c}(x_{\mathfrak{a}+1}-x_\mathfrak{a})$$

zu nehmen. Nun wird vorausgesetzt, dass der für die Function $f(x_\mathfrak{a}, c)$ gebildete Differenzenquotient, sobald Δc der Null genähert wird, gegen einen bestimmten Grenzwerth, den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f(x_\mathfrak{a}, c)}{\partial c}$ convergire, und dass ausserdem in der Gleichung

(3)
$$\frac{f(x_\mathfrak{a}, c+\Delta c) - f(x_\mathfrak{a}, c)}{\Delta c} = \frac{\partial f(x_\mathfrak{a}, c)}{\partial c} + m_\mathfrak{a}$$

die Grösse $m_\mathfrak{a}$ bei einem hinreichend kleinen Δc für jeden vorkommenden Werth von $x_\mathfrak{a}$ numerisch unter derselben beliebig kleinen Grösse μ liege. Hiernach ist die von $\mathfrak{a}=0$ bis $\mathfrak{a}=n-1$ auszudehnende Summe des Ausdrucks (2) gleich dem Aggregat der beiden Summen

(4)
$$\sum_0^{n-1} \frac{\partial f(x_\mathfrak{a}, c)}{\partial c}(x_{\mathfrak{a}+1}-x_\mathfrak{a}) + \sum_0^{n-1} m_\mathfrak{a}(x_{\mathfrak{a}+1}-x_\mathfrak{a}).$$

Die erste derselben verwandelt sich, da $f(x, c)$ und $\frac{\partial f(x,c)}{\partial c}$ als *eindeutig*, *endlich* und *stetig* vorausgesetzt werden, für eine wachsende Zahl n und abnehmende Intervalle der zwischen α und β eingeschalteten Werthe, in das über $\frac{\partial f(x,c)}{\partial c}$ nach der Variable x von α bis β auszudehnende Integral. Die zweite Summe hat vermöge der über die Grössen $m_\mathfrak{a}$ getroffenen Annahme einen Werth, welcher für ein hinreichend kleines Δc numerisch unter dem Product der beliebig kleinen Grösse μ in die Differenz $\beta-\alpha$ liegt; die letztere ist nach einer häufig benutzten Bemerkung gleich dem Werthe der Summe der vorhandenen Differenzen $\sum_0^{n-1}(x_{\mathfrak{a}+1}-x_\mathfrak{a})$. Der gesuchte Differentialquotient des durch die Summe (1) vertretenen Integrals wird deshalb folgendermassen durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt

(5)
$$\frac{\partial \int_\alpha^\beta f(x,c)\,dx}{\partial c} = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,c)}{\partial c}\,dx.$$

Diese Gleichung enthält die Regel, dass unter den angegebenen Bedingungen der Differentialquotient eines Integrals nach einer von den Integrationsgrenzen unabhängigen Grösse c erhalten wird, indem man zuerst die zu integrirende Function nach der Grösse c differentiirt und dann das Ergebniss in Bezug auf die Variable x zwischen den vorgeschriebenen Grenzen integrirt.

Die Integration einer Function $f(x, c)$ nach x zwischen den Grenzen α und β, und die Differentiation nach der Grösse c sind zwei verschiedene Grenzprocesse; zufolge der aufgestellten Regel entsteht dasselbe Resultat, sobald entweder zuerst die Integration und hierauf die Differentiation, oder zuerst die Differentiation und hierauf die Integration vorgenommen wird. In gleicher Weise bezieht sich das allgemeine Theorem des § 72 auf die beiden Grenzprocesse der Summation und Integration, und lehrt eine Bedingung kennen, unter welcher die Reihenfolge dieser Grenzprocesse mit einander vertauscht werden darf. Für das auf der rechten Seite von (5) vorgeschriebene Verfahren wird der Namen *der Differentiation unter dem Integralzeichen* gebraucht. Mit Hülfe der in den beiden letzten § gegebenen Definitionen lässt sich dieses Verfahren unter gewissen Bedingungen auch auf solche Fälle übertragen, in denen die Function $f(x, c)$ unter dem Integralzeichen unendlich wird, oder das Intervall der Integration eine unendliche Ausdehnung erhält. Doch kommt es auch vor, dass die für die Berechtigung des Integrals $\int_\alpha^\beta f(x, c)\, dx$ nothwendigen Voraussetzungen erfüllt, dagegen die für Berechtigung des Integrals $\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,c)}{\partial c} dx$ nothwendigen Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Unter diesen Umständen muss geschlossen werden, dass der nach c zu nehmende Differentialquotient des ersten Integrals durch die Ausführung einer Differentiation unter dem Integralzeichen nicht dargestellt werden könne, und es bedarf einer speciellen Untersuchung, um zu entscheiden, ob die bezeichnete Differentiation des ersten Integrals auf einem andern Wege ausführbar oder überhaupt nicht zu bewerkstelligen sei.

§ 76. Ausgezeichnete bestimmte Integrale.

Bei der Definition eines bestimmten Integrals wurde vorausgesetzt, dass die Grenzen desselben innerhalb des Intervalls, für welches die zu integrirende Function gegeben ist, beliebig gewählt werden dürfen. Durch eingehende Beschäftigung mit diesem Gegenstande hat sich nun herausgestellt, dass gewisse bestimmte Integrale, deren Integrationsgrenzen für die betreffende Function eine besondere Bedeutung haben, eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Zu den Integralen solcher Art, welche in einem engeren Sinne *bestimmte Integrale* genannt werden, gehören die beiden, vermittelst deren in § 73 und 74 die Zahl π dargestellt ist. Für die Function $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ des einen schliessen die negative und positive Einheit das Intervall ein, innerhalb dessen die Function reell bleibt; bei einer Annäherung an die extremen Werthe wird sie unendlich gross, jedoch so, dass die Ausdehnung der Integration bis zu diesen Werthen noch gestattet ist. Dagegen darf die Function $\frac{1}{1+x^2}$ des andern über das ganze Gebiet der reellen Werthe von $-\infty$ bis ∞ integrirt werden. Insofern gelten die Integrale

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

als ausgezeichnete bestimmte Integrale. Da jede der vorliegenden Functionen für x und $-x$ denselben Werth annimmt, und deshalb, von der unteren Grenze bis Null, und von Null bis zu der oberen Grenze integrirt, das gleiche Resultat $\frac{\pi}{2}$ liefert, so gehören hierher auch das erste Integral von -1 bis 0, und von 0 bis 1 ausgedehnt, das zweite Integral, von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis ∞ ausgedehnt.

Andere ausgezeichnete bestimmte Integrale treten bei der Integration der trigonometrischen Functionen hervor. Die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ sind, wie in I, § 103 erörtert ist, periodische Functionen ihres Arguments mit der Periode 2π; wenn man daher durch m eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet und *den Cosinus und Sinus des ganzen Vielfachen* mx bildet, so gelten die Gleichungen

$$(3) \qquad \cos m(x+2\pi) = \cos mx,$$

$$(4) \qquad \sin m(x+2\pi) = \sin mx;$$

in Folge derselben sind $\cos mx$ und $\sin mx$ ebenfalls periodische Functionen des Arguments x mit der Periode 2π. Man setze nun in den Gleichungen (5) und (6) des § 71 statt der Constante b die von Null verschiedene ganze Zahl m, und leite aus den daselbst angegebenen unbestimmten Integralen die bestimmten ab, welche sich von einem beliebigen Werth ξ bis zu dem um 2π grösseren Werthe $\xi + 2\pi$ erstrecken, indem man von den betreffenden Ausdrücken $\frac{\sin mx}{m}$ und $-\frac{\cos mx}{m}$ die Differenz der zu $x = \xi$ und $x = \xi + 2\pi$ gehörigen Werthe nimmt; da diese nach den obigen Gleichungen (3) und (4) verschwindet, so entstehen die bestimmten Integrale

$$(5) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} \cos mx \, dx = 0,$$

$$(6) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} \sin mx \, dx = 0.$$

Für $m = 0$ ist $\cos mx$ gleich der Einheit, $\sin mx$ gleich Null, so dass alsdann das erste Integral den Werth 2π erhält, das zweite verschwindend bleibt. Vermittelst desselben Princips kann man aus den Gleichungen (19) und (20) des angeführten § 71 Schlüsse ziehen, sobald für b eine ganze Zahl m, für c eine ganze Zahl n gesetzt wird, die beide der Einfachheit halber als nicht negativ angenommen werden. Es finden sich, wofern m und n von einander verschieden sind, die Gleichungen

$$(7) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0,$$

$$(8) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0,$$

und für irgend zwei differente oder gleiche Zahlen m und n kommt

$$(9) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0.$$

Dagegen erhält man für jede von der Null verschiedene Zahl m die Gleichungen

$$(10) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} (\cos mx)^2\, dx = \pi,$$

$$(11) \qquad \int_{\xi}^{\xi+2\pi} (\sin mx)^2\, dx = \pi,$$

während bei dem Werthe $m = 0$ das Integral (10) gleich 2π, das Integral (11) gleich Null wird.

Um die Ausbildung der Lehre von den bestimmten Integralen im engeren Sinne hat sich *Euler* ganz besondere Verdienste erworben. Nach ihm heisst das Integral

$$(12) \qquad \varphi(a,c) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{c-1}\, dy,$$

in welchem a und c positive Constanten bedeuten, *ein Euler'sches Integral der ersten Gattung*, das Integral

$$(13) \qquad \Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-z} z^{k-1}\, dz,$$

wo k eine positive Constante bezeichnet, *ein Euler'sches Integral der zweiten Gattung.* Bei dem erstern wird die zu integrirende Function, falls a und c echte Brüche sind, für $y = 0$ und für $y = 1$ in einer solchen Weise unendlich, dass nach § 73 die Ausdehnung bis zu diesen Grenzen gestattet ist. Das gleiche gilt bei dem zweiten Integral für die untere Grenze $z = 0$, wofern k ein positiver echter Bruch ist; die unendliche Ausdehnung des Intervalls wird durch den Satz (II) des § 74 gerechtfertigt. Wir begnügen uns, hier nur wenige Eigenschaften der *Euler*'schen Integrale mitzutheilen.

Das Integral der ersten Gattung bleibt bei der gegenseitigen Vertauschung der beiden Argumente a und c ungeändert. Denn durch Anwendung der Substitution

$$(14) \qquad y = 1 - z$$

geht die Function $y^{a-1}(1-y)^{c-1}$ in $(1-z)^{a-1} z^{c-1}$, das Differential dy in $-dz$ über, die untere Grenze wird gleich der Einheit, die obere gleich der Null, und bei der Vertauschung derselben verwandelt sich das Integral nach dem Satze (V) des § 25 in den entgegengesetzten Werth. So ergiebt sich die Gleichung

$$(15)\qquad \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{c-1}\,dy = \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{c-1}\,dz,$$

deren linke Seite gleich $\varphi(a, c)$, deren rechte gleich $\varphi(c, a)$ ist. Man kann ferner den Werth eines Integrals $\varphi(a, c)$ mit beliebigen Argumenten auf ein Integral zurückführen, dessen beide Argumente positive echte Brüche sind. In dem Integral

$$(16)\qquad \varphi(a, c+1) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^c\,dy$$

ist der Factor y^{a-1} gleich dem nach y genommenen Differentialquotienten der Function $\frac{y^a}{a}$, so dass nach (III) des § 25 durch theilweise Integration die Gleichung

$$(17)\qquad \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^c\,dy = \left[\frac{y^a}{a}(1-y)^c\right]_0^1 + \frac{c}{a}\int_0^1 y^a(1-y)^{c-1}\,dy$$

entsteht. Hier verschwindet die mittelst der eckigen Klammer angedeutete Differenz, weil die Function $\frac{y^a}{a}(1-y)^c$ sowohl für $y=0$ wie auch für $y=1$ gleich Null wird. Indem das Integral der linken Seite durch Ablösen eines Factors $1-y$ als das folgende Aggregat dargestellt wird

$$(18)\qquad \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^c\,dy = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{c-1}\,dy - \int_0^1 y^a(1-y)^{c-1}\,dy,$$

hat man also die beiden Relationen

$$(19)\qquad \begin{aligned} \varphi(a, c+1) &= \varphi(a, c) - \varphi(a+1, c) \\ \varphi(a, c+1) &= \frac{c}{a}\,\varphi(a+1, c) \end{aligned}$$

aus denen die Reductionsformeln

$$(20)\qquad \varphi(a+1, c) = \frac{a}{a+c}\,\varphi(a, c),\quad \varphi(a, c+1) = \frac{c}{a+c}\,\varphi(a, c)$$

folgen. Mit Hülfe derselben lässt sich zuerst das eine, dann das andere Argument eines gegebenen Integrals unter die positive Einheit herabdrücken, und auf diese Weise der bezeichnete Zweck erreichen. Sobald die beiden Argumente gleich rationalen Brüchen sind, ist das Integral der zweiten Gattung das Integral einer algebraischen Function. Unter der Voraussetzung $c=1$ verschwindet der Exponent des unter dem Integralzeichen in (12) befindlichen zweiten Factors, die unbestimmte Integration ergiebt die Function $\frac{y^a}{a}$, und durch Einführung der Grenzen kommt

$$(21)\qquad \varphi(a, 1) = \int_0^1 y^{a-1}\,dy = \frac{1}{a}\cdot$$

Für die speciellen Werthe $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ bewirkt die Substitution $y = u^2$, dass

$$(22)\qquad \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 2\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

wird. Das transformirte Integral fällt alsdann mit dem obigen Integral (1) zusammen, woraus die Gleichung

$$(23)\qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

entsteht.

Auch das *Euler*'sche Integral der zweiten Gattung von beliebigem Argument erlaubt eine Reduction auf ein Integral, dessen Argument einen unter der Einheit und über der Null liegenden Werth hat. Betrachtet man in der Darstellung (13) den Factor z^{k-1} wieder als den Differentialquotienten der Function $\frac{z^k}{k}$, so entsteht durch theilweise Integration die Gleichung

$$(24)\qquad \int_0^\infty e^{-z} z^{k-1}\,dz = \left[e^{-z}\frac{z^k}{k}\right]_0^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-z} z^k\,dz.$$

Nun hat die durch die eckige Klammer angedeutete Differenz ebenfalls den Werth Null, da der Ausdruck $\frac{e^{-z} z^k}{k}$ für $z = 0$ wegen der positiven Potenz z^k und für positive wachsende Werthe von z vermöge eines in § 74 bewiesenen Satzes verschwindet. Mithin folgt aus (24) die Gleichung

$$(25)\qquad \Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k),$$

durch deren wiederholte Anwendung jede Γ Function auf eine andere zurückgeführt werden kann, bei welcher das Argument zwischen 0 und 1 liegt. Für das Argument $k=1$ kommt

$$(26)\qquad \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-z}\,dz.$$

Weil die Ausführung der unbestimmten Integration den Werth $-e^{-z}$ liefert, der für $z=0$ gleich der negativen Einheit, für ein positives unendlich wachsendes z gleich Null ist, so findet sich

$$(27)\qquad \Gamma(1)=1.$$

Vermöge der Gleichung (25) nimmt also die Function $\Gamma(k)$ für jeden positiven ganzzahligen Werth von k den Werth

$$(28)\qquad \Gamma(k)=1.2.3\ldots(k-1),$$

oder den Werth des Products der natürlichen Zahlen von 1 bis $(k-1)$ einschliesslich an, welcher in I, § 46 $(k-1)$ *Facultät* genannt und mit $(k-1)!$ bezeichnet worden ist. Mit Rücksicht auf diese Eigenschaft hat *Gauss* in der schon erwähnten Abhandlung *disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma}x+\ldots$ für die Function $\Gamma(x)$ die Charakteristik Π eines Products

$$\Gamma(k)=\Pi(k-1)$$

angewendet.

Neben den ganzzahligen Argumenten hat das Argument $\frac{1}{2}$ für die Γ Function eine hervorstechende Bedeutung. Bedient man sich bei dem in (13) dargestellten Integral $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ der Substitution $z=x^2$, so wird $z^{-\frac{1}{2}}dz=2\,dx$, und es entsteht die Umformung

$$(29)\qquad \int_0^\infty e^{-z}z^{-\frac{1}{2}}dz=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Da ferner das neue Integral, von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis ∞ genommen, denselben Werth liefert, so kann der Factor 2 fortgelassen, und statt dessen von $-\infty$ bis ∞ integrirt werden, woraus der Ausdruck

$$(30)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

hervorgeht. In § 92 wird bewiesen werden, dass dieses Integral gleich der positiven Quadratwurzel aus der Zahl π ist.

Capitel X.

Darstellung von Functionen durch trigonometrische Reihen.

§ 77. Zusammenhang zwischen Potenzreihen und trigonometrischen Reihen.

Bei der allgemeinen Erörterung der Potenzreihen in I, § 107 hat sich für eine nach den Potenzen einer Variable z geordnete Reihe, deren Coefficienten reell sind, gezeigt, dass, wenn statt z die complexe Grösse $x+iy$ gesetzt, die letztere aber mit Hülfe des absoluten Betrages r und eines innerhalb einer Kreisperipherie eindeutig bestimmten Winkels ϑ in die Gestalt

$$(1)\qquad x+iy=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

gebracht wird, nach Sonderung des Reellen und Imaginären der reelle Theil der Reihe die Cosinus der auf einanderfolgenden ganzen Vielfachen von ϑ, der imaginäre Theil die Sinus der aufeinanderfolgenden ganzen Vielfachen desselben Winkels enthält. Betrachtet man eine nach den Potenzen einer Variable z fortschreitende Reihe, deren Coefficienten complexe Grössen $c_0+id_0, c_1+id_1\ldots$ sind,

$$(2)\qquad s_q=(c_0+id_0)+(c_1+id_1)z+(c_2+id_2)z^2+\ldots+(c_q+id_q)z^q,$$

und verfährt mit z in der so eben bezeichneten Weise, so liefert die Trennung des Reellen und Imaginären das Ergebniss

$$(3)\quad s_q=c_0+(c_1\cos\vartheta-d_1\sin\vartheta)r+(c_2\cos 2\vartheta-d_2\sin 2\vartheta)r^2+\ldots+(c_q\cos q\vartheta-d_q\sin q\vartheta)r^q$$
$$+i(d_0+(c_1\sin\vartheta+d_1\cos\vartheta)r+(c_2\sin 2\vartheta+d_2\cos 2\vartheta)r^2+\ldots+(c_q\sin q\vartheta+d_q\cos q\vartheta)r^q).$$

Hier kommen in dem reellen wie in dem imaginären Theile die Cosinus und Sinus der ganzen Vielfachen von ϑ vor, und man kann sich jede der beiden Reihen ebenso gut nach den Potenzen des Betrages r wie nach den auf einander folgenden Cosinus und Sinus des Winkels ϑ geordnet denken. Unbegrenzte Reihen, welche nach den Cosinus und Sinus einer Grösse ϑ fortschreiten, und deren Coefficienten $\frac{1}{2}a_0, a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ von ϑ unabhängige reelle Grössen sind, von der Gestalt

$$(4) \qquad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \ldots \\ + b_1 \sin\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + \ldots,$$

werden *trigonometrische Reihen* genannt; diese Reihen umfassen den auf der rechten Seite von (3) dargestellten reellen und imaginären Theil von s_q. Wie im vorigen § bemerkt, sind die Cosinus und Sinus der ganzen Vielfachen eines Arguments ϑ periodische Functionen von ϑ mit der Periode 2π. Da nun die Reihe (4) aus lauter Gliedern von dieser Beschaffenheit besteht, so muss auch der dargestellte Werth an der Eigenschaft Theil nehmen, bei der Vermehrung des Arguments ϑ um die Grösse 2π ungeändert zu bleiben. Aus diesem Grunde genügt es, den Werth der Reihe für ein Intervall der Variable ϑ ins Auge zu fassen, dessen Umfang gleich 2π ist; wir wählen hierzu das von $-\pi$ bis π ausgedehnte Intervall, und zwar, da die Reihe für beide Argumente den gleichen Werth annehmen muss, mit Einschluss des einen Werthes $-\pi$ und mit Ausschluss des andern $+\pi$.

§ 78. Entwickelung einer gegebenen Function in eine trigonometrische Reihe.

Es fragt sich jetzt, unter welchen Bedingungen eine für das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ gegebene Function einer Grösse ϑ in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, und welche Mittel für diesen Zweck zu Gebote stehen. Die Reihenfolge, in der wir uns mit den beiden Fragen beschäftigen wollen, ist die umgekehrte von derjenigen, in der sie hier erwähnt werden; ausserdem können wir bei der Beantwortung der erstern eine gewisse willkürliche Einschränkung nicht vermeiden. Gesetzt, eine gegebene Function $f(\vartheta)$ lasse sich durch eine unendlich ausgedehnte im vorigen § mit (4) bezeichnete trigonometrische Reihe auf die Art ausdrücken, dass für jeden zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegenden Werth von ϑ eine Zahl n angegeben werden kann, bei welcher die Summe der $(2n+1)$ ersten Glieder

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\vartheta + a_2\cos 2\vartheta + \ldots + a_n\cos n\vartheta$$
$$+ b_1\sin\vartheta + b_2\sin 2\vartheta + \ldots + b_n\sin n\vartheta$$

von dem darzustellenden Werthe numerisch um weniger als eine beliebig gegebene kleine Grösse ω abweicht. Wenn dann die Function $f(\vartheta)$ mit einem von ϑ abhängenden endlichen und stetigen Factor multiplicirt wird, so ist zufolge § 72 das nach ϑ innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ genommene Integral des Products gleich der Summe, welche entsteht, indem die einzelnen Glieder der betreffenden Reihe mit jenem Factor multiplicirt und nach ϑ in dem angegebenen Intervall integrirt werden. Man kann nun den Factor der Function $f(\vartheta)$ so einrichten, dass bei der Integration der einzelnen Bestandtheile der Reihe alle Glieder mit Ausnahme eines einzigen beliebig zu wählenden herausfallen, und nur der Coefficient von diesem erhalten bleibt. Zu dem Coefficienten $\frac{1}{2}a_0$ gehört die Einheit, zu einem beliebigen anderen Coefficienten a_m die Function $\cos m\vartheta$, zu einem beliebigen Coefficienten b_m die Function $\sin m\vartheta$ als Factor. Hierbei benutzt man die in § 76 von (5) bis (11) notirten bestimmten Integrale, deren von einer beliebigen Grösse ξ bis $\xi + 2\pi$ auszudehnendes Intervall unter der Annahme $\xi = -\pi$ von $-\pi$ bis $+\pi$ geht. Für jede von Null verschiedene ganze Zahl n gelten die Gleichungen

$$(2)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos n\vartheta\, d\vartheta = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin n\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

hingegen ist

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta = 2\pi;$$

ferner kommt, wofern m nicht gleich Null ist, für jeden von m verschiedenen Werth der Zahl n,

$$(4)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos n\vartheta\cos m\vartheta\, d\vartheta = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin n\vartheta\cos m\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$(5)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos n\vartheta\sin m\vartheta\, d\vartheta = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin n\vartheta\sin m\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

und ausserdem

$$(6)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\vartheta \cos m\vartheta\, d\vartheta = \pi,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\vartheta \cos m\vartheta = 0,$$

$$(7)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\vartheta \sin m\vartheta\, d\vartheta = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\vartheta \sin m\vartheta = \pi.$$

Demnach entstehen durch Anwendung der genannten Factoren die folgenden Gleichungen, vermöge deren die sämmtlichen Coefficienten der trigonometrischen Reihe mit Hülfe bestimmter Integrale ausgedrückt werden,

$$(8)\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta \qquad = \frac{1}{2}\, a_0 \,.\, 2\pi,$$

$$(9)\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \cos m\vartheta\, d\vartheta = a_m \,.\, \pi,$$

$$(10)\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \sin m\vartheta\, d\vartheta = b_m \,.\, \pi.$$

Die Gleichungen (9) und (10) sind für einen von Null verschiedenen Werth der Zahl m abgeleitet, die Gleichung (9) geht jedoch bei $m = 0$ in (8) über und gilt daher mit Einschluss des Werthes Null. Da in Folge der Definition eines bestimmten Integrals der Buchstabe, welcher die Integrationsvariable andeutet, durch einen beliebigen anderen ersetzt werden darf, so möge in (9) und (10) statt des in der Reihe gebrauchten Buchstabens ϑ ein anderer α gesetzt werden; dann ergeben sich für a_m und b_m die Bestimmungen

$$(11)\quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha\, d\alpha,\ b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin m\alpha\, d\alpha.$$

Bei der Substitution dieser Ausdrücke in die Reihe (1) des vorigen § gewinnt dieselbe die Gestalt

$$(12)\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos\alpha\, d\alpha \cos\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos 2\alpha\, d\alpha \cos 2\vartheta + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \sin\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin 2\alpha\, d\alpha \sin 2\vartheta + \ldots$$

Es werden also die Coefficienten der gesuchten Entwickelung durch Ausführung von bestimmten Integrationen gefunden; mit diesem Verfahren beginnt eine neue Anwendung der Integralrechnung.

§ 79. Untersuchung der Convergenz einer trigonometrischen Reihe vermittelst des Ausdrucks der Summe einer endlichen Zahl ihrer Glieder durch ein bestimmtes Integral.

Wenn eine Function $f(\vartheta)$ für das von $-\pi$ bis $+\pi$ ausgedehnte Intervall eindeutig, endlich und stetig gegeben ist, so lassen sich die zugehörigen in der Reihe (12) des vorigen § angegebenen Coefficienten aufstellen, und es ist möglich, abgesehen von irgend einer vorläufigen Annahme, zu prüfen, ob die so entstandene Reihe convergire und den vorgeschriebenen Werth $f(\vartheta)$ richtig ausdrücke. Diese Aufgabe hat *Lejeune Dirichlet* in dem Aufsatze *sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, Crelles Journal Bd. IV*, zum ersten Male gelöst, und später in *Doves Repertorium für Physik* mit sehr einfachen Hülfsmitteln behandelt; wir werden uns der letzteren Bearbeitung anschliessen. Zur Beurtheilung der Convergenz ist die Summe der $(2n+1)$ ersten Glieder der Reihe (12), oder die im vorigen § mit (1) bezeichnete Summe zu untersuchen, nachdem für a_m und b_m die Ausdrücke (11) substituirt sind; sobald sich dieselbe für eine wachsende Zahl n einem festen Grenzwerthe nähert, stellt dieser den zu ermittelnden Werth der vorgelegten unendlichen Reihe dar. Um die betreffenden Glieder zusammenzufassen, können die von den Integrationen unabhängigen Factoren $\cos m\vartheta$ und $\sin m\vartheta$ unter die bezüglichen Integralzeichen genommen und je zwei demselben Werthe der Zahl m entsprechende Integrale mittelst der Relation

$$(1)\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha \cos m\vartheta + \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha \sin m\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos m(\alpha-\vartheta)\, d\alpha$$

vereinigt werden. Hierauf lässt sich die Summe des ersten Integrals und derjenigen Integrale, welche zu den Zahlen $m=1, 2, \ldots n$ gehören, da überall die Grenzen dieselben sind und $f(\alpha)$ als Factor auftritt, folgendermassen als ein einziges Integral darstellen

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\left(\frac{1}{2}+\cos(\alpha-\vartheta)+\cos 2(\alpha-\vartheta)+\ldots+\cos n(\alpha-\vartheta)\right)d\alpha.$$

Auch hat es keine Schwierigkeit, die als Factor von $f(\alpha)$ erscheinende endliche Summe durch einen geschlossenen Ausdruck zu ersetzen.

In I, § 98 ist der mit (1) bezeichnete Summenausdruck einer endlichen geometrischen Reihe unter der Voraussetzung betrachtet worden, dass die bezüglichen Elemente beliebige complexe Werthe erhalten. Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, die Reihe zu vereinfachen, indem die dortigen Grössen r_0 und x gleich der Einheit gesetzt werden, auch schreiben wir der Uebereinstimmung wegen n statt t; dann kommt, der Gleichung (5) in I, § 43 entsprechend,

$$(3)\qquad \frac{1-\xi^{n+1}}{1-\xi}=1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^n.$$

Zieht man jetzt auf beiden Seiten den Werth $\frac{1}{2}$ ab, und substituirt für ξ eine complexe Grösse $\cos\beta+i\sin\beta$, deren Betrag gleich Eins, die aber selbst nicht gleich Eins ist, bei der also das Argument β nicht gleich Null oder einem ganzen Vielfachen von 2π sein darf, so gilt die Gleichung

$$(4)\quad \frac{1-(\cos\beta+i\sin\beta)^{n+1}}{1-(\cos\beta+i\sin\beta)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+(\cos\beta+i\sin\beta)+\ldots+(\cos\beta+i\sin\beta)^n;$$

nach geschehener Trennung des Reellen und Imaginären erhält die rechte Seite die Gestalt

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{2}+\cos\beta+\cos 2\beta+\ldots+\cos n\beta\\ &\quad+i(\sin\beta+\sin 2\beta+\ldots+\sin n\beta),\end{aligned}$$

und liefert desshalb als reellen Theil für $\beta=\alpha-\vartheta$ die in Rede stehende Summe. Man darf den Nenner der linken Seite von (4) durch Einführung des halben Winkels β so umformen

$$(6)\qquad 1-\cos\beta=2\sin^2\frac{\beta}{2},\qquad \sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$1-\cos\beta-i\sin\beta=-2i\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}\right),$$

und erhält mithin, indem der Zähler und Nenner von (4) mit dem Factor $\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2}$ multiplicirt wird, den Ausdruck

$$(7)\qquad \frac{\cos\frac{\beta}{2} - i\sin\frac{\beta}{2} - \left(\cos\frac{(2n+1)\beta}{2} + i\sin\frac{(2n+1)\beta}{2}\right)}{-2i\sin\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{2},$$

dessen reeller und imaginärer Theil beziehungsweise den reellen und imaginären Theil von (5) darstellt. So gelangt man zu den Gleichungen

$$(8)\qquad \frac{\sin\frac{(2n+1)\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{2} + \cos\beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos n\beta,$$

$$(8^*)\qquad \frac{\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{(2n+1)\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \sin\beta + \sin 2\beta + \ldots + \sin n\beta;$$

vermöge der erstern geht bei der Substitution $\beta = \alpha - \vartheta$ das Integral (2) in das Integral

$$(9)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{(2n+1)(\alpha-\vartheta)}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\vartheta}{2}}\,d\alpha$$

über. Dieses lässt sich ferner transformiren, indem statt α eine Variable $\gamma = \frac{\alpha-\vartheta}{2}$ eingeführt wird. Dann ist $\alpha = \vartheta + 2\gamma$, für $d\alpha$ tritt das Differential $2d\gamma$ ein, die Grenzen der Integration werden respective $\frac{-\pi-\vartheta}{2}$ und $\frac{\pi-\vartheta}{2}$, und statt (9) erscheint das Integral

$$(10)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi-\vartheta}{2}}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} f(\vartheta+2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma;$$

dasselbe ist der gesuchte Ausdruck der Summe von den $(2n+1)$ ersten Gliedern der vorgelegten trigonometrischen Reihe.

§ 80. Discussion eines ausgezeichneten eine willkürliche Function enthaltenden bestimmten Integrals.

Die Ermittelung des Grenzwerthes, dem sich das im vorigen § mit (10) bezeichnete Integral nähert, hängt hauptsächlich von der Betrachtung eines Integrals derselben Gestalt ab, bei dem die eine Grenze gleich Null, die andere Grenze gleich einer positiven Grösse h ist, welche zunächst gleich oder kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein möge. Setzt man an Stelle des Functionszeichens $f(\vartheta + 2\gamma)$ das einfachere $\varphi(\gamma)$, für die Zahl $2n+1$ den Buchstaben k und lässt den Factor $\frac{1}{\pi}$ fort, so entsteht das Integral

$$(1) \qquad S = \int_0^h \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma,$$

das wir jetzt zu erörtern haben. Der Werth des Integrals, welches aus (1) hervorgeht, indem die Function $\varphi(\gamma)$ gleich der Einheit und $h = \frac{\pi}{2}$ genommen wird,

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma,$$

folgt leicht aus der Gleichung (8) des vorigen §. Nimmt man hier $\beta = 2\gamma$, so kommt die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\sin(2n+1)\gamma}{2\sin\gamma} = \frac{1}{2} + \cos 2\gamma + \cos 4\gamma + \ldots + \cos 2n\gamma,$$

welche nach ihrer Ableitung mit Ausschluss des Werthes $\gamma = 0$ gilt, bei der sich aber die linke und rechte Seite für einen gegen die Null convergirenden Werth von γ demselben Grenzwerthe $\frac{2n+1}{2}$ nähern. Eine von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ ausgedehnte Integration der linken Seite von (3) ergiebt das gesuchte Integral, welches in dem Integral (20) des § 73 enthalten und somit als berechtigt erwiesen ist. Bei der Integration der Bestandtheile der rechten Seite von (3) erzeugt nur die Constante $\frac{1}{2}$ den von Null verschiedenen Werth $\frac{\pi}{4}$, dagegen jedes andere Glied

$\cos 2m\gamma$ das unbestimmte Integral $\frac{\sin 2m\gamma}{2m}$, folglich durch Einführung der Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ den Werth Null, so dass aus der Gleichung (3), nachdem wieder $2n+1=k$ gesetzt ist, die Bestimmung

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}\, d\gamma = \frac{\pi}{2}$$

hervorgeht.

Auf die Kenntniss dieses Integrals stützt sich die Untersuchung des Integrals (1), das unter dem Zeichen die Function $\varphi(\gamma)$ als Factor enthält, und dessen Werth für eine wachsende Zahl k zu ermitteln ist. Die Function $\varphi(\gamma)$ soll nun zuerst die Bedingung erfüllen, für das ganze von 0 bis h gehende Intervall endlich, stetig, ausserdem positiv zu sein, und mit wachsendem γ niemals zu wachsen, das heisst entweder abzunehmen oder auch in einzelnen Theilen constant zu bleiben. Da der Factor $\frac{1}{\sin\gamma}$ in dem betreffenden Intervall ebenfalls stets positiv bleibt, so wird das Vorzeichen der in (1) unter dem Integralzeichen befindlichen Function nur durch den Factor $\sin k\gamma$ bestimmt. Theilt man das Intervall der Integration in eine Folge von Intervallen, die sich von 0 bis $\frac{\pi}{k}$, von $\frac{\pi}{k}$ bis $\frac{2\pi}{k}$, u. s. f. und, wenn das gröste unter h liegende Vielfache von $\frac{\pi}{k}$ das $l$fache ist, von $\frac{l\pi}{k}$ bis h erstrecken, so durchläuft das Argument $k\gamma$ die entsprechenden von 0 bis π, von π bis 2π, u. s. f., ausgedehnten Intervalle; die Function $\sin k\gamma$ fällt deshalb im ersten positiv, im zweiten negativ aus, und wechselt regelmässig ihr Vorzeichen. Wenn daher die von 0 bis h auszuführende Integration nach einander über die genannten Theilintervalle erstreckt wird, so erscheint S als ein Aggregat von Integralen, bei denen die Function regelmässig abwechselnd nur positiv oder nur negativ ist, und das wir, wie folgt, bezeichnen

(5) $$S = R_0 - R_1 + \ldots + (-1)^l R'_l;$$

hier ist

(6) $$R_0 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma, \qquad -R_1 = \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^\nu R_\nu = \int_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{k}} \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma, \ldots (-1)^l R'_l = \int_{\frac{l\pi}{k}}^{h} \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma.$$

Da bei jedem dieser Integrale das Vorzeichen des Factors $\frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}$ ungeändert bleibt, so erhält man durch den Satz (VIII) des § 25 Grenzen für den Werth des einzelnen Integrals, indem man über den Factor $\frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}$ innerhalb des betreffenden Intervalls integrirt und das Integral respective mit dem grösten und kleinsten Werthe der Function $\varphi(\gamma)$ multiplicirt. Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft der Function $\varphi(\gamma)$, niemals zuzunehmen, ist der Werth, welcher zu der unteren Grenze des einzelnen Integrals gehört, stets der gröste, der zu der oberen Grenze gehörende Werth stets der kleinste innerhalb der Integration vorkommende, den Fall ausgenommen, wo beide einander gleich sind und der Functionswerth constant bleibt. Demnach bestehen unter Anwendung der Bezeichnungen

(7) $$\varrho_0 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma, \qquad -\varrho_1 = \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^\nu \varrho_\nu = \int_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma, \ldots (-1)^l \varrho'_l = \int_{\frac{l\pi}{k}}^{h} \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma,$$

die Ungleichheiten

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad \varphi(0)\,\varrho_0 &\geqq R_0 \geqq \varphi\left(\frac{\pi}{k}\right)\varrho_0 \\
\varphi\left(\frac{\pi}{k}\right)\varrho_1 &\geqq R_1 \geqq \varphi\left(\frac{2\pi}{k}\right)\varrho_1 \\
&\;\vdots \\
\varphi\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)\varrho_\nu &\geqq R_\nu \geqq \varphi\left(\frac{(\nu+1)\pi}{k}\right)\varrho_\nu \\
&\;\vdots \\
\varphi\left(\frac{l\pi}{k}\right)\varrho'_l &\geqq R'_l \geqq \varphi(h)\,\varrho'_l.
\end{aligned}
$$

Offenbar ist das Aggregat der in (7) eingeführten Integrale gleich dem Integral

$$\int_0^h \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma,$$

welches für $h=\frac{\pi}{2}$ in (2) übergeht und nach (4) den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Wenn daher t denjenigen Werth der Zahl l bedeutet, welcher zu $h=\frac{\pi}{2}$ gehört, so gilt die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{\pi}{2}=\varrho_0-\varrho_1+\ldots+(-1)^t\,\varrho'_t;$$

hierbei ist zu bemerken, dass, weil h höchstens gleich $\frac{\pi}{2}$ sein darf, die Zahl l niemals einen grösseren Werth als t annehmen kann.

Die positiven Grössen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ besitzen die Eigenschaft, dass jede derselben kleiner als die vorhergehende ist. Dies folgt mit Hülfe des vorhin benutzten Satzes daraus, dass in jedem der Integrale (7) der Factor $\sin k\gamma$ sein Vorzeichen behält und der positive Factor $\frac{1}{\sin\gamma}$ mit wachsendem γ stets abnimmt. Der Werth $(-1)^\nu\varrho_\nu$ liegt somit zwischen dem Product der Werthe $\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}}$ und $\frac{1}{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{k}}$ in das über den Factor $\sin k\gamma$ genommene Integral

$$\int\limits_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{k}} \sin k\gamma\, d\gamma = \left[-\frac{\cos k\gamma}{k}\right]_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{k}} = \frac{2(-1)^{\nu}}{k};$$

man erhält daher die folgenden Ungleichheiten

$$(10)\qquad \varrho_0 > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}\frac{2}{k}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}\frac{2}{k} > \varrho_1 > \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{k}}\frac{2}{k}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}}\frac{2}{k} > \varrho_\nu > \frac{1}{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{k}}\frac{2}{k},$$

$$\vdots$$

die an einander anschliessen und aus denen das Behauptete folgt. Der numerische Werth ϱ'_l des letzten in (7) auftretenden Integrals bildet keine Ausnahme, weil das entsprechende Integrationsintervall, das von $\frac{l\pi}{k}$ bis h geht, sich höchstens bis zu einem Werthe $h = \frac{(l+1)\pi}{k}$ erstrecken kann, und darum

$$(11)\qquad \varrho'_l \leqq \varrho_l$$

sein muss, mithin gewiss $\varrho_{l-1} > \varrho'_l$ ist. Das Gleiche gilt für die letzte in (9) vorkommende Grösse ϱ'_p, welche zu der Voraussetzung $h = \frac{\pi}{2}$ gehört.

Hält man die Ungleichheiten

$$(12)\qquad \varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2 \cdots > \varrho_{l-1} > \varrho'_l$$

mit dem Umstande zusammen, dass die Function $\varphi(\gamma)$ bei wachsendem Argument nie zunimmt, so zeigen die Ungleichheiten (8), dass unter allen Umständen die untere Grenze von R_0 grösser ist als die obere von R_1, u. s. f., dass also auch jede der positiven Grössen R_0, $R_1, \ldots R'_l$ von der vorhergehenden übertroffen wird.

Hier kommt ein Princip zur Anwendung, welches schon in § 10 benutzt ist und erlaubt, falls eine Grösse D gleich einer Summe von Gliedern ist, deren Vorzeichen regelmässig abwechseln und deren numerische Werthe der Reihe nach abnehmen, den Werth von D in Grenzen einzuschliessen. Es sei

(13) $$D = A_0 - A_1 + \ldots + (-1)^q A_q,$$

(14) $$A_0 > A_1 > A_1 \quad \ldots > A_q > 0,$$

dann liefert die Summe einer geraden Anzahl vom ersten ab auf einander folgender Glieder einen kleinern, die Summe einer ungeraden Anzahl vom ersten ab auf einander folgender Glieder einen grösseren Werth als D, oder es gelten die Ungleichheiten

(15) $$\begin{cases} D > A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2m-2} - A_{2m-1} \\ D < A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2m-2} - A_{2m-1} + A_{2m}. \end{cases}$$

Vermöge derselben folgen aus (5) für jede unter l liegende ungerade Zahl $2m+1$ die Ungleichheiten

(16) $$\begin{cases} S > R_0 - R_1 + \ldots + R_{2m-2} - R_{2m-1} \\ S < R_0 - R_1 + \ldots + R_{2m-2} - R_{2m-1} + R_{2m}, \end{cases}$$

und ebenso aus (9) die entsprechenden

(17) $$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} > \varrho_0 - \varrho_1 + \ldots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1} \\ \dfrac{\pi}{2} < \varrho_0 - \varrho_1 + \ldots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}. \end{cases}$$

Die beiden Ungleichheiten (16) lassen sich mit Hülfe von (8) erweitern, und zwar die erstere, indem statt $R_0, R_2, \ldots$ kleinere Werthe, statt $R_1, R_3, \ldots$ grössere Werthe gesetzt werden, die zweite durch das umgekehrte Verfahren. So ergiebt sich

(18) $$\begin{cases} S > \varphi\left(\dfrac{\pi}{k}\right)\varrho_0 - \varphi\left(\dfrac{\pi}{k}\right)\varrho_1 + \ldots + \varphi\left(\dfrac{(2m-1)\pi}{k}\right)\varrho_{2m-2} - \varphi\left(\dfrac{(2m-1)\pi}{k}\right)\varrho_{2m-1} \\ S < \varphi(0)\varrho_0 - \varphi\left(\dfrac{2\pi}{k}\right)\varrho_1 + \ldots - \varphi\left(\dfrac{2m\pi}{k}\right)\varrho_{2m-1} + \varphi\left(\dfrac{2m\pi}{k}\right)\varrho_{2m}, \end{cases}$$

oder durch Vereinigung der mit gleichen Factoren versehenen Glieder

(19) $$\begin{cases} S > \varphi\left(\dfrac{\pi}{k}\right)(\varrho_0 - \varrho_1) + \ldots \quad + \varphi\left(\dfrac{(2m-1)\pi}{k}\right)(\varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1}) \\ S < \quad \varphi(0)\,\varrho_0 - \varphi\left(\dfrac{2\pi}{k}\right)(\varrho_1 - \varrho_2) - \ldots - \varphi\left(\dfrac{2m\pi}{k}\right)(\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}). \end{cases}$$

Da ferner sowohl die Differenzen $\varrho_0 - \varrho_1$, $\varrho_2 - \varrho_3, \ldots$ wie auch die Differenzen $\varrho_1 - \varrho_2$, $\varrho_3 - \varrho_4, \ldots$ positiv sind, so wird die rechte Seite der ersten Ungleichheit verkleinert oder keinenfalls vergrössert, wenn man statt der Functionswerthe

$\varphi\left(\frac{\pi}{k}\right), \cdots \varphi\left(\frac{(2m-1)\pi}{k}\right)$ den keinenfalls zu grossen Werth $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$, und die rechte Seite der zweiten Ungleichheit keinenfalls verkleinert, wenn man statt der Functionswerthe $\varphi\left(\frac{2\pi}{k}\right), \cdots \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ den schon characterisirten letzten Werth $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ substituirt, und es kommt

$$(20) \qquad S > \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)(\varrho_0 - \varrho_1 + \cdots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1}),$$

$$(21) \qquad S < \varphi(0)\,\varrho_0 - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)(\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m});$$

die zweite Ungleichheit (21) geht durch Addition und Subtraction des Ausdrucks $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\varrho_0$ in die folgende über

$$(21^*) \quad S < \left(\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right)\varrho_0 + \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)(\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \cdots - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}).$$

Die Summen, mit denen auf der rechten Seite von (20) und (21*) der Functionswerth $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ multiplicirt wird, sind beziehungsweise dieselben, durch welche nach (17) der Werth $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen ist. Ihr Unterschied ist die Grösse ϱ_{2m}, die sich zufolge (10) zwischen den folgenden Grenzen befindet,

$$(22) \qquad \frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}}\,\frac{2}{k} > \varrho_{2m} > \frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}\,\frac{2}{k};$$

die Zahl $2m+1$ liegt unter l, die Grösse $\frac{l\pi}{k}$ unter h, mithin auch $\frac{(2m+1)\pi}{k}$ unter h. Um nun zu erkennen, wie sich der Werth S bei einer über jedes Mass wachsenden Zahl k verhält, kann die zugehörige Zahl $2m+1$ so gewählt werden, dass die Grösse ϱ_{2m} beliebig klein wird. Dies geschieht, indem man die Zahl $2m+1$ mit k zusammen, jedoch in solcher Weise wachsen lässt, dass der Bruch $\frac{2m+1}{k}$ abnimmt. Wird zum Beispiel $2m+1$ gleich derjenigen ungeraden Zahl genommen, die dicht unter der Quadratwurzel aus k liegt, so ist $\frac{(2m+1)\pi}{k}$ der aufgestellten Bedingung gemäss für ein genügend grosses k kleiner als die gegebene Grösse h, und sinkt für ein stets zunehmendes k unter jede noch so kleine Grösse herab. Für einen beliebig kleinen Werth $\frac{2m+1}{k}$ convergirt jeder der beiden Brüche

$$\frac{\frac{2m\pi}{k}}{\sin\frac{2m\pi}{k}}, \quad \frac{\frac{(2m+1)\pi}{k}}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}$$

nach § 13 gegen die Einheit; daher ist wegen (22) die Grösse ϱ_{2m} zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, deren obere von $\frac{1}{m\pi}$, deren untere von $\frac{2}{(2m+1)\pi}$ beliebig wenig abweicht, und hat deshalb unter der angegebenen Voraussetzung in der That einen beliebig kleinen Werth.

Leitet man also aus (17) die Ungleichheiten

$$(23) \qquad \varrho_0 - \varrho_1 + \ldots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1} > \frac{\pi}{2} - \varrho_{2m},$$

$$(24) \qquad \varrho_0 - \varrho_1 + \ldots - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m} < \frac{\pi}{2} + \varrho_{2m}$$

ab, so ist klar, dass die erstere in (20) vorkommende Summe grösser als ein beliebig wenig unter $\frac{\pi}{2}$ liegender, die zweite in (21*) vorkommende Summe kleiner als ein beliebig wenig über $\frac{\pi}{2}$ liegender Werth ausfällt. Unter den über k und m getroffenen Voraussetzungen nähert sich das Argument $\frac{2m\pi}{k}$ von der positiven Seite her der Null, folglich, da $\varphi(\gamma)$ als eine stetige Function ihres Arguments definirt ist, die Differenz $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right) - \varphi(0)$ der Null, oder der Werth $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ dem Werthe $\varphi(0)$. Auf der rechten Seite von (21*) ist die Differenz $\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ mit der Grösse ϱ_0 multiplicirt, die auch für einen über jedes Mass wachsenden Werth von k eine gewisse feste Grösse nicht überschreitet. Denn aus der ersten Ungleichheit (17) folgt bei dem Werthe $m = 1$ die Bestimmung

$$\varrho_0 < \frac{\pi}{2} + \varrho_1,$$

ferner aus (10)

$$\varrho_1 < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} \frac{2}{k},$$

mithin

$$(25) \qquad \varrho_0 < \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{k}}{\sin\frac{\pi}{k}} \frac{2}{\pi},$$

wo der zweite Summand der rechten Seite für ein wachsendes k nach dem vorhin angewendeten Schlusse von der Grösse $\frac{2}{\pi}$ beliebig wenig abweicht, folglich eine obere Grenze von ϱ_0 beliebig wenig von der Grösse $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ verschieden ist. Demnach nähert sich auf der rechten Seite von (21*) das aus ϱ_0 und der Differenz $\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ gebildete Product der Null, die Summe $\varrho_0 - \varrho_1 + \ldots - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}$ dem Werth $\frac{\pi}{2}$, auf der rechten Seite von (20) die Summe $\varrho_0 - \varrho_1 + \ldots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1}$ ebenfalls dem Werth $\frac{\pi}{2}$, in beiden Ausdrücken der Functionswerth $\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ dem Functionswerthe $\varphi(0)$. Es convergiren also die beiden Grössen, zwischen denen der Werth S eingeschlossen ist, für eine wachsende Zahl k und eine angemessen gewählte Zahl $2m+1$ gegen denselben Grenzwerth $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, und wir erhalten die Bestimmung

$$(26) \qquad \lim. \int_0^h \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Bei der Ableitung dieses Resultats war angenommen, dass die Function $\varphi(\gamma)$ für das Integrationsintervall endlich, stetig, positiv und niemals wachsend sei; indessen kann man die betreffenden Voraussetzungen bedeutend erweitern. Es sei $\varphi(\gamma)$ innerhalb des Integrationsintervall endlich, stetig, stets negativ und algebraisch niemals abnehmend, dann hat die Function $-\varphi(\gamma)$ diejenigen Eigenschaften, welche vorher der Function $\varphi(\gamma)$ beigelegt wurden, und daher gilt die Gleichung

$$(27) \qquad \lim . \int_0^h (-\varphi(\gamma)) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} (-\varphi(0));$$

diese geht aber, indem beide Seiten mit der negativen Einheit multiplicirt werden, in die Gestalt von (26) über. In (26) ist ferner der Fall mit einbegriffen, dass $\varphi(\gamma)$ gleich einer positiven Constante oder vermöge der letzten Erwägung auch gleich einer negativen Constante sei. Man hat also für eine positive oder negative Constante c die Gleichung

$$(28) \qquad \lim . \int_0^h c \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} c.$$

Wenn nun eine Function $\varphi(\gamma)$ für das ganze Intervall endlich und stetig ist und niemals wächst, so kann stets durch Hinzuaddiren einer positiven Constante c bewirkt werden, dass $\varphi(\gamma)+c$ ausser den genannten Eigenschaften von $\varphi(\gamma)$ noch die neue erhält, stets positiv zu sein; wenn dagegen eine Function $\varphi(\gamma)$ für das ganze Intervall endlich und stetig ist und niemals abnimmt, so lässt sich immer eine negative Constante c so wählen, dass $\varphi(\gamma)+c$ ausser den Eigenschaften von $\varphi(\gamma)$ noch die neue bekommt, stets negativ zu sein. Beide Male ist daher die Anwendung der Gleichung (26) auf die Verbindung $\varphi(\gamma)+c$ berechtigt und liefert das Ergebniss

$$(29) \qquad \lim . \int_0^h ((\varphi(\gamma)+c)) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} \varphi(0) + \frac{\pi}{2} c.$$

Die linke Seite lässt sich durch die Summe der linken Seite von (28) und eines mit der linken Seite von (26) übereinstimmenden Ausdrucks ersetzen. Daher folgt durch Subtraction wieder die Gleichung

$$(30) \qquad \lim . \int_0^h \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

welche jetzt für jede Function $\varphi(\gamma)$ erwiesen ist, die von $\gamma=0$

bis $\gamma = h$ endlich und stetig ist und nicht vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht.

Für den beabsichtigten Gebrauch ist es wesentlich, auch den Werth eines Integrals zu bestimmen, dessen Function die Gestalt von (30) hat, bei dem aber die Integration mit einem von Null verschiedenen Werthe beginnt. Es sei $\varphi(\gamma)$ von $\gamma = g$ bis $\gamma = h$, wo $0 < g < h \leqq \frac{\pi}{2}$ ist, als eine endliche, stetige und nicht vom Wachsen zum Abnehmen übergehende Function gegeben, so darf man vorschreiben, dass $\varphi(\gamma)$ für das von 0 bis g reichende Intervall unverändert gleich dem gegebenen Anfangswerthe $\varphi(g)$ sei, und hat dann eine Function $\varphi(\gamma)$, die von $\gamma = 0$ bis $\gamma = h$ die Bedingungen unserer Gleichung (30) erfüllt. Wendet man die letztere zuerst für das von 0 bis g, darauf für das von 0 bis h reichende Intervall an, so kommt

$$(31)\quad \lim . \int_0^g \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} \varphi(0), \quad \lim . \int_0^h \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

mithin durch Subtraction

$$(32)\qquad \lim . \int_g^h \varphi(\gamma) \frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma} d\gamma = 0.$$

Man findet also, dass ein von g bis h ausgedehntes Integral, wofern die untere Grenze g die Null übertrifft und die grössere obere Grenze h nicht über $\frac{\pi}{2}$ liegt, bei wachsender Zahl k gegen die Null als Grenzwerth convergirt, während für $g = 0$ nach (30) der Grenzwerth $\frac{\pi}{2} \varphi(0)$ erscheint.

Die Function $\frac{\sin k\gamma}{\sin \gamma}$ verwandelt sich bei einer Substitution $\gamma = \pi - \gamma'$, weil k eine ungerade Zahl bedeutet, in den Ausdruck $\frac{\sin k\gamma'}{\sin \gamma'}$; folglich ist ein Integral von der Gestalt (32), bei dem die Grenzen g und h zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegen, vermöge des Satzes (V) in § 25 gleich dem Integral

$$(33) \qquad \int\limits_{\pi-h}^{\pi-g} \varphi(\pi-\gamma')\,\frac{\sin k\gamma'}{\sin\gamma'}\,d\gamma',$$

dessen Gestalt mit (32) übereinstimmt, und dessen Grenzen sich zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ befinden. Für eine wachsende Zahl k convergirt dieses Integral unter den obigen Voraussetzungen gegen den Grenzwerth Null oder $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi)$, jenachdem $h=\pi$ oder kleiner als π ist, wodurch der Grenzwerth eines Integrals (32), bei dem $\frac{\pi}{2}\leqq g<h\leqq\pi$ ist, bestimmt wird. Ein Integral (32) von der bezeichneten Beschaffenheit, bei dem $0\leqq g<\frac{\pi}{2}<h\leqq\pi$ ist, lässt sich in zwei Integrale zerlegen, von denen das erste von g bis $\frac{\pi}{2}$, das zweite von $\frac{\pi}{2}$ bis h auszudehnen ist; nach dem Obigen nähert sich für eine wachsende Zahl k das erste dem Werthe Null oder $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, jenachdem $g>0$ oder gleich Null, das zweite dem Werthe Null oder $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi)$ jenachdem $h<\pi$ oder gleich π ausfällt, so dass für das vorgelegte Integral die folgende Bestimmung des Grenzwerthes entsteht

$$(34) \qquad \begin{array}{lll} g>0, & h<\pi; & 0 \\ g=0, & h<\pi; & \frac{\pi}{2}\varphi(0) \\ g>0, & h=\pi; & \frac{\pi}{2}\varphi(\pi) \\ g=0, & h=\pi; & \frac{\pi}{2}\varphi(0)+\frac{\pi}{2}\varphi(\pi). \end{array}$$

Mithin können alle bisherigen Ergebnisse in den folgenden Satz vereinigt werden:

Wenn eine Function $\varphi(\gamma)$ für das von $\gamma=g$ bis $\gamma=h$ ausgedehnte Intervall, wo $0\leqq g<h\leqq\pi$ ist, willkürlich, und zwar endlich, stetig und so gegeben ist, dass sie nicht vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht, so nähert sich das Integral $\int\limits_g^h \varphi(\gamma)\,\frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma$ für eine über jedes Mass wachsende Zahl k

einem Grenzwerthe, der bei $g > 0, h < \pi$ *gleich Null, bei* $g = 0, h < \pi$ *gleich* $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, *bei* $g > 0, h = \pi$ *gleich* $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi)$, *bei* $g = 0, h = \pi$ *gleich* $\frac{\pi}{2}\varphi(0) + \frac{\pi}{2}\varphi(\pi)$ *ist.*

Das in Rede stehende Integral zeigt somit die Erscheinung, dass für einen wachsenden Werth von k diejenigen Theile der Integration, für welche in dem Factor $\frac{\sin k\gamma}{\sin\gamma}$ der willkürlichen Function $\varphi(\gamma)$ der Nenner nicht verschwindet, verschwindende Beiträge liefern, dagegen die Theile, die den Werthen $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi$ nahe liegen, eine solche Bedeutung gewinnen, dass sie allein den Grenzwerth des Integrals hervorbringen. Derselbe ist das Product der Constante $\frac{\pi}{2}$ in den Functionswerth, welcher beziehungsweise zu der Stelle $\gamma = 0$ oder der Stelle $\gamma = \pi$ gehört, oder auch falls beide Stellen vorkommen, das Product von $\frac{\pi}{2}$ in das Aggregat der beiden Functionswerthe.

§ 81. Werthbestimmung der trigonometrischen Reihe. Beispiel. Bedingte und Unbedingte Convergenz von Reihen, insbesondere von trigonometrischen Reihen.

Indem wir jetzt zu dem Integral (10) des § 79 zurückkehren, welches gleich der Summe der $2n + 1$ ersten Glieder der vorgelegten trigonometrischen Reihe ist, dürfen wir dasselbe als die Summe von zwei Integralen betrachten, deren Integration respective von der unteren Grenze $\frac{-\pi - \vartheta}{2}$ bis zu Null, und von Null bis zu der oberen Grenze $\frac{\pi + \vartheta}{2}$ ausgedehnt wird,

$$(1)\quad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi-\vartheta}{2}}^{0} f(\vartheta + 2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}d\gamma + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} f(\vartheta + 2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}d\gamma.$$

Wofern ϑ, wie in § 77 festgesetzt wurde, zwischen $-\pi$ und π liegt, fällt die Grösse $\frac{-\pi-\vartheta}{2}$ negativ, die Grösse $\frac{\pi-\vartheta}{2}$

positiv aus, so dass sich zwischen den beiden Werthen die Null befindet; bei dem extremen Werthe $\vartheta = -\pi$ verschwindet die Grösse $\frac{\pi+\vartheta}{2}$, wodurch das erste, bei $\vartheta = \pi$ die Grösse $\frac{\pi-\vartheta}{2}$, wodurch das zweite Integral fortfällt. Doch reicht es nach einer obigen Bemerkung hin, den einen Werth $\vartheta = -\pi$ beizubehalten. Bei der Einführung einer neuen Variable $\gamma' = -\gamma$ verwandelt sich das erste der beiden Integrale (1) in ein Integral von derselben Gestalt

$$\frac{-1}{\pi}\int_{\frac{\pi+\vartheta}{2}}^{0} f(\vartheta - 2\gamma')\,\frac{\sin(2n+1)\gamma'}{\sin\gamma'}\,d\gamma'.$$

Hier wird nach dem vorhin benutzten Satze (V) des § 25 der Werth des Integrals durch Vertauschung der beiden Grenzen mit der negativen Einheit multiplicirt. Ersetzt man nun der Uebereinstimmung wegen γ' durch den früheren Buchstaben γ, so geht (1) in die Summe der folgenden Integrale über

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} f(\vartheta + 2\gamma)\,\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+\vartheta}{2}} f(\vartheta - 2\gamma)\,\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma.$$

Vermöge des für die Variable ϑ angenommenen Umfanges $-\pi \leqq \vartheta < \pi$ hat man

$$(3)\qquad 0 < \frac{\pi-\vartheta}{2} \leqq \pi,\quad 0 \leqq \frac{\pi+\vartheta}{2} < \pi,$$

so dass die oberen Grenzen beider Integrale positiv und nicht grösser als π sind. Mithin kann man den Grenzwerth, gegen welchen jedes Integral für eine wachsende Zahl $2n+1$ convergirt, unter weit reichenden Bedingungen durch den Satz des vorigen § auffinden. Die nächst liegende im Anfange des § ausgesprochene Voraussetzung war die, dass $f(\vartheta)$ in dem bezeichneten Intervall eine eindeutige, endliche und stetige Function von ϑ sei, und zwar gehört hier zu dem Begriffe der Stetigkeit, da die Reihe für die Argumente $-\pi$ und π denselben Werth annimmt, dass die Werthe der gegebenen Function $f(-\pi+\varepsilon)$ und $f(\pi+\varepsilon)$, sobald die positive Grösse ε gegen die Null abnimmt, sich demselben Werthe nähern. Da indessen die Integrationen, welche zu der Herstellung der Coefficienten der Reihe in (11) des § 78 erforderlich sind, nach § 73 auch dann ausgeführt werden können, wenn die Function $f(\vartheta)$ an einzelnen Stellen des Intervalls Unterbrechungen der Stetigkeit erfährt, so darf die Frage nach der Convergenz und Werthbestimmung der trigonometrischen Reihe auch auf Functionen ausgedehnt werden, die an einzelnen Stellen unstetig sind. Der Satz des vorigen § erlaubt eine Beantwortung, wofern die Function $f(\vartheta)$ überall eindeutig und endlich ist, nur für eine beschränkte Zahl von Werthen unstetig wird, und ebenfalls nur für eine beschränkte Zahl von Werthen vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht.

Es seien $e_1, e_2, \ldots e_{\nu-1}$ diejenigen Werthe von γ, für welche in dem ersten Integral (2) die Function $f(\vartheta + 2\gamma)$ unstetig wird oder vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht, ferner sei $e_\nu = \frac{\pi - \vartheta}{2}$. Dann ist das betreffende Integral gleich einer Summe von Integralen, deren Grenzen respective 0 und e_1, e_1 und $e_2, \ldots e_{\nu-1}$ und e_ν sind, und auf die der Satz des vorigen § Anwendung findet. Schliessen wir zunächst den Fall aus, dass $\vartheta = -\pi$, mithin $e_\nu = \pi$ sei, so convergirt bei wachsender Zahl $2n+1$ das erste Integral

$$\int_0^{e_1} f(\vartheta + 2\gamma) \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma} d\gamma$$

gegen das Product von $\frac{\pi}{2}$ in den Werth der Function, der einem positiven abnehmenden γ entspricht und mit $f(\vartheta + \varepsilon)$ bezeichnet werden möge, und es entsteht durch Hinzufügung des Factors $\frac{1}{\pi}$ der Grenzwerth $\frac{1}{2} f(\vartheta + \varepsilon)$; alle übrigen Integrale, bei denen die beiden Grenzen weder gleich Null noch gleich π sind, nähern sich dagegen dem Grenzwerthe Null. Mithin stellt $\frac{1}{2} f(\vartheta + \varepsilon)$ den Grenzwerth des ganzen ersten Integrals in (2) dar. Für das zweite Integral in (2) gilt genau dieselbe Betrachtung; indessen kann hier vermöge der zweiten Ungleichheit (3) die obere Grenze mit der unteren Grenze Null zusammenfallen, so dass diese Voraussetzung, bei der das ganze zweite Integral verschwindet, auszunehmen ist. In allen übrigen Fällen ergiebt sich als Grenzwerth des genannten Integrals, indem ε wieder eine positive gegen die Null abnehmende Grösse bedeutet, da γ von der positiven Seite her gegen die Null convergirt und die Function $f(\vartheta - 2\gamma)$ vorliegt, der Werth $\frac{1}{2} f(\vartheta - \varepsilon)$. Die in (2) dargestellte Summe der beiden Integrale convergirt daher gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2} f(\vartheta + \varepsilon) + \frac{1}{2} f(\vartheta - \varepsilon)$. In dem bis jetzt ausgeschlossenen Falle, wo $\vartheta = -\pi$ ist, demnach das erste Integral in (2) von 0 bis π geht, das zweite Integral aber gleich Null wird, hat man entweder e_1 gleich π, dann liefert das betreffende Integral für eine wachsende Zahl $2n+1$ in der zuletzt gebrauchten Bezeichnung den Grenzwerth $\frac{1}{2} f(-\pi + \varepsilon) + \frac{1}{2} f(\pi - \varepsilon)$; oder e_1 ist nicht gleich π, dann convergirt das erste Theilintegral gegen $\frac{1}{2} f(-\pi + \varepsilon)$, jedes zwischenliegende gegen die Null, das letzte gegen $\frac{1}{2} f(\pi - \varepsilon)$, also das ganze Integral wieder gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2} f(-\pi + \varepsilon) + \frac{1}{2} f(\pi - \varepsilon)$. *Man darf also schliessen, dass unter den angeführten die Function $f(\vartheta)$ betreffenden Voraussetzungen die zugehörige trigonometrische Reihe stets convergirt und, falls ϑ in dem angenommenen Intervall nicht gleich $-\pi$ ist, den Werth*

$$\frac{1}{2}(f(\vartheta + \varepsilon) + f(\vartheta - \varepsilon)), \tag{4}$$

falls $\vartheta = -\pi$ ist, den Werth

$$\frac{1}{2}(f(-\pi + \varepsilon) + f(\pi - \varepsilon)) \tag{5}$$

ausdrückt. Wenn die gegebene Function für das ausgewählte Argument ϑ stetig ist, so nähern sich $f(\vartheta - \varepsilon)$ und $f(\vartheta + \varepsilon)$ bei abnehmendem ε demselben Werthe $f(\vartheta)$, welcher also durch die Reihe richtig dargestellt wird; ebenso erhält man, wenn sich die Werthe $f(-\pi + \varepsilon)$ und $f(\pi - \varepsilon)$ nach der Stetigkeit an einander schliessen, *als Werth der Reihe den gegebenen Werth der Function, welcher mit $f(-\pi)$ oder $f(\pi)$ bezeichnet werden kann.*

Die Bedeutung, welche dem wiederholt gebrauchten Satze des vorigen § inne wohnt, veranlasst dazu, noch eine Bemerkung über das Integral

$$(6) \qquad \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\, d\gamma$$

hinzuzufügen. Für die obere Grenze $h = \frac{\pi}{2}$ wurde der Werth mit Hülfe der obigen Gleichung

$$(7) \qquad \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma} = 1 + 2\cos 2\gamma + 2\cos 4\gamma + \ldots + 2\cos 2n\gamma$$

gleich $\frac{\pi}{2}$ gefunden; andererseits lehrt der erwähnte Satz, dass das Integral für jeden positiven zwischen 0 und π liegenden Werth von h bei einer wachsenden Zahl $2n+1$ immer gegen den Grenzwerth $\frac{\pi}{2}$ convergiren muss. Nun lässt sich aber, sobald der Ausdruck der rechten Seite von (7) in das Integral eingesetzt wird, die Integration der einzelnen Bestandtheile von 0 bis zu der beliebigen Grösse h vollziehen, woraus die Gleichung

$$(8) \quad \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\, d\gamma = h + \frac{2\sin 2h}{2} + \frac{2\sin 4h}{4} + \ldots + \frac{2\sin 2nh}{2n}$$

hervorgeht. Die rechte Seite muss, so lange $0 < h < \pi$ ist, für eine wachsende Zahl n den Werth $\frac{\pi}{2}$ ausdrücken. Diese auffallende Erscheinung hängt mit einer andern zusammen, die in I, § 120 beobachtet wurde. Setzt man auf der rechten Seite von (8) statt h den Ausdruck $\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}$, so bestehen die Ungleichheiten

$$(9) \qquad -\pi < \psi < \pi,$$

ferner wird

$$\sin \overline{(2m+1)\,2h} = \sin \overline{(2m+1)(\pi - \psi)} = \sin(2m+1)\psi,$$
$$\sin \overline{2m\,.\,2h} = \sin \overline{2m(\pi - \psi)} = -\sin 2m\psi,$$

und es entsteht das Aggregat

$$(10)\qquad \frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}+\sin\psi-\frac{\sin 2\psi}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin n\psi}{n}.$$

Dass diese Summe gegen $\frac{\pi}{2}$ convergirt, bedeutet aber dasselbe wie die Gleichung (13) des angeführten §, welche für den gleichen Umfang von ψ gilt und folgendermassen lautet

$$(11)\qquad \frac{\psi}{2}=\sin\psi-\frac{\sin 2\psi}{2}+\frac{\sin 3\psi}{3}\mp\ldots.$$

An der citirten Stelle ist hervorgehoben, dass die vorliegende aus der logarithmischen Reihe abgeleitete Reihe für die extremen Werthe $\psi=-\pi$ und $\psi=\pi$ nicht den auf der linken Seite von (11) befindlichen Ausdruck, sondern den Werth Null darstellt und daher eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt. Allein die betreffende Reihe gehört wieder selbst zu den trigonometrischen Reihen und kann auch als ein Beispiel der so eben entwickelten Theorie aufgefasst werden.

Um dies deutlich zu machen, möge die letztere zunächst auf ein etwas allgemeineres Beispiel angewendet werden. Es habe die gegebene Function $f(\vartheta)$ die in § 73 beiläufig berührte Beschaffenheit, dass sie in dem einen Theile des Intervalls, von $-\pi$ bis 0, gleich dem Ausdrucke ersten Grades $l\vartheta+r$, in dem anderen Theile des Intervalls, von 0 bis π, gleich $l'\vartheta+r'$ sei, wo l, r, l', r' beliebige Constanten bedeuten. Die Coefficienten der zugehörigen trigonometrischen Reihe a_m und b_m werden nach den Formeln (11) des § 78 gebildet; hierzu dienen für das von $-\pi$ bis 0 gehende Intervall die vermittelst § 70 leicht auszuführenden unbestimmten Integrationen

$$(12)\qquad \int(l\alpha+r)\,d\alpha \qquad =\frac{l\alpha^2}{2}+r\alpha,$$

$$(13)\qquad \int(l\alpha+r)\cos m\alpha\,d\alpha=l\left(\alpha\frac{\sin m\alpha}{m}+\frac{\cos m\alpha}{m^2}\right)+r\frac{\sin m\alpha}{m},$$

$$(14)\qquad \int(l\alpha+r)\sin m\alpha\,d\alpha=l\left(-\alpha\frac{\cos m\alpha}{m}+\frac{\sin m\alpha}{m^2}\right)-r\frac{\cos m\alpha}{m},$$

und für das von 0 bis π gehende Intervall die entsprechenden Gleichungen, in denen gleichzeitig l durch l', m durch m' ersetzt wird. Durch Einführung der Grenzen und Addition der erhaltenen Resultate erhält man somit die folgenden Ausdrücke:

$$(15)\quad \begin{cases} a_0 = -(l-l')\dfrac{\pi}{2} + r + r', \\ a_m = \dfrac{(l-l')}{\pi}\dfrac{1-\cos m\pi}{m^2}, \; m>0 \\ b_m = -(l+l')\dfrac{\cos m\pi}{m} - \dfrac{r-r'}{\pi}\dfrac{1-\cos m\pi}{m}, \; m>0. \end{cases}$$

Da $\cos m\pi$ für jedes gerade m gleich der positiven, für jedes ungerade m gleich der negativen Einheit wird, also auch durch das Zeichen $(-1)^m$ ausgedrückt werden könnte, so folgt, dass $1-\cos m\pi$ für jedes gerade m verschwindet, für jedes ungerade gleich 2 wird. Die Function $f(\vartheta)$ hat bei der Annäherung des Arguments gegen die Null, gegen $-\pi$ oder $+\pi$, falls ε wieder eine positive abnehmende Grösse bedeutet, respective die Werthe

$$f(-\varepsilon) \quad = -l\varepsilon + r, \qquad f(\varepsilon) \quad = l'\varepsilon + r,$$
$$f(-\pi+\varepsilon) = \quad l(-\pi+\varepsilon) + r, \; f(\pi-\varepsilon) = l'(\pi-\varepsilon) + r';$$

folglich ergiebt die trigonometrische Reihe für $\vartheta = 0$ den Werth

$$\lim.\frac{1}{2}(f(-\varepsilon)+f(\varepsilon)) = \frac{r+r'}{2},$$

für $\vartheta = -\pi$ oder π den Werth

$$\lim.\frac{1}{2}(f(-\pi+\varepsilon)+f(\pi-\varepsilon)) = -\frac{(l-l')}{2}\pi + \frac{r+r'}{2}.$$

Ehe wir die Function $f(\vartheta)$ durch Annahme von Beziehungen zwischen den 4 Constanten l, r, l', r' specialisiren, haben wir noch einen Umstand hervorzuheben. Wenn die gegebene Function die Bedingung erfüllt, für entgegengesetzte Argumente denselben Werth anzunehmen, so verschwinden die sämmtlichen Coefficienten b_m der Sinusglieder

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha,$$

weil das von $-\pi$ bis 0 und das von 0 bis π genommene Integral aus gleichen und entgegengesetzten Elementen bestehen, und es bleibt eine reine Cosinusreihe zurück; wenn dagegen die gegebene Function die Eigenschaft hat, für entgegengesetzte Argumente entgegengesetzte Werthe zu erhalten, so verschwinden aus entsprechenden Gründen die sämmtlichen Coefficienten a_m der Cosinusglieder

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha\, d\alpha,$$

das Glied a_0 eingeschlossen, und es bleibt eine reine Sinusreihe übrig. Damit in dem obigen Beispiel der erste Fall $f(\vartheta) = f(-\vartheta)$ eintrete, muss

$$l'\vartheta + r' = -l\vartheta + r$$

sein, das heisst

(16) $$l' = -l,\ r' = r;$$

für den zweiten Fall $f(\vartheta) = -f(-\vartheta)$ ergiebt sich die Bedingung

$$l'\vartheta + r' = l\vartheta - r,$$

folglich

(17) $$l' = l,\ r' = -r.$$

Unter der letztern Voraussetzung wird also von $-\pi$ bis 0 die Function $l\vartheta + r$, von 0 bis π die Function $l\vartheta - r$ durch die reine Sinusreihe

(18) $$\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(-2l \frac{(-1)^m}{m} - \frac{2r}{\pi} \frac{(1-(-1)^m)}{m} \right) \sin m\vartheta$$

mit der Beschränkung dargestellt, dass sie sowohl für $\vartheta = 0$ wie auch für $\vartheta = \pm\pi$ den Werth Null liefert. Die an der Stelle $\vartheta = 0$ stattfindende Unstetigkeit hört auf, sobald der Constante r der Werth Null beigelegt wird. Dann hat die gegebene Function für das ganze von $-\pi$ bis π reichende Intervall den Ausdruck $l\vartheta$, während sich (18) zu der Reihe

(18*) $$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2l(-1)^{m-1}}{m} \sin m\vartheta$$

vereinfacht. Entfernt man jetzt sowohl in der Function wie in der Reihe den gemeinsamen Factor $2l$ und ersetzt ϑ durch ψ, so erscheint die obige Gleichung (11), deren Ableitung aus dem gewählten Beispiel beabsichtigt war.

Die Eigenschaft der trigonometrischen Reihen, willkürlich gegebene unstetige Functionen darstellen zu können, ist deshalb so überraschend, weil jedes einzelne Glied der Reihe eine stetige Function des Arguments ist. Wie wir sahen, verhält sich die Reihe, sobald die gegebene Function für einen Werth $\vartheta = \vartheta_0$ unstetig ist, in der Weise, dass sie für ein um eine beliebig kleine positive Grösse δ über ϑ_0 liegendes Argument

$\vartheta_0 + \delta$ die Function $f(\vartheta_0 + \delta)$, für ein Argument $\vartheta_0 - \delta$ die Function $f(\vartheta_0 - \delta)$, dagegen für das Argument ϑ_0 selbst das arithmetische Mittel $\lim. \frac{1}{2}(f(\vartheta_0 + \delta) + f(\vartheta_0 - \delta))$ ausdrückt. Jeder der drei Werthe wird erhalten, indem man eine hinreichend grosse Anzahl in der oben bezeichneten Weise auf einander folgender Glieder der Reihe addirt, und zwar mögen bei ϑ_0, $\vartheta_0 + \delta$, $\vartheta_0 - \delta$ respective $2n+1$, $2n'+1$, $2n''+1$ Glieder erforderlich sein, damit die Darstellung bis auf eine und dieselbe kleine Grösse genau werde. Würde man die zu ϑ_0 gehörende Zahl $2n+1$ festhalten und statt des Arguments ϑ_0 ein um die Grösse ϱ verschiedenes Argument $\vartheta_0 + \varrho$ oder $\vartheta_0 - \varrho$ substituiren, so bewirkte die Stetigkeit der sämmtlichen $2n+1$ ersten Glieder der trigonometrischen Reihe, dass für einen genügend kleinen Werth von ϱ das ganze Aggregat einen Werth bekäme, der von dem zu $\vartheta = \vartheta_0$ gehörenden Werth beliebig wenig abwiche. Aus diesem Grunde würde die Summe der $2n+1$ ersten Glieder einen Werth darstellen, welcher von dem zu $\vartheta = \vartheta_0$ gehörenden Werthe $\lim. \frac{1}{2}(f(\vartheta_0 + \delta) + f(\vartheta_0 - \delta))$ beliebig wenig verschieden wäre. Weil aber nachgewiesen ist, dass bei dem vorhin characterisirten Argument $\vartheta_0 + \delta$ die $2n'+1$ ersten Glieder der vorliegenden Reihe den Werth $f(\vartheta_0 + \delta)$ darstellen, welcher von dem vorhin bezeichneten Werthe um eine endliche Grösse differirt, so muss die hierzu erforderliche Zahl $2n'+1$ weit grösser als die Zahl $2n+1$ sein. Für die zu dem Argument $\vartheta_0 - \delta$ gehörende Zahl $2n''+1$ ergiebt sich auf gleiche Weise, dass $2n+1$ von derselben übertroffen werden muss. Hiernach leuchtet es ein, dass die Darstellung von Werthen, die bei abnehmenden Unterschieden der Argumente um endliche Grössen von einander abweichen, nur dadurch zu Stande kommen kann, dass eine immer grössere Anzahl der auf einander folgenden Glieder der trigonometrischen Reihe addirt wird. Dieses Resultat lässt sich auch durch directe Betrachtung des obigen Ausdrucks (1) bestätigen, welcher die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der trigonometrischen Reihe als eine Summe von zwei bestimmten Integralen wiedergibt, und von dem die gefundene Werthbestimmung ausging. Ausserdem sieht man ein, dass die vorläufige Annahme, welche in § 78 über die Art der Convergenz einer trigonometrischen Reihe gemacht, dagegen bei der mit § 79 beginnenden Untersuchung mit ausdrücklichen Worten aufgehoben wurde, in der That nicht zutrifft, sobald die zu entwickelnde Function an einzelnen Stellen unstetig ist.

Bei dem vorgetragenen Convergenzbeweise der trigonometrischen Reihe ist es wesentlich, dass zu dem Anfangsgliede eine Anzahl der nach den Vielfachen des Arguments geordneten auf einander folgenden Cosinusglieder und die gleiche Anzahl der ebenso auf einander folgenden Sinusglieder zusammen addirt wird, um den Ausdruck zu erhalten, dessen Grenzwerth bei fortdauerndem Wachsen jener Anzahl als die Summe der Reihe definirt ist.

