

WYDZIAŁY POLITECZNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

3499

O. PRESLER

LEITFADEN
DER PROJEKTIONS - LEHRE
EIN ÜBUNGSBUCH DER
KONSTRUIERENDEN STEREOMETRIE

AUSGABE B



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294332

Im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Bardey, Dr. C., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. In alter und neuer Ausgabe. gr. 8.

Alte Ausgabe. 26. Auflage. [XIV u. 330 S.] 1901. Dauerhaft geb. *M.* 3. 20. (Abchnitt XXI hieraus besonders abgedruckt. *M.* — 30.)

Neue Ausgabe. Besorgt von F. Piehler, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Professor an der Ober-Realschule zu Hannover. 2. Aufl. [VII u. 376 S.] 1902. Dauerhaft geb. *M.* 3. 20.

arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. In alter und neuer Ausgabe. gr. 8.

Alte Ausgabe. 12. Auflage. [X u. 269 S.] 1900. Dauerhaft geb. *M.* 2. 40.

Neue Ausgabe. Besorgt von F. Piehler, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Professor an der Ober-Realschule zu Hannover. [VII u. 314 S.] 1901. Dauerhaft geb. *M.* 2. 60.

arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von Dr. H. Gartenstein. Ausgabe A: mit Logarithmentafel. 4. Auflage. [IV u. 202 S.] gr. 8. 1902. Dauerhaft geb. *M.* 2. —

— Ausgabe B: ohne Logarithmentafel. 4. Auflage. [IV u. 170 S.] gr. 8. 1902. geb. *M.* 1. 80.

Zu dieser Ausgabe sind die auf mehrfachen Wunsch von Dr. Gartenstein bearbeiteten „fünfstelligen logarithm. u. trigonometrischen Tafeln“ zu gebrauchen.

[—] Fünfstellige Briggsche Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 nebst den sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10000 bis 10800 für Realschulen u. verwandte Anstalten, namentlich zu Dr. C. Bardey's Arithmetischen Aufgaben und Lehrbuch der Arithmetik, herausgegeben von Dr. H. Gartenstein. [32 S.] gr. 8. 1896. Steif geb. *M.* — 30.

— Resultate zu den 5 Sammlungen je *M.* 1. —

[Dieselben sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einzahlung von *M.* 1. — (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.]

Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. I. Teil: Aufgaben mit einer Unbekannten. [VI u. 95 S.] gr. 8. 1887. geh. *M.* 1. 50. [Vergriffen; 2. Aufl. u. d. Fr.]

— algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und Methoden zu ihrer Auflösung. 5. Aufl. Neubearbeitung von Professor F. PIETZKER. [XVI u. 420 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 8. —

— quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2. verb. Auflage. [IV u. 94 S.] gr. 8. 1887. geh. *M.* 1. 60, geb. *M.* 2. 20.

— zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. Ausg. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1894. geh. *M.* 3. —

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Gymnasium zu Cleve, Materialien zu Dreiecks-Konstruktionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh. *M.* 1. 20.

— planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vor-schule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1. 50.

— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. [VI u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1. 50.

Diekmann, Prof. Dr. Jos., Rektor des Realprogymnasiums zu Viersen, Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauche beim Unterricht an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. [VIII u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.60.

Eidhorn, Dr. W., Oberlehrer an der Kaiser Wilhelm-Realschule zu Göttingen, arithmetische Regelhefte mit Wiederholungstafeln. In 4 Hefen. gr. 8. Steif geh.

Heft 1. Quarta (Quinta): Rechnen als Vorstufe der Mathematik. In dauerhaftem Umschlag. [40 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 2. Untertertia: Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [32 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 3. Obertertia: Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [42 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 4. Untersekunda: Logarithmen, Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. In dauerhaftem Umschlag. [23 S.] 1900. *M.* —.30.

Erlcr, Dr. W., weil Professor am Kgl. Pädagogium Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. Fünfte Auflage besorgt von Dr. L. Huebner, Professor am Gymnasium zu Schweidnitz. Mit 30 Figuren im Text. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1898. kart. *M.* 1.20.

Ganter, Dr. H., Prof. a. d. Kantonschule in Aarau, u. Dr. F. Rudio, Prof. am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit vielen Textfiguren und zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. 4. verb. Aufl. [VIII u. 180 S.] 1900. *M.* 3.—.

II. — Die analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. [X u. 184 S.] 1899. *M.* 3.—.

Siehe auch: Rudio, Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.

Girndt, Martin, Königl. Baugewerkschul-Lehrer, Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8. 1897. kart. *M.* 3.40.

I. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. Mit 276 Fig. im Text u. 287 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. [VIII u. 99 S.] In Lnw. kart. *M.* 2.40.

II. — Körperlehre. Mit 64 Textfiguren. [VIII u. 65 S.] kart. *M.* 1.—.

Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geb. *M.* 9.—

I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbild. ohne Maßänderung. Mit 193 Fig. in Holzschn. 3. Aufl. [VIII u. 144 S.] 1897. geb. *M.* 2.40.

II. — Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der ebenen Geometrie. Mit 188 Fig. in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 2. Auflage. [IX u. 248 S.] 1896. geb. *M.* 3.80.

III. — Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte.) Mit 131 Fig. im Text. 2. Auflage. [XII u. 192 S.] 1901. geb. *M.* 3.30.

Hochheim, Dr. Adolf, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 2. verb. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1894. geh. *M.* 3.20, geb. *M.* 4.40. A. Aufgaben. [IV u. 86 S.] geh. *M.* 1.60, geb. *M.* 2.20, B. Auflösungen. [106 S.] geh. *M.* 1.60, geb. *M.* 2.20.

Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 2. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1898. geh. *M.* 3.—, geb. *M.* 4.20. A. Aufgaben. [IV u. 81 S.] geh. *M.* 1.40, geb. *M.* 2.—. B. Auflösungen. [96 S.] geh. *M.* 1.60, geb. *M.* 2.20.

Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2 Teile. gr. 8. 1886. geh. *M.* 2.80, geb. *M.* 4.—. A. Aufgaben. [67 S.] geh. *M.* 1.20, geb. *M.* 1.80. B. Auflösungen. [94 S.] geh. *M.* 1.60, geb. *M.* 2.20.

Gölmüller, Prof. Dr. Gustav, Dir. der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kaiserl. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Zu engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) gr. 8. In 2 Bänden geb.

Allgemeine Ausgabe A. In 3 Teilen. gr. 8. In 2 Bänden geb.

- I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Volksschulen reichend. 3. Doppel-Aufl. Mit 142 Fig. im Text. [VIII u. 239 S.] 1898. *M.* 2. 40.
II. — für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. 2. Auflage. Mit 210 Figuren im Text. [VIII u. 292 S.] 1897. *M.* 3.—
III. — Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realfächiger Volksschulen und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschulfachmathematik. Mit 160 Figuren im Text. [VIII u. 224 S.] 1895. *M.* 2. 80.

Angabe B, für Gymnasien. In 2 Teilen. gr. 8. In 2 Bänden geb.

- I. Teil, im Anschluß an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Untersekunda reichend. Mit 138 Figuren im Text. [VIII u. 228 S.] 1896. *M.* 2. 40.
II. — im Anschluß an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Mit 196 Figuren im Text. [VIII u. 279 S.] 1896. *M.* 3.—

Begleitwort des Verfassers hierzu, nur für Lehrer bestimmt, liefert die Verlagsbuchhandlung auf Wunsch unentgeltlich.

Müller, Heinrich, Oberlehrer am Königl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Mit zahlreichen Textfiguren. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Die Unterstufe. 1. Auflage. [VIII u. 152 S.] *M.* 2. 50.

2. Auflage in 2 Ausgaben:

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. [VIII u. 137 S.] *M.* 1. 60.

Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. [VIII u. 199 S.] *M.* 2. 20.

II. Teil: Die Oberstufe. 1. Auflage. [X u. 216 S.] *M.* 3. 20.

2. Auflage in 2 Ausgaben:

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. I. Abteil. } u. d. Pr.

II. — } u. d. Pr.

Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. I. Abteil.: Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. [VIII u. 223 S.] *M.* 2. 80.

II. Abteil. u. d. Pr.

Ausgabe C. Für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von R. Baltin und W. Raimwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 214 S.] In 2 Bänden geb. *M.* 2. 20.

Sonder-Abdruck aus „Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen“:
Die Lehre von den Koordinaten und Kegelschnitten. Mit zahlreichen Textfiguren. [III u. 52 S.] gr. 8. kart. n. *M.* 1.—

— und **M. Kunitewsky**, Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. In 2 Teilen.

Ausgabe A. Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. I. Teil. [VIII u. 315 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. *M.* 2. 80.

II. Teil: Für die oberen Klassen der Gymnasien. [VIII u. 347 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. *M.* 3. 20.

Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. I. Teil. [VIII u. 289 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. *M.* 2. 60.

II. Teil: [VIII u. 360 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. *M.* 3. 40.
Ausgabe C. Für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von R. Baltin und W. Raimwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 336 S.] In 2 Bänden geb. *M.* 3.—

— Ergebnisse zu beiden Sammlungen (Ausgabe A *M.* —.80; Ausgabe B *M.* —.60) nur gegen Einfindung des Betrages direkt vom Verlage zu beziehen.

Prix, Ernst, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg. Elemente der darstellenden Geometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 3. 20, geb. *M.* 4. 40.

I. Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projektionen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VII u. 72 S.] 1883. geh. *M.* 1. 20, geb. *M.* 1. 80.

II. — Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projektionen. Centralprojektion. Mit in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 120 S.] 1883. geh. *M.* 2.—, geb. *M.* 2. 60.

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium u. dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie u. Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.—, geb. *M.* 8. 60.

I. Teil. Trigonometrie. 4., verb. Aufl. [X u. 250 S.] 1894. geh. *M.* 4.—, geb. *M.* 4. 80.

II. — Stereometrie. 4., verb. Aufl. bearb. v. A. MUCK. [VIII u. 194 S.] 1897. geh. *M.* 3.—, geb. *M.* 3. 80.

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 2.80, geb. *M.* 4.10.

I. Teil. Trigonometrie. 4. Aufl. [78 S.] 1894. geh. *M.* 1.80, geb. *M.* 2.50
II. — Stereometrie. 4. Aufl. bearb. v. A. MUCK. [58 S.] 1897. geh. *M.* 1.—, geb. *M.* 1.60.

Rudio, Dr. F., Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. 2. Auflage. [X u. 184 S.] gr. 8. 1899. geb. *M.* 3.—.

— u. Ganter, analytische Geometrie der Ebene, siehe: Ganter u. Rudio.

Särhinger, C. und **Dr. V. Estel**, Oberlehrer am Rgl. Gymnasium zu Chemnitz, Aufgabensammlung für den Rechen-Unterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 2. verbesserte Auflage. 3 Hefte. gr. 8. 1899. kart.

I. Hefte. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 91 S.] *M.* 1.—

II. — Bruchrechnung. [104 S.] *M.* 1.20.
III. — Schlussrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontorechnung. [70 S.] *M.* —.80.
(Resultate hierzu nur durch die Verlagsbuchhandlung.)

Schotten, Dr. Heinrich, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden.

I. Band. [IV u. 370 S.] gr. 8. 1890. geh. *M.* 6.—, geb. *M.* 7.—

— II. Band. [IV u. 410 S.] gr. 8. 1893. geh. *M.* 8.—, geb. *M.* 9.— (III. Band in Vorbereitung.)

Schülke, Dr. A., vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. Dritte verbesserte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. 1900. Steif geh. *M.* —.60.

— trigonometrische Tafel. 2. Aufl. [1 Bl.] gr. 8. 1896. *M.* —.15.

Schuster, Prof. Dr. M., Oberlehrer an der Oberrealschule zu Oldenburg, geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen. gr. 8.

Ausgabe A: für Vollanstalten. [VIII u. 147 S.] Mit 2 lithograph. Tafeln. 1899. In Leinwand geb. *M.* 2.—

Ausgabe B: für Progymnasien und Realschulen. [VII u. 111 S.] Mit 2 lithogr. Tafeln. 1900. In Leinwand geb. *M.* 1.60.

Ausgabe C: für Mittelschulen. [VIII u. 88 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. 1901. In Leinwand geb. *M.* 1.40.

Servus, Dr. H., Privatdozent an der königl. technischen Hochschule zu Charlottenburg und ord. Lehrer an der V. städtischen höheren Bürgerschule zu Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Gymnasien, Realgymnasien und höhere Bürgerschulen. 4 Hefte. gr. 8. kart. *M.* 2.70.

I. Hefte. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. [IV u. 47 S.] 1888. *M.* —.60.

II. — Quadrierung und Kubierung von Summen, Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche, Proportionen, der größte gemeinschaftliche Faktor, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, Addition und Subtraktion von Brüchen, die Quadratwurzel, die Kubikwurzel. [51 S.] 1888. *M.* —.60.

III. — Potenzierung, Radizierung, Logarithmierung. [II u. 94 S.] 1888. *M.* —.75.

IV. — Gleichungen ersten Grades, Anwendungen der Gleichungen ersten Grades, Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten, Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten, transzendente Gleichungen, arithmetische Reihen, geometrische Reihen, Diophantische Gleichungen. [II u. 78 S.] 1889. *M.* —.75.

Die Hefte sind so eingeteilt, daß jedes für einen Jahreskursus ausreicht: I. für Untertertia, II. für Obertertia, III. für Untersekunda, IV. für Obersekunda.

Thieme, Dr. H., ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluß an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. KRETSCHMER bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. *M.* 1.20.

Wehner, Dr. Hermann, Oberlehrer am Realgymnasium mit Realschule zu Plauen i. V., Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Mit 38 in den Text gedruckten Figuren. [V u. 65 S.] gr. 8. 2. verbess. Aufl. 1901. kart. *M.* 1.—

M

LEITFADEN DER PROJEKTIONS-LEHRE.

EIN ÜBUNGSBUCH DER KONSTRUIERENDEN STEREOMETRIE.

VON

PROF. DR. CARL HEINR. MÜLLER, UND
OBERL. AM KGL. KAISER FRIEDRICH'S-GYMNASIUM
ZU FRANKFURT A. M.

PROF. OTTO PRESLER,
OBERLEHRER AN DER STÄDT. OBERREALSCHULE
ZU HANNOVER.

AUSGABE B:

FÜR GYMNASIEN UND SECHS-STUFIGE REALANSTALTEN.

MIT 122 FIGUREN IM TEXT.

M. H. 10.
3410
8021



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

113499

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Akc. Nr.

4022 149

Vorwort.

In dem vorliegenden Leitfaden (Ausgabe B) wird der Versuch gemacht, die stereometrische Projektionslehre, soweit sie für humanistische Gymnasien und sechsstufige Realanstalten in Betracht kommen kann, zur Darstellung zu bringen. Da die größere Ausgabe A des Leitfadens zur Einführung an den genannten Anstalten offenbar zu umfangreich ist, so haben die Verfasser unter freundlichem Entgegenkommen der Verlags-handlung diese zweite, kleinere Ausgabe veranstaltet, deren Einführung bei sehr niedrigem Preise kaum auf Widerstand stoßen dürfte. Für die hier und da zugelassenen, erweiterten Nebenkurse für Mathematik (und neuere Sprachen) an humanistischen Gymnasien wird dagegen gerade Ausgabe A willkommen sein.

Im allgemeinen verweisen wir auf das ausführliche Vorwort zu Ausgabe A und auf den Prospekt*) zu unserem Werke. Daneben heben wir hervor, daß der Lehrer auch dann die Ausgabe A zur Hand haben muß, wenn die Schüler die Ausgabe B gebrauchen. Denn Ausgabe A enthält den gesamten Übungsstoff zu den meisten Abschnitten, die in Ausgabe B behandelt sind; nur den grundlegenden §§ 1—4 der Ausgabe B sind Übungsaufgaben beigefügt. Bei der Auswahl des Lehrstoffes mußte alles aus Ausgabe A weggelassen werden, was über die Grenzen der betr. Anstalten hinausgeht, also z. B. die weitgehenderen Anwendungen aus der Physik und Biologie, Körper-Durchdringungen, Schatten-Konstruktionen in ausgedehnterem Maße, zentrale Karten-Projektionen und theoretische Erörterungen. Der Hauptinhalt des Leitfadens ist auf schräge und senkrechte Parallelprojektion (Normalprojektion) gleichmäßig verteilt worden, was durchaus dem Charakter der betr. Anstalten entspricht. Immerhin ist darauf Rücksicht genommen, daß dem gereiften Standpunkte des Gymnasial-Primaners auch schwierigere Übungen geboten sind; so ist die Beifügung der Zentralprojektion in einfachster Fassung in diesem Sinne

*) Diesen Prospekt, der sich hauptsächlich an die Lehrer wendet, empfehlen wir besonderer Beachtung.

aufzufassen. Will man aber noch weiter gehen, so bietet Ausgabe A den passenden Stoff in Hülle und Fülle. Um den Zusammenhang zwischen A und B auch äußerlich zu markieren, sind den Abschnitten, Aufgaben, Figuren und Anmerkungen von B die entsprechenden aus A in Klammern beigelegt worden.

Was die Ausführung der Zeichnungen betrifft, so muß sie nach der Art der betr. höheren Schulen verschieden ausfallen. Das humanistische Gymnasium wird sich im eigentlichen mathematischen Unterrichte mit scharfgezeichneten Bleistiftskizzen in Großquart-Heften begnügen; die Figuren sind etwa in doppelter Größe des Leitfadens zu entwerfen; durch passende Veränderung der Maße und Lagen ist dem so verbreiteten, sinnlosen Kopieren sorgfältig vorzubeugen; einige besonders eifrige Schüler ziehen die Skizze wohl mit Tusche und farbigen Tinten aus, vornehmlich solche, die am wahlfreien Zeichenunterricht teilnehmen. Diese können auch unter der Leitung des Fach-Zeichenlehrers und an der Hand der Ausgabe A größere Entwürfe auf dem Reißbrette oder dem jetzt vielfach üblichen Zeichenblocke liefern. — Für Realanstalten muß die genaue Ausführung auf Reißbrett oder Block die Regel bilden.

So hoffen wir denn, daß auch diese Ausgabe als Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie den Wünschen der Fachkollegen entgegenkommen möge.

Frankfurt a. M. und Hannover im März 1903.

C. H. Müller. O. Presler.

Inhalt.

I. Teil. **Schräge Parallel-Projektion.**

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Das Quadrat in seinen drei Hauptlagen zur Bildebene; der Würfel	3
§ 2. Schrägbilder von ebenen Vielecken und geraden Prismen	9
§ 3. Schrägbilder des Kreises und geraden Zylinders	12
§ 4. Schrägbilder verschiedener Körperformen	20
§ 5. Schrägbilder aus dem Systeme der Stereometrie	29
§ 6. Schrägbilder von Körperschnitten (Zylinderschnitte, Kegelschnitte)	37
§ 7. Anwendungen aus der Krystallographie	51
§ 8. Anwendungen aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde	59

II. Teil. **Senkrechte Parallel-Projektion** (Normal-Projektion).

§ 9. Begriff der Normal-Projektion. Der Punkt und seine Koordinaten	69
§ 10. Normalbilder der Strecke, des ebenen Vielecks und des Kreises	76
§ 11. Normalbilder von Polyedern	85
§ 12. Normalbilder von krummflächigen Körpern (Karten-Projektion)	97
§ 13. Unbegrenzte Geraden und Ebenen	101
§ 14. Ebene Körperschnitte	108
§ 15. Zentral-Projektion im Zusammenhange mit Normal-Projektion	118

Nachtrag zu § 6: Schattenkonstruktionen im Schrägbilde	127
Anhang I. Erklärungen und Lehrsätze aus der systematischen Stereometrie	130
Anhang II. Anmerkungen	133

Häufig gebrauchte Ausdrücke und Abkürzungen

(hauptsächlich für die Normal-Projektion).

Inbezug auf eine vertikale Bild-Ebene (Aufriß-Ebene):

heißt eine <i>Gerade</i>	frontal,	wenn sie parallel zu dieser Ebene liegt,
" " "	orthogonal,	wenn sie senkrecht zu dieser Ebene liegt,
" " "	brachial,	wenn sie horizontal und parallel zu dieser Ebene liegt,
" " <i>Ebene</i>	frontal,	wenn sie parallel zu dieser Ebene liegt,
" " "	orthogonal,	wenn sie senkrecht zu dieser Ebene liegt,
" " "	lateral,	wenn sie vertikal und senkrecht zu dieser Ebene liegt,

$\widetilde{E}_1, \widetilde{I}$	bedeuten	Grundriß-Ebene (Grund-Ebene, Horizontal-Ebene).
$\widetilde{E}_2, \widetilde{II}$	"	Aufriß-Ebene (Auf-Ebene, frontale Vertikal-Ebene).
$\widetilde{E}_3, \widetilde{III}$	"	Seitenriß-Ebene, (Seiten-Ebene, laterale Vertikal-Ebene, Profil-Ebene).
x, y, z	"	Breiten-, Tiefen- bzw. Höhen-Koordinate eines Punktes.
A_1, A_2, A_3	bedeuten	Grund-, Auf- bzw. Seiten- <i>Riß</i> eines Punktes A .
a_1, a_2, a_3	" " " "	" " " " " einer Geraden a .
A', A'', A'''	" " " "	Seiten- <i>Spur</i> einer Geraden a .
a', a'', a'''	" " " "	" " " " " einer Ebene \widetilde{A} .

Einleitung.

Die Projektionslehre hat den Zweck, ebene Bilder von körperlichen Gegenständen auf geometrischem Wege zu entwerfen.*)

Zur Versinnlichung der geometrischen Bilderzeugung eignet sich am besten das optische Verfahren.^{1)**} Über einer horizontalen Ebene I erhebe sich (Fig. 1) eine vertikale Ebene II; erstere heiße Grundebene, letztere sei die Bildebene, d. h. diejenige Ebene, auf der ein Bild entworfen werden soll. Die horizontale Schnittlinie XX' beider Ebenen heißt Achse. Der Gegenstand sei ein undurchsichtiger Körper K . Wir wollen nun K mit einer punktförmigen Lichtquelle O so beleuchten, daß der Schlagschatten von K auf Ebene II fällt.²⁾ Das ebene Schattenbild K' zeigt im allgemeinen eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Umriß von K . Ersetzt man jetzt die Lichtquelle O durch das Auge, so treten an Stelle der Lichtstrahlen die Sehstrahlen derart, daß K vollständig das Schattenbild K' bedeckt. Wir markieren nun den Umriß***) von K' mit dem Stift und versehen noch die erhaltene Figur mit einer Färbung, die der von K möglichst entspricht. Nimmt man nun den Gegenstand K hinweg, so hat das von O nach K' blickende Auge immer noch den Eindruck, als ob der Gegenstand vorhanden wäre. Die Täuschung ist desto vollendeter, je genauer Umriß und Farbe getroffen werden.³⁾

Wir wollen jetzt Lichtquelle und Gegenstand an die alte Stelle zurückversetzen, dann aber den Abstand der Lichtquelle von der Bildebene allmählich vergrößern. Das Bild wird zwar einige Veränderungen erleiden, im großen und ganzen indessen immer noch an K erinnern; auch das Auge wird, wenn es in dieser Entfernung die Lichtquelle ersetzt, ähnliche Eindrücke wie oben erhalten. Bei sehr großer Entfernung des Strahlungspunktes O von der Bildebene erhält man Bilder, deren Erzeugungsstrahlen nahezu parallel sind (Fig. 2), die aber immer noch einen befriedigenden Eindruck auf das Auge machen.

*) Lat. *projicere* = wegwerfen, entwerfen.

***) Diese Ziffern weisen auf ergänzende Anmerkungen in Anhang II hin.

***) Umriß, Reißbrett, Grundriß sind Worte, die mit dem deutschen Verbum „reißen“ = zeichnen zusammenhängen.

Verfeinert man nun diesen optischen Strahlengang zum geometrischen, dann gelangt man zum Begriff der geometrischen Projektion. Bei endlicher Entfernung des Strahlenpunktes (Fig. 1) spricht man von Zentralprojektion, bei unendlicher Entfernung (Fig. 2) von Parallelprojektion; letztere ist daher ein Grenzfall der ersteren.⁴⁾ Man findet bald, daß sich die Betrachtung dieses Grenzfalles viel einfacher gestaltet

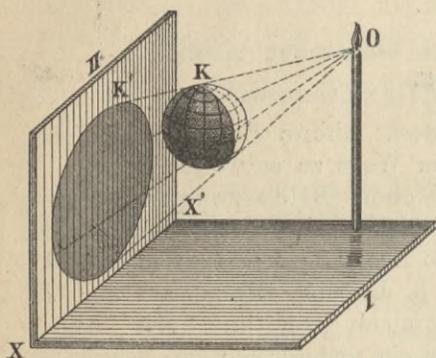


Fig. 1.

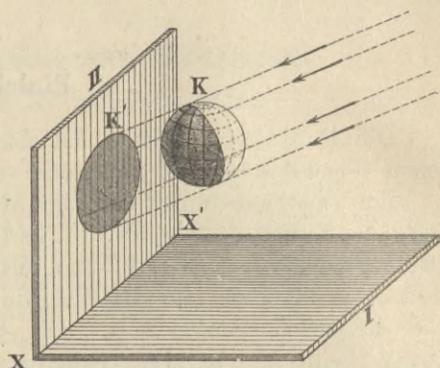


Fig. 2.

als diejenige der zentralen Projektion. Wir nehmen daher im folgenden zunächst immer an, daß die Projektionsstrahlen parallel verlaufen. Um die Gesetze der Parallelprojektion aufzufinden, betrachten wir in erster Linie gesetzmäßig gestaltete, einfache Körper, z. B. Würfel, Tetraeder, Kugel u. dergl. Hier werden wir dem Würfel den Vorzug geben, da er ebenflächig begrenzt ist und in seinen Quadratflächen die einfachste Betrachtung zuläßt.⁵⁾

I. Abschnitt.

Schräge Parallelprojektion.

§ 1. Das Quadrat in seinen drei Hauptlagen zur Bildebene; der Würfel.

Man denke sich in Fig. 2 statt des Körpers K einen Würfel so vor die Bildebene gestellt, daß eine Fläche parallel der Grundebene I, eine andere parallel der Bildebene II verläuft (Fig. 3a). Von den sechs Würfelflächen greifen wir nun die Vorderfläche $ABCD$ heraus*) und lassen sie von parallelen Projektionsstrahlen treffen, während wir die übrigen Würfelflächen zunächst wegdenken.⁵⁾ Es ist sofort klar, daß das Bild $A'B'C'D'$ ein Quadrat sein muß, das dem Gegenstande $ABCD$ kongruent ist (33).***) Wenn in Fig. 3a das Bild nicht als Quadrat erscheint, so liegt dies daran, daß das betrachtende Auge nicht in der Richtung des projizierenden blickt. Die hierdurch eintretende störende Verzerrung wollen wir dadurch beseitigen, daß wir die Bildebene in die Ebene des Papiers umgelegt denken; man erhält so das unverzerrte Bild in Fig. 3b. Von jetzt ab sollen alle Bilder der Parallelprojektion so betrachtet werden wie in Fig. 3b, d. h. die Bildebene soll in der Papierebene liegen und das projizierende Auge soll mit dem betrachtenden zusammenfallen.

Bis jetzt sind in betreff der Strahlenrichtung keinerlei bestimmte Annahmen gemacht worden. Für den Fall der Figuren 3a und 3b ist ersichtlich, daß die Projektionsstrahlen von rechts oben nach links unten verlaufen, wenn man gegen die Vorderfläche $ABCD$ des Würfels blickt; infolgedessen ist das Bild $A'B'C'D'$ nach links unten in die Bildebene gefallen. Für die folgenden Betrachtungen soll diese schräge Strahlenrichtung vorzugsweise festgehalten werden. Soviel können wir nun jetzt schon feststellen: Das Bild des Quadrates in dieser ersten Hauptlage (frontale Lage) ist bei jeder Strahlenrichtung ein kongruentes Quadrat, jede Strecke und jeder Winkel bildet sich ohne Verzerrung ab. Dasselbe gilt,

*) Der Ausdruck „vorn“ ist auf die Projektionsrichtung bezogen.

***) Diese kursiv gedruckten Ziffern weisen auf ein Verzeichnis von Erklärungen und Lehrsätzen aus der systematischen Stereometrie (Anhang I) hin.

wenn wir das Quadrat in dieser Hauptlage derart drehen, daß das Seitenpaar AB und CD nicht mehr parallel zur Grundebene läuft.

Wir betrachten nun die Abbildung der Deckfläche $DCEF$ des Würfels, durch welche das Quadrat in der zweiten Hauptlage (horizontale Lage) dargestellt wird. Hält man das Auge in hinreichend großer Entfernung rechts oben vom Würfel und schaut man nach der Bildebene hin, so erkennt man sofort, daß das Bild $D'E'F'$ als Parallelogramm auftritt (Fig. 3c).⁶⁾ Des Zusammenhangs und Vergleichs wegen ist zu dem schraffierten Bilde das Bild $A'B'C'D'$ aus Fig. 3b hinzugefügt. Die Seiten CD und EF haben keine Verzerrung erfahren, wie aus der Betrachtung der ersten Hauptlage im voraus zu erwarten war. Dagegen sind DE und CF sowie alle Winkel stark verzerrt. Wenn man die Strahlungsrichtung (durch Ortsveränderung des Auges oder Lichtpunktes von oben nach unten) möglichst verändert, dann erkennt man, daß die Verkürzung von DE und CF soweit gebracht werden kann, daß $D'E'$ und $C'F'$ zu Null werden; ebenso, daß die rechten Winkel allen möglichen Verzerrungen von 0° bis 180° unterworfen werden können, wenn man das Auge von rechts nach links bewegt.

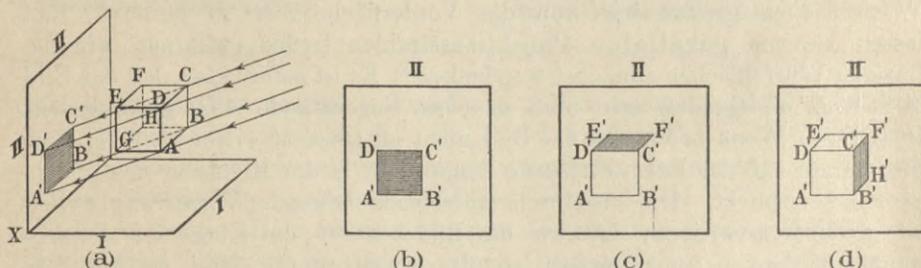


Fig. 3.

Wir können daher willkürlich festsetzen, welche Größe der Verzerrung wir bei unseren Bildkonstruktionen zulassen wollen. Für Fig. 3c z. B. ist die Strahlenrichtung so gewählt, daß DE auf die Hälfte und der rechte Winkel bei D' auf 45° verkürzt erscheint*), woraus denn leicht die Abmessungen der übrigen Teile des Bildes $D'E'F'$ folgen. Als Schlußergebnis der ganzen Betrachtung läßt sich folgender Satz aufstellen: Das Bild eines Quadrates in der zweiten Hauptlage ergibt im allgemeinen ein Parallelogramm⁷⁾, dessen Gestalt und Lage von der Strahlungsrichtung abhängt. Für eine bestimmte Richtung der Projektionsstrahlen ist die Verzerrung der Strecken und Winkel eine ganz bestimmte. Während alle Strecken, die zur Bildebene parallel oder frontal laufen (entsprechend der ersten Hauptlage), unverzerrt bleiben, werden die Strecken,

*) Diese Verzerrungszahlen sollen in Zukunft mit q und ω bezeichnet werden; hier ist also $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$.

die senkrecht oder orthogonal zur Bildebene liegen, in demselben Maße verändert. Die schräge Parallelprojektion gleicher, zur Bildebene senkrechter Strecken DE und CF gibt parallele Strecken ($D'E'$ und $C'F'$), die unter sich gleich sind (24).

Nach dem Vorhergehenden ist die Projektion einer Seitenfläche $BCFH$, durch welche das Quadrat in der dritten Hauptlage (lateral) dargestellt wird, als einfache Folgerung aus den beiden ersten Hauptlagen aufzufassen. In Fig. 3d erscheint das (schraffierte) Bild, Parallelogramm $B'C'F'H'$, im Zusammenhange mit den beiden ersten, sodaß zugleich das Gesamtbild des Würfels hervortritt. Die Quadratseiten BC und HF erfahren keine Verzerrung. Dagegen ist $B'H'$ in demselben Verhältnis verkürzt als vorher CF . Auch hier erkennt man, wie durch Änderung der Projektionsrichtung die Verzerrungen verschiedenartig ausfallen, daß aber

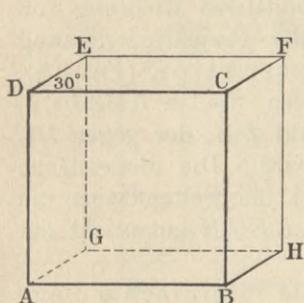


Fig. 4a.

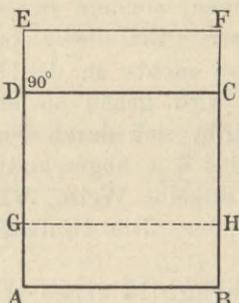


Fig. 4b.

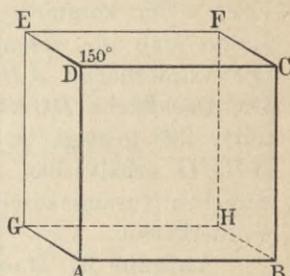


Fig. 4c.

einer bestimmten Annahme über die Strahlungsrichtung immer eine bestimmte Größe der Verzerrung bei Seiten und Winkel entspricht und umgekehrt.

Für die Zukunft wollen wir alle Bilder, die in schräger Parallelprojektion entworfen sind, als **Schrägbilder** bezeichnen.

Aufgabe 1. Man soll einen Würfel in schräger Parallelprojektion zeichnen für das Verzerrungsverhältnis $q = \frac{1}{3}$ und den Verzerrungswinkel $\omega = 30^\circ$.

Die geometrische Analyse der Aufgabe stützt sich unmittelbar auf die vorhergehenden Betrachtungen und Sätze. Dort war $q = \frac{1}{2}$ und $\omega = 45^\circ$, während jetzt solche Werte eintreten sollen, wie sie sich als vorteilhaft für Schrägbilder erwiesen haben.⁸⁾ Wir geben dem Würfel die bisherige einfache Lage zur Bildebene und erhalten folgende Konstruktion: Aus der Kante a ($= 3$ cm) ist die Vorderfläche $ABCD^*$) ohne weiteres kon-

*) Der Einfachheit wegen werden hier die Buchstaben des Bildes nicht gestrichelt.

struierbar (Fig. 4a). Dann zieht man durch D den Strahl unter 30° Neigung zu DC und schneidet auf ihm $\frac{1}{3} a$ ab bis E . Hierauf legt man durch E und C die Parallelen zu DC bzw. DE bis zum gegenseitigen Schnitte in F . Ferner zieht man durch F und B die Parallelen zu CB bzw. CF bis zum Schnitte H . Wenn man endlich durch A , E und H die Parallelen zu DE bzw. DA und BA zieht, so erhält man noch die Bilder der verdeckten Hinterkanten des Würfels. Das Zusammen treffen dieser drei Kanten in G dient als Probe auf die Schärfe der Konstruktion.⁹⁾

Aufgabe 2. Man soll das Schrägbild eines Würfels für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 90^\circ$ zeichnen.

Nimmt man auch hier die bisherige einfache Lage des Würfels an, so ergibt sich sofort, daß der Verzerrungswinkel von 90° demjenigen schrägen Strahlengang entsprechen muß, wobei die Strahlen weder von links noch von rechts oben, sondern in einer mittleren Richtung von vorn oben kommen müssen. Bei dieser Lage der Projektionsrichtung ändert sich im wesentlichen nichts an der Konstruktion (Fig. 4b): Die Vorderfläche $ABCD$ wird genau so entworfen wie in Aufgabe 1. Die Deckfläche $DCEF$ ergibt sich durch den Strahl DE , der gegen DC unter 90° geneigt ist, wobei $\frac{1}{3} a$ abgeschnitten wird. Die Bodenfläche $ABHG$ erhält man auf dieselbe Weise, während die Seitenflächen zu Strecken zusammenschrumpfen. Die Hinterfläche $EFGH$ entspricht der Vorderfläche.

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines Würfels in einfacher Lage ist zu zeichnen für den Fall, daß die Projektionsstrahlen von oben links kommen; $q = \frac{11}{3}$, $\omega = 150^\circ$.

Eine kurze Überlegung zeigt, daß jetzt der Winkel DCF zu 30° verzerrt wird, während der rechte Winkel bei EDC nunmehr auf 150° wächst. Im übrigen bleibt die Konstruktion in denselben Bahnen wie vorher (Fig. 4c).

Diese drei Grundaufgaben der Parallelprojektion lehren uns drei Hauptarten des Bildentwurfs kennen: Schrägbilder von oben rechts, von oben vorn und oben links. Je nach der besonders bevorzugten Seite des betreffenden Körpers benutzt man die eine oder andere. Meist werden wir uns hier der Projektion von oben rechts bedienen. Offenbar entsprechen diesen Arten noch drei andere, wenn nämlich die Strahlung von unten erfolgt. Dieser Bildentwurf wird selten angewandt, natürlich nur dann, wenn der Körper sehr hoch über der Grundebene liegt. — Die exakte, geometrische Lage der Projektionsrichtung wird, wie wir später § 11 sehen werden, gewöhnlich durch Rechnung bestimmt. Konstruktiv verfährt man so, daß man auf der Achse XX' (Fig. 3a) einen beliebigen Punkt O auswählt und durch ihn denjenigen Strahl legt, dem die Projektionsstrahlen parallel laufen sollen. Durch die Neigungswinkel zu den

Ebenen I und II ist dann die Richtung eindeutig bestimmt (9). Für den Fall der Projektion von vorn oben gibt Fig. 5 durch den Pfeil PO die bestimmte Strahlenrichtung. Zugleich ist durch OP die Ebene III senkrecht zur Achse XX' gelegt; sie steht auf \tilde{I} und \tilde{II} senkrecht (22), daher sind POA ($= 50^\circ$) und POB ($= 40^\circ$) die Neigungswinkel der Projektionsrichtung zu \tilde{I} und \tilde{II} .¹⁰⁾

Eine weitere theoretische Betrachtung knüpfen wir an die Fig. 2 und 3a. Sieht man von der optischen Erzeugungswise der Bilder (Schattenbilder) ab, die dort nur den Zweck der Versinnlichung haben sollte, so ist es für die parallele Schrägprojektion ganz gleichgültig, ob die Bildebene II ihren festen Stand behält oder parallel mit der Anfangslage verschoben wird. So können wir die Bildebene durch die Hinter- oder Vorderfläche des Würfels legen oder gar zwischen Würfel und Auge. Sehr häufig legt

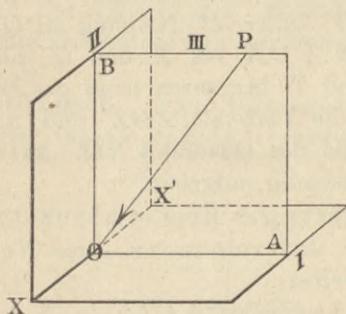


Fig. 5.

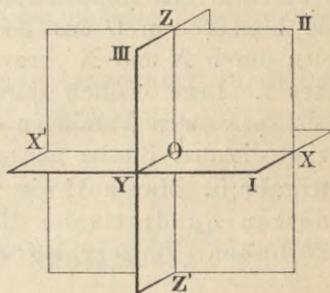


Fig. 6.

man sie durch die Mitte des Körpers, sodaß ein Teil vor, der andere hinter die Bildebene zu liegen kommt (33). Umgekehrt darf man bei feststehender Bildebene und Strahlenrichtung auch dem Gegenstande Parallelverschiebungen erteilen, ohne daß sich Größe oder Gestalt des Bildes ändert. Offenbar durchstechen hierbei die Projektionsstrahlen insgesamt oder teilweise die Bildebene, ehe sie die einzelnen Punkte des Gegenstandes erreichen. Aus diesem Grunde hat man eine derartige Projektion als *Perspektive**) benannt und spricht man von *schräger Parallelperspektive*. In Fig. 1 würde man also eine *Zentralperspektive* vor sich haben, wenn das Auge in dem Projektionszentrum O und die Bildebene zwischen O und dem Körper läge.

Endlich fassen wir noch das Ergebnis der schrägen Projektion von Strecken in folgenden Sätzen zusammen: 1. Jede Frontalstrecke (parallel zur Bildebene) bildet sich in natürlichen Verhältnissen ab. 2. Jede Orthogonalstrecke (senkrecht zur Bildebene) bildet sich nach Maßgabe der Strahlen-

*) Lat. *perspicere* = hindurchsehen.

richtung (q, ω) in gleicher Verzerrung ab. — Auch hier lassen sich drei Hauptlagen für Strecken erkennen: Frontal-horizontal*), frontal-vertikal und orthogonal; für die beiden ersten ist das Bild natürlich, für die letzte verzerrt.

Aufgabe 4. Konstruiere den Schnitt dreier quadratischer Blätter, die aufeinander senkrecht stehen; $q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$.

Wir vereinfachen die Aufgabe, indem wir den Schnittpunkt O der drei Ebenen I , II und III nach der Mitte legen und die Schnittlinien den Quadratseiten parallel laufen lassen (Fig. 6). Zugleich soll Ebene II in der Bildebene liegen. Die drei Quadrate haben, wenn wir von oben rechts blicken, die bekannten Hauptlagen. Hier nimmt \widetilde{II} die erste Hauptlage ein, \widetilde{I} die zweite und \widetilde{III} die dritte (21). Auf diese kurze geometrische Analyse gründet sich sofort folgende Konstruktion: Lege \widetilde{II} in natürlicher Größe fest und ziehe durch die Mitte O die Horizontale OX . Lege sodann durch O den Doppelstrahl YOY' unter 30° Neigung zu OX und schneide hierauf von O aus beiderseits $\frac{1}{3} OX$ bis Y und Y' ab. Die Parallelen durch X und X' bzw. Y und Y' begrenzen dann das Bild des Quadrates I . Lege endlich durch O die Vertikale ZOZ' und markiere durch die passenden Parallelen das Bild des Quadrates III . In unserer Figur sind die drei Blätter als undurchsichtig aufgefaßt.¹¹⁾

Aufgabe 5. Man soll ein vierblättriges Ebenenbüschel zeichnen, dessen quadratische Blätter untereinander eine Neigung von 45° haben (Verzerrung wie vorher).

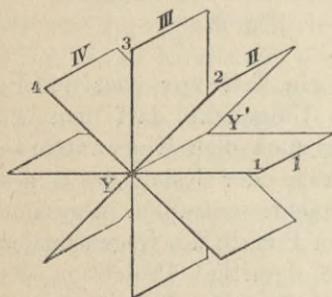


Fig. 7.

Wir schließen die Analyse der Aufgabe an Fig. 6 und nehmen die Ebenen I und III als zwei der Blätter; als Büschelachse dient daher YOY' , eine Orthogonalstrecke zur Bildebene. Schalten wir nun zwischen \widetilde{I} und \widetilde{III} nach rechts und links noch je eine Ebene II und IV unter 45° Neigung ein (Fig. 7), so ist es klar, daß die vorderen Ränder in natürlicher Größe und Lage auftreten. Die orthogonalen Ränder dagegen müssen YY' parallel laufen.

Die Konstruktion bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung. Nimmt man hier $\omega = 45^\circ$, so erkennt man sofort, daß die Wahl des Verzerrungswinkels für die Klarheit des Bildes nicht gleichgültig ist.¹²⁾

Übungsaufgaben: 1. Konstruiere im Anschluß an Fig. 4 den Würfel in folgenden drei Ansichten:

*) Die frontal-horizontale Lage wird häufig als „brachiale“ bezeichnet.

a) von unten rechts; b) von unten vorn; c) von unten links.

2. Stelle das Ebenenkreuz aus Fig. 6 in den übrigen fünf Hauptansichten dar:

a) von oben vorn; b) von oben links; c) von unten rechts; d) von unten vorn; e) von unten links.

3. Ein Block (Quader, rechth. Paralleloiped) soll bei einfacher Lage (vergl. Würfel) in den sechs Hauptansichten gezeichnet werden.

4. Ein Ebenenkreuz, dessen Blätter Rechtecke sind, ist in einfachster Lage im Schrägbild zu zeichnen.

5. Ebenenbüschel aus quadratischen Blättern zu zeichnen, die (vergl. Fig. 6) OX und OZ als Achse haben.

§ 2. Schrägbilder von ebenen Vielecken und geraden Prismen.

Die Betrachtung des Quadrates in den drei einfachsten Hauptlagen liefert die Hilfsmittel zur Bildkonstruktion bei anderen Lagen und anderen Vielecken.

Aufgabe 6. Das Schrägbild eines Quadrates in Diagonalstellung ist zu konstruieren; zweite Hauptlage, $q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$.

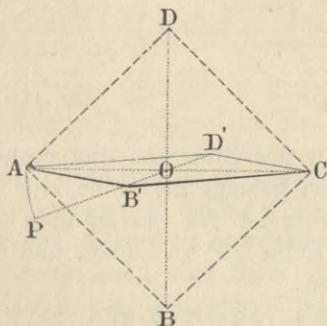


Fig. 8.

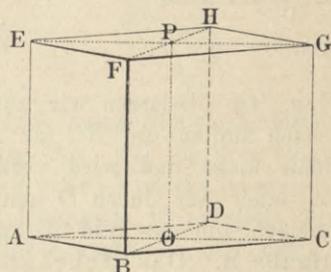


Fig. 9.

Denkt man sich zunächst das Quadrat in der ersten Hauptlage (Fig. 8) und zugleich in der Bildebene, so erhält man die kongruente Figur $ABCD$. Dreht man diese um die Diagonale AC als Achse bis in die zweite Hauptlage, so sieht man leicht ein, daß AC unverändert bleibt und BD als Orthogonalstrecke die gegebene Verzerrung erfährt. Die Konstruktion geschieht so: Man zieht durch O den Strahl unter 20° Neigung zu AC und schneidet von O aus beiderseits $\frac{1}{3}$ der Halbdiaagonale ab bis B' und D' . — Verzichtet man darauf, den Winkel in voller Schärfe ($= 20^\circ$) zu erhalten, so empfiehlt sich folgende Konstruktion des Neigungswinkels. Wir beschreiben um O den Kreis mit OA und tragen von A aus $\frac{1}{3} OA$ als Sehne ein bis P ; dann ist OP gegen OA um $19,2^\circ$ geneigt. Wir werden diesen Neigungs-

winkel in der Folge häufiger anwenden, besonders da, wo $\omega = 30^\circ$ zu unliebsamen Deckungen und Unklarheiten in den Figuren Anlaß gibt.¹³⁾

Aufgabe 7. Konstruiere das Schrägbild eines Würfels über Eck (im Anschluß an Aufgabe 6).

Die Bodenfläche $ABCD$ des Würfels (Fig. 9) wird genau so festgelegt wie in Aufgabe 6. Die anschließenden Seitenkanten AE , BF , CG und DH bilden sich als frontale Parallelstrecken in natürlicher Größe ab, d. h. $AE = AB$ in Fig. 8; hierdurch ist nun auch die Deckfläche $EFGH$ bestimmt.

Aufgabe 8. Das Schrägbild eines gleichseitigen Dreiecks zu zeichnen; zweite Hauptlage (q und ω wie oben).

Das Dreieck ABC (erste Hauptlage) liege mit der Grundlinie wäge-

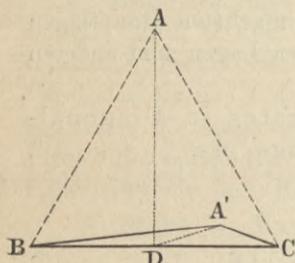


Fig. 10.

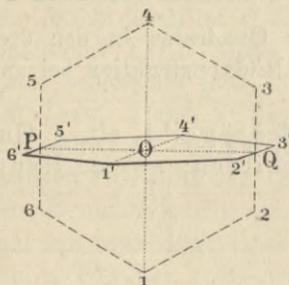


Fig. 11a.

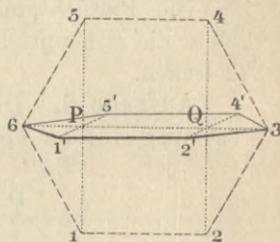


Fig. 11b.

recht (Fig. 10). Belassen wir nun BC in der Bildebene und drehen die Fläche nach hinten um BC als Achse, so gelangt die Höhe AD in die orthogonale Lage und wird verkürzt, während BC unverändert bleibt. Man hat daher nur durch D den Strahl unter 20° zu ziehen und $\frac{1}{3} AD$ abzuschneiden, um das Bild A' zu erhalten.

Aufgabe 9. Das Schrägbild eines regelmäßigen Sechsecks in zweiter Hauptlage zu zeichnen (q und ω wie vorher).

Unter der Voraussetzung, daß zugleich eine Diagonale orthogonal zur Bildebene sei (Fig. 11a), denkt man sich zuerst wieder die Figur in der ersten Hauptlage (1, 2, 3... 6) und dreht dann um die Mittellinie POQ , die in der Bildebene liegen möge, bis die zweite Hauptlage erreicht ist. Die Strecken $\overline{14}$, $\overline{23}$ und $\overline{56}$ erscheinen dann in der gegebenen Verkürzung. — Wenn dagegen, wie in Fig. 11b, eine Diagonale brachial zu der Bildebene liegen soll, dann benutzt man jene als Achse ($\overline{36}$) und findet, daß nun die Strecken $\overline{15}$ und $\overline{24}$ lotrecht zur Bildebene stehen. Die Verkürzung dieser Strecken ist bestimmt; da sich nun ihre Schnittpunkte P und Q mit $\overline{36}$ in natürlicher Lage abbilden, so ergibt sich hier folgende Konstruktion: Man zeichnet zuerst die Hilfsfigur (1, 2, 3... 6), zieht hierin $\overline{36}$, $\overline{15}$ und $\overline{24}$ bis zum gegenseitigen Schnitte in P und Q .

Dann legt man durch P und Q die Strahlen unter dem Neigungswinkel 20° zu 36 und schneidet beiderseits $\frac{1}{3} P5$ bzw. $Q4$ ab.

Aufgabe 10. Konstruiere das Schrägbild einer regelmäßigen sechsseitigen Tafel ($h = 5$ mm) in zweiter und dritter Hauptlage.

Im Anschluß an Fig. 11a ersieht man für die zweite Hauptlage, daß sich die Deckfläche der Tafel durch einfache Parallelverschiebung der Bodenfläche in vertikaler Richtung ergibt. Entnimmt man daher der Fig. 11a das Bild ($1' 2' 3' \dots 6'$), so erhält man das Gesamtbild wie in Fig. 12a. — Für den Fall der dritten Hauptlage Fig. 12b hat man zuerst aus Fig. 11a durch Drehung um 14 die betreffende Lage des Sechsecks zu konstruieren. Die Strecken 35 und 26 erscheinen dann unter 20° gegen die Horizontale geneigt; ihre Schnittpunkte mit 14 bilden sich in natürlicher Lage ab, ähnlich wie in Fig. 11b. Die zweite Fläche der Tafel erhält man durch Parallelverschiebung (hier um 5 mm).

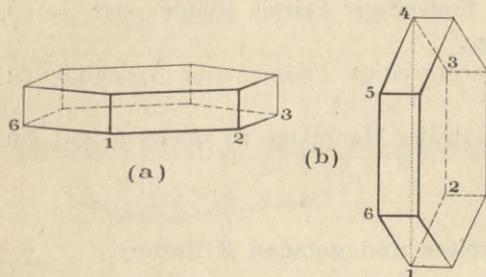


Fig. 12.

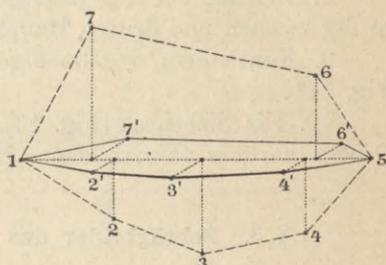


Fig. 13.

Nach den gegebenen Beispielen hat es keine Schwierigkeiten mehr, reguläre Vielecke in schräger Parallelperspektive für die drei Hauptlagen zu zeichnen. Selbst die Darstellung allgemeiner Vielecke ist eine einfache Arbeit, wenn man eine Seite oder eine Diagonale in parallele oder lotrechte Lage zur Bildebene bringt und im übrigen in den drei Hauptlagen verbleibt.

Aufgabe 11. Ein allgemeines Vieleck (Siebeneck) ist gegeben; man soll es in einer bestimmten Hauptlage als Schrägbild darstellen ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

Das Siebeneck ($1, 2, 3, \dots 7$) werde zuerst in die Bildebene gelegt und so gedreht, daß eine der Diagonalen (etwa 15) wagerecht liegt (Fig. 13). Aus dieser Lage werde es durch Drehung um 15 in die zweite Hauptlage gebracht. Die Strecken auf der Diagonale (Abszissen) bilden sich dann ohne Verzerrung ab. Die Lote (Ordinaten) von den Eckpunkten nach der Diagonale erhalten die Verkürzung auf $\frac{1}{3}$.¹⁴⁾

Übungsaufgaben.*) 1. Konstruiere das Quadrat (Fig. 8) in der dritten Hauptlage und benutze die Drehung von $ABCD$ um BD .

*) Für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 20^\circ$.

2. Zeichne den Würfel über Eck (Fig. 9) in verschiedenen Ansichten mit denselben Verzerrungszahlen.

3. Gerade quadratische Säulen (Quader), deren Höhe doppelt so groß als die Grundkante ist, sind zu zeichnen und zwar

a) vertikal stehend;

b) horizontal liegend, parallel der Bildebene (mit brachialer Kante);

c) horizontal liegend, lotrecht zur Bildebene (mit orthog. Kante).

4. Das Schrägbild eines gleichseitigen Dreiecks (Fig. 10) in der dritten Hauptlage unter Benutzung von AD als Drehungsachse zu zeichnen.

5. Stelle das Dreieck von Nr. 4 mit der Spitze nach unten und konstruiere das Schrägbild in der zweiten und dritten Hauptlage.

6. Konstruiere ein gerades, reguläres, dreiseitiges Prisma, dessen Höhe gleich der halben Grundkante ist, in den Lagen der Übungsaufgabe 3.

7. Ein regelmäßiges Fünfeck ist in den drei Hauptlagen zu zeichnen.

8. Zeichne ein regelmäßiges, fünfseitiges Prisma (Säule oder Tafel) in der zweiten und dritten Hauptlage.

9. Konstruiere regelmäßige, sechsseitige Prismen im Anschluß an Fig. 11b.

10. Ein Siebeneck (Fig. 13) in dritter Hauptlage zu zeichnen und ein Prisma darüber zu errichten.

§ 3. Schrägbilder des Kreises und geraden Zylinders.

Wir betrachten auch den Kreis vornehmlich in den drei Hauptlagen. In der ersten erscheint er natürlich wiederum als Kreis. Wie bei den Vielecken wollen wir diese Lage als Ausgangslage betrachten, von der wir die beiden anderen durch Drehung ableiten.

Aufgabe 12. Das Schrägbild eines Kreises soll in der zweiten Hauptlage entworfen werden ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

In Fig. 14 sei O der Mittelpunkt des Kreises in der ersten Hauptlage, AB sei der horizontale Durchmesser, CD der vertikale. Durch Drehung um AB gelangt der Kreis in die zweite Hauptlage. Hierdurch bleiben sämtliche Punkte von AB in ihrer natürlichen Lage, während diejenigen von CD perspektivisch verschoben werden. Die Halbsehne OD wird auf $\frac{1}{2}$ verkürzt und erhält eine Neigung von 45° . Dasselbe aber gilt für die parallelen Halbsehnen durch die Punkte P , Q , R (hier Viertelpunkte von OB). Somit ist der Quadrant $B'D'$ festgelegt, und ganz entsprechend werden die übrigen Kreisquadranten bestimmt. Man ersieht leicht, daß die Parallelsehnen eines Quadranten den anderen Quadranten dienen können.

Die Konstruktion verläuft so: Ziehe in O den horizontalen Durchmesser AB , teile OB in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (hier 4) und errichte in den Teilpunkten O , P , Q , R usf. die senkrechten Halbsehnen.

Lege dann durch dieselben Punkte Strahlen unter 45° zu OB und schneide auf ihnen beiderseits die Hälften der Halbsehnen ab bis $D', 1', 2', 3'$ usw. Zieht man dann durch diese letzten Punkte Parallelen zu AB und $C'D'$ (in der Figur nur für $3'$ ausgeführt*), so erhält man 14 Bildpunkte des Kreises. Man bemerkt, daß er nur punktweise konstruiert werden kann, indem man durch die scharf markierten Punkte eine stetig gekrümmte Linie freihändig legt. Bemerkenswert ist das Übergreifen des Bildes über den Hilfskreis bei A und B , und es empfiehlt sich, zur scharfen Bestimmung dieser sog. „Henkel“ zwischen $3'$ und B , sowie bei A noch eine Halbsehne einzuschalten.¹⁵⁾ Eine derart verzerrte Kreisfigur nennen wir Ellipse.**)

Aufgabe 13. Das Schrägbild eines Kreises soll in der dritten Hauptlage entworfen werden (Verzerrungszahlen wie vorher).

