DER UNTERRICHT AN BAUGEWERKSCHULEN

BAND 46

A. SCHAU

# STATIK

# I

VERLAG · B. G. TEUBNER · LEIPZIG UND BERLIN

# Der Unterricht an Baugewerkschulen

## Rechnen

**Die Grundlagen des gewerblichen Rechnens.** Von Baugewerkschullehrer Fr. Mensing. 3. Auflage. (Bd. 19.) M. 13.40. Antwortenheft nur für Lehrer M. 4.50.

**Die bürgerlichen Rechnungsarten und deren Anwendung auf baugewerbliche Aufgaben (technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen).** Von Baugewerkschullehrer Fr. Mensing. 2. Auflage. (Bd. 29.) M. 10.20. Antwortenheft für Lehrer M. 3.60.

**Technisches, geschäftliches und volkswirtschaftliches Rechnen. (Kalkulationen.)** Von Baugewerkschullehrer Fr. Mensing. Mit 5 Tafeln. (Bd. 30.) M. 12.—. Antwortenheft M. 4.50.

## Geschäftskunde

**Schriftverkehr und Geschäftskunde für Baugewerken.** Mit 1 Anhang zur deutschen Sprachlehre. Von Oberlehrer E. Petzold. (Bd. 4.) M. 14.40.

**Einfache Buchführung und Wechsellehre.** Von Baugewerkschullehrern P. Niehus und Fr. Mensing. 2. Auflage. (Bd. 5.) M. 8.40.

**Doppelte Buchführung.** Von Baugewerkschullehrer P. Niehus. (Bd. 6.) M. 10.80.

**Das Veranschlagen von Hochbauten.** Von Architekt Oberlehrer G. Blume. 5. Auflage. [Unter der Presse.] (Bd. 26.)

**Das Veranschlagen von Tiefbauten.** Von Architekt Oberlehrer G. Blume und Oberlehrer Dr. V. Hortig. Mit 13 Tafeln und 7 Figuren. (Bd. 52.) M. 12.—

## Mathematik

**Leitfaden d. bautechnischen Algebra.** V. Prof. M. Girndt. 4. Aufl. M. 29 Fig. u. 2 Taf. (Bd. 25.) M. 8.40.

**Sammlung bautechnisch-algebraischer Aufgaben nebst kurzem Abrisse der Theorie.** Von Professor M. Girndt. 2. Auflage. (Bd. 28.) M. 10.80.

**Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte bautechnische Lehranstalten.** In 2 Teilen. Von Professor M. Girndt. (Bd. 20/21.) Teil I: Lehre von den ebenen Figuren. 6. Auflage. Mit 253 Fig. i. Text u. 209 Aufgaben. M. 13.—. Teil II: Dreiecksberechnung und Körperlehre. 5. neubearb. Aufl. Mit 105 Fig. im Text u. zahlr. Aufgaben a. d. Baupraxis. M. 8.40.

**Feldmessen und Nivellieren.** Von Dir. Prof. G. Volquardts. 4. verb. Aufl. Mit 56 Abb. im Text. (Bd. 13.) M. 4.80.

**Das Feldmessen des Tiefbautechnikers.** Von Dipl.-Ing. Prof. H. Friedrichs. In 2 Teilen. (Bd. 14 u. 22.) Teil I: Horizontalmessungen. 3. Aufl. bearbeitet von Prof. G. Reinecke. Mit 209 Textabbildungen und 2 Tafeln. M. 33.40. Teil II: Flächen- u. Höhenaufnahmen. 2. Aufl. bearbeitet von Prof. G. Reinecke. Mit 92 Textabbildungen und 3 Tafeln. M. 15.—.

## Physik und Chemie

**Bautechnische Physik.** Von Prof. P. Himmel. 3. Aufl. v. Prof. K. Strohmeyer. Mit 344 Fig. (Bd. 23.) M. 20.40.

**Leitfaden d. bautechnischen Chemie.** Von Prof. M. Girndt. 3. Aufl. Mit 31 Fig. (Bd. 2.) M. 7.20.

## Mechanik

**Statik.** Von Gewerbeschulrat Reg.-Baumeister Direktor A. Schau. In 3 Teilen. (Bd. 46—48.) Teil I: Grundgesetze, Anwendungen der statischen Gesetze auf Trägerordnungen, einfache Stabkonstruktionen und ebene Fachwerkträger. 3. Aufl. Mit 185 Abb. M. 25.40. Teil II: Festigkeitslehre. Zug- und Druckfestigkeit, Schubfestigkeit, Biegungsfestigkeit und Knickfestigkeit. 3. Aufl. Mit Abbild. im Text. M. 32.—. Teil III a: Für die Hochbauabteilungen. Mit 238 Abb. i. T. M. 25.40. IV a: Die Statik der Eisenbetonbauten. Mit 113 Abb. i. Text. M. 29.40. III b u. IV b: Für die Tiefbauabteilungen. [In Vorbereitung 1922.]

## Tabellen und Tafeln

**Logarithmen- und Kurventabellen für den Gebrauch an Tiefbauschulen.** Von Professor M. Girndt und Oberlehrer Liebmann. Mit 4 Figuren. (Bd. 45.) M. 7.20.

**Mathematische und technische Tafeln.** Von Prof. M. Girndt, Oberl. A. Liebmann und Oberl. Dr. Nitzsche. 2., neu bearbeitete Aufl. Mit 90 Abbildungen. (Bd. 27.) M. 12.—

**Kontinuierliche Träger auf drei oder vier Stützen. Einfachere Hilfsmittel für deren genaue Berechnung bei beliebigen Stützweiten und beliebiger Belastung.** Für Schule und Praxis bearbeitet von Oberlehrer D[illegible] Mit 10 Figuren. (Bd. 27a.) M. 4.80.

Verlag von B. G[illegible]g und Berlin

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297690

ělku 3·30

# STATIK

LEITFADEN
FÜR DEN UNTERRICHT AN BAUGEWERKSCHULEN
UND VERWANDTEN TECHNISCHEN LEHRANSTALTEN

VON

A. SCHAU

GEWERBESCHULRAT UND REGIERUNGSBAUMEISTER
DIREKTOR DER STAATL. BAUGEWERKSCHULE ESSEN

## I. TEIL

GRUNDGESETZE · ANWENDUNGEN DER STATISCHEN GESETZE
AUF TRÄGERANORDNUNGEN, EINFACHE STABKONSTRUKTIONEN
UND EBENE FACHWERKTRÄGER

DRITTE AUFLAGE

MIT 185 ABBILDUNGEN IM TEXT

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1921

pK I 3/III 40 I

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
II-351292

BIBLIOTEKA
KRAKÓW
Politechniczna
II 3494

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

# Vorwort.

Der vorliegende erste Teil des Leitfadens der Statik umfaßt denjenigen Lehrstoff, welcher gemäß dem Normallehrplan für die preußischen Baugewerkschulen in Klasse IV durchzunehmen sein dürfte. Der Umfang ist auf Grund langjähriger Unterrichtserfahrungen auf diesem Gebiete so bemessen, daß die einer Besprechung unterzogenen Abschnitte in der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit von 4 Wochenstunden eingehend behandelt und durch fortwährende Wiederholungen gefestigt werden können. Es verbleibt hierbei auch noch Zeit für einige zeichnerische Übungsblätter als Anwendung des Gelernten.

Es ist versucht worden, den Text so zu halten, daß er den Schülern leicht verständlich ist, wobei beachtet wurde, in diesem, für einen großen Teil der Schüler immerhin nicht einfachen Fache es ihnen unbedingt zu ermöglichen, zu Hause in Ruhe die folgerichtige Entwicklung der durch den Lehrer mitgeteilten Gesetze und Anwendungen nochmals Schritt für Schritt sich genau klarzumachen oder Vergessenes in den oberen Klassen aufzufrischen.

Hierzu bedarf es einer mehrfachen Hervorhebung aller der Punkte, welche für die Schüler erfahrungsgemäß stets Fehlerquellen hervorrufen und durch deren häufige und vielseitige Besprechung im Unterrichte die zufriedenstellenden Erfolge nur sich ermöglichen lassen, die in diesem Unterrichtsgegenstande durch tüchtige Fachlehrer mit Sicherheit erzielt werden.

Hat der Schüler sich die in dem vorliegenden Teile des Leitfadens angegebenen Grundlagen der Statik zu eigen gemacht, so wird er ohne wesentliche Schwierigkeiten das umfangreiche Gebiet dieses Faches auch in den oberen Klassen in allen seinen Teilen beherrschen lernen. Die gewonnenen Grundgesetze sind durch praktische Beispiele erläutert worden, wodurch ein besseres Verständnis und größeres Interesse bei den Schülern herbeigeführt wird.

Vor allem hat eine Anwendung auf die einfacheren Träger auf zwei Endstützen stattgefunden. Hierbei ist durchweg das für die Erleichterung des Verständnisses zu empfehlende Schnittverfahren benutzt worden, wobei immer betont wurde, daß die für die Bautechniker in Betracht kommenden Gebilde in allen ihren Punkten und Teilen sich im Ruhestande befinden müssen.

Ein besonderer Wert wurde ferner darauf gelegt, daß die Schüler bei den Stabkonstruktionen auf einfache Weise sich Gewißheit darüber verschaffen konnten, ob in einem Stabe eine Zug- oder eine Druckkraft wirkt.

Mit Hinweis auf die in der vierten und dritten Klasse in der Baukonstruktionslehre zu besprechenden Dachbinderformen ist diese Kenntnis dringend erforderlich, damit eine einigermaßen sichere Grundlage für die Art der Ausbildung der einzelnen Dachglieder und die Durcharbeitung der verschiedenen Knotenpunkte geschaffen wird. Zur Bestimmung der Stabkräfte wurde grundsätzlich nur das Kräftevieleck benutzt, da Kräftepläne für den Bildungsstand der Schüler in dieser Klasse zu schwierig erachtet werden und so am besten eine Festigung der Grundgesetze ermöglicht wird.

Infolge des Bestrebens, den Umfang des Leitfadens knapp zu halten, konnten nur wenige typische Beispiele besprochen werden. Es ist dadurch gleichzeitig erreicht, daß dem betreffenden Fachlehrer ein großes Feld offen steht, um durch möglichst viele und verschiedenartige, systematisch sich anschließende weitere Beispiele seine eigene Lehrerfahrung und praktischen Kenntnisse nutzbringend zu verwenden.

Zu beachten ist dabei, daß es bei allen diesen Beispielen dringend empfohlen werden muß, die Belastungen unter Annahme bestimmter der Praxis entnommener Grundlagen und Angaben aus den Maßen unter Benutzung der ministeriellen Vorschriften für Aufstellung statischer Berechnungen vom 31./I. 1910 zu ermitteln. Nur bei einem solchen Vorgehen wird der Schüler bald eine gewisse Selbständigkeit und Sicherheit sich aneignen und die in den oberen Klassen im Entwerfen und in der Baukonstruktionslehre zu fordernden statischen Berechnungen mit Verständnis und ohne wesentliche Mitarbeit der Fachlehrer aufstellen können. Dies ist auch im Hinblick darauf wichtig, daß eine größere Zahl der Schüler nach Abschluß der dritten Klasse in die Praxis zurückgeht und sie so für die Anforderungen, die ihnen gestellt werden, am besten vorbereitet werden.

Diese Gesichtspunkte dürften auch bei Stellung der Aufgaben für die zeichnerischen Übungen zu berücksichtigen sein.

Essen, im April 1911.

Schau.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Da der Leitfaden nach Aufbau und Inhalt während einer Reihe von Jahren im Unterricht erprobt und sich dabei als brauchbar erwiesen hat, bedurfte es nur einiger textlichen Verbesserungen und Ergänzungen für die Neuauflage, zumal das Stoffgebiet in allen seinen Teilen in klaren Umrissen für die Unterrichtszwecke genau festgelegt ist.

Wenn auch vom Verlage, um bei den so außerordentlich gestiegenen Herstellungskosten den Preis des Leitfadens so niedrig wie möglich zu halten, bei der Einrichtung des Satzes möglichste Wirtschaftlichkeit angestrebt worden ist, so ist doch zu hoffen, daß in Würdigung dieses Umstandes der Leitfaden auch in seiner neuen Auflage sich die Freunde bewahren wird, die er bislang in ausgedehntem Maße hatte. Wünsche und Anregungen, sowie Verbesserungsvorschläge wird der Unterzeichnete mit Dank stets gern entgegennehmen.

Essen, im Oktober 1919.

Schau.

## Vorwort zur dritten Auflage.

Für die neue Auflage haben sich wesentliche Änderungen nicht für nötig erwiesen; einige Verbesserungen und Ergänzungen wurden, wo es erforderlich schien, vorgenommen. Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge ist der Unterzeichnete jederzeit dankbar.

Essen, im April 1921. Schau.

## Inhaltsverzeichnis.

### III. Der Schwerpunkt.

# I. Einleitung.

## A. Allgemeines.

Es ist eine der wichtigsten Aufgaben sowohl des Technikers für Hochbau als auch desjenigen für Tiefbau, die in beiden Gebieten zu errichtenden Bauwerke auf Grund der wirkende Kräfte zu entwerfen und bei der Unterhaltung der Baulichkeiten etwaigen Änderungen der Kraftwirkungen, welche gegen den Errichtungszustand eingetreten sind, durch bauliche Maßnahmen Rechnung zu tragen.

Jedes Bauwerk muß in seiner Form und in seinen Abmessungen derart ausgebildet und unterhalten werden, daß Änderungen der Lage, der Gestalt und des Zusammenhangs des gesamten Bauwerks oder einzelner Teile desselben ausgeschlossen sind.

Für die Ursache dieser Änderungen ist der Begriff „Kraft" eingesetzt worden (vgl. Leitfaden für Naturlehre).[1]) Als hauptsächlichste Kräfte kommen in Betracht die Anziehungskraft der Erde oder die Schwerkraft, der Druck auf das Bauwerk aufgebrachter Belastungen, der Druck von Wasser und Erdreich, Winddruck, Schneedruck usf.

Auf ein Bauwerk werden in der Regel von außen mehrere Kräfte gleichzeitig wirken. Um eine Änderung der Lage der betreffenden Baukörper zu verhüten, ist es erforderlich, daß diese Kräfte sich in ihren Wirkungen aufheben. Der Körper zeigt dann den Zustand der Ruhe, die Standsicherheit ist gewährleistet, und das Bauwerk und seine einzelnen Teile befinden sich im Gleichgewicht.

Auf Herbeiführung und Sicherung dieses Gleichgewichtszustandes kommt es durchweg in der Praxis zunächst an. Jeder Baukörper ist hierbei als ein starres, in allen seinen Teilen unverschiebbares Ganze anzusehen.

Diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Lehre von den Kräften befaßt, die sich im Gleichgewicht befinden, heißt die Statik (Statik = Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte).

Die Herbeiführung des Gleichgewichtszustandes der auf ein Bauwerk von außen einwirkenden Kräfte (äußere Kräfte, angreifende Kräfte) genügt aber allein noch nicht, um den Bestand des Bauwerks zu sichern. Durch die äußeren Kräfte werden nämlich unter Umständen Änderungen der Form und des Zusammenhangs der Baukörper eintreten können, sofern die Abmessungen des Bauwerks nicht den Kräftewirkungen entsprechend richtig gewählt werden.

---

1) Himmel, Bautechnische Physik. Leipzig, B. G. Teubner. 3. Aufl. 1920.

Die einzelnen Massenteilchen des Baukörpers verschieben sich beim Angriff durch äußere Kräfte in ihrer Lage zueinander, und infolge der Zusammenhangskraft werden Kraftwirkungen im Innern der Körper entstehen, also innere Kräfte (widerstehende Kräfte) hervorgebracht.

Diese inneren Kräfte (Spannungen) dürfen eine gewisse Größe nicht überschreiten, damit der Zusammenhang und in bestimmten Grenzen auch die Form des Baukörpers gewahrt bleibt und somit mit Sicherheit eine lange Dauer des Bauwerks gewährleistet werden kann.

Mit der Berechnung der inneren Kräfte und mit der Festlegung der Abmessungen eines Bauwerks auf Grund derselben beschäftigt sich die Festigkeitslehre. (Teil II.)

Die Aufgaben der Statik können durch Rechnung oder durch Zeichnung gelöst werden.

Das rechnerische (analytische) Verfahren hat den Vorteil, genaue Ergebnisse zu liefern, hat jedoch den Nachteil, meist umständlicher und daher zeitraubender zu sein; auch ist eine gewisse mathematische Gewandtheit nötig.

Der zeichneriche (graphische) Weg hat in der Regel den Vorteil der größeren Einfachheit und Übersichtlichkeit, wodurch die Möglichkeit fehlerhafter Lösung außerordentlich vermindert wird, während der Nachteil der etwas geringeren Genauigkeit vorliegt. Letzgenannter Mangel ist jedoch für die Lösung der praktischen Aufgaben nicht von erheblicher Bedeutung.

Den Teil der Statik, welcher sich mit der zeichnerischen Lösung von Aufgaben befaßt, nennt man Graphostatik oder graphische Statik.

## B. Grundbegriffe.

### 1. Die Einzelbegriffe.

Das eigentliche Wesen einer Kraft ist unbekannt, denn Kräfte sind an sich nicht mit den Sinnen wahrnehmbar. Man erkennt das Vorhandensein einer Kraft nur an der durch sie hervorgebrachten Wirkung.

Kräfte, welche imstande sind, eine Bewegung und eine Bewegungsänderung eines Körpers hervorzurufen, bezeichnet man als bewegende (angreifende) Kräfte, z. B. die Muskelkraft von Menschen und Tieren, die Schwerkraft, die Spannkraft des Dampfes und der Gase, elektrische Kraft usf.

Kräfte, welche eine Bewegung verhindern, mäßigen oder vernichten, nennt man widerstehende Kräfte, so z. B. die Reibung, die Festigkeit der Baustoffe, Luftwiderstand usf. Meist gelangen diese widerstehenden Kräfte erst durch die bewegenden innerhalb gewisser Grenzen zur Wirkung und sind nur so lange vorhanden, wie die Bewegung oder die äußere Kraftwirkung, bei welcher sie auftreten, dauert.

Eine bewegende Kraft kann als eine widerstehende wirken, eine widerstehende kann jedoch im allgemeinen keine Bewegung hervorrufen.

Bei den Bauwerken des Hoch- und Tiefbaus entstehen in der Regel Bewegungen infolge der Einwirkung äußerer Kräfte nicht, da die widerstehenden Kräfte in solcher Größe auftreten und möglich sind, daß der Ruhezustand gewahrt bleibt und die äußeren Kräfte sich meist für sich schon im Gleichgewicht befinden.

*Bestimmungsstücke einer Kraft.* Zur genauen eindeutigen Festlegung der Wirkung einer Kraft bedarf es folgender vier Bestimmungsstücke:

1. *der Richtung,*
2. *des Angriffspunktes,*
3. *des Sinnes,*
4. *der Größe der Kraft.*

*Die Richtung der Kraft.* Unter Richtung der Kraft versteht man diejenige Gerade, in welcher die Kraft wirkt und in der also der Körper durch sie fortbewegt würde (*Wirkungslinie* $MN$ Abb. 1). Zeichnerisch wird durch die Gerade $MN$ die Lage der Kraft zu dem Körper festgelegt.

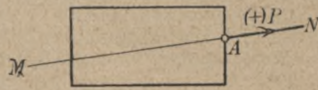



Abb. 1.

*Der Angriffspunkt der Kraft.* Derjenige Punkt der Wirkungslinie, in welcher die Kraft von außen her auf den Körper übertragen wird, ist ihr Angriffspunkt. In ihm kann man die Kraft wirkend annehmen (Abb. 1 Punkt $A$). Zeichnerisch wird der Angriffspunkt immer durch einen kleinen, um ihn als Mittelpunkt geschlagenen Kreis kenntlich gemacht, dessen Fläche von Linien aller Art freibleiben muß. *Der Angriffspunkt einer Kraft kann in der Richtung derselben beliebig verschoben werden,* ohne daß die Wirkung der Kraft geändert wird. Selbstverständlich ist dabei der neue Angriffspunkt mit dem Körper, der die betreffende Kraft aufzunehmen hat, in starrer Verbindung zu denken.

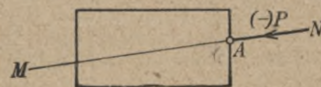



Abb. 2.

*Der Sinn der Kraft.* Unter Sinn der Kraft versteht man die Angabe, ob die Kraft in dem *gleichen Abschnitt* der Wirkungslinie von dem Angriffspunkte weg (Abb. 1) oder auf ihn zu gerichtet ist (Abb. 2). Bei dem zeichnerischen Verfahren benutzt man zur Festlegung einen Pfeil auf der Geraden, bei dem rechnerischen wird der Wirkungssinn durch das Vorzeichen $+$ oder $-$ angegeben. Welcher Sinn als positiv und welcher als negativ angegeben wird, ist gleichgültig, nur muß die einmal eingeführte Bezeichnung bei ein und derselben Lösung durchweg beibehalten werden.

*Die Größe der Kraft.* Kräfte werden dadurch gemessen, daß man ihre Wirkungen vergleicht. Als Maßstab benutzt man die Gewichtseinheit (kg), demnach dient das *Kilogramm als Krafteinheit.* Die Größe einer Kraft stellt man durch die Zahl von Kilogrammen dar, welche der Wirkung der Kraft gleichkommen. Man versteht z. B. unter einer Kraft von 420 kg eine solche, welche ebenso wirkt wie ein in der Kraftrichtung mit gleichem Wirkungssinn angebrachtes Gewicht von 420 kg.

Für sehr große Kräfte wählt man als Krafteinheit die Tonne (1 t = 1000 kg).

Die zeichnerische Darstellung der Kräfte erfolgt durch Strecken, welche in Richtung der Kraftwirkungslinien liegen. Die Längen der Strecken sind den Kraftgrößen proportional. Zur Vergleichung der Kräfte dient ein *Kräftemaßstab,* welcher die Beziehung zwischen der angenommenen Längeneinheit und der durch sie dargestellten Kraftgröße angibt, z. B. Maßstab der Kräfte (M. d. K.): 1 mm = 5 kg; 1 cm = 200 kg; 1 cm = 2000 kg; 1 cm = 5 t.

Eine Kraft von 600 kg würde demnach unter Annahme eines Kräftemaßstabes von 1 cm = 200 kg dargestellt durch eine Strecke von $\frac{600}{200} = 3$ cm.

1*

Der Kräftemaßstab ist von Fall zu Fall frei zu wählen. Maßgebend ist die Größe der gegebenen Kräfte und die zur Verfügung stehende Zeichenfläche. Für zeichnerische Untersuchungen mit kleinen Kräften legt man große, bei großen Kräften kleine Längeneinheiten für die gleichen Kraftgrößen zugrunde.

## Angaben für die zeichnerische Ausführung.

Für die zeichnerischen Untersuchungen beachte man folgendes: Sämtliche zeichnerische Arbeiten müssen aufs sorgfältigste ausgeführt werden. Hierzu gehören die besten Hilfsmittel. Man benutze für dieselbe Aufgabe stets den gleichen Zeichenmaßstab (Millimeterteilung) sowie dieselben Winkel und die gleiche Schiene. Alle Maße sind vom Maßstab unmittelbar durch Übertragen des Maßes mit der Pausnadel abzusetzen. Das Abgreifen der Maße mit dem Zirkel ist wegen der vielen Fehlerquellen ganz zu vermeiden.

Das Absetzen der Maße hat mittels senkrecht geführter Pausnadel zu geschehen.

Das Aufzeichnen von Maßstäben auf das Zeichenblatt sowohl für die Längen als auch für die Kräfte hat nur Zweck für eine spätere annähernde Nachprüfung. Wegen der zu befürchtenden Ungenauigkeiten ist es verfehlt, die selbstbestimmten Maßstäbe zum Zeichnen zu benutzen.

Die in den Reißzeugen befindlichen Pausnadeln sind in der Regel unpraktisch. Man stellt sich eine vorzügliche Pausnadel am besten selbst her, und zwar dadurch, daß man mit einer sehr dünnen Nähnadel den Knickrand eines scharf zusammengefalteten, etwa 3 × 7 cm großen Stückchen Zeichenpapiers in der Mitte durchsticht, die Nadel zur Hälfte einschiebt und ihre Lage zwischen den Faltteilen des Papiers durch Siegellack festlegt. Hierdurch werden gleichzeitig beide Zeichenblatteile beim Zusammendrücken zu einem Ganzen vereinigt.

Alle Punkte sind durch Pausnadelstiche festzulegen; dieselben sind sofort mit Bleistift zu umkreisen. Mehr als eine Richtungslinie darf in Blei nicht durch den betreffenden Punkt gehen, bei Ausführung in Tusche bleibt der Schutzkreis überhaupt frei von jeder Linie. Die Linien können dann besonders stark ausgezogen werden, ohne daß die Genauigkeit beeinträchtigt wird. Auf jeden Fall bezeichnet man die Endpunkte aller Strecken, deren genaue Länge von Bedeutung ist, mit kleinen Kreisen.

Die Zeichenbögen sollen nicht aufgezogen werden.

Alle erforderlichen Winkel trage man mittels der trigonometrischen Funktionen auf und mache Nachprüfungsmessungen auf Grund der Rechnungen. Die Seitenlängen der notwendigen rechtwinkligen Dreiecke nehme man dabei nicht zu klein an. Längere Lote errichte man nach den bekannten Regeln.

Aufgabe 1: Zeichne eine Kraft von 60 kg; M. d. K. 1 cm = 20 kg. Desgl. von 55 kg; M. d. K. 1 mm = 5 kg. Desgl. von 280 kg; M. d. K. 1 cm = 100 kg. Desgl. von 1260 kg; 1 cm = 500 kg.

Man nehme dabei verschiedene Neigungen gegen die Wagerechte an, welche durch Winkel zu geben sind (z. B. $a = 0^0$; $30^0$; $45^0$; $80^0$; $130^0$).

**Übertragung der Kräfte.** Wird eine äußere Kraft auf einen Körper übertragen, so tritt vom Angriffspunkt aus, je nach der Art der Wirkung eine Ausdehnung oder Zusammenziehung ein, welche mit einer meist geringen Änderung der Raumgröße des Körpers verbunden ist und sich nach dem Innern zu fortpflanzt (Versuch mit einem Stück Radiergummi). Es entsteht so ein innerer Widerstand, welcher sich mit der äußeren Kraft ins Gleichgewicht setzt.

Grundgesetz: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich.

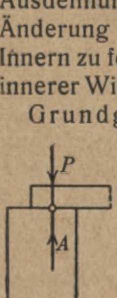


Abb. 3.

Wird durch einen Körper (z. B. Träger) eine Kraftwirkung auf einen zweiten Körper (Mauer) übertragen, so wirkt der letztere Körper mit der gleichen Kraft auf den ersteren zurück. Der zweite Körper muß naturgemäß eine feste Unterstützung besitzen (guter Baugrund!). (Abb. 3.)

Bei den in diesem Leitfaden vorzunehmenden statischen Untersuchungen wird stets die Voraussetzung gemacht, daß sämtliche wirkende Kräfte in einer Ebene liegen. Diese Ebene fällt bei den zeichnerischen Untersuchungen mit der Zeichenebene zusammen.

Bemerkung: Sofern nichts anderes ausdrücklich bemerkt ist, erfolgen die Ermittlungen für frei beweglich gedachte Körper; etwaige an den Baukörpern auftretende widerstehende Kräfte werden gegebenenfalls als äußere Kräfte eingeführt.

### 2. Die Mittelkraft und die Seitenkräfte.

Wirken auf einen Körper gleichzeitig mehrere Kräfte ein (Kräftegruppe oder Kräftesystem), so können sie im allgemeinen durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche die gleiche Wirkung hervorbringt wie alle auftretenden Kräfte zusammen. Diese Ersatzkraft heißt Mittelkraft, Resultante oder Resultierende; die Einzelkräfte, aus welchen sie sich ergeben hat, heißen Seitenkräfte oder Komponenten.

Satz: Die Mittelkraft hat die gleiche statische Wirkung wie die Gruppe der Einzelkräfte.

Dieser Satz hat nur Gültigkeit für die Beurteilung der Gleichgewichtsverhältnisse (Statik), bei der Festlegung der Festigkeitsverhältnisse kann kein Gebrauch davon gemacht werden.

Das Aufsuchen der Mittelkraft für gegebene Seitenkräfte nennt man die Zusammensetzung von Kräften.

Vielfach wird jedoch auch umgekehrt es notwendig, eine gegebene Kraft als Mittelkraft anzusehen und aus ihr Seitenkräfte abzuleiten, deren Wirkung gleich der Wirkung der gegebenen Kräfte ist. Man bezeichnet dieses Verfahren als Zerlegung der Kräfte.

### 3. Das Gleichgewicht von Kräften.

Heben sich die Wirkungen aller auf einen Körper wirkenden Kräfte auf, so befindet sich dieser im Zustande des Gleichgewichts. Die Mittelkraft hat alsdann den Wert Null.

# II. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht von Kräften.

## A. Kräfte in derselben Geraden.

### 1. Zusammensetzung.

#### a) *Zwei Kräfte gleicher Richtung und gleichen Sinnes.*

##### I. Zeichnerische Lösung.

Greifen zwei Kräfte gleichen Sinnes $P_1$ und $P_2$ in derselben Geraden ($MN$) an (Abb. 4), so wird ihre Gesamtwirkung gleich der Summe der Einzelwirkungen. Man wähle daher einen Kräftemaßstab und reihe die beiden Kraftstrecken in gleichem Sinne aneinander. Die Reihenfolge ist beliebig. Man beachte,

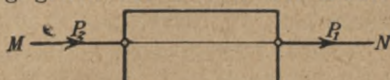


Abb. 4.

daß der Endpunkt der ersten Kraft Anfangspunkt für die zweite wird. Die Größe der Mittelkraft $R$ ist durch die Strecke vom Anfangspunkt $A$ der ersten bis zum Endpunkt $E$ der letzten Kraft bestimmt, welche zu messen und im Kräftemaßstab auszudrücken ist. Der Sinn der Mittelkraft ist dem der gegebenen Kräfte gleich. Er ergibt sich stets, indem man vom Anfangspunkt des Kräftezugs ausgehend nach dem Endpunkte zu zieht.

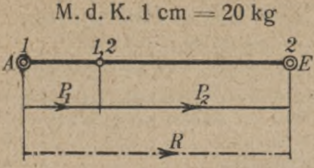


Abb. 5.

Die Anfangs- und Endpunkte der Einzelkräfte sollen in Zukunft immer die gleichen Bezeichnungen erhalten wie die Beizeichen (= Index bzw. Indices, Zeiger) der Kräfte (Abb. 5). Kräfte gleichen Sinnes erhalten die Bezeichnungen stets auf derselben Seite der Geraden, Kräfte verschiedenen Sinnes auf den verschiedenen Seiten der Geraden (Abb. 7a u. b).

Aufgabe 2: Für Abb. 4 u. 5 werden angenommen: $P_1 = 20$ kg; $P_2 = 50$ kg. M. d. K. 1 cm = 20 kg. Gefunden wird $R = 3{,}5$ cm; also erhält man $R = 3{,}5 \cdot 20$ kg = 70 kg.

### II. Rechnerische Lösung.

Die Mittelkraft ergibt sich zu:

$$R = P_1 + P_2,$$

also für die angenommenen Zahlenwerte: $R = 20 + 50 = 70$ kg.

Bemerkung: Würde bei der zeichnerischen Lösung $R = 3{,}46$ cm gemessen worden sein, so würde $R = 3{,}46 \cdot 20 = 69{,}2$ kg sich ergeben. Es würde somit der Fehler der Zeichnung betragen $70 - 69{,}2 = 0{,}8$ kg.

## b) Zwei Kräfte gleicher Richtung und entgegengesetzten Sinnes.

Wirken zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ entgegengesetzten Sinnes in derselben Geraden ($MN$), so heben sich ihre Wirkungen teilweise oder ganz auf. (Abb. 6.)

### I. Zeichnerische Lösung.

Nach Wahl eines Kräftemaßstabes trage man die beiden Kraftstrecken unter Beachtung des Sinnes so aneinander, daß der Anfangspunkt der zweiten Kraft mit dem Endpunkte der ersten zusammenfällt. Die Reihenfolge der Kräfte ist beliebig. Die Größe der Mittelkraft $R$ aus beiden gegebenen Kräften ist gleich dem Abstande des Anfangspunktes $A$ der ersten Kraft von dem Endpunkte $E$ der zweiten Kraft (Abb. 7). Der Wirkungssinn ergibt sich nach vorigem, indem man vom Anfangspunkt $A$ nach dem Endpunkte $E$ zieht.

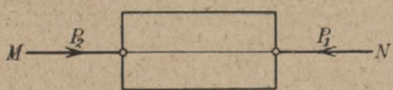


Abb. 6.

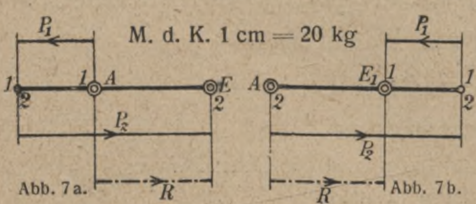


Abb. 7a. Abb. 7b.

Es sind zwei verschiedene Lösungen möglich, welche in Abb. 7a und b gegeben sind.

Fällt $A$ mit $E$ zusammen, so wird $R = 0$; die Wirkungen beider Kräfte heben sich auf, der Körper ist im Gleichgewicht.

Aufgabe 3: Es sei $P_1 = 20$ kg; $P_2 = -50$ kg gegeben, gesucht $R$. M. d. K. 1 cm = 20 kg.

Lösung: Man erhält nach Abb. 7a/b $AE = AE_1 = R = 1{,}5$ cm, demnach $R = 1{,}5 \cdot 20 = -30$ kg unter Beachtung des Vorzeichens.

### II. Rechnerische Lösung.

Bezeichnet man die eine der wirkenden Kräfte mit $+P_1$, die im entgegengesetzten Sinne wirkende mit $-P_2$, so wird

$$R = +P_1 - P_2.$$

Lehrsatz: Die Mittelkraft zweier in derselben Geraden wirkender Kräfte entgegengesetzten Sinnes ist gleich der Differenz der beiden Kräfte.

Setzt man im vorliegenden Falle $P_1 = +20$ kg und $P_2 = -50$ kg, so wird

$$R = +20 - 50 = -30 \text{ kg},$$

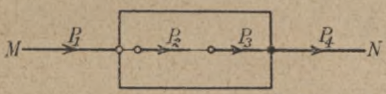
d. h. es wirkt hier eine Mittelkraft mit 30 kg wagerecht nach links.

Ist $P_1 = P_2$, so erhält man $R = P_1 - P_2 = 0$; es herrscht dann Gleichgewicht.

### c) Beliebig viele Kräfte gleicher Richtung und gleichen Sinnes.

#### I. Zeichnerische Lösung.

Man trage die Kräfte in dem gewählten Kräftemaßstab in beliebiger Reihenfolge derart aneinander, daß der Anfangspunkt der neu hinzugefügten



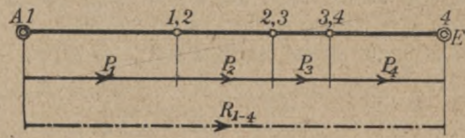




Abb. 8. M. d. K. 1 cm = 20 kg Abb. 9.

Kraft stets auf den Endpunkt der vorhergehenden fällt. Die Größe der Mittelkraft ist gleich der Strecke vom Anfangspunkt $A$ der ersten bis zum Endpunkt $E$ der letzten Kraft. Der Sinn ist durch die Gerade $AE$ gegeben und wird gleich dem der gegebenen Kräfte.

Aufgabe 4: Es seien gegeben: $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 250$ kg, $P_3 = 150$ kg, $P_4 = 300$ kg, gesucht die Mittelkraft $R$. M. d. K. 1 cm = 200 kg. Lösung s. Abb. 8 u. 9.

#### II. Rechnerische Lösung.

Liegen beliebig viele Kräfte gleichen Sinnes in derselben Geraden, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe der Einzelkräfte, demnach

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \cdots$$

oder: $R = \sum P$ (d. h. = Summe aller $P$).

In Abb. 8 ist $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$,

$$R = 400 + 250 + 150 + 300 \text{ kg},$$

$$R = 1100 \text{ kg}.$$

Lehrsatz: Die Mittelkraft beliebig vieler, in derselben Geraden wirkender Kräfte gleichen Sinnes ist gleich der Summe der Kräfte.

### d) Beliebig viele Kräfte gleicher Richtung und verschiedenen Sinnes.

Wirken mehrere Kräfte entgegengesetzten Sinnes in gleicher Richtung, so heben sich ihre Wirkungen teilweise oder ganz auf.

#### I. Zeichnerische Lösung.

Man gehe in gleicher Weise vor wie bei c I S. 6. Die Größe der Mittelkraft ist wiederum gleich dem Abstand des Anfangspunktes $A$ vom Endpunkte $E$ des Kräftezugs; der Wirkungssinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkt $A$ abgewandt. Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte aneinandergetragen werden, ist eine beliebige. (Abb. 10 u. 11.)

Aufgabe 5: Es seien gegeben $P_1 = +800$ kg, $P_2 = -300$ kg, $P_3 = -250$ kg, $P_4 = 400$ kg. Gesucht $R$.

Lösung s. Abb. 10 u. 11. M. d. K. 1 cm = 200 kg. Es ergibt sich $AE = R = 3{,}25$ cm; also $R = 3{,}25 \cdot 200 = 650$ kg.

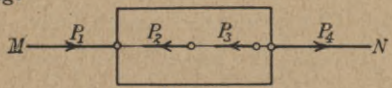



Abb. 10.

M. d. K. 1 cm = 200 kg

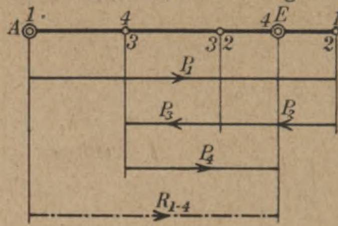



Abb. 11.

### II. Rechnerische Lösung.

Bezeichnet man die in einem bestimmten gleichen Sinne wirkenden Kräfte mit positivem, die im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte mit negativem Vorzeichen, so ergibt sich die Größe der Mittelkraft als Unterschied aus der Summe der positiven und aus der Summe der negativen Kräfte. Man kann daher auch die Kräfte unter Beachtung des Vorzeichens addieren, also

$$R = \pm P_1 \pm P_2 \pm P_3 \pm P_4 \cdots$$
$$R = \sum P.$$

Es läßt sich daher für die bislang unter a—d besprochenen Fälle folgendes allgemein aussprechen:

Lehrsatz: Die Mittelkraft beliebig vieler, in derselben Geraden wirkender Kräfte ist gleich der algebraischen Summe aller dieser Kräfte.

Als Angriffspunkt von $R$ kann jeder beliebige Punkt der Wirkungsgeraden angenommen werden. Wird $R = 0$, so herrscht Gleichgewicht.

Für das unter I angegebene Beispiel (Abb. 10 u. 11) ergibt sich

$$R = +P_1 - P_2 - P_3 + P_4$$
$$R = +800 - 300 - 250 + 400 \text{ kg}$$
$$R = +650 \text{ kg}.$$

## 2. Zerlegung.

Man kann jede vorhandene Kraft als eine Mittelkraft ansehen und in Seitenkräfte zerlegen.

Soll eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit ihr in der gleichen Wirkungsgeraden liegen, so sind unendlich viele Lösungen möglich. Ist eine der beiden Seitenkräfte gegeben oder durch eine Bedingung bestimmbar, so ist die zweite Seitenkraft dadurch ebenfalls bekannt.

Soll eine Zerlegung in $n$ Seitenkräfte erfolgen, so müssen $n - 1$ Seitenkräfte der Größe und dem Sinne nach bekannt sein.

## 3. Gleichgewicht.

Unter Beachtung des Vorausgegangenen gilt für den Gleichgewichtszustand:

Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten sich im Gleichgewicht, wenn sie in derselben Geraden liegen, gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn haben.

Beliebig viele auf einen Körper in derselben Geraden wirkende Kräfte verschiedenen Sinnes halten sich im Gleichgewicht, wenn ihre algebraische Summe gleich Null ist.

## B. Kräfte, die an einem Punkte in verschiedener Richtung angreifen.

### 1. Am Angriffspunkt wirken zwei Kräfte.

#### a) *Zusammensetzung.*

##### I. Zeichnerische Lösung.

A. Das Kräfteparallelogramm.

Wirken an einem Punkt $A$ (Abb. 12 S. 9) zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ in verschiedenen Richtungen, so trage man in einem gewählten Kräftemaßstabe von diesem Punkte aus auf den Kraftlinien unter Beachtung des Sinnes der Kräfte die den Kraftgrößen entsprechenden Strecken auf[1]), z. B. $P_1 = AB$, $P_2 = AC$. Hierbei soll zur Vermeidung von Fehlern der Sinn der Kräfte vom Angriffspunkt $A$ stets weggerichtet sein; die Kräfte wirken also am Punkt $A$ ziehend.

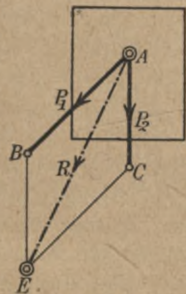



Abb. 12.

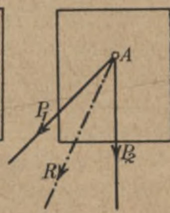



Abb. 13a. Hauptfig.


Abb. 13b. Nebenfig.

Man lege nun durch den Endpunkt $B$ von $P_1$ eine Gleichlaufende ($BE$) zu $AC$ und durch den Endpunkt $C$ der Kraft $P_2$ eine Gleichlaufende ($CE$) zu $AB$ und erhält so den Schnittpunkt $E$. Zieht man in dem entstandenen Parallelogramm $ABEC$ die Diagonale $AE$, so gibt dieselbe nach ihrer Richtung und Größe die Mittelkraft $R$ der beiden Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ an. Der Sinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkt $A$ nach dem Endpunkte $E$ gerichtet, die Mittelkraft wirkt also auch ziehend am Anfangspunkt $A$. (Den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens s. Naturlehre.)

Anstatt das Parallelogramm in der Hauptfigur am Punkte $A$ (Abb. 12 u. 13a) zu zeichnen, verfährt man bisweilen derart, daß der Kräftezug seitlich für sich gezeichnet und daselbst die Größe und Richtung der Mittelkraft bestimmt wird (Abb. 13b); die Lage der Mittelkraft erhält man dadurch, daß man die erhaltene Richtung $R$ nach dem eigentlichen Angriffspunkt $A$ (Abb. 13a) gleichlaufend verschiebt.

Lehrsatz: Die Mittelkraft zweier durch einen Punkt gehender Kräfte wird nach Richtung, Größe und Sinn dargestellt durch die vom Angriffspunkt ausgehende Diagonale eines Kräfteparallelogramms, dessen Seiten durch die gegebenen Kräfte (Seitenkräfte) gebildet werden. Der gegebene Punkt ist der Angriffspunkt der Mittelkraft.

Das so entstandene Parallelogramm nennt man das Kräfteparallelogramm.

Ist der Sinn der Kräfte nicht von vornherein vom Angriffspunkt weggerichtet, so verschiebt man die Kraft in ihrer Richtung derart, daß beide Seitenkräfte an $A$ ziehend wirken, und zeichne dann erst das Kräfteparallelogramm. (Abb. 14a–c.)

Bemerkung: Es können auch beide Seitenkräfte so angetragen werden, das ihr Sinn auf den Angriffspunkt $A$ zu gerichtet ist, sie drücken dann auf den Punkt $A$.

---

1) Gegebene Kräfte werden immer stark, gesuchte schwächer gezeichnet.

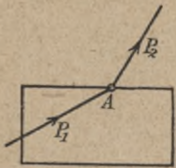


Abb. 14a.

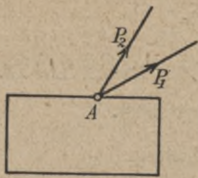


Abb. 14b.

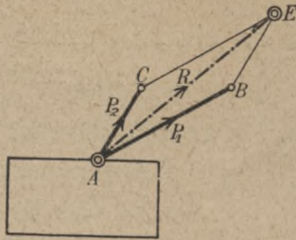


Abb. 14c.

Die Mittelkraft wird dann ebenfalls auf $A$ drükken. Es soll jedoch dieses Verfahren grundsätzlich nicht weiter behandelt werden, um Verwirrung und Fehler zu vermeiden.

## B. Das Kräftedreieck.

Das Kräfteparallelogramm wird durch die Diagonale, welche die Mittelkraft darstellt, in zwei kongruente Dreiecke ($\triangle\, ABD$ und $\triangle\, ACE$ Abb. 12) zerlegt. Da in jedem Dreieck die gegebenen Seitenkräfte und die gesuchte Mittelkraft vorkommen, so genügt zur Bestimmung der Mittelkraft die Zeichnung eines dieser Dreiecke, welche man Kräftedreiecke nennt. In der Regel erfolgt die Herstellung dieser Kräftedreiecke in einer besonderen, abseits vom Körper gezeichneten Nebenfigur.

Trägt man daher von einem beliebig angenommenen Punkte $A$ (Anfangspunkt) aus in einem gewählten Kräftemaßstabe die Kraft $P_1$ ($= AB$) ziehend an (Abb. 16a) und legt durch den Endpunkt ($B$) dieser ersten Kraft eine Gleichlaufende zu $P_2$, auf welche die Kraft $P_2$ ($= BE$) von $B$ aus derart aufgetragen wird, daß die Pfeilrichtungen der Kräfte sich folgen, so erhält man in der vom Anfangspunkt $A$ der ersten Kraft nach dem Endpunkte $E$ der zweiten Kraft gezogenen Geraden, welche Schlußlinie genannt wird, die gesuchte Mittelkraft nach Richtung und Größe (Kräftedreieck I). Man braucht die gefundene Mittelkraft $R$ nun nur nach dem Angriffspunkt gleichlaufend zu verschieben (Abb. 15), um auch ihre richtige Lage zu dem untersuchten Körper zu bestimmen (Hauptfigur).

Man beachte stets auch bei den späteren Untersuchungen, daß die Nebenfigur recht nahe an die Hauptfigur heranzurücken ist, damit Zeichenfehler bei der gleichlaufenden Verschiebung möglich vermieden werden. Die Pfeile zur Andeutung des Wirkungssinns setze man stets in die Mitte der Kraftstrecken.

Anstatt mit $P_1$ zu beginnen, kann man auch an $A$ zuerst $P_2$ antragen und im Endpunkte $C$ derselben unter Beachtung gleicher Pfeilrichtung (gleichen Umfahrungssinnes! s. u.) die Kraft $P_1$ antragen (Abb. 16b). Die Mittelkraft $R$ erhält man durch Ziehen der Geraden $AE$ (Kräftedreieck II).

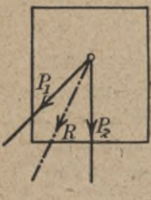


Abb. 15.
Hauptfigur.

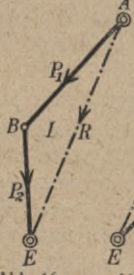


Abb. 16a.
Nebenfigur.

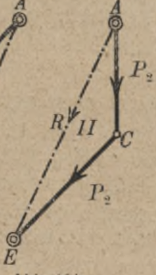


Abb. 16b.

Die Reihenfolge, in welcher die Seitenkräfte aneinandergetragen werden, ist also beliebig. Die gebrochenen Linien $ABE$ und $ACE$ nennt man den Kräftezug. Durch Aneinanderschieben der Kräftedreiecke entsteht naturgemäß das Kräfteparallelogramm.

Die bei Aneinanderreihung von Kräften durch die erste aufgetragene Kraft bestimmte, vom Angriffspunkt weggerichtete Pfeilrichtung nennt man den

Umfahrungssinn. Eine Kraft wirkt also im Umfahrungssinn oder hat denselben Umfahrungssinn, wenn ihre Pfeilrichtung dieselbe ist wie die der vorhergehenden Kraft, sie wirkt gegen den Umfahrungssinn oder hat entgegengesetzten Umfahrungssinn, wenn ihre Pfeilrichtung entgegengesetzt gerichtet ist.

Die Seitenkräfte im Kräftedreieck haben stets den gleichen Umfahrungssinn, die Mittelkraft entgegengesetzten Umfahrungssinn wie die Seitenkräfte.

Das Kräftedreieck wird wegen der größeren Einfachheit meist anstatt des Kräfteparallelogramms angewendet.

Bei gleichbleibenden Kräften $P_1$ und $P_2$ ändert die Mittelkraft ihre Größe und Richtung, sofern sich der von den Kraftrichtungen eingeschlossene Winkel (Kraftwinkel) ändert. Je kleiner der Kraftwinkel, um so größer wird die Mittelkraft, je größer der Kraftwinkel, um so kleiner wird die Mittelkraft. Die Größe der Mittelkraft steht also im umgekehrten Verhältnis zur Größe des Kraftwinkels.

Wird der Kraftwinkel $= 0^0$, so wird die Mittelkraft gleich der Summe der Kräfte (s. II A. 1a), wird der Winkel $= 180^0$, so wird sie gleich der Differenz der Kräfte (s. II A. 1b).

### II. Rechnerische Lösung.

Die Lösung des allgemeinen Falles kann in Klasse IV mit den im Unterrricht bislang gegebenen mathematischen Hilfsmitteln nicht geschehen. Es sollen daher nur die Sonderfälle, welche eine einfache Lösung gestatten, besprochen werden. Es sei darauf hingewiesen, daß die Anfertigung von Handskizzen für die rechnerische Lösung in der Regel notwendig ist; diese brauchen naturgemäß nur ungefähr maßstäblich gezeichnet zu werden, eine genau Aufzeichnung ist unnötig.

### A. Die Kräfte schließen einen rechten Winkel ein.

Das Kräfteparallelogramm geht in ein Rechteck über (Abb. 17), die Kräftedreiecke sind rechtwinklig. (Abb. 18.)