Dieser Umstand hängt mit einem wichtigen Unterschiede zusammen, der bei convergenten Reihen vorkommt, und von *Dirichlet* in § 1 der Arbeit: *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält,* Abhandl. der Berliner Academie vom J. 1837, hervorgehoben ist. Nach den Bezeichnungen von I, § 105 seien $c_0, c_1, c_2, \ldots$ bestimmte reelle Grössen und s_q für jede Zahl q deren Summe,

(19) $$s_q = c_0 + c_1 + \ldots + c_q.$$

Die Convergenz derselben bei unendlicher Ausdehnung sei dadurch festgestellt, dass die Differenz $s_{q+t} - s_q$ die Eigenschaft hat, für einen hinreichend grossen Werth von q und für jeden Werth von t numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω zu werden. Dann können die in der Differenz

(20) $$s_{q+t} - s_q = c_{q+1} + c_{q+2} + \ldots + c_{q+t}$$

zusammengefassten Glieder ein doppeltes Verhalten zeigen. Entweder ist es möglich, aus denselben eine Folge von Gliedern heraus zu heben, deren Summe

(21) $$c_{q'} + c_{q''} + \ldots + c_{q^{(\tau)}}$$

die gegebene kleine Grösse ω numerisch um eine von ω unabhängige endliche Grösse übertrifft, oder dies ist nicht möglich. In dem ersten Falle erhält man nach Weglassen der mit

$c_{q'}, c_{q''}, \ldots c_{q^{(\tau)}}$ bezeichneten Glieder durch Zusammenfassen der übrig bleibenden eine Summe, deren Werth von dem Grenzwerth der Summe s_{q+t} um eine von ω unabhängige endliche Grösse abweicht, in dem zweiten Falle kann dies nicht geschehen. *In dem ersten Falle sagt man, dass die unendliche Reihe nur in der gegebenen Anordnung oder bedingt, in dem zweiten Falle, dass sie unabhängig von der gegebenen Anordnung oder unbedingt convergire.*

Zu der Gattung der unbedingt convergenten Reihen gehören alle diejenigen, aus denen, falls alle Glieder absolut genommen werden, convergente Reihen entstehen. Denn unter dieser Annahme muss, wofern der absolute Werth von c_q mit $\sqrt{c_q^2}$ bezeichnet wird, das zu (20) gehörende Aggregat

$$(22) \qquad \sqrt{(c_{q+1})^2} + \sqrt{(c_{q+2})^2} + \ldots + \sqrt{(c_{q+t})^2}$$

für ein hinreichend grosses q und ein beliebiges t kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω sein. Nimmt man nun das zu einer beliebigen Gruppe von Gliedern (21) gehörende Aggregat

$$(23) \qquad \sqrt{c_{q'}^2} + \sqrt{c_{q''}^2} + \ldots + \sqrt{c_{q^{(\tau)}}^2},$$

so ist dasselbe nothwendig in (22) enthalten und deshalb numerisch kleiner als die Grösse ω. Weil aber der numerische Werth von (21) immer kleiner und nur im Falle von lauter gleichen Vorzeichen gleich (23) ist, so muss der erstere ebenfalls kleiner als ω sein, wie zu beweisen war. Die Eigenschaft einer Reihe, dass die absoluten Werthe ihrer Glieder ebenfalls eine convergente Reihe liefern, ist in I, § 109 vorausgesetzt, um das Verfahren der Multiplication von zwei unendlichen Reihen zu begründen. Ferner wird daselbst die aus dem Satze (III) in I, § 107 fliessende Folgerung benutzt, dass eine Potenzreihe

$$(24) \qquad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

bei der die absoluten Werthe der mit einer positiven Grösse $\mathfrak{R}$ gebildeten sämmtlichen Grössen $c_0, c_1 \mathfrak{R}, c_2 \mathfrak{R}^2, \ldots$ unter einer festen Grösse $\mathfrak{C}$ bleiben, für alle Werthe von x, deren absoluter Werth kleiner als $\mathfrak{R}$ ist, convergirt, und bei Ersetzung aller Glieder durch deren absolute Beträge eine convergente Reihe ergiebt, mithin unbedingt convergirt.

Um das Vorhandensein der ersten Gattung von Reihen nachzuweisen, mögen mit derselben positiven Differenz δ und zwei verschiedenen positiven Anfangsgliedern α und γ zwei arithmetische Reihen gebildet, aus diesen durch Division in die Einheit harmonische Reihen abgeleitet, und die Glieder der ersten positiv, die der zweiten negativ genommen werden; dann entsteht die Summe

$$(25)\qquad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{\alpha+(m-1)\delta} - \sum_{m=1}^{m=p} \frac{1}{\gamma+(m-1)\delta}.$$

Jede der beiden hier vereinigten harmonischen Reihen ist nach § 31 so beschaffen, dass sie für eine wachsende Gliederzahl eine über jedes Mass wachsende Grösse ausdrückt, dass aber die Differenz der Reihe und eines dort angegebenen mit der Gliederzahl wachsenden Ausdrucks gegen einen festen Grenzwerth convergirt. Nach der dortigen Gleichung (17_a) gilt für eine ohne Ende wachsende Zahl n mit beliebiger Genauigkeit die Gleichung

$$(26)\qquad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{\alpha+(m-1)\delta} - \frac{1}{\delta}\log\left(1+(n-1)\frac{\delta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\delta}\,\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right),$$

und ebenso für eine stets wachsende Zahl p,

$$(27)\qquad \sum_{m=1}^{m=p} \frac{1}{\gamma+(m-1)\delta} - \frac{1}{\delta}\log\left(1+(p-1)\frac{\delta}{\gamma}\right) = \frac{1}{\delta}\,\psi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wird also die Summe (25) beliebig genau durch den Ausdruck

$$(28)\qquad \frac{1}{\delta}\log\left(1+(n-1)\frac{\delta}{\alpha}\right) - \frac{1}{\delta}\log\left(1+(p-1)\frac{\delta}{\gamma}\right) + \frac{1}{\delta}\left(\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) - \psi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right)$$

dargestellt. In dem ersten Bestandtheil darf die Differenz der beiden Logarithmen durch den Logarithmus des Quotienten ersetzt werden, so dass nach Division mit δ die Grösse

$$(29)\qquad \frac{1}{\delta}\log\left(\frac{1+(n-1)\dfrac{\delta}{\alpha}}{1+(p-1)\dfrac{\delta}{\gamma}}\right)$$

entsteht, während der zweite Bestandtheil von den Zahlen n und p unabhängig ist. Der Werth von (29) richtet sich nach dem Gesetze, nach welchem man die Zahlen n und p

wachsen lässt. Wird $n=p$ genommen, wobei die Summe (25) gleich viele auf einander folgende positive und negative Glieder enthält, so convergirt (29) gegen $\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ und die Summe (25) gegen den Werth

$$(30)\qquad \frac{1}{\delta}\left(\log\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)-\psi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right).$$

Bei jeder beliebigen Zunahme der Zahlen n und p nähert sich jede der beiden Differenzen

$$(31)\qquad \log\left(1+(n-1)\frac{\delta}{\alpha}\right)-\log(n)-\log\left(\frac{\delta}{\alpha}\right),$$
$$\log\left(1+(p-1)\frac{\delta}{\alpha}\right)-\log(p)-\log\left(\frac{\delta}{\gamma}\right),$$

der Null, weshalb der Werth (29) von der Grösse

$$(32)\qquad \frac{\log\left(\frac{n}{p}\right)+\log\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\delta}$$

beliebig wenig abweicht. Es hängt aber der Ausdruck (32) durchaus von dem Verhältniss der Zahlen $\frac{n}{p}$ ab, und kann, indem man diesem einen angemessenen festen Werth vorschreibt, gleich jeder beliebig gegebenen Grösse gemacht werden. Statt (28) erscheint somit der Ausdruck

$$(28_a)\qquad \frac{1}{\delta}\left(\log\left(\frac{n}{p}\right)+\log\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\psi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)-\psi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right).$$

Ein Beispiel bietet die trigonometrische Reihe, durch welche unter (12) in I, § 120 für ein von $-\pi$ bis $+\pi$ gehendes Argument ϑ, jedoch mit Ausschluss der Grenzwerthe, die Function $\log\sqrt{2+2\cos\vartheta}$ ausgedrückt ist,

$$(33)\quad \log\sqrt{2+2\cos\vartheta}=\cos\vartheta-\frac{1}{2}\cos 2\vartheta+\frac{1}{3}\cos 3\vartheta\mp\ldots$$

Für $\vartheta=0$ ergiebt sich, da nach der Anordnung der rechten Seite eben so viele Glieder mit negativem wie mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind, das für eine ohne Ende wachsende Zahl n geltende Resultat

$$(34)\qquad \log 2=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{2m-1}-\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{2m}.$$

Die einzelnen Reihen entstehen aus (25) durch die besonderen

Werthe $\alpha=1$, $\gamma=2$, $\delta=2$; ihre Verbindung entspricht der Voraussetzung $n=p$. Da für diesen Fall der Werth von (25) in (30) dargestellt wird, so hat man die Gleichung

$$\log 2 = \frac{1}{2}\left(\log 2 + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(1)\right). \tag{35}$$

Wofern in (25) das Verhältniss $\frac{n}{p}$ nicht gleich der Einheit, sondern beliebig bestimmt ist, wird (25) durch den in (28_a) angegebenen Werth ausgedrückt, der gegenwärtig gleich dem folgenden ist,

$$\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{n}{p}\right) + \log 2 + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(1)\right). \tag{36}$$

Mit Berücksichtigung von (35) folgt hieraus das für ein beliebiges Gesetz des Wachsens der Zahlen n und p geltende Resultat

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{2m-1} - \sum_{m=1}^{m=p} \frac{1}{2m} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{p}\right). \tag{37}$$

Bei einer Anordnung, in welcher immer doppelt soviele positive als negative Glieder genommen werden

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots, \tag{38}$$

also $n=2p$ ist, entsteht demnach der Werth $\frac{3}{2}\log 2$.

Aus dem Vorhergehenden leuchtet ein, dass die Convergenz der trigonometrischen Reihen sehr wohl eine von der Anordnung abhängige oder bedingte sein kann. Zugleich hat es ein grosses Interesse, eine allgemeine Bedingung kennen zu lernen, unter der eine trigonometrische Reihe unbedingt convergiren muss. Eine solche besteht darin, dass von der darzustellenden Function $f(\vartheta)$ verlangt wird, für das von $-\pi$ bis π ausgedehnte Intervall des Arguments überall eindeutig bestimmt, endlich und stetig zu sein, ferner einen eben solchen ersten Differentialquotienten $f'(\vartheta)$, und einen überall eindeutig bestimmten endlichen zweiten Differentialquotienten $f''(\vartheta)$ zu haben *); die

*) Vgl. *Riemann, über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Göttingen 1867.

Stetigkeit umfasst hierbei wieder die Eigenschaft, dass für $\vartheta = -\pi$ und $\vartheta = \pi$ derselbe Werth eintritt. Vermöge der angegebenen Voraussetzung lassen sich die in (11) des § 78 aufgestellten Ausdrücke der Coefficienten a_m und b_m für $m \overline{\geqq} 1$ durch theilweise Integration umformen. Da

$$(39) \qquad \cos m\alpha = \frac{d\left(\frac{\sin m\alpha}{m}\right)}{d\alpha}, \quad \sin m\alpha = -\frac{d\left(\frac{\cos m\alpha}{m}\right)}{d\alpha}$$

ist, so kommt

$$(40) \begin{cases} \int f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha = f(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{m} - \int f'(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{m}\, d\alpha, \\ \int f'(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{m}\, d\alpha = -f'(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{m^2} + \int f''(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{m^2}\, d\alpha, \\ \int f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha = -f(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{m} + \int f'(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{m}\, d\alpha, \\ \int f'(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{m}\, d\alpha = f'(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{m^2} - \int f''(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{m^2}\, d\alpha. \end{cases}$$

Die von den Integralzeichen freien Ausdrücke liefern bei der Einführung der Integrationsgrenzen $-\pi$ und π verschwindende Resultate, was ohne die vorhandenen Stetigkeitsbedingungen nicht überall der Fall sein würde, und es entstehen für $m \overline{\geqq} 1$ die Ausdrücke der Coefficienten

$$(41) \begin{cases} a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{m^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \\ b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{m^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha. \end{cases}$$

Der Werth von jedem der beiden letzten Integrale wird numerisch vergrössert, indem man statt $f''(\alpha)$ eine numerisch zu grosse Constante $\frac{\mathfrak{C}}{2}$, statt $\cos m\alpha$ und $\sin m\alpha$ die positive Einheit substituirt und dann integrirt, wodurch sich bei beiden die Grösse $\frac{\mathfrak{C}}{m^2}$ ergiebt.

Aus diesem Grunde sind a_m und b_m für jeden Werth von m ausser $m=0$ numerisch kleiner als $\frac{\mathfrak{C}}{m^2}$. Wenn daher bei der zugehörigen Reihe die $2l$ nächsten Glieder betrachtet werden, welche auf die $(2n+1)$ ersten folgen, so ist die Summe ihrer absoluten Werthe, da die absoluten Werthe von $\cos m\vartheta$ und $\sin m\vartheta$ niemals die Einheit übertreffen, niemals grösser als die Summe der absoluten Werthe ihrer Coefficienten, die letztere jedoch kleiner als die Summe

$$(42) \qquad \frac{2\mathfrak{C}}{(n+1)^2} + \frac{2\mathfrak{C}}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{2\mathfrak{C}}{(n+l)^2}.$$

Nach einer in § 31 gemachten Bemerkung hat jedoch (42) für jedes l einen Werth, der unter der Grösse $\frac{2\mathfrak{C}}{n}$ liegt, mithin für eine hinreichend grosse Zahl n beliebig klein wird. Deshalb convergirt die trigonometrische Reihe unter der angegebenen Voraussetzung, wie behauptet worden, auch für die absolut genommenen Werthe ihrer Glieder oder unbedingt. Zugleich wird durch den Umstand, dass das Aggregat der $2l$ auf die $2n+1$ ersten folgenden Glieder der Reihe, wie gross auch l sein möge, für jedes Argument ϑ kleiner als $\frac{2\mathfrak{C}}{n}$ ist, die vorläufige Bedingung aus § 78 erfüllt, welche auch mit der Bedingung zusammenfällt, die in I, § 108 der dortigen Summe (15) auferlegt ist.

Entwickelt man unter der gleichen für $f(\vartheta)$ gemachten Voraussetzung den Differentialquotienten $f'(\vartheta)$ und $f''(\vartheta)$ in eine trigonometrische Reihe, so nimmt der erste Coefficient $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\alpha)\,d\alpha$ und $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(\alpha)\,d\alpha$ durch Ausführung der Integration den Werth Null an, und die Beobachtung der Gleichungen (41) lehrt, dass die für $f'(\vartheta)$ und $f''(\vartheta)$ erhaltenen Reihen gleich denjenigen sind, welche aus der für $f(\vartheta)$ aufgestellten trigonometrischen Reihe respective durch einmalige und zweimalige Differentiation der einzelnen Glieder hervorgehen.

Capitel XI.

Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variable.

§ 82. Eintheilung der Differentialgleichungen.

Die Aufgabe, eine gegebene Function $f(x)$ in Bezug auf die Variable x zu integriren, ist in § 17 durch die Forderung definirt worden, eine Function y von x zu bestimmen, welche der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

genügt. In dieser Gleichung haben wir ein besonders einfaches Beispiel einer Relation, bei welcher die Differentialquotienten zu suchender Functionen, in Bezug auf eine oder mehrere unabhängige Variable genommen, mit den Variabeln und Functionen verbunden vorkommen, und die man *eine Differentialgleichung* nennt. Sowohl wenn *eine Differentialgleichung* als auch, wenn *ein System von Differentialgleichungen* gegeben ist, wird die Bestimmung der verlangten Functionen als *Integration* bezeichnet, und die Untersuchung aller hierbei entstehenden Fragen als ein Gegenstand der Integralrechnung angesehen.

Der durchgreifendste Unterschied, welcher bei den Differentialgleichungen auftritt, rührt von der Anzahl der unabhängigen Variabeln her. Existirt nur eine unabhängige Variable, so können die zu suchenden Functionen nur in Bezug auf diese differentiirt werden, es kommen deshalb nach dem in § 45 erklärten Sprachgebrauche nur *gewöhnliche Differentialquotienten* vor, und die betreffenden Differentialgleichungen heissen *gewöhnliche Differentialgleichungen.* Wenn dagegen mehrere unabhängige Variable vorhanden sind, so können nach dem angeführten § von den zu suchenden Functionen in Bezug auf einzelne Variable und auf Combinationen derselben *partielle Differentialquotienten* genommen werden; insofern werden die bezüglichen Differentialgleichungen *partielle Differentialgleichungen* genannt. Gegenwärtig beschäftigen wir uns lediglich mit der ersteren Gattung.

Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen kommt erstens die Anzahl der aufzusuchenden Functionen und zweitens die Ordnung der von denselben nach der unabhängigen Variable genommenen Differentialquotienten in Betracht. Denken wir uns zunächst, dass nur eine Function y von der unabhängigen Variable x vorliege, und dass die auf einander folgenden Differentialquotienten bis zu der p ten Ordnung einschliesslich gebildet seien, dann liefert das Verschwinden einer aus x, y und diesen Differentialquotienten zusammengesetzten Function g die Gleichung

$$g\left(\frac{d^p y}{dx^p}, \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}, \ldots \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0, \tag{2}$$

welche nach dem Range des höchsten Differentialquotienten *eine Differentialgleichung der p ten Ordnung* genannt wird. Aus der Gleichung (2) ist eine Bestimmung des höchsten Differentialquotienten $\frac{d^p y}{dx^p}$ durch x, y, und alle niedrigeren Differentialquotienten abzuleiten, welche Aufgabe der Lehre von den Gleichungen angehört. Sind mehrere Bestimmungen zulässig, so muss jede für sich untersucht werden; eine einzelne werde, wie folgt, angedeutet

$$\frac{d^p y}{dx^p} = H\left(\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}, \ldots \frac{dy}{dx}, y, x\right). \tag{3}$$

Dadurch, dass man die successiven Differentialquotienten der Grösse y von der ersten bis zur $(p-1)$ten Ordnung als neue von x abhängige Variable einführt, kann statt (3) ein System von p Differentialgleichungen substituirt werden, in welchem nur Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen. Es sei

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots \quad \frac{dy_{p-2}}{dx} = y_{p-1}, \tag{4}$$

dann verwandelt sich (3) in die Gleichung

$$\frac{dy_{p-1}}{dx} = H(y_{p-1}, y_{p-2}, \ldots y_1, y, x); \tag{5}$$

jetzt bilden (4) und (5) zusammen *ein System von p Differentialgleichungen,* in welchen die nach x genommenen ersten Differentialquotienten der p abhängigen Variabeln y, y_1, y_2, $\ldots y_{p-1}$ als

Functionen von diesen selbst und der unabhängigen Variable x gegeben sind, und das *ein System der pten Ordnung* heisst.

Mit einem System von μ Differentialgleichungen, in welchem beliebige Differentialquotienten von μ Functionen $y, z, \ldots$ der Variable x vorkommen, kann eine ähnliche Reduction ausgeführt werden, wie aus der Behandlung eines Systems von zwei Differential-Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} g_1\left(\dfrac{d^p y}{dx^p}, \cdot\cdot y, \dfrac{d^q z}{dx^q}, \cdot\cdot z, x\right) = 0 \\ g_2\left(\dfrac{d^p y}{dx^p}, \cdot\cdot y, \dfrac{d^q z}{dx^q}, \cdot\cdot z, x\right) = 0 \end{cases}$$

hervorgehen wird. Der erste Schritt besteht darin, die höchsten Differentialquotienten der beiden zu suchenden Functionen $\dfrac{d^p y}{dx^p}$ und $\dfrac{d^q z}{dx^q}$ durch Auflösen der beiden Gleichungen (6) als Functionen aller übrigen Elemente auszudrücken, was wieder auf mehrere Arten möglich sein kann; eine einzelne Darstellung sei

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^p y}{dx^p} = H_1\left(\dfrac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}, \cdot\cdot y, \dfrac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}}, \cdot\cdot z, x\right) \\ \dfrac{d^q z}{dx^q} = H_2\left(\dfrac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}, \cdot\cdot y, \dfrac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}}, \cdot\cdot z, x\right). \end{cases}$$

Für den Fall, dass in den Functionen g_1 und g_2 die höchsten Differentialquotienten $\dfrac{d^p y}{dx^p}$ und $\dfrac{d^q z}{dx^q}$ nur im ersten Grade erscheinen, gelangt man zu den Gleichungen (7) durch Auflösen von zwei Gleichungen des ersten Grades, wobei nach I, § 71 vorauszusetzen ist, dass die zugehörige Determinante einen von Null verschiedenen Werth habe. Indem nun sowohl die successiven Differentialquotienten von y bis zu der $(p-1)$ten, wie auch die successiven Differentialquotienten von z bis zu der $(q-1)$ten Ordnung als neue Variable aufgefasst werden, tritt an die Stelle von (7) das folgende *System der $(p+q)$ten Ordnung*

$$(8)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y_1,\ldots\dfrac{dy_{p-2}}{dx}=y_{p-1}, & \dfrac{dy_{p-1}}{dx}=H_1(y_{p-1},\ldots y, z_{q-1},\ldots z, x) \\ \dfrac{dz}{dx}=z_1,\ldots\dfrac{dz_{q-2}}{dx}=z_{q-1}, & \dfrac{dz_{q-1}}{dx}=H_2(y_{p-1},\ldots y, z_{q-1},\ldots z, x). \end{cases}$$

Hier wird verlangt, dass die ersten Differentialquotienten der $(p+q)$ abhängigen Variabeln $y, y_1, \ldots y_{p-1}, z, z_1, \ldots z_{q-1}$ gleich vorgeschriebenen Functionen dieser Elemente und der unabhängigen Variable x werden sollen. Da sich nun ein beliebiges System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei dem die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der aufzusuchenden Functionen übereinstimmt, von einzelnen Ausnahmen abgesehen, immer in ein System von der bezeichneten Art und von einer bestimmten Ordnung verwandeln lässt, so erhalten wir ein Princip, um sowohl gegebene Differentialgleichungen mit einer abhängigen Variable wie auch Systeme von Differentialgleichungen mit einer Anzahl von abhängigen Variabeln durch Systeme von Differentialgleichungen, in denen nur erste Differentialquotienten vorkommen, zu ersetzen, und nach der Ordnungszahl dieser entsprechenden Systeme einzutheilen. Auch wird es erlaubt sein, im Folgenden die allgemeine Betrachtung auf Systeme von der bezeichneten Art zu beschränken.

§ 83. Vollständige und particulare Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Es sei für μ Functionen $y, z, \ldots$ der Variable x das System von μ gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben

$$(1)\quad\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x, y, z, \ldots) \\ \dfrac{dz}{dx}=g(x, y, z, \ldots) \\ \vdots \end{cases}$$

welches nach der Definition des vorigen § als *ein System der μten Ordnung* zu bezeichnen ist. Die Ausdrücke rechts, denen die ersten Differentialquotienten der zu suchenden abhängigen Variabeln $y, z, \ldots$ gleich werden sollen, sind als Functionen dieser μ Elemente und der Grösse x bestimmt; mithin beziehen sie sich auf ein gewisses Gebiet von Werthverbindungen der genannten $\mu + 1$ Elemente. Nach dem in § 42 gebrauchten Ausdrucke bilden die Werthverbindungen von $\mu + 1$ beliebig veränderlichen Grössen eine Mannigfaltigkeit der $(\mu + 1)$ten Ordnung, so dass man auch sagen kann, *die obigen Functionen* $f, g, \ldots$ *seien für eine gewisse Mannigfaltigkeit der* $(\mu + 1)$*ten Ordnung der* $\mu + 1$ *Elemente* $x, y, z, \ldots$ *gegeben.* Eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen (1) ist gefunden, sobald die μ Variabeln $y, z, \ldots$ in einer solchen Weise von der Variable x abhängen, dass die betreffenden ersten Differentialquotienten für fortschreitende Werthe von x die vorgeschriebenen Werthe annehmen. Nachdem man mit einem einzelnen Werthe $x = x_0$ angefangen hat, lässt man die Variable x algebraisch steigend oder abnehmend eine Reihe von Werthen durchlaufen. Zu $x = x_0$ gehören die besonderen Werthe $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$; für jeden vorkommenden ferneren Werth von x sind die correspondirenden $y, z, \ldots$ durch die Lösung vorgezeichnet und ändern sich bei stetig geändertem x in der Art, dass das in Rede stehende Werthsystem $(x, y, z, \ldots)$ innerhalb der eigenen Mannigfaltigkeit der $(\mu + 1)$ten Ordnung *eine gewisse stetige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* beschreibt. Für die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

ist in § 24 nachgewiesen, dass eine Function y durch dieselbe allein nicht ganz bestimmt wird, dass alle möglichen Auflösungen nur um eine additive Constante von einander differiren, und dass eine Auflösung eindeutig bestimmt wird, wofern man die Bedingung hinzufügt, dass für einen besonderen Werth von x, der jetzt x_0 heissen möge, die Function y gleich einem beliebig zu wählenden Werthe y_0 sei; ferner ergab sich der entsprechende Ausdruck

$$(3) \qquad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Hieraus kann man schliessen, dass das System von Differentialgleichungen (1), in welchem die Differentialgleichung (2) als specieller Fall enthalten ist, an sich verschiedene Auflösungen gestattet. Nun lässt sich unter gewissen allgemeinen, die Functionen $f(x,y,z,\ldots)$, $g(x,y,z,\ldots)$,.. betreffenden Voraussetzungen zeigen, *dass die Auflösung des Systems* (1) *auf eine und nur eine Weise möglich ist, sobald man verlangt, dass zu einem Werthe* $x=x_0$ *ein bestimmtes Werthsystem* $y=y_0$, $z=z_0,\ldots$ *gehöre, oder, dass die dem System* (1) *genügende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung in der erwähnten Mannigfaltigheit der* $(\mu+1)$*ten Ordnung von einem bestimmten Werthsystem* $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ *ausgehe**). Es ist möglich, in der gegebenen Mannigfaltigkeit der Variable x einen gewissen Werth x_0 beizulegen und hierauf die übrigen μ Variabeln y, $z,\ldots$ beliebig zu verändern; insofern bezeichnet die Gleichung $x=x_0$ innerhalb der ursprünglichen Mannigfaltigkeit der $(\mu+1)$ten Ordnung eine Mannigfaltigkeit der μten Ordnung. Wenn man also für einen fest gewählten Werth $x=x_0$ die μ Werthe y_0, $z_0,\ldots$ beliebig annimmt, so empfängt dadurch das Werthsystem $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ die gröste mit der Natur der Sache vereinbare Allgemeinheit. Mit Rücksicht hierauf wird *eine Lösung des Systems* (1), *bei welcher zu dem Werthe* $x=x_0$ *ein in der betreffenden Mannigfaltigkeit der* μ*ten Ordnung beliebig gewähltes System von Werthen* $y=y_0$, $z=z_0,\ldots$ *gehört, eine vollständige Lösung des Systems von Differentialgleichungen* genannt, woraus sich die Ueberschrift der angeführten Abhandlung erklärt. Hingegen heisst *eine Lösung, bei welcher zu dem Werthe* $x=x_0$ *ein an sich beschränktes System von Werthen* $y=y_0$, $z=z_0,\ldots$ *gehört, eine particulare Lösung des Systems.* Für die obige Differentialgleichung (2) stellt der Ausdruck (3) eine vollständige Lösung dar, welche für $x=x_0$ dem beliebig zu wählenden Werthe y_0 gleich wird, während das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ vermöge seiner Eigenschaft, für $x=x_0$ zu verschwinden, nur eine particulare Lösung bildet. Man wird hieraus erkennen, dass das in § 24 definirte *unbestimmte Integral der*

---

*) *Erörterung der Möglichkeit, ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren.* Bonn 1868. Ausserdem mitgetheilt in *Brioschi e Cremona*, Annali, Serie 2ª, t. 2°, pag. 288, und in *Darboux*, Bulletin, t. 10, p. 149. Vgl. *Cauchy*, leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, redigées par *M. Moigno*, t. 2, p. 385, und *Coriolis* in *Liouville*, Journal, t. 2, p. 229.

Function $f(x)$ nichts anderes als *eine vollständige Lösung der zugehörigen Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ist. Die vorhin berührte Untersuchung der Möglichkeit, ein gegebenes System Differentialgleichungen (1) vollständig zu integriren, bildet eine Erweiterung des Verfahrens, mittelst dessen in § 20 und 22 die Möglichkeit bewiesen ist, eine Function einer Variable zu integriren. Da die anzuwendende Schlussweise durch die Anzahl der zu bestimmenden Functionen oder, was dasselbe bedeutet, durch die Ordnung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen nicht wesentlich bedingt ist, so wird die Betrachtung im Folgenden nur für ein System der zweiten Ordnung durchgeführt werden.

§ 84. Untersuchung der Möglichkeit, ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren. Geometrische Deutung.

Wir beginnen mit der Angabe der Voraussetzungen, welche in dem zu integrirenden System von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{cases}$$

den Functionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ auferlegt werden. Beide Functionen sollen für ein stetig zusammenhängendes Gebiet oder eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit K der Variabeln x, y, z eindeutig bestimmt, numerisch kleiner als ein fester Werth, und stetig sein. Nach der in § 43 aufgestellten Definition hat die Stetigkeit der betreffenden Functionen die Bedeutung, dass, sobald innerhalb der Mannigfaltigkeit K zwei Werthsysteme (x, y, z) und $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ gewählt werden, der absolute Werth der Differenz

$$(2) \qquad f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

und der Differenz

$$(3) \qquad g(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - g(x, y, z)$$

für hinreichend kleine absolute Werthe der Differenzen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ beliebig klein wird. Wir fügen jetzt in Betreff der Stetigkeit eine ähnliche Voraussetzung hinzu, wie sie in § 20 bei der

Stetigkeit einer Function einer Variable gemacht wurde; der Kürze halber werde der absolute Werth einer Grösse w durch das Zeichen $[w]$ ausgedrückt. Es sollen der absolute Werth von (2) und von (3) die Eigenschaft haben, falls für eine hinreichend kleine Grösse δ die Ungleichheiten

$$(4) \qquad [\Delta x] < \delta, [\Delta y] < \delta, [\Delta z] < \delta$$

erfüllt sind, immer unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabzusinken, oder die Ungleichheiten

$$(5) \qquad [f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < \lambda,$$

$$(6) \qquad [g(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < \lambda$$

zu befriedigen. Eine andere Voraussetzung, welche ebenfalls bei den erfahrungsmässig vorkommenden Functionen in der Regel erfüllt ist, bezieht sich auf die Differenzen (2) und (3) bei je zwei der Mannigfaltigkeit K angehörenden Werthsystemen, in denen der Werth der Variable x derselbe oder Δx gleich Null ist; sie besteht darin, dass es endliche positive Constanten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ giebt, für welche die Ungleichheiten

$$(7) \qquad [f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < c_{11}[\Delta y] + c_{12}[\Delta z],$$

$$(8) \qquad [g(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < c_{21}[\Delta y] + c_{22}[\Delta z]$$

stets gültig sind. Diese Voraussetzung ist offenbar von selbst erfüllt, sobald die Functionen f und g von den Variabeln y und z gar nicht abhängen, weshalb auch bei der Untersuchung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ keine entsprechende Voraussetzung vorgekommen ist.

Ehe von der Wahl eines Werthsystems x_0, y_0, z_0 gesprochen wird, das den Anfang der Lösung des Systems von Differentialgleichungen bezeichnet, ist darauf aufmerksam zu machen, dass man die drei Variabeln x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume deuten, und demgemäss die betreffende Mannigfaltigkeit durch einen bestimmten Theil des Raumes repräsentiren kann. In gleicher Weise lässt sich bei einer Differentialgleichung

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

das Werthsystem (x, y) auf den Punkt einer Ebene beziehen, was wir nicht weiter verfolgen. Bei dem System (1) wird die geometrische Interpretation wieder nur dazu dienen, die analystisch definirten Begriffe mit Hülfe der Anschauung fasslicher zu machen, und nicht als Fundament der Beweisführung benutzt werden.

Nach den allgemeinen Erörterungen des § 42 hat eine in der Mannigfaltigkeit K befindliche Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche dem System (1) entspricht und für $x=x_0$ die Gleichungen $y=y_0$, $z=z_0$ befriedigt, ihr geometrisches Bild in einer Linie, welche, von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) ausgehend, in dem Raume K auf gewisse Art fortschreitet. Ausserdem lehrt die Proportion (4*) des § 62, dass, wenn die in einem Punkte (x, y, z) der betreffenden Linie construirte Tangente gegen die Axen der x, y, z respective die Winkel p, q, r bildet, das Verhältniss von deren Cosinus und damit die Lage der Tangente folgendermassen durch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ bestimmt ist

$$(10) \qquad 1:\frac{dy}{dx}:\frac{dz}{dx}=\cos p:\cos q:\cos r.$$

Weil aber in dem System (1) die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ als Functionen der Variabeln x, y, z, welche eben die Coordinaten des gewählten Punktes bilden, gegeben sind, und weil daher die Lage der Tangente für jeden Ort (x, y, z) bestimmt ist, so wird durch das System (1) die geometrische Forderung ausgedrückt, eine Linie zu suchen, bei welcher für jeden Punkt die Lage der daselbst an die Linie gezogenen Tangente in einer vorgeschriebenen Weise von dem Orte des bezüglichen Punktes abhängt. Die Behauptung, dass die Integration des Systems (1) unter Hinzufügung der Bedingungen $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ eindeutig bestimmt sei, bekommt hiernach den Inhalt, dass durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) eine und nur eine Linie von der verlangten Beschaffenheit laufe. Vermöge des vorigen § muss bei einer vollständigen Lösung für einen festgewählten Werth x_0 das System der Werthe y_0 und z_0 beliebig veränderlich sein. Da der Inbegriff der Punkte (x_0, y_0, z_0), für welche x_0 einen einmal gewählten Werth hat, und y_0 und z_0 beliebige Werthe annehmen, die Ebene $x=x_0$ constituirt, da jedoch in dem gegenwärtigen Falle nur Punkte des Raumes K vorkommen, so stellt die bezeichnete vollständige Lösung des Systems (1) den Inbegriff der Linien dar, welche dem System (1) genügen und von beliebigen Punkten eines Theiles der genannten Ebene, der in dem Raume K enthalten ist, ausgehen.

Man nimmt nun das Anfangssystem (x_0, y_0, z_0) so an, dass jede der drei Variabeln in dem Gebiete K von (x_0, y_0, z_0) aus um eine endliche Grösse fortschreiten kann; dann sind für die endlichen positiven Grössen a, b, c die Ungleichheiten

$$(11) \qquad [x-x_0] \leqq a,\ [y-y_0] \leqq b,\ [z-z_0] \leqq c$$

erfüllt. Innerhalb dieses in K enthaltenen Gebietes müssen die Functionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ nach der getroffenen Voraussetzung respective numerisch kleiner als gewisse feste positive Werthe f_0 und g_0 sein, das heisst, den Ungleichheiten

$$(12) \qquad [f(x, y, z)] < f_0,\ [g(x, y, z)] < g_0$$

genügen. Dem entsprechend lässt sich eine positive Grösse A so bestimmen, dass

$$(13) \qquad A < a,\ A f_0 < b,\ A g_0 < c$$

ist. Alsdann wird durch die Ungleichheiten

$$(14) \qquad [x-x_0] \leqq A,\ [y-y_0] \leqq b,\ [z-z_0] \leqq c$$

ein Gebiet K_0 begrenzt, das innerhalb des durch (12) bezeichneten Gebietes, mithin auch innerhalb des Gebietes K liegt, und für welches wir die Untersuchung der Integration des Systems (1) vornehmen. In der geometrischen Deutung stellt das Gebiet K_0 nach demjenigen, was in § 51 zu den Ungleichheiten (1*) bemerkt ist, das Innere eines rechteckigen Parallelepipedons dar, dessen Mittelpunkt der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist, das von den mit den Coordinatenebenen parallelen Paaren von Ebenen

$$x = x_0 - A,\ x = x_0 + A,$$
$$y = y_0 - b,\ y = y_0 + b,\ z = z_0 - c,\ z = z_0 + c$$

begrenzt wird, und dessen mit den drei Coordinatenaxen x, y, z parallele Kanten beziehungsweise die Längen $2A, 2b, 2c$ haben.

§ 85. Auflösung eines Systems von Differenzengleichungen.

Neben die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ des § 17 ist in § 18 die dortige Gleichung (4) gestellt worden,

(1) $$\frac{\varDelta F(x)}{\varDelta x} = f(x),$$

durch welche die Aufsuchung einer Function $F(x)$ gefordert wird, bei der die zu einer Reihe von Werthen der Variable x gehörenden Differenzenquotienten den entsprechenden Werthen der gegebenen Function $f(x)$ gleich werden sollen. Gleichungen von der Art der vorstehenden, durch welche die Differenzenquotienten zu suchender Functionen mit der unabhängigen Variable und den Functionen selbst verknüpft sind, werden *Differenzengleichungen* genannt.

Wie nun die Differenzengleichung (1) aus der Anfangs erwähnten Differentialgleichung entstanden ist, indem statt des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Differenzenquotient $\frac{\varDelta F(x)}{\varDelta x}$ substituirt wird, bilden wir aus dem System Differentialgleichungen (1) des vorigen § *das zu der Bestimmung zweier Functionen η und ζ von x dienende System von Differenzengleichungen*

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\varDelta \eta}{\varDelta x} = f(x, \eta, \zeta) \\[2ex] \dfrac{\varDelta \zeta}{\varDelta x} = g(x, \eta, \zeta). \end{cases}$$

Die Functionen η und ζ werden für das in dem vorigen § abgegrenzte Gebiet K_0 aufgesucht und sollen für den Werth $x = x_0$ den Gleichungen

(3) $$\eta = y_0, \ \zeta = z_0$$

genügen. Vermöge der daselbst aufgestellten ersten Ungleichheit (14) darf die Variable x von x_0 nach $x_0 + A$ und nach $x_0 - A$ bewegt werden. Wir betrachten nur die erstere Art der Aenderung, da bei der zweiten eine genau entsprechende Behandlung zulässig ist. Nach der Wahl eines zwischen x_0 und $x_0 + A$ liegenden Werthes X schreiben wir der Variable x zuerst die folgende Reihe von $n+1$ der Grösse nach geordneten Werthen vor

(4) $$x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n = X < x_0 + A,$$

für deren aufeinander folgende Differenzen das System (2) gelten soll, und fragen nach den entsprechenden Werthen von η und ζ. Bezeichnet man die zu den Werthen (4) von x gehörenden Werthe der Functionen η und ζ durch Anhängung der gleichnamigen Zeiger, so ergiebt sich aus dem System (2) mit Berücksichtigung von (3) unmittelbar die Folge von Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta_1-y_0}{x_1-x_0}=f(x_0,y_0,z_0),\ \dfrac{\eta_2-\eta_1}{x_2-x_1}=f(x_1,\eta_1,\zeta_1),\ \dfrac{\eta_{\alpha+1}-\eta_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}=f(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha),\\ \dfrac{\zeta_1-z_0}{x_1-x_0}=g(x_0,y_0,z_0),\ \dfrac{\zeta_2-\zeta_1}{x_2-x_1}=g(x_1,\eta_1,\zeta_1),\ \dfrac{\zeta_{\alpha+1}-\zeta_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}=g(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha),\end{cases}$$

wo α die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ durchläuft. Vermöge des ersten Paares von Gleichungen werden η_1 und ζ_1 eindeutig bestimmt, dann vermöge des zweiten η_2 und ζ_2, und so fortschreitend vermöge des $(\alpha+1)$ten Paares $\eta_{\alpha+1}$ und $\zeta_{\alpha+1}$ bis zu dem letzten Werthsystem η_n und ζ_n, welches zu $x_n = x$ gehört. Da bei diesem Verfahren jedes gefundene Werthsystem in die Functionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ substituirt werden muss, so hat man sich zu versichern, dass das anzuwendende Werthsystem dem Gebiete angehöre, für welches die Functionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ gegeben sind. Aus den vorhin getroffenen Voraussetzungen lässt sich indessen mit Sicherheit schliessen, dass die nach einander zu erhaltenden Werthsysteme $(x_1, \eta_1, \zeta_1), (x_2, \eta_2, \zeta_2), \ldots$ innerhalb des Gebietes K_0 bleiben. Multiplicirt man in (5) das erste Paar Gleichungen mit dem Nenner x_1-x_0, und ebenso jedes folgende mit dem entsprechenden Nenner, so entstehen die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \eta_1-y_0=(x_1-x_0)f(x_0,y_0,z_0),\ldots \eta_{\alpha+1}-\eta_\alpha=(x_{\alpha+1}-x_\alpha)f(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha),\\ \zeta_1-z_0=(x_1-x_0)g(x_0,y_0,z_0),\ldots \zeta_{\alpha+1}-\zeta_\alpha=(x_{\alpha+1}-x_\alpha)g(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha).\end{cases}$$

Geht man hierauf bei dem ersten Paar zu der Vergleichung der absoluten Werthe über und berücksichtigt die für jedes vorkommende Werthsystem geltenden Ungleichheiten (12) des § 84, so folgen die Ungleichheiten

$$[\eta_1-y_0]<[x_1-x_0]f_0,\ [\zeta_1-z_0]<[x_1-x_0]\,g_0.$$

Weil ferner $[x_1-x_0]<A$ ist, müssen wegen (13) desselben § die Ausdrücke rechts respective kleiner als b und c sein; daher gelten für das Werthsystem (x_1, η_1, ζ_1) die Ungleichheiten

(7) $$[x_1-x_0]<A,\ [\eta_1-y_0]<b,\ [\zeta_1-z_0]<c,$$
welche die Gestalt von (14) des § 84 haben und ausdrücken, dass (x_1, η_1, ζ_1) in K_0 enthalten ist. Dann ergiebt sich aus (6) durch die Addition von je zwei Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} \eta_2-y_0=(x_1-x_0)f(x_0,y_0,z_0)+(x_2-x_1)f(x_1,\eta_1,\zeta_1), \\ \zeta_2-z_0=(x_1-x_0)g(x_0,y_0,z_0)+(x_2-x_1)g(x_1,\eta_1,\zeta_1), \end{cases}$$

mithin für die absoluten Werthe, da x_1-x_0 und x_2-x_1 positive Werthe haben, vermittelst der soeben benutzten Schlüsse,

(9) $$[\eta_2-y_0]<[x_2-x_0]f_0<b,\ [\zeta_2-z_0]<[x_2-x_0]g_0<c,\ [x_2-x_0]<A.$$

Deshalb gehört auch das Werthsystem (x_2, η_2, ζ_2) dem Gebiete K_0 an, und es leuchtet ein, dass aus entsprechenden Gründen sich die sämmtlichen folgenden Werthsysteme, wie behauptet worden, ebenso verhalten. Somit liefern die Gleichungen (6) eine den aufgestellten Bedingungen genügende eindeutig bestimmte Auflösung des Systems von Differenzengleichungen (2).

Um den Zusammenhang des Systems (2) und des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen geometrisch zu erläutern, braucht man nur mit Anwendung der so eben bestimmten Werthsysteme festzusetzen, dass der Punkt (x_0, y_0, z_0) mit dem Punkte (x_1, η_1, ζ_1), dieser mit dem Punkte (x_2, η_2, ζ_2), und successive jeder mit dem folgenden durch eine gerade Linie verbunden sei. Vermöge der Gleichungen (5) sind diese begrenzten geraden Linien so bestimmt, dass, wenn man sich dieselben im Sinne der wachsenden Zeiger durchlaufen denkt, die Richtung jeder Linie in ihrem Anfangspunkte gleich der Richtung der Tangente der Curve ist, welche durch den betreffenden Punkt hindurchgehen und dem System von Differentialgleichungen genügen würde.

§ 86. Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Nachdem das im vorigen § gebildete System von Differenzengleichungen für die mit (4) bezeichnete Reihe von Werthen der Variable x aufgelöst ist, kann man dasselbe für eine neue Reihe von Werthen behandeln, bei der zwischen je zwei Individuen der ersten Reihe wieder eine beliebige Folge von Werthen der Grösse nach eingeschaltet ist. Wir gebrauchen die Bezeichnungen

$$
(1)\quad \begin{cases}
x_{0,0} = x_0,\ x_{0,1},\ldots,\ x_{0,\varrho},\ \ldots x_{0,p-1}, \\
x_{0,p} = x_{1,0} = x_1,\ x_{1,1},\ldots,\ x_{1,\varrho_1},\ \ldots x_{1,p_1-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{\alpha-1,p_{\alpha-1}} = x_{\alpha,0} = x_\alpha,\ x_{\alpha,1},\ldots,\ x_{\alpha,\varrho_\alpha},\ldots x_{\alpha,p_\alpha-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1,p_{n-1}} = x_{n,0} = x_n,
\end{cases}
$$

und versehen die zugehörigen Werthe von η und ζ mit den gleichnamigen Paaren von zwei Zeigern. Das System (6) des vorigen § liefert dann die Gleichungen

$$
(2)\quad \begin{cases}
\eta_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - \eta_{\alpha,\varrho_\alpha} = (x_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - x_{\alpha,\varrho_\alpha})\, f(x_{\alpha,\varrho_\alpha},\ \eta_{\alpha,\varrho_\alpha},\ \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha}) \\
\zeta_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha} = (x_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - x_{\alpha,\varrho_\alpha})\, g(x_{\alpha,\varrho_\alpha},\ \eta_{\alpha,\varrho_\alpha},\ \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha}),
\end{cases}
$$

wo nach einander α gleich den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$, ϱ_α gleich den Zahlen $0, 1, 2, \ldots p_\alpha - 1$ zu setzen ist, und ferner die Bedingungen

$$
(3)\qquad \eta_{0,0} = y_0,\quad \zeta_{0,0} = z_0
$$

gelten, damit die Auflösung mit demselben Werthsystem (x_0, y_0, z_0) wie die im vorigen § ausgeführte beginne.

Dass die nach einander darzustellenden Werthsysteme der gegenwärtigen Auflösung ebenfalls in dem Gebiete K_0 enthalten sind, folgt daraus, dass das eingeschlagene Verfahren seinem Wesen nach ungeändert geblieben und nur auf eine grössere Zahl von eingeschobenen Werthen der Variable x ausgedehnt ist. Zu demselben Werthe $x = x_{\alpha+1}$ gehört bei der ersten Auflösung das Werthsystem $\eta_{\alpha+1}$, $\zeta_{\alpha+1}$, bei der zweiten das Werthsystem

$$
(4)\qquad \eta_{\alpha+1,0} = y_{\alpha+1},\quad \zeta_{\alpha+1,0} = z_{\alpha+1}.
$$

Es lässt sich nun zeigen, dass für eine angemessene Wahl der Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die Grössen $y_{\alpha+1}$ und $z_{\alpha+1}$ die Eigenschaft haben, falls die Zahlen p_α unaufhörlich wachsen und die Differenzen der neuen eingeschalteten Werthe $x_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - x_{\alpha,\varrho_\alpha}$ irgendwie beständig abnehmen, gegen feste Grenzwerthe zu convergiren, indem die absoluten Werthe der Differenzen zwischen den entsprechenden Grössen

$$
(5)\qquad [y_{\alpha+1} - \eta_{\alpha+1}],\ [z_{\alpha+1} - \zeta_{\alpha+1}]
$$

für jedes α unter einer beliebig kleinen Grösse bleiben. Gleichzeitig führen dann die Werthe $y_{\alpha+1}$ und $z_{\alpha+1}$ zu einer vollständigen Integration des gegebenen Systems von Differentialgleichungen.

In den Gleichungen (2) lege man der zu einem bestimmten α gehörenden Zahl ϱ_α nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots \sigma_\alpha$ bei; dann entstehen durch Addition der Differenzen der ersten und zweiten Zeile die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \eta_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - \eta_{\alpha,0} = \sum\limits_{\varrho_\alpha=0}^{\varrho_\alpha=\sigma_\alpha} (x_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - x_{\alpha,\varrho_\alpha}) f(x_{\alpha,\varrho_\alpha}, \eta_{\alpha,\varrho_\alpha}, \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha}) \\ \zeta_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - \zeta_{\alpha,0} = \sum\limits_{\varrho_\alpha=0}^{\varrho_\alpha=\sigma_\alpha} (x_{\alpha,\varrho_\alpha+1} - x_{\alpha,\varrho_\alpha}) g(x_{\alpha,\varrho_\alpha}, \eta_{\alpha,\varrho_\alpha}, \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha}), \end{cases}$$

aus denen mit Hülfe von (12) des § 84 die Ungleichheiten

$$(7)\quad \begin{cases} [\eta_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - \eta_{\alpha,0}] < [x_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - x_{\alpha,0}]\, f_0 \leqq [x_{\alpha+1} - x_\alpha]\, f_0 \\ [\zeta_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - \zeta_{\alpha,0}] < [x_{\alpha,\sigma_\alpha+1} - x_{\alpha,0}]\, g_0 \leqq [x_{\alpha+1} - x_\alpha]\, g_0 \end{cases}$$

folgen. Wenn man dieselben mit den Ungleichheiten (4) des § 84 vergleicht, und

$$x = x_{\alpha,0}, \qquad y = \eta_{\alpha,0}, \qquad z = \zeta_{\alpha,0}$$
$$x + \Delta x = x_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \quad y + \Delta x = \eta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \quad z + \Delta x = \zeta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}$$

nimmt, wenn man ferner die Grössen x_α so dicht neben einander wählt, dass in Bezug auf eine hinreichend kleine Grösse δ die Ungleichheiten

$$(7^*)\quad x_{\alpha+1} - x_\alpha < \delta, \quad (x_{\alpha+1} - x_\alpha) f_0 < \delta, \quad (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\, g_0 < \delta$$

gelten, so ist klar, dass vermöge der Ungleichheiten (5) und (6) des § 84 für eine und dieselbe beliebig kleine Grösse λ die Relationen

$$[f(x_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \eta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \zeta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}) - f(x_{\alpha,0}, \eta_{\alpha,0}, \zeta_{\alpha,0})] < \lambda$$
$$[g(x_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \eta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}, \zeta_{\alpha,\sigma_\alpha+1}) - g(x_{\alpha,0}, \eta_{\alpha,0}, \zeta_{\alpha,0})] < \lambda$$

bestehen. Deshalb weicht unter der angegebenen Voraussetzung jeder der Werthe $f(x_{\alpha,\varrho_\alpha}, \eta_{\alpha,\varrho_\alpha}, \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha})$ von $f(x_{\alpha,0}, \eta_{\alpha,0}, \zeta_{\alpha,0})$, jeder der Werthe $g(x_{\alpha,\varrho_\alpha}, \eta_{\alpha,\varrho_\alpha}, \zeta_{\alpha,\varrho_\alpha})$ von $g(x_{\alpha,0}, \eta_{\alpha,0}, \zeta_{\alpha,0})$ um eine Grösse ab, die numerisch kleiner als λ ist; auf diese Weise können die in (6) rechts auftretenden Summen leicht in Grenzen eingeschlossen werden. Indem hier statt σ_α der Werth $p_\alpha - 1$ substituirt und die in (4) angegebene Bezeichnung benutzt wird, gelangt man durch Einführung der positiven oder negativen echten Brüche β_α und γ_α zu dem Resultat

$$(8)\quad \begin{cases} y_{\alpha+1}-y_\alpha=(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(f(x_\alpha,\,y_\alpha,\,z_\alpha)+\beta_\alpha\lambda) \\ z_{\alpha+1}-z_\alpha=(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(g(x_\alpha,\,y_\alpha,\,z_\alpha)+\gamma_\alpha\lambda). \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben eine mit den Gleichungen (6) des vorigen § ähnliche Gestalt. Werden die Gleichungen des dortigen $(\alpha+1)$ten Paares mit den vorstehenden durch Subtraction verbunden, so entsteht das neue System

$$(9)\quad \begin{cases} y_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}=y_\alpha-\eta_\alpha+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(f(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)-f(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)+\beta_\alpha\lambda) \\ z_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}=z_\alpha-\zeta_\alpha+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(g(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)-g(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)+\gamma_\alpha\lambda). \end{cases}$$

Man bedient sich jetzt des Princips, dass der absolute Werth einer Summe von Grössen niemals grösser sein kann als die Summe der absoluten Werthe der einzelnen Grössen, und benutzt für die absoluten Werthe der Differenzen der vorkommenden Functionswerthe die aus (7) und (8) des § 84 folgenden Bestimmungen

$$(10)\begin{cases} [f(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)-f(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)]<c_{11}\,[y_\alpha-\eta_\alpha]+c_{12}\,[z_\alpha-\zeta_\alpha] \\ [g(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha)-g(x_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)]<c_{21}\,[y_\alpha-\eta_\alpha]+c_{22}\,[z_\alpha-\zeta_\alpha]. \end{cases}$$

Da ferner die sämmtlichen Differenzen $x_{\alpha+1}-x_\alpha$ positiv sind, so liegt der absolute Werth von jedem der Producte $(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\beta_\alpha\lambda$ und $(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\gamma_\alpha\lambda$ unter der Grösse $(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\lambda$. Mithin folgen aus (9) die Ungleichheiten

$$(11)\begin{cases} [y_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}]<[y_\alpha-\eta_\alpha]+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)(c_{11}[y_\alpha-\eta_\alpha]+c_{12}[z_\alpha-\zeta_\alpha]+\lambda) \\ [z_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}]<[z_\alpha-\zeta_\alpha]+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)(c_{21}[y_\alpha-\eta_\alpha]+c_{22}[z_\alpha-\zeta_\alpha]+\lambda). \end{cases}$$

Nach der in (3) ausgedrückten Voraussetzung ist

$$(12)\qquad [y_0-\eta_0]=0,\ \ [z_0-\zeta_0]=0,$$

so dass, falls in (11) für α nach einander die Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ substituirt und die betreffenden Relationen verglichen werden, für jeden der absoluten Werthe $[y_1-\eta_1], [z_1-\zeta_1], \ldots [y_n-\eta_n], [z_n-\zeta_n]$ eine obere Grenze hervorgeht. Indem man für zwei Reihen von Grössen Dy_α und Dz_α die Gleichungen bildet

$$(13)\quad \begin{cases} Dy_{\alpha+1}=Dy_\alpha+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(c_{11}\,Dy_\alpha+c_{12}\,Dz_\alpha+\lambda) \\ Dz_{\alpha+1}=Dz_\alpha+(x_{\alpha+1}-x_\alpha)\,(c_{21}\,Dy_\alpha+c_{22}\,Dz_\alpha+\lambda) \\ Dy_0=0,\ \ Dz_0=0, \end{cases}$$

sind jene oberen Grenzen gefunden, und es ergiebt sich für die aufeinander folgenden Werthe des Zeigers α

(14) $\quad [y_{\alpha+1} - \eta_{\alpha+1}] < Dy_{\alpha+1}, \; [z_{\alpha+1} - \zeta_{\alpha+1}] < Dz_{\alpha+1}.$

Unser Ziel ist der Nachweis, dass die Beträge $[y_{\alpha+1} - \eta_{\alpha+1}]$, $[z_{\alpha+1} - \zeta_{\alpha+1}]$ für einen hinreichend kleinen Werth von λ beliebig klein werden; dasselbe wird erreicht sein, sobald die betreffende Eigenschaft für die Grössen $Dy_{\alpha+1}$ und $Dz_{\alpha+1}$ oder für andere Grössen nachgewiesen ist, die beziehungsweise grösser als jene sind. Wie leicht zu erkennen, lassen sich zwei Reihen von Grössen v_α und w_α, die den Forderungen

(15) $$Dy_{\alpha+1} < v_{\alpha+1}, \quad Dz_{\alpha+1} < w_{\alpha+1}$$

genügen und eine noch einfachere Bestimmung als Dy_α und Dz_α gestatten, durch ein System von Gleichungen definiren, welche nur darin von den Gleichungen (13) differiren, dass statt jeder der vier positiven Grössen $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ eine Constante k auftritt, die grösser als jede einzelne ist. Die betreffenden Gleichungen lauten

(16) $$\begin{cases} v_{\alpha+1} = v_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\,(k(v_\alpha + w_\alpha) + \lambda) \\ w_{\alpha+1} = w_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\,(k(v_\alpha + w_\alpha) + \lambda) \\ \qquad v_0 = 0, \; w_0 = 0. \end{cases}$$

Aus denselben folgt unmittelbar

(17) $$v_{\alpha+1} - v_\alpha = w_{\alpha+1} - w_\alpha,$$

und, da $v_0 = w_0 = 0$ ist, für jeden Werth von α

(18) $$v_\alpha = w_\alpha.$$

Demnach hat man statt des Systems (16) die eine Gleichung

(19) $$v_{\alpha+1} = v_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\,(2kv_\alpha + \lambda)$$

welche, nachdem auf beiden Seiten die Grösse $\frac{\lambda}{2k}$ hinzugefügt ist, zu der folgenden wird

(20) $$v_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{2k} = (1 + 2k\,(x_{\alpha+1} - x_\alpha))\left(v_\alpha + \frac{\lambda}{2k}\right).$$

Setzt man den Zeiger nach einander gleich den Zahlen $0, 1, 2, \ldots \alpha$, beachtet, dass $v_0 = 0$ ist, und multiplicirt alle Gleichungen miteinander, so entsteht die Auflösung

(21) $$v_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{2k} = \frac{\lambda}{2k}\,(1 + 2k(x_1 - x_0))\,(1 + 2k(x_2 - x_1)) \ldots (1 + 2k(x_{\alpha+1} - x_\alpha)).$$

Für den gegenwärtigen Zweck dürfen die einzelnen Factoren des Products noch vergrössert werden. Aus der in I, § 114 abgeleiteten stets convergenten Darstellung der Exponentialfunction

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

lässt sich schliessen, dass bei jedem positiven Werthe von x die Ungleichheit

(22) $$e^x > 1 + x$$

besteht, weil die rechte Seite durch Weglassung einer Summe von positiven Gliedern nothwendig verkleinert wird. Werden nun in (22) statt x nach einander die positiven Werthe

$$2k(x_1 - x_0),\ 2k(x_2 - x_1), \dots 2k(x_{\alpha+1} - x_\alpha)$$

substituirt, so bringt die Multiplication der Exponentialausdrücke eine Exponentialfunction hervor, deren Argument gleich der Summe der Argumente $2k(x_{\alpha+1} - x_0)$ ist, und man erhält

(23) $$(1+2k(x_1-x_0))\,(1+2k(x_2-x_1)) \dots (1+2k(x_{\alpha+1}-x_\alpha)) < e^{2k(x_{\alpha+1}-x_0)}.$$

Da ausserdem $x_{\alpha+1} - x_0 \leqq x_n - x_0 = X - x_0$ ist und die Exponentialfunction bei der Vergrösserung ihres Arguments zunimmt, so wird

(24) $$e^{2k(x_{\alpha+1}-x_0)} \leqq e^{2k(X-x_0)},$$

woraus sich für die positive Grösse $v_{\alpha+1}$ die Ungleichheit

(25) $$v_{\alpha+1} < \lambda\left(\frac{e^{2k(X-x_0)} - 1}{2k}\right)$$

ergiebt. Hier erscheint λ mit einem endlichen Factor multiplicirt, welcher nicht von der Annahme der Werthe $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ abhängt. Folglich bleiben für einen genügend kleinen Werth von λ alle Grössen $v_{\alpha+1}$, und daher nach (14) und (15) auch alle Beträge $[y_{\alpha+1} - \eta_{\alpha+1}]$ und $[z_{\alpha+1} - \zeta_{\alpha+1}]$ beliebig klein, wie behauptet worden war. Wir sehen also, dass die zu den Werthen $x = x_{\alpha+1}$ gehörenden Werthe $y_{\alpha+1}$ und $z_{\alpha+1}$, indem die Zahlen p_α ohne Ende wachsen und die Differenzen der neuen eingeschalteten Werthe auf irgend eine Weise abnehmen, sich festen Grenzwerthen nähern. Nach der Kleinheit der beliebig gegebenen Grösse λ richtet sich die Wahl der Grösse δ, durch welche vermöge (7*) die Ausdehnung der Differenzen $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ bestimmt wird. Weil nun die obigen Gleichungen (8) den Inhalt haben, dass der Differenzenquotient $\dfrac{y_{\alpha+1} - y_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}$ von dem

Werthe $f(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, der Differenzenquotient $\frac{z_{\alpha+1}-z_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}$ von dem Werthe $g(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ um weniger als die beliebig kleine Grösse λ abweicht, und weil bei hinreichend kleinen Differenzen $x_{\alpha+1}-x_\alpha$ der Differenzenquotient $\frac{y_{\alpha+1}-y_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}$ in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, der Differenzenquotient $\frac{z_{\alpha+1}-z_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}$ in den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ als Grenzwerth übergeht, so drückt das System (8) die Thatsache aus, *dass die Werthe y_α und z_α, welche für $x=x_0$ die vorgeschriebenen Gleichungen $y=y_0$, $z=z_0$ erfüllen, dem gegebenen System Differentialgleichungen* (1) *in* § 84 *genügen, oder dasselbe vollständig integriren.*

Sobald die geometrische Construction, welche in dem vorigen § für die dortige Reihe (4) von Werthen von x beschrieben ist, auf die Reihe (1) des gegenwärtigen § angewendet wird, entsteht eine neue Reihenfolge von geraden Linien, die für wachsende Zahlen p_α immer dichter wird. Demgemäss lässt sich das Ergebniss der angestellten Untersuchung so aussprechen, dass, falls bei der ersten Construction das Intervall $X-x_0$ in hinreichend kleine Theile getheilt war, der Zug der geraden Linien, welcher durch die zweite Construction bei beliebig weit fortgesetzter Theilung hervorgebracht wird, von dem Zuge der geraden Linien der ersten Construction nur um beliebig wenig verschieden sein kann. Mithin wird das Bild der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die dem gegebenen System Differentialgleichungen genügt, schon durch die erste Construction mit einer beliebig grossen Genauigkeit dargestellt.

§ 87. Eindeutige Bestimmtheit der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Es bleibt jetzt übrig zu zeigen, dass ein System Functionen y und z durch die Forderung, dem obigen System Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{cases}$$

zu genügen und die Bedingungen $y = y_0$, $z = z_0$ zu erfüllen, eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen an, dass ein System von der verlangten Beschaffenheit

$$(2)\qquad y = \mathfrak{y},\ z = \mathfrak{z}$$

gegeben sei, legen der Variable x die in § 85 unter (4) angeführten Werthe bei und bezeichnen die entsprechenden Werthe der Functionen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ durch Anhängung der gleichnamigen Zeiger; in Folge dessen hat man nach den vorgeschriebenen Bedingungen

$$(3)\qquad \mathfrak{y}_0 = y_0,\ \mathfrak{z}_0 = z_0.$$

Für hinreichend kleine Differenzen $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ ist nun wieder der Differenzenquotient $\dfrac{\mathfrak{y}_{\alpha+1} - \mathfrak{y}_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}$ von $\dfrac{d\mathfrak{y}}{dx}$, der Differenzenquotient $\dfrac{\mathfrak{z}_{\alpha+1} - \mathfrak{z}_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}$ von $\dfrac{d\mathfrak{z}}{dx}$ beliebig wenig verschieden, während die Werthe der Differentialquotienten selbst vermöge (1) respective gleich $f(x_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha, \mathfrak{z}_\alpha)$ und $g(x_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha, \mathfrak{z}_\alpha)$ sind. Jetzt wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass bei beiden Functionen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ der Unterschied zwischen dem einzelnen Differenzenquotienten und dem entsprechenden Differentialquotienten für hinreichend kleine Differenzen $x_{\alpha+1} - x_\alpha$ in dem ganzen Bereich der Werthe von x numerisch kleiner sei als eine beliebig kleine Grösse λ; dies entspricht genau der Voraussetzung, die in § 24 für die Function $\varphi(x)$ gemacht wurde. Demnach führt das System (1) unter Benutzung von zwei positiven oder negativen echten Brüchen β_α und γ_α zu dem System von Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{y}_{\alpha+1} - \mathfrak{y}_\alpha = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\,(f(x_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha, \mathfrak{z}_\alpha) + \beta_\alpha \lambda) \\ \mathfrak{z}_{\alpha+1} - \mathfrak{z}_\alpha = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)\,(g(x_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha, \mathfrak{z}_\alpha) + \gamma_\alpha \lambda). \end{cases}$$

Dasselbe ist genau ebenso mit den Grössen x_α, $\mathfrak{y}_\alpha$, $\mathfrak{z}_\alpha$ gebildet wie das System (8) des vorigen § mit den Grössen x_α, y_α, z_α. Es lassen sich daher unter Beachtung der Gleichungen (3) durch Verbindung von (4) mit den Gleichungen (6) des § 85 die entsprechenden Schlüsse ziehen, aus denen hervorgeht, dass die Beträge der Differenzen

$$(5) \qquad [\mathfrak{y}_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}],\ [\mathfrak{z}_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}]$$

für einen hinreichend kleinen Werth von λ beliebig klein werden. Da nun ausserdem die Ungleichheiten

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{y}_{\alpha+1}-y_{\alpha+1}] \leqq [\mathfrak{y}_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}]+[y_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}] \\ [\mathfrak{z}_{\alpha+1}-z_{\alpha+1}] \leqq [\mathfrak{z}_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}]+[z_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}] \end{array} \right.$$

gelten, und unter der gleichen Voraussetzung die Beträge

$$[y_{\alpha+1}-\eta_{\alpha+1}],\ [z_{\alpha+1}-\zeta_{\alpha+1}]$$

ebenfalls beliebig klein ausfallen, so haben die Beträge

$$[\mathfrak{y}_{\alpha+1}-y_{\alpha+1}],\ [\mathfrak{z}_{\alpha+1}-z_{\alpha+1}]$$

nothwendig dieselbe Eigenschaft, das heisst, die Functionen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, welche das System von Differentialgleichungen (1) befriedigen und für $x=x_0$ die Anfangswerthe $\mathfrak{y}=y_0$, $\mathfrak{z}=z_0$ annehmen, weichen für die sämmtlichen Werthe $x=x_{\alpha+1}$ von den durch das obige Verfahren bestimmten Werthen $y_{\alpha+1}$ und $z_{\alpha+1}$ um beliebig wenig ab, oder fallen mit denselben zusammen. *Ein System von Functionen y und z, durch welches das System von Differentialgleichungen* (1) *integrirt wird und das für $x=x_0$ den Gleichungen $y=y_0$, $z=z_0$ genügt, ist daher unter den erwähnten Bedingungen eindeutig bestimmt.* Somit haben wir den Beweis geliefert, dass das gegebene System von Differentialgleichungen unter den mitgetheilten Voraussetzungen auf eine und nur eine Weise vollständig integrirt werden kann.

§ 88. Integrale und Integrationsconstanten.

Eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche dem in § 83 aufgestellten System der μten Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügt,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx}=f(x, y, z, \ldots) \\ \dfrac{dz}{dx}=g(x, y, z, \ldots) \\ \vdots \end{array} \right.$$

kann auf sehr verschiedene Arten gegeben sein. Besondere Beachtung verdient der Fall, dass die Mannigfaltigkeit der ersten

Ordnung durch ein System von μ Gleichungen ausgedrückt wird, in denen der Reihe nach je eine von μ Functionen der $\mu+1$ Variabeln

$$\Phi_1(x, y, z, \ldots),\ \Phi_2(x, y, z, \ldots), \ldots\ \Phi_\mu(x, y, z, \ldots)$$

gleich einer *der willkürlichen Constanten* $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_\mu$ gesetzt ist,

$$(2)\quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z, \ldots) = \mathfrak{L}_1 \\ \Phi_2(x, y, z, \ldots) = \mathfrak{L}_2 \\ \qquad\vdots \\ \Phi_\mu(x, y, z, \ldots) = \mathfrak{L}_\mu. \end{cases}$$

Da der Werth von jeder der μ Functionen bei einer mit dem System (2) vereinbaren Aenderung des Werthsystems $x, y, z, \ldots$ ungeändert bleiben soll, so muss bei einer Aenderung der einzelnen Variabeln um die zugehörigen Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ das entsprechende vollständige Differential jeder einzelnen Function verschwinden, wodurch nach § 45 die μ Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z} dz + \ldots = 0 \end{cases}$$

entstehen. Nachdem jede Gleichung durch das Differential dx dividirt ist, gehen die linken Seiten respective in die vollständigen nach x genommenen Differentialquotienten $\frac{d\Phi_1}{dx}, \frac{d\Phi_2}{dx}, \ldots \frac{d\Phi_\mu}{dx}$ über, und das Nullwerden von diesen ergiebt μ Gleichungen des ersten Grades für die μ Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots$ Unter der Voraussetzung, dass die betreffende Determinante nicht verschwinde, liefert die Auflösung für die einzelnen Differentialquotienten eindeutig bestimmte Ausdrücke in den Variabeln $x, y, z, \ldots$, welche beziehungsweise mit den Ausdrücken übereinstimmen müssen, die durch das System (1) für $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots$ vorgeschrieben sind. Das System von Gleichungen (2) erlaubt, weil die Werthe der Constante $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_\mu$ willkürlich angenommen werden dürfen, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung zu bestimmen, welche die in § 83 formulirte Bedingung erfüllt und von einem beliebig gewählten Werthsystem $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0, \ldots$ ausgeht. Indem man den Constanten $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_\mu$ die Werthe beilegt, welche aus der Substitution von $x_0, y_0, z_0, \ldots$ in die betreffenden Functionen entspringen, verwandelt sich (2) in das System

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z, \ldots) = \Phi_1(x_0, y_0, z_0, \ldots) \\ \Phi_2(x, y, z, \ldots) = \Phi_2(x_0, y_0, z_0, \ldots) \\ \quad \vdots \\ \Phi_\mu(x, y, z, \ldots) = \Phi_\mu(x_0, y_0, z_0, \ldots). \end{cases}$$

Sobald hieraus die μ Variabeln $y, z, \ldots$ als Functionen der Variable x bestimmt sind, stellen $y, z, \ldots$ diejenige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung dar, welche dem System (1) genügt, für $x=x_0$ die Werthe $y=y_0$, $z=z_0, \ldots$ erhält, und deshalb, wie sich im Vorgehenden gezeigt hat, eindeutig bestimmt ist.

Es möge jetzt eine einzelne von den Gleichungen (2) herausgehoben werden, etwa

$$\Phi_1(x, y, z, \ldots) = \mathfrak{L}_1.$$

Damit die Function $\Phi_1(x, y, z, \ldots)$ von der verlangten Beschaffenheit sei, muss aus derselben die zugeordnete Gleichung in (3) folgen. Ferner muss, da das System (3) für die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots$ Ausdrücke zu liefern hat, welche den in (1) bezeichneten respective gleich sind, jede einzelne Gleichung in (3) befriedigt werden, indem man statt $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots$ die entsprechenden Functionen $f(x, y, z, \ldots)$, $g(x, y, z, \ldots)$ substituirt. Demnach ergiebt sich für $\Phi_1(x, y, z, \ldots)$ die folgende Gleichung

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} f(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} g(x, y, z, \ldots) + \ldots = 0,$$

und eine eben solche Gleichung für jede der übrigen Functionen

$$\Phi_2(x, y, z, \ldots), \ldots \Phi_\mu(x, y, z, \ldots).$$

Eine Gleichung, in welcher die partiellen Differentialquotienten einer Function von mehreren Variabeln $\Phi(x, y, z, \ldots)$ vorkommen, heisst nach § 82 eine partielle Differentialgleichung. Man kann daher den Ausdruck anwenden, *dass die μ Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu$ die Eigenschaft haben müssen, der partiellen Differentialgleichung*

(5) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} g(x, y, z, \ldots) + \ldots = 0$$

zu genügen. Umgekehrt verhält sich jede Function Φ, welche dieser Gleichung genügt, in der Weise, dass der entsprechende Ausdruck

(6) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots = \frac{d\Phi}{dx}$$

gleich Null wird, sobald die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots$ durch das System (1) bestimmt werden; mithin bleibt die Function Φ für jede das System (1) erfüllende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung constant. Aus diesen Gründen bedeutet die Forderung, dass eine Function $\Phi(x, y, z, \ldots)$ der partiellen Differentialgleichung (5) genüge, dasselbe wie die Forderung, dass eine Function $\Phi(x, y, z, \ldots)$ für jede dem System (1) entsprechende Mannigfaltigkeit ungeändert bleibe. Eine Gleichung des Inhalts, dass eine im Vorstehenden characterisirte Function $\Phi(x, y, z, \ldots)$ einen gewissen willkürlich gewählten Werth $\mathfrak{L}$ festhalten soll,

(7) $$\Phi(x, y, z, \ldots) = \mathfrak{L},$$

definirt also eine Mannigfaltigkeit der μten Ordnung, in welcher beliebig viele das System (1) befriedigende Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung enthalten sind. Da nun die Gleichung (7) in dem so eben bezeichneten Sinne durch das System (1) erfüllt wird, so nennt man dieselbe *ein Integral des Systems von Differentialgleichungen* (1); zugleich heisst die zugehörige willkürliche Constante $\mathfrak{L}$ *eine Integrationsconstante.* Nach diesem Sprachgebrauche ist das System (2) ein System von μ Integralen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen. Die μ Functionen $\Phi_1(x, y, z, \ldots), \ldots \Phi_\mu(x, y, z, \ldots)$, welche hier auftreten, dürfen jedoch unter den möglichen Auflösungen der partiellen Differentialgleichung (5) nicht ganz beliebig gewählt sein, sondern müssen noch die Bedingung erfüllen, dass durch die zugehörigen Gleichungen (2) wirklich eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestimmt werde. Wir sahen, dass unter der erwähnten Voraussetzung aus dem System (2) eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung entsteht, die von einem beliebig zu wählenden Werthsystem $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \ldots$ ausgeht und deshalb eine vollständige Integration des Systems (1) darstellt. Dem entsprechend *wird dann das System* (2), *zu welchem die μ willkürlichen Constanten $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_\mu$ gehören, als ein vollständiges System von μ Integralen des Systems von Differentialgleichungen* (1) *bezeichnet.*

In dem Falle $\mu=2$ reducirt sich das System (2) auf die beiden Gleichungen

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \Phi_1(x,y,z)=\mathfrak{L}_1 \\ \Phi_2(x,y,z)=\mathfrak{L}_2, \end{cases}$$

während Φ_1 und Φ_2 der partiellen Differentialgleichung

$$(5^*) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,y,z)+\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x,y,z)=0$$

genügen. Nach der bei der gleichen Annahme gebrauchten geometrischen Interpretation geht durch einen beliebigen Punkt x_0, y_0, z_0 des Raumes K eine und nur eine Linie, welche das System von Differentialgleichungen

$$(1^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y,z) \\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=g(x,y,z) \end{cases}$$

befriedigt; da jedoch der Punkt (x_0, y_0, z_0) keinen Vorzug vor irgend einem andern hat, so darf man auch sagen, dass durch jeden Punkt (x,y,z) eine und nur eine dem System (1*) genügende oder *charakteristische Linie* laufe. In Folge dessen ist eine Function $\Phi(x,y,z)$, die der Gleichung (5*) genügt, eine Function des Ortes (x,y,z), welche in jeder charakteristischen Linie constant bleibt. Durch eine Gleichung $\Phi=\mathfrak{L}$, in welcher $\mathfrak{L}$ eine willkürliche Constante bedeutet, und die *ein Integral des Systems* (1*) ausmacht, wird also *eine Fläche* dargestellt, welche lauter charakteristische Linien enthält; insofern aber die Constante $\mathfrak{L}$ nach einander verschiedene Werthe bekommt, entstehen verschiedene Flächen von der bezeichneten Beschaffenheit, deren Inbegriff *eine Schaar von*

Flächen bildet. Wenn die beiden Gleichungen (2*) *ein vollständiges System von zwei Integralen des Systems* (1*) repräsentiren, so stellt jedes der beiden Integrale eine Schaar von Flächen dar, und die vorhin erwähnte Bedingung, dass durch die Gleichungen eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestimmt werde, nimmt die Gestalt an, dass jede Fläche der ersten Schaar von jeder Fläche der zweiten Schaar in einer Linie geschnitten werden muss, welche eben eine characteristische Linie ist. Um diejenige characteristische Linie zu erhalten, welche durch einen beliebig gegebenen Punkt (x_0, y_0, z_0) hindurchgeht, hat man wie in den obigen Gleichungen (4) die Constanten $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ durch Einsetzung der Werthe x_0, y_0, z_0 in Φ_1 und Φ_2 zu bestimmen, so dass die betreffende Aufgabe durch die Gleichungen

$$(4^*)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = \Phi_1(x_0, y_0, z_0) \\ \Phi_2(x, y, z) = \Phi_2(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

gelöst wird.

Weil eine der partiellen Differentialgleichung (5*) genügende Function $\Phi(x, y, z)$ in einer characteristischen Linie denselben Werth behält, so ist der Werth für die ganze Linie bestimmt, sobald er in einem ihrer Punkte gegeben ist. Als einen solchen kann man denjenigen Punkt wählen, welcher in der Ebene $x = x_0$ liegt, und dessen andere Coordinaten nach der eingeführten Bezeichnung $y = y_0, z = z_0$ heissen. Durch die Werthe, welche jedem dieser Punkte entsprechen, ist also eine Function $\Phi(x, y, z)$ überhaupt bestimmt; das gilt in dem vorliegenden Falle für die beiden Functionen $\Phi_1(x, y, z)$ und $\Phi_2(x, y, z)$ Somit gehört in der Ebene $x = x_0$ zu der ersten Schaar von Flächen $\Phi_1(x, y, z) = \mathfrak{L}$ eine erste Schaar von Linien der Art, dass der zugeordnete Functionswerth in jeder Linie constant ist und sich nur von einer zur folgenden ändert, ebenso gehört zu der zweiten Schaar von Flächen $\Phi_2(x, y, z) = \mathfrak{L}_2$ eine zweite Schaar von Linien der Art, dass der zugeordnete Functionswerth wieder in jeder Linie constant ist und sich nur von einer zur folgenden ändert, und zwar schneiden sich jede Linie der ersten und jede Linie der zweiten Schaar in einem bestimmten Punkte (y_0, z_0).

Nachdem im Vorhergehenden auseinandergesetzt ist, wie man von einem vollständigen System von Integralen des Systems (1) zu einer vollständigen Auflösung gelangt, bei welcher den abhängigen Functionen $y, z, \ldots$ beliebige zu einem Werthe $x = x_0$ gehörige Anfangswerthe $y_0, z_0, \ldots$ vorgeschrieben sind, erhebt sich die Frage nach einem Verfahren, um aus einer vollständigen Auflösung der letztern Art ein vollständiges System von Integralen zu erhalten. Diese Frage wollen wir wieder nur für ein System der zweiten Ordnung beantworten, indem die Ausdehnung auf eine beliebige Ordnung keine neue Schwierigkeiten verursacht. Das gewünschte Mittel bietet die obige Bemerkung, dass eine Function $\Phi(x, y, z)$, durch welche die partielle Differentialgleichung (5) befriedigt wird, bestimmt ist, wofern die Werthe der Function für die Mannigfaltigkeit $x = x_0$ gegeben sind. Man nehme in dieser Mannigfaltigkeit zwei Functionen der Variabeln y und z, $\mathfrak{A}_1(y, z)$ und $\mathfrak{A}_2(y, z)$, willkürlich, jedoch so an, dass, wenn der ersten ein beliebiger constanter Werth l_1, der zweiten ein beliebiger constanter Werth l_2 vorgeschrieben wird, zu den Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1(y, z) = l_1 \\ \mathfrak{A}_2(y, z) = l_2 \end{cases}$$

ein bestimmtes Werthsystem y, z gehört. Ein Beispiel liefern nach I, § 71 zwei Functionen des ersten Grades mit constanten Coefficienten

$$(8_a) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1(y, z) = b_1 y + c_1 z \\ \mathfrak{A}_2(y, z) = b_2 y + c_2 z, \end{cases}$$

bei denen die Determinante $b_1 c_2 - b_2 c_1$ einen von Null verschiedenen Werth hat, und welche in diesem Falle *von einander unabhängige Functionen* genannt werden. Geometrisch gedeutet stellt dann in (8) die erste Gleichung eine Schaar von parallelen geraden Linien, die zweite eine von der ersten verschiedene Schaar von parallelen geraden Linien dar, wobei jede Linie der ersten von jeder Linie der zweiten Schaar in einem einzigen Punkte geschnitten wird. Denkt man sich alle dem System Differentialgleichungen (1*) genügenden oder charakteristischen Linien construirt, die für $x = x_0$ die Gleichungen $y = y_0$, $z = z_0$ erfüllen, so kann man erstens vermittelst der Function $\mathfrak{A}_1(y, z)$ jedem Punkt (x, y, z) der durch (y_0, z_0) gehenden Linie den Functionswerth $\mathfrak{A}_1(y_0, z_0)$ zuordnen, und erhält dadurch eine bestimmte Function $\Phi_1(x, y, z)$, die in jeder characteristischen Linie ungeändert bleibt; zweitens kann man die Function $\mathfrak{A}_2(y, z)$ ebenso verwenden, um eine derselben entsprechende Function $\Phi_2(x, y, z)$ zu erzeugen, die ebenfalls in jeder characteristischen Linie ungeändert bleibt. Für diese Functionen gelten somit die Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = \mathfrak{A}_1(y_0, z_0) \\ \Phi_2(x, y, z) = \mathfrak{A}_2(y_0, z_0), \end{cases}$$

welche nach dem Obigen ein vollständiges System von Integralen des Systems Differentialgleichungen (1*) ausmachen.