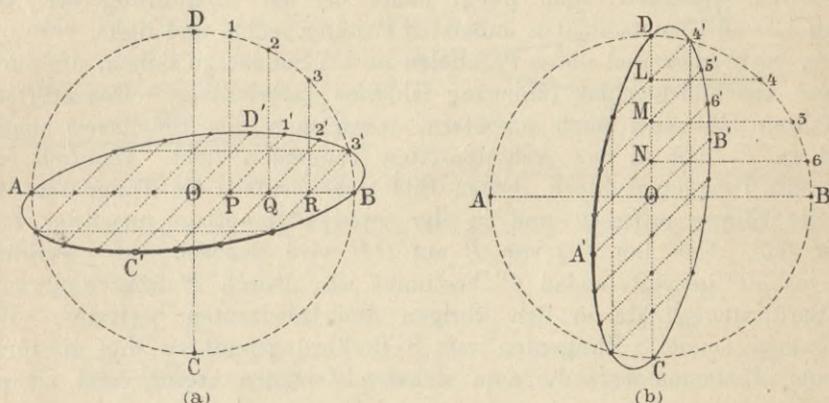


Fig. 14.

Der Hilfskreis O (Fig. 14b) hat dieselbe Bedeutung wie in voriger Aufgabe. Eine Drehung um CD bringt ihn in die dritte Hauptlage. Die Halbsehnen OB , $N6$, $M5$ und $L4$ geraten dabei in die orthogonale Lage, erhalten die Verkürzung auf $\frac{1}{2}$ und die Neigung von 45° , während CD unverändert bleibt. Die Betrachtung des Quadranten BOD reicht aus zur Konstruktion des vollen Bildes, wie für Punkt $4'$ als Beispiel angedeutet ist. Die „Henkel“ bei C und D sind besonders zu beachten und nötigenfalls durch Einschaltung einer Halbsehne zwischen D und L zu verschärfen. Die Kongruenz dieser Bildfigur mit derjenigen aus Fig. 14a ist leicht nachweisbar. Gilt das für jedes ω ?****)

*) Daß $3'$ zugleich auf den Hilfskreis zu liegen kommt, liegt in den zufälligen Verhältnissen der Aufgabe.

**) Ihre näheren Eigenschaften werden weiter unten S. 14 u. folg. untersucht.

****) Vergl. Schluß der Anm. 15.

Aufgabe 14. Konstruiere das Schrägbild eines Kreises, der in einem Tangentenquadrat liegt ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

Durch Drehung der Hilfsfigur $ABCD$ Fig. 15 mit dem Innenkreise O in die zweite Hauptlage erhält man als Bild für das Quadrat das bekannte Parallelogramm und für den Kreis eine Ellipse mit dem gegebenen Verzerrungsverhältnis. Da die Quadratseiten in der ersten Hauptlage Tangenten an den Kreis O sind, so folgt, daß auch in der Projektion die Parallelogrammseiten Tangenten an die Ellipse bleiben mit Ausnahme des einen Falles, wo Quadrat- und Kreisebene in der Richtung der Projektionsstrahlen liegen. Dann nämlich haben Parallelogrammseite und Ellipse nicht bloß einen Punkt gemein, sondern fallen zusammen. Die Punkte E' , F' , G und H sind somit als Berührungspunkte der Ellipse mit dem Tangentenparallelogramm aufzufassen, ein Umstand, der die Zeichnung wesentlich erleichtert; man pflegt daher bei der Ausführung der Aufgaben 12 und 13 stets an den äußersten Punkten rechts und links, vorn und hinten bezw. oben und unten Parallelen zu den Sehnen zu ziehen, um durch inniges Anschmiegen den Linienzug fehlerlos zu erhalten. — Das erörterte Verfahren läßt sich noch erweitern, wenn man den Innenkreis achtelt (z. B. in P) und in den Achtelpunkten Tangenten zieht. Dadurch entsteht ein Tangentenachteck, dessen Bild sich ebenfalls als Tangentenachteck der Ellipse auffassen und in der zweiten Hauptlage unschwer festlegen läßt. Das Lot $P'Q$ von P auf OH wird dadurch auf $\frac{1}{3}$ verkürzt und bis 30° geneigt, sodaß P' bestimmt ist. Durch P' aber sind auch die Berührungspunkte in den übrigen drei Quadranten bestimmt. Wir bekommen somit 8 Tangenten mit 8 Berührungspunkten und gewinnen so eine „Linienmanier“, die zum sicheren Zeichnen besser dient als die reine Punktmanier.

Denken wir den Kreis O fest, das Quadrat aber in der Kreisebene beweglich so erhalten wir zu jeder neuen Stellung des Tangentenquadrates als Bild ein neues Tangentenparallelogramm an dieselbe Ellipse. Auf Grund der Konstruktion läuft jedes parallele Seitenpaar einem Ellipsendurchmesser parallel, mit anderen Worten, die Mittellinien des Parallelogramms sind Ellipsendurchmesser. Hieraus folgt, daß umgekehrt durch einen beliebigen Ellipsendurchmesser als Mittellinie ein Tangentenparallelogramm bestimmt ist, dessen zweite Mittellinie durch die Berührungspunkte geht, also ebenfalls Durchmesser ist. Alle Ellipsensehnen, welche einem bestimmten Durchmesser parallel laufen, werden durch den zweiten Durchmesser (Mittellinie) halbiert und umgekehrt. Ein derartiges Parallelogramm heißt auch das der Ellipse konjugierte Parallelogramm und die zugehörigen Ellipsendurchmesser (Mittellinien) heißen konjugierte Durchmesser. Auf diese Sätze gründet sich die Lösung der planimetrischen Aufgabe: In einem gegebenen Punkte einer Ellipse die Tangente zu konstruieren (benutze die Parallelesehne).¹⁶⁾

Das Parallelogramm $A'B'C'D'$ (Fig. 15) nimmt bei der soeben angenommenen Drehung des Quadrates alle möglichen Gestalten an. Der Winkel bei A' (Fig. 15) geht dabei aus einem spitzen in einen stumpfen über (Fig. 16) und muß bei der Stetigkeit der Umwandlung in einer bestimmten Stellung zu 90° werden, d. h. das Parallelogramm geht in ein Rechteck über. In diesem Falle stehen auch die konjugierten Durchmesser aufeinander senkrecht und werden dann Achsen der Ellipse ge-

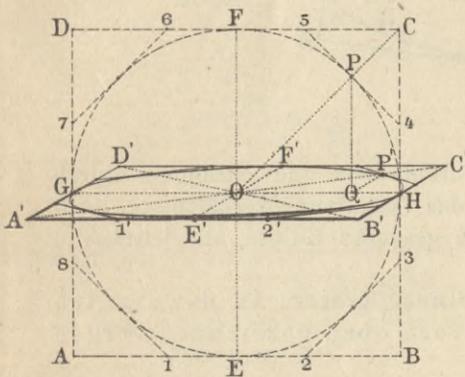


Fig. 15.

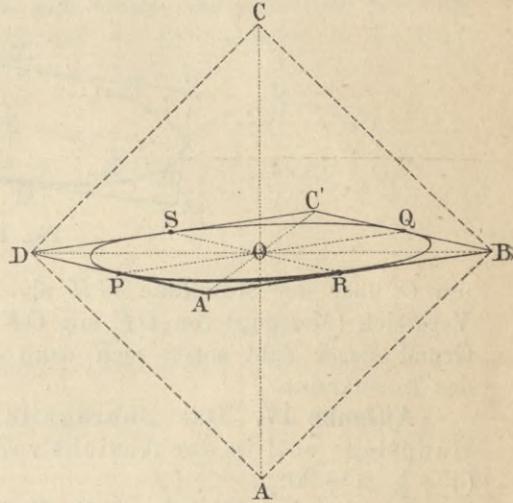


Fig. 16.

nannt. Die Ellipse zerfällt durch sie in vier Quadranten, die zu den Achsen symmetrisch liegen und kongruent sind. Auf Grund dieser Sätze gelingt es, Mittelpunkt und Achsen einer beliebigen Bildellipse zu finden.

Aufgabe 15. Gegeben ist eine Ellipse als Schrägbild eines Kreises in zweiter Hauptlage; man soll dasjenige Bild des Tangentenquadrates konstruieren, das als Rechteck auftritt.

Die Analyse stützt sich auf die obigen Sätze. Von der Ellipse (Fig. 17) sei nur die Linie selbst (ohne Mittelpunkt) gegeben.*) Um den Mittelpunkt festzulegen, ziehe man zwei beliebige Parallelechnen LM und RS , halbiere sie und lege durch die Mitte den konjugierten Durchmesser UV , dessen Mitte O der Mittelpunkt der Ellipse ist. Auf Grund der Symmetrie beschreibt man um O einen sonst beliebigen Kreis, der die Ellipse in den vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 schneidet, die ein rechteckiges Sehnenviereck liefern. Die Mittellinien OX und OY sind dann die Achsen der Ellipse. Durch die Berührungspunkte X und Y können nun die Tangenten gezogen werden, welche das gesuchte Rechteck liefern. — Aus der Lage der Ellipse

*) Die Pfeile HH geben die Horizontale an.

zur Horizontalen läßt sich ermitteln, daß die Ellipse unter Annahme von $q = \frac{1}{2}$ und $\omega = 45^\circ$ entstanden war.

Aufgabe 16. Gegeben ist ein Parallelogramm als Schrägbild zweiter Lage eines Quadrates, man soll die konjugierte Ellipse zeichnen.

Gegeben sei nach Fig. 15 das Parallelogramm $A'B'C'D'$. Die Lösung ist die Umkehrung der Aufgabe 14. Man benutze also den Kreis

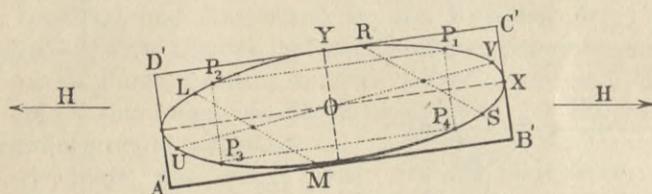


Fig. 17.

um O über der Mittellinie GH als Durchmesser und entnehme durch Vergleich (Messung) von OF mit OF' das Verkürzungsverhältnis q . Auf Grund dieser Zahl ergibt sich dann die gesuchte Ellipse als Schrägbild des Innenkreises.

Aufgabe 17. Das Schrägbild eines Kreises in der zweiten Hauptlage soll in der Ansicht von vorn oben gezeichnet werden ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 90^\circ$).

Da hier $\omega = 90^\circ$ ist und die Projektionsstrahlen von vorn oben einfallen, so ändert sich für $q = \frac{1}{2}$ die Fig. 14a nur insofern ab, als die Neigung der Strahlen $\overline{OD'}$, $\overline{P1'}$, $\overline{Q2'}$, $\overline{R3'}$ von 30° auf 90° erhöht werden muß (Fig. 18a). Auch hier genügt es, wenn die Konstruktion für einen Quadranten ausgeführt wird, wie für Punkt 3 genauer ausgeführt ist. — Ein Schrägbild, das der Fig. 14b entsprechen soll, wird für $\omega = 90^\circ$ bloß die Strecke CD ergeben. — Die Betrachtungen, die im Anschluß an Fig. 15 und 16 angestellt worden sind (Aufgabe 14), wiederholen sich hier und entwickeln sich zu einem Grenzfall. Da das konjugierte Parallelogramm durch A, B, C' und D' (Fig. 18) ein Rechteck ist, so ergibt sich, daß AB und $C'D'$ hier die Achsen der Ellipse sind. Das Achsenverhältnis dieser Ellipse ist also $= \frac{1}{2}$.

In Fig. 18b ist dieselbe Aufgabe für $q = \frac{3}{2}$ gelöst. Hier fallen die Projektionsstrahlen steiler von oben als gewöhnlich; eine Verzerrungszahl von $q > 1$ entspricht so wenig der üblichen Betrachtungsart der Körper, daß wir bisher immer nur echte Brüche gewählt haben. Die Bildkonstruktion ist aber buchstäblich dieselbe wie vorher, statt der Verkürzung tritt nur eine Verlängerung der Lotstrecken ein. Natürlich erhält man für $q > 1$ bei seitlicher Ansicht ebenfalls eine Verzerrungsfigur des Kreises, die von vorn nach hinten die größere Ausdehnung hat. Auch diese Figur wird

Ellipse genannt, und für sie gelten dieselben Sätze, die oben für die konjugierten Durchmesser und das konjugierte Parallelogramm abgeleitet worden sind.¹⁷⁾ Das Achsenverhältnis der Ellipse ist in diesem Falle = q .

Aufgabe 18. Ein gerader Zylinder ist in schräger Parallelperspektive zu zeichnen ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$ bzw. 90°).

Wir wollen das Bild in zwei Ansichten entwerfen, von oben rechts (Fig. 19a) und oben vorn (Fig. 19b) und wählen die einfachste Stellung, indem wir die Bodenfläche wagerecht und die Zylinderachse in die Bild-

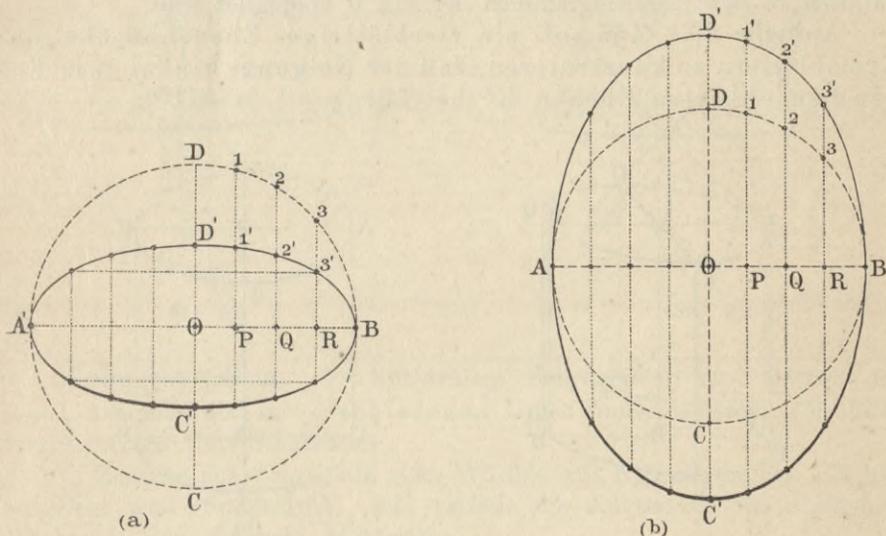


Fig. 18.

ebene legen. Für die seitliche Ansicht (Fig. 19a) kann man sofort Fig. 14 Aufgabe 12 benutzen und die Bodenfläche $ABCD$ konstruieren. Durch Parallelverschiebung um die Höhe (hier = AB) erhält man dann sofort die Deckfläche. Hervorgehoben sind noch in der Figur die beiden Achsenschnitte in den Hauptlagen $ABA'B'$ und $CDC'D'$. Der erste zeigt uns, daß die Seitenlinien AA' und BB' durchaus nicht die Randlinien (Konturen) rechts und links bilden, daß vielmehr durch das Vorhandensein der „Henkel“ bei P und Q die Randlinien (Tangenten) PP' und QQ' den Körper für das Auge begrenzen. — Bei der Ansicht von vorn oben (Fig. 19b) benutzt man Fig. 18a und erhält ohne Mühe ein Zylinderbild, an dem man den Nachteil der Vorderansicht erkennt. Zwar fällt das Übergreifen bei A und B weg, dagegen ist der Einblick in den wichtigen Achsenschnitt $CDC'D'$ wesentlich erschwert. Je nach den besonderen Zwecken, denen ein Zylinderbild dienen soll, benutzt man bald die eine bald die andere Ansicht.¹⁸⁾

Aufgabe 19. Ein Ebenenkreuz aus Kreisblättern soll gezeichnet werden ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

Die Lösung schließt sich an Fig. 6 Aufgabe 4 an. Es handelt sich nur darum, drei Kreise *I*, *II* und *III* in den drei Hauptlagen zu konstruieren. Wählt man außerdem die Stellung so, daß Kreis *II* in der Bildebene liegt (Fig. 20), so hat die Aufgabe nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeiten. Man erkennt, daß die Kreise drei aufeinander senkrecht stehende Großkreise einer Kugel darstellen können mit den Durchmessern $XX' = YY' = ZZ'$. Ferner ist klar, daß die hier auftretenden Ellipsen zu den Parallelogrammen der Fig. 6 konjugiert sind.

Aufgabe 20. Man soll ein vierblättriges Ebenenbüschel aus Kreisblättern so konstruieren, daß der Neigungswinkel zwischen den benachbarten Ebenen 45° beträgt ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

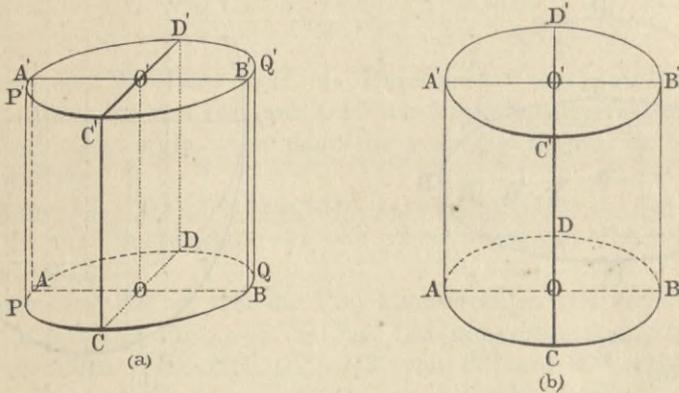


Fig. 19.

Die Aufgabe ist das Gegenstück zu Fig. 7 Aufgabe 5. Wählt man die Stellung so, daß die Büschelachse orthogonal zur Bildebene steht, dann ist (Fig. 21) die Konstruktion der Bilder von *I* und *III* dieselbe wie in voriger Aufgabe. Nur die Bilder von *II* und *IV* bieten etwas Neues. Diese Kreisebenen stehen ebenfalls auf der Bildebene senkrecht, daher ist auch ihr Durchmesser YY' orthogonal (21), sowie sämtliche Sehnen in *II* und *IV*, die nämlich YY' parallel sind (7). Diese Sehnen laufen daher auch im Bilde parallel YY' und sind auf $\frac{1}{3}$ zu verkürzen. In der Figur ist die Sehne QQ' beispielsweise so gezeichnet. Es liegt außerdem nahe, die Ellipsen *II* und *IV* als konjugierte Ellipsen zu den Parallelogrammen *II* und *IV* aus Fig. 7 aufzufassen. Endlich ist zu bemerken, daß sämtliche Kreise als Meridiane einer Kugel betrachtet werden können, deren Pole Y und Y' sind.

Die Konstruktion von Ebenenbüscheln aus Quadraten (Aufg. 5) für OY als Achse erleichtert sich nach dieser Betrachtung des Kreises nicht unwesentlich,

wenn man bedenkt, daß die Punkte 1, 2, 3, 4 usf. (Fig. 7) auf einem Kreise der ersten Hauptlage liegen. — Nimmt man OZ als Achse, so liegen die Quadrateckpunkte oben auf einem Kreise zweiter Hauptlage; für OX als Achse hat man als Ort für die Eckpunkte rechts einen Kreis dritter Hauptlage.

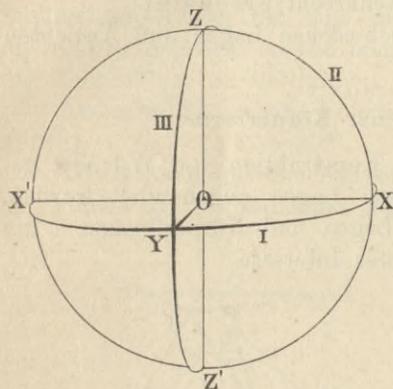


Fig. 20.

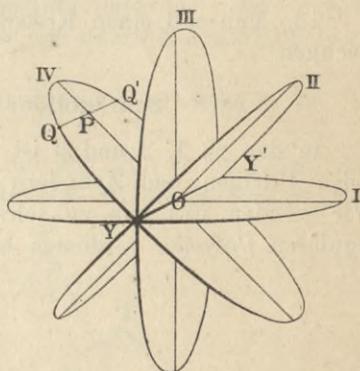


Fig. 21.

Übungsaufgaben. 1. Konstruiere Schrägbilder des Kreises für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 30^\circ$ in verschiedenen Lagen und Ansichten. (Markiere hierbei einige Uhrzifferblätter.)

2. Zeichne das Schrägbild eines Würfels mit Kreisen, die den Flächen aufgelegt sind (Spielwürfel), und verteile die Augen auf den sichtbaren Flächen in den richtigen Abständen.

3. Das Schrägbild eines Kreises mit Tangentenquadrat und Tangentenachteck ist in dritter Hauptlage zu zeichnen (im Anschluß an Fig. 15).

4. Man soll das Tangentenquadrat (Fig. 15) in der Diagonalstellung und in einer mittleren Stellung für die verschiedenen Hauptlagen konstruieren.

5. An eine beliebige Projektionsellipse soll das zu einem gegebenen Punkte gehörige Tangentenparallelogramm (konjug. Parallelogramm) gezogen werden.

6. Gegeben ist ein Parallelogramm als Bild eines Quadrates in dritter Hauptlage; man soll die konjugierte Ellipse zeichnen (das Bild des eingeschriebenen Kreises).

7. Das Schrägbild eines Kreises in Vorderansicht ($\omega = 90^\circ$) ist für $q = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{3}$ zu konstruieren.

8. Das Schrägbild einer Walze (eines liegenden Zylinders) soll in verschiedenen Ansichten entworfen werden, ebenso das einer Kreisscheibe (einer zylindrischen Platte).

9. Ein Ebenenkreuz aus Kreisen ist in anderen Ansichten als Fig. 20 zu zeichnen.

10. Ebenenbüschel aus Kreisblättern sind für OX und OZ als Achse zu konstruieren (Fig. 21).

11. Die vorige Aufgabe in verschiedenen Ansichten und Verzerrungen.

12. Zeichne das Bild eines Kreises, der schief liegt wie Kreis IV in Fig. 21, doch so, daß OY auf OP auch senkrecht erscheint.

13. Man soll einen Kreisring in verschiedenen Lagen und Ansichten zeichnen.

§ 4. Schrägbilder verschiedener Körperformen.

In den §§ 1, 2 und 3 ist bereits die Konstruktion von Würfeln, geraden Prismen und Zylindern in einfachen Lagen abgehandelt worden. Wir wenden uns nun zu schwierigeren Lagen und Körperformen. Die regulären Polyeder verdienen hier besonderes Interesse.

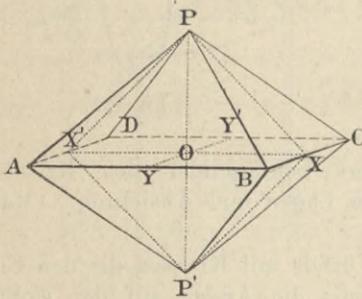


Fig. 22 a.

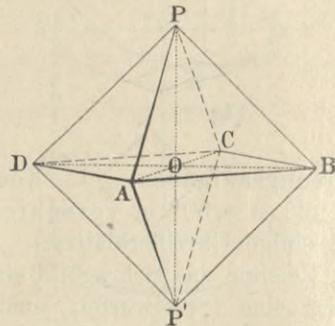


Fig. 22 b.

Aufgabe 20. Ein reguläres Oktaeder ist im Schrägbild zu zeichnen ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$).

Dem Oktaeder werde zunächst eine solche Lage gegeben, daß die Hauptachse PP' (Fig. 22a) in der Bildebene liege und daß eine Randkante (AB) der letzteren parallel laufe. Der Mittelschnitt $PXP'X'$ liegt dann vollständig in der Bildebene und erscheint in natürlichen Verhältnissen. Für die Punkte A und B , D und C , Y und Y' hat man dann als geometrische Örter die Strahlen durch O , X und X' unter der gegebenen Neigung zur Horizontalen (hier 20°); sie sind vollends bestimmt durch die gegebene Verkürzung (hier $\frac{1}{3}$). Diese Analyse ergibt folgende

Konstruktion: Man lege zunächst (bei gegebener Kante) die Mittellinie XOX' fest und errichte in O das Lot auf XX' . Dann konstruiere man (Nebenkonstruktion) die Länge der Halbachse OP als Kathete eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB (vergl. Dreieck OAB) und schneide diese Länge von O aus ab

bis P und P' . Schließlich ziehe man durch X und X' die Neigungsstrahlen und schneide darauf beiderseits $\frac{1}{3}$ der Halbkante ab.

Geben wir dem Oktaeder eine solche Lage, daß ein Achsenschnitt $PP'BD$ (Fig. 22b) in der Bildebene liegt, so ist die Konstruktion überaus einfach, wenn die Achsenlänge gegeben ist. Denn dieser Achsenschnitt, ein Rhombus, läßt sich sofort festlegen, und für AC , der zur Bildebene senkrechten Achse, hat man den Neigungsstrahl unter 20° . Ist dagegen die Kante gegeben, so hat man wie vorher erst durch Nebenkonstruktion die Achsenlänge zu bestimmen.

Aufgabe 21. Ein horizontal aufliegendes Oktaeder ist zu zeichnen ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$).

Wir denken uns den Körper aus der Lage Fig. 22a so umgelegt, daß die Fläche BCP' horizontal und die Kante BP' in der Bildebene liegt.

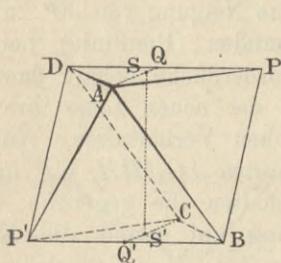


Fig. 23.

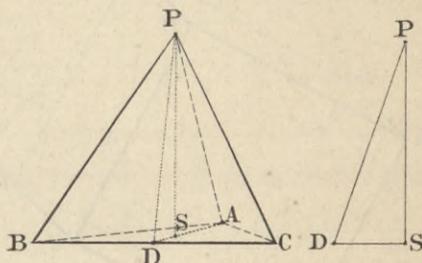


Fig. 24.

Als Deckfläche ist dann ADP zu betrachten. Die Bodenfläche ist (bei gegebener Kante, sonst vorher Nebenkonstruktion) nach Fig. 10 Aufg. 8 leicht festzulegen. Die Deckfläche befindet sich in der sog. Gegenstellung, ihre Höhe AQ ist parallel CQ' und ihr Mittelpunkt (Schwerpunkt) senkrecht über dem Mittelpunkt $S'S'$. [Da SS' parallel der Bildebene liegt, so wäre nur noch deren Länge zu bestimmen. Nun liegen AQ und CQ' in einem Mittelschnitte, einem Rhombus, der wie die Figur $PXP'X'$ zu Fig. 22a leicht für sich (Nebenkonstruktion) bestimmt werden kann, also auch seine Höhe, die gleich SS' sein muß. Hieraus ergibt sich folgende

Konstruktion: Lege BCP' (wie in Fig. 10) fest, halbiere $P'B$ in Q' und ziehe CQ' . Dritteile $Q'C$ in S' und errichte hier die Vertikale. Als Nebenkonstruktion zeichne den Rhombus $AQQ'Q'$, dessen Diagonalen gleich der Oktaederkante bzw. der Achse sind, und ziehe darin die Höhe. Diese schneide man von S' ab bis S , ziehe durch S die Parallele zu CQ' und mache $SQ = S'Q'$ und $SA = S'C$. Zieht man endlich durch Q die Parallele zu BP' und schneidet man beiderseits $QP = QD = Q'B$ ab, so sind alle Eckpunkte des Oktaeders bestimmt.

Aufgabe 22. Das Schrägbild eines regulären Tetraeders soll konstruiert werden ($q = \frac{1}{3}$; $\omega = 20^\circ$).

Das Tetraeder stehe mit der Fläche ABC (Fig. 24) auf einer Hori-

dann $\frac{1}{3}$ der Flächendiagonale ab. Alle übrigen Kanten laufen den bereits festgelegten parallel. Sorgfältig ist auf die sichtbaren Flächen zu achten, da man anfangs zweifelhaft sein kann, ob Fläche $BCFH$ oder Fläche $ADEG$ vorn liegt.

Die Betrachtung der übrigen regulären Polyeder (Dodekaeder und Ikosaeder) wird zunächst übergangen, da sie später bei Krystallzeichnungen berührt wird.¹⁹⁾

Aufgabe 25. Ein regulärer, schiefer Pyramidenstumpf ist zu zeichnen ($\frac{1}{3}$, 30°).

Die Vollpyramide, zu welcher der Stumpf gehört, sei sechsseitig und ihre Höhe gleich dem großen Durchmesser der Grundfläche (Fig. 27). Die

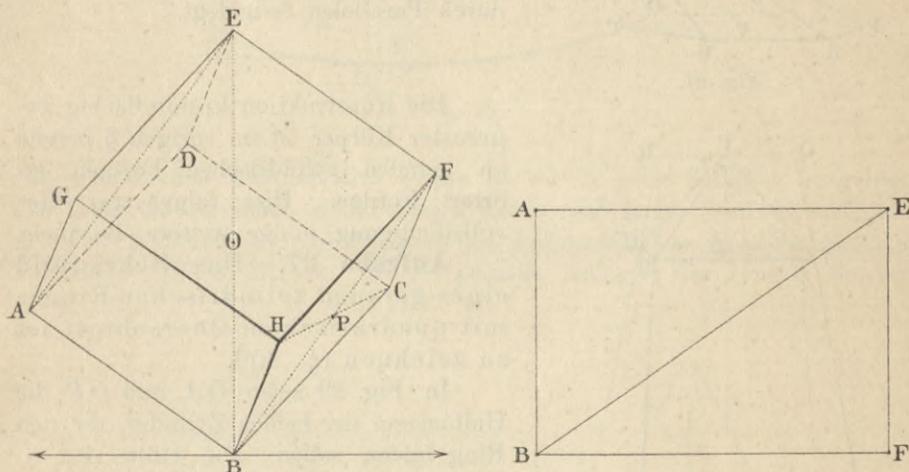


Fig. 26.

Achse der Pyramide sei um 45° gegen die Grundfläche geneigt und liege in einer Vertikalebene über einem großen Durchmesser. Der Abstumpfungsschnitt endlich befinde sich in halber Höhe. Die Grundfläche ist bestimmt etwa nach Art der Fig. 11 b Aufg. 9. Die Achse OP erscheint in natürlicher Größe und Lage. Wenn die Höhe halbiert ist, werden auch die Kanten halbiert (34). Die Deckfläche $A'B'C' \dots$ ist also durch die Halbierungspunkte der Seitenkanten bestimmt. Wird die Höhe in einem anderen Verhältnisse geschnitten, so geschieht dies auch mit den Seitenkanten. Man geht dann gewöhnlich von einem beliebigen Punkte A' aus und bestimmt die anderen durch Parallelen zu den Grundkanten.

Aufgabe 26. Ein Obelisk mit aufgesetzter Pyramide im Schrägbild zu konstruieren ($\frac{1}{2}$, 45°).*)

*) Wenn es nicht anders gesagt wird, soll von jetzt ab die Bildebene durch die Mitte des Körpers gelegt sein.

Die Bodenfläche sei rechteckig und $BC = \frac{2}{3} AB$, die Höhe des Voll-Obeliskens = $3 AB$ (Fig. 28). Die Spitze P der Pyramide endige in der Schneide QR des Obeliskens. Die Bodenfläche $ABCD$ ist in der gewählten einfachen Lage leicht bestimmbar. P liegt senkrecht über der Mitte O der Grundfläche in natürlicher Höhe; auch die Schneide QR ist vorläufig in wahrer Größe einzutragen. Wenn nun der Obelisk in $\frac{3}{4}$ der Höhe abgestumpft sein soll, so hat man dementsprechend O' festzulegen. Die Parallele $O'A'$ zu OA bestimmt A' . Die übrigen Punkte B', C', D' werden ebenso durch Parallelen festgelegt.

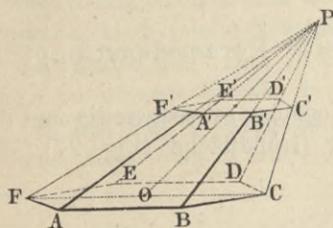


Fig. 27.

Die Konstruktion krummflächig begrenzter Körper ist im vorigen § bereits an geraden zylindrischen Formen erörtert worden. Hier folgen zur Vervollständigung einige weitere Beispiele.

Aufgabe 27. Das Schrägbild eines geraden zylindrischen Ringes mit quadratischem Querschnitt ist zu zeichnen ($\frac{1}{2}$, 45°).

In Fig. 29 seien OA und OP die Halbmesser der beiden Zylinder, die den Ring bilden sollen. Die Höhe $AA' = PP'$ ist hier gleich AP . Die Innenellipse $ABCD$ wird ganz so wie in Fig. 14a festgelegt. Die Außenellipse PQR erfordert eine ähnliche Konstruktion, nur ist dabei zu beachten, daß die Abstände zwischen beiden Ellipsen durchaus nicht gleich erscheinen, wenn auch die Abstände zwischen den Originalkreisen dieselben sind.²⁰⁾ Man sieht sofort, daß $PA > QB$, $C'R' > B'Q'$. Ebenso ist auf das Übergreifen bei $P(A)$

und $R(C)$ genau zu achten. Die Ellipsen der Deckfläche, $A'B'C'D'$ und $P'Q'R'$ sind lediglich als Parallelverschiebung aus der Bodenlage heraus zu betrachten.

Die Betrachtung schiefer Zylinder hat keine weitere Schwierigkeit, man hat nur darauf zu sehen, daß sich die Randlinien deutlich von den Querschnittslinien abheben.

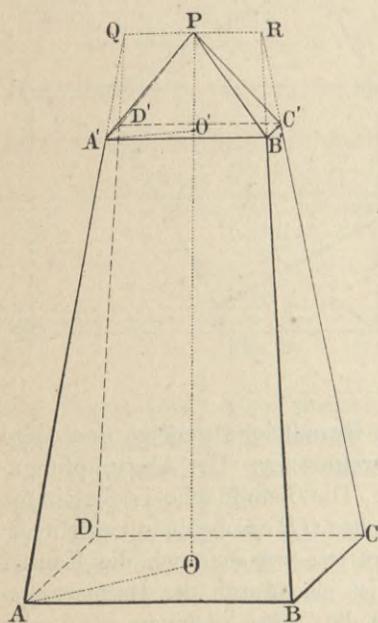


Fig. 28.

Aufgabe 28. Ein gerader Kegel ist in schräger Parallelperspektive zu zeichnen ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$ bzw. 90°).

Auch hier soll die Aufgabe (wie in § 3 Aufgabe 18) in zwei Ansichten konstruiert werden, von oben rechts (Fig. 30a) und oben vorn (Fig. 30b).

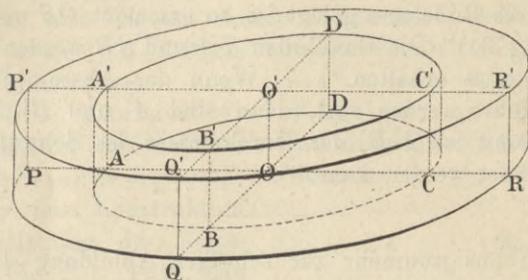


Fig. 29.

Die Grundfläche $ABCD$ wird genau so wie in jener Aufgabe festgelegt. Die Höhe OS erscheint in natürlicher Größe und Lage. Man erkennt, daß in beiden Fällen die Seitenlinien des Achsenschnittes SAB nicht die Randlinien bilden können. Durch genaues Anlegen des Lineals müssen

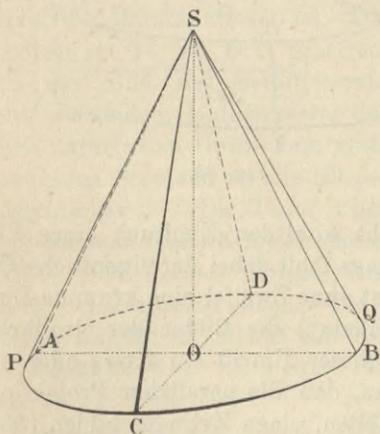


Fig. 30a.

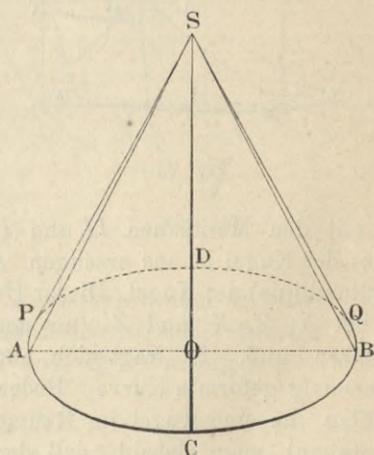


Fig. 30b.

die Punkte P und Q bestimmt werden.*) Hier beim Kegel hat also die Wahl des $\omega = 90^\circ$, abgesehen von der symmetrischen Gestaltung, keinen besonderen Nutzen, wie es beim Zylinder der Fall war.

*) Eine scharfe Tangentenkonstruktion ist überflüssig.

Aufgabe 29. Ein schiefer Kegel soll konstruiert und in halber Höhe abgestumpft werden ($\frac{1}{3}$, 20°).

Die Lösung lehnt sich ganz an Fig. 27 an. Hier wie dort wird zuerst die Grundfläche in bekannter Weise (vgl. Fig. 14a) festgelegt; auch soll die Achse OS einen Winkel von 45° gegen OB bilden. Da nun der Achsenschnitt SAB in die Bildebene gelegt ist, so erscheint OS unter natürlichen Verhältnissen (Fig. 31). Die Randlinien SA und SB werden durch scharfes Anlegen des Lineales erhalten.*) — Wenn der Abstumpfungsschnitt in halber Höhe geführt werden soll, dann sind A' und B' die Mitten von SA und SB . Somit ist $A'B'$ der Durchmesser des Schnittkreises, dessen Bild jetzt gezeichnet werden kann.

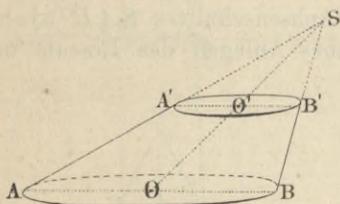


Fig. 31.

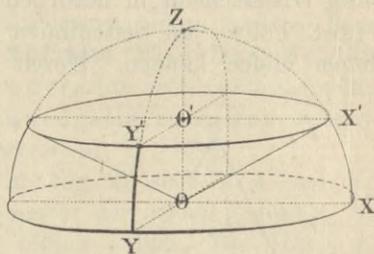


Fig. 32.

ein mit den Meridianen *II* und *III* recht wohl den Eindruck eines Vollbildes der Kugel in uns erzeugen. Allerdings fehlt dabei der eigentliche Umriß (Randlinie) der Kugel. Dieser Umriß ist ohne Zweifel eine krumme Linie, die bei X , Z , X' und Z' (an den „Henkeln“) die Bilder der Großkreise berühren muß. Es fragt sich nun, ist dieser Umriß ein Kreis oder eine andersartig geformte Kurve. Bedenkt man, daß alle parallelen Projektionsstrahlen, die eine Kugel im Raume umhüllen, einen Zylinder bilden (38a), so erkennt man alsbald, daß der Ort aller Berührungspunkte zwischen der Kugel und diesem Projektionszylinder ein Großkreis der Kugel ist und zwar derjenige, der senkrecht zur Strahlung liegt. Der Umriß der Kugel ist daher einfach die schräge Projektion dieses Kreises auf die

*) Bei der kleinen Figur und $\omega = 20^\circ$ verschmelzen Randlinien, und Seitenlinien des Achsenschnittes für das Auge ineinander und erscheinen daher nicht von einander getrennt.

Bildebene, also jedenfalls eine elliptische Figur.²¹⁾ Wir müßten demnach durch die vier Scheitelpunkte bei $XZX'Z'$ eine solche Figur legen. Die bisherigen, elementaren Hilfsmittel erlauben uns noch nicht, dieser Aufgabe näher zu treten. Wir begnügen uns deswegen vorläufig bei allen Konstruktionen von Kugeln und Kugelteilen mit der Darstellung von Kreisen (Haupt- oder Nebenkreisen) und denken uns die Umrißellipse hinzu. Weiter unten (§ 6, Aufgabe 48a) werden wir die Mittel gewinnen, auch diese zu konstruieren.

Aufgabe 30. Man soll eine Kugelschicht schräg abbilden, deren Bodenfläche der Äquator und deren Deckfläche ein Parallelkreis im Abstände des halben Radius ist ($\frac{1}{3}, 30^\circ$).

Als Basis der Konstruktion dient die Festlegung des Äquators (I vergl. Fig. 20). Fügt man hierzu noch die Meridiane II und III , so erübrigt nur, durch die Mitte O' von OZ den Parallelkreis zu ziehen (Fig. 32). Man zieht nun $O'X'$ parallel OX und hat dadurch denjenigen Halbmesser der Bildellipse, der gleich dem Halbmesser des Parallelkreises ist. Die Parallele $O'Y'$ zu OY gibt sodann das Bild des darauf senkrecht stehenden Halbmessers, das $\frac{1}{3}$ der natürlichen Größe sein muß. Aus beiden Strecken ist die Ellipse konstruierbar. — Die Figur zeigt auch, wie man einen Kugelabschnitt $X'Y'Z$ oder einen Kugelsektor

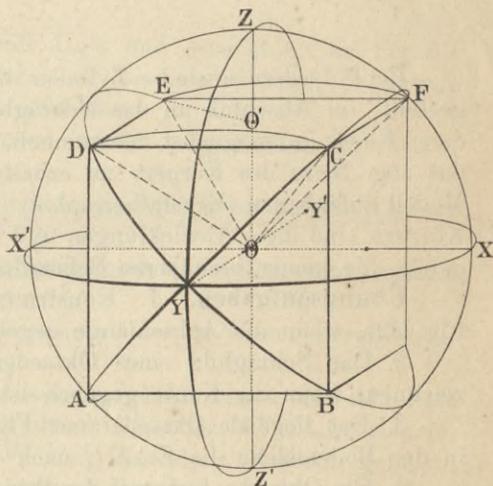


Fig. 33.

$OX'Y'$ konstruieren kann. Bei dem Kugelsektor sind in dieser Figur nur die Randlinien, nicht die Linien des Achsenschnittes gezogen.

Aufgabe 31. Zu einem Würfel soll die Umkugel gezeichnet werden ($\frac{1}{3}, 30^\circ$).

Gegeben ist (Fig. 33) der Würfel $ABCD \dots$ (vergl. Fig. 4a). Die Umkugel hat ihren Mittelpunkt in O und geht durch die acht Ecken der Würfelmitte. Da wir den Umriß der Kugel selbst noch nicht darstellen können, so begnügen wir uns mit einer Anzahl von Großkreisen, durch deren Verlauf die Kugel markiert wird. Zuerst legen wir den Kreis $XZX'Z'$ fest, der in der ersten Hauptlage steht. Sein Halbmesser ist gleich der halben Körperdiagonale: $OC = OD = OE = OF = OX$ usw. Man hat diese Strecke, die in dem genannten Kreise unverzerrt auftritt, in Nebenkonstruktion darzustellen. Sie erscheint z. B. als Hypotenuse in dem rechtwinkligen

Dreiecke $OO'E$, worin OO' die halbe Würfelkante und $O'E$ die halbe Flächendiagonale angibt. — Die Festlegung des Großkreises $XY'X'Y$ (in zweiter Hauptlage) ist nunmehr einfach, da XX' unmittelbar gegeben ist und $YY' = \frac{1}{3}XX'$ unter 30° Neigung angetragen werden kann. Ebenso einfach ist die Konstruktion des Großkreises $ZZY'Z'$ in der dritten Hauptlage. Die Bestimmung der schiefliegenden Kreise $YDEB$ und $YCFA$ geschieht ganz analog der Fig. 21, da die (hier nicht gezeichneten) Durchmesser parallel zur Bildebene bekannt sind. Wir haben also, abgesehen von Kreis $OXZX'Z'$, ein Kreisbüschel mit der Achse YOY' als Ersatz für die Kugel.*) Ebenso gut hätte man ein solches Büschel durch OZ oder OX als Achse legen können. Für den letzteren Fall sind nur die Bogen CD und EF angedeutet, um den Kugelsextanten $OCDEF$ hervorzuheben.²²⁾

Bei Polyedern sowie bei Zylinder und Kegel wird nicht selten die Aufgabe gestellt, im Anschluß an das Schrägbild die Oberfläche des Körpers auf einer Ebene in möglichst zusammenhängender Figur auszubreiten, um so das sog. Netz des Körpers zu erhalten, das gewöhnlich dazu dient, ein Modell aufzubauen (Krystallographie). Bei den hier auftretenden einfachen Körpern sind diese Abwicklungen und Netzkonstruktionen sehr leichte Aufgaben, die keiner besonderen Behandlung bedürfen (vergl. Übungsaufg. 22).

Übungsaufgaben. 1. Konstruiere ein Oktaeder in der Stellung Fig. 22a, wenn die Achsenlänge gegeben ist.

2. Das Schrägbild eines Oktaeders in der Stellung Fig. 22b ist zu zeichnen, wenn die Kante gegeben ist.

3. Das liegende Oktaeder aus Fig. 23 soll so gezeichnet werden, daß in der Bodenfläche die Ecke C nach vorn liegt.

4. Ein Oktaeder liege mit der Basisfläche $ABCD$ in der dritten Hauptlage, doch so, daß AD lotrecht der Bildebene stehe; man soll das Schrägbild zeichnen.

5. Das Tetraeder (Fig. 24) stehe so auf der Spitze, daß die Höhe vertikale Lage hat und A nach vorn liegt; das Schrägbild wird gesucht.

6. Ein Würfel in der Lage der Fig. 25 zu konstruieren, wenn der Neigungswinkel bei B statt 30° die Größe 60° erhält und wenn die Ansicht von vorn oben oder von links oben genommen werden soll.

7. Ein Würfel in Diagonalstellung (Fig. 26) ist von vorn oben und von links oben zu konstruieren.

8. Ein sechsseitiger, regulärer Pyramidenstumpf ist zu zeichnen, wenn die zugehörige Voll-Pyramide in $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ der Höhe abgestumpft ist (Fig. 27).

*) Die Fig. 33 ist so aufzufassen, als ob der Würfel vollkommen undurchsichtig wäre und die Kreise eine Ringkugel (*sphaera armillaris*) bildeten.

9. Ein fünfseitiger, regulärer Pyramidenstumpf zu zeichnen entsprechend Hauptaufgabe 25 und voriger Übungsaufgabe.

10. Einen Obelisk (vergl. Fig. 28) in anderer Ansicht (von links oben) zu konstruieren, für den Fall, daß er auf vierseitiger Platte steht.

11. Das Schrägbild eines zylindrischen Ringes in der ersten und dritten Hauptlage zu konstruieren (vergl. Fig. 29); bilde hieraus eine Kette aus mehreren Gliedern.

12. Ein zylindrisches Rohr ist in verschiedenen Lagen in schräger Parallelperspektive zu zeichnen.

13. Schiefe Kreiszyylinder sind in verschiedenen Lagen und Ansichten zu konstruieren.

14. Gerade Kegel sollen bei anderer Lage und Ansicht als Fig. 30 in Schrägbildern gezeichnet werden.

15. Desgl. schiefe Kegel in anderer Lage und Ansicht als bei Fig. 31.

16. Gerade und schiefe Zylinder sind zu konstruieren, die gerade bezw. schiefe regelmäßige Prismen umschließen.

17. Ebenso für schiefe Kegel und schiefe, regelmäßige Pyramiden (vergl. Lösung zu Fig. 27 und 31).

18. Eine Kugelschicht ist zu zeichnen, die beiderseits vom Äquator gelagert ist.

19. Eine Kugelschicht soll konstruiert werden, die über dem Äquator in gegebenem Abstände von ihm liegt.

20. Ein Kugelsektor ist zu konstruieren, der zu einem Parallelkreis in 45° Breite gehört.

21. Die Umkugel eines Würfels soll gezeichnet werden für den Fall, daß die Schar der Großkreise (Fig. 33) durch OX oder OZ als Achse geht.

22. Konstruiere die Netze von Würfel, Oktaeder, Tetraeder, geradem Prisma und Zylinder, gerader Pyramide und Kegel.

§ 5. Schrägbilder aus dem Systeme der Stereometrie.

Die in § 1—4 entwickelten Lehren und Übungen geben die Mittel an die Hand, die meisten Figuren und Konstruktionen aus dem Systeme der elementaren Stereometrie in schräger Parallelprojektion (Perspektive) auszuführen. Wie dies im einzelnen geschieht, wird hier nur an einigen Beispielen gelehrt werden.²³⁾

Aufgabe 32. Man soll als Schrägbild die Beweisfigur zu folgendem Lehrsatz zeichnen: Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie untereinander parallel (34a) ($\frac{1}{3}$, 60°).

Wir benutzen die Ansicht von links oben und legen die drei vorausgesetzten Ebenen, von denen \tilde{I} und \tilde{II} parallel \tilde{III} sein sollen, als Quadratblätter in die zweite Hauptlage (Fig. 34). Dann ziehen wir eine Gerade PQ , die alle drei Ebenen durchsticht; diese Gerade verlegen wir der Einfachheit

halber in die Bildebene. Durch PQ legen wir nunmehr zwei beliebige Ebenen IV und V . Der Einfachheit halber wählen wir als Ebene V die Bildebene selbst und als Ebene IV eine hierzu senkrechte. Letztere erscheint dann als Parallelogramm zu PQ als Mittellinie und erstere als Rechteck. Die hierdurch entstehenden Schnittlinien AA' und LL' sind dann parallel CC' und NN' ; ebenso sind BB' und MM' parallel CC' bzw. NN' . Hieraus folgt, daß AA' und LL' auch parallel BB' und MM' sind, also daß auch \tilde{I} parallel \tilde{II} .

Aufgabe 33. Die Beweisfigur (in schräger Projektion) ist zu folgendem Lehrsatz zu konstruieren: Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist das Lot die

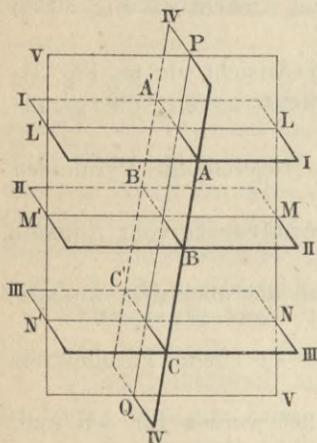


Fig. 34.

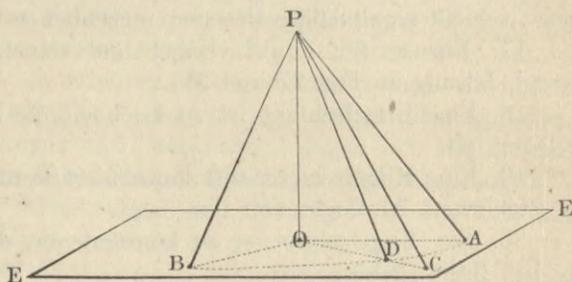


Fig. 35.

kürzeste; alle diejenigen sind gleich, die gleichen Fußabstand vom Lote haben; sie sind um so größer, je größer ihr Fußabstand ist ($\frac{1}{3}, 30^\circ$).

Die Grundebene E des Lehrsatzes ist leicht festgelegt, ebenso das Lot von P nach \tilde{E} , wenn \tilde{E} in zweiter Hauptlage genommen wird (Fig. 35). Man wähle nun einen beliebigen Punkt A^* auf \tilde{E} und ziehe PA ; dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck POA der erste Teil der Behauptung. — Man wähle sodann einen zweiten Punkt B auf \tilde{E} , sodaß $OB = OA$. Zu dem Zwecke zieht man einen beliebigen Strahl \tilde{OB} und beschreibt um O in \tilde{E} einen Kreis mit OA . Das Bild dieses Kreises ist eine Ellipse um O , die durch A geht. Die Konstruktion dieser Ellipse (für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 30^\circ$) ist bekannt; AB sei der betreffende Bogen. Durch Vergleich der Dreiecke POA und POB folgt dann der zweite Teil der Behauptung. — Zum Nachweis des dritten Teiles wählt man einen beliebigen Punkt C

*) Der Einfachheit halber so, daß OA parallel oder in der Bildebene liegt.

und zieht PC und OC ; ferner schneidet man auf OC durch den Kreisbogen AB ab die Strecke $OD = OA = OB$. Die Vergleichung der Dreiecke POD und POC liefert endlich den dritten Teil der Behauptung. — Zieht man den Kreis (Bildellipse) vollständig, so folgt der bekannte geometrische Ort für alle Punkte auf \widetilde{E} , die von P gleichen, gegebenen Abstand haben.

Aufgabe 34. Zwischen zwei windschiefen Geraden ist der kürzeste Abstand (das Lot) zu ziehen. (Im Schrägbild $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Da wir hier ein breiteres horizontales Konstruktionsfeld brauchen, so ist $q = \frac{1}{2}$ und $\omega = 45^\circ$ gewählt. Gegeben sind die windschiefen Geraden AB und CD . Angenommen QQ' sei die gesuchte Strecke (Fig. 36); man legt zunächst AB in die Bildebene und dreht (bei gleichbleibender gegenseitiger Lage) so lange, bis CD in wagrechte Lage gelangt. Hierauf legt man durch CD die Parallelebene E zu AB (31) und zieht durch Q' die Parallele $A'B'$ zu AB . Wählt man nun einen beliebigen Punkt P auf AB und fällt das Lot auf \widetilde{E} , so muß das Lot einen bestimmten Punkt P' auf $A'B'$ treffen, und PP' ist parallel QQ' (19); somit ist $A'B'$ ein zweiter Ort für Q' in Ebene E .

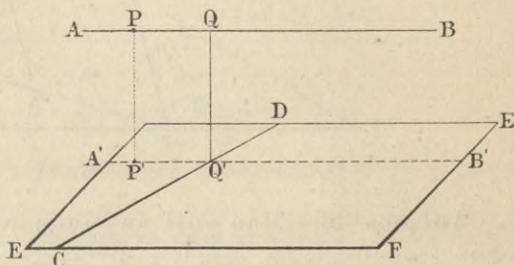


Fig. 36.

Auf diese Analyse gründet sich folgende Konstruktion: Ziehe durch einen beliebigen Punkt C von CD die Parallele EF zu AB und lege durch CF und CD die Ebene E . Fülle von einem beliebigen Punkte P auf AB das Lot auf \widetilde{E} bis P' *) und ziehe durch P' die Parallele zu AB bis zum Schnitte Q' mit CD . Legt man dann durch Q' die Parallele zu $P'P$ bis zum Schnitte Q mit AB , so ist QQ' der gesuchte Abstand.

Aufgabe 35. Man soll an einen Zylinder eine Berührungsebene legen ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 30^\circ$).

Analyse: Der Zylinder wird als schief vorausgesetzt (Fig. 37), seine Achse sei OO' ; hier sind nur die Umrißlinien gezeichnet ohne den Achsenschnitt der ersten Hauptlage. An die Seitenlinie AA' soll die Berührungsebene gelegt werden. Erweitert man die Bodenfläche des Zylinders zur Ebene E , so schneidet die Tangentenebene T die Ebene E in einer Geraden AT , die Tangente an den Grundkreis sein muß. Im Bilde

*) Das Fällen des Lotes von P auf \widetilde{E} ist eine unbestimmte Aufgabe, da P das Bild von unendlich vielen Punkten im Raum sein kann.

ist also AT die Tangente in A an die Ellipse, deren Konstruktion nach § 3 (Aufgabe 14) einfach ist. Durch AA' und AT aber ist die Berührungsebene bestimmt.

Konstruktion: Ziehe OAB und eine beliebige Parallelesehne CD , halbiere CD und lege durch O und die Mitte von CD den Durchmesser GF . Zieht man dann durch A die Parallele AT zu GF , so ist nur noch ein parallelogrammförmiges Ebenenstück TT' abzugrenzen, um die Berührungsebene klar vor Augen zu haben.

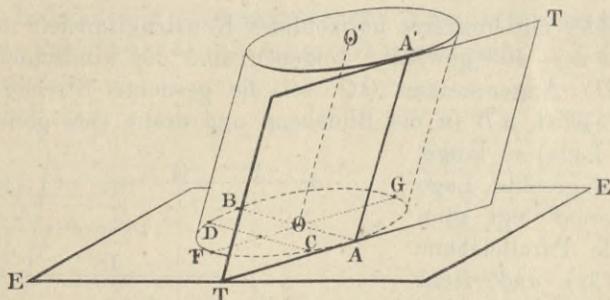


Fig. 37.

Aufgabe 36. Man soll an einen Kegel eine Tangentenebene legen ($\frac{1}{3}$, 60).