Es wird:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{P_2}; \qquad \beta = 90 - \alpha$$

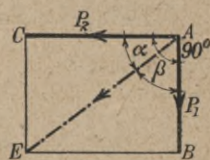


Abb. 17.

$$\frac{P_1}{R} = \sin \alpha; \qquad P_1 = R \cdot \sin \alpha$$

$$R = \frac{P_1}{\sin \alpha}$$

oder

$$\frac{P_2}{R} = \cos \alpha; \qquad P_2 = R \cdot \cos \alpha$$

$$R = \frac{P^2}{\cos \alpha}.$$

Aufgabe 6: Gegeben $P_1 = 30$ kg; $P_2 = 40$ kg. Gesucht R.

Lösung:

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2}$$

$$R = \sqrt{2500} = 50 \text{ kg}$$

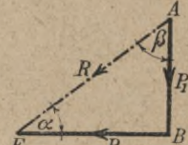


Abb. 18.

### B. Die Kräfte $P_1$ und $P_2$ sind einander gleich.[1])

Das Kräfteparallelogramm wird ein Rhombus (Kräfterhombus, Abb. 19); das Kräftedreieck wird gleichschenklig (Abb. 20). $P_1 = P_2 = P$.

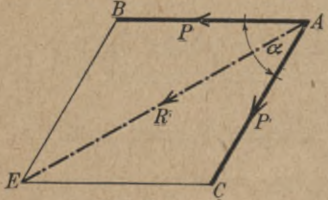


Abb. 19.

Fällt man im Kräftedreieck $ACE$ das Lot so $CD \perp AE$, so wird

$$AD = \frac{AE}{2} = \frac{R}{2}.$$

Der Kraftwinkel $BAC = \alpha$ (Abb. 19) wird durch $AE$ halbiert. Es ist demnach

$$\frac{AD}{AC} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$AD = AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{R}{2} = P \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$R = 2 \cdot P \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

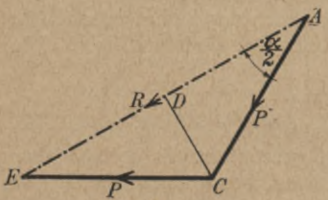


Abb. 20.

**Beispiel:** Gegeben $P = 500$ kg, $\alpha = 60^0$, gesucht $R$. Es ist $\frac{\alpha}{2} = 30^0$

$$R = 2 \cdot 500 \cdot \cos 30^0$$
$$R = 1000 \cdot 0{,}8660$$
$$R = 866 \text{ kg}.$$

Wird $\alpha = 90^0$, so wird das Kräfteparallelogramm ein Quadrat und das Kräftedreieck ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck; demnach ist:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2, \text{ und da } P_1 = P_2 = P \text{ ist}$$
$$R^2 = 2 \cdot P^2$$
$$R = \sqrt{2P^2}$$
$$R = P \cdot \sqrt{2}.$$

**Beispiel:** Ein Pfahl eines Brückenjoches hat den Druck von zwei Kopfbändern aufzunehmen, die je 2400 kg übertragen. Wie groß ist die auf den Pfahl wirkende Mittelkraft. Die zeichnerische Lösung ist aus Abb. 21 ersichtlich. Man löse die Aufgabe auch mit Hilfe des Kräftedreieckes und rechnerisch.

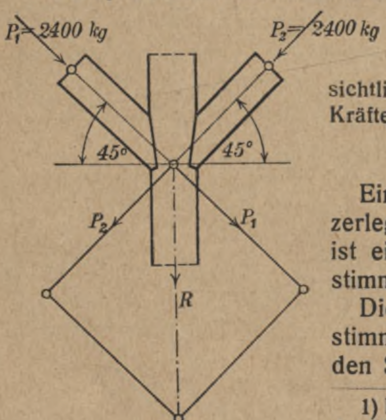


Abb. 21.

### b) Zerlegung.

Eine gegebene Kraft kann in zwei Seitenkräfte zerlegt werden. Die Möglichkeit dieser Ausführung ist eine unbegrenzte, die Aufgabe ist also unbestimmt.

Die Aufgabe wird erst dadurch eindeutig bestimmt, daß entweder die Richtung jeder der beiden Seitenkräfte gegeben ist, oder daß eine der

1) Der Einfachheit wegen sind die Körper, an welchen der Kraftangriff erfolgt, nicht mehr gezeichnet worden.

beiden Seitenkräfte der Größe, Richtung und dem Sinne nach bekannt ist. (Auch kann die Größe der beiden Seitenkräfte gegeben sein, Lage und Richtung sind jedoch unbekannt.)

**I. Zeichnerische Lösung.**

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Kräfteparallelogramms oder des Kräftedreiecks, wobei das umgekehrte Verfahren wie bei B. 1 a S. 9 u. fgd. einzuschlagen ist.

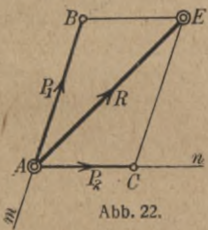


Abb. 22.

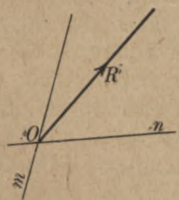


Abb. 23.

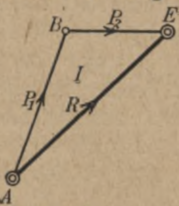


Abb. 24.

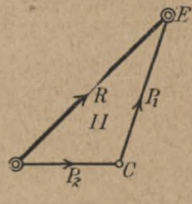


Abb. 25.

a. Gegeben ist $R$ und die Richtungen $m$ und $n$ der beiden Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$, gesucht die Größe und Sinn der Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$.

**Kräfteparallelogramm** (Abb. 22). Man trägt die gegebene Kraft $R = AE$ im gewählten Kräftemaßstab auf und zieht durch den Endpunkt $E$ der Mittelkraft Gleichlaufende zu den gegebenen Seitenkraftrichtungen, wodurch das Kräfteparallelogramm $ABEC$ entsteht. Man erhält in der Strecke $AB$ die Seitenkraft $P_1$, in der Strecke $AC$ die Seitenkraft $P_2$ nach Größe, Sinn und Richtung. Der Sinn der Seitenkräfte ist vom Angriffspunkte weggerichtet.

**Kräftedreieck** (Abb. 23 bis 25). Man trägt $R$ in einer Nebenfigur der Größe, Richtung und dem Sinne nach auf (Abb. 24), zieht durch $A$ eine Gleichlaufende zu der einen Seitenkraftrichtung, durch $E$ eine Gleichlaufende zur andern. Die so gefundenen Dreiecksseiten geben der Größe und Richtung nach die Seitenkräfte an ($AB = P_1$; $BE = P_2$). Der Umfahrungssinn der Kräfte $P_1$ und $P_2$ ist entgegengesetzt zu dem von $R$. Die Lage von $P_1$ und $P_2$ findet man durch gleichlaufende Verschiebung nach dem gemeinsamen Angriffspunkt (Abb. 23). Das zweite Kräftedreieck zeigt Abb. 25.

Ein häufiger vorkommender Sonderfall ist der, wo die eine Seitenkraft wagerecht, die andere lotrecht gerichtet ist.

b. Gegeben ist $R$ und eine der Seitenkräfte nach Größe, Richtung und Sinn.

**Kräfteparallelogramm** (Abb. 26). Man trägt $AE = R$ und $AB = P_1$ auf, verbindet den Endpunkt $B$ von $P_1$ mit dem Endpunkt $E$ von $R$, durch Ziehen der Gleichlaufenden zu $AB$ und $BE$ durch $E$ bzw. $A$ erhält man das Kräfteparallelogramm $ABCE$; $AC = P_2$ ist die gesuchte zweite Seitenkraft nach Größe, Richtung und Lage. Der Sinn ist von $A$ abgewendet.

**Kräftedreieck** (Abb. 27 u. 28). In einer Hilfsfigur (Abb. 28) trage man $AE = R$ und $AB = P_1$ auf und verbinde $B$ mit $E$, so wird in dem so entstandenen Kräftedreieck $BE$ nach Größe und Richtung gleich der gesuchten Seitenkraft $P_2$. Die

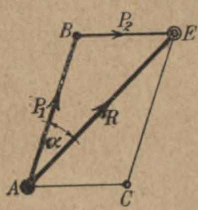


Abb. 26.

Abb. 27.

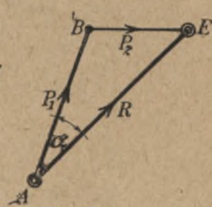


Abb. 28.

Kräfte $P_1$ und $P_2$ haben denselben Umfahrungssinn. $P_2$ ist nun nach dem eigentlichen Angriffspunkt 0 zu verschieben und wird so der Lage nach festgelegt.

Die unter *b* gegebenen Lösungen kommen selten vor.

#### II. Rechnerische Lösung.

Es gilt hier ebenfalls das unter B. 1a II Gesagte in der Umkehrung. Als häufig auftretender Sonderfall sei hier die Zerlegung einer Mittelkraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte besprochen. Die Seitenkräfte sind hierbei meist wagerecht (horizontale Seitenkraft $H$) und lotrecht (vertikale Seitenkraft $V$) gerichtet.

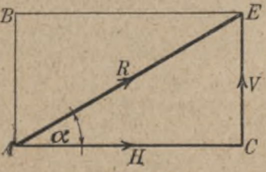


Abb. 29.

Unter Beachtung von Abb. 29 wird:

$$\frac{H}{R} = \cos\alpha; \quad H = R \cdot \cos\alpha$$

und

$$\frac{V}{R} = \sin\alpha; \quad V = R \cdot \sin\alpha.$$

### c) Gleichgewicht.

Zwei Kräfte, welche in einem Punkte in verschiedener Richtung angreifen, können sich niemals im Gleichgewicht halten (s. 2. c. S. 16).

## 2. Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt.

### a) *Zusammensetzung.*

#### I. Zeichnerische Lösung.

Die Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte kann durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms oder des Kräftedreiecks geschehen. Letzteres Verfahren hat den Vorteil, einfacher und übersichtlicher zu sein.

**Kräfteparallelogramm** (Abb. 30). Von den auf einen Körper in einem Punkte wirkenden Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ . . . setze man zunächst zwei, z. B. $P_1$ und $P_2$ zu einer Mittelkraft $R_{1,2}$ zusammen; dann benutze man $R_{1,2}$ als Seitenkraft und bilde mit $P_3$ ein neues, zweites Kräfteparallelogramm. Es ergibt sich dann die Mittelkraft $R_{1,2,3}$ (auch $R_{1-3}$ geschrieben), welche die Kräfte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ ersetzt. Ebenso ergeben $R_{1-3}$ und $P_4$ eine Mittelkraft $R_{1,2,3,4}$ (auch kürzer $R_{1-4}$ geschrieben) usf., bis schließlich $R$ als Mittelkraft aller wirkenden Kräfte erhalten wird.

M. d. K. cm = 50 kg

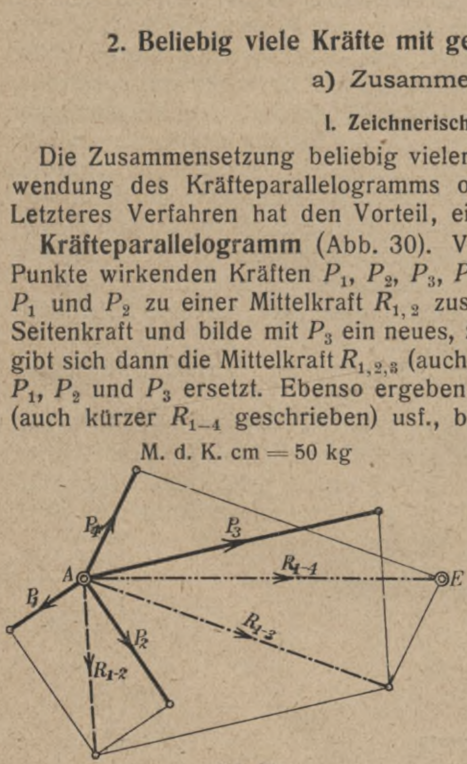


Abb. 30.

Aufgabe 7: Für die in Abb. 30 dargestellten Kräfte $P_1 = 60$ kg, $P_2 = 100$ kg, $P_3 = 200$ kg und $P_4 = 80$ kg ist die Zusammensetzung der Kräfte zu einer Mittelkaft $R$ durchzuführen. M. d. K. 1 cm = 50 kg.

Lösung in Abb. 30. Es ergibt sich $R = AE$ = 4,74 cm, also $R = 4{,}74 \cdot 50 = 237$ kg.

Die Abb. 30 zeigt den Mangel einer wenig klaren Übersichtlichkeit deutlich, daher braucht man zur Zusammensetzung besser das Kräftedreieck.

**Kräftedreieck** (Abb. 31 u. 32). Man bestimmt in einer Nebenfigur (Abb. 32) aus den Seitenkräften $P_1$ und $P_2$ nach den unter 1 a I. B. S. 10 angegebenen Regeln die Mittelkraft $R_{1,\,2}$, setzt diese mit $P_3$ zusammen zu $R_{1-3}$, letztere mit $P_4$ zu $R_{1-4}$ usf., bis zuletzt $R$ erhalten wird.

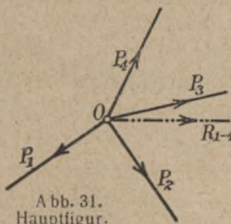


Abb. 31. Hauptfigur.

M. d. K. 1 cm = 50 kg

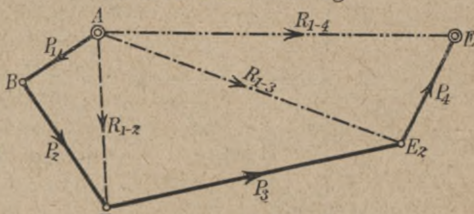


Abb. 32. Nebenfigur.

In Abb. 34 und 35 ist die Lösung für dieselben vier Kräfte wie oben angegeben.

Wie leicht ersichtlich, wird an dem Ergebnis nichts geändert, wenn man von der Zeichnung der Zwischenmittelkräfte, hier $R_{1,\,2}$ und $R_{1-3}$, Abstand nimmt (Abb. 33). Man hat also nur nötig, die Einzelkräfte so aneinander zu reihen, daß der Endpunkt der ersten Kraft zugleich Anfangspunkt der zweiten, der Endpunkt der zweiten Anfangspunkt der dritten wird usf. Die Kräfte müssen sich alle im gleichen Umfahrungssinn folgen, die erste Kraft muß vom Anfangspunkt weg gerichtet sein. Die Mittelkraft erhält man nach Größe, Richtung und Sinn, wenn man vom Anfangspunkt $A$ der ersten Kraft nach dem Endpunkt $E$ der letzten Kraft eine Gerade zieht. Der Sinn der Mittelkraft ist dem Umfahrungssinn der Einzelkräfte entgegengesetzt gerichtet. Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte aneinandergereiht werden, ist eine beliebige.

Wird die Mittelkraft in einer Nebenfigur (Abb. 32) bestimmt, so findet man die Lage der Mittelkraft durch gleichlaufende Verschiebung nach dem gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte 0 am Körper. (Die Zeichnung einer Nebenfigur ist hier wegen der besseren Übersichtlichkeit ganz besonders zu empfehlen.)

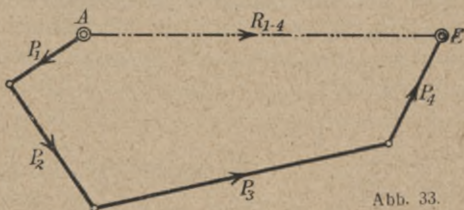


Abb. 33.

Der gebrochene Linienzug $ABE_1E_2E$ heißt der Kräftezug. Die den Kräftezug schließende Linie nennt man auch hier die Schlußlinie. Das entstandene Vieleck $ABE_1E_2E$ bezeichnet man als Kräftevieleck oder Krafteck (auch Kräftepolygon).

Lehrsatz: Die Mittelkraft beliebig vieler in einem Punkte angreifender Kräfte ist nach Richtung, Größe und Sinn gleich der vom Anfangs- bis zum Endpunkte gezogenen Schlußlinie eines Kräftezuges, dessen Seiten gleich und gleichlaufend zu den gegebenen Seitenkräften sind.

### II. Rechnerische Lösung.

Man legt durch den Angriffspunkt zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen (eine wagerechte $X - X$ und eine senkrechte $Y - Y$, vgl. Abb. 34) und zerlegt jede der wirkenden Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . nach B. 1. b. II. wagerecht und senkrecht in ihre wagerechten Seitenkräfte $H_1$, $H_2$, $H_3$ ... bzw. in die lotrechten Seitenkräfte $V_1$, $V_2$, $V_3$ usf. Man bildet die algebraische Summe $H$ aller wagerechten ($\Sigma H$) und die algebraische Summe $V$ aller lotrechten Kräfte ($\Sigma V$). Die so erhaltene wagerechte Mittelkraft $H$ setzt man mit der lotrechten Mittelkraft $V$ zur Gesamtmittelkraft $R$ nach B. 1. a. II. A. zusammen.

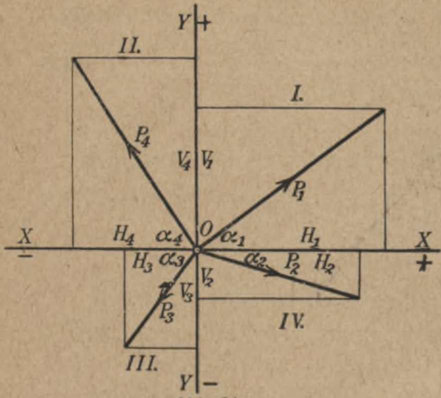


Abb. 34.

In Abb. 34 wird:

$$H_1 = + P_1 \cos \alpha_1;$$
$$V_1 = + P_1 \sin \alpha_1;$$
$$H_2 = + P_2 \cos \alpha_2;$$
$$V_2 = - P_2 \cos \alpha_2;$$
$$H_3 = - P_3 \cos \alpha_3;$$
$$V_3 = - P_3 \sin \alpha_3;$$
$$H_4 = - P_4 \cos \alpha_4; \qquad V_4 = + P_4 \sin \alpha_4.$$

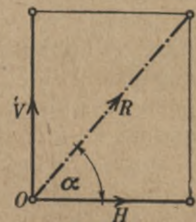


Abb. 35.

Man erhält:

$$H = H_1 + H_2 - H_3 - H_4,$$
$$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4,$$
$$R = \sqrt{H^2 + V^2}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}; \qquad \text{vgl. Abb. 35.}$$

Hiernach ist $R$ der Größe, Richtung und dem Sinne nach gegeben.

Die Mittelkraft kann in jeden der vier Quadranten des Achsenkreuzes fallen. Ihre Lage wird aus dem Vorzeichen der Seitenkräfte $V$ und $H$ bestimmbar, wobei die in Abb. 34 eingeschriebenen Vorzeichen zu beachten sind. Ist $V$ und $H$ positiv, so liegt $R$ im 1. Quadranten, ist $V$ positiv und $H$ negativ, im 2. Quadranten, ist $H$ negativ und $V$ negativ, dann im dritten, ist $V$ negativ und $H$ positiv, so im 4. Quadranten.

Nachteil der rechnerischen Lösung. Sie ist in diesem Falle bedeutend umständlicher, zeitraubender und unübersichtlicher als die zeichnerische Lösung.

Aufgabe 8. Die Rippen eines Netzgewölbes übertragen auf den in Abb. 36 im Grundriß dargestellten Eckpfeiler die wagerechten Schube $P_1 = 3400$ kg, $P_2 = 5800$ kg, $P_3 = 4000$ kg und $P_4 = 3400$ kg. Wie groß ist die Mittelkraft $R_{1-4}$ aus den Schüben?

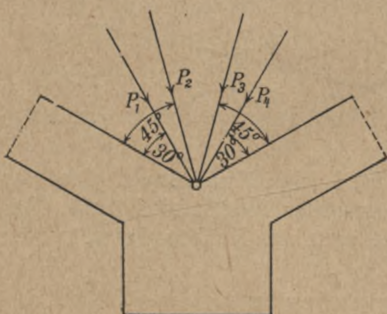


Abb. 36.

## b) Zerlegung.

Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Seitenkräfte kommt selten vor, deshalb soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Sie ist nur bei besonderen Annahmen ausführbar.

## c) Gleichgewicht.

### I. Zeichnerische Lösung.

### A. Gleichgewicht dreier Kräfte.

Wirken an einem Punkte zwei Kräfte in verschiedener Richtung, so können sie nach B. 1. a. I. S. 10 zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Zur Herstellung des Gleichgewichts muß daher noch eine dritte Kraft vorhanden sein oder hinzugefügt werden, welche die Mittelkraft in ihrer Wirkung aufhebt. Diese Kraft nennt man Gleichgewichtskraft. Sie muß ebenso groß sein wie die Mittelkraft, in gleicher Richtung wie sie liegen und entgegengesetzten Sinn besitzen.

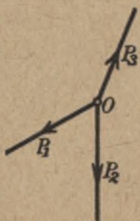



Abb. 37a.


Abb. 37b.


Abb. 37c.

Stellt Abb. 37b das Kräftedreieck zur Bestimmung der Mittelkraft $R$ für die am Angriffspunkt 0 (Abb. 37a) wirkenden Kräfte $P_1$ und $P_2$ dar, so findet man für den Gleichgewichtszustand, daß die dritte Kraft $P_3$, die Gleichgewichtskraft, die gleiche Größe, aber entgegengesetzten Sinn wie $R$ besitzen, also von $E$ nach $A$ gerichtet sein muß. Die Mittelkraft der drei Kräfte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ ist gleich Null (Abb. 37c). Anfangs- und Endpunkt des Kräftezugs fallen zusammen. Der Kräftezug schließt sich; man nennt das Kräftedreieck daher ein geschlossenes. Die drei Kräfte haben den gleichen Umfahrungssinn.

Lehrsatz: Drei in einem Punkte angreifende Kräfte halten sich im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete Kräftezug ein geschlossenes Kräftedreieck mit stetigem Umfahrungssinn bildet.

Die Mittelkraft ist dann gleich Null.

Man kann jede der drei Kräfte als Gleichgewichtskraft der beiden andern ansehen.

$$P_1 \equiv P_2, P_3; \quad P_2 \equiv P_3, P_1; \quad P_3 \equiv P_1, P_2.$$

### B. Gleichgewicht mehrerer Kräfte.

Wirken an einem Punkte mehrere Kräfte, so herrscht Gleichgewicht, wenn die Gesamtmittelkraft gleich Null ist (vgl. B. 2. a. I. S. 15). In diesem Falle wird der Endpunkt des geschlossenen Kräftezugs mit dem Anfangspunkt zusammenfallen. Der Kräftezug schließt sich; sämtliche Kräfte haben gleichen Umfahrungssinn. Die letzte Kraft ist die Gleichgewichtskraft zu sämtlichen vorausgehenden. Jede der Kräfte kann als Gleichgewichtskraft zu den übrigen angesehen werden. (Abb. 38a/b.)


Abb. 38a.

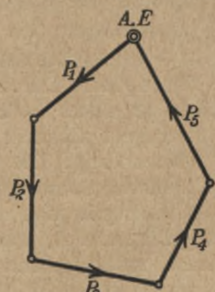



Abb. 38b.

Lehrsatz. Mehrere an einem Punkte wirkende Kräfte halten sich im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete Kräftezug ein geschlossenes Kräftevieleck mit stetigem Umfahrungssinn bildet.

Die Reihenfolge, in welcher die Aneinanderreihung geschieht, ist auch hier ohne Einfluß auf das Ergebnis, daher eine beliebige.

#### II. Rechnerische Lösung.

Es soll hierbei sogleich der allgemeine Fall des Gleichgewichtszustandes bei mehr als drei an einem Punkte wirkenden Kräften besprochen werden.

Man zerlege jede der wirkenden Kräfte in ihre wagerechte und lotrechte Seitenkraft. Damit der Zustand des Gleichgewichts vorhanden ist, muß sowohl die Mittelkraft aus allen wagerechten Kräften als auch die Mittelkraft aller lotrechten Kräfte gleichzeitig gleich Null sein.

Ein Körper befindet sich daher unter Einwirkung mehrerer auf einen Punkt wirkender Kräfte im Gleichgewicht, wenn

1. die Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null ist,

$$\sum H = 0 \qquad \text{(I)}$$

2. die Summe aller lotrechten Seitenkräfte gleich Null ist,

$$\sum V = 0 \qquad \text{(II)}$$

## C. Kräfte, die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen.

### 1. Die Kraftrichtungen schneiden sich.

Für diesen Fall wird nur das zeichnerische Verfahren besprochen werden, da das rechnerische für den vorliegenden Zweck zu umständlich ist.

#### a) Zusammensetzung.

##### I. Die Schnittpunkte der Kraftlinien fallen auf die zur Verfügung stehende Zeichenebene.

##### A. Es wirken zwei Kräfte.

Wirken zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ an den verschiedenen Angriffspunkten $A$ bzw. $B$ eines Körpers (Abb. 39a), so bringt man die Kraftlinien zum Schnitt und verschiebt die Kräfte in ihren Richtungen nach dem Schnittpunkt $C$, welcher jetzt den gemeinschaftlichen Angriffspunkt bildet (Abb. 39b). Man setzt hier die Kräfte zur Mittelkraft entweder mit Hilfe des Kräfteparallelogramms oder des Kräftedreiecks zusammen nach den unter II. B. 1. a. I. S. 14 angegebenen Verfahren.

Beispiel. Durch eine Strebe werde eine Kraft $S = 4000$ kg auf einen Pfosten, der eine Last $P = 8000$ kg aufzunehmen hat, in der in Abb. 40 dargestellten Weise übertragen. Gesucht werde die Mittelkraft $R$.

Bemerkung: Die Kräfte sollen in der Längsachse des betreffenden Bauteils (Mittellinie, Schwerachse) wirken.

Lösung 1. Man verschiebt $S$ und $P$ in der Kraftrichtung nach dem gemeinsamen Angriffspunkt $A$, wählt einen Kräftemaßstab (z. B. 1 cm = 2000 kg), zeichnet das Kräfteparallelogramm und bestimmt die Mittelkraft $AE$. Man erhält hier $AE = 5{,}32$ cm, demnach $R = 5{,}32 \cdot 2000$ kg $= 10640$ kg. (Abb. 40.)

Lösung 2. Man bestimmt die Mittelkraft unter Benutzung des Kräftedreiecks in einer besonderen Nebenfigur (Abb. 41b) und verschiebt $R$ an den Schnittpunkt 0 (Abb. 41a), wodurch man die Lage der Mittelkraft erhält.

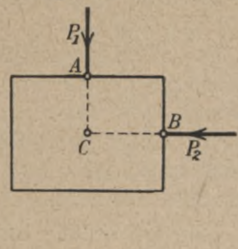



Abb. 39a.

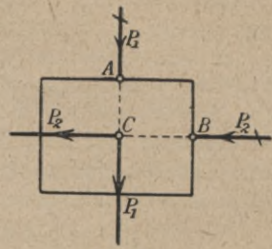



Abb. 39b.

M. d. K.
1 cm = 200 kg

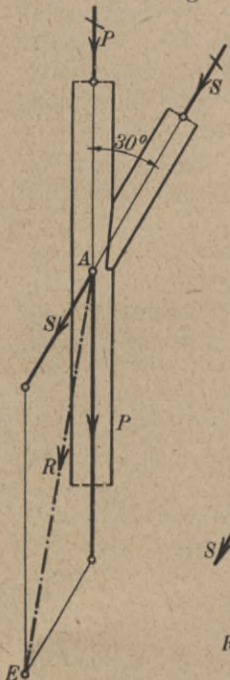



Abb. 40.

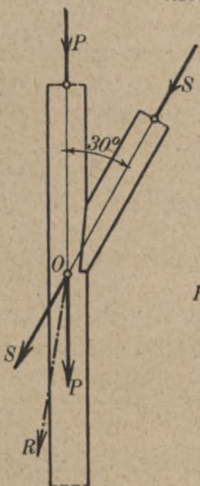



Abb. 41 a.

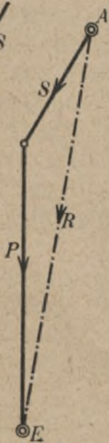



Abb. 41 b.

Aufgabe 9: Ein Widerlager einer Sprengwerksbrücke soll den Schub von 1 m voneinander entfernten Streben aufnehmen. Jede Strebe überträgt 3200 kg. Die Mittelkraft aus dem Drucke einer Strebe und dem Widerlagereigengewichte, das für den laufenden Meter (lfd. m) Tiefe 15000 kg beträgt und 75 cm von der Rückwand entfernt angreifen soll (Abb. 42), ist zeichnerisch zu bestimmen.

Aufgabe 10: Ein Mauerpfeiler hat den Kämpferdruck zweier Gewölbehälften aufzunehmen. Die Mittelkraft aus beiden Kämpferdrucken ist zeichnerisch zu bestimmen.

$K_1 = 5860$ kg; $K_2 = 3480$ kg. Näh. s. Abb. 43.

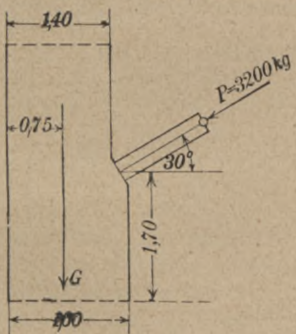



Abb. 42.

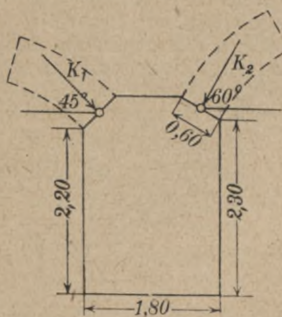



Abb. 43.

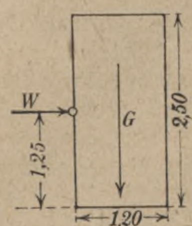



Abb. 44.

Aufgabe 11: Auf eine 2,50 m hohe Mauer aus Ziegelsteinen von nebenstehendem Querschnitt wirke eine wagerechte Windkraft von 250 kg/qm ein: Das Raumgewicht des Ziegelmauerwerks betrage 1800 kg/cbm. Die Mauertiefe sei 1,0 m. Die Mittelkraft aus der Windkraft und dem Mauergewicht ist zeichnerisch und rechnerisch zu bestimmen. (Abb. 44.)

### B. Es wirken beliebig viele Kräfte.

Greifen beliebig viele Kräfte an einem Körper an, so wird das unter A angegebene Verfahren mehrfach wiederholt.

Man bringt zwei der gegebenen Kräfte zum Schnitt und setzt sie zu einer Mittelkraft zusammen; diese bringt man mit einer dritten gegebenen Kraft zum Schnitt und bildet aus beiden eine neue Mittelkraft. Dies Verfahren setzt man so lange fort, bis alle Kräfte zu einer Gesamtmittelkraft vereinigt sind. Die Zusammensetzung kann entweder durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms oder des Kräftedreiecks geschehen.

1. Kräfteparallelogramm. Die Größe, die Richtung, der Sinn und die Lage der Einzelmittelkräfte sowie der Gesamtmittelkraft werden unmittelbar in der gegebenen Kräftegruppe erhalten.

Nachteil: Das Verfahren ist umständlich und unübersichtlich.

2. Kräftedreieck. Man erhält die einzelnen Mittelkräfte in einer besonderen Zeichnung durch Herstellung des jedesmaligen Kräftedreiecks; die Kräftedreiecke reihen sich in der Nebenfigur zu einem Kräftevieleck aneinander. Aus diesem können sowohl Größe, Richtung und Sinn jeder Zwischenmittelkraft als auch der Gesamtmittelkraft entnommen werden. Die Angriffspunkte findet man in der Hauptfigur der Kräftegruppe durch Feststellung der Schnittpunkte der entsprechenden gegebenen Kräfte mit den Zwischenmittelkräften.

Man zieht hierbei durch den Schnittpunkt der vorher gefundenen Mittelkraft mit der neuangereihten Kraft eine Gleichlaufende zu der im Kräftevieleck aus beiden gefundenen neuen Mittelkraft und bringt auf dieser Gleichlaufenden den Kraftsinn der Mittelkraft an. Die Mittelkräfte sind so zu zeichnen, daß ihre Pfeile sich folgen.

Die Reihenfolge, in welcher die Zusammensetzung der gegebenen Kräfte stattfindet, ist beliebig.

Das Kräftevieleck kann demnach in gleicher Weise hergestellt werden, als wenn sämtliche Kräfte in einem Punkte angriffen. Die Reihenfolge der Kräfte ist so zu wählen, daß die betreffenden Kraftrichtungen sich möglichst unter rechtem Winkel schneiden. Spitzwinklige Schnitte vermeidet man, da sich sonst erhebliche Ungenauigkeiten in der Zeichnung ergeben können.

Es empfiehlt sich aus dem gleichen Grunde daher, bisweilen nicht ein einziges Vieleck zu bilden, sondern zwei oder mehrere, die so zu wählen sind, daß man zum Schluß zwei bzw. mehrere Mittelkräfte erhält, die sich günstig schneiden und zu der gesuchten Gesamtmittelkraft vereinigt werden.

Den Linienzug der aufeinanderfolgenden Mittelkräfte nennt man Mittelkraftsvieleck (Resultantenpolygon). Er wird häufig bei der statischen Untersuchung von Bauteilen, insbesondere von Steinkonstruktionen gebraucht, z. B. bei Gewölben, Stützmauern, Widerlagern, Schornsteinen usf., und dann meist als Drucklinie bezeichnet.

Beispiel. Auf eine Ufermauer wirken in der in Abb. 45 angegebenen Weise die Erddrücke $E_1$ und $E_2$ sowie die Eigengewichte des Mauerstücks $KLMN = G_1$ und des Teils $MNXY = G_2$, ferner der Wasserdruck $W$.

Es soll bestimmt werden 1. die Mittelkraft der auf den oberen Teil $KLMN$ wirkenden Kräfte und ihr Abstand von der Mitte $D$ der Fuge $MN$.

2. Die Gesamtmittelkraft aller auf den Mauerkörper $KLXY$ wirkenden Kräfte und ihr Abstand von der Mitte $G$ der Fuge $XY$. M. d. L. 1 : 100.

Die Untersuchung eines Mauerkörpers wird in der Regel auf 1 m Tiefe geführt. Das Gewicht eines cbm Mauerwerks werde zu 2000 kg angenommen.

Das Eigengewicht des Teiles $KLMN$ beträgt:

$$G_1 = 1{,}3 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 2000 = 5200 \text{ kg}.$$

Das Eigengewicht des Teiles $MNXY$:

$$G_2 = 1{,}0 \cdot \frac{1{,}3 + 1{,}80}{2} \cdot 3{,}0 \cdot 2000 = 9000 \text{ kg}.$$

Fernerhin soll gefunden sein $E_1 = 1200$ kg; $E_2 = 4700$ kg und $W = 2000$ kg. Man wählt einen Kräftemaßstab, z. B. 1 cm $= 3000$ kg, und trägt in einer Nebenfigur (Kräftefigur) $E_1 = \frac{1200}{3000} = 0{,}4$ cm von $A$ aus auf. Im Endpunkte von $E_1$ fügt man $G_1 = \frac{5200}{3000} = 1{,}73$ cm im gleichen Sinn an. Verbindet man den Anfangspunkt $A$ mit dem Endpunkt von $G_1$, so erhält man die Mittelkraft $R_1$ der Größe, Richtung nnd dem Sinne nach. Man mißt $R_1 = 1{,}96$ cm und erhält so $R_1 = 1{,}96 \cdot 2000 = 3920$ kg.

Um $R_1$ der Lage nach zu finden, bringt man $E_1$ mit $G_1$ in der Hauptfigur Abb. 45a zum Schnitt und zieht durch den Schnittpunkt eine Gleichlaufende zu $R_1$, welche die Fuge $MN$ im Punkte $C$ trifft. Man mißt die Entfernung von $C$ bis zur Fugenmitte $D$ und findet die Strecke $CD = 5$ cm.

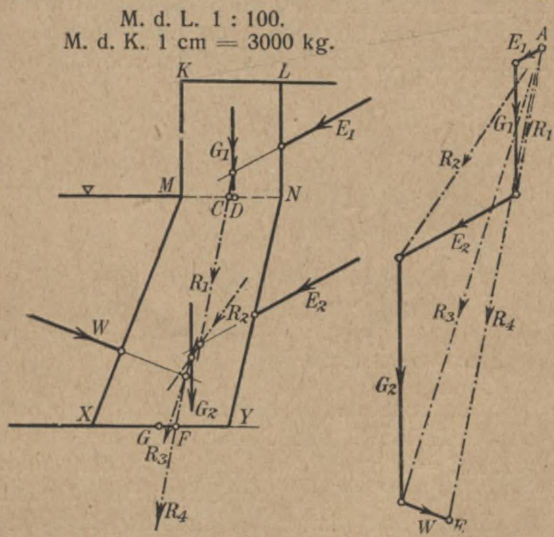



Abb. 45a. Hauptfigur. Abb. 45b. Nebenfigur.

Die Gesamtmittelkraft aller auf die Ufermauer wirkenden Kräfte erhält man, indem man in gleicher Weise wie vorher die Mittelkraft $R_2$ aus $R_1$ und $E_2$ in der Kräftefigur (Abb. 45b) bestimmt und sie nach dem Schnittpunkt von $R_1$ und $E_2$ gleichlaufend verschiebt (Abb. 45a). Man sucht darauf in der Kräftefigur zu $R_2$ und $G_2$ die Mittelkraft $R_3$ und legt ihre Lage in der Hauptfigur durch Ziehen einer Gleichlaufenden zu $R_3$ durch den Schnittpunkt von $G_2$ und $R_2$ fest. Zum Schluß setzt man noch $R_3$ mit dem Wasserdruck $W$ in der Kräftefigur zusammen und erhält so die Gesamtmittelkraft $R_4$ durch die Strecke $AE$ nach Größe, Richtung und Sinn. Die Lage von $R_4$ erhält man durch Verschieben nach dem Schnittpunkt von $R_2$ und $W$.

Die Fuge $XY$ wird im Punkte $F$ geschnitten, der Abstand von der Mitte $G$ der Fuge beträgt $FG = 20$ cm.

$AE$ ist zu 6,31 cm gemessen worden, die Gesamtmittelkraft $R_4$ also $6{,}31 \cdot 3000 = 18930$ kg.

### II. Die Kräfte schneiden sich nicht auf der Zeichenebene.

Es kommt hier lediglich das zeichnerische Verfahren in Betracht. Die unter I angegebenen Lösungen sind nicht ohne weiteres benutzbar. Der Fall II kann jedoch durch Anwendung eines Hilfsverfahrens auf den früheren zurückgeführt werden, wobei der Gedanke zugrunde liegt, die gegebenen Kräfte durch zwei andere Kräfte mit gleicher Wirkung, aber sich günstig schneidenden Richtungen zu ersetzen.

### A. Es wirken nur zwei Kräfte.

Man zerlege $P_1$ in einer besonderen Kräftefigur in zwei zunächst beliebig angenommene Seitenkräfte $S_0$ und $S_1$ (Abb. 46b); ebenso zerlege man $P_2$ in zwei Seitenkräfte, von denen die eine $S_1'$ ebenso groß gemacht wird wie $S_1$, jedoch entgegengesetzten Sinn erhält. Durch diese Annahme ist die zweite Seitenkraft $S_2$ ebenfalls bestimmt. (Abb. 46c.)

Man überträgt nun die Richtungen der Seitenkräfte der Kraft $P_1$ nach dem beliebig auf $P_1$ angenommenen Punkt I (Abb. 46a) und trägt den entsprechenden Sinn der Kräfte ein, bestimmt den Schnittpunkt II der Kraft $S_1$ mit $P_2$ und überträgt die Richtungen und den Sinn der Seitenkräfte von $P_2$ nach dem Schnittpunkt II. Die Seitenkräfte $S_1$ von $P_1$ und $S_1'$ von $P_2$ heben sich auf, da sie gleiche Richtung und Größe, aber entgegengesetzten Sinn haben. Da die Kraft $P_1$ durch $S_0$ und $S_1$ und die Kraft $P_2$ durch $S_1'$ und $S_2$ ersetzt wurde, so verbleiben nach Wegfall von $S_1$ und $S_1'$ nur noch die Seitenkräfte $S_0$ und $S_2$ der gegebenen Kräfte $P_1$ und $P_2$ als einzig wirkende Kräfte.

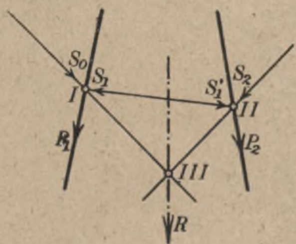


Abb. 46a. Hauptfigur.

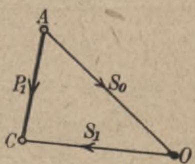


Abb. 46b.

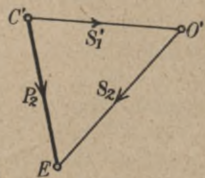


Abb. 46c.

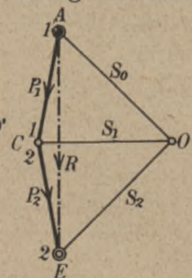


Abb. 47.

Schiebt man die beiden Kräftedreiecke in Abb. 46b und 46c so aneinander, daß die Kräfte $S_1$ und $S_1'$ sich decken (Abb. 47) und bildet man die Mittelkraft $AE = R$ von $P_1$ und $P_2$, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß $R$ auch zugleich die Mittelkraft der Seitenkräfte $S_0$ und $S_2$ (vgl. Kräftedreieck $AOE$) ist. Bringt man daher die Ersatzkräfte $S_0$ und $S_2$ in der Hauptfigur zum Schnitt (III), so findet man die Lage ihrer Mittelkraft $R$ und damit auch der Mittelkraft von $P_1$ und $P_2$, durch Ziehen einer Gleichlaufenden zu $R$ durch den Schnittpunkt III.

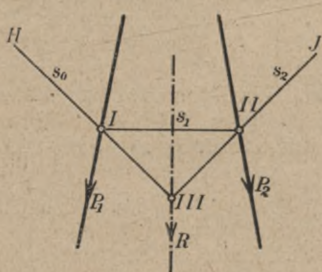


Abb. 48a.

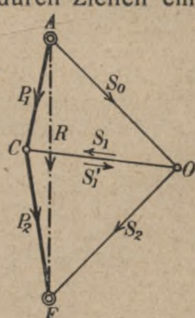


Abb. 48b.

Hiernach kann folgendes allgemeine Verfahren in Anwendung gelangen.

Man bestimmt in einem Kräftedreieck die Mittelkraft $R$ von $P_1$ und $P_2$ (Abb. 48b), nimmt einen beliebigen Punkt O, welcher Pol genannt wird, an, verbindet den Pol mit sämtlichen Endpunkten der gegebenen Kräfte und erhält so die Strecken $AO = S_0$, $CO = S_1$ und $EO = S_2$. Diese Strahlen, welche die Seitenkräfte der gegebenen Kräfte darstellen, heißen Polstrahlen, die gesamte Kraft die Polfigur.

Durch einen beliebig auf $P_1$ angenommenen Punkt I zieht man die Gleichlaufenden $s_0$ und $s_1$ zu den Polstrahlen $S_0$ und $S_1$ (Abb. 48a), verlängert $s_1$ bis zum Schnittpunkt II mit $P_2$ und zieht durch II eine Gleichlaufende $s_2$ zu $S_2$. Man bringt nun die beiden (äußeren) Strahlen $s_0$ und $s_2$ zum Schnitt III, so muß durch diesen Schnittpunkt die Mittelkraft $R$ gehen. Ihre Lage erhält man durch Ziehen einer Gleichlaufenden zur Mittelkraft $AE$ im Kräftedreieck durch Punkt III.

Den Linienzug $s_0 s_1 s_2$ in der Hauptfigur (Abb. 48a) nennt man Seilvieleck, Seileck (Seilpolygon), Seilzug oder Seillinie, da ein in den Punkten $H$ und $J$ befestigt gedachtes Seil, an welchem die Lasten $P_1$ und $P_2$ in der angegebenen Weise in den Knotenpunkten I und II wirken, die Form dieses gebrochenen Linienzuges annehmen würde. Die Seiten $s_0 s_1 s_2$ heißen Seilstrahlen; $s_0$ und $s_2$ heißen die äußeren Seilstrahlen, da sie im Krafteck die Mittelkraft einschließen. Die Wahl des Punktes 0 ist beliebig. Bei Wahl eines anderen Pols $0_1$ erhält man zwar ein anderes Seileck, der neue Schnittpunkt III der beiden äußeren Seilstrahlen wird jedoch ebenso ein Punkt der Mittelkraftsrichtung, wie es der frühere war (Abb. 49a/b). Alle Schnittpunkte der äußeren Seilseiten liegen auf einer Geraden, welche die Lage der Mittelkraft angibt.

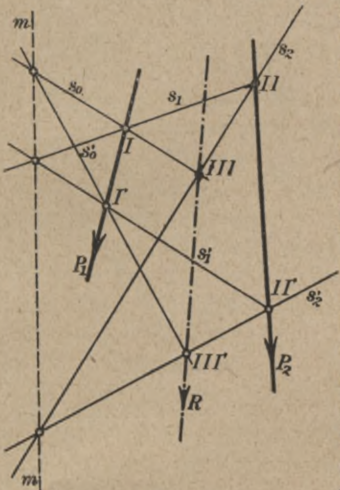


Abb. 49a.

Abb. 49b.

Diese Notwendigkeit kann zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung benutzt werden. Stellt sich heraus, daß beim Zeichnen eines zweiten Seilecks der neue Schnittpunkt nicht auf die unter Benutzung des ersten Schnittpunkts eingezeichnete Richtung von $R$ fällt, so ist ein Zeichenfehler vorhanden.

Man beachte auch folgenden Satz, welcher eine Prüfung gestattet.

Werden für denselben Kräftezug zwei Seilzüge mit zwei verschiedenen Polen gezeichnet, so liegen die Schnittpunkte der verlängerten gleichliegenden Seiten auf einer Geraden ($m$—$m$), welche gleichlaufend zu der Verbindungslinie der beiden Pole $0 0_1$ ist.

Den Pol wähle man zweckmäßig so, daß die beiden äußeren Seilstrahlen sich möglichst unter einem rechten Winkel schneiden.

Würden die Kräfte $P_1$ und $P_2$ entgegengesetzten Sinn wie in Abb. 48 haben, so müßten die Vielecksseiten aus starren Stäben bestehen, um diesen Kräften widerstehen zu können. Man erhält dann ein Druckvieleck oder eine Drucklinie.

Die Benutzung des Seilecks ist auch im Falle I notwendig, sobald die Schnitte zweier Kräfte zu flach werden oder sonstwie unbequem zu liegen kommen.

## B. Es wirken mehr als zwei Kräfte.

Das Verfahren bleibt grundsätzlich das gleiche wie bei $A$.

Soll von 4 Kräften $P_1, P_2, P_3, P_4$ die Mittelkraft bestimmt werden, so zerlege man die Kraft $P_1$ in ihre Seitenkräfte $S_0$ und $S_1$, ferner ebenso $P_2$ in $S_1'$

und $S_2$; $P_3$ in $S_2'$ und $S_3$; $P_4$ in $S_3'$ und $S_4$ (Abb. 50b), wobei $S_1 = S_1'$, $S_2 = S_2'$, $S_3 = S_3'$ zu machen ist.

Überträgt man die Seitenkräfte wie oben in die Kräftegruppe (Hauptfigur Abb. 50a), z. B. mit $S_0$ und dem Schnittpunkt I beginnend, so schneiden sich $S_0$ und $S_1$ im Punkte I auf $P_1$, $S_1'$ und $S_2$ im Punkte II auf $P_2$, $S_2'$ und $S_3$ in III auf $P_3$, $S_3'$ und $S_4$ in IV auf $P_4$.

$P_1$ wird ersetzt durch $S_0$ und $S_1$, $P_2$ durch $S_1'$ und $S_2$, $P_3$ durch $S_2'$ und $S_3$ und $P_4$ durch $S_3'$ und $S_4$. Die Kräfte $S_1$ und $S_1'$, ferner $S_2$ und $S_2'$ und $S_3$

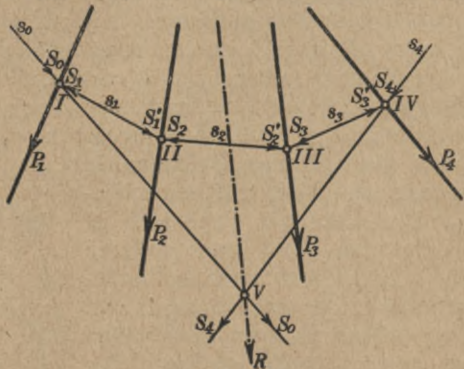


Abb. 50a.

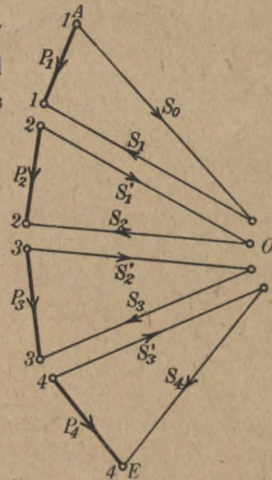


Abb. 50b.

und $S_3'$ heben sich gegenseitig auf. Es bleiben von den Seitenkräften nur noch $S_0$ und $S_4$ übrig, welche demnach die gleiche Wirkung wie $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ ausüben. Die gesuchte Mittelkraft muß daher durch den Schnittpunkt von $S_0$ und $S_4$ gehen (Abb. 50a). Schiebt man die einzelnen Kräftedreiecke so aneinander, daß die einander gleichen Seitenkräfte $S_1$ und $S_1'$, $S_2$ und $S_2'$, $S_3$ und $S_3'$ sich decken (Abb. 51), so findet man, daß die Mittelkraft $AE = R$ von $P_1 P_2 P_3$ und $P_4$ genau die gleiche ist wie die aus den Seitenkräften $S_0$ und $S_4$.

Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren.