Um den Werth anzugeben, welchen eine auf diese Weise bestimmte Function $\Phi_1(x, y, z)$ oder $\Phi_2(x, y, z)$ für ein gewisses Werthsystem x, y, z besitzt, hat man das zu dem letztern gehörende Werthsystem y_0, z_0 aufzusuchen, und für dasselbe respective den Werth $\mathfrak{A}_1(y_0, z_0)$ oder $\mathfrak{A}_2(y_0, z_0)$ zu bilden. Durch das in dem vorigen § entwickelte Verfahren kann man eine das System (1*) befriedigende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestimmen, die für $x = x_0$ die Gleichungen $y = y_0$, $z = z_0$ erfüllt, und nun die zu einem gegebenen Werthe $x = X$ gehörenden Werthe $y = Y$, $z = Z$ finden. Auf genau entsprechende Weise kann man eine das System (1*) befriedigende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestimmen, die mit dem Werthsystem x, y, z anfängt, und für diese dasjenige System von Werthen $y = y_0$, $z = z_0$ aufsuchen, welches zu dem gegebenen Werthe $x = x_0$ gehört. Diese Werthe muss man zum Zwecke der Gleichungen (9) in die Functionen $\mathfrak{A}_1(y_0, z_0)$ und $\mathfrak{A}_2(y_0, z_0)$ substituiren. Sind analytische Ausdrücke von y und z als Functionen von x bekannt, vermöge deren die bezeichnete vollständige Integration dargestellt wird, und die wir folgendermassen andeuten wollen

$$(10) \qquad \begin{cases} y = P(x, x_0, y_0, z_0) \\ z = Q(x, x_0, y_0, z_0), \end{cases}$$

so ist die Bestimmung der Werthe y_0, z_0 durch x, y, z nichts anderes als die Auflösung dieses Systems von Gleichungen nach den Grössen y_0, z_0; das Ergebniss möge so ausgedrückt werden

$$(11) \qquad \begin{cases} y_0 = \mathfrak{P}(x_0, x, y, z) \\ z_0 = \mathfrak{Q}(x_0, x, y, z). \end{cases}$$

Durch die Einsetzung dieser Werthe in $\mathfrak{A}_1(y_0, z_0)$ und $\mathfrak{A}_2(y_0, z_0)$ entstehen dann beziehungsweise die gesuchten Ausdrücke der Functionen $\Phi_1(x, y, z)$ und $\Phi_2(x, y, z)$. Da die Gleichungen (11) für beliebige aber feste Werthe y_0 und z_0 eine gewisse das System (1*) befriedigende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung ausdrücken, so ist jede Gleichung nach dem eingeführten Sprachgebrauche *ein Integral des Systems* (1*) und beide zusammen bilden *ein vollständiges System von Integralen, bei welchen die Anfangswerthe* y_0 *und* z_0 *die Rolle der Integrationsconstanten übernehmen.*

Die Functionen $\mathfrak{A}_1(y, z)$ und $\mathfrak{A}_2(y, z)$ gehen in die Variabeln y und z über, sobald in (8_a) $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$ genommen wird. Alsdann stellen die Gleichungen $y = y_0$ und $z = z_0$ in der Ebene $x = x_0$ zwei Schaaren von geraden Linien dar, die der zweiten oder dritten Coordinatenaxe parallel sind, und zu jeder Schaar von Linien gehört eine der beiden Schaaren von Flächen, welche durch die Gleichungen (11) bezeichnet werden.

§ 89. Lineare Differentialgleichungen.

Es liegt nicht in dem Plane dieses Buches, nach einander die gebräuchlichen Methoden zu entwickeln, durch welche bestimmte Arten von Differentialgleichungen mit Hülfe von besonderen analytischen Processen integrirt werden; wir heben daher auch nur eine durch ihre allgemeinen Eigenschaften ausgezeichnete Gattung hervor. Diese enthält solche Differentialgleichungen und Systeme von Differentialgleichungen, in welchen die abhängigen Variabeln sammt deren Differentialquotienten nur im ersten Grade auftreten, und die *lineare Differentialgleichungen* genannt werden. Damit das System (7) des § 82 hierher gehöre, müssen die dortigen Functionen H_1 und H_2 in Bezug auf alle Elemente $\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}, \cdots y, \frac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}}, \cdots z$ ganze Functionen des ersten Grades sein, während die Coefficienten von der Variable x abhängen dürfen. Wir wollen ausserdem noch die Bedingung hinzufügen, dass in keiner Gleichung ein Glied vorkomme, welches die Variable x allein enthält. Dann entsteht aus (7) die Gestalt

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^p y}{dx^p} = R_{1,1}\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + R_{1,p}\,y + S_{1,1}\dfrac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}} + \ldots + S_{1,q}\,z \\[2ex] \dfrac{d^q z}{dx^q} = R_{2,1}\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + R_{2,p}\,y + S_{2,1}\dfrac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}} + \ldots + S_{2,q}\,z, \end{cases}$$

wo $R_{1,1},\ldots R_{1,p}$, $S_{1,1},\ldots S_{1,q}$, $R_{2,1},\ldots R_{2,p}$, $S_{2,1},\ldots S_{2,q}$ beliebige Functionen von x bedeuten. Kennt man eine particulare Lösung dieses Systems $y = \mathfrak{y}$, $z = \mathfrak{z}$, und ferner noch eine zweite $y = \mathfrak{y}^{(1)}$, $z = \mathfrak{z}^{(1)}$, so genügt, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}$ irgend welche Constanten bedeuten, erstens das System $y = \mathfrak{B}\mathfrak{y}$, $z = \mathfrak{B}\mathfrak{z}$, da bei der Substitution die Constante $\mathfrak{B}$ gemeinsamer Factor wird, zweitens genügt aus derselben Ursache das System $y = \mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{y}^{(1)}$, $z = \mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{z}^{(1)}$, endlich aber auch das durch Addition gebildete System

$$(2)\quad \begin{cases} y = \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{y}^{(1)} \\ z = \mathfrak{B}\mathfrak{z} + \mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{z}^{(1)}, \end{cases}$$

wie durch die bezügliche Addition der für die erste und zweite Lösung geltenden Gleichungen bewiesen wird. Die Gültigkeit der Lösung (2) bildet eine Grundeigenschaft eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Man sieht übrigens sofort, dass, falls das System (1) nach der Weise von (8) des § 82 in ein System verwandelt wird, welches nur Differentialquotienten der ersten Ordnung enthält, alle hierher gehörigen Differentialgleichungen von der obigen Beschaffenheit sind, so dass der lineare Character des ganzen Systems bewahrt bleibt.

Unter den Systemen von linearen Differentialgleichungen sind diejenigen die einfachsten, deren sämmtliche Coefficienten Constanten sind. Nun folgt aus dem Vorhergehenden, dass jedes derartige System auf ein System von linearen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, in welchem nur erste Differentialquotienten vorkommen, und sämmtliche Coefficienten ebenfalls Constanten sind. Wir werden jedoch nicht das allgemeinste, sondern ein specielleres durch seine Anwendungen besonders wichtiges System von Differentialgleichungen untersuchen, bei dem für n Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche als Functionen einer unabhängigen Variable t aufgefasst werden, die nach t genommenen zweiten Differentialquotienten gleich linearen Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben sind,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{d t^2} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ \dfrac{d^2 x_2}{d t^2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^2 x_n}{d t^2} = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n. \end{cases}$$

In Betreff der Constanten $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ wird angenommen, dass sie bei Vertauschung der beiden Zeiger ungeändert bleiben. In Folge dessen können die auf der rechten Seite von (3) befindlichen Ausdrücke durch die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function des zweiten Grades oder quadratischen Form der Variabeln $x_1, \ldots x_n$ dargestellt werden. Setzt man

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_{\mathfrak{b}} x_{\mathfrak{c}},$$

wo jeder der Zeiger $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, wie auch im Folgenden, die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchläuft, so geht das System (3) in das System

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{d t^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \dfrac{d^2 x_2}{d t^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^2 x_n}{d t^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{cases}$$

über. Indem man die ersten nach t genommenen Differentialquotienten vermöge der erwähnten Vorschrift des § 82 als neue Variable einführt und $\dfrac{d x_{\mathfrak{b}}}{d t} = x'_{\mathfrak{b}}$ setzt, tritt an die Stelle von (4) das System der $2n$ten Ordnung

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d x'_1}{d t} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n, \ \dfrac{d x_1}{d t} = x'_1 \\ \dfrac{d x'_2}{d t} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n, \ \dfrac{d x_2}{d t} = x'_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d x'_n}{d t} = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n, \ \dfrac{d x_n}{d t} = x'_n. \end{cases}$$

Die Functionen, welchen die ersten Differentialquotienten der

$2n$ Variabeln $x_{\mathfrak{b}}$ und $x'_{\mathfrak{b}}$ gleich werden sollen, enthalten die abhängige Variable t nicht und sind als rationale ganze Functionen für alle Werthverbindungen ihrer Elemente eindeutig definirt. Demnach erstreckt sich die Mannigfaltigkeit der $(2n+1)$ten Ordnung, für welche die Integration des Systems (5) gesucht wird, auf alle Werthverbindungen der $2n$ Variabeln $x_{\mathfrak{b}}$ und $x'_{\mathfrak{b}}$ und der Variable t.

Ein gewisses Integral des Systems (5) ergiebt sich dadurch, dass in der $\mathfrak{b}$ten Zeile desselben der Differentialquotient $\frac{dx'_{\mathfrak{b}}}{dt}$ mit $x'_{\mathfrak{b}}$, der Ausdruck $a_{\mathfrak{b}1}\, x_1 + \ldots + a_{\mathfrak{b}n}\, x_n$ mit $\frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}$ multiplicirt, und dann beiderseits von $\mathfrak{b}=1$ bis $\mathfrak{b}=n$ addirt wird. Hierbei erhält man links den nach t genommenen vollständigen Differentialquotienten der Summe

$$\frac{1}{2}(x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n), \tag{6}$$

rechts den ebenso genommenen vollständigen Differentialquotienten des halben Werths der vorhin eingeführten Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Weil daher die Differenz der genannten Ausdrücke in Bezug auf t einen verschwindenden Differentialquotienten liefert, so ist sie selbst nach einem in § 24 bewiesenen Satze gleich einer von t unabhängigen oder constanten Grösse h, und die betreffende Gleichung

$$\frac{1}{2}(x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n) - \frac{1}{2}(a_{11}\, x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n^2) = h \tag{7}$$

bildet *ein Integral des Systems* (5), durch welches die Summe der Quadrate der n Variabeln $x'_{\mathfrak{b}}$ und die Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ auf eine merkwürdige Weise verbunden werden. Desgleichen kann man aus dem System (5) oder ungezwungener aus dem gleichbedeutenden (4) eine Relation ableiten, in welcher die Summe der Quadrate der n Variabeln $x_{\mathfrak{b}}$ mit der Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ verflochten ist. Multiplicirt man in (4) die $\mathfrak{b}$te Gleichung mit dem Factor $x_{\mathfrak{b}}$ und addirt auf beiden Seiten von $\mathfrak{b}=1$ bis $\mathfrak{b}=n$, so entsteht rechts nach der in § 46 erwähnten Grundeigenschaft der homogenen Functionen die

Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, während die linke Seite vermöge der Gleichung

$$(8) \qquad x\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2(x^2)}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

die folgende Gestalt annimmt

$$(9) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2\right).$$

Hier darf die zweite Summe mit Benutzung des Integrals (7) durch den Ausdruck $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + 2h$ ersetzt werden, wodurch die angedeutete Relation

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 2\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) + 2h$$

hervorgeht.

Zu einer vollständigen Integration des gegebenen Systems dient die Einführung eines neuen Systems von abhängigen Variabeln, welche durch die Auflösung einer gewissen algebraischen Aufgabe bestimmt werden. In § 60 und § 61 hat sich herausgestellt, dass für die beiden quadratischen Formen

$$(11) \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \; \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

deren zweite reelle Coefficienten und eine von Null verschiedene Determinante hat, falls die Zahl n der Variabeln zwei oder drei beträgt, eine Substitution ersten Grades mit reellen Coefficienten angegeben werden kann,

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11}\,\xi_1 + \gamma_{12}\,\xi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\,\xi_n \\ x_2 = \gamma_{21}\,\xi_1 + \gamma_{22}\,\xi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\,\xi_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \gamma_{n1}\,\xi_1 + \gamma_{n2}\,\xi_2 + \ldots + \gamma_{nn}\,\xi_n, \end{cases}$$

durch welche die Quadratsumme der ursprünglichen in die Quadratsumme der neuen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, und die Form $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in eine Form der letztern transformirt wird, welche nur die Quadrate der Variabeln enthält; hiernach bestehen Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 \\ \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \omega^{(1)}\xi_1^2 + \omega^{(2)}\xi_2^2 + \ldots + \omega^{(n)}\xi_n^2, \end{cases}$$

in denen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(n)}$ reelle Constanten sind. Dies Resultat, welches dort unter der Einschränkung abgeleitet wurde, dass in der Gleichung, welche die Grössen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(n)}$ liefert, keine gleichen Wurzeln auftreten, lässt sich sowohl für die dortigen Werthe $n=2$ und 3 wie auch für jeden Werth von n ohne eine solche Einschränkung begründen, zu welchem Behuf auf die Abhandlungen von *Jacobi*, *de binis quibuslibet functionibus secundi ordinis per substitutiones lineares transformandis, quae solis quadratis variabilium constant*, *Crelles* Journal f. Mathematik, Bd. 12, und von *Weierstrass*, *über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen*, Monatsbericht der Berliner Akademie, März 1858, hingewiesen wird.

Steht die Existenz der Substitution (12) fest, so genügt für den vorliegenden Zweck die Benutzung von wenigen Eigenschaften derselben, die bei $n=2$ und $n=3$ in den genannten §§ erwähnt sind. Nach dem Satze in I, § 81, dass die Determinante einer transformirten quadratischen Form gleich dem Product von der Determinante der ursprünglichen Form und dem Quadrat der Substitutionsdeterminante ist, folgt aus der ersten Gleichung (13), da die Determinanten der beiden Formen gleich Eins sind, dass, wenn die Determinante der Substitution (12) wieder Γ genannt wird, Γ^2 ebenfalls gleich Eins, mithin $\Gamma = \pm 1$ sein muss; ferner ergiebt sich ebenso aus der zweiten Gleichung, dass die Determinante der Form rechts, nämlich das Product $\omega^{(1)} \omega^{(2)} \ldots \omega^{(n)}$, gleich der in Γ^2 oder die Einheit multiplicirten Determinante der Form $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist, dass mithin unter der angegebenen Voraussetzung keine der n reellen Grössen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(n)}$ verschwinden kann. Durch die Substitution der Ausdrücke (12) in die erste Gleichung (13) leuchtet ein, dass der Coefficient jedes Quadrats $\xi_\mathfrak{b}^2$ gleich Eins, der Coefficient jedes Products von zwei verschiedenen Variabeln $\xi_\mathfrak{b} \xi_\mathfrak{c}$ gleich Null sein muss; dies führt zu den Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \gamma_{\mathfrak{b}1}^2 + \gamma_{\mathfrak{b}2}^2 + \ldots + \gamma_{\mathfrak{b}n}^2 = 1 \\ \gamma_{\mathfrak{b}1}\gamma_{\mathfrak{c}1} + \gamma_{\mathfrak{b}2}\gamma_{\mathfrak{c}2} + \ldots + \gamma_{\mathfrak{b}n}\gamma_{\mathfrak{c}n} = 0. \end{cases}$$

Weiter geht aus denselben hervor, dass, wofern die Gleichungen (12) der Reihe nach für eine beliebige Zahl $\mathfrak{b}$ mit den Factoren $\gamma_{\mathfrak{b}1}, \gamma_{\mathfrak{b}2}, \ldots \gamma_{\mathfrak{b}n}$ multiplicirt und dann addirt werden, auf der rechten Seite der Factor von $\xi_\mathfrak{b}$ gleich der Einheit, die Factoren der übrigen Variabeln gleich Null werden; so gewinnt man die folgende Darstellung der neuen Variabeln durch die ursprünglichen

$$(15)\quad \begin{cases} \xi_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{21} x_2 + \ldots + \gamma_{n1} x_n \\ \xi_2 = \gamma_{12} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \ldots + \gamma_{n2} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \gamma_{1n} x_1 + \gamma_{2n} x_2 + \ldots + \gamma_{nn} x_n \end{cases}$$

Weil die $2n$ Coefficienten $\gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ Constanten sind, so bleiben sie bei einer Differentiation nach der Variable t unberührt, und es kommen für die nach t genommenen Differentialquotienten einer jeden neuen Variable $\xi_\mathfrak{b}$ die Ausdrücke

$$(16)\quad \frac{d\xi_\mathfrak{b}}{dt} = \gamma_{1\mathfrak{b}} \frac{dx_1}{dt} + \gamma_{2\mathfrak{b}} \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \gamma_{n\mathfrak{b}} \frac{dx_n}{dt},$$

$$(17)\quad \frac{d^2\xi_\mathfrak{b}}{dt^2} = \gamma_{1\mathfrak{b}} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \gamma_{2\mathfrak{b}} \frac{d^2x_2}{dt^2} + \ldots + \gamma_{n\mathfrak{b}} \frac{d^2x_n}{dt^2}.$$

Auf der letzten Gleichung beruht die auszuführende Transformation des Systems (4). Indem die $\mathfrak{a}$te Gleichung desselben mit $\gamma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ multiplicirt und von $\mathfrak{a}=1$ bis $\mathfrak{a}=n$ summirt wird, entsteht links ein Aggregat, das nach (17) gleich dem zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\xi_\mathfrak{b}}{dt^2}$ ist, rechts das Aggregat

$$(18)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\gamma_{1\mathfrak{b}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\gamma_{2\mathfrak{b}} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\gamma_{n\mathfrak{b}}\right).$$

Vermöge der Gleichungen (12) ist jede der ursprünglichen Variabeln als eine Function der n neuen gegeben, so dass die partiellen Differentialquotienten der erstern in Bezug auf die letztern folgendermassen durch die Substitutionscoefficienten ausgedrückt werden,

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1} = \gamma_{11}, \ \frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} = \gamma_{12}, \ldots \frac{\partial x_1}{\partial\xi_n} = \gamma_{1n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1} = \gamma_{21}, \ \frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} = \gamma_{22}, \ldots \frac{\partial x_2}{\partial\xi_n} = \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial\xi_1} = \gamma_{n1}, \ \frac{\partial x_n}{\partial\xi_2} = \gamma_{n2}, \ldots \frac{\partial x_n}{\partial\xi_n} = \gamma_{nn}. \end{cases}$$

Demnach ist die Summe (18) gleich dem Ausdruck

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_\mathfrak{b}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_\mathfrak{b}}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\xi_\mathfrak{b}}\right).$$

Nun wurde in § 45 nachgewiesen, dass, wenn bei einer Function von n Variabeln $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jede derselben von einer einzigen Variable u abhängt, der nach u genommene vollständige Differentialquotient folgendermassen gebildet wird

$$(21)\qquad \frac{d\varphi(x_1,\ldots x_n)}{du}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{du}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{du}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{du}.$$

Sobald aber die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich bestimmten Functionen von n neuen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ gesetzt werden, und dadurch die Function $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ in eine Function der letzteren $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ übergeht, kann man unter den neuen Variabeln eine einzelne $\xi_\mathfrak{b}$ auswählen, diese allein beweglich machen und die übrigen ruhen lassen; dann erhält man für den nach $\xi_\mathfrak{b}$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Function $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ den folgenden Ausdruck, welcher aus (21) entsteht, indem $\frac{dx_\mathfrak{c}}{du}$ durch $\frac{\partial x_\mathfrak{c}}{\partial\xi_\mathfrak{b}}$ ersetzt wird,

$$(22)\qquad \frac{\partial\psi(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n)}{\partial\xi_\mathfrak{b}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_\mathfrak{b}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_\mathfrak{b}}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\xi_\mathfrak{b}}.$$

Somit verwandelt sich (20) in den einfachen Ausdruck $\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mathfrak{b}}$.
In dem vorliegenden Falle wird die Function $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ durch die rechte Seite der zweiten Gleichung (13) dargestellt, woraus die Bestimmung

$$(23)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mathfrak{b}}=\omega^{(\mathfrak{b})}\xi_\mathfrak{b}$$

hervorgeht. Demnach erhält man aus dem System (4) die n Differentialgleichungen

$$(24)\qquad \frac{d^2\xi_\mathfrak{b}}{dt^2}=\omega^{(\mathfrak{b})}\xi_\mathfrak{b},$$

welche den Zahlen $\mathfrak{b}=1, 2, \ldots n$ entsprechen. Sie enthalten nur noch die neuen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und bilden deshalb das aufzustellende *transformirte System von Differentialgleichungen.*

Nach den früheren Definitionen ist eine vollständige Integration des Systems (5) eine solche, bei der für einen gewissen Werth $t=t_0$ jede der $2n$ abhängigen Variabeln einen beliebig vorgeschriebenen Werth annimmt,

(25) $$x_\mathfrak{b}=x_\mathfrak{b}(0),\ x'_\mathfrak{b}=x'_\mathfrak{b}(0).$$

Dieselbe Bestimmung der abhängigen Variabeln $x_\mathfrak{b}$ als Functionen von t entspricht einer vollständigen Integration des Systems (4). Weil aber in (5) die n Gleichungen $\frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}=x'_\mathfrak{b}$ enthalten sind, so tritt bei dem System (4) an die Stelle der Forderungen (25) das System von Forderungen

(26) $$x_\mathfrak{b}=x_\mathfrak{b}(0),\ \frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}=x'_\mathfrak{b}(0),$$

das heisst, das System (4) ist vollständig integrirt, wofern für $t=t_0$ erstens die n abhängigen Variabeln $x_\mathfrak{b}$ und zweitens die n ersten Differentialquotienten derselben $\frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}$ beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen. Aus den Anfangswerthen $x_\mathfrak{b}=x_\mathfrak{b}(0)$ folgen nach (15) vollkommen bestimmte Anfangswerthe $\xi_\mathfrak{b}=\xi_\mathfrak{b}(0)$, aus den Anfangswerthen $\frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}=x'_\mathfrak{b}(0)$ vermöge (16) vollkommen bestimmte Anfangswerthe $\frac{d\xi_\mathfrak{b}}{dt}=\xi'_\mathfrak{b}(0)$. Für diese Werthe ist das System (24) so zu integriren, dass zu dem Werthe $t=t_0$ die Gleichungen

(27) $$\xi_\mathfrak{b}=\xi_\mathfrak{b}(0),\ \frac{d\xi_\mathfrak{b}}{dt}=\xi'_\mathfrak{b}(0)$$

gehören.

Der Vorzug der Gleichungen (24) besteht offenbar darin, dass in jeder derselben nur eine Variable vorkommt; es ist deshalb nur eine einzige Differentialgleichung

(28) $$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\omega\,\xi$$

zu behandeln, in der ω eine von Null verschiedene reelle Grösse bedeutet. Hier begründet das Vorzeichen von ω einen wesentlichen Unterschied. Ist ω negativ, so genügen der Differentialgleichung (28) die beiden trigonometrischen Functionen $\cos(\sqrt{-\omega}\,t)$

und $\sin(\sqrt{-\omega}\,t)$, und da die Differentialgleichung linear ist, so darf man, um eine allgemeinere Lösung zu erhalten, nach einer obigen Bemerkung, jede der genannten Lösungen mit einer beliebigen Constante multipliciren und von beiden Producten die Summe nehmen. Wegen der für $t=t_0$ zu erfüllenden Anfangsbedingungen ist es auch gestattet, von vorne herein die Lösungen $\cos(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0))$ und $\sin(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0))$ zu nehmen und mit zwei Constanten B und C die Lösung

$$(29)\qquad \xi = B\cos(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0)) + C\sin(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0))$$

aufzustellen, aus der durch Differentiation die Gleichung

$$(30)\quad \frac{d\xi}{dt} = -B\sqrt{-\omega}\sin(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0)) + C\sqrt{-\omega}\cos(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0))$$

folgt. Damit nun für $t=t_0$ die Gleichungen

$$(31)\qquad \xi = \xi(0),\quad \frac{d\xi}{dt} = \xi'(0)$$

gelten, hat man in (29) und (30) $t-t_0=0$ zu setzten, und findet, da bei verschwindendem Argument der Cosinus gleich der Einheit, der Sinus gleich Null wird, die Bestimmungen

$$(32)\qquad \xi(0) = B,\quad \xi'(0) = C\sqrt{-\omega};$$

demnach erhält die gesuchte vollständige Lösung die Gestalt

$$(33)\quad \xi = \xi(0)\cos(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0)) + \frac{\xi'(0)}{\sqrt{-\omega}}\sin(\sqrt{-\omega}\,(t-t_0)).$$

Wenn dagegen in (28) die Grösse ω positiv ist, so wird die Differentialgleichung durch die beiden Exponentialfunctionen $e^{\sqrt{\omega}\,t}$ und $e^{-\sqrt{\omega}\,t}$ befriedigt, statt deren auch die Exponentialfunctionen $e^{\sqrt{\omega}\,(t-t_0)}$ und $e^{-\sqrt{\omega}\,(t-t_0)}$ gewählt werden können. Aus den angegebenen Gründen genügt alsdann der mit zwei beliebigen Constanten L und M gebildete Ausdruck

$$(34)\qquad \xi = Le^{\sqrt{\omega}\,(t-t_0)} + Me^{-\sqrt{\omega}\,(t-t_0)},$$

dessen Differentiation die Gleichung

$$(35)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\omega}\,Le^{\sqrt{\omega}\,(t-t_0)} - \sqrt{\omega}\,Me^{-\sqrt{\omega}\,(t-t_0)}$$

ergiebt. Die Erfüllung der Anfangsbedingungen (31) zieht die Gleichungen

$$(36)\qquad \xi(0) = L+M,\quad \xi'(0) = \sqrt{\omega}\,(L-M)$$

nach sich, aus denen die Werthe

(37) $L = \frac{1}{2}\left(\xi(0) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\xi'(0)\right),\ M = \frac{1}{2}\left(\xi(0) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\xi'(0)\right)$

folgen. Mithin entsteht die gesuchte vollständige Lösung

(38) $\xi = \frac{1}{2}\left(\xi(0) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\xi'(0)\right)e^{\sqrt{\omega}(t-t_0)} + \frac{1}{2}\left(\xi(0) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\xi'(0)\right)e^{-\sqrt{\omega}(t-t_0)},$

welche sich folgendermassen zusammenfassen lässt

(38*) $\xi = \xi(0)\,\frac{e^{\sqrt{\omega}(t-t_0)} + e^{-\sqrt{\omega}(t-t_0)}}{2} + \xi'(0)\,\frac{e^{\sqrt{\omega}(t-t_0)} - e^{-\sqrt{\omega}(t-t_0)}}{2\sqrt{\omega}}.$

Der letztere Ausdruck enthält auch den Ausdruck der zu einem negativen ω gehörenden Lösung (33), sobald die in I, § 116 erwähnte Bezeichnung

(39) $$\cos v + i \sin v = e^{iv}$$

gebraucht wird, aus welcher mittelst der Verwandlung von v in $-v$ für $\cos v$ und $\sin v$ die Darstellungen

(40) $$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},\quad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}$$

folgen. Fügt man jetzt den Grössen ξ den fortgelassenen Zeiger $\mathfrak{b}$ bei, so wird die gesuchte vollständige Lösung des Systems (24), die den Bedingungen (27) genügt, durch die Gleichungen

(41) $\xi_{\mathfrak{b}} = \xi_{\mathfrak{b}}(0)\,\frac{e^{\sqrt{\omega^{(\mathfrak{b})}}(t-t_0)} + e^{-\sqrt{\omega^{(\mathfrak{b})}}(t-t_0)}}{2} + \xi'_{\mathfrak{b}}(0)\,\frac{e^{\sqrt{\omega^{(\mathfrak{b})}}(t-t_0)} - e^{-\sqrt{\omega^{(\mathfrak{b})}}(t-t_0)}}{2\sqrt{\omega^{(\mathfrak{b})}}}$

gegeben. Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (12) liefert dann die verlangte vollständige Integration des ursprünglichen Systems (4).

Capitel XII.

Doppelte und mehrfache Integrale.

§ 90. Doppelte Integrale.

Im vorigen Capitel sind die gewöhnlichen Differentialgleichungen und Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen als Verallgemeinerungen der Aufgabe betrachtet worden, das Integral einer Function einer Variable in Bezug auf die letztere zu bestimmen. Die Integration einer Function einer

Variable lässt sich aber noch auf eine andere Weise erweitern. Darauf gestützt, dass das Integriren durch die Bildung einer gegen einen Grenzwerth convergirenden Summe bewerkstelligt wird, bildet man für Functionen von zwei und mehr Variabeln entsprechende Ausdrücke von doppelten und mehrfachen Summen, die ebenfalls bei gewissen Voraussetzungen gegen Grenzwerthe convergiren; die letztern dienen zur Definition der doppelten und mehrfachen Integrale. Durch die Untersuchung dieser Begriffe empfängt das Gebiet der Integralrechnung abermals einen neuen Zuwachs.

Um das Wesen eines doppelten Integrals zu erklären, wird angenommen, dass eine Function $f(x, y)$ für eine gewisse zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der beiden Variabeln x und y eindeutig, endlich und stetig gegeben sei. Innerhalb dieser Mannigfaltigkeit werde eine Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung K herausgehoben, und zwar zunächst eine solche, bei der x zwischen den festen Grenzen a und A, y zwischen den festen Grenzen b und B liegt, oder die beiden Ungleichheiten

(1) $$a \leqq x \leqq A, \quad b \leqq y \leqq B$$

gelten. Man schalte nun zwischen $a = x_0$ und $A = x_l$ die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{l-1}$, zwischen $b = y_0$ und $B = y_m$ die Werthe $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ nach ihrer algebraischen Grösse ein, wobei vermöge des positiven Vorzeichens der beiden Differenzen $A - a$ und $B - b$ die sämmtlichen Differenzen

(2) $$\begin{cases} \Delta x_0 = x_1 - x_0, \ \Delta x_1 = x_2 - x_1, \ldots \Delta x_{l-1} = x_l - x_{l-1} \\ \Delta y_0 = y_1 - y_0, \ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots \Delta y_{m-1} = y_m - y_{m-1} \end{cases}$$

positiv ausfallen, und bilde mit den Functionswerthen von $f(x, y)$, die zu den Verbindungen der genannten Werthe der beiden Variabeln gehören, nach Analogie der Summe (2) in § 20 die doppelte Summe

(3) $$\begin{array}{llll} f(x_0, y_0)\ \Delta x_0 \Delta y_0 & + f(x_1, y_0)\ \Delta x_1 \Delta y_0 & + \ldots + f(x_{l-1}, y_0)\ \Delta x_{l-1} \Delta y_0 \\ + f(x_0, y_1)\ \Delta x_0 \Delta y_1 & + f(x_1, y_1)\ \Delta x_1 \Delta y_1 & + \ldots + f(x_{l-1}, y_1)\ \Delta x_{l-1} \Delta y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ + f(x_0, y_{m-1}) \Delta x_0 \Delta y_{m-1} & + f(x_1, y_{m-1}) \Delta x_1 \Delta y_{m-1} & + \ldots + f(x_{l-1}, y_{m-1}) \Delta x_{l-1} \Delta y_{m-1}. \end{array}$$

Hier sind die Zeiger der mit einander multiplicirten Differenzen respective gleich den Zeigern der Argumente x und y in dem zugehörigen Functionswerth; in jeder Horizontalreihe bleibt der Zeiger von y, in jeder Vertikalreihe der Zeiger von x ungeändert. In Betreff der Stetigkeit der Function $f(x, y)$ wird ähnlich wie in § 20 und § 84 vorausgesetzt, dass bei hinreichend kleinen numerischen Werthen der Incremente $\varDelta x$ und $\varDelta y$ in dem ganzen Gebiet der absolute Werth der Differenz

$$f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)-f(x, y)$$

kleiner als dieselbe beliebig kleine Grösse λ sei. Dann lässt sich zeigen, dass die Summe (3) bei fortwährendem Wachsen der Zahlen der eingeschalteten Werthe der Variabeln und beständiger Abnahme der betreffenden Differenzen, wie die Summe (2) in § 20, gegen einen festen Grenzwerth convergirt.

Bei der Führung des Beweises werden wieder zwischen den zuerst angenommenen Werthen von x und y neue Werthe eingeschaltet. Man hat indessen nicht nöthig, diese sämmtlich durch besondere Bezeichnungen zu unterscheiden, sobald deutlich geworden ist, dass sich stets derselbe Process wiederholt. Es seien zwischen $x_0 = x_{0,0}$ und $x_1 = x_{0,p}$ die Werthe $x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots x_{0,p-1}$, zwischen $y_0 = y_{0,0}$ und $y_1 = y_{0,q}$ die Werthe $y_{0,1}, y_{0,2}, \ldots y_{0,q-1}$ eingeschaltet, und man habe

$$(4)\begin{cases}\varDelta x_{0,0}=x_{0,1}-x_{0,0},\ \varDelta x_{0,1}=x_{0,2}-x_{0,1},\ldots \varDelta x_{0,p-1}=x_{0,p}-x_{0,p-1}\\ \varDelta y_{0,0}=y_{0,1}-y_{0,0},\ \varDelta y_{0,1}=y_{0,2}-y_{0,1},\ldots \varDelta y_{0,q-1}=y_{0,q}-y_{0,q-1};\end{cases}$$

mit allen übrigen Intervallen werde auf gleiche Art verfahren. In Folge dessen wird aus (3) eine neue Summe, deren sämmtliche Glieder entstehen, indem für den ersten Summanden $f(x_0, y_0)\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0$ die partielle doppelte Summe

$$\begin{aligned}(5)\quad & f(x_{0,0}, y_{0,0})\,\varDelta x_{0,0}\varDelta y_{0,0} + f(x_{0,1}, y_{0,0})\,\varDelta x_{0,1}\varDelta y_{0,0} + \ldots\\ &\qquad + f(x_{0,p-1}, y_{0,0})\,\varDelta x_{0,p-1}\varDelta y_{0,0}\\ &+ f(x_{0,0}, y_{0,1})\,\varDelta x_{0,0}\varDelta y_{0,1} + f(x_{0,1}, y_{0,1})\,\varDelta x_{0,1}\varDelta y_{0,1} + \ldots\\ &\qquad + f(x_{0,p-1}, y_{0,1})\,\varDelta x_{0,p-1}\varDelta y_{0,1}\\ &\vdots\\ &+ f(x_{0,0}, y_{0,q-1})\,\varDelta x_{0,0}\varDelta y_{0,q-1} + f(x_{0,1}, y_{0,q-1})\,\varDelta x_{0,1}\varDelta y_{0,q-1} + \ldots\\ &\qquad + f(x_{0,p-1}, y_{0,q-1})\,\varDelta x_{0,p-1}\varDelta y_{0,q-1}\end{aligned}$$

und für jeden anderen Summanden von (3) eine entsprechend gebildete partielle doppelte Summe tritt. Wofern die Differenzen $x_1 - x_0$ und $y_1 - y_0$ hinreichend klein sind, können nach der getroffenen Annahme alle in (5) vorkommenden Functionswerthe von dem Functionswerthe $f(x_0, y_0)$ nur um weniger als die oben erwähnte kleine Grösse λ abweichen, und da alle Differenzen und deshalb auch deren Producte positiv sind, so wird der Werth von (5) verkleinert oder vergrössert, je nachdem man jeden Functionswerth durch $f(x_0, y_0) - \lambda$ oder $f(x_0, y_0) + \lambda$ ersetzt. In beiden Fällen erhält der substituirte Ausdruck als Factor die Summe aller in (5) auftretenden Producte von Differenzen; dieselbe ist wegen der Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta x_{0,0} + \Delta x_{0,1} + \ldots + \Delta x_{0,p-1} = x_1 - x_0 \\ \Delta y_{0,0} + \Delta y_{0,1} + \ldots + \Delta y_{0,q-1} = y_1 - y_0 \end{cases}$$

gleich dem Product $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) = \Delta x_0 \Delta y_0$. Mithin liegt der Werth der partiellen doppelten Summe (5) für alle Werthe der Zahlen p und q zwischen den beiden Grössen

$$(7)\qquad (f(x_0, y_0) - \lambda)\, \Delta x_0 \Delta y_0,\ (f(x_0, y_0) + \lambda)\, \Delta x_0\, y_0.$$

Genau dieselbe Betrachtung gilt für jeden anderen Summanden von (3), und man erhält demnach bei dem zweiten Verfahren statt $f(x_\alpha, y_\beta) \Delta x_\alpha \Delta y_\beta$ eine partielle doppelte Summe, die zwischen den mit demselben λ gebildeten Grössen

$$(8)\qquad (f(x_\alpha, y_\beta) - \lambda)\, \Delta x_\alpha \Delta y_\beta,\ (f(x_\alpha, y_\beta) + \lambda)\, \Delta x_\alpha \Delta y_\beta$$

gelegen ist. Also befindet sich der Werth der aus dem zweiten Verfahren hervorgehenden totalen Summe, welche gleich dem Aggregat der erwähnten partiellen Summen ist, zwischen zwei Werthen, die man aus (3) erhält, indem jeder Functionswerth $f(x_\alpha, y_\beta)$ das erste Mal durch den Ausdruck $f(x_\alpha, y_\beta) - \lambda$, das zweite Mal durch $f(x_\alpha, y_\beta) + \lambda$ ersetzt wird. Bei der Darstellung dieser beiden Werthe darf man in (3) zuerst den Ausdruck $f(x_\alpha, y_\beta)$ behalten, dann beziehungsweise $-\lambda$ und $+\lambda$ substituiren und die betreffenden Aggregate nehmen. Dadurch ergiebt sich in beiden Fällen die Summe (3) selbst, ferner die Summe aller in (3) vorkommenden Producte von Differenzen, welche vermöge der in (6) ausgedrückten Thatsache gleich dem Product der Differenzen $(A - a)(B - b)$ ist, im ersten Falle mit $-\lambda$, im zweiten Falle mit λ multiplicirt. Aus diesen Gründen hat die Summe (3) unter den angegebenen Bedingungen die Eigenschaft, dass der Werth, in welchen sie sich bei stets fortgesetzter Theilung der Intervalle der Variabeln x und y verwandelt, von dem ursprünglichen Werth um eine Grösse differirt, die zwischen den Werthen

(9) $$-\lambda(A-a)(B-b), \quad +\lambda(A-a)(B-b)$$

enthalten ist. Die Grösse λ wird für hinreichend kleine Werthe der Differenzen (2) beliebig klein, mithin wegen der festen Grösse der Differenzen $A-a$ und $B-b$ auch der numerische Werth in (9), und deshalb convergirt die Summe (3) für beständig abnehmende Differenzen gegen einen festen Grenzwerth, wie behauptet worden.

Alles dasjenige, was in § 42 über die doppelte Anordnung von Werthsystemen, die eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ausmachen, gesagt ist, findet auf die Bildung einer doppelten Summe und insofern auf die Summe (3) Anwendung. Man kann entweder zuerst die Summe der Glieder, in welchen die zweite Variable einen ungeänderten Werth y_β hat, und hierauf die Summe dieser Summen, oder zuerst die Summe der Glieder, in welchen die erste Variable einen ungeänderten Werth x_α hat, und dann die Summe dieser Summen nehmen. Die bei dem ersten Verfahren auftretende, mit dem Factor $\varDelta y_\beta$ multiplicirte Summe

(10) $$f(x_0, y_\beta)\varDelta x_0 + f(x_1, y_\beta)\varDelta x_1 + \ldots + f(x_{l-1}, y_\beta)\varDelta x_{l-1},$$

ist eine solche, die nach § 20 bei beständig abnehmenden Differenzen zu der Definition des bestimmten Integrals der Variable x

(11) $$\int_a^A dx\, f(x, y_\beta)$$

führt; hier behält die zweite Variable y den festen Werth y_β, welcher von der nach x auszuführenden Integration unabhängig ist. Da nun die erforderliche zweite Summation entsteht, indem der Ausdruck (10) mit $\varDelta y_\beta$ multiplicirt und hierauf successive $\beta = 0, 1, 2, \ldots m-1$ gesetzt wird, und da bewiesen ist, dass die Summe (3) unter den erwähnten Bedingungen bei beliebig abnehmenden Differenzen stets gegen einen bestimmten Grenzwerth convergirt, so darf man das Integral (11) als den Grenzwerth der Summe (10) und die zu leistende zweite Summation als eine in Bezug auf die Variable y von b bis B auszuführende Integration von (11) auffassen, wodurch der Grenzwerth von (3) als *das doppelte Integral*

$$(12) \qquad \int_b^B dy \int_a^A dx\, f(x,y)$$

erscheint. Sobald das zweite Verfahren eingeschlagen wird, geht die für einen gewissen Werth x_α aufgestellte Summe

$$(13) \quad f(x_\alpha, y_0)\,\varDelta y_0 + f(x_\alpha, y_1)\,\varDelta y_1 + \ldots + f(x_\alpha, y_{m-1})\,\varDelta y_{m-1}$$

in das nach der Variable y von b bis B zu nehmende Integral

$$(14) \qquad \int_b^B dy\, f(x_\alpha, y)$$

über, und der Grenzwerth von (3) wird in gleicher Weise durch *das doppelte Integral*

$$(15) \qquad \int_a^A dx \int_b^B dy\, f(x, y)$$

dargestellt. In (12) ist die Function $f(x, y)$ der beiden Variabeln x und y innerhalb der für dieselben vorgeschriebenen Grenzen zuerst nach x, dann nach y, in (13) zuerst nach y, dann nach x integrirt. Die beiden Integrale sind aber als Ausdrücke desselben Grenzwerthes einander gleich, und damit ist der Satz begründet, *dass unter den genannten Voraussetzungen der Werth eines doppelten Integrals bei Vertauschung der Ordnung der Integrationen ungeändert bleibt.*

Ausser den Darstellungsweisen, bei denen jeder Variable die betreffenden Integrationsgrenzen vorgeschrieben werden, braucht man auch die Ausdrücke

$$(16) \qquad \iint dx\, dy\, f(x,y), \quad \iint dy\, dx\, f(x, y),$$

welche sich genau an die Gestalt der doppelten Summe (3) anschliessen, und bezeichnet das Gebiet der Variabeln x und y, auf das sich die doppelte Integration erstrecken soll, durch die zugehörigen Ungleichheiten, die in dem gegenwärtigen Falle in (1) angegeben sind. Hierbei wird das Product von je zwei in (3) vorkommenden positiven Differenzen $\varDelta x_\alpha\, \varDelta y_\beta$ durch *das Product von den positiven Differentialen* $dx\, dy$ angedeutet, und dieses letztere Product *das Element des doppelten Integrals* genannt.

Die Ungleichheiten (1) sind so definirt, dass bei der Bestimmung des Gebiets der Variabeln die betreffenden Gleichungen ebenfalls Geltung haben. Weil nun den Gleichungen die Begrenzung des Gebietes entspricht, so folgt daraus, dass die Werthsysteme, welche der Begrenzung selbst angehören, auch noch zu dem Gebiete gerechnet werden. Fragt man nach den zu der Begrenzung gehörenden Werthsystemen, die in der Summe (3) vorkommen, so sind es diejenigen, in denen $x = x_0$ oder $y = y_0$ ist, und die dort in der ersten Horizontalreihe und der ersten Vertikalreihe erscheinen; dagegen treten Werthsysteme, in welchen $x = A$ oder $y = B$ ist, gar nicht auf, würden sich aber ergeben, wenn man jede Horizontalreihe nach rechts, und dann jede Vertikalreihe nach unten um einen Schritt weiter führte. Nun besteht eine wesentliche Eigenschaft der Summe (3) darin, dass der Grenzwerth, welchem sie sich nähert, derselbe bleibt, sowohl wenn die Glieder fortgelassen werden, bei denen die Functionswerthe zu Werthsystemen der Begrenzung gehören, wie auch wenn die bezeichneten Glieder hinzukommen, deren Functionswerthe der Begrenzung angehören würden. Denn die im ersten Falle fortzulassenden Glieder setzen sich aus der Summe der ersten Horizontalreihe und der um das erste Glied verkleinerten Summe der ersten Vertikalreihe

$$(17)\begin{cases} f(x_0, y_0)\Delta x_0 \Delta y_0 + f(x_1, y_0)\Delta x_1 \Delta y_0 + \ldots + f(x_{l-1}, y_0)\Delta x_{l-1}\Delta y_0 \\ \qquad\qquad f(x_0, y_1)\Delta x_0 \Delta y_1 + \ldots + f(x_0, y_{m-1})\Delta x_0 \Delta y_{m-1}, \end{cases}$$

die im zweiten Falle hinzuzufügenden Glieder aus den entsprechenden Summen

$$(18)\begin{cases} f(x_0, y_m)\Delta x_0 \Delta y_m + f(x_1, y_m)\Delta x_1 \Delta y_m + \ldots + f(x_{l-1}, y_m)\Delta x_{l-1}\Delta y_m \\ f(x_l, y_0)\Delta x_l \Delta y_0 + f(x_l, y_1)\Delta x_l \Delta y_1 + \ldots + f(x_l, y_{m-1})\Delta x_l \Delta y_{m-1} + f(x_l, y_m)\Delta x_l \Delta y_m \end{cases}$$

zusammen. Die erste Summe in (17) ist gleich dem Product der Differenz Δy_0 und der für den Zeiger $\beta = 0$ gebildeten obigen Summe (10); weil der Werth von (10) stets innerhalb endlicher Grössen bleibt, die Differenz Δy_0 aber beliebig klein wird, so hat auch das Product einen beliebig kleinen Werth. Dieselbe Ueberlegung gilt für die zweite Summe in (17) wegen des abnehmenden Werthes Δx_0, ebenso für die erste und zweite Summe in (18) vermöge der Voraussetzung, dass die neu hinzugefügten Differenzen Δx_l und Δx_m auch beliebig klein seien. Mithin liefern sowohl die in (17) wie auch die in (18) zusammengestellten Summen zu dem Werthe der Summe (3) nur Beiträge von beliebig kleinem Werth, und deshalb convergirt die Summe (3) immer gegen denselben Grenzwerth, mögen bei der Definition die Summen (17) weggenommen oder die Summen (18) hinzugefügt werden.

Die Bedeutung des gefundenen Resultats macht sich besonders geltend, sobald eine mit (3) gleichartige Summe unter der Voraussetzung gebildet wird, dass die zugehörige Mannigfaltigkeit K der Variabeln x und y auf eine beliebige Weise begrenzt sei. Nach den Ausführungen des § 51 wird zu diesem Zweck mit Hülfe einer Folge von Functionen der unabhängigen Variabeln eine bestimmte Folge von Ungleichheiten aufgestellt. Wir denken uns eine solche Bestimmung gegeben, bei der jede Variable innerhalb endlicher Grössen bleibt, nehmen in dem Gebiete K eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Werthsystemen (x_α, y_β) an, und bilden für diese die Summe

$$\sum_\alpha \sum_\beta f(x_\alpha, y_\beta)\, \Delta x_\alpha \Delta y_\beta, \tag{19}$$

wo die Differenzen Δx_α und Δy_β mittelst der Gleichungen

$$\Delta x_\alpha = x_{\alpha+1} - x_\alpha,\ \Delta y_\beta = y_{\beta+1} - y_\beta \tag{20}$$

definirt sind. Die Bezeichnung der Werthsysteme durch die fortlaufenden Zeiger α und β wird der Bedingung unterworfen, dass die Differenzen Δx_α und Δy_β stets positiv ausfallen, dass also für denselben Werth von y dem Wachsen des Zeigers α ein Zunehmen von x, für denselben Werth von x dem Wachsen des Zeigers β ein Wachsen von y entspricht. Bei der Auswahl der Werthsysteme (x_α, y_β) kann man diejenigen, welche der Begrenzung des Gebietes K angehören, entweder ganz ausschliessen oder ganz einschliessen, oder nach einer gewissen Regel einen Theil behalten. Für den Nachweis, dass die Summe (19) bei beständig abnehmenden Differenzen Δx_α und Δy_β gegen einen festen Grenzwerth convergirt, ergiebt sich zunächst durch ähnliche Betrachtungen, wie sie über die Summe (3) angestellt sind, dass die Bestandtheile von (19), welche bei der einen Definition fortgelassen, bei der anderen hinzugefügt werden, einen verschwindend kleinen Beitrag zu dem Grenzwerthe des Ganzen liefern. Was ferner die Veränderung der Summe (19) betrifft, welche durch Anwendung einer wachsenden Zahl von Werthsystemen (x, y) mit beständig abnehmenden Differenzen hervorgerufen wird, so lassen sich unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x, y)$ in dem Gebiete K eindeutig, endlich und auf die oben hervorgehobene Weise stetig sei, die vorhin mitgetheilten Betrachtungen mit geeigneten Modificationen wiederholen. Weil die Begrenzung des Gebietes K so angenommen ist, dass x und y stets endlich bleiben, so existiren für x zwei Werthe a und A, für y zwei Werthe b und B von der Beschaffenheit, dass in allen vorkommenden Werthsystemen $a < x < A$, $b < y < B$ ist. Wenn dann wieder der absolute Werth der Differenz $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ für hinreichend kleine Werthe von Δx und Δy bei jedem Werthsystem (x, y) unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabsinkt, so zeigt sich, dass der Unterschied zwischen dem Werthe der Summe (19) und einem durch beständige Abnahme der Differenzen hervorgebrachten Werthe derselben numerisch kleiner als die Grösse $\lambda (A - a)(B - b)$, und deshalb für ein beliebig kleines λ selbst beliebig klein wird. Demnach convergirt die Summe (19) gegen einen festen Grenzwerth. Auch hier ist es gestattet, entweder die Summation nach Δx_α vorangehen, und die nach Δy_β folgen zu lassen, oder umgekehrt zu verfahren. Im ersten Falle integrirt man zuerst nach x, dann nach y, im zweiten nach y, dann nach x. Je nachdem das eine oder andere geschieht, wird der in Rede stehende Grenzwerth als das doppelte Integral

$$\int dy \int dx\, f(x, y) \tag{21}$$

oder

$$\int dx \int dy\, f(x, y), \tag{22}$$

bezeichnet; mithin gilt auch hier der Satz, dass der Werth des betreffenden doppelten Integrals von der Reihenfolge der Integrationen unabhängig ist.

Als Beispiel sei das Gebiet K durch die mit einer beliebigen positiven Constante R gebildete Ungleichheit

$$x^2 + y^2 \leqq R^2 \tag{23}$$

bestimmt. Dann können sowohl x wie y nur Werthe annehmen, welche zwischen den Grössen $-R$ und $+R$ enthalten sind. Bei einem in diesem Bereich beliebig aber fest gewählten y muss

(24) $$x^2 \leqq R^2 - y^2$$

sein, so dass sich die Variable x algebraisch zunehmend von dem negativen kleinsten Werthe $-\sqrt{R^2-y^2}$ bis zu dem positiven grösten Werthe $+\sqrt{R^2-y^2}$ erstreckt. Man hat daher in (21) die auf x bezügliche Integration von $-\sqrt{R^2-y^2}$ bis $+\sqrt{R^2-y^2}$, hiernach die auf y bezügliche Integration von $-R$ bis $+R$ zu nehmen. In gleicher Weise folgt aus (23) für einen beliebig aber fest gewählten Werth von x die Ungleichheit

(25) $$y^2 \leqq R^2 - x^2,$$

nach welcher die Variable y von dem negativen kleinsten Werthe $-\sqrt{R^2-x^2}$ bis zu dem positiven grösten Werthe $+\sqrt{R^2-x^2}$ auszudehnen ist. Deshalb ist in (22) die Integration nach y von $-\sqrt{R^2-x^2}$ bis $+\sqrt{R^2-x^2}$, alsdann die Integration nach x von $-R$ bis $+R$ zu erstrecken. Man erhält also gegenwärtig durch Zufügen der Integrationsgrenzen statt (21) den Ausdruck

(26) $$\int_{-R}^{R} d\,y \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} d\,x\, f(x,y),$$

statt (22) den Ausdruck

(27) $$\int_{-R}^{R} d\,x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} d\,y\, f(x,y).$$

In (26) sind die Grenzen der nach x zu nehmenden Integration von der Grösse y, in (27) die Grenzen der nach y auszuführenden Integration von der Grösse x abhängig, während die Integrationsgrenzen in (12) und (15) reine Constanten sind. Man gebraucht auch die Bezeichnung, dass in (26) und (27) *die Integrationsgrenzen von den Integrationsvariabeln abhängig*, dagegen in (12) und (15) *von den Integrationsvariabeln unabhängig* sind.

§ 91. Integrale, die über einen Theil einer Ebene ausgedehnt werden.

Wenn die Variabeln x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene gelten, und dem entsprechend durch das gegebene Gebiet K ein Theil der Ebene bezeichnet wird, so gehören die Werthsysteme (x_α, y_β), welche in der Summe (3) und (19) des vorigen § vorkommen, zu Punkten, die in dem betreffenden Theile der Ebene liegen und nach Reihen von geraden Linien geordnet sind, welche beziehungsweise der x Axe und y Axe parallel laufen. Durch die positive Differenz $\varDelta x_\alpha$ wird der Abstand von den auf einer Parallele zur x Axe befindlichen Punkten $(x_{\alpha+1}, y_\beta)$ und (x_α, y_β), durch die positive Differenz $\varDelta y_\beta$ der Abstand von den auf einer Parallele zur y Axe befindlichen Punkten (x_α, y_β) und $(x_\alpha, y_{\beta+1})$ gemessen, mithin ist das Product $\varDelta x_\alpha \varDelta y_\beta$ das Mass des Flächeninhalts des Rechtecks, dessen vier Ecken respective die Coordinaten

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} (x_\alpha, y_\beta), & (x_{\alpha+1}, y_\beta) \\ (x_\alpha, y_{\beta+1}), & (x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}) \end{array}$$

haben. Nachdem also der mit K zu bezeichnende Theil der Ebene durch Reihen von geraden Linien, die den beiden Axen parallel sind, in lauter Rechtecke getheilt, und der Flächeninhalt jedes Rechtecks mit dem zu einer bestimmten Ecke gehörenden Functionswerth $f(x_\alpha, y_\beta)$ multiplicirt ist, wird die Summe der erhaltenen Producte gleich der zu bildenden Summe, und der Grenzwerth derselben definirt das über den Theil K der Ebene auszudehnende Integral

$$(2) \qquad \iint dx\, dy\, f(x, y).$$

Bei dieser Auffassung heisst *das Product der positiven Differentiale $dx\, dy$ das Element der betreffenden Ebene.* Integrale mit unabhängigen Grenzen wie (12) und (15) des vorigen § beziehen sich auf einen Theil der Ebene, der ein Rechteck mit den Seiten $A-a$ und $B-b$ ist.

Setzt man in (2) die Function $f(x, y)$ gleich der Einheit, so drückt das Integral den Grenzwerth der Summe aller in dem Theile K der Ebene enthaltenen Rechtecke oder *den Flächeninhalt des Theiles* K aus. Es darf nun nach dem vorigen § die Integration entweder mit der einen oder der anderen Variable beginnen. Bei der für ein unbestimmtes aber festes y nach x auszuführenden Integration, wo stets von den algebraisch kleineren zu den algebraisch grösseren Werthen von x fortgeschritten wird, liefert das Differential dx als unbestimmtes Integral die Function x. Hier sind demnach die Grenzen vermöge der in § 24 entwickelten Grundsätze in der Weise einzuführen, dass, wenn eine für den angenommenen Werth y im Sinne der wachsenden x gezogene Parallele zur x Axe für $x = x^{(0)}$ in den Theil K der Ebene ein- und für $x = x^{(1)}$ austritt, die Differenz $x^{(1)} - x^{(0)}$ genommen wird; falls die genannte Parallele zur x Axe in den Theil K ein zweites Mal für $x = x^{(2)}$ ein- und hierauf für $x = x^{(3)}$ austritt, so kommt noch eine zweite Differenz $x^{(3)} - x^{(2)}$ hinzu, und auf dieselbe Weise ist nöthigenfalls fortzufahren, bis man zu der letzten Austrittstelle der Parallele aus K gelangt ist. So entsteht für den Flächeninhalt des Gebietes K der Ausdruck als einfaches Integral

$$(3)\qquad \int(-x^{(0)} + x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} \mp \ldots)\,dy.$$

Wenn man dagegen für ein unbestimmtes aber festes x nach y integrirt, wobei ebenfalls stets von den algebraisch kleineren zu den algebraisch grösseren Werthen von y fortgeschritten wird, so folgt aus der Integration des Differentials dy die Function y. Es mögen jetzt bei einer für den gewählten Werth von x im Sinne der wachsenden y gezogene Parallele zur y Axe die Eintritts- und Austrittsstellen in das Gebiet K der Reihe nach zu den Werthen $y = y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots$ gehören. Dann hat man ebenso wie vorhin die Differenzen $y^{(1)} - y^{(0)}$, $y^{(3)} - y^{(2)}, \ldots$ zu nehmen, und erhält für den Flächeninhalt des Gebietes K den zweiten Ausdruck

$$(4)\qquad \int(-y^{(0)} + y^{(1)} - y^{(2)} + y^{(3)} \mp \ldots)\,dx.$$

Um ein Beispiel eines Gebietes in der Ebene zu bekommen, bei welchem eine Parallele zu einer der Coordinatenaxen mehrere Male ein- und austritt, kann man das Innere eines Kreises nehmen, aus dem ein Kreis oder mehrere Kreise ausgeschieden sind.

Für ein Stück der Ebene, welches durch eine auf der positiven Seite der x Axe befindliche Curve, durch die x Axe selbst und durch zwei Parallelen zur y Axe begrenzt ist, die den Werthen $x=r$ und $x=s$ entsprechen, ergiebt sich bei einer zu einem beliebigen x gehörenden Parallele zur y Axe der erste Eintrittswerth $y^{(0)}=0$ und der einzige Austrittswerth $y^{(1)}$, der als Function von x mit $y^{(1)}(x)$ bezeichnet werden möge. Es geht daher, falls $r<s$ ist, der Ausdruck (4) in das Integral

$$(5) \qquad \int_r^s y^{(1)}(x)\,dx$$

über, durch welches das bezeichnete ebene Flächenstück nach § 21 gemessen wird. Man sieht, wie sich der Ausdruck (4) durch Addition und Subtraction aus Bestandtheilen von der Beschaffenheit des Integrals (5) zusammengesetzt, und erkennt leicht, dass der Ausdruck (3) eine gleiche Betrachtung erlaubt, bei welcher nur die Bedeutung der Coordinaten x und y umzutauschen ist.

Man kann die zu den Summen (3) und (19) des vorigen § gebrauchten Werthsysteme (x_α, y_β) der Bedingung unterwerfen, ganze Vielfache des mit einer gewissen ganzen Zahl M gebildeten Bruches $\frac{1}{M}$ zu sein, wie auch in § 42 geschehen ist. Bei diesem Verfahren werden die sämmtlichen Differenzen Δx_α und Δy_β gleich $\frac{1}{M}$, das Product $\Delta x_\alpha \Delta y_\beta$ gleich $\frac{1}{M^2}$, und es erfolgt die Verkleinerung aller Differenzen dadurch, dass man die Zahl M über jedes Mass wachsen lässt. Ein eigenthümliches Interesse gewährt die Betrachtung einer solchen über ein Gebiet K ausgedehnten Summe, in welcher die Function $f(x,y)$ gleich der Einheit genommen ist. Da alle Producte $\Delta x_\alpha \Delta y_\beta$ denselben Werth $\frac{1}{M^2}$ haben, so ist der Werth der Summe gleich dem Product aus der Anzahl Z der vorhandenen Summanden mit dem Werthe $\frac{1}{M^2}$. So gelangt man zu dem Ergebniss, dass für eine ohne Ende wachsende Zahl M der Grenzwerth des Quotienten $\frac{Z}{M^2}$ durch das über das Gebiet K ausgedehnte Integral $\iint dx\, dy$ dargestellt werde, oder dass

$$(6) \qquad \iint dx\, dy = \lim . \frac{Z}{M^2}$$

sei. Unter der in Rede stehenden Voraussetzung wird der zugehörige Theil K der betrachteten Ebene durch Systeme von Parallelen, die zu den beiden Axen gezogen sind, in lauter Quadrate getheilt, deren Ecken die gewählten Punkte bezeichnen, jedes Quadrat hat den Flächeninhalt $\frac{1}{M^2}$, die Zahl Z giebt an, wie viel Punkte sich innerhalb des Gebietes K befinden, und die Gleichung (6) drückt den Satz aus, dass der Flächeninhalt des Gebietes K gleich dem Grenzwerthe des Quotienten ist, dessen Zähler die Anzahl Z der in K vorhandenen Punkte und dessen Nenner das Quadrat der wachsenden Zahl M ist. Wenn man die Forderung, dass x_α und y_β rationale Brüche von demselben ganzzahligen Nenner M sein sollen, auch für den Fall festhält, dass das Gebiet K durch die Ungleichheiten (1) des vorigen §

$$(7) \qquad a \leqq x \leqq A, \quad b \leqq y \leqq B$$

bestimmt wird, so macht sich auch bei dieser so einfachen Begrenzung noch ein wesentlicher Unterschied geltend. Es kommt alsdann darauf an, ob die beiden Differenzen $A-a$ und $B-b$ rationale Grössen sind oder nicht, und im letzteren Falle treten bei dem Nachweise, dass das Integral $\iint dx\, dy$ gleich dem Product $(A-a)\,(B-b)$ ist, oder dass der Flächeninhalt eines Rechtecks durch das Product der Längen zweier zusammenstossender Seiten gemessen wird, dieselben Schwierigkeiten auf, die in I, Abschnitt I, Capitel III bei der Begründung der Rechnung mit rationalen und irrationalen Grössen zu erledigen waren.

§ 92. Geometrische Transformation eines doppelten Integrals.

Der in § 90 gelieferte Nachweis, dass die dortige Summe (19) gegen einen festen Grenzwerth convergirt, lässt sich geometrisch dahin zusammenfassen, dass, wenn die Summe für eine erste hinreichend feine durch Parallelen zu der x und y Axe hervorgebrachte Theilung des Gebietes K gebildet ist, und später für eine zweite durch ebensolche Parallelen ausgeführte noch feinere Theilung von K gebildet wird, das zweite Resultat von dem ersten um beliebig wenig abweicht. Wie hier die Theilung der Ebene durch die beiden Systeme von gegen einander rechtwinkligen geraden Linien geschieht, so kann die Ebene durch irgend zwei andere Systeme von Linien getheilt werden, welche die Beschaffenheit haben, dass jede Linie des einen von jeder Linie des anderen Systems in einem bestimmten Punkte geschnitten, und der Ort jedes Punktes durch die Kenntniss der beiden betreffenden Linien bestimmt wird. In § 60 ist von der Verwandlung des ursprünglichen rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges gesprochen und auf I, § 80 verwiesen. Der letztgenannte § zeigt aber auch, dass, wenn die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes der Ebene durch zwei neue Variable x', y' mit Hülfe von vier Constanten α, β, γ, δ, bei denen $\alpha\delta - \beta\gamma$ einen von Null verschiedenen Werth hat, vermöge der Gleichungen ersten Grades

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, den constanten Werthen von y' ein System von parallelen geraden Linien, den constanten Werthen von x' ein zweites System von parallelen geraden Linien entspricht, die einander unter einem beliebigen Winkel schneiden, und dass durch jedes System von Werthen x', y' ein System von Werthen x, y oder ein Punkt der Ebene bestimmt ist. Desgleichen folgt aus I, § 42, dass ein Punkt der Ebene statt durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y durch die Länge r der von dem gewählten Anfangspunkte nach dem Punkte gezogenen Linie, die *radius vector* genannt wird, und dem innerhalb eines Kreises genommenen dort definirten Winkel θ bestimmt werden kann, wobei die Gleichungen

(2) $$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

gelten. Hier gehören zu den festen Werthen von θ unbegrenzte gerade Linien, die von dem Anfangspunkt oder Pol nach einer Richtung gehen, zu den festen Werthen von r um den Anfangspunkt mit dem Radius r beschriebene Kreislinien. Ebenso kann man die rechtwinkligen Coordinaten x und y in allgemeiner Weise von zwei neuen Variabeln ξ und η abhängig machen und den Ort (x, y) vermöge der Grössen ξ und η bestimmen, welche dann auch als Coordinaten des Punktes betrachtet werden; hierbei correspondiren den verschiedenen festen Werthen von η die verschiedenen Curven eines Systems, den verschiedenen festen Werthen von ξ die verschiedenen Curven eines zweiten Systems.

Bei solchen Systemen von Linien erfolgt die Theilung der Ebene dadurch, dass man jede der neuen Variabeln um eine Reihe auf einander folgender Differenzen ändert und die zu den betreffenden constanten Werthen gehörigen Curven beschreibt; dadurch entsteht ein System von Vierecken, deren jedes von vier Curvenstücken begrenzt ist. Wird ein zweites System von kleineren Differenzen genommen, so ergiebt sich eine Theilung der Ebene in ein System von kleineren Vierecken, bei welchen die zu jedem einzelnen gehörenden Curvenstücke beliebig wenig von geraden Linien abweichen und als solche betrachtet werden dürfen. Die Umformung eines gegebenen Flächenintegrals beruht auf der Aufgabe, den Flächeninhalt eines solchen Elementarvierecks zu messen.

Wir gehen von einem beliebigen Punkte aus, welcher durch die Werthe ξ und η der neuen Variabeln bestimmt ist und $[\xi, \eta]$ genannt werden mag, lassen ξ um das positive Differential $d\xi$, η um das positive Differential $d\eta$ wachsen, und untersuchen den Flächeninhalt des Vierecks, dessen Endpunkte die Bezeichnungen

(3) $$[\xi, \eta],\quad [\xi + d\xi, \eta],\quad [\xi, \eta + d\eta],\quad [\xi + d\xi, \eta + d\eta]$$

haben. Aus den Gleichungen, durch welche x und y als Functionen von ξ und η gegeben sind, folgen die Incremente von x und y, welche der Zunahme von ξ um $d\xi$ und η um $d\eta$ entsprechen, als die vollständigen Differentiale

(4)
$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \dfrac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \dfrac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \end{cases}$$

und geben somit die relativen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $(x+dx,\ y+dy)$ in Bezug auf den Punkt (x, y) an. Man erhält daher die bezüglichen Werthe für die auf einander folgenden in (3) bezeichneten Punkte, indem man in den Ausdrücken (4) respective $d\xi = 0$, $d\eta = 0$; $d\xi = d\xi$, $d\eta = 0$; $d\xi = 0$, $d\eta = d\eta$; $d\xi = d\xi$, $d\eta = d\eta$ setzt. Die Gleichungen (4) haben, für die obigen Gleichungen (1) gebildet, die Gestalt

(5)
$$\begin{aligned} dx &= \alpha\, dx' + \beta\, dy' \\ dy &= \gamma\, dx' + \delta\, dy', \end{aligned}$$

welche mit der Gestalt von (1) übereinstimmt. Hiernach lässt sich alles dasjenige, was in I, § 80 in Betreff der Gleichungen (1) auseinander gesetzt ist, auf die Gleichungen (4) übertragen, sobald man die Differentiale der Variabeln als veränderlich, die für das einzelne Werthsystem gebildeten partiellen Differentialquotienten als fest ansieht, und es ergiebt sich unmittelbar, dass das in Rede stehende Elementarviereck als ein Elementarparallelogramm aufzufassen ist. Durch geometrische Betrachtungen von der Art der in I, § 80 angestellten findet man den Flächeninhalt des Elementarparallelogramms gleich dem Product, das aus der Multiplication des absoluten Werthes der von Null verschiedenen Determinante

(6)
$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

in das Product der positiven Differentiale $d\xi\, d\eta$ hervorgeht. Zugleich wird erkannt, dass das Vorzeichen von (6) positiv oder negativ ausfällt, je nachdem das von dem Punkte (x, y) ausgehende Linienelement, für welches $d\xi > 0$, $d\eta = 0$ ist, zu dem von (x, y) ausgehenden Linienelement, für welches $d\xi = 0$, $d\eta > 0$ ist, eine gleiche oder entgegengesetzte Lage wie diejenige einnimmt, welche die positive x Axe zu der positiven y Axe hat. Bei dem obigen Beispiel (2) treten an die Stelle von (4) die Gleichungen

(7)
$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta, \end{aligned}$$

so dass

$$(8)\qquad \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}-\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}=r\cos\theta\cos\theta+r\sin\theta\sin\theta=r$$

wird. Die betreffende Determinante ist also wegen der positiven Beschaffenheit von r immer positiv, und zeigt dadurch an, dass für jedes zu den betreffenden Polarcoordinaten gehörende Elementarparallelogramm die Richtung $dr>0$, $d\theta=0$ zu der Richtung $dr=0$, $d\theta>0$ ebenso liegt wie die positive x Axe zu der positiven y Axe.

Nachdem der Inhalt des einzelnen Elementarparallelogramms bestimmt ist, erhält man den Inhalt eines gewissen Theils der Ebene durch Summation der zugehörigen Elementarparallelogramme und Uebergehen zur Grenze. Bei den rechtwinkligen Coordinaten wurde das Elementarparallelogramm durch das Product der positiven Differentiale $dx\,dy$ gemessen, bei den beliebigen Coordinaten ξ, η fand sich der Ausdruck

$$\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi\,d\eta,$$

in welchem das Zeichen $\varepsilon=\pm 1$ so gewählt werden muss, dass das Resultat positiv wird. Mithin entsteht für den Flächeninhalt eines gegebenen Theiles der Ebene der doppelte Ausdruck

$$(9)\qquad \iint dx\,dy=\iint\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi\,d\eta.$$

Ist der Theil der Ebene wieder ein Rechteck, welches durch die Ungleichheiten (1) des § 90 ausgedrückt wird, so bekommt die linke Seite von (9) den Werth $(A-a)\,(B-b)$ und man erhält die Gleichung

$$(10)\qquad (A-a)\,(B-b)=\iint\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi\,d\eta.$$

Um nun die Summe (19) in § 90 umzuformen, welche zu der Definition des doppelten Integrals (21) gedient hat, kann man für ein beliebiges Werthsystem $x=a$, $y=b$ des dortigen Gebietes K die positiven Differenzen $\Delta x=A-a$, $\Delta y=B-b$ einführen, und erhält das betreffende allgemeine Glied, indem man die linke Seite von (10) mit dem Functionalwerth $f(a,b)$ multiplicirt. Weil aber die Differenzen $A-a$ und $B-b$ so klein genommen werden, dass innerhalb des Bereiches

$$(11)\qquad a\leqq x\leqq A,\quad b\leqq y\leqq B$$

der Functionswerth $f(x, y)$ nur um beliebig wenig schwankt, so ist es gestattet, statt die rechte Seite von (10) mit dem Factor $f(a, b)$ zu multipliciren, zu dem unter dem Integralzeichen befindlichen Ausdruck den Factor $f(x, y)$ hinzuzufügen, wo x und y als die gegebenen Functionen von ξ und η darzustellen sind. Jetzt geht die Summe der Ausdrücke $(A-a)(B-b)f(a, b)$ in das umzuformende Integral, die Summe der für die einzelnen Bestandtheile gefundenen Integrale in ein einziges nach den Variabeln ξ und η auszuführendes Integral über, woraus sich die Gleichung

$$(12)\quad \iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint f(x, y)\,\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi\,d\eta$$

ergiebt. Mit derselben ist die Transformation eines gegebenen doppelten Integrals durch Einführung neuer Variabeln vollzogen; hierbei gründet sich der Beweis der obigen Gleichung (10) auf geometrische Betrachtungen. Später werden wir von dieser Gleichung einen rein analytischen Beweis geben. Da die Schlüsse, welche von (10) zu der Gleichung (12) führen, analytische sind, so wird hierdurch die Transformation der doppelten Integrale, wie in § 25 die Transformation der einfachen Integrale, unabhängig von der Anwendung der Geometrie bewiesen.

Ein Hauptvortheil, welcher durch die Transformation eines doppelten Integrals erreicht werden kann, besteht darin, dass die Begrenzung des Gebiets, über welches das Integral auszudehnen ist, in den neuen Variabeln bequemer dargestellt wird. So geht die Begrenzung, welche in (23) des § 90 angegeben ist,

$$(13)\qquad x^2 + y^2 \leqq R^2,$$

bei der Einführung der Polarcoordinaten (2) in die Bestimmung über, dass der Radius r von Null bis R ausgedehnt, der Winkel θ über eine ganze Kreisperipherie genommen werde, oder dass

$$(14)\qquad 0 < r \leqq R, \quad 0 < \theta \leqq 2\pi$$

sei. Weil nun nach einer obigen Bemerkung der Ausdruck $\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$ gleich r wird, so erhält man für die Integrale (26) und (27) aus § 90 die transformirte Darstellung

$$(15)\qquad \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta\,f(r\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

Bei der bisherigen Betrachtung der doppelten Integrale ist stets vorausgesetzt worden, dass die auftretenden Variabeln innerhalb des Gebietes der Integration feste Grenzen nicht überschreiten. Auch liegt es nicht in unserer Absicht, allgemeine Bedingungen aufzustellen, unter denen ein doppeltes Integral über ein Gebiet ausgedehnt werden darf, in welchem die Variabeln unendlich gross werden. Wir wollen jedoch durch die Ausführung eines Beispiels andeuten, wie derartige Fragen zu behandeln sind. Mit der Basis e der natürlichen Logarithmen werde die Function $e^{-x^2-y^2}$ gebildet und über das Gebiet

(16) $$-A<x<A, \quad -B<y<B$$

integrirt, wo A und B positive Constanten bedeuten. Wegen der Gleichung

(17) $$e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}\, e^{-y^2}$$

bezieht sich die von $-A$ bis A nach x zu erstreckende Integration auf den Factor e^{-x^2}, die von $-B$ bis B nach y auszudehnende Integration auf den Factor e^{-y^2}, so dass das gegebene doppelte Integral in ein Product von zwei einfachen Integralen zerfällt,

(18) $$\iint dx\, dy\, e^{-x^2-y^2} = \int_{-A}^{A} e^{-x^2} dx \int_{-B}^{B} e^{-y^2} dy.$$

Da die Function $e^{-x^2-y^2}$ stets positiv ist, so drückt das betreffende Integral den Grenzwerth einer Summe von lauter positiven Bestandtheilen aus, und es leuchtet ein, dass, falls das Integrationsgebiet vergrössert wird, auch der Werth des Integrals zunehmen muss. Nun kann man aber für jedes System von positiven Werthen von A und B zwei Grössen R und S so wählen, dass das Gebiet (16) von einem Gebiete

(19) $$x^2 + y^2 < S^2$$

eingeschlossen wird und ein Gebiet

(20) $$x^2 + y^2 < R^2$$

einschliesst; es braucht nämlich nur S grösser als $\sqrt{A^2+B^2}$, R kleiner als die kleinere der beiden Grössen A und B genommen zu werden. Demnach ist der Werth von (18) zwischen den Werthen enthalten, welche dasselbe Integral respective bei dem Gebiete (19) und (20) annimmt. Für eine solche Ausdehnung lässt sich aber die Integration nach vollzogener Umformung leicht bewerkstelligen. Die Function $e^{-x^2-y^2}$ wird zu der Function e^{-r^2} von r allein, so dass dem Gebiete (20) mit Rücksicht auf (15) das Integral

$$(21)\qquad \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta\, e^{-r^2}$$

entspricht. Die Integration nach r liefert die Function $\frac{-1}{2} e^{-r^2}$, die Integration nach θ die Function θ, mithin kommt durch Einführung der Grenzen das Resultat

$$(22)\qquad \frac{1}{2}(-e^{-R^2}+1)\,2\pi.$$

Bei der Annahme des Gebietes (19) entsteht ein ebenso gebildeter Ausdruck, in welchem statt R die Grösse S vorkommt. Man hat also für die rechte Seite von (18) die Ungleichheiten

$$(23)\qquad \pi(1-e^{-R^2}) < \int\limits_{-A}^{A} e^{-x^2} dx \int\limits_{-B}^{B} e^{-y^2} dy < \pi(1-e^{-S^2}).$$

Nach dem Obigen sind die Grössen R und S solchen Bedingungen unterworfen, dass, wenn A und B über jedes Mass hinaus wachsen, sowohl R als S ebenfalls jede gegebene Grösse überschreiten. Dann nähert sich e^{-R^2} und e^{-S^2} der Null, und beide Grössen, welche in (23) den Werth des Products einschliessen, convergiren gegen denselben Werth π, woraus die Gleichung

$$(24)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$$

folgt. Da aber die beiden Integrale einander gleich sind, und jedes aus lauter positiven Elementen besteht, mithin einen positiven Werth haben muss, so kommt für das einzelne Integral der Werth

$$(25)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

bei welchem die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. In § 76 wurde gezeigt, dass die Function $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ gleich dem vorliegenden Integral (25) sei, dessen Werth wir so eben gefunden haben.

§ 93. Integrale, die sich auf einen Theil einer krummen Oberfläche beziehen.

Wie ein gegebener Theil einer Ebene nach einem gewählten Princip in immer kleinere Theile zerlegt wird, so kann man auch einen gegebenen Theil einer krummen Oberfläche in immer kleinere oder elementare Theile zerlegen. Um aber den Inhalt eines elementaren Theils der Oberfläche zu messen, construirt man in einem Punkte desselben die Tangentialebene und bestimmt den Flächeninhalt des zugehörigen elementaren Theils der letztern. Gesetzt, es sei eine krumme Oberfläche durch die für eine Function φ der drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z geltende Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = \mathfrak{L} \tag{1}$$

bestimmt, in der $\mathfrak{L}$ eine Constante bedeutet. Dann wird die in einem Punkte (x, y, z) an die Fläche gelegte Tangentialebene nach § 50 dadurch bezeichnet, dass die auf der letztern senkrecht stehende, von (x, y, z) nach der Seite gezogene Normale, auf der die Function $\varphi(x, y, z) > \mathfrak{L}$ oder das vollständige Differential $d\varphi(x, y, z) > 0$ ist, mit den positiven Axen der x, y, z respective drei Winkel $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bildet, deren Cosinus die folgenden Werthe haben,

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\mathfrak{x} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{Q}}, \quad \cos\mathfrak{y} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{Q}}, \quad \cos\mathfrak{z} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{Q}}, \\ &Q = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Hier dürfen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ niemals *gleichzeitig verschwinden, und* die Quadratwurzelgrösse ist positiv zu nehmen. Offenbar fallen die Fusspunkte aller von den Punkten eines Theiles der Oberfläche auf eine der Coordinatenebenen, etwa die yz Ebene, herabgelassenen Lothe in einen gewissen Theil P derselben. In dieser Hinsicht machen nur solche Theile der Fläche eine Ausnahme, falls sie überhaupt vorhanden sind, in denen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und in Folge dessen auch $\cos\mathfrak{x}$ dauernd gleich Null ist, das heisst, in denen die auf die yz Ebene herabgelassenen Lothe ganz in die

Fläche hineinfallen; dies ist zum Beispiel bei der Wand eines gegen die yz Ebene senkrechten Cylinders der Fall. Da aber $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ nicht gleichzeitig gleich Null sein dürfen, so ist die Ausnahme für eine der beiden andern Coordinatenebenen nicht vorhanden, und man kann die Wahl bei den einzelnen Theilen der Oberfläche darnach einrichten. Wir dürfen daher annehmen, dass für die gewählte yz Ebene keine solche Ausnahme bestehe. Indem der mit P bezeichnete Theil der Ebene durch verschiedene Linien in kleinere Theile zerlegt wird, ferner in allen Punkten jeder Linie Lothe errichtet werden, welche die Oberfläche treffen, entspricht jeder Linie der yz Ebene wieder eine Linie der Oberfläche, durch deren Gesammtheit diese in Theile zerfällt. Zu jedem solchen Theile gehört der betreffende Theil der yz Ebene als Projection. Nachdem nun in einem Punkte (x, y, z) der Oberfläche die Tangentialebene construirt ist, lässt sich leicht für einen beliebigen Theil der letztern die zugehörige Projection in der yz Ebene bestimmen, und umgekehrt aus dem Flächeninhalt der Projection der Flächeninhalt des entsprechenden Stückes der Tangentialebene finden. Jedes in der Tangentialebene angenommene Parallelogramm liefert als Projection wieder ein Parallelogramm, und zwar lehrt eine einfache geometrische Ueberlegung, dass der Flächeninhalt des zweiten gleich dem Product ist, das aus dem Flächeninhalt des ersten und dem Cosinus des Neigungswinkels entsteht, der von der Tangentialebene und der yz Ebene gebildet wird. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen ist gleich dem Winkel, welchen die auf denselben errichteten Lothe, im vorliegenden Falle die Flächen-Normale und die x Axe, mit einander machen; weil aber der zwischen diesen Linien eingeschlossene Winkel $\mathfrak{x}$ vorhin so definirt ist, dass er spitz oder stumpf sein kann, der Cosinus des anzuwendenden Neigungswinkels jedoch nie negativ sein darf, so hat man für den letztern Cosinus stets den absoluten Werth von $\cos \mathfrak{x}$ zu benutzen. Sobald die yz Ebene durch Parallelen zu der y und z Axe in elementare Rechtecke getheilt ist und der Punkt (y, z) die Ecke eines Rechtecks bezeichnet, dessen Kanten gleich den positiven Differentialen dy und dz sind, so gehört zu demselben in der durch den

Punkt (x, y, z) an die Oberfläche gelegten Tangentialebene ein elementares Parallelogramm. Insofern die von (x, y, z) ausgehenden beiden Seiten des Parallelogramms nach § 48 Tangenten der betreffenden Curvenstücke sind, welche in der Oberfläche von demselben Punkte ausgehen, werden die vier Ecken des Parallelogramms auf Grund ähnlicher Betrachtungen wie in § 62 statt der vier Ecken des elementaren Theiles der Oberfläche gesetzt, und der Inhalt des Parallelogramms geht aus dem Inhalt der Projection durch Division mit der positiven Grösse $\pm \cos \mathfrak{x}$ hervor. Der Flächeninhalt des elementaren Parallelogramms der Tangentialebene ist das Mass für das Element der in Rede stehenden Oberfläche und hat den Ausdruck

$$(3) \qquad \pm \frac{dy\,dz}{\cos \mathfrak{x}} = \pm \frac{\sqrt{Q}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\, dy\, dz.$$

Ein über einen Theil der Oberfläche auszudehnendes Integral wird somit erhalten, indem man das vorliegende Element mit dem Functionswerthe $f(x, y, z)$, welcher sich auf den zugeordneten Punkt (x, y, z) der Oberfläche bezieht, multiplicirt, und den Grenzwerth der für den betreffenden Theil der Oberfläche aufzustellenden Summe bildet. Auf diese Weise ergiebt sich der Ausdruck des Integrals

$$(4) \qquad \iint \pm f(x, y, z) \frac{\sqrt{Q}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\, dy\, dz.$$

Wird die Function $f(x, y, z)$ gleich der Einheit genommen, so liefert das hervorgehende Integral

$$(5) \qquad \iint \pm \frac{\sqrt{Q}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\, dy\, dz$$

den Flächeninhalt des bezüglichen Theiles der Oberfläche.