Analyse: Wie vorher wird die Bodenfläche zur Grundebene E erweitert. Auch hier sind am Kegel nur die Umrißlinien gezeichnet. Die gegebene Seitenlinie sei AS . Die Berührungsebene schneide E in AT . Da nun

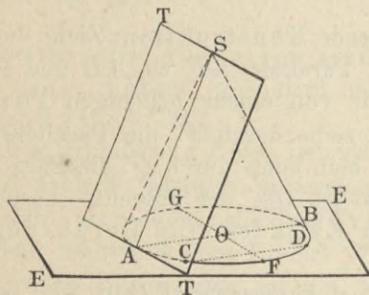


Fig. 38.

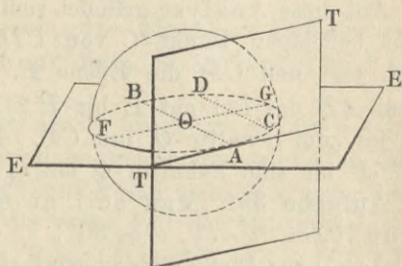


Fig. 39.

AT wiederum Tangente an den Grundkreis sein muß, so erledigt sich die Aufgabe wie vorher durch Konstruktion der Tangente in A an das elliptische Bild des Grundkreises.

Konstruktion: Ziehe den Durchmesser AB und zu AB eine parallele Sehne, halbiere letztere und ziehe GF . Die Parallele AT zu GF ist die gewünschte Tangente, die mit AS die Berührungsebene bestimmt.

Aufgabe 37. Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Kugel eine Tangentenebene legen ($\frac{1}{3}, 60^\circ$).

Analyse: Man lege den gegebenen Punkt A mit der Kugelmitte O in eine horizontale Ebene E , deren Schnittkreis mit der Kugel durch die Ellipse $ACG \dots$ abgebildet sei (Fig. 39). Von der Kugel ist außerdem nur der Großkreis erster Hauptlage gezeichnet. Die gesuchte Tangentenebene \tilde{T} schneidet die Ebene E in der Geraden AT , die eine Tangente an den Kreis ist. Somit ist die Ebene \tilde{T} durch AT und die weitere Bedingung bestimmt, daß sie bei der horizontalen Lage von OA vertikal stehen muß.

Konstruktion: Man lege den Schnittkreis $ACG \dots$ als Ellipse fest, ziehe AOB und die parallele Sehne DC hierzu. Durch O und die Mitte von DC führe man den konjugierten Durchmesser FG und ziehe durch A hierzu die Parallele AT . Zieht man endlich durch T (auf E) die Vertikale und schneidet man ein Parallelogrammstück hierzu ab, so erhält man das Bild der Berührungsebene.²⁴⁾

Aufgabe 38. Die Beweisfigur ist zu zeichnen zu dem Lehrsatz: Der Kubikinhalt eines Quaders wird gefunden, indem man die Längenzahlen dreier von einer Ecke ausgehender Kanten miteinander multipliziert ($\frac{1}{2}, 45^\circ$).

Als Maß diene ein Würfel mit der Kante m , dessen Bild leicht zu finden ist (Fig. 40). Man legt dieses Maß längs der Kante AB des Quaders an und findet, daß der Würfel fünfmal eingetragene werden kann. Da die Verzerrungszahlen bei Quader und Würfel gleich sind, so wiederholt sich die Zeichnung des Maßwürfels; hierdurch tritt zugleich eine Schwelle längs AB hervor, mit der man nun die weitere Ausmessung vornimmt. Sie läßt sich noch dreimal, also im ganzen viermal auf die Bodenfläche $ABCD$ legen. Man schneidet daher auf BC die auf die Hälfte verkürzte Kante viermal ab und zieht die nötigen Parallelen. Die weitere Ausmessung geschieht nun mit der entstandenen Schicht, die viermal fünf Kuben enthält. Man schneidet nun auf BB' das Längenmaß m ab und findet so, daß die Schicht im ganzen dreimal in dem Quader enthalten ist. Bei der Zeichnung sind nur noch durch Punkt 2 auf BB' die nötigen Parallelen zu ziehen, um sofort zu erkennen, daß der Inhalt $(5 \cdot 4) \cdot 3 = 60$ Kuben beträgt.

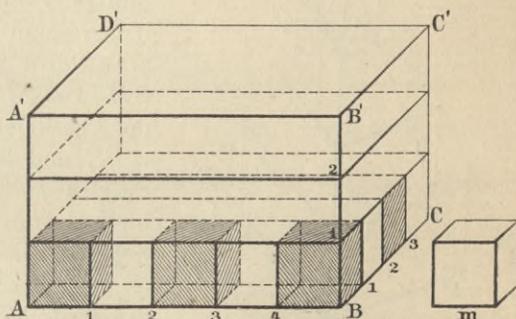


Fig. 40.

Aufgabe 39. Konstruiere die Beweisfigur zu dem Lehrsatz: Jede Pyramide kann als Grenze einer Summe von Prismen angesehen werden, deren Anzahl in unendlicher Zunahme und deren Höhen in unendlicher Abnahme begriffen sind.

Hier werde eine beliebige, dreieckige Grundfläche ABC mit der Spitze S vorausgesetzt (Fig. 41). Die Höhe sei SH . Diese werde in eine beliebige Anzahl (hier fünf) gleicher Teile zerlegt. Durch die Teilpunkte H', H'' usf. hat man nun Parallelschnitte zu legen. Zieht man AH und $A'H'$, so ist $A'H'$ die Schnittlinie der Ebene SAH mit dem ersten Parallelschnitt, somit $A'H'$ parallel AH (24). Entsprechendes gilt für A'' usf. Dadurch sind die Punkte A, A', A'' festgelegt und weiterhin auch B', C' usf. $A'B'$ und $A'C'$ ergeben nun mit SB und SC die Schnittpunkte P' und Q' , auf denen man weiter bauen kann bis zur Spitze. — Die Konstruktion verläuft also kurz so: Fünftel SH in $H', H'' \dots$. Ziehe durch H', H'' usf. die Parallelen zu HA bis zum Schnitte $A', A'' \dots$ und lege zunächst durch A' die Parallelen zu AB und AC , sowie durch B und C die Parallelen zu AA' bis zum Schnitte mit jenen in B' und C' . Alsdann ist das Prisma $ABC, A'B'C'$ das erste in der Reihe. Nun benutzt man die Schnittpunkte P' und Q' , um über der Grundfläche $A'P'Q'$ ein zweites Prisma zu errichten. So fährt man fort und sieht, daß zuletzt der oberste Teil der Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma ergänzt wird, während die

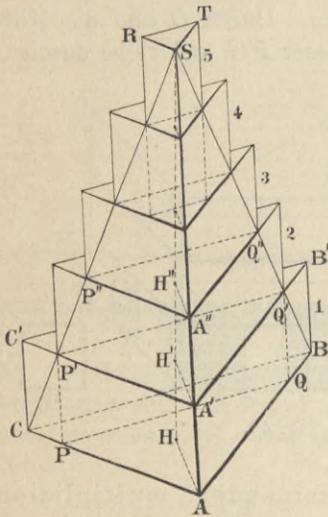


Fig. 41.

vier Pyramidenstümpfe zu dreiseitigen Prismen ergänzt erscheinen. Auf jeden Fall zeigt die Treppenfigur, daß die Summe der Prismen größer ist als die ganze Pyramide. Nun konstruiert man zu $A'P'Q'$, $A''P''Q''$ als Deckflächen diejenigen Prismen, die nach innen fallen. Hier ist zunächst nur $APQ, A'P'Q'$ konstruiert, indem man durch P' und Q' die Parallelen zu AA gezogen hat. Die übrigen Innenprismen sind, um die Figur nicht allzusehr zu belasten, weggelassen bis auf das letzte, das sich unterhalb des obersten Fünftels befindet. Die Summe dieser Innenprismen ist kleiner als die Pyramide. Nun erkennt man, daß Innenprisma 1 gleich dem Außenprisma 2, Innenprisma 2 gleich Außenprisma 3, Innenprisma 3 gleich Außenprisma 4 und endlich Innenprisma 4 gleich Außenprisma 5 ist. Somit ist die Summe der Innenprismen von der Summe der Außenprismen nur um das Prisma $ABC, A'B'C'$ verschieden. Der Grenzübergang bei einer unendlichen Teilung der Höhe SH liefert dann die Behauptung.

Aufgabe 40. Konstruiere die Beweisfigur des Lehrsatzes: Jede dreiseitige Pyramide läßt sich zu einem dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ergänzen, dessen Inhalt dreimal so groß ist. ($\frac{1}{2}$, 45°).

In Fig. 42 ist die beliebig entworfene Pyramide S, ABC vorausgesetzt. Die Ergänzung zum dreiseitigen Prisma läßt sich nun in dreierlei Weise vornehmen, indem man zieht

- Fig. 42a: Durch S die Parallelen zu AB und AC .
 „ 42b: „ S „ „ „ BA „ BC .
 „ 42c: „ S „ „ „ CA „ CB .

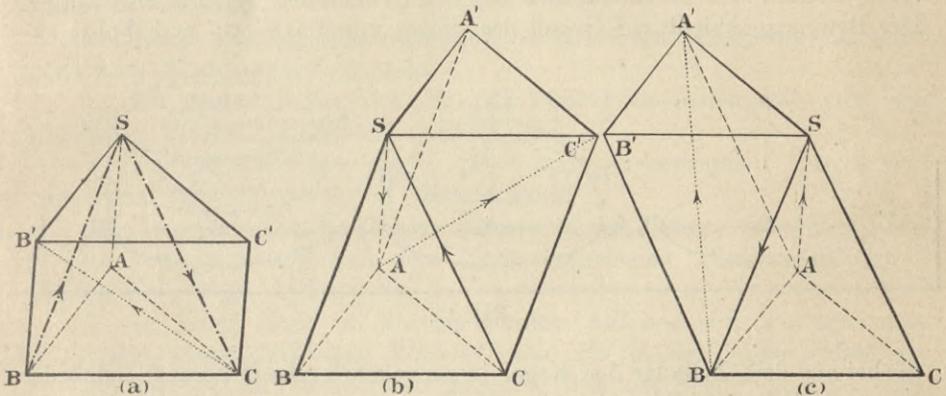


Fig. 42.

In allen Fällen ergibt die Zeichnung sofort das gesuchte Prisma. Man hat jetzt nur noch durch eine einzige gebrochene Hilfslinie die drei Teilpyramiden zu markieren. Es geschieht das am einfachsten, indem man den folgenden, leicht merkbaren Zickzackweg einschlägt:

- a) Von B nach S, C und B'
 b) „ C „ S, A „ C'
 c) „ A „ S, B „ A' .

Die beiden ersten Stücke der gebrochenen Linie sind bereits an der Pyramide vorhanden, das letzte läßt die Mittelpyramide, die sich in windschiefer Stellung befindet, hervortreten und zwar für die drei Fälle folgendermaßen:

- a) Untere Kante BC , obere Kante $B'S$
 b) „ „ CA , „ „ $C'S$
 c) „ „ AB , „ „ $A'S$.

Aufgabe 41. Die Beweisfiguren sind zu entwerfen für den Lehrsatz des Archimedes: Das Volumverhältnis von Kegel, Halbkugel und Zylinder mit gleicher Grundfläche und Höhe ist gleich $1:2:3$ ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 90^\circ$).

Die Verkürzung auf $\frac{1}{3}$ genügt, da in den Grundflächen kein breiter Raum zum Zeichnen nötig ist; die Neigung 90° ist erwünscht, um möglichst wenig Übergreifungen (Henkel) bei den elliptischen Bildern der Kreise zu haben. In Fig. 43 sind die drei Körper auf eine gemeinsame Grundebene gestellt. Am Kegel K ist nur der Umriß gezeichnet, ohne den Achsenschnitt $S_1A_1B_1$ hervorzuheben. Die Halbkugel H dagegen zeigt den Achsenschnitt $S_2A_2B_2$, ebenso der Zylinder Z den Achsenschnitt A_3B_3 , $A_3'B_3'$; bei letzterem decken sich die Randlinien mit den Seitenlinien des Achsenschnittes. Der Beweis geschieht auf Grund des Satzes von Cavalieri; man bohrt zu-

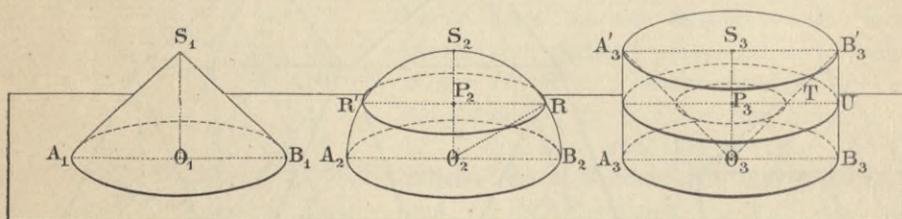


Fig. 43.

nächst aus dem Zylinder den Kegel in umgekehrter Lage heraus, sodaß der Napf $O_3A_3B_3$, $A_3'B_3'$ entsteht. Die Darstellung dieses Napfes ist sehr einfach, doch zeichnet man gerade hier am besten nur den Achsenschnitt $O_3A_3'B_3'$ des Kegels. Wenn man nun nachweisen kann, daß beliebige Querschnitte parallel der Grundebene in Halbkugel H und Napf N flächengleich sind, so ist die Volumgleichheit von \hat{H} und N festgestellt. Die Konstruktion des Parallelschnitts RR' in der beliebig gewählten Höhe $O_2P_2 = O_3P_3 = x$ hat keine Schwierigkeit, da RR' die natürliche Länge des Durchmessers des betreffenden Kreises angibt; man hat nur zu beachten, daß hier die Ellipse über den Achsenschnitt $S_2A_2B_2$ hinausgreift. Der Parallelschnitt bei dem Napfe N ist ein Kreisring, dessen Außenkreis kongruent den Grundkreisen des Zylinders ist. Der Innenkreis ist leicht festzulegen, weil P_3T der Halbmesser der betreffenden Figur in natürlicher Größe ist. Man beachte, daß die Breite des Ringes wegen der Perspektive verschieden ausfällt. Die Querschnitte Q_2 und Q_3 bei Halbkugel und Napf berechnen sich aus $Q_2 = (r^2 - x^2)\pi$ und $Q_3 = r^2\pi - x^2\pi$, denn $P_3T = O_3P_3$; hieraus folgt $H = N$, also $H = r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$. Somit $K:H:Z = \frac{1}{3}r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi : \frac{3}{3}r^3\pi = 1:2:3$.

Übungsaufgaben zu § 5 bietet das ganze übrige Gebiet der systematischen Stereometrie; hier sind nur noch einige besonders bemerkenswerte Fälle herausgegriffen.

Übungsaufgaben: 1. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die einer zweiten gegebenen Geraden parallel ist.

2. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche zwei gegebenen Geraden parallel ist.

3. Durch einen auf einer Geraden gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht zur Geraden zu legen.

4. Durch einen außerhalb einer Geraden gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht zur Geraden zu legen.

5. Von einem außerhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine Senkrechte auf die Ebene zu fallen.

6. Auf einer Ebene in einem gegebenen Punkt derselben eine Senkrechte zu errichten.

7. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

8. Den geometrischen Ort für alle Punkte zu finden, die von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt sind.

9. Den geometrischen Ort für alle Punkte zu bestimmen, die von drei gegebenen Punkten gleichweit entfernt sind.

10. In einer Ebene ist eine Gerade so zu ziehen, daß jeder ihrer Punkte von zwei außerhalb der Ebene gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist (vergl. Aufgabe 8).

11. In einer Ebene E ist eine Gerade AB beliebig gezogen; man soll durch einen beliebigen Punkt C von AB in der Ebene selbst das Lot auf AB ziehen. (Konstruiere zuerst in frontaler Ebene und gehe dann in andere Lagen über.)

Anmerkung. Bei der Analyse dieser Aufgaben bringe man die auftretenden Gebilde zunächst in möglichst einfache Lage. Bei einigen ist eine gewisse Unbestimmtheit in der Zeichnung nicht zu vermeiden.

§ 6. Schrägbilder von Körperschnitten.

Einfache Körperschnitte, namentlich Parallelschnitte, sind in den vorhergehenden Paragraphen bereits zahlreich in schiefer Parallelprojektion dargestellt worden. Die eingehendere Behandlung der Körperschnitte ergibt sich aus folgenden Beispielen, in denen namentlich auch schiefe Körperschnitte betrachtet werden.

Aufgabe 42. In einem Prismatoide soll der Mittelschnitt gezeichnet werden.

Unter Prismatoid (Fig. 44) wird ein Vielflächner (Polyeder) verstanden, der zu Grundflächen zwei beliebige, parallele Vielecke und zu Seitenflächen Dreiecke hat, deren jedes mit dem einen Vielecke eine Seite, mit dem anderen eine Ecke gemein hat. Das Prismatoid der Fig. 44 ist $5 + 4 = 9$ seitig. Der Mittelschnitt $LMN \dots$ ist daher ebenfalls 9-seitig. Da er in halber Höhe

geführt wird, so halbiert er auch die Seitenkanten. Somit beruht die Konstruktion lediglich auf der Halbierung dieser Kanten und der richtigen Verbindung. Zu beachten ist, daß bei L und N einspringende Keile auftreten. — Die Verzerrung des Bildes ist unbestimmt gelassen.

Aufgabe 43. Durch einen Würfel in Diagonalstellung ist der wagrechte Mittelschnitt zu legen ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

In Fig. 26 ist bereits das Schrägbild des Würfels entworfen. Durch die Mitte O soll ein Schnitt gelegt werden, der wagrecht verläuft, also senkrecht zu BE steht. Aus den Symmetrieverhältnissen am Würfel folgt, daß die im Zickzack verlaufenden Randkanten (Fig. 45) AG , GH , HF usw. in J , K , L usw. halbiert werden müssen, woraus sich die einfache Konstruktion von selbst ergibt.

Aufgabe 44. Man soll einen schiefen Schnitt durch einen Würfel legen, so daß sechs Kanten halbiert werden ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$).

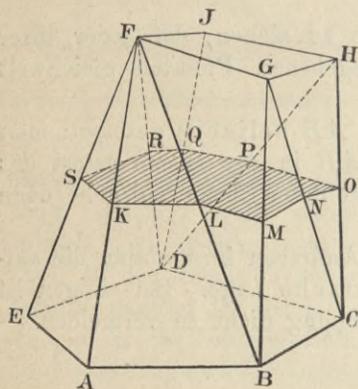


Fig. 44.

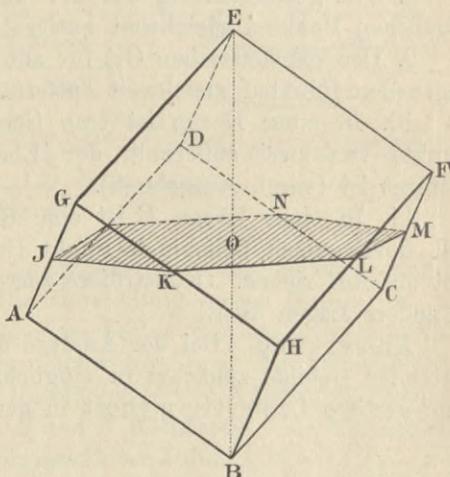


Fig. 45.

Der Würfel habe die Frontstellung (Fig. 46). Wenn sechs Kanten halbiert werden sollen, so können es nur die im Zickzack laufenden Kanten AB , BC , CC' , $C'D'$, $D'A'$ und $A'A$ sein, d. h. der verlangte Schnitt ist derselbe wie bei voriger Aufgabe, nur erscheint er schief, weil der Würfel eine andere Stellung hat. Hiernach ist die Konstruktion der Schnittfigur P , Q , R .. U ohne weiteres auszuführen.

Aufgabe 45. Durch ein regelmäßiges Oktaeder ist ein schiefer Schnitt zu legen, der einer Fläche parallel läuft und die anstoßenden Kanten halbiert ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$).

Das Oktaeder (Fig. 47) befinde sich in der sogenannten Achsenstellung (vergl. Fig. 22b). Durch die Mitte P von AB werde der Schnitt parallel

der Fläche ADE geführt. Dann muß PQ parallel AE sein (24); somit ist BE in Q halbiert usw. Auch hier läuft daher die Lösung auf eine Halbierung der Zickzackkanten AB, BE, EC, CD, DF und FA hinaus.

Aufgabe 46. Durch die Mitte eines geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas soll ein Schnitt gelegt werden, der unter 45° zur Grundfläche geneigt ist ($q = \frac{1}{3}, \omega = 20^\circ$).

Die Säule $ABC, \dots, A'B'C' \dots$ ist (nach Fig. 48) in der Mitte M der Achse OO' geschnitten. Die Strecken AA', OO' und DD' sollen in der Bildebene liegen. Unter der Voraussetzung, daß der Schnitt zur Bildebene senkrecht sei, erhält man zunächst als Schnittlinie mit der Bildebene selbst die

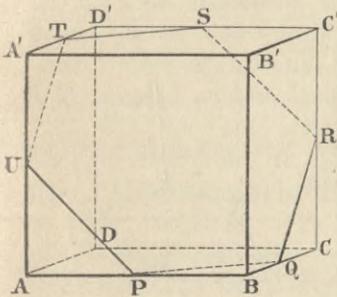


Fig. 46.

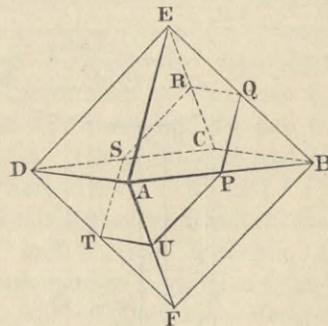


Fig. 47.

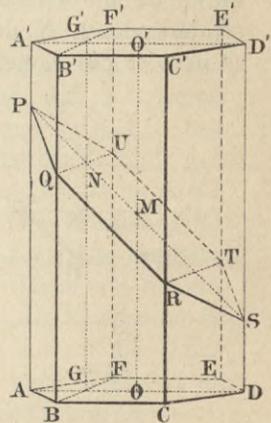


Fig. 48.

Strecke PS , die in natürlicher Länge erscheint. Von den übrigen Punkten der Schnittfigur fassen wir zunächst Q heraus. Er liegt auf der Strecke QU , die parallel BF , also auch senkrecht zur Bildebene (orthogonal) verläuft. Ihr Schnitt N mit PS liegt in der Bildebene und zugleich auf der Mittellinie GG' ; somit befindet sich QU auch in der Ebene $BFB'F'$. Zur Konstruktion von Q (bez. U) ist es also nur nötig, die Mittellinie GG' zu ziehen, durch N den Strahl unter einer Neigung von 20° zur Horizontalen*) zu legen bis zum Schnitt Q und U mit BB' und FF' . Ganz entsprechend verfährt man bei R und T ; hier ist in der Figur die Mittellinie weggelassen.

Aufgabe 47. Durch die Achsenmitte einer geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide ist ein Schnitt unter einer Neigung von 45° zur Grundebene zu legen und als Schrägbild zu zeichnen ($q = \frac{1}{3}, \omega = 20^\circ$).

Die Pyramide $S, ABC \dots$ werde so gestellt (Fig. 49), daß der Achsen-

*) Diese ist hier nicht gezeichnet; auch später werden die Hilfshorizontalen nur ausnahmsweise eingetragen.

schnitt SAD in die Bildebene fällt; der Schnitt gehe durch M und stehe auf der Bildebene senkrecht. Dann sind die Punkte P und T der Schnittfigur festgelegt durch SA , SD und durch die Gerade in M unter 45° zur Geraden AD . Von den übrigen Punkten greifen wir zunächst R heraus. Er liegt in der Dreiecksebene SCE und zwar auf dem Schenkel SC des Dreiecks sowie auf dem Strahle, der durch N , dem Schnitt zwischen PT und der Seitenhalbierenden SG , unter 20° Neigung zur Horizontalen gezogen wird; denn RN steht auch hier senkrecht zur Bildebene. Für Q und die übrigen Punkte sind die Bestimmungsorter ebenso leicht zu finden. — Man zieht daher in dem Dreiecke SCE die Seitenhalbierende SG , legt durch M die Gerade unter 45° bis zum Schnitte N mit SG und konstruiert durch N den Strahl unter 20° Neigung zur Horizontalen. Für Q usf. ist die Konstruktion analog.

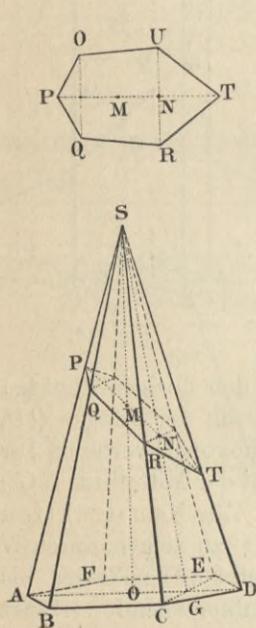


Fig. 49.

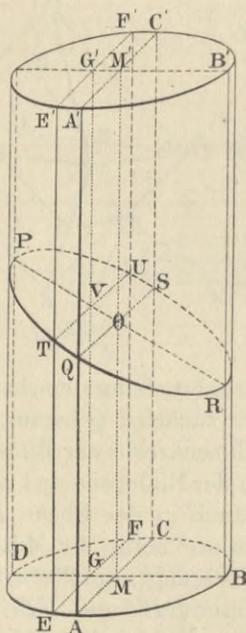
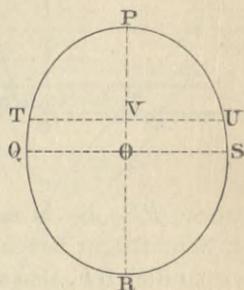


Fig. 50.



Man kann sich auch die Aufgabe stellen, die Schnittfigur in wahrer Gestalt darzustellen. Da die Figur den Durchmesser PT in wahrer Größe darbietet, auf dem die Punkte M , N usf. bestimmt sind, so braucht man bloß in N usf. auf PT (siehe Nebenfigur) das Lot zu errichten und auf diesem die Strecke NR usf. aus der Hauptfigur in dreifacher Größe (entsprechend $q = \frac{1}{3}$) beiderseits abzutragen. — Ebenso einfach ist es, die Pyramide abzuwickeln, d. h. das Netz mit der Schnittfigur darzustellen.

Aufgabe 48. Man soll durch einen geraden Zylinder einen schiefen Schnitt legen und die Schnittfigur in wahrer Größe darstellen ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Durch die Achsenmitte O des geraden Zylinders der Fig. 50 (vergl. Fig. 19a) werde ein schiefer Schnitt so gelegt, daß er unter 30° zur Grundebene geneigt sei. Zugleich sei die Schnittebene senkrecht zur Bildebene. Der Achsenschnitt BD , $B'D'$ liegt also in der Bildebene. Die Schnittebene erzeugt mit diesem Achsenschnitt die Schnittlinie PR , die in natürlichen Verhältnissen erscheint; P und R sind daher zwei Punkte der Schnittlinie. Um andere Punkte festzulegen, bedient man sich der Methode der Längsschnitte, die bereits in den vorhergehenden Aufgaben zur Anwendung gelangte. Legt man zuerst den Achsenschnitt AC , $A'C'$ senkrecht zur Bildebene, so liegen auf dessen Seitenlinien AA' und CC' zwei Punkte Q und S der Schnittfigur, die weiterhin dadurch bestimmt sind, daß die Strecke QS auf der Bildebene senkrecht steht (21). Somit sind Q und S festgelegt durch den Strahl in O unter 45° zur Horizontalen. Will man einen beliebigen Punkt T bestimmen, so legt man einen Längsschnitt EF , $E'F'$ parallel zu dem letzten Achsenschnitt, der den frontalen Achsenschnitt BD , $B'D'$ in GG' schneidet. Die Punkte T und U haben nun zunächst als geometrischen Ort die Seitenlinien EE' und FF' , sodann die Schnittlinie TU des Längsschnittes mit der schiefen Schnittebene. Da V bestimmt ist, so lassen sich nun auch T und U leicht festlegen. In dieser Weise findet man durch fortgesetzte Längsschnitte parallel AC , $A'C'$ nach P und R hin punktweise die Schnittfigur, die offenbar eine stetig gekrümmte Linie ist. — Um sie in natürlichen Verhältnissen darzustellen, ist zu beachten, daß bereits PR in wahrer Größe aus der Figur entnommen werden kann. Errichtet man nun in O , V und den anderen gewählten Punkten auf PR (Nebenfigur) die Lote und schneidet man die doppelten Längen von OQ und VT (wegen $q = \frac{1}{2}$) ab, so erhält man eine Figur, die trotz ihrer Symmetrie zu PR und QS keinesfalls ein Kreis sein kann, denn $PR > QS$; sie hat Ähnlichkeit mit einer Ellipse, deren Hauptachsen PR und QS sind. Um die Natur dieser krummen Linien zu prüfen, bedarf es einer besonderen Untersuchung.*)

In Fig. 51,**) die eine vergrößerte Kopie der Fig. 50 unter Weglassung des Nebensächlichen ist, ersehen wir, daß AB die steilste Strecke durch O ist, die sogenannte Falllinie, während CD eine Horizontale durch O darstellt, die zugleich senkrecht auf AB steht und die Streichlinie von O heißt. Nun sieht man, daß $CD = C'D'$. Dagegen ist $AB > A'B'$. Für den Neigungswinkel α der Schnitt-

*) Eine Abwicklung der Zylinderfläche nebst der Schnittlinie ist ohne Schwierigkeit.

***) Es empfiehlt sich, die Figur zunächst ohne die Hilfskugeln M_1 und M_2 zu zeichnen.

ebene zur Grundebene (hier 30°) ist das Verhältnis $AB:A'B' = 1:\cos\alpha$. Ferner haben alle Strecken PQ , RS usw., welche parallel CD verlaufen, also selbst wieder Streichlinien sind, entsprechende, gleichgroße Sehnen $P'Q'$, $R'S'$ usw. im Grundkreise O' , die senkrecht darunter liegen. Zieht man dagegen in der Schnittfigur die Parallelen PR , QS usw. zu AB , so

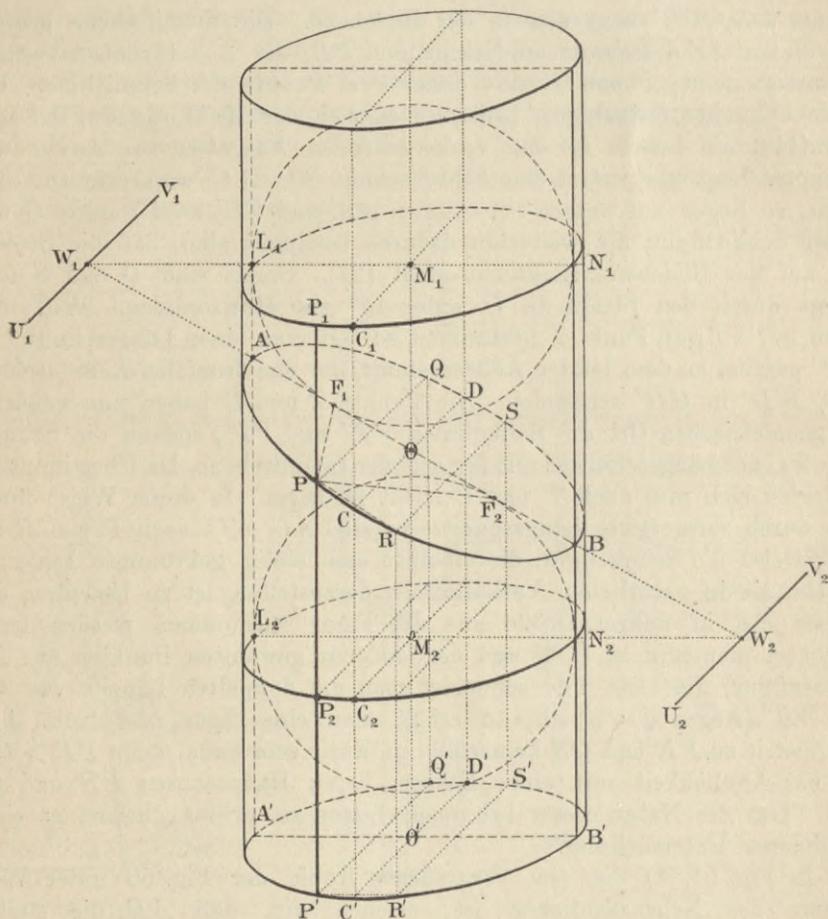


Fig. 51.

erkennt man, daß diese Falllinien dasselbe Verhältnis zu den senkrecht darunter liegenden Kreissehnen $P'R'$, $Q'S'$ usw. haben wie für AB und $A'B'$. Diese Betrachtung läßt sich für alle Punkte der Schnittlinie und der zugehörigen Streich- und Falllinien durchführen. Der Vergleich mit dem Grundkreise zeigt daher, daß die fragliche Schnittlinie in der Streichlinie CD mit dem Durchmesser des Grundkreises übereinstimmt, daß dagegen alle auf

BC senkrecht stehenden Falllinien (Sehnen bez. Halbsehnen) nach einem bestimmten Verhältnis (hier $1 : \cos \alpha = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$) vergrößert sind. Das heißt aber nichts anderes als: Die Schnittfigur erscheint nicht nur als Ellipse, sondern ist selbst eine Ellipse²⁵⁾ mit dem Achsenverhältnis $AB : CD = 1 : \cos \alpha$ (vergl. Aufgabe 17, Fig. 18b).

Weiterhin zeigt uns die Figur wegen des Parallelismus der Strecken $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$, $P'P$, $R'R$ usw., daß die Schnittfigur $ABCD$ aufzufassen ist als schräge Parallelprojektion eines Kreises ($A'B'C'D'$) auf die Schnittebene als Bildtafel; hierbei steht die Strahlungsrichtung senkrecht auf der Kreisebene. Wir haben hiermit festgestellt, daß das Schrägbild eines Kreises in der zweiten und dritten Hauptlage sowie in dem eben erläuterten Falle stets eine Ellipse ist. — Denkt man sich den Schnitt $ABCD$ so weit gedreht, daß er ein Parallelschnitt wird, so geht er in einen Kreis über; der Kreis $A'B'C'D'$ befindet sich dann zu $ABCD$ als Bildebene in der ersten Hauptlage und hat wiederum einen Kreis als Bild. In diesem Falle geht die schräge Parallelprojektion, weil der Zylinder gerade ist, in eine senkrechte über, eine Projektionsart, die wir als orthogonale oder kurz als Normalprojektion bezeichnen wollen.

Faßt man die Grundebene als Bildtafel auf, so ist offenbar der Kreis $A'B'C'D'$ anzusehen als Parallelprojektion der Ellipse $ABCD$ auf die Grundebene, und zwar handelt es sich um eine Normalprojektion. Daher ist der Schluß erlaubt: Die Normalprojektion einer Ellipse kann ein Kreis sein. — Denkt man sich aber statt der Grundebene irgend eine andere Ebene parallel oder schief zu $ABCD$ und projiziert man hierauf die Ellipse $ABCD$ parallel OO' , so erkennt man überall: Die schräge Parallelprojektion einer Ellipse ist wieder eine Ellipse (im allgemeinen von anderem Achsenverhältnis).*)

Nun ist noch die Frage zu erörtern, welche Gestalt die schräge Parallelprojektion eines Kreises in allgemeiner Lage und bei beliebiger Richtung der Projektionsstrahlen hat. Offenbar bilden die Projektionsstrahlen in diesem allgemeinsten Falle um den Kreis einen schiefen Zylinder. Alle Schnitte parallel zum Kreise sind wiederum Kreise. Die schiefen Schnitte dagegen, die als Schrägbilder in allgemeinsten Form aufzufassen sind, erscheinen analog der obigen Betrachtung als verzerrte Kreise, d. h. als Ellipsen. Es läßt sich nämlich ohne Schwierigkeit nachweisen, daß auch hier Streich- und Falllinien auftreten. Die ersteren bleiben in ihrer Länge unverändert, und die Verzerrung der letzteren ist konstant.

Schließlich kann man aus Fig. 51 noch eine andere wichtige Eigenschaft der Ellipse ablesen.***) Denkt man sich nämlich von oben her

*) Der Zylinder ist gleichzeitig gerader Kreiszyylinder in bezug auf $A'B'C'D'$ und schiefer elliptischer Zylinder in bezug auf $ABCD$.

**) Erst jetzt ist es empfehlenswert, die Kugeln M_1 und M_2 mit ihrem

eine Berührungskugel M_1 des Zylinders so weit eingeschoben, bis sie die schiefe Schnittebene in F_1 berührt, so ist klar, daß der Achsenschnitt $L_1 M_1 N_1 F_1$ der Kugel zugleich Berührungskreis in F_1 an AB , in L_1 an AA' und in N_1 an BB' sein muß. Entsprechendes gilt für die Berührungskugel M_2 , die von unten her gegen die Schnittebene geschoben wird. Die Konstruktion dieser Kugeln oder vielmehr ihrer wichtigsten Großkreise ergibt sich aus folgender Überlegung. M_1 liegt auf der Zylinderachse OO' und auf den Halbierenden der Winkel $L_1 AB$ bez. $N_1 BA$. Der Großkreis in der ersten Hauptlage erscheint in natürlichen Verhältnissen. Nötig ist dann nur noch ein Großkreis in der zweiten Hauptlage. Ein solcher ist aber der Berührungskreis zwischen Kugel und Zylinder, der genau so wie $A'B'C'D'$ in der Figur erscheint. Für die untere Kugel hat man ganz ähnliche Bestimmungen.

Die beiden ausgezeichneten Punkte F_1 und F_2 bringen wir nun mit den Punkten der Schnittfigur in Beziehung. Man sieht ohne weiteres, daß $AF_1 = AL_1$ und $AF_2 = AL_2$ (38). Durch Addition ergibt sich $AF_1 + AF_2 = AL_1 + AL_2 = L_1 L_2 = N_1 N_2$. Die Strecken $L_1 L_2$ bez. $N_1 N_2$ sind aber gleich AB , wie leicht aus dem Rechteck $L_1 N_1 L_2 N_2$ mit der Querlinie AB zu ersehen ist. Bezeichnet man die große Achse der Ellipse AB mit $2a$, so ist $AF_1 + AF_2 = 2a$, d. h. für A ist die Abstandssumme von F_1 und F_2 konstant. Für B läßt sich leicht dasselbe erweisen. Wir greifen nun noch einen beliebigen Punkt P heraus und prüfen ihn in bezug auf seine Abstände von F_1 und F_2 . Es ist $PF_1 = PP_1$ und $PF_2 = PP_2$ (39), somit $PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1 P_2 = L_1 L_2 = N_1 N_2 = 2a$. Diese Eigenschaft gilt demnach für einen beliebigen Punkt, also auch für alle. Nunmehr erscheint uns die Ellipse als der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstandssumme von zwei gegebenen, festen Punkten konstant ist.²⁶⁾ Diese Punkte heißen Brennpunkte.*)

Nunmehr sind wir auch in den Stand gesetzt, die früher zurückgestellte Aufgabe (vergl. § 4, S. 27) zu lösen:

Aufgabe 49. Durch einen geraden Kegel ist ein schiefer Schnitt zu legen und die Schnittfigur in wahren Verhältnissen zu zeichnen ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Durch einen beliebig gewählten Punkt A' des in der Bildebene liegenden Achsenschnittes SAB (Fig. 52) werde ein Schnitt senkrecht zur Bildebene unter 30° Neigung zur Grundebene gelegt. Die Schnittgerade

Beiwerk einzuzeichnen, oder noch besser, man paust die Figur unter Weglassung alles Unnötigen, damit sie nicht überlastet erscheint. — Die Anwendung der Berührungskugeln verdankt man Dandelin.

*) Bringt man die Ellipsebene mit den Ebenen der Berührungskreise zum Schnitte in $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ (in Fig. 51 nur angedeutet), so läßt sich erweisen, daß jede dieser Geraden Direktrix oder Leitlinie zur Ellipse ist.

$A'B'$ mit dem Achsenschnitt erscheint unverkürzt. Ebenso treten uns die Punkte O' und R' in natürlicher Lage auf $A'B'$ als Schnitte der Strahlen SO und SR entgegen. Zur weiteren Punktbestimmung der krummen Schnittlinie bedienen wir uns wieder der Längsschnitte, die durch SO , SR und andere Strahlen der Bildebene senkrecht zur letzteren gelegt werden; hier sind es die Dreiecke SCD , SPQ usf. Diese treffen die Schnittebene in $C'D'$ und $P'Q'$, die ihrerseits wieder auf der Bildebene senkrecht stehen und daher unter 45° zur Horizontalen geneigt erscheinen. Man hat für C' und P' usf. außerdem noch die Seitenlinien SC und SP usf. als Örter. Die Konstruktion ergibt sich hieraus unmittelbar, nur wird man mehr Punkte als in Fig. 52 festlegen. — Um die Schnittlinie in wahrer Gestalt zu haben, beachte man wie beim Zylinder, daß $A'B'$ wiederum in natürlicher Größe aus der Figur entnommen werden kann. Die Lote $C'D'$ und $P'Q'$ in O' und R' müssen dagegen in doppelter Größe (wegen $q = \frac{1}{2}$) in die Nebenfigur übernommen werden. Über die Natur der Schnittlinie läßt sich ohne weiteres nichts sagen. Wir benutzen deshalb zur näheren Prüfung die Berührungskugeln des Dandelin entsprechend dem Zylinder.

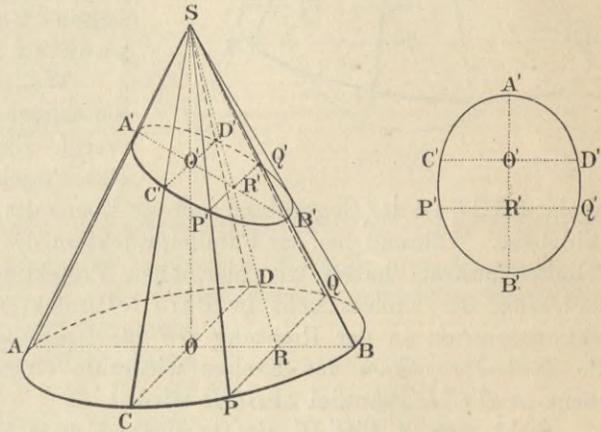


Fig. 52.

Legt man (Fig. 53, eine genaue Nachbildung von Fig. 52 unter Weglassung des Unwesentlichen) die Berührungskugeln M_1 und M_2 des Kegels so ein, daß zugleich die Schnittebene in F_1 und F_2 berührt wird, so lassen sich weitere Eigenschaften der Schnittlinie auffinden. Als Örter für M_1 und M_2 hat man zunächst die Achse SO und dann, wie beim Zylinder, die Winkelhalbierenden bei A' und B' . Die Berührungskreise zwischen Kegel und Kugel $L_1P_1N_1$ und $L_2P_2N_2$ sind leicht zu konstruieren, nur enthält ihre Ebene diesmal nicht M_1 und M_2 wie beim Zylinder. — Nun läßt sich sofort erkennen, daß $A'F_1 = A'L_1$ und $A'F_2 = A'L_2$ (38). Daraus folgt durch Addition: $A'F_1 + A'F_2 = A'L_1 + A'L_2 = L_1L_2 = P_1P_2 = N_1N_2 = A'B'$. Die Gleichheit mit $A'B'$ geht insbesondere daraus hervor, daß in dem Dreiecke $SA'B'$ die Großkreise erster Hauptlage von M_1 und M_2 zugleich Innenkreis bzw. Außenkreis sind; hiernach ist bekanntlich die Tangentenstrecke L_1L_2 gleich der Grundlinie $A'B'$. Bezeichnet man wie früher $A'B'$ mit $2a$, so er-

sieht man, daß $A'F_1 + A'F_2 = 2a$. Dasselbe gilt für B' . Wir haben jetzt nur noch einen beliebigen Punkt P zu untersuchen. Die zugehörige Seitenlinie

schneide die Berührungskreise in P_1 und P_2 . Nun ist $PF_1 = PP_1$ (38) und $PF_2 = PP_2$. Somit $PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 = L_1L_2 = N_1N_2 = A'B' = 2a$. Wir finden somit, daß diese Schnittlinie des Kegels dieselbe charakteristische Eigenschaft hat wie diejenige des Zylinders, daß sie also eine Ellipse mit der Hauptachse $2a$ und den Brennpunkten F_1 und F_2 ist. *)

Weiterhin erkennen wir hier die Ellipse als Zentralprojektion (vergl. Einleitung) eines Kreises. Das Projektionszentrum ist S , der

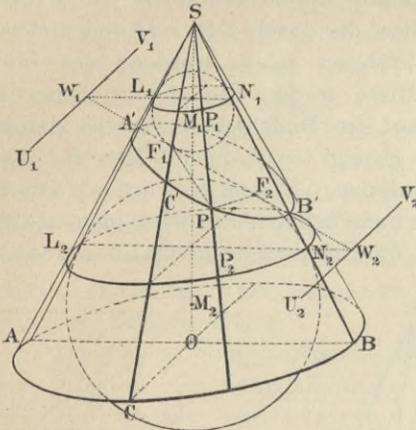


Fig. 53.

Kreis $ABCD$ ist der Gegenstand und die Ebene des schiefen Schnittes ist die Bildebene. Während bei der Parallelprojektion des Kreises ein Projektionszylinder auftrat, haben wir hier einen Projektionskegel. Die Zentralprojektion des Kreises geht in Parallelprojektion über, wenn das Projektionszentrum in der Richtung OS ins Unendliche rückt. Ferner gibt die Zentralprojektion des Kreises wiederum einen Kreis, wenn die Bildebene $A'B'C'D'$ parallel $ABCD$ wird.

Sieht man $A'B'C'D'$ als Gegenstand und $ABCD$ als Bildebene an, so erkennt man umgekehrt, daß das zentralprojektive Bild einer Ellipse ein Kreis sein kann. In diesem Falle ist der Projektionskegel ein elliptischer, während er vorher ein Kreiskegel war.

Denkt man sich S als Lichtpunkt und die Kugel M_1 als undurchsichtig an der Schnittebene liegend, so ist ihr Schlagschatten auf die Ebene eine Ellipse, in deren Brennpunkt die Schnittebene von der Kugel berührt wird.

Aufgabe 50. Durch einen geraden Kreiskegel soll ein schiefer Schnitt so gelegt werden, daß er einer Seitenlinie parallel läuft ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Bei der vorigen Aufgabe wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß der schiefe Schnitt alle Seitenlinien trafe. Denkt man sich aber die Schnittebene so aus der Lage der Fig. 53 gedreht, daß sie parallel SB

*) Bringt man auch hier die Ellipsebene mit den Ebenen der Berührungskreise M_1 und M_2 zum Schnitte in U_1V_1 und U_2V_2 , so ist jede dieser Geraden Leitlinie zur Ellipse. (Vergl. Anm.⁵¹.)

liegt, so erleidet ohne Zweifel auch die Schnittlinie eine wesentliche Änderung, indem sie weder auf dem Kegel selbst noch auf seinem Scheitelkegel zum Zusammenschluß kommt. Die punktweise Konstruktion des

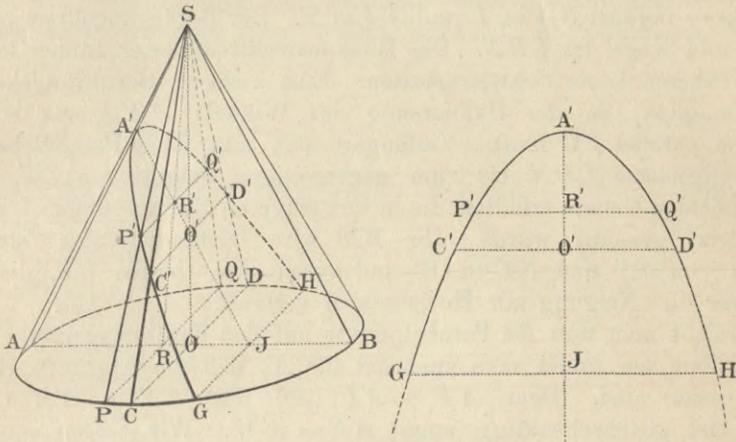


Fig. 54.

Schrägbildes geschieht nach der bisherigen Methode der Längsschnitte (Fig. 54). Die Punkte A' , G und H sind bereits durch die Schnittlinie $A'J$, die in der Bildebene liegt, festgelegt.

Auf dem Achsenschnitte SCD liegen außerdem die Punkte C' und D' , die dadurch bestimmt sind, daß $C'D'$ senkrecht zur Bildebene steht und daher im Bilde unter 45° zur Horizontalen durch O' verläuft. Für einen beliebigen Punkt P' zieht man zuerst die beliebige SR , dann durch R die Parallele zu CD bis zum Schnitte in P und Q mit dem Grundkreise. Das Dreieck SPQ ist nun ein Längsschnitt, auf dessen Seitenlinien man zwei weitere Punkte P' und Q' in bekannter Weise finden kann. — Auch die Darstellung der Schnittlinie in natürlichen Verhältnissen vollzieht sich ganz wie bei Aufgabe 49. Hier zieht man den Strahl $A'J$ und überträgt unmittelbar aus der Figur die unveränderten Strecken $A'R'$, $A'O'$, $A'J$ usf. Die Lote in R' , O' , J usf. müssen alsdann in doppelter Länge (wegen $q = \frac{1}{2}$) übertragen werden. Die Figur zeigt, daß die Zweige der Linie immer weiter auseinandergehen. Diese Linie heißt Parabel.

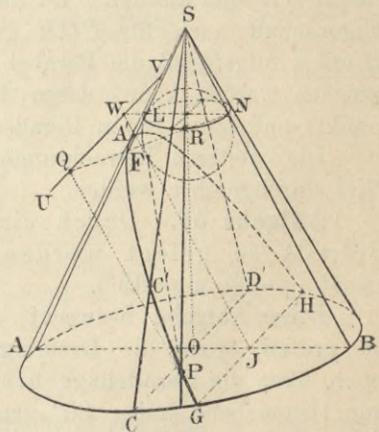


Fig. 55.

Es liegt nun nahe, die Eigenschaften des vorliegenden Sonderfalles mit Hilfe der Dandelin'schen Berührungskugeln zu untersuchen. In Fig. 55 liegt der Mittelpunkt der inneren Kugel (nicht bezeichnet) wiederum auf der Achse SO und auf der Halbierenden des Winkels $SA'J$. Der gezeichnete Hauptkreis berührt SA in L und $A'J$ in F . Der Berührungskreis zwischen Kugel und Kegel ist LRN . Die Bildkonstruktion dieser Linien hat nach dem Früheren keine Schwierigkeiten. Eine äußere Berührungskugel ist nicht möglich, da die Halbierende des Winkels $AA'J$ aus einfachen Gründen parallel SO läuft. Verlängert man nun noch Parabelebene und Berührungsebene LRN bis zum gegenseitigen Schnitte in UV , so hat man diejenige Gerade erhalten, die in den früheren Betrachtungen Leitlinie (Direktrix) genannt wurde. Ihr Bild wird leicht gefunden durch den Schnitt von JA' und NL in W und durch eine Gerade UV , die durch W unter 45° Neigung zur Horizontalen verläuft.

Bezieht man nun die Parabelpunkte auf den Berührungspunkt F und die Leitlinie, so findet man zunächst für A' , daß die Abstände $A'F$ und $A'W$ gleich sind. Denn $A'F = A'L$ (38) und $A'W = A'L$ (Dreieck $A'LW$ ist gleichschenkelig); somit $A'F = A'W$. Wir fassen nun einen beliebigen Punkt P der Parabel heraus und ziehen die Abstände PF und PQ . Man sieht sofort, daß $PF = PR$ (38). Nun ist durch die Parallelen QP und SB eine Ebene bestimmt (8), in der die Seitenlinie SRP liegt. Zieht man daher QN , so muß diese durch R gehen. Die Dreiecke SRN und PQR sind ähnlich. Da nun SRN gleichschenkelig ist, so muß diese Eigenschaft auch für PQR gelten, somit $PQ = PR$, und $PF = PQ$. Hieraus folgt, daß die Parabel als geometrischer Ort für alle Punkte angesehen werden kann, deren Abstände von einem festen Punkte (Brennpunkt) und einer festen Geraden (Direktrix) gleich sind.

Die weiteren Betrachtungen der Aufgaben 49 und 50 können auch hier durchgeführt werden.

Aufgabe 51. Durch einen geraden Kegel soll ein schiefer Schnitt so gelegt werden, daß er zwei Seitenlinien parallel läuft ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Diese Aufgabe bezweckt, die weitere Entartung der Schnittlinien zu prüfen, wenn die Drehung der Schnittebene durch A'^* (Fig. 56) noch über die Parallellage hinaus erfolgt. In Fig. 56 soll der Schnitt zur Grundebene unter 80° geneigt sein. Man ersieht, daß nicht nur der gegebene Kegel, sondern auch sein Scheitelkegel geschnitten wird. Die Schnittlinie in der Bildebene $A'J_1B'J_2$ bildet auch hier den Ausgang für die Bildkonstruktion. Zu den Punkten A' und B' findet man ohne weiteres vier andere Punkte, indem man durch J_1 und J_2 die Paral-

*) In allen Figuren zu den Aufgaben 49, 50, 51 ist die Form des Kegels sowie die Lage des Punktes A' auf SA festgehalten worden.

lelen zu C_1D_1 und C_2D_2 zieht. Weitere Punkte P' und Q' , P'' und Q'' werden durch Längsschnitte mit den Mittellinien SR_1 und SR_2 erhalten. Bei letzterem ist zu bemerken, daß die Seitenlinie SP_2 weiter nach außen fällt als SB_2 und beinahe zur Randlinie wird. — Die Darstellung der krummen Linie, die aus zwei Ästen besteht, in natürlichen Verhält-

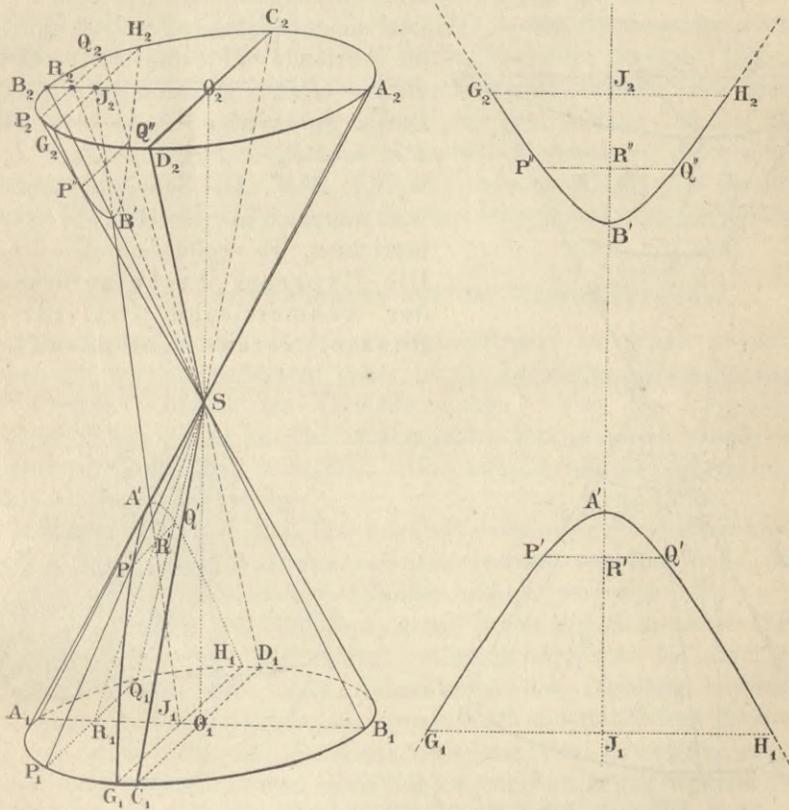


Fig. 56.

nissen vollzieht sich wie früher; hierbei erscheint zunächst das obere Aststück kürzer als der untere, indessen kann seine Verlängerung leicht durch Erweiterung des Scheitelkegels gefunden werden. Beide Äste erstrecken sich ins Unendliche. Die Linie heißt Hyperbel.

Um weitere Eigenschaften aufzufinden, legen wir (Fig. 57) die Dandelin'schen Berührungskugeln an. Man findet ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 durch die mehrfach erwähnten Winkelhalbierenden. Die Berührungspunkte des gezeichneten Hauptkreises seien F_1, L_1 und N_1 bzw. F_2, L_2 und N_2 , die Berührungs-

kreise mit dem Kegel: $L_1 P_1 N_1$ und $L_2 P_2 N_2$. Von den beiden Scheitelpunkten A' und B' läßt sich folgendes nachweisen: $A'F_2 = A'L_2$ (38) und $A'F_1 = A'L_1$. Somit $A'F_2 - A'F_1 = A'L_2 - A'L_1 = L_1L_2 = N_1N_2 = A'B'$. Betrachtet man nämlich die Hauptkreise M_1 und M_2 als Außenkreise am Dreieck $SA'B'$, so ergibt sich leicht die Gleichheit der Grundlinie $A'B'$ mit den Tangentenstrecken L_1L_2 und N_1N_2 auf den Schenkelseiten.