Man trägt die gegebenen Kräfte in beliebiger Reihenfolge zu einem Kräftevieleck aneinander und bestimmt die Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft $R = AE$. Um die Lage von $R$ zu erhalten, wählt man einen beliebigen Pol 0, zieht die Polstrahlen $S_0, S_1, S_2, S_3$ und $S_4$ und überträgt ihre Richtungen sinngemäß wie bei $A$ in die Hauptfigur. Es entsteht dann ein Linienzug $s_0 s_1 s_2 s_3 s_4$, das Seilvieleck. Bringt man nun die beiden äußeren Seilstrahlen zum Schnitt (V), so muß durch diesen Punkt die Mittelkraft hindurchgehen. Durch gleichlaufende Verschiebung der Mittelkraft $R$ aus der Polfigur nach dem letztgenannten Punkt (V) erhält man die genaue Lage von $R$ in der Kräftegruppe (Abb. 50a u. 51).

Es lassen sich für ein und dasselbe Kräftevieleck unendlich viele Seilecke durch verschiedene Wahl des Poles 0 und auch durch verschiedene Annahme des Anfangspunktes I zeichnen. Die am Schluß von A. S. 23 angegebenen allgemeinen Beziehungen haben auch hier Geltung.

Zur Vermeidung von Versehen beachte man folgendes.

Sowohl die Zahl der Polstrahlen als auch die der Seilstrahlen ist um 1 größer als die Zahl der Kräfte.

Je drei Kräfte, welche in der Polfigur ein Dreieck bilden, schneiden sich in der Hauptfigur in einem Punkte.

Ein Polstrahl, der nach dem Zusammenhangspunkt zweier Kräfte in der Polfigur geht, liegt als Seilstrahl zwischen den beiden Kräften. So geht z. B. der Polstrahl $S_2$ nach dem Zusammenhangspunkt 2, 3 der Kräfte $P_2$ und $P_3$ (Abb. 51); in der Kräftegruppe entspricht ihm der Seilstrahl $s_2$, welcher zwischen die Kräfte $P_2$ und $P_3$ zu liegen kommt.

Bei Durchführung der hier angenommenen Bezifferung ist ein Versehen fast ausgeschlossen, vor allem wird das Überspringen einer Kraft vermieden, das besonders bei sich schneidenden Kräften leicht vorkommen kann.

Benutzt man das Seileck zu irgendeiner Aufgabenlösung in der Praxis, so werden die Pfeile der Seitenkräfte in der Regel fortgelassen.

Der erste und letzte Polstrahl der Polfigur (bzw. die äußeren Seiten des Seilecks) sind die Seitenkräfte der Mittelkraft aller Kräfte, welche durch sie umschlossen werden.

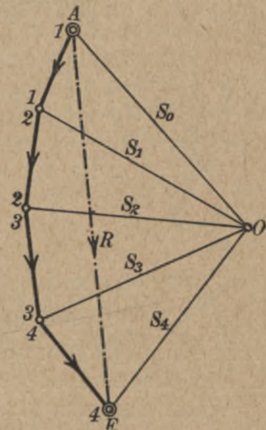



Abb. 51.

Ebenso können zwei beliebige andere Polstrahlen als Seitenkräfte der Mittelkraft derjenigen Kräfte angesehen werden, welche von ihnen umschlossen werden. Man findet die Lage dieser Mittelkraft dadurch, daß man die zu den beiden beliebigen einschließenden Polstrahlen gehörenden Seilstrahlen des Seilecks zum Schnitt bringt und durch diesen Punkt eine Gleichlaufende zu der Teilmittelkraft zieht. Es sind z. B. in Abb. 52b die Polstrahlen $S_1$ und $S_3$ die Seitenkräfte der Mittelkraft $R_{2,3}$ der Kräfte $P_2$ und $P_3$. Man findet die Lage von $R_{2,3}$ dadurch, daß man den Seilstrahl $s_1$ und $s_3$ in Abb. 52a verlängert und durch deren Schnittpunkt V eine Gleichlaufende zu $R_{2,3}$ zieht.

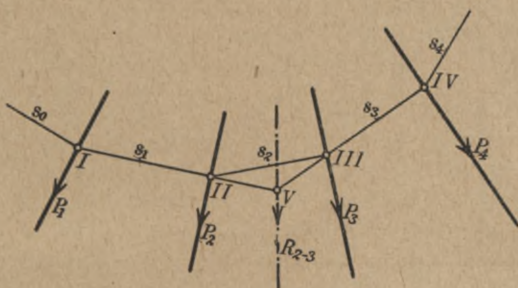



Abb. 52a.

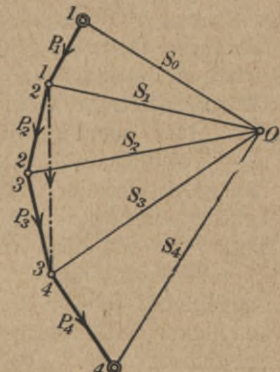



Abb. 52b.

Verlängert man also zwei beliebige Seiten des Seilecks bis zu ihrem Schnittpunkt, so geht die Mittelkraft aller der auf die zwischenliegenden Knotenpunkte wirkenden Kräfte durch diesen. Die Richtung, Größe und Sinn der Mittelkraft wird durch die Schlußlinie des aus den eingeschlossenen Kräften gebildeten Kraftecks bestimmt.

Ein besonderer Fall des Seilvielecks tritt dann ein, wenn der Anfangspunkt der ersten Kraft als Pol gewählt wird.

Bildet man z. B. aus den wirkenden Kräften $P_1$ $P_2$ und $P_3$ das Krafteviel-eck und läßt den Pol 0 mit dem Anfangspunkt $A$ zusammenfallen (Abb. 53b), so wird der erste Polstrahl $S_0 = 0$, die erste Seilecksseite ist also ein beliebig zu wählender Punkt auf der Richtungslinie von $P_1$; der zweite Seilstrahl $s_1$ fällt mit $P_1$ zusammen, der dritte $s_2$ geht demnach durch den Schnittpunkt von $P_1$ und $P_2$, ist gleichlaufend zu $S_2$ ($= AB$) und liegt zwischen $P_2$ und $P_3$; der letzte Strahl $s_3$ ist gleichlaufend zu $S_3$ ($= AE$).

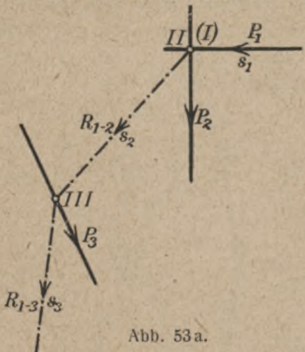


Abb. 53a.


Abb. 53b.

Da $AB = S_2$ gleichzeitig die Mittelkraft aus $P_1$ und $P_2$, also $= R_{1,2}$ ist und $AE = S_3$ die Mittelkraft aus $P_1$, $P_2$ und $P_3$, also $= R_{1-3}$, so gibt der Seilstrahl $s_2$ die Mittelkraft $R_{1,2}$ und $s_3$ die Mittelkraft $R_{1-3}$ der Lage nach an.

Wenn man also für eine gegebene Kräftegruppe den Pol in den Anfangspunkt $A$ des Kräftezugs legt, so bildet jede Seite des Seilecks die Mittelkraft aus allen dieser Seite vorangehenden Kräften; die letzte Seite des Seilecks ist demnach die Mittelkraft aller gegebenen Kräfte. Man bezeichnet diese Art des Seilecks als Mittelkraftslinie. Sie wird bei Untersuchung von Gewölben u. dgl. angewendet (s. Teil III b).

Aufgabe 12: Ein Mauerpfeiler werde, wie in Abb. 54a angegeben, durch 5 Kräfte $K_1$, $P_1$, $P_2$, $K_2$ und $G$ belastet. Es soll die Mittelkraft $R$ und ihr Durchgangspunkt durch die Fuge $MN$ bestimmt werden. Der Kämpferdruck $K_1$ des linksseitigen Gewölbes betrage 4500 kg, der des rechtsseitigen $K_2 = 7500$ kg, die durch Auflagerung zweier Träger hervorgebrachten Kräfte sind $P_1 = 6000$ kg und $P_2 = 8000$ kg. Das Eigengewicht des 0,64 m starken Mauerpfeilers berechnet sich zu

$G = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}64 \cdot 1600$
$= \text{rd. } 8200$ kg . 1 cbm

Mauerwerk wiegt 1600 kg.

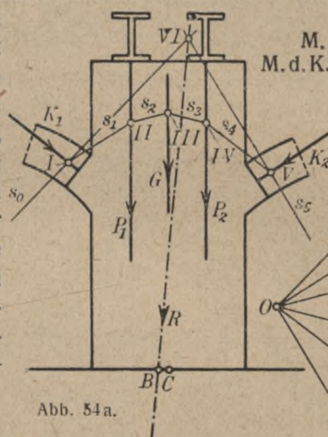


Abb. 54a.

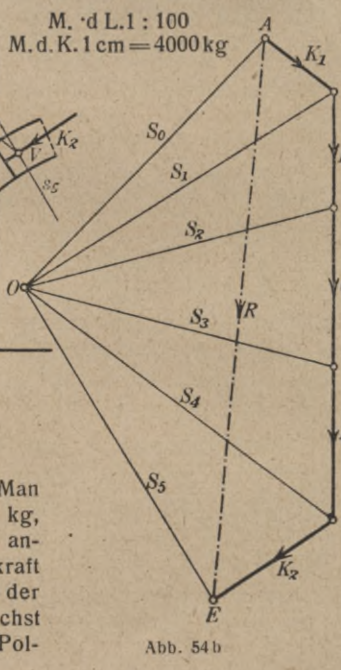


Abb. 54b

Lösung unter Anwendung des Seilecks. Man wählt einen Kräftemaßstab, z. B. hier 1 cm = 4000 kg, trägt die Kräfte in der Reihenfolge $K_1, P_1, G, P_2, K_2$ aneinander (Abb 54b) und bestimmt die Mittelkraft $AE = R$. Nun nimmt man den Pol 0 derart an, daß der erste und der letzte sich ergebende Seilstrahl möglichst einen rechten Winkel bilden, zieht die sämtlichen Polstrahlen $S_0$ bis $S_5$, überträgt sie in die Hauptfigur, indem man durch einen beliebig gewählten Punkt *I* auf $K_1$ eine Gleichlaufende $s_0$ zu $S_0$ und eine solche $s_1$ zu $S_1$ zieht. Man verlängert $s_1$ bis zum Schnittpunkt *II* mit der Kraft $P_1$, zieht durch diesen Punkt eine Gleichlaufende $s_2$ zu $S_2$, welche bis zum Schnittpunkt *III* mit *G* verlängert wird usf. Durch Verlängerung der äußeren Seilstrahlen $s_0$ und $s_5$ erhält man den Schnittpunkt *VI*, durch welchen die Mittelkraft $AE = R$ sämtlicher Kräfte gehen muß. Um ihre Lage in der Hauptfigur zu finden, wird zu *R* eine Gleichlaufende durch *VI* gezogen und dieselbe so weit verlängert, bis die Fuge *MN* im Punkte *B* geschnitten wird. Der Abstand des Punktes *B* vom Fugenmittelpunkt *C* beträgt $CB = 12$ cm. Die Mittelkraft *AE* wird zu 7,32 cm gemessen. Es beträgt $R = 7{,}32 \cdot 4000 =$ rd. 28700 kg.

## b) Zerlegung.

### I. Die Zerlegung in zwei Kräfte.

Eine bekannte Kraft läßt sich nur dann in zwei Seitenkräfte zerlegen, wenn die Richtungen der gesuchten Kräfte mit der Richtung der gegebenen Kräfte bei entsprechender Verlängerung der Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden. Die Lösung ist dann die gleiche wie bei II. B. 1. b. I. S. 13 u. fgd.

Bisweilen ist die Aufgabe zu lösen, eine nach Lage, Größe, Richtung und Sinn bekannte Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wenn von einer der Seitenkräfte die Lage gegeben ist und die zweite durch einen bestimmten Punkt gehen soll.

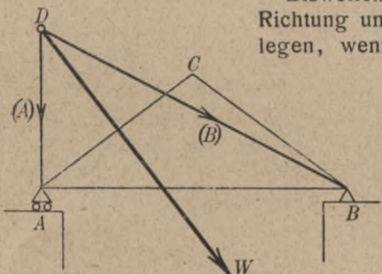


Abb. 55a.

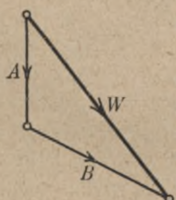


Abb. 55b.

Soll z. B. die in Abb. 55a gegebene Windkraft *W*, welche auf den Dachbinder *ABC* wirkt, in zwei Seitenkräfte *A* und *B*, von denen die durch den Punkt *A* gehende lotrecht gerichtet ist, zerlegt werden, so bestimmt man den Schnittpunkt *D* der Kraft *W* mit der Richtung der Kraft *A* und verbindet *D* mit *B*. Die Gerade *DB* stellt die Richtung und Lage der Kraft *B* dar. Die Größe und den Sinn erhält man im zugehörigen Kräftedreieck. (Abb. 55b.)

### II. Die Zerlegung in drei Kräfte.

Eine Kraft *R* läßt sich nur dann in drei der Lage und Richtung nach gegebene Seitenkräfte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ zerlegen, wenn die gegebenen Richtungen der nach Größe und Sinn unbekannten Seitenkräfte sich nicht in einem Punkte schneiden, und wenn keiner ihrer Schnittpunkte auf der Richtung von *R* liegt.

Aufgabe 13: Die nach Größe, Richtung und Lage in Abb. 56a gegebene Kraft *R* soll nach den gegebenen Richtungen 1, 2 und 3 in die Seitenkräfte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ zerlegt werden.

Lösung: Man bringt zwei der gegebenen Richtungen, z. B. 1 und 2, zum Schnitt (Schnittpunkt *M*), desgl. die dritte Richtung 3 mit *R* (Schnittpunkt *N*) und verbindet die Schnittpunkte *M* und *N* (Abb. 56a).

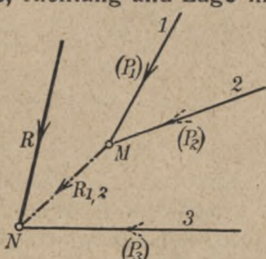


Abb. 56a.

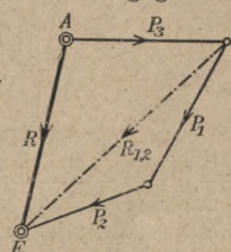


Abb. 56b.

Man zerlegt nun $R$ in $P_3$ und in eine in der Geraden $MN$ wirkende Kraft ($R_{1,2}$), welche die Mittelkraft von $P_1$ und $P_2$ darstellen muß (Abb. 56b). Die Zwischenkraft $R_{1,2}$ zerlegt man weiter nach den Richtungen 1 und 2, wodurch Größe und Sinn der Kräfte $P_1$ und $P_2$ bestimmt werden.

**III. Die Zerlegung in mehrere Kräfte.**

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als drei Seitenkräfte zu zerlegen, ist nicht eindeutig lösbar, also statisch unbestimmt.

## c) Gleichgewicht.

Gleichgewicht ist bei einer Kräftegruppe vorhanden, wenn die Gesamtwirkung der vorhandenen Kräfte gleich Null ist.

Bestimmt man nach C. II. B. zu drei gegebenen Kräften $P_1$, $P_2$ und $P_3$ die Mittelkraft $R_{1-3}$ mittels des Seilecks (Abb. 57a b), so ist ohne weiteres ersichtlich, daß zur Aufhebung der Wirkung von $R_{1-3}$ in der Kräftegruppe eine Kraft $P_4$ hinzuzufügen ist, welche die gleiche Größe, Richtung und Lage, aber entgegengesetzten Sinn haben muß wie $R_{1-3}$. Es wird sodann der Gleichgewichtszustand eintreten.

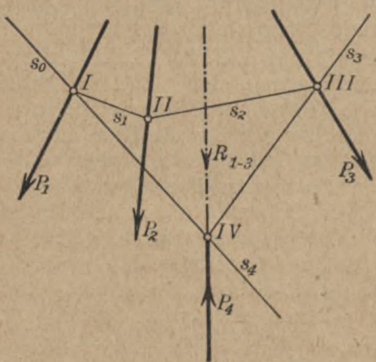



Abb. 57a.

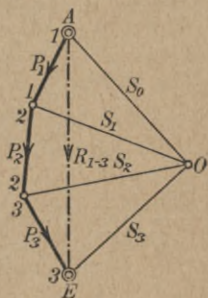



Abb. 57b.

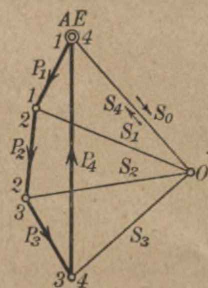



Abb. 58.

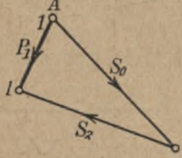



Abb. 59a.

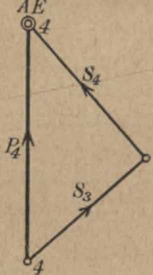



Abb. 59b.

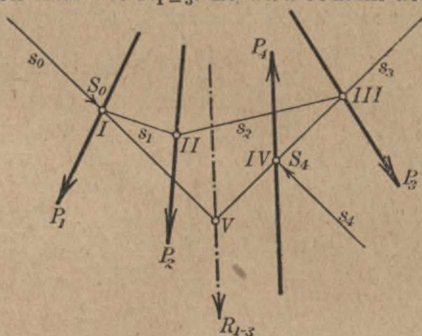



Abb. 60.

Die neue Kraft $P_4$ wird demnach das Kräftevieleck zum Schluß bringen, Anfangspunkt $A$ und Endpunkt $E$ der Mittelkraft $R_{1-4}$ fallen zusammen, die Gesamtmittelkraft ist gleich Null (Abb. 58). Die Polstrahlen $s_0$ und $S_4$ decken sich, haben also gleiche Größe, aber entgegengesetzten Sinn (vgl. Abb. 59a u. b, wo die fraglichen Kräftedreiecke einzeln herausgezeichnet wurden).

Im Seileck fallen die beiden äußeren Seilseiten $s_0$ und $s_4$ in dieselbe Gerade (Abb. 57a), das Seileck bildet demnach eine geschlossene Figur. Die Kräfte $S_0$ und $S_4$, welche nach früherem die Ersatzkräfte für $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ darstellen, heben sich also auf; sie fallen in dieselbe Wirkungsgerade, haben gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn.

Würde $P_4$ in der Kräftegruppe nicht mit der Lage von $R_{1-3}$ zusammenfallen (Abb. 60), so würde der Seilstrahl $s_4$ sich ebenfalls nicht mit $s_0$ decken. Es schließt sich dann wohl das Kräftevieleck, da $P_4 \equiv R_{1-3}$ ist und die Gesamtmittelkraft gleich Null wird, aber die äußersten Seilseiten fallen nicht in dieselbe Gerade; das Seileck schließt sich demnach nicht. Es bleiben zwei gleichgroße gleichlaufende Kräfte $s_0$ und $s_4$ mit entgegengesetztem Sinne übrig.

Zwei gleichgroße, entgegengesetzt wirkende Kräfte gleicher Richtung, welche nicht in dieselbe Gerade fallen, nennt man ein **Kräftepaar.**

Es ergibt sich aus dem Vorhergehenden folgende zeichnerische Bedingung für den Gleichgewichtszustand einer Kräftegruppe.

Beliebig viele, in einer Ebene zerstreut wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sowohl das zugehörige Krafteck als auch das entsprechende Seileck sich schließen.

## d) Anwendungen.

Die bislang entwickelten Gesetze über Kraftzerlegung und Gleichgewicht werden häufig bei Untersuchungen einfacher Baukonstruktionen angewendet. Es ist dann meist die Aufgabe zu lösen, diejenigen von den einzelnen Bauteilen zu leistenden Kräfte (inneren Kräfte s. S. 2) zu bestimmen, welche den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Die auf die betreffenden Bauglieder entfallenden inneren Seitenkräfte sind maßgebend für die Wahl der Abmessungen (Dimensionierung) dieser Bauteile. Zu berücksichtigen ist dabei, daß in jedem Punkte eines Bauteils die äußeren Kräfte sich mit den inneren Kräften im Gleichgewicht halten müssen. Es sind daher besonders diejenigen Punkte von besonderer Wichtigkeit, in welchen die äußeren Kräfte aufgenommen werden.

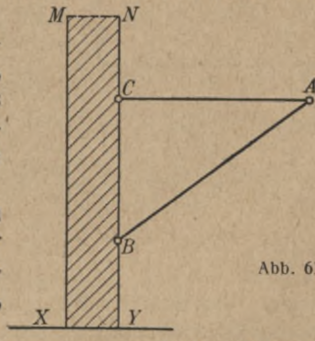


Abb. 61.

Wird irgendein Punkt einer Ebene zur Aufnahme einer Kraft aus baulichen Gründen gewählt, so muß zur Gewährleistung des Ruhezustandes dieser Punkt mit anderen unverrückbar festliegenden Punkten durch Bauteile unbedingt in feste Verbindung gebracht werden.

Für den Zweck der jetzigen Untersuchungen soll lediglich der Fall betrachtet werden, daß nur stabförmig ausgebildete Bauglieder zur Festlegung des Lastaufnahmepunktes (z. B. Punkt $A$, Abb. 61) benutzt werden. Zur Sicherung der unverschieblichen Lage des Punktes $A$ sind z. B. zwei solche Stäbe, $CA$ und $BA$ nötig, deren Endpunkte dem festen, unverschieblichen Körper $MNXY$ angehören.

Die Stäbe denkt man sich in Punkt $A$, welcher Knotenpunkt heißt, durch reibungslose Gelenke (z. B. mittels eines zylindrischen Bolzens) verbunden.

Es entsteht so ein Dreieck $CAB$, welches bekanntlich eine unverschiebliche Figur ist. Die Stäbe $CA$ und $BA$ können nur in der durch die Punkte $A$ und $C$ bzw. $A$ und $B$ festgelegten Richtung Kräfte von $A$ nach $C$ bzw. von $A$ nach $B$ übertragen.

Nimmt nun ein Stab $AC$ (Abb. 62a) in seiner Richtung im Punkte $A$ eine Kraft $P$ auf, so muß zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes nach dem Gesetze, daß Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind, in $C$ eine Kraft auftreten, die ebenfalls gleich $P$ ist, aber entgegengesetzten Sinn zeigt.

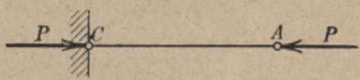


Abb. 62a.

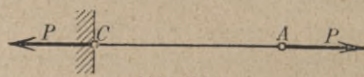


Abb. 62b.

Die in Abb. 62a angenommenen Kräfte haben das Bestreben, die Punkte $C$ und $A$, und auch je zwei beliebige, zwischen $C$ und $A$ liegende Stabquerschnitte, einander zu nähern, also aufeinanderzudrücken. Es entsteht daher in diesem Stabe eine Druckbeanspruchung.

Würde die in $A$ angreifende Kraft $P$ entgegengesetzten Sinn, wie der in Abb. 62a angenommene angibt, haben (Abb. 62b), so wird infolge der Gegenwirkung sich in $C$ auch eine gleiche, aber gegensinnige Kraft $P$ ergeben. Die beiden auftretenden Kräfte $P$ suchen die Punkte $A$ und $C$ und ebenso je zwei beliebig zwischen $A$ und $C$ gewählte Querschnitte des Stabes $AC$ voneinander zu entfernen; der Stab wird auseinandergezogen, es entsteht daher im Stabe eine Zugbeanspruchung.

Die äußere Kraft $P$ pflanzt sich unter Inanspruchnahme des Stabes $AC$ von $A$ aus von einem Querschnitt des Stabes zum nächstliegenden ungeschwächt fort, bis sie bei $C$ durch die Festigkeit des Mauerkörpers eine sie aufhaltende Gegenkraft hervorruft. Sie erzeugt also in jedem Stabquerschnitt des Stabes $AC$ eine ihr gleiche, also innere entgegensinnige Gesamtkraft $P$, welche Spannkraft genannt wird. Diese Spannkräfte können nach obigem entweder Druckkräfte oder Zugkräfte sein.

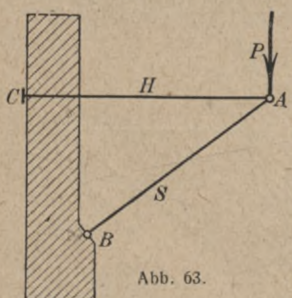


Abb. 63.

Beispiel: Für die in Abb. 63 angegebene Konstruktion (Balkon) sollen die in $H$ und $S$ auftretenden Stabkräfte bestimmt werden.

Hierzu kann folgender Gang eingeschlagen werden:

Die in $A$ wirkende Kraft $P$ (oder, sofern mehrere Kräfte wirken, deren Mittelkraft) ist nach den beiden Stabrichtungen $AC$ und $AB$ in ihre Seitenkräfte zu zerlegen. Die Zerlegung erfolgte mittels des Kräftedreiecks nach S. 13.

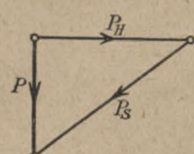


Abb. 64.

In Abb. 64 sind die beiden Seitenkräfte von $P$ nämlich $P_H$ und $P_S$, welche die Kraft $P$ ersetzen, bestimmt worden. Die Seitenkraft $P_H$ wird unter Hinweis auf Abb. 62a in $AC$ eine Zugkraft $H$, die Seitenkraft $P_S$ nach Abb. 62b eine Druckkraft $S$ hervorbringen.

In Zukunft soll jedoch die Lösung stets unter Beachtung folgender Gesichtspunkte vor sich gehen:

Am Punkt $A$ muß Gleichgewicht herrschen, deshalb löse man den Punkt durch einen kreisförmig geführten Schnitt heraus (Abb. 65a) und zeichne ihn besonders auf (Abb. 65b). Die wirkende äußere Kraft $P$ (oder bei mehreren die Mittelkraft $R$)

wird durch ihre Seitenkräfte $P_H$ und $P_S$ ersetzt, deren Größe und Sinn im Kräftedreieck (Abb. 64) bestimmt wird. Durch den geführten Schnitt wird der Zusammenhang bei $D$ und $E$ gelöst, es kann also die Übertragung von $P_H$ im Punkt $D$ nach dem festen Punkt $C$ nicht mehr erfolgen. Um den Gleichgewichtszustand herzustellen, muß daher in Richtung des Stabes $AC$ eine Kraft $H$, welche gleich $P_H$ ist, aber entgegengesetzten Sinn hat, angebracht werden; ebenso ist in Richtung von $AB$ aus den gleichen Gründen eine Kraft $S$ nötig, welche gleich $P_S$ ist, jedoch entgegengesetzten Sinn besitzt (Abb. 65c).

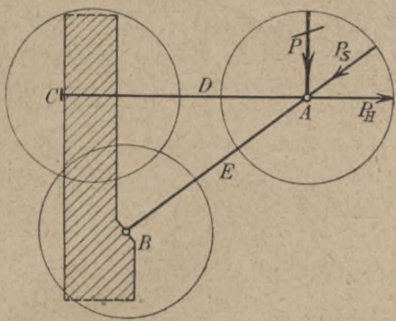


Abb. 65a.

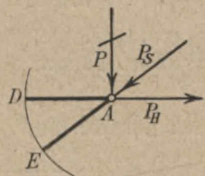


Abb. 65b.

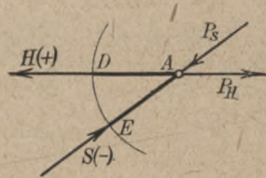


Abb. 65c.

Denken wir uns den Punkt $A$ festgehalten, so finden wir, daß $H$ an dem Stabstumpfe $AD$ ziehend wirkt, während $S$ gegen $EA$, also auf $A$ drückt. $S$ und $H$ geben nun die Wirkungen der inneren Kräfte an, welche bei nicht gelöstem Zusammenhang an der untersuchten Stelle ausgeübt werden, stellen also die im Stab $AC$ bzw. in $AB$ auftretende Spannkraft dar.

**Regel: Ist der Sinn der inneren Kraft dem Knotenpunkt zugewendet, so ist die Stabkraft eine Druckkraft, ist ihr Sinn vom Knotenpunkt weggerichtet, so ist sie eine Zugkraft.**

Da die Stabkräfte $H$ und $S$ im Punkt $A$ der Kraft $P$ das Gleichgewicht halten, kann nun auch sofort unmittelbar durch ein Kräftedreieck ihre Größe und ihr Sinn bestimmt werden, wobei folgendermaßen vorgegangen wird:

Man führt einen Schnitt zur Loslösung des Knotens von dem übrigen Baukörper, zeichnet den Knoten heraus, bringt die äußeren Kräfte an, bestimmt nach obigem diejenigen Kräfte $H$ und $S$, welche der Kraft $P$ das Gleichgewicht halten (Abb. 66a), überträgt den Sinn dieser Gleichgewichtskräfte an die Stabstümpfe (Abb. 66b). Unter Beachtung der oben erwähnten Regel stellt man dann fest, ob die Stabkraft eine Zug- oder Druckkraft ist. Man findet hier, daß $H$ eine Zugkraft und $S$ eine Druckkraft darstellt.

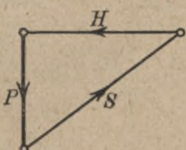


Abb. 66a.

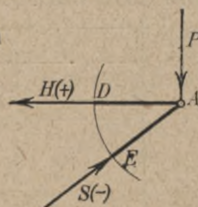


Abb. 66b.

Wirken im Punkte $A$ mehrere äußere Kräfte, so ersetzt man sie durch ihre Mittelkraft $R$ und verfährt dann unter Benutzung des Kräftevielecks in genau gleicher Weise wie oben angegeben.

Mehr als zwei Stäbe mit unbekannten Stabkräften dürfen naturgemäß an einem Knoten nicht angreifen, da sonst die Aufgabe statisch unbestimmt sein würde.

Wird Punkt $C$ herausgeschnitten, so ist die gefundene Stabkraft $H$ als Zugkraft an dem Stabstumpfe anzubringen. Der Stabkraft $H$ muß durch eine Gegenkraft das Gleichgewicht gehalten werden. Dieser Forderung wird dadurch Rechnung getragen, daß bei $C$ eine entsprechend große Ankerplatte (Abb. 67) angenommen wird, welche auf das Mauerwerk drückt und einen Gegendruck $H_1 = H$ hervorruft.

Wird Punkt $B$ betrachtet, so wirkt an dem Stumpfe die Druckkraft $S$, welche nach $B$ verschoben und daselbst in eine lotrechte und wagerechte Seitenkraft $S_1$

und $S_h$ (Auflagerkräfte) zerlegt werden kann (Abb. 68a/b). Diesen Seitenkräften wird durch gleiche, aber entgegengesetzt wirkende, von dem stützenden Baukörper

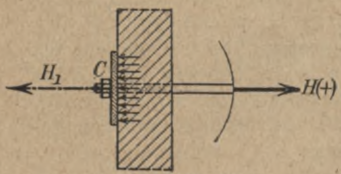


Abb. 67.

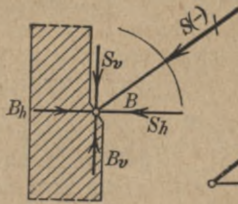


Abb. 68a.

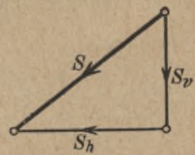


Abb. 68b.

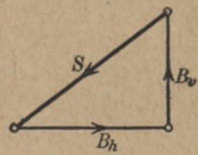


Abb. 68c.

zu leistende Kräfte (Auflagerwiderstände, Stützenkräfte, Stützenwiderstände) das Gleichgewicht gehalten. Es treten sonach die Auflagerwiderstände $B_h$ und $B_v$ auf (Abb. 68a u. c).

## 2. Die Kräfte sind gleichlaufend.

### a) Zusammensetzung.

Da gleichlaufende Kräfte als Kräfte angesehen werden können, deren Schnittpunkt in unendlich weiter Entfernung liegt, so kann die Zusammensetzung zu einer Mittelkraft unter Benutzung des Kraft- und Seilecks nach den unter II. S. 21 u. fgd. gegebenen Regeln erfolgen. Das Krafteck geht hierbei in eine Gerade über, die Mittelkraft fällt als Schlußlinie des Kraftecks ebenfalls in die gleiche Gerade. Die Mittelkraft ist daher mit den Seitenkräften gleichlaufend.

#### I. Die Kräfte haben gleichen Sinn.

#### A. Zwei gleichlaufende Kräfte.

Zeichnerische Lösung: Die Bestimmung der Größe, Richtung, Sinn und Lage der Mittelkraft $R$ erfolgt in gleicher Weise, wie bei II. S. 22 angegeben (vgl. Abb. 69a/b).

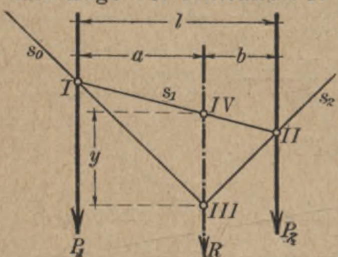


Abb. 69a.

Man erhält dann:

$$\triangle\ \mathrm{I\ IV\ III} \sim \triangle\ OCA,$$

Daraus folgt $\quad a : y = H : P_1 \quad \ldots\ldots \quad 1.$

ferner: $\quad \triangle\ \mathrm{II\ IV\ III} \sim \triangle\ OCE,$

demnach: $\quad b : y = H : P_2 \quad \ldots\ldots \quad 2.$

Es ergibt sich daraus:

$$a = \frac{H \cdot y}{P_1} \quad \ldots\ldots \quad 1a.$$

$$b = \frac{H \cdot y}{P_2} \quad \ldots\ldots \quad 2a.$$

Bei Division 1a durch 2a erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{H \cdot y}{P_1}}{\frac{H \cdot y}{P_2}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{H \cdot y}{P_1} \cdot \frac{P_2}{H \cdot y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1} \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

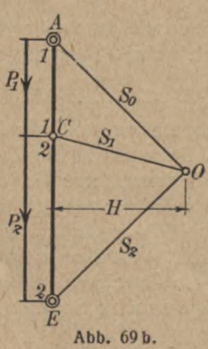


Abb. 69b.

Da $a+b$ den Abstand der Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ darstellt, so erhält man folgenden Satz:

Lehrsatz: Die Mittelkraft teilt den Abstand zweier gleichlaufender Seitenkräfte gleichen Sinnes im umgekehrten Verhältnis zur Größe dieser Kräfte.

Die Abstände einer Mittelkraft von zwei zu ihr gleichlaufenden Seitenkräften verhalten sich umgekehrt wie die Seitenkräfte. Die Mittelkraft zweier gleichlaufenden gleichgerichteten Seitenkräfte liegt demnach stets zwischen den beiden Kräften und der größeren von ihnen am nächsten.

Die Lage von $R$ kann somit auch einfach zeichnerisch wie folgt festgelegt werden:

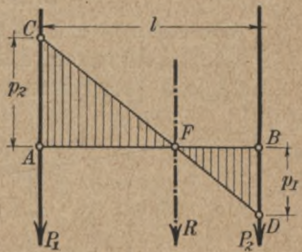


Abb. 70.

Man zieht durch einen beliebigen Punkt von $P_1$ die Gerade $AB$ winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung, trägt auf $P_1$ von $A$ aus, z. B. nach oben, die Strecke $p_2 = P_2$ in einem gewählten Kräftemaßstabe ab (Abb. 70), ferner auf $P_2$ von $B$ aus die Strecke $p_1 = P_1$ entgegengesetzt, also nach unten, und verbindet die erhaltenen Endpunkte $C$ und $D$. Die Gerade $CD$ schneidet die Gerade $AB$ im Punkte $F$, durch welchen die gesuchte Mittelkraft gehen muß. Da $\triangle ACF \sim \triangle FBD$ ist, besteht nämlich folgende Beziehung:

$AF : AC = BF : BD$ oder nach Einsetzung der entsprechenden Werte:

$a : P_2 = b : P_1$, wofür auch geschrieben werden kann

$a : b = P_2 : P_1$ (vgl. 3).

Bemerkung: Die Richtung von $AB$ kann auch beliebig geneigt angenommen werden. Sind die Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ einander gleich, so liegt die Mittelkraft $R$ in der Mitte des Abstandes $l$; es ist dann also $a = b = \frac{l}{2}$.

Rechnerische Lösung: Die Lage von $R$ läßt sich folgendermaßen einfach bestimmen:

$$R = P_1 + P_2.$$

Nach Gleichung 3 war: $$a : b = P_2 : P_1,$$

also: $$a \cdot P_1 = b \cdot P_2.$$

Es sei $$a + b = l,$$

dann ist $$b = l - a$$

und
$$a \cdot P_1 = (l - a) \cdot P_2,$$
$$a \cdot P_1 = l \cdot P_2 - a \cdot P_2,$$
$$a \cdot P_1 + a \cdot P_2 = l \cdot P_2,$$
$$a(P_1 + P_2) = l \cdot P_2,$$
$$a = \frac{l \cdot P_2}{P_1 + P_2},$$
$$a = \frac{P_2 \cdot l}{R}.$$

Der unbekannte Abstand $a$ ist demnach leicht zu bestimmen.

Entsprechend findet man den Wert $b = \frac{P_1 \cdot l}{R}$.

Beispiel: $P_1 = 1000$ kg; $P_2 = 3000$ kg. Die Abstand beider Kräfte betrage $l = 300$ cm.

Es ist
$$a = \frac{P_2 \cdot l}{R},$$
$$a = \frac{3000 \cdot 300}{4000},$$
$$a = 225 \text{ cm},$$
demnach:
$$b = l - a = 300 - 225 = 65 \text{ cm}.$$

### B. Mehrere gleichlaufende Kräfte.

Die Lösung erfolgt sinngemäß nach II. B. S. 22.

Die Mittelkraft wird durch die Gerade $AE$ in der Polfigur der Größe, Richtung und dem Sinne nach bestimmt. (Abb. 71 a/b.)

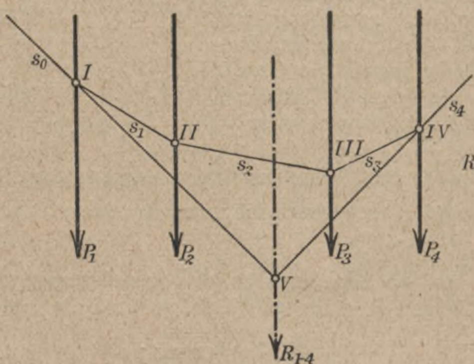


Abb. 71 a.

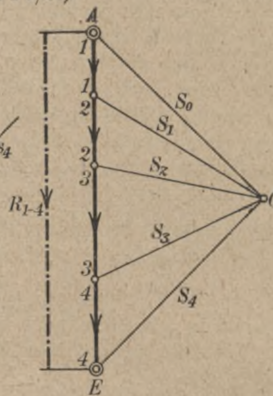


Abb. 71 b.

Es wird $R_{1-4} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$. Ihre Lage wird durch den Schnitt der äußeren Seilecksseiten $s_0$ und $s_4$ festgelegt.

## II. Die Kräfte haben verschiedenen Sinn.

### A. Zwei gleichlaufende Kräfte.

Es soll hier die Annahme gemacht werden, daß $P_1 > P_2$ ist. Man trägt die Kräfte zu einem Kräftezuge aneinander und erhält wieder eine Gerade wie bei 2. a. I. a. S. 32. Die Mittelkraft $R$ wird $= P_1 - P_2$ (s. Abb. 72 a/b). Zur Bestimmung der Lage von $R$ wählt man einen beliebigen Pol $O$, zieht die Polstrahlen und dann das Seileck, wobei auf genaue Reihenfolge der Seilstrahlen zu achten ist. Die Mittelkraft muß durch den Schnittpunkt III der äußeren Seilseiten $s_0$ und $s_2$ hindurchgehen. Auch hier muß $a : b = P_2 : P_1$ sein. (Beweis ähnlich wie bei 2. a. I. a.)

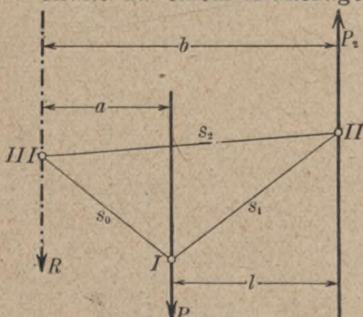


Abb. 72 a.

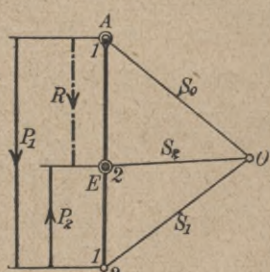


Abb. 72 b.

Lehrsatz: Die Mittelkraft zweier gleichlaufender Kräfte mit entgegengesetztem Sinn ist gleich der Differenz der gegebenen Kräfte und hat den Sinn der größeren Kraft. Sie liegt stets außerhalb der von beiden Kräften begrenzten Fläche, und zwar auf der Seite der größeren Kraft. Die Mittelkraft teilt den verlängerten Abstand $l$ der beiden Seitenkräfte im umgekehrten Verhältnis zu diesen Kräften.

Je geringer der Unterschied zwischen $P_1$ und $P_2$ wird, um so weiter rückt der Schnittpunkt und somit die Mittelkraft von der größeren Kraft weg.

Wird $P_1 = P_2$, so ist $R = P_1 - P_2 = 0$. Der Polstrahl $S_2$ fällt mit $S_0$ zusammen (Abb. 73b), die Seilstrahlen $s_0$ und $s_2$ sind einander gleichlaufend, ihr Schnittpunkt $III$, d. h. der Angriffspunkt von $R$, liegt im Unendlichen. (Abb. 73a.)

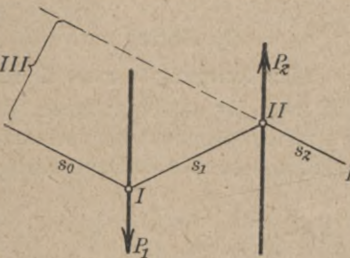



Abb. 73a.

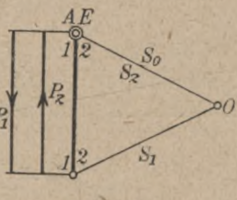



Abb. 73b.

Zwei gleichgroße, gleichlaufende Kräfte mit entgegengesetztem Sinn lassen sich daher nicht durch eine im Endlichen liegende Mittelkraft ersetzen.

Eine Kräftegruppe, die aus zwei gleichen gleichlaufenden Kräften mit entgegengesetztem Sinne besteht, nennt man ein Kräftepaar (s. auch S. 29).

Ein Kräftepaar kann nicht weiter vereinfacht werden. Da $R = 0$ ist, kann eine fortschreitende Bewegung überhaupt nicht eintreten; die beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ heben sich jedoch nicht auf, sie bringen eine reine Drehbewegung hervor.

## B. Mehrere gleichlaufende Kräfte.

Die Lösung erfolgt wie bei I. B. S. 34 (s. Abb. 74a/b).

Man trägt die Kräfte in beliebiger Reihenfolge in einem gewählten Kräftemaßstab aneinander und erhält z. B. in Abb. 74b die Mittelkraft $R_{1-5} = AE$ der Größe, der Richtung und dem Sinne nach.

Lehrsatz: Die Mittelkraft gleichlaufender Kräfte verschiedenen Sinnes ist gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte.

Die Lage der Mittelkraft bestimmt man mittels des Seilpolygons wie früher. $R_{1-5}$ muß durch den Schnittpunkt der äußeren Seilstrahlen $s_0$ und $s_5$ gehen. (Abb. 74a.)

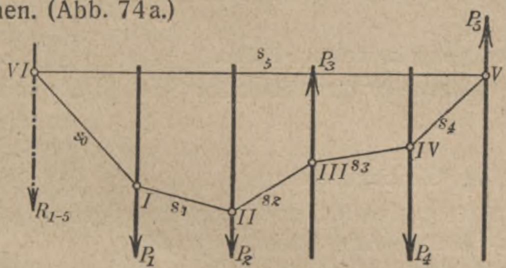



Abb. 74a.

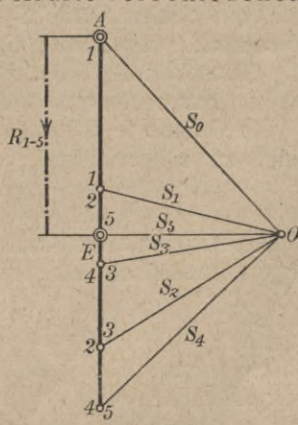



Abb. 74b.

### III. Der Mittelpunkt der gleichlaufenden Kräfte.

Dreht man eine gegebene Kräftegruppe in den Angriffspunkten der Kräfte, also unter Beibehaltung der betreffenden Abstände der gleichlaufenden Kräfte, um einen beliebigen Winkel, so muß die Mittelkraft sich um denselben Winkel drehen, da sie stets gleichlaufend zu den gegebenen Kräften bleiben muß.

Die Drehung der Mittelkraft erfolgt um einen festen Punkt, der sich als Schnittpunkt sämtlicher Mittelkraftlagen ergibt. Diesen Punkt nennt man den „Mittelpunkt gleichlaufender Kräfte".

## b) Zerlegung.

### I. Die Zerlegung in zwei Kräfte.

Soll eine Kraft $R$ in zwei ihr gleichlaufende, der Lage nach gegebene Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ zerlegt werden, so verfährt man umgekehrt wie bei 2. I. A. S. 32. Man trägt $R$ in einer Nebenfigur (Abb. 75b) in einem gewählten Kräftemaßstab auf, wählt einen beliebigen Pol $O$ und zieht die Polstrahlen $S_0$ und $S_2$, d. h. man zerlegt $R$ in zwei Seitenkräfte $S_0$ und $S_2$.

Durch einen beliebigen Punkt $III$ auf $R$ zieht man nun Gleichlaufende zu $S_0$ und $S_2$ und erhält so die Seilstrahlen $s_0$ und $s_2$, welche $P_1$ in $I$ und $P_2$ in $II$ schneiden. Durch Verbindung von $I$ und $II$ ergibt sich der Seilstrahl $s_1$. (Abb. 75a.)

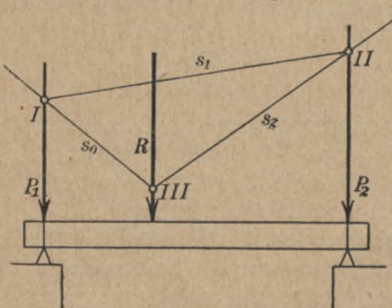


Abb. 75a.

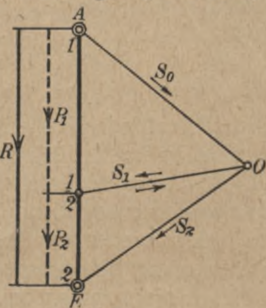


Abb. 75b.

Nun zerlegt man $S_0$ in der Nebenfigur Abb. 75b gleichlaufend zu $s_1$ und zur Richtung von $P_1$ in die Seitenkräfte $P_1$ und $S_1$ und ebenso $S_2$ gleichlaufend zu $s_1$ und zur Richtung von $P_2$ in die Seitenkräfte $S_1$ und $P_2$. Man findet, daß die beiden Kräfte $S_1$ sich aufheben und nur die Kräfte $P_1$ und $P_2$ als Ersatzkräfte für $S_0$ und $S_2$ übrigbleiben. Demnach ist also $R$ ersetzt durch die Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$, welche der Größe und dem Sinne nach in der Nebenfigur bestimmt sind.

Die Gerade $I$—$II$ heißt die Schlußlinie des Seilecks. Sie wird in Zukunft mit $s$ bezeichnet.

### II. Die Zerlegung in mehrere Kräfte.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehrere ihr gleichlaufende Seitenkräfte zu zerlegen, ist statisch unbestimmt.

## c) Das Gleichgewicht.

Zwei gleichlaufende Kräfte gleichen Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes können sich nicht im Gleichgewicht halten.

Drei gleichlaufende Kräfte sind dann im Gleichgewicht, wenn je zwei von ihnen eine Mittelkraft haben, welche mit der dritten nach Lage und Größe übereinstimmt, jedoch entgegengesetzten Wirkungssinn besitzt ($R$, $A$ und $B$; Abb. 76a/b und Abb. 77).

Fügt man in der Wirkungsgeraden der durch Zerlegung von $R$ gefundenen Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ (Abb. 76a/b) zwei bezüglich große, aber entgegengesetzt wirkende Kräfte $A$ und $B$ hinzu, so heben diese $P_1$ und $P_2$ auf, halten also der gegebenen Kraft $R$ das Gleichgewicht.

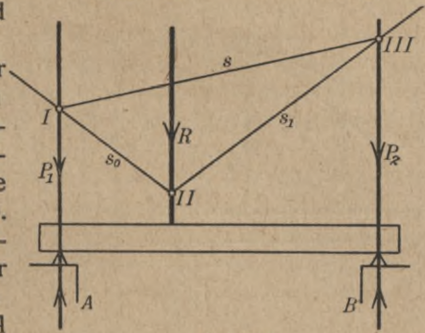



Abb. 76a.

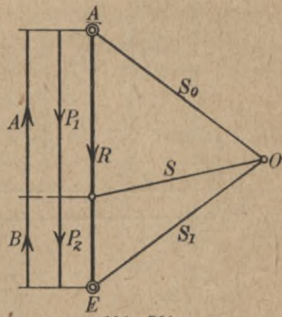



Abb. 76b.

Man kann diese Gleichgewichtskräfte unmittelbar bestimmen, ohne die Zerlegung von $R$ in die Seitenkräfte $P_1$ und $P_2$ vorzunehmen, indem man in einer Nebenfigur (Abb. 77) $R$ im gewählten Kräftemaßstab aufträgt, einen Pol $O$ annimmt, die Seilstrahlen $s_0$ und $s_1$ in der Hauptfigur zieht (Abb. 76a), durch Verbinden der Punkte $I$ und $III$ das Seileck zum Schluß bringt (die Schlußlinie $s$ zieht) und in der Polfigur durch $O$ eine Gleichlaufende $S$ zu $s$ legt, welche $R$ in die Gleichgewichtskräfte $A$ und $B$ teilt. $A$ wird von $S_0$ und $S$ und $B$ von $S_1$ und $S$ eingeschlossen, da sich $A$, $S_0$ und $S$ sowie $B$, $S_1$ und $S$ im Gleichgewicht halten müssen; $s_0$, $s$ und $A$ sowie $s_1$, $s$ und $B$ schneiden sich je in einem Punkte ($I$ und $III$).