Wir machen jetzt auf eine Erscheinung aufmerksam, die bei den Oberflächenintegralen zuerst entgegentritt. Durch die Gleichung der Oberfläche (1) ist die für die Integrale (4) und (5) vorausgesetzte Abhängigkeit der Variable x von den beiden Variabeln y und z bestimmt. Zu einem gegebenen Werthsystem y, z können aber mehrere Werthe von x gehören, die algebraisch wachsend geordnet $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots$ heissen mögen, oder, geometrisch gesprochen: wenn man in dem Punkte (y, z) der Coordinatenebene ein Perpendikel errichtet, so kann die Oberfläche von demselben in den zugehörigen auf einander folgenden Punkten $(x^{(0)}, y, z)$, $(x^{(1)}, y, z), \ldots$ getroffen werden. Man hat nun zu beachten, welche von den zu demselben Werthsystem (y, z) gehörenden Punkten (x, y, z) in dem Theile der Oberfläche liegen, über den die Integration genommen werden soll, und dann gerade für die hierher gehörigen Punkte die entsprechende Summation auszuführen. Als Beispiel diene, wie in § 50, eine Kugelfläche von dem Radius R, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{6}$$

ist. Die vorkommenden Werthsysteme y, z haben die Bedingung

$$y^2 + z^2 \overline{\leqq} R^2 \tag{7}$$

zu erfüllen, nach welcher die betreffenden Punkte der y, z Ebene innerhalb eines um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreises liegen. Zu jedem solchen Punkt gehören die beiden Werthe von x

$$x^{(0)} = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2},\ x^{(1)} = +\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \tag{8}$$

mithin je zwei Punkte der Kugelfläche. Demnach zerfällt die ganze Kugelfläche in zwei Theile, welche durch die Ungleichheiten $x < 0$ und $x > 0$ unterschieden sind; jeder der beiden Hälften entspricht als Projection in der $y\,z$ Ebene der in (7) bezeichnete Kreis. Für die gegenwärtige Voraussetzung erhält das in (3) angegebene Element der Oberfläche, da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z,\ Q = 4R^2 \tag{9}$$

wird, die einfache Gestalt

$$\pm \frac{R}{x}\, dy\, dz. \tag{10}$$

Man muss daher, je nachdem die Integration über einen Theil der Kugelhälfte $x < 0$ oder der Kugelhälfte $x > 0$ auszudehnen ist, in (10) das negative oder positive Zeichen anwenden. Der Unterschied des Vorzeichens rührt davon her, dass nach einer in § 50 gemachten Bemerkung *die von der innern nach der äusseren Seite gezogene Normale der Kugelfläche* mit den positiven Axen die Winkel $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bildet, deren Cosinus respective gleich $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ sind, und dass diese Normale mit der positiven x Axe, wenn man die beiden in (8) bezeichneten Punkte der Kugelfläche vergleicht, für den erstern einen stumpfen, für den zweiten einen spitzen Winkel bildet.

Ein entsprechender Unterschied existirt bei der allgemeinen Gleichung (1) für die verschiedenen Punkte der Oberfläche $(x^{(0)}, y, z)$, $(x^{(1)}, y, z), \ldots$, welche zu demselben Werthsystem (y, z) gehören. Bezeichnet man den Theil des Raumes, in welchem $\varphi(x, y, z) < \mathfrak{L}$ ist, mit K, so dass die oben characterisirte Flächennormale, zu welcher die Grössen $\cos \mathfrak{x}$, $\cos \mathfrak{y}$, $\cos \mathfrak{z}$ gehören, aus dem Raume K herausgeht, dann leuchtet ein, dass, wenn auf einer durch den Punkt (y, z) geführten Parallele zur x Axe im Sinne der wachsenden x fortgeschritten wird, der Winkel $\mathfrak{x}$ stumpf oder spitz ausfällt, je nachdem der fortschreitende Punkt in den Raum K eintritt oder aus demselben austritt, und dass, insofern die Punkte $(x^{(0)}, y, z)$, $(x^{(1)}, y, z), \ldots$ wegen der wachsenden Anordnung der Grössen $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$, der Reihe nach abwechselnd, die Stellen des Ein- und Austritts bedeuten, die Vorzeichen der zugeordneten Grössen $\cos \mathfrak{x}$ ebenfalls regelmässig abwechseln. Zu jeder Stelle gehört ein gewisses Oberflächenelement, welches in (3) mit Hülfe des Elements der Projection $dy\, dz$ ausgedrückt ist. Wenn man jetzt annimmt, dass von jedem Oberflächenelement ein einzelnes Element der Projection erzeugt werde, dass die Elemente der Projection in dem Punkte (y, z) in derjenigen Reihenfolge über einander liegen, in welcher die zu demselben Werthsystem (y, z) gehörenden Oberflächenelemente in der Parallele zur x Axe auf einander folgen, und dass die Theile der Projectionen ebenso zusammenhängen, wie die correspondirenden Theile der Oberfläche, so sieht man, dass die yz Ebene an jeder Stelle so oft von einem Blatte bedeckt ist, als Projectionen vorhanden sind, und dass die einzelnen Blätter genau wie die entsprechenden Theile der Oberfläche zusammenhängen. Hiernach entspricht der in (6) dargestellten Kugeloberfläche eine doppelte Bedeckung der in (7) ausgedrückten Kreisfläche, wobei zu der einen Hälfte der Kugelfläche ein Blatt, zu der andern Hälfte ein zweites Blatt gehört, und die beiden Blätter an ihren in die Kreislinie fallenden Rändern zusammenhängen.

Vermöge der Erörterungen des vorigen § kann man den Ausdruck des Elements der Oberfläche umformen, indem die Variabeln y, z durch ein System von andern Variabeln ausgedrückt werden. Den daselbst in (2) beispielsweise erwähnten Polarcoordinaten entsprechen die mit einer positiven Grösse s und einem von 0 bis 2π gehenden Winkel gebildeten Gleichungen

$$y = s\cos\varphi,\quad z = s\sin\varphi; \tag{11}$$

dann tritt an Stelle des Elements $dy\,dz$ das Element $s\,ds\,d\varphi$. Das in (10) dargestellte Element der Kugeloberfläche geht daher, weil $y^2 + z^2 = s^2$ und nach (8) $x = \mp\sqrt{R^2 - s^2}$ ist, in die Gestalt

$$\frac{R s\,ds\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - s^2}} \tag{12}$$

über. Es möge jetzt der Inhalt desjenigen Theiles der einen Kugelflächenhälfte $x < 0$ oder $x > 0$ bestimmt werden, dessen Projection ein Kreis von dem Radius $R_1 < R$ ist; derselbe wird durch die Ungleichheit

$$s^2 < R_1^2 \tag{13}$$

bestimmt. In beiden Fällen hat man das Integral

$$\int_0^{R_1} \frac{R s\,ds}{\sqrt{R^2 - s^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{14}$$

auszuführen, bei dem die Integration nach φ den Factor 2π, die unbestimmte Integration nach s den Factor $-R\sqrt{R^2 - s^2}$ ergiebt, so dass durch Einsetzung der Grenzen 0 und R_1 der Ausdruck

$$2\pi R(R - \sqrt{R^2 - R_1^2}) \tag{15}$$

entsteht. Für eine Annäherung von R_1 gegen R fallen die in (8) angegebenen Werthe $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$ bei den Punkten des Randes der Projection zusammen; zugleich convergirt die Kreisfläche (13) gegen den in der yz Ebene liegenden grösten Kreis der Kugelfläche, der zu messende Theil der Kugelfläche gegen die eine Hälfte derselben, endlich der Ausdruck (15) gegen den Werth

$$2\pi R^2, \tag{16}$$

durch welchen das Mass der ganzen Kugeloberfläche gleich $4\pi R^2$ gefunden wird. Man hat aber zu beachten, dass, wofern R_1 dem Werthe R genähert wird, der in (14) unter dem Integralzeichen befindliche Factor $\frac{R}{\sqrt{R^2 - s^2}}$ an der Stelle $s = R_1$ über jedes Mass hinaus wächst, während das nach s zu nehmende Integral einen endlichen festen Werth darstellt. Es liegt also hier ein Unendlichwerden der Function unter dem Integralzeichen vor, das mit der in § 73 entwickelten Ausdehnung des Begriffes eines Integrals vereinbar ist. Eine ähnliche Beobachtung lässt sich in Betreff des allgemeinen Ausdrucks (3) anstellen, in welcher Hinsicht wir auf § 99 hinweisen. Der Factor $\frac{1}{\cos \mathfrak{x}}$ wächst über jedes Mass hinaus, sobald sich der Nenner der Null nähert. Nun verschwindet $\cos \mathfrak{x}$ überall, wo die Normale der Fläche mit der x Axe einen rechten Winkel bildet, oder wo die Fläche von einer Parallele zu der x Axe berührt wird. Dass $\cos \mathfrak{x}$ in einem Theile der Fläche gleich Null sei, haben wir bei der gegenwärtigen Betrachtung ausgeschlossen, lassen aber die Voraussetzung zu, dass das Verschwinden in einer Linie N stattfinde. Wofern angenommen wird, dass bei dem Ueberschreiten dieser Linie die Function $\cos \mathfrak{x}$ ihr Zeichen ändere, und dass zu einem Punkte der Projection (y, z) zwei Punkte der Oberfläche $(x^{(0)}, y, z)$ und $(x^{(1)}, y, z)$ gehören, die bei einer Annäherung von (y, z) an die Projection von N einander immer näher rücken, so wird durch das Verschwinden von $\cos \mathfrak{x}$ kein singuläres Verhalten der Oberfläche angezeigt. Weil aber unter der bezeichneten Voraussetzung zwei in der Linie N, für die $\cos \mathfrak{x} = 0$ ist, zusammenhängende Theile der Oberfläche den gleichen Theil der yz Ebene als Projection liefern, so hat man den beiden nach der vorhin entwickelten Vorstellung über einander fallenden Projectionen in der zu N correspondirenden Linie einen Zuhammenhang zu geben, weshalb auch bei der Projection der Kugeloberfläche zwei an ihren Rändern zusammenhängende Blätter auftreten.

§ 94. Vielfache Integrale. Raumintegrale.

Mit Rücksicht auf die eingehende Erörterung, welche den doppelten Integralen gewidmet ist, glauben wir bei der Behandlung der vielfachen Integrale kürzer sein zu dürfen, und werden die zugehörigen allgemeinen Begriffe an den dreifachen Integralen auseinandersetzen, da es leicht ist, durch Vergrösserung der Anzahl der unabhängigen Variabeln zu beliebig vielfachen Integralen überzugehen. Ein dreifaches Integral ist der Grenzwerth einer dreifachen Summe

$$(1) \qquad \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)\, \Delta x_\alpha \Delta y_\beta \Delta z_\gamma,$$

bei der die Function $f(x, y, z)$ für eine nach Massgabe des § 51 begrenzte Mannigfaltigkeit K der Variabeln x, y, z eindeutig, endlich und stetig gegeben ist; der Zeiger α läuft von 1 bis l, β von 1 bis m, γ von 1 bis n läuft, die Differenzen

$$(2) \qquad \Delta x_\alpha = x_{\alpha+1} - x_\alpha, \; \Delta y_\beta = y_{\beta+1} - y_\beta, \; \Delta z_\gamma = z_{\gamma+1} - z_\gamma$$

sind positiv und werden allmählig beliebig klein, während die Zahlen l, m, n ohne Ende wachsen. Die Stetigkeit von $f(x, y, z)$ wird wieder so normirt, dass für hinreichend kleine Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ der numerische Werth der Differenz

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

bei jedem vorkommenden Werthsystem (x, y, z) unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabgeht. Dass die Summe (1) gegen einen festen Grenzwerth convergirt, kann zunächst wie in § 90 für den Fall gezeigt werden, dass die Mannigfaltigkeit K durch die Ungleichheiten

$$(3) \qquad a \leqq x \leqq A, \; b \leqq y \leqq B, \; c \leqq z \leqq C$$

bestimmt ist, wo die einschliessenden Grössen Constanten sind. Den Kern des Beweises bildet die Thatsache, dass alsdann die Summe (1) für die Voraussetzung, dass $f(x, y, z)$ gleich der Einheit sei, dem Product der drei Differenzen $(A - a)(B - b)(C - c)$ gleich wird. Nachdem man sich dann überzeugt hat, dass die Summe (1) gegen denselben Grenzwerth convergirt, mögen die zu den Werthsystemen der Begrenzung (3) von K gehörenden Glieder genommen oder fortgelassen werden, wird die Existenz des Grenzwerthes der Summe (1) für eine beliebig begrenzte

Mannigfaltigkeit K bewiesen. Hierauf gründet sich die Berechtigung, bei der Bildung von (1) die nach $\varDelta x_\alpha, \varDelta y_\beta, \varDelta z_\gamma$ vorzunehmenden Summationen in beliebiger Reihenfolge auszuführen; da nun jede einzelne Summation in eine Integration nach der betreffenden Variable übergeht, so erhält man zugleich für das dreifache Integral

$$(4) \qquad \int dx \int dy \int dz\, f(x,y,z),$$

welches den Grenzwerth von (1) darstellt, den Satz, *dass sein Werth bei einer Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen ungeändert bleibt.*

Unter der Voraussetzung (3) ist nach x, y, z innerhalb der bezeichneten unabhängigen Grenzen zu integriren, wodurch (4) in das Integral

$$(5) \qquad \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C dz\, f(x,y,z)$$

übergeht. Ein entschiedener Nachdruck muss bei der Darstellung des dreifachen Integrals (4), welches sich auf die Mannigfaltigkeit K bezieht, wie bei einer entsprechenden Darstellung beliebig vielfacher Integrale überhaupt, auf den Umstand gelegt werden, dass die Differentiale der Variabeln dx, dy, dz als Repräsentanten der positiven Differenzen $\varDelta x_\alpha$, $\varDelta y_\beta, \varDelta z_\gamma$ stets nur positive Werthe empfangen.

Sobald x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten und die Mannigfaltigkeit K einem gewissen Theile des Raumes entspricht, liegen die Punkte, welche zu den in (1) gewählten Werthsystemen gehören, auf drei Schaaren von Ebenen, die beziehungsweise den drei Coordinatenebenen parallel sind; dann ist das Product $\varDelta x_\alpha \varDelta y_\beta \varDelta z_\gamma$ das Mass des Inhalts des rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen eine Ecke von dem Punkte $(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)$ und dessen im Raume gegenüberliegende Ecke von dem Punkte $(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}, z_{\gamma+1})$ gebildet wird. Bei der beständigen Abnahme der sämmtlichen Differenzen rücken die parallelen Ebenen eines jeden Systems immer näher aneinander; dann wird das rechteckige Parallelepipedon, dessen eine Ecke die Coordinaten x, y, z, dessen im Raume gegenüberliegende Ecke die Coordinaten $x+dx, y+dy, z+dz$ hat, *das Element* *des Raumes* genannt, und der Inhalt desselben durch *das Product der drei positiven Differentiale* $dx\,dy\,dz$ gemessen. Demgemäss heisst das Integral (4) *ein über den Raum* K *auszudehnendes Integral.* Falls die Function $f(x, y, z)$ gleich der Einheit genommen wird, so giebt das entsprechende Integral

$$(6) \qquad \iiint dx\,dy\,dz$$

den Inhalt des Raumes K selbst an, und kann durch Ausführung von je einer der drei Integrationen in ein doppeltes Integral verwandelt werden, das zu ähnlichen Betrachtungen wie das Integral (3) in § 91 veranlasst. Auch führt die Voraussetzung, dass alle in (1) auftretenden Werthe $x_\alpha, y_\beta, z_\gamma$ gleich rationalen mit derselben ganzen Zahl M als Nenner gebildeten Brüchen sein sollen, zu dem der dortigen Gleichung (6) entsprechenden Ergebniss, dass, wenn Z die Anzahl der zugehörigen in den Raum K fallenden Punkte bedeutet, das obige Integral (6) für eine wachsende Zahl M gleich dem Grenzwerthe des Quotienten $\frac{Z}{M^3}$ ist. Dieses Princip ist von *Dirichlet* in der Abhandlung *recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Crelle's* Journal, Bd. 19 aufgestellt, und in der Abhandlung *recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes, Crelle's* Journal, Bd. 24 auf Mannigfaltigkeiten einer beliebig hohen Ordnung ausgedehnt worden.

Das Integral (6) hat die Eigenschaft, sobald der zugehörige Raum K in einer solchen Weise abnimmt, dass er sich einem Punkte, oder einer endlich ausgedehnten Linie oder einem endlich ausgedehnten Oberflächenstück nähert, gegen die Null zu convergiren. Man kann deshalb bei der Bildung eines Integrals (4) Räume von der bezeichneten Beschaffenheit von dem Gebiete der Integration ausschliessen, ohne den Werth des Integrals zu ändern. Entsprechend verfährt man in dem Falle, dass die zu integrirende Function $f(x,y,z)$ in einem Punkt, einer Linie oder einer Fläche unendlich gross wird. Nachdem die in der Umgebung solcher Stellen befindlichen Theile des Raumes von dem Integrationsgebiete ausgeschieden sind, muss untersucht werden, ob bei einer auf irgend eine Weise ausgeführten beständigen Abnahme dieser Theile der Werth des Integrals stets gegen einen und denselben festen Grenzwerth convergirt; wenn dies geschieht, so drückt der letztere den Werth des über das ganze gegebene Gebiet ausgedehnten Integrals aus. Derselbe Gesichtspunkt ist für die einfachen, doppelten und beliebig vielfachen Integrale massgebend. Wo im Folgenden unter dem Zeichen der Integration unendlich werdende Functionen erscheinen, wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die hierbei erforderlichen Bedingungen erfüllt sind.

§ 95. Geometrische Transformation eines dreifachen Integrals.

Um ein dreifaches Integral $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, das nach dem vorigen § als Raumintegral aufgefasst wird, vermöge einer dem § 92 entsprechenden Methode zu transformiren, denkt man sich die Variabeln x, y, z als gewisse Functionen von anderen Variabeln ξ, η, ζ gegeben, und betrachtet die letzteren als neue Bestimmungsstücke oder Coordinaten für den durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmten Punkt des Raumes. Dem Constantsetzen von ξ, η, ζ entsprechen dann drei Schaaren von Oberflächen, bei denen sich je zwei Individuen aus verschiedenen Schaaren in einer Linie, je drei Individuen aus den drei Schaaren in einem Punkte schneiden und denselben determiniren. So drücken die in I, § 86 erörterten Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \gamma_{11} x' + \gamma_{12} y' + \gamma_{13} z' \\ y &= \gamma_{21} x' + \gamma_{22} y' + \gamma_{23} z' \\ z &= \gamma_{31} x' + \gamma_{32} y' + \gamma_{33} z', \end{aligned}$$

wo die aus den constanten Coefficienten $\gamma_{11}, \ldots \gamma_{33}$ gebildete Determinante nicht verschwinden darf, die Verwandlung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in ein System von neuen Coordinaten x', y', z' aus, welche constant gesetzt, drei Schaaren paralleler Ebenen darstellen, die sich gegenseitig unter beliebigen Winkeln schneiden. Ein Beispiel anderer Ortsbestimmung liefern die Gleichungen

(2)
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$z = r\sin\theta\sin\varphi,$$

bei denen r eine positive Grösse, θ einen zwischen 0 und π, φ einen zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel bedeuten soll. Hier entspricht einem constanten r eine um den Coordinatenanfangspunkt als Centrum beschriebene Kugelfläche, einem constanten θ ein Kegel, der durch Rotation einer durch dasselbe Centrum gehenden Linie um die x Axe erzeugt wird, einem constanten φ eine durch die x Axe geführte Meridianebene; mithin entspricht jedem Werthsystem r, θ, φ ein und nur ein Punkt des Raumes. Unter der erwähnten allgemeinen Annahme wird der Raum in der Weise getheilt, dass man jede der neuen Variabeln ξ, η, ζ um gewisse auf einander folgende Differenzen zunehmen lässt, und alle zu den betreffenden Werthen gehörigen Flächen construirt. Bei einem Zuwachs von ξ, η, ζ um die Differentiale $d\xi, d\eta, d\zeta$ nehmen die Coordinaten x, y, z respective um die vollständigen Differentiale zu

(3)
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Indem wir voraussetzen, dass die Determinante

(4)
$$\Gamma = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

einen von Null verschiedenen Werth habe, hängen in (3) die Differentiale dx, dy, dz in gleicher Weise von $d\xi, d\eta, d\zeta$ ab wie in (1) die Variabeln x, y, z von den Variabeln ξ, η, ζ; deshalb finden die in I, § 86 über das System (1) angestellten Betrachtungen auf das System (3) Anwendung. Bezeichnet man einen in den neuen Coordinaten dargestellten Punkt mit $[\xi, \eta, \zeta]$, nimmt $d\xi > 0$, $d\eta > 0$, $d\zeta > 0$ an, und verbindet den genannten Punkt mit jedem der Punkte

(5)
$$[\xi + d\xi, \eta, \zeta], [\xi, \eta + d\eta, \zeta], [\xi, \eta, \zeta + d\zeta]$$

durch eine gerade Linie, so bilden diese respective die erste, zweite und dritte Kante eines Parallelepipedons, welches als

Element der neuen Theilung des Raumes zu betrachten ist. Sein Rauminhalt wird durch geometrische Ueberlegungen von der Art, wie sie in I, § 86 mitgetheilt sind, als Product aus dem absoluten Werth der Determinante Γ in das Product der drei positiven Differentiale $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ bestimmt, und hat daher, falls ε gleich der mit dem Vorzeichen von Γ versehenen Einheit ist, den Ausdruck

$$(6) \qquad \varepsilon\, \Gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Hierbei zeigt sich, dass ε gleich der positiven oder negativen Einheit wird, je nachdem die drei von dem Punkte $[\xi, \eta, \zeta]$ ausgehenden vorhin definirten Kanten, der Reihe nach genommen, eine ebensolche oder eine entgegengesetzte Lage haben wie die positiven Axen der x, y, z.

Wendet man die neue Theilung des Raumes auf ein durch die Ungleichheiten (3) des vorigen § begrenztes Gebiet, das heisst, auf ein rechteckiges Parallelepipedon an, dessen mit den Axen der x, y, z parallele Kanten respective die Längen $A-a$, $B-b$, $C-c$ haben, und dessen Inhalt gleich $(A-a)\,(B-b)\,(C-c)$ ist, so erscheint der betreffende Raum gleich dem Aggregat der zugehörigen in (6) gemessenen elementaren Parallelepipeda; hieraus folgt sogleich für eine über diesen Raum auszudehnende Integration die Gleichung

$$(7) \qquad (A-a)\,(B-b)\,(C-c) = \iiint \varepsilon\, \Gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

die noch analytisch zu beweisen bleibt. Mit Hülfe von (7) erhält man durch Schlüsse, welche den in § 92 angewendeten genau entsprechen, das Ergebniss, dass das im vorigen § mit (4) bezeichnete Integral folgendermassen transformirt wird

$$(8) \qquad \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint f(x, y, z)\, \varepsilon\, \Gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wo auf der rechten Seite x, y, z durch ξ, η, ζ auszudrücken sind.

Werden die obigen Gleichungen (2) vorausgesetzt, so kommt

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi;
\end{array}$$

hiernach erhält die zu bildende Determinante den Werth $r^2 \sin\theta$, welcher stets positiv ist, und es entsteht die Umformung

$$(9)\quad \iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Es empfiehlt sich, bei den Polarcoordinaten r, θ, φ zu beachten, welche gegenseitige Lage der betreffenden Flächen nach der obigen Vorschrift aus dem stets positiven Zeichen der Determinante $r^2 \sin\theta$ folgt.

§ 96. Transformation der beliebig vielfachen Integrale.

Für die Umformung eines $n$fachen Integrals, welches sich auf eine begrenzte $n$fache Mannigfaltigkeit K der n Variabeln $F_1, F_2, \ldots F_n$ bezieht, gilt die folgende allgemeine Regel. Es seien die genannten Variabeln als eindeutige, endliche, stetige und, so oft es nöthig sein wird, zu differentiirende Functionen eines Systems von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben, woraus für die vollständigen Differentiale $dF_1, dF_2, \ldots dF_n$ die Ausdrücke folgen

$$(1)\quad \begin{cases} dF_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n \\ dF_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ dF_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}dx_n. \end{cases}$$

Man bilde aus den vorliegenden partiellen Differentialquotienten die Determinante

$$(2)\quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \mathfrak{D},$$

welche *die in Bezug auf das System der Variabeln* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *genommene Functionaldeterminante des Systems der Functionen* $F_1, F_2, \ldots F_n$ heisst. Die Einheit, welche mit dem Vorzeichen ihres von Null verschiedenen Werthes übereinstimmt, sei ε. Dann geschieht die auszuführende Transformation, indem das Element des gegebenen Integrals, welches gleich dem Product der positiven Differentiale $dF_1, dF_2, \ldots dF_n$ ist, durch das mit den ebenfalls positiven Differentialen der neuen Variabeln gebildete Product

$$(3) \qquad \varepsilon \mathfrak{D}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

ersetzt wird. Vermöge ähnlicher Erörterungen, wie sie in § 92 und 94 angestellt sind, leuchtet ein, dass diese Regel richtig sein muss, sobald die Gleichung

$$(4) \quad (F_1(1)-F_1(0))\,(F_2(1)-F_2(0))\ldots(F_n(1)-F_n(0)) = (n)\int \varepsilon \mathfrak{D}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

bewiesen ist, in welcher sich das auf der rechten Seite angedeutete n-fache Integral über ein durch die Ungleichheiten

$$(5) \; F_1(0) \leqq F_1 \leqq F_1(1), \quad F_2(0) \leqq F_2 \leqq F_2(1), \ldots F_n(0) \leqq F_n \leqq F_n(1)$$

bestimmtes Gebiet erstreckt. Es bedeuten

$$F_1(0),\, F_1(1), \quad F_2(0),\, F_2(1), \ldots F_n(0),\, F_n(1)$$

vorgeschriebene feste Werthe; jede der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ wächst dauernd, falls die übrigen constant bleiben, von ihrem gegebenen Anfangswerthe bis zu dem betreffenden Endwerthe, und die Functionaldeterminante ändert in diesem Gebiete ihr Zeichen nicht. Man kann die Gleichung (4) in der Art beweisen, dass mit dem Werthe $n=2$ angefangen und die Zahl der Variabeln regelmässig um Eins erhöht wird. Auf diesem Wege, der im nächsten Capitel eingeschlagen werden soll, liegt die analytische Begründung der Gleichungen (10) des § 92 und (7) des vorigen §, welche für $n=2$ und $n=3$ die obige Gleichung (4) darstellen. Auch wird hierbei deutlich werden, weshalb wir vorher von den Differentialausdrücken mit mehreren Variabeln sprechen werden.

Capitel XIII.

Integration vollständiger Differentiale.

§ 97. Bedingungen der Integrabilität für Differentialausdrücke zweier Variabeln.

Sobald für eine Function $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der n angedeuteten Variabeln das vollständige Differential

$$(1) \qquad dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\, dx_n$$

aufgestellt ist, darf man auf die betreffenden partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung den Satz des § 52 anwenden, nach welchem partielle Differentialquotienten von höherer Ordnung bei beliebiger Vertauschung der zugehörigen partiellen Differentiationen denselben Werth behalten. Für irgend zwei verschiedene aus der Reihe von 1 bis n genommene Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ muss demnach die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\right)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\right)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0$$

gelten, welche, insofern es im Ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Paare von Zahlen giebt, $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen vertritt. Aus dieser Bemerkung folgt, dass ein mit n Functionen $P_1, P_2, \ldots P_n$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildeter Ausdruck, welcher in Bezug auf die Differentiale der letztern eine homogene Function des ersten Grades ist,

$$(3)\qquad P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n,$$

um gleich dem Differential einer Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu sein, die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$(4)\qquad \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0$$

zu erfüllen hat. Es muss aber erst nachgewiesen werden, dass die erwähnten Bedingungen hierzu auch ausreichen. In dem Laufe des vorzutragenden Beweises wird sich zeigen, dass eine Function, deren Differential gleich dem gegebenen Differentialausdruck ist, durch Ausführung einer einfachen Integration gefunden werden kann. Demgemäss heissen die Gleichungen (4) *die Bedingungen der Integrabilität des Differentialausdrucks* (3), während man die Aufstellung der zugehörigen Function als *die Integration des gegebenen vollständigen Differentials* bezeichnet.

Wir beginnen mit der Betrachtung von Differentialausdrücken zweier Variabeln, und gebrauchen hier statt P_1, P_2, x_1, x_2 die Buchstaben P, Q, x, y. Dann entspricht dem Differentialausdruck

$$(5)\qquad P\,dx + Q\,dy$$

die Bedingung der Integrabilität

$$(6) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Für verschiedene Zwecke empfiehlt es sich jedoch, nicht nur solche Ausdrücke (5) zu erörtern, bei denen die Gleichung (6) erfüllt ist, sondern an die Spitze der Untersuchung einen nicht beschränkten Ausdruck (5) und ein zu diesem gehörendes doppeltes Integral zu stellen, in welchem die linke Seite von (6), mit dem Element $dx\,dy$ multiplicirt, unter dem Zeichen vorkommt,

$$(7) \qquad \iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Die Functionen P und Q seien innerhalb der Mannigfaltigkeit E der Variabeln x, y, auf welche sich das Integral bezieht, eindeutig, endlich und stetig; das Gebiet E werde dadurch bezeichnet, dass eine Function Θ innerhalb E nur positiv, in der Begrenzung gleich Null sei. Demnach ist Θ je nach den Umständen in den verschiedenen Theilen der Begrenzung durch verschiedene analytische Functionen zu ersetzen.

Man darf das Integral (7) vermöge der unter dem Zeichen befindlichen Differenz als die Differenz der beiden Integrale

$$(8) \qquad \iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy - \iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy$$

auffassen, und, weil nach § 90 die Reihenfolge der Integrationen beliebig gewählt werden kann, bei dem ersten Integral zuerst nach y, bei dem zweiten zuerst nach x integriren. In dem ersten Integral liefert die für einen beliebigen festen Werth von x vollzogene Integration nach y das unbestimmte Integral P, und zwar hat man, weil nach der getroffenen allgemeinen Voraussetzung dy stets positiv ist, den Werth von P für die Werthsysteme $(x^{(0)}, y)$, $(x^{(2)}, y), \ldots$, bei denen die Variable in das Gebiet E eintritt, negativ, für die Werthsysteme $(x^{(1)}, y)$, $(x^{(3)}, y), \ldots$, bei denen die Variable aus E heraustritt, positiv zu nehmen. Daher erscheint bei einer mit dem Wachsen der algebraischen Grösse übereinstimmenden Anordnung $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$ das Aggregat von Differenzen

$$(9) \qquad -P^{(0)} + P^{(1)} - P^{(2)} + P^{(3)} \mp \ldots,$$

wobei der Function P die zu den Werthen von x gehörigen Zeiger beigelegt sind. Ebenso erhält man in dem zu subtrahirenden zweiten Integral durch die für einen beliebigen festen Werth von y nach x ausgeführte Integration die Function Q; hier ist wegen des stets positiven Vorzeichens von dx der Werth Q für die Stellen $(x, y^{(0)}), (x, y^{(2)}), \ldots$ des Eintritts in E negativ, für die Stellen $(x, y^{(1)}), (x, y^{(3)}), \ldots$ des Austritts aus E positiv zu setzen, wodurch bei entsprechender Notation der Function Q das Aggregat von Differenzen

(10) $$-Q^{(0)} + Q^{(1)} - Q^{(2)} + Q^{(3)} \mp \ldots$$

hervorgeht. Mithin ist das doppelte Integral (7) gleich der Summe von einfachen Integralen

(11) $$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = \int(-P^{(0)} + P^{(1)} - P^{(2)} + P^{(3)} \mp \ldots)\, dx + \int(+Q^{(0)} - Q^{(1)} + Q^{(2)} - Q^{(3)} \pm \ldots)\, dy;$$

bei dem zweiten sind wegen der auszuführenden Subtraction alle Vorzeichen umgekehrt.

Die Bestimmung der Vorzeichen folgt aus der Bedingung, dass die Function Θ innerhalb des Gebietes E positiv, in der Begrenzung gleich Null ist, also das vollständige Differential

(12) $$\frac{\partial \Theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y} dy$$

für den Eintritt positiv, für den Austritt negativ ausfallen muss. Bei den Eintrittstellen $(x^{(0)}, y), x^{(2)}, y), \ldots$ und den Austrittstellen $(x^{(1)}, y), (x^{(3)}, y), \ldots$ erhält x kein Increment, y das positive Increment dy; für die erstern muss $\frac{\partial \Theta}{\partial y} dy$ positiv, für die letztern negativ sein. Bei den Eintrittstellen $(x, y^{(0)}), (x, y^{(2)}), \ldots$ und den Austrittstellen $(x, y^{(1)}), (x, y^{(3)}), \ldots$ bekommt y kein Increment, x das positive Increment dx; für die erstern muss $\frac{\partial \Theta}{\partial x} dx$ positiv, für die letztern negativ sein. Werden die auf der rechten Seite von (11) vorkommenden Ausdrücke verglichen, so leuchtet ein, dass $P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots$ immer mit dem Vorzeichen ϱ des zugehörigen Werthes $-\frac{\partial \Theta}{\partial y}$, hingegen $Q^{(0)}, Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, \ldots$ immer mit dem Vorzeichen σ des zugehörigen Werthes $+\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ versehen sind. Erwägt man nun, dass sowohl die Werthsysteme $(x^{(0)}, y)$,

$(x^{(1)}, y) \ldots$ zusammen, wie auch die Werthsysteme $(x, y^{(0)}), (x, y^{(1)}), \ldots$ zusammen mit den sämmtlichen Werthsystemen der Begrenzung übereinstimmen, so darf man der Gleichung (11) die Gestalt

$$(13) \qquad \iint\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = \int \varrho P dx + \int \sigma Q dy,$$

geben, wo die einfachen Integrationen rechts auf die ganze Begrenzung von E bezogen werden, und bei dem ersten Integral y als Function von x, bei dem zweiten x als Function von y gilt. Die mit den Vorzeichen ϱ und σ behafteten Differentiale $\varrho\, dx$ und $\sigma\, dy$ lassen sich als die respectiven Incremente eines Werthsystems (x, y) auffassen, welches auf der Begrenzung selbst in einem bestimmten Sinne fortschreitet, ohne jemals zu einem schon berührten Werthsystem zurückzukehren; denn die gegebene Determination der Vorzeichen macht es möglich, $\varrho\, dx$ und $\sigma\, dy$ so zu wählen, dass der für die Begrenzung geltenden Bedingung

$$(14) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} \varrho\, dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \sigma\, dy = 0$$

genügt, und jedes Werthsystem der Begrenzung ein Mal und nur ein Mal getroffen wird. Auf diese Weise vereinigen sich die beiden einfachen Integrale in (13) zu einem Integral, bei welchem jedes Werthsystem der Begrenzung ein Mal und nur ein Mal durchlaufen wird, und das man so darstellt,

$$(15) \qquad \iint\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = \int (P \varrho\, dx + Q \sigma\, dy).$$

Das Verständniss dieser fundamentalen Gleichung lässt sich durch die geometrische Deutung der Mannigfaltigkeit E als Theils einer Ebene sehr erleichtern. Nach § 91 entspricht der auszuführenden doppelten Integration eine Theilung der Ebene durch Parallelen zu den rechtwinkligen Axen der x und y. Während das Innere des Flächenstückes E von einem aus rechtwinkligen Parallelogrammen bestehenden Gitter erfüllt ist, wird die Begrenzung von E durch eine Linie gebildet, die sich aus rechtwinklig zu einander stehenden Stücken aufbaut und wie eine Treppe um E herumläuft. Durch Vollziehung der einen Integration verwandelt sich das ursprüngliche doppelte Integral in ein einfaches auf die Begrenzung bezügliches, bei dem $\varrho\, d\,x$ und $\sigma\, d\,y$ die Incremente des auf der Begrenzung fortschreitenden Werthsystems (x, y) sind. Vermittelst der Anschauung kann man den Sinn des Fortschreitens folgendermassen bezeichnen. Für einen Punkt mit den Incrementen $\delta\, x$ und $\delta\, y$, welcher in E eintritt, muss nach der getroffenen Annahme

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}\delta\, x + \frac{\partial \Theta}{\partial y}\delta\, y > 0 \tag{16}$$

sein. Weil nun nach (14) die Incremente $\varrho\, d\,x$ und $\sigma\, d\,y$, die zu einem auf der Begrenzung fortschreitenden Punkte gehören, in dem Verhältniss der Grössen $-\frac{\partial \Theta}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ stehen und respective dieselben Vorzeichen haben, so folgt aus (16) die Ungleichheit

$$\delta\, x\, (\sigma\, d\, y) - \delta\, y\, (\varrho\, d\, x) > 0. \tag{17}$$

Nach derselben (vgl. § 92) liegt die Richtung $(\delta\, x,\ \delta\, y)$ eines in E eintretenden Punktes zu der Richtung des Fortschreitens $(\varrho\, d\,x,\ \sigma\, d\,y)$ wie die positive x zu der positiven y Axe. Wenn also, wie bisher, angenommen wird, dass man von der x zu der y Axe durch eine Drehung um einen Viertelkreis von links nach rechts gelange, so erfolgt das vorgeschriebene Fortschreiten des Punktes in der Begrenzung von E so, dass sich derselbe um das Innere von E stets links herum bewegt.

Falls die Begrenzung von E für x und y constante Werthe liefert, innerhalb deren jede Variable bleiben muss,

$$a \leqq x \leqq A,\quad b \leqq y \leqq B, \tag{18}$$

so erhält die obige Gleichung (11) die besonders einfache Gestalt

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_a^A (-P(x, b) + P(x, B))\, dx + \int_b^B (Q(a, y) - Q(A, y))\, dy, \tag{19}$$

wo auf der rechten Seite nur explicirte gegebene Functionen von x nach x, von y nach y zu integriren sind. Hier besteht die Begrenzung von E aus vier Theilen, in denen die eingeführte Function Θ beziehungsweise durch die Ausdrücke $x-a$, $B-y$, $A-x$, $y-b$ zu ersetzen ist; in dem ersten Theile wird $\sigma = 1$, in dem zweiten $\varrho = 1$, in dem dritten $\sigma = -1$, in dem vierten

$\varrho = -1$, so dass bei beständigem Fortschreiten die rechte Seite von (19) die folgende Anordnung erhält

$$(20)\quad \int_b^B Q(a,y)\,dy + \int_a^A P(x,B)\,dx - \int_b^B Q(A,y)\,dy - \int_a^A P(x,b)\,dx.$$

Der zugehörige Punkt (x,y) durchläuft hier in dem angegebenen Sinne den Umfang des durch (18) bezeichneten Rechtecks.

Unter der Voraussetzung der Gleichung (6) hat das Integral (7) den Werth Null, so dass die Gleichung (15) zu der folgenden wird

$$(21)\qquad 0 = \int (P\varrho\,dx + Q\sigma\,dy).$$

Es möge nun die Begrenzung von E aus einer einzigen in sich zurückkehrenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bestehen. Hier hebe man zwei verschiedene Werthsysteme (x_0, y_0) und (x_1, y_1) heraus, durch welche die Mannigfaltigkeit in zwei Theile zerfällt, und zerlege das auf der rechten Seite von (21) befindliche Integral in zwei entsprechende Theile. Das eine Integral bezieht sich auf den Theil der Mannigfaltigkeit, der sich bei dem durch die Vorzeichen ϱ und σ bestimmten Fortschreiten von (x_0, y_0) bis (x_1, y_1) erstreckt, und wird so notirt

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (P\varrho\,dx + Q\sigma\,dy);$$

das zweite Integral

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_0,y_0)} (P\varrho\,dx + Q\sigma\,dy)$$

ist über den zweiten Theil der Mannigfaltigkeit auszudehnen, welcher bei dem weiteren Fortschreiten von (x_1, y_1) bis (x_0, y_0) zurück durchlaufen wird. Wegen der Gleichung (21) muss das zweite Integral dem ersten entgegengesetzt gleich sein. Statt das zweite Integral negativ zu nehmen, darf man aber auch ϱ durch $-\varrho$ und zugleich σ durch $-\sigma$ ersetzen. Alsdann bezeichnen die Elemente $-\varrho\,dx$ und $-\sigma\,dy$ ein im entgegengesetzten Sinne erfolgendes Fortschreiten in demselben Theile der Begrenzung, wodurch man von dem Punkte (x_0, y_0) zu dem Punkte (x_1, y_1) gelangt. Hiernach entsteht aus (21) die Gleichung

$$(22)\qquad \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}(P\varrho\,dx+Q\sigma\,dy)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}(-P\varrho\,dx-Q\sigma\,dy).$$

Dieselbe lehrt, dass, wenn von dem Werthsystem (x_0, y_0) *nach dem Werthsystem* (x_1, y_1) *zwei Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung geführt werden, die zusammen die Begrenzung eines Gebietes* E *ausmachen, in welchem die Gleichung* (6) *befriedigt ist, und wenn ausserdem* P *und* Q *eindeutige, endliche und stetige Functionen sind, alsdann die beiden zugehörigen in* (22) *bezeichneten Integrale denselben Werth haben.*

Setzt man bei der in (18) angegebenen Begrenzung $a=x_0$, $b=y_0$, $A=x_1$, $B=y_1$, so ergiebt sich auf Grund der Bedingung (6) aus dem Verschwinden der in (20) wiederholten rechten Seite von (19) die folgende mit (22) correspondirende Gleichung

$$(23)\qquad \int\limits_{x_0}^{x_1}P(x,y_1)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y_1}Q(x_0,y)\,dy=\int\limits_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\,dy.$$

Nach (22) hat das dortige von dem Werthsystem (x_0, y_0) bis zu dem Werthsystem (x_1, y_1) erstreckte Integral einen Werth, welcher von der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, über welche die Integration auszudehnen ist, nicht abhängt. Wird innerhalb eines Gebietes, in dem die Gleichung (6) befriedigt ist, und für P und Q die erwähnten Voraussetzungen der Stetigkeit gelten, das Werthsystem (x_0, y_0) als fest, das Werthsystem (x_1, y_1) als beweglich angesehen, so drückt das genannte Integral eine Function der beiden Variabeln x_1, y_1 aus, von der sich zeigen lässt, dass sie als ihre partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x_1 und y_1 die correspondirenden Werthe der Functionen P und Q hervorbringt. Eine partielle Aenderung des Werthsystems (x_1, y_1) möge so erfolgen, dass x_1 um die Grösse h wächst. Damit das betreffende Integral entsprechend geändert werde, kann die zugehörige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung zuerst wie früher von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1), dann *von hier ohne Aenderung des* y *nach dem Werthsystem* (x_1+h, y_1) geführt werden. Demnach bekommt das in Rede stehende Integral als Zuwachs ein von (x_1, y_1) bis (x_1+h, y_1) zu erstreckendes Integral, das den Ausdruck

$$(24)\qquad \int\limits_{x_1}^{x_1+h}P(x,y_1)\,dx$$

hat. Der partielle Differenzenquotient, welcher hieraus durch Division mit h entsteht, ist aber bei abnehmendem h, falls die Function $P(x_1, y_1)$ für einen unter h liegenden Zuwachs von x um eine unter einem beliebig kleinen λ befindliche Grösse schwankt, nach § 22 von dem Grenzwerth $P(x_1, y_1)$ höchstens um λ verschieden. Ebenso hat eine partielle Aenderung des Werthsystems (x_1, y_1), bei dem x_1 ungeändert bleibt und y_1 um k wächst, den Effect, dass zu dem Integral (22) der Zuwachs

$$(25) \qquad \int_{y_1}^{y_1+k} Q(x_1, y)\, dy$$

hinzukommt, welcher, durch k dividirt, einen partiellen Differenzenquotienten liefert, der bei abnehmendem k in gleicher Weise gegen den Grenzwerth $Q(x_1, y_1)$ convergirt.

Hiermit ist die aufgestellte Behauptung erwiesen, *dass aus der Gleichung* (6) *die Existenz einer Function folgt, deren nach x und y zu nehmende partielle Differentialquotienten beziehungsweise gleich P und Q sind; eine solche Function wird durch das Integral*

$$(26) \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P\,dx + Q\,dy)$$

dargestellt, bei dem die Integration auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung von dem System (x_0, y_0) bis zu dem System (x, y) zu erstrecken ist, und wo dx und dy die dem Fortschreiten auf der Mannigfaltigkeit entsprechenden Incremente von x und y bedeuten, welche auf der linken Seite von (22) *$\varrho\,dx$ und $\sigma\,dy$ genannt worden sind. Das Integral* (26) *verschwindet offenbar für $x = x_0$, $y = y_0$.*

Auf der linken und rechten Seite von (23) wird die bezeichnete Function der Variabeln x_1 und y_1 für den Fall ausgedrückt, dass der eine Theil der gewählten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung einem constanten x, der andere einem constanten y entspricht.

Kennt man ausserdem eine eindeutige, endliche und stetige Function $\mathfrak{F}(x, y)$, für welche die nach x und y genommenen partiellen Differenzenquotienten bei abnehmenden Incrementen respective von den vorgeschriebenen Functionen P und Q stets um weniger als dieselbe beliebig kleine Grösse λ differiren, so lässt sich durch ein dem § 24 entsprechendes Verfahren nachweisen, dass das Integral (26) gleich der Differenz der Functionswerthe

(27) $$\mathfrak{F}(x, y) - \mathfrak{F}(x_0, y_0)$$

ist. Denn da der Unterschied des Integrals (26) und der Function $\mathfrak{F}(x, y)$ innerhalb des ganzen betreffenden Gebiets der Variabeln x, y nach x und y partielle Differenzenquotienten hat, die bei abnehmenden Incrementen um weniger als dieselbe beliebig kleine Grösse von Null differiren, so lehrt die Betrachtung der successiven Werthe auf einer von (x_0, y_0) nach (x, y) gehenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, dass der bezeichnete Unterschied constant sein muss. Weil nun (26) und (27) für $x = x_0, y = y_0$ verschwinden, so sind sie einander gleich.

§ 98. Analytische Transformation eines doppelten Integrals.

Durch die Gleichung (13) des vorigen § wird ein Mittel geboten, um die Gleichung (4) des § 96 für $n = 2$ oder die hiermit übereinstimmende geometrisch begründete Gleichung (10) des § 92 analytisch zu beweisen. An die zuerst genannte Gleichung anschliessend mögen zwei Functionen F und G der unabhängigen Variabeln x und y betrachtet werden. Insofern für eine der Functionen F die in (2) des vorigen § enthaltene Gleichung

(1) $$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

gilt, kann die von den Functionen F und G in Bezug auf die Variabeln x und y genommene Functionaldeterminante so dargestellt werden

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x} G\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y} G\right)}{\partial x},$$

wodurch das doppelte Integral

(3) $$\iint\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right) dx\, dy$$

bei der Substitution

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} G = P, \ \frac{\partial F}{\partial y} G = Q$$

in den Ausdruck

$$(5) \qquad \iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\, dy$$

übergeht. Wir betrachten das Integral (3) unter der Voraussetzung, dass die Functionaldeterminante in dem Integrationsgebiet, welches durch die mit (5) des § 96 correspondirenden Ungleichheiten

$$(6) \qquad F(0) \leqq F \leqq F(1), \ G(0) \leqq G \leqq G(1)$$

bestimmt wird, stets positiv sei, dass ferner F bei constantem G von $F(0)$ bis $F(1)$, und G bei constantem F von $G(0)$ bis $G(1)$ beständig wachse.

Vermöge (15) des vorigen § ist das doppelte Integral (5) gleich einem auf die Begrenzung des Gebietes bezüglichen einfachen Integral, das durch Substitution der in (4) angegebenen Functionen zu dem Integral

$$(7) \qquad \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} G \varrho\, dx + \frac{\partial F}{\partial y} G \sigma\, dy \right)$$

wird; mithin ist das obige Integral (3) dem letztern gleich. Die Begrenzung setzt sich aus vier Theilen zusammen, in denen die im vorigen § mit Θ bezeichnete Function nacheinander die folgenden Ausdrücke annimmt,

$$(8) \qquad F - F(0), G(1) - G, F(1) - F, G - G(0).$$

Von den entsprechenden vier Theilen des Integrals (7) wird der erste und dritte Theil gleich Null, weil für jedes Werthsystem der Begrenzung die Function F constant bleibt, und darum das zugehörige in G multiplicirte Element des Integrals

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \varrho\, dx + \frac{\partial F}{\partial y} \sigma\, dy$$

überall verschwindet. Dagegen ist die Function G in dem zweiten Theile constant gleich $G(1)$, in dem vierten constant gleich $G(0)$, so dass der betreffende Werth als Factor vor das Integralzeichen treten darf. Bei den durch die Vorzeichen ϱ und σ bestimmten Incrementen ϱdx und σdy bewegt sich das Werthsystem (x, y) im zweiten Theile des Integrals so, dass F

stets wächst, im vierten Theile so, *dass F stets abnimmt*. Denn für den zweiten Theil folgen aus den Ungleichheiten

$$(10)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}\varrho\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\sigma\,dy=dF>0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}\varrho\,dx+\frac{\partial G}{\partial y}\sigma\,dy=dG=0,$$

die Werthe

$$(11)\qquad \varrho\,dx=\frac{\frac{\partial G}{\partial y}dF}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}$$
$$\sigma\,dy=\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}dF}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}},$$

nach denen, mit Rücksicht auf den positiv angenommenen Werth der im Nenner stehenden Functionaldeterminante, ϱ das Vorzeichen von $\frac{\partial G}{\partial y}=-\frac{\partial \Theta}{\partial y}$, σ das Vorzeichen von $-\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ haben muss; für den vierten ergiebt sich die gleiche Uebereinstimmung. Aus diesen Gründen stellt vermöge der zwischen (26) und (27) des vorigen § bestehenden Gleichheit das über den zweiten Theil der Begrenzung ausgedehnte Integral

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varrho\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\sigma\,dy\right)$$

die Differenz der Functionswerthe $F(1)-F(0)$, das gleichgebildete über den vierten Theil der Begrenzung erstreckte Integral die Differenz der Functionswerthe $F(0)-F(1)$ dar, und da das erste mit $G(1)$, das zweite mit $G(0)$ zu multipliciren war, so geht als Werth des Integrals (3) der Ausdruck hervor

$$(12)\qquad (F(1)-F(0))\,(G(1)-G(0)),$$

welcher bewiesen werden sollte. Für den Fall, dass die in (3) unter dem Integralzeichen stehende Functionaldeterminante in dem bezüglichen Integrationsgebiet das negative Zeichen besitzt, ist ihr negativ genommener Werth gleich dem Ausdruck, in welchen die Functionaldeterminante durch Vertauschung der Functionen F und G übergeht. Mittelst der angestellten Betrachtungen erhält man dann für das Integral

$$\iint -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right) dx\, dy$$

denjenigen Werth, welcher aus (12) durch die Vertauschung von F und G entspringt, das heisst den Werth (12) selbst, wie zu beweisen war.

Auf diese Weise ist die Umformung der doppelten Integrale analytisch begründet.

§ 99. Bedingungen der Integrabilität für Differentialausdrücke von mehr als zwei Variabeln. Transformation von Differentialausdrücken durch Einführung eines Systems von neuen Variabeln.

Es werden jetzt die Bedingungen der Integrabilität für einen Differentialausdruck dreier Variabeln

(1) $$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

durch ein Verfahren bewiesen werden, welches sich auf Differentialausdrücke von beliebig vielen Variabeln ausdehnen lässt. (Vgl. *Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, November 1870.)

Nach (4) des § 97 bestehen die zu (1) gehörigen Bedingungen in den drei Gleichungen

(2) $$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Auch hier untersuchen wir zuerst einen Ausdruck (1), in welchem die Functionen P, Q, R für eine gewisse Mannigfaltigkeit der drei Variabeln x, y, z eindeutig, endlich und stetig, sonst aber beliebig gegeben sind, und bilden ein doppeltes Integral, in welchem die in (2) auf den linken Seiten befindlichen Verbindungen angewendet werden. In der bezeichneten dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sei eine Mannigfaltigkeit E der zweiten Ordnung durch das Constantsetzen einer Function $F(x, y, z)$ bestimmt, und durch eine Bedingung $\Theta(x, y, z) \overline{\gtrless} 0$ begrenzt, so dass für das Innere

(3) $$F(x, y, z) = \text{Const.},\quad \Theta(x, y, z) \overline{\gtrless} 0,$$

mithin auch

$$(4)\qquad dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

ist. Bei den zu (3) gehörenden Werthsystemen mögen die Einheiten η_1, η_2, η_3 respective das Vorzeichen der drei Grössen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ haben, die niemals gleichzeitig verschwinden dürfen. Je nachdem man unter den drei Variabeln x, y, z die erste, zweite oder dritte als Function der beiden übrigen auffasst, entspricht der gegebenen Mannigfaltigkeit E eine Mannigfaltigkeit E_1 der y, z, E_2 der z, x, E_3 der x, y; es möge von den folgenden drei Integralen das erste über E_1, das zweite über E_2, das dritte über E_3 ausgedehnt werden. Dann lässt sich das Aggregat

$$(5)\quad \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\eta_1\,dy\,dz + \iint\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\eta_2\,dz\,dx + \iint\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\eta_3\,dx\,dy$$

in ein einfaches Integral verwandeln.

Bei der Auflösung der Gleichung (3) nach x, y, z können zu jedem System von zwei unabhängigen Variabeln mehrere Werthe der abhängigen Variable gehören; demgemäss sind die in (5) angedeuteten Integrationen so auszuführen, dass die sämmtlichen betreffenden Werthe nach einander zur Anwendung kommen. Zunächst betrachten wir aber die Voraussetzung, dass die abhängige Variable immer nur einen Werth habe, und dass die Zeichen η_1, η_2, η_3 für die betreffenden Integrationsgebiete ungeändert bleiben. Man kann nun das Element jeder doppelten Integration durch Einführung einer neuen Variable in jedes andere verwandeln. Es ergeben sich durch Auflösen der unter den Zeichen vorkommenden Differenzen und Vereinigen derjenigen Integrale, in welchen beziehungsweise P, Q, R vorkommen, die Bestandtheile

$$(6)\qquad \iint\frac{\partial P}{\partial y}\eta_3\,dx\,dy - \iint\frac{\partial P}{\partial z}\eta_2\,dz\,dx,$$

$$(7)\qquad \iint\frac{\partial Q}{\partial z}\eta_1\,dy\,dz - \iint\frac{\partial Q}{\partial x}\eta_3\,dx\,dy,$$

$$(8)\qquad \iint\frac{\partial R}{\partial x}\eta_2\,dz\,dx - \iint\frac{\partial R}{\partial y}\eta_1\,dy\,dz,$$

welche wir so umformen, dass in dem ersten nur nach $dx\,dy$, dem zweiten nur nach $dy\,dz$, dem dritten nur nach $dz\,dx$ integrirt wird. Um in dem zweiten Summanden von (6) statt z die Variable y einzuführen, hat man, da x ungeändert bleibt, das positive Differential dz durch das Product aus dem positiven Differential dy und dem absoluten Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y}$ zu ersetzen, welcher nach der bei der Voraussetzung $dx=0$ in (4) enthaltenen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0 \tag{9}$$

den Werth $-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ hat, und dessen das Vorzeichen mit $-\eta_2\eta_3$ übereinstimmt. Daher kommt statt $-\eta_2\,dz$ der Ausdruck $\eta_3\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Auf gleiche Weise erkennt man, dass in dem zweiten Summanden von (7) und (8) respective statt $-\eta_3\,dx$ der Ausdruck $\eta_1\frac{\partial x}{\partial z}dz$, statt $-\eta_1\,dy$ der Ausdruck $\eta_2\frac{\partial y}{\partial x}dx$ zu substituiren ist, wodurch (6), (7), (8) die folgende Gestalt annehmen,

$$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\eta_3\,dx\,dy, \tag{10}$$

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z}\right)\eta_1\,dy\,dz, \tag{11}$$

$$\iint\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)\eta_2\,dz\,dx. \tag{12}$$

Nach ihrer Entstehung beziehen sich die partiellen von einer Variable nach einer zweiten genommenen Differentialquotienten auf die Voraussetzung, dass die eine Variable eine Function der zweiten und dritten sei; sie haben die Werthe

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{13}$$

Werden x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume gedeutet, so gehören die Werthsysteme des Integrals (5) zu der in (3) dargestellten begrenzten Oberfläche E, während $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ respective die Elemente der auf die yz, zx, xy Ebene genommenen Projectionen E_1, E_2, E_3 sind. In § 93 ist das Element einer Oberfläche durch das Element der Projection auf die yz Ebene ausgedrückt, und zwar geht die dortige Formel (3) bei den gegenwärtigen Bezeichnungen in die folgende über

$$(14)\qquad \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\,\eta_1\,dy\,dz.$$

Gleichzeitig folgt aus dem so eben über die Transformation der verschiedenen Integrationen Gesagten, wie sich auch aus der geometrischen Anschauung ergiebt, dass bei der Wahl einer anderen Projectionsebene statt $\frac{\eta_1\,dy\,dz}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ beziehungsweise die Ausdrücke $\frac{\eta_2\,dz\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, $\frac{\eta_3\,dx\,dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ zu setzen sind.

Das Integral (10), bei dem z eine Function der unabhängigen Variabeln x und y ist, enthält den unter diesem Gesichtspunkt nach y genommenen partiellen Differentialquotienten von P; daher liefert die für ein festes x auszuführende Integration nach y die Function P als unbestimmtes Integral. Derselben ist aus früher angegebenen Gründen bei dem Eintritt eines Werthsystems von wachsendem y in das Integrationsgebiet E_3 das negative, bei dem Austritt das positive Vorzeichen beizulegen. Für die Incremente eines Werthsystems (x, y, z), das sich von der Begrenzung aus in E bewegt, hat man auf Grund von (3) die Relationen

$$(15)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz&=0\\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}dx+\frac{\partial \Theta}{\partial y}dy+\frac{\partial \Theta}{\partial z}dz&=d\Theta.\end{aligned}$$

Vermittelst der Bezeichnungen

$$(16)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Theta}{\partial y}&=D_1\\ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Theta}{\partial z}&=D_2\\ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Theta}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Theta}{\partial x}&=D_3\end{aligned}$$

folgen aus (15) durch Elimination von dx, dy, dz die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{aligned}D_3\,dy-D_2\,dz&=\frac{\partial F}{\partial x}d\,\Theta\\ D_1\,dz-D_3\,dx&=\frac{\partial F}{\partial y}d\,\Theta\\ D_2\,dx-D_1\,dy&=\frac{\partial F}{\partial z}d\,\Theta.\end{aligned}$$

Vermöge der Voraussetzung, dass in E zu jedem Werthsystem von zwei unabhängigen Variabeln nur ein Werth der abhängigen gehöre, entspricht die Begrenzung der Gebiete E_1, E_2, E_3 der Begrenzung von E, weshalb die drei vorliegenden Gleichungen beziehungsweise für die Begrenzung von E_1, E_2, E_3 gelten. Da beim Eintreten in E und somit auch in E_3 das Differential $d\,\Theta > 0$ sein soll, und da für ein Fortschreiten in E_3, wofern das Increment von x gleich Null ist, die Gleichung $-D_1\,dy=\frac{\partial F}{\partial z}d\,\Theta$ besteht, so gehört zu dem positiven Increment dy ein Eintreten in E_3 oder ein Austreten, je nachdem $-D_1\frac{\partial F}{\partial z}$ positiv oder negativ ausfällt. Man bezeichne die Vorzeichen von D_1, D_2, D_3 respective mit ϱ, σ, τ, so dass $-D_1\frac{\partial F}{\partial z}$ das Vorzeichen von $-\varrho\,\eta_3$ erhält. In Folge der für das Vorzeichen der Function P aufgestellten Regel, bei einem Eintritt in E_3 negativ, bei einem Austritt positiv genommen zu werden, muss dann P das Vorzeichen von $\varrho\,\eta_3$ bekommen. Demnach geht (10) mit Weglassung von $\eta_3^2=1$ in das einfache Integral

$$(18)\qquad \int P\varrho\,dx$$

über. Auf gleiche Weise lässt sich bei (11) die Integration nach z, bei (12) die Integration nach x vollziehen, wodurch die einfachen Integrale $\int Q\sigma\,dy$ und $\int R\tau\,dz$ entstehen. Mithin wird das Aggregat (5) gleich dem Aggregat von einfachen Integralen

$$(19)\qquad \int P\varrho\, dx + \int Q\sigma\, dy + \int R\tau\, dz.$$

Es sind jetzt noch die Fälle in Erwägung zu ziehen, bei denen die Auflösung von (3) für ein System von zwei unabhängigen Variabeln mehr als einen Werth der abhängigen Variable hervorbringt. Seien die erstern x und y, so lehrt die Gleichung (4), dass für einen von Null verschiedenen Werth von $\frac{\partial F}{\partial z}$ der Aenderung von x um dx und von y um dy eine bestimmte Aenderung von z um dz entspricht. Dagegen ist es möglich, dass mit dem Fortschreiten eines Werthsystems x, y zu einem in der Nähe befindlichen Werthsysteme der Uebergang von z zu mehreren verschiedenen Werthen correspondire, sobald $\frac{\partial F}{\partial z}$ nur in einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung verschwindet. Wir nehmen an, dass in derselben immer nur zwei Werthe von z zusammenfallen, dass die Function $\frac{\partial F}{\partial z}$ auf der einen Seite positiv, auf der anderen negativ sei, mithin das Vorzeichen von η_3 bei dem Ueberschreiten dieser Mannigfaltigkeit in E wechsele, und dass das Element eines doppelten Integrals $\frac{\eta_3\, dx\, dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, wie in dem Beispiele des § 93, für ein Gebiet, in dessen Begrenzung der Nenner verschwindet, eine Integration zulasse.

Um die so eben ausgesprochenen Forderungen zu erläutern, möge ein Beispiel behandelt werden, in welchem der vorhin erwähnte Fall enthalten ist, und das eben so leicht geometrisch aufgefasst werden kann. Es sei $F(x, y, z)$ gleich der mit drei von Null verschiedenen Coefficienten A, B und C gebildeten Function

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

der in (3) vorgeschriebene constante Werth gleich der Einheit. Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial z} = 2Cz$ verschwindet nur für $z = 0$, wodurch zwischen x und y die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

entsteht. Da die Variable z als Function von x und y mit Hülfe einer positiv oder negativ zu nehmenden Quadratwurzel ausgedrückt wird

$$z = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}},$$

so leuchtet ein, dass die beiden vorhandenen Werthe von z nur in derjenigen Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung zusammenfallen, in welcher $\frac{\partial F}{\partial z}$ verschwindet, und dass, falls diese Mannigfaltigkeit in der gegebenen Mannigfaltigkeit $F(x, y, z) = 1$ überschritten wird, $\frac{\partial F}{\partial z}$ sein Vorzeichen ändert. Gleichzeitig nimmt das zu untersuchende Element $\frac{\eta_3\, dx\, dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ den Ausdruck

$$\frac{\eta_3\, dx\, dy}{2 C \varepsilon \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}}}$$

an, wo η_3 dasselbe Vorzeichen wie $C\varepsilon$ hat. Die Mannigfaltigkeit der Variabeln x, y wird hier durch die Bedingung

$$\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C} \geqq 0$$

begrenzt. In dem Falle, dass A und B positiv sind, lassen sich x und y durch zwei neue Variabeln s und ψ, deren erste positiv sei, wie folgt, ausdrücken

$$\sqrt{A}\, x = s \cos \psi, \quad \sqrt{B}\, y = s \sin \psi,$$

so dass die vorliegende Bedingung in die Gestalt

$$\frac{1 - s^2}{C} \geqq 0$$

übergeht. Mithin nimmt die Variable s in der Begrenzung den Werth der Einheit an und muss im Innern der Mannigfaltigkeit, wofern $C > 0$ ist, kleiner, wofern $C < 0$ ist, grösser als die Einheit sein; daher kann man für den gegenwärtigen Zweck die Integration nach s zwischen der Einheit und einem passend gewählten Werthe s_1, nach ψ zwischen zwei beliebigen Werthen ψ_0 und ψ_1 ausdehnen. Zufolge der für die Umformung eines doppelten Integrals bestehenden Regel ist das Element $dx\, dy$ durch das Element $\frac{s\, ds\, d\psi}{\sqrt{A}\sqrt{B}}$, mithin das zu untersuchende Element durch

$$\frac{\eta_3\, s\, ds\, d\psi}{\sqrt{A}\sqrt{B}\, 2\, C\varepsilon \sqrt{\frac{1-s^2}{C}}}$$

zu ersetzen. Da sich hier der für $s=1$ verschwindende Ausdruck $1-s^2$ im Nenner unter einem Quadratwurzelzeichen befindet, so darf die Integration nach s vermöge der in § 73 aufgestellten Regel zwischen den Werthen $s=s_1$ und $s=1$ ausgedehnt werden, also besitzt das betreffende Element die verlangte Beschaffenheit.

Wofern A und B verschiedene Vorzeichen haben und etwa $A>0$, $B<0$ ist, lässt sich vermittelst zweier neuen Variabeln s und t die Substitution

$$\sqrt{A}\, x = s\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \sqrt{-B}\, y = s\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

bilden, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Alsdann kommt

$$Ax^2+By^2=s^2,$$

und man hat für die Mannigfaltigkeit der Variabeln x und y wieder die Bedingung

$$\frac{1-s^2}{C} \geqq 0,$$

weshalb der numerische Werth von s im Innern der Mannigfaltigkeit für $C>0$ unter, für $C<0$ über der Einheit bleibt, für die Begrenzung gleich der Einheit wird. Der Kürze halber betrachten wir nur positive Werthe von s, denen, wie man sieht, nur positive Werthe von x entsprechen. Aus der Regel für die Umformung eines doppelten Integrals ergiebt sich jetzt statt des Elements $dx\,dy$ das Element $\frac{s\,ds\,dt}{\sqrt{A}\sqrt{-B}}$, wodurch für das zu untersuchende Element der Ausdruck

$$\frac{\eta_3\, s\, ds\, dt}{\sqrt{A}\sqrt{-B}\, 2\, C\varepsilon \sqrt{\frac{1-s^2}{C}}}$$

eintritt. Bei demselben ist es auf Grund der angeführten Regel gestattet, die Integration nach s zwischen $s=1$ und einem der geltenden Bedingung genügenden Werthe $s=s_1$, die Integration nach t zwischen zwei beliebigen Werthen t_0 und t_1 zu vollziehen, so dass auch gegenwärtig die für das Element $\dfrac{\eta_3\, dx\, dy}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ gestellte Forderung erfüllt ist.

In Betreff des allgemeinen Falles beschränken wir uns auf eine Andeutung des einzuschlagenden Weges, empfehlen aber auch hier, mit einer geometrischen Betrachtung anzufangen. Wenn $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ für ein Werthsystem $x=a$, $y=b$, $z=c$ verschwindet, so werde $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $z=c+\zeta$ gesetzt und die Differenz $F(x, y, z) - F(a, b, c)$ nach dem *Taylor*'schen Satze bis auf diejenigen Glieder entwickelt, welche nach den Incrementen ξ, η, ζ von der zweiten Ordnung sind; hierbei entstehe der Ausdruck

$$F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta$$
$$+\frac{1}{2}F_{11}\xi^2 + \frac{1}{2}F_{22}\eta^2 + \frac{1}{2}F_{33}\zeta^2 + F_{23}\eta\zeta + F_{31}\zeta\xi + F_{12}\xi\eta,$$

in welchem

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x},\quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y},\quad F_3 = \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad F_{33} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$
$$F_{23} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z},\quad F_{31} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial x},\quad F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$$

für $x=a$, $y=b$, $z=c$ ist, und nach der Voraussetzung $F_3=0$ sein muss, dagegen F_1 und F_2 nicht gleichzeitig gleich Null sein dürfen. Das Verschwinden dieser Differenz ersetzt dann bis auf den bei der angenäherten Entwickelung begangenen Fehler die obige Gleichung (3), und liefert, falls F_{33} nicht gleich Null ist, für ζ eine quadratische Gleichung. Wofern verlangt wird, dass wenigstens einer der ersten und einer der zweiten partiellen Differentialquotienten von Null verschieden sei, so stimmt die Forderung mit derjenigen überein, welche in § 64 der Function $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ auferlegt ist. Es kommt also gegenwärtig nur die Voraussetzung hinzu, dass F_{33} nicht gleich Null sei. Bezeichnet man mit $\Omega(\xi, \eta)$ eine leicht zu bildende homogene Function des zweiten Grades von ξ und η, so werden die beiden Werthe von ζ wie folgt bestimmt

$$F_{31}\xi + F_{23}\eta + F_{33}\zeta = \pm\sqrt{-F_{33}(F_1\xi + F_2\eta) + \Omega(\xi, \eta)}.$$

Da nun andrerseits der auf der linken Seite befindliche Ausdruck an die Stelle des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial z}$ zu setzen ist, so hat man statt des zu untersuchenden Elements $\frac{\eta_3\, dx\, dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ das Element

$$\frac{\eta_3\, d\xi\, d\eta}{F_{31}\xi + F_{23}\eta + F_{33}\zeta} = \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{-F_{33}(F_1\xi + F_2\eta) + \Omega(\xi, \eta)}}$$

zu erörtern, und kann, weil der unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Ausdruck ersten Grades nach der Voraussetzung nicht Null werden darf, die Berechtigung der Integration für ein Gebiet, in dessen Begrenzung der Nenner verschwindet, auf ähnliche Art wie in dem durchgeführten Beispiele beweisen. Wofern also für eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, in der $\frac{\partial F}{\partial z}$ gleich Null ist, die beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht gleichzeitig verschwinden und $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ ebenfalls nicht verschwindet, so dürfen die vorhin erhobenen Forderungen als erfüllt gelten.

Nach den getroffenen Annahmen zerfällt die Mannigfaltigkeit E_3 der Variabeln x und y in lauter einzelne Theile $T, U, \ldots$ in deren jedem η_3 dasselbe Zeichen und z nur einen Werth hat, wo aber in verschiedenen Theilen T, U dieselben Werthsysteme (x, y) vorkommen dürfen; in einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, für die $\frac{\partial F}{\partial z}$ gleich Null ist, treffen zwei solche Theile T, U in der Weise zusammen, dass zu demselben in das Innere von T und U gerichteten Fortschreiten des Werthsystems (x, y) das Fortrücken des Werthsystems (x, y, z) in E nach zwei verschiedenen Werthen von z gehört. Entsprechende Voraussetzungen werden über das Verschwinden von $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$, beziehungsweise die Bedingungen gemacht, unter denen für ein System (y, z) zwei Werthe von x, und für ein System (z, x) zwei Werthe von y coincidiren, und es möge alsdann die Aussage gelten, dass die in (3) dargestellte Mannigfaltigkeit E keinerlei Singularitäten enthalte. Nachdem nun (6), (7), (8) respective in (10), (11), (12) transformirt sind, verfährt man mit jedem der letztern wie für (10) gezeigt werden wird. Hier ist die Integration nach einander über die vorhin bezeichneten Theile $T, U, \ldots$ von E_3 auszudehnen, in deren jedem η_3 ein ungeändertes Vorzeichen hat und zu jedem System (x, y) nur ein Werth von z gehört, und von allen Resultaten die Summe zu nehmen. Jedes dieser doppelten Integrale wird vermöge der oben auseinandergesetzten Behandlung gleich einem einfachen Integral von der Gestalt (18), folglich (10) gleich der Summe der betreffenden einfachen Integrale. Die Begrenzungen von $T, U, \ldots$ in E_3 entsprechen zum Theil der gegebenen Begrenzung von E, zum Theil solchen Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung in E, in welchen $\frac{\partial F}{\partial z}$ verschwindet, und zwar gehört nach der getroffenen Annahme zu einer Mannigfaltigkeit der letztern Art immer die gemeinsame Begrenzung von zwei Theilen T und U, wobei für das Innere des einen, etwa des ersten, $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$, für das Innere des andern $\frac{\partial F}{\partial z} < 0$ ist. In der vorzunehmenden Umformung des auf T bezüglichen Integrals (10) ist daher zur Darstellung der mit U gemeinsamen Begrenzung statt der oben Θ genannten Function, die im Innern des Integrationsgebiets positiv sein soll, die Function $\frac{\partial F}{\partial z}$, dagegen in der Umformung des auf U bezüglichen Integrals (10) zur Darstellung derselben mit T gemeinsamen Begrenzung statt Θ die Function $-\frac{\partial F}{\partial z}$ anzuwenden. Weil aber die Ausdrücke (16), von denen die Vorzeichen ϱ, σ, τ abhängen, die Eigenschaft haben, bei einer Verwandlung von Θ in $-\Theta$ in die entgegengesetzten überzugehen, so heben sich bei der Addition der bezeichneten Integrale von der Gestalt (18) alle diejenigen Bestandtheile wechselsweise auf, die von Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ herrühren, und es bleiben nur die Bestandtheile übrig, welche sich auf die ursprüngliche Begrenzung des Gebietes E beziehen. Aus diesen Ursachen hat die Gleichheit des Aggregats (5) und des Aggregats (19) allgemeine Gültigkeit, sobald in dem letztern die ganze gegebene Begrenzung von E durchlaufen wird.

Die Incremente $\varrho\, dx$, $\sigma\, dy$, $\tau\, dz$ können zu einem Werthsystem (x, y, z) gerechnet werden, welches in der Begrenzung von E in einem bestimmten Sinne fortschreitet. Um eine solche Bewegung auszudrücken, hat man in (15) das Differential $d\Theta = 0$ zu setzen, und erhält dann für die Incremente, welche dort mit dx, dy, dz bezeichnet werden, die Bestimmung, dass sie in denselben Verhältnissen wie die dortigen Verbindungen D_1, D_2, D_3 stehen müssen, nach welchen sich die Vorzeichen ϱ, σ, τ richten. Der gleiche Zweck wird erreicht, sobald zu den Functionen F und Θ eine beliebige Function Φ von der Beschaffenheit hinzugefügt wird, dass die Functionaldeterminante

$$(20)\qquad D_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + D_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} + D_3\frac{\partial\Phi}{\partial z} = D$$

nicht verschwindet, und wenn hierauf die Incremente dx, dy, dz aus den drei Gleichungen

$$(21)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \Theta}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz &= d\Phi \end{aligned}$$

bestimmt werden. Alsdann erhalten dx, dy, dz die Werthe

$$(22)\qquad dx = \frac{D_1\, d\Phi}{D},\ dy = \frac{D_2\, d\Phi}{D},\ dz = \frac{D_3\, d\Phi}{D},$$

deren Vorzeichen respective durch ϱ, σ, τ, oder durch $-\varrho, -\sigma, -\tau$ dargestellt sind, je nachdem $d\Phi$ ein mit D gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen empfängt. Diese Bestimmung erfolgt durch das von *Kronecker* in der Abhandlung *über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln*, Monatsbericht der Berliner Academie vom März 1869, eingeführte *Fortgangsprincip*. Bei der bezeichneten Auffassung der Incremente $\varrho\, dx, \sigma\, dy, \tau\, dz$ geht das Aggregat (19) wieder in ein einziges Integral über, nämlich

$$(23)\qquad \int (P\varrho\, dx + Q\sigma\, dy + R\tau\, dz).$$

Aus der zwischen (5) und (23) bestehenden Gleichheit

$$(23^*)\quad \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\eta_1\,dy\,dz+\iint\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\eta_2\,dz\,dx+\iint\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\eta_3\,dx\,dy$$
$$=\int(P\varrho\,dx+Q\sigma\,dy+R\tau\,dz)$$

ergiebt sich für die Annahme, dass die drei Gleichungen (2) Gültigkeit haben, das Verschwinden des einfachen Integrals (23). Sobald nun die Begrenzung von E aus einer einzigen in sich zurückkehrenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung besteht, kann diese durch Fixirung von zwei ihr angehörenden Werthsystemen (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) in zwei Theile getheilt werden, und es finden mit angemessenen Modificationen alle in § 97 angestellten Betrachtungen Anwendung, wodurch die Gleichungen (2) als die Bedingungen der Integrabilität für den Ausdruck $Pdx + Qdy + Rdz$ erwiesen werden.

Eine Function mit den vorgeschriebenen partiellen Differentialquotienten P, Q, R wird demnach durch das Integral

$$(24)\qquad \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(Pdx+Qdy+Rdz)$$

dargestellt, bei welchem das System der Integrationsvariabeln auf einer unter den erforderlichen Bedingungen beliebig gewählten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung von dem Werthsystem (x_0, y_0, z_0) zu dem Werthsystem (x, y, z) fortschreitet; hier sind statt ϱdx, σdy, τdz wieder die Zeichen dx, dy, dz gebraucht. Desgleichen lässt sich unter entsprechenden Voraussetzungen wie in § 97 zeigen, dass für eine eindeutige, endliche und stetige Function $\mathfrak{F}(x, y, z)$, deren nach den drei Variabeln genommene partielle Differentialquotienten respective gleich P, Q, R sind, das Integral (24) gleich der Differenz der Functionswerthe

$$(25)\qquad \mathfrak{F}(x,y,z)-\mathfrak{F}(x_0,y_0,z_0)$$

ist. In derselben Weise findet man für Differentialausdrücke von beliebig vielen Variabeln durch Einführung passend gewählter doppelter Integrale die Gültigkeit der in (4) des § 97 angegebenen Bedingungen der Integrabilität, und überhaupt genau analoge Resultate.

Wir wollen jetzt einen Differentialausdruck, der an der erwähnten Stelle so bezeichnet war,

$$(26) \qquad P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \ldots + P_n\, dx_n$$

transformiren, indem wir die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch ein System von neuen Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_n$ ausdrücken. Vermöge der für die Zahlen $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$ geltenden Gleichung

$$(27) \qquad dx_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_2} dv_2 + \ldots + \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_n} dv_n$$

verwandelt sich (26) in den Differentialausdruck

$$(28) \qquad Q_1\, dv_1 + Q_2\, dv_2 + \ldots + Q_n\, dv_n,$$

wo die Factoren $Q_{\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{k} = 1, 2, \ldots n$ als Summen bestimmt sind, bei denen $\mathfrak{a}$ von 1 bis n läuft,

$$(29) \qquad Q_{\mathfrak{k}} = \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}}.$$

Es kann nun direct nachgewiesen werden, dass, sobald für (26) die mit irgend zwei verschiedenen Zeigern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu bildenden $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen der Integrabilität

$$(30) \qquad \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0$$

gelten, die zu (28) gehörenden auf irgend ein Paar differenter Zeiger $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ bezüglichen Bedingungen der Integrabilität

$$(31) \qquad \frac{\partial Q_{\mathfrak{k}}}{\partial v_{\mathfrak{l}}} - \frac{\partial Q_{\mathfrak{l}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}} = 0$$

ebenfalls erfüllt sind. Aus (29) ergiebt sich

$$(32) \qquad \frac{\partial Q_{\mathfrak{k}}}{\partial v_{\mathfrak{l}}} = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial v_{\mathfrak{l}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}} + \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}\, \partial v_{\mathfrak{l}}},$$

wo $\mathfrak{b}$ wieder von 1 bis n geht, und ebenso bei Vertauschung der Buchstaben $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$,

$$(33) \qquad \frac{\partial Q_{\mathfrak{l}}}{\partial x_{\mathfrak{k}}} = \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial v_{\mathfrak{l}}} + \sum_{\mathfrak{b}} P_{\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{b}}}{\partial v_{\mathfrak{l}}\, \partial v_{\mathfrak{k}}}.$$

Weil aber für jedes Paar Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Gleichung (30) gilt, ferner $\frac{\partial^2 x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}\, \partial v_{\mathfrak{l}}} = \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{a}}}{\partial v_{\mathfrak{k}}\, \partial v_{\mathfrak{l}}}$ ist, und weil zwischen der einfachen Summation nach den Buchstaben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kein Unterschied besteht, so sind die auf der rechten Seite von (32) und (33) befindlichen Ausdrücke einander gleich, mithin auch die

Ausdrücke der linken Seite, und darin besteht die zu beweisende Gleichung (31). Daher geht das vollständige Differential (26) durch die Substitution der neuen Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_n$ in das vollständige Differential (28) über, und man darf aus dem Vorgetragenen den Schluss ziehen, dass die aus der Integration von (26) hervorgehende Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit der aus der Integration von (28) entstehenden Function von $v_1, v_2, \ldots v_n$ bis auf eine additive Constante übereinstimmt.