Ähnliches ergibt sich für B' . Wir wählen jetzt einen beliebigen Punkt P und ziehen die Abstände PF_1 und PF_2 . Nun ist $PF_2 = PP_2$ (38) und $PF_1 = PP_1$. Durch Subtraktion ergibt sich $PF_2 - PF_1 = PP_2 - PP_1 = P_1P_2 = L_1L_2 = N_1N_2 = A'B'$. Der Scheitelabstand $A'B'$ wird nun auch hier als Hauptachse (2a) bezeichnet. Es ergibt sich also der Satz: Die Hyperbel ist aufzufassen als der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstandsdifferenz

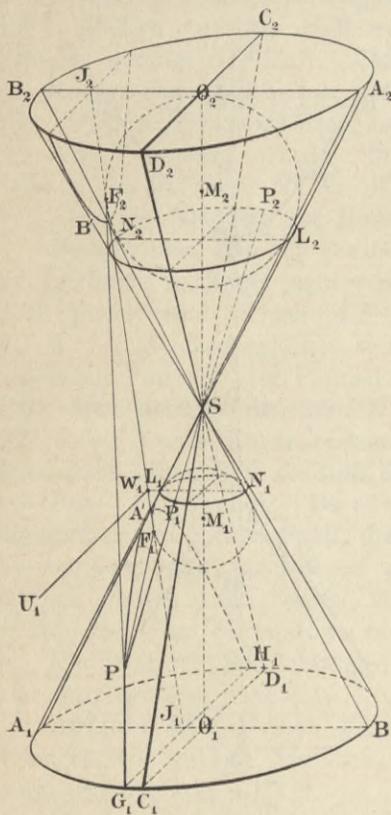


Fig. 57.

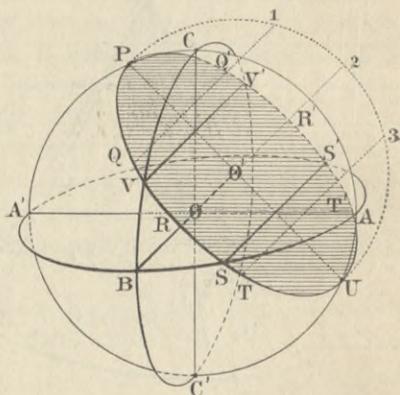


Fig. 58.

in bezug auf zwei feste Punkte konstant (2a) ist. Die beiden Punkte heißen Brennpunkte.

Von den beiden Leitlinien der Hyperbel ist nur die eine bei A' angedeutet, indem durch den Schnitt W_1 zwischen J_1A' und N_1L_1 die Senkrechte U_1W_1 zur Bildebene gezogen ist.

Aufgabe 52. Durch eine Kugel ist ein Schnitt so zu legen, daß er in gegebenem Abstände vom Mittelpunkte verläuft ($q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45^\circ$).

Von der Kugel O (Fig. 58) sind zunächst drei Großkreise in den drei Hauptlagen gezeichnet: der Äquator ABA' sowie die beiden Meridiane ACA' und CBC' . Der Abstand OO' des Kugelschnittes sei so in der Bildebene gewählt, daß OA und OC durch die Schnittlinie PU halbiert werden. Da der Kugelschnitt senkrecht zur Bildebene stehen soll, so bestimmen bereits die Schnittlinien SS' und VV' mit dem Äquator bez. mit dem Meridian BCC' vier weitere Punkte des Schnittkreises $PVSU$. Alle Sehnen dieses Kreises, die parallel SS' bez. BO laufen, stehen senkrecht zur Bildebene und erscheinen unter 45° zum Horizont geneigt. Ihre Länge ist gleich der Hälfte derjenigen entsprechenden Sehnen, die man dem Hilfskreis über PU entnimmt. Hier sind drei solcher Sehnen gezogen (durch 1, 2, 3), deren Richtung hier zufällig wegen der Speziallage des Kugelschnittes mit QQ' , RR' , TT' usf. zusammenfällt. Auf diese Weise ist das elliptische Bild des Kugelschnittes leicht punktweise festzulegen.

§ 7 (8). Anwendungen aus der Krystallographie.

Die Krystalle sind diejenigen Naturkörper, an denen geometrische Formen am reinsten auftreten; daher ist die Darstellung ihrer Schrägbilder eine wichtige Aufgabe des Krystallographen. Von den Krystallen der regulären Klasse sind in den vorhergehenden Paragraphen bereits Würfel und Oktaeder ausgiebig behandelt. Wir knüpfen an diese Konstruktionen an und stellen zunächst die

Aufgabe 53 (62). Ein Rhombendodekaeder (Granatoeder) soll in schiefer Parallelperspektive gezeichnet werden²⁷⁾; ($\frac{1}{3}$, 20°).

Wie für die meisten Krystallbilder wählen wir auch hier $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 20^\circ$ (Fig. 59). Die Bildebene werde durch die Hauptachse PP' und die zweite Nebenachse BB' gelegt, während die erste Nebenachse AA' orthogonal stehen soll. Das Achsenkreuz des regulären Systems ist somit ohne weiteres festzulegen, womit auch die Randecken A, B, A', B' bestimmt sind. Da das Parameterverhältnis des Krystalles den Wert $1:1:\infty$ hat, so benutzt man diese Zahlen zur Festlegung weiterer Punkte. Betrachtet man z. B. die Fläche $ABQQ'$, die PP' parallel läuft, so erkennt man, daß Diagonale QQ' vertikal verläuft; man hat daher als ersten Ort für Q (bez. Q') die Vertikale durch die Mitte R (parallel zu PP'). Um einen zweiten Ort zu finden, benutzt man die Nachbarfläche $APQT$, die parallel BB' liegt; ihre Diagonale QT geht durch die Mitte S von AP , läuft horizontal (parallel BB') und ist somit der zweite Ort für Q . Dabei ist zu bemerken, daß AB und AP Kanten eines einbeschriebenen Oktaeders sind. Die übrigen Eckpunkte werden ähnlich festgelegt.

Konstruktion: Die Achsen PP' und BB' werden unverzerrt gezeichnet. Dann zieht man durch O unter 20° Neigung zu BB' den Strahl und schneidet $\frac{1}{3}OP = OA = OA'$ ab. Durch die Mitte R von AB legt man

Aufgabe 55 (67). Von einem regulären Tetraeder ist das Schrägbild zu konstruieren ($\frac{1}{3}$, 20°).

Da das Tetraeder der Halbflächen des regulären Oktaeders ist, so legen wir der Analyse das Schrägbild des regulären Oktaeders (Fig. 61a) zu grunde. Die obere Kante QR des Tetraeders (Dachkante) wird durch den Schnitt der Wechselflächen PAB und $PA'B'$ erzeugt und läuft deshalb AB bzw. $A'B'$ parallel, während die untere Kante ST (Kielkante) parallel AB' und $A'B$ ist. Aus ähnlichen Gründen ist $QS \parallel PB$ bzw. $P'B'$ und $RT \parallel PB'$ bzw. $P'B$. Endlich läuft Kante $QT \parallel AP'$ bzw. $A'P$ und $RS \parallel PA$ bzw. $P'A'$. Hiermit sind die Tetraederecken mehr als hinreichend durch Örter bestimmt, sodaß sich noch Proben für die Richtigkeit der Konstruktion ergeben. Man hat demnach durch die sechs Oktaederecken die angegebenen Parallelen bis zum gegenseitigen Schnitte in Q, R, S und T zu ziehen.

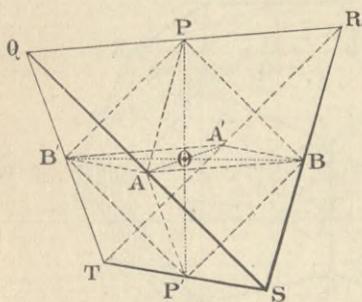


Fig. 61a (73a).

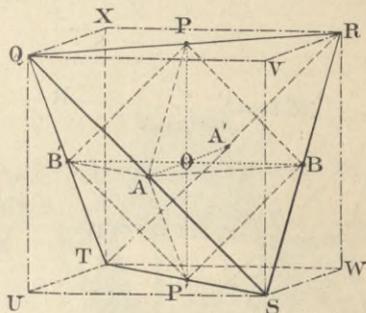


Fig. 61b (73b).

Denkt man sich zu dem Oktaeder den umbeschriebenen Würfel für dieselben Krystallachsen (Fig. 61b), so sieht man, daß am Würfel die Flächendiagonalen QS, SR, RT, TQ (im Zickzack), sowie TS und QR je zweien der Oktaederkanten parallel sind. Demnach bestimmen diese Diagonalen ohne weiteres ein Tetraeder, wie die Figur unmittelbar zeigt. Die sechs anderen Diagonalen bestimmen alsdann das sog. negative Tetraeder.

Diese Eigenschaft des Würfels eignet sich am besten zur raschen Zeichnung eines Tetraeders. In Fig. 61c ist auf solche Weise die Durchdringung des positiven und negativen Tetraeders dargestellt; das negative ist schraffiert. Die Ecken Q, X, V, R sowie U, S, W sind Würfecken, die Ecken P, P', A, B, B' sind Oktaederecken. Zugleich haben wir hier das Bild eines oktaedrischen Sternkörpers und eines tetraedrischen Durchkreuzungszwillings (Diamant).

Aufgabe 56 (68). Ein Pentagondodekaeder (Pyritoeder) für das Parameterverhältnis $1 : \frac{3}{2} : \infty$ soll konstruiert werden, ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 30^\circ$).

Der Krystall ist der Halbflächen (Hemieder) zum Pyramidenwürfel. In Fig. 62 ist ein Pyramidenwürfel für obige Verzerrungszahlen (ge-

strichelt) dargestellt; P , A und B sind die Pyramidenspitzen oben, vorn und rechts; die zugehörigen Würfel­flächen sind $CDEJ$, $CDFH$ und $DEFG$. Die Bezeichnung ist durchaus entsprechend Fig. 60.*) Die Vorderkante KK' des Dodekaeders entsteht durch Erweiterung der Pyramidenwürfel­flächen ADF und ACH , sie muß durch A gehen und parallel der Hauptachse PP' verlaufen. Hierdurch ist ein Ort für K bzw. K' gewonnen; ein zweiter ergibt sich aus der Überlegung, daß die obere Dodekaederfläche $LMDKC$ derart liegt, daß ihre Mittellinie PU ebenfalls durch K geht; U ist aber die Mitte der Würfelkante CD . Entsprechend erhält man für K' einen zweiten Ort. Die Hinterkante parallel KK' wird in derselben Weise festgelegt. Die Polkante LM ist parallel BB' ; außerdem wird M durch die Mittellinie BS bestimmt. Für L sowie für

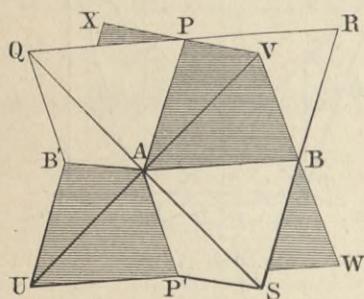


Fig. 61c (73c).

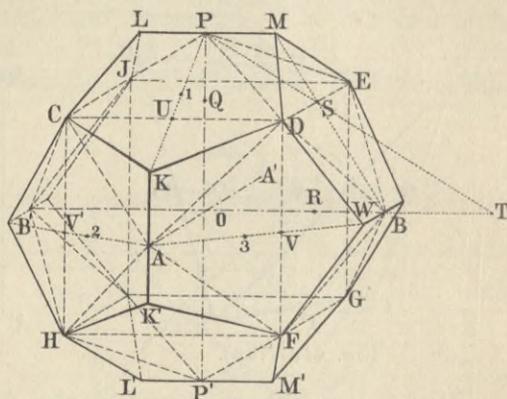


Fig. 62 (74).

L' und M' gilt Ähnliches. Die Randkanten durch B und B' laufen parallel AA' und werden durch die Mittellinien AV (AV') begrenzt. Die Würfel­ecken C , D , E , J , H usw. bleiben als Ecken am Dodekaeder bestehen, so daß hiermit alle Kanten bestimmt sind.

Zur Konstruktion legt man zuerst einen beliebigen Würfel mit den Halbachsen $OQ = OR$ fest. Dann bestimmt man P so, daß $PQ = \frac{2}{3} QS$. Die einzelnen Teile des Pyramidenwürfels werden dann wie in Fig. 69 gezeichnet. Hierauf zieht man durch A und A' die Parallelen zu PP' , durch B und B' zu AA' , durch P und P' zu BB' . Schließlich zieht man die Mittellinien PU , AV , BS usw. und erhält so die Ecken des Pyritoeders.

Zu bemerken ist, daß die Fünfecksflächen symmetrisch sind in bezug auf die Linien PK , MB , AV usw., wie aus ihrer Erzeugung hervorgeht.

*) Indessen ist dort $\omega = 20^\circ$.

Auch sind sie kongruent. Dagegen sind die Fünfecke im allgemeinen nicht regulär.

In Fig. 62 sind für den fingierten Fall, daß ein platonisch-reguläres Dodekaeder vorliegt, die zwölf Mittelpunkte der Fünfecke durch je zwei Mittellinien festgelegt und mit 1, 2, 3, ... bezeichnet. Überträgt man eine gewisse Anzahl dieser Punkte, etwa 1, 2, 3 nebst dem Achsenkreuz in eine besondere Figur 63, so lassen sich die übrigen leicht finden. Punkt 3 liegt nämlich symmetrisch zu 2 in bezug auf AA' , Punkt 4 symmetrisch zu 1 in bezug auf PP' , ebenso 9 zu 5, 7 zu 1 usw. Die Verbindung dieser Punkte ergibt daher ein platonisches Ikosaeder, das aber ebensowenig wie das vorausgesetzte Dodekaeder im Mineralreiche auftritt.

Konstruiert man zu einem beliebigen Pyramidenwürfel beide Dodekaeder, das positive und negative*), so erhält man die Durchdringung

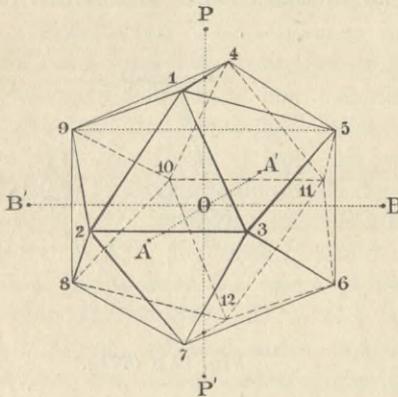


Fig. 63 (75).

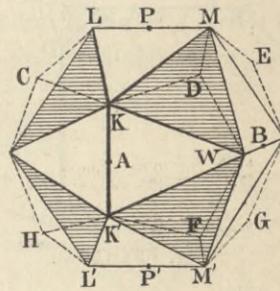


Fig. 64 (76).

Fig. 64 ($\frac{1}{3}, 20^\circ$). Hierin sind C, D, E, H, F, G usw. die bekannten Würfelflächen. Über je einer Würfelfläche erheben sich zwei einander durchkreuzende Dächer. Die Kanten AC, AD, AF, AH sowie PD und $PC, P'F$ und $P'H, BD$ und BF sind Kanten des Pyramidenwürfels und lassen ihn als Kernkörper wieder hervortreten. Wir haben hier einen Sternkörper und zugleich einen Durchkreuzungszwilling (Eisenkies).

Aufgabe 57 (69). Eine Krystallkombination zwischen Würfel und Oktaeder soll konstruiert werden ($\frac{1}{3}, 20^\circ$).

In Fig. 65a denke man sich zunächst einen Würfel in bekannter Weise vollständig festgelegt (hier sind der Übersichtlichkeit wegen nur die Vorderflächen gezeichnet). Wenn eine Oktaederfläche BCD die Würfecke A abstumpft, so schneidet sie die Stücke $AB = AC = AD$ ab, denn sie steht auf der

*) Hier für $1 : 2 : \infty$.

Körperdiagonale (der sog. hexaedrischen Achse) senkrecht. Diese Betrachtung gilt für jede Ecke. Zur Konstruktion schneidet man daher an jeder Ecke diese Stücke ab und zwar bei A die Strecken AB und AD in natürlicher Größe, die Strecke AC in Verkürzung. Man erhält so statt der Würfelquadrate je ein Achteck, als Deckfläche z. B. $BCE\dots$ Für diesen einfachen Fall, bei dem der Würfel im Übergewicht ist (Bleiglanz), bedarf man also nicht einmal der Achsen.

Hat dagegen das Oktaeder das Übergewicht (Kobaltkies), so sind die Achsen von großem Nutzen. In Fig. 65b denke man sich das Oktaeder voll ausgezeichnet mit den Achsenarmen OA , OB , OP usw. Sollen nun die Würfel­flächen ein gegebenes Stück $AA' = BB' = PP'$ auf den Achsen abschneiden, so sind die neu entstandenen Ecken durch Parallelen zu den Achsen bestimmt, also z. B. die Ecken bei P durch die Parallelen in P' zu OA und OB . Die Konstruktion hat hiernach keine weiteren Schwierig-

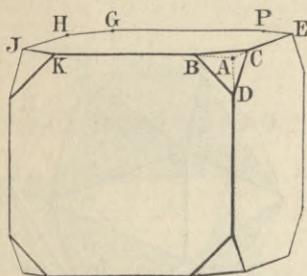


Fig. 65a (77a).

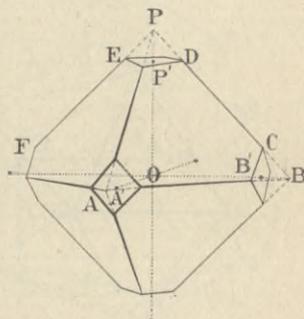


Fig. 65b (77b).

keiten. Übrigens ließe sich diese Kombination auch ohne Achsen zeichnen, wenn man von den Punkten C , D , E , F ausginge, die auf dem frontalen Achsenschnitte liegen.

Die Konstruktionen quadratischer Krystallformen sind so einfach, daß sie hier den besonderen Übungen überwiesen werden. Von besonderem Interesse aber ist die Darstellung der hexagonalen Krystallklasse. Einzelne Formen sind bereits früher soweit behandelt worden (vergl. z. B. die Fig. 12, 48, 49), daß die Konstruktion der holoedrischen Hauptformen keine Schwierigkeit mehr bietet. Wir wenden uns daher sofort zu den Kombinationen.

Aufgabe 58 (76). Konstruiere eine Kombination zwischen einem hexagonalen Prisma und einer Doppelpyramide ($\infty P \cdot P$, Quarz). ($\frac{1}{3}$, 20° .)

Zur Grundlage für die geometrische Analyse nehme man das Achsenkreuz der hexagonalen Krystallklasse $OXYZ$ (Fig. 66). Es ist leicht festzulegen nach Art der Fig. 11. Die Kombinationsecken A , A' , B , B' usw.

liegen alsdann um gleiche Strecken vertikal über oder unter X, Y, Z usf. Die Konstruktion ist hiernach sehr leicht. — Läßt man die aufgesetzten Pyramiden weg, so hat man die Kombination des Prismas mit der basischen Doppelfläche ($\infty P \cdot 0P$). Vergl. auch die hexagonale Tafel Fig. 12.

Aufgabe 59 (79). Man soll das Rhomboeder zu einer gegebenen hexagonalen Doppelpyramide im Schrägbilde zeichnen. ($\frac{1}{3}, 20^\circ$.)

Gegeben ist die Doppelpyramide $P, ABC\dots$ (Fig. 67). Die Flächen eines Rhomboeders entstehen durch die Erweiterung der abwechselnden Pyramidenflächen, bis die anderen verdeckt werden. So läßt man z. B. Fläche PAB so weit auswachsen, bis sie mit den erweiterten Wechselflächen in den Kanten QR, RP, PT und TQ zusammenstößt. Die Kante QR wird gebildet durch den Schnitt von PAB mit $P'BC$ und die Kante QT durch den Schnitt von PAB mit $P'AC'$. Hierbei tritt die Ecke Q auf, die wegen der symmetrischen Lagerung der Flächen folgendermaßen festzulegen ist. Sie liegt nämlich auf der Symmetrale PU des Dreiecks PAB und auf einer Geraden $P'V$, die durch P' und den Schnitt V der beiden Randkanten CB und $C'A$ bestimmt ist. Da ferner $BR = BQ, RC = CS, QA = AT, TC' = C'W$ usf., so sind damit sämtliche Ecken und Kanten des Rhomboeders gefunden.

Konstruktion: Ziehe die Symmetrale PU , verlängere BC und $C'A$ bis zum gegenseitigen Schnitte in V . Ziehe sodann $P'V$ und verlängere PU bis zum Schnitte Q mit $P'V$. Verlängere ferner QB und QA und schneide $BR = BQ, AT = AQ$ usf. ab. In der Figur ist das Rhomboeder nicht vollständig gezeichnet. Zur Probe bestimmt man übrigens noch eine andere Ecke (etwa eine hinten liegende) durch die entsprechende Symmetrale.

Aufgabe 60 (82). Ein Rhomboeder ist durch eine basische Doppelfläche ($0P$) abgestumpft; man soll das Schrägbild zeichnen ($\frac{1}{3}, 20^\circ$).

Wir gehen auch hier von dem Rhomboeder der Fig. 67 aus. Solange die Abstumpfungsf lächen die Randecken $Q, R, S\dots$ zwischen sich fassen, handelt es sich lediglich um Schnitte an den dreikantigen Polecken P und P' . Beide Schnitte liegen in gleichem Abstände von O (Fig. 68)

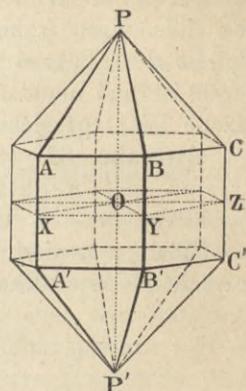


Fig. 66 (84).

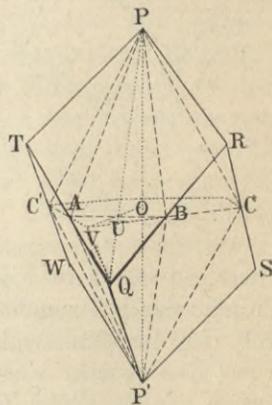


Fig. 67 (87).

und sind gleichseitige Dreiecke; ihre Höhen LP_3 und $L'P'_3$ sind Lotstrecken zur Bildebene und treffen zwei Polkanten. — Zieht man daher am oberen Pol die horizontale Strecke P_1P_2 , halbiert man ferner P_1P_2 in L und zieht durch L den Strahl unter 20° zur Horizontalen bis zum Schnitte P_3 mit der hinteren Polkante, so ist das obere Dreieck festgelegt. Hierdurch ist nun auch der Abstand von O gefunden, so daß auch die untere Fläche leicht gezeichnet werden kann.

Aufgabe 61 (83). Eine Kombination von hexagonalem Prisma mit negativem Rhomboeder ist darzustellen (Kalkspat). ($\frac{1}{3}$, 20°)

Man konstruiert zuerst das negative Rhomboeder. Wenn Fig. 67 das normale Kalkspat-Rhomboeder R darstellt (Hauptachse = 0,85 der Neben-

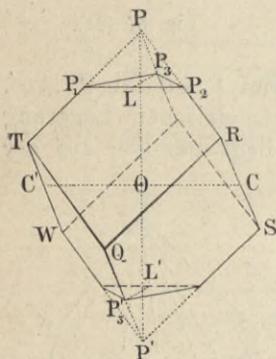


Fig. 68 (90).

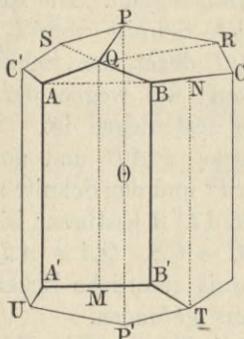


Fig. 69 (91).

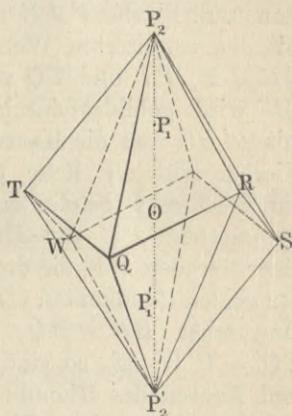


Fig. 70 (92).

achse), so wären in Fig. 69 die Flächen $PQBCR$, $PQAC'S$ usw. einem Rhomboeder $\frac{1}{2}R$ zugehörig, d. h. einem solchen, dessen Hauptachse halb so groß (im Verhältnis) als am normalen ist. Die Prismenflächen sollen so in das Rhomboeder einschneiden, daß symmetrische Fünfecke abgeschnitten werden, daher $BC \parallel QR$, $AC' \parallel QS$. Die Prismenkanten laufen der Hauptachse parallel und sind gleichlang. Ferner bilden sich bei AB usw. Giebelfiguren ab, die leicht festzulegen sind.

Man konstruiert zuerst die oberen Flächen des Rhomboeders und schneidet beliebig $QA = QB$ ab. Dann zieht man $BC \parallel QR$ und $AC' \parallel QS$. Hierauf legt man durch $A, B, C \dots$ gleiche Strecken parallel der Hauptachse, wodurch $A', B' \dots$ bestimmt werden. Die Ecken $T, U \dots$ werden durch die Giebelhöhe $MQ = NT = \dots$ gefunden.

Aufgabe 62 (85). Das Schrägbild eines Skalenoeders soll konstruiert werden. ($\frac{1}{3}$, 20°)

Faßt man das Skalenoeder auf als Krystall, der sich auf den Randkanten eines Rhomboeders aufbaut, so ist die geometrische Analyse äußerst einfach. In Fig. 70 seien P_1 und P_1' die Pole eines Rhomboeders (normal R) und $Q, R, S \dots$ die Randecken. Die Polkanten sind nicht gezeichnet. Verdoppelt man nun die Hauptachsen bis P_2 bez. P_2' und zieht die zugehörigen Polkanten, so erhält man das Skalenoeder mit der Formel $2S^*$.)

§ 8 (9). Anwendungen aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde.

Während die in starrer Ruhe verharrende Materie die Kleinwelt der Krystalle mit ihren ebenen Flächen, scharfen Kanten und spitzigen Ecken bildet, hat sie sich in der Flut der kosmischen Bewegung zu gewaltigen Massen mit rauher, gekrümmter Oberfläche geballt. Die Kugel und das Sphäroid treten hier in den Vordergrund. Der schrägen Parallelperspektive hält es nicht schwer, die wichtigsten Formen und Bahnen in ihren Einzelheiten und Beziehungen zu fixieren, um dadurch klare Vorstellungen zu erwecken.

Aufgabe 63 (87). Der Zusammenhang der verschiedenen Horizonte ist im Schrägbilde darzustellen ($\frac{1}{2}$, 45°).

Der schwachgekrümmte Kreisbogen EE (Fig. 71) sei ein Schnitt der Bildebene mit der Erdkugel, und in P befinde sich das Auge des Beobachters. Die Gesamtheit der Tangenten von P an die Kugel (hier sind nur PN und PS gezeichnet) bestimmen die natürliche Horizontlinie (Kimmlinie) $NOSW$ als Kreis; seine Ebene ist die natürliche Horizontebene. In der Figur ist die Bildebene zugleich die Mittagsebene des Beobachters, somit bilden die Schnittpunkte N und S der Kimmlinie mit der Schnittlinie EE den sog. Nord- bez. Südpunkt und die Linie EE selbst ist der Erdmeridian des Fußpunktes P' von P . Die Vertikale PP' trifft die Ebene des natürlichen Horizontes in M . Zieht man in dieser Ebene durch M das Lot zu NS , so trifft es die Kimmlinie im Ostpunkte O und Westpunkte W . Man denke sich nun über dem natürlichen Horizontkreis die Himmelskugel (das sog. Firmament) beschrieben, deren Mittelpunkt demnach M ist, und lege durch P' die Parallelebene zur Horizontebene (hier ist nur die Parallele $S'P'N'$ gezeichnet). Jetzt erkennt man, daß diese Ebene die Himmelskugel in einem Kreise schneidet, der höher liegt als die Kimmlinie. Dieser Kreis heißt die geographische Horizontlinie, seine Ebene der geographische Horizont; er ist zugleich Berührungsebene der Kugel. Man könnte nun auch noch durch P die Parallelebene zum natürlichen Horizont legen und würde so den Augenhorizont erhalten; er müßte die Himmelskugel in S'' bez. N'' treffen (nicht gezeichnet). Unter den Bogenstrecken $S''S$ und $N''N$ versteht man bekanntlich die Kimmtiefe, die auch durch den Winkel PSM (PNM)

*) $1S$ ist daher identisch mit R .

gemessen wird. Die verlängerte $P'P$ trifft nach oben den Zenit Z , nach unten den Nadir und Erdmittelpunkt. Legt man schließlich noch die Ebene durch den Erdmittelpunkt parallel zum natürlichen Horizont, so erhält

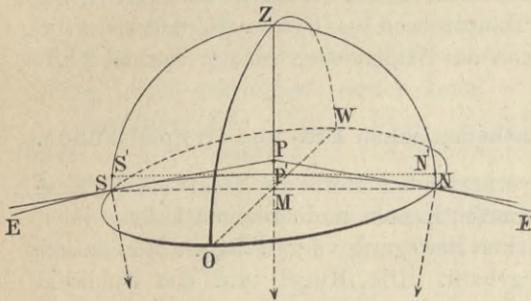


Fig. 71 (95).

man die astronomische Horizontebene. In der Figur (Maßstab: 1 : 60 Millionen) ist P so hoch über der Erdwölbung angenommen, wie es für den Menschen niemals eintritt (diese 2 mm entsprechen 120 km). Man kann sich nun vorstellen, daß für eine geringere Erhebung die Punkte P , P' und M sehr nahe zusammenrücken, sodaß man näherungsweise den natürlichen Horizont mit dem geographischen und Augenhorizont zusammenfallen läßt.

Die Konstruktion verläuft so: Man beschreibt mit einem bestimmten Halbmesser (10 cm) den Bogen EE und zieht von P die Tangenten nach S und N und die Sehne SN . In ihrer Mitte M errichtet man das Lot OW ($= \frac{1}{2} SN$ mit 45° Neigung) und beschreibt das elliptische Bild des Kimmkreises nach Fig. 14a. Hierüber konstruiert man nun in bekannter Weise die Vertikalkreise OZW (nach Fig. 14b) und SZN .*

Aufgabe 64 (88). Fixiere auf der Erdkugel einen Punkt mit 60° Ostlänge (Ferro) und 45° Nordbreite in schräger Parallelperspektive (Maßstab 1:300 Millionen; $\frac{1}{2}$, 45°).

In der Fig. 72a sind Ferro-Längen deshalb angenommen, um bei dem gewählten Nullpunkt die gesamte alte Welt auf der Vorderseite der Kugel zu haben. Als Basis für die Betrachtung dient zunächst das Bild der Kugel aus Fig. 32b (ohne Umrißlinie). Der betreffende Punkt X ist durch die beiden sphärischen Koordinaten festgelegt, nämlich durch den Bogen $0^\circ-60^\circ$ auf dem Äquator als Abszisse und durch den Bogen $60^\circ-X$ auf dem Meridiane $P-60^\circ$ als Ordinate. Der Punkt 60° wird im Schrägbilde dadurch festgelegt, daß man in der Fig. 14a bzw. Fig. 72b im oberen, linken Kreisquadranten den entsprechenden Punkt für 60° markiert, dann durch das Lot $60-Q$ und die Parallelsehne $Q-60'$ den Bildpunkt $60'$ festlegt; dasselbe ist in Fig. 72b auch für 30° angedeutet. Man hat nun den Meridian $P-60^\circ$ festzulegen. Die Halbsehnen $11'$, $22'$, $33'$ usw., welche parallel OP verlaufen, bilden sich in natürlicher Länge ab. Teilt man daher die Strecke $O-60^\circ$ in vier gleiche Teile (entsprechend der Figur 14a), so sind die Bildpunkte $1'$, $2'$,

*) OZW ist der erste Vertikal (Ost-West-V.), SZN der zweite Vertikal (Meridian-Vertikal oder Nord-Süd-V. des Ortes).

3' usf. durch die aus Fig. 14a zu entnehmenden Lote bestimmt. Damit wäre vorerst nur der Meridian $P-60^\circ$ als erster Ort für X gewonnen. Der zweite Ort ist der Parallelkreis für 45° Nordbreite. Er geht zu nächst durch den Punkt 45° des Nullmeridians und steht mit seiner Ebene senkrecht auf der Erdachse OP . Sein Bild ist eine Ellipse mit den konjugierten Durchmessern $45^\circ-Z$ (parallel mit $0^\circ-180^\circ$) und $YO'Y'$; sie läßt sich daher leicht bestimmen.

Man sieht, daß nach Fig. 72 leicht ein Gradnetz in schiefer Parallelperspektive und eine sog. klinographische Karte hergestellt werden könnte. Derartige Karten sind selbst als Planigloben kaum gebräuchlich, da ihre Verzerrungen für geographische Zwecke zu bedeutend sind. In Fig. 72 z. B. würde Europa ganz in die nordwestliche Ecke gedrückt sein, und

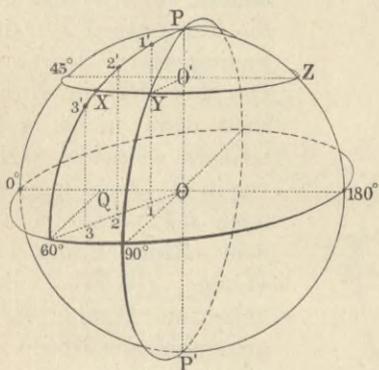


Fig. 72a (96a).

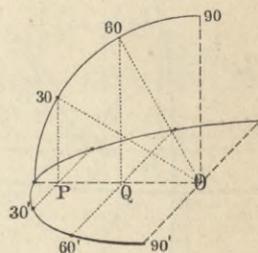


Fig. 72b (96b).

selbst bei einem Verzerrungswinkel $\omega = 90^\circ$ würde ein Überblick über die alte Welt wenig befriedigend sein.

Aufgabe 65 (89). Entwirf ein Schrägbild des Erdsphäroids (Maßstab 1:200 Millionen; $\frac{1}{3}$, 30°).

Die große Achse AA' der Meridianellipse $NASA'$ (Fig. 73) ist zu 30 mm angenommen. Wollte man nun die Abplattung im natürlichen Verhältnisse eintragen, so würde sie bei dem kleinen Maßstabe nicht merklich sein; deshalb ist die kleine Achse ON übermäßig kleiner gemacht als die große, so daß die Abplattung nicht $\frac{1}{300}$, sondern etwa das zehnfache beträgt.²⁸⁾ Diese Meridianellipse ist nun leicht festzulegen, da sie sich in der ersten Hauptlage befindet. Der Äquator $ABA'B'$ ist ein Kreis, dessen elliptisches Bild nach § 3 zu bestimmen ist. Es wäre nun noch zur Abrundung der Figur ein elliptischer Meridian in der dritten Hauptlage darzustellen. Da alle Meridiane kongruente Ellipsen sind, so wird das Bild $NBSB'$ selbst wieder eine Ellipse sein. Vergleicht man den Quadranten NOB mit NOA' , dann erkennt man, daß $OB = \frac{1}{3}OA'$

nächst den Äquator einzuzeichnen. Er geht durch Ost- und Westpunkt und steht auf MP senkrecht. Somit ist er in derselben Weise festzulegen wie die Sternbahn OCW in voriger Figur. Nimmt man nun hier den Nullpunkt der Rektaszension α beliebig in γ (Frühlingspunkt) an, so hat man nur noch $\alpha = \gamma A$ abzuschneiden, nötigenfalls in Graden (unter Vermittlung des Hilfskreises für das Ellipsenbild OAC). Durch A und P ist nun der Himmelsmeridian bestimmt, den man unter Zugrundelegung der

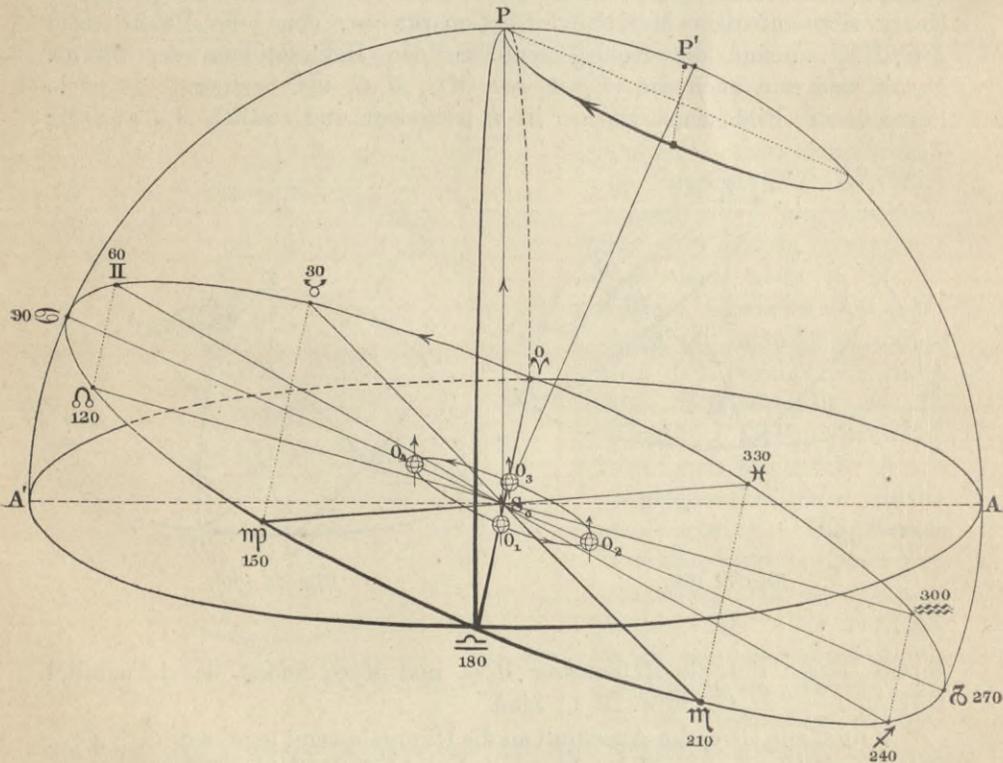


Fig. 76 (101).

konjugierten Halbmesser MP und MA leicht konstruieren kann und auf dem man die gegebene Zahl von Deklinationsgraden $= AS^*$ abschneiden könnte. Da es nun gewisse Schwierigkeiten hat, den Höhenbogen durch S^* direkt zu legen, so schneidet man einfacher auf dem Horizonte den zugehörigen Azimut*) ($= SB$) ab und errichtet über MB den Höhenquadranten ZB , dessen Schnitt mit AP in S^* das gesuchte Dreieck ZPS^*

*) Durch Rechnung oder am Himmelsglobus durch Einstellung zu finden.

ergibt. Die Figur bildet ein wichtiges Bild für das geozentrische Welt-system der Alten, das nach Ptolemäus benannt wird.

Aufgabe 68 (93). Die Hauptfigur der theoretischen Astronomie ist zu konstruieren ($\frac{1}{3}$, 80°).

Analyse: Während die sphärische Astronomie die Dinge zeigt, wie sie scheinen, soll die theoretische Astronomie die Dinge zeigen, wie sie sind. In Fig. 75 wurde dargestellt, wie in der sphärischen Himmelskunde verfahren wird, um Gestirne festzulegen. Fig. 76 gibt uns einerseits den Inhalt der kopernikanischen Lehre und führt uns andererseits auf die Art und Weise, wie man in der theoretischen Astronomie Gestirne festlegt (Maßstab für die Erdbahn 1:10 Billion). In O_1, O_2, O_3, O_4 befindet sich die verhältnismäßig noch stark vergrößerte Erde zur Zeit der Gleichungen bez. Wenden. Die Apsidenlinie $O_2 O_4$ bildet in der Figur den bekannten Winkel 23° gegen die Horizontale AA' . Die Gerade $O_1 O_3$ ist im Vergleich zu Fig. 75 mit ziemlich großem ω ($= 80^\circ$) angelegt, um für $S_0 P'$ Raum zu lassen, nämlich für das Lot in S_0 auf die Ebene der Ekliptik, die sog. ekliptische Achse. Der Umfang der Ekliptik ist in 12 gleiche Teile zerlegt, durch deren Punkte Strahlen nach außen gezogen sind. Nun pflegt man in der Ekliptikebene in sehr großer Entfernung (etwa in der Entfernung der Fixsternwelt) einen konzentrischen Kreis zur Erdbahn zu ziehen, die Weltekliptik, deren Umfang von den genannten Strahlen in 12 Punkten geschnitten wird, die man mit den bekannten Zeichen des astronomischen Tierkreises bezeichnet. Hiernach geht $S_0 O_1$ durch den Wagepunkt (Zeichen der Wage), $S_0 O_2$ durch den Steinbockspunkt, $S_0 O_3$ durch den Widderpunkt und $S_0 O_4$ durch den Krebspunkt. Schaut man daher im Frühjahr (Mitte März) von der Erde O_1 zur Sonne S_0 , so bedeckt diese den Widderpunkt; im Sommer wird der Krebspunkt bedeckt usf.

Wir denken uns jetzt über diesem großen Kreise eine Kugel errichtet, von der in Fig. 76 wenig mehr als die Hälfte gezeichnet ist. Der Stichpunkt P' der ekliptischen Achse mit der Kugel heißt ekliptischer Pol. Nun werden die Koordinaten eines Gestirns in ähnlicher Weise angenommen, wie man nach Fig. 75 Rektaszension und Deklination benutzt; sie heißen hier Länge und Breite. Sämtliche Längengrade gehen durch P' . Der Nullpunkt ist der Widderpunkt (Frühlingspunkt), und die Längen werden im Sinne der Erdwälvung gezählt. In Verbindung mit dem ekliptischen Koordinatensystem wird nun das Äquatorialsystem folgendermaßen gebracht. Man zieht durch S_0 parallel zur Erdachse die Weltachse $S_0 P$ und legt durch S_0 senkrecht zu $S_0 P$ eine Ebene, die die ekliptische Kugel schneidet. Die Schnittlinie mit der Ekliptikebene muß $\gamma \hat{=} \hat{=}$ sein; der Schnittkreis AA' heißt Weltäquator. Bogen APA' ist ein Weltmeridian, ebenso $\gamma P \hat{=} \hat{=}$. In bezug auf dies Äquatorialsystem, das auf heliozentrischer Grundlage aufgebaut ist, nimmt man Rektaszension und Deklination wie früher an.

Konstruktion: Man beginnt am besten mit dem Entwurfe der großen Ellipse $\gamma \odot \ominus \delta$. Den Hilfskreis hierzu teilt man in 12 gleiche Teile und markiert hiernach die Tierkreispunkte. Erst jetzt zeichnet man die innere kleine Ellipse und zieht die zugehörigen Strahlen. Die Erde in ihren vier Hauptstellungen wird nur angedeutet, doch so, daß ihre Achsenrichtung parallel S_0P deutlich hervortritt. Die Zeichnung des Weltäquators aus den konjugierten Durchmessern AA' und $\gamma \ominus \delta$ ist einfach. Dabei ist noch ein ekliptischer Parallelkreis durch P gezogen, der somit P' zum Pol hat. Er gibt mit seinem Pfeile die Richtung an, in der die Erdachse (also auch die Weltachse) ihre Drehung in 25000 Jahren ausführt. Die Folge ist die Zurückweichung des Widderpunktes (in der Richtung gegen die Erdwälzung), eine Tatsache, die uns als scheinbare „Präzession“ bekannt ist.

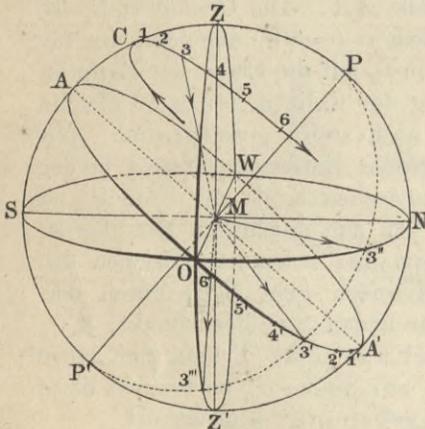


Fig. 77a (102a).

Aufgabe 69 (94). Eine Sonnenuhr soll in schiefer Parallelperspektive dargestellt werden ($\varphi = 50^\circ$; $q = \frac{1}{3}$, $\omega = 70^\circ$).

Die bekanntesten Sonnenuhren sind die Äquatorial-, Horizontal- und Vertikalsonnenuhren. Wir betrachten zuerst die Äquatorialuhren und denken uns in Fig. 77a das Himmelsgewölbe mit dem Horizonte $SWNO$, dem Zenit Z und dem Himmelspol P . Die Himmelsachse ist demnach PMP' . Nehmen wir an, die Himmelsachse sei undurchsichtig (ein in M nach P zeigender Stab), so erzeugt die Sonne bei ihrem täglichen Gange einen wandernden Schatten. Wir

nehmen weiter an, die Sonne beschreibe eine Bahn, die durch den Kulminationspunkt C gehe. Bei ihrem Stand in C gibt sie den Zeitpunkt 12 Uhr mittags in wahrer Sonnenzeit an. Teilt man den betr. Himmelsparallel in 24 gleiche Teile, so markieren die Punkte 1, 2, 3 ... den Sonnenstand um 1, 2, 3 ... Uhr p. m. (nachmittags). In der Figur ist nun weiter angenommen, daß sich die Sonne im 3-Uhr-Punkte befinde; ihr Mittelstrahl ist daher $\overline{3M}$. Die Sonnenstrahlen laufen nun sämtlich parallel $\overline{3M}$ (wegen der großen Entfernung der Sonne) und erzeugen hinter PP' eine Schattenebene (Stundenebene), die durch PP' und $\overline{3M}$ bestimmt ist. Wir wollen zunächst den Schatten mit der Äquatorialebene OWA' auffangen. Teilt man ihren Umkreis von A' aus ebenfalls in 24 gleiche Teile bei $1', 2', 3' \dots$, so muß der Schatten um 12 Uhr mittags nach $\overline{MA'}$, um 1^h p. m. nach $\overline{M1'}$, um 2^h p. m. nach $\overline{M2'}$ usf. fallen. Für 3^h p. m. fällt er demnach nach $\overline{M3'}$. Das Bild der Schatten-

ebene $\overline{P3'P'}$ ist somit durch die konjugierten Halbmesser MP und $\overline{M3'}$ genau bestimmt. Diese Schattenebene schneidet nun die Horizontalebene in einem Punkte $3''$, der nicht durch einfache Teilung des Horizontalkreises erhalten werden kann. Will man daher eine Horizontalsonnenuhr konstruieren, so bedarf es der jedesmaligen Festlegung der Schattenebene mit Hilfe der Äquatorialebene und der Bestimmung des Schnittpunktes ($3''$) auf der Horizontalebene. Ähnlich liegen die Verhält-

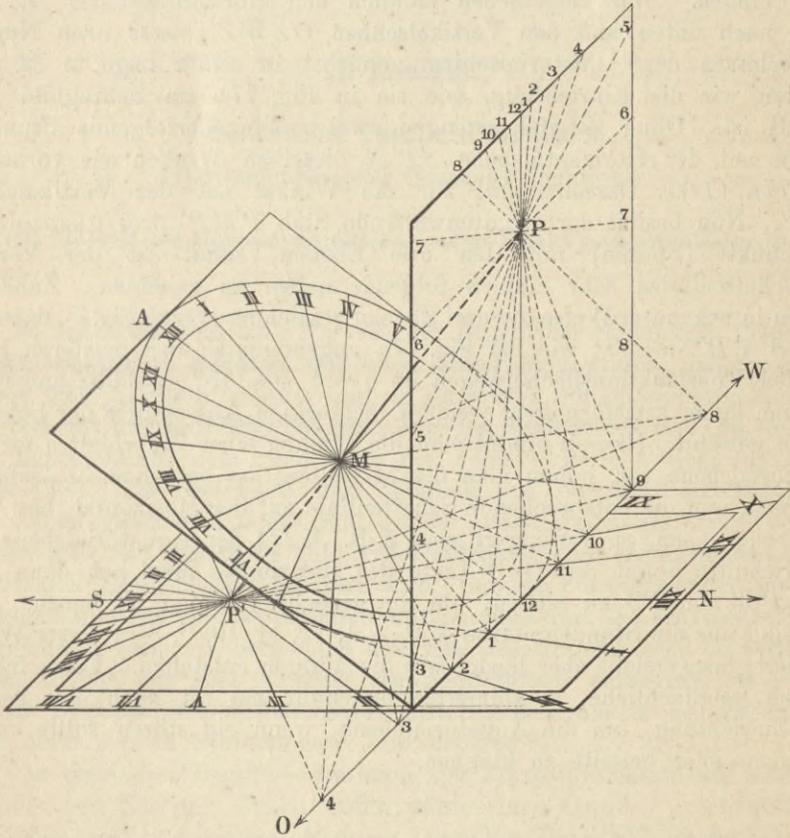


Fig. 77 b (102 b).

nisse für eine Vertikaluhr. Man benutzt hier als Schirm die Ebene des ersten Vertikals $OZWZ'$; in der Figur würde nur der untere Teil in Betracht kommen. Der Mittagsschatten von MB' fällt nach MZ' ; für 3^h p. m. schneidet die Schattenebene in $\overline{M3''}$ ein. Eine einfache Teilung des Vertikalkreises ist auch hier nicht möglich, vielmehr muß der genaue Schnittpunkt $3''$ durch den Hilfskreis $\overline{P3''3'P'}$ wie vorher festgelegt werden.

Die Konstruktion der Fig. 77a hat nach den vorhergehenden Übungen weiter keine Schwierigkeiten, da es sich nur um die Teilung des Äquators und die Festlegung der Schattenebenen handelt. Bei der praktischen Ausführung aber lassen sich noch besondere Konstruktionsvorteile erkennen. Hier nimmt man nämlich eine Verschiebung der Horizontal- und Vertikalebene vor, da man sonst nicht in der Lage wäre, die drei undurchsichtigen Schattenschirme in einfacher Weise miteinander zu verbinden. Wir verschieben nämlich den Horizontalschirm $OSWN$ etwas nach unten und den Vertikalschirm $OZWW'$ etwas nach Norden und belassen den Äquatorialschirm zunächst in seiner Lage in M . So erhalten wir die Einrichtung, wie sie in Fig. 77b im Schrägbild dargestellt ist. Ohne Zweifel erzeugen zwei aufeinanderfolgende Stunden Ebenen auf der Horizontalebene $SP'N$ dieselben Winkel wie vorher in Fig. 77a (14). Dasselbe gilt für die Winkel auf der Vertikalebene POW . Nun besitzt der schattenwerfende Stab PMP' drei gesonderte Stichpunkte (Spuren) mit den drei Ebenen, somit ist der Verlauf der Schattenlinien sehr einfach folgendermaßen zu zeichnen. Zunächst werden in bekannter Weise die drei Ebenen gezeichnet (vergl. Fig. 7), dabei ist Winkel $PP'N = 50^\circ$ wie bei Fig. 77a angenommen; der breiteren horizontalen Konstruktionsfläche wegen ist $q = \frac{4}{5}$, $\omega = 45^\circ$ gewählt; außerdem hat man keine kreisförmigen, sondern rechteckige Ausschnitte der Schirmebenen gewählt. Hierauf nimmt man die Bildung eines Zifferblattes auf der Äquatorialebene vor, indem man die 24-Teilung des betr. Kreises ausführt. Will man nun die entsprechende Schattenlinie auf der Horizontal- bez. Vertikalebene haben, so verlängert man z. B. $MIII$ der Äquatorialebene bis zum Schnitte 3 mit der $O-W$ -Linie des Horizonts. Man hat dann nur noch $P'3$ und $P3$ zu ziehen, um die gesuchten Linien zu haben. Auf OW sind nur die Stundenpunkte 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8 in dieser Weise markiert; man ersieht aber leicht, wie die übrigen entstehen. Diese früher vielfach gebräuchliche, kombinierte Sonnenuhr hat oft noch eine besondere Einrichtung, um die Äquatorialebene, wenn sie stören sollte, wegzunehmen oder beiseite zu klappen.

Die meisten übrigen Grundfiguren der mathematischen Erd- und Himmelskunde lassen sich nach den gegebenen Beispielen ohne Mühe konstruieren. Über den Entwurf von Gradnetzen folgen später (§ 12) noch einige Beispiele.

II. Abschnitt.

Senkrechte Parallel-Projektion.

(Orthogonale oder Normal-Projektion.)

§ 9 (12). Begriff der Normalprojektion. — Der Punkt und seine Koordinaten.

I.

In der Einleitung zu § 1 wurde der Begriff der räumlichen Projektion bereits ausführlich erläutert und auch darauf hingewiesen, daß die orthogonale oder Normalprojektion nur ein Sonderfall der Parallelprojektion ist. Es erscheint nun auffällig, daß man hier den allgemeinen Fall, die schiefe Parallelprojektion, dem Sonderfalle der senkrechten Projektion vorausgehen läßt. Das geschieht nun lediglich aus Zweckmäßigkeitsgründen. Wir haben gesehen, daß die Schrägbilder (auch freihändig) rasch zu entwerfen sind und daß durch ihre Anschaulichkeit eine klare Einsicht in die räumlichen Eigenschaften gewährt wird. Gewisse Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten der Schrägbilder nötigen uns nun, die senkrechte Parallelprojektion näher zu betrachten und ihre Gesetze eingehend zu verfolgen. Dabei können wir aber nirgends der Schrägbilder entbehren; sie werden uns im Gegenteil ein unschätzbares Mittel bilden, um in den Zusammenhang einer neuen Projektionsart einzudringen.*)

Zur genaueren Begriffsbestimmung der Normalprojektion soll auch hier zunächst ein Körper dienen. Man wähle einen Quader (rechtwinkliges Parallelepiped) und denke sich dessen Lage (Fig. 78; $\frac{1}{2}$, 45^0) gegenüber einer Bildebene E so, daß Fläche $ABCD$ ($EFGH$) parallel \bar{E} ist. Wir nehmen zur Abwechslung eine horizontale Lage der Bildebene an. Ferner halte man das Auge derart über den Quader, daß die Sehstrahlen in der Richtung des Pfeiles S_1 annähernd parallel AE (FB usf.), also vertikal verlaufen. Das Auge ist demnach sehr hoch über der Ebene E (in einer Art Vogelperspektive) anzunehmen. Alsdann bedeckt der Quader für das

*) Bei solchen Figuren werden auch hier die Verzerrungszahlen beigesetzt werden.

Auge auf der Bildebene E ein Feld, das begrenzt wird durch das Rechteck $A_1B_1C_1D_1$. Bei dieser Lage des Quaders ist $A_1B_1C_1D_1 \cong ABCD$ ($EFGH$). Man nennt diese Figur das Normalbild (oder Orthogonalbild) des Quaders in bezug auf Bildebene E , da die Projektionsstrahlen normal, d. h. senkrecht (orthogonal) zu \tilde{E} stehen. Es ist sofort klar, daß das Normalbild geometrisch bestimmt ist durch die Fußpunkte aller Lote, die von sämtlichen Punkten des Körpers auf E gefällt werden können. Faßt man dabei die Ecken des Quaders besonders ins Auge, so sind demnach die Punkte $A_1B_1C_1D_1$ nicht allein die Bilder von A, B, C und D , sondern zugleich von E, F, G und H . Hiernach müßte A_1 noch mit E_1, B_1 mit F_1 usf. bezeichnet werden. Ein derartiges Zusammenfallen der Projektionsbilder ist eine besondere Eigenart der Normalprojektion, die ihr vielfach

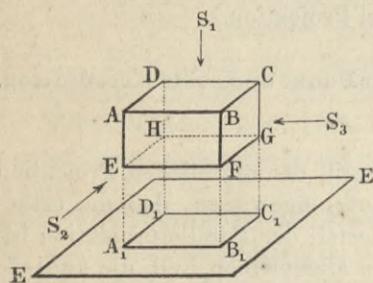


Fig. 78 (129).

die Anschaulichkeit raubt. Dieser Nachteil wird nun, wie wir sehen werden, durch besondere Vorzüge ausgeglichen.

Markiert man die Figur $A_1B_1C_1D_1$ auf Ebene E durch den Stift und versieht sie mit einer Färbung, die dem Quader angepaßt ist, so wird auch hier das Auge beim Beschauen des Bildes denselben Eindruck haben, als wenn es den Körper selbst sähe (vergl. Einleitung zu § 1)²⁹).

Die Bildebene kann nun die verschiedensten Lagen annehmen. Hier sollen die einfachsten bevorzugt werden. Hält man z. B. die Bildebene hinter den Körper parallel zur Fläche $AEFB$ ($DHGC$) in sog. frontale Lage und blickt in der Richtung des Pfeils S_2 senkrecht gegen die Bildebene, so erhält man als Bild ein anderes Rechteck $A_2E_2F_2B_2$ bez. $D_2H_2G_2C_2$ (hier nicht gezeichnet). Wir erblicken also den Quader in einer anderen Ansicht, aufrecht vor uns stehend. Das letzte Bild heißt daher auch Aufriß (Frontalriß, Standriß) zum Unterschiede von jenem ersten Bilde, das aus naheliegenden Gründen Grundriß genannt wird. Die Frontalebene wird von uns Aufebene genannt.