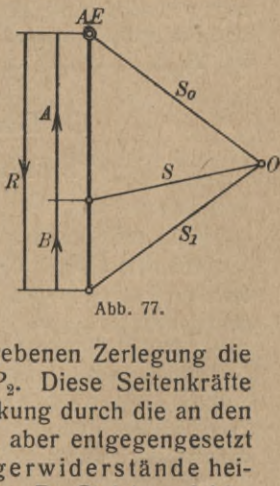



Abb. 77.

Der erwähnte Fall tritt in der Praxis bei belasteten Trägern auf, welche auf zwei Stützen gelagert sind (Träger auf zwei Stützen). Wie aus Abb. 76a hervorgeht, erhält die Stütze $A$ auf Grund der angegebenen Zerlegung die Seitenkraft $P_1$ von $R$, die Stütze $B$ die Seitenkraft $P_2$. Diese Seitenkräfte werden nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung durch die an den Auflagerpunkten $A$ und $B$ entstehenden gleichgroßen, aber entgegengesetzt wirkenden Gegenkräfte, welche Stützen- oder Auflagerwiderstände heißen, aufgehoben. Es tritt sodann der Ruhezustand ein. Da Gleichgewichtszustand vorhanden ist, muß sich sowohl das Krafteck als auch das Seileck schließen. (S. 29 u. Abb. 76 u. 77.)

Die Kraft $R$ kann als Mittelkraft beliebig vieler wirkender gleichlaufender Kräfte angesehen werden. An der Lösung der Aufgabe würde dann nichts geändert werden. Beim Festlegen von $A$ und $B$ kann in diesem Falle von der vorherigen Bestimmung von $R$ abgesehen werden (Abb. 77), s. auch folgende Aufgabe.

Aufgabe 14: Es sollen die der Lage nach gegebenen Kräfte $A$ und $B$ bestimmt werden, welche den ihnen gleichlaufenden gegebenen Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ das Gleichgewicht halten (Abb. 78a).

Lösung: Man trägt in einer Nebenfigur (Abb. 78b) die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ aneinander an, wählt den Pol $O$, zieht die Polstrahlen $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ und $S_4$, legt die Seil-

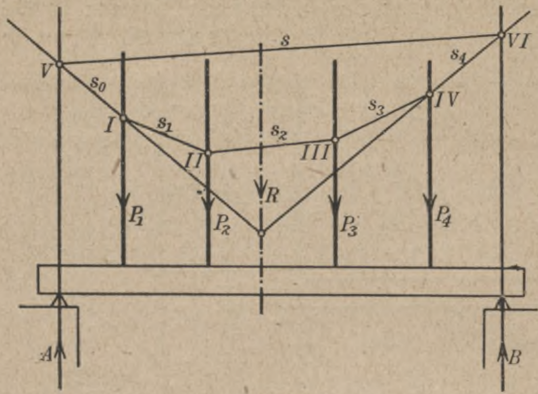


Abb. 78a.

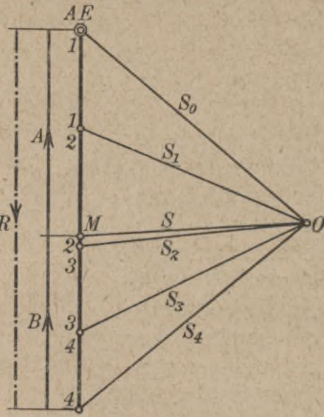


Abb. 78b.

strahlen $s_0$, $s_1$, $s_2$, $s_3$ und $s_4$ in Abb. 78a fest und bringt das Seileck durch die Linie $V—VI$ zum Schluß. Man überträgt die Schlußlinie $s$ nach der Polfigur durch Ziehen der Gleichlaufenden $OM$, welche die Mittelkraft $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ in zwei Teile $MA$ = Auflagerwiderstand $A$ und $4M$ = Auflagerwiderstand $B$ zerlegt. Der Kräftezug wird durch die Kräfte $4M$ und $MA$ zum Schluß gebracht, da Anfangspunkt $A$ und Endpunkt $E$ aufeinanderfallen, die Gesamtmittelkraft aller Kräfte also gleich Null ist. $A$, $B$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ halten sich im Gleichgewicht.

# D. Das statische Moment der Kräfte.

## 1. Erklärungen. Moment von Einzelkräften.

### a) Allgemeines.

Wirkt eine Kraft an einem starren, gewichtslos angenommenen Körper (Scheibe), so wird sie ihn in ihrer Richtung zu verschieben suchen und, sofern er frei beweglich ist, eine geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervorrufen (s. Naturlehre). Wird ein Punkt des Körpers festgehalten, so wird die Kraft versuchen, den Körper um diesen Punkt zu drehen; es tritt ein Drehbestreben ein.

Bemerkung: Betrachtet man den starren Körper jedoch als stofflichen, so kann man sein Gewicht sich im Schwerpunkt vereinigt denken (s. Naturlehre). Eine dauernd wirkende Einzelkraft bringt nur dann für den frei beweglichen Körper lediglich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervor, wenn sie im Schwerpunkt angreift. Jede nicht im Schwerpunkt wirkende Kraft bringt außer dieser beschleunigten Bewegung noch eine Drehbewegung hervor.

Denkt man sich durch den festgelegten Punkt $O$ senkrecht zur Scheibenebene eine Achse gelegt, welche in festen Lagern drehbar ruht (wie z. B. beim Rad an einer Welle, Wagenrad usf.), so wird eine Drehung um diese Achse infolge der Kraft möglich sein und daher auch eintreten.

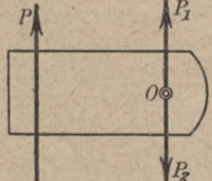


Abb. 79.

Die tatsächlichen Kraftwirkungen sind dabei folgende: Die vorhandene Kraft $P$ wirkt zunächst drückend auf das Lager der Achse. Dieser Achsdruck $P_1$ (Abb. 79) hat gleiche Größe, gleiche Richtung und gleichen Sinn wie $P$. Es entsteht bei $O$ ein auf die Scheibe wirkender Gegendruck $P_2 = P_1 = P$. Die Kräfte $P$ und $P_2$ bilden nun ein Kräftepaar, welches die Drehung des Körpers hervorruft.

Bei Lösung statischer Aufgaben sind die Drehachsen in der Regel nur gedacht, da man es nicht mit wirklichen Drehbewegungen, sondern nur mit der Möglichkeit des Eintretens einer Drehung zu tun hat.

Die Größe des Drehbestrebens ist abhängig von der Größe der wirkenden Kraft und von der Größe des Abstandes des Drehpunktes von der Kraftrichtung. Die vom angenommenen Drehpunkt $O$ auf die Kraftrichtung gefällte Winkelrechte stellt den Abstand dar und heißt Hebelarm.

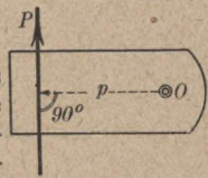


Abb. 80.

Man nennt das Drehbestreben in der Regel statisches Moment oder kurz Moment (abgekürzt $M$). Das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Drehpunkt ist unmittelbar und im geraden Verhältnis abhängig von der Kraftgröße $P$ und von der Länge des Hebelarms $p$; man stellt es daher als das Produkt dieser beiden Größen dar. (Statisches Moment = Kraft × Hebelarm.) (Abb. 80.)

Lehrsatz: Das statische Moment $M$ einer Kraft $P$ in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt $O$ ist gleich dem Produkt aus der Kraft und dem zugehörigen Hebelarm

$$M = P \cdot p.$$

Für die weiteren Untersuchungen soll für unsere Zwecke die Kraft stets in Kilogramm, der Hebelarm in Zentimeter ausgedrückt werden, so daß sich als Maßeinheit für das Moment das Produkt kg × cm oder kurz Kilogrammzentimeter ergibt.

Die Kräfte können auch in Kilogramm bzw. Tonnen, die Hebelarme in Meter eingesetzt werden, man erhält dann als Maßeinheit Kilogrammeter bzw. Tonnenmeter. Diese Bezeichnungen werden beim Rechnen mit großen Kräften und großen Hebelarmen angewendet, wie z. B. im Brückenbau. 1 tm = 1000 kgm; 1 kgm = 100 kgcm.

Eine Kraft von 500 kg am Hebelarm von 100 cm hat demnach ein Moment

$$M = 500 \cdot 100 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 50\,000 \text{ kgcm}.$$

Geht eine Kraft $P$ durch den Drehpunkt (oder die Drehachse) $O$ selbst hindurch, so wird der Hebelarm $p = 0$, demgemäß wird das statische Moment $M$ der Kraft in bezug auf $O: M = P \cdot 0$, also ebenfalls $= 0$. Die Kraft $P$ kann demnach in diesem Falle kein Drehbestreben hervorbringen, sondern nur einen Druck auf die Achse ausüben. Eine Drehung ist also nur dann möglich, wenn die Kraft einen gewissen Abstand von der Drehachse hat.

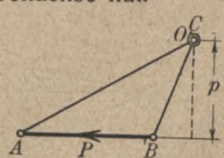


Abb. 81.

Da zeichnerisch die Kräfte als gerade Linien dargestellt werden, so ergibt sich das Moment als das Produkt zweier Linien, demnach als Fläche. Das statische Moment kann so z. B. als Rechteck aufgetragen werden, dessen eine Seite gleich der Kraft, dessen andere Seite gleich dem Hebelarm der Kraft ist. Die Kraft trägt man im Kräftemaßstab, den Hebelarm im Längenmaßstab auf. Auch jede andere Figur, welche den gleichen Flächeninhalt $M = P \cdot p$ ergibt, kann zur rechnerischen Darstellung des Moments benutzt werden. Das statische Moment ist daher auch gleich dem doppelten Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Kraftgröße ist und dessen Spitze im Drehpunkt liegt. (Abb. 81.)

$$M = 2 \cdot \triangle ABO = 2 \cdot P \cdot \frac{p}{2} = P \cdot p.$$

Ruft eine Kraft eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers hervor, so nennt man das Moment ein rechtsdrehendes (Abb. 82a), ist die Drehung entgegengesetzt zur Uhrzeigerbewegung gerichtet, so heißt das Moment ein linksdrehendes. (Abb. 82b.)

Meist erteilt man den rechtsdrehenden Momenten das Vorzeichen + (positives Moment), dem linksdrehenden das Vorzeichen — (negatives Moment).

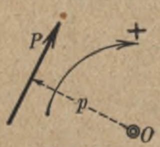



Abb. 82a.

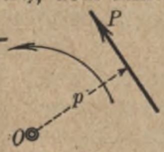



Abb. 82b.

Momente, welche gleichen Drehungssinn haben, ergänzen sich in ihren Wirkungen; Momente, welche verschiedenen Drehungssinn besitzen, heben sich teilweise oder vollständig auf. Ist an einem Körper die Summe der positiven Momente gleich der Summe der negativen Momente, so ist das Drehbestreben nach beiden Drehrichtungen das gleiche; der Körper wird demnach nicht gedreht, er bleibt im Gleichgewicht.

Lehrsatz: Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht gegen Drehen, wenn die algebraische Summe der Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf denselben (beliebigen) Drehpunkt gleich Null ist.

Stellen $M_1$, $M_2$, $M_3$ usf. die Momente der einzelnen Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ usf. für einen bestimmten Drehpunkt dar, so wird:

$$\pm M_1 \pm M_2 \pm M_3 \pm \cdots = 0.$$

Man erhält also als Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum M = 0.$$

## b) Der Momentensatz.

Häufig ist das statische Moment einer Kräftegruppe in bezug auf einen bestimmten Drehpunkt aufzustellen. Dies geschieht unter Anwendung eines Lehrsatzes, des Momentensatzes, welcher lautet:

Momentensatz: Das statische Moment der Mittelkraft einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte bezogen auf denselben Drehpunkt.

Es genügt, den Satz für den Fall des Vorhandenseins nur zweier Einzelkräfte zu beweisen, da er sich dann in einfacher Weise auf jede beliebige Zahl von Einzelkräften erweitern läßt.

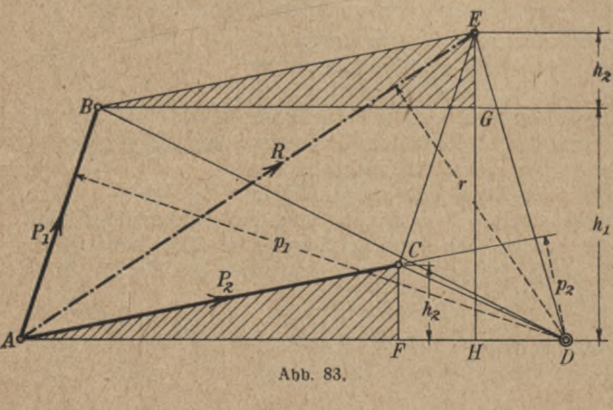



Abb. 83.

Es seien $P_1$ und $P_2$ die gegebenen Einzelkräfte und $R$ die mittels des Kräfteparallelogramms gefundene Mittelkraft. Man fällt von dem beliebig gewählten Drehpunkt $D$ die Winkelrechten zu $P_1$, $P_2$ und $R$ und erhält so die Hebelarme $p_1$, $p_2$ und $r$.

Außerdem verbindet man den Drehpunkt $D$ mit dem Angriffspunkt $A$ und dem Endpunkt der Kräfte $P_1$, $P_2$ und $R$ und fällt die Winkelrechten $CF$ und $EH$ zur Geraden $AD$. $EH$ schneidet die durch $B$ zu $AD$ gezogene Gleichlaufende im Punkte $G$ (Abb. 83).

Es ist $$\triangle ACF \backsim \triangle BEG,$$

demnach $$CF = EG = h_2.$$

Nach obigem (S. 39) ist:

$$P_1 \cdot p_1 = 2 \cdot \triangle ABD = 2 \cdot \frac{AD \cdot h_1}{2},$$

$$P_2 \cdot p_2 = 2 \cdot \triangle ACD = 2 \cdot \frac{AD \cdot h_2}{2},$$

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = AD \cdot h_1 + AD \cdot h_2,$$

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = AD(h_1 + h_2).$$

Nun ist: $$h_1 + h_2 = GH + EG,$$

$$h_1 + h_2 = EH,$$

also $$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = AD \cdot EH,$$

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = 2 \cdot \triangle AED,$$

$$2 \cdot \triangle AED = 2 \cdot \frac{R \cdot r}{2},$$

demnach: $$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = R \cdot r.$$

$P_1$ und $P_2$ können nun selbst wiederum Mittelkräfte von je zwei Seitenkräften $K_1$, $K_2$ bzw. $K_3$, $K_4$ sein. Es ergibt sich dann:

$$R \cdot r = K_1 \cdot k_1 + K_2 \cdot k_2 + K_3 \cdot k_3 + K_4 \; k_4$$

usf., wo $k_1$, $k_2$, $k_3$ und $k_4$ die entsprechenden Hebelarme der Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ und $K_4$ sind. Der Beweis läßt sich auf diese Weise verallgemeinern.

Zu beachten ist, daß die Momente je nach dem betreffenden Drehsinn mit positivem bzw. negativem Vorzeichen einzuführen sind.

Es ist demnach $$R \cdot r = \sum P \cdot p.$$

Der Momentensatz gilt ganz allgemein, also auch für den besonderen Fall gleichlaufender Kräfte.

Man erhält daher das Moment einer Kräftegruppe, indem man unter Anwendung der früheren Sätze die Mittelkraft der Kräfte bestimmt und auf diese vom Drehpunkt aus eine Winkelrechte fällt und die Größe der gefundenen Mittelkraft mit dem so gefundenen Hebelarm multipliziert.

## c) Anwendungen.

### I. Rechnerisches Verfahren.

Der Momentensatz bietet die Möglichkeit, auf dem Wege der Rechnung die Lage der Mittelkraft einer Kräftegruppe zu bestimmen, falls Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft bekannt sind.

Zu diesem Zwecke wählt man einen beliebigen Drehpunkt, mißt die Hebelarme der Einzelkräfte und bildet die algebraische Summe der Momente der Einzelkräfte. Bezeichnet man mit $x$ den unbekannten Hebelarm der Mittelkraft $R$, so muß nach dem Momentensatz sein:

$$R \cdot x = \sum P \cdot p.$$

Man findet somit: $$x = \frac{\Sigma \cdot P \cdot p}{R}.$$

Der gefundene Abstand $x$ ist auf einer Winkelrechten zur Richtung der Mittelkraft vom Drehpunkt aus abzutragen. Man kann mit $x$ als Halbmesser auch eine Kreislinie um den Drehpunkt beschreiben und an diesen Kreis eine Berührende gleichlaufend zur Richtung von $R$ unter Beachtung des Vorzeichens von $x$ ziehen.

Die Lage der Mittelkraft läßt sich auf rechnerische Weise besonders dann einfach bestimmen, wenn alle Kräfte der Kräftegruppe zueinander gleichlaufend sind, da Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft in diesem Falle leicht zu ermitteln sind.

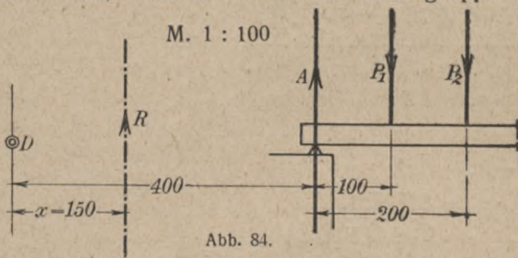


Abb. 84.

**Beispiel:** Es sei gegeben die Kraft $A = 12000$ kg, $P_1 = 6000$ kg und $P_2 = 2000$ kg, wobei die in Abb. 84 angegebenen Maße zugrunde gelegt werden sollen. Es soll die Lage von $R$ bestimmt werden.

Lösung: Es ist
$$R = \Sigma P,$$
$$R = A - P_1 - P_2,$$
$$R = 12000 - 6000 - 2000 = 4000 \text{ kg}.$$

Als Drehpunkt wähle man einen Punkt $D$, welcher von $A$ die Entfernung 4,0 m hat, es ist dann:
$$R \cdot x = A \cdot 400 - P_1 (400 + 100) - P_2 \cdot (400 + 200);$$

mit Einsetzung der bekannten Werte erhält man:
$$x = \frac{12000 \cdot 400 - 6000 \cdot 500 - 2000 \cdot 600}{4000}$$
$$x = + \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}.$$

Die Mittelkraft liegt demnach im Abstand 1,5 m rechts von $D$, also 2,5 m von $A$ entfernt.

Eine Vereinfachung der Lösung erhält man durch Annahme des Drehpunktes auf der Richtungslinie einer der gegebenen Kräfte. Das Moment dieser Kraft fällt dann aus der Momentengleichung heraus, da ihr Hebelarm = Null wird. (S. 39.)

### II. Zeichnerisches Verfahren.

Der Momentensatz gestattet eine einfache Bestimmung des statischen Momentes einer Gruppe beliebiger Kräfte mit Hilfe des Kräftevielecks und des Seilecks.

Man zeichne für die in Abb. 85a angegebene Kräftepruppe in bekannter Weise nach C. 1. II. B. S. 23 u. fgd. das Krafteck und das Seileck. Man erhält die Mittelkraft $R$ im Krafteck (Abb. 85b) nach Größe, Richtung und Sinn und ihre Lage im Seileck durch Verlängern von $s_0$ und $s_4$.

Es soll nun das statische Moment der Kräftegruppe für den Drehpunkt $D$ ermittelt werden. Man zieht durch $D$ zu $R$ eine Gleichlaufende, auf welcher durch die äußersten Seilstrahlen $s_0$ und $s_4$ die Strecke $FG = y$ abgeschnitten wird. Von $D$ fällt man auf die Richtung von $R$ eine Winkelrechte und erhält so den Hebelarm $r$. Das statische Moment der Kräftegruppe in bezug auf $D$ ist demnach $M = R \cdot r$.

In der Polfigur fällt man nun von $O$ aus eine Winkelrechte $OB$ auf die

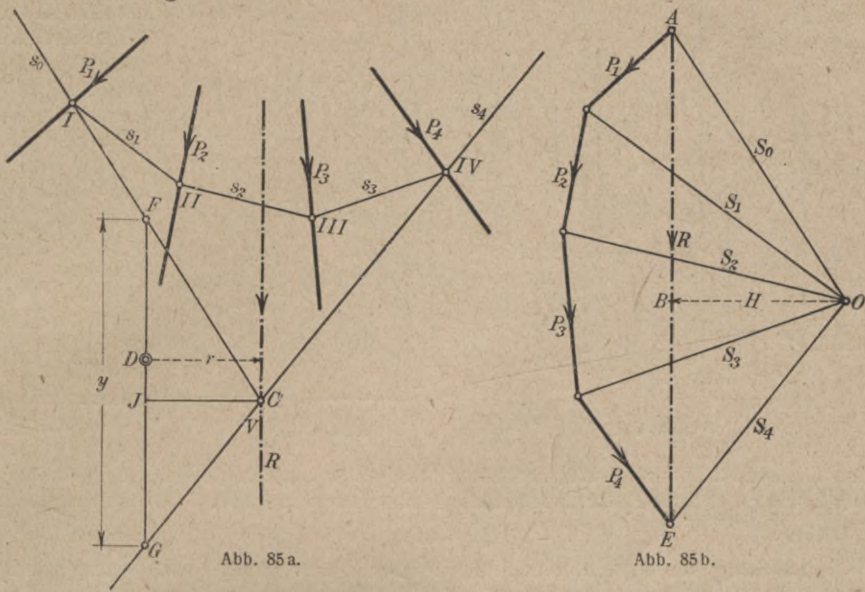


Abb. 85a. Abb. 85b.

Mittelkraft $AE = R$ und bezeichnet diesen so gewonnenen Abstand $OB$ des Poles von der Mittelkraft mit $H$. Man nennt $H$ die Polentfernung oder den Polabstand.

Es ist nun nach Abb. 85 a/b:

$$\triangle CFG \sim \triangle OAE,$$

da die Seiten der Dreiecke einander bezüglich gleichlaufend sind, demnach ist:

$$CJ : FG = OB : AE$$

oder:

$$r : y = H : R,$$

$$R \cdot r = H \cdot y,$$

$$M = H \cdot y.$$

Lehrsatz: Das statische Moment einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich dem Produkte aus dem Polabstand $H$ und der Strecke $y$, welche durch die äußersten, die Mittelkraft einschließenden Seilzugseiten auf einer durch den Drehpunkt gleichlaufend zur Mittelkraft gezogenen Geraden abgeschnitten wird.

In dem Produkte $H \cdot y$ wird $H$ am besten als Kraft im Kräftemaßstab, $y$ im Längenmaßstab gemessen. (Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn $H$ im Längenmaßstab und $y$ im Kräftemaßstab gemessen wird.)

Besonders einfach wird die Lösung bei der Bestimmung des statischen Momentes gleichlaufender Kräfte, da das Krafteck eine gerade Linie bildet und die Polentfernung für sämtliche Kräfte dieselbe bleibt.

Für den in Abb. 86 a/b angegebenen Fall wird, nachdem in grundsätzlich gleicher Weise wie oben angegeben vorgegangen worden ist, $M = R \cdot r = H \cdot y$.

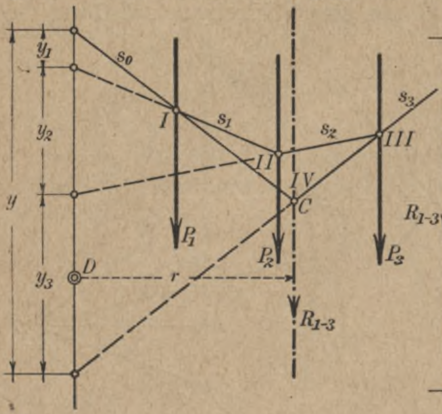



Abb. 86a.

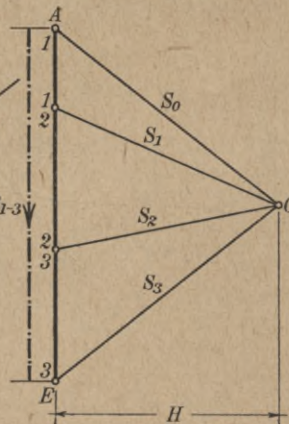



Abb. 86b.

Es läßt sich der Einfluß der Einzelkräfte auf die Größe des statischen Moments in diesem Falle klar verfolgen. Durch die Verlängerung der die Kraft $P_1$ einschließenden Seilseiten $s_0$ und $s_1$, welche für sie als äußere in Betracht kommen, wird die Strecke $y_1$ auf der durch den Drehpunkt $D$ zur Mittelkraftrichtung gezogenen Gleichlaufenden abgeschnitten. Der Beitrag der Kraft $P_1$ für das statische Moment für den Punkt $D$ beträgt demnach:

$$M_1 = H \cdot y_1.$$

Den Beitrag von $P_2$ erhält man in gleicher Weise durch Verlängerung von $s_1$ und $s_2$ zu $M_2 = H \cdot y_2$; denjenigen von $P_3$ durch Verlängern von $s_2$ und $s_3$ zu $M_3 = H \cdot y_3$.

Das gesamte statische Moment ergibt sich demnach nach dem Momentensatz zu:

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

oder:

$$M = H \cdot y_1 + H \cdot y_2 + H \cdot y_3,$$

$$M = H (y_1 + y_2 + y_3).$$

Nun ist:

$$y_1 + y_2 + y_3 = y,$$

demnach: $\qquad M = H \cdot y.$

Liefert eine der Kräfte einen negativen Beitrag zu dem Moment, so kommt dies in der Zeichnung durch eine in Abzug zu bringende Strecke zum Ausdruck, wie dies in Abb. 87 a/b der Fall ist.

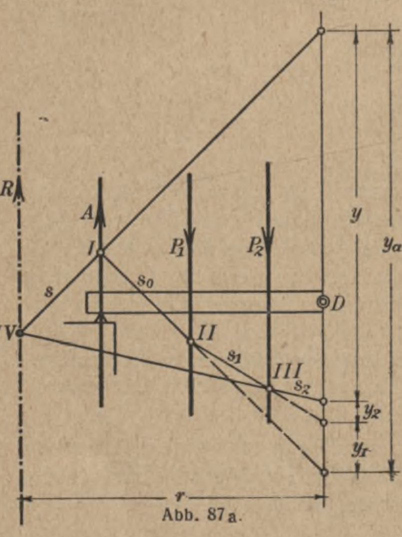



Abb. 87a.

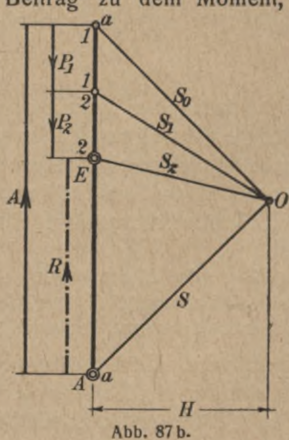



Abb. 87b.

**Aufgabe 15:** Es soll das statische Moment der Kräfte $A$, $P_1$ und $P_2$ für den Drehpunkt $D$ bestimmt werden.

Lösung: Es ergibt sich nach obigem: $M = H \cdot y$.

Die Kraft $A$ besitzt für $D$ ein rechtsdrehendes Moment $M_a = H \cdot y_a$; die Kraft $P_1$ ein linksdrehendes $M_1 = H \cdot y_1$ und $P_2$ ein ebensolches $M_2 = H \cdot y_2$. (Abb. 87a/b.)

Man erhält dann als Gesamtwert

$$M = M_a - M_1 - M_2,$$
$$M = H \cdot y_a - H \cdot y_1 - H \cdot y_2,$$
$$M = H(y_a - y_1 - y_2),$$
$$y_a - y_1 - y_2 = y;$$

demnach: $$M = H \cdot y.$$

$y$ ist also wiederum die Strecke, welche durch die die Mittelkraft

$$R = A - P_1 - P_2$$

einschließenden äußeren Seilstrahlen $s$ und $s_2$ auf der durch den Drehpunkt $D$ zur Richtung von $R$ gezogenen Gleichlaufenden abgeschnitten wird.

Bemerkung: Die Bezeichnungen sind hier gleichlautend gewählt, wie sie später bei der Berechnung des Balkens auf zwei Endstützen auftreten.

## 2. Das Kräftepaar.

### a) Allgemeines.

Zwei gleichlaufende, gleich große Kräfte mit entgegengesetztem Wirkungssinn bilden ein Kräftepaar (S. 29 u. 36). Die Mittelkraft $R$ dieser beiden Kräfte ist gleich Null, das Kräftepaar kann daher eine fortschreitende Bewegung eines Körpers nicht bewirken.

Wird das statische Moment der aus den zwei gleichen Kräften bestehenden Kräftegruppe aufgestellt, so ergibt sich, daß es für jeden beliebig gewählten Drehpunkt die gleiche Größe besitzt. Der Drehpunkt kann dreierlei verschiedenartige Lagen zu den Kräften besitzen.

1. Der Drehpunkt liegt zwischen den beiden Kräften (Abb. 88)

$$m + n = a.$$
$$M = P \cdot m + P \cdot n = P(m + n) = P \cdot a.$$

2. Der Drehpunkt liegt auf einer der Kräfte (Abb. 89)

$$M = P \cdot a.$$

3. Der Drehpunkt liegt außerhalb der beiden Kräfte (Abb. 90)

$$m - n = a.$$
$$M = P \cdot m - P \cdot n = P(m - n) = P \cdot a.$$

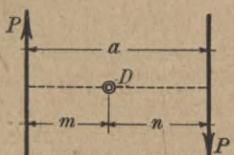


Abb. 88.

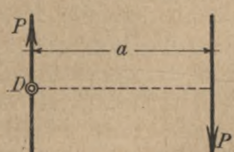


Abb. 89.

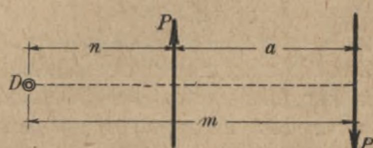


Abb. 90.

Hieraus folgt, daß ein Kräftepaar lediglich eine Drehbewegung hervorbringen kann, und daß die Größe dieses Drehbestrebens stets die gleiche ist, gleichgültig, an welcher Stelle der Drehpunkt angenommen wird.

Den Abstand der beiden Kräfte bezeichnet man als den Arm des Kräftepaares.

Das Drehbestreben oder das statische Moment eines Kräftepaares ist daher stets gleich dem Produkt aus einer der Kräfte $P$ und dem Arm $a$.

$$\boldsymbol{M = P \cdot a.}$$

Der Unterschied zwischen dem Drehmoment $P \cdot a$ eines Kräftepaares und dem statischen Moment $P \cdot a$ einer Einzelkraft besteht darin, daß das Drehmoment des Kräftepaares für alle Punkte der Ebene stets die gleiche Größe und den gleichen Drehungssinn besitzt, während das statische Moment einer Einzelkraft nur für diejenigen Drehpunkte, welche gleichen Abstand von der Einzelkraft haben, also in einer Gleichlaufenden im Abstande $a$ von der Einzelkraft liegen, das gleiche ist.

Die unter $D \cdot 1$ S. 38 u. fgd. gegebenen allgemeinen Erklärungen über die Drehmomente finden für Kräftepaare sinngemäße Anwendung.

Folgende Sätze sind zu beachten:

1. Ein Kräftepaar kann nie durch eine Einzelkraft, sondern nur durch ein Kräftepaar ersetzt oder aufgehoben werden.

2. Ein Kräftepaar läßt sich beliebig in seiner Ebene verlegen, sofern nur der Drehungssinn der gleiche bleibt (auch kann eine Verlegung in eine beliebige gleichlaufende Ebene erfolgen).

3. Ein Kräftepaar läßt sich durch ein anderes ersetzen, welches mit ihm den gleichen Drehungssinn und ein Drehmoment von gleicher Größe besitzt.

### b) Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Zwei oder mehrere Kräftepaare lassen sich zu einem Kräftepaare, dem resultierenden Kräftepaar oder Ersatzkräftepaar, zusammensetzen, das dieselbe Wirkung hervorbringt wie die einzelnen Kräftepaare zusammengenommen. Dieses neue Kräftepaar hat lediglich der Bedingung zu genügen, daß es ein Drehmoment besitzt, welches gleich der algebraischen Summe der Drehmomente der gegebenen Kräftepaare ist.

Ist die Summe der Momente der Einzelkräftepaare z. B.

$$M = P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 + P_4 \cdot a_4 - P_5 \cdot a_5 \pm \cdots,$$

so muß der Wert des Ersatzkräftepaares werden: $M = P \cdot a$.

Die Größe von $P$ oder die von $a$ des Ersatzkräftepaares kann beliebig gewählt werden; ist eine von beiden angenommen worden, so ist dadurch die andere rechnerisch bestimmbar.

$$P = \frac{M}{a} \text{ oder } a = \frac{M}{P}.$$

Man kann das Ersatzkräftepaar auch zeichnerisch ermitteln. Zu diesem Zwecke setzt man die einzelnen Kräfte der gegebenen Kräftepaare nach dem früher mitgeteilten Verfahren mittels Krafteck und Seileck für Einzelkräfte zusammen. Es ergeben sich dann in der ersten und letzten Seilzugseite zwei gleich große, aber entgegengesetzten Sinn zeigende Kräfte, welche das Ersatzkräftepaar mit dem gesuchten Momente $M$ bilden. Das gleiche Moment erhält man, wenn man die algebraische Summe der Momente sämtlicher Einzelkräfte für einen beliebigen Drehpunkt aufstellen würde.

### c) Zerlegung von Kräftepaaren.

Ein Kräftepaar kann in seiner Wirkungsebene (oder in einer zu dieser angenommenen gleichlaufenden Ebene) in zwei oder mehrere Seitenkräftepaare zerlegt werden, wobei die algebraische Summe der Drehmomente der letzteren gleich dem Drehmomente des gegebenen Kräftepaares sein muß.

### d) Gleichgewicht von Kräftepaaren.

Ein Kräftepaar wird im Gleichgewicht gehalten durch ein anderes, das mit ihm das gleiche statische Moment, aber entgegengesetzten Drehungssinn besitzt.

Eine beliebige Anzahl in einer Ebene (oder in gleichlaufenden Ebenen) auf einen Körper wirkender Kräftepaare sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Drehmomente gleich Null ist.

## 3. Einzelkraft und Kräftepaar.

Wirkt an einem Körper eine Einzelkraft $P$ und ein Kräftepaar $Q \cdot a$, so kann man letzteres durch ein gleichwertiges mit dem Moment $P \cdot b$ ersetzen. (Abb. 91 a.)

Es ist dann:

$$Q \cdot a = P \cdot b,$$

$$b = \frac{Q \cdot a}{P}.$$

Dieses neue Moment $P \cdot b$ kann man nun so verschieben, daß der Arm $b$ winkelrecht zur gegebenen Kraft $P$ steht und die eine Kraft $P$ des Kräfte-

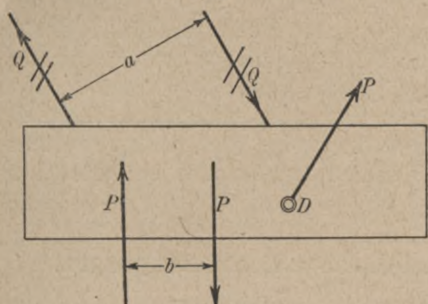



Abb. 91 a.

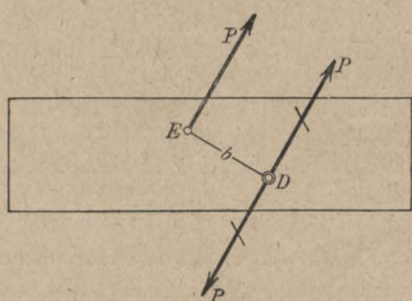



Abb. 91 b.

paares somit in die Richtung der gegebenen Kraft $P$ fällt. Es heben sich dann die beiden in $D$ angreifenden Kräfte auf, und es bleibt eine Einzelkraft $P$ im Punkte $E$ übrig. Die Verschiebung von $P$ erfolgte daher vom Punkte $D$ nach dem Punkte $E$ um die Strecke $b$ winkelrecht zur Kraftrichtung von $P$. (Abb. 91 b.)

Lehrsatz: Wirkt auf einen Körper eine Einzelkraft und ein Kräftepaar, so lassen sich beide zu einer Einzelkraft vereinigen, welche die gleiche Größe wie die gegebene Kraft hat, aber gleichlaufend zu der gegebenen um ein gewisses Maß $b$ verschoben wird.

Wird für die Zusammensetzung des Kräftepaares mit der Einzelkraft der zeichnerische Weg auf die früher angegebene Weise vorgenommen, so erhält man naturgemäß das gleiche Ergebnis.

Umgekehrt kann eine Einzelkraft stets in ein Kräftepaar und eine zweite Einzelkraft, welche zu der gegebenen Kraft gleichlaufend ist und die gleiche Größe besitzt, zerlegt werden. Man kann demnach eine Kraft nach einem beliebigen Punkt verschieben, sofern gleichzeitig ein Kräftepaar mit entsprechendem Drehmoment und Drehsinn angebracht wird. Man fügt in dem gewählten Punkte (*D*) zwei entgegensinnige Kräfte hinzu von gleicher Richtung und gleicher Größe wie die gegebene Kraft *P*. Die gegebene Kraft *P* und die angebrachte, ihr entgegensinnige Kraft *P* bilden ein Kräftepaar, die übrigbleibende Kraft *P* stellt die von *E* nach *D* verschobene Kraft *P* dar.

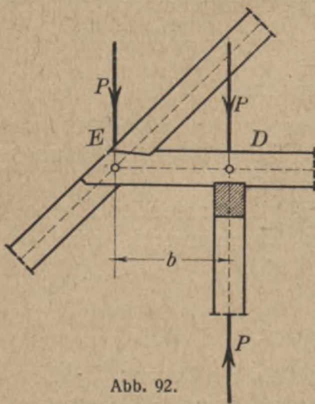


Abb. 92.

Hiervon wird häufig eine Anwendung gemacht z. B. bei hölzernen Dachbindern. (Abb. 92.)

Wirken mehrere Einzelkräfte und mehrere Kräftepaare gleichzeitig an einem Körper, so setze man die Einzelkräfte zu einer Mittelkraft, die einzelnen Kräftepaare zu einem Ersatzkräftepaare zusammen und vereinigte beide nach obigem Satze zu einer Einzelkraft.

## E. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene.

Wirken auf einen Körper eine beliebige Anzahl Kräfte, so befindet er sich im Gleichgewichtszustande, wenn durch die Kräftegruppe weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung hervorgerufen werden kann.

Nach Früherem ist eine fortschreitende Bewegung unmöglich, wenn die Mittelkraft aller wirkenden Kräfte gleich Null ist; eine Drehbewegung ist unmöglich, wenn sich kein resultierendes Moment ergibt, also ein Kräftepaar nicht auftritt.

### 1. Die allgemeinen zeichnerischen Gleichgewichtsbedingungen.

Obgleich diese Bedingungen bereits besprochen wurden (s. S. 29), so sollen sie hier der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

Lehrsatz: Eine beliebige Anzahl in einer Ebene liegender Kräfte befindet sich im Gleichgewicht, wenn sie sich
1. zu einem geschlossenen Krafteck mit
2. gleichem Umfahrungssinn zusammensetzen lassen und sich
3. zwischen ihren Richtungen ein sich schließendes Seileck zeichnen läßt.

Sonderfälle: a) Eine beliebige Anzahl in einer Ebene wirkender Kräfte, deren Richtungen sämtlich durch einen gemeinsamen Schnittpunkt gehen, ist im Gleichgewicht, wenn sie sich zu einem geschlossenen Krafteck mit gleichem Umfahrungssinn zusammensetzen lassen.

b) Drei in einer Ebene liegende, nicht gleichlaufende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Richtungen einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen und sie sich zu einem Kräftedreieck mit gleichem Umfahrungssinn zusammensetzen lassen.

c) Zwei in einer Ebene liegende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie in derselben Geraden liegen und gleiche Größe, jedoch entgegengesetzten Sinn haben.

## 2. Die allgemeinen rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen.

Aus dem unter 1a erwähnten zeichnerischen Merkmal, daß das Kräftevieleck sich beim Gleichgewichtszustand schließen muß, also eine Mittelkraft $R = 0$ vorhanden ist, folgt ohne weiteres, daß auch die Seitenkräfte $R_x$ und $R_y$, welche durch Zerlegung der Mittelkraft $R$ nach zwei beliebig angenommenen Richtungen entstehen würden, gleich Null sein müssen.

Ferner muß auch die algebraische Summe der Drehmomente gleich Null sein, damit eine Verdrehung infolge von Kräftepaaren nicht auftritt (s. D. 2. d. S. 47).

Satz: Beliebig viele in einer Ebene auf einen Körper wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Seitenkräfte, welche durch Zerlegung aller Kräfte nach zwei beliebigen Richtungen entstanden sind, für jede der Richtungen gleich Null ist und ferner die algebraische Summe der Momente aller Kräfte bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt gleich Null wird. Die rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen lauten demnach:

$$\sum R_x = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

$$\sum R_y = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

$$\sum M = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

In der Regel erfolgt die Zerlegung der Kräfte in lotrechter und wagerechter Richtung, da diese Annahme meist die bequemste für die Lösung der Aufgaben der Statik ist. Die allgemeinen Gesetze sind dann folgende:

Lehrsatz: Beliebig viele in einer Ebene auf einen Körper wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

**1. die algebraische Summe ihrer sämtlichen wagerechten Seitenkräfte gleich Null,**

**2. die algebraische Summe ihrer sämtlichen lotrechten Seitenkräfte gleich Null,**

**3. die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt gleich Null ist.**

Die rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen sind demnach folgende:

$$\sum H = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

Ein Verschieben in wagerechter Richtung tritt nicht ein.

$$\sum V = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

Ein Verschieben in lotrechter Richtung tritt nicht ein.

$$\sum M = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

Eine Drehung tritt nicht ein.

Mittels dieser drei wichtigen grundlegenden Gleichungen werden viele Aufgaben der Statik gelöst.

Sonderfälle: a) Eine beliebige Anzahl in einer Ebene wirkender Kräfte, deren Richtungen sämtlich durch einen gemeinsamen Schnittpunkt gehen, sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer sämtlichen wagerechten Seitenkräfte gleich Null ist und die algebraische Summe ihrer sämtlichen lotrechten Seitenkräfte ebenfalls gleich Null ist.

b) Drei in einer Ebene liegende, nicht gleichlaufende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Richtungslinien einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen und die algebraische Summe ihrer wagerechten Seitenkräfte und die algebraische Summe ihrer lotrechten Seitenkräfte gleich Null ist.

c) Zwei in einer Ebene liegende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie in derselben Geraden liegen und ihre algebraische Summe gleich Null ist.

# III. Der Schwerpunkt.

## A. Allgemeines.

Aus der Naturlehre ist bekannt, daß zwischen der Erde und den auf ihr befindlichen Körpern eine Anziehung herrscht, welche Schwerkraft genannt wird, da sie die Schwere der Naturkörper veranlaßt. Sie äußert sich entweder durch den freien Fall der Körper oder durch den Druck, den ein unterstützter Körper auf seine Unterlage ausübt. Man bezeichnet diesen Druck als das Gewicht des Körpers.

Das Gewicht eines Baukörpers muß bei vielen Aufgaben der Statik in Rechnung gestellt werden. Es ist dazu notwendig, die Größe, die Richtung und den Angriffspunkt dieser Kraft zu bestimmen.

Ein Körper besteht aus sehr vielen kleinen Massenteilchen, von denen jedes von der Erde angezogen wird und somit ein bestimmtes Gewicht besitzt. Die Summe dieser Einzelgewichte bildet das Gesamtgewicht des Körpers, dessen Größe man durch Vergleich mit der Schwere anderer bekannter Körper, z. B. mittels der Wage feststellen kann.

Da man die Anziehungskraft der Erde im Mittelpunkt der Erde wirkend annehmen kann, so wird die Richtung des Gewichts jedes einzelnen Massenteilchens nach jenem Mittelpunkte weisen, also immer lotrecht sein. Infolge der großen Entfernung der Oberfläche der Erde vom Erdmittelpunkte können für die Zwecke unserer Untersuchungen die Lotlinien, also auch die Richtungen der Einzelgewichte als gleichlaufend angesehen werden. Die Mittelkraft dieser vielen Einzelparallelkräfte, das Gewicht eines Körpers, ist demnach ebenfalls lotrecht gerichtet. Somit ist die Richtung der Mittelkraft bestimmt.

Die Angriffspunkte der gleichlaufenden Einzelkräfte sind die Massenteilchen selbst, sie haben gegeneinander eine unveränderliche Lage. Auf Grund des früher Mitgeteilten (S. 36) muß sich für die sämtlichen gleichlaufenden Einzelgewichte der Massenteilchen des Körpers ein Punkt, der Mittelpunkt der gleichlaufenden Kräfte, angeben lassen, durch welchen die Mittelkraft der Einzelkräfte, also das Gesamtgewicht des Körpers, hindurchgeht, gleichgültig, in welcher Lage der Körper sich befindet oder in welche er gedreht wird.

Den Mittelpunkt der gleichlaufenden Kräfte nennt man in diesem Falle den Schwerpunkt, und dieser stellt den Angriffspunkt des Gewichts dar.

Für die statischen Untersuchungen kann man fast ausnahmslos annehmen, daß die Baukörper aus durchweg gleichmäßig dichtem (homogenem) Stoffe bestehen; die Lage des Schwerpunktes ist daher auch nur von der geometrischen Form des Körpers, nicht aber von seinem Stoffe abhängig.

Folgende Sätze sind für die weiteren Untersuchungen zu beachten.

1. Das Gewicht eines Körpers kann man sich im Schwerpunkt vereinigt denken; alle übrigen Teile des Körpers sind dann als gewichtslos anzusehen.

2. Die Lage des Schwerpunktes gegen die übrigen Körperteilchen ist unveränderlich.

3. Jede durch den Schwerpunkt des Körpers gehende gerade Linie nennt man Schwerlinie oder Schwerachse, jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene heißt Schwerebene.

Der Schwerpunkt einer ebenen Figur ist bestimmt durch den Schnitt zweier Schwerlinien.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist festgelegt durch den Schnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene oder durch den Schnitt dreier Schwerebenen.

4. Jede Gegenachse (Symmetrielinie) einer Fläche ist eine Schwerlinie, jede Gegenebene (Symmetrieebene) eines Körpers ist eine Schwerebene.

5. Bei allen geometrischen Gebilden, welche einen Mittelpunkt besitzen, fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammen (z. B. Kreislinie, Kreisfläche, Kugel).

## B. Bestimmung von Schwerpunkten.

Bei Bestimmung des Schwerpunktes eines Gebildes ist zunächst zu untersuchen, ob eine oder mehrere Gegenebenen oder Gegenachsen vorhanden sind. Zutreffendenfalls wird die Festlegung des Schwerpunktes wesentlich vereinfacht.

Das allgemeine Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes kann ein rechnerisches oder zeichnerisches sein, wobei es darauf ankommt, das Gebilde in Teile zu zerlegen, deren Schwerpunktslage bekannt ist. Die Teile stellt man als Kräfte dar, welche in dem zugehörigen Teilschwerpunkte angreifen, und bestimmt die Mittelkraft nach den früher angegebenen rechnerischen oder zeichnerischen Verfahren für gleichlaufende Kräfte, also entweder mittels des Momentensatzes oder mittels des Kraft- und Seilecks.

Einen Körper kann man durch gleichlaufende Ebenen in unendlich viele dünne Plättchen zerlegen, deren jedes einen Schwerpunkt besitzt. Jedes dieser Plättchen kann man als eine Fläche ansehen. Man kann diese Plättchen wiederum ebenso in unendlich schmale Streifchen zerteilen, deren jedes einen Schwerpunkt besitzt. Jeden dieser Streifen kann man als Linie ansehen.

### 1. Schwerpunkt von Linien.

I. Der Schwerpunkt einer Geraden liegt in ihrem Halbierungspunkte.

II. Der Schwerpunkt zweier einen Winkel bildenden Strecken liegt auf der Verbindungsgeraden der Mitten der Strecken und teilt die Gerade im umgekehrten Verhältnis der Länge der beiden Strecken.

4*

III. Der Schwerpunkt eines mehrfach gebrochenen Linienzuges wird bestimmt, indem man in den Schwerpunkt der einzelnen Geraden ihre Längen als Kräfte anbringt und den Mittelpunkt der gleichlaufenden Kräfte mittels Seileck und Krafteck bestimmt. Ist eine Gegenachse vorhanden, so genügt eine einmalige Bestimmung der Lage der Mittelkraft, sonst eine zweimalige. Im letzteren Falle wählt man die Richtung für die gleichlaufenden Kräfte am besten winkelrecht zu der der ersteren, um günstige Schnitte zu erhalten.

IV. Um den Schwerpunkt einer krummen Linie zu ermitteln, zerlegt man sie in so viele Teile, daß man diese als annähernd geradlinig betrachten kann, und verfährt dann wie bei III.

Sonderfälle: a) Kreisbogen. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf der Halbierungslinie des zugehörigen Zentriwinkels als Gegenachse und im Abstand

$$x = \frac{r \cdot s}{b}$$

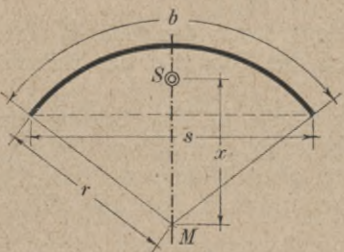


Abb. 93.

vom Mittelpunkte $M$ entfernt (s. Abb. 93).

$r$ = Kreishalbmesser, $b$ = Bogenlänge, $s$ = zugehörige Sehnenlänge.

b) Halbkreis. Für den Halbkreis wird $s = 2r$; $b = r \cdot \pi$, demnach

$$x = \frac{r \cdot 2r}{r \cdot \pi},$$

$$x = \frac{2r}{\pi}.$$

## 2. Der Schwerpunkt von Flächen.

### a) Zeichnerische Lösung.

Die Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche kommt bei zeichnerischen Lösungen von Aufgaben aus der Statik häufig vor.

Bei vielen Flächen läßt sich der Schwerpunkt sofort durch Einzeichnung zweier Gegenachsen angeben, so beim Parallelogramm, Rechteck, Quadrat, Kreis, Kreisring, Ellipse, I Profil usf.