Noch ist die Bemerkung hinzuzufügen, dass, wenn zur Transformation des Ausdrucks (26) die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch eine Anzahl m von neuen Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_m$, welche entweder grösser oder kleiner als n ist, ausgedrückt werden, auf genau dieselbe Weise gezeigt werden kann, dass in Folge der Gleichungen (30) bei dem transformirten Ausdruck die Bedingungen der Integrabilität befriedigt sind.

§ 100. Analytische Transformation der vielfachen Integrale.

Bei einem System von n Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ziehen die $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen, welche für jede einzelne Function in (2) des § 97 aufgestellt sind, eine allgemeine Eigenschaft der zugehörigen Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ nach sich, die für $n=2$ in (2) des § 98 ausgedrückt ist und zunächst für $n=3$ angegeben werden soll. Wenn drei Functionen F, G, H von den Variabeln x, y, z abhängig sind, und wenn in der Functionaldeterminante

$$(1) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial z} = \mathfrak{D}$$

die beziehungsweise zu $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ gehörenden adjungirten Elemente von $\mathfrak{D}$ folgendermassen bezeichnet werden,

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y} = A_1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z} = A_2,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = A_3,$$

so besteht zwischen A_1, A_2, A_3 die folgende durch directe Rechnung leicht zu verificirende Gleichung

(3) $$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0,$$

und deshalb folgt aus der Gleichung

(1*) $$\mathfrak{D} = A_1 \frac{\partial H}{\partial x} + A_2 \frac{\partial H}{\partial y} + A_3 \frac{\partial H}{\partial z}$$

die neue Darstellung

(4) $$\mathfrak{D} = \frac{\partial (A_1 H)}{\partial x} + \frac{\partial (A_2 H)}{\partial y} + \frac{\partial (A_3 H)}{\partial z}.$$

Vermöge derselben kann ein über eine gegebene Mannigfaltigkeit der dritten Ordnung

(5) $$\mathfrak{E} \geqq 0$$

auszudehnendes dreifaches Integral

(6) $$\iiint \mathfrak{D}\, dx\, dy\, dz$$

in ein doppeltes Integral verwandelt werden. Nachdem $\mathfrak{D}$ durch die rechte Seite von (4) ersetzt ist, gestattet jeder der drei unter den Integralzeichen vorkommenden Summanden die Ausführung einer Integration nach je einer Variable.

Bei dem Integral

(7) $$\iiint \frac{\partial (A_1 H)}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

liefert die für ein beliebiges festes System von Werthen y, z nach x vollzogene unbestimmte Integration die Function $A_1 H$, und zwar ist nach den bestehenden Grundsätzen der Werth der Function negativ oder positiv zu substituiren, je nachdem ein von der Begrenzung aus für feste y und z mit positivem dx fortschreitendes Werthsystem in das Integrationsgebiet eintritt oder aus demselben austritt. In Folge von (5) fällt das Differential

(8) $$d\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} dz$$

bei dem Eintritt positiv, bei dem Austritt negativ aus. Da nun gegenwärtig $dx > 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ ist, so nimmt $d\mathfrak{E}$ das Vorzeichen von $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}$ an, und es entspricht der Eintritt einem positiven, der Austritt einem negativen Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}$. Wenn daher die Einheiten ε_1, ε_2, ε_3 respective mit den Vorzeichen von

$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}$ übereinstimmen, so wird (7) gleich dem doppelten Integral

$$(8) \qquad -\int\int A_1 H \varepsilon_1 \, dy \, dz,$$

und man erhält durch entsprechende Behandlung der beiden anderen Integrale

$$(9) \qquad \int\int\int \frac{\partial (A_2 H)}{\partial y} dx \, dy \, dz, \quad \int\int\int \frac{\partial (A_3 H)}{\partial z} dx \, dy \, dz$$

für das Integral (6) die Umformung

$$(10) \quad \int\int\int \mathfrak{D} \, dx \, dy \, dz = -\int\int A_1 H \varepsilon_1 \, dy \, dz - \int\int A_2 H \varepsilon_2 \, dz \, dx - \int\int A_3 H \varepsilon_3 \, dx \, dy.$$

Statt der doppelten Integrationen, die sich auf die verschiedenen Verbindungen von zwei Elementen beziehen, mögen überall Integrationen nach $dx \, dy$ eingeführt werden. Nach dem vorigen § geschieht dies in der Weise, dass im ersten Integral $-\varepsilon_1 \, dz$ durch $\varepsilon_3 \frac{\partial z}{\partial x} dx$, im zweiten Integral $-\varepsilon_2 \, dz$ durch $\varepsilon_3 \frac{\partial z}{\partial y} dy$ ersetzt wird; hierbei ist z in Folge der Gleichung der Begrenzung $\mathfrak{E} = 0$ als eine Function von x und y aufzufassen, deren partielle Differentialquotienten

$$(11) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}},$$

respective die Vorzeichen von $-\varepsilon_1 \, \varepsilon_3$ und $-\varepsilon_2 \, \varepsilon_3$ haben. Hiernach wird aus (10) die Gleichung

$$(12) \quad \int\int\int \mathfrak{D} \, dx \, dy \, dz = -\int\int \left(-A_1 \frac{\partial z}{\partial x} - A_2 \frac{\partial z}{\partial x} + A_3\right) H \varepsilon_3 \, dx \, dy,$$

oder

$$(12^*) \quad \int\int\int \mathfrak{D} \, dx \, dy \, dz = -\int\int \frac{A_1 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}} H \varepsilon_3 \, dx \, dy.$$

Bei der letztern ist der Umstand merkwürdig, dass der Zähler des unter dem Integralzeichen auftretenden Bruches mit der von den drei Functionen $F, G, \mathfrak{E}$ in Bezug auf die drei Variabeln x, y, z genommenen Functionaldeterminante zusammenfällt.

Wir kommen jetzt zu dem noch fehlenden analytischen

Beweise der Gleichung (4) des § 96, wobei das dreifache Integral (12) über ein Gebiet erstreckt wird, das durch die mit festen Anfangs- und Endwerthen gebildeten Ungleichheiten

(13) $F(0) \leq F \leq F(1),\ G(0) \leq G \leq G(1),\ H(0) \leq H \leq H(1)$

begrenzt ist; jede der drei Functionen F, G, H möge, sobald die beiden anderen constant bleiben, von dem gegebenen Anfangs- bis zu dem betreffenden Endwerthe beständig wachsen, die Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ sei in dem ganzen Gebiet positiv. Um die Gleichung (12) oder (12*) zu gebrauchen, ist die obige Function $\mathfrak{E}$, welche für die Begrenzung verschwindet und innerhalb des Integrationsgebietes positiv ist, je nach den sechs Theilen der Begrenzung (13) durch die Functionen

(14) $F-F(0),\ F(1)-F,\ G-G(0),\ G(1)-G,\ H-H(0),\ H(1)-H$

zu ersetzen. In Folge dessen kommen statt $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}$ im ersten, dritten, fünften Theile respective die Ausdrücke

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{\partial F}{\partial y}, & \dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}, & \dfrac{\partial G}{\partial y}, & \dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

während im zweiten, vierten, sechsten Theile die gleichen aber negativ genommenen Ausdrücke anzuwenden sind. Bei der Substitution in den schon hervorgehobenen Ausdruck

$$(16)\qquad A_1 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y}$$

findet sich, dass derselbe nach einer Grundeigenschaft der Determinanten für die vier ersten Theile verschwindet, für den fünften Theil gleich $\mathfrak{D}$, für den sechsten gleich $-\mathfrak{D}$ wird. Mithin sind die Bestandtheile der auf der rechten Seite von (12) oder (12*) auszuführenden Integrationen, welche sich auf die vier ersten Theile der Begrenzung beziehen, gleich Null, und es bleiben nur die Bestandtheile übrig, in denen H einen der constanten Werthe $H(0)$ oder $H(1)$ hat; deshalb wird aus (12*)

$$(17)\qquad \iiint \mathfrak{D}\, dx\, dy\, dz = -\iint \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}} H(0)\, \varepsilon_3\, dx\, dy + \iint \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}} H(1)\, \varepsilon_3\, dx\, dy,$$

wo die erste Integration auf den fünften, die zweite auf den sechsten Theil der Begrenzung geht. Da ε_3 das Vorzeichen von $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}$ angiebt, und $\mathfrak{D}$ überall positiv vorausgesetzt ist, so hat in jedem der beiden doppelten Integrale der Factor $\frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}}\varepsilon_3$ das positive Vorzeichen.

Bei einer mit der rechten Seite von (12) übereinstimmenden Notation erscheint die Gleichung (17), wie folgt

$$(18)\quad \begin{aligned}\iiint \mathfrak{D}\,dx\,dy\,dz = &-\iint\left(-A_1\frac{\partial z}{\partial x}-A_2\frac{\partial z}{\partial y}+A_3\right)H(0)\,\varepsilon_3\,dx\,dy\\ &+\iint\left(-A_1\frac{\partial z}{\partial x}-A_2\frac{\partial z}{\partial y}+A_3\right)H(1)\,\varepsilon_3\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Das in der Klammer eingeschlossene Aggregat ist aber unter der Voraussetzung, dass F und G mit Hinzuziehung der Gleichung der Begrenzung des gegebenen Gebiets als nur von den Variabeln x und y abhängig angesehen werden, gleich der nach x und y genommenen Functionaldeterminante von F und G. Denn aus den Gleichungen

$$(19)\quad \begin{cases}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

folgt

$$(20)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=-A_1\frac{\partial z}{\partial x}-A_2\frac{\partial z}{\partial y}+A_3.$$

Man hat also, indem die constanten Factoren $H(0)$ und $H(1)$ vor die Integralzeichen gesetzt werden,

$$(21)\quad \begin{aligned}\iiint \mathfrak{D}\,dx\,dy\,dz = &-H(0)\iint\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right)\varepsilon_3\,dx\,dy\\ &+H(1)\iint\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right)\varepsilon_3\,dx\,dy,\end{aligned}$$

und zwar muss in Folge der obigen über das positive Vorzeichen des Ausdrucks $\frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}}\varepsilon_3$ gemachten Bemerkung ε_3 beide

Male mit dem Vorzeichen der den ersten Factor bildenden Functionaldeterminante des zweiten Grades übereinstimmen. Demnach folgt aus dem Satze des § 98 für jedes der beiden doppelten Integrale die Werthbestimmung

$$(22)\qquad (F(1)-F(0))\,(G(1)-G(0)),$$

und man erhält für das den Ungleichheiten (13) entsprechend ausgedehnte Integral den zu beweisenden Ausdruck

$$(23)\quad \int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{D}\,dx\,dy\,dz = (F(1)-F(0))\,(G(1)-G(0))\,(H(1)-H(0)).$$

Die im Anfange dieses § erwähnte allgemeine Eigenschaft der Functionaldeterminante

$$(24)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \mathfrak{D}$$

wird, sobald $A_1, A_2, \ldots A_n$ die zu $\frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \frac{\partial F_n}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ gehörenden adjungirten Elemente von $\mathfrak{D}$ bedeuten, und daher

$$(25)\qquad \mathfrak{D} = A_1\frac{\partial F_n}{\partial x_1} + A_1\frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

ist, durch die Gleichung

$$(26)\qquad \mathfrak{D} = \frac{\partial(A_1 F_n)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2 F_n)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(A_n F_n)}{\partial x_n}$$

dargestellt, die auf Grund der in I, § 74 entwickelten Eigenschaften einer Determinante nicht schwer zu beweisen ist. Bei Benutzung von (26) führt eine Wiederholung der angewendeten Schlüsse, indem die Ordnung der betrachteten Ietegrale beständig um Eins abnimmt, zu der Gleichung (4) des § 96, welche bewiesen werden sollte.

Capitel XIV.

Umkehrung eines Systems von Functionen.

§ 101. Unabhängige und abhängige Functionen.

Nachdem in I, § 104 die Umkehrung einer Function einer Variable definirt, und nachdem in § 26 dieses Bandes die Möglichkeit der Umkehrung der Sache nach, wenn auch nicht mit ausdrücklichen Worten, für eine ausgedehnte Voraussetzung bewiesen ist, verlangen die in den letzten Capiteln geführten Untersuchungen, die Ausdehnung dieses Begriffs auf ein System von

Functionen zu erörtern. Falls n Variabeln $t_1, t_2, \dots t_n$ für eine gewisse n fache Mannigfaltigkeit der n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ als stetige und beliebig zu differentiirende Functionen der letztern gegeben sind

(1) $t_1 = F_1(x_1, x_2, \dots x_n), t_2 = F_2(x_1, x_2, \dots x_n), \dots t_n = F_n(x_1, x_2, \dots x_n),$

so bildet die Aufgabe, zu jedem innerhalb eines gewissen Gebiets beliebig gegebenen System von Werthen $t_1, t_2, \dots t_n$ die zugehörigen Systeme von Werthen $x_1, x_2, \dots x_n$ zu bestimmen, das Problem der Umkehrung des Systems von n Functionen $t_1, t_2, \dots t_n$ der n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$. Man kann die Aufgabe sofort auflösen, beziehungsweise ihre Möglichkeit beurtheilen, falls die Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ rational, ganz und vom ersten Grade sind. Es mögen zu den Werthen $x_1(0), x_2(0), \dots x_n(0)$ der Variabeln die Werthe $t_1(0), t_2(0), \dots t_n(0)$ der Functionen gehören, und die Differenzen

(2) $$x_1 - x_1(0) = \Delta x_1, x_2 - x_2(0) = \Delta x_2, \dots x_n - x_n(0) = \Delta x_n$$
$$t_1 - t_1(0) = \Delta t_1, \ t_2 - t_2(0) = \Delta t_2, \dots t_n - t_n(0) = \Delta t_n$$

eingeführt werden, dann erhält man, weil die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung constant sind, die Gleichungen

(3) $$\Delta t_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Delta x_n$$
$$\Delta t_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Delta x_n$$
$$\Delta t_n = \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Hier repräsentiren die Differenzen $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots \Delta t_n$ ein System von ganzen homogenen Functionen des ersten Grades in Bezug auf die Differentiale $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$, und sind als solche nach I, § 71 bis 75 von einander unabhängig oder nicht, je nachdem die aus den zugehörigen constanten Coefficienten gebildete Determinante einen von Null verschiedenen Werth oder den Werth Null hat. Bei der ersten Voraussetzung entspricht jedem beliebig gegebenen System von Differenzen $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ ein eindeutig bestimmtes System von Differenzen $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots \Delta t_n$, folglich jedem beliebig gewählten System von Werthen $x_1, x_2, \dots x_n$ ein und nur ein System von Werthen $t_1, t_2, .. t_n$; deshalb werden auch $t_1, t_2, ... t_n$ unabhängige Functionen der Variabeln $x_1, x_2, ... x_n$ genannt. Bei der zweiten Voraussetzung steht dagegen nach I, § 75 ein Theil der Differenzen $\varDelta t_1, \varDelta t_2, ... \varDelta t_n$ in einer bestimmten Abhängigkeit von den übrigen, weshalb die Werthe von $t_1, t_2, ... t_n$ nicht vollkommen frei angenommen werden dürfen, sondern von einander abhängen.

Sobald $t_1, t_2, ... t_n$ nicht als rationale ganze Functionen des ersten Grades von $x_1, x_2, ... x_n$ gegeben sind, hat man für die Differentiale $dt_1, dt_2, ... dt_n$, wie in § 96, die Ausdrücke

$$(4)\qquad \begin{aligned} dt_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n \\ dt_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dt_n &= \frac{\partial F_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} dx_n, \end{aligned}$$

in denen nicht alle partiellen Differentialquotienten constant sind. Hier entscheidet der Werth, welchen die Functionaldeterminante

$$(5)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \mathfrak{D}$$

für ein einzelnes Werthsystem $x_1, x_2, ... x_n$ annimmt, durch Nichtverschwinden oder Verschwinden darüber, ob die Incremente $dt_1, dt_2, ... dt_n$ von einander unabhängig oder abhängig sind, das heisst, ob zu einem System von beliebig gewählten Werthen derselben ein eindeutig bestimmtes System von Incrementen $dx_1, dx_2, ... dx_n$ gehört oder nicht. Weil aber die Functionen $F_1, F_2, ... F_n$ für eine gewisse n fache Mannigfaltigkeit der n Variabeln $x_1, x_2, ... x_n$ gegeben sind, so macht sich bei der Betrachtung von verschiedenen Werthsystemen $(x_1, x_2, ... x_n)$ der Unterschied geltend, dass die Functionaldeterminante entweder überall in einem Theile der n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, auf welche sich die Functionen beziehen, oder in Mannigfaltigkeiten niederer Ordnungen, die in der erstern enthalten sind, oder in einzelnen Werthsystemen verschwinden kann. Wir werden uns im Folgenden mit der Annahme beschäftigen, dass die Functionaldeterminante überall in einem Theile der n fachen Mannigfaltigkeit verschwinde.

Wenn eine von den Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ in einem Theile der n fachen Mannigfaltigkeit überall constant ist und folglich alle ersten partiellen Differentialquotienten der Function verschwinden, so verschwindet die Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ vermöge ihres Bildungsgesetzes daselbst ebenfalls. Auch muss diese in der gleichen Weise verschwinden, wofern überall innerhalb eines Theiles der n fachen Mannigfaltigkeit eine Function F_σ von allen übrigen oder einem Theile derselben $F_\alpha, F_\beta, \ldots F_\lambda$ abhängt, so dass eine Gleichung von der Gestalt

$$F_\sigma = \varphi(F_\alpha, F_\beta, \ldots F_\lambda) \tag{6}$$

besteht. Denn für jede einzelne Variable $x_\mathfrak{a}$ wird alsdann der zugehörige partielle Differentialquotient von F_σ folgendermassen ausgedrückt

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_\mathfrak{a}} = \frac{\partial \varphi}{\partial F_\alpha}\,\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} + \frac{\partial \varphi}{\partial F_\beta}\,\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\mathfrak{a}} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial F_\lambda}\,\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\mathfrak{a}}\,; \tag{7}$$

bei der Substitution in die Determinante $\mathfrak{D}$ geht dieselbe daher in ein Aggregat von Producten über, bei welchen der eine Factor von den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial F_\alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial F_\beta}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial F_\gamma}$ gebildet wird, der andere Factor nach dem Satze (3) von I, § 74 verschwindet. Umgekehrt lässt sich aus der Voraussetzung, dass überall in einem Theile der n fachen Mannigfaltigkeit die Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ verschwindet, jedoch nicht alle Functionen gleich Constanten sind, der Schluss ziehen, dass dort wenigstens eine Function von den übrigen oder doch von einem Theile derselben abhängig sei. Um dies zu zeigen, wähle man ein nach der Voraussetzung vorhandenes Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus, für welches nicht alle partiellen Differentialquotienten aller Functionen gleich Null sind. Da der zugehörige Werth von $\mathfrak{D}$ gleich Null ist, so lässt sich nunmehr auf das System von Gleichungen (4) das Verfahren aus I, § 75 anwenden, und ein einzelnes Differential dt_σ mit Hülfe von anderen Differentialen $dt_\alpha, dt_\beta, \ldots dt_\lambda$, wie folgt, ausdrücken

(8) $$\mathfrak{K}_\sigma\, d\,t_\sigma = \mathfrak{K}_\alpha\, d\,t_\alpha + \mathfrak{K}_\beta\, d\,t_\beta + \ldots + \mathfrak{K}_\lambda\, d\,t_\lambda.$$

Hier ist $\mathfrak{K}_\sigma$ eine aus dem System der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ gebildete partielle Determinante und hat für das betreffende Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen von Null verschiedenen Werth; ebensolche partielle Determinanten sind $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta, \ldots \mathfrak{K}_\lambda$. Weil aber die Functionaldeterminante innerhalb des betreffenden Theiles der n fachen Mannigfaltigkeit überall gleich Null ist, darf man vermöge der Stetigkeit der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ annehmen, dass die Gleichung (8) auch noch gültig und $\mathfrak{K}_\sigma$ von Null verschieden bleibe, wofern von dem ersten Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb eines engeren Theiles T der n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu beliebigen anderen Werthsystemen fortgeschritten wird. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich für das Differential dt_σ durch die Division mit $\mathfrak{K}_\sigma$ die Darstellung

(9) $$dt_\sigma = \frac{\mathfrak{K}_\alpha\, dt_\alpha + \mathfrak{K}_\beta\, dt_\beta + \ldots + \mathfrak{K}_\lambda\, dt_\lambda.}{\mathfrak{K}_\sigma}$$

Innerhalb der n fachen Mannigfaltigkeit T werde jetzt von einem Werthsystem $(x_1(0), .. x_n(0))$ nach einem Werthsystem $(x_1(1), .. x_n(1))$ eine einfache Mannigfaltigkeit geführt, und das vollständige Differential über dieselbe nach den Vorschriften des vorigen Capitels integrirt; dadurch entsteht der Unterschied der zugehörigen Functionswerthe $t_\sigma(1) - t_\sigma(0)$.

Da die rechte Seite von (9) stets verschwindet, wo die Differentiale $dt_\alpha, dt_\beta, \ldots d\,t_\lambda$ gleichzeitig gleich Null sind, so liefern bei der Integration von dt_σ solche Theile der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, in denen die Functionen $t_\alpha, t_\beta, .. t_\lambda$ ungeändert bleiben, keinen Beitrag. Falls daher das Anfangssystem $(x_1(0), .. x_n(0))$ festgehalten, das Endsystem $(x_1(1), .. x_n(1))$ geändert wird, so erfährt die Differenz $t_\sigma(1) - t_\sigma(0)$, mithin auch der Functionswerth $t_\sigma(1)$, wofern bei dem Uebergange von einem zu einem anderen Endsystem die Functionen $t_\alpha, t_\beta, \ldots t_\lambda$ ungeändert bleiben, keine Aenderung, und kann sich nur bei einer Aenderung dieser Functionen ändern. Deshalb ist t_σ in der Mannigfaltigkeit T als von den Functionen $t_\alpha, t_\beta, \ldots t_\lambda$ abhängig zu betrachten, was gezeigt werden sollte.

Ein System $F_1, F_2, \ldots F_n$ wird ein System von abhängigen Functionen genannt, sobald eine einzelne Function in Abhängigkeit von den übrigen oder von einem Theile derselben steht, dagegen ein System von unabhängigen Functionen, wofern jene Voraussetzung nicht zutrifft. Man sieht aus dem Bisherigen, dass bei einem System von unabhängigen Functionen die Functionaldeterminante innerhalb keines Theiles der betreffenden $n$fachen Mannigfaltigkeit überall verschwindet, und dass, wo die Functionaldeterminante in einem Theile der $n$fachen Mannigfaltigkeit verschwindet, ein System von abhängigen Functionen vorliegt. Mit Rücksicht hierauf ist ein System von unabhängigen Functionen ein solches, bei dem die zugehörige Functionaldeterminante innerhalb keines Theiles der $n$fachen Mannigfaltigkeit überall verschwindet. Während nun bei einem System von rationalen ganzen Functionen des ersten Grades diese Bedingung der Unabhängigkeit ausreicht, um sicher zu sein, dass einem beliebig gewählten System von Werthen der Functionen immer ein und nur ein System von Werthen der Variabeln correspondire, bleibt bei jedem anderen System von unabhängigen Functionen noch zu erörtern, wann zu einem beliebig gewählten System von Functionswerthen nur ein einziges System von Werthen der Variabeln gehöre und wie dasselbe gefunden werden könne. Diese beiden Fragen werden in der Reihenfolge, in welcher sie aufgestellt sind, zur Sprache kommen.

§ 102. Eindeutige Umkehrung eines Systems von Functionen.

Es seien die Variabeln t_1 und t_2 als eindeutige, stetige und beliebig zu differentiirende Functionen der Variabeln x und y für eine zweifache Mannigfaltigkeit K gegeben,

(1) $$t_1 = F(x, y), \quad t_2 = G(x, y).$$

Von der zweifachen Mannigfaltigkeit K wird vorausgesetzt, dass sie durch eine in sich zurückkehrende einfache Mannigfaltigkeit begrenzt sei, und durch jede von einem Werthsystem der Begrenzung nach einem andern geführte, kein Werthsystem doppelt enthaltende einfache Mannigfaltigkeit in zwei vollkommen getrennte Theile zerfalle. Eine solche zweifache Mannigfaltigkeit nennt man nach dem Sprachgebrauche von *Riemanns* Inauguraldissertation*) *eine einfach zusammenhängende.* In der geometrischen Deutung gehört zu einer derartigen Mannigfaltigkeit ein Stück einer Ebene, welches die correspondirende Beschaffenheit hat, und von dem die Bezeichnung, es sei *einfach zusammenhängend,* zuerst gebraucht worden ist. Ein Beispiel bietet das Stück einer Ebene, welches durch eine Kreislinie eingeschlossen wird. Dagegen erfüllt ein Stück einer Ebene, das von zwei ganzen Kreislinien vollständig begrenzt wird, die ausgesprochene Forderung nicht; durch eine von einem Punkte der einen nach einem Punkte der anderen Kreisperipherie geführte Schnittlinie wird dasselbe nicht in zwei getrennte Theile zerlegt, sondern in ein einfach zusammenhängendes Stück der Ebene verwandelt; insofern heisst das ursprünglich gegebene Stück ein zweifach zusammenhängendes. Für die obigen Functionen F und G nehmen wir an, dass, wenn in K die Function F einen Werth c_1, G einen Werth c_2 erhalten kann, zu der Gleichung $F = c_1$ eine von einem Werthsystem der Begrenzung von K bis zu einem anderen laufende, kein Werthsystem doppelt enthaltende einfache Mannigfaltigkeit gehöre, durch welche K in zwei Theile zerfällt, die beziehungsweise den Ungleichheiten $F > c_1$ und $F < c_1$ entsprechen, und dass in Bezug auf die Gleichung $G = c_2$ und die zugeordneten Ungleichheiten ein gleiches gelte. Wenn dann die Functionaldeterminante

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = \mathfrak{D}$$

überall in K dasselbe, etwa das positive Vorzeichen behält, das heisst, algebraisch grösser bleibt als eine gegebene positive Constante, so können zwei mit festen Werthen c_1 und c_2 gebildete Gleichungen

(3) $$F(x, y) = c_1,\ G(x, y) = c_2$$

---

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

weder für eine stetige Mannigfaltigkeit von Werthsystemen noch für mehrere getrennte Werthsysteme x, y befriedigt werden.

Sollte das erste der Fall sein, so müssten für die betreffende stetige Mannigfaltigkeit die Differentiale dF und dG gleichzeitig verschwinden; hieraus würde aber, wie aus I, § 75 hervorgeht, mit Nothwendigkeit das Verschwinden der Functionaldeterminante folgen, was nach der Voraussetzung unzulässig ist. Um den zweiten Theil der Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, dass ein Werthsystem $x(0), y(0)$ den Gleichungen (3) genüge. Gesetzt, ausser diesem genügten noch eines oder mehrere getrennte Werthsysteme, so giebt es bei den gemachten Voraussetzungen wenigstens ein zweites $x(1), y(1)$ von der Art, dass ein Theil T der Mannigfaltigkeit K nur von dem Theile der einfachen Mannigfaltigkeit $F = c_1$, welcher sich von $(x(0), y(0))$ nach $(x(1), y(1))$ erstreckt, und von dem Theile der Mannigfaltigkeit $G = c_1$, begrenzt ist, der von $(x(1), y(1))$ nach $(x(0), y(0))$ zurückläuft. Ueber diese Mannigfaltigkeit T werde das Integral

$$(4) \qquad \iint \mathfrak{D}\, dx\, dy$$

ausgedehnt. Weil nach der Voraussetzung $\mathfrak{D}$ überall in T einen positiven über einer gegebenen Constante liegenden Werth hat und das Element $dx\, dy$ des doppelten Integrals stets positiv ist, so wird der Werth von (4) vermöge seiner Definition verkleinert, sobald man $\mathfrak{D}$ durch die erwähnte positive Constante ersetzt, und muss daher stets eine gewisse positive Grösse übertreffen. Auf das Integral (4) darf aber auch das Verfahren angewendet werden, welches in § 98 gebraucht ist, und vermöge dessen (4) in das dort mit (7) bezeichnete auf die Begrenzung von T auszudehnende Integral

$$(5) \qquad \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} G \varrho\, dx + \frac{\partial F}{\partial y} G \sigma\, dy \right)$$

übergeht. Die Vorzeichen ϱ und σ bestimmen den Sinn, in welchem die Begrenzung von T durchlaufen werden muss. Man findet jedoch, dass die Theile des Integrals, welche von den bezeichneten zwei Theilen der Begrenzung herrühren, für sich verschwinden, möge jeder einzelne Theil in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden. In dem Theile der Begrenzung, welcher ein Theil der Mannigfaltigkeit $F=c_1$ ist, hat der unter dem Integralzeichen mit G multiplicirte Ausdruck $\frac{\partial F}{\partial x}\varrho\, dx+\frac{\partial F}{\partial y}\sigma\, dy$, welcher das zugehörige Increment oder vollständige Differential der Function F darstellt, den Werth Null; daher verschwindet der zugehörige Theil des Integrals (5). In dem zweiten Theile der Begrenzung, welcher ein Theil der Mannigfaltigkeit $G=c_2$ ist, hat der Factor G den constanten Werth c_2; gleichzeitig bringt die Integration des vollständigen Differentials $\frac{\partial F}{\partial x}\varrho\, dx+\frac{\partial F}{\partial y}\sigma\, dy$, je nachdem von dem Werthsystem $x(0), y(0)$ zu dem Werthsystem $x(1), y(1)$ oder umgekehrt fortgeschritten wird, den positiv oder negativ genommenen Unterschied der Functionswerthe

$$F(x(1), y(1)) - F(x(0), y(0))$$

hervor, welcher nach der Voraussetzung verschwindet. Mithin bekommt das Integral (5) den Werth Null; da nun, wie vorhin gezeigt worden, das mit (5) gleiche Integral (4) keinesfalls einen verschwindenden Werth annehmen kann, so treibt die Annahme, dass die Gleichungen (3) durch mehrere getrennte Werthsysteme erfüllt werden können, zu einem Widerspruch, und ist deshalb zu verwerfen, wie behauptet worden war.

Eine ähnliche Untersuchung wird jetzt für ein System von drei Functionen geführt werden; für Systeme von beliebig vielen Functionen ist eine solche in der in § 99 erwähnten Abhandlung mitgetheilt. Wir denken uns die Variabeln t_1, t_2, t_3 als eindeutige, stetige und beliebig zu differentiirende Functionen der Variabeln x, y, z für eine dreifache Mannigfaltigkeit K,

(6) $$t_1=F(x,y,z),\ t_2=G(x,y,z),\ t_3=H(x,y,z).$$

Die Mannigfaltigkeit K werde durch eine geschlossene zweifache Mannigfaltigkeit begrenzt; nimmt man in der letztern eine in sich zurückkehrende einfache Mannigfaltigkeit an und führt durch diese eine kein Werthsystem doppelt enthaltende zweifache Mannigfaltigkeit, so zerfalle K durch die letztere in zwei vollkommen getrennte Theile. Hiernach heisst K eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Falls in K die Function F einen Werth c_1, G einen Werth c_2, H einen Werth c_3 anzunehmen fähig ist, soll K durch die Mannigfaltigkeit $F=c_1$ in zwei getrennte Stücke $F > c_1$ und $F < c_1$ zerfallen, desgleichen durch die Mannigfaltigkeit $G = c_2$ und $H = c_3$. Ferner dürfen die zweifachen Mannigfaltigkeiten $F = c_1$, $G = c_2$, $H = c_3$, deren jede einfach zusammenhängend ist, nach dem in § 99 festgestellten Sprachgebrauche keinerlei Singularitäten enthalten. Nachdem eine derselben, etwa $F = c_1$ ausgewählt ist, wird in derselben sowohl durch $G = c_2$, wie auch durch $H = c_3$ eine einfache Mannigfaltigkeit bestimmt, die sich von einem Werthsystem der Begrenzung bis zu einem anderen erstreckt, ohne ein Werthsystem doppelt zu enthalten. Unter der Voraussetzung, dass ausserdem die Functionaldeterminante

(7) $$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial z} = \mathfrak{D}$$

nirgendwo in K ihr Vorzeichen ändere, dass heisst, indem dieselbe wieder positiv angenommen wird, eine gegebene positive Constante stets übertreffe, ist es dann unmöglich, dass drei mit festen Werthen c_1, c_2, c_3 gebildete Gleichungen

(8) $$F(x,y,z) = c_1, \quad G(x,y,z) = c_2, \quad H(x,y,z) = c_3$$

durch eine stetige Mannigfaltigkeit von Werthsystemen oder von mehreren getrennten Werthsystemen x, y, z befriedigt werden.

Aus dem Auftreten von Werthsystemen (x, y, z), welche den Gleichungen (8) genügen und eine stetige Mannigfaltigkeit der ersten oder zweiten Ordnung bilden, würde, wie vorhin, das gleichzeitige Verschwinden der Differentiale dF, dG, dH und daher auch das Verschwinden der Functionaldeterminante zu schliessen sein; daher bleibt nur der zweite Theil der Behauptung zu begründen. Wir betrachten zu diesem Zweck die nach der Voraussetzung einfach zusammenhängende zweifache Mannigfaltigkeit $F = c_1$, welche durch die vermöge der Gleichung $G = c_2$ dargestellte einfache Mannigfaltigkeit in die getrennten Stücke $G > c_2$ und $G < c_2$, desgleichen durch die vermöge der Gleichung $H = c_3$ dargestellte einfache Mannigfaltigkeit in die getrennten Stücke $H > c_3$ und $H < c_3$ zerfällt. Wofern den Gleichungen (8) ausser einem Werthsystem $(x(0), y(0), z(0))$ noch eines oder mehrere andere getrennte genügen, so kann man mit Hülfe eines zweiten dieser Werthsysteme $(x(1), y(1), z(1))$ einen Theil T der zweifachen Mannigfaltigkeit $F = c_1$ bestimmen, dessen Begrenzung aus zwei einfachen Mannigfaltigkeiten besteht, deren erste, die Gleichung $G = c_2$ erfüllend, von dem Werthsysteme $(x(0), y(0), z(0))$ bis zu dem Werthsystem $(x(1), y(1), z(1))$ vorwärts, und deren zweite, die Gleichung $H = c_3$ befriedigend, von $(x(1), y(1), z(1))$ nach $(x(0), y(0), z(0))$ zurück schreitet. Nunmehr wird eine Umformung eines doppelten Integrals in ein einfaches Integral benutzt, welche in (23*) des § 99 ausgedrückt ist. Man ersetzt die dortigen Functionen P, Q, R durch die Ausdrücke

$$(9) \qquad P = \frac{\partial G}{\partial x} H, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial y} H, \quad R = \frac{\partial G}{\partial z} H,$$

so dass sich die drei vorkommenden Differenzen von partiellen Differentialquotienten, wie folgt, umwandeln

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial H}{\partial z} - \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial H}{\partial y} = B_1, \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial H}{\partial x} - \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial z} = B_2, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial H}{\partial x} = B_3, \end{cases}$$

und integrirt über die in $F = c_1$ enthaltene zweifache Mannigfaltigkeit T. In Folge dessen richten sich die dort gebrauchten Einheiten η_1, η_2, η_3 respective wieder nach den Vorzeichen der Grössen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, und es entsteht aus dem erwähnten doppelten Integral das folgende

$$(11) \qquad \iint B_1 \eta_1 \, dy \, dz + \iint B_2 \eta_2 \, dz \, dx + \iint B_3 \eta_3 \, dx \, dy.$$

Vermittelst der Ausdrücke B_1, B_2, B_3 nimmt die Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ die Gestalt an

$$(12) \qquad B_1 \frac{\partial F}{\partial x} + B_2 \frac{\partial F}{\partial y} + B_3 \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Weil es nun nach § 99 erlaubt ist, bei der Ausführung einer über die Mannigfaltigkeit T auszudehnenden Integration jedes der drei Elemente

$$\frac{\eta_1 \, dy \, dz}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\eta_2 \, dz \, dy}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\eta_3 \, dx \, dy}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

durch ein beliebiges derselben zu ersetzen, so darf man statt (11) den Ausdruck

$$(13) \qquad \iint \frac{\mathfrak{D}\,\eta_1\,dy\,dz}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

substituiren. Hier ist der Werth der Functionaldeterminante $\mathfrak{D}$ nach der Voraussetzung überall positiv und grösser als eine gegebene Constante, das Vorzeichen von η_1 gleich demjenigen des Nenners $\frac{\partial F}{\partial x}$, das Element $dy\,dz$ immer positiv, so dass das Integral (13) nothwendig einen über einer festen Grösse liegenden Werth haben muss. Durch die Bestimmungen (9) wird dagegen das Integral (23) des § 99 zu dem Integral

$$(14) \qquad \int\left(\frac{\partial G}{\partial x} H\varrho\,dx + \frac{\partial G}{\partial y} H\sigma\,dy + \frac{\partial G}{\partial z} H\tau\,dz\right),$$

welches in dem durch die Vorzeichen ϱ, σ, τ angegebenen Sinne über die Begrenzung von T zu erstrecken ist. Auch hier ergiebt sich, dass die Theile des Integrals, welche den vorhin bezeichneten zwei Theilen der Begrenzung entsprechen, für sich verschwinden, wie immer jeder einzelne Theil durchlaufen werde. Der unter dem Integralzeichen mit H multiplicirte Ausdruck des vollständigen Differentials von G

$$\frac{\partial G}{\partial x}\varrho\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\sigma\,dy + \frac{\partial G}{\partial z}\tau\,dz$$

ist in dem in der einfachen Mannigfaltigkeit $F = c_1$, $G = c_2$ enthaltenen Theile der Begrenzung überall gleich Null, und zerstört dadurch den zugehörigen Theil des Integrals. Für den zweiten Theil der Begrenzung, welcher zu der einfachen Mannigfaltigkeit $F = c_1$, $H = c_3$ gehört, wird der Factor H gleich der eben genannten Constante; ferner liefert die Integration des vollständigen Differentials von G, je nachdem das Werthsystem x, y, z von $x(0), y(0), z(0)$ nach $x(1), y(1), z(1)$ oder umgekehrt fortrückt, den positiv oder negativ genommenen Unterschied der Functionswerthe $G(x(1), y(1), z(1)) - G(x(0), y(0), z(0))$, der nach der Voraussetzung gleich Null ist. Es verschwindet deshalb der ganze Werth von (14). Demnach schliesst die Gleichheit zwischen den Integralen (13) und (14) einen Widerspruch in sich, und die zugehörige Voraussetzung, dass die Gleichungen (8) durch mehrerere getrennte Werthsysteme x, y, z befriedigt werden, zeigt sich, wie zu erweisen war, als unstatthaft. Also kennen wir jetzt allgemeine Bedingungen, unter denen bei dem System (1) zu gegebenen Werthen $t_1 = c_1$ und $t_2 = c_2$ nur ein einziges System x, y, bei dem System (6) zu gegebenen Werthen $t_1 = c_1$, $t_2 = c_2$, $t_3 = c_3$ nur ein einziges System x, y, z gehören kann. Unter diesen Bedingungen hat das Problem der Umkehrung eines Systems von Functionen, wofern es lösbar ist, eine eindeutig bestimmte Lösung.

§ 103. Reduction der Umkehrung auf die Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Unter den im vorigen § entwickelten Voraussetzungen lässt sich die Umkehrungsaufgabe folgendermassen ausdrücken. Auf Grund der dortigen Gleichungen (1) möge zu einem gegebenen System von Werthen der Variabeln $x = x(0)$, $y = y(0)$ das System von Werthen $t_1 = t_1(0)$, $t_2 = t_2(0)$ gehören, dann werden die Werthe $t_1 = t_1(1)$, $t_2 = t_2(1)$ verlangt, welche dem System von Werthen $x = x(1)$, $y = y(1)$ entsprechen. Während also die Gleichungen

$$(1) \qquad t_1(0) = F(x(0), y(0)), \quad t_2(0) = G(x(0), y(0))$$

gegeben sind, sucht man die Auflösung der Gleichungen

$$(2) \qquad t_1(1) = F(x(1), y(1)), \quad t_2(1) = G(x(1), y(1)).$$

Diese Aufgabe ersetzen wir durch zwei nach einander zu befriedigende Forderungen. Zuerst soll diejenige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung der Variabeln x, y bestimmt werden, welche, von dem Werthsystem $x(0)$, $y(0)$ ausgehend, den Gleichungen

$$(3) \qquad t_1(0) = F(x, y), \quad t_2 = G(x, y)$$

genügt, und bei der t_2 die Werthe von $t_2(0)$ bis $t_2(1)$ stetig durchläuft. Wegen des constanten Werthes $t_1(0)$ muss hier das vollständige Differential $dF(x, y)$ gleich Null sein, so dass aus (3) die Gleichungen

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy &= dt_2 \end{aligned} \right.$$

folgen. Nach denselben hängen x und y von der Variable t_2 ab, und es entstehen für die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt_2}$, $\frac{dy}{dt_2}$, indem

(5) $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}=\mathfrak{D}^{(2)}$$

gesetzt wird, die Ausdrücke

(6) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt_2}=\dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(2)}} \\ \dfrac{dy}{dt_2}=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(2)}}. \end{cases}$$

Diese sind eindeutig bestimmt, weil die Functionaldeterminante $\mathfrak{D}^{(2)}$ vermöge der geltenden Voraussetzung für die betreffende Mannigfaltigkeit der Variabeln x, y nicht verschwinden darf. Es bilden daher die Gleichungen (6) ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das nach § 84 unter den dort mitgetheilten Bedingungen so integrirt werden kann, dass für den Werth der unabhängigen Variable $t_2=t_2(0)$ die Variabeln x und y die vorgeschriebenen Werthe $x=x(0)$, $y=y(0)$ annehmen. Nach § 87 werden hierdurch x und y für die auf einander folgenden Werthe von t_2 eindeutig bestimmt, wobei zu $t_2=t_2(1)$ die Werthe

(7) $$x=x_2(1),\quad y=y_2(1)$$

gehören mögen. Jetzt fragt man zweitens nach derjenigen Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die von dem Werthsystem (7) ausgehend, die Gleichungen

(8) $$t_1=F(x,y),\quad t_2(1)=G(x,y)$$

befriedigt, und bei der t_1 die Werthe von $t_1(0)$ bis $t_1(1)$ durchläuft. Wie (4) aus (3) folgen aus (8) die Gleichungen

(9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy=dt_1 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}dx+\dfrac{\partial G}{\partial y}dy=0, \end{cases}$$

die zu dem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

(10) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt_1}=\dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(2)}} \\ \dfrac{dy}{dt_1}=\dfrac{-\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(2)}} \end{cases}$$

führen. Dasselbe ist in der Weise zu integriren, dass dem Werthe $t_1 = t_1(0)$ die Werthe (7) von x und y correspondiren; hierdurch werden x und y als eindeutige Functionen von t_1 bestimmt und erhalten für $t_1 = t_1(1)$ die gesuchten, den Gleichungen (2) genügenden Werthe

$$x = x(1), \quad y = y(1). \tag{11}$$

Bei dem eingeschlagenen Verfahren wurde zuerst in (3) der Variable t_1 der constante Werth $t_1(0)$, hierauf in (9) der Variable t_2 der constante Werth $t_2(1)$ vorgeschrieben. Eben sowohl könnte man umgekehrt zu Anfang den Werth $t_2(0)$ von t_2 und dann den Werth $t_1(1)$ von t_1 verlangen, und würde das gewünschte Ziel durch die Aufsuchung von zwei anderen Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung erreichen. Weil aber nach den Ausführungen des vorigen § zu dem Werthsystem $t_1 = t_1(1)$, $t_2 = t_2(1)$ nur ein einziges Werthsystem x, y gehören kann, so müssen die auf den verschiedenen Wegen gefundenen Bestimmungen zusammenfallen.

Eine entsprechende Behandlung erlaubt die zu dem System (6) des vorigen § gehörende Aufgabe, unter Annahme der Gleichungen

$$t_1(0) = F(x(0), y(0), z(0)), \quad t_2(0) = G(x(0), y(0), z(0)),$$
$$t_3 = H(x(0), y(0), z(0)) \tag{12}$$

die Gleichungen

$$t_1(1) = F(x(1), y(1), z(1)), \quad t_2(1) = G(x(1), y(1), z(1)),$$
$$t_3(1) = H(x(1), y(1), z(1)) \tag{13}$$

aufzulösen. Man bestimmt nach einander drei Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, von denen die erste den Gleichungen

$$t_1(0) = F(x, y, z), \quad t_2(0) = G(x, y, z), \quad t_3 = H(x, y, z) \tag{14}$$

von $t_3 = t_3(0)$ bis $t_3 = t_3(1)$, die zweite den Gleichungen

$$t_1(0) = F(x, y, z), \quad t_2 = G(x, y, z), \quad t_3(0) = H(x, y, z) \tag{15}$$

von $t_2 = t_2(0)$ bis $t_2 = t_2(1)$, die dritte den Gleichungen

$$t_1 = F(x, y, z), \quad t_2(1) = G(x, y, z), \quad t_3(1) = H(x, y, z) \tag{16}$$

von $t_1 = t_1(0)$ bis $t_1 = t_1(1)$ genügt. Aus (14) folgen die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \\ &\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz = 0 \\ &\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz = dt_3, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

deren Auflösung, sobald für die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial G}{\partial y}\,\frac{\partial H}{\partial z}$$

das Zeichen $\mathfrak{D}^{(3)}$ gebraucht wird, das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt_3} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial G}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt_3} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial G}{\partial z}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt_3} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial G}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \end{cases}$$

hervorbringt. Ebenso entsteht aus (15) das System von Differentialgleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt_2} = \dfrac{\frac{\partial H}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\,\frac{\partial F}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt_2} = \dfrac{\frac{\partial H}{\partial z}\,\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial z}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt_2} = \dfrac{\frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(3)}}, \end{cases}$$

aus (16) das System von Differentialgleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt_1} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial y}\,\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z}\,\frac{\partial H}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt_1} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial z}\,\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}\,\frac{\partial H}{\partial z}}{\mathfrak{D}^{(3)}} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt_1} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\,\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y}\,\frac{\partial H}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(3)}}. \end{cases}$$

Wegen des unveränderlichen Vorzeichens der Functionaldeterminante $\mathfrak{D}^{(3)}$ sind die Ausdrücke rechts in den drei Systemen eindeutig bestimmt. Bei dem System (18) gelten für $t = t_3(0)$

die Gleichungen $x = x(0)$, $y = y(0)$, $z = z(0)$, und werden für $t = t_3(1)$ die Werthe $x = x_3(1)$, $y = y_3(1)$, $z = z_3(1)$ bestimmt; bei dem System (19) bilden die letztern das zu $t_2 = t_2(0)$ gehörende Anfangssystem, und werden für $t_2 = t_2(1)$ die Werthe $x = x_2(1)$, $y = y_2(1)$, $z = z_2(1)$ gefunden; bei dem System (20) machen diese das mit $t_1 = t_1(0)$ correspondirende Anfangssystem aus, während die zu $t_1 = t_1(1)$ gehörenden Werthe die gesuchten $x = x(1)$, $y = y(1)$, $z = z(1)$ sind. Auch hier gilt wieder die Bemerkung, dass für eine andere Reihenfolge der Combinationen von je zwei Functionen, die nach einander constant gesetzt werden, eine andere Reihenfolge von Integrationen auszuführen ist, dass aber aus den im vorigen § erörterten Gründen das System von Werthen $x(1)$, $y(1)$, $z(1)$ nur ein einziges sein kann und daher nur eine einzige Bestimmung zulässt. Hiermit ist die eindeutige Umkehrung eines Systems von zwei und von drei Functionen vermittelst der Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vollendet.

§ 104. Verwandlung der Coordinaten. Beziehung zwischen zwei Ebenen, und zwischen zwei Räumen. Allgemeine Umformung des Ausdrucks für das Quadrat eines Linienelements.

Die Kenntniss der Bedingungen, unter denen ein System zweier Functionen von zwei Variabeln, und dreier Functionen von drei Variabeln eindeutig umkehrbar ist, gehört dazu, um bei der Ortsbestimmung eines Punktes das Uebergehen von rechtwinkligen zu beliebigen Coordinaten vollständig zu begründen; dieser Process wurde in § 92 für die Ebene, in § 95 für den Raum auseinandergesetzt. Denken wir uns unter x, y rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der Ebene, unter x, y, z ebensolche Coordinaten im Raume, so werden durch die eindeutige Umkehrung der Gleichungen

(1) $$t_1 = F(x, y), \quad t_2 = G(x, y)$$

die Variabeln x und y als eindeutige Functionen der neuen Variabeln oder Coordinaten t_1 und t_2, durch die eindeutige Umkehrung der Gleichungen

(2) $$t_1 = F(x, y, z), \quad t_2 = G(x, y, z), \quad t_3 = H(x, y, z)$$

die Variabeln x, y, z als eindeutige Functionen der neuen Variabeln oder Coordinaten t_1, t_2, t_3 bestimmt. Es treten daher im ersten Falle t_1 und t_2 an die Stelle der Grössen, welche in § 92 mit ξ und η, im zweiten Falle t_1, t_2, t_3 an die Stelle von denjenigen, welche in § 95 mit ξ, η, ζ bezeichnet sind; die eindeutige Umkehrbarkeit der in Rede stehenden Systeme von Gleichungen bedeutet aber nichts anderes, als dass einem System von Werthen t_1, t_2 ein einziger Punkt der Ebene, einem System von Werthen t_1, t_2, t_3 ein einziger Punkt des Raumes entspricht, was für den Gebrauch des betreffenden Coordinatensystems unerlässlich ist.

An dieser Stelle möge auch eine andere geometrische Betrachtungsweise erwähnt werden, die ihren Ausdruck in den Systemen (1) und (2) findet. Wenn man sich zwei verschiedene Ebenen vorstellt und annimmt, dass die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der einen Ebene mit x, y, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der anderen Ebene mit t_1, t_2 benannt werden, so kann durch die Gleichungen (1) für einen beliebigen Punkt (x, y) der ersten Ebene ein zugeordneter Punkt (t_1, t_2) der zweiten bestimmt werden; dann giebt die eindeutige Umkehrung des Systems (1) das Gesetz an, nach welchem zu einem beliebigen Punkte (t_1, t_2) der zweiten Ebene der Punkt (x, y) der ersten eindeutig zugeordnet ist. In gleicher Weise darf man zwei Räume betrachten, einen beliebigen Punkt des ersten durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, einen beliebigen Punkt des zweiten durch die rechtwinkligen Coordinaten t_1, t_2, t_3 bezeichnen, und einem beliebigen Punkte (x, y, z) des ersten Raumes einen bestimmten Punkt (t_1, t_2, t_3) des zweiten durch die Gleichungen (2) zuordnen. Alsdann wird durch die eindeutige Umkehrung des Systems (2) festgestellt, dass zu einem beliebigen Punkte (t_1, t_2, t_3) des zweiten Raumes der eindeutig bestimmte Punkt (x, y, z) des ersten Raumes gehört. Ein grosser Vorzug des Processes, durch welchen eine Ebene auf eine zweite, und ein Raum auf einen zweiten Raum bezogen wird, liegt darin, dass die Mannigfaltigkeit der ursprünglichen und die Mannigfaltigkeit der neuen Variabeln durch ein gleichberechtigtes räumliches Gebilde vorgestellt wird, und dass daher die Begrenzung von beiden Mannigfaltigkeiten zur Anschauung kommt. Wie folgenreich dieses Verfahren sei, wird der zweite Abschnitt zeigen.

In § 62 ist bei der Messung der Länge einer Linie hervorgehoben, dass das Element einer Linie im Raume durch die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Linie dargestellt wird. Hiernach hat das Quadrat des Elements einer Linie im Raume zu seinem Ausdruck die Quadratsumme der Differentiale der drei Coordinaten x, y, z

$$dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3}$$

Sobald die Linie in derselben Ebene liegt, und für diese die xy Ebene gewählt wird, so vereinfacht sich das Quadrat des Elements durch Verschwinden des Differentials dz, und wird gleich der Quadratsumme der Differentiale der zwei Coordinaten

$$dx^2 + dy^2. \tag{4}$$

Indem nun bei (4) die Variabeln x und y als Functionen der beliebigen Coordinaten t_1 und t_2, bei (3) die Variabeln x, y, z als Functionen der beliebigen Coordinaten t_1, t_2, t_3 aufgefasst werden, lässt sich die Aufgabe bilden, das Quadrat des Linienelements in der Ebene (4) durch die beliebigen Coordinaten t_1 und t_2, das Quadrat des Linienelements im Raume (5) durch die beliebigen Coordinaten t_1, t_2, t_3 auszudrücken. In der zweiten Aufgabe ist die erstere als specieller Fall enthalten. Die zweite besitzt die ausgezeichnete Eigenschaft, dass sich in ihrer Lösung alle geometrischen Begriffe vereinigen, die im Laufe der gegenwärtigen Darstellung zur Sprache gebracht sind.

Aus der gegebenen Abhängigkeit der Variabeln x, y, z von t_1, t_2, t_3 folgen die Ausdrücke der vollständigen Differentiale

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} dt_3 \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial y}{\partial t_3} dt_3 \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial z}{\partial t_3} dt_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Vermöge der Bezeichnungen

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}\right)^2=a_{11}\\
&\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial y}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2}+\frac{\partial z}{\partial t_1}\frac{\partial z}{\partial t_2}=a_{12}=a_{21}\\
&\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial x}{\partial t_3}+\frac{\partial y}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_3}+\frac{\partial z}{\partial t_1}\frac{\partial z}{\partial t_3}=a_{13}=a_{31}\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial t_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t_2}\right)^2=a_{22}\\
&\frac{\partial x}{\partial t_2}\frac{\partial x}{\partial t_3}+\frac{\partial y}{\partial t_2}\frac{\partial y}{\partial t_3}+\frac{\partial z}{\partial t_2}\frac{\partial z}{\partial t_3}=a_{23}=a_{32}\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial t_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t_3}\right)^2=a_{33}
\end{aligned}
\right.
$$

verwandelt sich dann die Quadratsumme (3) in die wesentlich positive homogene Function des zweiten Grades oder quadratische Form der drei Differentiale dt_1, dt_2, dt_3

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&a_{11}\,dt_1^2+a_{22}\,dt_2^2+a_{33}\,dt_3^2\\
&+2a_{23}\,dt_2\,dt_3+2a_{31}\,dt_3\,dt_1+2a_{12}\,dt_1\,dt_2,
\end{aligned}
$$

deren Coefficienten durch die Gleichungen (6) als Functionen der Variabeln t_1, t_2, t_3 bestimmt sind. *Demnach wird das Quadrat des Elements einer Linie im Raume, wofern ein beliebiger Punkt durch die Coordinaten t_1, t_2, t_3 bezeichnet ist, mittelst der quadratischen Form* (7) *dargestellt.* Für den oben erwähnten besonderen Fall, dass das Linienelement in derselben und zwar der xy Ebene enthalten ist, treten an die Stelle von (5) die Ausdrücke

$$
(5_a)\quad
\begin{aligned}
dx&=\frac{\partial x}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x}{\partial t_2}dt_2\\
dy&=\frac{\partial y}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial y}{\partial t_2}dt_2,
\end{aligned}
$$

so dass nach Einführung der Bezeichnungen

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)^2=e_{11},\ \left(\frac{\partial x}{\partial t_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)^2=e_{22}\\
&\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial y}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2}=e_{12}=e_{21},
\end{aligned}
\right.
$$

die Quadratsumme (4) in die wesentlich positive quadratische Form der zwei Differentiale dt_1, dt_2

$$
(9)\quad e_{11}\,dt_1^2+2e_{12}\,dt_1\,dt_2+e_{22}\,dt_2^2
$$

übergeht.

Bei den vorhandenen Notationen fallen die obigen Gleichungen (5_a) mit (4) des § 92, die obigen Gleichungen (5) mit (3) des § 95 zusammen, und es knüpft die geometrische Betrachtung unmittelbar an die genannten §§ an. Nach (5_a) geht von dem Punkte (x, y) eine erste Linie aus, für welche t_2 constant, und eine zweite Linie, für welche t_1 constant ist; desgleichen erstreckt sich vermöge (5) von dem Punkte (x, y, z) eine erste Linie, für die nur t_1, eine zweite Linie, für die nur t_2, eine dritte Linie, für die nur t_3 geändert wird, die anderen beiden Variabeln aber constant bleiben. Wenn nun wieder wie in § 92 und § 95 zur Bezeichnung eines Punktes durch die neuen Variabeln eckige Klammern angewendet, den neuen Variabeln aber beliebige Differentiale zugefügt werden, so darf man sagen, *dass bei* (5_a) *das Quadrat des Abstandes eines Punktes* $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2]$ *von dem Punkte* $[t_1, t_2]$ *durch den Ausdruck* (9), *bei* (5) *das Quadrat des Abstandes eines Punktes* $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2, t_3 + dt_3]$ *von dem Punkte* $[t_1, t_2, t_3]$ *durch den Ausdruck* (7) *gemessen wird.* Mithin folgen aus (5_a) für die relativen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $[t_1 + dt_1, t_2]$ in Bezug auf $[t_1, t_2]$ die Werthe

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1,$$

für die relativen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $[t_1, t_2 + dt_2]$ in Bezug auf $[t_1, t_2]$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2.$$

Man findet deshalb für das Quadrat des Abstandes zwischen den Punkten $[t_1 + dt_1, t_2]$ und $[t_1, t_2]$ den Werth $e_{11}\, dt_1^2$, für das Quadrat des Abstandes zwischen den Punkten $[t_1, t_2 + dt_2]$ und $[t_1, t_2]$ den Werth $e_{22}\, dt_2^2$. Wenn ferner dt_1 und dt_2 positiv sind, so erhält der Cosinus des Winkels ω zwischen der von $[t_1, t_2]$ nach $[t_1 + dt_1, t_2]$ gezogenen ersten und der von $[t_1, t_2]$ nach $[t_1, t_2 + dt_2]$ gezogenen zweiten Linie die Bestimmung

$$(10) \qquad \sqrt{e_{11}}\,\sqrt{e_{22}}\cos\omega = e_{12}.$$

In gleicher Weise liefern die Gleichungen (9) für die relativen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $[t_1 + dt_1, t_2, t_3]$ in Bezug auf $[t_1, t_2, t_3]$ die Werthe

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial t_1} dt_1,$$

aus denen die relativen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $[t_1, t_2 + dt_2, t_3]$ und des Punktes $[t_1, t_2, t_3 + dt_3]$ in Bezug auf $[t_1, t_2, t_3]$ durch Einsetzung der Zeiger 2 und 3 hervorgehen. Demnach bekommt das Quadrat des Abstandes zwischen den Punkten $[t_1 + dt_1, t_2, t_3]$ und $[t_1, t_2, t_3]$, $[t_1, t_2 + dt_2, t_3]$ und $[t_1, t_2, t_3]$, $[t_1, t_2, t_3 + dt_3]$ und $[t_1, t_2, t_3]$ beziehungsweise den Werth $a_{11}\, dt_1^2$, $a_{22}\, dt_2^2$, $a_{33}\, dt_3^2$, und es bestimmen sich bei positiven Werthen dt_1, dt_2, dt_3 die Cosinus der Winkel ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, welche von je zwei gleichnamigen unter den drei von dem Punkte $[t_1, t_2, t_3]$ nach $[t_1 + dt_1, t_2, t_3]$, $[t_1, t_2 + dt_2, t_3]$, $[t_1, t_2, t_3 + dt_3]$ gezogenen Linien gebildet werden, vermöge der Gleichung (4) in I, § 86 folgendermassen

(11) $$\sqrt{a_{22}}\,\sqrt{a_{33}} \cos \omega_{23} = a_{23}, \quad \sqrt{a_{33}}\,\sqrt{a_{11}} \cos \omega_{31} = a_{31}, \quad \sqrt{a_{11}}\,\sqrt{a_{22}} \cos \omega_{12} = a_{12}.$$

Auf diese Weise leuchtet ein, dass die Darstellung des Quadrates des Abstandes eines Punktes $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2]$ von dem Punkte $[t_1, t_2]$ durch die quadratische Form (9) mit der in I, § 80 entwickelten geometrischen Interpretation einer quadratischen Form von zwei Variabeln, und die Darstellung des Quadrates des Abstandes eines Punktes $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2, t_3 + dt_3]$ von dem Punkte $[t_1, t_2, t_3]$ durch die quadratische Form (7) mit der in I, § 85 mitgetheilten Interpretation einer quadratischen Form von drei Variabeln übereinstimmt, wobei an die Stelle der Variabeln der Form respective die Differentiale dt_1, dt_2 und dt_1, dt_2, dt_3 treten. Es finden daher alle in den erwähnten §§ angestellten Betrachtungen in dem höheren Gebiete, zu dem wir jetzt gelangt sind, ihre Anwendung. Nach (4) in I, § 80 wird der Flächeninhalt des Parallelogramms, dessen Ecken die Punkte

$$[t_1, t_2], \; [t_1 + dt_1, t_2], \; [t_1, t_2 + dt_2], \; [t_1 + dt_1, t_2 + dt_2]$$

sind, vermittelst der nothwendig positiven Determinante der Form (9) so ausgedrückt

(12) $$dt_1\, dt_2 \sqrt{e_{11}\, e_{22} - e_{12}^2},$$

wo die Quadratwurzelgrösse wie auch im Folgenden positiv zu verstehen ist. Bezeichnet man ferner bei der Form (7) die adjungirten Elemente und die Determinante, wie in I, § 85,

$$(13)\quad \begin{cases} A_{11}=a_{22}\,a_{33}-a_{23}^2,\ A_{23}=a_{12}\,a_{13}-a_{11}\,a_{23},\ldots \\ D\ =a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}^2-a_{22}\,a_{31}^2-a_{33}\,a_{12}^2+2\,a_{23}\,a_{31}\,a_{12}, \end{cases}$$

so folgt aus I, § 85, dass für das Parallelepipedon, dessen eine Ecke der Punkt $[t_1, t_2, t_3]$ bildet, und dessen von hier ausgehende drei Kanten nach den drei Punkten

$$[t_1+dt_1, t_2, t_3],\ [t_1, t_2+dt_2, t_3],\ [t_1, t_2, t_3+dt_3]$$

gerichtet sind, der Rauminhalt gleich der Verbindung

$$(14)\qquad dt_1\,dt_2\,dt_3\,\sqrt{D}$$

ist. Ausserdem ist der Inhalt der parallelogrammatischen Seitenfläche, die von der zweiten und dritten, dritten und ersten, ersten und zweiten Linie begrenzt wird, gleich der entsprechenden unter den Verbindungen

$$(15)\qquad dt_2\,dt_3\sqrt{A_{11}},\ dt_3\,dt_1\sqrt{A_{22}},\ dt_1\,dt_2\sqrt{A_{33}}.$$

Ehe diese Resultate benutzt werden, ist noch eine Bemerkung über den Ursprung der Formen (7) und (9) zu machen. Bei der Einführung von beliebigen Coordinaten statt der rechtwinkligen wurde in § 92 für die Ebene vorausgesetzt, dass die dortige Determinante (6), und in § 95 für den Raum, dass die betreffende Determinante (4) einen von Null verschiedenen Werth habe. In den gegenwärtigen Bezeichnungen heisst das, dass die Determinante

$$(16)\qquad \frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2}-\frac{\partial x}{\partial t_2}\frac{\partial y}{\partial t_1}=\Gamma^{(2)}$$

der Ausdrücke (5_a), und die Determinante

$$(17)\qquad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2}\frac{\partial z}{\partial t_3}=\Gamma^{(3)}$$

der Ausdrücke (5) nicht verschwinden dürfen. Das Gelten dieser Voraussetzungen ist aber bei unserer jetzigen Betrachtung eine Consequenz der Bedingungen, unter denen durch Umkehrung x und y als Functionen von t_1 und t_2 für die Ebene, x, y, z als Functionen von t_1, t_2, t_3 für den Raum bestimmt sind. Nach den in dem vorigen § gebrauchten Bezeichnungen folgen respective aus den Gleichungen

$$dt_1=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$dt_2=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy$$

und

$$dt_1 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

$$dt_2 = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz$$

$$dt_3 = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz$$

durch Auflösen und Vergleichen mit den obigen (5_a) und (5) für die partiellen Differentialquotienten von x und y nach t_1, t_2, und von x, y, z nach t_1, t_2, t_3 diejenigen Ausdrücke, welche in § 103 für die betreffenden gewöhnlichen Differentialquotienten gefunden sind. Dieselben werden hier nur soweit wiederholt, als für die Uebersicht wünschenswerth ist, nämlich

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t_1} = \dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(2)}}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial t_1} = \dfrac{-\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(2)}}, \\ \mathfrak{D}^{(2)} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t_1} = \dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial H}{\partial z} - \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial H}{\partial y}}{\mathfrak{D}^{(3)}}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t_1} = \dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial H}{\partial x} - \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial z}}{\mathfrak{D}^{(3)}}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = \dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial H}{\partial x}}{\mathfrak{D}^{(3)}}, \\ \mathfrak{D}^{(3)} = \Sigma \pm \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Wenn man nun aus (18) den Werth der Determinante $\Gamma^{(2)}$, aus (19) den Werth von $\Gamma^{(3)}$ ableitet, so tritt bei der mit den Ausdrücken der rechten Seite vorzunehmenden Operation für den ersten Fall im Nenner das Quadrat von $\mathfrak{D}^{(2)}$, im Zähler die Determinante $\mathfrak{D}^{(2)}$ selbst auf, und es entsteht die Gleichung

$$(20)\qquad \Gamma^{(2)} = \frac{1}{\mathfrak{D}^{(2)}}.$$

Für den zweiten Fall erscheint im Nenner des angedeuteten

Quotienten die dritte Potenz von $\mathfrak{D}^{(3)}$, der Zähler wird gleich der aus den adjungirten Elementen des Systems

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{array}$$

gebildeten Determinante, also nach I, § 77 gleich dem Quadrat von $\mathfrak{D}^{(3)}$, mithin ergiebt sich für $\Gamma^{(3)}$ die Gleichung

$$\Gamma^{(3)} = \frac{1}{\mathfrak{D}^{(3)}}. \tag{21}$$

Also können $\Gamma^{(2)}$ und $\Gamma^{(3)}$ deshalb nicht gleich Null werden, weil den Determinanten $\mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{D}^{(3)}$ nicht gestattet ist, über jedes Mass hinaus zu wachsen, oder, was dasselbe ist, unendlich grosse Werthe anzunehmen. In I, § 78 wurde nachgewiesen, dass bei der Transformation einer quadratischen Form von zwei Variabeln, und in I, § 81, dass bei der Transformation einer quadratischen Form von beliebig vielen Variabeln durch eine Substitution ersten Grades die Determinante der transformirten Form gleich dem Product aus der Determinante der ursprünglichen Form und dem Quadrate der Substitutionsdeterminante ist. Auch folgt leicht aus der in I, § 84 gegebenen Definition einer wesentlich positiven Form von n Variabeln, dass eine solche durch jede reelle Substitution ersten Grades, deren Determinante von Null verschieden ist, wieder in eine wesentlich positive Form von n Variabeln übergeht. Nun ist die Quadratsumme (4) eine wesentlich positive quadratische Form der zwei Differentiale dx, dy mit der Determinante Eins, die Quadratsumme (3) eine wesentlich positive quadratische Form der drei Differentiale dx, dy, dz, ebenfalls mit der Determinante Eins. Daher muss die Form (9), welche aus (4) durch die reelle Substitution (5_a) von der nicht verschwindenden Determinante $\Gamma^{(2)}$ hervorgeht, eine wesentlich positive Form der zwei Differentiale dt_1, dt_2, und ebenso die Form (7), welche aus (3) durch die reelle Substitution (5) von der nicht verschwindenden Determinante $\Gamma^{(3)}$ entsteht, eine wesentlich positive Form der drei

Differentiale dt_1, dt_2, dt_3 sein, wie schon oben bemerkt wurde. Zugleich erhält man durch den erwähnten Satz für die zugehörigen Determinanten die Bestimmung

$$e_{11}\, e_{22} - e_{12}^2 = \Gamma^{(2)}\, \Gamma^{(2)}, \tag{22}$$

$$D = \Gamma^{(3)}\, \Gamma^{(3)}. \tag{23}$$

Offenbar entspricht das Parallelogramm, dessen Flächeninhalt in (12) angegeben ist, dem in § 92 bestimmten Elementarparallelogramm, das Parallelepipedon, dessen Rauminhalt in (14) dargestellt ist, dem in § 95 gemessenen Elementarparallelepipedon. Es werde das Vorzeichen von $\Gamma^{(2)}$ mit $\varepsilon^{(2)}$, das Vorzeichen von $\Gamma^{(3)}$ mit $\varepsilon^{(3)}$ bezeichnet; dann eignen sich die Gleichungen (22) und (23) dazu, die zuletzt erhaltenen Ausdrücke in die früheren zu verwandeln. Der Ausdruck (12) geht nämlich durch (22) in

$$\varepsilon^{(2)}\, \Gamma^{(2)}\, dt_1\, dt_2, \tag{24}$$

der Ausdruck (14) durch (23) in

$$\varepsilon^{(3)}\, \Gamma^{(3)}\, dt_1\, dt_2\, dt_3 \tag{25}$$

über.

Bei der Ortsbestimmung durch die Coordinaten t_1, t_2, t_3 sind die unbegrenzten geraden Linien, welche von einem Punkte $[t_1, t_2, t_3]$ aus successive nach den drei Punkten

$$[t_1 + dt_1, t_2, t_3],\ [t_1, t_2 + dt_2, t_3],\ [t_1, t_2, t_3 + t_3]$$

gezogen werden, beziehungsweise die Tangenten an diejenigen Curven, deren erste durch $t_2 = \text{const.}$, $t_3 = \text{const.}$, deren zweite durch $t_3 = \text{const.}$, $t_1 = \text{const.}$, deren dritte durch $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, bestimmt ist. Demzufolge wird die Ebene, welche durch die zweite und dritte Tangente hindurchgeht, zur Tangentialebene der Oberfläche $t_1 = \text{const}$; die durch die dritte und erste Tangente gelegte Ebene zur Tangentialebene der Oberfläche $t_2 = \text{const}$; die durch die erste und zweite Tangente gelegte Ebene zur Tangentialebene der Oberfläche $t_3 = \text{const.}$ Es fallen also die in dem Punkte $[t_1, t_2, t_3]$ zusammenstossenden Seitenflächen des vorhin betrachteten Parallelepipedons respective in die genannten Tangentialebenen, und jede parallelogrammatische Seitenfläche bildet ein Element der zugehörigen Tangentialebene. Weil aber nach § 93 das Element der Tangentialebene als Vertreter des Elements der zugehörigen Oberfläche gilt, so stellt von den obigen Ausdrücken (15) der erste das Oberflächenelement für $t_1 = \text{const.}$, der zweite für $t_2 = \text{const.}$, der dritte für $t_3 = \text{const.}$ dar. Vermöge der Gleichungen

$$t_1 = F(x, y, z),\ t_2 = G(x, y, z),\ t_3 = H(x, y, z)$$

folgen aus (3) des § 93 die Ausdrücke

$$(26)\quad \begin{cases} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \dfrac{dy\, dz}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \\ \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2} \dfrac{dz\, dx}{\frac{\partial G}{\partial y}}, \\ \pm \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2} \dfrac{dx\, dy}{\frac{\partial H}{\partial z}}, \end{cases}$$

deren Ueberführung in die so eben gefundenen der Kürze halber nicht mitgetheilt wird. Gegenwärtig kam es nur darauf an, nachzuweisen, dass die zur Messung der Theile von Linien, von Oberflächen und vom Raume erforderlichen Begriffe in der quadratischen Form (7) enthalten sind.

Wofern man die Betrachtung auf eine Linie beschränkt, die in einer der drei Oberflächen $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, $t_3 = \text{const.}$ liegt, so ergiebt sich das Quadrat des Elements der betreffenden Linie, indem in (7) respective $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$ gesetzt wird. Hiernach entstehen die Ausdrücke

$$(27)\quad \begin{cases} a_{22}\, dt_2^2 + 2a_{23}\, dt_2\, dt_3 + a_{33}\, dt_3^2, \\ a_{33}\, dt_3^2 + 2a_{31}\, dt_3\, dt_1 + a_{11}\, dt_1^2, \\ a_{11}\, dt_1^2 + 2a_{12}\, dt_1\, dt_2 + a_{22}\, dt_2^2, \end{cases}$$

deren jeder eine wesentlich positive quadratische Form von zwei Differentialen ist. Man sieht aus (13), dass die betreffenden Determinanten, in derselben Reihenfolge genommen, gleich A_{11}, A_{22}, A_{33} sind, dass also die Determinante jeder einzelnen Form genügt, um nach (15) das Element der betreffenden Oberfläche aufzustellen. Die Bedeutung, welche *das Quadrat des zu einer Oberfläche gehörenden Linienelements* für die Ergründung der Eigenschaften der Oberfläche besitzt, ist zuerst durch die in § 65 angeführte *Gauss*'sche Abhandlung *disquisi-*

tiones generales circa superficies curvas klar geworden. Auch hat sich aus dieser Untersuchung die Erkenntniss entwickelt, dass die Darstellung von dem Quadrate des Linienelements im Raume durch beliebige Coordinaten das wesentliche Mittel bildet, um allgemeine geometrische Untersuchungen in einer von der Wahl des Coordinatensystems unabhängigen Weise zu führen.

Die Bestimmung des Winkels ω, den die Linien $t_2 = \text{const.}$ und $t_1 = \text{const.}$ in der $x\,y$ Ebene mit einander machen, durch die Gleichung (10) lässt schliessen, dass ω dann und nur dann gleich einem Rechten ist, wenn e_{12} verschwindet. Solche Coordinaten, bei denen dies immer der Fall ist und folglich die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = e_{11}\, dt_1^2 + e_{22}\, dt_2^2 \tag{28}$$

besteht, liefern daher, constant gesetzt, Schaaren von Linien, welche sich immer rechtwinklig schneiden, und heissen insofern *orthogonale Coordinaten.* Hierher gehören die durch die Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta \tag{29}$$

definirten Polarcoordinaten r, ϑ; bei denselben ist

$$\begin{aligned} dx &= \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta \\ dy &= \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta, \end{aligned} \tag{30}$$

und in Folge dessen

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2. \tag{31}$$

Ebenso lehren die Gleichungen (11), vermittelst deren die Winkel ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} gefunden werden, dass jeder von diesen dann und nur dann gleich einem Rechten ist, wenn jede der Grössen a_{23}, a_{31}, a_{12} gleich Null wird. Damit dies immer der Fall sei, muss bei der Transformation der Quadratsumme $dx^2 + dy^2 + dz^2$ durch Substitution der Coordinaten t_1, t_2, t_3 allgemein die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = a_{11}\, dt_1^2 + a_{22}\, dt_2^2 + a_{33}\, dt_3^2 \tag{32}$$

hervorgehen. Hier schneiden sich in jedem Punkte $[t_1, t_2, t_3]$ die drei zugehörigen Oberflächen $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, $t_3 = \text{const.}$, in drei gegen einander senkrechten Linien, weshalb t_1, t_2, t_3 gleichfalls *orthogonale Coordinaten* genannt werden. Von dieser Art sind die in § 95 durch die Gleichungen

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi \tag{33}$$

bezeichneten Coordinaten r, ϑ, φ. Für dieselben hat man

$$(34)\quad \begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr \quad - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ dz &= \sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\vartheta\cos\varphi\, d\varphi; \end{aligned}$$

nach ausgeführter Rechnung entsteht daher die Transformation

$$(35)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

deren Beschaffenheit mit der aufgestellten Behauptung übereinstimmt.

Bei der im Eingange des § erwähnten Betrachtung, wo zwei Ebenen oder zwei Räume auf einander bezogen sind, gehören im ersten Falle zu den sich senkrecht schneidenden geraden Linien $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$ der zweiten Ebene zwei genau bestimmte Schaaren von Linien der ersten Ebene, und im zweiten Falle zu den gegen einander senkrechten Ebenen $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, $t_3 = \text{const.}$ des zweiten Raumes drei genau bestimmte Schaaren von Oberflächen des ersten. Ferner bedeutet die Form (9) das Quadrat des Abstandes der zwei Punkte der ersten Ebene, die den Punkten $[t_1, t_2]$ und $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2]$ der zweiten Ebene, und (7) das Quadrat des Abstandes der zwei Punkte des ersten Raumes, die den Punkten $[t_1, t_2, t_3]$ und $[t_1 + dt_1, t_2 + dt_2, t_3 + dt_3]$ entsprechen. Unter der Voraussetzung von (28) sind den geraden Linien $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$ der zweiten Ebene zwei Schaaren von rechtwinklig sich schneidenden Linien in der ersten Ebene, unter der Voraussetzung von (32) den zu einander senkrechten Ebenen $t_1 = \text{const.}$, $t_2 = \text{const.}$, $t_3 = \text{const.}$ des zweiten Raumes drei Schaaren von rechtwinklig sich schneidenden Oberflächen im ersten Raume zugeordnet.

Abschnitt II.

Differential- und Integralrechnung für complexe Grössen.

Capitel I.

Differentiation von Functionen einer complexen variabeln Grösse.

§ 105. Differentiation einer algebraischen rationalen Function einer complexen Variable.

Mit der steigenden Werthschätzung, welche die Ausdehnung der algebraischen Operationen auf complexe Grössen gefunden hat, ist eine Reihe von grossen Arbeiten entstanden, durch welche die Operationen der Infinitesimalrechnung ebenfalls auf das Gebiet der complexen Grössen übertragen sind; hiermit wurde eine Theorie der Functionen von complexen variabeln Grössen begründet. Bei dem jetzt mitzutheilenden Umriss wird das Streben vornehmlich darauf gerichtet sein, den Zusammenhang der Theorie mit den im ersten Abschnitt entwickelten allgemeinen Eigenschaften der Functionen von reellen stetig veränderlichen Grössen hervor zu heben.

Wir betrachten einen Ausdruck, der aus einer beliebigen aber beschränkten Zahl von complexen Elementen

$$a + ib,\ a_1 + ib_1, \dots x + iy$$

rational zusammengesetzt ist; die reellen Bestandtheile $a, b, a_1, b_1, \dots$ werden als constant, die reellen Bestandtheile x, y als veränderlich angesehen, die Verbindungen $a + ib$, $a_1 + ib_1, \dots$ heissen nach § 33 *constante complexe Grössen*, die Verbindung $x + iy$

wird eine variable complexe Grösse, der Ausdruck selbst *eine algebraische rationale Function der complexen Variable* $x+iy$ genannt und mit

$$(1) \qquad f(x+iy)$$

notirt. In der durch Trennung des reellen und imaginären Theils erhaltenen Gleichung

$$(2) \qquad f(x+iy) = t+iu$$

sind dann t und u reelle rationale Functionen der beiden Variabeln x und y. Es wurde in dem citirten § 33 der Differentialquotient eines Ausdrucks eingeführt, dessen reeller und imaginärer Theil von einer veränderlichen Grösse abhängen. Auf entsprechende Weise bildet man für einen complexen Ausdruck, dessen reeller und von dem Factor i befreiter imaginärer Theil reelle Functionen von zwei und mehr Variabeln sind, das vollständige Differential des reellen und des von i befreiten imaginären Theils, und *definirt das vollständige Differential des gegebenen complexen Ausdrucks* $\varphi + i\chi$ *durch die Gleichung*

$$(3) \qquad d(\varphi+i\chi) = d\varphi + i\,d\chi.$$

Dann entsteht die Aufgabe, für die obige Function $f(x+iy)$ *das vollständige Differential*

$$(4) \qquad df(x+iy) = dt + i\,du$$

aufzusuchen.