Da der Raum nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt ist, so liegt es nahe, den Quader auch nach der dritten Hauptrichtung zu betrachten, die senkrecht zur Ebene der beiden ersten steht. Blickt man in der Richtung des Pfeils S_3 , so bietet sich als Seitenriß (Profilriß) oder kurz als „Profil“ ein Rechteck $B_3F_3G_3C_3$ ($A_3E_3H_3D_3$) dar, wenn zugleich die Bildebene parallel $BFGC$ ($AEHD$), also auch senkrecht zu S_3 gehalten wird.

Diese drei Projektionen oder Bilder sind ebene Figuren, und es ist einleuchtend, daß die geometrische Phantasie aus ihrem Anblicke allein den Körper selbst in allen Einzelheiten aufbauen kann. Während man aber bei der schrägen Projektion mit einem Bilde ausreicht, müssen hier

zur vollen Klarheit mehrere beitragen. So wird es nach einiger Übung nicht schwer fallen, aus der Gestaltung obiger drei Rechtecke vor dem geistigen Auge die Gestalt des körperlichen Quaders herauswachsen zu lassen. Bei allen Rissen, Karten, Plänen, Photographien und anderen Bildern ist die geometrische Einbildungskraft in ähnlicher Weise tätig. Oft wird es nicht einmal nötig sein, die Bildebene in alle oben genannten Hauptlagen zu versetzen; denn in vielen Fällen genügt wohl schon die Betrachtung des Grund- und Aufrisses oder des Aufrisses und Profiles allein, um einen hinreichend klaren Einblick in die körperliche Natur des geometrischen Gebildes zu gewinnen.

Die drei Hauptlagen der Bildebene (\tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{E}_3 oder \tilde{I} , \tilde{II} , \tilde{III} in Fig. 79) bilden in ihrem gegenseitigen Schnitte ein rechtwinkliges Dreieck (körperliche Ecke). Die Schnittachse zwischen \tilde{I} und \tilde{II} soll stets mit OX bezeichnet werden, die übrigen entsprechend mit OY und OZ in ähnlicher Weise wie früher bei der Schrägprojektion; nur haben wir dort wiederholt der Ebene \tilde{II} die seitliche Lage gegeben (vgl. Fig. 5), um in die Entstehung der Schrägbilder einen besseren Einblick zu gewinnen, als es bei der gewöhnlich frontalen Lage dieser Bildebene möglich gewesen wäre. Die drei Achsen OX , OY , OZ laufen parallel den in Fig. 78 durch Pfeile angedeuteten Projektionsrichtungen (13) und heißen kurzweg Projektions-Achsen.

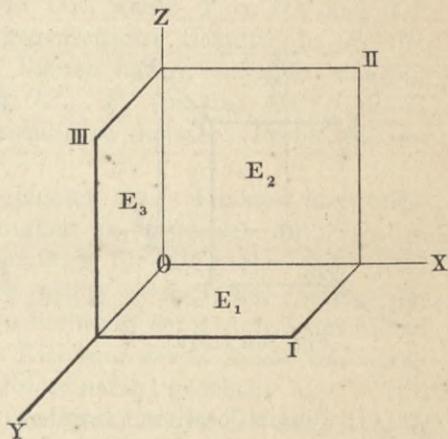


Fig. 79 (130).

II.

Die ganze bisherige Betrachtung führt zu der Frage: In welcher Weise stellen wir uns ein System von Regeln für die Normalprojektion her? Bei der Untersuchung der Schrägprojektion, die einen praktisch-propädeutischen Charakter trug, begannen wir sofort mit der Behandlung einfacher Körperflächen auf Grund unmittelbarer Anschauung. Hier aber wollen wir das Problem in größerer Schärfe fassen. Wir vereinfachen zunächst die Untersuchung, indem wir mit dem einfachsten geometrischen Gebilde, dem Punkte, beginnen. Hierauf sollen folgen die begrenzten Gebilde: Strecke, Dreieck, Vieleck, Kreis; Würfel, Quader, Polyeder und endlich die krummflächigen Körper.

Wir stellen uns nunmehr die

Aufgabe 70 (116): die Normalprojektionen eines allgemein gegebenen, fest bestimmten Punktes in den drei Haupt-Bildebenen zu bestimmen.

Analyse: Wir nehmen also hier diejenige Aufgabe vor, mit der wir oben die Lehre von der schrägen Parallelprojektion beschlossen haben, und betrachten zunächst die Lage des Punktes P zu den drei Bildebenen \tilde{I} , \tilde{II} und \tilde{III} auf Grund der parallelperspektivischen Fig. 80a; $\frac{1}{2}, 45^\circ$. Überhaupt mögen die geometrischen Analysen der normalprojektivistischen Aufgaben zuerst in der gewohnten schrägen Darstellung vorgenommen werden.³⁰⁾ Soll P normal projiziert werden, so muß zunächst seine

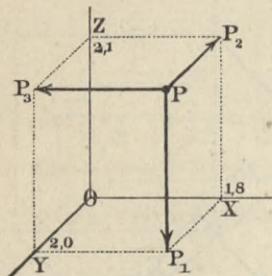


Fig. 80a (131a).

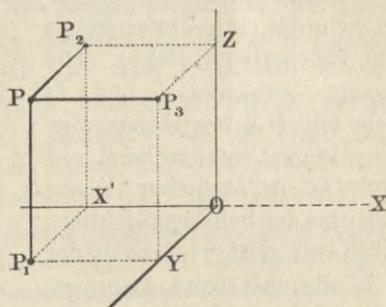


Fig. 80b (131b).

Lage eindeutig bestimmt werden. Das geschieht nun am einfachsten mit Hilfe der senkrechten Abstände des Punktes P von den drei Bildebenen. Man bezeichnet sie mit x, y, z entsprechend den drei Achsen, denen sie parallel laufen (6), und nennt sie nach dem Vorgange des Cartesius die räumlichen Koordinaten des Punktes P in bezug auf die drei Achsen OX, OY, OZ . Daß P durch x, y, z eindeutig bestimmt ist, geht aus folgender Betrachtung hervor. Man hat nämlich drei stereometrische Örter für P :

1. Die Parallelebene im Abstände x zur Profilebene (\tilde{III}),
2. " " " " y " Frontalebene (\tilde{II}),
3. " " " " z " Horizontalebene (\tilde{I}).

Fällt man jetzt von P die Lote auf \tilde{I} , \tilde{II} und \tilde{III} bis P_1, P_2, P_3 , so sind diese Fußpunkte die gesuchten Bilder in Normalprojektion. Sie erscheinen hier allerdings noch im Schrägbilde. Um weitere Eigenschaften für P_1, P_2 und P_3 zu finden, fällt man von P_1 die Lote auf OX bez. OY . Man sieht sofort, daß $YP_1 = OX = x$ und daß $XP_1 = OY = y$. Somit ist die Lage von P_1 in \tilde{I} durch zwei Örter eindeutig bestimmt: durch die beiden im Abstände x und y zu OY und OX gezogenen Pa-

rallelen. Ganz analog findet man Örter für P_2 und P_3 in den betr. Bildebenen und erkennt schließlich, daß abgesehen von $OX = x$ und $OY = y$ auch $OZ = z$. Diese Analyse führt auf eine Quaderfigur mit der Diagonale OP , welche allen folgenden Konstruktionen zu Grunde liegt und das wichtige Datum liefert:

Durch die Koordinatenabschnitte auf den Achsen sind die Projektionen bestimmt (und umgekehrt).

Konstruktion: Für die gegebenen Werte $x = 1,8$ cm; $y = 2,0$ cm; $z = 2,1$ cm lassen sich nun sofort die Normalprojektionen im Schrägbilde darstellen. Man zeichnet das Achsenkreuz $OXYZ$ schräg auf und schneidet die Koordinaten auf OX , OZ und OY (hier in Verkürzung) ab, zieht die Hilfsparellen durch X zu OY und OZ , durch Y zu OX und OZ , durch Z zu OX und OY bis zum gegenseitigen Schnitte in P_1 , P_2 und P_3 . Will man noch P selbst im Raume haben, so zieht man die drei Projektionslote durch P_1 (parallel OZ), P_2 (parallel OY) und P_3 (parallel OX), die sich in P zusammenschließen müssen (Probe auf die Genauigkeit).

Bekanntlich pflegt man den Koordinaten eines Punktes Richtungszeichen beizulegen, um jegliche Vieldeutigkeit zu vermeiden. Wir wollen hier annehmen, daß als positive Richtung für die Achse OX (kurz X -Achse) die Richtung von links nach rechts (etwa nach Osten) angesehen werde; daß ferner als positiv die Richtung der Y -Achse von hinten nach vorn (etwa nach Süden) und die Richtung der Z -Achse von unten nach oben gelte. Sind daher die Koordinaten gegeben: $x = -1,8$; $y = 2,0$ und $z = 2,1$ cm, dann haben wir den Punkt in dem Oktanten links, vorn, oben zu suchen (Fig. 80b, Neben-Dreikant zu Fig. 80a; $\frac{1}{2}$, 45°). Man kann in dieser Weise die Vorzeichen weiter abändern und Punkte in allen Oktanten fixieren.

Aufgabe 71 (117). Gegeben ist der Grundriß eines Punktes und seine Höhenkoordinate, man soll die anderen Normalprojektionen suchen.

Die vorige Aufgabe lehrte uns, die Projektionen aus den Koordinaten zu bestimmen auf Grund des oben angeführten Datums. Hier liegt eine Umkehrung jener Aufgabe vor. Der Anblick des Projektionsquaders OP (Fig. 80) liefert sofort die Lösung. Man zieht durch die gegebene P_1 die Hilfsparellen P_1X und P_1Y und durch X bez. Y die Hilfsparellen zu OZ ; hierauf schneidet man auf OZ die gegebene Höhenkoordinate (z) ab und zieht durch Z die Hilfsparellen zu OX und OY bis zum Schnitte P_2 und P_3 mit den vorigen Parallelen (Probe?).

Aufgabe 72 (118). Gegeben sind Grund- und Aufriß eines Punktes; man soll den Seitenriß suchen.

Diese Aufgabe unterscheidet sich nicht wesentlich von der vorigen, da durch Grundriß und Z -Koordinate bereits der Aufriß eindeutig bestimmt

ist. Hier soll nur hervorgehoben werden, daß bei fest gegebenem Grundriß der Aufriß nicht mehr völlig willkürlich gegeben werden darf (und umgekehrt), denn durch den Grundriß ist auch bereits eine Koordinate des Aufrisses bestimmt, sodaß als Spielraum für P_2 nur noch die Parallele durch X zu OZ bleibt. P_1 und P_2 sind daher in derselben Ebene im Abstände x von \widetilde{E}_3 anzunehmen. Die Lösung der obigen Aufgabe geschieht nun einfach so, daß man (Fig. 131) durch P_1 und P_2 die Hilfsparallelen zieht zu OX bis zum Schnitte Y und Z mit den anderen Achsen und dann durch Y und Z die Hilfsparallelen legt zu OZ bez. OY . Ihr Schnitt ergibt P_3 . (Probe?)³¹⁾

III.

Man empfindet es gewiß als einen Übelstand, daß diese Normalprojektionen nicht unmittelbar vor uns stehen, sondern daß sie erst unter Vermittlung des Schrägbildes dargeboten werden. Nur der Aufriß P_2 erscheint in natürlicher Lage, während Grund- und Seitenriß mehr oder minder verzerrt auftreten. Nun kommt es, wie bereits bemerkt, bei der Normalprojektion darauf an, aus dem Anblick der einzelnen, unverzerrten, ebenen Bilder ein Urteil über die räumliche Lage und Gestaltung eines geometrischen Gebildes zu gewinnen. Es ist daher ganz gleichgültig, ob man die Bildebenen in ihrem körperlichen Zusammenhang als Schrägbild zeichnet, oder ob sie für sich als einzelne Bildtafeln erscheinen. Man ist daher überein gekommen, Grund- und Seitenebene aufzuklappen und zwar derart, daß sie mit der gewohnten Bildtafel, der Aufrißtafel, in eine Ebene fallen. Man denkt sich zu dem Zwecke den Zusammenhang längs OY gelöst und \widetilde{E}_1 so weit um OX nach unten gedreht, daß sie in die Erweiterung von \widetilde{E}_2 zu liegen kommt (Fig. 81a; $\frac{1}{2}$, 45°). Ferner wird \widetilde{E}_3 so um OZ gedreht, daß sie ebenfalls in die Erweiterung von E_2 fällt. Die Pfeile in der Figur geben die Drehrichtung an. Die Wege der Punkte P_1 , Y und P_3 sind natürlich Kreisbogen, erscheinen hier aber als Ellipsenbogen. Der Anblick des aufgeklappten Dreikants ist durch Fig. 81b ohne Beiwerk dargestellt. Man sieht, daß die Y -Achse in zwei Lagen auftritt, in der Grundstellung OY_1 und der Seitenstellung OY_3 . Der Projektionsquader ist somit zu einem ebenen, aber gebrochenen Linienzug $XP_1Y_1Y_3P_3ZZP_2$ ausgebreitet. Dieses sog. Projektionsdiagramm bildet von jetzt ab die Grundlage für alle Normalprojektionen. Bei allen Zeichnungen dieser Projektionsart beginnt man damit, das vorliegende Blatt durch zwei Geraden, die horizontale XOY_3 und die vertikale ZOY_2 , in vier Felder zu teilen, von denen drei die aufgeklappten Bildebenen \widetilde{I} , \widetilde{II} , \widetilde{III} darstellen, während das vierte Feld OY_1Y_3 Nebenzwecken dient.

Durch diese Aufklappung werden mehrere Vorteile erzielt. Zunächst erblickt man die Bilder in gewohnter Weise auf der (erweiterten) Frontalebene.

Dann konstruiert man ausschließlich in einer Ebene. Endlich vereinfachen sich die Konstruktionslinien wesentlich, da die Hilfsparallelen an der X - und Z -Achse in eine Gerade fallen. Zwar werden YP_1 und YP_3 auseinandergerissen; aber es gelingt leicht, den Zusammenhang durch den Bogen Y_1Y_3 herzustellen. Auch in dieser Aufklappung wird man bei einiger Übung die Lage von P im Raume richtig beurteilen.

Die vorhergehenden Aufgaben dieses Paragraphen sind nun für das aufgeklappte Dreikant zu lösen. Beispielsweise lautet die Lösung der Aufgabe 71 jetzt einfach (Fig. 81b) so: Ziehe durch P_1 die Hilfsparallelen nach OX und OY_1 , übertrage OY_1 in die Profilstellung durch den Bogen Y_1Y_3 und ziehe durch Y_3 die Hilfsparallele zu OZ ; schneide dann die Z -Koordinate auf OZ ab und ziehe durch Z die Hilfsparallele (zu XOY_3) bis zum Schnitte P_3 mit den bereits vorhandenen.

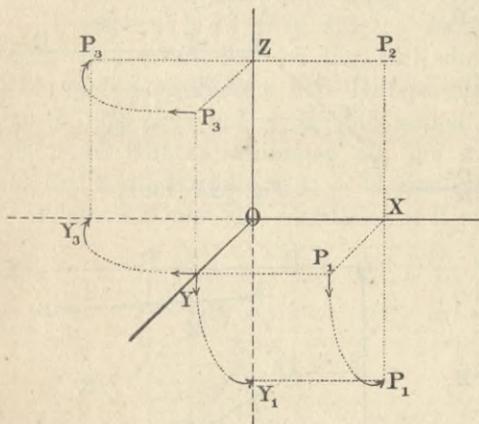


Fig. 81a (132a).

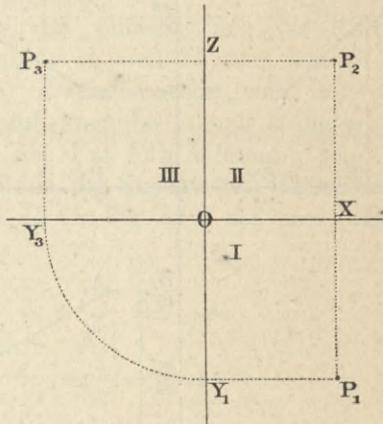


Fig. 81b (132b).

Sehr häufig begnügt man sich mit zwei Bildern, meist Grund- und Aufriß. Dann bedarf es bloß der Festlegung der X -Achse und vielleicht noch der Achse Y_1OZ . Der Vollständigkeit und Bestimmtheit halber betrachten wir zunächst durchweg alle drei Projektionen. Ferner pflegt man auch nicht selten das Dreikant links, vorn und oben (Fig. 80b) als positiven Oktanten anzunehmen, sodaß dann in Fig. 80a die X -Koordinate negativ wäre. In diesem Falle löst man den Verband der Bildtafeln ebenfalls bei OY , klappt aber die Seitenebene YOZ nach rechts. Die Konstruktionsregeln bleiben genau dieselben. Wir wählen meist die Auffassung der Fig. 80a und die Aufklappung nach Fig. 81a, da sie sich an die übliche algebraische Behandlung (analyt. Geometrie des Raumes) am engsten anschließt.

§ 10 (13). Strecke, ebenes Vieleck und Kreis.

Aufgabe 73 (119). Gegeben sind die Endkoordinaten einer Strecke, gesucht ihre Normalprojektionen.

Analyse. Da eine Strecke im Raume durch die beiden Endpunkte bestimmt ist, so muß die Aufgabe lösbar sein durch wiederholte Anwendung der Aufgabe 70. Wir betrachten zunächst (Fig. 82a) das Problem im Schrägbild des geschlossenen Dreikants und zwar vorläufig nur den Grundriß. A_1 ist bestimmt durch die X -Koordinate ($= OP$) und die Y -Koordi-

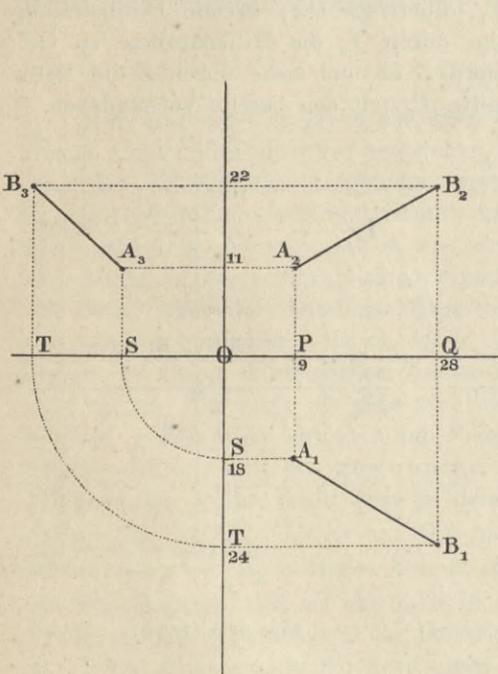


Fig. 82b (133b).

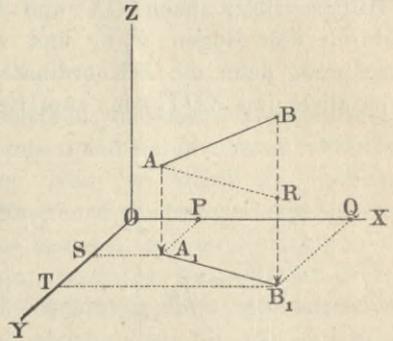


Fig. 82a (133a).

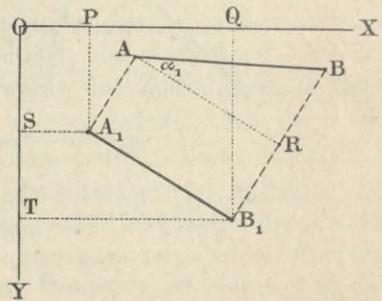


Fig. 82c (133c).

nate ($= OS$) von A . Ebenso ist B_1 bestimmt durch die entsprechenden Koordinaten OQ und OT . Für Aufebene (\tilde{II}) und Seitenebene (\tilde{III}) fällt die Betrachtung genau so aus. Hierauf gründet sich folgende

Konstruktion (im offenen Dreikant Fig. 82b)³²⁾: Man legt das Achsenkreuz $OXYZ$ fest, schneidet auf den Achsen (auf OY zweimal, in Grund- und Seitenstellung) die Koordinaten ab (für A : 9, 18 u. 11 mm, für B : 28, 24 u. 22 mm) bis P , Q , S , T usw. und zieht durch die Endpunkte die Hilfsparellenen bis zum gegenseitigen Schnitte in A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 . Hier tritt, wie man sieht, das „Projektionsdiagramm“ zweimal auf.

Aufgabe 74 (120) Man soll die Neigungswinkel einer Strecke gegen die Bildebene und ihre wahre Länge konstruieren.

Analyse: Wir betrachten zunächst nur den Neigungswinkel α_1 gegen die Grundebene (Fig. 82a). Er entsteht da, wo die verlängerte AB mit der verlängerten A_1B_1 auf \tilde{I} zusammentrifft (9). Indem man nun durch A die Parallele zu A_1B_1 zieht bis zum Schnitte R mit BB_1 , hat man α_1 nach A hin verlegt, und er ist somit enthalten in dem rechtwinkligen Dreiecke ABR , dessen Konstruktion für sich möglich ist, denn $AR = A_1B_1$ (aus Fig. 82b in wahrer Größe entnehmbar) und $BR =$ Differenz der Höhenkoordinaten, ebenfalls aus 82b zu entnehmen. Wir ziehen es hier vor, die Konstruktion nach der Methode der Umklappung vorzunehmen, d. h. wir drehen das Trapez ABA_1B_1 um A_1B_1 als Achse nach der einen (oder anderen) Seite, bis es in die Grundebene fällt. Die Trapezfigur ist dann nach dem vorhergehenden einfach festzulegen. Gleichzeitig aber wird damit auch die wahre Länge AB bestimmt.

Konstruktion (Fig. 82c): Man benutzt zunächst nur das Feld OXY und entnimmt der Fig. 82b die Punkte A_1 und B_1 , mit den zugehörigen Koordinaten und Hilfssparallelen. Dann errichtet man in A_1 und B_1 die Lote auf A_1B_1 und schneidet auf ihnen bis A und B die zugehörigen Höhenkoordinaten ab, die man aus Fig. 82b entnimmt, nämlich für A_1 die Strecke $PA_2 = 11$ mm und für B_1 die Strecke $QB_2 = 22$ mm. Zwischen AB und der Parallelen AR zu A_1B_1 (in Fig. 82c) hat man den

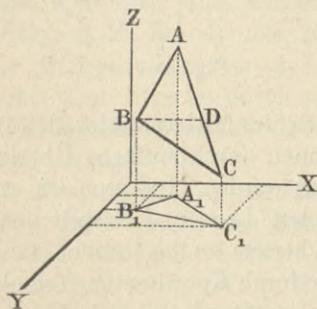


Fig. 83a (134a).

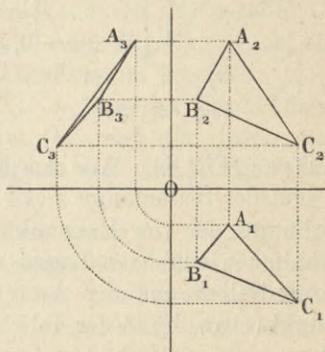


Fig. 83b (134b).

Neigungswinkel α_1 und zugleich in AB die wahre Länge a . Natürlich kann auch die Umklappung nach der Achse OY hin vorgenommen werden, endlich könnte man sich, wie oben angedeutet, mit der Konstruktion des Dreiecks ABR über $AR = A_1B_1$ begnügen.³³⁾

Aufgabe 75 (121). Gegeben sind die Eckkoordinaten eines Dreiecks, man soll die drei Normalprojektionen suchen.

Analyse: Angenommen $A_1B_1C_1$ (Fig. 83a) sei der Grundriß des durch seine Eckkoordinaten (8, 4, 20; 4, 10, 12; 17, 15, 6 mm) gegebenen Dreiecks. Die Punkte A_1, B_1, C_1 sind durch Hilfsparallelen festgelegt; dasselbe gilt für Aufriß und Seitenriß. Somit wiederholt sich die vorige Aufgabe zweimal. Hierauf gründet sich folgende

Konstruktion (Fig. 83b): Man schneidet die betr. Koordinaten auf den Achsen ab und konstruiert dreimal das Projektionsdiagramm.

Die weitere Verfolgung des in den letzten Aufgaben eingeschlagenen Weges führt im allgemeinen auf windschiefe Vielecke, die kein besonderes Interesse haben. Wir spezialisieren daher und wenden uns zur

Aufgabe 76 (122). Von einem Quadrat in horizontaler Lage, dessen Vorderseite brachial verläuft, sind Seitenlänge und Koordinaten des Mittelpunktes gegeben; man soll die Normalprojektionen konstruieren.

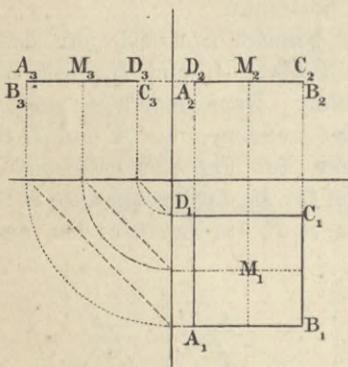


Fig. 84 (135).

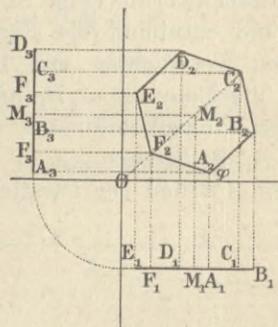


Fig. 85 (136).

Analyse (Fig. 84): Aus den Koordinaten des Mittelpunktes M (10, 12, 13 mm) und der Seitenlänge s (14 mm) können durch einfache Überlegung die Koordinaten der vier Eckpunkte bestimmt werden. Indessen ist es hier und in ähnlichen einfachen Lagen am kürzesten, Lage und Gestalt der Projektion unmittelbar aus der Anschauung heraus zu bestimmen und nur einen Punkt (etwa M) in der üblichen Weise durch Koordinaten festzulegen. Denkt man sich nämlich das Auge über dem Quadrate und der Grundebene, dann zeigt sich sofort, daß der Grundriß wieder ein Quadrat sein muß, dessen Mittelpunkt der Grundriß M_1 ist. Beim Aufriß hält man das Auge vor das Objekt und die Aufebene. Hier schrumpft die Projektion zu einer Strecke zusammen, die gleich s sein muß; die Aufrisse A_2 und D_2, B_2 und C_2 fallen paarweise zusammen und bilden Doppelpunkte der Projektion, wobei nur A und B für das projizierende Auge sichtbar sind. Für das Profil hat man von rechts nach links gegen die Seitenebene zu blicken, wobei nur B und C sichtbar bleiben.

Konstruktion: Man legt M_1, M_2, M_3 durch das Projektionsdiagramm fest und zieht von M_1 aus beiderseits (parallel OX und OY) Strecken gleich $\frac{1}{2}s$. Indem man durch deren Endpunkte Hilfssparallelen in allen Bildebenen zieht, erhält man durch den gegenseitigen Schnitt als Grundriß das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$, als Aufriß die Doppelstrecke A_2B_2, C_2D_2 und als Seitenriß die Doppelstrecke B_3C_3, A_3D_3 .

Nebenbei sei bemerkt, daß bei der Übertragung der Punkte auf OY aus der Grundstellung in die Profilstellung statt der Bogen in Fig. 84 die Sehnen benutzt werden können, die man mit Hilfe eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieckslineals (durch Parallelverschiebung) zieht.

Aufgabe 77 (123). Von einem regelmäßigen Sechseck in frontaler Lage sind gegeben der große Halbmesser, die Koordinaten des Mittelpunktes und die Bedingung, daß eine Seite einen gegebenen Neigungswinkel (φ) zur Grundebene habe; gesucht sind die Normalprojektionen.

In Fig. 85 seien $x_0 = 10, y_0 = 11, z_0 = 9, r = 8 \text{ mm}, \varphi = 45^\circ$. Die Projektionen M_1, M_2, M_3 des Mittelpunktes sind in bekannter Weise durch das Projektionsdiagramm bestimmt. Da der Aufriß wegen des Parallelismus zu \tilde{II} ein kongruentes Sechseck sein muß, so beginnt man hier mit der weiteren Festlegung der Eckpunkte. Für $A_2, B_2, C_2 \dots$ hat man als ersten Ort den Kreis um M_2 mit r . Die Bedingung, daß AB , also auch A_2B_2 die gegebene Neigung haben soll, legt A_2B_2 (besser zunächst $C_2F_2 \parallel A_2B_2$) fest, wodurch auch die übrigen Aufrißpunkte bestimmt sind. — Der Grundriß ist eine Strecke durch M_1 parallel OX (im Abstände y_0). Für die einzelnen Punkte ($A_1, B_1, C_1 \dots$) hat man je zwei Örter, z. B. für A_1 : die genannte Parallele im Abstände y_0 zu OX und die Hilfssparallele von A_2 nach OX . — Für das Profil finden wir wiederum eine Strecke durch M_3 parallel OZ und für jeden einzelnen Punkt die beiden Örter: Parallele durch M_3 zu OZ und Hilfssparallele vom Aufriß nach OZ .

Die Konstruktion beginnt mit der Festlegung von M_1, M_2, M_3 . Dann beschreibt man um M_2 den Kreis mit r , zieht durch M_2 die Gerade unter 45° zu OX (diese geht zufällig durch O) bis zum Schnitte C_2 und F_2 mit dem Kreise und bestimmt A_2, B_2, D_2, E_2 . Hierauf zieht man durch M_1 die Parallele zu OX und die Hilfssparallelen von den Aufrißpunkten nach OX bis zu den Schnitten $A_1, B_1, C_1 \dots$ mit der ersten Parallelen. Durch Übertragung nach der Seitenebene und durch die Hilfssparallelen vom Aufriß nach OZ wird dann das Profil bestimmt. Auch hier wird man darauf achten, welche Punkte vorn, d. h. dem projizierenden Auge am nächsten liegen.

Man sieht, daß bei Projektionsaufgaben die natürlichen, d. h. leicht meßbaren Bestimmungsstücke eines regelmäßigen Vielecks sind: 1. Koordinaten der Mittelpunkte; 2. Halbmesser (kleiner oder größer); 3. Lagebedingung für Ebene, Seite und Ecke.

Projektionen in allgemeinerer Lage werden in folgender Weise behandelt.

Aufgabe 78 (124). Man soll ein regelmäßiges Achteck projizieren, von dem gegeben sind: die Koordinaten des Mittelpunktes und der große Halbmesser, ferner die Bedingung, daß ein großer Durchmesser vertikal stehe und im übrigen die Ebene gegen die Aufebene unter dem Winkel φ geneigt sei.

Analyse: Es werde die Seitenebene rechts (statt links) angenommen, sodaß bei der Aufklappung die Seitenebene ebenfalls nach rechts fällt.

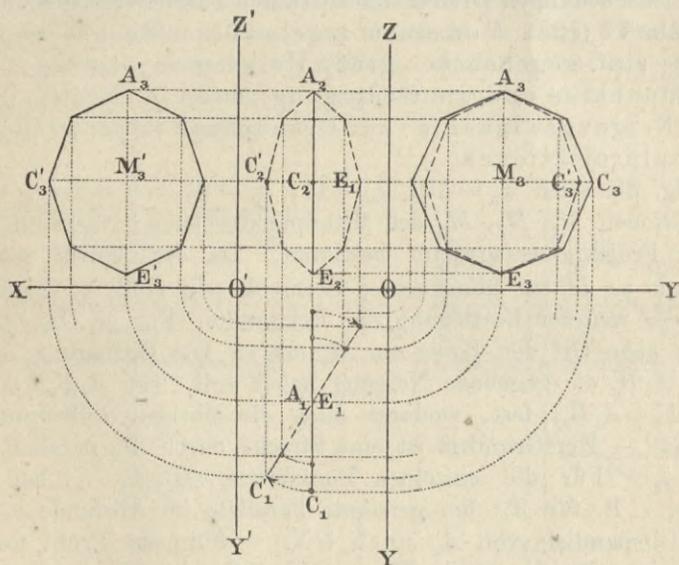


Fig. 86 a (137 a).

Ferner sei $x_0 = 7$ (von O nach links gemessen), $y_0 = 9$, $z_0 = 10$ mm; $r = 8$ mm*); Neigungswinkel $\varphi = 60^\circ$. Zur Bestimmung der Projektion bedienen wir uns hier im folgenden der Methode der Drehung: Wir projizieren zuerst das Achteck in einer möglichst einfachen Lage und gehen durch geeignete Drehung in die gesuchte allgemeinere über. Hier denken wir uns z. B. die Achtecksebene bei feststehendem Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) zunächst in der dritten Hauptlage (lateral). Die Projektionen für diese einfache Lage sind nach der vorigen Aufgabe leicht zu finden. Man geht hierbei vom kongruenten Achteck $A_3 \dots C_3 \dots E_3 \dots$ des Profils (in Fig. 86 a von ZOY nach rechts) aus und legt dann die Strecken $A_2 C_2 E_2 \dots$ und $A_1 C_1 E_1$ im Mittelfelde links von ZOY als Aufriß und Grundriß fest. Nunmehr erteilt man (im Raume) dem Achteck eine

*) Die Figur ist gegen diese Angaben etwas vergrößert.

Drehung um den Durchmesser AE als Achse. Da die neue Lage einen Winkel von 60° gegen \tilde{II} bilden soll, so muß um 30° gedreht werden. Abgesehen von Punkten der Achse AB beschreibt jede Ecke des Vielecks im Raume einen Kreisbogen von 30° , und es fragt sich nun, welche Bahnen beschreiben gleichzeitig die Projektionen? — Wenn z. B. C im Raume (Fig. 86b) den Bogen CC' nach links beschreibt, so muß der Grundriß C_1 den kongruenten Bogen C_1C_1' nach links beschreiben, da die Drehungsebene parallel \tilde{I} ist. Der Aufriß C_2 dagegen muß eine geradlinige Verschiebung C_2C_2' parallel OX erfahren, da die Drehungsebene senkrecht auf \tilde{II} steht. Am leichtesten festzulegen ist C_1' , denn hierfür hat man als Örter: die Gerade A_1C_1' (Fig. 86a) unter 30° Neigung zu A_1C_1 und den Kreis um $A_1(M_1)$ mit A_1C_1 . Der neue Aufriß C_2' wird bestimmt: durch die Parallele durch C_2 zu OX und die Hilfsparallele durch die bereits festgelegte C_1' nach OX . Wenn C_1' und C_2' festgelegt sind, dann erhält man das nach rechts gelegte Profil C_3' durch Vollendung des Projektionsdiagramms. Für die übrigen Eckpunkte gilt genau dasselbe, was für C auseinandergesetzt war. Die Punkte A , M und E auf der Achse bleiben natürlich in der alten Lage. Hiernach verläuft sehr einfach die

Konstruktion: Man legt die Achtecksprojektionen in der einfachen Lage fest, zieht durch A_1 die Gerade unter 30° Neigung und beschreibt um $A_1(M_1)$ die Bogen C_1C_1' usf. bis zum Schnitte $C_1' \dots$ mit der Geraden. Hierdurch entsteht der neue Grundriß, ebenfalls eine Strecke. Ferner legt man durch $A_2, C_2, E_2 \dots$ die Parallelen zu OX , zieht vom Grundrisse aus die Hilfsparallelen und erhält so den neuen Aufriß $A_2 \dots C_2' \dots E_2' \dots$, ein symmetrisches Achteck. Indem man schließlich noch nach rechts die Hilfsparallelen zum vollständigen Dia-

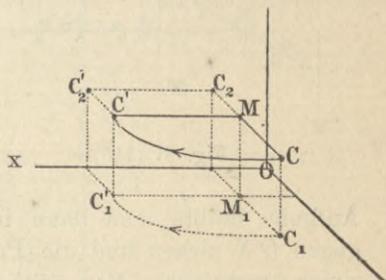


Fig. 86b (137b).

gramm zusammenführt, ergibt sich das neue Profil $A_3' \dots C_1' \dots E_3' \dots$, ebenfalls ein Achteck. Da hier das neue Achteck die Figur des alten belastet, so verschiebt man häufig die ganze Profilfigur noch um eine beliebige Strecke parallel OX nach links, eine Tätigkeit, die ausgeführt werden kann, ohne vorher die Figur $A_3'B_3'C_3' \dots$ rechts zu konstruieren, wie Fig. 86 am linken Teile ohne weiteres zeigt. Streng genommen ist die Figur $A_3' \dots C_3' \dots E_2' \dots$ links nichts anderes, als eine Normalprojektion des neuen Profils rechts auf eine Hilfs-Seitenebene links.

Die Behandlung des Kreises, zu der wir uns jetzt wenden, schließt sich unmittelbar an die regelmäßigen Vielecke an, indem man Punkte projiziert, die im Kreise regelmäßig verteilt sind.

Aufgabe 79 (125). Von einem Kreise in frontaler Lage sind gegeben die Koordinaten des Mittelpunktes und der Halbmesser,

man soll die Normalprojektionen suchen und dann den Kreis durch Drehung um den vertikalen Durchmesser in eine schiefe Lage bringen.*)

Analyse: Es sei $x_0 = 10$, $y_0 = 6$, $z_0 = 8$, $r = 7$ mm (Fig. 87a). Wir wollen hier auf den Entwurf eines Seitenrisses verzichten, den man übrigens leicht nach der rechten Seite hin anbringen könnte. Ohne Zweifel ist der Aufriß ein kongruenter Kreis und der Grundriß eine Strecke gleich dem Durchmesser. Geht man daher von den sofort bestimmten Projektionen M_1 , M_2 aus, so ist der Aufrißkreis durch M_2 und r festgelegt. Die Strecke in der Grundebene ist bestimmt durch die Parallele im Abstände y_0 zu OX und die äußersten Hilfsparallelen aus dem Aufriß nach OX . Es ist nun wichtig, auch hier die zugeordneten Punkte von

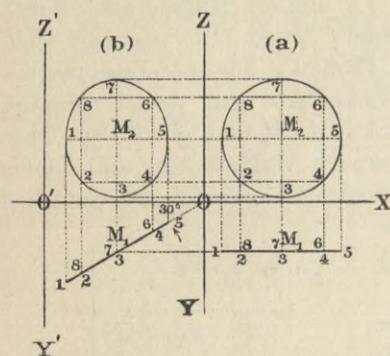


Fig. 87 (138).

Grund- und Aufriß zu kennen. In der Figur sind acht regelmäßig verteilte Punkte ausgewählt. Für die Punkte 1, 5, 3, 7 sind bereits durch die vorhandenen Linien die zugeordneten Punkte erkennbar. Die Zwischenpunkte 2, 4, 6, 8 im Aufriß bestimmen die zugeordneten im Grundriß durch entsprechende Hilfsparallelen. — Die Konstruktion ist hiernach ohne weiteres auszuführen.

Wir drehen nun den Kreis um den vertikalen Durchmesser $7\bar{3}$, bis seine Ebene mit \bar{II} den Neigungswinkel $\varphi = 30^\circ$ bildet. Entsprechend der vorigen Aufgabe müßte man dann in Fig. 87a durch M_1 die Gerade unter 30° gegen OX ziehen und die Punkte 1... 8 in die neue Lage des Grundrisses übertragen. Man würde sodann in der Aufebene durch Heraufgehen mit Hilfsparallelen einen neuen Aufriß bekommen, der schmaler als der alte sein würde. Da nun auch hier die neue Figur die alte belasten würde, so verschiebt man, wie bereits früher angedeutet, die ganze Konstruktion um eine beliebige Strecke nach links (oder rechts, je nach dem verfügbaren Raume) längs OX bis O' , überträgt M_1 und zieht durch diesen Punkt die Schiefe unter 30° gegen $O'X$. Auf dieser Schiefen markiert man die Grundrißpunkte 1... 8 und zieht die Hilfsparallelen nach OX . Entsprechend zieht man durch die Aufrißpunkte in Fig. 87a die Parallelen zu OX bis zum Schnitte mit den Hilfsparallelen in den Auf-

*) Von hier ab werden die Projektionspunkte nicht selten mit Ziffern ohne Index (statt mit großen lateinischen Buchstaben nebst Index) bezeichnet, namentlich wenn die Punktzahl sehr groß ist. Ihre Bedeutung und Zusammengehörigkeit geht dann aus dem Anblicke der Figur gewöhnlich unmittelbar hervor.

rißpunkten 1...8. Verbindet man diese durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man den neuen Aufriß. Zu den neuen Projektionen in Fig. 87b läßt sich, wie bereits angedeutet, das Profil (links oder rechts) in bekannter Weise finden.

Der neue Aufriß erinnert an eine Ellipse. In der Tat wird bei dieser normalen Parallelprojektion der Durchmesser 37 des Kreises in natürlicher Größe abgebildet, während die darauf senkrecht stehenden Sehnen 24, 15, 86 in konstantem Verhältnis ($\cos 30^\circ$) verkürzt werden (vergl. Anmerkung ²⁶). Man bemerke hier, daß der Projektionszylinder ein schiefer Kreiszylinder und zugleich ein gerader elliptischer Zylinder ist.

Aufgabe 80 (126). Gegeben sind Grund- und Aufriß eines Kreises in orthogonaler Lage, gesucht die Projektionen des Kreises in allgemeiner Lage.

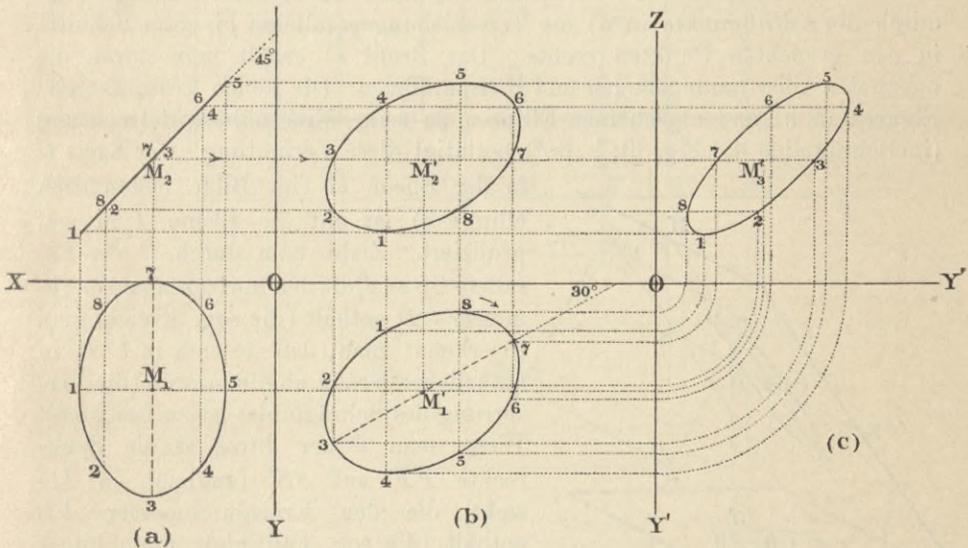


Fig. 88 (139).

Analyse: Die Projektionen in Fig. 88a (auf $\frac{2}{4}$ verkleinert) sind in der aus voriger Aufgabe bekannten Art gefunden für $x_0=21, y_0=19, z_0=22, r=19\text{mm}, \varphi=45^\circ$. Das nach rechts oder links hin zu denkende Profil ist zunächst weggelassen. Will man zu einer allgemeinen Lage übergehen, d. h. zu einer solchen, in der die Kreisebenen zu allen Bildebenen schief stehen, so bedarf es nur noch einer weiteren Drehung. Man denke sich z. B. den Kreis im Raume um die vertikale Achse M_1M rechts herum so weit gedreht, bis

die große Achse $\overline{37}$ der Grundrißellipse einen Winkel von 30° mit OX bildet. Die Punkte des Kreises im Raume beschreiben dabei Kreisbogen, die sich in der Grundebene wiederum als Kreisbogen, in der Aufebene als Strecken parallel OX abbilden (vergl. Fig. 86b). Auch hier führen wir die Drehung nicht an Ort und Stelle (Fig. 88a) aus, sondern nehmen eine Parallelverschiebung nach rechts vor (Fig. 88b). Jeder Punkt in der Grundebene ist dann durch die Drehung des Grundrisses der Fig. 88a um 30° erzeugt. Für den Aufriß hat man jedesmal die Hilfsparallele aus dem neuen Grundriß nach OX und die Verschiebungsparallele zu OX . Das Profil in Fig. 88c ist einfach durch Ergänzung der Fig. 88b auf Grund des Projektionsdiagramms erhalten.

Konstruktion: Man verschiebe M_1 (Fig. 88a) um eine beliebige Strecke nach rechts bis M_1' , ziehe durch M_1' die Gerade unter 30° Neigung zu OX und schneide hier die große Ellipsenachse $\overline{37}$ aus Fig. 88a ab. Dann übertrage man den ganzen Grundriß aus a) nach b) (am besten durch Pausen mit der Nadel) und ziehe die Hilfsparallelen nach oben. Ebenso lege man durch die Aufrißpunkte in a) die Verschiebungsparallelen bis zum Schnitte in den gesuchten Punkten rechts. Das Profil c) erhält man durch die bekannten Übertragungsbogen und Hilfsparallelen. Die neuen krummlinigen Figuren in b) und c) scheinen Ellipsen zu sein. Eine nähere Betrachtung (im Schrägbilde der Fig. 89; $\frac{1}{3}$, 30°) bestätigt diese Vermutung. Der Kreis O

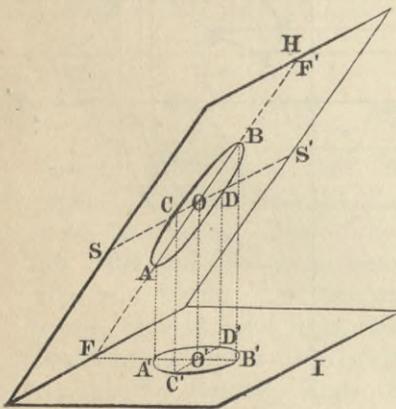


Fig. 89 (140).

in der Ebene \tilde{II} (im Bilde bekanntlich elliptisch) ist auf die Ebene \tilde{I} normal projiziert. Zieht man durch O die Parallele SS' zu \tilde{I} , die den horizontalen Durchmesser CD enthält (die sog. Streichlinie), so erkennt man, daß sie sich in $C'D'$ in natürlicher Größe abbilden muß (die Verzerrung des Schrägbildes ist zu beachten). Wenn man ferner durch O die Senkrechte FF' auf SS' (zugleich in II) zieht, die den Kreisdurchmesser AB enthält (die sog. Falllinie), dann bildet sich letzterer in $A'B'$ verkürzt ab, und es ist $A'B' = AB \cdot \cos \alpha$, wenn α den Neigungswinkel (BFB') angibt. Was für

$A'B'$ gilt, läßt sich für jede Parallelesehne PQ des Kreises nachweisen (hier nicht gezeichnet). Somit ist $A'B'C'D'$ eine auf Grund des Verhältnisses $O'F' : OF = \cos \alpha$ entworfene, verzerrte Kreisfigur, die wir früher (§ 3) als Ellipse definierten.³⁴⁾

§ 11 (14). Normalbilder von Polyedern.

In derselben Weise, wie man die Normalprojektionen der Strecke auf diejenigen des Punktes und die Projektionen der ebenen Figuren auf diejenigen von Strecken zurückführt, lassen sich die Projektionen ebenflächiger Körper auf die Betrachtung von ebenen Flächen gründen.

Aufgabe 81 (127). Ein Würfel soll über Eck projiziert werden; die Grundflächen liegen horizontal und die Seitenflächen haben Neigungen von 30° (60°) zu den vertikalen Bildebenen.

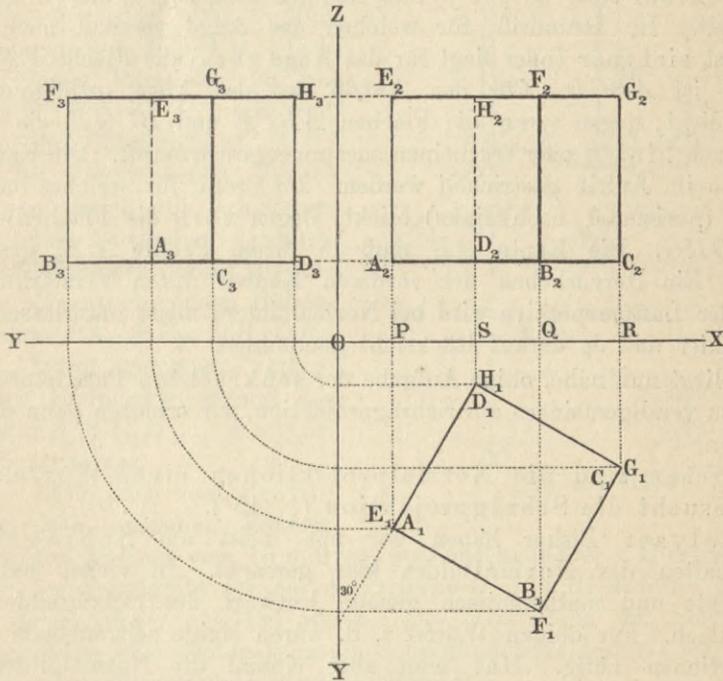


Fig. 90a (141a).

Analyse: Gegeben sind die Koordinaten des Eckpunktes A : nämlich $x_1 = 7$, $y_1 = 24$, $z_1 = 10$ mm und die Kante $k = 22$ mm (Fig. 90a). Der Grundriß ist offenbar ein Doppelquadrat $A_1B_1C_1D_1(E_1F_1G_1H_1)$, das bestimmt ist durch A_1 , die Kante k und den Neigungswinkel. Die Aufrißpunkte der Fußfläche $ABCD$ haben alle dieselbe Höhe z_1 , somit ist der erste Ort für die Ecken dieser Fläche die Parallele im Abstände z_1 zu OX ; der zweite Ort besteht aus den Hilfsparallelen von $A_1, B_1, C_1 \dots$ nach OX . Ähnliches gilt für den Aufriß der Deckfläche $EFGH$, deren Höhe $z_1 + k$

beträgt. Aus Grund- und Aufriß schließt sich in bekannter Weise der Seitenriß zusammen.

Konstruktion: Man legt A_1, A_2, A_3 durch die Koordinaten fest, zieht durch A_1 eine Gerade unter 30° zu OY , schneidet $k = A_1D_1$ ab und konstruiert das Quadrat $A_1B_1C_1D_1(E_1F_1G_1H_1)$. Hierauf legt man durch die erhaltenen Quadratpunkte die Hilfsparallelen nach OX und OY einschl. der Übertragungs- oder Springbogen. Endlich zieht man durch A_2 und A_3 die Parallelen zu OX bzw. OY , sowie die Parallelen im Abstände $z_1 + k$ und erhält so sämtliche Projektionspunkte im Auf- und Seitenriß. — Man hat dabei genau zu beachten, welche Kanten für das projizierende Auge sichtbar sind. Diese werden nämlich ausgezogen, die verdeckten gestrichelt. Im Grundriß, für welchen das Auge vertikal nach unten blickt, ist sichtbar (oder liegt für das Auge vorn) die Fläche $EFGH^*$; verdeckt ist $ABCD$. Für den Aufriß, wo das Auge orthogonal nach hinten blickt, liegen vorn die Flächen $ABFE$ und $BCGF$, die übrigen liegen nach hinten oder erscheinen zusammengeschrumpft. Die Kante HD muß also im Aufriß gestrichelt werden. Im Profil, für welches das Auge brachial (horizontal nach links) blickt, liegen vorn die Flächen $BCGF$ und $CDHG$. Die Kante AE muß in ihrem Profile A_3E_3 gestrichelt werden. Ein Hervorheben der vorderen Kanten durch Verstärkung auf Grund der Luftperspektive wird bei Normalbildern meist unterlassen. Hier ist nur hier und da darauf Rücksicht genommen.

Es liegt nun nahe, obige Aufgabe der senkrechten Parallelprojektion wieder zu verallgemeinern zur Schrägprojektion, wir erhalten dann die neue Aufgabe:

Gegeben sind die Normalprojektionen eines Würfels (Fig. 90a), gesucht die Schrägprojektion ($\frac{1}{2}, 45^\circ$).

Analyse: Bisher haben wir uns meist am Schrägbild die Eigenschaften des Normalbildes klar gemacht. In vielen Fällen ist der direkte und mathematisch genaue Entwurf des Schrägbildes nicht ganz einfach. Für obigen Würfel z. B. wären einige zeitraubende Nebenkonstruktionen nötig. Hat man aber einmal die Normalbilder (Fig. 90a), so ist es ein Leichtes, auch für verwickelte Fälle das Schrägbild herzustellen. Man hat ohne Zweifel nur nötig, das offene Dreikant der Fig. 90a wieder zusammenzuschließen und schräg darzustellen. Der Aufriß des Würfels bleibt dabei unverändert, Grundriß und Profil werden verzerrt. Richten wir unser Augenmerk zunächst auf den Grundriß. Alle Geraden in der Grundebene, die parallel OX verlaufen, bleiben in natürlicher Größe, die lotrechten zu OX werden auf die Hälfte ($q = \frac{1}{2}$) verkürzt. Somit läßt sich der Grundriß leicht im Schräg-

*) Die Zeichen (Buchstaben oder Ziffern) für sichtbare Projektionen, wie z. B. $E_1F_1G_1H_1$ werden tunlichst nach außen, die übrigen nach innen gesetzt.

bild konstruieren. Senkrecht über diesem erheben sich aber die Eckpunkte des Würfels in natürlicher Höhe, denn alle Höhenkoordinaten (Z -Koord.) laufen parallel OZ (vertikal). Hiernach konstruiert man so (Fig. 90b):

Man legt aus Fig. 90a (Übertragung mit der Nadel) die Felder OXY und OZX nebst dem Grundrisse $A_1B_1C_1\dots$ (gestrichelt) fest. Dann zieht man durch O den Strahl OY' unter der Neigung $\omega = 45^\circ$ zu OX und legt hierzu die Parallelen durch die Fußpunkte P, Q, R, S der Hilfsparallelen aus Fig. 90a. Nun schneidet man $\frac{1}{2}A_1P, \frac{1}{2}B_1Q, \frac{1}{2}C_1R$ usw. auf jenen Parallelen ab bis $A_1'(E_1'), B_1'(F_1'), C_1'(G_1')$ usw. und erhält so das Schrägbild $A_1'B_1'C_1'D_1'$ des Grundrisses.*) Ferner zieht man durch die erhaltenen Punkte die Vertikalen (parallel OZ) und schneidet darauf in aus Fig. 90a zu entnehmenden Höhenkoordinaten $PA_2(PE_2), QB_2(QF_2)$ usw. ab. Durch geeignete Verbindung der Endpunkte springt das Schrägbild $A'B'C'D'$ des Würfels alsbald hervor.

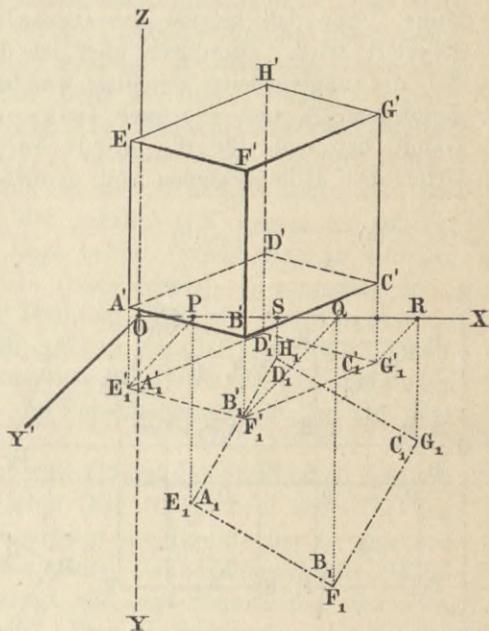


Fig. 90b (141b).

Man hätte auch vom Profile der Fig. 90a ausgehen können, doch ist der Aufbau vom Grundrisse aus anschaulicher. Hier ist natürlich nur das Schrägbild für die Aufrißebene als Bildebene gemeint, so wie wir es bisher gewöhnt waren. Die Darstellung der Schrägbilder für Grundebene oder Seitenebene als Schrägbildebene bedarf einer besonderen, hier zu übergehenden Untersuchung.³⁵⁾

Aufgabe 82 (128). Ein Würfel ist in allgemeiner Lage normal zu projizieren.

Analyse: Wir wenden zur Lösung der Aufgabe die in § 10 bereits mehrfach benutzte Methode der Drehung an und denken uns den Würfel zunächst in recht einfacher Lage, sodaß seine Normalprojektionen (vom Profil wird abgesehen) in Fig. 91a (auf $\frac{3}{4}$ verkleinert) dargestellt sind für eine Kantenlänge $k = 18$ mm und folgende Koordinaten des Mittelpunkts:

*) Nur zufällig fällt B_1' auf A_1D_1 .