Bei Parallelogrammen, Recktecken und Quadraten fällt der Schwerpunkt mit der Schnittlinie der Diagonalen (Eckenlinien) zusammen. (Am genauesten erhält man den Schwerpunkt bei diesen Flächen als Schnittpunkt der Mittellinien der gleichlaufenden Gegenseiten.) Bei Kreisen und Kreisbogen liegt er im Mittelpunkt. Sind mehrere Gegenachsen vorhanden, so treffe man die Wahl so, daß die Achsen sich möglichst winkelrecht schneiden.

#### 1. Der Schwerpunkt des Dreiecks.

Eine Dreiecksfläche läßt sich in sehr viele zu einer Seite gleichlaufende Streifen zerlegen. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt in der Streifenmitte. Durch Verbindung aller dieser Teilschwerpunkte erhält man eine Mittellinie des Dreiecks (d. h. eine Gerade, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüberliegenden Dreiecksspitze verbindet). In ihr muß der gesuchte Schwerpunkt liegen, die Mittelkraft ist also eine Schwerlinie. Man erhält den Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Mittellinien. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkte und werden durch ihn im Verhältnis 1 : 2 geteilt (s. Geometrie).

Der Schwerpunkt liegt in einem Abstande gleich $\frac{1}{3}$ der Dreieckshöhe von der zugehörigen Grundlinie entfernt. (Abb. 94.)

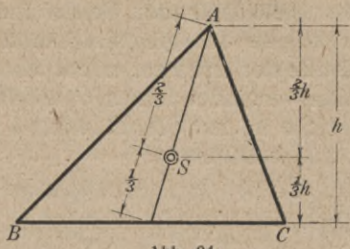



Abb. 94.

### II. Der Schwerpunkt des Vierecks (s. auch oben unter a).

#### A. Das unregelmäßige Viereck.

Erste Lösung: Man zerlege das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, bestimmt deren Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$, verbindet sie durch eine Gerade und erhält so eine Schwerlinie des Vierecks. Man zeichnet dann die zweite Diagonale ein, wodurch das Viereck in zwei andere Dreiecke zerlegt wird, deren Schwerpunkte $S_3$ und $S_4$ ebenfalls bestimmt werden; die Verbindungsgerade $S_3S_4$ ist eine zweite Schwerlinie. Man bringt beide Schwerlinien zum Schnitt und erhält den gesuchten Schwerpunkt $S$. (Abb. 95.)

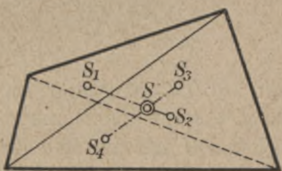


Abb. 95.

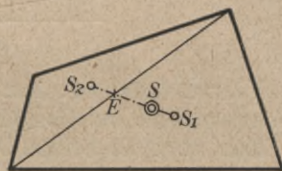



Abb. 96.

Zweite Lösung: Einfacher ist es, $S_2E$ von $S_1$ auf $S_1S_2$ abzutragen, bis $S$, so daß also $S_2E = S_1S$ wird, und erhält in $S$ den gesuchten Schwerpunkt. (Abb. 96.)

#### B. Das Trapez.

Erste Lösung: Verbindet man die Halbierungspunkte $E$ und $F$ der gleichlaufenden Trapezseiten miteinander, so ist $EF$ eine Gegenachse und somit eine Schwerlinie. (Abb. 97.) Eine zweite Schwerlinie erhält man durch Zerlegung des Trapezes mittels einer Diagonale, z. B. $BC$, in zwei Dreiecke

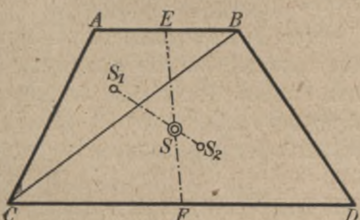



Abb. 97.

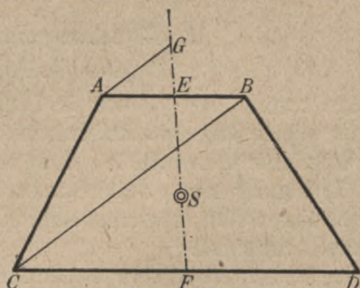



Abb. 98.

wie bei $A$. Die Verbindungslinie der Dreieckschwerpunkte $S_1$ und $S_2$ ist ebenfalls eine Schwerlinie; der Schnittpunkt von $EF$ und $S_1S_2$ ist ein Schwerpunkt.

Zweite Lösung (nach Land): Man zieht wiederum $EF$ und $CB$; durch $A$ wird eine Gleichlaufende zur Diagonale $CB$ gelegt, welche die Verlängerung von $FE$ in $G$ schneidet. Man macht $FS = \frac{GF}{3}$ und erhält $S$ als gesuchten Schwerpunkt. (Abb. 98.)

Dritte Lösung (meist angewendet): Man verbindet wie oben die Mitte der gleichlaufenden Seiten und findet die Schwerlinie $EF$. Man verlängert nun jede der gleichlaufenden Seiten im entgegengesetzten Sinn um die Größe der anderen, macht also $AG = CD = b$ und $DH = AB = a$. (Abb. 99.) Man verbindet ferner $G$ mit $H$ und erhält so eine zweite Schwerlinie $GH$, welche in dem Schnittpunkte $S$ mit der Mittellinie $EF$ den gesuchten Schwerpunkt bestimmt.

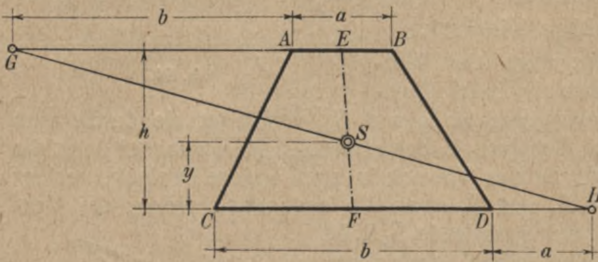


Abb. 99.

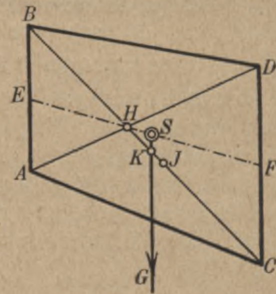


Abb. 100.

Vierte Lösung: Nachstehendes Verfahren kann für Bestimmung der Schwerpunkte bei Gewölbeuntersuchungen angewendet werden (nach Land).

Man zieht die beiden Diagonalen $AD$ und $BC$, trägt von $C$ aus die Strecke $CJ = BH$ ab bis $J$, macht $JK = \frac{1}{3} HJ$ und legt durch $K$ eine Gleichlaufende zu $CD$. Die Verbindungslinie der Mitten $E$ und $F$ der beiden gleichlaufenden Seiten $AB$ und $CD$ wird durch diese Gleichlaufende im gesuchten Schwerpunkte $S$ geschnitten. Die Seiten $AB$ und $CD$ sind im vorliegenden Falle lotrecht, die Gerade $KS$ ist somit ebenfalls lotrecht und stellt gleichzeitig die Lage des Gewichts des Gewölbestückes dar. (Abb. 100.) Die Wirkungslinie des Gewichts $G$ des Gewölbestückes $ABDC$ geht demnach durch den der größten Parallelseite $CD$ zu gelegenen Drittelspunkt $K$ der Strecke $KJ$.

### III. Der Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks.

#### A. Allgemeines.

Man zerlegt das Vieleck in Teilflächen, deren Schwerpunkte sich in einfacher Weise angeben lassen, und bestimmt zunächst durch schrittweise Ermittlung eine Schwerlinie, dann sucht man ebenso durch eine andere Art der Zerlegung eine zweite Schwerlinie auf, wobei zu beachten ist, daß beide Schwerlinien sich möglichst unter einem rechten oder diesem nahezu gleichen Winkel schneiden.

Dies Verfahren ist sehr unbequem und gibt leicht zu Irrtümern Anlaß; deshalb ist es zweckmäßiger, das allgemeine auf S. 51 angegebene zeichnerische Verfahren anzuwenden. Man zerlegt das Vieleck in einfache Teilflächen (Dreiecke, Parallelogramme usf.) mit bekannter Schwerpunktslage und läßt die Gewichte der Teilflächen in den zugehörigen Teilschwerpunkten als Kräfte angreifen. Zu diesen gleichlaufenden Kräften wird mittels des Kraft- und Seilecks die Mittelkraft der Lage nach bestimmt, und man erhält so eine Schwerlinie des Vielecks. Man schlage nun den gleichen Weg nochmals ein für den Fall, daß den Gewichten eine andere, am besten zur Richtung der ersten Annahme winkelrechte Lage gegeben wird, und erhält so eine

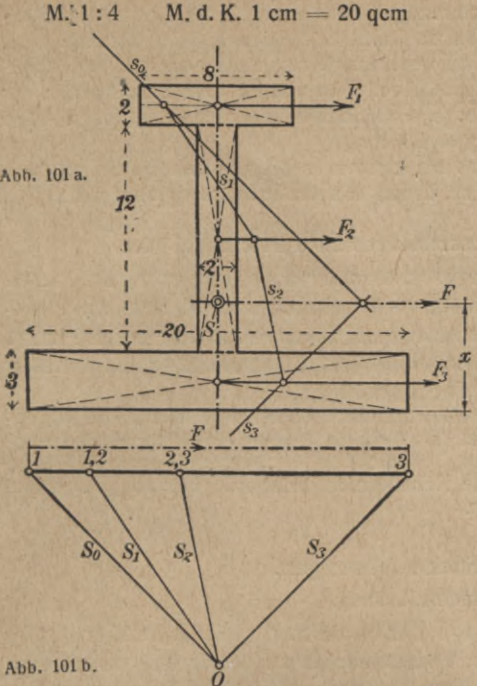



Abb. 101 a.

Abb. 101 b.

zweite Schwerlinie. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien ist als Mittelpunkt gleichlaufender Kräfte der gesuchte Schwerpunkt des Vielecks.

## B. Beispiele.

**Aufgabe 16: Die Fläche besitzt eine Gegenachse.** Es soll der Schwerpunkt der in Abb. 101 a gegebenen Fläche festgelegt werden. M. 1 : 4.

Lösung: Man bestimmt zunächst die Flächeninhalte der Teilflächen unter Zugrundelegung der angegebenen Abmessungen.

Es wird:

$$F_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ qcm};$$
$$F_2 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ qcm};$$
$$F_3 = 3{,}0 \cdot 20 = 60 \text{ qcm}.$$

Die Gesamtfläche

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 16 + 24 + 60 = 100 \text{ qcm}.$$

Man wählt nun einen Kräftemaßstab, z. B. 1 cm = 20 qcm, trägt die Flächeninhalte als Kräfte in den Teilschwerpunkten winkelrecht zur Gegenachse auf und bestimmt die Lage der Mittelkraft $F$ in bekannter Weise (s. Abb. 101 a/b), wodurch eine Schwerlinie erhalten wird. Die Gegenachse ist die zweite Schwerlinie, daher ist $S$ als Schnittpunkt beider in Abstande $x = 4{,}80$ cm gefunden.

**Aufgabe 17: Es ist keine Gegenachse vorhanden.** Es soll der Schwerpunkt der in Abb. 102 a gegebenen Fläche festgelegt werden.

M. 1 : 4; M. d. K. : 1 cm = 20 qcm.

Lösung: Man bestimmt zuerst die Flächeninhalte und die Schwerpunkte der Teilflächen auf Grund der Abb. 102 a bzw. 104. Es wird:

$$F_1 = 14{,}0 \cdot 3{,}0 = 42 \text{ qcm};$$
$$F_2 = 8{,}0 \cdot 2{,}0 = 16 \text{ qcm};$$
$$F_3 = 10{,}0 \cdot 2{,}0 = 20 \text{ qcm}.$$

Man bringt nun die Flächeninhalte als Gewichte in den

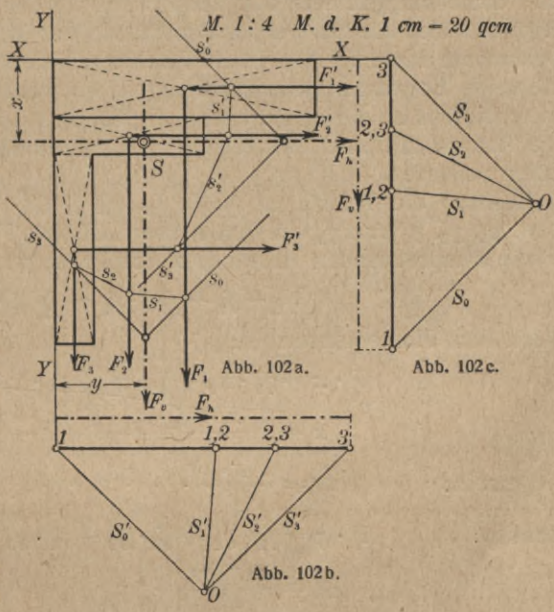



Abb. 102 a.

Abb. 102 b.

Abb. 102 c.

Teilschwerpunkten zunächst lotrecht wirkend an und ermittelt die Lage der Mittelkraft $F_v = F$ in der üblichen Weise durch Kraft- und Seileck (Abb. 102a/b), dann nimmt man die gleichen Gewichte als wagerecht wirkende Kräfte an und legt ebenfalls die Lage der Mittelkraft $F_h = F$ fest. (Abb. 102a und c.) Der Schnittpunkt der beiden Mittelkräfte $F_h$ und $F_v$, welche je eine Schwerlinie darstellen, ergibt den Schwerpunkt $S$. Es wird $x = 4{,}2$ und $y = 4{,}8$ cm.

Anstatt ein zweites Krafteck zu zeichnen, können in diesem Fall die Seilstrahlen für das zweite Seileck winkelrecht zu denen des ersteren gezogen werden.

### IV. Der Schwerpunkt von zusammengesetzten Flächengebilden.

Der Schwerpunkt von zusammengesetzten oder sonstigen unregelmäßigen Flächengebilden wird in gleicher Weise wie bei III. A. S. 54 bestimmt. Etwaige krummlinige Begrenzungen ersetzt man durch möglichst gleichwertige geradlinige, sofern nicht die Schwerpunkte für die krummlinig begrenzten Flächen ohne weiteres angegeben werden können.

Bei besonders schwierigen Gebilden führt am schnellsten und leichtesten folgendes Verfahren zum Ziele: Man zeichnet das Gebilde, dessen Schwerpunkt man bestimmen will, auf starkes Zeichenpapier, schneidet es aus und sucht nun die Fläche wagerecht auf einer Nadelspitze in die Ruhelage zu bringen. Der so gewonnene Punkt der Fläche ist der Schwerpunkt.

## b) Rechnerische Lösungen.

### I. Allgemeine Lösung.

Es ist die Aufgabe gestellt, die Lage der Mittelkraft gleichlaufender Kräfte zu bestimmen. Man hat somit den Momentensatz zu benutzen, wobei eine zweimalige Anwendung in der Regel stattfinden muß (vgl. S. 54).

Man zerlegt die gegebenen Flächengebilde in Teilflächen, deren Teilschwerpunkte in einfacher Weise zu bestimmen sind, wählt zwei, am besten winkelrecht zueinander liegende Achsen in der Ebene der Figur und stellt für jede die Momentengleichung auf. Die Achsen werden am zweckmäßigsten so gelegt, daß sich die Schwerpunktsabstände der Teilflächen möglichst bequem bestimmen lassen. Hat z. B. ein Flächengebilde zwei aufeinander winkelrecht stehende Begrenzungshauptrichtungen, so werden die beiden Hauptachsen gleichlaufend zu diesen angenommen; häufig wird es sich ermöglichen lassen, die Achsen mit zwei, winkelrecht zueinander stehenden Seiten zusammenfallen zu lassen.

Besitzen die Teilflächen $f_1$, $f_2$, $f_3$ und $f_4$ die Abstände $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ bzw. $y_1$, $y_2$, $y_3$ und $y_3$ von den Achsen $XX$ bzw. $YY$ und hat die Gesamtfläche $F$ die entsprechenden Abstände $x$ bzw. $y$, so wird

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \sum f = F.$$

Nach dem Momentensatz ist:

$$F \cdot x = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4.$$

$$x = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4 \ldots\ldots}{F}$$

Allgemein:

$$x = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad I.$$

Ebenso:

$$F \cdot y = f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 + f_4 \cdot y_4$$

$$y = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad II.$$

**Aufgabe 18:** Für die in Abb. 104 gegebene Fläche soll der Schwerpunkt rechnerisch ermittelt werden.

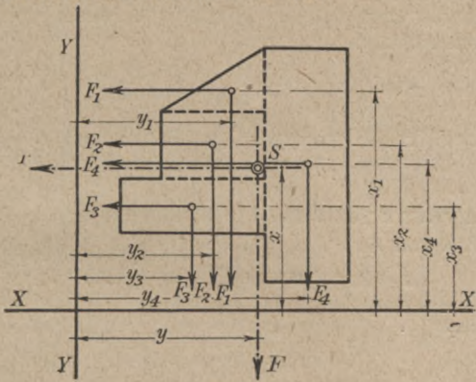


Abb. 103.

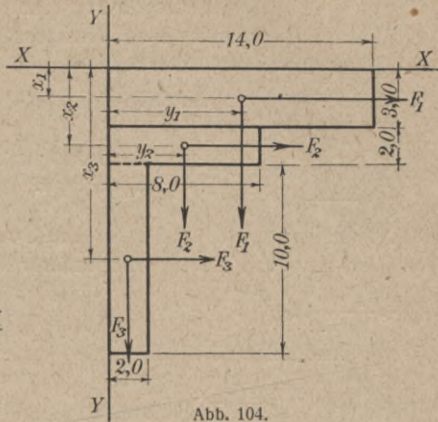


Abb. 104.

**Lösung:** Es ist:

$$f_1 = 14{,}0 \cdot 3{,}0 = 42 \text{ qcm}; \quad f_2 = 8{,}0 \cdot 2{,}0 = 16 \text{ qcm}; \quad f_3 = 10{,}0 \cdot 2{,}0 = 20 \text{ qcm}.$$

$$F = f_1 + f_2 + f_3 = 42 + 16 + 20 = 78 \text{ qcm}.$$

$$x_1 = 1{,}5; \quad x_2 = 4{,}0; \quad x_3 = 10 \text{ cm}.$$

$$y_1 = 7{,}0; \quad y_2 = 4{,}0; \quad y_3 = 1{,}0 \text{ cm}.$$

Die Momentengleichung I lautet:

$$78 \cdot x = 42 \cdot 1{,}5 + 16{,}0 \cdot 4{,}0 + 20 \cdot 10, \qquad x = \frac{327}{78} = 4{,}11 \text{ cm}.$$

Ebenso Momentengleichung II:

$$78 \cdot y = 42 \cdot 7{,}0 + 16 \cdot 4{,}0 + 20 \cdot 1{,}0, \qquad y = \frac{378}{78} = 4{,}84 \text{ cm}.$$

**Aufgabe 19:** Für das Trapez (Abb. 105) soll die Entfernung des Schwerpunkts von den gleichlaufenden Trapezseiten rechnerisch bestimmt werden.

**Lösung:** Es ist:

$$f_1 = \frac{a \cdot h}{2}; \quad f_2 = \frac{b \cdot h}{2}; \quad F = (a + b) \cdot \frac{h}{2}; \quad x_1 = \frac{2}{3} h; \quad x_2 = \frac{1}{3} h.$$

Nach dem Momentensatz ist für einen Punkt der Achse XX:

$$(a + b) \frac{h}{2} \cdot x = \frac{ah}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{3} h,$$

$$(a + b) \frac{h}{2} \cdot x = \frac{h^2}{6} \cdot (2a + b),$$

$$x = \frac{\frac{h^2}{6} \cdot (2a + b)}{\frac{h}{2} (a + b)}, \qquad x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}.$$

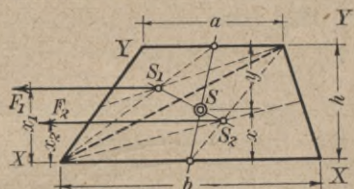


Abb. 105.

Der Abstand von der oberen gleichlaufenden Trapezseite ergibt sich aus der Momentengleichung für einen Punkt der Achse $YY$.

Es ist:
$$(a + b) \frac{h}{2} \cdot y = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{3} h + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h$$

Hieraus wird gefunden:
$$y = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

## II. Besondere Fälle.

### A. Schwerpunkt des Kreisausschnitts.

Der Schwerpunkt eines Kreisausschnitts liegt auf der Winkelhalbierenden des zugehörigen Zentriwinkels (Abb. 106) im Abstand

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$$

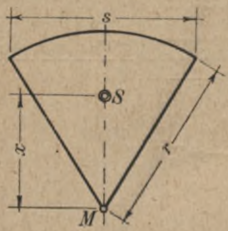


Abb. 106.

vom Mittelpunkte. $r =$ Halbmesser; $s =$ Sehne und $b =$ Bogenlänge.

### B. Schwerpunkt des Halbkreises.

Besonderer Fall von A:

$$s = 2r; \quad b = r\pi,$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 2r}{r \cdot \pi} \qquad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

### C. Schwerpunkt eines Kreisabschnitts.

Der Schwerpunkt eines Kreisabschnitts liegt ebenfalls auf der Winkelhalbierenden des zugehörigen Zentriwinkels (Abb. 107), wobei:

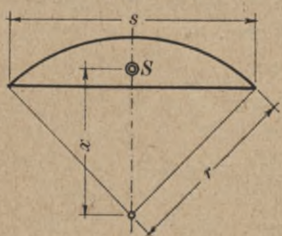


Abb. 107.

$$x = \frac{s^2}{12F}.$$

$F =$ Flächeninhalt des Kreisabschnitts.
Für den Halbkreis wird:

$$s = 2r \quad \text{und} \quad F = \frac{r^2\pi}{2}.$$

$$x = \frac{8r^3}{12 \cdot \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \text{ wie bei B.}$$

### D. Schwerpunkt des Kreisringausschnitts.

Unter Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Abb. 108 wird

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b}.$$

### E. Schwerpunkt des Halbkreisausschnitts.

Es wird $s = 2r$; $b = r\pi$. Durch Einsetzen in den bei D. gefundenen Wert von $x$ erhält man:

$$x = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

### F. Schwerpunkt der Parabelfläche.

1. Ganzer Parabelabschnitt (Abb. 109). Der Schwerpunkt liegt im Abstande

$$x = \frac{2}{5} h$$

von der Sehne $AB$ entfernt auf der Achse.

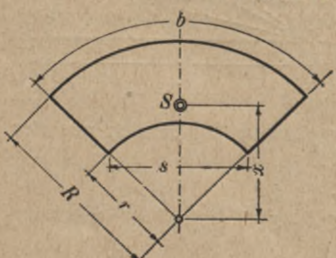


Abb. 108.

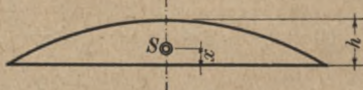


Abb. 109.

Abb. 110.

2. Halber Parabelabschnitt (Abb. 110):

$$x = \frac{2}{5} h; \quad y = \frac{3}{8} b.$$

### 3. Der Schwerpunkt von Körpern.

#### a) Prisma und Zylinder.

Der Schwerpunkt eines Prismas bzw. eines Zylinders liegt im Halbierungspunkte derjenigen Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet (Achse). Der Schwerpunkt des Prismas wird in der Praxis vielfach gebraucht, z. B. bei Untersuchung von Mauerkörpern.

#### b) Pyramide und Kegel.

Der Schwerpunkt einer Pyramide oder eines Kegels liegt in derjenigen Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet (Achse). Er befindet sich in $^1/_4$ der Länge dieser Verbindungsgeraden von der Grundfläche entfernt, also in $^1/_4$ der Höhe.

## IV. Die Standsicherheit.

Zur Herbeiführung des Gleichgewichtszustandes für ein Gebilde ist es notwendig, daß der Schwerpunkt unterstützt ist.

Wird ein Gebilde durch Drehung um einen Punkt oder eine Achse aus seiner Ruhelage gebracht und liegt die Unterstützung so zum Schwerpunkt, daß dieser unter Einwirkung der Schwere von selbst in seine frühere Gleichgewichtslage zurückkehrt, so nennt man den Zustand einen sicheren (stabilen Gleichgewichtszustand. Der Schwerpunkt liegt bei der vorhandenen Unterstützungsart dabei dem Erdmittelpunkt so nahe wie möglich und muß bei der Bewegung des ruhenden Gebildes gehoben werden.

Liegt dagegen die Unterstützung so zum Schwerpunkt, daß dieser nach einer seitlichen Drehung nicht wieder von selbst in seine frühere Lage zurückkehrt, sondern sich in eine tiefere, und zwar sichere Gleichgewichtslage bewegt, so bezeichnet man den Anfangszustand als unsicheren (labilen) Gleichgewichtszustand. Der Schwerpunkt liegt im Falle des unsicheren Gleichgewichtszustandes bei der vorhandenen Unterstützungsart soweit wie möglich vom Erdmittelpunkt entfernt und senkt sich bei einer Bewegung des Gebildes. (Abb. 113.)

Unentschieden (indifferent) heißt der Gleichgewichtszustand, wenn der Schwerpunkt bei einer Bewegung des Gebildes weder gehoben noch gesenkt wird, also in jeder Lage des Gebildes bei der vorhandenen Unterstützungsart ein Ruhezustand vorhanden ist (z. B. bei einer Kugel).

In der Baupraxis handelt es sich in der Regel um Unterstützung von Körpern.

Zur Herbeiführung des Gleichgewichtszustandes kann ein Körper in einem Punkte, in einer Geraden, in einer Fläche, in mehreren Flächen oder in mehreren Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, unterstützt werden.

Wirkt auf einen Körper nur sein eigenes Gewicht (Eigengewicht), so lassen sich folgende einfache Fälle unterscheiden:

Wird ein Körper nur in einem Punkte unterstützt, so muß das im Schwerpunkt angreifende, lotrecht gerichtete Eigengewicht auch durch den Unterstützungspunkt gehen; erfolgt die Unterstützung durch zwei oder mehrere Punkte, die in einer Geraden liegen (Achse), so muß die erwähnte Lotrechte durch den Schwerpunkt die Gerade schneiden.

Wird ein Körper durch drei oder mehrere nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Ebene gestützt, so ist der Gleichgewichtszustand vorhanden, wenn die durch den Schwerpunkt gehende Lotrechte dasjenige größte Vieleck trifft, welches man durch Verbindung der Unterstützungspunkte erhält (s. auch unten).

Vielfach erfolgt die Unterstützung durch eine wagerechte Ebene. Das Eigengewicht $G$ verteilt sich auf die Unterstützungsfläche und ruft nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung lotrecht aufwärts gerichtete Widerstände bei den einzelnen Flächenteilchen hervor, deren Mittelkraft $N$ gleich $G$ ist, aber entgegengesetzten Sinn hat und durch den Schwerpunkt gehen muß, falls Gleichgewicht herrschen soll. Die Mittelkraft zweier gleichlaufender Kräfte gleichen Sinns liegt nun stets zwischen diesen Kräften (S. 33), somit muß $N$ stets innerhalb der unterstützenden Fläche liegen. (Abb. 111.) Es ist daher notwendig, daß die Richtung des Eigengewichts stets **innerhalb** der Unterstützungsfläche liegt.

Würde $G$ außerhalb der Unterstützungsfläche fallen, so würde $G$ und $N$ ein Kräftepaar bilden, dessen Drehmoment ein Umkanten oder Kippen des Körpers veranlassen muß. (Abb. 112.)

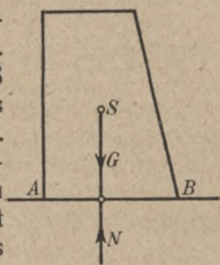


Abb. 111.

Abb. 112.

Als Unterstützungsfläche kommt nicht die wirkliche Berührungsfläche des Körpers mit der Unterlage in Betracht, sondern diejenige Fläche, welche von einer beweglichen Geraden umschlossen wird, die die Berührungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe herumbewegt, daß sie die Fläche stets nur berührt, ohne sie zu schneiden; denn eine Seite der Berührungsfläche kann nur dann eine wirkliche Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Fläche nicht schneidet (einspringende Winkel fallen fort!).

Geht die Schwerpunktslotrechte durch eine mögliche Drehkante, so tritt ein unsicherer Gleichgewichtszustand ein. (Abb. 113.)

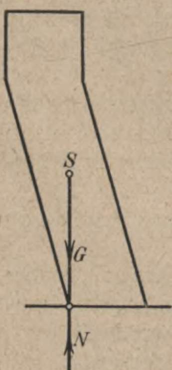


Abb. 113.

In der Regel wirken auf einen Baukörper außer dem Eigengewicht noch eine Anzahl anderer Kräfte, wie z. B. Winddruck, Gewölbeschub, Wasser- und Erddruck usw. Diese haben das Bestreben, den Körper seitlich zu verschieben und ihn umzukanten. Die wagerechte Seitenkraft von $D$ wird meist durch

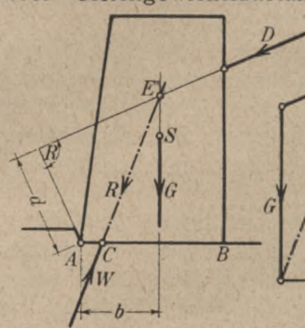


Abb. 114a.

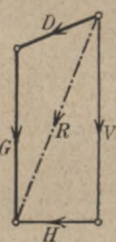


Abb. 114b.

die Reibungswiderstände auf der Unterlage aufgehoben. Den Widerstand, den ein Körper dem Umkanten entgegensetzt, nennt man seine Standsicherheit oder Stabilität. Die Kante, um die der Körper gedreht wird, heißt die Kippkante. Die Möglichkeit einer seitlichen Verschiebung soll in Abb. 114a durch einen Vorsprung am Boden verhindert werden, die Kippkante ist hierdurch gleichzeitig festgelegt.

Ist $D$ die Mittelkraft der schrägwirkenden äußeren Kräfte (Abb. 114a/b), so erhält man aus ihrer Größe und dem auf die Kippkante bezogenen Hebelarm $d$ ein Drehmoment $M = D \cdot d$, welches Kippmoment oder Umsturzmoment genannt wird. Die lotrecht wirkenden Kräfte (Eigengewicht und etwaige senkrechte Belastungen) liefern für die Kippkante ebenfalls ein Drehmoment, welches dem Kippmoment entgegenwirkt, den Körper gegen seine Unterlage anpreßt und somit ein Maß für die Standfähigkeit des Körpers angibt. Das Moment heißt deshalb Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment).

Das Standsicherheitsmoment wird um so größer, je länger der Hebelarm $b$ der lotrechten Last ist. Je weiter also der Durchgangspunkt der lotrechten Kraft durch die Unterstützungsfläche von der Kippkante entfernt ist und je größer das Eigengewicht und die Belastungen sind, um so größer ist die Standfähigkeit.

Es ist Standsicherheit vorhanden, solange $G \cdot b > D \cdot d$ ist.

Wird $G \cdot b = D \cdot d$, so befindet sich der Körper im unsicheren Gleichgewicht, ist $Gb < D \cdot d$, so tritt ein Kanten ein.

In der Praxis übertrifft das Standsicherheitsmoment das Umsturzmoment mindestens um das 1,5fache

$$G \cdot b > 1{,}5\, D \cdot d.$$

Setzt man in Abb. 115a/b die auf einen Baukörper wirkenden Kräfte ($P$ und $G$) zeichnerisch zu ihrer Mittelkraft $R$ zusammen, so trifft $R$ die Unterstützungsfläche im Punkte $C$, welcher Druckpunkt genannt wird. In $C$ muß, damit Gleichgewicht herrscht, ein gleichgroßer, aber entgegengesetzt wirkender Gegendruck $W$ auftreten. $W$ kann nur dann geleistet werden, wenn $C$ innerhalb der Unterstützungsfläche liegt, das Moment $R \cdot r$ der Mittelkraft $R$ mit dem Hebelarm $r$ für $A$ als Kippkante wirkt in diesem Fall als Standsicherheitsmoment. Je näher $C$ an die Kippkante heranrückt, um so kleiner wird die Standsicherheit, sie wird $= 0$, falls $R$ durch die Kippkante hindurchgeht. Mit Rücksicht auf die in dem Bauwesen erforderliche Sicherheit muß verlangt werden, daß der Druckpunkt $C$ nur bis auf eine bestimmte Entfernung an die Kippkante heranrückt (Näheres s. Teil III a/b), so daß also das Standsicherheitsmoment unbedingt das Umsturzmoment übertrifft.

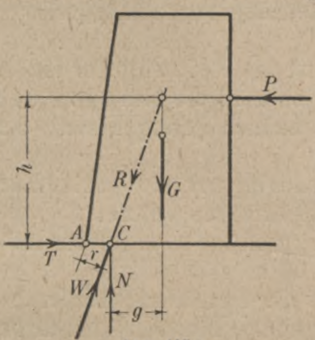


Abb. 115a.

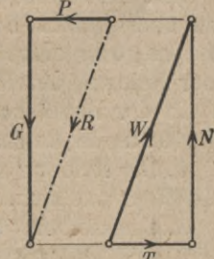


Abb. 115b.

Zerlegt man $W$ in die wagerechte Seitenkraft $T$ und in die lotrechte Normalkraft $N$ (Abb. 115b), so wird für den Gleichgewichtszustand auf Grund der Gleichgewichtsbedingung $G = N$; $T = P$.

Die ein Kräftepaar bildenden Kräfte $P$ und $T$ rufen ein Drehmomont $P \cdot h$ hervor, welches als Kippmoment wirkt und gleich dem Drehmoment $G \cdot g$ der ein Kräftepaar bildenden lotrechten Kräfte $G$ und $N$ sein muß (für Abb. 114a/b wird $N = V$ und $T = H$; durch Zerlegung von $R$ im Punkte $E$ in die Seitenkräfte $V$ und $H$ erhält man die gleichen Beziehungen wie bei Abb. 115).

# V. Die Reibung.

Die Kraft $P$ (Abb. 115a) hat das Bestreben, den Baukörper gegen seine Unterlage wagerecht zu verschieben, durch die an der Grundfläche auftretende Gegenwirkung $T$ (Abb. 115b) wird das Gleichgewicht hergestellt. Diese widerstehende Kraft $T$ ist eine Folge der Rauhigkeit der Oberfläche der Körper und wird Reibungswiderstand oder Reibung genannt.

Das Vorhandensein des Reibungswiderstandes ergibt sich aus der Tatsache, daß ein auf einer wagerechten Grundfläche durch eine einmalige Kraftwirkung in Bewegung gesetzter Körper statt einer gleichförmigen Bewegung eine verzögerte ausführt, z. B. Schlitten, Kegelkugel.

Es entsteht somit ein Reibungswiderstand, wenn zwei sich berührende Körper einen Druck aufeinander ausüben und einer der Körper gegen den anderen verschoben werden soll. Die Reibung wirkt stets an der Berührungsstelle der beiden Körper und hat als widerstehende Kraft den entgegengesetzten Sinn wie die bewegende Kraft oder die Bewegungsrichtung des Körpers.

Arten der Reibung. Gleitet eine Begrenzungsfläche eines Körpers auf der eines anderen fort, so entsteht die gleitende Reibung. Die einzelnen Punkte des gleitenden Körpers legen gleichlaufende Wege zurück.

Sind die Flächen des gleitenden Körpers gekrümmt, so heißt diese Reibungsart Zapfenreibung.

Besitzt der Körper außer der fortschreitenden Bewegung noch eine Drehbewegung, rollt er also auf seiner Unterlage fort, so entsteht die rollende Reibung (Wälzwiderstand).

Die rollende Reibung ist unter gleichen Voraussetzungen erheblich geringer als die gleitende.

Soll ein ruhender Körper bewegt werden, so ist die Reibung der Ruhe zu überwinden. Befindet er sich in Bewegung, so muß die Reibung der Bewegung aufgehoben werden, deren Größe erheblich geringer ist als die der Reibung der Ruhe.

In der Regel kommt bei statischen Untersuchungen nur die gleitende Reibung in Betracht. Es gelten für sie folgende Erfahrungssätze:

1. Die Reibung ist proportional zu dem Drucke, welchen zwei Körper aufeinander ausüben.
2. Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche.
3. Die Reibung ist abhängig von dem Rauhigkeitsgrade der Oberfläche der sich berührenden Körper.
4. Die Reibung ist abhängig von der Festigkeit der aufeinander gleitenden Körper. (Je härter das Material, um so kleiner ist im allgemeinen die Reibung.)

Man bezeichnet das Verhältnis der Reibung $T$ zum Normaldruck $N$ mit $f$ und nennt $f$ die **Reibungsziffer** oder den **Reibungskoeffizient**. (Abb. 116 u. 117.)

Es ist: $\frac{T}{N} = f,$

$$T = N \cdot f.$$

Für $N = 1$ kg wird $T = f$. Man kann danach $f$ als die vom Normaldruck 1 kg hervorgerufene Reibung erklären, $T$ somit als die vom Normaldruck $N$ bewirkte.

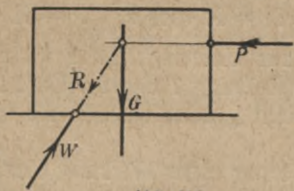


Abb. 116.

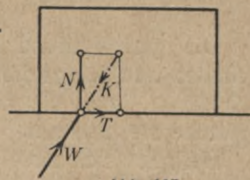


Abb. 117.

Die Reibungsziffer hängt von der Beschaffenheit der berührenden Flächen ab (Material, Bearbeitung) und läßt sich durch Versuche bestimmen.

Zu diesem Zwecke legt man einen Körper $MNOQ$ mit ebener Grundfläche auf die ebenfalls ebene, zunächst wagerechte Oberfläche $AB$ eines als Unterstüzung dienenden Körpers und bringt letztere durch Drehung um eine feste Achse $A$ in eine geneigte Lage. Man vergrößert allmählich den Neigungswinkel bis zu dem Zeitpunkt, wo der Körper auf der Ebene $AB_1$ zu gleiten beginnt. Man mißt nun den Neigungswinkel $r$ der geneigten Ebene gegen die Wagerechte und erhält so die Größe des Reibungswinkels. (Abb. 118.)

Zwischen Reibungswinkel und Reibungsziffer läßt sich folgende Beziehung ableiten: Man zerlege das Körpergewicht $G$ gleichlaufend und winkelrecht zur schiefen Ebene $AB_1$ in die Seitenkräfte:

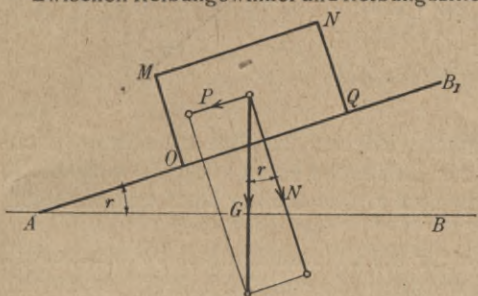


Abb. 118.

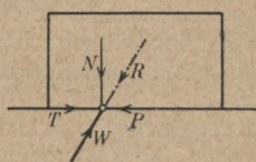


Abb. 119a.

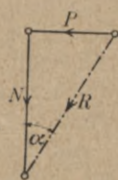


Abb. 119b.

$$P = G \cdot \sin r \quad \text{und} \quad N = G \cdot \cos r.$$

Die Kraft $N$ erzeugt eine Reibung $T = N \cdot f$. Solange $P$ kleiner ist als $N \cdot f$, bleibt der Körper in Ruhe. Unmittelbar vor Beginn des Gleitens ist die Reibung $T = P$. Es ist somit:

$$P = N \cdot f.$$

Unter Einsetzung der gefundenen Werte erhält man:

$$G \cdot \sin r = G \cdot \cos r \cdot f,$$

$$\frac{G \cdot \sin r}{G \cdot \cos r} = f,$$

$$\operatorname{tg} r = f, \qquad \text{also}$$

**Lehrsatz: Die Reibungsziffer ist gleich der Tangente des Reibungswinkels.**

Mittels des angegebenen Versuchs zur Bestimmung des Reibungswinkels läßt sich demnach die Reibungsziffer für jeden Fall in einfacher Weise bestimmen.

Vielfach haben die Baukörper schräge Kraftwirkungen aufzunehmen (S. 60 u. oben Abb. 116). Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen in diesem Falle Ruhezustand vorhanden ist.

Man zerlegt die Mittelkraft $R$ (Abb. 119a/b) in eine wagerechte und eine lotrechte Seitenkraft. Ist $\alpha$ der Winkel, den $R$ mit der Lotrechten bildet, so wird

$$N = R \cdot \cos \alpha; \quad P = R \cdot \sin \alpha.$$

Die gleichlaufend zur Unterlagsfläche wirkende Kraft $P$ verursacht das Gleiten und bringt die Reibung $T$ hervor. Da die Reibung eine widerstehende Kraft ist, kann sie nicht größer werden als die bewegende Kraft $P$, durch welche sie entsteht.

Befindet sich ein Körper unter Wirkung einer bewegenden Kraft im Ruhezustande, so ist die Reibung gleich dieser sie hervorrufenden Kraft. Wächst die bewegende Kraft, so wächst auch die Reibung; der Körper bleibt so lange im Ruhezustande, bis der größtmögliche Wert der Reibung erreicht ist. Überschreitet die Größe der bewegenden Kraft den größtmöglichen Wert der Reibung, so tritt Bewegung ein.

Zur Sicherung des Ruhezustandes muß sein:

$$R \cdot \sin \alpha \leqq T,$$

also da $T = N \cdot f$:

$$R \cdot \sin \alpha \leqq R \cdot \cos \alpha \cdot f,$$

$$\frac{R \cdot \sin \alpha}{R \cdot \cos \alpha} \leqq f,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq f,$$

$$f = \operatorname{tg} r,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq \operatorname{tg} r,$$

$$\alpha \leqq r.$$

Der Gleichgewichtszustand ist demnach gesichert, solange die schräggerichtete Kraft $R$ mit der Winkelrechten zur Gleitebene einen Winkel $\alpha$ einschließt, welcher kleiner ist als der Reibungswinkel $r$. Das Gleiten kann erst eintreten, wenn $\alpha \geqq r$.

Als Mittelwert kann der Winkel $\alpha$ für die Untersuchungen bei Mauerwerk auf Mauerwerk $\leqq 30^0$ angenommen werden, wobei die Bindekraft des Mörtels nicht berücksichtigt ist; für den Fall der Auflagerung von Mauerwerk auf Erdreich soll $\alpha \leqq 20^0$ sein.

# VI. Die Anwendung der statischen Gesetze auf die Trägeranordnungen.

## A. Allgemeines.

Träger. Unter einem Träger versteht man einen Bauteil, bei welchem die auftretende Belastung ausschließlich oder wenigstens zum größten Teile winkelrecht zur Richtung der Längsachse bzw. zur Verbindungslinie der Stützpunkte des Bauteils (Auflager) wirkt. Da die Belastungen in der Regel lotrecht gerichtet sind, haben die Träger meist eine wagerechte oder eine wenig von der Wagerechten abweichende Längsachse. Die Längsachse kann gerade (z. B. Balkenträger), gebrochen (z. B. Dachbinder, Spreng- und Hängewerke) oder gekrümmt sein (z. B. Gewölbe, Bogenträger).

Als Träger im engeren Sinne werden im allgemeinen die Balkenträger bezeichnet.

Balkenträger sind Träger, bei denen bei lotrechter Belastung nur lotrechte Stützendrücke wirken (s. u.).

Bei Sprengwerksträgern ergeben sich bei lotrechter Belastung schiefe Stützendrücke, welche in lotrechte und wagerechte Seitendrucke zerlegt werden können.

Die Gewölbe kann man als Sprengwerksträger mit gekrümmter Achse betrachten.

Unterstützung der Träger. Für die statische Untersuchung eines Trägers ist die Art der Unterstützung und die Anzahl der Stützpunkte von großer Bedeutung.

Liegt ein Träger auf zwei Stützpunkten frei auf, so nennt man ihn einen einfachen Träger; liegen die Stützen am Ende des Trägers, so heißt er ein einfacher Träger (Balken) auf zwei Endstützen (Abb. 120).

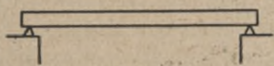


Abb. 120.

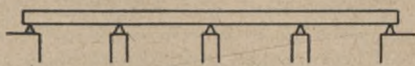


Abb. 121.

Träger, welche auf mehreren Stützpunkten frei aufliegen, bezeichnet man als durchlaufende (kontinuierliche) Träger. (Abb. 121.)

Stützen, auf welchen ein Träger frei aufliegt, bezeichnet man als Auflager; wird der Träger jedoch auf der Stütze auf eine größere Strecke festgehalten, so erhält man eine Einspannungsstelle, der Träger heißt ein eingespannter Träger. (Abb. 122.)

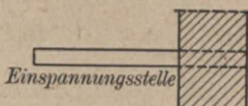


Abb. 122.

Einen nicht unterstützten Trägerteil bezeichnet man als freies Trägerende.

Abb. 123 zeigt einen Träger mit zwei freien Trägerenden (Kragträger mit zwei Kragstücken oder Träger mit zwei Auslegern).

Abb. 124 stellt einen Träger mit einem freien Trägerende dar (Kragträger mit einem Kragstück, Träger mit einem Ausleger).

Die von einem Träger überspannte Weite einer Bauwerksöffnung im lichten zwischen den unterstützenden Bauteilen (Stützen) gemessen, heißt die lichte Weite, Lichtweite oder Spannweite und wird mit $l_1$ bezeichnet. Die Entfernung von Stützpunkt zu Stützpunkt des Trägers (also in der Regel den Abstand der Auflagermitten) nennt man Stützweite und bezeichnet sie mit $l$. (Abb. 125.)

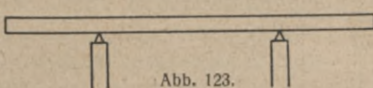


Abb. 123.

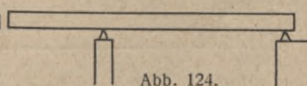


Abb. 124.

Lassen sich die bei einem Belastungsfalle auftretenden unbekannten Stützendrücke mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen ermitteln, so ist der belastete Träger statisch bestimmt, andernfalls statisch unbestimmt.

Die Anzahl der an einem Auflager auftretenden Unbekannten der Stützendrücke richtet sich nach der Ausbildung der Auflager.

Man unterscheidet bei einem Träger feste und bewegliche Auflager.

Feste Auflager sind so zu gestalten, daß sie sowohl eine lotrechte als auch eine wagerechte

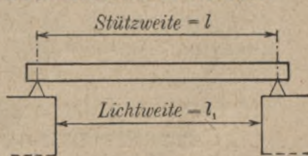


Abb. 125.

Verschiebung des Punktes, in welchem die Stützung stattfindet, also somit in *jeder* Richtung verhindern. Der auftretende Stützen- oder Auflagerwiderstand kann also eine beliebige Richtung in der Trägerebene besitzen, er kann demnach sowohl eine wagerechte wie eine lotrechte Seitenkraft ergeben (Ausbildung als Zylindergelenk!). (Abb. 126.)

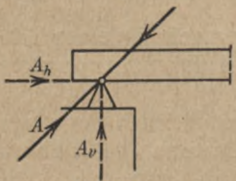


Abb. 126.

Abb. 127.

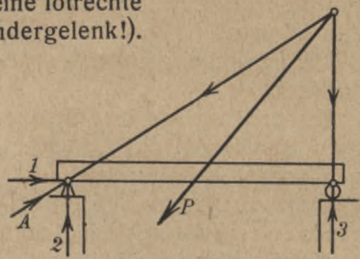


Abb. 128.

*Bewegliche Auflager* gestatten eine Verschiebung des zu stützenden Trägerpunktes auf vorgeschriebener Bahn. Die Verschiebung kann durch die Temperaturänderungen und durch die bei eintretender Belastung infolge der Elastizität der Baustoffe entstehenden Längenänderungen bedingt sein.

Beim beweglichen Auflager wird eine reibungslose Berührung der Oberfläche des Trägers und des Auflagers angenommen.

Läßt die Stützung nur reibungslose, wagerechte Bewegungen zu, so muß der auftretende Auflagerwiderstand lotrecht gerichtet sein. (*Rollenlager* Abb. 127.)

Bei beliebiger Belastung übt der Träger nach Früherem (S. 27 Abb. 55) auf die Unterstützungspunkte bestimmte Drücke aus. Der Träger erhält durch die Unterstützungspunkte die gleichen Drücke, jedoch im entgegengesetzten Sinne (Stützenwiderstände). (Abb. 128.)

Der einfachste und am häufigsten vorkommende statisch bestimmte Träger ist der *Balkenträger auf zwei Endstützen*; bei ihm wird die Anordnung der Auflager stets so getroffen, daß ein Auflager fest, das andere beweglich ist. Es sind bei beliebiger schräg gerichteter Belastungsart am festen Auflager zwei, am beweglichen eine Unbekannte vorhanden, welche mittels der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind. (Abb. 128.)

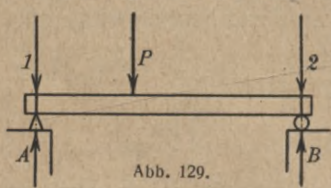


Abb. 129.

Wirken auf einen Balken nur lotrechte Belastungen, so ist die Richtung der *beiden* Auflagerwiderstände ebenfalls eine lotrechte. Es bedarf daher nur der Bestimmung der Größe der beiden Drücke $A$ und $B$, also sind nur *zwei* Unbekannte festzulegen. Hierfür genügen die beiden Gleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ und $\sum V = 0$. Da keine wagerechten Kräfte vorhanden sind, kommt die Bedingung $\sum H = 0$ nicht in Betracht. (Abb. 129.)

Die Lasten und die Stützenwiderstände bilden die äußeren am Körper wirkenden Kräfte im Gegensatz zu den im Träger selbst auftretenden inneren Kräften (Spannungen).

*Belastungen.* Die Belastungsart gibt an, wie die Lasten auf den Träger wirken. Man unterscheidet:

1. *Einzelbelastung.* Die Lasten greifen an einem oder an mehreren Punkten an.