Da t und u Functionen der zwei Variabeln x und y sind, so ist

$$(5) \qquad dt = \frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

folglich

$$(6) \qquad dt + i\,du = \left(\frac{\partial t}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial t}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy.$$

Bedenkt man aber, dass bei der partiellen Differentiation nach x die Variable y, bei der partiellen Differentiation nach y die Variable x nicht geändert wird, so leuchtet ein, dass der Ausdruck $t+iu$ für die Bildung von $\frac{\partial t}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}$ als eine rationale Verbindung von constanten Elementen und der reellen Variable x, für die Bildung von $\frac{\partial t}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}$ als eine rationale Verbindung von constanten Elementen und der reellen Variable y aufgefasst werden darf. Es lassen sich daher beide Operationen mit Hülfe der in § 33 mitgetheilten Vorschrift ausführen, *dass der Differentialquotient einer jeden algebraischen aus einer reellen Variable und complexen constanten Grössen gebildeten Function in Bezug auf die Variable nach den für das Gebiet der reellen Grössen geltenden Regeln erhalten wird.* Der leichtern Uebersicht wegen trennen wir den Fall, in welchem $f(x+iy)$ eine ganze, und denjenigen, in welchem $f(x+iy)$ eine gebrochene Function von $x+iy$ ist. Im erstern hat man

$$(7)\quad f(x+iy) = \lambda(x+iy) = (a_0+ib_0)(x+iy)^n + (a_1+ib_1)(x+iy)^{n-1} + \ldots + (a_n+ib_n);$$

im zweiten Falle ist $f(x+iy)$ gleich einem Bruche, dessen Zähler $\lambda(x+iy)$ und dessen Nenner $\mu(x+iy)$ rationale ganze Functionen von $(x+iy)$ sind, mithin bei entsprechender Bezeichnung

$$(8)\; f(x+iy) = \frac{\lambda(x+iy)}{\mu(x+iy)} = \frac{(a_0+ib_0)(x+iy)^n + (a_1+ib_1)(x+iy)^{n-1} + \ldots + (a_n+ib_n)}{(c_0+id_0)(x+iy)^s + (c_1+id_1)(x+iy)^{s-1} + \ldots + (c_s+id_s)}.$$

Auf Grund des § 33 bekommt für eine mit einer beliebigen ganzen Zahl m gebildete Potenz $(x+iy)^m$ der nach x genommene partielle Differentialquotient den Werth

$$(9)\qquad \frac{\partial (x+iy)^m}{\partial x} = m(x+iy)^{m-1},$$

während bei dem nach y genommenen partiellen Differentialquotienten der Factor i hinzutritt und die Gleichung

$$(10)\qquad \frac{\partial (x+iy)^m}{\partial y} = im(x+iy)^{m-1}$$

entsteht. Wenn man jetzt in Uebereinstimmung mit I, § 49 die ersten Ableitungen der rationalen ganzen Functionen $\lambda(z)$, $\mu(z)$ respective durch $\lambda'(z)$, $\mu'(z)$ bezeichnet, so folgen aus (7) die Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x} + i\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda'(x+iy), \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial y} + i\dfrac{\partial u}{\partial y} = i\lambda'(x+iy), \end{cases}$$

und ebenso aus (8) die Gleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\lambda'(x+iy)\mu(x+iy)-\lambda(x+iy)\mu'(x+iy)}{\mu(x+iy)\mu(x+iy)}, \\ \dfrac{\partial t}{\partial y}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}=i\dfrac{\lambda'(x+iy)\mu(x+iy)-\lambda(x+iy)\mu'(x+iy)}{\mu(x+iy)\mu(x+iy)}; \end{cases}$$

dieselben gehen, sobald bei (7) die Notation

$$(13)\qquad f'(x+iy)=\lambda'(x+iy),$$

und bei (8) die Notation

$$(14)\quad f'(x+iy)=\frac{\lambda'(x+iy)\mu(x+iy)-\lambda(x+iy)\mu'(x+iy)}{\mu(x+iy)\mu(x+iy)}$$

angewendet wird, in die gemeinsame Gestalt

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(x+iy), \\ \dfrac{\partial t}{\partial y}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}=if'(x+iy) \end{cases}$$

über. Die Substitution dieser Ausdrücke in (6) liefert alsdann für das zu bestimmende vollständige Differential $dt+idu$ die Gleichung

$$(16)\qquad dt+idu=f'(x+iy)(dx+idy).$$

Wie die linke Seite nach (4) *das vollständige Differential der Function* $f(x+iy)$ darstellt, so heisst der auf der rechten Seite befindliche zweite Factor

$$(17)\qquad dx+idy=d(x+iy)$$

das vollständige Differential der complexen Variable $(x+iy)$. *Der erste Factor* $f'(x+iy)$ *wird aus der rationalen Function* $f(x+iy)$ *abgeleitet, indem man statt jeder complexen Constante ein einziges Zeichen, statt der complexen Variable* $x+iy$ *ebenfalls ein einziges Zeichen* z *setzt, und von dem erhaltenen nach* z *rationalen Ausdruck in Bezug auf* z *nach den auf dem Gebiete der reellen Grössen geltenden Gesetzen den ersten Differentialquotienten nimmt. Man spricht somit den Inhalt der Gleichung* (16) *dahin aus, dass das vollständige Differential der rationalen Function* $f(x+iy)$ *gleich dem Product aus dem vollständigen Differential der complexen Variable* $x+iy$ *und der Function* $f'(x+iy)$ *ist, und nennt die letztere den in Bezug auf die complexe Variable* $x+iy$ *genommenen Differentialquotienten der rationalen Function* $f(x+iy)$.

Hierin besteht die Ausdehnung der Begriffe des Differentials und des Differentialquotienten auf rationale Functionen complexen Variable.

§ 106. Allgemeine Definition einer Function einer complexen Variable. Geometrische Deutung dieses Begriffs durch eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung einer Ebene auf eine zweite Ebene.

In I, § 107 wurde der Begriff einer rationalen ganzen Function einer complexen Grösse aufgestellt, und dann zu der Betrachtung von convergenten nach den positiven Potenzen einer complexen Grösse fortschreitenden unendlichen Reihen übergegangen, deren Werth ebenfalls eine Function der complexen Grösse genannt wurde. Gegenwärtig soll zur allgemeinen Definition einer Function einer complexen Grösse ein anderer Weg eingeschlagen werden, der sich erst später mit dem so eben berührten vereinigen wird. Die im vorigen § zu der rationalen Function $f(x+iy)$ gehörende Gleichung (16) lässt sich verallgemeinern, indem man zwei reellen Functionen t und u der beiden reellen Variabeln x und y die Bedingung vorschreibt, *dass der aus den vollständigen Differentialen gebildete Ausdruck* $dt+idu$ *gleich dem Product des Ausdrucks* $dx+idy$ *in eine Verbindung* $\xi+i\eta$ *von irgend zwei reellen Functionen* ξ *und* η *sei, mithin die Gleichung*

$$dt+idu=(\xi+i\eta)(dx+idy) \tag{1}$$

befriedige. Nach dem im vorigen § eingeführten Sprachgebrauche ist dann die linke Seite das vollständige Differential von $(t+iu)$, der zweite Factor der rechten das vollständige Differential von $(x+iy)$. *Eine der Forderung* (1) *genügende Verbindung* $t+iu$ *wird, wie in der in* § 102 *angeführten Inauguraldissertation Riemanns, als eine Function der complexen Variable* $x+iy$ *bezeichnet, also eine solche Function durch die Gleichung* (1) *allgemein definirt. Gleichzeitig heisst dann der Werth* $\xi+i\eta$ *des Quotienten* $\frac{dt+idu}{dx+idy}$ *der von der Function* $t+iu$ *nach der Variable* $x+iy$ *genommene Differentialquotient. Auch ist es gebräuchlich, die complexe Variable* $x+iy$ *durch* *einen einzelnen Buchstaben* z, *die Function* $t+iu$ *durch eine Characteristik* $f(z)$, *den Differentialquotienten durch* $\frac{df(z)}{dz}$ *zu bezeichnen.* Die Gleichung (1) bezieht sich nach der Natur der vollständigen Differentiale auf die Voraussetzung, dass die Functionen t und u stetige Functionen von x und y sind und in Bezug auf dieselben bestimmte endliche partielle Differentialquotienten haben, dass mithin ξ und η bestimmte endliche Grössen sind. So lange diese Bedingung erfüllt ist, sagt man, *dass* $t+iu$ *eine stetige Function von* $x+iy$ *sei*, und zwar stimmt dieser Sprachgebrauch mit demjenigen überein, welcher in I, § 108 angewendet ist. Eine rationale ganze Function von $x+iy$ wurde schon an der erwähnten Stelle als Beispiel einer Function angeführt, die für jeden endlichen Werth von $x+iy$ stetig ist. Betrachtet man aber bei einer rationalen gebrochenen Function $t+iu$ von $x+iy$ einen Werth der Variable, für welchen der Nenner des Bruches gleich Null wird, der Zähler aber nicht verschwindet, so hört für den betreffenden Werth sowohl die Function $t+iu$ wie auch der zugehörige nach den Vorschriften des vorigen § zu bildende Ausdruck $\xi+i\eta$ auf, endlich und stetig zu sein, so dass die Gleichung (1) eine Ausnahme erleidet.

Um die Beschränkungen kennen zu lernen, welche den Functionen t und u durch (1) auferlegt werden, hat man statt der linken Seite die entwickelte Gestalt der rechten Seite von (6) des vorigen § anzuwenden und die Factoren der unabhängigen Differentiale dx und dy beziehungsweise gleich zu setzen. So entstehen *die beiden Gleichungen*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(t+iu)}{\partial x} = \xi + i\eta \\[2ex] \dfrac{\partial(t+iu)}{\partial y} = i(\xi + i\eta), \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von $\xi+i\eta$ *die eine Gleichung*

$$(3)\qquad \frac{\partial(t+iu)}{\partial y} = i\,\frac{\partial(t+iu)}{\partial x}$$

resultirt. Die letztere führt durch Trennung des reellen und imaginären Theiles zu *dem System von partiellen Differentialgleichungen*

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial t}{\partial y}, \end{cases}$$

welches die vorhandene Abhängigkeit der Functionen t und u von den Variabeln x und y ausdrückt. Hierbei ist zu beachten, dass aus (4), indem die zweite Gleichung mit i multiplicirt und zu der ersten addirt wird, die Gleichung (3) hervorgeht, dass ferner bei Einführung der Bezeichnungen

$$(5) \qquad \frac{\partial t}{\partial x} = \xi, \; \frac{\partial u}{\partial x} = \eta$$

aus (4) die Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = -\eta, \; \frac{\partial u}{\partial y} = \xi$$

und daher auch die Gleichungen (2) folgen, von denen man durch bezügliche Multiplication mit dx und dy und Addition zu (1) zurückkehrt. Auf diese Art leuchtet ein, dass die beiden Gleichungen (4) mit der Gleichung (1) vollkommen denselben Inhalt haben.

Das Wesen der Gleichung (1) lässt sich auf characteristische Weise anschaulich machen, sobald man, wie in § 104, die Variabeln x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes einer ersten, die Variabeln t und u als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes einer zweiten Ebene auffasst, und vermittelst der Functionen t, u von x, y jedem Punkt der ersten Ebene einen Punkt der zweiten entsprechen lässt. Dass hierbei ξ und η endliche Werthe haben müssen, braucht als selbstverständlich kaum erwähnt zu werden; dagegen mag ausdrücklich gesagt werden, dass die Annahme des gleichzeitigen Verschwindens von ξ und η ebenfalls ausgeschlossen bleibt. Nach der in I, § 42 auseinandergesetzten Darstellung der complexen Grössen darf ein Punkt der ersten Ebene mit $x+iy$, der zugeordnete Punkt der zweiten mit $t+iu$ bezeichnet werden. Da ferner zu den Differentialen dx, dy die bestimmten Differentiale dt, du gehören, so correspondirt dem Punkte $x+iy+dx+idy$ der ersten Ebene der Punkt $t+iu+dt+idu$ der zweiten. Hier sind für die erste Ebene dx, dy die relativen Coordinaten des Punktes $x+iy+dx+idy$ in Bezug auf den Punkt $x+iy$, weshalb in Uebereinstimmung mit I, § 42 die relative Lage des Punktes $x+iy+dx+idy$ gegen den Punkt $x+iy$ durch den Ausdruck $dx+idy$ repräsentirt wird. In gleicher Weise stellt für die zweite Ebene der Ausdruck $dt+idu$ die relative Lage des Punktes $t+iu+dt+idu$ gegen den Punkt $t+iu$ dar. Wofern den Differentialen von x und y ein beliebiges anderes System von Werthen δx und δy beigelegt wird, mögen δt und δu die entsprechenden Differentiale von t und u sein,

$$(7)\qquad \begin{cases} \delta t = \dfrac{\partial t}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial t}{\partial y}\delta y \\ \delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y, \end{cases}$$

dann ziehen die vorausgesetzten Relationen (5) und (6) die nach dem Schema von (1) gebildete Gleichung

$$(8)\qquad \delta t + i\,\delta u = (\xi + i\eta)(\delta x + i\,\delta y)$$

nach sich. Man wendet jetzt auf (1) und (8) die Betrachtungen an, die in I, § 42 zur Deutung des Products von zwei complexen Grössen benutzt sind, und setzt, da ξ und η nicht gleichzeitig gleich Null sein dürfen,

$$(9)\qquad \xi = \sigma\cos\gamma,\ \eta = \sigma\sin\gamma,$$

wo die positive Grösse σ den Werth

$$(10)\qquad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

hat, und der Winkel γ innerhalb einer Kreisperipherie eindeutig bestimmt ist. Dann folgt, *dass dem aus den Punkten der ersten Ebene*

$$(11)\qquad x+iy+dx+idy,\ x+iy,\ x+iy+\delta x+i\delta y$$

gebildeten Dreieck das aus den zugeordneten Punkten der zweiten Ebene

$$(12)\qquad t+iu+dt+idu,\ t+iu,\ t+iu+\delta t+i\delta u$$

gebildete Dreieck ähnlich ist, dass die Seiten des ersten zu denen des zweiten in dem Verhältniss der Einheit zu der Grösse σ stehen, dass die drei Ecken des zweiten Dreiecks eine gleiche Lage zu einander haben wie die des ersten, und dass, sobald die erste Ebene mit dem Punkte $x+iy$ auf den Punkt $t+iu$ der zweiten Ebene und mit entsprechenden positiven Richtungen der x auf die t Axe, der y auf die u Axe gelegt wird, das erste Dreieck, um in das zweite zu fallen, in der Richtung von der positiven t Axe zu der positiven u Axe um den Winkel γ gedreht werden muss. Durch den ersten und dritten Ausdruck in (11) werden irgend zwei Punkte der ersten Ebene bezeichnet, die in der Nähe des Punktes $x+iy$ liegen. *Die zwischen der ersten und zweiten Ebene obwaltende Beziehung kann daher als eine Abbildung aufgefasst werden, bei welcher jedem in der ersten Ebene gewählten Dreiecke von unendlich kleinen Seiten in der zweiten Ebene ein ähnliches Dreieck von unendlich kleinen Seiten entspricht.* In der Abhandlung: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird,* hat *Gauss* den analytischen Ausdruck für die in Rede stehende Beziehung zweier Ebenen aus der Lösung der in der Ueberschrift bezeichneten allgemeineren Aufgabe abgeleitet. Seine Untersuchung gründet sich auf die in § 104 erwähnte Darstellung des Quadrats des zu einer Fläche gehörenden Linienelements. Demgemäss wollen wir den Zusammenhang der obigen Gleichung (1) mit dem Quadrate des für die betreffenden Ebenen genommenen Linienelements nachweisen.

Weil die in (1) vorkommenden Differentiale dx, dy, dt, du und die Functionen ξ, η reelle Grössen sind, so erhält man durch Verwandlung von i in $-i$ die nach I, § 27 gültige Gleichung

$$(1^*) \qquad dt-idu=(\xi-i\eta)\,(dx-idy),$$

und durch Multiplication der zu einander conjugirten Ausdrücke die Gleichung zwischen den betreffenden Normen

$$(13) \qquad dt^2+du^2=(\xi^2+\eta^2)\,(dx^2+dy^2).$$

Hier ist nach (4) des § 104 die quadratische Form dx^2+dy^2 gleich dem Quadrat des Linienelements der ersten, die quadratische Form dt^2+du^2 gleich dem Quadrate des Linienelements der zweiten Ebene, und es hängen t und u in der Weise von x und y ab, dass die zweite Form gleich der mit einem gewissen Factor multiplicirten ersten Form wird. Zufolge den von *Gauss* aufgestellten Grundsätzen erfordert *die in den kleinsten Theilen ähnliche*, oder, wie man jetzt meistens sagt, *conforme Abbildung einer Ebene auf eine zweite* das Bestehen einer Gleichung von der Gestalt (13), in der m^2 eine reelle positive von x und y abhängige Grösse bedeutet,

$$(14) \qquad dt^2+du^2=m^2\,(dx^2+dy^2).$$

Es bleibt daher zu zeigen, wie von (14) zu der Gleichung (1) übergegangen wird.

Eine quadratische Form von zwei Variabeln hat die in I, § 78 hervorgehobene allgemeine Eigenschaft, auf eine und nur eine Weise in zwei ganze homogene Factoren des ersten Grades zerlegt werden zu können. Bei einer wesentlich positiven Form wird für diese Zerlegung die Rechnung mit imaginären Grössen vorausgesetzt, und es existirt bei den vorliegenden Quadratsummen von zwei Differentialen die Zerlegung

$$(15)\qquad \begin{cases} dt^2+du^2=(dt+i\,du)\,(dt-i\,du),\\ dx^2+dy^2=(dx+i\,dy)\,(dx-i\,dy). \end{cases}$$

Durch Substitution in (14) kommt

$$(16)\qquad (dt+i\,du)\,(dt-i\,du)=m^2\,(dx+i\,dy)\,(dx-i\,dy).$$

Hier hat man wieder dt, du als die Variabeln der zweiten, dx, dy als die Variabeln der ersten Form, die Differentiale dt, du als lineare Functionen von dx, dy, ferner m^2 als eine von den Differentialen unabhängige Grösse zu betrachten. Es kann daher die Gleichung (16) auf zwei und nur auf zwei Arten befriedigt werden. Entweder ist der erste Factor links gleich dem mit einer von den Differentialen unabhängigen Grösse multiplicirten ersten Factor rechts, oder gleich dem mit einer von den Differentialen unabhängigen Grösse multiplicirten zweiten Factor rechts. Im ersten Falle ergiebt sich

$$(17)\qquad dt+i\,du=(\lambda+i\mu)\,(dx+i\,dy),\quad dt-i\,du=(\lambda-i\mu)\,(dx-i\,dy)$$
$$\lambda^2+\mu^2=m^2,$$

im zweiten Falle

$$(18)\qquad dt+i\,du=(\nu+i\varrho)\,(dx-i\,dy),\quad dt-i\,du=(\nu-i\varrho)\,(dx+i\,dy)$$
$$\nu^2+\varrho^2=m^2.$$

Die Gleichungen (17) stimmen mit den obigen Gleichungen (1) und (1*) überein und ziehen die Gleichung (3) sowie das System von Gleichungen (4) nach sich. Dagegen liefern die Gleichungen (18), genau entsprechend behandelt, die Gleichung

$$(19)\qquad \frac{\partial(t+iu)}{\partial y}=-i\,\frac{\partial(t+iu)}{\partial x},$$

und das System von Gleichungen

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial t}{\partial y}. \end{cases}$$

Da (18) aus (17) durch Verwandlung von y in $-y$ entsteht, so darf man den Ausdruck gebrauchen, *dass durch* (18) *die Verbindung* $t+iu$ *als eine Function der complexen Variable* $x-iy$ *definirt werde.*

Zwischen der xy und der tu Ebene findet unter der letzteren Voraussetzung eine solche Beziehung statt, *dass, wie verlangt war, zu einem Dreieck mit unendlich kleinen Seiten in der ersten Ebene ein ähnliches Dreieck mit unendlich kleinen Seiten in der zweiten Ebene gehört, dass aber die drei Ecken des einen Dreiecks eine umgekehrte Lage zu einander haben wie die des andern, und dass folglich um das Dreieck der ersten Ebene mit einer Ecke und zwei entsprechenden Seiten auf das correspondirende Dreieck der zweiten Ebene zu legen, die beiden Seiten der ersten Ebene durch Umkehrung vertauscht werden müssen.*

Bei der Aehnlichkeit der correspondirenden unendlich kleinen Dreiecke sind die betreffenden Dreieckswinkel einander genau gleich. Wenn man daher in der ersten Ebene von einem Punkte unter irgend einem Winkel zwei Linien ausgehen lässt, so bilden in der zweiten Ebene die von dem zugehörigen Punkte ausgehenden entsprechenden Linien einen gleichen Winkel. Mithin müssen die zu $t=$ const., $u=$ const. in der ersten Ebene gehörenden Linien stets einen rechten Winkel mit einander machen, weil in der zweiten Ebene die Gleichungen $t=$ const. und $u=$ const. gegen einander rechtwinklige gerade Linien darstellen. Aus gleichem Grunde schliessen die in der zweiten Ebene zu $x=$ const. und $y=$ const. gehörenden Linien mit einander einen rechten Winkel ein. Diese Eigenschaft der conformen Abbildung einer Ebene auf eine zweite wird analytisch durch die Thatsache ausgedrückt, dass die obige Gleichung (14) einen besondern Fall der in § 104 mit (28) bezeichneten Gleichung bildet, welche sich auf die Verwandlung der ursprünglichen Coordinaten x, y in beliebige orthogonale Coordinaten t_1, t_2 bezieht.

Durch die vorhin angestellte Betrachtung ergab sich, dass aus der Gleichung (14) mit Nothwendigkeit entweder das System (4) oder das System (20) folgt. Dasselbe Ziel lässt sich ohne Hülfe der Rechnung mit imaginären Grössen aus der Beschaffenheit der vorausgesetzten Transformation ableiten. Substituirt man in (14) für dt und du die vollständigen Ausdrücke (5) des vorigen §, so liefert die Gleichsetzung der Coefficienten von dx^2, $dx\,dy$, dy^2 die Gleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x}=m^2, \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=m^2, \end{cases}$$

aus denen die Gleichung

$$(22)\quad \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=m^4$$

entsteht. Es sei ε gleich der positiven oder negativen Einheit, dann muss

$$(22^*)\quad \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon m^2$$

sein. Indem nun in (21) die erste Gleichung mit $\frac{\partial u}{\partial y}$, die zweite mit $-\frac{\partial u}{\partial x}$ multiplicirt, und dann addirt wird, kommt vermöge (22*)

$$(23)\quad \varepsilon m^2\frac{\partial t}{\partial x}=m^2\frac{\partial u}{\partial y};$$

sobald ferner in (21) die erste Gleichung mit $-\frac{\partial t}{\partial y}$, die zweite mit $\frac{\partial t}{\partial x}$ multiplicirt, und hierauf addirt wird, findet sich

$$(24)\quad \varepsilon m^2\frac{\partial u}{\partial x}=-m^2\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Nach Weglassung des nothwendig von Null verschiedenen Factors m^2 vereinigen sich (23) und (24) zu dem System von Gleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial t}{\partial y}, \end{cases}$$

das für $\varepsilon = 1$ in (4), für $\varepsilon = -1$ in (20) übergeht. Es muss also das eine oder das andere System Gültigkeit haben, wie zu beweisen war, und zwar tritt der eine oder andere Fall ein, je nachdem die in (22*) dargestellte Functionaldeterminante einen positiven oder negativen Werth besitzt.

§ 107. Differentiation einer Summe, einer Differenz, eines Products und eines Quotienten von zwei Functionen einer complexen Variable.

Bei der im vorigen § aufgestellten Definition einer Function $t + iu$ der complexen Variable $x + iy$ durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial(t+iu)}{\partial y} = i\frac{\partial(t+iu)}{\partial x}$$

bedarf es eines Beweises, dass die Summe, die Differenz, das Product und der Quotient von zwei solchen Functionen wieder Functionen der betreffenden complexen Variable sind. Mit diesem Beweise erhält man zugleich die Regeln für die Bildung des Differentialquotienten der genannten Verbindungen zweier Functionen. Ausser $t + iu$ werde eine zweite Function $p + iq$ betrachtet, für welche die entsprechende Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial(p+iq)}{\partial y} = i\frac{\partial(p+iq)}{\partial x}$$

gelte. Dann entstehen durch Combination von (1) und (2) die folgenden Gleichungen, vermöge deren

$$t+iu+p+iq, \; t+iu-p-iq, \; (t+iu)(p+iq), \; \frac{t+iu}{p+iq}$$

in der That Functionen von $x + iy$ sind,

$$(3) \qquad \frac{\partial(t+iu+p+iq)}{\partial y} = i\frac{\partial(t+iu+p+iq)}{\partial x},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial(t+iu-p-iq)}{\partial y} = i\frac{\partial(t+iu-p-iq)}{\partial x},$$

$$(5) \qquad \frac{\partial((t+iu)(p+iq))}{\partial y} = i\frac{\partial((t+iu)(p+iq))}{\partial x},$$

$$(6) \qquad \frac{\partial\left(\dfrac{t+iu}{p+iq}\right)}{\partial y} = i\frac{\partial\left(\dfrac{t+iu}{p+iq}\right)}{\partial x}.$$

Sobald wie im vorigen § der von $t+iu$ nach $x+iy$ genommene Differentialquotient $\xi+i\eta$ durch die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(t+iu)}{\partial x}=\xi+i\eta \\ \dfrac{\partial(t+iu)}{\partial y}=i(\xi+i\eta) \end{cases}$$

dargestellt, und für den von $p+iq$ nach $x+iy$ genommenen Differentialquotienten $\mu+i\nu$ das entsprechende System

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(p+iq)}{\partial x}=\mu+i\nu \\ \dfrac{\partial(p+iq)}{\partial y}=i(\mu+i\nu) \end{cases}$$

gebildet wird, geben die Gleichungen (3) bis (6) für die aufzusuchenden Differentialquotienten die Regeln

$$(9)\quad \frac{d(t+iu+p+iq)}{d(x+iy)}=\xi+i\eta+\mu+i\nu,$$

$$(10)\quad \frac{d(t+iu-p-iq)}{d(x+iy)}=\xi+i\eta-\mu-i\nu,$$

$$(11)\quad \frac{d((t+iu)(p+iq))}{d(x+iy)}=(\xi+i\eta)(p+iq)+(t+iu)(\mu+i\nu)$$

$$(12)\quad \frac{d\left(\dfrac{t+iu}{p+iq}\right)}{d(x+iy)}=\frac{(\xi+i\eta)(p+iq)-(t+iu)(\mu+i\nu)}{(p+iq)^2}$$

Dieselben sind mit den für reelle Functionen einer reellen Variable bestehenden Regeln gleichlautend und schliessen die in § 106 *angegebenen Regeln zur Differentiation einer rationalen Function von $x+iy$ in sich, wie mit Hülfe der Bemerkung, dass der Differentialquotient einer complexen Constante gleich Null, der complexen Variable $x+iy$ in Bezug auf diese selbst gleich der Einheit ist, sofort einleuchtet.*

§ 108. Wiederholte Differentiation einer Function einer complexen Variable.

Es lässt sich nachweisen, dass der von einer Function einer complexen Variable nach dieser genommene Differentialquotient der für eine Function einer complexen Variable geltenden Bedingung genügt, das heisst, ebenfalls eine solche Function ist. Aus der für die Function $t+iu$ von $x+iy$ bestehenden Gleichung

$$\frac{d(t+iu)}{d(x+iy)}=\xi+i\eta \tag{1}$$

folgen nach (5) und (6) des § 106 die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x}&=\xi, & \frac{\partial u}{\partial x}&=\eta, \\ \frac{\partial t}{\partial y}&=-\eta, & \frac{\partial u}{\partial y}&=\xi, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

und umgekehrt folgt aus (2) die Gleichung (1). Stützt man sich nun auf den Satz, dass sowohl für die Function t wie für die Function u bei der Bildung des nach x und y zu nehmenden partiellen Differentialquotienten die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden darf, so erhält man aus (2) die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x}&=\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}&=-\frac{\partial \xi}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die den Gleichungen (4) des § 106 entsprechen und die behauptete Thatsache ausdrücken, dass $\xi+i\eta$ eine Function von $x+iy$ ist. Hieraus folgt die Berechtigung, den Differentialquotienten der Function $\xi+i\eta$ nach $x+iy$ zu bilden, für den die Gleichung

$$\frac{d(\xi+i\eta)}{d(x+iy)}=\frac{\partial \xi}{\partial x}+i\frac{\partial \eta}{\partial x}=-i\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+i\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{4}$$

gilt. Insofern aber $\xi+i\eta$ der von $t+iu$ nach $x+iy$ genommene Differentialquotient ist, wird der vorliegende Differentialquotient $\dfrac{d(\xi+i\eta)}{d(x+iy)}$ *der von $t+iu$ nach $x+iy$ genommene zweite Differentialquotient* genannt. Auch folgt aus dem Bisherigen, dass derselbe wieder eine Function von $x+iy$ ist und eine nochmalige Differentiation nach der complexen Variable erlaubt.

So gelangt man bei einer Function einer complexen Variable zu der Bildung ihrer nach einander folgenden auf die complexe Variable bezüglichen Differentialquotienten, für welche, indem

(5) $$x + iy = z, \quad t + iu = f(z)$$

gesetzt wird, respective die Bezeichnungen

(6) $$\frac{df(z)}{dz} = f'(z),\ \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = f''(z), \ldots \frac{d^\nu f(z)}{dz^\nu} = f^\nu(z)$$

angewendet werden.

§ 109. Differentiation einer Function, deren Argument eine Function einer complexen Variable ist, nach der letztern Variable.

Wenn $g + ih$ eine Function der complexen Variable $t + iu$, das Argument $t + iu$ eine Function der complexen Variable $x + iy$ ist, so ist auch $g + ih$ eine Function der complexen Variable $x + iy$. Denn aus den für $g + ih$ und $t + iu$ bestehenden Voraussetzungen, welche man so darstellen kann,

(1) $$d(g + ih) = (\alpha + i\beta)\ d(t + iu),$$

(2) $$d(t + iu) = (\xi + i\eta)\ d(x + iy),$$

folgt durch Einsetzen die Gleichung

(3) $$d(g + ih) = (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta)\ d(x + iy),$$

durch welche die gemachte Aussage begründet wird. Zugleich erhält man für den Differentialquotienten der Function $g + ih$ in Bezug auf die Variable $x + iy$ den Ausdruck

(4) $$\frac{d(g+ih)}{d(x+iy)} = (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta)$$

oder

(5) $$\frac{d(g+ih)}{d(x+iy)} = \frac{d(g+ih)}{d(t+iu)}\ \frac{d(t+iu)}{d(x+iy)}.$$

Eine Function, deren Argument eine Function einer complexen Variable ist, wird also in Bezug auf diese Variable vermöge der gleichen Regel differentiirt, die nach (4) *des* § 12 *für das Gebiet der reellen Grössen besteht.*

Bei der in § 106 entwickelten geometrischen Repräsentation bezeichnet $x + iy$ einen Punkt einer ersten, $t + iu$ den entsprechenden Punkt einer zweiten Ebene, welche eine in den kleinsten Theilen ähnliche und gleichliegende Abbildung der ersten liefert. Ebenso kann man durch $g + ih$ den Punkt einer dritten Ebene andeuten, welcher zu dem Punkte $t + iu$ der zweiten gehört, und wo die dritte Ebene eine in den kleinsten Theilen ähnliche und gleichliegende Abbildung der zweiten darstellt. Alsdann drückt der Satz, nach welchem $g+ih$ nothwendig eine Function von $x+iy$ ist, die aus den geometrischen Principien der Aehnlichkeit einleuchtende Thatsache aus, dass die dritte Ebene eine in den kleinsten Theilen ähnliche und gleichliegende Abbildung der ersten Ebene ergiebt. Die Auffassung der Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Functionen einer complexen Grösse wird sehr erleichtert, indem man eine gegebene Operation in eine Folge nach einander vorzunehmender einfacher Operationen zerlegt, für jede einzelne Operation die ihr zugehörige Art der conformen Abbildung untersucht, und eine entsprechende Folge von Ebenen betrachtet, von denen jede eine conforme Abbildung der nächst vorhergehenden, mithin nach dem aufgestellten Satze die letzte eine conforme Abbildung der ersten ausmacht. Demnach wird jetzt die Art der Abbildung, welche den einfachsten algebraischen Operationen entspricht, erörtert werden.

I. *Die Function $t+iu$ entstehe aus $x+iy$ durch Addition einer complexen Constante,*

$$t+iu=a+ib+x+iy. \tag{6}$$

Gemäss I, § 42 ist die betreffende Abbildung von der Art, dass zu dem Punkte $x+iy=0$ der ersten Ebene der Punkt $t+iu=a+ib$ der zweiten gehört; legt man die erste Ebene so auf die zweite, dass der eine genannte Punkt auf den andern fällt, die positive x der positiven t Axe, die positive y der positiven u Axe parallel wird, so fällt jeder Punkt der ersten Ebene auf den entsprechenden der zweiten. *Die zweite Ebene liefert also eine congruente Abbildung der ersten.*

II. *Die Function $t+iu$ gehe aus $x+iy$ durch Multiplication mit einer complexen Constante $a+ib$ hervor,*

$$t+iu=(a+ib)(x+iy). \tag{7}$$

Hier gehört zu dem Punkte $x+iy=0$ der ersten Ebene der Punkt $t+iu=0$ der zweiten. Da ferner die Gleichung (7) in Bezug auf $x+iy$ und $t+iu$ genau ebenso gebildet ist, wie die Gleichung (1) des § 106 in Bezug auf $dx+idy$ und $dt+idu$, so gilt dasjenige, was dort von Dreiecken mit unendlich kleinen Seiten gesagt ist, hier für Dreiecke von beliebigen Seiten, deren eine Ecke in den Nullpunkt der betreffenden Ebene fällt. Indem also

$$(8) \qquad a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

gesetzt wird, erweist sich die Abbildung als eine solche, bei der, nachdem der Nullpunkt der ersten Ebene auf den Nullpunkt der zweiten, ferner das System der xy Axen auf das System der tu Axen gelegt und um den Winkel γ gedreht, nachdem endlich jede in der ersten Ebene von dem Nullpunkt ausgehende gerade Linie in dem Verhältniss von 1 zu $\sqrt{a^2 + b^2}$ vergrössert ist, die nunmehr correspondirenden Punkte der beiden Ebenen zur Deckung kommen. *Demnach liefert die zweite Ebene eine Abbildung der ersten, bei welcher zwischen den entsprechenden Theilen vollkommene Aehnlichkeit stattfindet, und die Vergrösserung der zugeordneten Linien im Verhältniss der Einheit zu der Grösse* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *geschehen ist.* Offenbar nimmt auch diese Abbildung die Eigenschaft der Congruenz an, wofern $a^2 + b^2$, die Norm der complexen Constante $a + ib$, gleich der Einheit wird.

III. *Die Function $t + iu$ werde durch Division von $x + iy$ in die positive Einheit erzeugt,*

$$(9) \qquad t + iu = \frac{1}{x + iy}.$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Theils kommen für t und u die Ausdrücke

$$(10) \qquad t = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

aus denen durch Quadriren und Addiren die Gleichung

$$(11) \qquad t^2 + u^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

entsteht. Wir wollen nun in der ersten Ebene für gegebene Werthe von x und y denjenigen Punkt construiren, dessen erste Coordinate gleich t, dessen zweite Coordinate gleich u ist. Wegen der Gleichungen (10) entstehen t und u beziehungsweise aus x und $-y$ durch Multiplication mit derselben positiven Grösse. Sobald daher von dem Nullpunkt O der xy Ebene nach dem Punkte $(x, -y)$ oder R eine gerade Linie gezogen und über R hinaus unbegrenzt verlängert wird, so befindet sich auf derselben nothwendig der aufzusuchende Punkt R_1. Die Quadrate der von demselben Punkte O ausgehenden Strecken oder radii vectores OR und OR_1 sind beziehungsweise gleich $x^2 + y^2$ und $t^2 + u^2$, mithin muss in Folge der Gleichung (11) zwischen denselben die Gleichung

$$OR \,.\, OR_1 = 1$$

bestehen. Also wird der Ort des Punktes R_1 dadurch bestimmt, dass er auf der von O nach dem Punkte R gezogenen und eventuell über R hinaus verlängerten Linie in derjenigen Entfernung von O liegt, welche gleich dem reciproken Werthe der Entfernung OR ist. Das Gesetz, nach welchem jedem Punkte R der Ebene ein Punkt R_1 zugeordnet ist, hat die leicht erkennbare Eigenschaft, dass, wenn der Punkt R innerhalb eines mit der Einheit als Radius um O beschriebenen Kreises angenommen wird, der entsprechende Punkt R_1 ausserhalb dieses Kreises fällt, und dass umgekehrt, wenn R die Stelle des anfangs mit R_1 bezeichneten Punktes erhält, R_1 an die Stelle des früheren Punktes R tritt; dass ferner, wenn R in die Peripherie des genannten Kreises rückt, der entsprechende Punkt R_1 mit R zusammenfällt. Man nennt diese Beziehung der Punkte R und R_1, welche von *Newton* in den *Principien*, liber I, sectio XII, und seitdem vielfach angewendet ist, *das Princip der reciproken radii vectores. Um zu dem Punkte $x + iy$ der ersten Ebene den Punkt $t + iu$ der zweiten zu construiren, hat man in der ersten Ebene zu dem Punkte $x + iy$ oder (x, y) den zugehörigen Punkt $(x, -y)$ oder $x - iy$ aufzusuchen, welcher nach* I, § 42, *wofern die Axe der reellen Werthe als Spiegel dient, das Spiegelbild des erstern ist. Sobald dann für den Punkt $(x - iy)$ oder R der nach dem erwähnten Princip der reciproken radii vectores zugehörige Punkt R_1 construirt, und die erste Ebene mit aufeinander fallenden Nullpunkten und Axensystemen auf die zweite gelegt wird, so coincidirt der Punkt R_1 mit dem Punkte $t + iu$.*

Bei der vorliegenden Function $t + iu$ ist zu beachten, dass, wenn die Norm der Variable $x + iy$ der Null genähert wird, die Norm von $t + iu$ über jedes Mass hinauswächst, und dass einer über jedes Mass wachsenden Norm $x^2 + y^2$ eine gegen die Null abnehmende Norm $t^2 + u^2$ entspricht. Man müsste daher, um ganz strenge zu sein, in der ersten Ebene den Punkt $x + iy = 0$ mit einem kleinen Flächenstück, etwa einem Kreise von einem kleinen Radius ϱ umgeben, und diesen Theil der Fläche ausschliessen, desgleichen wäre die Betrachtung auf das

Innere eines Kreises zu beschränken, welcher um den Punkt $x+iy=0$ mit einem beliebig grossen Radius $\frac{1}{\sigma}$ beschrieben ist. Vermöge der Gleichung (9) entspricht dem Theile der ersten Ebene, welcher von den mit den Radien ϱ und Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen begrenzt ist, derjenige Theil der zweiten Ebene, welcher von den mit den Radien $\frac{1}{\varrho}$ und Eins um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen begrenzt wird, und gleichzeitig entspricht dem Theile der ersten Ebene, der von den mit den Radien Eins und $\frac{1}{\sigma}$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen begrenzt ist, der Theil der zweiten Ebene, der von den mit den Radien Eins und σ um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen begrenzt wird. Doch ist man übereingekommen, den kürzeren Ausdruck anzuwenden, dass zu dem Punkt $x+iy=0$ der ersten Ebene der im Unendlichen liegende Punkt der zweiten, und dass zu dem im Unendlichen liegenden Punkt der ersten Ebene der Punkt $t+iu=0$ der zweiten gehöre. Diese Ausdrucksweise schliesst sich an die in § 106 gebrauchte Bezeichnung an, nach der man sagt, dass die Function $\frac{1}{x+iy}$ für den Werth $x+iy=0$ aufhöre, endlich und stetig zu sein.

IV. Mit alleiniger Anwendung der in I, II, III untersuchten Operationen lässt sich ein Bruch bilden, dessen Zähler und Nenner ganze rationale Functionen des ersten Grades von $x+iy$ sind. *Wenn daher $t+iu$ gleich der folgenden Function von $x+iy$ ist,*

$$(12) \qquad t+iu=\frac{(a+ib)(x+iy)+a_1+ib_1}{(c+id)(x+iy)+c_1+id_1},$$

wo die vorkommenden vier complexen Constanten, damit $t+iu$ nicht gleich einer Constante werde, nur die Bedingung zu erfüllen haben, dass der Ausdruck

$$(13) \qquad E=(a+ib)(c_1+id_1)-(a_1+ib_1)(c+id)$$

nicht gleich Null sei, so kann nach dem Vorhergehenden die Abbildung der xy Ebene auf die tu Ebene durch Verbindung der drei Arten der Abbildung hervorgebracht werden, die durch I, II, III *characterisirt sind.* Die Ausführung bietet keine Schwierigkeit dar.

§ 110. Functionen von mehreren complexen Variabeln.

Man kann von der in § 106 aufgestellten Definition einer Function einer complexen Variable zu der Definition einer Function von mehreren complexen Variabeln übergehen. Für einen Ausdruck, welcher aus beliebigen complexen Constanten und den n complexen Variabeln

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2, \ldots z_n = x_n + iy_n$$

rational gebildet ist und die Bezeichnung

$$(1) \qquad t + iu = f(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

haben möge, wird nach den in § 105 angeführten Grundsätzen das vollständige Differential erhalten, indem man vermöge der für das Gebiet der reellen Grössen bekannten Regeln die partiellen Differentialquotienten von $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots z_n$ nimmt und mittelst derselben den Ausdruck

$$(2) \quad dt + i\,du$$
$$= \frac{\partial f}{\partial z_1}(dx_1 + i\,dy_1) + \frac{\partial f}{\partial z_2}(dx_2 + i\,dy_2) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n}(dx_n + i\,dy_n)$$

aufstellt. *Dem entsprechend heisst eine Verbindung $t + iu$, bei welcher die reellen Bestandtheile t und u von den $2n$ reellen Variabeln $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n$ abhängen, eine Function der n complexen Variabeln $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots x_n + iy_n$, wofern für die Verbindung der vollständigen Differentiale $dt + i\,du$ die Gleichung*

$$(3) \quad dt + i\,du = (\xi_1 + i\eta_1)(dx_1 + i\,dy_1) + \ldots + (\xi_n + i\eta_n)(dx_n + i\,dy_n)$$

besteht, in der $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots \xi_n, \eta_n$ reelle Functionen der $2n$ reellen Variabeln bedeuten.

In Folge der Gleichung (3) hat jede der Verbindungen $\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2, \ldots \xi_n + i\eta_n$ wieder die Eigenschaft, eine Function der n complexen Variabeln $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots x_n + iy_n$ zu sein. Den Beweis wollen wir für zwei Variabeln mittheilen; derselbe lässt sich für beliebig viele Variabeln ebenso führen. Bei $n = 2$ enthält die Gleichung (3) die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x_1} = \xi_1, & \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \eta_1, \quad \dfrac{\partial t}{\partial x_2} = \xi_2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \eta_2, \\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial y_1} = -\eta_1, & \dfrac{\partial u}{\partial y_1} = \xi_1, \quad \dfrac{\partial t}{\partial y_2} = -\eta_2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y_2} = \xi_2; \end{cases}$$

für $\xi_1 + i\eta_1$ und $\xi_2 + i\eta_2$ sind die entsprechenden Systeme von Gleichungen zu beweisen. Wegen der vollständigen Symmetrie braucht man nur einen Ausdruck, etwa $\xi_1 + i\eta_1$, zu betrachten; für diesen handelt es sich, wenn man den Gebrauch neuer Bezeichnungen ersparen will, um die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial y_2}, \\[2ex] \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen, in denen ξ_1 und η_1 nach x_1 und y_1 differentiirt sind, folgen aus den Gleichungen (4), in welchen t und u nach x_1 und y_1 differentiirt vorkommen, genau so wie in § 108 die Gleichungen (3) aus den Gleichungen (2). Dagegen leitet man die beiden übrigen Gleichungen (5) folgendermassen aus (4) ab:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial t}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial t}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial y_2}\right)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)}{\partial y_2}, \\[3ex] \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial y_2}, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial t}{\partial y_2}\right)}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial t}{\partial x_1}\right)}{\partial y_2}, \\[3ex] \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y_2}, \end{cases}$$

wodurch unsere Behauptung gerechtfertigt ist.

Unter der Voraussetzung von (3) wird

$$\xi_1 + i\eta_1,\ \xi_2 + i\eta_2, \ldots \xi_n + i\eta_n$$

respective der von der Function $t + iu$ nach der Variable $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2, \ldots x_n + iy_n$ genommene partielle Differentialquotient genannt, und zwar kommen die Bezeichnungen

$$(8)\quad \begin{cases} t + iu = f(z_1, z_2, \ldots z_n) \\[1ex] \xi_1 + i\eta_1 = \dfrac{\partial f}{\partial z_1},\ \xi_2 + i\eta_2 = \dfrac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots \xi_n + i\eta_n = \dfrac{\partial f}{\partial z_n} \end{cases}$$

zur Anwendung. Auch liegt in dem Bisherigen die Berechtigung, das Verfahren der partiellen Differentiation der Function $t+iu$ in Bezug auf die einzelnen complexen Variabeln zu wiederholen, und so partielle Differentialquotienten von beliebigen Ordnungen abzuleiten.

Capitel II.

Umkehrung einer Function einer complexen variabeln Grösse.

§ 111. Analytischer und geometrischer Process der Umkehrung einer Function einer complexen variablen Grösse.

Wenn $t+iu$ eine gegebene Function von $x+iy$ bedeutet, also t und u gegebene Functionen von x und y sind, so kann die Umkehrung dieses Systems von Functionen geucht, und vermöge der Grundsätze des Capitels XIV, Abschnitt I, die Abhängigkeit ermittelt werden, in welcher x und y von t und u stehen. Hierbei zeigt sich, dass $x+iy$ wieder eine Function von $t+iu$ ist. Dem § 103 entsprechend wird unter der Voraussetzung, dass einem Werthsystem $x=x(0)$, $y=y(0)$ das Werthsystem $t=t(0)$, $u=u(0)$ zugeordnet sei, das zu $x=x(1)$, $y=y(1)$ gehörende Werthsystem $t=t(1)$, $u=u(1)$ bestimmt. Dann hat man zuerst das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du}=\dfrac{-\dfrac{\partial t}{\partial y}}{\dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}} \\[2ex] \dfrac{dy}{du}=\dfrac{\dfrac{\partial t}{\partial x}}{\dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}, \end{cases}$$

und hierauf das System von eben solchen Differentialgleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}\,. \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}} \end{cases}$$

in der dort bezeichneten Weise zu integriren. Zugleich folgt aus (18) des § 104, dass, sobald man x und y als Functionen von t und u auffasst, die in (1) für $\frac{dx}{du}$ und $\frac{dy}{du}$, in (2) für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ angegebenen Ausdrücke beziehungsweise den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ gleich sind. Aus der für die Function $t+iu$ geltenden Definitionsgleichung

$$(3)\qquad dt + i\,du = (\xi + i\eta)\,(dx + i\,dy)$$

folgen nun characteristische Vereinfachungen. Weil die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x} = \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \xi \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial t}{\partial y} = \eta \end{cases}$$

gelten, so erhält *die Functionaldeterminante der Functionen t und u* den Werth

$$(5)\quad \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

der gleich *einer Summe von zwei Quadraten* ist. Ferner entstehen aus (1) und (2), indem auf der linken Seite die Zeichen der partiellen Differentialquotienten eingeführt werden, die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \\[3ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\dfrac{\partial t}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\dfrac{\partial t}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)^2}. \end{cases}$$

Da die beiden Nenner denselben Werth haben, so giebt die Anwendung von (4) das Resultat

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\dfrac{\partial x}{\partial u}, \end{cases}$$

nach welchem, wie vorhin behauptet wurde, in der That $x+iy$ *eine Function von* $t+iu$ ist.

Wofern x und y schon als Function von t und u bestimmt sind, erweist sich $x+iy$ dadurch als Function von $t+iu$, dass die Gleichung (3), indem beide Seiten mit $\xi+i\eta$ dividirt werden, in die Gestalt

$$(9)\quad dx + i\,du = \frac{1}{\xi+i\eta}(dt + i\,du)$$

übergeht. Auch sieht man sogleich ein, *dass der von* $x+iy$ *nach* $t+iu$ *genommene Differentialquotient gleich dem reciproken Werthe des von* $t+iu$ *nach* $x+iy$ *genommenen Differentialquotienten ist.* In der betreffenden Gleichung

$$(10)\quad \frac{d(x+iy)}{d(t+iu)} = \frac{1}{\xi+i\eta}$$

ist die Regel des § 11 verallgemeinert.

Bei der geometrischen Betrachtung, in welcher $x+iy$ einen Punkt einer ersten, $t+iu$ einen Punkt einer zweiten Ebene bezeichnet, läuft der Satz, dass, wenn $t+iu$ eine Function von $x+iy$ ist, auch umgekehrt $x+iy$ eine Function von $t+iu$ sein muss, auf die augenfällige Thatsache hinaus, dass, wenn mit einem Dreieck der ersten Ebene von unendlich kleinen Seiten das zugeordnete Dreieck der zweiten Ebene ähnlich und gleichliegend ist, auch das erste Dreieck mit dem zweiten ähnlich und gleichliegend ist. Ferner hat der Umstand, dass bei der Vertauschung der beiden Ebenen statt $\xi + i\eta$ der Ausdruck $\frac{1}{\xi + i\eta}$ auftritt, und dass durch Einführung der in (9) des § 106 bezeichneten Grössen die Gleichungen

$$(11) \qquad \xi + i\eta = \sigma(\cos\gamma + i\sin\gamma), \; \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{1}{\sigma}(\cos\gamma - i\sin\gamma)$$

entstehen, den ebenfalls evidenten geometrischen Inhalt, dass bei dieser Vertauschung das Verhältniss der linearen Vergrösserung in den reciproken Werth und der durch γ dargestellte Drehungswinkel in den gleichen und entgegengesetzten Werth verwandelt wird.

Was die zur Lösung der Umkehrungsaufgabe gebildeten Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen anlangt, so bestimmt nach § 103 das System (1) auf der ersten Ebene diejenige von dem Punkt $x(0) + iy(0)$ ausgehende Linie, welche zu der auf der zweiten Ebene von dem Punkte $t(0) + iu(0)$ bis zu dem Punkte $t(0) + iu(1)$ gezogenen, mit der u Axe parallelen geraden Linie gehört, ferner giebt das System (2) auf der ersten Ebene die Linie, welche an die so eben bezeichnete anschliesst, zu der auf der zweiten Ebene von dem Punkte $t(0) + iu(1)$ bis zu dem Punkte $t(1) + iu(1)$ gezogenen mit der t Axe parallelen geraden Linie gehört, und den gesuchten Punkt $x(1) + iy(1)$ zum Endpunkt hat.

Von besonderer Wichtigkeit für die Umkehrungsaufgabe ist die Voraussetzung, dass die betreffende Functionaldeterminante nicht verschwinden darf. In Folge von (3) ist die letztere, wie in (5) angegeben, gleich der Quadratsumme $\xi^2 + \eta^2$, und kann daher nur mit der complexen Grösse $\xi + i\eta$ zusammen verschwinden. Sobald für einen Werth $x + iy$ der Differentialquotient $\frac{d(t + iu)}{d(x + iy)} = \xi + i\eta$ gleich Null wird, verlieren die Schlüsse, mittelst deren in § 106 aus der dortigen Gleichung (1) gefolgert wurde, dass das in der zweiten Ebene befindliche Dreieck von den Ecken (12) dem in der ersten Ebene befindlichen Dreieck von den Ecken (11) ähnlich sei, wie dort bemerkt ist, ihre Gültigkeit, und unter dieser Voraussetzung fehlt das Recht, aus der obigen Gleichung (3) die Gleichung (9) abzuleiten.

Wir wenden uns jetzt zu der Umkehrung der rationalen Functionen einer complexen Variable, und beginnen mit der gebrochenen Function, welche in § 109 unter IV angeführt ist, deren Zähler und Nenner ganze rationale Functionen des ersten Grades von $x+iy$ sind,

(12) $$t+iu=\frac{(a+ib)(x+iy)+a_1+ib_1}{(c+id)(x+iy)+c_1+id_1};$$

hierbei wird die Verbindung

(13) $$E=(a+ib)(c_1+id_1)-(a_1+ib_1)(c+id)$$

als von Null verschieden vorausgesetzt. Aus (12) ergiebt sich für $x+iy$ eine Gleichung des ersten Grades, deren Auflösung die Bestimmung

(14) $$x+iy=\frac{(c_1+id_1)(t+iu)-(a_1+ib_1)}{-(c+id)(t+iu)+a+ib}$$

liefert. Es wird also $x+iy$ ebenfalls gleich einem Bruche, dessen Zähler und Nenner ganze rationale Functionen des ersten Grades von $t+iu$ sind, und bei dem die mit E correspondirende Verbindung ebenfalls gleich E ist. Nach (12) gehört zu jedem $x+iy$ ein eindeutig bestimmter Werth $t+iu$, nach (14) zu jedem $t+iu$ ein eindeutig bestimmter Werth $x+iy$. Für die betreffenden Differentialquotienten entstehen aus (12) und (14) nach § 105 und 107 die Ausdrücke

(15) $$\frac{d(t+iu)}{d(x+iy)}=\frac{E}{((c+id)(x+iy)+c_1+id_1)^2},$$

(16) $$\frac{d(x+iy)}{d(t+iu)}=\frac{E}{(-(c+id)(t+iu)+a+ib)^2},$$

deren Product gleich der Einheit sein muss; dies wird durch die aus (12) folgende Gleichung

(17) $$((c+id)(x+iy)+c_1+id_1)(-(c+id)(t+iu)+a+ib)=E$$

bestätigt. Wie man sieht, nähert sich der Differentialquotient $\frac{d(t+iu)}{d(x+iy)}$ dann und nur dann der Null, wenn die Norm von $x+iy$ über jedes Mass zunimmt und $t+iu=\frac{a+ib}{c+id}$ wird; derselbe Differentialquotient hat dann und nur dann eine über jedes Mass wachsende Norm, wenn die Norm von $t+iu$ über jedes Mass wächst und $x+iy=-\frac{c_1+id_1}{c+id}$ wird. Bei der in (12) dargestellten Abhängigkeit entsprechen daher die ganze xy und die ganze tu Ebene einander eindeutig mit einer in den zugehörigen kleinsten Theilen vorhandenen Aehnlichkeit. Ausnahmen von diesem Gesetz finden nur dann statt, sobald der Punkt $x+iy$ dem Werthe $-\frac{c_1+id_1}{c+id}$; und sobald der Punkt $t+iu$ dem Werthe $\frac{a+ib}{c+id}$ genähert wird, und zwar in der Weise, dass im ersten Falle einem Dreieck von unendlich kleinen Seiten in der ersten Ebene nicht mehr ein ähnliches Dreieck von unendlich kleinen Seiten in der zweiten, und im zweiten Falle einem Dreieck von unendlich kleinen Seiten in der zweiten Ebene nicht mehr ein ähnliches Dreieck von unendlich kleinen Seiten in der ersten Ebene entspricht.

§ 112. Umkehrung einer positiven ganzen Potenz einer Variable. Windungspunkt einer Riemann'schen Fläche.

Die Forderung, aus der Gleichung

$$(1) \qquad t+iu=(x+iy)^n,$$

in welcher n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, $x+iy$ als Function von $t+iu$ zu bestimmen, fällt mit der Aufgabe zusammen, eine reine Gleichung des $n$ten Grades aufzulösen, in welcher $t+iu$ beliebig gegeben ist und die Unbekannte mit $x+iy$ bezeichnet wird. Von der letztern Aufgabe ist in I, § 33 eine für jeden Werth von n geltende vollständige Behandlung mitgetheilt worden, bei welcher die Eigenschaften der trigonometrischen Functionen benutzt sind. Dann folgt in I, § 34 eine Auflösung der reinen quadratischen Gleichung, wobei nur die Ausziehung von Quadratwurzeln aus reellen positiven Grössen zur Anwendung kommt. Zufolge dieser Methode genügen der Gleichung

$$(2) \qquad t+iu=(x+iy)^2$$

zwei und nur zwei Werthe von $x+iy$, welche, sofern man die mit dem Vorzeichen von u versehene Einheit mit ζ bezeichnet und die Quadratwurzel positiv nimmt, folgendermassen lauten

$$(3) \qquad x+iy=\sqrt{\frac{t+\sqrt{t^2+u^2}}{2}}+i\zeta\sqrt{\frac{-t+\sqrt{t^2+u^2}}{2}},$$

$$(4)\qquad x+iy=-\sqrt{\frac{t+\sqrt{t^2+u^2}}{2}}-i\zeta\sqrt{\frac{-t+\sqrt{t^2+u^2}}{2}}.$$

Auf die vorstehenden Ausdrücke ist in § 14 dieses Bandes eine rein analytische Definition der inversen und directen trigonometrischen Functionen gegründet worden, aus der die Eigenschaften der trigonometrischen Functionen folgen, welche zur Beherrschung der mit einem beliebigen n gebildeten Gleichung (1) gebraucht werden.

Da der Differentialquotient

$$(5)\qquad \frac{d(t+iu)}{d(x+iy)}=n(x+iy)^{n-1}$$

für den Werth $x+iy=0$ verschwindet, so hat man nach dem vorigen § für die Umgebung des zugeordneten Punktes der ersten Ebene eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung nicht zu erwarten. Sobald die Grössen x, y, t, u wie die entsprechenden Grössen in I, § 33 durch die Polarcoordinaten

$$(6)\qquad x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta,\ t=s\cos\varphi,\ u=s\sin\varphi$$

ausgedrückt werden, wobei r und s stets positiv sind, verwandelt sich (1) in die Gleichung

$$(7)\qquad s(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta);$$

hiernach wird

$$(8)\qquad s\cos\varphi=r^n\cos n\vartheta,\ s\sin\varphi=r^n\sin n\vartheta,$$

und

$$(9)\qquad s=r^n,\ \cos\varphi=\cos n\vartheta,\ \sin\varphi=\sin n\vartheta.$$

Der Betrag r der complexen Grösse $x+iy$ giebt für die erste Ebene den Abstand des Punktes $x+iy$ von dem Nullpunkt, der mit dem Werthe Null beginnende Winkel ϑ den Drehungswinkel des radius vector an, dessen Anfangslage mit der positiven x Axe zusammenfällt; s und φ haben für den Punkt $t+iu$ der zweiten Ebene die entsprechende Bedeutung. Wegen der Gleichung $s=r^n$ bleibt bei ungeändertem Betrage r der Betrag s ebenfalls ungeändert. Während in der ersten Ebene der Punkt $x+iy$ um den Nullpunkt auf einer Kreislinie, deren Halbmesser den festen Werth r hat, fortschreitet, und ϑ von der Null stets zunehmend zu einem Werthe ϑ_1 übergeht, bewegt sich der zugeordnete Punkt $t+iu$ in der zweiten Ebene auf einer Kreislinie, deren Halbmesser gleich s ist, und der betreffende Winkel φ, der beständig gleich dem $n$fachen Winkel ϑ ist, wächst von der Null bis zu dem Werthe $\varphi_1 = n\,\vartheta_1$. Es sei nun ϑ_1 kleiner als der $n$te Theil der ganzen Peripherie 2π, so dass φ kleiner als 2π bleibt, dann entspricht dem Dreieck der ersten Ebene mit den Eckpunkten

$$r,\ 0,\ r(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$

das Dreieck der zweiten Ebene mit den Eckpunkten

$$s,\ 0,\ s(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

auch werden für einen hinreichend kleinen Werth von r sowohl die Seiten des ersten wie des zweiten Dreiecks beliebig klein; jedoch findet zwischen den beiden Dreiecken vermöge der Ungleichheit der an den Nullpunkten liegenden Winkel keine Aehnlichkeit statt.

Zufolge I, § 33 entsprechen einer beliebig gegebenen Grösse $t + iu = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *die n von einander verschiedenen Werthe von $x + iy$,*

$$(10) \qquad \sqrt[n]{s}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

wobei k der Reihe nach gleich $0, 1, 2, \ldots n-1$ zu setzen ist. Daselbst wird $x + iy$ *eine n-deutige Function von $t + iu$* genannt, und nach I, § 54 durch *das n-deutige Wurzelzeichen* $\sqrt[n]{t + iy}$ dargestellt, statt dessen man auch das Zeichen

$$(11) \qquad x + iy = (t + iu)^{\frac{1}{n}}$$

gebraucht. In der geometrischen Repräsentation entspricht also einem Punkte $x + iy$ nur ein Punkt $t + iu$, während zu einem Punkte $t + iu$ hingegen n Punkte $x + iy$ gehören, die nach (10) auf dem Umfange des mit dem Halbmesser $\sqrt[n]{s}$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises so liegen, dass sie die Kreislinie in n gleiche Theile theilen. Eine neue Ansicht dieser Beziehung entsteht aus einem Gedanken, der in § 93 zu einem anderen Zwecke angewendet ist. Man darf sich vorstellen, dass das abzubildende ebene Stück wie ein Blatt auf der xy Ebene liege, dass jeder kleinste Theil dieses Blattes den zugeordneten kleinsten Theil eines auf der tu Ebene befindlichen ebenen Blattes erzeuge, und dass die Theile des zweiten Blattes genau in derselben Weise wie die correspondirenden Theile des ersten Blattes stetig zusammenhängen. Wir betrachten jetzt den Theil der xy Ebene, welcher nach den obigen Bezeichnungen durch den vom Nullpunkte nach $x+iy$ gezogenen festen radius vector r bestrichen wird, während der Winkel ϑ von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ zunimmt. In Folge dessen bestreicht in der tu Ebene der vom Nullpunkt nach $t+iu$ gezogene feste radius vector s das Flächenstück, für welches der Winkel φ von 0 bis 2π wächst. Nach der angegebenen Vorstellung liegt nunmehr auf der ersten Ebene ein Kreissector von dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und dem Halbmesser r, welcher auf der zweiten Ebene einen Kreis vom Radius s erzeugt. Wofern der Winkel ϑ nochmals um $\frac{2\pi}{n}$ grösser wird, beschreibt der Winkel φ eine zweite Kreisperipherie; jedem Zuwachs von ϑ um $\frac{2\pi}{n}$ entspricht also die Zunahme von φ um 2π. Mithin liegen auf der ersten Ebene n auf einander folgende Sectoren, bei denen der $n$te an den ersten anschliesst und dadurch ein kreisförmiges Blatt vollendet. Auf der zweiten Ebene befinden sich dagegen n kreisförmige Blätter, bei denen nach der gegebenen Regel der letzte Radius vector des ersten mit dem ersten radius vector des zweiten, der letzte radius vector des zweiten mit dem ersten radius vector des dritten, u. s. f. der letzte radius vector des $n$ten mit dem ersten radius vector des ersten Blattes zusammenhängt. So entsteht ein Ganzes von n über einander liegenden in der bezeichneten Weise zusammenhängenden Blättern, wobei das letzte Blatt wieder mit dem ersten verbunden ist. Dieses Bild einer n-blätterigen Fläche ist von *Riemann* in der schon erwähnten Inauguraldissertation eingeführt und nach ihm benannt worden. Die so eben beschriebene auf der tu Ebene liegende n-blätterige Fläche besitzt den Vorzug, dass jedem Punkte $t+iu$ derselben ein einziger Punkt $x+iy$ entspricht, und dass daher $x+iy$ zu *einer eindeutigen Function des Ortes* $t+iu$ *auf der Fläche* wird. Insofern ein auf jener Fläche durchlaufener Weg, nachdem um den bezeichneten Nullpunkt n Windungen gemacht sind, zu dem Ausgangspunkte zurückführt, hat *Riemann* einen

Punkt von der Beschaffenheit des Nullpunktes *einen Windungspunkt* genannt, und zwar *einen Windungspunkt der* $(n-1)$ *ten Ordnung.*

Vermittelst der allgemeinen in (10) des vorigen § enthaltenen Regel erhält man aus (5) für den Differentialquotienten der in (11) bezeichneten Function $x+iy$ den Ausdruck

$$\frac{d(x+iy)}{d(t+iu)} = \frac{1}{n(x+iy)^{n-1}}. \tag{12}$$

Auf der rechten Seite ist dann derjenige unter den n Werthen von $(t+iu)^{\frac{1}{n}}$, dessen Differentialquotient gesucht wird, zu substituiren, wodurch die Gleichung

$$\frac{d(t+iu)^{\frac{1}{n}}}{d(t+iu)} = \frac{1}{n}(t+iu)^{\frac{1}{n}-1} \tag{13}$$

entsteht. Während die Function $(t+iu)^{\frac{1}{n}}$ für einen gegen die Null abnehmenden Betrag von $t+iu$ oder für eine Annäherung von $t+iu$ gegen den Werth Null einen ebenfalls gegen die Null convergirenden Betrag erhält, wächst dabei der Betrag der rechten Seite von (13) über jedes Mass hinaus. Mithin bildet der Werth $t+iu=0$ selbst eine Ausnahme, für welche die Gleichung (13) strenge genommen nicht mehr gilt; nach dem eingeführten Sprachgebrauche ist $(t+iu)^{\frac{1}{n}}$ für $t+iu=0$ zwar noch eine endliche aber nicht mehr eine stetige Function von $t+iu$.

Da für eine positive oder negative ganze Zahl m die Gleichung

$$\frac{d(x+iy)^m}{d(x+iy)} = m(x+iy)^{m-1} \tag{14}$$

gilt, so wird der Differentialquotient einer Potenz von $t+iu$ mit beliebigem rationalem Exponenten $\frac{m}{n}$, welche durch die Gleichung

$$(t+iu)^{\frac{m}{n}} = ((t+iu)^{\frac{1}{n}})^m \tag{15}$$

definirt ist, und, falls m und n keinen gemeinsamen Theiler haben, eine n-deutige Function von $t+iu$ bildet, nach § 109 durch die Gleichung

$$(16)\qquad \frac{d(t+iu)^{\frac{m}{n}}}{d(t+iu)} = \frac{m}{n}(t+iu)^{\frac{m}{n}-1}$$

ausgedrückt, die mit (19) des § 9 übereinstimmt. Auf der letzteren beruht die Differentiation der algebraischen mit Hülfe von Wurzelzeichen dargestellten Functionen einer reellen Variable, so dass wieder für die Differentiation der gleichnamigen Functionen einer complexen Variable die gleichen Regeln gelten.

§ 113. Umkehrung einer rationalen ganzen Function einer Variable. Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen.

Eine beliebige rationale ganze Function des n ten Grades von der Variable $x+iy$ sei folgendermassen bezeichnet

$$(1)\quad f(x+iy)=(a_0+ib_0)(x+iy)^n+(a_1+ib_1)(x+iy)^{n-1}+\ldots+a_n+ib_n,$$

wobei der Coefficient a_0+ib_0 von Null verschieden vorausgesetzt ist. Wenn nun bei der Gleichung

$$(2)\qquad t+iu=f(x+iy)$$

die Grösse $x+iy$ als Function von $t+iu$ betrachtet wird, so hat man für jeden beliebig gewählten complexen Werth $t(1)+iu(1)$ alle der Gleichung (2) genügenden Werthe von $x+iy$ aufzusuchen. Diese ist in Bezug auf $x+iy$ eine algebraische Gleichung des n ten Grades und liefert nach dem in I, § 61 u. ff. bewiesenen Fundamentalsatze stets n Wurzeln, von denen unter gewissen Bedingungen mehrere zusammenfallen können. *Somit wird durch die Umkehrung der Gleichung* (2) *die Grösse $x+iy$ als eine n-deutige Function der Grösse $t+iu$ bestimmt. Für den Differentialquotienten von $t+iu$ ergiebt sich*

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d(t+iu)}{d(x+iy)}=f'(x+iy), \\ f'(x+iy)=n(a_0+ib_0)(x+iy)^{n-1}+\ldots a_{n-1}+ib_{n-1}, \end{cases}$$

woraus unter Ausschliessung der Werthe, für die $f'(x+iy)$ verschwindet, nach (9) des § 112 der Differentialquotient von $x+iy$

(4) $$\frac{d(x+iy)}{d(t+iu)} = \frac{1}{f'(x+iy)}$$

hervorgeht.

Es wird zu einem genaueren Verständniss der Abhängigkeit, in welcher $x+iy$ von $t+iu$ steht, beitragen, wenn wir von dem gegenwärtigen Standpunkte auf den angeführten Beweis des algebraischen Fundamentaltheorems zurückblicken und denselben zur Lösung der Aufgabe verwenden, für den so eben mit $t(1)+iu(1)$ bezeichneten Werth einen Werth $x+iy$ zu ermitteln, der die Function

(5) $$t+iu-t(1)-iu(1)=f(x+iy)-t(1)-iu(1)$$

zum Verschwinden bringt. Das dortige Verfahren lehrt eine Folge von Grössen bestimmen

(6) $$x^{(0)}+iy^{(0)}=Z^{(0)},\ x^{(1)}+iy^{(1)}=Z^{(1)},\ldots$$

bei deren Substitution die Beträge der linken Seite von (5) immer abnehmend der Null beliebig nahe kommen, und die gegen einen festen Grenzwerth, den gesuchten Werth $x+iy$, convergiren. In der im ersten Bande mitgetheilten Darstellung wird $x+iy$ durch einen Punkt einer Ebene, doch $t+iu$ nicht durch den zugeordneten Punkt einer zweiten Ebene repräsentirt. Da bei der neuen Anschauung der Betrag der linken Seite von (5) den Abstand des Punktes $t+iu$ von dem Punkte $t(1)+iu(1)$ ausdrückt, so sind die Punkte (6) der Bedingung unterworfen, dass die Entfernungen der auf der zweiten Ebene zugeordneten Punkte

(7) $$t^{(0)}+iu^{(0)}=W^{(0)},\ t^{(1)}+iu^{(1)}=W^{(1)},\ldots$$

von dem gegebenen Punkte

(8) $$t(1)+iu(1)=W(1)$$

der Reihe nach stets abnehmen und der Null beliebig nahe kommen. Man bestimmt die Grössen (6) aus der ersten $Z^{(0)}$, indem nach einer gewissen Vorschrift die successiven Differenzen

(9) $$Z^{(1)}-Z^{(0)}=\Delta Z^{(0)},\ Z^{(2)}-Z^{(1)}=\Delta Z^{(1)},\ldots$$

gebildet werden; dies bedingt die in der zweiten Ebene von dem ersten zum zweiten, vom zweiten zum dritten Punkt u. s. f. gezogenen geraden Linien. Die Richtung und Länge der Linien wird aus der betreffenden Differenz $f(Z+\Delta Z)-f(Z)$ gefunden, die nach dem in I, § 49 enthaltenen Satze für irgend zwei complexe Werthe Z und $Z + \Delta Z$ den Ausdruck hat

$$(10) \quad f(Z+\Delta Z) \quad f(Z) = f'(Z)\Delta Z + \frac{f''(Z)}{2!}(\Delta Z)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(Z)}{n!}(\Delta Z)^n;$$

hier ist wieder nach § 108 für jede Zahl p

$$(11) \qquad \frac{d^p f(Z)}{dZ^p} = f^{(p)}(Z).$$

Denkt man sich, dass auf der zweiten Ebene eine gerade Linie von dem Punkte $f(Z) = T + iU$ nach dem gegebenen Punkte $t(1) + iu(1)$ und eine gerade Linie von dem Punkte $f(Z) = T + iU$ nach dem Punkte $f(Z + \Delta Z)$ gezogen sei, und verlangt, dass die zweite Linie in die Richtung der ersten falle, so muss der reelle Theil zu dem Factor von i in der Differenz (10) dasselbe Verhältniss haben wie in der Differenz

$$(12) \qquad -T - iU + t(1) + iu(1),$$

oder die erstere aus der letztern durch Multiplication mit einem positiven reellen Factor hervorgehn. Wenn jedoch diese Forderung nur für Werthe ΔZ von beliebig kleinem Betrage erfüllt sein soll, so darf man statt (10) den ersten Bestandtheil der rechten Seite nehmen, bei welchem die betreffende Ableitung $f^{(\alpha)}(Z)$ nicht gleich Null ist, und mit einer reellen positiven Grösse h die Gleichung

$$(13) \qquad \frac{f^{(\alpha)}(Z)}{(\alpha)!}(\Delta Z)^\alpha = -h(T + iU - t(1) - iu(1)).$$

aufstellen. Durch eine Vergrösserung des positiven Werthes h wird in ΔZ nur der Betrag, dagegen nicht das Verhältniss des reellen und imaginären Theils geändert. Wenn man daher aus (13) für einen gewissen Werth von Z die Differenz ΔZ bestimmt, so ist die Richtung der von dem Punkte Z nach dem Punkte $Z + \Delta Z$ zu ziehenden geraden Linie durch die Richtung der in der zweiten Ebene von $T + iU$ nach $t(1) + iu(1)$ geführten geraden Linie gegeben, während die Länge der ersten geraden Linie von der Grösse des Werthes h abhängt. Bei einer Vergleichung dieses Verfahrens mit demjenigen, welches in § 85 zur Behandlung des dortigen Systems von Differenzengleichungen gedient hat, wird man finden, dass den beiden Processen derselbe Gedanke zu Grunde liegt, und dass der in Rede stehende Beweis des algebraischen Fundamentaltheorems mit der Untersuchung über die Möglichkeit der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen genau correspondirt.

Vermittelst (13) wird die Differenz $\varDelta Z$ eindeutig oder mehrdeutig bestimmt, je nachdem die Zahl $\mathfrak{a}$ gleich oder grösser als Eins ist. Im ersten Falle ist für den bezüglichen Werth Z die Function $f'(Z)$ nothwendig von Null verschieden, im zweiten Falle verschwinden dagegen nach der Voraussetzung die Functionen

$$(14) \qquad f'(Z), f''(Z), \dots f^{(\mathfrak{a}-1)}(Z),$$

während $f^{(\mathfrak{a})}(Z)$ nicht gleich Null ist. Demnach kann $\mathfrak{a}$ nur für solche Werthe von Z die Einheit übertreffen, für welche die Function des $(n-1)$ten Grades $f'(Z)$ gleich Null wird. Weil aber nach einer in I, § 62 gemachten Bemerkung bei dem Beweise der Existenz einer Wurzel einer beliebigen Gleichung des $n$ten Grades vorausgesetzt werden darf, dass der entsprechende Beweis vorher für die Gleichungen des nächst niedrigeren Grades erbracht sei, so haben wir angenommen, dass die Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$ bekannt seien und die folgende Zerlegung von $f'(z)$ in Factoren des ersten Grades liefern

$$(15) \qquad f'(z) = n(a_0 + ib_0)\,(z - \eta_1)\,(z - \eta_2) \dots (z - \eta_{n-1}).$$

Hier möge η_g für den jedesmaligen Zeiger g eine $\mathfrak{b}_g$te Wurzel der Gleichung $f'(z) = 0$ sein, so dass die Functionen

$$(16) \qquad f'(\eta_g), f''(\eta_g), \dots f^{(\mathfrak{b}_g)}(\eta_g)$$

gleichzeitig verschwinden, $f^{(\mathfrak{b}_g+1)}(\eta_g)$ aber von Null verschieden ist. In Folge dessen nimmt die Zahl $\mathfrak{a}$ in (13) dann und nur dann einen von der Einheit verschiedenen Werth an, wenn Z einer der Grössen

$$(17) \qquad \eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$$

gleich wird, und zwar ist für η_g die Zahl $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_g + 1$. Um sicher zu sein, dass bei der fortgesetzten Anwendung des Verfahrens kein Werth von Z vorkommen kann, für den $\mathfrak{a} > 1$ ist, wird mit einem dieser Werthe in der folgenden Weise angefangen. Unter den Grössen (17) sei η_1 so ausgewählt, dass der Betrag der Differenz

(18) $$f(\eta_1) - t(1) - iu(1)$$

kleiner oder doch nicht grösser als für die übrigen ist, das heisst, der Abstand des in der zweiten Ebene zu η_1 zugehörigen Punktes von dem gegebenen Punkte $t(1) + iu(1) = W(1)$ kleiner oder doch nicht grösser ausfällt als für die zu $\eta_2, \eta_3, \ldots \eta_{n-1}$ gehörigen Punkte. In Folge der angenommenen Bezeichnung wird für den Werth $Z = \eta_1$ die in (13) auftretende Zahl $\mathfrak{a}$ gleich $b_1 + 1$. Mithin gehen in der ersten Ebene von dem Punkte $Z^{(0)} = \eta_1$ unter gleichen Winkeln $b_1 + 1$ gerade Linien aus, von denen irgend eine zum Beginne des Verfahrens benutzt werden darf. Dem nächsten Werthe $Z^{(1)}$ entspricht dann ein Punkt $f(Z^{(1)}) = W^{(1)}$ der zweiten Ebene, welcher dem Punkte $t(1) + iu(1)$ näher liegt als der Punkt $f(Z^{(0)}) = W^{(0)}$, ferner ist die zu der neuen Gleichung gehörende Zahl $\mathfrak{a}$ nothwendig gleich Eins; ebenso gelangt man unter passender Verfügung über die positiven Grössen h zu einer beliebig genauen Bestimmung eines Werthes $x + iy$, für den die linke Seite von (5) gleich Null ist. Nach I, § 49 können von den n Werthen $x + iy$, welche zu $t(1) + iu(1)$ gehören, nur dann mehrere zusammenfallen, wenn die erste Ableitung der rechten Seite von (5), das heisst $\frac{d f(x+iy)}{d(x+iy)}$ verschwindet, und dies geschieht eben nur für die Werthe (17) von $x + iy$.

Für diese Werthe verliert die Function $f(z)$ ihre Stetigkeit und die Gleichung (4) hört auf zu gelten. Wendet man nun die im vorigen § entwickelte *Riemann*'sche Vorstellung auf die zu (2) gehörende n-deutige Function $x + iy$ von $t + iu$ an, so entsteht demnach eine die tu Ebene bedeckende Fläche von n Blättern, die nur in denjenigen Punkten zusammenhängen, welche zu den Punkten (17) der xy Ebene gehören und respective mit

(19) $$f(\eta_1), f(\eta_2) \ldots f(\eta_{n-1})$$

bezeichnet werden. Wenn Z in der Gleichung (10) der Reihe nach gleich $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ oder η_g gesetzt wird, so folgt aus dem Umstande, dass die Entwickelung rechts mit dem Gliede $\frac{f^{(b_g+1)}(\eta_g)}{(b_g+1)!}(\varDelta Z)^{b_g+1}$ beginnt, das Resultat, dass hier $b_g + 1$ Blätter der *Riemann'schen Fläche* durch einen Windungspunkt der b_g ten Ordnung vereinigt sind. Es werden also in (19) die sämmtlichen Windungspunkte der Fläche dargestellt, welche sonst überall eine streng conforme Abbildung der xy Ebene liefert. Bei dem Gebrauche dieser Anschauung überzeugt man sich leicht, dass, indem das vorhin besprochene Verfahren mit dem Punkte der ersten Ebene $Z^{(0)} = \eta_1$ anfängt, die oben erwähnten von diesem Punkte unter gleichen Winkeln ausgehenden $b_1 + 1$ geraden Linien die Möglichkeit bieten, von η_1 in der Art fortzuschreiten, dass der entsprechende Punkt der zweiten Ebene von dem zugehörigen Windungspunkte $f(\eta_1)$ in jedem der dort zusammenhängenden $b_1 + 1$ Blätter auf den mit $t(1) + iu(1)$ zu bezeichnenden Punkt hinrückt, und dabei das einmal gewählte Blatt nie verlässt. Hierdurch wird zugleich bemerklich gemacht, dass jenes Verfahren für einen gegebenen Werth $t(1) + iu(1)$ die Anzahl $b_1 + 1$ von zusammengehörigen entsprechenden Werthen $x + iy$ hervorbringt.

§ 114. Abhängigkeit zwischen zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen complexen Variabeln. Ausdruck einer allgemeinen algebraischen Function einer complexen Variable.