$x_0 = 18, y_0 = 16, z_0 = 9$ mm. Der Würfel steht somit auf der Grundebene und hat im übrigen frontale Lage. Die Konstruktion (a) dieser Projektionen zeigt sich noch einfacher als die in Aufgabe 81. — Dreht man nun den Würfel im Raume um AD als Achse bis er eine Neigung von 30° zur Grundebene hat (Fig. 91b, nach rechts verschoben), so erhalten alle Aufrißpunkte (mit Ausnahme von A_2D_2) Drehungen um 30° Bogenlänge, ohne daß hierbei die Gestalt des alten Aufrisses aus Fig. 91a geändert wird. Hierdurch aber ist der neue Aufriß eindeutig bestimmt. Bei der angegebenen Drehung wandern die alten Grundrißpunkte (ausgenommen A_1 und D_1) nach links in Bahnen, die OX parallel liegen.*) Damit hat man für die vorderen Grundrißpunkte $A_1, B_1 \dots$ folgende Örter: Die Hilfssparallelen vom Aufriß nach OX und die Parallele in der

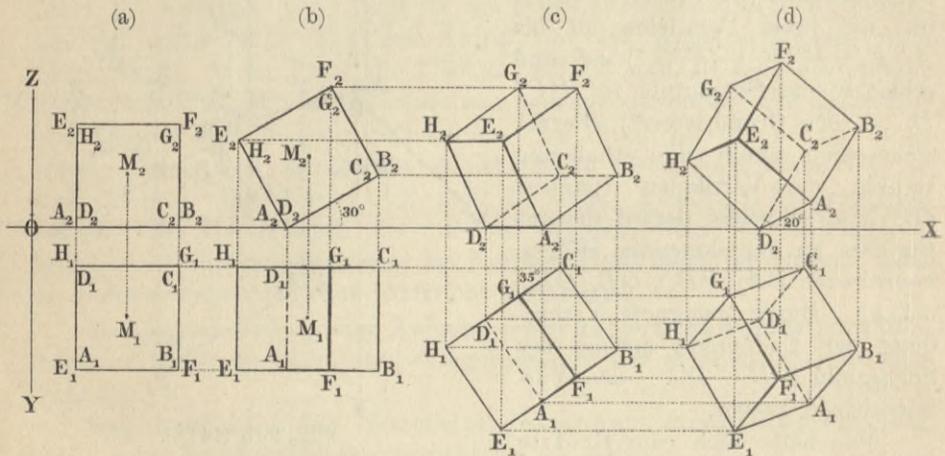


Fig. 91 (142).

Grundebene zu OX im Abstände $y_0 + \frac{1}{2} k$. Für die hinteren Grundrißpunkte $D_1, C_1 \dots$ gelten die Örter: Die Hilfssparallelen vom Aufriße und die Parallele zu OX im Abstände $y_0 - \frac{1}{2} k$.

Die Konstruktion (b) verläuft unter Benutzung der künstlichen Verschiebung nach rechts derart, daß man im Aufriße den Punkt $A_2(D_2)$ willkürlich festlegt auf OX und durch A_2 den Strahl unter 30° zieht, worauf man k bis $B_2(C_2)$ abschneidet und den quadratischen Aufriße ergänzt. Die abwärts laufenden Hilfssparallelen bringt man dann zum Schnitte mit den nach rechts verlängerten Strecken A_1B_1 und D_1C_1 (der Fig. 91a). Versetzt man

*) Die künstliche Verschiebung nach rechts aus Fig. a) nach Fig. b) darf die natürliche Verschiebung nach links infolge der Drehung nicht verdecken; man vergleiche nur immer die relative Lage zu A_1D_1 in Fig. 91b.

das projizierende Auge in die richtige Lage, so erkennt man sofort, daß für das nach unten schauende Auge die Kante FG die vorderste sein muß.

Die eben behandelte Lage des Würfels ist immer noch eine Sonderlage, denn ein Flächenpaar läuft der Aufebene parallel. Man kann diese Spezialisierung aus dem Wege räumen, wenn man dem Körper eine abermalige Drehung erteilt. Denkt man sich z. B. durch den Originalpunkt C (Fig. 91 b) eine vertikale Achse gelegt — sie muß durch C_1 gehen — und um diese Achse den Körper links herum (etwa um 35°) gedreht, so wird der Grundriß wohl seine Gestalt, nicht aber seine Lage behalten. Punkt C_1 bleibt als Achsenpunkt unverändert liegen (Fig. 91 c, Verschiebung nach rechts), die übrigen Grundrißpunkte $A_1, B_1, D_1 \dots$ machen Wege, die 35° Bogenlänge (links herum) fassen. Hierdurch ist der Grundriß bestimmt. Die Aufrißpunkte legen Bahnen zurück, die parallel OX liegen, bis auf C_2 , der aus bekannten Gründen die alte Lage behält. Sieht man ab von der künstlichen Verschiebung der Fig. 91 c (nach rechts), so wird man deutlich erkennen, wie sich infolge der Drehung sämtliche Aufrißpunkte in bezug auf die Gerade $C_1 C_2$ mehr nach rechts parallel verschoben haben. Für den Aufriß hat man daher als ausreichende Örter die Hilfsparallelen aus dem festgelegten Grundriß und die Verschiebungsparallelen aus dem Aufriß der Fig. 91 b.

Zur Konstruktion (c) verschiebt man C_1 aus der Stellung (b) um ein beliebiges Stück parallel OX nach rechts (Fig. 91 c), zieht durch C_1 den Strahl $C_1 H_1$ unter 35° zu OX und überträgt die Punkte des Grundrisses b) nach c). Dann legt man durch die neuen Grundrißpunkte die Hilfsparallelen nach der Aufebene und bringt sie zum Schnitt mit den Verschiebungsparallelen aus dem Aufriß b). Was die Sichtbarkeit der Kanten im Aufriß betrifft (im Grundriß hat sich nichts geändert), so bemerkt das nach der Aufebene schauende Auge, daß E vorn liegen muß, woraus sich alles Übrige ergibt.

Auch diese Lage des Würfels ist noch nicht völlig allgemein, denn ein Kantenpaar (AD und GF) liegt parallel zur Grundebene, AD selbst liegt in der Grundebene. Um hier abzuweichen, denkt man sich z. B. durch den Originalpunkt D eine orthogonale Achse gelegt, die demnach durch D_2 gehen muß, und dann den Würfel links herum (um etwa 20°) gedreht. Nunmehr gelangen alle Flächen und Kanten in allgemeine Lage, was man schon daran erkennt, daß auch im Grundriß keine Deckung von Kanten für das projizierende Auge auftritt.*) Durch diese letzte Drehung bleibt der alte Aufriß der Gestalt nach unverändert; seine Punkte erhalten mit Ausnahme von D_2 eine Kreisverschiebung von 20° . Die alten Grundrißpunkte werden

*) Daß noch D in der Grundebene liegen bleibt, wollen wir außer acht lassen, übrigens würde eine einfache Parallelverschiebung nach oben (ohne Drehung) abhelfen.

parallel OX verschoben und zwar nach links, wenn man mit der unverändert bleibenden $D_1 D_2$ in Fig. 91d vergleicht. Wir konstruieren daher so, daß wir den Aufriß der Lage c) nach d) übertragen, indem wir D_2 beliebig auf OX nach rechts verschieben und durch den neuen Punkt D_2 den Strahl unter 20° zu OX ziehen. Dann zieht man die Hilfssparallelen nach OX in die Grundebene und bringt sie mit den Verschiebungssparallelen aus Lage c) zum Schnitte. Die Sichtbarkeit im Aufriß hat sich nicht wesentlich geändert. Das in die Grundebene projizierende Auge erkennt sofort, daß F der vorderste Punkt ist, daß also $F_1 B_1$, $F_1 E_1$ und $F_1 G_1$ nebst den Umrißlinien ausgezogen werden müssen.³⁶⁾

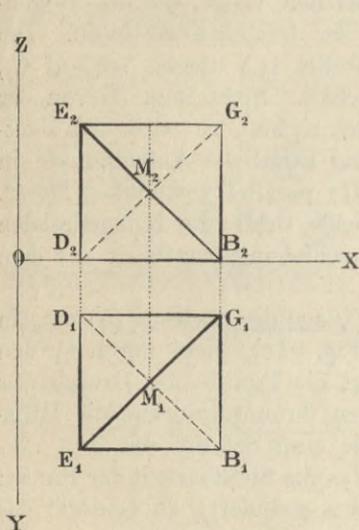


Fig. 92 (143).

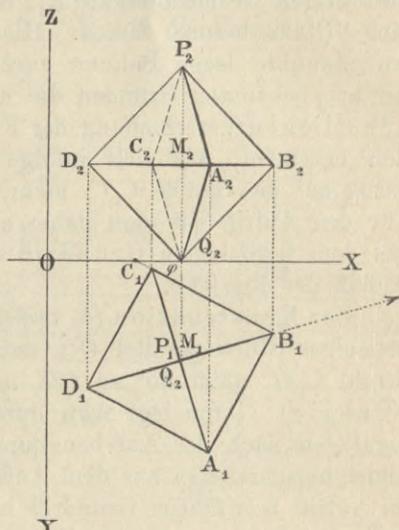


Fig. 93 (144).

Mit dem Würfel haben wir zugleich die Betrachtung der geometrisch regulären Körper und der Krystalle begonnen. Wir werden (ähnlich wie früher in § 7) die normalprojektive Betrachtung dieser Körperformen mit einander verbinden.

Aufgabe 83 (129). Ein reguläres Tetraeder ist normal zu projizieren.

Wir wählen die kristallographische Stellung*) des Tetraeders und benutzen seine Beziehung zum Würfel, wonach die windschiefen Flächendiagonalen oben und unten die Dach- und Kielkante des Tetraeders bilden. Sind daher gegeben die Koordinaten des Mittelpunktes $x_0 = 18$, $y_0 = 16$, $z_0 = 9$ mm und die Bedingung, daß das Tetraeder mit der Krystall-Hauptachse senkrecht auf der Grundebene stehen soll (Fig. 92), dann

*) D. h. der Körper steht auf der Kielkante.

konstruiert man einfach so, daß man mit Hilfe der Halbkante des Würfels ($= z_0$) seinen Grundriß und Aufriß entwirft und in diesen Figuren die Tetraederkanten zieht. Die Bezeichnung der Würfelpunkte entspricht durchaus der Fig. 91a. Hiernach ist für das Auge EG im Grundriß die vorderste Kante und EB im Aufriß. Hiernach erledigt sich leicht die Frage nach der Sichtbarkeit. Das Profil ist zu ergänzen.

Aufgabe 84 (130). Von einem regulären Oktaeder sind gegeben die Koordinaten des Mittelpunkts und die Bedingungen, daß die Hauptachse der Grundebene senkrecht aufstehen soll und daß die Randkanten gegen die beiden vertikalen Bildebenen *schief* (φ) liegen sollen; gesucht werden die Normalprojektionen.

Analyse: In Fig. 93 ist $x_0 = 17$, $y_0 = 13$, $z_0 = 12$ mm. Der Grund-Umriß ist ein Quadrat, das durch seinen Mittelpunkt (x_0, y_0) , durch die Länge der Halbachsen (z_0) und die Neigung φ (30°) einer dieser Randlinien gegen die X -Achse festgelegt ist. Der Aufriß von Q liegt auf der X -Achse, der Aufriß von P auf der Hilfssparallelen $M_1 M_2$ in der Höhe $2z_0$. Die Aufrisse der Randpunkte sind bestimmt durch die Parallele im Abstände z_0 zu OX und die Hilfssparallelen aus den entsprechenden Punkten des Grundrisses.

Konstruktion: Man legt M_1 und M_2 durch die Koordinaten fest und zieht durch M_1 die Schiefe $M_1 B_1$ unter der Neigung ($45^\circ - \varphi$) zu OX . Dann legt man durch M_1 (P_1, Q_1) das Lot zu $M_1 B_1$ und schneidet auf dem Lotkreuz die Länge der Halbachse (z_0) ab bis A_1, B_1, C_1, D_1 . Ferner zieht man durch M_2 die Parallele zu OX und überträgt durch Hilfssparallelen die Grundrißpunkte nach der Aufebene. Die vorderen Teile sind leicht zu erkennen. Das Profil ist zu ergänzen.

Aufgabe 85 (131). Ein reguläres Rhombendodekaeder ist gegeben durch dieselben Bedingungen wie bei der vorigen Aufgabe; man sucht die Normalprojektionen.

Analyse: Der Grundriß des Krystall-Mittelpunktes bildet den Mittelpunkt eines Quadrates, dessen Diagonalen gleich den Achsenlängen ($2z_0$) sind (Fig. 94a). Die Mittellinien des Quadrats sind die Grundrisse der Polkanten PE, QF usw. P_2 und Q_2 sind durch die Hilfssparallele von O_1 nach OX und die Z -Koordinaten ($2z_0$ bzw. Null) bestimmt. Die Aufriß-Randecken A_2, B_2, C_2, D_2 liegen in der Höhe z_0 über OX . Für die dreikantigen Ecken E, F usw. stellen wir folgende besondere Betrachtung an. In Fig. 94b stellt $OABP$ den Oktanten vorn, oben, rechts dar mit der dreikantigen Ecke E . Die Strecken AB, BP, PA entsprechen den Oktaederkanten. Verlängert man PE , so trifft sie die Basisebene OAB in Q derart, daß OQ die Strecke AB in R senkrecht halbiert und daß $RO = RQ$. Das Viereck $O A Q B$ ist nämlich ein Quadrat, und E liegt senkrecht über R . Nun ist RE Mittellinie im Dreiecke POQ und daher $= \frac{1}{2} OP$. Die Ecke E sowie die entsprechenden oberen Punkte liegen daher um $\frac{1}{2} z_0$ über der

krystallographischen Basisebene und F (nebst den entsprechenden unteren Punkten) um ebensoviel darunter. Hiermit sind auch die Aufrisse dieser Punkte durch Parallelen zu OX im Abstände $\frac{1}{2}z_0$ und $\frac{2}{3}z_0$ sowie durch Hilfssparallelen genau bestimmt.

Konstruktion: Man legt O_1 und O_2 fest wie vorher, ebenso das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ mit den Mittellinien und zieht sämtliche Hilfssparallelen nach OX . Dann bestimmt man den Aufriß der Krystallpole P und Q und legt in die Aufebene drei Parallelen zu OX im Abstände $\frac{1}{2}z_0, z_0$ bzw. $\frac{2}{3}z_0$ bis zum Schnitte mit den genannten Hilfssparallelen. — Der Koordinaten-Nullpunkt ist hier wie in den folgenden Aufgaben als zunächst überflüssig nicht näher markiert. Die Verhältnisse der Sichtbarkeit sind leicht zu überblicken. — Die beiden Normalprojektionen werden durch das Profil ergänzt.

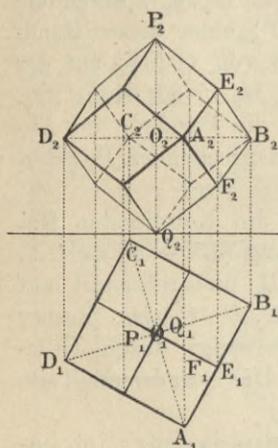


Fig. 94a (145a).

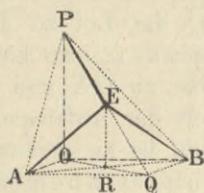


Fig. 94b (145b).

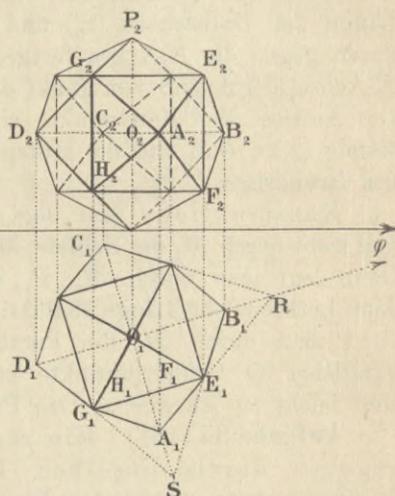


Fig. 95 (146).

Aufgabe 86 (132). Für dieselben Mittelpunktskoordinaten und ähnliche Achsenstellung wie vorher ist ein Pyramidenwürfel zu projizieren, wenn sein Parameterverhältnis $1 : \frac{3}{2} : \infty$ ist und eine Nebenachse unter φ ($= 20^\circ$) gegen die Aufebene geneigt ist.

Analyse: Der Umriß des Grundrisses (Fig. 95) ist ein Achteck, dessen Achsenecken A_1, B_1, C_1, D_1 durch die Mittelpunktskoordinaten, die Achsenlängen (z_0) und φ bestimmt sind. Um die übrigen Ecken $E_1(F_1)$ usw. (die sogenannten Würfecken) festzulegen, bedient man sich des gegebenen Parameterverhältnisses. Hiernach schneidet die verlängerte $AE(A_1E_1)$ die verlängerte $OB(O_1B_1)$ in R so, daß $OA:OR = 1 : \frac{3}{2} = 2:3$. Dasselbe gilt für die verlängerten $BE(B_1E_1)$ und $OA(O_1A_1)$. Damit ist A_1 festgelegt sowie entsprechend E_1, F_1 und die übrigen oberen und unteren Würfecken. —

Im Aufriß machen O_2, P_2, Q_2 keine Schwierigkeiten. Die Randecken A, B, C, D haben ebenfalls einfache Örter, und es fragt sich nur, wie hoch liegen die Würfecken E, F usf. über oder unter der krystallographischen Basisebene. Nun ist bereits der Grundriß des betreffenden Würfels durch $E_1 G_1$ usf. festgelegt und damit auch die Würfelkante $k = G_1 E_1$. Dann aber liegen die oberen (unteren) Würfecken in der Höhe $\frac{1}{2}k$ über (unter) der Basisebene. Als weitere Örter dienen die bekannten Hilfsparallelen.

Konstruktion: Lege durch O_1 die Schiefe unter $\varphi (= 20^\circ)$ gegen OX nebst dem Lote und schneide auf dem Lotkreuz die Halbachsen (z_0) ab bis A_1, B_1, C_1, D_1 . Schneide ferner $O_1 R = O_1 S \dots = \frac{3}{2} O_1 A$ ab, bestimme die Grundriß-Achtecke und ziehe die Hilfsparallelen nach OX . In der Aufebene legt man nun O_2, P_2, Q_2 fest und führt drei Parallelen zu OX im Abstände: $z_0 - \frac{k}{2}, z_0$ (durch O_2) und $z_0 + \frac{k}{2}$. Ihr Schnitt mit den Hilfsparallelen ergibt alle Eckpunkte des Pyramidenwürfels. Schaut man gegen die Aufebene, so erkennt das Auge sehr bald, daß A, B und D vorn liegen, wonach sich die Sichtbarkeitsverhältnisse regeln. — Die Projektionen sind durch das Profil zu ergänzen.

Aufgabe 87 (133). Ein Pentagondodekaeder soll in einfacher Lage normal projiziert werden.

Analyse: Das Dodekaeder wird als Hemieder eines Pyramidenwürfels betrachtet. Wir wollen eine Form annehmen, die zwar in der Natur nicht vorkommt, uns aber zugleich das geometrisch reguläre Dodekaeder liefert, den Fall nämlich, daß reguläre Fünfecke auftreten. In übrigen soll das Dodekaeder auf der Grundebene aufstehen, Dach- und Kielkante sollen OX parallel laufen; endlich seien die Mittelpunktskordinaten bei beliebigem x_0 folgende: $y_0 = 27, z_0 = 23$ mm. Wir wollen mit dem Aufriß (Fig. 96a) beginnen. Der Punkt O_2 (wie auch O_1) ist leicht festgelegt, ebenso A_2, P_2, Q_2 durch die Länge der Halbachsen ($= z_0$). Es kommt nun darauf an, die sogenannten Würfecken E_2, C_2, J_2, K_2 usf. im Aufriß zu bestimmen und damit auch D_2, L_2 usf. Hierzu bedarf es einer besonderen Betrachtung. In Fig. 96b sei $ABCDE$ (im Schrägbild; $\frac{1}{3}, 30^\circ$) ein regelmäßiges Fünfeck, das sich an die Dachkante PD des Dodekaeders so anlehnt, daß es mit der Diagonale $EC(d)$ die sogenannte Würfelkante (hier zu denken, am Pyramidenwürfel sichtbar) deckt. Da nun in einem regelmäßigen Fünfecke die einander schneidenden Diagonalen eine stetige Teilung (goldnen Schnitt) erzeugen, so ist $GF:GD = n$, wenn n die Verhältniszahl des goldnen Schnittes ($= 1,618$) bedeutet. Zieht man noch durch G die Parallele*) GR zu FO , so wird auch OP nach dem Ver-

*) Die Bezeichnung entspricht genau dem Original zu Fig. 96a; es ist $AB = BC = CD = \dots = a, EC = d, OR = OT = \frac{d}{2}$, wobei a Major des goldnen Schnittes auf Diagonale d ist. Vergl. Anm. 37.

hältnis n geteilt. Da nun $OR = \frac{d}{2}$, so ist $RP = \frac{a}{2}$. Zieht man ferner die Parallelen durch D und G zu PO bis N und T , so ist auch $TF:TN = n$. Man kennt weiterhin $GF(p)^{37}$; es ist nämlich $p = a\sqrt{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{8}}$, worin a die Fünfeckseite ist, und da $GT = \frac{d}{2}$ (der Halbkante des Würfels) so läßt sich

berechnen $TF = \sqrt{p^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$,
 worin $d = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Man erhält dann für $TF = \frac{a}{2}$, d. h. auch OF ist in T stetig geteilt, denn $OT = \frac{d}{2}$. Wenn aber OF und NF in T stetig geteilt sind, dann ist nach einem bekannten Satze auch OT in N stetig geteilt, und $ON = TF = \frac{a}{2}$. Da ferner $SG = NT$, so muß auch $RG = \frac{d}{2}$ in S stetig geteilt sein, d. h. $RS = \frac{a}{2}$, oder Viereck

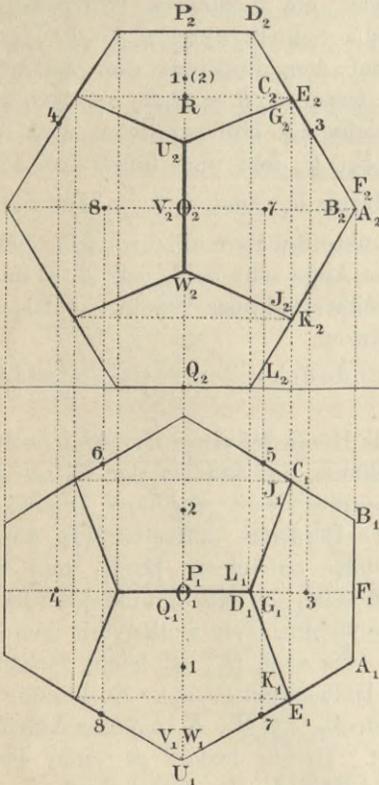


Fig. 96 a (147 a).

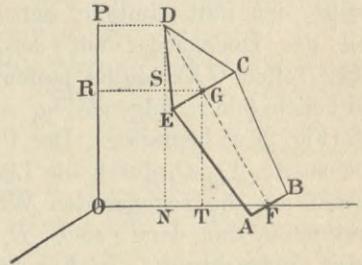


Fig. 96 b (147 b).

$PDSR$ ist ein Quadrat. Hieraus geht nun hervor, daß man O_2P_2 (Fig. 96a) in R stetig teilen muß, um durch die Parallele im Abstände $z_0 + \frac{d}{2}$ von OX die Punkte C_2, G_2, E_2 näher zu bestimmen. Ähnliches gilt für J_2 und K_2 und die übrigen Eckpunkte. Für den Grundriß findet man leicht entsprechende Örter.

Konstruktion: Man lege O_1 und O_2 durch die Mittelpunktskoordinaten fest und schneide die Halbachse ($= z_0$) in der Grundebene und Aufebene ab bis U_1 und F_1 bez. $P_2, Q_2, F_2(A_2, B_2)$. Dann teile man O_2P_2 stetig in R , ziehe die Parallele zu OX bis $G_2(C_2, E_2)$ und führe F_2G_2 bis zum

Schnitte D_2 mit der Dachkante. Damit ist die halbe Dachkante P_2D_2 gefunden, mit Hilfe deren man die Aufrißfigur vervollständigt. Durch Übertragung in den Grundriß mittelst der Hilfsparallelen und durch Abschneiden der gefundenen Dachkante $= 2P_2D_2$ zeichnet man dann den Grundriß.

Aufgabe 88 (134). Ein Ikosaeder soll in Normalprojektion dargestellt werden.

Analyse: Wir benutzen die Eigenschaft des geometrisch regulären Dodekaeders, daß die Mittelpunkte der zwölf Fünfecke die Ecken eines Ikosaeders bestimmen. Ist daher das Dodekaeder projiziert (Fig. 96a), so braucht man nur die Projektionen der Mittelpunkte (vermittelst der Mittellinien) zu bestimmen. In Fig. 96a sind die so gefundenen Mittelpunkte durch Ziffern 1, 2, 3 ... 8 ... usf. sowohl im Grund- wie Aufriß bezeichnet.

Konstruktion: Man zieht in den Projektionsfünfecken je zwei Mittellinien und bestimmt so im Grund- und Aufriß die Punkte 1, 2, 3, ... 7, 8, ... *) und überträgt diese Punkte (mit der Nadel) auf ein besonderes Zeichenblatt (Fig. 97). Durch geeignete Verbindung erhält man die gesuchte Projektion. Vergl. übrigens Aufg. 56.

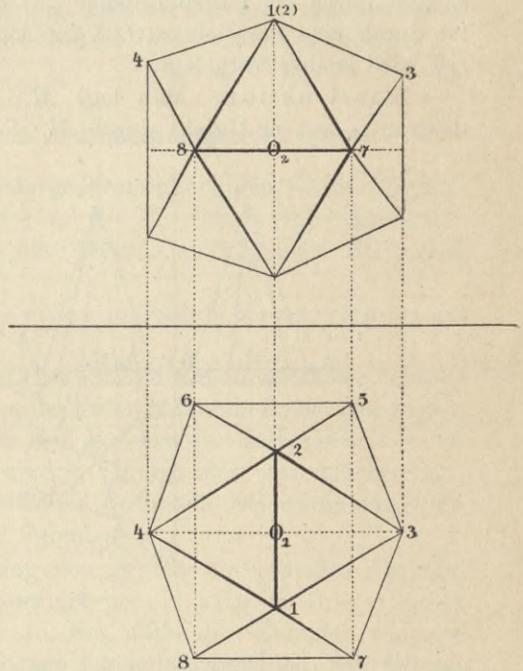


Fig. 97 (148).

Die Normalprojektion von Krystallen ist weniger im Gebrauch als die schräge Parallelprojektion und einige andere Projektionsarten, auf die wir nicht eingehen wollen; im übrigen wird hier auf den Übungsstoff verwiesen, namentlich aber auf die sogenannten Netzkonstruktionen. Wir wenden uns nunmehr zur Normalprojektion anderer Polyeder, namentlich der prismatischen und pyramidalen Formen im eigentlichen Sinne.

Aufgabe 89 (136). Eine regelmäßige, gerade, sechsseitige Pyramide schwebe mit der horizontalen Fußfläche über der Grundebene und zwar so, daß eine Grundkante unter 60° gegen die Aufebene geneigt ist; man soll die Normalprojektionen suchen.

*) Die Punkte sind in der Figur nur zum Teil bezeichnet.

Analyse: Gegeben sind $x_0 = 10$; $y_0 = 10$; $z_0 = 2$; $r = 8$; $h = 22$ mm; $\varphi = 60^\circ$. — Der Grundriß (Fig. 98a) ist ein regelmäßiges Sechseck $A_1B_1C_1\dots$, dessen Mittelpunkt M_1 durch die Koordinaten x_0 und y_0 bestimmt ist; im übrigen ist das Vieleck durch den großen Halbmesser r und den Richtungswinkel φ festzulegen. Der Aufriß (bez. Seitenriß) ist im Umriß ein gleichschenkliges Dreieck; die Hauptpunkte der Grundlinie C_2F_2 des Aufrisses findet man durch eine Parallele zu OX im Abstände z_0 und durch die Hilfsparallelen aus dem Grundriß. Die Spitze endlich ist durch eine Parallele zu OX im Abstände $z_0 + h$ bestimmt. Der Seitenriß wird analog festgelegt.

Konstruktion: Man legt M_1, M_2 und M_3 durch das Projektionsdiagramm fest und zieht durch M_1 die Schiefe nach OX unter 60° (S_1D_1

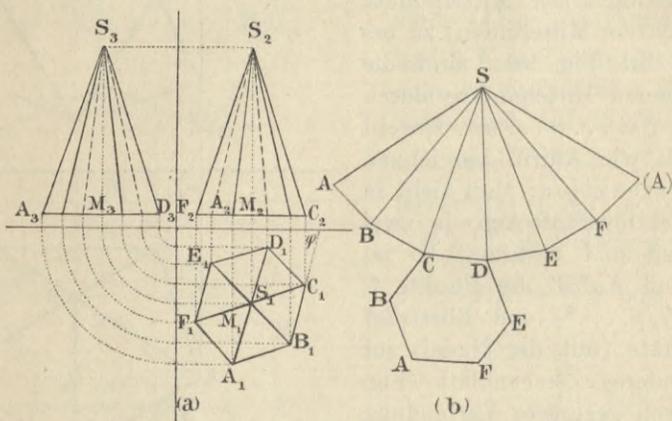


Fig. 98 (150).

parallel B_1C_1). Dann schneidet man r auf allen sechs Strahlen ab, die man durch M_1 unter gleichen Winkeln (60°) ziehen kann. Ferner legt man durch M_2 (M_3) die Parallelen im Abstände z_0 zu OX (OY) und eine weitere Parallele im Abstände $z_0 + h$. Der Schnitt dieser Linien mit den Hilfsparallelen aus dem Grundriß nach $\widetilde{\Pi}$ ($\widetilde{\text{III}}$) ergibt die gesuchten drei Projektionen.

Als Nebenkonstruktion wollen wir diesmal auch das Netz darstellen. Es zeigt sich ein Fächer aus sechs gleichschenkligen Dreiecken und einem anhängenden Sechseck, wenn wir längs einer Seitenkante (SA) aufschneiden und die Bodenfläche ablösen bis auf eine Grundkante (CD). Da keine der Seitenkanten irgend einer Bildebene parallel läuft, so läßt sie sich nirgends in wahrer Größe abgreifen. Man hätte daher nach Fig. 82c die wahre Größe (etwa von SA) zu konstruieren. Dort wurde ein Trapez (bez. Dreieck) in die Grundebene geklappt. Hier empfiehlt es sich aber, das Originaldreieck SAM (im Raum) für sich zu konstruieren;

die beiden Katheten dieses rechtwinkligen Dreiecks sind gleich $S_2 M_2$ bez. $M_1 A_1$, die Hypotenuse ist die gesuchte SA . Man benutzt zur Konstruktion im Aufriß $S_2 M_2$, schneidet von M_2 aus auf der Parallelen (zu OX) die Strecke $M_1 S_1$ ab bis A' (nicht gezeichnet) und zieht $S_2 A'$ gleich der gesuchten wahren Seitenkante.*) Nun hat man um S (Fig. 98b) nur einen Bogen mit $SA = S_2 A'$ zu beschreiben, die Grundseite aus dem Grundriß unmittelbar zu entnehmen und in den Bogen sechsmal als Sehne einzutragen bis $B, C, D \dots (A)$; endlich legt man an CD das Grund-Sechseck in bekannter Weise an. Mit Hilfe des Netzes bildet man ein Modell.

§ 12 (15). Normalbilder von krummflächigen Körpern.

Die Normalprojektion der elementaren krummflächigen Körper (Zylinder, Kegel, Kugel) wird im allgemeinen auf die Projektion einbeschriebener Polyeder zurückgeführt. Wir wollen die Methode an folgenden Beispielen erläutern.

Aufgabe 90 (138). Man soll einen geraden Kreiszylinder in einfachster Lage projizieren.

Analyse: In Fig. 99a (auf $\frac{2}{3}$ verkl.) ist ein Zylinder in vertikaler Achsenstellung gegeben durch die Koordinaten des Fußmittelpunktes: bei beliebigem x_0 ist $y_0 = 32$, $z_0 = 0$ mm; außerdem sind gegeben der Halbmesser $r = 12$ und die Höhe $h = 34$ mm. Der Grundriß ist ein der Grundfläche kongruenter Kreis, der Aufriß (und das Profil) ein Rechteck. Beide sind durch die gegebenen Bestimmungsstücke leicht festzulegen.

Konstruktion: Nach Festlegung von M_1 ist die gestellte Aufgabe sofort zu konstruieren. — Soll nun der Körper in allgemeinere Lagen gebracht werden, so wird zunächst in Fig. 99b der Zylinder um die Achse $1 \bar{1}_2$ nach rechts gedreht (45°). Man überträgt den Aufriß von Fig. 99a nach rechts, zieht die Hilfsparallelen nach der Grundebene und die Verschiebungslinien vom Grundriß der Fig. 99a nach rechts. Die elliptischen Figuren sind auf ihre sichtbaren Teile genau zu prüfen. — In Fig. 99c handelt es sich um eine weitere Drehung um eine Vertikalachse durch 1 (30°). Man überträgt den Grundriß der Fig. 99b nach rechts und zieht im Aufriß die Verschiebungslinien.

Die Netzkonstruktion (Abwicklung) werde hier nur kurz angedeutet. Sie kann nur angenähert ausgeführt werden, da die Irrationalität von π keine

*) Dies einfache Verfahren läßt sich auch auffassen als Verbindung einer Drehung (Klappung) mit einer Parallelverschiebung; zunächst nämlich dreht man das Originaldreieck SMA (im Trapez $SM_1 A_1 A$) um SA_1 bis zur Parallel-lage mit der Aufebene (\widetilde{II}), und dann verschiebt man die Figur parallel YO nach \widetilde{II} , eine Bewegung, die gleichbedeutend mit einer Projektion nach \widetilde{II} ist.

geometrisch genaue Konstruktion zuläßt. Das Netz besteht aus dem rechteckigen Mantel, dessen Grundlinie $2r\pi$ und dessen Höhe h ist, und den beiden anhängenden Grundkreisen.

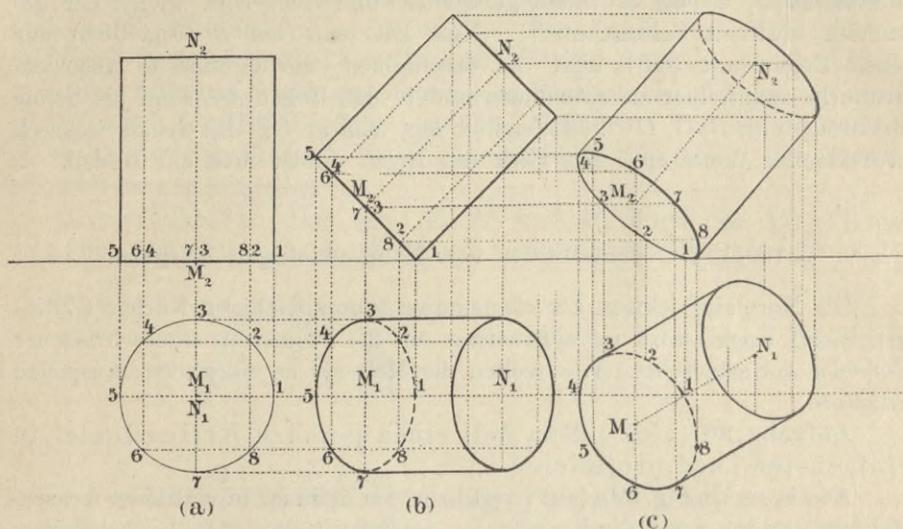


Fig. 99 (152).

Aufgabe 91 (143). Die Normalprojektion einer Kugel ist zu konstruieren.

Analyse: Von einer Kugel sind die Mittelpunktskoordinaten gegeben: $x_0 = 25$; $y_0 = 23$; $z_0 = 24$ mm und der Halbmesser $r = 17$ mm (Fig. 100). Die drei Normalprojektionen sind ohne Zweifel Kreise mit dem Halbmesser r , deren Mittelpunkte als Normalprojektionen zum Punkte M gehören. Da letztere durch die Koordinaten festgelegt sind, so sind auch die Normalprojektionen der Kugel bestimmt.

Konstruktion: Man lege M_1, M_2, M_3 durch die Koordinaten und das Projektionsdiagramm fest und beschreibe um diese drei Punkte Kreise mit r als Halbmesser.

Um abgesehen von M_1, M_2, M_3 noch andere zugeordnete Punkte zu haben, zieht man durch M_1, M_2, M_3 die Parallelen zu den Achsen. Hierdurch erhält man in A_1, B_1, C_1, D_1 die Grundrisse von vier sog. Äquatorpunkten, deren Aufrisse A_2, B_2, C_2, D_2 und deren Profile A_3, B_3, C_3, D_3 sind. Entsprechend sind N_1, S_1 bez. N_2, S_2 usf. die Projektionen der Pole. Wählt man nun einen beliebigen Punkt P auf dem Äquator, dessen Grundriß P_1 ist, so lassen sich die zugeordneten Projektionen P_2 und P_3 durch das Projektionsdiagramm finden. Wenn man ferner einen beliebigen Punkt Q (Q_1) auf einem der Hauptmeridiane markiert, dann verfährt man ebenso und bemerkt, daß Q_2 unter Vermittelung des Profils Q_3 gefunden werden

kann. Ein Punkt $R(R_1)$ auf dem anderen Hauptmeridian hat seinen Aufriß auf der Hilfsparallelen nach OX und sein Profil auf der Hilfsparallelen nach OY . — Wie findet man zu einem ganz beliebigen Grundriß U_1 die zugeordneten Projektionen?

Durch passende Drehungen werden die angenommenen Meridiane und der Äquator in schiefe Lage zu den Bildebenen gebracht werden können, sodaß die Projektionen leicht konstruierbar sind. — Von einer Netzkonstruktion kann hier nicht die Rede sein, da die Kugelfläche nicht abwickelbar ist.³⁸⁾

Aufgabe 92 (144). Das Netz einer orthographischen Äquatorial- und Polarkarte soll konstruiert werden (Maßstab 1:300 Million).

Analyse: Wir beschränken uns auf das Netz einer Halbkugel und wählen auch hier nur die Meridiane und Parallelkreise in einem Bogenabstand von $22\frac{1}{2}^\circ$. Die Halbkugel stehe auf der Grundebene. Der Grundriß (Fig. 101a) ist ein Kreis mit dem leicht zu fixierenden Mittelpunkt $O_1(N_1)$, der Aufriß ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt O_2 und dem Scheitel N_2 , die beide durch Hilfsparallelen und den Kugelhalbmesser zu bestimmen sind. Am einfachsten ist jetzt die Festlegung der Meridiangrundrisse, da sie strahlenförmig durch N_1 laufen und den Grundkreis in 16 gleiche Teile zerlegen. Die Darstellung der Parallelkreise im Aufrisse ist ebenfalls leicht, denn sie erscheinen als horizontale Strecken, welche den Kreisquadranten N_2A_2 (N_2B_2) vierteln. Man bestimmt sodann am besten die Grundrisse dieser Parallelkreise, die offenbar wiederum als Kreise erscheinen müssen. Ihr Halbmesser wird dadurch abgegrenzt, daß man von C_2, D_2 usf. die Hilfsparallelen nach OX benutzt, wodurch die Grundrißpunkte C_1, D_1 usf. festgelegt sind. Die Aufrisse der Meridiane sind Ellipsen, die man am einfachsten punktweise festlegt. Faßt man z. B. die Punkte E, F, G, H usf. eines Meridians ins Auge, so liegen deren Grundrisse E_1, F_1, G_1 usf. bereits fest als Schnitte zwischen Meridianen und Parallelkreisen; ihre Aufrisse befinden sich auf den entsprechenden Aufrißstrecken der Parallelkreise. F_2 z. B. wird bestimmt durch C_2K_2 und die Hilfsparallele durch

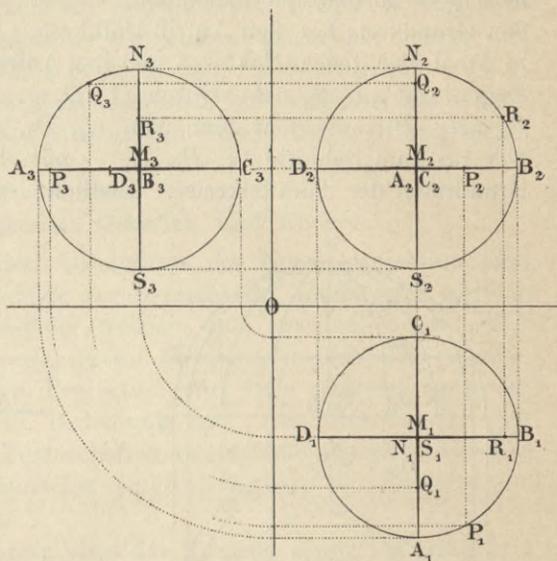


Fig. 100 (157).

F_1 nach OX . Ebenso werden G_2, H_2 und die Aufrißpunkte der übrigen Meridiane bestimmt.

Konstruktion: Man lege O_1 und O_2 durch die Mittelpunktskoordinate $y_0 = 26$ mm bei beliebigem x_0 fest und beschreibe mit $r = 20$ mm den Grundkreis bez. den Aufriß-Halbkreis. Dann teilt man den Grundkreis in 4 mal vier gleiche Sektoren und den Aufrißhalbkreis in 2 mal vier gleiche Bogen A_2C_2, C_2D_2 usf. Durch $C_2, D_2 \dots$ zieht man die Horizontalen bis K_2 usf. Hierauf zieht man von $C_2, D_2, K_2 \dots$ die Hilfssparallelen nach OX bis zum Schnitte $C_1, D_1, K_1 \dots$ mit A_1B_1 und beschreibt um O_1 die Grundrisse der Parallelkreise. Endlich legt man durch die Kreuzungs-

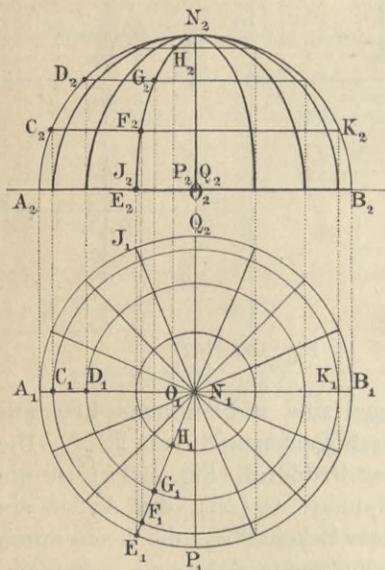


Fig. 101 a (158 a).

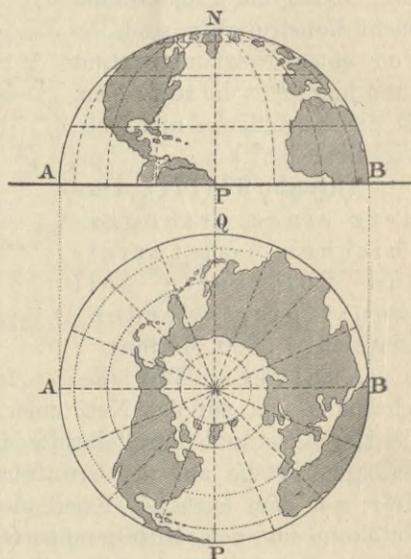


Fig. 101 b (158 b).

punkte $F_1, G_1, H_1 \dots$ der Meridiane mit den Parallelkreisen die vertikalen Hilfssparallelen bis $F_2, G_2, H_2 \dots$ und verbindet die letzteren durch stetig gekrümmte Linien.

In die entstandenen Kartennetze (Grund- oder Aufriß) werden nun die Punkte der Erdoberfläche nach Maßgabe ihrer geographischen Länge und Breite eingetragen.³⁹⁾ Beide Netze stellen die Projektion von sphärischen Rechtecken dar, die man zuweilen auch als sphärische Quadrate auffaßt. Bei genauen Kartenentwürfen werden die Meridiane und Parallelen nach Graden abgestuft, deren Bruchteile (Minuten) häufig noch zur Konstruktion herangezogen werden. Das Grundrißnetz, die sog. orthographische Polarkarte, wird nicht selten angewandt, um Polargegenden darzustellen, denn die Gegenden in der Nähe der Kartenmitte werden ziemlich genau in

natürlichen Verhältnissen abgebildet. Das Aufrißnetz, die sog. orthographische Äquatorialkarte, dient durchweg zur Herstellung von Mondkarten, da der Mond wegen seiner großen Entfernung in dieser Projektionsart erscheinen muß. Auch ein gewöhnlicher Erdglobus wird uns aus weiter Ferne in orthographischer Projektion erscheinen (vergl. die klinographische Projektion in § 8, Aufg. 64.

In Fig. 101b ist im Grundriß das Festland der nördlichen Halbkugel, im Aufriß der nördliche Teil des atlantischen Ozeans nebst Grenzgebieten eingetragen.

§ 13 (16). Unbegrenzte Geraden und Ebenen.

In den bisher abgehandelten Abschnitten der Normalprojektion sind mit Absicht nur begrenzte Gebilde der Betrachtung unterworfen worden, da ihre Behandlung verhältnismäßig einfach und anschaulich ist. Wir wenden uns nunmehr zu unbegrenzten Gebilden, insbesondere zu Geraden und Ebenen, da deren Projektion für viele Anwendungen der Normalprojektion einschneidende Bedeutung hat. Auch hier wollen wir die wichtigsten projektivischen Eigenschaften an einzelnen, charakteristischen Aufgaben kennen lernen und zunächst am Schrägbild die Konstruktion des Normalbildes analysieren.

Aufgabe 93 (148). Gegeben sind die Spuren einer Geraden mit zwei Bildebenen, gesucht ihre Normalprojektionen in den drei Bildebenen.

Analyse: Die Lage einer Geraden (a) zu den Bildebenen ist im Raume am einfachsten bestimmt durch zwei ihrer Spuren mit den Bildebenen, bez. durch die Koordinaten dieser Spuren. In Fig. 102a z. B. sei die Gerade a durch die Grundspur A' und die Aufspur A'' gegeben. Die Gerade wird dann im allgemeinen noch die Profilebene in der Spur A''' durchstechen, die verdeckt sein muß, wenn die anderen sichtbar sein sollen. Die Normalprojektionen der Geraden sind im allgemeinen selbst wieder Geraden (a_1, a_2, a_3). Der Grundriß a_1 ist einerseits durch A' , andererseits durch den Grundriß eines beliebigen anderen Punktes von a bestimmt. Daß hierzu A'' zu wählen ist, leuchtet sofort ein. Projiziert man A'' nach der Grundebene, so kommt sein Grundriß in die X -Achse nach $A_1''^*$ zu liegen, und die Gerade $A'A_1''$ ist die gesuchte Normalprojektion (zunächst in Parallelperspektive). Der Aufriß a_2 von a geht durch A'' und durch den Aufriß von A' , der ebenfalls in die X -Achse nach A_2' (lies: A — Strich — zwei) fällt. Somit ist $A''A_2'$ der gesuchte Aufriß. Für das Profil a_3 ist die gleichnamige Spur nicht gegeben und daher nicht verfügbar. Da aber A' und A'' zwei Punkte der Geraden sind, so braucht man diese nur nach der Profilebene zu projizieren; ihre Profilprojektionen A_3'

*) Lies: A — zwei Strich — eins.

und A_3'' auf OY und OZ bestimmen eindeutig das Profil a_3 der Geraden. Aus der Figur geht ferner hervor, daß die Verlängerung der Geraden a die verlängerte a_3 in der Profilsur A''' treffen muß. Außerdem findet man noch folgende Örter für A''' . Verlängert man nämlich a_1 bis zum Schnitte mit der rückverlängerten Y -Achse, so muß dieser Punkt der Grundriß von A''' sein und ist daher mit A_1''' zu bezeichnen. Die verlängerte a_2 trifft die Z -Achse in einem Punkte, der der Aufriß von A''' ist und das Zeichen A_2''' haben muß. Man sieht, daß die Achsenschnittpunkte der Projektionen (A_1'' und A_1''' , A_2' und A_2''' sowie A_3' und A_3''') eine besondere Rolle spielen, und es gilt der wichtige Satz:

Jeder Achsenschnitt einer Projektion ist die gleichnamige Projektion der Nachbarspur.

Hierdurch ergeben sich als weitere Örter für die nebenbei gesuchte Spur A''' die Projektionslote in A_1''' auf der Grundebene (\bar{E}_1) und in A_2''' auf der Vertikalenebene (\bar{E}_2).

Konstruktion: Da die Konstruktion der Fig. 102a (Schrägbild) für sich keine Schwierigkeiten hat, so wenden wir uns sofort zur Konstruktion des Normalbildes im offenen Dreikant (Fig. 102b). Die Gerade im Raum kommt beim Aufklappen natürlich in Wegfall und kann beim Zeichnen nicht benutzt werden. Gegeben sind A'

und A'' durch ihre Koordinaten ($x_1 = 25$; $y_1 = 11$; $x_2 = 9$; $z_2 = 18$ mm). Durch Festlegung dieser Punkte sind bereits die Projektionen A_2' und A_3' , A_1'' und A_3'' auf die Nachbarebenen (bez. Achsen) gegeben. Man zieht daher $A'A_1''$ bez. $A''A_2'$ und hat somit in a_1 und a_2 Grund- und

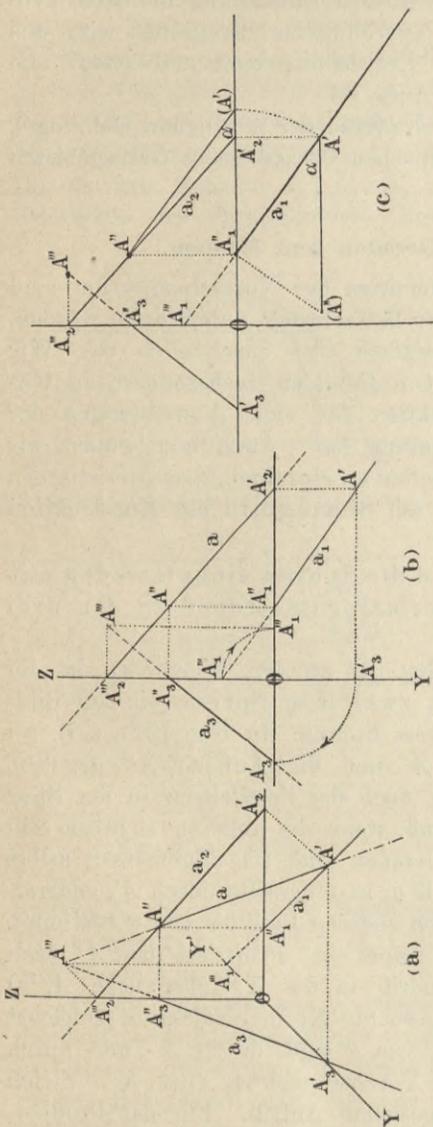


Fig. 102 (163).

Aufrißbild von a . Das Profil ergibt sich durch die Hilfsparallelen von A' nach OY (zu übertragen in die Profillage) und die Hilfsparallele von A'' nach OZ . Die Gerade $A_3' A_3''$ ist das gesuchte Profil a_3 . Man verlängert nun a_3 und errichtet in A_2''' das Lot auf OZ bis zum Schnitte A''' mit der verlängerten a_3 . Man bemerke wohl, daß der hinten liegende Teil der Profilebene beim Aufklappen nach rechts in die feststehende Aufebene fällt, daher läuft das Lot in A_2''' scheinbar OX parallel, in Wirklichkeit aber parallel der mit OX zusammenfallenden rückverlängerten OY . Als Probe auf die Richtigkeit der Konstruktion für A''' benutzt man auch den Achsenschnitt A_1''' . Er fällt bei der Umklappung, da auch die rückverlängerte Y -Achse gespalten wird, einerseits scheinbar auf OZ (in Wirklichkeit in die nach oben fallende OY'), andererseits scheinbar auf OX (in Wirklichkeit auf die nach rechts fallende OY'). Die verlängerte a_1 trifft daher direkt die nach oben gehende OY' in A_1''' , da sie ja der Grundebene angehört. Der Punkt A_1''' auf der nach rechts gehenden OY' wird durch den Übertragungsbogen (mit Pfeil) gefunden. Dieser letztere Punkt ist es nun, welcher der Profilebene angehört und von dem aus man das Lot (parallel OZ) zieht; wenn es genau in A''' eintrifft, ist die Konstruktion richtig.

Aufgabe 94 (149). Gegeben sind zwei Projektionen einer Geraden, gesucht die dritte Projektion und die drei Spuren.

Analyse: Wir knüpfen die Betrachtung wieder an Fig. 102a. Hierin seien jetzt gegeben die Projektionen a_1 und a_2 .*) Die Achsenschnitte A_1'' und A_2' liefern sofort Örter für die Spuren A'' und A' , nämlich für A' die Hilfsparallele zu OY und für A'' die Hilfsparallele zu OZ . Da nun diese beiden Spuren festgelegt sind, so gestaltet sich die weitere Untersuchung wie bei voriger Aufgabe.

Konstruktion: Man legt (Fig. 102b) a_1 durch die Parameter $p_x = OA_1'' = 9$; $p_y = 6$ und a_2 durch die Parameter $q_x = OA_2' = 24$; $q_z = 21$ mm fest. Dann zieht man durch A_2' die Parallele zu OY und durch A_1'' die Parallele zu OZ bis zum Schnitte A' bez. A'' . Die weitere Konstruktion verläuft wie in voriger Aufgabe.

Aufgabe 95 (150). Man soll die Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebenen konstruieren.

Analyse: Die Betrachtung der Fig. 102a führt zu einer Lösung, die ganz der Fig. 82c entspricht. Der Neigungswinkel α gegen die Grundebene kann nämlich dadurch erhalten werden, daß man Dreieck $A'' A_1'' A'$ um a_1 dreht und in die Grundebene klappt. Andererseits ist es auch möglich, das betreffende Dreieck um $A'' A_1''$ zu drehen und in die Aufebene zu klappen. In beiden Fällen wird α in wahrer Größe erhalten.

*) Gewöhnlich durch ihre Parameter, d. h. ihre Abschnitte auf den zugehörigen Achsen.

Konstruktion: Die Projektionen a_1 und a_2 legt man (wie vorher) durch die Parameter fest (Fig. 102c) und bestimmt die Spuren A' und A'' . Hierauf errichtet man in A_1'' das Lot auf a_1 in \widetilde{E}_1 und schneidet darauf $A_1''A''$ ab bis (A') . Durch $A'(A'')$ wird α bestimmt. — Oder man

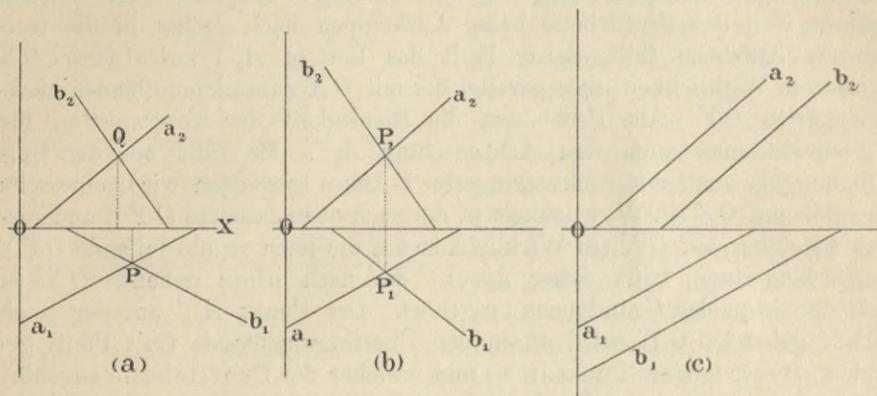


Fig. 103 (164).

beschreibt um A_1'' mit $A_1''A'$ den Kreis bis zum Schnitte (A') mit OX und zieht $A''(A')$. Der Winkel $A''(A')A_1''$ ist der gesuchte α .

Im allgemeinen sind zwei Geraden im Raume gekreuzt (windschief) und haben keinen Punkt mit einander gemein. Dies erkennt man an den Projektionen dadurch, daß die Schnittpunkte der Projektionen nicht die Projektionen eines Punktes sind. In Fig. 103a haben die Projektionen a_1, a_2 und b_1, b_2 die Schnittpunkte P und Q . Diese können aber nicht die Projektionen eines Punktes, des Schnittpunktes im Raume, sein, denn sie liegen nicht auf derselben Hilfsparallelen; somit sind die Geraden gekreuzt. In Fig. 103b ist die Lage von b geändert, was man an b_1 erkennt; die Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf derselben Hilfsparallelen und geben daher auch die Projektionen des Schnittpunktes im Raume an. In Fig. 103c laufen die Projektionen von b parallel denen von a . Daraus folgt, daß die Geraden im Raume ebenfalls parallel sind (34).

Aufgabe 96 (151). Gegeben sind die Parameter einer Ebene in bezug auf das Achsenkreuz, gesucht die Spuren und Neigungswinkel gegen die Bildebenen.