2. Gleichmäßig verteilte Belastung. Die Last ist auf die ganze Länge des Balkens in gleicher Weise verteilt.

3. Streckenbelastung. Einzelne Strecken des Balkens tragen nach bestimmten Gesetzen, meist gleichmäßig auf dle Längeneinheit der betreffenden Strecke verteilte Lasten.

4. Gemischte Belastung. Mehrere der vorgenannten Belastungsarten treten gleichzeitig auf.

Wirkt die Belastung ohne Zwischenbauteile auf die Träger ein, so heißt er unmittelbar belastet (Mauer durch Träger unterstützt), werden die Lasten jedoch durch Zwischenbauglieder auf einzelne Punkte des Balkens übertragen, so nennt man ihn mittelbar belastet (z. B. Hauptträger bei Brücken, wo Raddrücke durch Längs- und Querträger auf die Hauptträger übergeführt werden).

Man unterscheidet bleibende und veränderliche oder bewegliche Belastung (Verkehrsbelastung). Die erstere ist stets vorhanden (Eigengewicht der Träger, auf Trägern ruhende Mauerwerkskörper usw.), die letztere nur zeitweise (z. B. Fahrzeuge, Menschengedränge für Brücken; Schnee- und Winddruck bei Dächern usf.).

Zu beachten ist noch der jeweilige Belastungsfall, bei welchem in Frage kommt, wo die betreffenden Lasten auf den Träger wirken. Von besonderer Wichtigkeit ist dies bei beweglichen Lasten bzw. Lastgruppen.

Belastungsfeld. Um die Kraftwirkungen besser verfolgen zu können, teilt man den Träger in Belastungsfelder ein. Unter einem Belastungsfeld versteht man eine Strecke des Trägers, auf welcher die Art der Belastung (das Belastungsbild) die gleiche ist. Eine Einzellast stellt ein Belastungsfeld von unendlich kleiner Länge dar.

Kraftwirkungen bei einem belasteten Träger. Wird ein Träger durch lotrechte Kräfte belastet, so werden zunächst zur Herbeiführung des Gleichgewichtszustandes der äußeren Kräfte die Stützenwiderstände hervorgerufen. Die äußeren Kräfte suchen ferner in Richtung ihrer Wirkungslinie die einzelnen Trägerquerschnitte gegeneinander zu verschieben, den Träger also quer zu seiner Längsachse durchzuscheren und außerdem ihn durchzubiegen.

Für jeden beliebig gewählten Trägerquerschnitt wird sich daher eine äußere Kraft (Gesamtkraft, Mittelkraft) ergeben, die den linken Trägerteil gegen den rechten in Richtung des Querschnittes zu verschieben sucht und Querkraft genannt wird. Fernerhin tritt ein statisches Moment der äußeren Kräfte auf, welches für den betrachteten Trägerquerschnitt den linken Trägerteil gegen den rechten zu verbiegen sucht und Biegungsmoment heißt.

Durch diese beiden äußeren Kraftwirkungen wird der Baustoff des Trägers beansprucht, es entstehen innere Kräfte, welche sich mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht halten müssen. Die Abmessungen des Trägers müssen demnach so gewählt werden, daß in jedem Querschnitt diese betreffenden inneren Kräfte überhaupt geleistet werden können und der Träger auch auf die Dauer mit Sicherheit den Einwirkungen der angreifenden Kräfte widerstehen kann.

Zur richtigen Bestimmung der Abmessungen eines Trägers bedarf es der Ermittlung des größten Biegungsmoments (Maximalmoment = $M_{max}$). Der Querschnitt, in welchem dasselbe auftritt, heißt der gefährdete (auch gefährdester, gefährlicher oder Bruchquerschnitt genannt) **Querschnitt**, weil an dieser Stelle am ersten ein Bruch des Trägers zu befürchten ist.

Für den vorliegenden Teil des Leitfadens handelt es sich lediglich um die Ermittlung der Größe der Querkräfte und Biegungsmomente; die Bestimmung der Abmessungen der Träger erfolgt später in der Festigkeitslehre. (T. II, auch III a/b und IV a/b).)

Im folgenden soll nur eine **bleibende, unmittelbare** Belastung auf den Träger wirkend angenommen werden.

## B. Einzelbelastung eines Trägers auf zwei Endstützen.

### 1. Träger mit mehreren Einzellasten.

#### a) Zeichnerische Lösung.

##### I. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Auf einen Träger wirken die Lasten $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$. Durch sie werden in den Auflagerpunkten $A$ und $B$ die Stützendrücke $A$ und $B$ hervorgerufen, welche man nach C. 2. c. (S. 37) bestimmen kann. (Abb. 130 a/b.)

Man reiht die gegebenen Lasten zu einem Kräftezuge aneinander, wählt den beliebigen Pol 0, zieht die Polstrahlen und zeichnet dann das Seileck, dessen äußerste Seiten die durch $A$ und $B$ gelegten Auflagersenkrechten schneiden. Die so erhaltenen Schnittpunkte verbindet man durch die Schlußlinie $s$ und zieht zu ihr eine Gleichlaufende durch den Pol 0, welche die Mittelkraft $R = AE$ im Punkte $C$ trifft; die Strecke $CA$ ist nach Früherem (S. 37) = dem Stützendruck $A$, die Strecke $EC$ = dem Stützendruck $B$.

Die Stützenwiderstände $A$ und $B$ halten den gegebenen Lasten das Gleichgewicht, da allen auftretenden Kräften ein geschlossenes Krafteck und ein geschlossenes Seileck entspricht.

M. 1 : 200 M. d. K. 1 cm = 400 kg

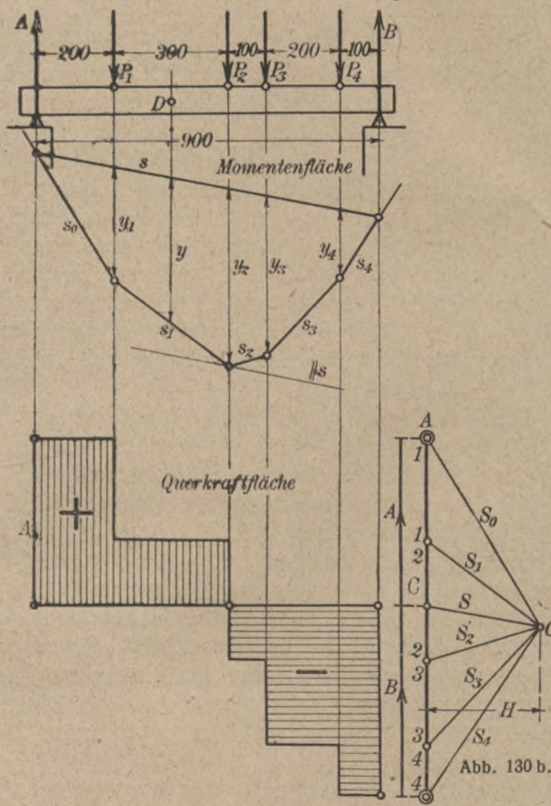



Abb. 130 b.

Abb. 130 a.

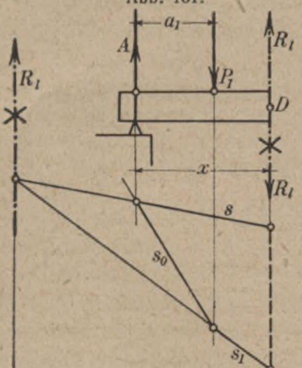
## II. Bestimmung des Biegungsmomentes und der Querkraft.

### A. Allgemeines.

Um das an einer beliebigen Trägerstelle (z. B. bei $D$) auftretende Biegungsmoment und die daselbst wirkende Querkraft zu bestimmen, denkt man sich den Träger bei $D$ durch einen lotrechten Schnitt in zwei Teile getrennt und betrachtet zunächst das linke Trägerstück, welches man sich zweckmäßig stets nochmals besonders herauszeichnet (Abb. 131). Die äußeren Kräfte am ganzen Träger hielten sich vor der Trennung im Gleichgewicht, ebenso befanden sich an jeder Stelle des Trägers die auftretenden äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht. Nachdem nun der innere Zusammenhang des Trägers an der Schnittstelle durch die Trennung des Trägers gelöst wurde, kann der vorhandene Gleichgewichtszustand nur dadurch wiederhergestellt werden, daß an der Schnittstelle äußere Kräfte angebracht werden, welche die gleiche Wirkung verursachen wie die vorher an dieser Stelle auftretenden inneren Kräfte. Die Ermittlung dieser inneren Widerstandskräfte gehört in das Gebiet der Festigkeitslehre.

Die äußeren Kraftwirkungen für den Trägerpunkt $D$ kann man sich am einfachsten folgendermaßen klarmachen. Man bildet aus sämtlichen am linken Trägerstücke wirkenden äußeren Kräften die Mittelkraft $R_l$, deren Lage aus dem Seileck und deren Größe aus dem Krafteck entnommen werden kann (s. Abb. 131 und 130b). Die Lage erhält man, indem man den Schnittpunkt der zugehörigen (geschnittenen!) Seilstrahlen (hier $s$ und $s_1$) bestimmt. Durch

Abb. 131.

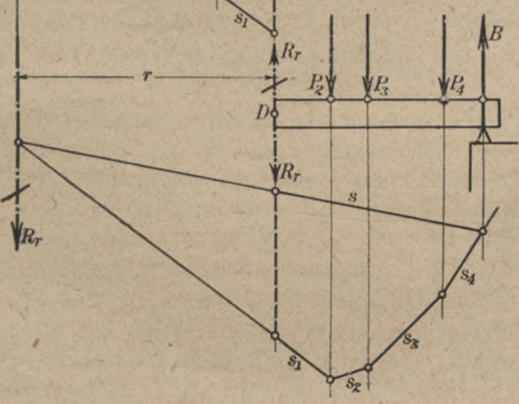



diesen Punkt muß $R_l$ (hier $R_l = A - P_1$) gehen (vgl. S. 34 und 35). Am linken Balkenstück wirkt also jetzt nur noch die ersetzende äußere Kraft $R_l$.

Man fügt nun in $D$ zwei gleich große, aber einander entgegengesetzte Kräfte $= R_l$ hinzu, wodurch an der Kraftwirkung nichts geändert wird. Die ursprünglich gefundene Mittelkraft $R_l$ und die in $D$ im entgegengesetzten Sinne wirkende Hilfskraft $R_l$ (in Abb. 131 beide durchkreuzt) bilden nun ein Kräftepaar mit rechtsdrehenden Momente

$$M_l = R_l \cdot r.$$

Abb. 132.




Dies Moment $M_l$ stellt das statische Moment aller äußeren Kräfte in bezug auf die Schnittstelle $D$ (Schwerpunkt des Querschnitts) am abgeschnittenen linken Trägerstücke dar. Es versucht das linke Balkenstück um den Punkt $D$ zu drehen. Der Querschnitt, dem $D$ angehört, ist infolge des in der Tat vorhandenen Zusammenhangs mit dem rechten Balkenteil als unverrückbar festgehalten anzusehen. Daher wird $M_l$ das linke Balkenstück gegen den

Querschnitt $D$ verbiegen. $M_l$ heißt somit das Biegungsmoment für den Punkt $D$. Das Biegungsmoment ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente aller äußeren Kräfte am abgeschnittenen Trägerstück, z. B. für $D$:

$$M_D = A \cdot x - P_1(x - a_1)$$

s. auch S. 41.

Außerdem wirkt in $D$ noch die zweite (nicht durchkreuzte) Hilfskraft $R$ quer zur Längsachse des Trägers, nach oben; sie sucht das abgeschnittene linke Trägerstück gegen das rechte in ihrem Wirkungssinne, also nach oben zu bewegen, im ursprünglichen zusammenhängenden Zustande demnach den Träger bei $D$ durchzuscheren. Man nennt diese äußere Kraft daher die Querkraft oder Scherkraft (Transversalkraft) und bezeichnet sie mit $V$.

Man kann daher folgendes festsetzen:

Satz: **Das Biegungsmoment für einen bestimmten Trägerquerschnitt ist dasjenige Kraftmoment, welches den linken Trägerteil gegen den rechten an der betreffenden Querschnittsstelle zu verbiegen sucht. Das Biegungsmoment ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller am abgeschnitten gedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Querschnitts der Schnittstelle als Drehpunkt.**

**Die Querkraft für einen bestimmten Trägerquerschnitt ist diejenige Kraft, welche den linken Trägerteil gegen den rechten in ihrem Wirkungssinne im betrachteten Querschnitt zu verschieben sucht. Die Querkraft ist gleich der Mittelkraft aller am abgeschnitten gedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte.**

Zur Herstellung des Gleichgewichts der äußeren und inneren Kräfte bedarf es an der Schnittseite eines linksdrehenden Momentes der inneren Kräfte $M_i$, wobei $M_i = M_l$ sein muß; ferner muß an die Querschnittsfläche eine innere (hier nach unten wirkende) Gesamtkraft $T$ (Schub- oder Scherkraft) geleistet werden, wobei $T = R_l$ werden muß.

Betrachtet man nun in gleicher Weise das rechte Balkenstück, so gelten die genau gleichen Gesichtspunkte wie für das linke. Aus sämtlichen, am rechten Trägerstücke wirkenden Kräften ergibt sich die Mittelkraft $R_r$, deren Lage ebenfalls durch den Schnittpunkt der Seilstrahlen $s$ und $s_1$ bestimmt ist. (Abb. 132.) Aus dem Krafteck findet man, daß $R_r = -R_l$ ist, d. h. $R_r$ ist gerade so groß wie $R_l$, hat jedoch den entgegengesetzten Sinn. Da beide Kräfte in dieselbe Gerade fallen, so heben sie sich auf, und es ist am gesamten Träger Gleichgewicht vorhanden $\left(\sum V = 0;\ R_l - R_r = 0\right)$.

Fügt man in $D$ am rechten Trägerstück ebenfalls wie oben zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte $R_r$ hinzu, so entsteht wiederum ein Kräftepaar, jedoch mit dem linksdrehenden Moment $M_r = R_r \cdot r$. Das Moment $M_r$ ist das Biegungsmoment der am rechten Balkenstücke wirkenden äußeren Kräfte in bezug auf den Querschnitt $D$. Da $R_l = R_r$ ist, so wird auch $M_r = M_l$.

Die Momente der Mittelkräfte $R_r$ und $R_l$ bezogen auf den Drehpunkt $D$ sind also der Größe nach einander gleich, haben jedoch entgegengesetzten Drehsinn, sie halten sich daher im Gleichgewicht $\left(\sum M = 0;\ M_l - M_r = 0\right)$. Da sie sich aufheben, ist am gesamten Träger auch Gleichgewicht vorhanden gegen Drehen.

Die im Querschnitt $D$ am rechten Trägerstück übrigbleibende, nach unten wirkende Hilfskraft $R_r$ bildet die Querkraft für das rechte Trägerstück und hält sich ebenfalls mit der am linken Trägerstück angreifenden, gleich großen, aber entgegengesetzt wirkenden Querkraft $R_l$ im Gleichgewicht.

Es ist:
$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$\underbrace{A - P_1}_{R_l} = \underbrace{P_2 + P_3 + d_4 - B}_{R_r}$$

und
$$M_l = M_r.$$

Satz: Zur Ermittlung des Biegungsmoments oder der Querkraft für einen bestimmten Querschnitt ist es gleichgültig, ob man das links oder rechts von der daselbst angenommenen Schnittstelle liegende Trägerstück betrachtet. Man wird in der Regel denjenigen Trägerteil wählen, an welchen die wenigsten Kräfte wirken.

In Abb. 133 S. 74 sind die Kraftwirkungen für den Querschnitt $D$ nochmals veranschaulicht.

Am linken Balkenstück erhält ein rechtsdrehendes Moment, am rechten Balkenstück ein linksdrehendes Moment positives Vorzeichen, denn beide rufen im Querschnitt $D$ die gleiche Verteilung der Faserbeanspruchungen, und zwar unten Zug und oben Druck, infolge des Biegebestrebens hervor.

Momente mit entgegengesetztem Drehsinn (Abb. 134) ergeben negative Beiträge; beide rufen im Querschnitt $D$ die gleiche Verteilung der Faserbeanspruchungen hervor und zwar unten Druck und oben Zug.

Am linksseitigen Balkenstück erhält eine nach oben wirkende Querkraft positives Vorzeichen, am rechten Balkenteil eine nach unten wirkende Querkraft und umgekehrt (Abb. 133/134).

## B. Das Biegungsmoment.

Zur Bestimmung des Biegungsmoments für einen beliebigen Punkt $D$ des Trägers ermittelt man nach S. 43 den Polabstand $H$ (d. i. die winkelrechte Entfernung des Poles von der Mittelkraft aller am abgeschnittenen Trägerstück wirkenden äußeren Kräfte) und zieht durch den Punkt $D$ eine Gleichlaufende (hier Lotrechte) zur Mittelkraft. Die zu den gegebenen Kräften gehörigen, die Mittelkraft einschließenden, äußeren Seilzugseiten (hier die Schlußlinie $s$ und $s_1$) schneiden auf dieser Gleichlaufenden eine Strecke $y$ ab. Nach Früherem (S. 43) wird das Biegungsmoment für $D$ demnach

$$M_D = H \cdot y.$$

Die Größe $H$ ist im Kräftemaßstabe, die Größe $y$ im Längenmaßstabe zu messen, so das man $H$ in kg und $y$ in cm erhält. $M$ ergibt sich dann in kg·cm. Für $H$ wählt man der einfacheren Rechnung wegen stets eine runde Größe (vgl. S. 43 und auch S. 68 Abb. 130).

Die Größe $H$ ist für denselben Träger bei lotrechten Lasten stets unveränderlich. Die Größe des Produktes $H \cdot y$, welches für alle möglichen Querschnitte des Trägers das Moment der äußeren Kräfte für den jeweiligen Querschnitt darstellt, ändert sich deshalb nur mit der Größe $y$. Die lotrechten Abschnitte $y$ stellen daher unmittelbar die Momente dar. Man nennt aus diesem

Grunde die von der Schlußlinie und von den Seileckseiten begrenzte Fläche die Momentenfläche.

Aus der Momentenfläche ist ersichtlich, daß lotrecht unter den Belastungspunkten jeweilig Größtmomente liegen, und daß die Momente von einem Lastpunkte zum nächstliegenden entweder zu- oder abnehmen. Das größte Moment muß daher immer unter einem Lastpunkte liegen. Man erhält es, indem man an den Seilzug eine Berührende gleichlaufend zur Schlußlinie legt.

Es können dann zwei Fälle eintreten.

1. Die Gleichlaufende berührt das Seileck in einem Endpunkte; das größte Moment liegt somit an der Stelle der betreffenden zugehörigen Einzellast.

2. Die Berührende fällt mit einer Seileckseite zusammen; das größte Moment hat dann für alle Trägerquerschnitte, welche lotrecht unter dieser Seilzugseite liegen, den gleichen Wert. (Hier liegt $M_{max}$ unter der Last $P_2$.)

Bei der Berechnung der im Hochbau meist üblichen Träger mit unveränderlichem Querschnitt bedarf es nur der Bestimmung des größten Moments.

Die Biegungsmomente an den Auflagerpunkten sind gleich Null. Da die Strecken $y$ im vorliegenden Falle sämtlich auf der gleichen Seite der Schlußlinie liegen, so haben alle Biegungsmomente am Träger positives Vorzeichen. (Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Schnitte von links nach rechts an dem Träger wandern läßt und die Lage der Mittelkraft und ihr Moment für die Schnittstelle bestimmt.)

Satz: Bei einem Träger auf zwei Endstützen, welcher mit lotrechten Kräften gleichen Sinnes belastet ist, wird das Moment der äußeren Kräfte für jeden Trägerquerschnitt positiv.

Die Mittelkraft der auf einem Trägerabschnitt fallenden äußeren Kräfte kommt stets außerhalb der Auflager zu liegen, kann also nie auf den zwischen den Auflagerpunkten liegenden Trägerteil fallen.

## C. Die Querkraft.

Die Querkraft an einer bestimmten Schnittstelle erhält man der Größe nach als Mittelkraft aller am abgeschnittenen Trägerteil wirkenden (also links oder rechts von dem betreffenden Querschnitte liegenden) äußeren Kräfte. Die Querkraft ändert ihre Größe bei Belastung des Trägers durch Einzellasten in den Belastungspunkten sprungweise, innerhalb zweier aufeinanderfolgender Belastungspunkte behält sie die gleiche Größe bei. Hiernach ergeben sich die Belastungsfelder (in Abb. 129 an Zahl 5, bei Mitrechnung der Einzellasten 9).

Ähnlich wie beim Biegungsmoment läst sich eine Fläche, die Querkraftsfläche, herleiten, aus welcher für jeden Querschnitt die Querkraft entnommen werden kann. Man trägt zu diesem Zweck von einer wagerechten Geraden (Nullachse genannt), deren Länge durch die durch $A$ und $B$ gelegten Lotrechten begrenzt wird, unter jedem Querschnitt den unter Beachtung des bei A. erwähnten Schnittverfahrens ermittelten, zugehörigen Wert der Querkraft lotrecht auf. Die positiven Werte werden nach oben, die negativen nach unten abgesetzt.

Im linken Auflagerpunkte $A$ wirkt nur die äußere Kraft $A$, daher ist hier die Querkraft $V = A$ zu machen und in einem bestimmten Kräftemaßstabe (am besten in dem des Kraftecks) von der Nullachse in dem zu $A$ gehörigen Endpunkte nach oben aufzutragen. (Abb. 130a S. 68.) Für eine beliebige Schnittstelle zwischen $A$ und $P_1$ bleibt die Mittelkraft am linken, abgeschnitten gedachten Trägerstück $= A$, demnach ist auch die Querkraft vom Auflager $A$ bis zur Laststelle $P_1$ stets $= A$, und die Querkraftsfläche ist im ersten Belastungsfelde daher ein Rechteck von der Höhe $A$ und der Grundlinie $a_1$. Im Punkte $P_1$ ändert sie sich sprungweise um $P_1$ und erhält den Wert $V_1 = A - P_1$, welchen sie beibehält bis zum Lastpunkte von $P_2$, wo sie um $P_2$ sinkt usf.

Es ist demnach die Querkraft

im ersten Belastungsfelde, also zwischen $A$ und $P_1$ : $V_1 = A$,

im zweiten „ , „ „ $P_1$ „ $P_2$ : $V_2 = A - P_1$,

im dritten „ , „ „ $P_2$ „ $P_3$ : $V_3 = A - P_1 - P_2$,

im vierten „ , „ „ $P_3$ „ $P_4$ : $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3$,

im fünften „ , „ „ $P_4$ „ $B$:

$$V_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = - B.$$

Die Querkraftsfläche bildet die Gesamtdarstellung der Verteilung der Querkräfte über den Träger. Es ist aus dem Verlauf derselben ersichtlich, daß die Querkraft am größten am Auflager ist, also da, wo die Momente am kleinsten, nämlich gleich Null sind. Die Querkraft ist an der Stelle am kleinsten, nämlich gleich Null oder den Wert Null durchschreitend, wo das Biegungsmoment seinen Größtwert erreicht.

Letztere Tatsache bildet eine wichtige Grundlage für die Bestimmung der Größtwerte der Biegungsmomente.

Zum bequemeren Zeichnen der Querkraftsfläche kann man den Kräftezug benutzen, in welchem die Querkräfte unmittelbar der Größe nach bestimmbar sind. Man legt durch den Punkt, in welchem die Gleichlaufende zur Schlußlinie der Kräftezug trifft und in dem die Auflagerdrücke $A$ und $B$ zusammentreffen, eine Wagerechte, welche die Nullachse bildet, und verfährt dann wie oben. Die Querkräfte können aus dem Kräftezuge bequem wagerecht übertragen werden.

### III. Zahlenbeispiel.

Die Abb. 130a/b ist für folgende Lastannahmen gezeichnet. $P_1 = 540$ kg; $P_2 = 630$ kg; $P_3 = 450$ kg; $P_4 = 270$ kg. M. d. L. 1 : 200. M. d. K. 1 cm = 400 kg. $H = 600$ kg.

Das größte Moment liegt unter $P_2$. Wie aus der Querkraftsfläche ersichtlich ist, durchschreitet die Querkraft unter $P_2$ den Wert Null.

$$M_1 = H \cdot y_1 = 600 \cdot 1{,}97 \cdot 200 = 176400 \text{ kg cm},$$

$$M_2 = M_{\max} = H \cdot y_2 = 600 \cdot 2{,}32 \cdot 200 = 278400 \text{ kg cm},$$

$$M_3 = H \cdot y_3 = 600 \cdot 2{,}08 \cdot 200 = 249000 \text{ kg cm},$$

$$M_4 = H \cdot y_4 = 600 \cdot 0{,}85 \cdot 200 = 102000 \text{ kg cm}.$$

Die Momente über den Auflagern sind $= 0$, da $y = 0$ ist.

Die Querkräfte ergeben sich zu

$$V_1 = A = 880 \text{ kg}; \quad V_2 = 340 \text{ kg}. \quad V_3 = -260 \text{ kg}. \quad V_4 = -740 \text{ kg}.$$

$$V_5 = -1010 \text{ kg} = -B.$$

## b) Rechnerische Lösung.

### I. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Für jedes im Gleichgewicht befindliche Baugebilde müssen die drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.

$$\text{(I)}\ \sum H = 0; \qquad \text{(II)}\ \sum V = 0; \qquad \text{(III)}\ \sum M = 0.$$

Bei dem vorliegenden Träger, bei welchem nur lotrechte Lasten und demnach auch nur lotrechte Stützenwiderstände (Auflagerwiderstände) auftreten, fällt die erste Gleichgewichtsbedingung fort, da wagerechte Kräfte nicht vorhanden sind. Zur Bestimmung der der Größe nach unbekannten Auflagerwiderstände $A$ und $B$ genügen die beiden übrigen Gleichungen (II) und (III).

Die Gleichgewichtsbedingung (II) ist erfüllt, wenn:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0,$$

also $$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$ ist. . . (1)

Allgemein wird also: $$A + B = \sum P.$$

Zur Berechnung der in der Gleichung (1) auftretenden zwei Unbekannten $A$ und $B$ muß noch eine weitere Gleichung aufgestellt werden. Hierzu benutzt man die Gleichgewichtsbedingung III, welche besagt (S. 49), daß das statische Moment aller äußeren Kräfte bezogen auf jeden beliebigen Punkt als Drehpunkt gleich Null sein muß.

Um eine bequeme Rechnung zu erhalten, wählt man als Drehpunkt den Punkt $A$ oder $B$.

Grund: Der an dem betreffenden Bezugspunkt auftretende Auflagerwiderstand fällt aus der aufzustellenden Gleichung heraus, da sein Hebelarm gleich Null ist, also sein Beitrag zum Drehmoment auch gleich Null wird.

Unter Anwendung der in Abb. 135 angegebenen Hebelarme erhält man bei Aufstellung des Moments für den Bezugspunkt $B$:

$$A \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 - P_4 \cdot b_4 = 0 \quad . \ . \ . \ \text{(III)}$$

$$A \cdot l = P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 = P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4.$$

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4}{l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Durch Einsetzen des Wertes $A$ aus 2 in Gleichung (1) läßt sich der Auflager-

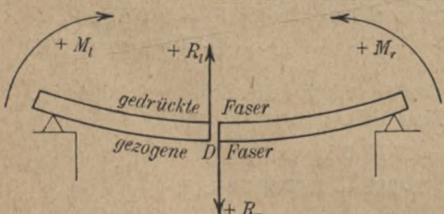



Abb. 133.

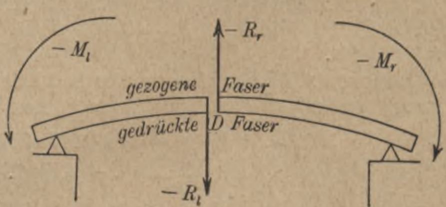



Abb. 134.

widerstand $B$ bestimmen. Zweckmäßiger ist es jedoch, die Gleichgewichtsbedingung (III) auch für den Bezugspunkt $A$ anzuwenden. Man erhält dann:

$$B \cdot l - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 - P_4 \cdot a_4 = 0, \quad . \ . \ . \ \text{(III)}$$

und daraus $$B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 + P_4 \cdot a_4}{l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

$l$ = Stützweite des Trägers; $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$, $a_3$ und $b_3$, $a_4$ und $b_4$ sind die Hebelarme der Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ (s. Abb. 135).

Durch Einsetzen der aus (2) und (3) gewonnenen Werte $A$ und $B$ in (1) erhält man eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Gleichung (2) und Gleichung (3) lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1}{l} + \frac{P_2 \cdot b_2}{l} + \frac{P_3 \cdot b_3}{l} + \frac{P_4 \cdot b_4}{l},$$

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1}{l} + \frac{P_2 \cdot a_2}{l} + \frac{P_3 \cdot a_3}{l} + \frac{P_4 \cdot a_4}{l} \quad \ldots \ldots \quad (3a)$$

Der Beitrag jeder einzelnen Last für den jeweiligen Auflagerwiderstand ist so deutlich ersichtlich.

Die Wirkungen der einzelnen Kräfte addieren sich algebraisch.

Satz: Der Beitrag einer Kraft für einen bestimmten Auflagerwiderstand ist gleich dem Produkt aus der Kraft und dem Verhältnis des vom Auflager abliegenden Hebelarms der Kraft zur Stützweite.

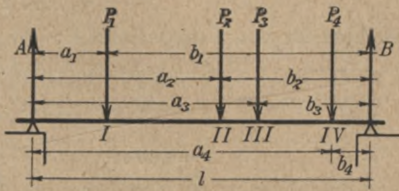



Abb. 135.

## II. Die Querkraft.

Nach dem auf S. 72 unter C. Angegebenen wird die Querkraft im ersten Belastungsfelde (also zwischen $A$ und $P_1$) $V_1 = A$; im zweiten (zwischen $P_1$ und $P_2$) $V_2 = A - P_1$ usf. Man bestimmt diese Querkräfte und stellt denjenigen Punkt fest, wo die Querkraft von der positiven Größe in eine negative übergeht, also den Wert Null durchläuft. An dieser Stelle tritt das größte Biegungsmoment auf.

## III. Das Biegungsmoment.

Das Biegungsmoment für einen beliebigen Querschnitt erhält man nach Früherem (s. S. 69), indem man für den Schwerpunkt desselben als Drehpunkt die algebraische Summe aller statischen Momente der rechts oder der links vom betrachteten Querschnitte am abgeschnittenen Trägerstücke wirkenden äußeren Kräfte bildet. Für Abb. 135 erhält man z. B. folgendes:

Drehpunkt I. $M_1 = A \cdot a_1 - P_1 \cdot 0 = A \cdot a_1$; (Abb. 136)
„ II. $M_2 = A \cdot a_2 - P_1 (a_2 - a_1)$; (Abb. 137)
„ III. $M_3 = A \cdot a_3 - P_1 (a_3 - a_1) - P_2 (a_3 - a_2)$; (Abb. 138)
} linkes Balkenstück betrachtet.

oder einfacher: $M_3 = B \cdot b_3 - P_4 (b_3 - b_4)$ (Abb. 139)
Drehpunkt IV. $M_4 = B \cdot b_4$ (Abb. 140)
} rechtes Balkenstück betrachtet.

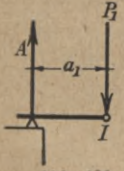


Abb. 136.

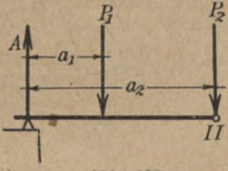


Abb. 137.

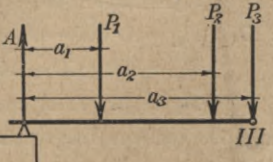


Abb. 138.

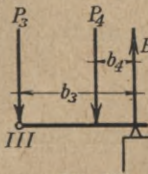


Abb. 139.

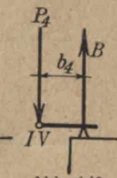


Abb. 140.

Bemerkung: Am linken Trägerstück erhalten rechtsdrehende Momente positives, linksdrehende negatives Vorzeichen; am rechten Trägerstück dagegen linksdrehende positives und rechtsdrehende negatives Vorzeichen (vgl. Abb. 133 u. 134).

### IV. Beispiel.

Für die auf Seite 73 angegebenen Lasten und Abb. 130 S. 68 ersichtlichen Abmessungen werde die Rechnung durchgeführt.

#### A. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Es wird:

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$A + B = 540 + 630 + 450 + 270 \text{ kg},$$

$$A + B = 1890 \text{ kg}.$$

Moment für den Bezugspunkt $B$:

$$A \cdot 900 - 540 \cdot 700 - 630 \cdot 400 - 450 \cdot 300 - 270 \cdot 100 = 0$$

$$A = \frac{540 \cdot 700 + 630 \cdot 400 + 450 \cdot 300 + 270 \cdot 100}{900},$$

$$A = 880 \text{ kg}.$$

Aus dem Moment für den Bezugspunkt $A$ findet man ebenso:

$$B = \frac{540 \cdot 200 + 630 \cdot 500 + 450 \cdot 600 + 270 \cdot 800}{900},$$

$$B = 1010 \text{ kg}.$$

#### B. Bestimmung der Querkräfte.

1. Belastungsfeld: $V_1 = A = +880$ kg,
2. „ $V_2 = A - P_1 = 880 - 540 = +340$ kg,
3. „ $V_3 = A - P_1 - P_2 = 880 - 540 - 630 = -290$ kg,
4. „ $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 = 880 - 540 - 630 - 450 = -740$ kg,
5. „ $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = -B = -1010$ kg.

Das Vorzeichen geht unter der Last $P_2$ aus dem positiven ins negative über, daher liegt daselbst auch das größte Moment.

#### C. Bestimmung der Biegungsmomente.

Für Drehpunkt I (Abb. 136): $M_1 = A \cdot 200 = 880 \cdot 200 = 176000$ kg cm,

„ „ II (Abb. 137): $M_2 = A \cdot 500 - P_1 \cdot 300,$

$$M_2 = 880 \cdot 500 - 540 \cdot 300 = 278000 \text{ kg cm} = M_{max}$$

„ „ III (Abb. 138): $M_3 = A \cdot 500 - P_1 \cdot 400 - P_2 \cdot 100,$

$$M_3 = 880 \cdot 500 - 540 \cdot 400 - 630 \cdot 100 = 249000 \text{ kg cm}.$$

Einfacher jedoch unter Benutzung des rechten Trägerstückes (Abb. 139):

$$M_3 = B \cdot 300 - P_4 \cdot 200,$$

$$M_3 = 1010 \cdot 300 - 270 \cdot 200 = 249000 \text{ kg cm}.$$

Für Drehpunkt IV (Abb. 135): $M_4 = A \cdot 800 - P_1 \cdot 600 - P_2 \cdot 300 - P_3 \cdot 200,$

$$M_4 = 880 \cdot 800 - 540 \cdot 600 - 630 \cdot 300 - 450 \cdot 200.$$

$$M_4 = 101000 \text{ kg cm}.$$

Einfacher unter Benutzung des rechten Trägerstückes (Abb. 140):

$$M_4 = B \cdot 100 = 1010 \cdot 100 = 101000 \text{ kg cm}.$$

#### V. Allgemeiner Gang der Rechnung.

Zur Berechnung eines Trägers auf zwei Stützen ist stets folgender Rechnungsgang einzuhalten.

1. Bestimmung der auf den Träger wirkenden Belastungen.
2. Berechnung der Auflagerwiderstände.
3. Bestimmung der Querkräfte, insbesondere des gefährdeten Querschnitts.
4. Bestimmung der Biegungsmomente, insbesondere des größten Biegungsmoments.
5. Feststellung der Abmessungen des Trägers (siehe Festigkeitslehre).

## 2. Besondere Fälle der Belastung eines Trägers mit Einzellasten.

### a) Träger mit einer Einzellast belastet.

#### I. Zeichnerische Lösung.

In Abb. 141 a/b ist der zu untersuchende Fall dargestellt; einer weiteren Besprechung bedarf es nicht. Der gefährdete Querschnitt liegt unter der Einzellast. Das Größtmoment $M_{max}$ liegt daher ebenfalls unter der Einzellast. $M_{max} = H \cdot y_{max}$.

M. 1 : 200 M. d. K. 1 cm = 2000 kg

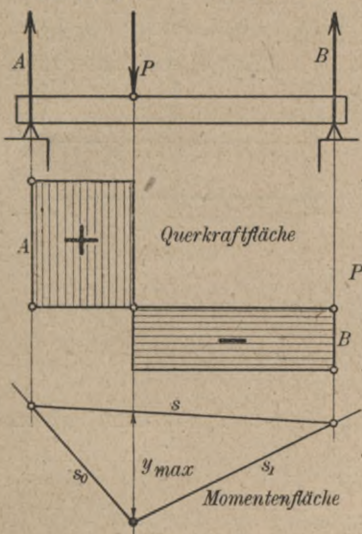



Abb. 141 a.

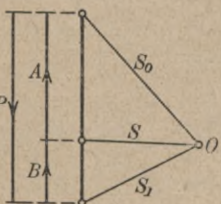



Abb. 141 b.

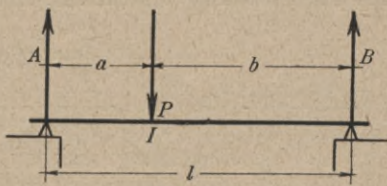



Abb. 142.

#### II. Rechnerische Lösung.

A. Bestimmung der Auflagerwiderstände (Abb. 142).

Es ist

$$A + B = P \quad . \quad (1)$$

Die Momentengleichung für den Bezugspunkt $B$ lautet:

$$A \cdot l - P \cdot b = 0,$$

$$A \cdot l = P \cdot b,$$

$$A = \frac{P \cdot b}{l} \quad (2),$$

die Momentengleichung für den Bezugspunkt $A$ ergibt:

$$B \cdot l - P \cdot a = 0,$$

$$B \cdot l = P \cdot a,$$

$$B = \frac{P \cdot a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (1) wird zweckmäßig nur als Probe benutzt.

B. Bestimmung der Querkräfte.

Im ersten Belastungsfelde wird $V_1 = A$.

Für das zweite Belastungsfeld wird bei Betrachtung des linken Trägerstückes

$$V_2 = A - P_1;$$

oder bei Untersuchung des rechten Trägerstückes einfacher $V_2 = -B$.

Wie aus Gleichung (1) ersichtlich ist, muß $A - P_1 = -B$ sein.

Die Querkraft durchschreitet unter der Last $P$ den Wert Null, daher liegt der gefährdete Querschnitt an der Laststelle.

C. Bestimmung des größten Biegungsmoments.

Betrachtet man das linke Trägerstück, so erhält man für den Drehpunkt I (Abb. 143):

$$M_{\max} = A \cdot a$$

oder, da

$$A = \frac{P \cdot b}{l},$$

$$M_{\max} = \frac{P \cdot b}{l}\, a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Bei Untersuchung des rechten Trägerteils erhält man

$$M_{\max} = B \cdot b = \frac{P \cdot a}{l} \cdot b.$$

Der Träger hat das größte Moment aufzunehmen, wenn die Einzellast in der Mitte der Stützweite wirkt (Abb. 144), wie sich leicht durch probeweise Einsetzung einiger Zahlenwerte in Gleichung (4) nachweisen läßt. Es wird dann $a = b = \frac{l}{2}$.

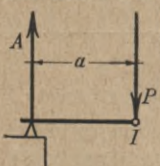



Abb. 143.

Man erhält: $A = B = \frac{P}{2}$;

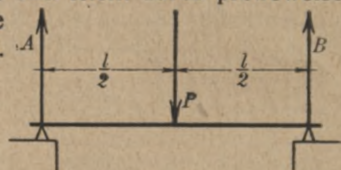



Abb. 144.

$$M_{\max} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2},$$

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

**b) Träger mit zwei gleichen Einzellasten im gleichen Abstand $a$ von dem Auflager.**

**I. Zeichnerische Lösung.**

Die zeichnerische Lösung ergibt sich unmittelbar aus der Abb. 145a/b.

**II. Rechnerische Lösung.**

Die rechnerische Lösung gestaltet sich folgendermaßen.

A. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Es ist:

$$A + B = P + P = 2P \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Wegen der symmetrischen Anordnung der Lasten müssen die Auflagerwiderstände einander gleich werden, also $A = B$. Man erhält demnach aus (1):

M. 1 : 200 M. d. K. 1 cm = 2000 kg

$$2A = 2P,$$

$$A = P \quad . \quad . \quad (2)$$

Dies folgt auch unmittelbar aus der Momentengleichung, z. B. für den Bezugspunkt $B$ (Abb. 146):

$$A \cdot l - P(l - a) - P \cdot a = 0,$$

$$A \cdot l - P \cdot l + P \cdot a - P \cdot a = 0,$$

$$A \cdot l = P \cdot l,$$

$$A = P.$$

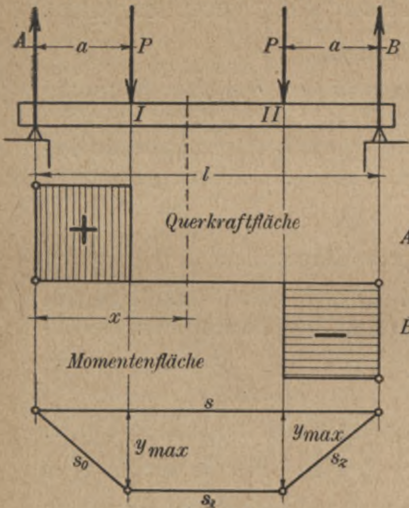



Abb. 145a.

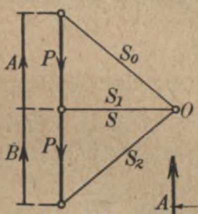



Abb. 145b.

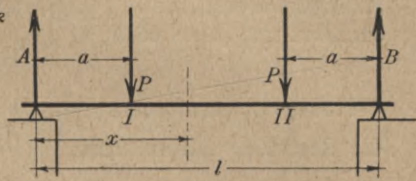



Abb. 146.

## B. Bestimmung der Querkräfte.

Im ersten Belastungsfeld wird $V_1 = A$ $\Big\}$ linkes Träger-
im zweiten „ „ $V_2 = A - P = A - A = 0$ stück betrachtet.
im dritten „ „ $V_3 = -B$; rechtes Trägerstück betrachtet.

Da im mittleren Trägerfeld die Querkraft durchweg den Wert Null besitzt, so muß auf der ganzen Länge dieses Feldes das größte Biegungsmoment auftreten.

## C. Bestimmung der Biegungsmomente.

Unter der ersten Last $P$ von links wird für Drehpunkt I (Abb. 146)

$$M_1 = A \cdot a; \quad \text{da } A = P$$

ist, wird: $M_1 = P \cdot a$ (linkes Trägerstück betrachtet).

Im Punkt II ist das Biegungsmoment:

$$M_2 = B \cdot a; \quad \text{da } B = P$$

ist, wird ebenfalls $M_2 = P \cdot a$ (rechtes Trägerstück betrachtet).

An einer beliebigen Stelle des zweiten Belastungsfeldes, also zwischen I und II (Abb. 147) wird

$$M_x = A \cdot x - P \cdot (x - a), \quad \text{oder da } A = P,$$

$$M_x = P \cdot x - Px + Pa,$$

$$M_x = P \cdot a.$$

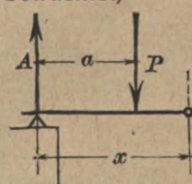



Abb. 147.

Auf dem ganzen mittleren Belastungsfeld hat demnach das Moment den Größtwert $M_{max} = P \cdot a$; alle Querschnitte auf dieser Strecke sind **gefährdete Querschnitte**.

## C. Träger auf zwei Endstützen mit gleichmäßig verteilter Last.

### 1. Zeichnerische Lösung.

Man kann die gleichmäßig verteilte Belastung auf den Fall einer Belastung mit Einzellasten zurückführen, indem man den Träger in möglichst schmale, unter sich gleich breite Streifen zerlegt und die jedem Streifen zufallende Belastung durch je eine, in dem Schwerpunkte des Streifens wirkende gedachte Einzellast ersetzt.

#### a) Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Man verfahre genau so wie bei B. 1, S. 68. Es ergibt sich, daß die beiden Auflagerwiderstände $A$ und $B$ einander gleich sind. Bezeichnet man die Gesamtlast mit $Q$, so wird

$$A = B = \frac{Q}{2}.$$

Häufig ist es zweckmäßig, die auf die Längeneinheit kommende Last in die Rechnung einzuführen. Es wird dann $q = \frac{Q}{l}$, wo $l$ hier in der Regel in cm eingeführt werden soll (seltner in m). Man erhält den Wert der Belastung $q$ für die Längeneinheit, dann in kg für einen laufenden cm (lfd. cm) der Trägerlänge.

Es wird somit: $Q = q \cdot l$ und $A = B = \frac{q \cdot l}{2}.$

#### b) Bestimmung der Querkräfte.

Unter Berücksichtigung der oben angegebenen, ersetzenden Einzellasten wird die Querkraftsfläche nach oben und unten durch eine gleichmäßige abgetreppte Linie begrenzt, welche sich um so mehr der Geraden nähert, je schmaler die einzelnen Teilstreifen sind. Sie geht in eine schrägliegende Gerade über, wenn die Zahl der Streifchen unendlich groß, die Breite der letzteren unendlich klein wird.

Die Querkraft über dem Auflager $A$ ist: $V_A = + A = + q\frac{l}{2}.$

Über dem Stützpunkte $B$ wird $V_B = - B = - \frac{ql}{2}.$

Macht man nun $A_2C = + \frac{ql}{2}$ und $B_2D = - \frac{ql}{2}$, so gibt die Verbindungsgerade $CD$ die obere bzw. untere Begrenzung der Querkraftsfläche an.

In der Mitte hat die Querkraft den Wert Null, und somit liegt daselbst der gefährdete Querschnitt.

#### c) Bestimmung der Biegungsmomente.

Die Momentenfläche wird erhalten, wenn man nach S. 43 zu den gedachten Ersatzeinzelkräften das Seileck zeichnet (Abb. 148a/b). Für die tatsächlich auftretenden Belastungsverhältnisse müssen die Belastungsstreifen unendlich schmal gewählt werden; das Seileck (Abb. 148a/b) geht dann in eine Seilkurve (Parabel) (Abb. 149b) über, welche die Seileckseiten berührt. Das größte Biegungsmoment liegt in der Mitte (s. b). Das Biegungsmoment an beliebiger Stelle ergibt sich wie früher zu: $M = H \cdot y$.

Nimmt man den Pol 0 auf der im Halbierungspunkte von $Q$ errichteten Winkelrechten an, so wird die Schlußlinie $s$ der Seilkurve eine Wagerechte (Abb. 149b). Die äußeren Seilstrahlen, welche die Berührungslinien in den Parabelpunkten $A_1$ und $B_1$ darstellen, schneiden sich auf der durch die Trägermitte

Abb. 148a.

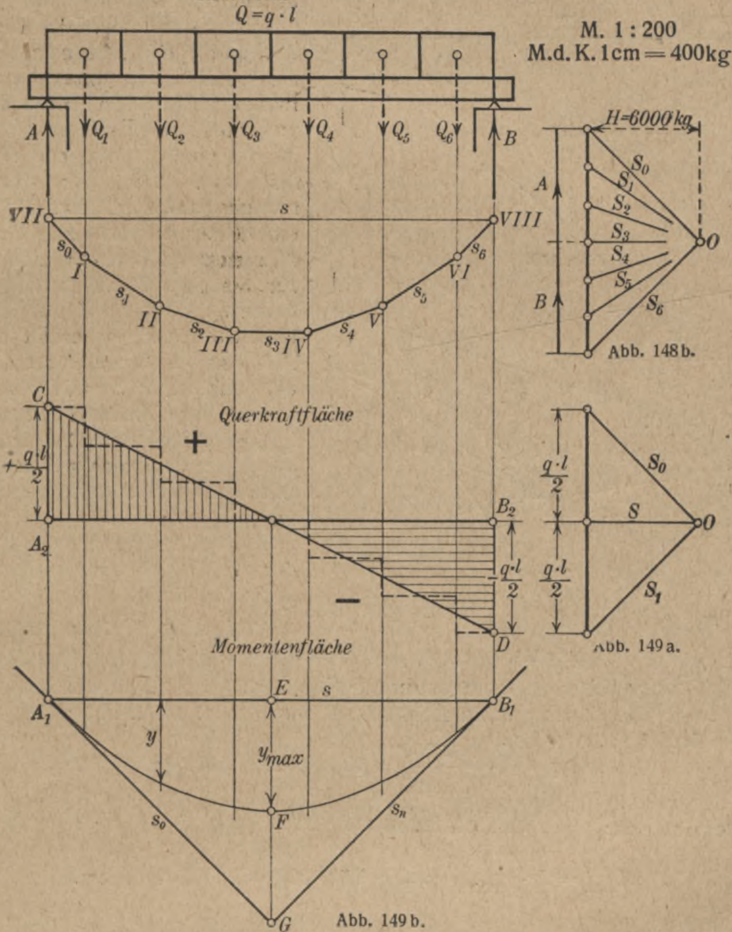



Abb. 148b.

Abb. 149a.

Abb. 149b.

gelegten Lotrechten, und der Abstand $EG$ wird $= 2 \cdot EF = 2 \cdot y_{max}$. Zieht man gleichlaufend zur Schlußlinie $A_1 B_1$ eine Berührende an die Parabel, so erhält man den Parabelpunkt $F$, welcher der Endpunkt der größten Parabelordinate, also von $y_{max}$ ist (Abb. 150 und 151).

Es sei im folgenden eine einfache und schnell zum Ziele führende Parabelkonstruktion gegeben, durch welche an jeder beliebigen Stelle der Momentenfläche die Ordinate $y$ in genauester Weise festgelegt wird.

(Die häufig angegebene *Umhüllungskonstruktion* der Parabel ist wegen der Ungenauigkeiten *nicht zu empfehlen*.)

Die Konstruktion der Parabel ist hier für den Fall einer wagerechten Schlußlinie (Abb. 150) und einer geneigten Schlußlinie $A_1 B_1$ (Abb. 151) gezeichnet; sie läßt sich für jedes Parabelstück anwenden.