Man habe eine rationale ganze Function der zwei complexen Variabeln $x + iy = z$ und $t + iu = w$, welche nach z vom $m$ten, nach w vom $n$ten Grade ist,

(1) $$F(z, w) = A_0 w^n + A_1 w^{n-1} + \ldots + A_n;$$

hier seien $A_0, A_1, \ldots A_n$ die folgenden mit beliebigen complexen Coefficienten gebildeten ganzen Functionen von z,

(2) $$\begin{aligned} A_0 &= A_{0,0} z^{m_0} + A_{0,1} z^{m_0 - 1} + \ldots + A_{0,m_0} \\ A_1 &= A_{1,0} z^{m_1} + A_{1,1} z^{m_1 - 1} + \ldots + A_{1,m_1} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_n &= A_{n,0} z^{m_n} + A_{n,1} z^{m_n - 1} + \ldots + A_{n,m_n}, \end{aligned}$$

und m gleich der grösten in der Reihe $m_0, m_1, \ldots m_n$ vorkommenden Zahl. Durch die Gleichung

(3) $$F(z, w) = 0$$

wird dann zwischen den complexen Grössen z und w eine solche

Abhängigkeit ausgedrückt, dass nach dem Fundamentalsatze der algebraischen Gleichungen n Werthe von w zu jedem Werthe von z, und m Werthe von z zu jedem Werthe von w gehören. Weil nun aus (3) das Verschwinden des vollständigen Differentials $dF(w, z)$ folgt, und dieses vermöge § 110 den Ausdruck

$$(4) \qquad \frac{\partial F(z, w)}{\partial z} d(x + iy) + \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} d(t + iu)$$

hat, so gilt die Bedingung, durch welche w als eine Function von z, und z als eine Function von w characterisirt ist; die betreffenden Differentialquotienten sind daher,

$$(5) \qquad \frac{d(t + iu)}{d(x + iy)} = -\frac{\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial z}}{\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}},$$

$$(6) \qquad \frac{d(x + iy)}{d(t + iu)} = -\frac{\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial z}}.$$

Damit die zu einem Werthe von z gehörenden n Werthe von w von einander verschieden seien, darf $\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}$ nicht mit $F(z, w)$ gleichzeitig verschwinden; ebenso darf, damit die zu einem Werthe von w gehörenden n Werthe von z von einander differiren, $\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial z}$ nicht mit $F(z, w)$ gleichzeitig verschwinden.

Das gegenwärtige Verfahren entspricht genau demjenigen, welches in § 49 benutzt ist, um den Differentialquotienten einer durch eine algebraische Gleichung gegebenen reellen Function einer reellen Variable zu erhalten. Doch erscheint die gegenseitige Abhängigkeit zweier Grössen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, erst dann in voller Regelmässigkeit, wenn beiden Grössen die Eigenschaft von complexen Variabeln beigelegt wird. Auch lässt sich jetzt die am Schlusse des § 9 aufgestellte Definition, wonach eine algebraische Function einer Variable eine solche ist, die aus der Variable mittelst einer beschränkten Anzahl von algebraischen Operationen entspringt, und wonach ausser den rationalen Operationen das Bestimmen der Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen der Variable sind, eine algebraische Operation genannt wird, auf eine complexe Variable und auf die Anwendung von beliebigen complexen Constanten in den rationalen Operationen ausdehnen; gleichzeitig enthält das Vorhergehende den Beweis, dass das Ergebniss der bezeichneten mit einer complexen Variable $x+iy$ vorgenommenen Operationen der Forderung (1) des § 106 genügt und daher eine Function der Variable $x+iy$ liefert. Man kann deshalb eine allgemeine algebraische Function der Variable $z=x+iy$ als einen Bruch ausdrücken, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Functionen der Wurzel w einer Gleichung des $n$ten Grades von der Gestalt (3) sind. Ein solcher Bruch ist in § 69 für das reelle Gebiet betrachtet worden, und dabei wurde erwähnt, wie der Zähler und Nenner, nach den Potenzen der Wurzelgrösse geordnet, welche einer Gleichung vom $n$ten Grade genügt, stets auf den $(n-1)$ten Grad herabgedrückt werden kann. Mit Hülfe einer gleichen Ueberlegung ergiebt sich gegenwärtig die folgende Darstellung einer allgemeinen algebraischen Function $K(z, w)$,

$$K(z,w)=\frac{K_0(z)\,w^{n-1}+K_1(z)\,w^{n-2}+\ldots+K_{n-1}(z)}{L_0(z)\,w^{n-1}+L_1(z)\,w^{n-2}+\ldots+L_{n-1}(z)}, \tag{7}$$

wo $K_0(z), \ldots K_{n-1}(z)$, $L_0(z), \ldots L_{n-1}(z)$ ganze Functionen der Variable z bezeichnen.

Capitel III.

Integration von Functionen complexer Variabeln.

§ 115. Integration von Functionen einer complexen Variable. Transformation eines Integrals durch Einführung einer neuen complexen Variable.

In Capitel XIII, Abschnitt I, wurden die Bedingungen entwickelt, unter denen ein mit mehreren Differentialen gebildeter Ausdruck gleich dem vollständigen Differential einer Function der betreffenden Variabeln ist, und es ward gezeigt, wie man die zugehörige Function durch Integration findet. Wenn nun zwei reelle Functionen ξ und η für ein gewisses Gebiet der reellen Variabeln x und y eindeutig, endlich und stetig sind und nach diesen Variabeln ebensolche erste partielle Differentialquotienten haben, und wenn gefordert wird, dass jeder der beiden aus ξ und η hergestellten Ausdrücke

$$\xi dx - \eta dy, \tag{1}$$

$$\eta dx + \xi dy, \tag{2}$$

gleich einem vollständigen Differential sei, so besteht nach (6) des § 97 als nothwendige und hinreichende Bedingung für (1) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

und für (2) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung von (3) und (4) lassen sich respective eine Function t und eine Function u, die bis auf hinzuzuaddirende Constanten bestimmt sind, angeben, bei denen

$$\begin{cases} dt = \xi dx - \eta dy \\ du = \eta dx + \xi dy \end{cases} \tag{5}$$

ist. Sobald die zweite Gleichung mit i multiplicirt und zu der ersten addirt wird, so folgt die Gleichung

$$dt + idu = (\xi + i\eta)(dx + idy), \tag{6}$$

durch welche sich der Ausdruck $t + iu$ als eine Function von $x + iy$ documentirt. Hiernach hat ein Ausdruck

$$(\xi + i\eta)(dx + idy), \tag{7}$$

von dessen reellem und imaginären Theil die Bedingungen der Integrabilität erfüllt sind, stets die Eigenschaft, durch Ausführung der Integration eine Function der complexen Variable $x + iy$ hervorzubrigen. Andrerseits fallen die beiden partiellen Differentialgleichungen (3) und (4), wie schon in § 108 hervorgehoben ist, mit denjenigen zusammen, welche den Ausdruck $\xi + i\eta$ als eine Function von $x + iy$ characterisiren. So entsteht das Resultat, *dass, wenn $\xi + i\eta$ eine Function der complexen Variable $x + iy$ bezeichnet, der zugehörige Ausdruck* (7) *ein vollständiges Differential ist, und dass die durch Integration desselben gewonnene Verbindung $t + iu$ wieder eine Function von $x + iy$ ist. In dieser Erzeugung der Function $t + iu$ beruht die* *von Cauchy *) herrührende Ausdehnung der Operation des Integrirens auf eine Function einer complexen Variable. Der Ausdruck, dass $t+iu$ das nach $x+iy$ genommene Integral der Function $\xi+i\eta$ genannt wird, entspricht der Bezeichnung der Function $\xi+i\eta$ als des von $t+iu$ nach $x+iy$ genommenen Differentialquotienten.*

Als das Fundament der in § 97 enthaltenen Lehre von der Integration vollständiger Differentialausdrücke zweier Variabeln ist der Satz zu betrachten, nach welchem das über eine Mannigfaltigkeit E der Variabeln x, y ausgedehnte doppelte Integral

$$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy$$

gleich dem in einem bestimmten und sich gleich bleibenden Sinne längs der ganzen Begrenzung von E auszuführenden einfachen Integral

$$\int(P dx+Q dy)$$

ist, mithin das letztere Integral wegen der vorausgesetzten Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

den Werth Null haben muss. Wählt man innerhalb des Gebiets, für welches die obigen Functionen ξ und η gegeben sind und die bezeichneten Eigenschaften besitzen, ein Gebiet E aus, und wendet den vorstehenden Satz auf die beiden Differentialausdrücke (1) und (2) an, so entstehen zwei über die ganze Begrenzung von E in einem bestimmten und sich gleich bleibenden Sinne auszudehnende Integrale von verschwindendem Werth, die, als reeller Theil und als Factor von i einer complexen Grösse geschrieben, die folgende Gleichung liefern

(8) $$\int(\xi+i\eta)\,(dx+idy)=0.$$

Unter der Voraussetzung, dass das Gebiet E von einer einzigen in sich zurückkehrenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung begrenzt und nach einem in § 102 gebrauchten Ausdrucke *ein-*

---

*) Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires.

fach zusammenhängend sei, kann die über die ganze Begrenzung zu nehmende Integration in zwei Integrationen zerlegt werden, deren erste auf einem Theile der Begrenzung in dem früher bestimmten Sinne von einem Werthsystem (x_0, y_0) bis zu einem Werthsystem (x_1, y_1), und deren zweite auf dem übrig bleibenden Theile der Begrenzung in einem dem früheren entgegengesetzten Sinne von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) erstreckt wird; deshalb stellen die von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) auf den zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung geführten Integrationen

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (Pdx + Qdy)$$

denselben Werth dar. In gleicher Weise lässt sich bei der über das Gebiet E gemachten Annahme gleichzeitig mit dem reellen und imaginären Theil des Integrals (8) verfahren; dann sieht man, dass das durch Vereinigung der Theile entstehende auf zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung von dem Werthsystem x_0, y_0 nach dem Werthsystem x_1, y_1 in der angegebenen Weise erstreckte Integral

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (\xi + i\eta)\,(dx + idy), \tag{9}$$

bei dem $dx + idy$ den Zuwachs der complexen Variable $x + iy$ andeutet und in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung $x + iy = z$ durch dz ersetzt werden kann, beide Male denselben Werth erhält. Dieses Integral drückt zugleich nach den in § 97 festgestellten Principien den Werth der vorhin mit $t + iu$ bezeichneten Function für den Werth $x_1 + iy_1$ aus, und bestimmt diese Function bis auf eine dem reellen und imaginären hinzuzufügende Constante, das heisst, bis auf eine additive complexe Constante. Wir fassen jetzt das so eben abgeleitete und das in (8) enthaltene Resultat zu den beiden folgenden Sätzen zusammen.

(I) *Wenn eine Function $\xi + i\eta$ von $x + iy$ für ein gewisses Gebiet mit Einschluss der ersten Ableitung eindeutig, endlich und stetig gegeben ist und über die ganze Begrenzung eines in jenem enthaltenen Gebietes in einem gegen das Innere desselben stets gleich bleibenden Sinne nach $x + iy$ integrirt wird, so hat das Ergebniss der Integration den Werth Null.*

(II) *Wenn eine Function* $\xi + i\eta$ *von* $x + iy$ *dieselben Bedingungen wie in* (I) *erfüllt, und von einem Werthsystem* $x_0 + iy_0$ *nach einem Werthsystem* $x_1 + iy_1$ *auf zwei verschiedenen Wegen, die zusammen und für sich allein einen Theil des betreffenden Gebietes vollständig begrenzen, nach* $x + iy$ *integrirt wird, so nimmt das Ergebniss der Integration in beiden Fällen denselben Werth an.*

Bei der geometrischen Interpretation der complexen Grösse $x + iy$ lässt sich die Forderung, dass in (I) der Gang der Integration längs der Begrenzung des Gebietes E in einem bestimmten und sich gleich bleibenden Sinne geschehe, wie in § 97 ausgeführt ist, durch die Vorschrift ersetzen, dass der während des Ganges der Integration in der Begrenzung fortschreitende Punkt um das Innere von E stets links herum, oder auch stets rechts herum bewegt werde. Insofern durch das Verfahren der Integration eine neue Function $t + iu$ von $x + iy$ erzeugt wird, kann der zu $t + iu$ gehörende Punkt auf einer zweiten Ebene aufgesucht werden. Indem man sich des mit (9) bezeichneten Integrals bedient, ist der Punkt $x_0 + iy_0$ festzuhalten, der Punkt $x_1 + iy_1$ beliebig zu verändern; weil nun der Werth des Integrals den Werth $t + iu$ bis auf eine complexe Constante $\alpha + i\beta$ ausdrückt, so muss

$$(10) \qquad t + iu = \alpha + i\beta + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (\xi + i\eta)(dx + idy)$$

sein. Mithin entspricht dem Punkte $x_0 + iy_0$, insofern das Integral für das Zusammenfallen von $x_1 + iy_1$ mit $x_0 + iy_0$ verschwindet, in der zweiten Ebene der willkürlich gewählte Punkt $t + iu = \alpha + i\beta$, während die relative Lage, welche der zu einem beliebigen $x_1 + iy_1$ gehörende Punkt $t + iu$ gegen den Punkt $\alpha + i\beta$ einnimmt, nach den geltenden Voraussetzungen durch den Werth des Integrals eindeutig bestimmt wird. Lässt man den Punkt $x_1 + iy_1$ so fortschreiten, dass er um einen Theil des Gebiets, der die angegebenen Bedingungen erfüllt, herumläuft und dann an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt, so kehrt auch der zugehörige Punkt $t + iu$ nach Vollendung seines Weges an den ursprünglichen Ort zurück.

In § 99 ist gezeigt worden, dass ein Differentialausdruck der die Bedingungen der Integrabilität erfüllt, durch Einführung eines Systems neuer Variabeln in einen Differentialausdruck von der gleichen Eigenschaft übergeht, und dass die aus der Integration der beiden Differentialausdrücke entstehenden Functionen bis auf eine additive Constante einander gleich sind. Wenn daher in dem reellen und imaginären Theil des obigen Ausdrucks (7) die Variabeln x und y als Functionen von zwei neuen Variabeln p und q betrachtet werden, so lässt sich jener Satz auf die Bestimmung der mit t und u bezeichneten Functionen anwenden. Dies gilt auch für die engere Voraussetzung, bei der $x+iy$ eine Function der complexen Variable $p+iq$ und

$$(11) \qquad dx+idy=\frac{dx+idy}{dp+idq}(dp+idq)$$

ist. In Folge derselben verwandelt sich (7) in den Ausdruck

$$(12) \qquad (\xi+i\eta)\frac{dx+idy}{dp+idq}(dp+idq),$$

der, in der vorhin bezeichneten Weise integrirt, eine Function von $p+iq$ liefert, welche von der obigen Function $t+iu$ nur um eine additive complexe Constante differiren kann. Durch eine entsprechende Wahl der Anfangswerthe und der Wege der beiden Integrationen lässt sich eine vollkommene Uebereinstimmung herstellen, und man hat für die Transformation eines nach der Variable $x+iy$ auszuführenden Integrals durch Einführung der neuen Variable $p+iq$ die Formel

$$(13) \qquad \int(\xi+i\eta)(dx+idy)=\int(\xi+i\eta)\frac{dx+idy}{dp+idq}(dp+idq),$$

welche genau wie die Gleichung (35) des § 25 gebildet ist.

§ 116. Integration einer positiven oder negativen ganzen Potenz einer complexen Variable. Entstehung des Logarithmus und der Exponentialfunction durch Integration und Umkehrung.

Aus den bei der Differentiation einer ganzen Potenz einer complexen Variable $z=x+iy$ geltenden Regeln folgt für das Integral einer Potenz z^k, deren Exponent k jede positive oder negative ganze Zahl mit Ausnahme der negativen Einheit sein darf, der Ausdruck

(1) $$\frac{z^{k+1}}{k+1} + \text{const.}$$

Dagegen nimmt die Potenz, deren Exponent die negative Einheit ist, eine besondere Stellung ein. Um das Integral derselben mittelst der im vorigen § angegebenen Grundsätze zu untersuchen, ist vor allem darauf zu achten, dass die Function $\frac{1}{z}$ für den Werth $z = 0$ aufhört, endlich zu sein. Wenn daher das zu betrachtende Integral

(2) $$\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} \frac{dz}{z}$$

auf zwei verschiedenen Wegen von dem Werthe $x_0 + i\,y_0 = z_0$ bis zu dem Werthe $x_1 + i\,y_1 = z_1$ ausgedehnt wird, so darf man aus dem Satze (II) des vorigen § nur unter der Bedingung auf die Gleichheit der hervorgehenden Werthe schliessen, dass die beiden Wege zusammen ein Gebiet vollständig begrenzen, in welchem der Werth $z = 0$ nicht enthalten ist. Durch Trennung des reellen und imaginären Theiles geht $\frac{dz}{z}$ in den Ausdruck

(3) $$\frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{i(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2},$$

über, welcher sich mit Anwendung der Functionen Logarithmus naturalis und Arcus tangentis so darstellt,

(3*) $$\frac{1}{2}\, d \log(x^2 + y^2) + i\, d \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Es möge jetzt die Integration wie auf der rechten Seite von (23) in § 97 so eingerichtet werden, dass in geometrischer Sprache der Punkt $x + i\,y$ geradlinig, und zwar zuerst parallel der x Axe von $x_0 + i\,y_0$ nach $x_1 + i\,y_0$, dann parallel der y Axe von $x_1 + iy_0$ nach $x_1 + iy_1$ fortschreitet; dann ist $dz = dx + i\,dy$ für den ersten Theil durch $d\,x$, für den zweiten durch $i\,d\,y$ zu ersetzen, und (2) erhält die Gestalt

(4) $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x + iy_0} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{i\,dy}{x_1 + iy}.$$

Von diesen Integralen bekommt das erste den Werth

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\log(x_1^2+y_0^2)-\frac{1}{2}\log(x_0^2+y_0^2)+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right),$$

das zweite den Werth

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\log(x_1^2+y_1^2)-\frac{1}{2}\log(x_1^2+y_0^2)+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_1}\right)\right).$$

In dem ersten ist die Function $\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x}\right)$ so zu wählen, dass sie sich von $x=x_0$ bis $x=x_1$ stetig ändert; in dem zweiten hat die Function $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_1}\right)$ die Bedingung der Stetigkeit für das Intervall von $y=y_0$ bis $y=y_1$ zu erfüllen. Unter der Voraussetzung, dass der Functionswerth $\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_1}\right)$ in beiden Ausdrücken derselbe sei, geht dann durch Addition von (5) und (6) der Werth des Integrals

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\log(x_1^2+y_1^2)-\frac{1}{2}\log(x_0^2+y_0^2)+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)$$

hervor.

Sobald

$$(8)\qquad x_0+iy_0=1$$

gesetzt und die Function $\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}$, wie auch früher geschehen, der Bedingung unterworfen wird, mit ihrem Argument zusammen zu verschwinden, so folgt

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\log(x_0^2+y_0^2)=0,\ \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}=0,$$

und (7) wird gleich

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\log(x_1^2+y_1^2)+i\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right).$$

Die Function $\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ hat hier den Werth, welchen sie bei beständiger stetiger Aenderung empfängt, sobald auf dem für die Integration (2) gewählten Wege von dem Werthsystem $x=1, y=0$ nach dem Werthsystem $x=x_1$, $y=y_1$ fortgeschritten wird. Um das Ergebniss leichter zu übersehen, kann man die Integration so einrichten, dass in dem einen Theile des Weges der imaginäre Theil von (3), in dem andern der reelle Theil von (3) nicht geändert wird. Das erstere geschieht, indem das Verhältniss $\frac{y}{x}$, das zweite, indem die Quadratsumme x^2+y^2 ungeändert bleibt, so dass der Punkt $x+iy$ im ersten Falle auf einer durch den Nullpunkt gezogenen geraden Linie, im zweiten auf einer um den Nullpunkt als Centrum beschriebenen Kreislinie fortrückt. Nun lässt sich jeder beliebige Punkt x_1+iy_1 von dem Punkte 1 aus in der Weise erreichen, dass man auf der von dem Nullpunkte nach dem Punkte 1 gezogenen und über diesen hinaus unbegrenzt verlängerten geraden Linie L bis zu dem in der Entfernung $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ vom Nullpunkt befindlichen Punkte fortgeht, und hierauf eine mit dem Halbmesser $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ um den Nullpunkt beschriebene Kreislinie in einem bestimmten Sinne, etwa von der positiven x zur positiven y Axe, das heisst nach der früheren Annahme, rechts herum drehend bis zu dem Punkt x_1+iy_1 verfolgt. Das Verhältniss des betreffenden Kreisbogens zu dem Halbmesser $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ stellt dann den bei der entsprechenden Integration anzuwendenden Werth der Function $\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ eindeutig dar. Nach der gleichen Definition gelten bei den Polarcoordinaten

(11) $$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta$$

die Gleichungen

(11*) $$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \vartheta=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

so dass (10) in den Ausdruck

(12) $$\log r_1+i\vartheta_1$$

übergeht.

Derselbe bezeichnet den zu x_1+iy_1 gehörigen Werth der aus (2) hervorgehenden Function $t+iu$ von $x+iy$; somit besteht für diese die Gleichung

(13) $$t+iu=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hier entspricht dem Werthe $x+iy=1$, für welchen t und u verschwinden, der Werth $t+iu=0$. Wir betrachten jetzt eine Bewegung des Punktes $x+iy$, bei welcher derselbe auf dem rechten Ufer der vorhin mit L bezeichneten Linie von dem Punkte 1 nach einem beliebigen durch die positive Grösse r bezeichneten Punkte fortschreitet, dann um den Nullpunkt als Centrum rechts herum einen ganzen Kreis beschreibt, von da aus auf dem linken Ufer der Linie L bis zu dem Punkte 1 geht, hierauf um den Nullpunkt als Centrum links herum einen Kreis beschreibt, und schliesslich auf dem rechten Ufer von L zu dem Punkte 1 zurückkehrt. In Folge dessen geht der zugeordnete Punkt $t+iu$ von dem Nullpunkte auf der t Axe bis zu dem Punkte $\log r$, dann auf einer zu der u Axe parallelen geraden Linie bis zu dem Punkte $\log r + i 2\pi$, von hier auf einer der t Axe parallelen geraden Linie bis zu dem Punkte $i\,2\pi$, und schliesslich auf der u Axe zu dem Nullpunkte zurück. Es correspondirt also dem Flächenstück in der xy Ebene, das von zwei ganzen Kreislinien und einer doppelt durchlaufenen geraden Linie begrenzt ist, und das wir uns wieder als ebenes Blatt denken wollen, in der tu Ebene ein Rechteck, bei dem eine Seite in der t Axe, und eine anstossende Seite in der u Axe liegt. Für einen Werth R von r, der grösser als Eins ist, dehnt sich die Grösse t von der Null bis zu dem positiven Werthe $\log R$, für einen unter der Einheit liegenden Werth ϱ von r von der Null bis zu dem negativen Werthe $\log \varrho$ aus. Bei stets wachsendem R und gegen die Null abnehmendem ϱ wird die xy Ebene nach und nach immer vollständiger von einem Blatte bedeckt, gleichzeitig erhält man in der tu Ebene einen rechteckigen Streifen, dessen auf der t Axe liegende Seite von einem beliebig grossen negativen bis zu einem beliebig grossen positiven t geht, während die nach den positiven u hin zu errichtende Höhe den Werth 2π behält.

Das auf der xy Ebene befindliche Blatt hat einen längs der Linie L von $r=\varrho$ bis $r=R$ reichenden, das heisst im Grenzfalle, *einen von dem Nullpunkte an unbegrenzt ausgedehnten Schnitt.* Auf diesem Blatte ist es nicht möglich, von einem Punkte zu einem zweiten in der Weise zwei Linien zu ziehen, dass ein von denselben begrenztes Flächenstück den Nullpunkt einschliesst. Sobald daher das Integral (2) für zwei in diesem Blatte zwischen zwei bestimmten Punkten gezogene Wege gebildet wird, so müssen die beiden Werthe des Integrals nach dem Satze (II)' des vorigen § einander gleich sein, und es ist deshalb unter der gleichen Bedingung auch das von dem Punkte 1 bis zu dem Punkte $x+iy$ geführte Integral, welches die obige Function $t+iu$ definirt, eindeutig bestimmt. Vermöge der vorhin beschriebenen von dem Punkte 1 ausgehenden Bewegung des Punktes $x+iy$ gelangt derselbe zu jedem Punkte der Ebene ein Mal und nur ein Mal. Soll der Punkt $x+iy$, nachdem er auf einer Kreislinie von einem Punkte des rechten Ufers der Linie L zu dem gleichnamigen Punkte des linken Ufers geführt ist, die Linie L überschreiten und dieselbe Kreislinie in dem gleichen Sinne zum zweiten Male durchlaufen, so geht in der zugehörigen Function $t+iu$ die Grösse $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ von dem früheren extremen Werthe 2π stets wachsend zu dem Werthe 4π über. An das die ganze xy Ebene bedeckende erste Blatt schliesst sich ein dieselbe ebenfalls bedeckendes zweites Blatt, dagegen an das auf der tu Ebene befindliche Rechteck ein neues Rechteck an, bei dem u von 2π bis 4π zunimmt. Die Function $t+iu$ bekommt für ein auf dem zweiten Blatte befindliches $x+iy$ einen Werth, welcher den zu dem $x+iy$ des ersten Blattes gehörenden Werth um die Grösse übertrifft, welcher das Integral (2) für einen Ein Mal rechts herum vollständig um den Nullpunkt geführten Umgang gleich wird. Diese Grösse muss bei jedem solchen Umgange dieselbe sein. Denn zwei derartige Umgänge, welche sich nicht schneiden, schliessen ein Gebiet ein, für das der Satz (I) des vorigen § wieder Anwendung findet; auf diesen Fall können die übrigen leicht zurückgeführt werden. Nach jenem Satze entsteht ein verschwindendes Resultat, wofern bei der Integration die ganze Begrenzung in einem gegen das Innere des Gebietes stets gleich bleibenden Sinne durchlaufen wird. Alsdann muss aber der eine Umgang um den Nullpunkt rechts herum, der andere links herum durchlaufen werden. Mithin nimmt das Integral denselben Werth an, falls jeder der beiden Umgänge rechts herum durchlaufen wird. Für eine um den Nullpunkt mit beliebigem Halbmesser rechts herum beschriebene Kreislinie sehen wir die Function $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ von

Null bis 2π zunehmen, *mithin hat das Integral* (2) *für jeden Ein Mal rechts herum vollständig um den Nullpunkt geführten Umgang den Werth* $2\pi i$. Zu den beiden auf der xy Ebene befindlichen Blättern, die durch einen im Nullpunkte vorhandenen Windungspunkt verbunden sind, gehören also auf der tu Ebene zwei neben einander befindliche und zusammenhängende rechteckige Streifen, zu den gleichnamigen Punkten $x+iy$ des ersten und zweiten Blattes der ersten Ebene respective die Punkte $t+iu$ und $t+i(u+2\pi)$ der zweiten Ebene. Offenbar lässt sich in der gleichen Weise fortfahren, so dass durch jede neue um den Nullpunkt ausgeführte Bewegung des Punktes $x+iy$ ein die xy Ebene bedeckendes neues Blatt, und auf der tu Ebene ein anliegender neuer Streifen erhalten wird, wobei jeder rechts herum gemachten Drehung ein Wachsen der Grösse u um 2π, jeder entgegengesetzten Drehung ein Abnehmen um 2π entspricht, und die Anzahl der auf der xy Ebene durch einen Windungspunkt vereinigten Blätter der Anzahl der auf der tu Ebene an einander gefügten rechteckigen Streifen von der Höhe 2π gleich ist. *Die auf diese Weise in der Gleichung* (13) *dargestellte Function* $t+iu$ *von* $x+iy$, *welche sich für ein positives reelles Argument* x *auf den Logarithmus naturalis von* x *reducirt, wird der Logarithmus naturalis des complexen Arguments* $x+iy$ *genannt und hat die Bezeichnung*

$$(14) \qquad \log(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sie ist eine vieldeutige Function des Arguments $x+iy$, *deren sämmtliche Werthe aus einem beliebigen durch Addition eines beliebigen Vielfachen der Grösse* $2\pi i$ *hervorgehen, und die zu einer eindeutigen gemacht wird, indem man dem in ihrem Werthe vorkommenden Factor von i vorschreibt, ein gewisses Intervall von der Grösse* 2π *nicht zu überschreiten. Durch die Wahl der Grenzwerthe 0 und* 2π, 2π *und* $4\pi, \ldots -2\pi$ *und* 0, -4π *und* $-2\pi, \ldots$ *sind respective die vorhin erwähnten, die* xy *Ebene bedeckenden Blätter characterisirt. Diese Function* $w=\log z$ *ist durch die Forderung gegeben, dass sie der Gleichung*

$$(15) \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

genüge, und für $z=1$ *die Bedingung* $w=0$ *erfülle.*

Wenn man eines von den bezeichneten die xy Ebene bedeckenden Blättern durch eine Reihe von geraden vom Nullpunkt ausgehenden Linien und eine Reihe von Kreisen, die um den Nullpunkt als Centrum beschrieben sind, in Theile zerlegt, so zerfällt der entsprechende auf der tu Ebene befindliche rechteckige Streifen durch die correspondirenden mit der t Axe oder der u Axe parallelen geraden Linien in lauter Rechtecke, und es leuchtet ein, dass bei der Umkehrung der Function (13) zu jedem in dem rechteckigen Streifen enthaltenen Werthe $t+iu$ ein bestimmter Werth $x+iy$ des correspondirenden Blattes gehört, folglich bei der vorliegenden Beschränkung $x+iy$ eine eindeutige Function von $t+iu$ ist. Weil aber die tu Ebene erst von dem Inbegriff aller rechteckigen Streifen vollständig bedeckt wird, ferner bei einem beliebig gegebenen Werthe $t+iu$ die Grösse von u den betreffenden Streifen und damit auch das entsprechende die xy Ebene bedeckende Blatt angiebt, und weil zu zwei Grössen $t+iu$, in welchen die Werthe u um ein ganzes Vielfache von 2π differiren, die gleichnamige Grösse $x+iy$ gehört, so ist für jeden Werth $t+iu$ der Werth $x+iy$ eindeutig und zwar so bestimmt, dass er für ein um ein beliebiges Vielfache von $2i\pi$ vergrössertes $t+iu$ ungeändert bleibt. Aus der Gleichung (13) folgt, indem e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, für den reellen Theil

$$\sqrt{x^2+y^2}=e^t, \tag{16}$$

ferner für den Factor von i

$$\cos u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin u=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{17}$$

mithin als Ausdruck von $x+iy$,

$$x+iy=e^t(\cos u+i\sin u). \tag{18}$$

Diese Function von $t+iu$, die für ein reelles Argument t gleich der reellen Exponentialfunction e^t ist, wird nach I, § 116 *so bezeichnet*

$$e^{t+iu}=e^t(\cos u+i\sin u), \tag{19}$$

und heisst die Exponentialfunction von der Basis e und dem complexen Argument $t+iu$. Sie ist für die ganze Ausdehnung des Arguments $t+iu$ eindeutig, endlich, stetig, und eine *periodische Function von der Periode* $2\pi i$. *Bei der Notation* $z=x+iy$, $w=t+iu$ *wird* $z=e^w$ *durch die aus* (15) *folgende Gleichung*

$$\frac{dz}{dw}=z \tag{20}$$

unter Hinzunahme der Bedingung, dass für $w=0$ *die Grösse* z *gleich Eins sei, bestimmt.*

Im Vorstehenden ist der Logarithmus naturalis und die Exponentialfunction als Function einer beliebigen complexen Variable definirt worden, und zwar sind in der erstern Definition der Logarithmus naturalis und die inversen trigonometrischen Functionen, in der zweiten die Exponentialfunction und die trigonometrischen Functionen einer reellen Variable enthalten, indem aus (14) bei der Voraussetzung $x^2+y^2=1$ die Gleichung

$$\log(x+iy)=i\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{21}$$

aus (19) für $t=0$ die Gleichung

$$e^{iu}=\cos u+i\sin u \tag{22}$$

folgt. Vermittelst der Betrachtung der Functionen einer complexen Variable werden also diejenigen fundamentalen transcendenten Functionen eines reellen Arguments, die nach einer am Schlusse des § 14 gemachten Bemerkung zu derselben Gruppe gehören, in je eine Function vereinigt. Zugleich erfahren wir, dass jede der beiden nunmehr übrig bleibenden fundamentalen transcendenten Functionen durch einen der Theorie der complexen Grössen eigenthümlichen elementaren Process entsteht. Die Function Logarithmus naturalis wird durch die Integration des reciproken Werthes der complexen Variable, die Exponentialfunction durch Umkehrung des Logarithmus naturalis hervorgebracht. Es genügt daher für die Erzeugung der beiden fundamentalen transcendenten Functionen einer complexen Variable, die Processe der Integration und der Umkehrung zu den algebraischen rationalen Operationen hinzuzunehmen, während für die Erzeugung der algebraischen Functionen einer complexen Variable ausser den algebraischen rationalen Operationen nur noch der mit der Umkehrung gleichartige Process der Auflösung einer algebraischen Gleichung erforderlich ist.

Man kann das Verfahren, durch welches in § 14 die umgekehrten trigonometrischen Functionen analytisch definirt sind, wegen der vorstehenden Gleichung (21) als eine Methode zur Darstellung des Logarithmus einer complexen Grösse auffassen, deren Norm gleich Eins ist, und dann so ausdehnen, dass es den Logarithmus einer positiven und auch einer unbeschränkten complexen Grösse liefert. Für eine gegebene positive Grösse r bilde man, indem die Ausziehung der reellen positiven Wurzeln durch gebrochene Potenzexponenten angedeutet wird, die Reihe von Ausdrücken

$$2\left(r^{\frac{1}{2}}-1\right),\ 4\left(r^{\frac{1}{4}}-1\right), \ldots 2^s\left(r^{\frac{1}{2^s}}-1\right),$$

die beliebig weit fortgesetzt sei. Die vorkommenden Grössen sind sämmtlich positiv oder negativ, je nachdem r über oder unter der Einheit liegt. Da die letzte aus der vorletzten durch Multiplication mit dem Factor $\frac{2}{r^{\frac{1}{2^s}}+1}$ hervorgebracht werden kann, welcher für $r>1$ kleiner, für $r<1$ grösser als die Einheit ist, derselben aber bei wachsendem s beliebig nahe kommt, so nähern sich die Ausdrücke für ein solches s einem festen Grenzwerth

$$\lim . 2^s\left(r^{\frac{1}{2^s}}-1\right).$$

Derselbe muss mit dem Logarithmus naturalis von r zusammenfallen, da 2^s für ein beständig zunehmendes s gleich einer beliebig grossen Zahl n wird, und da nach § 23 der Ausdruck $\frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ gegen $\log r$ convergirt. Bei einer complexen Grösse $x+iy$ sei wieder

$$\sqrt{x^2+y^2}=r,\ \frac{x}{r}=\alpha,\ \frac{y}{r}=\beta,$$

so dass $\alpha+i\beta$ die Norm Eins hat. Dann lässt sich auf $\alpha+i\beta$ das Verfahren des § 14 unmittelbar anwenden; auch hier möge der Kürze halber $\alpha>0$, $\beta>0$ vorausgesetzt werden. Alsdann kommt in den dortigen Bezeichnungen

$$\lim . 2^s (\alpha_s + i\beta_s - 1) = i\vartheta,$$

wo die Grösse ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten ist. Diese Gleichung giebt in Verbindung mit der vorhin nachgewiesenen

$$\lim . 2^s (r^{\frac{1}{2^s}} - 1) = \log r$$

die neue Gleichung

$$2^s (r^{\frac{1}{2^s}} (\alpha_s + i\beta_s) - 1) = \log r + i\vartheta + i\frac{\log r . \vartheta}{2^s},$$

welche sich durch das beständige Zunehmen des Nenners 2^s in die Gleichung

$$\lim . 2^s (r^{\frac{1}{2^s}} (\alpha_s + i\beta_s) - 1) = \log r + i\vartheta$$

verwandelt. In der hierher gehörigen Reihe von Ausdrücken

$$r(\alpha + i\beta),\ 2r^{\frac{1}{2}}(\alpha_1 + i\beta_1),\ 4r^{\frac{1}{4}}(\alpha_2 + i\beta_2), \ldots$$

entsteht jeder aus dem nächst vorhergehenden durch Ausziehung einer Quadratwurzel, deren Sinn durch die in § 14 angegebenen Bedingungen eindeutig festgestellt ist; der resultirende Grenzwerth $\log r + i\vartheta$ giebt denjenigen Werth des $\log(x + iy)$, bei welchem, in Uebereinstimmung mit der Annahme $x > 0$ und $y > 0$, der Factor von i zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Auf demselben Wege, auf dem in § 14 die Grundeigenschaften der trigonometrischen Functionen bewiesen sind, kann vermittelst der gefundenen Darstellung der Function $\log(x + iy)$ gezeigt werden, dass der Satz, nach welchem der Logarithmus eines Products gleich der Summe der Logarithmen der Factoren ist, auch bei der erweiterten Definition richtig bleibt. Von diesem allgemeinen Additionssatze wird in § 119 die Rede sein.

§ 117. Integration einer rationalen Function einer complexen Variable.

Bei der Integration einer rationalen gebrochenen Function der complexen Variable z,

$$(1) \qquad \frac{e(z)}{f(z)},$$

wo Zähler und Nenner ganze Functionen respective vom s ten und n ten Grade sein mögen, verläuft die algebraische Behandlung auf gleiche Art, wie in § 67 für das reelle Gebiet auseinandergesetzt ist. Falls s grösser als n oder gleich n ist, wird eine ganze Function $q(z)$ so bestimmt, dass in der Gleichung

(2) $$\frac{e(z)}{f(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{f(z)}$$

die ganze Function $r(z)$ von niedrigerem Grade als $f(z)$ ist; hierauf wird mit Hülfe der Darstellung von $f(z)$

(3) $$f(z) = (a_0 + i b_0)(z - \xi_1)^{\mathfrak{a}_1}(z - \xi_2)^{\mathfrak{a}_2} \ldots (z - \xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda},$$

bei der $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ unter einander verschiedene Grössen sind und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_\lambda = n$ ist, der echte Bruch $\frac{r(z)}{f(z)}$ in Partialbrüche zerlegt. Man erhält dadurch die in § 68 mit (2) bezeichnete Gestalt

(4) $$\begin{aligned} \frac{r(z)}{f(z)} = {} & \frac{s_1(\xi_1)}{(z-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}} + \frac{s'_1(\xi_1)}{(z-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1-1}} + \ldots + \frac{1}{(\mathfrak{a}_1-1)!}\frac{s_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1)}{z-\xi_1} \\ & + \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \; : \\ & + \frac{s_\lambda(\xi_\lambda)}{(z-\xi_1)^{\mathfrak{a}_\lambda}} + \frac{s'_\lambda(\xi_\lambda)}{(z-\xi_1)^{\mathfrak{a}_\lambda-1}} + \ldots + \frac{1}{(\mathfrak{a}_\lambda-1)!}\frac{s_\lambda^{(\mathfrak{a}_\lambda-1)}(\xi_\lambda)}{z-\xi_\lambda}. \end{aligned}$$

Die im vorigen § enthaltene Regel giebt für eine mit einer beliebigen festen Grösse ξ gebildete complexe Variable $z-\xi$ die Resultate

(5) $$\int (z-\xi)^k \, dz = \frac{(z-\xi)^{k+1}}{k+1}, \quad k \gtrless -1,$$

(6) $$\int \frac{dz}{z-\xi} = \log(z-\xi);$$

mithin liefert das Integral der ganzen Function $q(z)$ eine ganze Function z, das Integral der Summe von Brüchen, deren Nenner Potenzen vom zweiten oder von höherem Grade sind, eine Summe von Brüchen, deren Nenner um einen Grad niedrigere Potenzen sind, das Integral der Summe von Brüchen, deren Nenner nur den ersten Grad haben, die Summe von Producten aus Logarithmen in complexe Constanten

(7) $$\frac{1}{(\mathfrak{a}_1-1)!} s_1^{(\mathfrak{a}_1-1)}(\xi_1) \log(z-\xi_1) + \ldots + \frac{1}{(\mathfrak{a}_\lambda-1)!} s_\lambda^{(\mathfrak{a}_\lambda-1)}(\xi_\lambda) \log(z-\xi_\lambda).$$

Das Gesammtintegral

(8) $$\int \frac{e(z)}{f(z)}\,dz$$

besteht demnach aus einer algebraischen rationalen Function von z und dem in (7) dargestellten Aggregat von logarithmischen Gliedern, da gegenwärtig die logarithmische Function allein den Platz einnimmt, welcher bei der auf dem reellen Gebiet vollzogenen Integration von dem Logarithmus und den inversen trigonometrischen Functionen zusammen ausgefüllt wurde. Um den Werth von (8) für eine von dem Werthe $z(0)$ bis zu dem Werthe $z(1)$ ausgedehnte Integration zu erhalten, bei welcher die Werthe von z, für welche $f(z)$ verschwindet, vermieden werden, ist der bezeichnete Ausdruck, der sich auf $z=z(0)$ bezieht, von dem auf $z=z(1)$ bezüglichen Ausdruck zu subtrahiren. Für die rationalen Bestandtheile bestimmt sich die betreffende Differenz ohne weiteres, für die logarithmischen ist aber die Differenz $\log(z(1)-\xi)-\log(z(0)-\xi)$ jedes Mal so zu nehmen, dass sich die Function $\log(z-\xi)$, indem die Variable z auf dem Wege der Integration von $z(0)$ nach $z(1)$ fortschreitet, immer stetig ändert. Bei der Function $\log(z-\xi)$ spielt hier der Werth $z=\xi$ dieselbe Rolle wie der Werth Null für die Function $\log z$, so dass die im vorigen § gegebene Vorschrift angewendet werden kann. Dies gilt auch für die specielle, nach dem Vorbilde von (4) des vorigen § auszuführende Integration, bei welcher $z(0)=x(0)+iy(0)$, $z(1)=x(1)+iy(1)$ ist, und z in der Weise von $z(0)$ nach $z(1)$ übergeht, dass zuerst für $y=y(0)$ die Variable x von $x(0)$ nach $x(1)$, dann für $x=x(1)$ die Variable y von $y(0)$ nach $y(1)$ fortschreitet.

Ebenso wie dies in § 68 geschehen ist, kann gegenwärtig derjenige Theil der Function $\frac{e(z)}{f(z)}$, welcher den algebraischen, und derjenige, welcher den transcendenten Theil des Gesammtintegrals hervorbringt, getrennt werden. Es sei wieder

(9) $$\beta(z)=(a_0+ib_0)(z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_\lambda)$$

und

(10) $$\delta(z)=(z-\xi_1)^{\alpha_1-1}(z-\xi_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda-1},$$

wo $\delta(z)$ als der gröste gemeinsame Theiler von $f(z)$ und $f'(z)$ ohne Kenntniss der Factoren des ersten Grades von $f(z)$ bestimmbar ist, und $\beta(z)$ durch die Gleichung

(11) $$f(z) = \beta(z)\,\delta(z)$$

gefunden wird. Dann lässt sich durch die dort benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten eine ganze Function $\gamma(z)$ von niedrigerem Grade als $\delta(z)$ und eine ganze Function $\alpha(z)$ von niedrigerem Grade als $\beta(z)$ unzweideutig so bestimmen, dass die Gleichung

(12) $$\frac{e(z)}{f(z)} = q(z) + \frac{d\left(\dfrac{\gamma(z)}{\delta(z)}\right)}{dz} + \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$$

befriedigt ist. Vermöge derselben wird die in dem Gesammtintegral (8) enthaltene rationale Function von z durch den Ausdruck

(13) $$\int q(z)\,dz + \frac{\gamma(z)}{\delta(z)},$$

das zugehörige in (7) entwickelte Aggregat von Producten aus Logarithmen in complexe Constanten durch das Integral

(14) $$\int \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}\,dz$$

dargestellt.

§ 118. Integration von Differentialausdrücken mehrerer complexer Variabeln. Transformation durch Einführung eines neuen Systems von complexen Variabeln.

Für ein System von $2n$ reellen Variabeln $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n$ seien $2n$ reelle Functionen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots \xi_n, \eta_n$ so gegeben, dass in dem Ausdruck

(1) $$(\xi_1 + i\eta_1)(dx_1 + i\,dy_1) + (\xi_2 + i\eta_2)(dx_2 + i\,dy_2) + \ldots + (\xi_n + i\eta_n)(dx_n + i\,dy_n)$$

der reelle Theil

(2) $$\xi_1 dx_1 - \eta_1 dy_1 + \xi_2 dx_2 - \eta_2 dy_2 + \ldots + \xi_n dx_n - \eta_n dy_n$$

und der Factor von i

(3) $$\eta_1 dx_1 + \xi_1 dy_1 + \eta_2 dx_2 + \xi_2 dy_2 + \ldots + \eta_n dx_n + \xi_n dy_n$$

den Bedingungen der Integrabilität genügen, oder kürzer, dass der Ausdruck (1) ein vollständiges Differential sei. Dann liefert die Ausführung der vollständigen Integration bei (2) eine reelle Function t, bei (3) eine reelle Function u von solcher Beschaffenheit, dass die Verbindung

$$t + iu \tag{4}$$

nach der in § 110 aufgestellten Definition eine Function der n complexen Variabeln

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2, \ldots z_n = x_n + iy_n \tag{5}$$

ist. Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei verschiedene von den Zahlen $1, 2, \ldots n$, so gehören nach § 99 zu (2) die Bedingungen der Integrabilität

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{a}} + \frac{\partial \eta_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{\partial \xi_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \\ &\frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}} + \frac{\partial \eta_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial \eta_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}} - \frac{\partial \eta_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{a}} = 0, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und zu (3) die Bedingungen der Integrabilität

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{a}} - \frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial \eta_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{\partial \eta_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \\ &\frac{\partial \eta_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}} - \frac{\partial \xi_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}} - \frac{\partial \xi_\mathfrak{b}}{\partial y_\mathfrak{a}} = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

welche man so zusammenfassen kann:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\xi_\mathfrak{a} + i\eta_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{a}} &= -i\,\frac{\partial(\xi_\mathfrak{a} + i\eta_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{a}} \\ \frac{\partial(\xi_\mathfrak{a} + i\eta_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial(\xi_\mathfrak{b} + i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}} \\ \frac{\partial(\xi_\mathfrak{a} + i\eta_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{b}} &= i\,\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b} + i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}} \\ \frac{\partial(\xi_\mathfrak{a} + i\eta_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial(\xi_\mathfrak{b} + i\eta_\mathfrak{b})}{\partial y_\mathfrak{a}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Durch Vereinigung der beiden letzten Gleichungen ergibt sich die Anordnung

$$
(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial(\xi_\mathfrak{a}+i\eta_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{a}} &= -i\,\frac{\partial(\xi_\mathfrak{a}+i\eta_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{a}}\\
\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}} &= -i\,\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial y_\mathfrak{a}}\\
\frac{\partial(\xi_\mathfrak{a}+i\eta_\mathfrak{a})}{\partial x_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}}\\
\frac{\partial(\xi_\mathfrak{a}+i\eta_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial y_\mathfrak{a}}.
\end{aligned}\right.
$$

Hier muss jeder Ausdruck $\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b}$ wieder eine Function der n complexen Variabeln $x_1+iy_1,\ x_2+iy_2, \ldots x_n+iy_n$ sein, da der Ausdruck

$$
(10)\quad d(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b}) = \Sigma_\mathfrak{a}\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}}dx_\mathfrak{a} + \Sigma_\mathfrak{a}\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial y_\mathfrak{a}}dy_\mathfrak{a},
$$

wo $\mathfrak{a}$ successive gleich $1, 2, \ldots n$ zu setzen ist, mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen (9) die erforderliche Gestalt

$$
(11)\quad d(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b}) = \Sigma_\mathfrak{a}\frac{\partial(\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b})}{\partial x_\mathfrak{a}}(dx_\mathfrak{a}+idy_\mathfrak{a})
$$

annimmt. Zugleich leuchtet ein, dass, wenn in (1) jede Verbindung $\xi_\mathfrak{b}+i\eta_\mathfrak{b}$ nur die Variabeln $x_\mathfrak{b}$ und $y_\mathfrak{b}$ enthält und eine Function von $x_\mathfrak{b}+iy_\mathfrak{b}$ ist, die sämmtlichen Bedingungen der Integrabilität erfüllt sind, und $t+iu$ gleich einer Summe von Functionen wird, deren jede nur eine complexe Variable enthält.

Um einer späteren Anwendung willen betrachten wir die besondere Voraussetzung, dass ein Ausdruck (1) gegeben sei, der die Eigenschaft eines vollständigen Differentials hat, und bei dem die sämmtlichen Verbindungen $\xi_1+i\eta_1,\ \xi_2+i\eta_2, \ldots \xi_n+i\eta_n$ rationale Functionen der n complexen Variabeln (5) sind. Nun möge die Function $t+iu$ dadurch erhalten werden, dass man in der Mannigfaltigkeit der $2n$ reellen Variabeln $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ von einem Werthsystem $x_1(0), y_1(0), \ldots x_n(0), y_n(0)$ bis zu einem Werthsystem $x_1(1), y_1(1), \ldots x_n(1), y_n(1)$ integrirt, wobei die Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ respective von den festen Anfangswerthen

$$
z_1(0) = x_1(0)+iy(0),\ z_2(0) = x_2(0)+iy_2(0), \ldots z_n = x_n(0)+iy_n(0)
$$

zu den beweglichen Endwerthen

$$
z_1(1) = x_1(1)+iy(1),\ z_2(1) = x_2(1)+iy_2(1), \ldots z_n(1) = x_n(1)+iy_n(1)
$$

fortrücken und $t + iu$ als Function der Endwerthe

$$z_1(1),\ z_2(1), \ldots z_n(1)$$

aufgefasst wird. Hier hindert nichts, die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, auf welcher die Integration ausgeführt wird, nach der Art von (4) des § 116 so zu wählen, dass zuerst bei den festen Werthen $y_1(0)$, $x_2(0)$, $y_2(0), \ldots, x_n(0)$, $y_n(0)$ die Variable x_1 von $x_1(0)$ bis $x_1(1)$, dann bei den festen Werthen $x(1)$, $x_2(0)$, $y_2(0), \ldots x_n(0)$, $y_n(0)$ die Variable y_1 von $y_1(0)$ bis $y_1(1)$ weiter rückt, dass so die Reihe der $2n$ Variabeln zu Paaren vereinigt, ferner jedes Paar wie das erste behandelt, und bei dem letzten Paar zuerst die reelle Variable x_n von $x_n(0)$ nach $x_n(1)$, dann die zugehörige reelle Variable y_n von $y_n(0)$ nach $y_n(1)$ geführt wird. Jedes einzelne dieser Paare von Integrationen ist nach den Regeln des vorigen § zu vollziehen, und bringt einen Ausdruck hervor, welcher einen rationalen und einen logarithmischen Theil hat, die aus den n Werthen $z_1(1)$, $z_2(1), \ldots z_n(1)$ und den n Werthen $z_1(0)$, $z_2(0), \ldots z_n(0)$ gebildet sind. Das Gesammtintegral als die Summe der einzelnen Integrale ist deshalb gleich einer Summe von ebensolchen rationalen und logarithmischen Ausdrücken. Da sich nun die Summe der rationalen Ausdrücke zu einem einzigen rationalen Ausdruck zusammenzieht, so gelangt man zu dem Ergebniss, dass durch Integration des in Rede stehenden vollständigen Differentials eine Function der n complexen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ entsteht, die durch Addition einer rationalen Function und einer endlichen Anzahl von logarithmischen Ausdrücken gebildet ist.

Wie in § 115 der Ausdruck (7) durch Einführung einer neuen complexen Variable, so kann der obige allgemeine Ausdruck (1) durch Einführung eines Systems von complexen Variabeln transformirt werden. Es seien $z_1, z_2, \ldots z_n$ Functionen der m complexen Variabeln

(12) $$v_1 = p_1 + iq_1,\ v_2 = p_2 + iq_2, \ldots v_m = p_m + iq_m,$$

und man habe

(13) $$\begin{aligned} dz_1 &= c_{1,1}\,dv_1 + c_{1,2}\,dv_2 + \ldots + c_{1,m}\,dv_m, \\ dz_2 &= c_{2,1}\,dv_1 + c_{2,2}\,dv_2 + \ldots + c_{2,m}\,dv_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dz_n &= c_{n,1}\,dv_1 + c_{n,2}\,dv_2 + \ldots + c_{n,m}\,dv_m. \end{aligned}$$

In Folge dessen verwandelt sich (1) in einen Ausdruck von der Gestalt

$$(14)\quad (\varrho_1 + i\sigma_1)(dp_1 + idq_1) + (\varrho_2 + i\sigma_2)(dp_2 + idq_2) + \ldots \\ + (\varrho_m + i\sigma_m)(dp_m + idq_m),$$

wo der reelle Theil aus (2), der Factor von i aus (3) entsteht, indem die $2n$ rellen Variabeln $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$ durch die $2m$ reellen Variabeln $p_1, q_1, \ldots p_m, q_m$ ausgedrückt werden. Nach dem in § 115 benutzten Satze des § 99 bleiben bei der Substitution, die Zahl m möge der Zahl n gleich oder von ihr verschieden sein, für den reellen und den imaginären Theil von (14) die Bedingungen der Integrabilität erfüllt, weil sie für den reellen und imaginären Theil von (1) erfüllt sind. Mithin ist der durch die Integration von (14) zu gewinnende Ausdruck gleich der Function der m complexen Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_m$, in welche die mit (4) bezeichnete $t + iu$ der n complexen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch die angewendete Substitution übergeht.

§ 119. Addition der Logarithmen.

Nach § 116 wird der Logarithmus einer beliebigen complexen Grösse $z(1)$ durch das von $z = 1$ bis $z = z(1)$ genommene Integral

$$(1)\qquad \int_1^{z(1)} \frac{dz}{z}$$

so ausgedrückt, dass sich die Anzahl und Direction der bei dem Integrationswege um den Nullpunkt beschriebenen Umgänge nach der Anzahl der in dem imaginären Theile von $\log z(1)$ enthaltenen Vielfachen der Grösse $2i\pi$ richtet. Auf diese Weise kann man die Logarithmen von irgend zwei complexen Grössen durch Integrationen, die sich auf zwei von einander unabhängige complexe Variabeln z_1 und z_2 beziehen, darstellen, und es entsteht für die Summe der beiden Logarithmen die Gleichung

$$(2)\qquad \int_1^{z_1(1)} \frac{dz_1}{z_1} + \int_1^{z_2(1)} \frac{dz_2}{z_2} = \log z_1(1) + \log z_2(1).$$

Die linke Seite derselben darf in Uebereinstimmung mit einer in § 118 gemachten allgemeinen Bemerkung als das Integral des folgenden mit den beiden complexen Variabeln z_1 und z_2 gebildeten vollständigen Differentials

$$\frac{dz_1}{z_1} + \frac{dz_2}{z_2} \tag{3}$$

betrachtet werden. Vermöge der Grundregel für die Differentiation eines Products gilt aber die Gleichung

$$\frac{dz_1}{z_1} + \frac{dz_2}{z_2} = \frac{d(z_1 z_2)}{z_1 z_2}; \tag{4}$$

diese verwandelt sich, sobald das Product $z_1 z_2$ als eine neue Variable v eingeführt wird, in die Gleichung

$$\frac{dz_1}{z_1} + \frac{dz_2}{z_2} = \frac{dv}{v}, \tag{5}$$

deren rechte Seite mit den einzelnen Bestandtheilen der linken gleiche Gestalt hat. Aus der Bestimmung

$$v = z_1 z_2 \tag{6}$$

ergiebt sich, dass für $z_1 = 1$ und $z_2 = 1$ auch $v = 1$ wird. Lässt man nun die Variable v so fortschreiten, dass zuerst für $z_2 = 1$ die Variable z_1 wie früher von 1 zu $z_1(1)$, dann für $z_1 = z_1(1)$ die Variable z_2 wie früher von 1 zu $z_2(1)$ weiter rückt, und nimmt $v(1) = z_1(1)\, z_2(1)$, so folgt aus (5) die Gleichung

$$\int_1^{z_1(1)} \frac{dz_1}{z_1} + \int_1^{z_2(1)} \frac{dz_2}{z_2} = \int_1^{v(1)} \frac{dv}{v}. \tag{7}$$

Nun ist aber

$$\int_1^{v(1)} \frac{dv}{v} = \log v(1), \tag{8}$$

mithin besteht der in § 116 erwähnte Satz

$$\log z_1(1) + \log z_2(1) = \log (z_1(1)\, z_2(1)), \tag{9}$$

wonach die Summe der Logarithmen zweier complexen Grössen gleich dem Logarithmus ihres Products ist.

Auf diesen Satz gründet sich eine allgemeine Eigenschaft des Integrals einer beliebigen rationalen Function einer Variable, dessen Gestalt in § 117 angegeben ist. Substituirt man statt der ursprünglichen Variable z irgend eine rationale Function einer neuen Variable v und untersucht die beiden Bestandtheile des Integrals $\int \frac{e(z)}{f(z)} dz$, welche in § 117 mit (13) und (14) bezeichnet sind, so muss der erstere als eine rationale Function von z gleich einer rationalen Function von v werden. Der zweite Bestandtheil ist zufolge der dortigen Gleichung (7) ein Aggregat von logarithmischen Ausdrücken von der Gestalt

$$(10) \qquad \sigma \log (z - \xi),$$

wo σ und ξ feste complexe Grössen sind. Nun wird das Argument $z-\xi$ durch die bezeichnete Substitution ebenfalls gleich einer rationalen Function von v, das heisst gleich einem Bruche, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen von v sind. Jede derselben ist nach dem Fundamentaltheorem der algebraischen Gleichungen gleich einem Product aus Factoren, die in Bezug auf v vom ersten Grade sind. Mithin ist der Logarithmus von $z-\xi$ nach dem vorliegenden Satze gleich der Summe der Logarithmen der Factoren der Zählerfunction, vermindert um die Summe der Logarithmen der Nennerfunction. Es verwandeln sich deshalb die einzelnen logarithmischen Ausdrücke (10) in Ausdrücke, welche in Bezug auf die neue Variable v ebenso gebildet sind, und der in Rede stehende zweite Bestandtheil geht in ein auf gleiche Weise aus logarithmischen Ausdrücken zusammengesetztes Aggregat über. Indem die Variable z durch eine beliebige rationale Function der neuen Variable v ersetzt wird, verwandelt sich das zu integrirende Differential $\frac{e(z)}{f(z)} dz$ in das Differential $\frac{e(z)}{f(z)} \frac{dz}{dv} dv$, bei dem dv wieder mit einer rationalen Function von v multiplicirt ist. Nimmt man auch hier vermöge der in § 117 angegebenen Methode eine Zerlegung in die beiden Theile vor, welche respective den algebraischen und den logarithmischen Theil des Gesammtintegrals hervorbringen, und unterscheidet dieselben wie vorhin als den ersten und zweiten, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass sich immer der erste Theil von $\frac{e(z)}{f(z)} dz$ in den ersten Theil von $\frac{e(z)}{f(z)} \frac{dz}{dv} dv$ und beziehungsweise der zweite in den zweiten verwandelt. Die

Ergebnisse dieser Zerlegung haben also die Eigenschaft, von der Anwendung einer rationalen Substitution unabhängig zu sein.

§ 120. Abel'scher Satz.

In dem Eingange von Capitel IX, Abschnitt I, sind die Integrale von Functionen einer Variable für das reelle Gebiet in solche eingetheilt worden, bei denen die Function algebraisch und bei denen sie nicht algebraisch ist; zugleich sind unter den Integralen algebraischer Functionen diejenigen getrennt, bei denen die Function durch rationale, und bei denen sie durch nicht rationale Operationen gebildet wird. Bei der Erweiterung, welche die Begriffe der algebraischen Function und des Integrationsprocesses auf dem Gebiete der complexen Grössen erhalten haben, bleiben beide Arten der Eintheilung bestehen. Wie sich auf dem letztern Gebiet die Behandlung der Integrale rationaler Functionen vereinfacht, zeigt die Vergleichung der nächst vorhergehenden §§ mit § 67 und § 68. Ebenso hat die Lehre von den Integralen der algebraischen nicht rationalen Functionen nach ihrer Ausdehnung auf den Bereich der complexen Grössen einen völligen Umschwung erfahren, durch den alte Räthsel gelöst, neue entstanden sind. Den eigentlichen Wendepunkt bezeichnet aber *Abel's* Entdeckung einer gemeinsamen Eigenschaft der Integrale aller algebraischen Functionen, deren Ausdruck als der *Abel*'sche Satz berühmt geworden ist. *Abel* spricht sich in seiner Darstellung*) nicht darüber aus, ob die Integrationsvariabeln reell sein sollen, oder auch complexe Werthe annehmen dürfen. Weil er aber stets die Begriffe der algebraischen Function und des Integrirens vollständiger Differentiale gebraucht, so gelten seine Betrachtungen mit gleichem Recht für complexe wie für reelle Grössen. Aus einer genügenden Entwickelung der Theorie der Functionen von complexen Variabeln folgt daher unmittelbar der zugehörige Ausdruck des *Abel*schen Satzes, dessen Beweis das vorliegende Capitel schliessen wird.

---

*) *Abel*, oeuvres complètes, tome 2, XI, *sur la comparaison des fonctions transcendantes*, und *mémoire sur une propriété générale d'une classe trés-étendue de fonctions transcendantes*, v. J. 1826.

Wir haben in § 114 den allgemeinen Ausdruck einer algebraischen Function einer Variable z angeführt. Nachdem mit einer Function

$$(1)\qquad F(z,w)=A_0 w^n + A_1 w^{n-1} + \ldots + A_n,$$

bei der $A_0, A_1, \ldots A_n$ ganze Functionen von z sind, die Gleichung

$$(2)\qquad F(z,w)=0$$

gebildet ist, erscheint eine algebraische Function von z als ein Bruch

$$(3)\qquad K(z,w)=\frac{K_0(z)\,w^{n-1}+K_1(z)w^{n-2}+\ldots+K_{n-1}(z)}{L_0(z)\,w^{n-1}+L_1(z)w^{n-2}+\ldots+L_{n-1}(z)},$$

in dem $K_0(z), K_1(z), \ldots K_{n-1}(z), L_0(z), L_1(z), \ldots L_{n-1}(z)$ wieder ganze Functionen von z bedeuten. Vermöge der Gleichung (2) ist w eine n-werthige und mit Ausnahme gewisser Werthe von z stetige Function von z; das heisst, das Gebiet von z zerfällt, sobald einzelne Stellen ausgeschlossen sind, in Theile, für welche zu jedem z genau n Werthe von w gehören und jeder einzelne Werth sich bei einer stetigen Aenderung von z gleichfalls stetig ändert. Wählt man einen solchen und zwar einfach zusammenhängenden Gebietstheil von z und hebt für denselben einen bestimmten unter den n zugehörigen Werthen von w heraus, so ist für diese Combination z, w die Function $K(z,w)$ durch (3) eindeutig bestimmt. Zugleich soll der Gebietstheil so angenommen sein, dass in demselben das Unendlichwerden von (3) ausgeschlossen bleibt, was leicht zu erreichen ist. Unter der erwähnten Voraussetzung hat dann das über die Function $K(z,w)$ nach z von einem Werthe $z(0)$ bis zu einem Werthe $z(1)$ auf einem gewissen Wege ausgedehnte Integral

$$(4)\qquad \int K(z,w)\,dz$$

einen durch die frühere Definition genau präcisirten Sinn, und nimmt an der in (II) des § 115 ausgesprochenen Eigenschaft Theil, bei zwei verschiedenen von einem Werth $z(0)$ nach einem Werth $z(1)$ geführten Integrationswegen denselben Werth zu bekommen. Für den gegenwärtigen Zweck genügt die angegebene Beschränkung des Gebiets der Variable z; wofern es bei anderen Untersuchungen nothwendig wird, die Beschränkung aufzuheben, kann das betreffende Gebiet stets in Gebietstheile von der bezeichneten Beschaffenheit zerlegt werden. Es besteht nun der *Abel*'sche Satz in der Thatsache, dass die Summe einer gewissen hinreichend grossen Anzahl von Integralen, deren jedes wie das Integral (4) gebildet ist, durch einen algebraischen und logarithmischen Ausdruck dargestellt werden kann. Sei die Anzahl der Integrale gleich ν, das erste Integral von $z_1(0)$ bis $z_1(1)$, das zweite von $z_2(0)$ bis $z_2(1)$, u. s. f., das νte von $z_\nu(0)$ bis $z_\nu(1)$ zu erstrecken, es werde ferner in jedem Integral die Integrationsvariable als eine selbstständige Variable aufgefasst und als solche sammt der zugehörigen Function w mit einem betreffenden Zeiger versehen, so ist die in Rede stehende Summe von Integralen

$$(5)\qquad \int_{z_1(0)}^{z_1(1)} K(z_1,w_1)\,dz_1 + \int_{z_2(0)}^{z_2(1)} K(z_2,w_2)\,dz_2 + \ldots + \int_{z_\nu(0)}^{z_\nu(1)} K(z_\nu,w_\nu)\,dz_\nu$$

nach einer in § 118 enthaltenen und auch im vorigen § angewendeten Bemerkung gleich dem Integral des mit den complexen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ aufgestellten vollständigen Differentials

$$(6)\qquad K(z_1, w_1)\,dz_1 + K(z_2, w_2)\,dz_2 + \ldots + K(z_\nu, w_\nu)\,dz_\nu.$$

Eine Transformation des Differentials (6), bei welcher die ν Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ auf eine eigenthümliche Art durch ein System von neuen Variabeln ausgedrückt werden, wird den Beweis des *Abel*'schen Satzes liefern; den Zugang vermittelt eine algebraische Betrachtung.

Man kann die in (1) definirte Function $F(z, w)$ mit einer beliebigen anderen rationalen ganzen Function derselben Variabeln in der Weise vergleichen, dass, nachdem beide nach den Potenzen derselben Variable w geordnet sind, die Function des höchsten Grades von w verlangt wird, welche in beide Functionen für unbestimmte Werthe von z algebraisch aufgeht. Die betreffende Function ergiebt sich, indem bei diesen Functionen der Variable w das in I, § 68 zur Aufsuchung des grösten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen einer Variable auseinandergesetzte Verfahren angewendet wird. Bei den hierzu erforderlichen Divisionen treten als Coefficienten rationale

Functionen von z auf; das Kennzeichen, dass die beiden gegebenen Functionen von w für unbestimmte Werthe von z gleichzeitig durch keine Function von w theilbar sind, besteht darin, dass bei der vorletzten auszuführenden Division als Rest eine von w unabhängige Grösse erscheint, die wieder gleich einer rationalen Function von z sein darf. Von jetzt ab möge die Function $F(z, w)$ die Voraussetzung erfüllen, mit ihrem nach w genommenen partiellen Differentialquotienten

$$(7) \qquad \frac{\partial F(z,w)}{\partial w} = n A_0 w^{n-1} + (n-1) A_1 w^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$$

bei unbestimmten Werthen von z keine Function von w als gemeinsamen Theiler zu besitzen. In dieser Annahme liegt keine wesentliche Specialisirung, da die zugehörige Function (1) in dem Falle, dass ein solcher Theiler vorhanden ist, in Factoren von der verlangten Beschaffenheit zerfällt; diese bezeichnen, einzeln gleich Null gesetzt, eine bestimmte Abhängigkeit der Variable w von der Variable z, und können zur Anwendung kommen, um die ursprüngliche Gleichung zu ersetzen. Zu $F(z, w)$ wird nun eine zweite rationale ganze Function von z und w $G(z, w)$ hinzugefügt, die in Bezug auf w vom $(n-1)$ten Grade sei und die Gestalt habe,

$$(8) \quad \begin{cases} G(z, w) = B_0 w^{n-1} + B_1 w^{n-2} + \ldots + B_{n-1}, \\ B_0 = b_{0,0} z^{p_0} + b_{0,1} z^{p_0-1} + \ldots + b_{0,p_0} \\ B_1 = b_{1,0} z^{p_1} + b_{1,1} z^{p_1-1} + \ldots + b_{1,p_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-1} = b_{n-1,0} z^{p_{n-1}} + b_{n-1,1} z^{p_{n-1}-1} + \ldots + b_{n-1,p_{n-1}}. \end{cases}$$

Diese Function, bei der die Coefficienten

$$b_{0,0}, b_{0,1}, \ldots b_{0,p_0}, \ldots b_{n-1,0}, b_{n-1,1}, \ldots b_{n-1,p_{n-1}}$$

beliebige von z unabhängige complexe Werthe erhalten, soll so beschaffen sein, dass für sie und $F(z, w)$ bei unbestimmten Werthen von z ebenfalls keine Function von w als gemeinsamer Theiler existirt. Doch können die beiden Functionen sehr wohl für bestimmte Werthe von z durch dieselbe Function von w theilbar sein, und zwar ist in unserem Falle gerade die Frage nach den Bedingungen zu beantworten, unter denen $F(z, w)$ und $G(z, w)$ durch dieselbe Function des ersten und keine Function eines höheren Grades von w theilbar sind.

Offenbar deckt sich die aufgeworfene Frage mit der Aufgabe, zu bestimmen, wann die beiden Gleichungen

$$\frac{F(z,w)}{A_0}=0,\quad \frac{G(z,w)}{B_0}=0 \tag{9}$$

gleichzeitig bestehen können, und in Bezug auf die Grösse w eine und nur eine gemeinsame Wurzel haben. Es handelt sich also um die Untersuchung eines Systems von zwei für die Unbekannten z und w gegebenen algebraischen Gleichungen. Bezeichnet man die zu einem bestimmten z gehörigen Werthe von w, welche die erste Gleichung befriedigen, mit $w_1, w_2, \ldots w_n$, diejenigen, welche die zweite Gleichung befriedigen, mit $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$, wonach

$$\left\{\begin{array}{l} F(z,w)=A_0(w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_n), \\ G(z,w)=B_0(w-h_1)(w-h_2)\ldots(w-h_{n-1}) \end{array}\right. \tag{10}$$

ist, so liegt die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer gemeinsamen Wurzel in dem Verschwinden des Products von Differenzen

$$\begin{array}{l} (w_1-h_1)(w_1-h_2)\ldots(w_1-h_{n-1}) \\ (w_2-h_1)(w_2-h_2)\ldots(w_2-h_{n-1}) \\ \vdots \\ (w_n-h_1)(w_n-h_2)\ldots(w_n-h_{n-1}). \end{array} \tag{11}$$

Dasselbe wird mit Hülfe von (10) in die Gestalt

$$\Pi(z)=\frac{G(z,w_1)}{B_0}\,\frac{G(z,w_2)}{B_0}\cdots\frac{G(z,w_n)}{B_0} \tag{12}$$

gebracht, welche in Bezug auf die Coefficienten $\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \cdots \frac{B_{n-1}}{B_0}$ der Gleichung $\frac{G(z,w)}{B_0}=0$ rational und ganz, in Bezug auf die n Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ rational, ganz und von jeder Vertauschung derselben unabhängig oder nach I, § 46 symmetrisch ist. Vermöge der in I, § 58 bewiesenen Fundamentaleigenschaft kann aber jede rationale ganze symmetrische Verbindung von n Elementen als ein rationaler ganzer Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen dargestellt werden, die bei den n Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ gleich den mit abwechselnden Zeichen genommenen Coefficienten $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \cdots \frac{A_n}{A_0}$ der zugeordneten Gleichung $\frac{F(z,w)}{A_0} = 0$ sind. Hiernach wird die rechte Seite von (12) gleich einem Ausdruck, der eine rationale ganze Function von den Coefficienten $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \cdots \frac{A_n}{A_0}$ und den Coefficienten $\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \cdots \frac{B_{n-1}}{B_0}$ ist. Das Verschwinden desselben oder das Erfülltsein der Gleichung

$$\Pi(z) = 0 \tag{13}$$

ist nach dem Obigen erforderlich und hinreichend, damit die Gleichungen (9) zusammen befriedigt werden. Durch die Voraussetzung, dass $F(z,w)$ und $G(z,w)$ für unbestimmte Werthe von z keine Function von w als gemeinsamen Theiler haben dürfen, wird der Fall ausgeschlossen, dass $\Pi(z)$ für unbestimmte Werthe von z gleich Null sei. Mithin kann diese rationale Function von z nur für bestimmte Werthe von z verschwinden, und da die betreffenden auch die einzigen sind, bei welchen sich die Gleichungen (9) befriedigen lassen, so ist *die Gleichung* (13) *die Resultante der Elimination von w aus den beiden Gleichungen* (9). Sobald an die Stelle von $G(z,w)$ der in (7) dargestellte Differentialquotient $\frac{\partial F(z,w)}{\partial w} = F'(z,w)$ tritt, gelten die schon mehrfach benutzten Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{F'(z,w_1)}{A_0} &= (w_1 - w_2)(w_1 - w_3)\ldots(w_1 - w_n)\\
\frac{F'(z,w_2)}{A_0} &= (w_2 - w_1)(w_2 - w_3)\ldots(w_2 - w_n)\\
&\;\;\vdots\\
\frac{F'(z,w_n)}{A_0} &= (w_n - w_1)(w_n - w_2)\ldots(w_n - w_{n-1}).
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

In Folge der Substitution von $\frac{F'(z,w)}{A_0}$ statt $\frac{G(z,w)}{B_0}$ geht demnach das Product (11) in das aus den sämmtlichen Differenzen der Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ gebildete Product über, durch welches in I, § 59 die Discriminante der zugehörigen Gleichung definirt ist; daher erhält man aus (12) für die Discriminante der nach w aufzulösenden Gleichung $F(z, w) = 0$ den Ausdruck

$$(12^*) \qquad \mathfrak{P}(z) = \frac{F'(z, w_1)}{A_0} \frac{F'(z, w_2)}{A_0} \cdots \frac{F'(z, w_n)}{A_0}.$$

Bei der oben gemachten Voraussetzung, dass $F(z,w)$ und $(F'z,w)$ keine Function von w als gemeinsamen Theiler haben dürfen, verschwindet $\mathfrak{P}(z)$ keinenfalls für unbestimmte Werthe von z, und können unmöglich zwei von den n Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ einander gleich sein; umgekehrt enthält das Verschwinden von $\mathfrak{P}(z)$ die Bedingung dafür, dass irgend zwei unter den n Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ einander gleich werden.

Zu einem folgenden Schritte dient ein in I, § 69 bewiesener Satz, nach welchem, wenn zwei ganze Functionen einer Variable keinen gemeinsamen Theiler haben, jede Function in der Weise mit einer ganzen Function multiplicirt werden kann, dass das Aggregat der beiden Producte gleich einer beliebigen, von Null verschiedenen von der Variable unabhängigen Grösse wird. Bei den Functionen $F(z, w)$ und $G(z, w)$ von w setzen wir diese von w unabhängige Grösse gleich der in (12) definirten Function $\Pi(z)$ und bilden die Gleichung

$$(15) \qquad S(z, w) \frac{F(z, w)}{A_0} + R(z, w) \frac{G(z, w)}{B_0} = \Pi(z).$$

Da die Function $F(z, w)$ in Bezug auf w vom $n$ten, $G(z, w)$ vom $(n-1)$ten Grade ist, so lässt sich nach I, § 93 bewirken, dass $S(z, w)$ vom $(n-2)$ten, $R(z, w)$ vom $(n-1)$ten Grade wird. Die rechte Seite darf gleich $\Pi(z)$ genommen werden, weil $\Pi(z)$ für keinen Werth von z, für den $F(z,w)$ und $G(z,w)$ ohne gemeinsamen Theiler sind, verschwindet. Nun wird die Function $R(z, w)$ für jeden Werth von z, der $\Pi(z)$ nicht zu Null macht, bestimmt, indem man in (15) statt w der Reihe nach die Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ der Gleichung $F(z, w) = 0$ substituirt. Hierdurch entstehen die n Gleichungen

$$(16) \quad R(z, w_1) \frac{G(z, w_1)}{B_0} = \Pi(z), \ldots R(z, w_n) \frac{G(z, w_n)}{B_0} = \Pi(z),$$

in denen wegen der über z gemachten Annahme keiner der Werthe der Function $G(z, w)$ verschwindet. Mithin sind die n Werthe der Function des $(n-1)$ten Grades $R(z, w)$ bekannt, welche sie für die nach der Voraussetzung untereinander verschiedenen n Werthe von w annimmt; $R(z, w)$ wird daher mit Hülfe der Interpolationsformel von *Lagrange* (I, § 96 und § 39 dieses Bandes) folgendermassen dargestellt

$$(17) \qquad R(z, w) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{B_0 \Pi(z)}{G(z, w_{\mathfrak{a}})} \frac{1}{F'(z, w_{\mathfrak{a}})} \frac{F(z, w)}{w - w_{\mathfrak{a}}},$$

wo $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist. Weil aber $\Pi(z)$ nach (12) gleich dem Product der n Factoren $\frac{G(z, w_{\mathfrak{a}})}{B_0}$ ist und sich daher durch jeden einzelnen Factor dividiren lässt, so behält $R(z, w)$ auch für solche Werthe von z einen endlichen Werth, für die ein Factor $\frac{G(z, w_{\mathfrak{a}})}{B_0}$ und damit auch $\Pi(z)$ verschwindet. Hierauf beruht der Schluss, dass die Function $R(z, w)$ in (17) nicht nur für diejenigen Werthe von z, für welche $\Pi(z)$ von Null verschieden ist, sondern für jeden Werth von z der Gleichung (15) entsprechend dargestellt wird. Die Function $R(z, w)$ kann mit Hülfe des vorhin angewendeten Fundamentalsatzes der symmetrischen Functionen als rationale Function von z ausgedrückt werden, wonach sich aus (15) auch für $S(z, w)$ ein in z rationaler Ausdruck ergiebt. In dem vorhin erwähnten Falle, dass $\frac{G(z, w)}{B_0}$ durch den partiellen Differentialquotienten $\frac{F'(z, w)}{A_0}$ ersetzt wird und das Product $\Pi(z)$ in die Discriminante $\mathfrak{P}(z)$ übergeht, verwandelt sich die obige Gleichung (15) in diejenige, welche *Gauss* in art. 8 der Abhandlung *demonstratio nova altera theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, Göttingen 1816, behandelt hat, und der Ausdruck $R(z, w)$ aus (17) in die von *Gauss* mit ϱ bezeichnete Function.

Für diejenigen Werthe von z, welche $\Pi(z)$ zum Verschwinden bringen, liefert die Gleichung (15), deren rechte Seite alsdann gleich Null ist, das Resultat, dass der Quotient von $\frac{F(z, w)}{A_0}$ durch $\frac{G(z, w)}{B_0}$ dem Quotienten von $-R(z, w)$ durch $S(z, w)$ gleich sein muss. Weil nun $\frac{F(z, w)}{A_0}$ in Bezug auf w vom n ten, $R(z, w)$

vom $(n-1)$ten Grade ist, so kann die Gleichheit der beiden Quotienten nur so bestehen, dass der Zähler und Nenner des ersten Quotienten eine Function von w als gemeinsamen Theiler haben, die bei dem Zähler und Nenner des zweiten Quotienten fortgelassen ist. Dass die Functionen $\frac{F(z,w)}{A_0}$ und $\frac{G(z,w)}{B_0}$ für Werthe von z, bei denen $\Pi(z)=0$ ist, durch eine Function von w gleichzeitig theilbar werden, ist die Folge des Vorhandenseins einer gemeinsamen Wurzel der zugehörigen Gleichungen (9). Soll nun, wie gefordert wurde, der gemeinsame Factor der Functionen von keinem höheren als dem ersten Grade, oder für die Gleichungen nur eine einzige gemeinsame Wurzel vorhanden sein, so ist es nothwendig, dass die Function $R(z,w)$ in Bezug auf w nicht auf den $(n-2)$ten Grad herabsinke. Der Ausdruck (17) von $R(z,w)$ wird durch Addition von n Producten erhalten, bei denen die Function des $(n-1)$ten Grades $\frac{F(z,w)}{w-w_\alpha}$ mit dem von w unabhängigen Factor

$$\frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\alpha)}\,\frac{1}{F'(z,w_\alpha)}$$

multiplicirt ist. In jeder der genannten Functionen hat w^{n-1} nach der Definition von $F(z,w)$ in (1) den Coefficienten A_0, mithin ist w^{n-1} in $R(z,w)$ mit dem Factor

$$\Psi(z)=\sum_\alpha \frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\alpha)}\,\frac{A_0}{F'(z,w_\alpha)} \tag{18}$$

multiplicirt, und dieser muss, damit $R(z,w)$ keine Function des $(n-2)$ten Grades von w werden kann, von Null verschieden sein.

Sobald $\frac{F(z,w)}{A_0}$ und $\frac{G(z,w)}{B_0}$ für besondere Werthe von z eine Function ersten Grades von w zum grösten gemeinsamen Theiler haben, kann man auf die von diesem Factor befreiten Functionen den Satz anwenden, welcher vorhin zu der Gleichung (15) geführt hat. Denkt man sich eine entsprechende Gleichung aufgestellt und beide Seiten derselben mit dem fortgelassenen Factor ersten Grades multiplicirt, so entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$(19) \qquad D(z,w)\frac{F(z,w)}{A_0} + C(z,w)\frac{G(z,w)}{B_0} = \Psi(z)\,w - \Omega(z).$$

Hier bedeutet $D(z,w)$ eine ganze Function des $(n-3)$ten, $C(z,w)$ eine solche des $(n-2)$ten Grades in Bezug auf w. Der in dem Ausdruck rechts befindliche, an sich beliebige Factor von w muss so gewählt sein, dass er für die Werthe von z, für welche $\frac{F(z,w)}{A_0}$ und $\frac{G(z,w)}{B_0}$ einen gemeinsamen Theiler bekommen, keinenfalls verschwindet, und ist deshalb gleich der in (18) definirten Function $\Psi(z)$ gesetzt. Unzweifelhaft wird durch die Gleichung (19) auch die nothwendige Bedingung dafür ausgedrückt, dass der gemeinsame Factor der beiden Functionen von w von keinem höheren als dem ersten Grade sein kann; denn jeder gemeinsame Factor der Functionen ist ein Factor der linken Seite von (19) und muss deshalb in der rechten Seite aufgehen, die in Bezug auf w nur vom ersten Grade und wegen der Beschaffenheit von $\Psi(z)$ nicht gleich Null ist.