Analyse: Fig. 104a zeigt im Schrägbilde die Ebene $XYZ(\widetilde{E})$ mit den Parametern OX, OY, OZ . Ihre Schnittlinien XY, YZ, ZX mit den Bildebenen heißen bekanntlich Spuren und werden mit e', e'', e''' bezeichnet. Diese Spuren sind unmittelbar durch die Achsenabschnitte oder Parameter bestimmt. Der Grundriß von \widetilde{E} ist die unbegrenzte Grundebene selbst, ähnliches gilt für

Auf- und Seitenriß. Die Projektionen des Spurdreiecks XYZ werden durch die Dreiecke OXY , OXZ , OYZ dargestellt. Der Neigungswinkel von \widetilde{E} zu einer der Bildebenen (hier zu \widetilde{E}_1) wird durch eine Ebene erzeugt, die zu e' senkrecht liegt und sonst beliebig ist (Neigungsebene, 15). Am einfachsten gestaltet sich die Festlegung des Neigungswinkels, wenn man die Neigungsebene gleichzeitig durch die Z -Achse (bei anderen Winkeln bezw. durch Y - oder X -Achse) legt, sodaß Winkel OAZ (Fig. 104a) den Neigungswinkel α darstellt. Das rechtwinklige Dreieck OAZ ist aber bestimmt durch OZ und das Lot von O auf XY (15); bei der Aufklappung des Dreikants dreht man dieses Dreieck entweder nach \widetilde{E}_2 oder E_3 .

Zur Konstruktion des Schrägbildes (104a) ist nichts Besonderes zu bemerken. Das Normalbild (Fig. 104b) erledigt sich folgendermaßen. Man

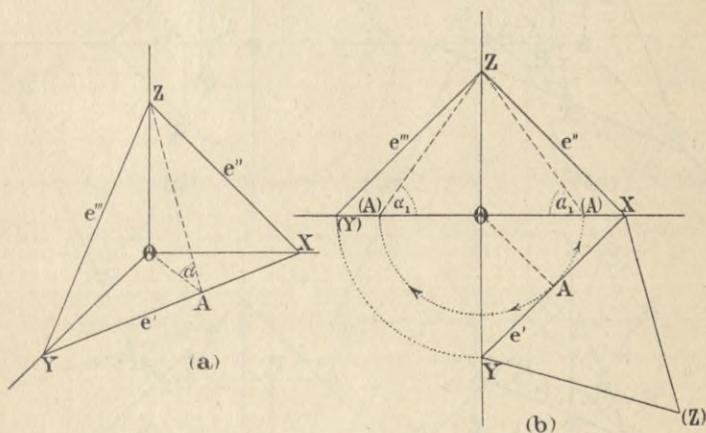


Fig. 104 (165).

schneidet auf dem Achsenkreuz die gegebenen Parameter p_x, p_y, p_z ab und zieht die Spuren e', e'' und e''' unter Übertragung bei OY . Dann fällt man von O das Lot nach XY bis A und beschreibt um O den Kreis bis zum Schnitte (A) mit OX bezw. OY . Wir haben dann in den beiden Dreiecken $O(A)Z$ rechts und links das umgeklappte Neigungsdreieck OAZ mit dem Neigungswinkel α bei (A) .*) — Will man auch das Spurdreieck in wahrer Größe haben, so genügt eine Umklappung dieses Dreiecks in eine der Bildebenen. Hier ist nach \widetilde{E}_1 geklappt, indem man um X den Kreis mit XZ und um Y den Kreis mit $(Y)Z$ beschrieben hat bis zum gegenseitigen Schnitte in (Z) .

*) Wenn die Profilebene nicht hinzugezogen wird, dann wählt man auf der X -Achse einen beliebigen Punkt (O) und fällt von ihm das Lot $(O)A$ auf e' . Hierauf zieht man durch (O) eine Hilfsachse (OZ) bis zum Schnitte (Z) mit e'' und konstruiert wie oben.

Aufgabe 97 (152). Gegeben sind die Spuren einer Ebene und der Grundriß eines ihrer Punkte, gesucht die zugeordneten Aufriß- und Seitenrißpunkte.

Analyse: Wenn in Fig. 105a die Ebene XYZ durch ihre Parameter festgelegt und P_1 der gegebene Grundriß eines ihrer Punkte ist, so zieht man durch P eine beliebige Gerade a mit den Spuren A' und A'' . Durch die Spur A' und P_1 ist der Grundriß a_1 der Geraden bestimmt, somit

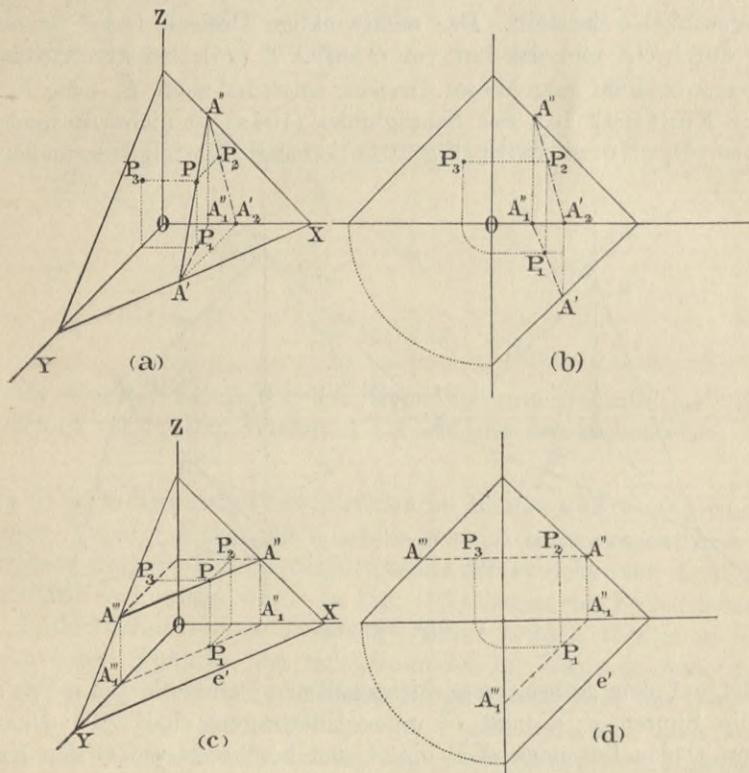


Fig. 105 (166).

auch der Achsenschnittpunkt A_1'' , durch den man wiederum A'' und den Aufriß a_2 festlegen kann. Auf a_2 aber liegt P_2 und durch P_1 bzw. P_2 ist P_3 sofort zu finden.

Bei der Konstruktion (Fig. 105b) legt man zunächst die Spuren der Ebene und P_1 fest. Dann zieht man durch P_1 eine beliebige Gerade P_1A' bis zum Schnitte A_1'' mit OX und legt durch diesen Punkt die Parallele mit OZ bis zum Schnitte A'' mit der Aufspur der Ebene. Weiterhin zieht man durch A' die Hilfsparkelle bis A_2' und hat damit den Aufriß a_2 ($A''A_2'$) der Hilfsgeraden. Durch die Hilfsparkelle P_1P_2 nach OX wird P_2 gefunden und durch das Projektionsdiagramm das Profil P_3 .

linie von A'' über OZ nach A''' festlegt. Die Hilfsparallelen von P_1 nach diesen Projektionen treffen auf die zugeordneten Punkte P_2 und P_3 .

Aufgabe 98 (153). Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden, gesucht die Spuren der hierdurch bestimmten Ebene.

Analyse: Die beiden Geraden a und b sollen durch ihre Projektionen gegeben sein (Fig. 106a). Ihr Schnittpunkt sei S . Man erkennt sofort, daß dann ihre Spuren A' und A'' bezw. B' und B'' auf den Spuren der gesuchten Ebene liegen müssen. Man hat also nur die Spuren der Geraden zu bestimmen, um die Spuren der Ebene zu finden. Darauf gründet sich folgende

Konstruktion: Gegeben sind (Fig. 106b) durch die Parameter die Projektionen a_1 und a_2 , b_1 und b_2 der beiden Geraden.*) Durch die verschiedenen Achsenschnittpunkte A_1'' , B_1'' usf. findet man der Reihe nach die Spuren A'' , B'' , A' und B' der gegebenen Geraden. Dann zieht man durch A' und B' die Ebenenspur e' bezw. durch A'' und B'' die Spur e'' ; beide müssen auf OX zusammentreffen (Probe). Durch $Y(Y)$ und Z ist auch e''' gefunden.

§ 14 (17). Ebene Körperschnitte.

Viel wichtiger als die Körperschnitte in Schrägprojektion (vergl. § 6) sind diese Gebilde in Normalprojektion, indem sich die natürlichen Dimensionen viel leichter aus Grund-, Auf- und Seitenriß entnehmen lassen als aus dem einzigen Schrägbild. Folgendes Beispiel wird sofort die Hauptmethoden der Konstruktion zur Erscheinung bringen.

Aufgabe 99 (159). Gegeben ist ein gerades, regelmäßiges fünfseitiges Prisma, gesucht die Normalprojektionen eines ebenen Schnittes, der zur Aufebene senkrecht steht und zur Grundebene unter 50° geneigt ist.

Analyse: Die Projektionen des Prismas sind nach § 11 ohne weiteres festzulegen (Fig. 107, auf rd. $\frac{2}{3}$ verkleinert). Wir denken uns nun die Schnittebene durch die Mitte M der Prismenachse gelegt. Dann ist die Aufrißspur e'' der Ebene eine Gerade, die durch die Mitte des Achsenaufrisses geht und unter 50° gegen OX geneigt ist. Die Grundspur e' dagegen steht auf OX senkrecht. Die Schnittfigur ist ein Fünfeck $ABCDE$, dessen Grundriß $A_1 B_1 C_1 \dots$ mit dem Grundriß der Grundfläche zusammenfällt (die Punkte der letzteren sind nur beziffert). Die Aufrisse müssen wegen der senkrechten Lage der Schnittebene sowohl in e'' als auch in den Aufrissen der Prismenkanten liegen, sie sind daher die Schnittpunkte A_2 , B_2 , $C_2 \dots$ beider Linien.

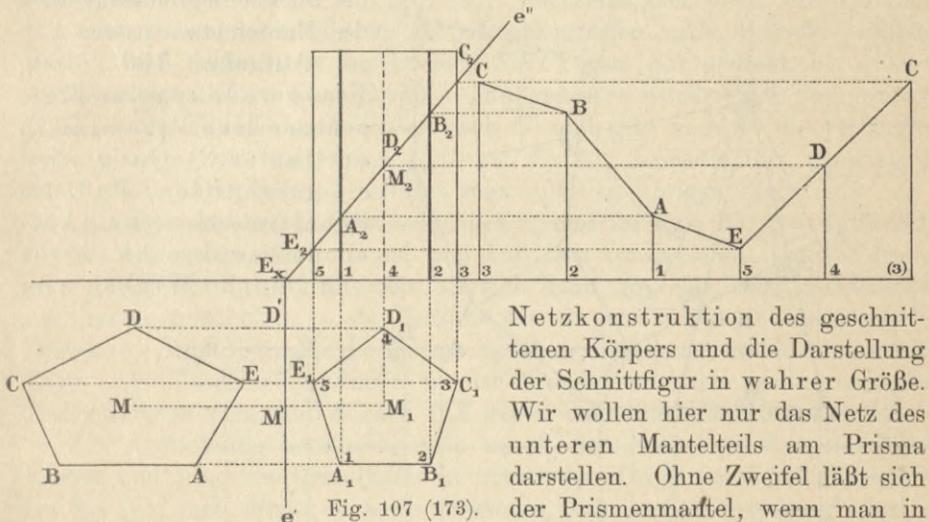
\widetilde{E} auf XY heißt bekanntlich Falllinie und der Winkel OAZ der Fallwinkel; er ist gleichbedeutend mit dem Neigungswinkel der Ebene \widetilde{E} gegen die Grundebene. Diese Benennungen gebraucht der Landmesser im Grubenbau (Markscheider).

*) Man beachte, daß S_1 und S_2 auf derselben Hilfsparallelen liegen müssen.

Konstruktion: Für die Mittelpunktskordinaten $y_0 = 23$, $z_0 = 0$ mm und ein beliebiges x_0 , sowie für $r = 14$ und $h = 42$ mm sind Grund- und Aufriß leicht zu zeichnen, wenn man außerdem die in der Figur angedeutete, einfache Lage annimmt. Wir legen durch die Mitte M_2 im Aufriß die Aufrißspur e'' der Schnittspur unter 50° zu OX und durch den Achsenschnitt E_x die Parallele zu OY . Damit ist die Konstruktion im engeren Sinne erledigt.

Das Profil der Schnittfigur ist leicht zu erhalten und zeigt die Vielecksform in deutlichster Weise. Durch Drehung kann man allgemeinere Lagen erhalten.

Zu den wichtigsten Nebenergebnissen dieser Projektionen gehört die



Netzkonstruktion des geschnittenen Körpers und die Darstellung der Schnittfigur in wahrer Größe. Wir wollen hier nur das Netz des unteren Mantelteils am Prisma darstellen. Ohne Zweifel läßt sich der Prismenmantel, wenn man in $3C$ aufschneidet, sofort als eine

Kette von Trapezen erhalten, deren Breiten $3-2$, $2-1$, $1-5$ usf. unmittelbar aus dem Grundriß entnommen werden können. Die Paralleleseiten $3C$, $2B$, $1A$ usf. der Trapeze sind gleich den entsprechenden Aufrissen $3C_2$, $2B_2$, $1A_2$. . . und werden sehr bequem durch Übertragungsparallelen (zu OX) nach rechts gebracht. Durch Ergänzungen der Netzfigur nach oben und Anlegen des regelmäßigen Fünfecks wird das volle Netz erzielt.

Die Darstellung der Schnittfiguren geschieht hier am einfachsten durch Umklappen. Man dreht die Figur ABC . . . (für sich, ohne den Körper zu drehen) um e' als Achse nach links, bis sie in die Grundebene zu liegen kommt. Es fragt sich nun, wie diese Figur ABC . . . (unten links) festzulegen ist. Wir fassen einen beliebigen Punkt, etwa D , heraus. Fällt man im Raume von D das Lot auf e' , so trifft es diese Spur in dem Punkte D' , der so liegt, daß $D_1 D'$ senkrecht zu e' steht (23). Bei der Drehung um e' fällt nun das Lot DD' links von e' in die Verlängerung

von D_1D' . Die Strecke DD' ist aber wegen der einfachen Lage der Schnittebene gleich E_xD_2 , so daß $D'D = E_xD_2$ aus dem Aufriß entnommen werden kann, ebenso $M'M = E_xM_2$ und die übrigen Strecken entsprechend den übrigen Punkten. Man fällt also von $A_1, B_1, C_1 \dots$ die Lote auf e' , verlängert sie und schneidet auf ihnen die im Aufriß von E_x aus abgegriffenen Strecken ab bis A, B, C, \dots . Das erhaltene Fünfeck muß an jede der oberen Begrenzungslinien des Mantelnetzes passen.

Aufgabe 100 (160).

Eine gerade, regelmäßige, sechsseitige Pyramide in vertikaler Stellung wird so geschnitten, daß die Schnittebene zur Aufebene senkrecht steht und einen Winkel von

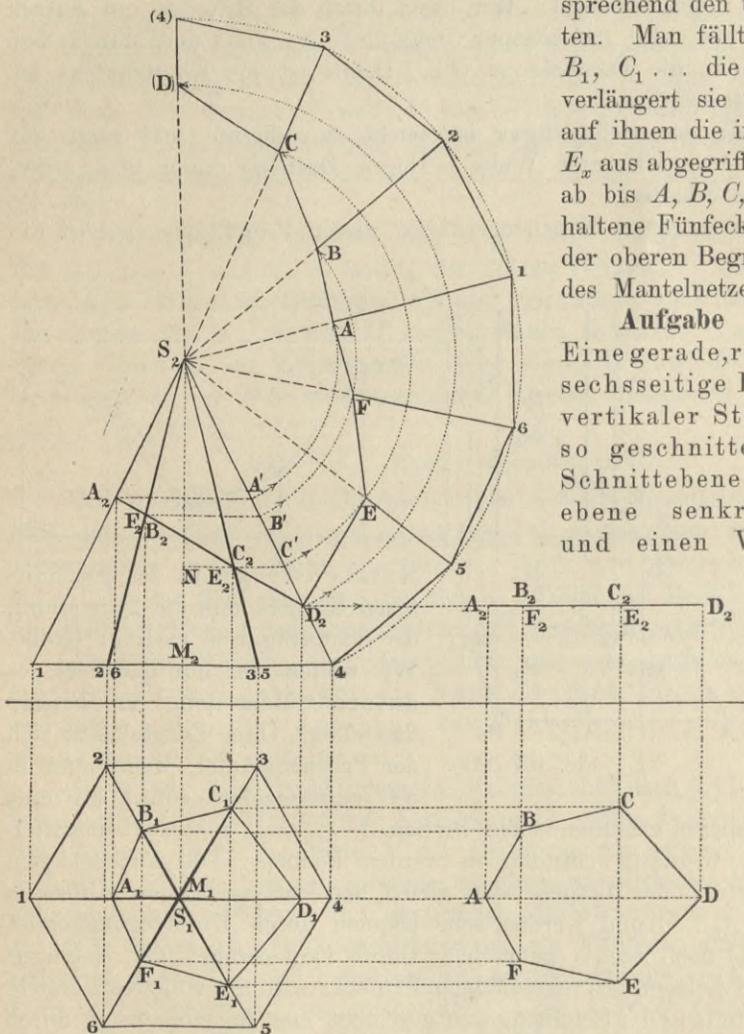


Fig. 108 (174).

30° mit der Grundebene bildet; man soll die Schnittfigur projizieren, in wahrer Größe darstellen und den Mantel der Pyramide nebst der Schnittlinie abwickeln.

Analyse: Die Pyramide in Fig. 108 ist in gewöhnlicher Weise projiziert. Von den Spuren der Schnittebene ist im Aufriß nur das kleine

Stück A_2D_2 gezeichnet, das den Aufriß der Schnittfigur in sich enthält. Ihre Aufrißpunkte sind unmittelbar bestimmt. Für ihren Grundriß hat man folgende Örter: Die Grundrisse der Seitenkanten und die Hilfsvertikalen nach der Grundebene. — Zur Darstellung der Schnittfigur in wahrer Größe benutze man diesmal die Methode der Drehung, d. h. man drehe diese Figur um eine Achse durch D parallel OY (orthogonale Achse), bis sie horizontal zu liegen kommt (links herum) und wende das bekannte Verfahren mit Hilfe der Verschiebungs-Parallelen an. — Die Abwicklung des Mantels selbst hat keine Schwierigkeiten, da Seitenlinien und Grundkanten unmittelbar der Figur zu entnehmen sind. Hier soll der untere Teil des Mantels hervorgehoben werden. Es fragt sich nur, in welcher Länge sind die Strecken $SB, SC, SE \dots$ abzuschneiden, denn nur SD und SA sind in wahrer Größe im Aufriß abzugreifen. Als Beispiel wählen wir SC und denken uns das Dreieck SNC^*) um SN gedreht, bis es der Aufebene parallel zu liegen kommt; infolgedessen wandert der Raumpunkt C bis an den Rand des Aufrisses nach C' und gibt in S_2C' die verlangte wahre Länge, die man nach C (bzw. E) des Kreis-Sektors übertragen kann. Ganz entsprechend verfährt man mit den übrigen Strecken.

Konstruktion: Für ein beliebiges x_0 und für $y_0 = 25, z_0 = 5, r = 20, h = 40$ mm sind zunächst Grund- und Aufriß zu konstruieren. Hierauf drehe man die Schnittfigur und denke sie sich dann um eine beliebige Strecke nach rechts verschoben, — die Pfeillinie von D_2 nach rechts gibt die genauere Lage an —, und übertrage die Punkte $A_2, B_2, C_2 \dots F_2$ genau in die horizontale Lage. Die Verschiebungslinien in der Grundebene nach rechts und die Hilfsparallelen vom Aufriß nach OX geben dann die Schnittfigur $ABC \dots$ — Zur Abwicklung beschreibe man um S_2 den Kreis mit $\overline{S_2} 4$ als Halbmesser und trage die Grundkante in natürlicher Größe sechsmal als Sehne ein bis (4); man erhält so sechs Sektoren, auf denen die wahren Längen der oberen Kantenabschnitte abzugreifen sind. Man zieht ferner durch $A_2, B_2, C_2 \dots$ die Parallelen zu OX bis zum rechten Rande der Aufrißfigur nach $A', B', C' \dots$ und beschreibt mit S_2A', S_2B' usf. die Übertragungsbogen bis zum Schnitte mit den entsprechenden Strahlen zwischen den Sektoren. In die Teile der gebrochenen Linie $D_2EFA \dots$ müssen die Seiten der wahren Schnittfigur genau passen.

Aufgabe 101 (161). Durch einen geraden Kreiszyylinder in vertikaler Stellung ist ein schiefer Schnitt gelegt, der unter 30° zur Grundebene geneigt ist, aber zur Aufebene senkrecht steht; man soll die Schnittlinie in wahrer Gestalt darstellen und den Mantel mit der Schnittlinie abwickeln.

Analyse: Die Aufgabe entspricht ganz derjenigen über einen Prismenschnitt. Wir wählen daher eine Anzahl regelmäßig verteilter Seitenlinien

*) N ist ein Achsenpunkt in derselben Höhe wie C .

(hier 8) heraus und stellen deren Grund- und Aufriß fest (Fig. 109, auf rd. $\frac{3}{4}$ verkleinert). Diese Seitenlinien sind hier beziffert. Der Aufriß des Zylinderschnittes ist eine Strecke A_2E_2 und muß wegen der orthogonalen Lage der Ebene in die Aufrißspur e'' der letzteren fallen; der Grundriß fällt mit dem Grundkreis zusammen. Damit aber sind die Projektionen der Schnittlinie bestimmt. — Zur Darstellung der Schnittfigur in wahrer Größe könnte man wie in den Aufgaben 99 und 100 eine Drehung oder Umklappung vornehmen. Hier wollen wir ein drittes Verfahren anwenden, das darin besteht, daß man die Schnittfigur um ihre längste Falllinie A_2E_2 in der Schnittebene \bar{E} so weit dreht, bis ihre Ebene parallel der Aufebene liegt.

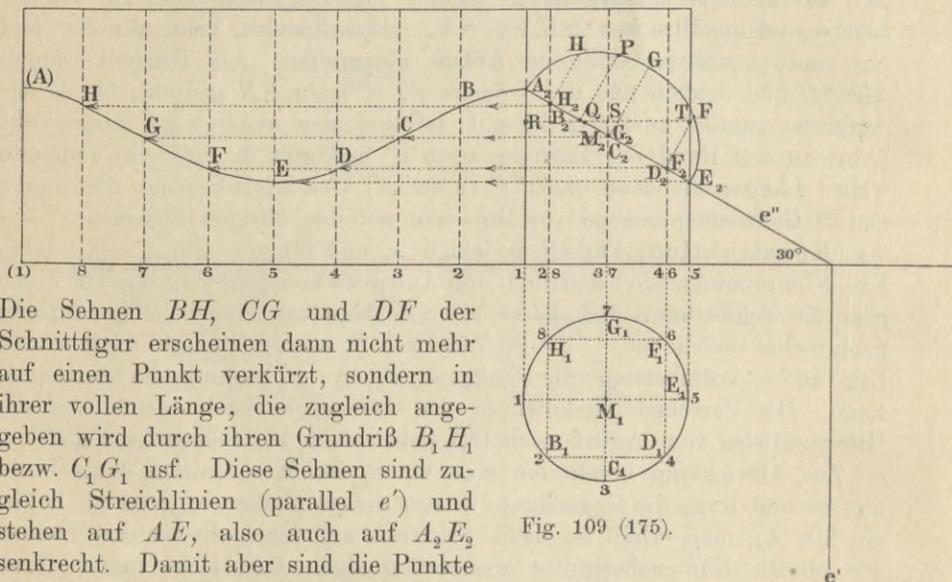


Fig. 109 (175).

Die Sehnen BH , CG und DF der Schnittfigur erscheinen dann nicht mehr auf einen Punkt verkürzt, sondern in ihrer vollen Länge, die zugleich angegeben wird durch ihren Grundriß B_1H_1 bzw. C_1G_1 usf. Diese Sehnen sind zugleich Streichlinien (parallel e') und stehen auf AE , also auch auf A_2E_2 senkrecht. Damit aber sind die Punkte G , H , F festgelegt; in der Fig. 109 ist wegen der Symmetrie bloß der hintere Teil der Schnittlinie mit Halbsehnen angegeben. — Die Abwicklung des Mantels erfährt gegen Aufg. 99 nur insofern eine Änderung, als die Ausstreckung (Rektifikation) des Grundkreises besondere Aufmerksamkeit erfordert. Man ersetzt die irrationale Zahl π mit hinreichender Genauigkeit durch $3\frac{1}{7}$, teilt den Durchmesser des Grundkreises in Siebentel und schneidet 3 und $\frac{1}{7}$ auf OX links neben dem Zylinderaufriß ab. Da die Abschnitte $1A$, $2B$, $3C$, ... der Seitenlinien in natürlicher Größe im Aufriß vorhanden sind, so hat man für die Punkte A , B , C , D , ... des abgewickelten Mantels hinreichende Örter.

Konstruktion: Man legt bei beliebigem x_0 für $y_0 = 23$, $r = 14$, $h = 43$ mm Grund- und Aufriß des Zylinders fest, zerlegt den Grundrißkreis in acht gleiche Teile und zieht die zugehörigen Aufrisse der Seitenlinien. Durch die Achsenmitte M_2 legt man die Aufrißspur e'' der Schnitt-

ebene unter 30° zu OX und zieht e' . Die Strecke A_2E_2 mit den Punkten B_2, C_2, D_2 usf. gibt den Aufriß der Schnittlinie. — Hierauf errichtet man in $B_2(H_2), C_2(G_2)$ und $D_2(F_2)$ die Lote auf A_2E_2 und schneidet auf ihnen der Reihe nach ab: $\frac{1}{2}B_1H_1, \frac{1}{2}C_1G_1$ und $\frac{1}{2}D_1F_1$. Damit ist die eine Hälfte der Schnittfigur in wahrer Größe dargestellt. — Wir verlängern nun zum Zwecke der Abwicklung die Strecke 15 im Aufriß nach links, schneiden hierauf $3\frac{1}{7} \cdot 2r$ ab*) bis (1) und zerlegen $\bar{1}(1)$ in acht gleiche Teile. Über $\bar{1}(1)$ errichtet man ein Rechteck mit der Höhe h und zieht die bekannten acht Seitenlinien, auf denen man mittelst horizontaler Übertragungslinien die Punkte $A, B, C, \dots (A)$ verzeichnet. Legt man durch diese Punkte eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man die abgewinkelte Schnittlinie. — Das Profil der Schnittfigur ist leicht hinzuzufügen.

Aufgabe 102 (163). Durch einen geraden Kreiskegel mit vertikaler

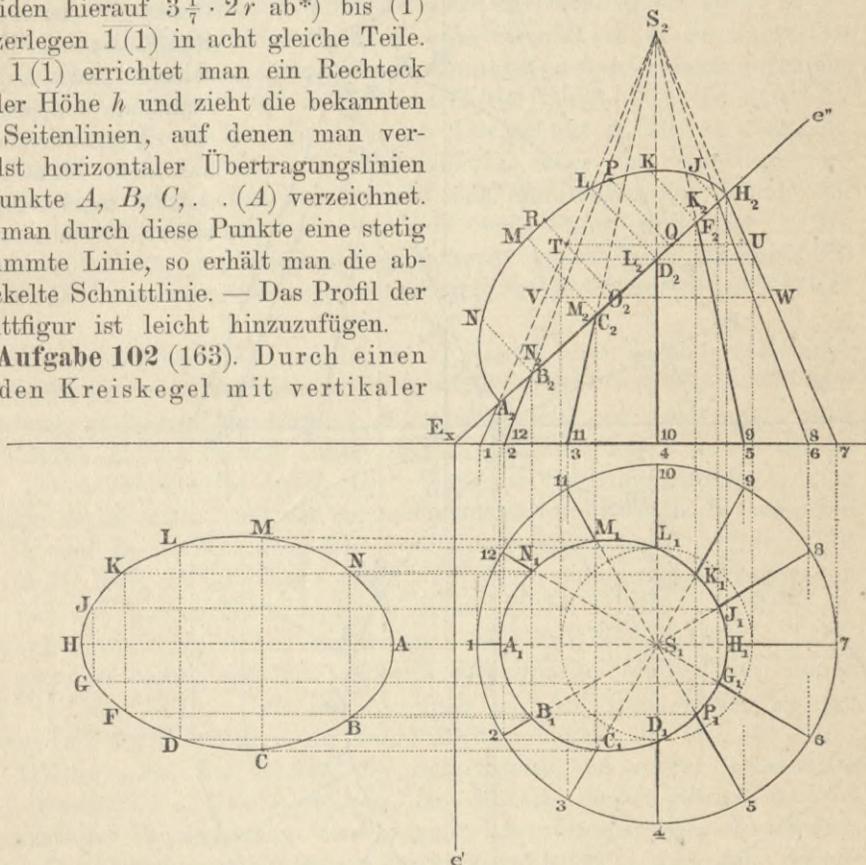
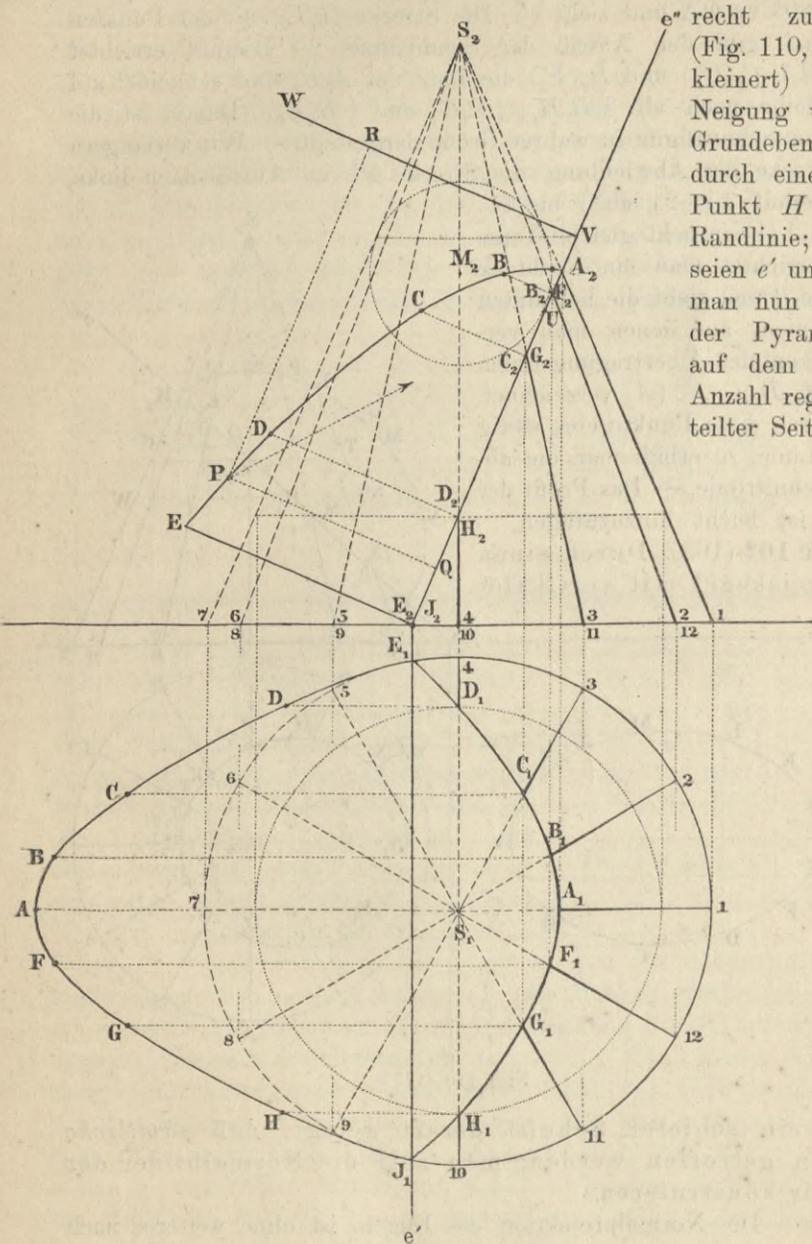


Fig. 110 (177).

Achse ist ein schiefer Schnitt derart gelegt, daß sämtliche Seitenlinien getroffen werden; man soll die Normalbilder der Schnittfigur konstruieren.

Analyse: Die Normalprojektion des Kegels ist ohne weiteres nach § 12 bestimmt. Wir legen der Einfachheit wegen die Schnittebene \bar{E} senk-

*) Die Zerlegung in Siebentel geschieht entweder nach dem gewöhnlichen planimetrischen Verfahren oder besser mit Hilfe eines Proportional-Maßstabes.



e'' recht zur Aufebene (Fig. 110, auf rd. $\frac{2}{3}$ verkleinert) unter einer Neigung von 45° zur Grundebene und zwar durch einen beliebigen Punkt H der rechten Randlinie; die Spuren seien e' und e'' . Wählt man nun entsprechend der Pyramidenaufgabe auf dem Mantel eine Anzahl regelmäßig verteilter Seitenlinien her-

Fig. 111 (178).

aus (hier zwölf), so ergeben die Schnitte ihrer Aufrisse mit e'' sofort die Aufrißpunkte $A_2, B_2, C_2 \dots$ der Schnittfigur, und die vertikalen

Hilfsparallelen bestimmen die Grundrißpunkte $A_1, B_1, C_1 \dots$. Nur die mittleren Seitenlinien S_4 und S_{10} ergeben im Grundrisse keinen Schnitt, da die betr. Linien zusammenfallen. Um hier D_1 und L_1 festzulegen, bedient man sich einer Methode, die überhaupt für alle Punkte der Schnittlinie anwendbar ist, nämlich der Methode der Parallelschnitte, während wir bisher ausschließlich die Methode der Seitenlinien benutzten. Legt man nämlich durch D einen parallelen Querschnitt, so erzeugt er einen Kreis, dessen Aufriß eine Strecke ist (in der Figur 110 nur punktiert, nicht bezeichnet), dessen Grundriß in wahrer Größe erscheint und durch den Schnitt mit dem Grundriß der Seitenlinien S_4 und S_{10} die Grundrißpunkte D_1 und L_1 bestimmt. Der Schnitt ist hier so aufgefaßt, als stumpfe er den Kegel ab; man erblickt daher die Schnittfigur im Grundriß unverhüllt. Das Profil ergibt sich unmittelbar aus Grund- und Aufriß. Zur Darstellung der wahren Schnittfigur sind hier beide Methoden benutzt, die Umklappungsmethode (um e' nach Aufgabe 99) und die Drehungsmethode (nach Aufgabe 101). Der Vergleich beider dient als Probe.

Konstruktion: Bei beliebigem x_0 werden die Normalprojektionen des Kegels nebst 12 Seitenlinien für $y_0 = 36$, $z_0 = 0$, $r = 33$, $h = 77$ mm in bekannter Weise entworfen. Die Länge H_7 sei = 50 mm. Man zieht durch H_2 die Spur e' unter 45° zu OX und legt e' senkrecht zu OX . Durch die Schnitte $A_2, B_2, C_2 \dots$ führt man die Hilfsparallelen bis zum Schnitte $A_1, B_1, C_1 \dots$ mit den entsprechenden Grundrissen der Seitenlinien. Für D_1 und L_1 benutzt man den erwähnten Parallelschnitt. — Dann fällt man (nach Aufg. 99) die Lote von $A_1, B_1, C_1 \dots$ auf e' und schneidet von hier aus die Längen $E_x A_2, E_x B_2, E_x C_2$ usf. ab bis $A, B, C \dots$ der Umklappungsfigur. Andererseits errichtet man im Aufriß die Lote in $B_2, C_2, D_2 \dots$ und schneidet darauf die dem Grundriß entnommenen Hälften der Sehnen $B_1 N_1, C_1 M_1, D_1 L_1 \dots$ ab bis $N, M, L \dots$. Auf diese Weise ist der hintere Teil der Schnittfigur in wahrer Größe dargestellt. Daß die Figur eine Ellipse ist, hat bereits die Betrachtung des ersten Abschnittes (§ 6) gezeigt.⁴⁰⁾ — Das Abwickeln des Mantels (nebst Schnittlinie) ist eine einfache Wiederholung der Aufgabe 100. Hierbei wird der Zentriwinkel des Abwicklungssektors am besten berechnet*) (nach dem Bogenproportionalssatz).

Aufgabe 103 (164). Durch einen geraden Kreiskegel mit vertikaler Achse ist ein schiefer Schnitt derart gelegt, daß er einer Seitenlinie parallel läuft; man soll die Normalbilder der Schnittfigur zeichnen.

*) In der Praxis wird nicht selten auch hier der Durchmesser in 7 gleiche Teile geteilt und, entsprechend $\pi = \frac{22}{7}$, die kleine Siebentelstrecke 22 mal auf dem Bogen des Sektors abgeschnitten.

Analyse: Die Dimensionen sind ähnlich gewählt wie in der vorigen Aufgabe; auch soll der Schnitt in derselben Höhe (oben rechts bei A , Fig. 111, hier unverkleinert) einsetzen und im übrigen parallel $S7$ gelegt sein. Die Figur ist außerdem so aufzufassen, als wenn ein Kegelstumpf erzeugt werden soll. Wie in voriger Aufgabe werden die Grund- und Aufrißpunkte auf 12 regelmäßig verteilten Seitenlinien bestimmt. Die Punkte D_1 und H_1 dagegen müssen auch hier durch einen Parallelschnitt festgelegt werden. — Die wahre Gestalt ist ebenfalls doppelt entworfen, durch eine Umklappung um e' in die Grundebene und eine Drehung um AE (im Aufriß).

Konstruktion: Nach Festlegung von Grund- und Aufriß des Kegels schneidet man auf S_21 die Länge von 50 mm ab bis A_2 und zieht die Parallele A_2E_2 als Aufrißspur e'' der Schnittebene, woran man die Grundspur e' schließt. Von den Aufrißpunkten $A_2, B_2, C_2 \dots$ fällt man die Hilfsparallelen nach dem Grundriß und erhält $A_1, B_1, C_1 \dots$. — Für $D_1(H_1)$ benutzt man den angedeuteten Parallelschnitt. Zur Darstellung der Umklappung um e' fällt man von $A_1, B_1, C_1 \dots$ die Lote auf e' und ihre Verlängerung, worauf man die Längen $E_2A_2, E_2B_2, E_2C_2 \dots$ aus dem Aufriß entnimmt und von e' aus nach links abschneidet bis $A, B, C \dots$. Man sieht, daß die Schnittlinie nicht geschlossen ist. — Zur zweiten Darstellung der wahren Größe (im Aufriß) errichtet man in $B_2(F_2), C_2(G_2) \dots$ Lote auf A_2E_2 und schneidet auf ihnen ab die aus dem Grundriß entnommenen Halbschnen: $\frac{1}{2}B_1F_1, \frac{1}{2}C_1G_1$ usf. — Die Abwicklung des Mantels nebst Schnittlinie hat keine Schwierigkeiten. Die Schnittlinie ist eine Parabel (vergl. § 6).⁴¹⁾

Aufgabe 104 (165). Durch einen geraden Kreiskegel mit vertikaler Achse ist ein Schnitt derart gelegt, daß er parallel der Kegelachse läuft; man soll die Normalbilder der Schnittfigur konstruieren.

Analyse: Der Zeichnung sind die Maßverhältnisse der letzten Figur zu Grunde gelegt (Fig. 112). Der Schnitt ist in derselben Höhe ($h = 46$, Seitenlinienstück $1P = 4A = 50$ mm) geführt, doch so, daß ein spezieller Fall hervortritt, der die Schnittlinie ohne weiteres in wahrer Gestalt im Aufriß zeigt; der Schnitt ist nämlich frontal geführt, d. h. vertikal und parallel zur Aufebene. Die Grundspur e' der Ebene läuft dann parallel OX , während die Aufspur wegfällt. Hier erscheinen nun die Grundrisse $A_1, B_1, D_1 \dots$ der Kurvenpunkte als Schnitte zwischen den bekannten Seitenlinien und der Grundspur e' , während die Aufrisse $B_2, D_2 \dots$ durch die vertikalen Hilfsparallelen nach den Aufrissen der Seitenlinien bestimmt werden. Um aber A_2 festzulegen, bedarf es wiederum eines parallelen Kreisschnittes, da die Hilfsparallele versagt. Ähnlich liegen die Verhältnisse für E und J , die sich nicht auf einer der ausgewählten Seitenlinien befinden; als Hilfskreis dient hier der Grundkreis selbst. Zwischen

B und *D* zeigt die Schnittlinie eine zu große Lücke, als daß sie freihändig ausgefüllt werden konnte. Deshalb wenden wir auch hier einen beliebigen Parallelschnitt an, durch den im Aufriß C_2 und G_2 mar-

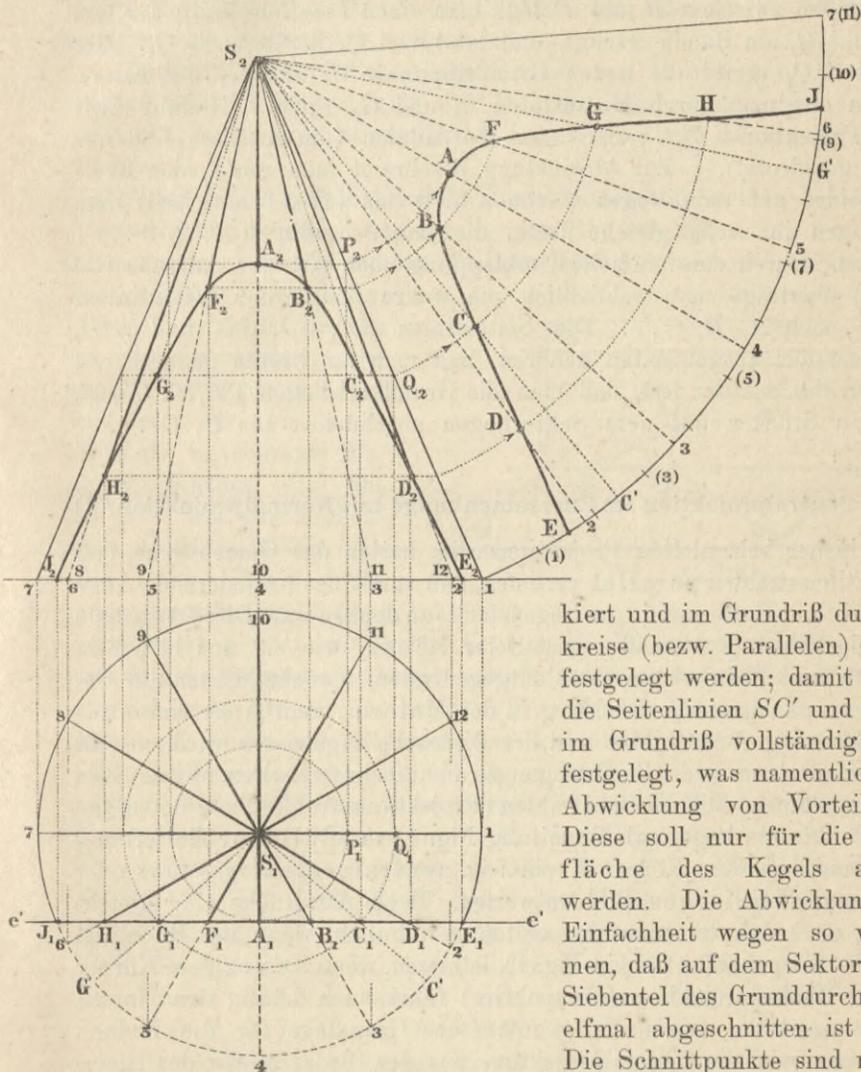


Fig. 112 (179).

kiert und im Grundriß durch Hilfskreise (bezw. Parallelen) C_1 und G_1 festgelegt werden; damit sind auch die Seitenlinien SC' und SG' (nur im Grundriß vollständig gezogen) festgelegt, was namentlich für die Abwicklung von Vorteil ist. — Diese soll nur für die Vorderfläche des Kegels ausgeführt werden. Die Abwicklung ist der Einfachheit wegen so vorgenommen, daß auf dem Sektorbogen ein Siebentel des Grunddurchmessers r elfmal abgeschnitten ist ($\pi = \frac{22}{7}$). Die Schnittpunkte sind mit (1)... (3)... (10), (11), bezeichnet. — Eine Umklappung der Schnittfigur,

einer Hyperbel, ist hier natürlich überflüssig (vergl. in bezug auf ihre Eigenschaften § 6).

Konstruktion: Nachdem die Kegelprojektion einschl. der 12 Seitenlinien vollendet ist, legt man im Aufriß die Parallele A_2P_2 in der Höhe

46 mm (bezw. 50 mm Seitenabstand), lotet herab nach P_1 und zieht mit $S_1 P_1$ den Kreis. Die Tangente in A_1 an diesen Kreis ist die Grundspur e' . Von den Schnitten B_1, D_1 usf. lotet man herauf und findet B_2, D_2 usf. In mittlerer Höhe zwischen B und D legt man einen Parallelschnitt, der den Aufrißpunkt Q_2 am Rande erzeugt, und lotet von Q_2 herab nach Q_1 . Der Kreis mit $S_1 Q_1$ ergibt die neuen Grundrißpunkte C_1 und G_1 der Kurve, von denen aus man durch Heraufloten C_2 und G_2 findet. Hierauf zieht man die Projektionen $S_1 C', S_1 G'$ der Seitenlinien (die Aufrisse sind nur zum Teil angedeutet). — Zur Abwicklung beschreibt man um S_2 den Kreis und schneidet auf dem Bogen $\frac{11}{7}$ von r ab*) bis (11). Dann teilt man diesen Bogen in sechs gleiche Teile, die den Seitenlinien 1, 2, 3... 7 entsprechen. Durch eine einfache Umklappung nach Art der Aufgabe 100 (Fig. 108) überträgt man schließlich die wahre Länge der Seitenlinienabschnitte nach $A, B, C \dots$. Die Seitenlinien SE, SJ, SC' und SG' , die nicht zu den ausgewählten gehören, legt man am besten dadurch auf dem Bogen des Sektors fest, daß man die Grundkreisbögen $\overline{1E_1}, \overline{1C'}$ usf. in kleinen Stücken auf dem Sektorbogen abschneidet bis $E, C' \dots$.

§ 15 (20). Zentralprojektion im Zusammenhange mit Normalprojektion.***)

Alle bisher behandelten Projektionsarten hatten das Gemeinsame, daß die Projektionsstrahlen parallel verliefen, daß somit das projizierende Auge in unendlicher Entfernung vom Gegenstande zu denken war. Diese Annahme hat für die Bilder gesetzmäßig gestalteter Körper, wie sie uns bisher in Mathematik und Naturwissenschaft entgegentraten, manche Härten im Gefolge. Wenn nun gar, wie durchweg in der Malerei, dem Auge eine endliche Entfernung vom Objekte und der Bildebene zugewiesen wird, so läßt sich der Parallelismus des Strahlenganges nicht mehr festhalten. Wir müssen vielmehr annehmen, daß die Sehstrahlen (Projektionsstrahlen) von einem gegebenen Punkte O (Auge, vgl. Einleitung Fig. 1) in endlicher Entfernung ausgehen und von dem Körper K ein sog. zentralprojektives oder zentralperspektives Bild entwerfen. Beide Ausdrücke sind gleichbedeutend, doch benützt man den ersten gewöhnlich, wenn die Bildebene hinter dem Körper steht (wie in Fig. 1), letzteren, wenn sie vor dem Körper steht. Die Zentralprojektion (Perspektive) führt auch häufig den Namen Malerperspektive, da sie die geometrische Grundlage für die Malerei bildet. Denn wie die Normalprojektion aus den Bedürfnissen des Steinmetzen hervorging und ebenso alt sein muß, als das Aufführen von

*) Die Berechnung des Zentriwinkels liefert natürlich ein genaueres Ergebnis; unsere Konstruktion weicht nur um rd. 1^0 von der Rechnung ab.

**) Zum Verständnis dieses § bedarf es im wesentlichen nur der §§ 1, 9 und 10.

Bauten aus behauenen Steinen, so knüpft sich die Entwicklung der Zentralprojektion eng an die Fortschritte der Malerei.

Wir betrachten nun, wie bei der Einführung der Normalprojektion, zuerst die Zentralprojektion des Punktes und schreiten in der wiederholt angedeuteten Stufenfolge weiter.

Aufgabe 105 (188). Gegeben ist ein Punkt der Grundebene *hinter* der Aufebene und der Ort des Auges *vor* der Aufebene; gesucht wird das Zentralbild jenes Punktes in Bezug auf die Aufebene.

Analyse: Als Bildebene für Zentralbilder wählen wir vorläufig die (vertikale und frontale) Aufebene, genau so wie früher bei den Schrägbildern, und vereinfachen also die Betrachtung dadurch, daß wir den abzubildenden Punkt P (Fig. 113 a;

$\frac{1}{2}$, 45°) zunächst in die Grundebene verlegen. Die ganze Betrachtung aber knüpfen wir an einen Entwurf in schräger Parallelprojektion, die uns bis jetzt die anschaulichsten Bilder geliefert hat. Der Punkt P ist durch seine Koordinaten festgelegt

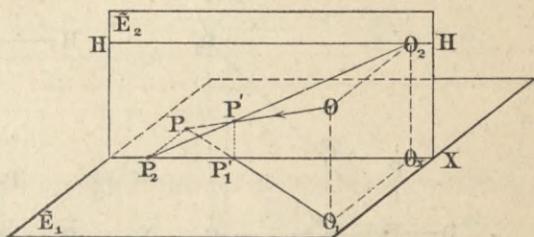


Fig. 113 a (202 a).

(wobei $z = 0$), sein Aufriß liegt in P_2 . Entsprechend wird der Ort O des Auges bestimmt; O_1 und O_2 sind Grund- und Aufriß. Angenommen, der Sehstrahl (Projektionsstrahl) OP treffe die Aufebene \tilde{E}_2 in P' , dann ist dieser Punkt laut Erklärung das Zentralbild von P , und man hat nun nach Bestimmungsortern für P' zu suchen.*) Abgesehen von OP selbst, liegt P' auf P_2O_2 , denn diese Gerade ist der Aufriß von PO ; außerdem liegt P' auf der Vertikalen durch P'_1 , dem Grundrisse von P' . Der Punkt P'_1 aber ist bestimmt durch die X -Achse und PO_1 . Die Y -Koordinate von O ($OO_2 = O_1O_x$) heißt die Distanz des Auges von der Bildebene. Eine Horizontalebene \tilde{H} durch O (nicht gezeichnet) trifft \tilde{E}_2 in einer Geraden \overline{HH} , die durch O_2 geht, parallel der X -Achse verläuft und Horizontlinie heißt. Endlich ersieht man aus der Figur, daß $P'O : P'P = P'O_2 : P'P_2 = P'_1O_1 : P'_1P = OO_2 : PP_2$, oder in Worten: Der Sehstrahl (OP) und seine beiden Normalprojektionen (O_1P und O_2P_2) werden durch das Zentralbild (P') bzw. durch dessen Grundriß (P'_1) im Verhältnis der Distanz ($OO_2 = O_1O_x$) zur Y -Koordinate PP_2 , der sog. Tiefe des Originalpunktes (P), geteilt.

*) Man sieht schon, daß die Bestimmung von P' auf eine Spurpunktbestimmung nach Art der Aufg. 93 und 94 hinauskommt.

Konstruktion: Wir führen die Zeichnung im offenen (aufgeklappten) Dreikant aus (Fig. 113b, auf $\frac{2}{3}$ verkleinert). Wird die Grundebene bei feststehender Aufebene um die X -Achse gedreht und heruntergeklappt, bis sie die Erweiterung der Aufebene nach unten bildet (vergl. § 9, III), dann fällt der hintere Teil der Grundebene mit P in die Aufebene nach oben und behält den Abstand der (negativen) Y -Koordinate von der X -Achse. Man legt daher zunächst nach § 9 die Normalprojektionen des Punktes P fest ($x = 11, y = -10, z = 0$ mm). P ist hier sein eigener Grundriß und P_2 (auf OX) der Aufriß. Ebenso werden die Normalprojektionen O_1 und O_2 für das Auge O bestimmt ($x = 48, y = 18, z = 38$ mm). Dann zieht man den Strahlengrundriß O_1P und den Aufriß O_2P_2 . Durch den Achsenschnitt P_1' des Strahlengrundrisses legt man schließlich die vertikale Hilfsparallele bis zum Schnitte mit P_2O_2 in P' , dem gesuchten Zentralbilde.

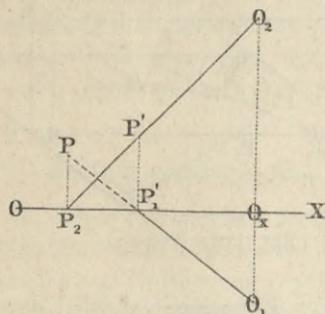


Fig. 113b (202b).

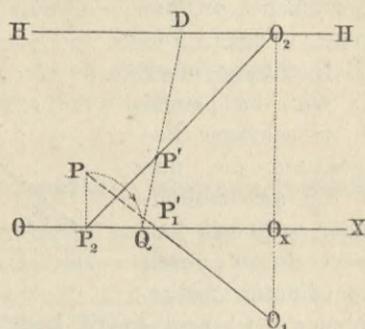


Fig. 113c (202c).

Eine zweite Konstruktion, die für die Folge von Wichtigkeit ist, gründet sich auf den oben aufgestellten Proportionalssatz. Hiernach braucht man nur den Strahlenaufriß O_2P_2 im Verhältnisse $O_1O_x : PP_2$ zu teilen. Am einfachsten geschieht dies mit Hilfe der X -Achse und der Horizontlinie HH (Fig. 113c, ebenfalls auf $\frac{2}{3}$ verkleinert). Man schneidet auf der Achse von P_2 aus die Strecke PP_2 (Tiefe oder Y -Koordinate von P) nach rechts (oder links) ab bis Q , ebenso auf HH von O_2 aus die Strecke O_1O_x (Distanz oder Y -Koordinate von O) nach links (oder rechts) ab bis D und zieht QD bis zum Schnitte in P' . — Der Punkt D heißt auch Distanzpunkt. —

Aufgabe 106 (189). Gegeben ist durch Koordinaten ein Punkt P der Grundebene vor der Aufebene nebst dem Ort des Auges; gesucht wird das Zentralbild des Punktes in bezug auf eine Bildebene zwischen Punkt und Auge, die außerdem der Aufebene parallel läuft.

Analyse: Der Punkt P in der Grundebene Fig. 114a ($\frac{1}{3}, 45^\circ$) hat den Aufriß P_2 in bezug auf die Aufebene \bar{E}_2 und den Aufriß (P_2) in-

bezug auf die eigentliche Bildebene \widetilde{E} (für die Zentralprojektion). Zieht man den Sehstrahl OP , so ist P' das Zentralbild. Das Auge O hat den Grundriß O_1 und den Aufriß O_2 . Das Lot OO_2 trifft die Zentralbild-Ebene in (O_2) , einem Punkte, der zugleich Aufriß von O in bezug auf \widetilde{E} ist. Zieht man durch (O_2) die Parallele \overline{HH} zur Grundebene bzw. zu $O'X'$, so ist diese Parallele die Horizontlinie. Zieht man ferner durch O_2 die Horizontale $(H)(H)$, dann hat man in dieser Linie eine Hilfslinie (Nebenhorizont), die von besonderem Nutzen sein wird. Ganz wie in der vorigen Aufgabe läßt sich nun P' mit Hilfe der Sehstrahlen-Projektionen PO_1 und $(P_2)(O_2)$ bestimmen, denn auch $(P_2)(O_2)$ ist Aufriß von OP in bezug auf die Zentralbild-Ebene. Man hat daher als Örter für P' den Aufriß $(P_2)(O_2)$ und die Vertikale in P'_1 ; übrigens läßt sich auch P' entsprechend der zweiten

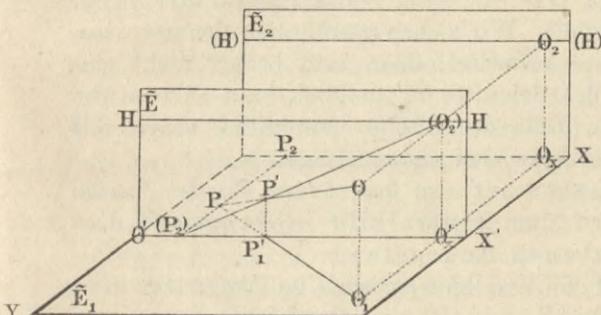


Fig. 114 a (203a).

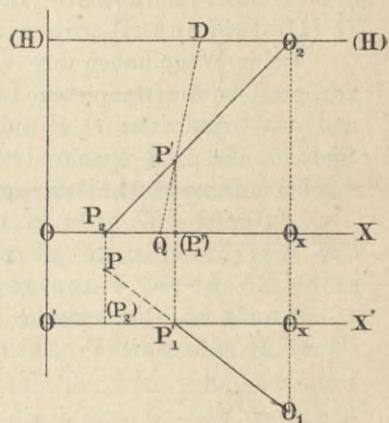


Fig. 114 b (203b).