Man zieht die äußeren Seilstrahlen der Parabel $s_0$ und $s_n$ im Punkte $A_1$ und $B_1$ und bestimme ihren Schnittpunkt $G$, welcher auf der durch die Belastungsfeldmitten gehenden Lotrechten (Gleichlaufenden zur Lastrichtung) liegt, halbiert die Strecke $EG$, dann ist der Halbierungspunkt $F$ ein Parabelpunkt und $EF$ die größte Parabelordinate (hier $= y_{\max}$).

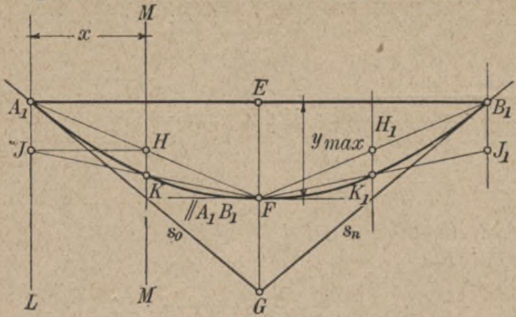


Abb. 150.

Man zieht ferner die Hilfslinien $A_1F$ und $B_1F$. Will man nun z. B. im Abstande $x$ (senkrecht zur Kraftrichtung gemessen) einen Parabelpunkt bestimmen, so bringt man die im Abstand $x$ gezogene Lotrechte $MM$ (bzw. Gleichlaufende zur Kraftrichtung) mit $A_1F$ (bzw. $B_1F$ für das rechte Parabelstück) zum Schnitt in $H$, zieht durch $H$ eine Gleichlaufende zur Schlußlinie $A_1B_1$ und bestimmt deren Schnittpunkt $J$ mit $A_1L$, verbindet $J$ mit $F$, so erhält man auf $MM$ den gesuchten Parabelpunkt $K$ als Schnittpunkt von $MM$ und $JF$.

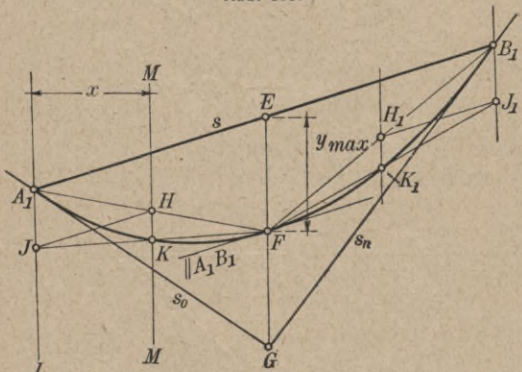


Abb. 151.

Auf diese Weise können eine beliebige Anzahl Parabelpunkte und somit die Ordinaten der Momentenfläche für jeden Balkenpunkt genau festgelegt werden.

Für den rechten Parabelast wurde der Punkt $K_1$ auf entsprechende Weise bestimmt.

**Aufgabe 20:** Ein Träger nehme unter Zugrundelegung der in Abb. 148 angegebenen Abmessungen eine Last $Q = 12000$ kg auf.

Lösung: Die Lösung ist in Abb. 149a/b angegeben. M. d. L. 1 : 200; M. d. K. 1 cm = 4000 kg;

$$q = \frac{Q}{l} = \frac{12000}{1200} = 10 \text{ kg}; \quad H = 6000 \text{ kg}.$$

Es ergibt sich:
$$A = B = \frac{q\,l}{2} = \frac{10 \cdot 1200}{2} = 6000 \text{ kg}.$$

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 6000 \cdot 1{,}50 \cdot 200 = 1\,800\,000 \text{ kg cm}.$$

## 2. Rechnerische Lösung.

### a) Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Wird die Stützweite mit $l$, die Belastung für die Längeneinheit (lfd. cm) mit $q$ bezeichnet, so beträgt die Gesamtbelastung (s. o.)

$$Q = q \cdot l.$$

Die Last $Q$ verteilt sich zu gleichen Teilen auf die beiden Auflager. Es wird danach:

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{q\,l}{2}.$$

### b) Bestimmung der Querkräfte.

Soll die Querkraft, welche an einer beliebigen Schnittstelle $C$ im Abstand $x$ vom linken Auflager (Abb. 152) wirkt, bestimmt werden, so zeichnet man das abgeschnittene Trägerstück heraus und bringt die an ihm auftretenden äußeren Kräfte an (Abb. 153). Es wirkt hier der Auflagerwiderstand $A$ und die auf die Strecke $x$ gleichmäßig verteilte Last $= q \cdot x$. Man erhält demnach nach S. 72 als Querkraft im Querschnitt $C$:

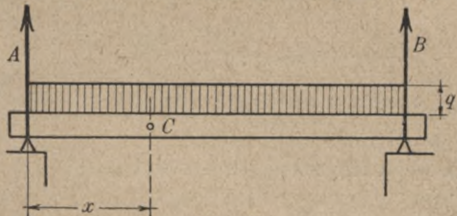


Abb. 152.

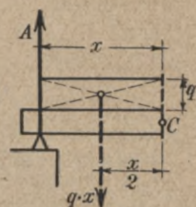


Abb. 153.

$$V = A - q \cdot x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$V = \frac{q l}{2} - q x,$$

$$V = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Gefährdeter Querschnitt. Die Querkraft hat im gefährdeten Querschnitt den Wert Null. Um die Lage des gefährdeten Querschnitts zu bestimmen, muß daher in Gleichung (1) $V = 0$ gesetzt werden.

Es muß also sein: $\quad 0 = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$.

Da der Faktor $q$ nicht $= 0$ werden kann, so muß der Faktor

$$\frac{l}{2} - x = 0$$

werden, damit das Produkt den Wert Null ergibt.

Es wird dann: $\quad \frac{l}{2} = x.$

Der gefährdete Querschnitt liegt demnach im Abstand $x = \frac{l}{2}$ vom linken Auflager, also in der Trägermitte.

Für $x = 0$ wird $V = q \cdot \frac{l}{2}$, also am größten.

### c) Bestimmung der Biegungsmomente.

Bestimmung des größten Biegungsmoments. Da der gefährdete Querschnitt in der Mitte liegt, so denkt man sich den Träger in der Mitte durchgeschnitten, zeichnet das linke Trägerstück wieder heraus und bringt die daran auftretenden Kräfte an. Es wirkt der Auflagerwiderstand $A$ und auf die Strecke $\frac{l}{2}$ gleichmäßig verteilte Belastung $q \frac{l}{2}$. Man erhält daher für die Schnittstelle das Moment (Abb. 154):

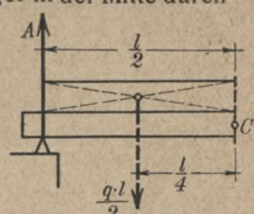


Abb. 154.

$$M_{max} = A \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4},$$

$$M_{max} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4},$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8},$$

$$\boldsymbol{M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}}.$$

Da $Q = q \cdot l$, so kann auch gesetzt werden:

$$\boldsymbol{M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8}}.$$

Bestimmung des Momentes an einer beliebigen Stelle. Für einen beliebigen Schnitt im Abstand $x$ wird nach Abb. 153 S. 83

$$M_x = A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2},$$

$$M_x = \frac{ql}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2},$$

$$M_x = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Für $x = 0$ und $x = l$ wird $M = 0$.

Für $x = \frac{l}{2}$ wird $M = M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{2}$.

Für das unter 1 angenommene Zahlenbeispiel (S. 82) erhält man

$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{10 \cdot 1200}{2} = 6000 \text{ kg}.$$

$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{10 \cdot 1200^2}{8} = 1\,800\,000 \text{ kg cm}$$

bzw. $$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{12\,000 \cdot 1200}{8} = 1\,800\,000 \text{ kg cm}.$$

Für die zeichnerische genaue Auftragung der Parabel empfiehlt es sich, den Parabelpfeil in der Mitte zu rechnen und dann die Parabel nach S. 82 zu zeichnen. Man beachte dabei folgendes:

Da $M_{max} = H \cdot y_{max}$ ist und $M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$,

so wird: $H \cdot y_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$, und $y_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot H}$.

Für das obige Zahlenbeispiel wird $y_{max} = \frac{10 \cdot 1200^2}{8 \cdot 6000} = 300$ cm.

## D. Träger auf zwei Endstützen mit Streckenbelastung.

Verteilt sich eine Last nur auf einen Teil der Trägerlänge gleichmäßig, so entsteht eine Streckenlast (z. B. bei Aufnahme einer Mauer mit Türöffnungen, bei Menschengedränge usf.). Die Lösung kann in ähnlicher Weise erfolgen wie bei C., indem man sich die Verkehrslast durch eine oder mehrere Einzellasten ersetzt denkt (S. 80 unter C. 1).

## 1. Zeichnerische Lösung.

Es wird angenommen, daß nur eine Streckenlast $Q$ vorhanden ist, welche für die Längeneinheit (lfd. cm) eine Belastung $q$ hervorruft.

Es wird $q = \frac{Q}{c}$ für 1 lfd. cm (Abb. 155a).

### a) Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Ersetzt man die Streckenlast, deren Belastungsart durch ein Rechteck dargestellt wird (Belastungsfläche) hier durch eine (gedachte) Einzellast, welche im Schwerpunkt der Belastungsfläche angreift, so lassen sich die Auflagerwiderstände wie bei B. 1 bestimmen. Auf der Streckenlast $Q$ werden im Krafteck durch die Schlußlinie $s$ die Auflagerwiderstände $A$ und $B$ abgeschnitten. (Abb. 155b.)

### b) Bestimmung der Querkräfte.

Der Träger wird in Belastungsfelder eingeteilt; für den vorliegenden Fall sind drei vorhanden. Die Querkraft hat in jedem Belastungsfelde einen bestimmten gesetzmäßigen Verlauf. Es genügt, zur Auftragung der Querkraftsfläche die Größe der Querkraft am Anfang und am Ende eines jeden Feldes zu ermitteln, im Kräftemaßstabe von der gewählten Nullinie aus in winkelrechter Richtung abzutragen und die so erhaltenen Endpunkte zu verbinden. Man beachte für den vorliegenden Fall folgendes:

Unter Benutzung des Schnittverfahrens ergibt sich, daß im ersten Belastungsfelde, welches vom Auflagerpunkte $A$ bis zum Punkte $C$ geht, die Querkraft $V_1 = A$ ist. Im zweiten Felde, welches vom Punkte $C$ bis zum Punkte $D$ reicht, nimmt sie stetig von $C$ bis $D$ ab um den Betrag von $q$ für die Längeneinheit. Im Punkte $D$ hat sie den Wert $V_D = A - Q$ (linkes Trägerstück betrachtet) oder $V_D = -B$ (rechtes Stück betrachtet); sie wird also negativ. Die Abgrenzung der Querkraftsfläche erfolgt demnach im zweiten Felde durch eine geneigte Gerade. Im dritten Belastungsfelde vom Punkte $D$ bis zum Auflagerpunkt $B$ bleibt ihr Wert unverändert $V_3 = -B$ (Abb. 155a). Der gefährdete Querschnitt liegt im zweiten Belastungsfelde.

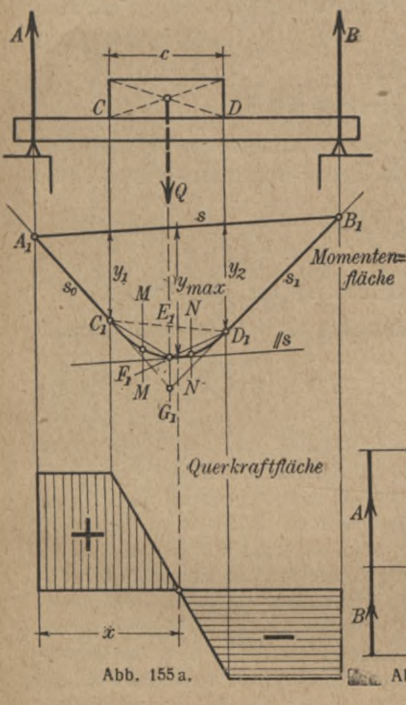


Abb. 155a.

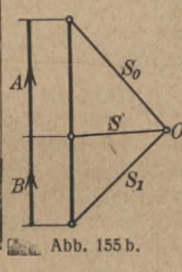


Abb. 155b.

### c) Bestimmung des Biegungsmoments.

Man zeichne ähnlich wie bei C die Momentenfläche zunächst unter Einführung der ersetzenden, gedachten Einzellasten. Die sich ergebende, geradlinig begrenzte Momentenfläche muß für den Teil des Trägers, welcher eine Streckenlast aufnimmt, durch eine gleichmäßig gekrümmte Linie, eine Parabel, ersetzt werden. Für das erste Belastungsfeld ist es für die Bestimmung der Momente gleichgültig, ob rechts von $C$ die gleichmäßig verteilte Last $Q$ oder die ersetzende, gedachte Einzelkraft $Q$ wirkt. Das gleiche gilt für das dritte Belastungsfeld. (Man braucht hierbei nur das rechte Trägerstück zu betrachten.)

Die Momentenfläche kann also von $A$ bis $C$ und von $D$ bis $B$ als richtig gelten. Der Teil der Momentenfläche jedoch, welcher durch die durch den Anfangs- und Endpunkt des zweiten Belastungsfeldes gezogenen Lote begrenzt wird, muß durch eine Parabel ersetzt werden. Die durch die Lote getroffenen Seilstrahlen sind Tangenten der Parabel. Im übrigen kann die Einzeichnung der Parabel in genau gleicher Weise geschehen, wie unter C (S. 82) angegeben wurde. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte $C_1$ und $D_1$ der erwähnten Lote mit den Seileckseiten ist als Schlußlinie in dem obenerwähnten Sinne anzusehen. Man halbiert die Linie $E_1G_1$ und erhält so den Halbierungspunkt $F_1$ als Parabelpunkt. Zwischenpunkte der Parabel werden unter Annahme von Hilfsloten z.B. $MM$ und $NN$ in Abb. 155a nach früherem bestimmt. (Die Hilfslinien $C_1F_1$ und $F_1D_1$ in Abb. 155a entsprechen den Geraden $A_1F_1$ und $F_1B_1$ in Abb. 150/151.)

Das Biegungsmoment an einer beliebigen Trägerstelle ist ebenfalls:

$$M = H \cdot y.$$

Das größte Biegungsmoment liegt an der Stelle, wo die Querkraft gleich Null ist. Seine Lage läßt sich auch durch Ziehen einer Gleichlaufenden zur Schlußlinie (hier $A_1B_1$) als Berührende an die Parabel ermitteln.

Bei Zerlegung der Streckenlast in mehrere Teile erhält man mehrere gedachte Einzellasten und mehrere Parabeläste, die in diesem Falle ein und derselben Parabel angehören. Man wendet dann das genau gleiche Verfahren zur Bestimmung der Seilkurve an.

## 2. Rechnerische Lösung.

### a) Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Man denkt sich die Streckenlast $Q$ durch eine Einzellast ersetzt und bestimmt die Auflagerwiderstände genau wie bei B.2.a.S.78 und erhält (Abb.156):

$$A = \frac{Q \cdot b}{l}; \quad B = \frac{Q \cdot a}{l}; \quad A + B = Q.$$

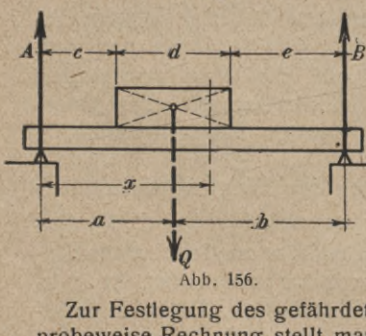


Abb. 156.

### b) Bestimmung der Querkräfte.

Man teilt den Träger in Belastungsfelder ein und kann mittels des Schnittverfahrens an jeder beliebigen Schnittstelle durch Untersuchung des linken oder rechten abgeschnittenen Trägerstücks die Größe und den Sinn der Querkraft an der Schnittstelle ermitteln.

Zur Festlegung des gefährdeten Querschnitts empfielt sich folgender Gang. Durch probeweise Rechnung stellt man das Belastungsfeld fest, in welchem die Querkraft aus dem positiven in den negativen Sinn übergeht, also den Wert Null durchschreitet. Man lege nun durch dieses so gefundene Belastungsfeld einen Schnitt im unbekannten Abstand $x$ vom linken oder rechten Auflager in der Weise, daß am abgeschnittenen Trägerstück die wenigsten Kräfte auftreten, die Rechnung also möglichst einfach wird. Man bestimme nun die Größe der Querkraft an diesem abgeschnittenen Trägerstück. Da sie für den gefährlichen Querschnitt den Wert besitzt, so setze man sie probeweise gleich Null. Man erhält somit eine Gleichung mit einer Unbekannten $x$ und kann dann den bisher unbekannten Abstand $x$ festlegen, in welchem der Schnitt geführt werden muß, damit die Querkraft den Wert gleich Null erreicht.

Der gefundene Wert $x$ muß bei richtiger Annahme auf das Belastungsfeld fallen; er darf also nicht kleiner als der Abstand des Anfangspunktes und nicht größer als der Abstand des Endpunktes des fraglichen Belastungsfeldes vom Auflager sein. Fällt $x$ nicht auf das untersuchte Belastungsfeld (dies geschieht bei unrichtiger probeweiser Annahme), so beachte man, daß in gleicher Weise das vorhergehende Belastungsfeld zu untersuchen ist, wenn $x$ kleiner, daß das folgende Belastungsfeld in Frage kommt, wenn $x$ größer als erforderlich ist.

Für den vorliegenden Fall ist am Ende des ersten Belastungsfeldes die Querkraft $V_1 = + A$, am Ende des zweiten Belastungsfeldes $V_2 = A - Q = - B$; der gefährdete Querschnitt liegt also im zweiten Belastungsfelde.

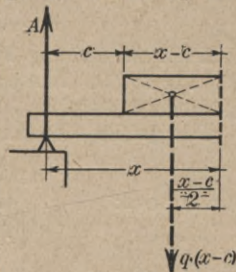


Abb. 157.

Wird nun im Abstand $x$ vom linken Auflager $A$ im zweiten Belastungsfelde ein probeweiser Schnitt geführt, so treten am abgeschnittenen Trägerstück der Auflagerwiderstand $A$ und die Streckenlast $q \cdot (x - c)$ als einzige äußere Kräfte auf. (Abb. 157.)

An der beliebig gewählten Schnittstelle wird die Querkraft demnach

$$Q_x = A - q(x - c).$$

Für den gefährdeten Querschnitt muß $Q_x = 0$ werden, also

$$A - q\,(x - c) = 0,$$

$$A = q(x - c);$$

(die aufwärts wirkende lotrechte Kraft = der abwärts wirkenden!)

$$A = q \cdot x - q \cdot c,$$

$$A + q \cdot c = q \cdot x,$$

$$x = \frac{A + q \cdot c}{q},$$

$$x = \frac{A}{q} + c.$$

$x$ muß $> c$ und $< c + d$ sein.

### c) Bestimmung des Biegungsmoments.

Nach Feststellung der Lage des gefährdeten Querschnitts denkt man sich den Träger an dieser Stelle durchgeschnitten, betrachtet das abgeschnittene Trägerstück und stellt das Moment der äußeren Kräfte für den Schnittpunkt auf. Man findet so das Größtmoment $M_{max}$.

An beliebiger Stelle des zweiten Belastungsfeldes wird im vorliegenden Falle (Abb. 157)

$$M_x = A \cdot x - \overbrace{q \cdot (x - c)}^{\text{Kraft}} \cdot \overbrace{\frac{x - c}{2}}^{\text{Hebelarm}}.$$

Das Größtmoment erhält man wenn man den unter b. gefundenen Wert für $x$ einführt.

### 3. Zahlenbeispiel.

Ein Träger trage eine 3 m lange, 4 m hohe und zwei Stein starke Wand aus Ziegelsteinen, deren spezifisches Gewicht zu 1800 $\frac{\text{kg}}{\text{cbm}}$ anzunehmen ist. Es soll die Stelle des gefährdeten Querschnitts und das größte Moment $M_{max}$ bestimmt werden. (Abb. 158.)

#### a) Zeichnerische Lösung.

Die Last $Q$ ergibt sich zu:

$$Q = 3{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 0{,}53 \cdot 1800 = \text{rd. } 11\,000 \text{ kg}.$$

Die Untersuchung ist in Abb. 155a/b S. 85 durchgeführt. M. d. K. 1 cm = 4000 kg. M. d. L. 1 : 200. Man erhält $A = 6190$ kg; $B = 4810$ kg; $H = 5000$ kg. Der gefährdete Querschnitt liegt im Abstande $x = 369$ cm vom linken Auflager.

Das größte Moment wird:

$$M_{max} = H \cdot y_{max} = 5000 \cdot 1{,}75 \cdot 200 = 1\,750\,000 \text{ kg cm},$$

ferner wird:

$$M_{I} = H \cdot y_1 = 5000 \cdot 1{,}23 \cdot 200 = 1\,230\,000 \text{ kg cm},$$

$$M_{II} = H \cdot y_2 = 5000 \cdot 1{,}44 \cdot 200 = 1\,440\,000 \text{ kg cm}.$$

#### b) Rechnerische Lösung.

Es ist $\quad Q = 11\,000$ kg; $\quad q = \frac{11\,000}{300} = 36{,}67$ kg f. d. lfd. cm.

##### I. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Die Gleichgewichtsbedingung III für den Bezugspunkt $B$ lautet (Abb. 158):

$$A \cdot 800 - 11\,000 \cdot 450 = 0,$$

$$A = \frac{11\,000 \cdot 450}{800} = 6190 \text{ kg}.$$

Gleichung III für Bezugspunkt $A$ ergibt:

$$B \cdot 800 - 11\,000 \cdot 350 = 0,$$

$$B = \frac{11\,000 \cdot 350}{800} = r \cdot 5810 \text{ kg}.$$

Probe:

$$A + B = Q$$

$$6190 + 4810 = 11\,000 \text{ kg}.$$

##### II. Bestimmung der Querkräfte und des gefährdeten Querschnitts.

Im ersten Belastungsfelde ist die Querkraft $= A = +6190$ kg,
„ dritten „ „ „ „ $= B = -4810$ kg,
der gefährdete Querschnitt liegt demnach im zweiten Belastungsfeld.

An beliebiger Stelle des zweiten Belastungsfeldes wird die Querkraft (Abb. 159)

$$Q_x = 6190 - q \cdot (x - 200).$$

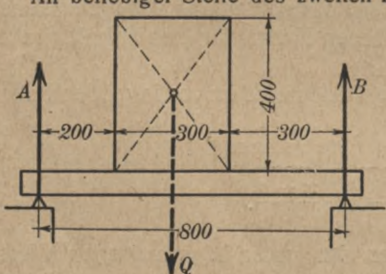



Abb. 158.

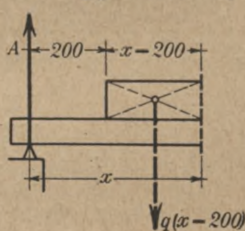



Abb. 159.

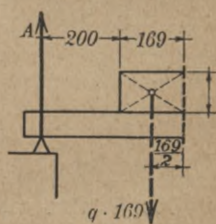



Abb. 160.

Für den gefährdeten Querschnitt wird $Q_x = 0$, also

$$6190 - q(x - 200) = 0, \quad q = 36{,}67 \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}},$$

$$6190 = 36{,}67\,(x - 200),$$

$$\frac{6190}{36{,}67} = x - 200,$$

$$x = \frac{6169}{36{,}67} + 200,$$

$$x = 169 + 200,$$

$$x = 369 \text{ cm}.$$

Der gefährdete Querschnitt liegt also 369 cm vom linken Auflager entfernt.

**III. Bestimmung der Momente.**

Das größte Moment ergibt sich nach Abb. 160 zu:

$$M_{\max} = 6190 \cdot 369 - 36{,}67 \cdot 169 \cdot \frac{169}{2},$$

$$M_{\max} = 1\,760\,444 \text{ kg cm} = \text{rd. } 1\,76\,500 \text{ kg cm}.$$

Am Ende des ersten Belastungsfeldes ist bei Punkt I:

$$M_1 = A \cdot 200 = 6190 \cdot 200 = 1\,238\,000 \text{ kg cm}.$$

Am Anfange des dritten Belastungsfeldes bei Punkt II wird:

$$M_2 = B \cdot 300 = 4810 \cdot 300 = 1\,443\,000 \text{ kg cm}.$$

## E. Träger auf zwei Endstützen mit gemischter Belastung.

Nimmt ein Träger eine gleichmäßig verteilte Last und außerdem auch noch Streckenlasten oder Einzellasten oder beide zugleich auf, so nennt man die Belastung eine gemischte oder zusammengesetzte.

Da das Eigengewicht eines Trägers eine über diesen gleichmäßig verteilte Belastung darstellt, so liegt dieser Fall streng genommen stets vor. Das Eigengewicht hat jedoch vielfach im Vergleich zu den anderen Belastungen einen so geringen Einfluß auf die Berechnung und Festlegung der Abmessungen eines Trägers, daß man es ohne wesentliche Fehler vernachlässigen kann.

### 1. Die zeichnerische Lösung.

Man kann für die Lösung zwei Wege einschlagen.

Erstes Verfahren. Man teilt den Träger in Belastungsfelder, schaltet die Einzellasten (als besonderes Belastungsfeld) zwischen die durch die Teilung entstehenden Streckenlasten ein und zeichnet den Seilzug für die Kräfte in der Reihenfolge, wie sie einander vom linken bis zum rechten Auflager folgen.

Man erhält auf diese Weise ein Krafteck und ein Seileck, welche der gleichzeitigen Wirkung aller Lasten, der Einzellasten, Streckenlasten und gleichmäßig verteilten Lasten entsprechen (s. Abb. 161).

Man beachte hierbei das unter D. 1. Gesagte und wende es sinngemäß an.

Zweites Verfahren. Man behandelt die Einzellasten getrennt von der gleichmäßig verteilten Last und zeichnet für jeden der beiden Gruppen unter Benutzung des gleichen Kräftemaßstabes die Querkrafts- und die Momentenfläche nach S. 68 u. S. 81. Die gefundenen Werte fügt man unter Beachtung des Vorzeichens aneinander und erhält so die Werte für den Fall gleichzeitiger Wirkung beider Gruppen. (Abb. 162.)

Die Momentenfläche. Zu beachten ist, daß eine Aneinanderreihung der betreffenden Ordinaten der einzelnen Momentenflächen und ein unmittelbares Abgreifen der Gesamtordinaten $y$ sich dadurch erreichen läßt, daß in den Kraftecken die Polweiten $H$ für beide Gruppen gleichgroß zu wählen, jedoch bei der Gruppe der Einzellasten und Streckenlasten auf die entgegengesetzte Seite zu legen sind, wie bei der gleichmäßig verteilten Last. Man nehme den Pol dabei im Krafteck auf derjenigen Wagerechten an, welche durch den Punkt geht, der im Kräftezuge die beiden Auflagerwiderstände trennt.

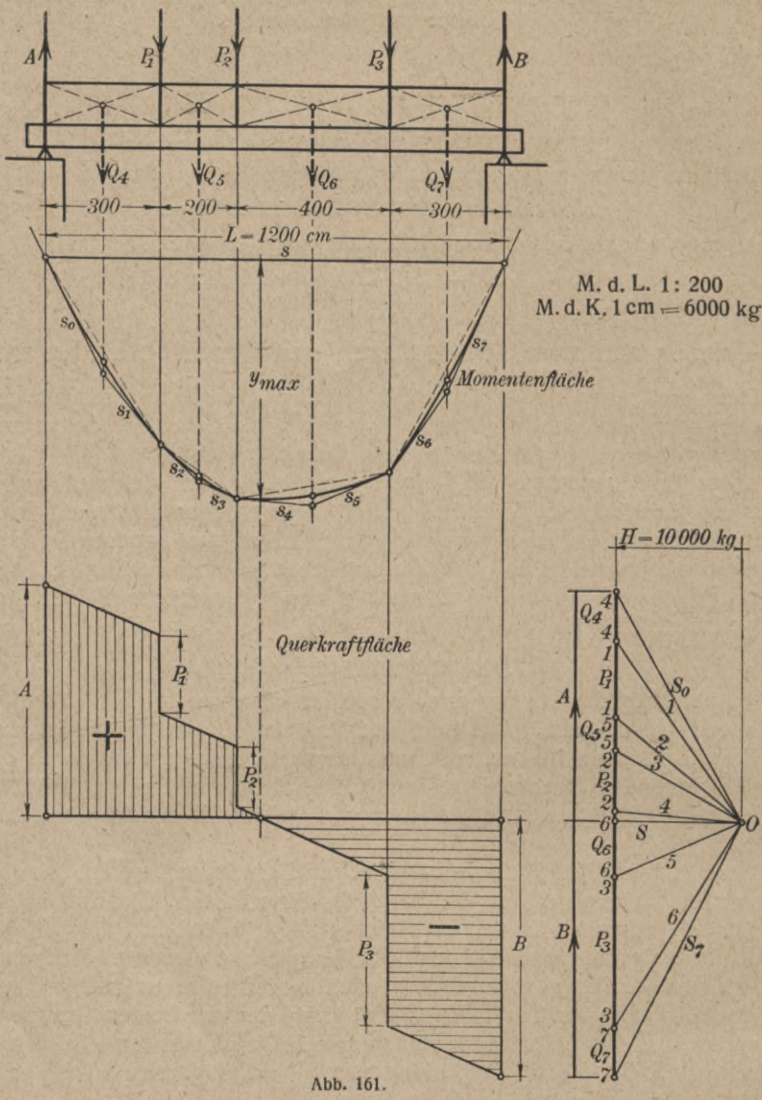



Abb. 161.

Gegebenenfalls muß die Lage des einen Pols so verändert werden, daß die Schlußlinie für die der gleichmäßig verteilten Last entsprechende Seilkurve und die Schlußlinie des für die Einzellasten und etwa vorhandene Streckenlast gezeichneten Seilzugs zusammenfallen (s. Abb. 162a u. vgl. S. 23). Hierzu muß man durch den Schnittpunkt der zur Schlußlinie $s$ gezogenen Gleichlaufenden $S$ mit der Mittelkraft aus $P_1 P_2$ und $P_3$ eine Gleichlaufende $S'$ zu $s'$ ziehen. Der Schnittpunkt von $S'$ mit der zur Mittelkraft durch $O$ gezogenen Gleichlaufenden ist der gesuchte neue Pol. Das größte Moment erhält man hier durch Ziehen einer Gleichlaufenden zur Seilzugseite $s_2'$.

Sind bei dem Seilzuge außer den Einzellasten auch noch Streckenlasten zu berücksichtigen, so führt man zunächst letztere als gedachte Einzelkräfte

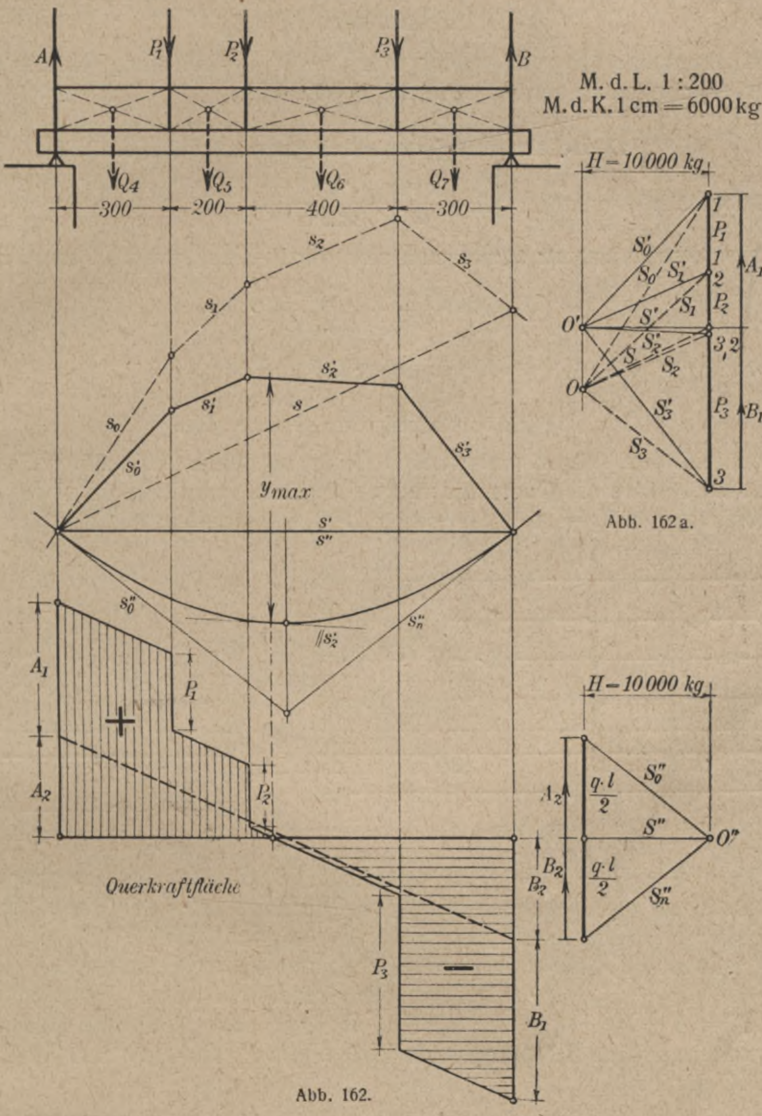



Abb. 162a.

Abb. 162.

ein, nimmt die Polverschiebung vor, bringt die Schlußlinien zur Deckung und zeichnet dann erst für die Streckenlasten die Parabelzweige ein. Die Lage des größten Momentes erhält man durch Ziehen einer Gleichlaufenden zur Schlußlinie als Berührende an die Momentenfläche. Der gefährdete Querschnitt liegt entweder unter einer Einzellast oder zwischen zwei Einzellasten.

Die Querkraftsfläche. Durch zeichnerische Darstellung der Querkräfte läßt sich der gefährdete Querschnitt, in welchem die Querkraft den Wert Null durchläuft, sehr genau festlegen. Bei Aneinanderreihung der Querkräfte beachte man das Vorzeichen. Die zeichnerische Darstellung ermöglicht in diesem verwickelten Falle eine sehr klare Übersicht über die Momenten- und Querkraftsgrößen.

## 2. Die rechnerische Lösung.

Die allgemeinen Regeln, welche unter A—D gegeben sind, kommen ebenfalls hier sinngemäß zur Anwendung. (Abb. 163.)

### a) Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Man erhält:
$$A = \frac{q \cdot l}{2} + \sum \frac{P \cdot b}{l}.$$

(Etwaige Streckenlasten denke man sich durch Einzellasten $P$ ersetzt.)

$$B = \frac{q \cdot l}{2} + \sum \frac{P \cdot a}{l}.$$

Probe:
$$A + B = q \cdot l + \sum P.$$

### b) Bestimmung der Querkräfte.

Man teilt den Träger wiederum in Belastungsfelder ein und verfährt wie bei D. b. b. Wäre die Querkraft im zweiten Belastungsfelde unmittelbar vor $P_2$ positiv, d. h. $V_2 = A - P_1 - q \cdot a_2 > 0$, unmittelbar hinter $P_2$ negativ,

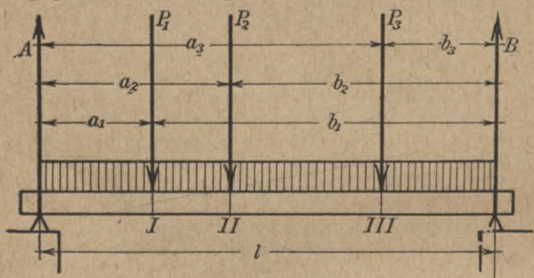


Abb. 163.

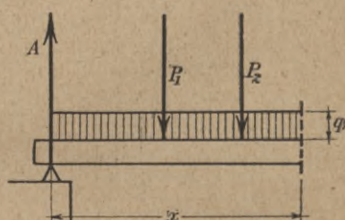


Abb. 164.

d. h. $V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 < 0$ (Abb. 163), so liegt die Übergangsstelle vom positiven zum negativen Wert der Querkraft unter der Einzellast, und der gefährdete Querschnitt also unter $P_2$ (s. auch Abb. 167 S. 94).

Ist jedoch die Querkraft unmittelbar hinter $P_2$ auch noch positiv, d. h. $V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a > 0$, jedoch unmittelbar vor $P_3$ bereits negativ, also $V_4 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_3 < 0$, so liegt der gefährdete Querschnitt natürlich im dritten Belastungsfelde zwischen $P_2$ und $P_3$. Dies ist in Abb. 161/162 der Fall.

Die Querkraft an beliebiger Stelle des dritten Belastungsfeldes ist (Abb. 164)

$$Q_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Wert muß für den gefährdeten Querschnitt zu Null werden, also:

$$Q_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x = 0.$$

$$x = \frac{A - P_1 - P_2}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

### c) Bestimmung der Biegungsmomente.

Falls das größte Moment unter $P_2$ liegt (Abb. 165), wird

$$M_{\max} = A \cdot a_2 - P_1 (a_2 - a_1) - q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2}.$$

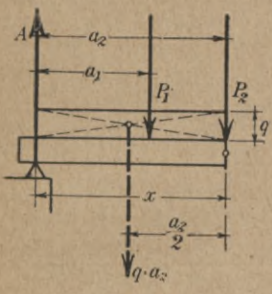




Abb. 165.

Liegt das größte Moment wie im vorliegenden Fall bei Abb. 161/162 zwischen $P_2$ und $P_3$, so bestimmt man (Abb. 166)

$$M_x = A \cdot x - P_1 \cdot (x - a_1) - P_2 \cdot (x - a_2) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

und setzt für Ermittlung des Größenmomentes $M_{\max}$ den unter 2. gefundenen Wert für $x$ aus Gleichung (2) ein.

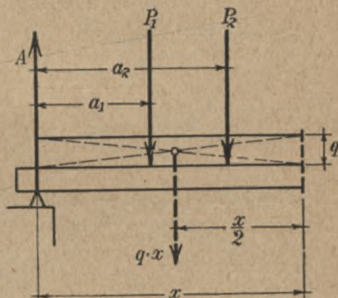




Abb. 166.

## 3. Zahlenbeispiel.

Es sind gegeben die Kräfte $P_1 = 6000$ kg, $P_2 = 4800$ kg, $P_3 = 12000$ kg, die gleichmäßig verteilte Last $Q = 15600$ kg; die notwendigen Maßangaben sind aus der Abb. 158 zu entnehmen. Es wird $q = \frac{15600}{1200} = 13$ kg f. d. lf. cm.

### a) Zeichnerische Lösung.

In Abb. 161 ist die zeichnerische Lösung nach dem unter E. 1. S. 90 angegebenen ersteren Verfahren mit einem Kräftemaßstabe 1 cm = 3000 kg vorgenommen worden. M. d. L. 1 : 200; $H = 10000$ kg. Es ergibt sich der gefährdete Querschnitt in einem Abstand $x = 562$ cm vom linken Auflager;

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 10000 \cdot 3{,}15 \cdot 200 = 6\,300\,000 \text{ kg cm}.$$

In Abb. 162 ist die Lösung nach dem unter F. 1. S. 91 angegebenen zweiten Verfahren mit gleichen Grundlagen vorgenommen. Es ergeben sich bei genauer Zeichnung die gleichen Werte für $x$ und für $M_{\max}$.

In Abb. 167 wurde die Größe von $P_2$ zu 9600 kg statt wie bei Abb. 161/162 zu 4800 kg eingeführt. Der gefährdete Querschnitt liegt in diesem Falle unter $P_2$, und die Querkraftsfläche zeigt eine andere Darstellung wie vorher.

## b) Rechnerische Lösung.

### I. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Unter Benutzung der in Abb. 163 S. 92 angegebenen Maße stellt man die Momentengleichung für den Bezugspunkt $B$ auf. Es ist:

$$A \cdot l - P_1 \cdot b - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Hieraus findet man: $A = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{P_1 \cdot b_1}{l} + \frac{P_2 \cdot b_2}{l} + \frac{P_3 \cdot a_3}{l}$.

Unter Einführung der Maßzahlen (Abb. 161 S. 90) erhält man:

$$A = \frac{13 \cdot 1200}{2} + \frac{6000 \cdot 900}{1200} + \frac{4800 \cdot 700}{1200} + \frac{12000 \cdot 300}{1200},$$

$$A = 7800 + 4500 + 2800 + 3000 \text{ kg},$$

$$A = 18\,100 \text{ kg}.$$

Ebenso findet man:

$$B = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{P_1 \cdot a_1}{l} + \frac{P_2 \cdot a_2}{l} + \frac{P_3 \cdot b_3}{l},$$

$$B = \frac{13 \cdot 1200}{2} + \frac{6000 \cdot 300}{1200} + \frac{4300 \cdot 500}{1200} + \frac{12000 \cdot 900}{1200},$$

$$B = 7800 + 1500 + 2000 + 9000 \text{ kg},$$

$$B = 20\,000 \text{ kg}.$$

Probe:

$$A + B = q \cdot l + P_1 + P_2 + P_3,$$

$$18\,100 + 20\,300 = 15\,600 + 6000 + 4800 + 12\,000.$$

$$38\,400 = 38\,400 \text{ kg};$$

also richtig!

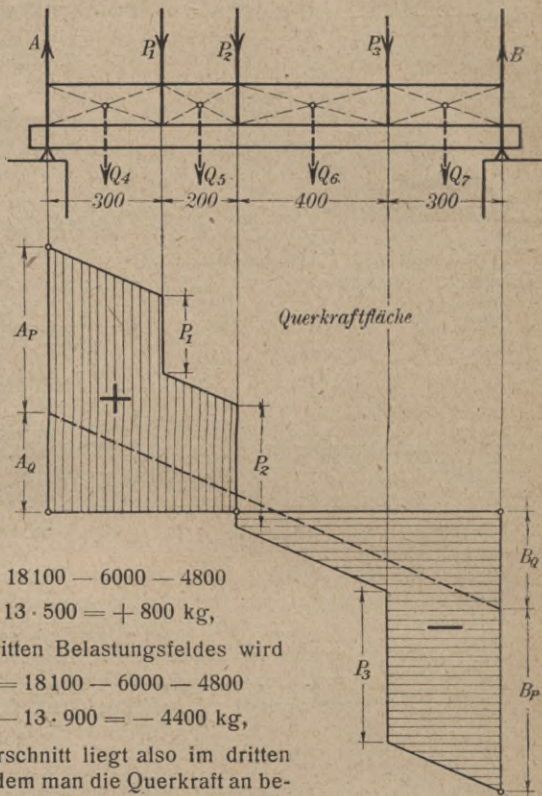



Abb. 167.

### II. Bestimmung des gefährdeten Querschnitts.

Nach Zerlegung in Belastungsfelder bestimmt man durch probeweise Rechnung dasjenige Belastungsfeld, in welchem die Querkraft $= 0$ wird.

Man findet, daß am Anfang des dritten Belastungsfeldes die Querkraft

$$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 = 18\,100 - 6000 - 4800 - 13 \cdot 500 = +800 \text{ kg},$$

also positiv ist. Am Ende des dritten Belastungsfeldes wird

$$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 = 18\,100 - 6000 - 4800 - 13 \cdot 900 = -4400 \text{ kg},$$

also negativ. Der gefährdete Querschnitt liegt also im dritten Belastungsfelde. Man findet ihn, indem man die Querkraft an beliebiger Schnittstelle in diesem Felde gleich Null setzt. Es ist:

$$V_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x = 0$$

$$18100 - 6000 - 4800 - 13 \cdot x = 0$$

$$18100 - 6000 - 4800 = 13 \cdot x$$

$$x = \frac{7300}{13} = 562 \text{ cm.}$$

Der gefährdete Querschnitt liegt demnach $x = 562$ cm vom linken Auflager entfernt.

**III. Bestimmung des größten Biegungsmoments.**

Das größte Biegungsmoment liegt im Abstand $x = 562$ cm vom linken Auflager und beträgt nach Abb. 168:

$$M_{max} = 18100 \cdot 562 - 6000 \cdot 262 - 4800 \cdot 62 - 13 \cdot 562 \cdot \frac{562}{2}$$

$$M_{max} = 6249000 \text{ kg cm.}$$

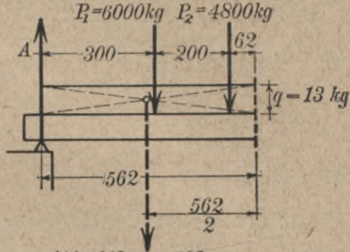



Abb. 168.

## F. Der Träger auf drei und vier Stützen.

### 1. Allgemeines.

Wird bei Überdeckung einer Öffnung mit einem Träger auf zwei Endstützen die freie Länge desselben so groß, daß die sich ergebenden Abmessungen unwirtschaftlich sind oder erhebliche Ausführungsschwierigkeiten entstehen, so müssen Zwischenunterstützungen angenommen werden. Die hierdurch entstehenden kleineren Öffnungen können durch mehrere Träger auf zwei Stützen (gestoßene Träger) oder durch einen durchlaufenden Träger (kontinuierlichen) überdeckt werden. Im ersten Fall findet das unter A—F Angegebene Anwendung. Die Entwicklungen der Untersuchung für den zweiten Fall gehören nicht in diesen Teil des Leitfadens, es können daher nur die Ergebnisse mitgeteilt werden. (Näheres s. T. IIIb und IVb.)

Bezeichnungen: Die beiden äußeren Stützen des durchlaufenden Trägers nennt man Endstützen, die übrigen Zwischen- oder Mittelstützen. Das zwischen zwei Stützen liegende Trägerstück bezeichnet man als Trägerfeld und unterscheidet End- und Mittelfelder. Es treten nicht allein zwischen zwei Stützen Größtmomente auf, sondern auch über den Zwischenstützen. Die Momente über den Zwischenstützen heißen Stützenmomente.

Unter der Voraussetzung, daß alle Stützen in gleicher Höhe liegen, sämtliche Trägerfelder gleich lang und gleichmäßig belastet sind, liegt das größte am Träger auftretende Biegungsmoment stets über der ersten Zwischenstütze (Stütze zwischen Endfeld und erstem Zwischenfeld). Dieses Moment ist für die Berechnung der Abmessungen des Trägers im allgemeinen maßgebend.

Im folgenden soll daher nur immer dieses Moment als Größtmoment angegeben werden. Es seien: die

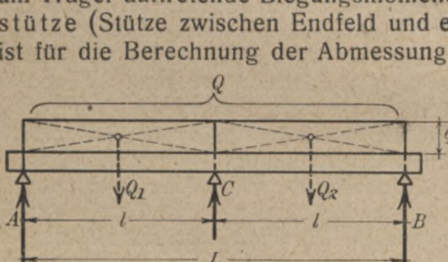



Abb. 169.

Abb. 170.

Feldlänge $= l$, die Gesamtspannweite des Trägers zwischen den Endstützen $= L$, die Belastung für die Längeneinheit $= q$, die Auflagerwiderstände über den Endstützen $A$ und $B$; die Auflagerwiderstände über den Zwischenstützen $C$ und $D$. (Abb. 169 und 171.)

### 2. Der Träger auf drei Stützen.

Es sei die Gesamtlast: $Q = q \cdot L$ (Abb. 169),

die Feldlast: $Q_1 = q \cdot l$,

$$A = B = \frac{3}{16} Q; \quad C = \frac{10}{16} Q.$$

Es wird: $$M_{\max} = \frac{Q_1 \cdot l}{8}; \quad \left[\text{oder} \quad M_{\max} = \frac{Q \cdot L}{32}\right].$$

Man erhält also dieselbe Formel für das größte Biegungsmoment wie beim Träger auf zwei Stützen, nur liegt hier der gefährdete Querschnitt über der Mittelstütze $C$. Die gezogenen Fasern liegen hierbei im oberen gefährdeten, die gedrückten im unteren Teile des Querschnitts. Abb. 170 zeigt die Biegungslinie des Trägers.

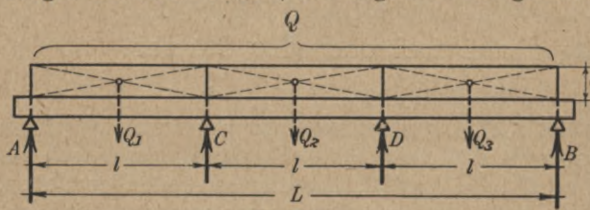



Abb. 171.

### 3. Der Träger auf vier Stützen (Abb. 171).

Es ist die Gesamtlast: $Q = q \cdot L$,

die Feldlast: $Q_1 = q \cdot l$,

$$A = B = \frac{4}{30} Q; \quad C = D = \frac{11}{30} Q,$$

$$M_{\max} = \frac{Q_1 \cdot l}{10}; \quad \left[\text{oder} \quad M_{\max} = \frac{Q \cdot L}{90}\right].$$

Der Unterschied gegen das Größtmoment bei Trägern auf zwei Endstützen ist sehr gering.

### 4. Verwendung der Träger auf mehreren Stützen.

Die Verwendung der Träger auf mehreren Stützen im Hochbau als Balken- und Deckenträger usw. ist im allgemeinen nicht empfehlenswert, da die oben gemachten Voraussetzungen gleicher Höhenlage der Stützen infolge ungleichen Setzens des Mauerwerks und dgl. für die Dauer nicht gewährleistet werden kann und so Überanstrengungen der Träger zu befürchten sind. Die Träger sollen daher in der Regel gestoßen werden, zumal irgendwelche nennenswerte Vorteile für eine Herabminderung der Abmessungen usw. mit Hinweis auf die Größtwerte der Biegungsmomente nicht zu verzeichnen sind. Für Holzbalken, welche häufig über mehrere Stützen verlegt werden, fallen die Bedenken in der Regel weg, da dieselben meist eine erhebliche überschüssige Stärke besitzen. Im Eisenbetonbau finden Träger auf mehreren Stützen ausgedehnte Verwendung.

# VII. Anwendung der statischen Gesetze auf einfache Stabkonstruktionen.

## A. Allgemeines.

Zur Unterstützung von Trägern auf zwei Endstützen mit größeren Stützweiten werden häufig Stabkonstruktionen verwendet, durch welche ein oder mehrere Stützpunkte gebildet werden. Es werden dadurch die Haupttragbalken in Träger auf drei oder vier Stützen verwandelt.