Wiewohl die Gleichung (19) für solche Werthe von z gebildet wurde, die $\Pi(z)$ zum Verschwinden bringen, so betrachten wir dieselbe doch zuerst unter der Voraussetzung, dass z einen Werth habe, bei dem $\Pi(z)$, aber auch $\Psi(z)$ von Null verschieden ist, und bestimmen zuerst die Function $\Omega(z)$. Setzt man wieder für w successive die n Werthe $w_\mathfrak{a}$, so kommt

$$(20) \qquad C(z,w_\mathfrak{a})\frac{G(z,w_\mathfrak{a})}{B_0} = \Psi(z)\,w_\mathfrak{a} - \Omega(z),$$

wo $\frac{G(z,w_\mathfrak{a})}{B_0}$ nicht den Werth Null annimmt, und folglich, indem mit dem Factor $\frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\mathfrak{a})}$ multiplicirt wird,

$$(21) \qquad C(z,w_\mathfrak{a})\,\Pi(z) = \Psi(z)\,w_\mathfrak{a}\frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\mathfrak{a})} - \Omega(z)\frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\mathfrak{a})}.$$

Insofern $C(z,w)$ eine Function des $(n-2)$ten Grades von w ist, hat nach einem in § 39 für reelle Argumente ausgesprochenen aber aus den gleichen Gründen für complexe Argumente geltenden Satz die von $\mathfrak{a} = 1$ bis n ausgedehnte Summe

$$(22) \qquad \sum_\mathfrak{a} \frac{A_0\,C(z,w_\mathfrak{a})}{F'(z,w_\mathfrak{a})}$$

einen verschwindenden Werth. Demnach folgt aus (21) durch Multiplication mit $\frac{A_0}{F'(z,w_\alpha)}$ und hierauf erfolgende Summation die Gleichung

$$(23)\quad \Psi(z)\sum_\alpha \frac{B_0\Pi(z)}{G(z,w_\alpha)}\,\frac{A_0 w_\alpha}{F'(z,w_\alpha)} - \Omega(z)\sum_\alpha \frac{B_0\Pi(z)}{G(z,w_\alpha)}\,\frac{A_0}{F'(z,w_\alpha)} = 0,$$

und folglich, da der Factor von $\Omega(z)$ gleich $\Psi(z)$ ist, diese Function aber einen von Null verschiedenen Werth haben soll, die Bestimmung

$$(24)\qquad \Omega(z) = \sum_\alpha \frac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_\alpha)}\,\frac{A_0\,w_\alpha}{F'(z,w_\alpha)}.$$

$\Psi(z)$ und $\Omega(z)$ sind in (18) und (24) als symmetrische Functionen der n Wurzeln w_α der Gleichung $\frac{F(z,w)}{A_0} = 0$ dargestellt und gehen daher in rationale Functionen der Coefficienten der beiden Gleichungen (9), mithin in rationale Functionen von z über.

Zur Bestimmung von $C(z,w)$ und $D(z,w)$ findet sich durch Combination von (15) und (19) die Gleichung

$$(25)\qquad \big(S(z,w)\,(\Psi(z)w - \Omega(z)) - D(z,w)\,\Pi(z)\big)\frac{F(z,w)}{A_0}$$
$$+ \big(R(z,w)\,(\Psi(z)w - \Omega(z)) - C(z,w)\,\Pi(z)\big)\frac{G(z,w)}{B_0} = 0.$$

Da $F(z,w)$ und $G(z,w)$ für unbestimmte Werthe von z keine Function von w als gemeinsamen Theiler haben, so muss hier der Factor von $\frac{G(z,w)}{B_0}$ bis auf einen von w unabhängigen Factor gleich $\frac{F(z,w)}{A_0}$ sein. In der letztern Function hat w^n die Einheit zum Factor, in der zu vergleichenden Differenz ist $C(z,w)$ nach w vom $(n-2)$ten Grade, ferner erscheint in $R(z,w)$ die Potenz w^{n-1} mit $\Psi(z)$, in dem als Factor hinzuzufügenden Ausdruck ersten Grades w ebenfalls mit $\Psi(z)$, folglich in dem Product die Potenz w^n mit $(\Psi(z))^2$ multiplicirt. Demnach gilt die Gleichung

$$(26)\quad R(z,w)\,(\Psi(z)\,w - \Omega(z)) - C(z,w)\,\Pi(z) = (\Psi(z))^2\,\frac{F(z,w)}{A_0},$$

aus der für $C(z, w)$ die Bestimmung

$$(27)\quad C(z,w)\,\Pi(z) = R(z,w)\,(\Psi(z)w - \Omega(z)) - (\Psi(z))^2\frac{F(z,w)}{A_0}$$

hervorgeht. Substituirt man statt $R(z, w)$, $\Psi(z)$, $\Omega(z)$ die gefundenen Ausdrücke (17), (18), (24) und wendet als Summationsbuchstaben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ an, so kommt

$$(28)\quad \begin{cases} \Psi(z)w - \Omega(z) = \sum\limits_{\mathfrak{b}} \dfrac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\dfrac{A_0(w-w_{\mathfrak{b}})}{F'(z,w_{\mathfrak{b}})}, \\ (\Psi(z))^2 = \sum\limits_{\mathfrak{a}} \dfrac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\dfrac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{a}})} \sum\limits_{\mathfrak{b}} \dfrac{B_0\,\Pi(z)}{G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\dfrac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{b}})}, \end{cases}$$

ferner, indem der Factor $\Pi(z)$, der gegenwärtig nicht gleich Null sein darf, auf beiden Seiten fortgelassen wird,

$$(29)\quad C(z,w) =$$

$$\Big(\sum_{\mathfrak{a}} \frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\frac{1}{w-w_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{b}})}(w-w_{\mathfrak{b}})$$

$$-\sum_{\mathfrak{a}} \frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{a}})} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{b}})}\Big)\,\Pi(z)\,\frac{F(z,w)}{A_0}.$$

Hier hat der in der Klammer befindliche Ausdruck die Eigenschaft, dass bei Ausführung der Multiplication der beiden Summen die Glieder, in denen die Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleich sind, Producte liefern, die sich fortheben. Indem nun eine Summe, die sich auf alle abgesehen von der Reihenfolge verschiedenen Paare von verschiedenen Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezieht, mit $\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bezeichnet wird, nimmt der Inhalt der Klammer die Gestalt an

$$(30)\quad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\frac{B_0}{G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{a}})}\,\frac{A_0}{F'(z,w_{\mathfrak{b}})}\left(\frac{w-w_{\mathfrak{b}}}{w-w_{\mathfrak{a}}}+\frac{w-w_{\mathfrak{a}}}{w-w_{\mathfrak{b}}}-2\right).$$

Es ist aber

$$(31)\quad \frac{w-w_{\mathfrak{b}}}{w-w_{\mathfrak{a}}}+\frac{w-w_{\mathfrak{a}}}{w-w_{\mathfrak{b}}}-2 = \frac{(w_{\mathfrak{a}}-w_{\mathfrak{b}})^2}{(w-w_{\mathfrak{a}})(w-w_{\mathfrak{b}})},$$

folglich entsteht für $C(z, w)$ der Ausdruck

$$(32)\quad C(z,w) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{B_0^2\,\Pi(z)}{G(z,w_{\mathfrak{a}})G(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\frac{A_0^2\,(w_{\mathfrak{a}}-w_{\mathfrak{b}})^2}{F'(z,w_{\mathfrak{a}})\,F'(z,w_{\mathfrak{b}})}\,\frac{F(z,w)}{A_0(w-w_{\mathfrak{a}})(w-w_{\mathfrak{b}})}.$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verschiedene Zahlen bedeuten, so enthält $\Pi(z)$ das Product $\dfrac{G(z,w_{\mathfrak{a}})G(z,w_{\mathfrak{b}})}{B_0^2}$ als Factor, während $\dfrac{F(z,w)}{A_0}$ durch das Product $(w-w_{\mathfrak{a}})(w-w_{\mathfrak{b}})$ aufgeht, und deshalb gilt die gefundene Darstellung von $C(z, w)$ für alle Werthe von z mit Einschluss derjenigen, für die $\Pi(z)$ verschwindet. Als symmetrische Function der Wurzeln w_α wird $C(z, w)$ gleich einer rationalen Function von z, so dass in gleicher Weise aus (19) der Ausdruck von $D(z, w)$ erhalten wird. *Hiernach bestehen die Bedingungen dafür, dass die Functionen $F(z, w)$ und $G(z, w)$ durch dieselbe Function des ersten und keine Function eines höheren Grades von w theilbar werden, darin, dass die Grösse z eine Wurzel der Gleichung*

$$\Pi(z) = 0$$

ist, und dass für keinen solchen Werth die Function $\Psi(z)$ verschwindet. Alsdann hat der einzige den beiden Functionen gemeinsame Factor den Ausdruck

$$\Psi(z)\, w - \Omega(z),$$

in welchem $\Psi(z)$ und $\Omega(z)$ gleich rationalen Functionen von z sind. Es wird daher für jede Wurzel z_α der Gleichung $\Pi(z) = 0$ der zugehörige Werth $w = w_\alpha$ durch die Gleichung

$$w_\alpha = \frac{\Omega(z_\alpha)}{\Psi(z_\alpha)} \tag{33}$$

als rationale Function von z_α ausgedrückt. Man gelangt zu einer Bestimmung der eingeführten Functionen $\Pi(z)$, $\Psi(z)$, $\Omega(z)$, bei der sie in den Coefficienten der Gleichungen (9) durch Bildung von Determinanten ausgedrückt sind, indem man die Function $\dfrac{F(z, w)}{A_0}$ successive mit den Factoren $1, w, w^2, \ldots w^{n-2}$, die Function $\dfrac{G(z, w)}{B_0}$ ebenso mit den Factoren $1, w, w^2, \ldots w^{n-1}$ multiplicirt, in den von w freien Gliedern w^0 als Factor zufügt, und das resultirende System von $(2n-1)$ Ausdrücken untersucht, die in Bezug auf die $(2n-1)$ Potenzen $w^0, w^1, \ldots w^{2n-2}$ homogen und vom ersten Grade sind. Für das Folgende ist jedoch eine Kenntniss der expliciten Darstellung nicht erforderlich.

Um die mitgetheilten Eigenschaften eines Systems von zwei algebraischen Gleichungen zu dem Beweise des *Abel*'schen Satzes zu benutzen, werden *die in der Function $G(z, w)$ vorkommenden Coefficienten $b_{0,0}, b_{0,1}, \ldots b_{0,p_0}, \ldots, b_{n-1,0}, \ldots b_{n-1,p-1}$,* welche abgekürzt $b_{\varrho,\sigma}$ heissen mögen, als *unabhängige variable Grössen* aufgefasst. Da die Function $\Pi(z)$ eine rationale ganze Function der Verbindungen $\frac{A_1}{A_0}, \dots \frac{A_n}{A_0}$ und $\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \dots \frac{B_{n-1}}{B_0}$ ist, die erstern rationale Functionen von z, die letztern rationale Functionen von z und von den Grössen $b_{\varrho,\sigma}$ sind, so ist $\Pi(z)$ ebenfalls eine rationale Function von z und den Grössen $b_{\varrho,\sigma}$, und deshalb sind die Wurzeln z_α der Gleichung $\Pi(z) = 0$ als Functionen der Grössen $b_{\varrho,\sigma}$ anzusehen. Für jede Wurzel folgt aus dem Verschwinden des vollständigen Differentials von $\Pi(z)$,

$$(34) \qquad \frac{\partial \Pi(z)}{\partial z} dz + \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial \Pi(z)}{\partial b_{\varrho,\sigma}} d b_{\varrho,\sigma} = 0,$$

eine Darstellung des Differentials dz als Aggregat von Producten der Differentiale $db_{\varrho,\sigma}$ mit Ausdrücken, die rationale Functionen von z und allen $b_{\varrho',\sigma'}$ sind. Falls unter den Wurzeln solche vorkommen, die von den Grössen $b_{\varrho,\sigma}$ unabhängig sind, so muss für dieselben der betreffende Ausdruck von dz verschwinden. Diese Wurzeln werden aus der folgenden Betrachtung herausfallen, doch kann von ihrem Vorhandensein der Einfachheit halber abgesehen werden. Die Anzahl der sämmtlichen, demnach von den Grössen $b_{\varrho,\sigma}$ abhängenden Wurzeln sei gleich ν. Wir lassen nun diese ν Grössen $z_1, z_2, \dots z_\nu$ mit den ν Variabeln zusammenfallen, die in dem vollständigen Differential (6) anticipirend mit den gleichen Buchstaben bezeichnet sind. Da hier mit jedem Werth z ein vermöge der Gleichung $F(z, w) = 0$ zugehöriger Werth w zu combiniren ist, so darf immer mit z_α derjenige Werth w_α combinirt werden, welcher in (33) durch die Function $\frac{\Omega(z_\alpha)}{\Psi(z_\alpha)}$ definirt worden ist. Dieser Quotient ist aus den gleichen Gründen wie $\Pi(z)$ eine rationale Function von z_α und von den Grössen $b_{\varrho,\sigma}$. Wenn man daher in dem einzelnen Ausdruck $K(z_\alpha, w_\alpha)\, dz_\alpha$ die Grösse w_α in der angegebenen Weise determinirt, so wird der Factor $K(z_\alpha, w_\alpha)$ ebenfalls gleich einer rationalen Function von z_α und $b_{\varrho,\sigma}$, ferner ist dz_α vermöge (34) durch eine Summe von Producten der Differentiale

$db_{\varrho,\sigma}$ in rationale Functionen von z_α und $b_{\varrho',\sigma'}$ zu ersetzen. Hierbei zeigt sich der Umstand, dass, wenn nach einander dieselbe Transformation mit den verschiedenen Ausdrücken

$$K(z_1, w_1)\,dz_1,\ K(z_2, w_2)\,dz_2, \ldots K(z_\nu, w_\nu)\,dz_\nu$$

ausgeführt wird, nur die Wurzel z_1 nach einander in $z_2, \ldots z_\nu$ zu verwandeln ist, während die Grössen $b_{\varrho,\sigma}$ sammt ihren Differentialen überall genau in derselben Weise auftreten. Werden jetzt alle ν transformirten Ausdrücke addirt, so erhält man statt des vollständigen Differentials (6) ein nach den sämmtlichen Differentialen $db_{\varrho,\sigma}$ zu ordnendes Aggregat

$$(35) \qquad \sum_{\varrho,\sigma} Q_{\varrho,\sigma}\, db_{\varrho,\sigma},$$

bei welchem jeder einzelne Factor $Q_{\varrho,\sigma}$ gleich der Summe von ν Ausdrücken ist, unter denen jeder einzelne nach einer Grösse z_α und den sämmtlichen $b_{\varrho',\sigma'}$ rational ist; alle gehen aus einem einzelnen durch die Substitution $z_\alpha = z_1, z_2, \ldots z_\nu$ hervor. Daher ist jeder Factor $Q_{\varrho,\sigma}$ eine rationale Function der sämmtlichen $b_{\varrho',\sigma'}$ und zugleich eine symmetrische Function der ν Wurzeln z_α der Gleichung $\Pi(z) = 0$; er ist folglich nach dem Fundamentalsatze der symmetrischen Functionen gleich einer rationalen Function von den Coefficienten dieser Gleichung, mithin, weil diese ebenfalls rationale Functionen der $b_{\varrho',\sigma'}$ sind, selbst eine rationale Function der $b_{\varrho',\sigma'}$. Es geht also durch die ausgeführte Substitution das vollständige Differential (6) in das Aggregat von Differentialen (35) über, bei dem die sämmtlichen Factoren $Q_{\varrho,\sigma}$ rationale Functionen der Variabeln $b_{\varrho',\sigma'}$ sind. Nach § 118 verwandelt sich ein vollständiges Differential bei der Substitution eines jeden Systems neuer Variabeln wieder in einen Ausdruck, der die Bedingungen der Integrabilität erfüllt. Also sind diese Bedingungen bei dem Ausdruck (35) befriedigt. Andrerseits liefert ein Aggregat von Differentialen, bei dem die sämmtlichen Factoren der Differentiale rationale Functionen der Variabeln sind, durch Integration nach dem angeführten § einen Ausdruck, der in Bezug auf die Variabeln theils algebraisch rational, theils logarithmisch ist. *Wenn daher das Aggregat* (35) *in der Weise integrirt wird, dass jede Variable* $b_{\varrho,\sigma}$ *von einem Werthe* $b_{\varrho,\sigma}(0)$ *zu einem Werth* $b_{\varrho,\sigma}(1)$ *fortschreitet* *und die Variabeln* z_α *in entsprechender Weise von* $z_\alpha(0)$ *bis* $z_\alpha(1)$ *bewegt werden, so wird die Summe von Integralen* (5) *gleich dem zugehörigen Integral des Aggregats* (35), *das heisst gleich einem Ausdruck, welcher in Bezug auf die Grössen* $b_{\varrho\sigma}(0)$ *und* $b_{\varrho,\sigma}(1)$ *theils algebraisch rational theils logarithmisch ist.* Hiermit ist aber der *Abel*'sche Satz begründet.

Capitel IV.

Entwickelung von Functionen einer complexen variabeln Grösse in Potenzreihen.

§ 121. Cauchy'scher Satz.

Für Functionen, die in einem gewissen Intervall ihrer reellen Variable mit Einschluss der aufeinanderfolgenden nach derselben genommenen Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig gegeben sind, liefert der in § 27 enthaltene *Taylor*'sche Satz ein Mittel der Darstellung durch Potenzreihen, zu welchen, nachdem sie beliebig weit fortgesetzt sind, als vollständiger Rest ein bestimmtes Integral hinzukommt; wofern dieser Rest bei stets wachsender Gliederzahl beliebig klein wird, convergiren die Reihen bei unendlicher Ausdehnung. Es wird daher die in I, § 112 erwähnte Aufgabe, zu beurtheilen, ob eine bestimmte gegebene Function einer reellen Variable in eine Potenzreihe entwickelbar sei, und, falls dem so ist, die Entwickelung auszuführen, durch den *Taylor*'schen Satz nur insoweit gelöst, dass noch eine Convergenzuntersuchung hinzuzufügen bleibt. Dagegen gewährt die Uebertragung der Frage auf das Gebiet der complexen Grössen den Vorzug, dass man unter sehr umfassenden Voraussetzungen im Stande ist, die Bedingungen der Entwickelbarkeit einer Function in eine convergente unendliche Reihe, die nach den ganzen positiven Potenzen der complexen Variable fortschreitet, von vorne herein aus den Eigenschaften der Function abzuleiten; die Entwickelung wird dann später ausgeführt. Diesem Ziele nähern wir uns durch die Mittheilung eines Satzes, der dazu dient, eine Function einer complexen Variable durch ein Integral auszudrücken, und der nach seinem Urheber *Cauchy* benannt worden ist.

Wenn eine Function $f(z)$ der complexen Variable z für ein Gebiet E derselben eindeutig, endlich und stetig gegeben ist, und ζ einen bestimmten in diesem Gebiet enthaltenen Werth von z bezeichnet, so ist der durch Division mit der Verbindung $z-\zeta$ erhaltene Quotient $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ nach § 107 ebenfalls eine Function von z. Dieser Quotient bleibt in dem ganzen Gebiet E eindeutig, und mit Ausnahme der Stelle $z=\zeta$ gleichfalls endlich und stetig. Wird nun, geometrisch gesprochen, in E eine geschlossene und sich nirgendwo selbst schneidende Linie L gezogen, die ein einfach zusammenhängendes, den Punkt ζ enthaltendes Flächenstück begrenzt, wird innerhalb desselben um den Punkt ζ als Centrum mit einem Radius ϱ ein Kreis K beschrieben, dessen Fläche ausgeschieden, und der übrig bleibende Theil des Stücks mit E' bezeichnet, so ist $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ in E' überall eindeutig, endlich und stetig. Dann sind in dem durch die beiden Linien L und K vollständig begrenzten Gebiete E' für das auf die complexe Variable z bezügliche Integral

$$(1) \qquad \int \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

die Bedingungen des Satzes (I) aus § 115 erfüllt; dasselbe muss daher, längs der ganzen Begrenzung in einem gegen das Innere von E' stets gleichen Sinne genommen, verschwinden. Nach einer in § 116 benutzten Bemerkung bekommt in Folge dessen das Integral (1) denselben Werth, wofern die Integration ein Mal längs der Linie L, das zweite Mal längs der Kreislinie K, und zwar immer um den Punkt ζ in demselben Sinne herum geführt wird. Für die auf die Kreislinie bezügliche Integration eignet sich die Einführung der Polarcoordinaten

$$(2) \qquad z-\zeta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta);$$

hierbei folgt aus der Gleichung

$$(3) \qquad dz = dr(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) + ir(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\, d\vartheta,$$

da r den festen Werth ϱ annimmt, die Bestimmung

$$(4) \qquad \frac{dz}{z-\zeta} = i d\vartheta.$$

Die Variable ϑ möge von $-\pi$ bis π genommen werden; der hierdurch bezeichnete Drehungssinn heisse positiv. Jetzt ist das in demselben Sinne über die Linie L ausgedehnte Integral gleich dem Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))\, i d\vartheta. \tag{5}$$

Hier darf die positive Grösse ϱ nach und nach immer kleinere Werthe erhalten, weshalb die Argumente der Function $\zeta + \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ für den ganzen Gang der Integration von dem Werthe ζ um eine complexe Grösse von beliebig kleinem Betrage abweichen. Weil nun $f(z)$ eine eindeutige, endliche und stetige Function von z ist, so wird die Differenz von zwei Functionswerthen mit Hülfe des endlichen Differentialquotienten $\frac{df(z)}{dz} = f'(z)$ für einen hinreichend kleinen Betrag der Differenz der Argumente beliebig genau so ausgedrückt

$$f(z) - f(\zeta) = f'(\zeta)(z - \zeta). \tag{6}$$

Es differirt also in (5) der Functionswerth $f(\zeta + \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))$ von dem Functionswerth $f(\zeta)$ um beliebig wenig, folglich nähert sich das betreffende Integral demjenigen Werthe, welcher durch Einsetzung von $f(\zeta)$ entsteht; derselbe wird, da $f(\zeta)$ von der Integrationsvariable ϑ unabhängig ist und die Integration des Elements $d\vartheta$ die Grösse 2π ergiebt, durch das Product $2\pi i f(\zeta)$ dargestellt. Auf diese Weise erhält man den nachzuweisenden *Cauchy'schen Satz:*

Bei einer Function $f(z)$, die für ein Gebiet von z eindeutig, endlich und stetig gegeben ist, wird der Functionswerth $f(\zeta)$, welcher zu einem beliebigen in dem Gebiete befindlichen Werthe ζ gehört, durch das folgende Integral ausgedrückt, das längs einer um den Punkt ζ im positiven Sinne einfach herumlaufenden Linie zu erstrecken ist,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz. \tag{7}$$

Für den Fall, dass in dem Integral der rechten Seite die Grösse ζ einen Werth erhält, der sich ausserhalb des von der betreffenden Linie eingeschlossenen Gebiets befindet, bleibt die Function

$\frac{f(z)}{z-\zeta}$ in demselben überall endlich, weshalb der Werth des Integrals nach dem Satze (I) des § 115 verschwindet.

Die Gleichung (7) kann dazu dienen, die sämmtlichen aufeinander folgenden Differentialquotienten der Function $f(\zeta)$ zu bilden und in ähnlicher Weise darzustellen. Da ζ unter dem Integralzeichen nur in dem Bruche $\frac{1}{z-\zeta}$ vorkommt, dessen Nenner bei der angegebenen Integration niemals verschwindet, so darf eine Differentiation des Integrals (7) nach dem Argument ζ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden. In der That setzt sich eine nach dem complexen Argument ζ vorzunehmende einmalige Differentiation aus zwei partiellen Differentiationen zusammen, die den reellen und den von dem Factor i befreiten imaginären Theil von ζ betreffen. Es gestatten daher die in § 75 entwickelten Principien der Differentiation eines bestimmten Integrals nach einer von den Integrationsgrenzen unabhängigen Grösse eine ein Mal und auch beliebig oft unter dem Integralzeichen auszuführende Differentiation des Integrals (7) nach dem Argument ζ; denn die Ausdrücke welche durch einmalige und beliebig fortgesetzte Differentiation des Bruches $\frac{1}{z-\zeta}$ entstehen, behalten die Eigenschaft, dass für den Lauf der Integration ihr Nenner nicht gleich Null wird, und sie selber eindeutig, endlich und stetig sind. Man erhält die Bestimmungen

$$(8)\qquad \frac{d\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)}{d\zeta}=\frac{1}{(z-\zeta)^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)}{d\zeta^2}=\frac{1.2}{(z-\zeta)^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^p\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)}{d\zeta^p}=\frac{1.2.3\ldots p}{(z-\zeta)^{p+1}},$$

und deshalb für die nach § 108 bezeichneten successiven Differentialquotienten die Ausdrücke

(9) $$f'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}\,dz$$

$$f''(\zeta)=\frac{1.2}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-\zeta)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(p)}(\zeta)=\frac{1.2\ldots p}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{p+1}}\,dz,$$

wo der Weg der Integration wie in (7) zu nehmen ist.

Das so eben eingeschlagene Verfahren liefert den Beweis, *dass eine für das Gebiet E gegebene eindeutige, endliche und stetige Function $f(z)$ die merkwürdige Eigenschaft hat, dass von derselben für jeden in E enthaltenen Werth von z in Bezug auf diese Variable die sämmtlichen Differentialquotienten einer beliebig hohen Ordnung gebildet werden können und eindeutige, endliche und stetige Functionen von z sind.* Sobald die Gleichung (7) festgestellt ist, folgt aus derselben vermöge der angewendeten Betrachtungen zu gleicher Zeit das Vorhandensein und die Darstellung der nach einander aufzusuchenden Differentialquotienten. Hierbei ist zu bedenken, dass, indem $f(z)=t+iu$ für das Gebiet E als Function der complexen Variable z definirt wird, nach (1) des § 106 für dasselbe Gebiet die Gleichung

(10) $$dt+i\,du=(\xi+i\eta)(dx+i\,dy)$$

vorausgesetzt wird, welcher die Gleichung

(11) $$\frac{df(z)}{dz}=\xi+i\eta$$

entspricht. Das Vorhandensein des ersten Differentialquotienten $f'(z)$ liegt also schon in der für die Function $f(z)=t+iu$ gemachten Voraussetzung, vermöge deren t und u in dem Gebiet E dem System der beiden partiellen Differentialgleichungen

(12) $$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial t}{\partial y}$$

zu genügen haben. Eine fernere Annahme besteht darin, dass $t+iu$ in E eindeutig, endlich und stetig sein soll, und diese umfasst für E die Eindeutigkeit und Endlichkeit der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. Aus diesen Voraussetzungen ist die Gleichung (7) abgeleitet, welche die Existenz der sämmtlichen Differentialquotienten von $f(z)$ bedingt. Während also die Existenz des ersten Differentialquotienten $f'(z)$ mit zu den gemachten Voraussetzungen gehört, wird aus denselben die Existenz aller übrigen Differentialquotienten als nothwendig gefolgert; hierbei besteht aber der Unterschied, dass die Function $f(z)$ und ihr erster Differentialquotient für das betreffende Gebiet von z mit Einschluss der Begrenzung als gegeben gelten, dass aber die Existenz der folgenden Differentialquotienten für das Innere des Gebiets mit Ausschluss der Begrenzung erwiesen wird.

§ 122. Darstellung einer Function einer complexen Variable durch eine Potenzreihe.

Sei $\zeta = \zeta_0$ ein beliebiger Werth des Gebiets, für das die Function $f(z)$ wie im vorigen § eindeutig, endlich und stetig gegeben ist; es werde eine Entwicklung von $f(\zeta)$ gesucht, die nach den positiven ganzen Potenzen der Differenz $\zeta - \zeta_0$ geordnet ist. Eine solche erhält man aus der *Cauchy'schen* Gleichung

$$(1) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

indem man dem Bruche $\frac{1}{z-\zeta}$ die Gestalt $\frac{1}{z-\zeta_0-(\zeta-\zeta_0)}$ giebt, und denselben, wie in I, § 94 geschehen, in eine geometrische Reihe verwandelt

$$(2) \qquad \frac{1}{z-\zeta_0-(\zeta-\zeta_0)} = \frac{1}{z-\zeta_0} + \frac{\zeta-\zeta_0}{(z-\zeta_0)^2} + \dots$$
$$+ \frac{(\zeta-\zeta_0)^p}{(z-\zeta_0)^{p+1}} + \frac{(\zeta-\zeta_0)^{p+1}}{(z-\zeta_0-(\zeta-\zeta_0))(z-\zeta_0)^{p+1}}.$$

Nach I, § 98 convergirt die Summe für eine wachsende Zahl p unter der Bedingung, dass der Betrag des Quotienten $\frac{\zeta-\zeta_0}{z-\zeta_0}$ kleiner als die Einheit ist. Damit dies bei der in dem Ausdruck von $f(\zeta)$ auszuführenden Integration überall der Fall sei, wird die im vorigen § mit L bezeichnete Linie als ein Kreis bestimmt, der um den Punkt ζ_0 mit einem angemessen zu wählenden Radius ϱ_0 beschrieben ist; da nun der Punkt ζ in diesem Kreise enthalten sein muss, so ist der Betrag von $\zeta - \zeta_0$ nothwendig kleiner als derjenige von $z - \zeta_0$. Substituirt man die rechte Seite von (2) unter dem Integralzeichen und löst das Integral in eine auf die einzelnen Summanden bezügliche Summe von Integralen auf, so kommt die Gleichung

$$(3)\quad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-\zeta_0} dz + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-\zeta_0)^2} dz(\zeta-\zeta_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-\zeta_0)^{p+1}} dz(\zeta-\zeta_0)^p + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)(\zeta-\zeta_0)^{p+1} dz}{(z-\zeta_0-(\zeta-\zeta_0))(z-\zeta_0)^{p+1}}.$$

In Folge der Gleichung (1) hat das erste Integral den Werth $f(\zeta_0)$; die übrigen Integrale werden vermöge der Gleichungen (9) des vorigen § durch die mit den zugehörigen Zahlenfacultäten dividirten Differentialquotienten $f'(\zeta_0), \ldots f^{(p)}(\zeta_0)$ ausgedrückt. Setzt man wieder, mit Benutzung der positiven Grösse ϱ_0 und eines reellen Arguments ϑ,

$$(4)\quad z - \zeta_0 = \varrho_0 (\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so kommen die Gleichungen

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} f(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta_0 + \varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))\, d\vartheta, \\ f'(\zeta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\zeta_0 + \varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))}{\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} d\vartheta, \\ &\vdots \\ \frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots p} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\zeta_0 + \varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))}{(\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))^p} d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

das letzte Integral geht in den Ausdruck

$$(5^*)\quad R_{p+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\zeta_0 + \varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))}{(\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) - \zeta - \zeta_0))} \frac{(\zeta-\zeta_0)^p d\vartheta}{(\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))^p}$$

über, und es entsteht die Entwickelung von $f(\zeta)$,

$$(6)\quad f(\zeta) = f(\zeta_0) + f'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0) + \frac{f''(\zeta_0)}{1.2}(\zeta-\zeta_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots p}(\zeta-\zeta_0)^p + R_{p+1},$$

welche mit der Gestalt des *Taylor*'schen Satzes aus § 27 übereinstimmt.

Wir können jetzt Grössen bestimmen, welche beziehungsweise grösser als die Beträge der Integrale in (5) und (5*) sind, und dadurch zeigen, dass unter den gegenwärtigen Voraussetzungen der Betrag des Integrals R_{p+1} für eine ohne Ende wachsende Zahl p stets beliebig klein wird. Jedes der Integrale (5) und (5*) lässt sich nach der ursprünglichen Definition eines bestimmten Integrals (§ 22) als der Grenzwerth einer Summe auffassen, bei der die Variable ϑ für das von $-\pi$ bis π ausgedehnte Intervall successive um positive Grössen wächst, und wo jedes Increment mit dem zugehörigen Werth der zu integrirenden Function multiplicirt wird, die hier eine complexe Grösse ist. Nach einem in I, § 61 bewiesenen Satze ist aber der Betrag einer Summe von mehreren complexen Grössen niemals grösser als die Summe der einzelnen Beträge. Dieser Satz gilt, wie leicht zu sehen, auch für den Betrag einer Summe, die bei stets zunehmender Gliederzahl gegen einen Grenzwerth convergirt. Es wird daher für den Betrag jedes Integrals (5) und (5*) ein zugehöriger übertreffender Werth gefunden, indem man in dem entsprechenden Summenausdruck jeden einzelnen Summanden durch seinen Betrag ersetzt, mithin auch indem man die zu integrirende Function durch deren Betrag oder einen denselben übertreffenden positiven Werth ersetzt, und dann die Integration ausführt. Nun sei $\mathfrak{M}$ eine positive Grösse, welche jeden bei den Integrationen vorkommenden Betrag der Function $f(\zeta_0 + \varrho_0 (\cos\vartheta + i \sin\vartheta))$ übertrifft, der Betrag der Differenz $\zeta - \zeta_0$ höchstens gleich σ_0, wobei nach der Voraussetzung $\varrho_0 > \sigma_0$ sein muss. Die in (5) und (5*) unter dem Integralzeichen befindliche Function ist ein Product, so dass dessen Betrag nach I, § 30 mit dem Product der Beträge der einzelnen Factoren zusammenfällt, und durch Vergrösserung jedes Factors selbst vergrössert wird. In (5) ist der Betrag des Nenners $(\varrho_0 (\cos\vartheta + i \sin\vartheta))^p$ gleich ϱ_0^p, der des Zählers kleiner als $\mathfrak{M}$, demnach der Betrag des Ausdrucks $\frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots p}$ kleiner als das Product der von ϑ unabhängigen Grösse $\frac{\mathfrak{M}}{\varrho_0^p}$ in das über $d\vartheta$

genommene und durch 2π dividirte Integral, welches gleich der Einheit ist; mithin *liegt der Betrag von* $\frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots p}$ *unter der Grösse* $\frac{\mathfrak{M}}{\varrho_0^p}$ *selbst.* Ebenso hat in dem Nenner des Integrals (5*) der Factor $(\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))^p$ den Betrag ϱ^p, der Factor

$$\varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) - (\zeta - \zeta_0)$$

nach dem zweiten Theile des aus I, § 61 angeführten Satzes einen nicht kleineren Betrag als die positive Differenz $\varrho_0 - \sigma_0$, während im Zähler der Betrag von $(\zeta - \zeta_0)^p$ nicht grösser als σ_0^p, der Betrag von $f(\zeta_0 + \varrho_0(\cos\vartheta + i\sin\vartheta))$ wie angenommen kleiner als $\mathfrak{M}$ ist. Demnach liegt der Betrag der zu integrirenden Function unter der von ϑ unabhängigen positiven Grösse

$$\frac{\mathfrak{M}\,\sigma_0^p}{(\varrho_0 - \sigma_0)\,\varrho_0^p}, \tag{7}$$

und aus dem angegebenen Grunde ist wieder der Betrag des Integrals R_{p+1} kleiner als der vorliegende Werth. Dieser nähert sich, weil $\frac{\sigma_0}{\varrho_0}$ ein echter Bruch ist, für eine stets zunehmende Zahl p beliebig der Null, und deshalb gilt von dem Betrage des Integrals R_{p+1} das gleiche, wie behauptet worden war. Also ist bewiesen, *dass die auf der rechten Seite von* (6) *befindliche Summe bei unendlicher Ausdehnung so lange convergirt und die Function* $f(\zeta)$ *richtig darstellt, als der Betrag der Differenz* $\zeta - \zeta_0$ *kleiner als die Grösse* ϱ_0 *ist; diese muss so gewählt werden, dass unter der gleichen für* ζ *geltenden Bedingung die Function* $f(\zeta)$ *eindeutig, endlich und stetig bleibt.*

Bei dem so eben geführten Beweise sind keine anderen Eigenschaften der Function $f(z)$ benutzt worden als diejenigen, welche derselben im vorigen § beigelegt und in der Aussage des Satzes wiederholt sind. Für den in dem Gebiete E beliebig angenommenen Werth ζ_0 hat man die positive Grösse ϱ_0 so zu wählen, dass der um den Punkt ζ_0 mit dem Radius ϱ_0 beschriebene Kreis ganz in E liegt. Es darf daher ϱ_0 so gross angenommen werden, dass der zugehörige Kreis bis an die Begrenzung von E heranreicht, sie jedoch nicht überschreitet. Da dies für jeden innerhalb E gelegenen Punkt ζ_0 geschehen kann, so *kommt die Eigenschaft der Function* $f(\zeta)$, *durch* (6) *in eine nach den Potenzen von* $\zeta-\zeta_0$ *fortschreitende Reihe entwickelbar zu sein, jeder in E eindeutigen, endlichen und stetigen Function von* ζ *zu, und ist insofern eine allgemeine Eigenschaft der Functionen einer complexen Variable.* Weiter folgt aus der für jede Zahl p festgestellten Relation, nach welcher der Betrag des Ausdrucks $\frac{f^{(p)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots p}$ kleiner als der Werth der durch die Potenz ϱ_0^p dividirten Constante $\mathfrak{M}$ ist, *dass die auf der rechten Seite von* (6) *befindliche Reihe bei unendlicher Ausdehnung in eine ebenfalls convergente Reihe übergeht, sobald statt jedes Gliedes der Betrag desselben gesetzt wird.* Denn sobald dies geschieht und hierauf für die auf einander folgenden Werthe von m statt des Betrages des Factors $\frac{f^{(m)}(\zeta_0)}{1.2.3\ldots m}$ der zu grosse Werth $\frac{\mathfrak{M}}{\varrho_0^m}$, statt des Betrages des zugehörigen Factors $(\zeta-\zeta_0)^m$ die Potenz σ_0^m der oben mit σ_0 bezeichneten Grösse gesetzt wird, die keinenfalls einen kleineren Werth als der Betrag von $\zeta-\zeta_0$ hat, so entsteht unter Vergrösserung aller Beträge die geometrische Reihe

$$\mathfrak{M}\left(1+\frac{\sigma_0}{\varrho_0}+\left(\frac{\sigma_0}{\varrho_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\sigma_0}{\varrho_0}\right)^p+\ldots\right),$$

welche wegen der Voraussetzung $\varrho_0>\sigma_0$ convergirt; daher muss die aufgestellte Behauptung richtig sein.

Wenn die Differenz $\zeta-\zeta_0$ als neue complexe Variable $x+iy$ eingeführt wird, so bekommt die zur Darstellung der Function $f(\zeta_0+x+iy)$ aus (6) folgende convergente unendliche Reihe die Gestalt

$$(8)\qquad c_0+id_0+(c_1+id_1)(x+iy)+\ldots+(c_q+id_q)(x+iy)^q+\ldots,$$

durch welche in I, § 107 unter der unwesentlichen Beschränkung auf reelle Coefficienten eine Function der complexen Variable $x+iy$ definirt, und die in § 77 dieses Bandes erwähnt ist. Wir nehmen an, dass, nachdem $x+iy$ durch eine positive Grösse R ersetzt worden, die Beträge der sämmtlichen Glieder

$$(8^*)\qquad \sqrt{c_0^2+d_0^2},\ \sqrt{c_1^2+d_1^2}\,R,\ldots\sqrt{c_q^2+d_q^2}\,R^q,\ldots$$

kleiner als eine feste Grösse $\mathfrak{L}$ sind. Hieraus folgt vermöge der am erwähnten Orte gebrauchten Schlüsse, *dass für die Werthe* $x+iy$, *deren Betrag kleiner als* R *ist, die Reihe* (8) *und die aus den Beträgen ihrer einzelnen Glieder gebildete Reihe convergirt* (Satz (III) in I, § 107), *und dass gleichzeitig der Werth der Reihe bei der Aenderung von* $x+iy$ *um einen Zuwachs* $\Delta x+i\Delta y$ *von beliebig kleinem Betrage sich um beliebig wenig ändert* (I, § 108). Wegen der zweiten Eigenschaft wurde dort die Reihe stetig genannt. Es ist aber in § 106 dieses Bandes hervorgehoben, dass die Definition einer Function einer complexen Variable, welche für die Function $t+iu$ in der Gleichung

$$(9) \qquad dt+i\,du=(\xi+i\eta)(dx+i\,dy)$$

ausgedrückt wird, von der Definition durch eine Reihe von der Gestalt (8) verschieden ist. Hieraus entspringt das Bedürfniss, nachzuweisen, dass die in I, § 107 angewendete Bezeichnung mit der späteren allgemeinen Definition im Einklange steht, oder dass die Reihe (8) innerhalb ihres Convergenzgebiets der vorstehenden Gleichung (9) Genüge leistet, was aus der vorhin erwähnten zweiten Eigenschaft noch nicht hervorgeht. Es sei für eine beliebige Zahl q, wie in I, § 107,

$$(10) \quad s_q(x+iy)=c_0+id_0+(c_1+id_1)(x+iy)+\ldots+(c_q+id_q)(x+iy)^q,$$

$x+iy$ erhalte das Increment $\Delta x+i\Delta y$, wobei sowohl der Betrag r von $x+iy$ wie auch der Betrag r_1 von $x+iy+\Delta x+i\Delta y$ mit Rücksicht auf die Convergenz der Reihe unter R liegen muss; dann ist zu zeigen, dass für zwei beliebig gross zu wählende Zahlen m und m_1 der Quotient

$$(11) \qquad \frac{s_{q+m_1}(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-s_{q+m}(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$

bei einem beständig gegen die Null abnehmenden Betrage von $\Delta x+i\Delta y$ gegen einen festen Grenzwerth convergirt. Nun ist der Betrag der Differenz

$$(12) \quad s_{q+m}(x+iy)-s_q(x+iy)=(c_{q+1}+id_{q+1})(x+iy)^{q+1}+\ldots \\ +(c_{q+m}+id_{q+m})(x+iy)^{q+m}$$

kleiner als das Aggregat der Beträge der einzelnen Glieder, und deshalb gewiss kleiner als die Summe

$$(13) \qquad \mathfrak{L}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}+\ldots+\left(\frac{r}{R}\right)^{q+m}\right),$$

desgleichen der Betrag der Differenz

$$(14)\qquad s_{q+m_1}(x+iy+\varDelta x+i\varDelta y)-s_q(x+iy+\varDelta x+i\varDelta y)$$

kleiner als die Summe

$$(13_a)\qquad \mathfrak{L}\left(\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}+\ldots+\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+m_1}\right);$$

ferner liegt (13) unter der Grösse $\dfrac{\mathfrak{L}\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}}{1-\frac{r}{R}}$, ($13_a$) unter der Grösse $\dfrac{\mathfrak{L}\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}}{1-\frac{r_1}{R}}$. Weil aber die im Zähler von (11) befindliche Differenz erhalten wird, indem man zu der Differenz

$$(15)\qquad s_q(x+iy+\varDelta x+i\varDelta y)-s_q(x+iy)$$

die Differenz (14) positiv, und die Differenz (12) negativ hinzufügt, so reicht es für den Beweis aus, zu zeigen, dass, nachdem jede Differenz durch $\varDelta x+i\varDelta y$ dividirt ist, das Aggregat der drei Quotienten von einem festen Grenzwerth um eine Grösse von beliebig kleinem Betrage abweicht. Die Differenz (15) ist gleich einer Summe von Ausdrücken

$$(16)\qquad (c_p+id_p)\left((x+iy+\varDelta x+i\varDelta y)^p-(x+iy)^p\right),$$

wo p successive von 1 bis q geht. Entwickelt man die Differenz nach dem binomischen Satze und dividirt durch $\varDelta x+i\varDelta y$, so folgt auf das erste Glied

$$(17)\qquad (c_p+i\,d_p)\,p\,(x+i\,y)^{p-1}$$

ein Ausdruck, dessen Betrag, wofern ϱ den Betrag von $\varDelta x+i\varDelta y$ bedeutet, von der folgenden Summe übertroffen wird

$$(18)\qquad \frac{\mathfrak{L}}{R^p}\left(\frac{p(p-1)}{2}\,r^{p-2}\,\varrho+\ldots+\varrho^{p-1}\right),$$

welche offenbar kleiner als die Grösse

$$(19)\qquad \frac{\mathfrak{L}}{R^p}\,\frac{p(p-1)}{2}\,(r+\varrho)^{p-2}\varrho$$

ist. Es weicht daher die durch $\varDelta x+i\,\varDelta y$ dividirte Differenz (15) von der Summe

$$(20) \qquad \sum_{p=1}^{p=q} (c_p + i\,d_p)\,p\,(x+i\,y)^{p-1}$$

um eine Grösse ab, deren Betrag kleiner ist als die von $p=2$ bis $p=q$ ausgedehnte Summe von (19); diese jedoch bleibt unter dem Werth der unendlich ausgedehnten Summe (19), die nach I, § 99 gleich dem Ausdruck

$$(21) \qquad \frac{\mathfrak{L}}{R^2}\frac{\varrho}{\left(1-\frac{r+\varrho}{R}\right)^3}$$

ist. Da der Betrag der durch $\varDelta x + i\varDelta y$ dividirten Differenz (12) und (14) nach dem obigen beziehungsweise kleiner ist als die durch den Betrag ϱ dividirte Grösse $\dfrac{\mathfrak{L}\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}}{1-\frac{r}{R}}$ und $\dfrac{\mathfrak{L}\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}}{1-\frac{r_1}{R}}$, so differirt der Quotient (11) von der Summe (20) um eine Grösse, deren Betrag unter dem Aggregat der Beträge

$$(22) \qquad \frac{\mathfrak{L}\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}}{\left(1-\frac{r}{R}\right)\varrho}+\frac{\mathfrak{L}\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}}{\left(1-\frac{r_1}{R}\right)\varrho}+\frac{\mathfrak{L}}{R^2}\frac{\varrho}{\left(1-\frac{r+\varrho}{R}\right)^3}$$

liegt. Sobald aber gleichzeitig die Zahl q so gross und der Betrag ϱ von $\varDelta x + i\varDelta y$ so klein gewählt wird, dass der Quotient $\dfrac{\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}}{\varrho}$ und $\dfrac{\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}}{\varrho}$ beliebig klein ausfällt, nähert sich jeder der Bestandtheile von (22), und folglich auch der Werth (22) selbst der Null. Auf diese Art ist nachgewiesen, dass sich der Quotient (15) in dem Convergenzgebiet der Reihe, wie behauptet worden, einem endlichen festen Grenzwerth nähert, und dass der letztere durch die unendlich auszudehnende convergente Summe (20) ausgedrückt wird. Der gefundene Grenzwerth vertritt, wenn der Werth der Reihe (8) mit $t+iu$ bezeichnet wird, die in der Gleichung (9) vorkommende Verbindung $\xi + i\eta$.

Mit dem Beweise, dass der Werth der Reihe (8) *in deren Convergenzgebiet die Gleichung* (9) *erfüllt, und daher nach der aufgestellten allgemeinen Definition eine Function von* $x + iy$ *ausdrückt, ergiebt sich also gleichzeitig der Satz, dass der Differentialquotient der Function* (8) *in Bezug auf die Variable* $x + iy$ *im Convergenzgebiet der Reihe überall einen endlichen Werth hat, und dass dessen Ausdruck erhalten wird, indem man den Differentialquotienten jedes einzelnen Gliedes der Reihe nimmt.*

Das Ergebniss dieser Betrachtung lässt sich dahin zusammenfassen, dass eine Potenzreihe (8), bei der alle mit der Grösse R gebildeten Beträge (8*) kleiner als eine feste Grösse sind, für dasjenige Gebiet der complexen Variable $x + iy$, in welchem deren Betrag kleiner als R ist, convergirt und eine eindeutige, endliche und stetige Function von $x + iy$ darstellt. Aus der Eigenschaft der Reihe, dass die absoluten Beträge der einzelnen Glieder eine innerhalb desselben Gebiets ebenfalls convergente Reihe liefern, folgt, wie in I, § 109 bemerkt worden ist, dass auch bei der Trennung der Glieder in ihren reellen und imaginären Theil die Summe der reellen wie der imaginären Theile, absolut genommen, convergirt, und es wird in diesem Falle auch die Reihe selbst mit einem in § 81 gebrauchten Ausdrucke eine unbedingt convergente genannt.

§ 123. Convergenzgebiet der zur Darstellung von Functionen einer complexen Variable dienenden Potenzreihen.

In dem vorigen § hat sich gezeigt, dass eine Function $f(\zeta)$, die für das Gebiet der complexen Variable ζ, in welchem der Betrag der mit einem bestimmten Werthe ζ_0 gebildeten Differenz $\zeta - \zeta_0$ unter einer gewissen Grösse ϱ_0 liegt, eindeutig, endlich und stetig ist, für dieses Gebiet in eine nach den ganzen positiven Potenzen von $\zeta - \zeta_0$ fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden kann, bei welcher der Betrag jedes Gliedes, nachdem für $\zeta - \zeta_0$ die Grösse ϱ_0 substituirt ist, kleiner als eine gewisse feste Grösse bleibt. Dem gegenüber ist festgestellt, dass eine nach den ganzen positiven Potenzen der complexen Grösse $\zeta - \zeta_0$ fortschreitende Reihe, bei welcher der Betrag jedes Gliedes, nach Ersetzung von $\zeta - \zeta_0$ durch eine positive Grösse R, kleiner als eine gewisse feste Grösse ist, für das Gebiet, in dem der Betrag von $\zeta - \zeta_0$ unter R liegt, convergirt und eine eindeutige, endliche und stetige Function von ζ ausdrückt. Aus der Vereinigung dieser Resultate folgt unmittelbar, dass, wenn das Verhalten einer Function $f(\zeta)$ für alle Werthe des Arguments ζ bekannt ist, der zu einem Werthe ζ_0 gehörige Werth ϱ_0 immer so gross und nur so gross gewählt werden darf, dass die Function $f(\zeta)$ in dem Gebiet, in welchem der Betrag von $\zeta - \zeta_0$ unter ϱ_0 liegt, eindeutig, endlich und stetig ist, dagegen für einen Werth ζ diese Bedingungen nicht erfüllt, welcher zu der begrenzenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung gehört, für die der Betrag von $\zeta - \zeta_0$ gleich ϱ_0 ist. Denn eine Potenzreihe, welche bis zu einem Betrage R von $\zeta - \zeta_0$ convergirte, der jenen Werth ϱ_0 übertrifft, würde eine Function von ζ darstellen, die in einem weiteren Umfange eindeutig, endlich und stetig wäre, als nach der Voraussetzung der Fall ist. Auf diese Weise erlaubt die Theorie der Functionen einer complexen Grösse, wie in § 121 gesagt wurde, die Bedingungen der Entwickelbarkeit einer Function in eine Potenzreihe aus den Eigenschaften der Function von vorne herein abzuleiten. Geometrisch ausgedrückt, ist für den Punkt ζ_0 der Radius ϱ_0 so anzunehmen, dass die Function $f(\zeta)$ überall innerhalb des mit dem Radius ϱ_0 um ζ_0 beschriebenen Kreises eindeutig, endlich und stetig bleibt, dagegen in dem Umfange des Kreises eine dieser Eigenschaften verliert; für diesen Kreis wird der Name des Convergenzkreises gebraucht. Das bezeichnete Princip soll jetzt auf die fundamentalen Functionen der Analysis angewendet werden.

(I) Es seien G und M ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, die zweite positiv, mithin die Potenz mit dem Exponenten $\frac{G}{M}$

$$\zeta^{\frac{G}{M}} \tag{1}$$

eine M-deutige Function von ζ. Für jeden Werth ζ_0 mit

Ausnahme des Werthes Null kann dieselbe in der Umgebung von ζ_0 als eindeutig definirt werden. Nach § 112 gehört zu der Function $\zeta^{\frac{1}{M}}$ und deshalb auch zu der vorliegenden $\zeta^{\frac{G}{M}}$ eine M-blätterige Fläche mit einem einzigen bei $\zeta=0$ vorhandenen Windungspunkt der $(M-1)$ten Ordnung. Daher ist der um ζ_0 zu beschreibende Convergenzkreis gerade durch den Punkt $\zeta=0$ hindurchzuführen, folglich ϱ_0 gleich dem Betrage von ζ_0 zu nehmen. Setzt man $\zeta-\zeta_0=x+iy$, so existirt demnach für die Function $(\zeta_0+x+iy)^{\frac{G}{M}}$ eine nach den ganzen positiven Potenzen von $x+iy$ fortschreitende Entwickelung, die so lange convergirt, als der Betrag von $x+iy$ kleiner als der Betrag von ζ_0 bleibt.

(II) Nach § 116 ist die Function

(2) $$\log \zeta,$$

welche durch die Forderung bestimmt wird, der Gleichung

(2*) $$\frac{dw}{d\zeta}=\frac{1}{\zeta}$$

zu genügen und für $\zeta=1$ zu verschwinden, eine vieldeutige Function von ζ, deren sämmtliche Werthe aus einem beliebigen durch Hinzuaddiren eines beliebigen ganzen Vielfachen der Grösse $2\pi i$ entstehen, und die für $\zeta=0$ ins Unendliche wächst. Zu derselben gehört eine Fläche von unbegrenzt vielen Blättern, die bei $\zeta=0$ durch einen Windungspunkt vereinigt sind. Für einen beliebigen von Null verschiedenen Werth ζ_0 ist daher der Convergenzkreis wie bei (I) durch den Punkt $\zeta=0$ zu legen, also ϱ_0 gleich dem Betrage von ζ_0 zu machen; daher ist die Function $\log(\zeta_0+x+iy)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von $x+iy$ fortschreitende Reihe entwickelbar, die für jeden Betrag von $x+iy$, der unter dem Betrage von ζ_0 liegt, convergirt.

(III) Nach demselben § ist die Function

(3) $$e^{\zeta},$$

welche durch die Forderung bestimmt wird, die Gleichung

(3*) $$\frac{dv}{d\zeta}=v$$

zu erfüllen und für $\zeta=0$ gleich der Einheit zu sein, für jedes

Argument ζ eine eindeutige endliche und stetige Function. Bei jedem endlichen Werthe von ζ_0 darf daher der Radius ϱ_0 des Convergenzkreises beliebig gross genommen werden; deshalb convergirt die für die Function e^{ζ_0+x+iy} aufzustellende, nach den ganzen positiven Potenzen von $x+iy$ geordnete Reihe für jeden Betrag von $x+iy$.

(IV) Wenn n einen beliebigen reellen oder complexen Werth bedeutet, so kann mit Hülfe der beiden Functionen $\log\zeta$ und e^{ζ} eine Function von ζ durch den Ausdruck

(4) $$\zeta^n = e^{n\log\zeta}$$

definirt werden. Dieselbe fällt für jeden rationalen Werth $n=\frac{G}{M}$ mit der in (I) definirten Function $\zeta^{\frac{G}{M}}$ zusammen, und wird als eine Potenz von der Basis ζ und dem Exponenten n bezeichnet; die Bildung ihres Differentialquotienten führt zu der Gleichung

(4*) $$\frac{d(\zeta^n)}{d\zeta} = \frac{n\zeta^n}{\zeta},$$

führt, die für die rationalen Werthe von n in (16) des § 112 übergeht. Die Function ζ^n wird durch dieselben Beschränkungen wie $\log\zeta$ eindeutig gemacht, so dass bei der Wahl von ζ_0 alle Werthe mit Ausnahme des Werthes Null zulässig sind. Daher hat der um ζ_0 beschriebene Convergenzkreis durch den Punkt $\zeta=0$ zu gehen, der Radius ϱ_0 ist wieder gleich dem Betrage von ζ_0, und die für die Function $(\zeta_0+x+iy)^n$ zu bildende Potenzreihe convergirt unter derselben Voraussetzung wie bei den Functionen $\log\zeta$ und $\zeta^{\frac{G}{M}}$.

Um die Entwickelungen der fundamentalen Functionen der Analysis so zu erhalten, wie sie im ersten Bande mitgetheilt sind, ist die Grösse ζ_0 in (I), (II), (IV) gleich der Einheit, in (III) gleich Null zu setzen, was auf das Wesen der Reihen keinen Einfluss ausübt. Es entsteht bei (III) die in I, § 113 erörterte Exponentialreihe

(5) $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$

welche für jeden Betrag von z convergirt, bei (II) die in I, § 118 aufgestellte logarithmische Reihe

$$(6) \qquad \log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \dots,$$

welche für jeden unter der Einheit liegenden Betrag von z convergirt, und bei (I) und (IV) die in I, § 117 u. ff. für alle reellen Werthe von n untersuchte Binomialreihe

$$(7) \qquad (1+z)^n = 1 + \frac{n}{1} z + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} z^2 + \dots$$

die ebenfalls für jeden unter der Einheit befindlichen Betrag von z convergirt. In (6) ist derjenige unter den Werthen der Function $\log(1+z)$ dargestellt, welcher für $z=0$ verschwindet, weshalb an der erwähnten Stelle, indem $z = x + iy$ gesetzt ist, statt $\log(1+z)$ der Ausdruck

$$(6_a) \qquad \log\sqrt{(1+x)^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x}$$

erscheint und so bestimmt wird, dass $\operatorname{arctg} \frac{y}{1+x}$ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen sein soll. Desgleichen verwandelt sich die linke Seite von (7), welche durch die Gleichung

$$(7_a) \qquad (1+z)^n = e^{n \log(1+z)}$$

definirt ist, unter der Voraussetzung, dass $\log(1+z)$ wie in (6_a) interpretirt wird, in den Ausdruck

$$(7_b) \qquad e^{n\left(\log\sqrt{(+x)^2+y^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{1+x}\right)},$$

welcher für einen reellen Werth von n mit der Werthbestimmung der Binominalreihe (22) in I, § 118 zusammenfällt.

Die Gleichungen (2*), (3*), (4*), welche beziehungsweise für die Functionen $\log\zeta$, e^ζ, ζ^n aufgestellt sind, drücken eine Relation zwischen dem Differentialquotienten der betreffenden Function, dieser selbst und der unabhängigen Variable aus. Jede dieser Relationen ist *eine Differentialgleichung*, durch welche die ihr genügende Function vollständig bestimmt wird, sobald der zu einem Werth der Variable zugeordnete Werth der Function gegeben ist. Auch sieht man leicht, wie die Eigenschaften der einzelnen Function, welche gebraucht wurden, um die Entwickelbarkeit der Function in eine Potenzreihe von vorne herein zu beurtheilen, aus der zugehörigen Differentialgleichung hervorgehen. Auf diesem Wege fortschreitend ist man dazu gelangt, in einem weiten Umfange für Functionen, die eine Differentialgleichung befriedigen, und für Systeme von Functionen, deren Abhängigkeit von einer Variable durch ein System von Differentialgleichungen bestimmt ist, von vorne herein die Bedingungen anzugeben, unter denen die in Rede stehenden Functionen durch convergente Reihen, die nach den Potenzen der unabhängigen Variable fortschreiten, dargestellt werden können. In dieser Hinsicht verweisen wir auf einen Satz, der von *Weierstrass* in der schon erwähnten Abhandlung *über die Theorie der analytischen Facultäten*, art. 7 ausgesprochen, und von *Briot und Bouquet* in den *recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, journal de l'école polytechnique, cahier 36 bewiesen ist, desgleichen auf die Abhandlung *Riemanns: Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen*, Göttingen 1857.

§ 124. Bestimmung einer Function, deren reeller Theil für die Begrenzung des Gebiets der complexen Variable beliebig gegeben ist.

Die verschiedenen Functionen einer complexen Variable, welche bisher vorgekommen sind, waren entweder durch algebraische Operationen und daher unmittelbar bestimmt, oder als Integrale von Differentialausdrücken oder durch Differentialgleichungen gegeben und dann vollständig durch die Bedingung bestimmt, dass zu einem gewissen Werth der Variable ein vorgeschriebener Werth der Function gehöre. Allein schon der Umstand, dass das Gebiet einer complexen Variable $x+iy$ nichts anderes als die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der beiden reellen Variabeln x und y ist, deutet darauf hin, dass Functionen einer complexen Variable auch durch eine andere Art von Forderungen bestimmt sein können; hierfür bietet der *Cauchy*'sche Satz einen näheren Anhalt. Nach den Bezeichnungen des § 121 hat dieser Satz den Ausdruck

(1) $$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Wenn also der Werth der Function $f(z)$ für eine geschlossene Linie L bekannt ist, die das einfach zusammenhängende Gebiet begrenzt, in welchem der Punkt ζ liegt, und für welches $f(z)$ eindeutig, endlich und stetig ist, so folgt daraus die Kenntniss des Werthes von $f(z)$ für jeden diesem Gebiete angehörenden Werth von z. Dies führt zu der Frage, in wie weit der Function $f(z)$ für die geschlossene Linie L beliebige Werthe vorgeschrieben werden können. Um eine Antwort zu finden, gehen wir zu dem System von partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zurück, dem der reelle und imaginäre Theil der Function $f(z) = t + iu$ genügen müssen, und leiten eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung ab, die von t und u allein befriedigt wird. Aus dem in Rede stehenden System (4) des § 106,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial t}{\partial y}, \tag{2}$$

folgt durch wiederholte partielle Differentiation

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}; \tag{4}$$

es muss daher t der Gleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0, \tag{5}$$

und u der ebenso gebildeten Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5$_a$}$$

genügen. Man kann nun die Untersuchung der Ausdrücke $t + iu$, welche das System (2) erfüllen, auf jede der beiden vorliegenden partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung gründen. Denn wenn t eine Function von x und y bedeutet, die der Gleichung (5) genügt, und für das Gebiet E der Variabeln mit Einschluss der ersten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ eindeutig, endlich und stetig ist, so enthält die Gleichung (5), folgendermassen geschrieben

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0, \tag{5*}$$

die Bedingungen der Integrabilität für den Differentialausdruck

$$(6) \qquad -\frac{\partial t}{\partial y}dx + \frac{\partial t}{\partial x}dy.$$

Durch Integration desselben entsteht eine Function u_1 von x und y, die bis auf eine reelle additive Constante vollständig bestimmt ist, und die Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

erfüllt. Diese haben die Gestalt der Gleichungen (2), so dass $t + iu_1$ eine Function von $x + iy$ sein muss; zugleich leuchtet ein, dass wenn für dieselbe Function t die Function $t + iu$ von $x + iy$ gegeben ist, die Functionen u und u_1 nur um eine reelle additive Constante differiren können. Bis auf die Hinzufügung einer solchen ist also die Function $t + iu$ bestimmt, sobald ihr reeller Theil t bestimmt ist.

Wir wollen ferner zeigen, dass eine Function t, die im Innern eines Gebiets E mit Einschluss von $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ eindeutig, endlich und stetig ist, und die Gleichung (5) befriedigt, nur auf eine einzige Weise der Forderung genügen kann, in der Begrenzung von E beliebig vorgeschriebene Werthe anzunehmen. Es seien t und t_1 zwei verschiedene Functionen, die das Verlangte leisten, so muss die Differenz derselben

$$(8) \qquad t_1 - t = T$$

im Innern von E mit Einschluss von $\frac{\partial T}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial y}$ eindeutig, endlich und stetig sein, die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

befriedigen und in der ganzen Begrenzung von E verschwinden. Jetzt wird über das ganze Gebiet E das doppelte Integral

$$(10) \qquad \iint\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy$$

erstreckt, und jeder der beiden Summanden

$$(11) \qquad \iint\frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,dx\,dy + \iint\frac{\partial T}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial y}\,dx\,dy$$

für sich betrachtet. Indem man bei dem ersten mit der nach

dx auszuführenden Integration beginnt, giebt die theilweise Integration

$$(12) \qquad \int \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}dx = \left[T\frac{\partial T}{\partial x}\right] - \int T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx,$$

wo in dem eingeklammerten Ausdruck die Integrationsgrenzen vorschriftsmässig zu substituiren sind. Da aber T nach der Voraussetzung in der ganzen Begrenzung von E gleich Null ist, so verschwindet dadurch der betreffende Ausdruck überhaupt. Das gleiche zeigt sich bei der entsprechenden Behandlung des zweiten Summanden

$$(13) \qquad \int \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}dy = \left[T\frac{\partial T}{\partial y}\right] - \int T\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dy,$$

so dass durch Addition der umgeformten Ausdrücke die Gleichung

$$(14) \quad \iint\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy = \iint T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

entsteht. Hier wird das Integral der rechten Seite vermöge der Gleichung (9) gleich einer Summe von verschwindenden Elementen und deshalb gleich Null, mithin muss auch das Integral der linken Seite gleich Null sein. Bei demselben ist die mit dem positiven Factor $dx\,dy$ multiplicirte Function eine Summe von zwei reellen Quadraten. Wäre ihr Werth in irgend einem Theile von E nicht gleich Null, so würde sich ein positiver Werth des Integrals ergeben, und daraus ein Widerspruch entstehen. Die Function muss also überall in E verschwinden. Dies kann aber nur dadurch erfolgen, dass die Basis jedes einzelnen Quadrats verschwindet, weshalb überall in E sowohl $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ wie auch $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ sein muss. Hieraus folgt, dass die Function T sich nicht ändern kann; weil dieselbe aber in der Begrenzung von E überall gleich Null ist, kann sie in dem ganzen Gebiete E keinen andern constanten Werth als den Werth Null haben. Aus diesem Grunde ist T überall in E gleich Null, mithin $t = t_1$, und es steht fest, dass die für die Function t gestellte Forderung niemals von zwei verschiedenen Functionen erfüllt werden kann.

Hiernach ist eine Function $t+iu$ für das von einer Linie L eingeschlossene einfach zusammenhängende Gebiet, in welchem die Function eindeutig, endlich und stetig sein soll, wofern der Werth des reellen Theiles t für die Linie L gegeben ist, bis auf eine der entsprechenden Function u hinzuzufügende reelle Constante vollständig bestimmt. Für den Fall, dass die Linie L einen Kreis bedeutet, der mit dem Radius R um den Nullpunkt beschrieben ist, werden wir jetzt die Aufgabe lösen, eine Function $t+iu$ so zu bestimmen, dass der reelle Theil t in der Kreisperipherie beliebig vorgeschriebene Werthe annehme. Bei Anwendung der Polarcoordinaten $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ sei $\varphi(\vartheta)$ eine beliebige Function des Orts, welcher t für $r=R$ gleich werden soll. Eine für jeden Betrag $r<R$ eindeutige, endliche und stetige Function $t+iu$ von $x+iy$ wird nach § 122 durch eine dort mit (8) bezeichnete Potenzreihe dargestellt

(15) $t+iu=(c_0+id_0)+(c_1+id_1)(x+iy)+(c_2+id_2)(x+iy)^2+\ldots;$

ihr reeller Theil lautet in den genannten Polarcoordinaten folgendermassen,

(16) $t=c_0+(c_1\cos\vartheta-d_1\sin\vartheta)r+(c_2\cos 2\vartheta-d_2\sin 2\vartheta)r^2+\ldots$

und ist in § 77 unter (3) angeführt. Durch die Forderung, dass t für $r=R$ gleich der von $\vartheta=-\pi$ bis $+\pi$ gegebenen Function $\varphi(\vartheta)$ sei, werden die Constanten $c_0, c_1, d_1, \ldots$ bestimmt, indem man $\varphi(\vartheta)$ vermöge § 78 in eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von ϑ fortschreitende trigonometrische Reihe entwickelt, deren Convergenz daselbst genau untersucht ist. Aus den dortigen Gleichungen (11) folgen die Bestimmungen

$$(17)\quad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha, \\[2ex] c_q R^q = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\cos q\alpha\,d\alpha,\ q\leqq 1 \\[2ex] d_q R^q = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\sin q\alpha\,d\alpha,\ q\leqq 1. \end{cases}$$

Demnach bleibt d_0 als eine der Function u beliebig beizufügende Constante unbestimmt, während nach (17) die übrigen zur Bildung von $t+iu$ gehörenden Constanten die Werthe erhalten

$$(18)\quad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha, \\[2ex] c_q + i d_q = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,(\cos q\alpha - i\sin q\alpha)\,d\alpha\,\dfrac{1}{R^q}. \end{cases}$$

Aus denselben geht hervor, dass die sämmtlichen Beträge $\sqrt{c_q^2+d_q^2}\,R^q$ eine gewisse feste Grösse nicht übertreffen, was nach § 122 zu dem Schlusse berechtigt, dass die Reihe (15) für jeden unter R liegenden Betrag r convergirt und die verlangte Beschaffenheit hat. Nach der vorgetragenen Theorie der trigonometrischen Reihen convergirt die Reihe, welche den reellen Theil darstellt, für $r=R$, falls $\varphi(\vartheta)$ den dort angegebenen Bedingungen der Endlichkeit genügt, die wir als erfüllt voraussetzen. Ferner lehrt ein Satz in I, § 108, dass sich alsdann die rechte Seite von (16) stetig mit r ändert, falls r dem Werthe R beliebig genähert wird und in denselben übergeht.

Um dagegen zu beurtheilen, wie sich die Function u bei einer beliebigen Annäherung von r an den Werth R verhalte, ist die Erzeugung von u durch Integration des vollständigen Differentials (6) zu benutzen, welcher Process nur dann für den Werth $r=R$ ausgeführt werden kann, wenn die Function t für $r=R$ und jedes ϑ eindeutig bestimmte endliche partielle Differentialquotienten $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{d t}{\partial y}$ hat. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wofern die zu den unabhängigen Variabeln r und ϑ gehörenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial t}{\partial r}$ und $\frac{\partial t}{\partial \vartheta}$ für $r=R$ und jedes ϑ eindeutig bestimmte endliche Werthe annehmen, da die Gleichungen

$$r\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial x} r\cos\vartheta + \frac{\partial t}{\partial y} r\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial t}{\partial x} r\sin\vartheta + \frac{\partial t}{\partial y} r\cos\vartheta$$

bestehen.

Substituirt man die in (18) angegebenen Werthe der Constanten in den Ausdruck $t+iu$, bei dem von jetzt ab vorausgesetzt wird, dass u für $r=0$ verschwinde, mithin $d_0=0$ sei, so entsteht der Summenausdruck

$$(19)\quad t+iu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)(\cos q\alpha-i\sin q\alpha)\,d\alpha\,\frac{(x+iy)^q}{R^q}.$$

Für einen unter R liegenden Betrag r dürfen die bestimmten Integrale zu einem einzigen vereinigt werden, unter dessen Zeichen eine convergente unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)(x+iy)}{R}$ erscheint, die, nach I, § 98 summirt, das folgende Resultat hervorbringt,

$$(20)\quad t+iu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\left(\frac{1}{1-\frac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)(x+iy)}{R}}-\frac{1}{2}\right)d\alpha.$$

Dasselbe lässt sich mit Hülfe des *Cauchy*'schen Satzes direct beweisen. Bezeichnet man die zu suchende Function $t+iu$ wie früher mit $f(x+iy)$, die derselben conjugirte $t-iu$ mit $g(x-iy)$, so ist die gegebene Function $\varphi(\alpha)$ gleich dem Werthe, den das Aggregat $\frac{1}{2}f(x+iy)+\frac{1}{2}g(x-iy)$ für $x+iy=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ oder kürzer $Re^{i\alpha}$ annimmt, mithin

$$(21)\quad \varphi(\alpha)=\frac{1}{2}f(Re^{i\alpha})+\frac{1}{2}g(Re^{-i\alpha}).$$

Nun kann der Factor, den $\varphi(\alpha)$ in (20) unter dem Integralzeichen hat, so umgeformt werden, dass einmal nur $Re^{i\alpha}$, das zweite Mal nur $Re^{-i\alpha}$ vorkommt,

$$(22)\quad \frac{1}{i}\left(\frac{d(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-(x+iy)}-\frac{d(Re^{i\alpha})}{2Re^{i\alpha}}\right)$$

und

$$(23)\quad \frac{1}{i}\left(\frac{d(Re^{-i\alpha})}{Re^{-i\alpha}-\frac{R^2}{x+iy}}-\frac{d(Re^{-i\alpha})}{2Re^{-i\alpha}}\right).$$

Es darf daher die rechte Seite von (20) durch das Aggregat der beiden Integrale

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\alpha})\left(\frac{d(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-(x+iy)}-\frac{d(Re^{i\alpha})}{2Re^{i\alpha}}\right),$$

$$(25)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} g(Re^{-i\alpha})\left(\frac{d(Re^{-i\alpha})}{Re^{-i\alpha}-\frac{R^2}{x+iy}}-\frac{d(Re^{-i\alpha})}{2Re^{-i\alpha}}\right)$$

ersetzt werden, deren jedes mittelst doppelter Anwendung des *Cauchy*'schen Satzes bestimmbar ist. In (24) soll eine Integration längs der Peripherie des Kreises vom Radius R im positiven Sinne ausgeführt werden; da ferner der Punkt $x+iy$ sowie der Nullpunkt innerhalb des Kreises liegen, so folgt aus der obigen Gleichung (1), indem zuerst $\zeta = x+iy$, dann $\zeta = 0$ genommen wird, der Werth $f(x+iy)-\frac{1}{2}f(0)$. In (25) läuft die Integration im entgegengesetzten Sinne, dabei erhält ζ zuerst den Werth $\frac{R^2}{x+iy}$, und hierauf wieder den Werth Null. Wegen der Voraussetzung, dass der Punkt $x+iy$ im Kreise vom Radius R enthalten ist, befindet sich der Punkt $\frac{R^2}{x+iy}$, welcher demselben nach dem in (III) des § 109 erörterten Gesetze zugehört, nothwendig ausserhalb des Kreises. Demnach liefert der erste in der Klammer des Integrals (25) befindliche Ausdruck, wie in § 121 bemerkt worden, ein verschwindendes Resultat, dagegen der zweite mit seinem Vorzeichen genommene Ausdruck vermöge der im negativen Sinne fortschreitenden Integration das Resultat $\frac{1}{2}g(0)$. Weil aber angenommen wurde, dass u für $x+iy=0$ verschwinden soll, so ist $f(0)$ reell, mithin $f(0)-g(0)=0$, und das Aggregat von (24) und (25) wird, wie behauptet, dem Functionswerthe $f(x+iy)$ gleich.

Bei dem so eben mittelst des *Cauchy*'schen Satzes geführten Beweise wird die Existenz der gesuchten Function $t+iu$ und ihres Differentialquotienten für das Innere des Kreises mit Einschluss der Peripherie vorausgesetzt, während die Existenz von u für $r=R$ nach dem Obigen nur dann feststeht, wenn für $r=R$ und jeden Werth von ϑ die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial t}{\partial r}$ und $\frac{dt}{\partial \vartheta}$ bestimmte endliche Werthe haben. Der zweite von diesen fällt mit dem nach ϑ genommenen Differentialquotienten der gegebenen Function $\varphi(\vartheta)$ zusammen, so dass sich die demselben auferlegte Bedingung direct auf $\varphi(\vartheta)$ bezieht. Man kann aber über die Function $\varphi(\vartheta)$ eine zweite Voraussetzung machen, aus welcher die für $\frac{\partial t}{\partial r}$ verlangte Eigenschaft folgt. Zu diesem Behuf möge die Bedingung dafür, dass $t+iu$ eine Function von $x+iy$ ist, in den Variabeln r und ϑ ausgedrückt werden. Da die characteristische Gleichung

$$dt+i\,du=(\xi+i\eta)(dx+i\,dy) \tag{26}$$

in die Gleichung

$$dt+i\,du=(\xi+i\eta)(x+iy)(d\log r+i\,d\vartheta) \tag{27}$$

übergeht, so ist der von $t+iu$ nach der complexen Variable $\log r+i\vartheta$ genommene Differentialquotient gleich $(\xi+i\eta)(x+iy)$, und man erhält die gesuchten partiellen Differentialgleichungen aus (2), indem statt x, y respective $\log r$, ϑ genommen wird, nämlich

$$\frac{\partial t}{\partial \log r}=\frac{\partial u}{\partial \vartheta},\quad \frac{\partial u}{\partial \log r}=-\frac{\partial t}{\partial \vartheta}. \tag{28}$$

Ebenso wie aus (2) die partiellen Differentialgleichungen (5) und (6) hervorgehen, folgen aus (28) die partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung

$$\frac{\partial^2 t}{(\partial \log r)^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta^2}=0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial \log r)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}=0. \tag{30}$$

Vermöge der ersten derselben entsteht $\frac{\partial t}{\partial \log r}=r\frac{\partial t}{\partial r}$, indem $-\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta^2}$ mit $d\log r=\frac{dr}{r}$ multiplicirt und für ein ungeändertes ϑ integrirt wird. Bei einer mit $r=r_0$ beginnenden Integration gilt demnach die Gleichung

$$r\frac{\partial t}{\partial r}-r_0\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r_0}=-\int_{r_0}^{r}\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta^2}\,\frac{dr}{r}. \tag{31}$$

Da der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta^2}$ für $r = R$ wieder gleich dem zweiten nach ϑ genommenen Differentialquotienten der Function $\varphi(\vartheta)$ ist, so wird durch die Voraussetzung, dass derselbe für jedes ϑ eindeutig bestimmt und endlich sei, bewirkt, dass der partielle Differentialquotient $\frac{\partial t}{\partial r}$ für $r = R$ und jedes ϑ einen bestimmten endlichen Werth haben muss. Wird also vorausgesetzt, das für jedes ϑ die gegebene Function $\varphi(\vartheta)$ mit Einschluss ihres ersten nach ϑ genommenen Differentialquotienten eindeutig bestimmt, endlich und stetig, der zweite nach ϑ genommene Differentialquotient eindeutig bestimmt, und endlich sei, so genügt dies, um zu schliessen, dass die in $t + iu$ für $r < R$ definirte Function auch für $r = R$ existirt.

Die eben genannte Voraussetzung, bei welcher in dem Begriffe der Stetigkeit das Uebereinstimmen der zu $\vartheta = -\pi$ und $\vartheta = \pi$ gehörenden Werthe eingeschlossen ist, fällt mit derjenigen zusammen, aus welcher nach § 81 die Sicherheit geschöpft werden kann, dass die Glieder der in (16) für die Function t aufgestellten trigonometrischen Reihe bei der Substitution $r = R$, auch absolut genommen, eine convergente Reihe liefern, oder mit dem dortigen Ausdruck, dass die bezeichnete trigonometrische Reihe unbedingt convergirt. Für die Reihe, durch welche nach (15) die Function u ausgedrückt wird, folgt alsdann ebenfalls, dass sie für $r = R$ unbedingt convergirt. Ferner lehrt eine am Schlusse von § 81 gemachte Bemerkung, dass der partielle Differentialquotient $\frac{\partial t}{\partial \vartheta}$ für die Werthe $r < R$ mit Einschluss von $r = R$ durch die Reihe dargestellt wird, welche aus (16) entsteht, indem man die einzelnen Glieder nach ϑ differentiirt, und dass eine den zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta^2}$ in gleicher Weise darstellende Reihe vermittelst zweimaliger nach ϑ genommenen Differentiation der einzelnen Glieder von (16) erhalten wird. Jetzt kann man, da auf der rechten Seite von (16) das von r unabhängige Glied durch die Differentiation verschwindet, die Gleichung (31) benutzen und die mit $\frac{dr}{r}$ multiplicirte Reihe von $r_0 = 0$ bis r integriren, wodurch eine für die Werthe $r < R$ mit Einschluss von $r = R$ geltende Darstellung des Ausdrucks $r\frac{\partial t}{\partial r}$ entsteht. Dieselbe ist gleich derjenigen, die aus der Differentiation der einzelnen Glieder von (16) nach r hervorgeht, und zwar enthält die mitgetheilte Ableitung den Beweis, dass die betreffende Darstellung auch mit Einschluss des Werthes $r = R$ gilt. Demnach zeigt sich, dass in Folge der Voraussetzungen, welche über die Function $\varphi(\vartheta)$ und deren ersten und zweiten nach ϑ genommenen Differentialquotienten gemacht sind, der reelle und imaginäre Theil der Function $t + iu$ durch Reihen dargestellt werden, die mit Einschluss des Kreisrandes unbedingt convergiren, dass ferner der reelle und imaginäre Theil des ersten von $t + iu$ nach $\log r + i\vartheta$ genommenen Differentialquotienten durch Reihen ausgedrückt werden, die mit Einschluss des Kreisrandes noch convergiren. Es erfüllt also die Potenzreihe, durch welche die Function $t + iu$ dargestellt ist, Bedingungen, in welchen die zu der Anwendung des *Cauchy*'schen Satzes erforderlichen Voraussetzungen enthalten sind.