Lösung voriger Aufgabe durch Proportionalteilung von $(P_2)(O_2)$ bestimmen, da hier ebenfalls $P'(O_2) : P'(P_2) = O(O_2) : P(P_2)$.*

Konstruktion: Nach vorstehender Analyse müßte man nunmehr die Grundebene um $O'X'$ drehen, herunterklappen und ganz so konstruieren, wie in voriger Aufgabe. Dadurch fällt nun der Hauptteil der Konstruktion in den Streifen zwischen X -Achse und $O'X'$, der bereits durch den Grundriß von P in Anspruch genommen ist. Wenn man nun nicht eine besondere Nebenfigur konstruieren, sondern im Zusammenhange mit der Hauptfigur bleiben will (Fig. 114b, auf $\frac{2}{3}$ verkleinert), dann denkt man sich die Zentral-Bildebene \widetilde{E} zuerst längs $O'Y$ parallel mit der Anfangslage nach hinten verschoben, bis sie mit \widetilde{E}_2 zusammenfällt. Dabei decken einander die Punkte (P_2) und P_2 , O_x' und O_x , (O_2) und O_2 der Fig. 114a. Die Kon-

*) Dabei ist zu beachten, daß $O(O_2)$ die wahre Distanz des Auges in bezug auf \widetilde{E} ist, während OO_2 die sog. Hilfsdistanz (in bezug auf \widetilde{E}_2) ist.

struktion fällt dann aus, wie folgt: Ziehe OX (Fig. 114b) und in gegebenem Abstände ($d = 18$ mm) die Nebenachse $O'X'$. Hierauf legt man die Projektionen von P fest für $x = 11$, $y = +7$, $z = 0$ mm und markiert beide Aufrisse P_2 und (P_2) . Ebenso legt man die Projektionen O_1 und O_2 des Auges für $x = 48$, $y = 35$, $z = 38$ mm fest mit den Achsenschnittpunkten O_x und O_x' . Zieht man nun PO_1 und P_2O_2 , so hat man wieder folgende zwei Wege zur Bestimmung von P' :

1. Man überträgt P_1' nach OX , indem man durch P_1' die Parallele zu $O'O$ bis (P_1') zieht, und errichtet hier die Vertikale bis zum Schnitte P' mit P_2O_2 .

2. Man trägt die „Tiefe“ $(P_2)P = 11$ mm von P_2 ab (nach rechts) bis Q und die wahre „Distanz“ $O_1O_x' = y - d = 17$ mm von O_2 auf die Hilfshorizontlinie (in der Gegenrichtung, nach links) ab bis D (Distanzpunkt) und zieht QD bis zum Schnitte P' mit P_2O_2 .

Beide Wege haben ihre Vorteile. Wir ziehen gewöhnlich den zweiten vor, weil er die wenigsten Linien erfordert; denn man bedarf nicht einmal des Grundrisses O_1P und des Schnittes P_1' ; endlich braucht man die Distanz, die sich im vorderen Teile des Blattes gewöhnlich sehr breit macht, nur nebenbei zu geben bzw. bei O_2 anzutragen.

Aufgabe 107 (190). Gegeben ist ein beliebiger Punkt hinter der Aufebene, gesucht wird das Zentralbild in bezug auf dieselbe Ebene für einen gegebenen Augenstand.

Analyse: Die Aufgabe ist die Verallgemeinerung zu Aufg. 105. Der Punkt P und seine Projektionen P_1 und P_2 sind durch die zugehörigen

Koordinaten gegeben (Fig. 115a; $\frac{1}{2}$, 45°), ebenso das Auge O , dessen Grundriß $G(O_1)$ von jetzt ab Grundpunkt und dessen Aufriß $A(O_2)$ Augenpunkt heißen möge; die zugehörigen Achsenpunkte seien R und S . Die Strecke GS heißt auch Standlinie; sie ist gleich der Distanz OA . Die

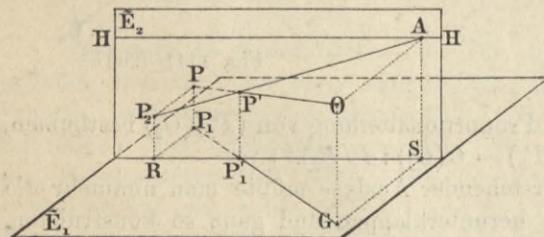


Fig. 115a (204a).

Tiefe PP_2 des Punktes ist gleich P_1R und zugleich die (negative) Y -Koordinate von P . Zieht man den Sehstrahl OP , so sieht man sofort, wie in Aufg. 105, daß das Zentralbild P' auf dem Aufriß P_2A des Strahles liegen muß. Ferner liegt P' vertikal über dem Achsenschnittpunkt P_1' des Grundrisses P_1G . Außerdem bemerkt man auch hier, daß $P'A : P'P_2 = AO : PP_2$, d. h. der Aufriß P_2A ist durch P im Verhältnis der Distanz zur Tiefe geteilt.

Konstruktion: Man klappt die Grundebene nach unten (Fig. 115b, verkl. auf $\frac{2}{3}$), wodurch P_1 in die Aufebene fällt. Hiernach zieht man die

Achse OX und legt die Projektionen P_1 und P_2 von P fest (hier für $x = 39$, $y = -18$, $z = 11$ mm). Dann bestimmt man Grundriß G (Grundpunkt) und Aufriß A (Augenpunkt) von O (hier für $x = 84$, $y = 78$, $z = 36$ mm). G ist nur angedeutet (durch Pfeile), weil man diesen Punkt zunächst nicht braucht, sondern nur seine Y -Koordinate (die Distanz). Nun zieht man P_2A und teilt diese Strecke im Verhältnisse der Augendistanz zur Tiefe der gegebenen Punkte. Hierzu eignet sich sofort die Horizontlinie, auf der man von A aus (etwa

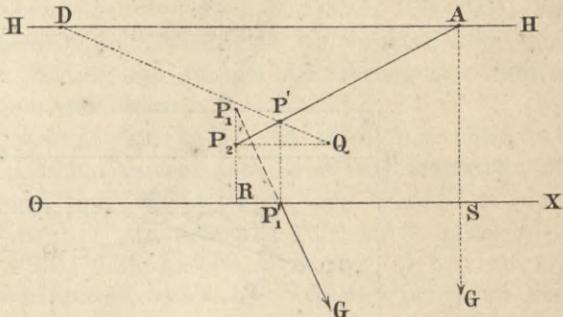


Fig. 115 b (204b).

nach links) $GS = 78$ mm abschneidet bis zum Distanzpunkte D ; dann zieht man in der Gegenrichtung (nach rechts) $P_2Q =$ der Tiefe $P_1R = 18$ mm. Die Gerade QD liefert schließlich das Bild P' . — Man sieht leicht ein, daß auch der Grundriß GP_1 (siehe Pfeil) mit dem Achsenschnittpunkt P_1' das Bild P' ergeben würde, daß aber diese Konstruktion unvorteilhaft ist.

Aufgabe 108 (191). Gegeben ist durch Koordinaten ein beliebiger Punkt P vor der Aufebene nebst dem Ort des Auges; gesucht wird das Zentralbild des Punktes in bezug auf eine Bildebene zwischen Punkt und Auge, die der Aufebene parallel läuft.

Analyse: Ganz analog der Aufgabe 106, die hier verallgemeinert wird, ist Fig. 116a gezeichnet. Der Punkt P liegt vor \tilde{E}_2 , sein Grundriß ist P_1 , sein Aufriß P_2 . In bezug auf die Zentralbild-Ebene \tilde{E} mit der Nebenachse $O'X'$ besitzt er den Aufriß (P_2). Das Auge O hat den Grundriß G und zwei Augenpunkte, nämlich den Haupt-Augenpunkt A auf \tilde{E} und den Hilfs-Augenpunkt (A) auf \tilde{E}_2 . Die Festlegung des Bildes P' geschieht, wie man sofort sieht, entweder nach dem Spurpunktverfahren durch die Vertikale in P_1' oder durch das Proportionalverfahren; letzteres ziehen wir vor, wie bereits oben bemerkt.

Konstruktion: Beim Umklappen verschieben wir zuerst, wie in Zukunft immer, die Ebene \tilde{E} nach \tilde{E}_2 und drehen dann um die X -Achse nach unten (Fig. 116b). Wir ziehen somit eine beliebige Achse OX und im Abstände $d = 30$ mm die Nebenachse $O'X'$. Dann werden P_1 und P_2 festgelegt für $x = 40$, $y = 11$, $z = 11$ mm, indem man x auf OX abschneidet bis R und von hier aus y und z einträgt. Damit wird zugleich die Tiefe $\overline{P_1(R)}$ bestimmt. Weiter zeichnet man Grund- und Aufriß des Auges O für $x = 85$, $y = 108$, $z = 35$ mm. Man schneidet nämlich x ab bis (S), errichtet das Lot und schneidet nach oben $z = 35$ mm ab bis (A). Die Konstruktion des Grundpunktes G mit $y = 108$ von (S) ab nach unten ist über-

flüssig und hier nur (durch Pfeil) angedeutet. Dafür zieht man durch (A) die Horizontlinie $\overline{(H)(H)}$ und schneidet von (A) nach links die wahre

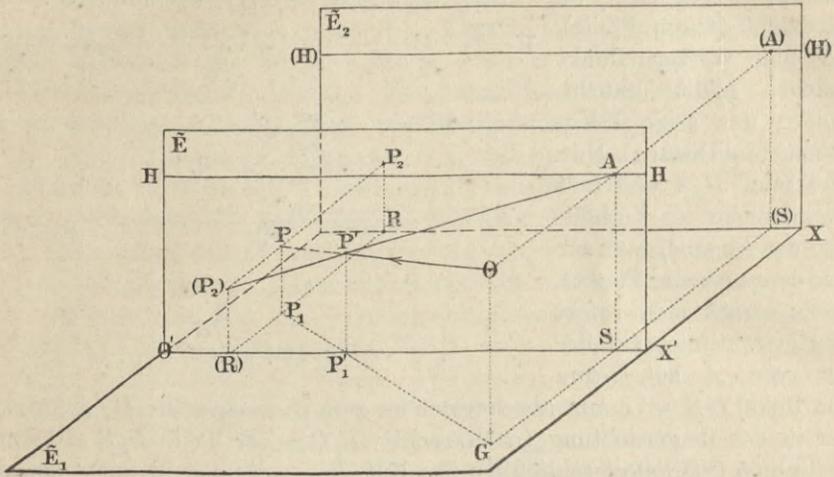


Fig. 116 a (205 a).

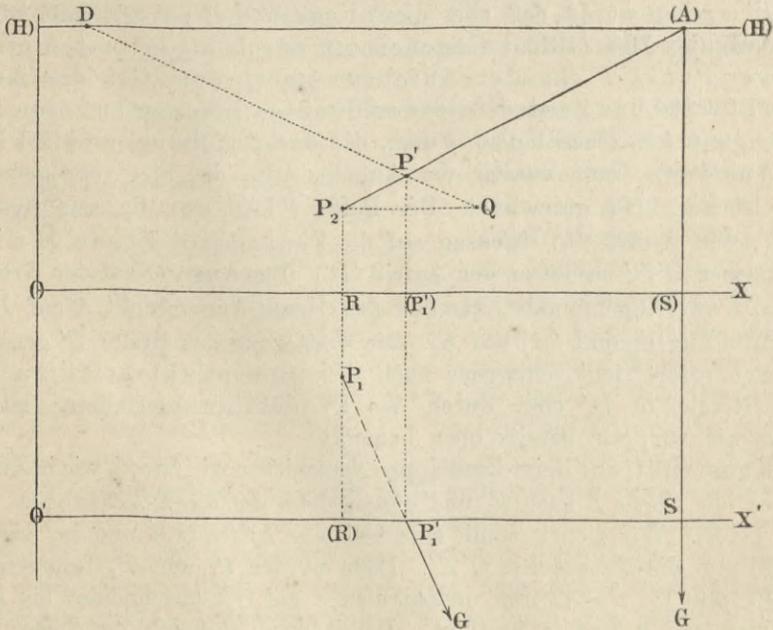


Fig. 116 b (205 b).

Distanz = $y - d = 78$ mm ab bis D . Hierauf legt man durch P_2 [die Horizontale $P_2Q =$ der Tiefe $\overline{P_1(R)}$ und zieht DQ bis zum Schnitte P'

mit $\overline{P_2(A)}$. Lediglich zur Probe ist der Grundriß P_1G gezogen (hier nur angedeutet) bis zum Schnitte P_1' mit $O'X'$, um zu sehen, daß die Übertragung nach (P_1') und die zugehörige Vertikale ebenfalls P' liefert.

Im Anschluß an die bisher gelösten Grundaufgaben 105—108, von denen die letzte die allgemeinste und wichtigste ist, ergeben sich noch besondere, leicht erweisbare Sätze, die für die Ausführung der Zentralbilder gewisse Erleichterungen gewähren:

1. Das Zentralbild einer vertikalen Strecke ist ebenfalls vertikal. In Fig. 116b z. B. bräuchte man daher bloß das Zentralbild des Grundrisses P_1 zu bestimmen (auf $R(A)$ nach Aufg. 106), um dann von diesem vertikal herauf nach P' zu gelangen (hier nicht gezeichnet).

2. Das Zentralbild einer brachialen Strecke ist horizontal.

3. Das Zentralbild einer orthogonalen Strecke ist nach dem Augenpunkt gerichtet.

4. Parallele und zugleich frontale Strecken haben parallele Zentralbilder.

Derartige Lehrsätze der Zentralprojektion lassen sich leicht vermehren.

Aufgabe 109 (192). Von einem Würfel, der in frontaler Lage der Grundebene aufsteht, ist das Zentralbild zu konstruieren.

Analyse: In Fig. 117 sind $A_1B_1C_1D_1\dots$ und $A_2B_2C_2D_2\dots$ die Normalprojektionen des Würfels*) in bezug auf die Achse \overline{XX} (der Nullpunkt ist beliebig gelassen). Die Zentralbild-Ebene im Abstand d von \overline{XX} habe die (Neben-)Achse $X'X'$. Der Augenpunkt A^{***} ist festgelegt durch seine Koordinaten in bezug auf die Achse XX und der Distanzpunkt D durch die Horizontlinie HH und die wahre Distanz AD , denn diese ist gleich der Differenz zwischen der Y -Koordinate des Auges und dem Abstand d . Der Grundpunkt G ist wiederum nicht konstruiert, sondern nur durch einen Pfeil angedeutet; er liegt um die wahre Distanz von $X'X'$ ab nach vorn (bez. unten). Die Wahl der Distanz richtet sich im allgemeinen nach der Größe des Originals; man wählt sie natürlich desto größer, je größer der im Bilde zu überblickende Gegenstand ist. Andererseits darf sie nie unter die kleinste Entfernung deutlichen Sehens (rd. 25 cm) heruntergehen. Wenn hier nun durchweg kleinere Distanzen gewählt sind, so liegt der Grund in dem engen Rahmen der Oktavblätter dieses Buches; unsere Zentralbilder sind daher so aufzufassen, als wären sie in verjüngtem Maßstabe gezeichnet. Gute Bilder erhält man immer, wenn man die Distanz mindestens zehnmal so groß als die größte Ausdehnung des Originals wählt. Endlich ist es bei unserer einfachen frontalen Lage der Zentralebene vorteilhaft, wenn der Augenpunkt A soweit seitlich gelegt wird, daß das Bild ungefähr mitten unter

*) Die Normalbilder sind ganz zart einzutragen, damit die Zentralbilder desto plastischer hervortreten.

**) Eine Unterscheidung zwischen Haupt-Augenpunkt A und Hilfs-Augenpunkt (A) wird von jetzt ab nicht mehr markiert.

AD erscheint. Befindet sich dagegen der Körper in Über-Eckstellung, dann legt man A am besten über die Mitte des Aufrisses. — Man hat nun nach Vorschrift der vorigen Aufgabe Punkt für Punkt die Zentralbilder zu bestimmen und die erhaltenen Bildpunkte geradlinig zu verbinden. Hierbei ergeben sich nun verschiedene Konstruktionsvorteile auf Grund obiger Sätze. Ist z. B. das Bild B' bestimmt, so hat man dadurch auch Örter für A' , F' und E' . Ähnlich verfährt man für C' , sodaß die Festlegung zurückgeführt ist auf ein System von Strahlen, die nach A

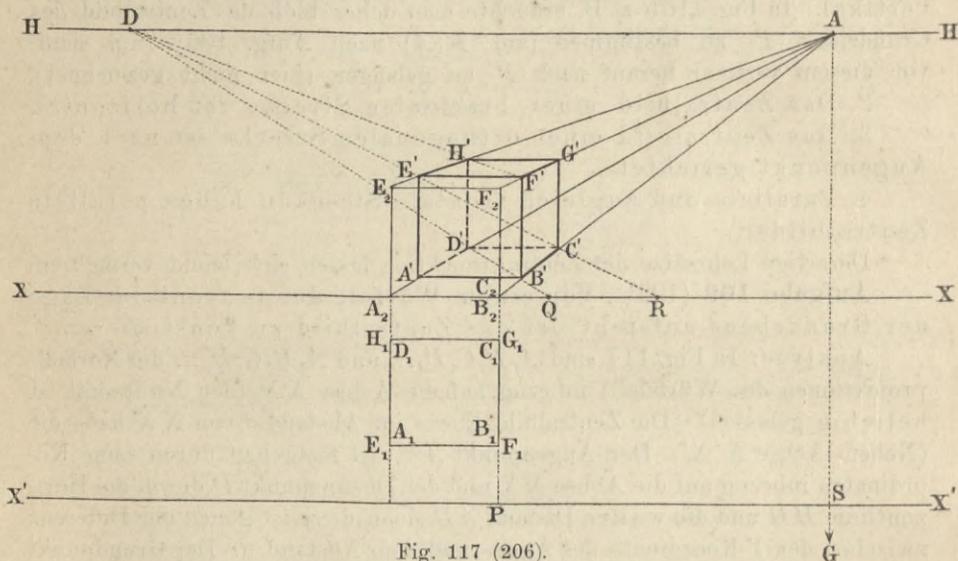


Fig. 117 (206).

laufen, die sog. Augenstrahlen, und ein zweites System nach D : die Distanzstrahlen.

Konstruktion: Man zieht zunächst sämtliche Augenstrahlen A_2A , B_2A , C_2A ... Um nun z. B. das Bild B' zu bestimmen, schneidet man von B_2 aus die Tiefe B_1P des Punktes B nach rechts ab bis Q und zieht den Distanzstrahl QD bis zum Schnitte B' mit dem zugehörigen Augenstrahl. Dann legt man $B'A'$ horizontal und $B'F'$ vertikal bis zu den betr. Augenstrahlen. E' bildet somit die vierte Bildecke des frontalen Quadrates. Hierauf schneidet man die Tiefe C_1P von C_2 (bezw. B_2) auf XX ab bis R und erhält so durch den Distanzstrahl DR das Bild C' nebst den zugehörigen Bildpunkten D' , G' , H' . Man sieht, es ist vorteilhaft, mit den tiefsten Punkten zu beginnen, da man dann die Tiefen auf XX abschneiden kann, sodaß die oberen Teile des Blattes nicht belastet werden.

Aus dieser Betrachtung des Würfels geht hervor, daß der Entwurf von Zentralbildern aus den Normalbildern heraus ohne jede Schwierigkeit ist, wenn man streng der Vorschrift folgt.

Nachtrag zu § 6: Schattenkonstruktionen im Schrägbilde.

Aufgabe 110 (53). Man soll den Schatten eines Würfels auf der Grundebene in schräger Parallelperspektive zeichnen ($\frac{1}{3}$, 20°).

Der Würfel $ABCD \dots$ aus Fig. 9 z. B. werde vorausgesetzt; seine Grundebene \tilde{I} ist hinreichend verlängert, um den Schlagschatten aufzunehmen. Denkt man die Lichtstrahlen von links oben kommend*) (also in andrer Richtung als die projizierenden Sehstrahlen, die von rechts oben kommen), so entwerfen sie auf der Grundebene eine Schattenfigur $BF'G'H'D$ (Fig. 118), die man ansehen kann als Schnitt der Grundebene mit einem Strahlenprisma, das den Würfel umhüllt und als Leitlinie die gebrochene Linie $BF'GHD$ hat. Faßt man die auf \tilde{I} lotrechten Strecken BF , CG , DH usf. ins Auge, so laufen deren Schattenstrecken BF' , CG' , DH' parallel. Ihre Richtung hängt ab von der Stellung der sehr weit gedachten Lichtquelle

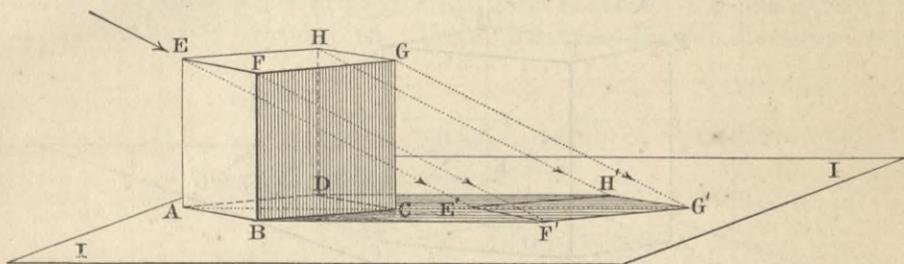


Fig. 118 (59).

(Sonne). Wir können daher von vornherein eine bestimmte Richtung festsetzen, in Fig. 118 z. B. verlaufen die Strahlen derart, daß sie zugleich der vertikalen Bildebene parallel und dabei unter einem gewissen Winkel, der ebenfalls willkürlich angenommen werden kann, gegen die Grundebene geneigt sind. Hier werde angenommen, daß die lotrechten Strecken in ihren Schattenstrecken eine Verlängerung auf das doppelte erfahren, daß somit $BF' = 2BF$ usf. Die zur Grundebene parallelen Strecken FG , GH usf. werfen Schatten, die in Wirklichkeit gleichlang und parallel $FG \dots$ sind. Die der Sonne abgewandten Flächen $BCGF$ und $CDGH$ des Würfels liegen ebenfalls im Schatten, d. h. sie besitzen Eigenschatten. Die oben erwähnte gebrochene Linie, die Licht von Schatten trennt, heißt Dämmerungslinie. Nach diesen Betrachtungen ergibt sich als Konstruktion die folgende: Ziehe durch B die Horizontale und schneide auf ihr $2BF$ ab bis F' . Verfahre ebenso für CG und DH . Der Schatten von AE ist virtuell**) und fällt nach AE' , sodaß $E'F'G'H'$ den Schatten der Deckfläche darstellt, während der Schatten der Bodenfläche mit ihr selbst zusammenfällt.

*) In der Pfeilrichtung.

**) D. h. er kommt nicht wirklich zu Stande.

Man sieht, daß die Schattenkonstruktion, die zur Hervorhebung der Schrägbilder aus der Grundebene wie überhaupt aus der Umgebung gute Dienste leistet, nichts anderes ist als eine schräge Parallelprojektion eben auf diese Grundebene. Man hat daher hier streng zu unterscheiden zwischen Sehstrahlen und Lichtstrahlen. Erstere fallen hier von oben rechts ein, hier für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 20^\circ$, und haben eine Vertikalebene als Bildebene; letztere kommen von oben links (hier für $q = 2$) parallel zur vertikalen Bildebene ($\omega = 0$); der Neigungswinkel i der Lichtstrahlen gegen die Grundebene (zugleich Höhe der Sonne) beträgt rund 27° , denn $\cot i = 2$.

Aufgabe 111 (54). Der Schatten desselben Würfels wie in voriger Aufgabe soll für eine andere Strahlenrichtung konstruiert werden ($\frac{1}{3}$, 20°).

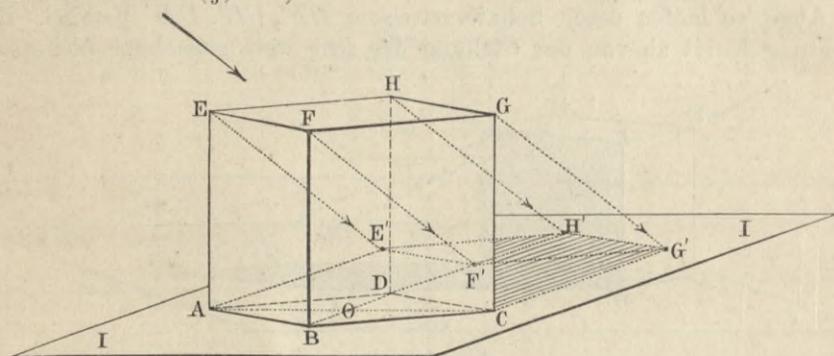


Fig. 119 (60).

In Fig. 119 ist das Schrägbild des Würfels wie vorher entworfen. Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß die Lichtstrahlen in die verschiedenartigsten Richtungen haben können. Jetzt soll diese Richtung so liegen, daß zwar die Länge der Schattenstrecke für eine lotrechte Strecke (CG usw.) doppelt so groß sein soll als diese, daß aber die Lichtstrahlen nicht parallel zur vertikalen Bildebene, sondern derart verlaufen sollen, daß die Schattenstrecken CG' usw. einen Winkel ebenfalls 20° zur Horizontalen (z. B. AC) bilden sollen.*) Demnach ist in Wirklichkeit $CG' = 2CG$, $DH' = 2DH$, $AE' = 2AE$ und $BF' = 2AE$. Da nun aber diese Schatten gleichzeitig als Schrägbild für die vertikale Bildebene erscheinen, so sind $2CG'$ usw. auf $\frac{1}{3}$ zu verkürzen, d. h. CG' erscheint als $\frac{2}{3}CG$ usw. Somit haben wir folgende

Konstruktion: Ziehe durch C den Strahl unter 20° zur Horizontalen und schneide darauf $\frac{2}{3}CG$ ab bis G' . Verfahre ebenso für DH , AE usw. Hierdurch erhält man den Schlagschatten $CG'H'E'A$. Die sichtbaren

*) Mit anderen Worten, die Strahlen kommen von vorn oben, ähnlich wie in Fig. 5, daher hierfür $q' = 2$, $\omega' = 90^\circ$.

Flächen haben keinen Eigenschatten. Die Dämmerungslinie ist $CGHEA$, der Schatten der Deckfläche $F'G'H'E'$.

Aufgabe 112 (55). Dieselbe Schattenkonstruktion wie in Aufgabe 111 ist auszuführen unter der Voraussetzung, daß der Schlagschatten zum Teil auf eine Vertikalebene fällt ($q = \frac{1}{3}$, $\omega = 20^\circ$; $q' = 2$, $\omega' = 90^\circ$).

Die Vertikalebene \tilde{II} laufe parallel der Schräggebildebene und liege so nahe am Körper, daß ein Teil des Grundschattens virtuell wird; d. h. er wird gebrochen und fällt als reeller Schatten in die Vertikalebene (Fig. 120). Sieht man zunächst ganz von der Ebene \tilde{II} ab, so ergibt sich als Grundschatten $CG'H'E'A$ wie in Fig. 119. Faßt man nun einen Randstrahl, etwa GG' heraus, so trifft dieser die Vertikalebene in G'' ; entsprechend durchstechen die übrigen Randstrahlen in H'' , E'' . Diese Punkte bestimmen den Vertikalschatten, und es fragt sich, wie man sie festlegt. Nun schneidet CG' die Achse XX in P , sodaß PG'' vertikal ist. Damit hat man für G'' die Örter: $G'G''$

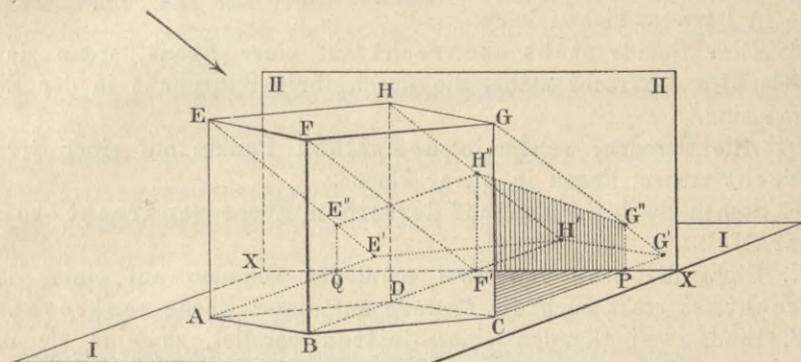


Fig. 120 (61).

und das Lot in P auf \tilde{I} . Der betreffende Achsenschnittpunkt für HH' fällt mit F' zusammen, denn Ebene \tilde{II} ist so gelegt, daß XX gerade F' trifft. Der Achsenschnitt für EE' ist Q . Die Konstruktion geschieht so: Ziehe durch C den Strahl unter 20° zur Horizontalen AC und schneide auf ihm $\frac{2}{3}CG$ ab bis G' . Im Schnitte P mit XX' errichte das Lot bis zum Schnitte G'' mit GG' . Nach demselben Verfahren bestimme H'' und E'' . Die räumlich gebrochene Schattenlinie ist nun $CPG''H''E''QA$.

Nach diesen vorbereitenden Aufgaben lassen sich die meisten einfachen Körper mit Schlagschatten versehen. Man braucht nur für einen beliebigen Punkt P den Fußpunkt P_1 seines Lotes auf die Grundebene zu bestimmen. Konstruiert man nun zu PP_1 unter den gegebenen Bedingungen für die Richtung der Lichtstrahlen (q' , ω') die Schattenstrecke, so erhält man durch Verbindung solcher Punkte die Schattenlinie. Zu beachten ist, daß wie oben die Verzerrungszahlen q' und ω' durch q und ω des Schrägbildes beeinflusst sind.

Anhang I.

Erklärungen und Lehrsätze aus der systematischen Stereometrie.*)

1. Eine Ebene ist bestimmt:
 - a) Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen.
 - b) Durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb der Geraden.
 - c) Durch zwei Geraden, die einander schneiden.
 - d) Durch zwei parallele Geraden.
2. Die Schnittlinie zweier Ebenen ist eine Gerade.
3. Eine Gerade heißt senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf allen Geraden senkrecht steht, die man durch ihren Spurpunkt mit der Ebene in letzterer ziehen kann.
4. Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei Geraden senkrecht steht, die durch ihren Spurpunkt in der Ebene gezogen sind.
5. Alle Geraden, welche in demselben Punkte auf einer Geraden senkrecht stehen, liegen in einer Ebene.
6. Stehen zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.
7. Steht die eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf dieser Ebene senkrecht.
8. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.
9. Unter dem Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer senkrechten Projektion (Normalprojektion) zur Ebene bildet (Projektionsebene = Neigungsebene, Projektion = Neigungsschenkel).
10. Ist eine Gerade einer anderen Geraden parallel, die in einer Ebene liegt, so ist sie auch dieser Ebene parallel.
11. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so ist sie auch jeder in dieser Ebene liegenden Geraden parallel, die mit ihr in einer Ebene liegt.
12. Ist die eine von zwei parallelen Geraden einer Ebene parallel, so ist auch die andere der Ebene parallel.
13. Ist eine Gerade parallel mit zwei Ebenen, die einander schneiden, so ist sie auch der Schnittgeraden der letzteren parallel.

*) In Anlehnung an die Zusammenstellung in Aug. Schmidts „Elementen der darstellenden Geometrie“. — Alle diese Erklärungen und Sätze sind hier im Texte mit *kursiven* Ziffern angeführt.

14. Winkel im Raume mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich.

15. Unter dem Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen versteht man den Winkel zwischen zwei Senkrechten, die man in einem beliebigen Punkte der Schnittgeraden auf dieser und in beiden Ebenen errichtet (Neigungsebene = Ebene der Senkrechten).

15a. Steht eine Ebene auf der Schnittgeraden zweier anderen Ebenen senkrecht, so ist sie die Neigungsebene der letzteren.

16. Zwei Ebenen heißen aufeinander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist.

17. Enthält eine Ebene eine Gerade, die auf einer anderen Ebene senkrecht steht, so steht auch die erste Ebene auf der zweiten senkrecht.

18. Zieht man in der einen von zwei Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, eine Senkrechte zur Schnittgeraden, so steht sie auf der anderen Ebene senkrecht.

19. Fällt man von einem Punkte in der einen von zwei Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, das Lot auf die andere Ebene, so fällt es in die erste Ebene.

20. Stehen eine Gerade und eine Ebene auf einer zweiten Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

21. Stehen zwei Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht auch ihre Schnittgerade senkrecht auf der dritten Ebene.

22. Steht eine Ebene senkrecht auf der Schnittgeraden zweier anderen Ebenen, so steht sie auch senkrecht auf jeder der beiden anderen Ebenen.

23. Fällt man von einem Punkte in der einen von zwei einander schneidenden Ebenen Lote auf die Schnittgerade und auf die andere Ebene, so bestimmen diese Lote die Neigungsebene der beiden Ebenen.

24. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittgeraden parallel und die Neigungswinkel gleich.

24a. Schneiden drei Ebenen einander gegenseitig, so sind die Schnittgeraden entweder parallel, oder sie schneiden einander in einem Punkte, oder sie fallen ganz zusammen.

25. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind diese parallel.

26. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht.

27. Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind gleich.

28. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche einen bestimmten Abstand von einer Ebene haben, ist eine zweite Ebene, die zur ersten im gegebenen Abstände parallel liegt.

29. Enthalten zwei Ebenen zwei Winkel mit wechselseitig parallelen Schenkeln, so sind die Ebenen parallel.

30. Die Neigungsebenen zweier parallelen Geraden zu einer Ebene sind ebenfalls parallel.

31. Zwei windschiefe Geraden bestimmen ein Paar paralleler Ebenen; es gibt eine Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht; diese Strecke ist der kürzeste Abstand zwischen den windschiefen Geraden.

32. Eine Ebene, welche durch die Scheiteltkante eines gleichschenkligen Dreikants senkrecht zur Grundseite gelegt wird, halbiert den Keilwinkel an der Scheiteltkante und die Grundseite.

33. Die Schnittfiguren zweier Parallel-Ebenen mit einem offenen prismatischen oder zylindrischen Raume sind kongruent.

34. Die Schnittfiguren zweier Parallel-Ebenen mit einem offenen pyramidalen oder kegelförmigen Raume sind ähnlich.

35. Der abgewinkelte Mantel eines geraden Prismas oder eines geraden Zylinders ist ein Rechteck, von dessen Seiten die eine gleich dem Umfange, die andere gleich der Seitenlinie des Körpers ist.

36. Der abgewinkelte Mantel einer geraden Pyramide ist ein Fächer-Vieleck, dessen Radius gleich der Seitenlinie und dessen gebrochene Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche ist.

36a. Der abgewinkelte Mantel eines geraden Kegels ist ein Kreis-Ausschnitt, dessen Radius gleich der Seitenlinie und dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche ist.

37. Die Schnittfigur einer Ebene mit einer Kugel ist ein Kreis; das Lot vom Mittelpunkte der Kugel auf diesen Schnittkreis trifft dessen Mittelpunkt.

38. Der geometrische Ort für alle von einem Punkte außerhalb einer Kugel nach dieser gezogenen Tangenten ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem Mittelstrahle jenes Punktes liegt und dessen Ebene auf dem Mittelstrahle senkrecht steht. Die Tangentenstrecken sind gleich. (Analoger Satz für den Grenzfall, daß der Punkt ins Unendliche rückt.)

38a. Zieht man in zwei Kugeln zwei parallele und gleichgerichtete (bezw. gegengerichtete) Radien und verbindet man die Endpunkte der letzteren miteinander, so schneidet jede dieser Geraden die Zentrale der Kugeln in demselben Punkte, dem äußeren (bezw. inneren) Ähnlichkeitspunkte der beiden Kugeln.

38b. Die Gesamtheit der äußeren (oder inneren) Berührungslinien an zwei Kugeln bildet einen gemeinschaftlichen Berührungskegel.

39. Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Ergänzungs-Prismas.

40. Ein System von Ebenen, die einander in derselben Geraden schneiden, heißt Ebenenbüschel, die gemeinsame Gerade heißt ihre Achse.

Anhang II.

Anmerkungen.*)

1) Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die optische Bilderzeugung durch Schatten, Spiegel und dergl. den Anstoß zur exakten geometrischen Bildkonstruktion gegeben hat. Die geometrische Optik ist das physikalische Gegenstück zur mathematischen Projektionslehre. (Zur Einleitung.)

2) Diesen grundlegenden Versuch wird jeder Schüler im verdunkelten Zimmer mit Kerze und Pappschild für sich ausführen (nach Art des Rumford'schen Photometers). (Zur Einleitung.)

3) Bekanntlich bildeten noch vor 50 Jahren diese Schattenrisse (Silhouetten) den Ersatz für unsere photographischen Bildnisse; sie wurden in ähnlicher Weise, wie in Anm. 2 angegeben ist, in starker Vergrößerung erzeugt und dann durch ein mathematisches Instrument (Storchschnabel, Pantograph) verkleinert, wodurch man sehr scharfe Profile erhielt. (Zur Einleitung.)

4) Die Projektionslehre im weitesten, wissenschaftlichen Umfange wird auch darstellende Geometrie genannt und umfaßt nicht bloß die Projektion im allseitig ausgedehnten Raume (stereometrische Projektion, ein Teil der konstruierenden Stereometrie), sondern auch, wie selbstverständlich, die Projektion in der Ebene (planimetrische Projektion.) (Zur Einleitung.)

5) Da wir zunächst nur einfache Körper der schiefen Parallelprojektion unterwerfen, so empfiehlt es sich nicht, mit der Betrachtung von Punkt und Gerade zu beginnen, vielmehr gewährt die Untersuchung eines einfachen, ebenen Flächenstückes den Vorteil größerer Anschaulichkeit. (Zu § 1.)

6) Durch Beleuchtung einer quadratischen Pappscheibe erhält man sofort den betreffenden Schattenriß. Einige quadratische Pappscheiben mit eingeschlagenen Löchern, noch besser aber Quadrate aus Draht oder Holzstäbchen müssen stets zur Hand sein. (§ 1.)

7) Die Grenzfälle, das Auftreten eines Rechteckes und die Schrumpfung zur Strecke, sind ebenfalls zu erwähnen. (§ 1.)

8) Die Verzerrungszahlen $\frac{1}{2}$ und 45° werden benutzt, weil bei ihrer Anwendung wenig Arbeit erforderlich ist; indessen sehen diese Bilder nicht selten steif aus, und viele Linien, die im Raume getrennt sind, kommen im Bilde zur Deckung. Auch die sog. „Kavalier-Perspektive“ für $q = 1$ und $\omega = 45^\circ$ liefert bei sehr wenig Arbeit steife Bilder. Wir bevorzugen mit Holzmüller die Zahlen $\frac{1}{3}$, 30° , ohne uns streng zu binden. Im Krystallzeichnen wendet man häufig $\frac{1}{3}$, 20° an, wofür eine einfache Konstruktion, wie wir weiterhin sehen werden, den Verzerrungswinkel näherungsweise liefert. — Aufg. 1.

*) Diese Anmerkungen sind im Texte mit kleinen Klammer-Ziffern angeführt. Am Schlusse der Anmerkung wird die Stelle des Textes (Nummer der Aufgabe) angegeben, auf die sich die Anmerkung bezieht.

9) Der planimetrische Nachweis, daß diese Kanten in G zusammen treffen müssen, ist eine gute Nebenübung. — Aufg. 1.

10) Wollte man die betr. Projektionen optisch mit Sonnenlicht ausführen, so müßte demnach die Sonne eine Höhe von 50^0 über dem Horizonte (der Grundebene) haben. — Aufg. 3.

11) Bei sorgfältiger Ausführung von Schrägbildern pflegt man die Linien, welche dem Auge näher liegen, zu verstärken, die fernerliegenden abzuschwächen, obwohl theoretisch (bei unendlich entferntem Auge) keine Veranlassung dazu vorliegt. Das Bild gewinnt dadurch wesentlich an Körperlichkeit. Nach den Gesetzen der sog. Luftperspektive werden daher hier die meisten schrägen Projektionen behandelt.*) — Aufg. 4.

12) Die Konstruktion der Ebenenbüschel wird später bei Betrachtung des Kreises noch eine zweite Lösung finden. — Aufg. 5.

13) Bezeichnet man die Maßzahl der Halbdigonale mit r , so findet man, daß $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{1}{6} r : r = 0,167$; somit $\omega = 19,2^0$. — Aufg. 6.

14) Die Behandlung der Vielecke in schiefer Lage, d. h. in einer anderen als den 3 Hauptlagen, wird zunächst übergangen. — Aufg. 11.

15) Die Erzeugung von Schattenbildern an durchlochten Kreisscheiben ist sehr wichtig. — Zum raschen Zeichnen ist es sehr förderlich, für einige Durchmesser und Verzerrungszahlen elliptische Schablonen aus Kartenpapier oder Blech zu schneiden. Die Hauptpunkte der Achse AB müssen durchbohrt sein. Man kann hierbei für $\omega = 45^0$ die Schablonen der 2. Hauptlage auch für die 3. Hauptlage und für verschiedene Ansichten benutzen, wenn man sie passend wendet oder dreht. — Es ist häufig vorteilhaft, zur Konstruktion der Bildellipse von vornherein Halbsehnen parallel AB (Fig. 14) zu benutzen. Diese bilden sich für die erste Hauptlage in natürlicher Größe ab, und man hat nur dafür zu sorgen, daß die Abschnitte auf CD in dem rechten Verhältnis verkürzt werden. — Die häufige Teilung der Sehnen und Strecken überhaupt geschieht am einfachsten durch einen Proportional-Maßstab, den man sich ein für alle Mal zeichnet. — Aufg. 12.

16) Diese Betrachtungen nach synthetischer Methode sind vortrefflich in Holzmüller's Lehrb. der Elementar-Mathematik III. durchgeführt. — Aufg. 14.

17) Die Erzeugung von Schattenbildern mit durchlochten Kreisscheiben oder Drahtkreisen ist hier unumgänglich nötig, da man anfangs das Auftreten von solch langen Ellipsen für paradox hält. — Aufg. 17.

18) Sehr viele Lehrbücher der Stereometrie zeigen in ihren Bildern Unebenheiten. Nicht selten werden die seitlichen Zylinderansichten derart gezeichnet, daß die Seitenlinien PP' und AA' bzw. QQ' und BB' zusammenfließen, ein Verfahren, das nur bei sehr großem Höhenwinkel (ω) zulässig ist. — Aufg. 18.

19) Dort werden zwar nicht immer die geometrisch regulären Dodekaeder und Ikosaeder konstruiert. — Aufg. 24.

20) Man findet häufig bei freihändigen Zeichnungen den Fehler, daß diese Ellipsen mit gleichem Abstände gezeichnet sind. — Aufg. 27.

*) Durch die Beachtung der Luftperspektive wird auch die sog. perspektivische Täuschung vermieden; vergl. den Necker'schen Würfel und die Schröder'sche Treppe.

21) Der Nachweis, daß auch die Projektion eines Kreises in beliebiger Lage (also nicht bloß wie bisher in den Hauptlagen) eine Ellipse ist, wird erst später in aller Schärfe erbracht werden. — Aufg. 29, Zusatz.

22) Der Kugel-Sextant spielt in der Sphärik eine gewisse Rolle. Der Würfel-Sextant $OCDEF$ gibt uns bekanntlich die Grundform der ägyptischen Pyramiden. — Aufg. 31.

23) Von besonderer Wichtigkeit ist, daß sämtliche Beweisfiguren der Stereometrie, insbesondere auch solche über Punkt, Gerade und Ebene in schräger Projektion ebenso sorgfältig gezeichnet werden, wie es in der Planimetrie zu geschehen pflegt. — § 5 Einleitung.

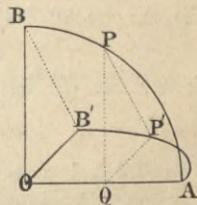
24) Man wird bei allen diesen Konstruktionen sehr bald bemerken, daß die schiefe Lage einer Strecke sofort Schwierigkeiten verursacht. Man muß daher von vornherein der Geraden eine einfache Lage (frontal oder orthogonal) zur Bildebene geben, ohne die Allgemeinheit des Beweisverfahrens zu verletzen. — Aufg. 37.

25) (29) Nun entsteht die Frage: ist auch das Bild in Fig. 51 eine Ellipse? Unsere bisherige Definition faßte die Ellipse als Zerrbild eines Kreises auf Grund parallelprojektiver Darstellung (für beliebige q und ω). Das Bild $ABCD$ in Fig. 51 ist aber im Vergleich zu dem wahren Grundkreise $A'B'C'D'$ in dreifacher Hinsicht verzerrt. Statt des rechten Winkels erscheint bei O' ein Neigungswinkel zwischen CD und AB , der nicht mehr 45° beträgt wie bei O' im Bilde des Grundkreises; ferner ist parallel AB eine Verzerrung nach dem Verhältnis $1 : \cos \alpha$ vorhanden; endlich besitzt die Figur parallel CD dieselbe Verzerrung wie der Grundkreis parallel $C'D'$. Diese durch mehrfache Verzerrung aus dem Kreise abgeleitete Figur läßt sich bei erweiterter Definition ebenfalls als Ellipse auffassen. Indessen hat diese Betrachtung hier nur nebensächlichen Wert. Sie wird am besten ersetzt durch die weitere Entwicklung (Aufg. 48), wonach die schräge Parallelprojektion einer Ellipse im allgemeinen wieder eine Ellipse ist. — Aufg. 48.

26) (30) Diese Eigenschaft der Ellipse kann als neuer Ausgangspunkt sowohl für die Konstruktion als auch für die analytische Betrachtung genommen werden. Indessen ist die Ableitung der Ellipsengleichung ungleich einfacher, wenn man vom Kreise ausgeht. Die Mittelpunktsleichung des Kreises mit dem Halbmesser a ist: $x^2 + y^2 = a^2$. Wird jedes y nach gegebenem Verhältnis q verändert (vergl. Fig. 18a und 18b), etwa so, daß $q = \frac{b}{a}$, so wird die zugehörige Ordinate der Ellipse $y' = y \cdot \frac{b}{a}$, also $y = y' \cdot \frac{a}{b}$. Setzt

man diesen Wert in die Kreisgleichung ein, so erhält man die Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. — Die algebraische Haupt-

eigenschaft der konjugierten Durchmesser läßt sich ebenfalls einfach ableiten: In beistehender Figur ist vom Hilfskreise (Fig. 14a) nur der Quadrant OAB , von der Bildellipse der Quadrant OAB' gezeichnet. Es sei $OA = a$, $OB = b$. Dem beliebig gewählten Punkt P' der Ellipse entspreche P des Kreises. Nimmt man OA und OB' als (schiefe) Koordinatenachsen und bezeichnet man die Koordinaten OQ und $P'Q$ mit u und v , ferner PQ mit y , so hat man wegen



des Kreises: $y^2 = (a + u)(a - u) = a^2 - u^2$. Nun ist Dreieck $OB'B' \sim QPP'$, denn $OB' : OB = QP' : QP =$ dem Verzerrungsverhältnis q ; somit $y : v = a : b$. Setzt man hieraus den Wert von y in die obige Gleichung für y^2 ein, so ergibt sich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d. h. die Ellipse zeigt in bezug auf die Durchmesser $2 \cdot OA$ und $2 \cdot OB'$ entsprechende Eigenschaften als in bezug auf die Hauptdurchmesser oder Hauptachsen $2a$ und $2b$. — Aufg. 48.

27) (37) Das Zeichnen von Netzen zum Bau von Modellen wird hier übergangen. Immerhin ist es wünschenswert, daß der Schüler eine gewisse Zahl von Pappmodellen anfertigt. — Aufg. 53.

28) (48) Wenn a und b die große bzw. kleine Halbachse bezeichnen, dann versteht man unter Abplattung das Verhältnis $\frac{a-b}{a}$. Diese Zahl ist hier abgerundet auf: $\frac{20 \text{ km}}{6000 \text{ km}} = \frac{1}{300}$. — Aufg. 65.

29) (67) Diese Einführung in die Normalprojektion ist ziemlich breit angelegt, um auch denjenigen gerecht zu werden, die nur die einfacheren Aufgaben der Schrägprojektion durchgenommen haben.

30) (69) Selbstverständlich ist auch hier anfangs die Veranschaulichung am Modelle unter Verwendung von parallelen Lichtstrahlen unentbehrlich. Man wird aber bald sehen, daß eine Zeichnung im schrägen Entwurf die beste Vorbereitung zur Lösung einer normalprojektivistischen Aufgabe ist. — Aufg. 70.

31) (69a) Die algebraischen Beziehungen sind $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (der Satz des Pythagoras im Raume), wenn r die Diagonale OP des Proj.-Quaders bezeichnet. Letzterer spielt bekanntlich auch eine Rolle als Kräfte-Quader. Die Diagonale r bildet mit OX , OY und OZ Winkel, die bestimmbar sind durch:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

Durch Quadrierung und Addition ergibt sich der wichtige Lehrsatz:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad \text{— Aufg. 72.}$$

32) (71) Wir wollen in Zukunft die Behandlung der Aufgaben so einrichten, daß die geometr. Analyse, wenn nötig, an das Schrägbild des geschlossenen Dreikants, die Konstruktion des Normalbildes dagegen nur am offenen Dreikant ausgeführt wird. Die genaue Konstruktion am geschlossenen Dreikant bleibt dem Schüler überlassen; in den meisten Fällen reicht hier eine Freihandskizze aus. — Aufg. 73.

33) (72) Sind die Koordinaten der Endpunkte unserer Strecke: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 , so ergibt eine einfache Rechnung für ihre Länge:

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

ferner für die Strecken $OA = r_1$ und $OB = r_2$:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

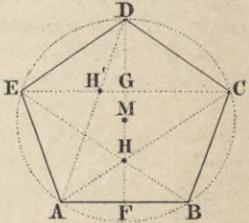
Der Winkel zwischen r_1 und r_2 kann dann nach dem Kosinussatz berechnet werden. Bezeichnet man die Maßzahlen für die Längen der Normalprojektionen von a mit a_1, a_2 und a_3 , so ergibt sich: $a_1 = a \cos \alpha_1, a_2 = a \cos \alpha_2, a_3 = a \cos \alpha_3$, worin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die Neigungswinkel bedeuten. — Aufg. 74.

34) (76) Die bisher angewendete Bezeichnungsart (A_1, A_2, A_3) für die Normalprojektion empfiehlt sich durch ihre Klarheit und ist der Bezeichnung durch Hochstriche (A', A'', A''') vorzuziehen. — Die Hochstriche werden bei der Normalprojektion nur angewandt, wenn es sich um die seltener vorkommenden „Spuren“ handelt (§ 13). — Aufg. 80.

35) (77) Die äußere Übereinstimmung der angegebenen Konstruktion mit der gewöhnlichen, elementaren Schrägbildkonstruktion ist wohl selbstverständlich. — Aufg. 81.

36) (78) An diesem vollständig ausgeführten Beispiel für den Würfel ist gezeigt worden, wie man allgemeine Lagen erhalten kann. Wir werden uns übrigens in der Folge meist auf die wichtigeren einfachen Lagen beschränken und nur hier und da das Verfahren der Drehung in allgemeinere Stellungen anwenden. — Aufg. 82.

37) (80) Die weniger bekannte Eigenschaft, daß im regelmäßigen Fünfeck zwei einander schneidende Diagonalen (AC und BE) sich gegenseitig stetig teilen und daß der Major-Abschnitt des goldenen Schnittes ($HC = HE$) gleich der Fünfeckseite ist, ergibt sich, wenn man die Winkel bei H und an den Ecken auf Grund des Satzes von den Peripheriewinkeln berechnet; sie lassen sich sämtlich als Fünftel von Rechten ausdrücken. Hieraus ergibt sich, daß das Viereck $DEHC$ ein Rhombus ist und daß die Dreiecke CHB und EHA sog. goldne Dreiecke sind, d. h. gleichschenklige Dreiecke, deren Kopfwinkel halb so groß ist als jeder Grundwinkel. Weiterhin folgt, daß $CH = HE = a$ (zugleich Fünfeckseite) Major ist auf AC und daß die Strecken $HB = HA$ (b) als Minor zu gelten haben. Nun ist bekanntlich $a : b = 2 : (\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} + 1) : 2^*$, daher $a = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1)$; ferner sind die Diagonalen (d) $AC = BE = EC$ als Vollstrecken $= \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Zieht man ferner die Diagonale DA , die in H' von EC stetig geteilt wird, so ist der Major $H'C = a$; somit ist auch die Höhe (Mittellinie) $FD = h$ in G stetig geteilt. Nun hat man im rechtwinkligen Dreieck DAF



die Höhe $h = \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}}$, und wenn man obigen Wert für d einsetzt: $h = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Der Major p der Höhe ist $= \frac{h}{2}(\sqrt{5} - 1) = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$; ihr Minor $q = \frac{p}{2}(\sqrt{5} - 1)$, somit auch $q = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$. — Weiterhin ist $r^2 - q^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, wenn r und q den Um- bzw. Innenkreis-Halbmesser bedeuten; daher $(r + q)(r - q) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, und wegen $r + q = h$ hieraus: $r - q = \frac{a^2}{4h}$. Aus

*) Denn stets bestehen beim goldenen Schnitt zwischen der Vollstrecke s , dem größeren Teile p (Major) und dem kleineren q (Minor) folgende Verhältnisse: $s : p = p : q = 2 : (\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} + 1) : 2 = 1 : 0,618$ rd.

den Werten für $(r + \varrho)$ und $(r - \varrho)$ ergibt sich durch Addition bezw. Subtraktion

$$r = \frac{4h^2 + a^2}{8h} = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{4h^2 - a^2}{8h} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

— Aufg. 87.

38) (87) In den elementaren Leitfäden wird oft eine Netzkonstruktion gegeben, die natürlich nur eine leidliche Annäherung liefert; man benutzt sie, um Meridianstreifen aus Papier zum Aufkleben auf den Globus zu erhalten. — Aufg. 91.

39) (88) An dieser Stelle ist es wohl nötig darauf hinzuweisen, wie man geogr. Breite und Länge durch Höhenmessung an einem Gestirn (am einfachsten am Polarstern) bezw. durch Bestimmung der Ortszeit und Vergleich mit einer Normaluhr feststellt. (Für den Schüler: Edler's Quadrant oder Meßblatt, Halle a. S.) — Aufg. 92.

40) (104) Die Koordinatengleichung der Ellipse wird hier so gefunden: In der wahren Figur der Schnittlinie (im Aufriß der Fig. 110) wählen wir einen beliebigen Punkt P (auch im Schrägbild zu zeichnen) und fällen die Ordinate $PQ = y$ auf die Aszissenachse $AH(A_2H_2)$. Die Ordinatenachse gehe durch die Mitte O_2 von A_2H_2 , sodaß $O_2Q = x$. Es sei $O_2A_2 = O_2H_2 = a$ und $O_2R = b$. Wir denken uns nun durch O_2 und Q Parallelschnitte gelegt, die natürliche Kreise sind; sie erscheinen in Fig. 177 nur im Aufriß als UI und VW . Die Strecken $PQ = y$ und $RO_2 = b$ sind auch in diesen Kreisen Halbschnen und erscheinen in der Figur lediglich heraufgedreht. Nach dem Sehnenproportionalssatze ist $y^2 = QT \cdot QU$ und $b^2 = O_2V \cdot O_2W$. Betrachtet man ferner A_2 als Strahlenpol und O_2V bezw. QT als parallele Transversalen, so ist $QT : O_2V = (a + x) : a$. Weiterhin wählen wir H_2 als Strahlenpol und QU bezw. O_2W als parallele Transversalen; hieraus folgt die Proportion $QU : O_2W = (a - x) : a$. Durch Multiplikation der beiden Proportionen miteinander ergibt sich: $QT \cdot QU : O_2V \cdot O_2W = y^2 : b^2 = (a + x)(a - x) : a^2$, oder schließlich $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$, d. i. die Koordinatengleichung einer Ellipse. — Aufg. 102.

41) (105) Die Koordinatengleichung der Parabel wird gefunden auf Grund der Eigenschaft, die in § 6 festgestellt worden ist. Konstruiert man im Kegel die Dandelin'sche Berührungskugel (Fig. 178), so erhält man in U den Brennpunkt und in VW die Direktrix (der heraufgedrehten Schnittfigur); UV ist der Parameter p . Wählt man einen beliebigen Punkt P und zieht die Ordinate PQ , wodurch die Abszisse A_2Q abgeschnitten wird, so ist zunächst $PU = PR$. In dem rechtwinkligen Dreieck PQU aber ist $y^2 = PU^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$; weil nun $PU = PR = x + \frac{p}{2}$ ist, so wird $y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 2px$. Das ist die Gleichung einer Parabel in bezug auf die Hauptachse als Abszissenachse und die Scheiteltangente als Ordinatenachse. — Aufg. 103.

Verbesserung:

Seite 80, Fig. 86a fällt Buchstab E_1 oben im Mittelfelde weg.

S. 96

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294332