Für die Konstruktion ist folgendes zu beachten:

Die Schwerlinien der einzelnen Konstruktionsglieder bilden das System, welches der Berechnung zugrunde zu legen ist. In jedem Knotenpunkte sollen sich die Schwerlinien in einem Punkte schneiden, da nur dann eine einwandfreie und sichere Übertragung der Kräfte, die ohne Schwierigkeiten auf einfachem statischen Wege verfolgt werden kann, ohne schädliche Nebenwirkungen ermöglicht wird.

Man beobachte hierbei auch das bislang stets empfohlene Verfahren, jeden Knotenpunkt für sich zu betrachten, ihn durch einen Schnitt von allen übrigen Bauteilen loszulösen und ihn besonders herauszuzeichnen. Man bringe nun an dem herausgezeichneten Knoten alle an ihm wirkenden bekannten und unbekannten Kräfte, gegebenenfalls an den Stümpfen der einzelnen Konstruktionsglieder, und zwar an den Schnittstellen, als ersetzende Kräfte an. Mittels des Kräftevielecks können dann die unbekannten Seitenkräfte der Größe und dem Sinne nach bestimmt werden, wobei zu beachten ist, daß nicht mehr als höchstens zwei unbekannte Kräfte an einem Knotenpunkt vorhanden sein dürfen.

Es soll im folgenden die Untersuchung für ein einfaches Hängewerk durchgeführt werden.

## B. Das einfache Hängewerk.

Das einfache Hängewerk findet Verwendung im Dachbau, auch im Brückenbau, um einen Tragbalken (Hauptbalken oder Hängebalken) außer an den Endpunkten nochmals in der Mitte zu unterstützen.

### 1. Bestimmung der Auflagerwiderstände.

Der Stab $CD$ (Hängesäule) unterstüzt den Punkt $C$ (Abb. 172), überträgt die dort aufgenommene Last nach $D$, welche von hier aus durch die beiden Streben $AD$ und $DB$ (die Hängestreben) nach den Endauflagern $A$ und $B$ übergeführt wird.

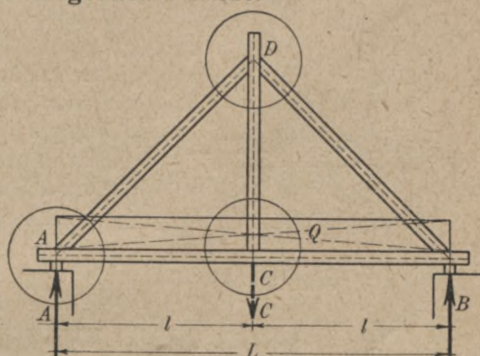


Abb. 172.

Der Hauptbalken $AB$ trägt eine gleichmäßig verteilte Last $Q$, welche sich nach F, 2 S. 96 so auf die Stützpunkte überträgt, daß die Endstützen einen Druck

$A = B = \frac{3}{16}Q$ erhalten, während auf die Mittelstütze ein Stützendruck $C = \frac{10}{16}Q$ enfällt.

Der auf die Endstützen übertragene Auflagerdruck wird unmittelbar von den Stützen aufgenommen und auf die stützenden Körper (Widerlager) übergeführt. Diesen Auflagerdruck bezeichnet man daher als unmittelbaren oder direkten Auflagerdruck ($A_u$ bzw. $B_u$ oder $A_{dir}$ und $B_{dir}$); in den Stäben des Hängewerks werden durch ihn keinerlei Spannkräfte hervorgebracht.

Die in $C$ wirkende Last $= \frac{10}{16}Q$ muß jedoch durch die Konstruktionsglieder aufgenommen und mittels dieser auf das Auflager übergeführt werden, gelangt demnach auf einem Umwege, also mittelbar (indirekt), dahin. Wegen der symmetrischen Ausbildung des Hängewerks wird sich $C$ zu gleichen Teilen auf die Auflager $A$ und $B$ verteilen, und es wird dort dadurch noch ein Auflagerdruck

$$= \frac{C}{2} = \frac{5}{16}Q$$

erzeugt, welcher als mittelbarer oder indirekter bezeichnet wird ($A_m$ und $B_m$ oder $A_{ind}$ und $B_{ind}$).

Der unmittelbare und der mittelbare Auflagerdruck müssen zusammen den Wert $\frac{Q}{2}$ ergeben, da naturgemäß die Hälfte der Gesamtlast in $A$, die andere in $B$ aufgenommen werden muß, also:

$$A_m + A_u = \frac{5}{16}Q + \frac{3}{15}Q = \frac{8}{16}Q = \frac{Q}{2}.$$

Der das Gleichgewicht herstellende Auflagerwiderstand hat dieselbe Größe, man unterscheidet somit auch einen durch mittelbare und einen durch unmittelbare Übertragung entstehenden Auflagerwiderstand.

## 2. Untersuchung der Knotenpunkte.

Knoten $C$. Man schneidet den Knoten $C$ heraus, zeichnet ihn auf und bringt die Ersatzkräfte an. Es werden drei Stäbe geschnitten. Da der auf den Stützpunkt $C$ fallende Lastteil lotrecht gerichtet ist und eine lotrechte Kraft nicht durch endliche wagerechte Kräfte aufgenommen werden kann (die wagerechten Kräfte $H_1$ und $H_2$ würden unendlich groß werden müssen!), so wird am Stumpfe der Hängestange zur Herstellung des Gleichgewichts eine lotrechte Kraft $V$ von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Sinne wie $C$ auftreten. Es wird $V = \frac{10}{16}Q$ und ist, da ihr Sinn vom Knotenpunkt wegzeigt, eine Zugkraft. (Abb. 173.)

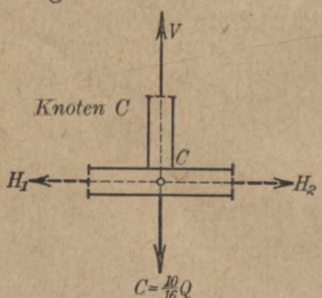


Abb. 173.

Diese Kraft wird durch Hängeeisen und Schraubbolzen von dem Balken auf die Hängesäule übertragen (s. Baukonstruktionslehre).

Zugkräfte werden in der Regel durch ein positives Vorzeichen bzw.

blaue Farbe, Druckkräfte durch ein negatives Vorzeichen bzw. rote Farbe gekennzeichnet.

Knoten *D*. Man verfahre zunächst wie bei Knoten *C*. Am herausgeschnittenen Knotenpunkt greift die in der Hängesäule wirkende, bekannte Kraft *V* als Zugkraft, also vom Knotenpunkt wegwirkend, lotrecht an. Die beiden noch auftretenden unbekannten Spannkräfte $S_1$ und $S_2$ (Abb. 174a), welche

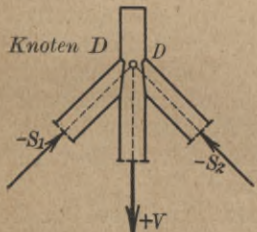



Abb. 174a.

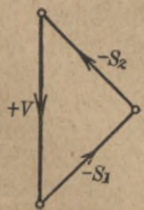



Abb. 174b.

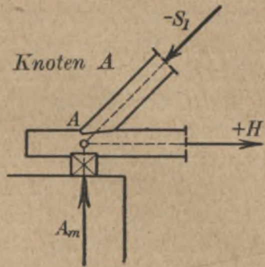



Abb. 175a.

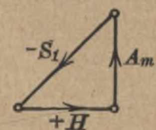



Abb. 175b.

an den Hängestrebenstümpfen wirken, lassen sich unter Berücksichtigung des Gleichgewichtszustandes durch das Kräftedreieck bestimmen (Abb. 174b). Man erhält $S_1 = S_2$ und findet bei Übertragung des Wirkungssinnes nach Abb. 174a, daß beide Druckkräfte sind.

Knoten *A* und *B*. Da die Anordnung eine symmetrische ist, so genügt es, einen der Knoten, z. B. *A*, herauszuschneiden und zu untersuchen (Abb. 175a). Als bekannte Kraft tritt die Druckkraft $S_1$ der Hängestreben auf, welche unter Beachtung des Gleichgewichtszustandes die Ermittlung der wagerechten Zugkraft *H* des Hängebalkens und des lotrechten Auflagerwiderstandes $A_m$ (mittelbarer!) gestattet (Abb. 175b). Am Knotenpunkt *B* ergibt sich entsprechend *H* und $B_m$.

Der Knotenpunkt *C* kann nun vervollständigt werden, indem man die beiden Zugkräfte $H_1 = H$ und $H_2 = H$ an den Hauptbalken angreifen läßt. (Abb. 176.)

In ähnlicher Weise lassen sich die sonstigen häufiger vorkommenden Konstruktionen, wie das doppelte Hängewerk, das einfache und doppelte Sprengwerk, der einfach und doppelt armierte Träger untersuchen.

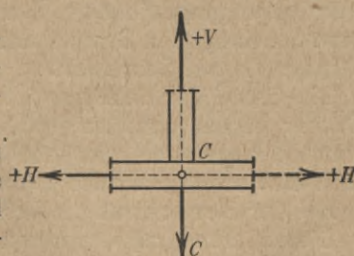



Abb. 176.

# VIII. Anwendung der einfachen statischen Gesetze auf die ebenen Fachwerksträger.

## 1. Allgemeines.

Ein ebenes Fachwerk entsteht, wenn man gerade Stäbe mit ihren Endpunkten gelenkartig verbindet, sie zu Dreiecken zusammensetzt und die einzelnen Dreiecke in einer Ebene so aneinander fügt, daß je zwei aneinander stoßende je eine Seite, also einen Stab, gemeinsam haben.

Ruht das Fachwerk auf Stützen, von denen die eine nur in einer bestimmten (meist lotrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerksträger oder Fachwerksbalken.

Die Eckpunkte der Dreiecke, in welchem mindestens zwei, häufig jedoch drei oder mehrere Stäbe zusammenstoßen und verbunden sind, heißen Knotenpunkte. Durch geeignete Bauweise sorge man dafür, daß die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten übertragen werden. Die Kraftübertragung kann dann immer nur von Knotenpunkt zu Knotenpunkt erfolgen. Es können daher nur Kräfte entstehen, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden betreffenden Gelenkpunkte fällt. Stimmt die Gerade mit der Mittellinie des betreffenden, die Knotenpunkte verbindenden Stabes überein, so kann in dem Stabe nur eine reine Zug- oder eine reine Druckkraft als Spannkraft auftreten (s. auch S. 30). Hierdurch wird eine günstige Beanspruchung sowie eine gute Ausnützung der Festigkeit der Baustoffe der Stäbe erzielt (das Eigengewicht der Stäbe wird nicht berücksichtigt!).

Die Stabreihen, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, heißen die Gurtungen, die obere Begrenzung der Obergurt (Spannkraft $O$), die untere der Untergurt (Spannkraft $U$). Die zwischen den Gurten angebrachten Stäbe nennt man die Wandglieder; die lotrechten Wandglieder nennt man die Ständer, Pfosten oder Vertikalen (Spannkraft $V$), die schrägen Wandglieder Streben oder Diagonalen Spannkraft $D$).

Die gesamte Darstellung der Stäbe in einer Figur nennt man das Netz des Fachwerksträgers.

Fachwerksträger sind besonders für freitragende Dachbinder über großen Räumen geeignet, auch für Gitter- und Brückenträger. Die gebräuchlichsten Binderarten sind das deutsche, belgische, englische und französische Dach.

Die Belastung der Dächer setzt sich zusammen aus der bleibenden Belastung und der zufälligen Belastung. Die bleibende Belastung besteht aus dem Eigengewicht des Binders, dem Gewicht der Deckung nebst Latten bzw. Schalung, den Sparren und Pfetten. Die zufällige Belastung besteht aus Winddruck und Schneelast.

Die Größe der Belastung ist abhängig von der Dachneigung. Für flache Dächer können ohne zu große Fehler die angegebenen Lasten als lotrecht wirkend angesehen und Tabellen entnommen werden, bei steilen Dächern muß eine schräge Windlage eingeführt werden (s. Teil III).

Bei der Berechnung beachte man folgendes:

Die äußeren Kräfte wirken als Lasten in den Knotenpunkten und werden durch die Stützenwiderstände im Gleichgewicht gehalten. Es müssen daher zunächst stets die Stützenwiderstände bestimmt werden.

Die Übertragung der äußeren Kräfte nach den beiden Auflagern erfolgt durch die einzelnen Stäbe des Fachwerks; in diesen werden infolgedessen Stabkräfte erzeugt. Die in den Knotenpunkten auf die Stäbe wirkenden Seitenkräfte der Lasten müssen also durch die inneren Gegenkräfte, welche von den Stäben zu leisten sind, aufgehoben werden. Diese Gegenkräfte bringen eine Zug- oder Druckbeanspruchung in den Stäben hervor.

Da das gesamte Fachwerk im Gleichgewicht sein muß, ist es erforderlich, daß sowohl alle Kräfte an jedem einzelnen Knotenpunkte als auch die gesamten äußeren und gesamten inneren Kräfte sich im Gleichgewicht befinden.

## 2. Untersuchung eines Dachbinders.

Ein einfacher Polonceaubinder mit der Stützweite $l$ habe die in Abb. 177a/b angegebenen Abmessungen.

Die Binderweite betrage $b$ m, die Last für 1 qm der Grundrißfläche sei $q$ kg, die einzelnen Felder sind einander gleich, die Feldweite (wagerechte Entfernung der Knotenpunkte) beträgt $l_1$ m $\left(\text{hier} = \frac{l}{4}\right)$.

Die Lasten für die mittleren Knoten des Dachbinders werden gleich groß. Sie erhalten den Wert:

$$P = q \cdot b \cdot l_1 \text{ kg.}$$

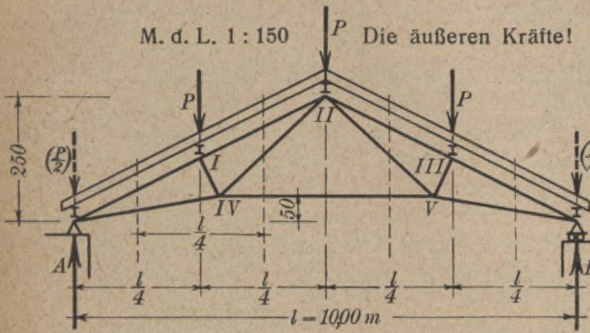



Abb. 177a.

Auf die Auflagerpunkte $A$ und $B$ entfallen, wie ersichtlich, nur je die Lasten $\frac{P}{2}$.

Die in den Auflagern wirkenden Knotenlasten $\frac{P}{2}$ werden, sofern sie in den Stützpunkten selbst angreifen und zu ihrer Übertragung Stäbe nicht in Frage kommen, unmittelbar in das Auflager und von da auf das Widerlager usf. übergeführt und bringen keinerlei Spannkräfte im Stabwerke des Binders selbst hervor. Sie bewirken in diesem Falle einen Auflagerwiderstand $A_u$ (unmittelbarer oder drekter Auflagerwiderstand) $= \frac{iP}{2}$. Sie brauchen bei Untersuchung des Binders daher nicht berücksichtigt zu werden und kommen lediglich für die Berechnung der Auflager in Betracht.

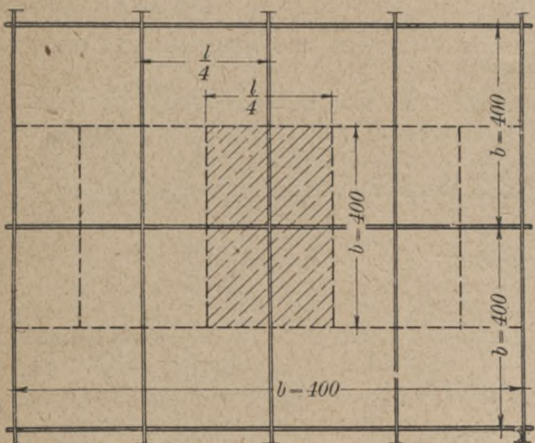



Abb. 177b.

Die mittelbaren Auflagerwiderstände werden in genau gleicher Weise wie bei dem früher untersuchten Balken auf zwei Stützen bestimmt.

Es wird:

$$A + B = P + P + P$$
$$A + B = 3P.$$

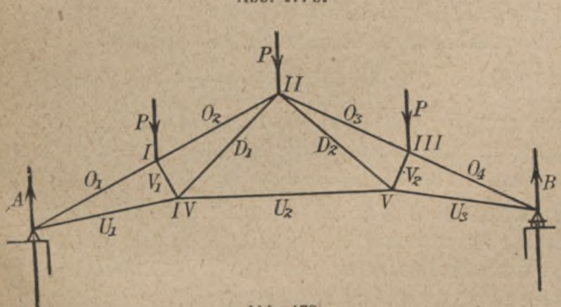



Abb. 178.

Wegen der symmetrischen Anordnung der Lasten muß $A = B$ werden; demnach

$$A = B = \frac{3P}{2},$$

$$A = B = 1{,}5\,P.$$

Im allgemeinen ergibt sich bei $n$ gleichen Feldern:

$$P = \frac{q \cdot l \cdot b}{n};$$

$$A = B = \frac{n-1}{2} \cdot P.$$

$A$ und $B$ sind mittelbare Auflagerwiderstände (indirekte). Der Einfachheit wegen sind dieselben mit $A$ und $B$ statt mit $A_m$ und $B_m$ bezeichnet.

Die Bestimmung der einzelnen Spannkräfte soll zeichnerisch geschehen und hierzu das Kräftevieleck benutzt werden.

Man denkt sich die einzelnen Knotenpunkte herausgeschnitten und beachtet, daß in den durchschnittenen Stäben innere Kräfte, die Stabkräfte, wirken. In jedem Knotenpunkte müssen sich die äußeren Kräfte mit den Stabkräften im Gleichgewicht halten. Damit nach Führung des Schnittes im Gleichgewichtszustande des Knotenpunktes nichts geändert wird, müssen sämtliche im Knotenpunkt wirkende äußere Kräfte angebracht und ferner die Spannkräfte an den Stümpfen der im Knotenpunkte zusammenlaufenden Stäbe ebenfalls als gedachte äußere Ersatzkräfte eingeführt werden. Mit Hilfe des Kräftevielecks lassen sich am Knotenpunkte höchstens zwei unbekannte Kräfte, deren Richtung bekannt ist, bestimmen (s. S. 27).

Die Untersuchung der Knotenpunkte muß also in einer solchen Reihenfolge geschehen, daß an keinem herausgeschnittenen Knoten mehr als zwei unbekannte Kraftgrößen auftreten. In der Regel beginnt man am Auflager, da dort meist nur zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sind. (Abb. 178.)

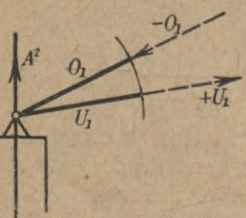



Abb. 179a.

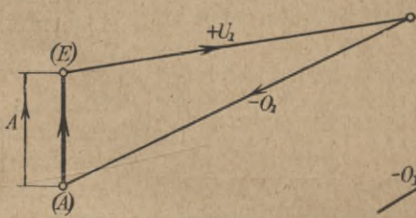



Abb. 179b.

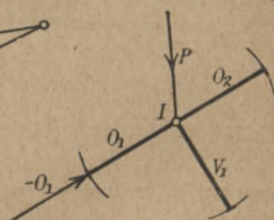



Abb. 180.

Gang der Lösung. Knotenpunkt $A$ (Abb. 179a/b). Man schneidet den Knoten $A$ heraus und bringt an dem herausgezeichneten Knoten die bekannten äußeren Kräfte (Abb. 179a) an, hier lediglich $A = \frac{3P}{2}\cdot$ Am Knoten $A$ sind zwei Stümpfe vorhanden, nämlich $O_1$ und $U_1$, also lassen sich die an der Schnittstelle wirkenden Stabkräfte $O_1$ und $U_1$ mittels des Kräftevielecks (hier Kräftedreiecks!) bestimmen (s. S. 13).

Man trägt $A$ im gewählten Kräftemaßstab auf, zieht durch die Endpunkte Gleichlaufende zu den Richtungen der unbekannten Stabkräfte und bringt diese zum Schnitt. Es entsteht so ein Kräftedreieck. Da am Knoten Gleichgewicht herrscht, muß im Kräftedreieck gleicher Umfahrungssinn vorhanden sein, hierdurch wird der Wirkungssinn der Stabkräfte $O_1$ und $U_1$ bestimmt. (Abb. 179b.) Man überträgt nun den Sinn von $U_1$ an den am Knoten $A$ vorhandenen Stumpf von $U_1$, den Sinn von $O_1$ an den ebenda liegenden Stumpf von $O_1$ und findet, daß $U_1$ von $A$ weggerichtet, also eine Zugkraft ist, und daß $O_1$ auf den Knoten $A$ zuweist, also eine Druckkraft ist (s. Abb. 179a). Es wird also $U_1$ mit dem Vorzeichen + und blauer Farbe, $O_1$ mit dem Vorzeichen — und roter Farbe bezeichnet.

Knoten I. Als nächster Knoten ist Knoten I lösbar, da außer der äußeren Kraft $P$ noch die Spannkraft des Obergurtstabes $O_1$ bekannt ist; die Stabkräfte $V_1$ und $O_2$ sind unbekannt. Man verfährt wie oben (Knoten A). An dem herausgezeichneten Stumpfe bringt man $P$ und $O_1$ an. (Abb. 180.) Da $O_1$ eine Druckkraft ist, muß sie hier ebenfalls in den Knoten I hineinweisen. Man zeichnet nun das Kräftevieleck, indem man unter Beachtung gleichen

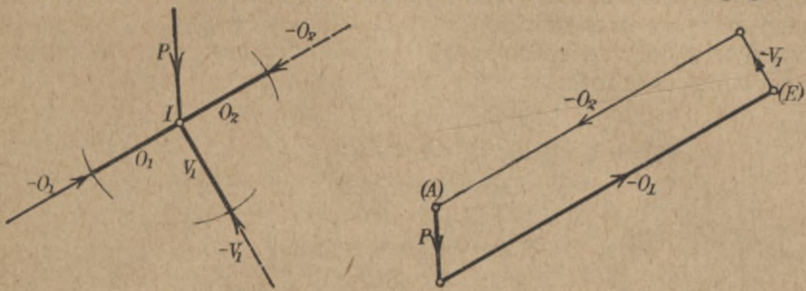



Abb. 181a. Abb. 181b.

Umfahrungssinnes zunächst $P$ und an dem Endpunkte von $P$ die Stabkraft $O_1$ anträgt, im gleichen Kräftemaßstab wie oben. Man zieht dann durch den Endpunkt ($E$) des Kräftezuges eine Gleichlaufende zu $V_1$ und durch den Anfangspunkt ($A$) eine Gleichlaufende zu $O_2$ und erhält so die Größe und, da gleicher Umfahrungssinn vorhanden sein muß, auch wieder den Sinn der bislang noch unbekannten Kräfte $V_1$ und $O_2$. (Abb. 181 a/b.) Durch Übertragung des Sinnes an die Stümpfe des Knotens I findet man $V_1$ und auch $O$ als Druckkräfte.

Man beachte stets, daß die Kräfte immer möglichst in einer bestimmten fortlaufenden Reihenfolge aneinander getragen werden, und zwar sämtliche entweder im Sinne der Uhrzeigerbewegung oder entgegengesetzt zu derselben. Also hier entweder $P\ O_1\ V_1\ O_2$ (mit dem Uhrzeiger) oder $O_1\ P\ O_2\ V_1$ (gegen den Uhrzeiger).

Knoten IV. Am Knoten IV treten nun nur noch zwei unbekannte Kräfte auf. (Abb. 182.) Es ist bekannt $+U_1$ und $-V_1$, unbekannt $U_2$ und $D_1$. Die Zugkraft $U_1$ zeigt vom Knotenpunkt IV weg, die Druckkraft $V_1$ in ihn hinein. Die Kräftezerlegung ist genau wie oben sinngemäß ausgeführt. Man trägt $V_1$ an und daran $+U_1$ usf. Man erhält $U_2$ und $D_1$ als Zugkräfte. (Abb. 183a/b.)

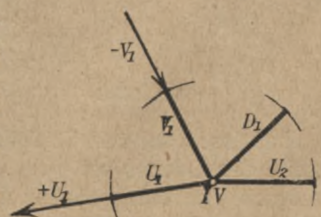



Abb. 182.

Knoten II. Am Knoten II sind außer der äußeren Kraft $P$ noch die zwei Spannkräfte $-O_2$ und $+D_1$ bekannt, die beiden Unbekannten $O_3$ und $D_2$ lassen sich nun ebenfalls bestimmen. Vorgang wie bei Knoten A und IV. (Abb. 184.)

Die Kräfte $P$, $O_2$ und $D_1$ werden aneinander gereiht unter Beachtung gleichen Umfahrungssinns, dann erfolgt die Zerlegung nach der Richtung $D_2$ und $O_3$.

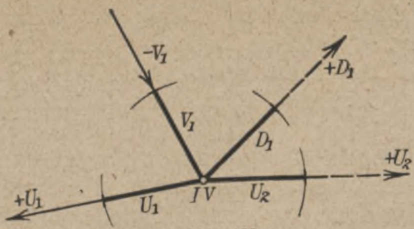


Abb. 183a.

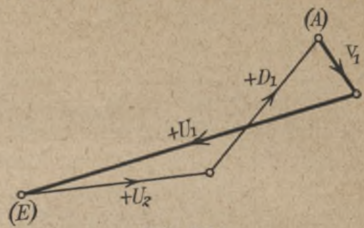


Abb. 183b.

Man findet, daß die Stabkräfte $O_2$ und $O_3$, sowie $D_1$ und $D_2$ bezüglich dieselbe Größe haben. Dies konnte aus der symmetrischen Anordnung des Binders ohne weiteres gefolgert werden. (Abb. 185a/b.)

Es erübrigt daher, die Knoten III, V und B noch besonders zu betrachten; zur Probe ist es jedoch immerhin empfehlenswert.

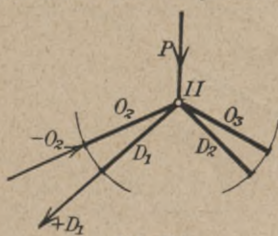


Abb. 184.

Es werden also:

$$O_4 = O_1; \quad V_2 = V_1; \quad U_3 = U_1.$$

Die rechnerische Festlegung der Stabkräfte wird im Teil IIIb des Leitfadens erfolgen.

Man beachte, daß der Gesamtauflagerdruck gleich der Summe aus dem unmittelbaren Auflagerdruck und dem mittelbaren Auflagerdruck ist, also hier

$$= A_u + A = \frac{P}{2} + \frac{3P}{2} = 2P.$$

Der Gesamtauflagerdruck kommt für die Berechnung der Auflagerkonstruktion und für die Untersuchung der Widerlager und Fundamente in Betracht.

Für die Abb. 177 sind folgende Annahmen gemacht:

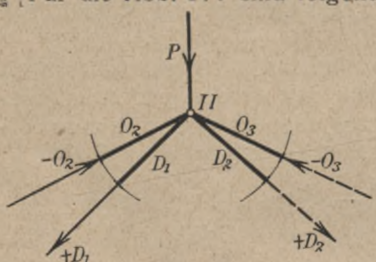


Abb. 185a.

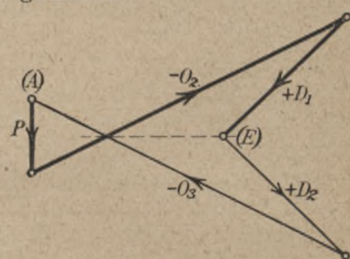


Abb. 185b.

Das Dach sei mit Schiefer gedeckt, das Verhältnis der Höhe zur Stützweite des Daches sei $^1/_4$.

Nach den ministeriellen Vorschriften erhält man für $q$ den Wert 190 kg für 1 qm Grundrißfläche. Die Binderentfernung sei $b = 4{,}00$ m, die Feldbreite $l_1 = \frac{l}{4} = \frac{10{,}0}{4} = 2{,}5$. Danach ergibt sich

$$P = 2{,}5 \cdot 4{,}0 \cdot 190 = rd \cdot 2000 \text{ kg}.$$

Für die Untersuchung (Abb. 179/185) ist der Kräftemaßstab 1 cm = 2000 kg gewählt worden.

Das Ergebnis der Untersuchung trägt man in der Regel in eine Tabelle ein. Man erhält:

| Stabbezeichnung | Spannkraft in kg Zug | Spannkraft in kg Druck |
|---|---|---|
| $O_1 = O_4$ | — | 10250 |
| $O_2 = O_3$ | — | 9350 |
| $U_1 = U_3$ | 9300 | — |
| $U_2$ | 5050 | — |
| $V_1 = V_2$ | — | 1780 |
| $D_1 = D_2$ | 4550 | — |

## Empfehlenswerte Werke.


Schöler, Statik und Festigkeitslehre. Leipzig, Verlag von Fr. Voigt.

Lauenstein, Graphische Statik. Stuttgart, Kröners Verlag.

Keck, Mechanik. Hannover, Helwing.

Landsberg, Statik der Hochbaukonstruktion. Stuttgart, Kröners Verlag.

Vonderlinn, Statik für Hochbau- und Tiefbautechniker. Bremerhaven, Vangerows Verlag.

Seipp, Statik für Hochbau- und Tiefbautechniker. Leipzig, Degeners Verlag.


BIBLIOTEKA KRAKÓW Politechniczna

Von Reg.-Baumeister A. Schau, Gewerbeschulrat und Direktor der staatlichen Baugewerkschule in Essen erschien ferner:

## Leitfaden der Statik

Teil II: **Festigkeitslehre.** Zug- und Druckfestigkeit, Schubfestigkeit, Biegungsfestigkeit u. Knickfestigkeit. 2. Aufl. Mit 208 Fig. Steif geh. M. 5.60

Die im I. Teil gegebenen Grundgesetze der Statik werden an einer großen Zahl angewandter Aufgaben aus der Praxis erweitert. Die Bestimmungen der Abmessung der einzelnen Bauteile werden bis ins einzelne eingehend dargelegt. In einem Anhang sind noch einige Aufgaben gelöst, deren Kenntnis für den Praktiker von großer Bedeutung ist.

Teil IIIa: **Für die Hochbauabteilungen.** Mit 238 Abb. i. T. Kart. M. 6.80

Im Teil IIIa für Hochbau werden die Ergänzungen des Teiles II über Festigkeitslehre vorgenommen, wobei vor allem die Biegungslehre und die zusammengesetzte Festigkeit in allen ihren Unterabteilungen in Frage kommen. Zahlreiche Anwendungsbeispiele machen das Buch besonders wertvoll für den Praktiker und den Lernenden.

Teil IIIb: **Für Tiefbauabteilungen.** [U. d. Pr. 1921.]

Im Teil IIIb für Tiefbau werden die Ergänzungen über das Gebiet der Festigkeitslehre vorgenommen, wobei vor allem die Biegungsfestigkeit (Kragträger, Gerberträger und ihre Anwendungen), die zusammengesetzte Festigkeit, Erddruck, Wasserdruck, Stützmauern, Berechnung von Fachwerksbindern (Dächer) und auch die grundlegenden Gesetze für die Berechnung durchlaufender Träger besprochen werden sollen. Durch sorgfältige Auswahl von Anwendungsbeispielen wird das Verständnis für Praktiker und Lernende gefördert werden.

Teil IVa: **Die Statik der Eisenbetonbauten.** Mit 113 Abb. Kart. M. 8.80

Im Teil IVa wird die Eisenbetonstatik in ihren Anwendungen für den Hochbau eingehend behandelt, zahlreiche Beispiele zeigen den Gebrauch für die Praxis; die amtlichen Bestimmungen, sowie die dazu gegebenen Musterbeispiele werden eingehend besprochen und ihre Benutzung für Entwurf und Prüfung gezeigt.

Teil IVb: **Für Tiefbauabteilungen.** [U. d. Pr. 1921.]

Im Teil IVb für Tiefbau wird die Eisenbetonstatik in ihren hauptsächlichsten Anwendungen auf die Praxis des Tiefbaues behandelt, wobei auch die Zugbeanspruchung des Betons, einfacher Eisenbahn- und Straßenbrücken, Gewölbe sowie durchlaufender Träger behandelt werden sollen. Die amtlichen Musterbeispiele werden eingehend besprochen und ihre Anwendung für Entwurf und Prüfung gezeigt.

Ferner erschien in der Samml. „Aus Natur u. Geisteswelt" v. dems. Verf.:

**Statik.** 2. Aufl. Mit 112 Fig. i. T. (ANuG Bd. 828.) Kart. M. 2.80, geb. M. 3.50

In allgemein verständlicher Art werden die Grundsätze der Statik entwickelt und durch zahlreiche Anwendungen auf die Hauptgebiete der Technik, insbesondere für den Hoch- und Tiefbau sowie den Maschinenbau erörtert in der Weise, daß auch dem Leser die Möglichkeit zur selbständigen Lösung praktischer Aufgaben gegeben wird.

**Festigkeitslehre.** 2. Afl. Mit 119 Fig. (ANuG Bd. 829.) M. 2.80, geb. M. 3.50

Das Ziel des vorliegenden Bändchens ist, in möglichst kurzer und klarer Weise die verschiedenartigsten Berechnungsweisen für die Abmessungsbestimmungen von Bauteilen dem Verständnis der Leser nahezubringen. Die zahlreichen Beispiele aus dem Hoch- u. Tiefbau sind durch eine Reihe von Beispielen aus dem Gebiete des Maschinenbaues ergänzt worden, so daß das Bändchen ein abgeschlossenes Ganzes darstellt.

---

**Mechanik.** Von Dr. G. Hamel, Professor an der Techn. Hochschule Charlottenburg. Bd. I: Grundbegriffe der Mechanik. Mit 38 Fig. im Text. Bd. II: Mechanik der festen Körper. Bd. III: Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper. (ANuG Bd. 684/86.) Kart. je M. 2.80, geb. je M. 3.50. [Bd. II u. III in Vorbereitung 1921.]

Das Buch kann allen denen empfohlen werden, die ohne höhere mathematische Kenntnisse einen allgemeinen Überblick über die Mechanik zu gewinnen wünschen, als auch denen, die ein umfassendes Studium beginnen wollen. Das erste Bändchen enthält die sogenannte Punktmechanik, im zweiten werden die festen und insbesondere die starren Körper und im dritten Wasser und Luft behandelt.

**Auf sämtl. Preise Teuerungszuschlag des Verlags 120% (Abänder. vorbehalt.) u. teilw. d. Buchhdlg.**

---

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

**Die elementare Mechanik.** Eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mech. d. Systeme starrer Körper; d. synthet. u. d. Elemente d. analyt. Methoden sowie eine Einführ. i. d. Prinz. d. Mech. deformierbarer Systeme. Von Dr. G. Hamel, Prof. a. d. Techn. Hochsch., Charlottenburg. Mit 265 Fig. [XVII u. 634 S.] gr. 8. 1912. Geh. M. 24.—, geb. M. 28.—

„Reiche Literaturangaben und geschichtliche Bemerkungen geben dem Weiterstrebenden Gelegenheit, sich in einzelne Fragen besonders einzuarbeiten. Das geistvolle Werk verdient wärmste Empfehlung." (Ztschr. d. Ver. dtsch. Ingenieure.)

**Vorlesungen über technische Mechanik.** Von Geh. Hofrat Dr. A. Föppl, Professor an der Technischen Hochschule München.

I. Bd.: Einführung in die Mechanik. 6. Aufl. Mit 104 Fig. [XVI u. 414 S.] 1920. Geh. M. 20.—, geb. . . . . . . . . . . . . . . . M. 24.—
II. Bd.: Graphische Statik. 5. Auflage. Mit 209 Abb. [XII u. 404 S.] 1920. Geh. M. 20.—, geb. . . . . . . . . . . . . . . . M. 24.—
III. Bd.: Festigkeitslehre. 8. Auflage. Mit 114 Abb. [XVIII u. 446 S.] 1920. Geh. M. 21.20, geb . . . . . . . . . . . . . . . . M. 25.20
IV. Bd.: Dynamik. 6. Aufl. Mit 86 Fig. [X u. 417 S.] 1921. Geh. M. 20.—, geb. M. 24.—
V. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. 3. unver. Auflage. Mit 44 Fig. [XII u. 391 S.] 1920. Geh. M. 20.—, geb. . . . . . . . . M. 24.—
VI. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. 3. unv. Abdr. Mit 30 Abb. im Text. [XII u. 484 S.] 1920. Geh. M. 23.20, geb. . . . . . . . . M. 28.—

**Aufgabensammlung aus der technischen Mechanik** für den Schul- und Selbstunterricht. Von Prof. N. Schmitt in Dortmund. In 2 Bdn. Mit zahlr. Fig. (ANuG Bd. 558/59.) Kart. je M. 2.80, geb. M. 3.50

Bd. I: Statik u. Festigkeitslehre. 2. Aufl. — Bd. II: Dynamik u. Hydraulik.

„Eine ganz vorzügliche Sammlung von typischen Aufgaben samt ausgeführten Lösungen, welche, einer auf Arbeitsfreudigkeit der Schüler glücklich abzielenden Unterrichtstätigkeit entsprossen, selbst den bereits erwerbstätigen Techniker noch zu fesseln und zu fördern vermögen." (Fachschule.)

**Lehrbuch der Physik.** Von Prof. E. Grimsehl, weil. Direktor der Oberrealschule a. d. Uhlenhorst in Hamburg. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen u. zum Selbststudium. 2 Bände, hrsg. v. Prof. Dr. W. Hillers in Hamburg u. Prof. Dr. H. Starke in Aachen.

I. Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik u. Optik. 5., verm. u. verb. Aufl. Mit 1049 Fig. im Text. 10 Fig. auf 2 farb. Tafeln und 1 Titelbild. [XVI u. 1029 S.] gr. 8. 1921. Geh. M. 32.—, geb. M. 38.—
II. Band: Magnetismus und Elektrizität. 4., verm. u. verb. Aufl. Mit 548 Fig. [VIII u. 634 S.] gr. 8. 1920. Geh. M. 22.—, geb. M. 26.—

„Das sehr flüssig geschriebene Werk behandelt den Stoff in klarer, einfacher Weise, durch häufig eingeschobene Beispiele die gegebenen Betrachtungen festigend, so daß auch beim Selbststudium wohl nirgends Schwierigkeiten auftreten werden." (Dinglers Polytechnisches Journal.)

**Grundriß der Physik.** Für höhere Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. K. Hahn, Hamburg. Mit 326 Fig. [VII u. 274 S.] gr. 8. 1920. Geh. M. 8.—, geb. M. 9.60

Der Grundriß der Physik soll in „knappester F rm" und in „streng logischem Aufbau" eine Darstellung der Experimentalphysik geben, die bis zu den „neuesten Ergebnissen der Forschung" führt.

**Kleiner Leitfaden der praktischen Physik.** Von Professor Dr. Fr. Kohlrausch, weil. Präsident der physikal.-techn. Reichsanstalt zu Berlin. 4. Aufl. bearb. von Dr. H. Scholl, Prof. an der Univ. Leipzig. Mit 165 Abb. im Text. [XX u. 332 S.] gr. 8. 1921. Geb. M. 16.—

**Physikalisches Wörterbuch.** Von Prof. Dr. G. Berndt, Berlin. M. 81 Fig. i. Text. [IV u. 200 S.] 8. 1920. (Teubn. kl. Fachwörterb. Bd. 5) Geb. M. 7.—

Will schnell und treffend, ohne größere Vorkenntnisse vorauszusetzen, über alle wichtigeren physikalischen Erscheinungen und Begriffe unterrichten. Besonders berücksichtigt sind die Anwendungen der Physik im täglichen Leben u. in der Technik.

Auf sämtl. Preise Teuerungszuschlag des Verlags 120% (Abänder. vorbehalt.) u. teilw. d. Buchhd g.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

20,00

# Aus Natur und Geisteswelt

**Jeder Band kartoniert M. 2.80, gebunden M. 3.50**

Hierzu Teuerungszuschl. des Verlags 120% (Abänderung vorbehalten)

## Lehrbücher für Schule und Selbstunterricht

**Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studienrat P. Crantz. Mit zahlr. Fig. 7. u. 5. Aufl. (Bd. 120, 205; auch in 1 Band.)
**Graphisches Rechnen.** Von Prof. O. Prölß. Mit 163 Fig. im Text. (Bd. 708.)
**Lehrbuch der Rechenvorteile.** Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlr. Übungsbeispielen. Von Ing. Dr. J. Bojko. (Bd. 739.)
**Prakt. Mathematik.** V. Prof. Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. Aufl. Mit 29 Fig. und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Fig. (Bd. 526.)
**Einführung in die Infinitesimalrechnung** mit einer histor. Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verb. Aufl. Mit 19 Fig. (Bd. 197.)
**Differentialrechnung** unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispiel. u. Aufgab. versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 45 Fig., 161 Aufg. (387.)
**Integralrechnung** unt Berücksichtigung der prakt. Anwendung in d. Technik m. zahlr. Beispiel. u. Aufg. verseh. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 54 Figuren und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)
**Differentialgleichungen.** Von Studienrat Dr. M. Lindow. (Bd. 589.) [U. d. Presse 1921.]
**Planimetrie zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studienr. P. Crantz. 2. Aufl. Mit 94 Fig. (Bd. 340.)
**Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studienrat P. Crantz. 2. Aufl. Mit 55 Figuren. (Bd. 504.)
**Ebene Trigonometrie z. Selbstunterricht.** Von Geh. Stud.-Rat P. Crantz. 3. Aufl. Mit 50 Fig. (431.)
**Sphärische Trigonometrie z. Selbstunterricht.** Von Geh. Studienrat P. Crantz. (Bd. 605.)
**Einführung in die darstellende Geometrie.** Von Prof. P. B. Fischer. (Bd. 541)
**Projektionslehre.** Die rechtwinkelige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst Anh. über d. schiefwinkelige Parallelprojektion, in kurzer leichtfaßl. Darstell. f. Selbstunterricht u. Schulgebr. Von akad. Zeichenlehr. A. Schudeisky. Mit 208 Fig. (Bd. 564.)
**Grundzüge d. Perspektive** nebst Anwend. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. 2., verb. Aufl. Mit 91 Fig. und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)
**Geometrisches Zeichnen.** Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. a. 12 Taf. (568.)
**Technisches Zeichnen.** Von Reg.-Rat Prof. Horstmann. (Bd. 474.) [In Vorb.]
**Die graphische Darstellung.** Eine allgemeinverständl., durch zahlr. Beisp. aus allen Gebiet. der Wissenschaft u. Praxis erläut. Einführung in den Sinn u. d. Gebrauch d. Methode. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. (Bd. 437.)
**Mechanik.** Von Prof. Dr. G. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe d. Mech. Mit 38 Fig. II. Mech. d. festen Körper. III. Mech. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.) II. u. III. in Vorb.
**Aufgaben aus der techn. Mechanik f. d. Schul- u. Selbstunterricht.** V. Prof. R. Schmitt. M. Aufg., Lös. u. zahlr. Fig. i. Text. I. Statik u. Festigkeitslehre. 2. Aufl. II. Dynamik u. Hydraulik. (Bd. 558/559.)
**Statik.** Von Gewerbeschulrat Baugewerkschuldir. Reg.-Baumstr. A. Schau. 2. Aufl. Mit 112 Fig. im Text. (Bd. 828.)
**Festigkeitslehre.** Von Gewerbeschulrat Baugewerkschuldir. Reg.-Baumeister A. Schau. 2. Aufl. Mit 119 Figuren im Text. (Bd. 829.)
**Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik).** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. von Privatdoz. Dr. Fr. Schmidt. Mit 46 Abb. im Text. (Bd. 516.)
**Praktische Thermodynamik.** Aufgaben u. Beisp. z. mechan. Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 40 Abb. im Text u. 3 Taf. (Bd. 596.)
**Das Eisenhüttenwesen.** Von Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 6. Aufl. von Bergassessor F. W. Wedding. Mit Abb. (Bd 20.)
**Metallurgie.** Von Dr. Ing. Nugel. I. Leicht- u. Edelmetalle. II. Schwermetalle. (446/47.) [I. Vorb.]
**Unsere Kohlen.** Von Bergassessor P. Kukuk. 2. verb. Aufl. Mit 49 Abb. i. Text u. 1 Taf. (Bd. 396.)
**Die Maschinenelemente.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 175 Abb. (Bd. 301.)
**Hebezeuge.** Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. Mit 67 Abb. im Text. (Bd. 196.)
**Die Dampfmaschine.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Wirkungsweise d. Dampfes in Kessel u. Maschine. 4. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 393.) II: Ihre Gestaltung u. Verwendung. 3. A. v. Priv.-Doz. Dr. Fr. Schmidt. Mit 94 Abb. (Bd. 394.)
**Die neueren Wärmekraftmaschinen.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie u. d. Bau der Gasmaschinen. 5. Aufl. Mit 41 Abb. (Bd. 21.) II: Gaserzeuger, Großgasmasch., Gas- u. Dampfturb. 4. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 86.)
**Wasserkraftausnutzung u. Wasserkraftmaschinen.** Von Dr. Ing. F. Lawaczek. (Bd. 732.)
**Landwirtschaftliche Maschinenkunde.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. 2. Aufl. Mit 64 Abb. (Bd. 316.)
**Grundlagen der Elektrotechnik.** Von Obering. A. Rotth. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 391.)
**Die elektrische Kraftübertragung.** Von Ing. P. Köhn. 2. Aufl. Mit 133 Abb. (Bd. 424.)
**Elektrische Maschinen.** Von Dipl.-Ing. M. Liwschitz. (Bd. 774.)
**Drähte und Kabel,** ihre Anfert. u. Anwend. in der Elektrotechn. Von Oberpostinsp. H. Brick. 2. Aufl. (Bd. 285.)
**Der Eisenbetonbau.** Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Afl. Mit 82 Abb. u. 8 Rechnungsbeisp. (275.)
**Das Holz,** seine Bearbeitung und seine Verwendung. Von Inspektor J. Großmann. Mit 39 Originalabbildungen im Text. (Bd. 473.)
**Die Kälte,** ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. H. Alt. Mit 45 Abb. (Bd. 311.)
**Einführung in die Technik.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. Lorenz. Mit 77 Abb. (Bd. 729.)
**Am sausenden Webstuhl der Zeit.** Übers. über die Wirkungen d. Entwicklung d. Naturw. u. Technik auf d. ges. Kulturleb. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
**Schöpfungen der Ingenieurtechnik d. Neuzeit.** V. Geh. Reg.-Rat M. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

Preise freibleibend

S - 96

# Der Unterricht an Baugewerkschulen

## Baukonstruktion und Baukunde

**Baukonstruktionslehre.** Von Prof. O. Frick u. Dir. Prof. K. Knöll. In 2 Teilen. (Bd. 37, 38.) Teil I. 7. Aufl. Mit 275 Fig. M. 16.20. Teil II. 6. Aufl. Mit 251 Fig. M. 19.20.

**Gründung von Hochbauten.** Von Studienrat Professor M. Benzel. 5. verb. Auflage. Mit 151 Abbildungen im Text, 7 Berechnungsbeispielen und 2 Tafeln. Mit Anhang: Berechnung der Baugrundbelastung durch ein freisteh. zweigeschossiges Wohnhaus. (Bd. 8.) M. 18.—.

**Grundzüge des Eisenbaues.** (Eisenkonstruktion.) Von Dipl.-Ing. Prof. A. Göbel. In 2 Teilen. (Bd. 31, 32.) Teil I. Von Studienrat Dipl.-Ing. O. Henkel. 5. Aufl. Mit 217 Abb. M. 13.80. Teil II. 4. Aufl. Von Studienrat Dipl.-Ing. O. Henkel. Mit 310 Abb. im Text. M. 12.—

**Die Ausführung von Eisenbetonbauten.** Von Oberl. Ing. Preuß. Mit 31 Fig. (Bd. 33.) M. 4.80.

**D. Berechnung v. Eisenbetonbauten.** V. Dir. Dr.-Ing. P. Weiske. 2. Aufl. M. 74 Fig. (Bd. 17.) M. 7.20.

**Umbauten u. Wiederherstellungsarb.** V. Arch. Prof. E. Gebhardt. 2. Afl. M. 38 Abb. (Bd. 7.) M. 6.—.

**Bürgerliche Baukunde und Baupolizei.** Von Architekt Gewerbeschuldirektor C. Busse. 2. Aufl. Mit 217 Abbildungen. (Bd. 49.) M. 13.40

**Leitfaden der landwirtschaftlichen Baukunde.** Von Baumeister Oberl. Prof. A. Schubert. 3. Auflage. Mit 161 Originalfiguren. (Bd. 10.) M. 10.80.

**Die gewerbliche Baukunde.** Von Studienrat Prof. E. Scriba. [U. d. Pr.]

**Die Bauführung.** Von Architekt Prof. M. Gebhardt. 3. Aufl. Mit 8 Fig. (Bd. 9.) M. 12.—.

## Erd-, Straßen- und städtischer Tiefbau, Wasserbau, Brückenbau und Eisenbahnbau

**Städtischer Tiefbau.** Von Geh. Reg.- und Gewerbeschulrat Professor R. Gürschner und Professor M. Benzel. In 3 Teilen. (Bd. 34–36.) Teil I: Bebauungspläne und Stadtstraßenbau. Von Prof. M. Benzel. 3., verm. Auflage. Mit 212 Abb. u. 3 mehrfarb. Plänen (ein Bebauungsplan nebst Längen- und Querprofilen und ein Fluchtlinienplan). M. 31.80 Teil II: Wasserversorgung von Ortschaften. Von Geh. Reg.- u. Gewerbeschulrat Prof R. Gürschner. 4. Aufl. Mit 81 Abb. M. 15.60. Teil III: Stadtentwässerung. Von Geh. Reg.- u. Gewerbeschulrat R. Gürschner u. Prof. M. Benzel. 4. Aufl. Mit 144 Abb., 32 Berechnungsbeispielen, 3 mehrfarbigen Plänen und 6 graphischen und 5 Zahlentabellen. M. 27.—.

**Grundbau.** Von Prof. M. Benzel. 3. verbess. u. verm. Aufl. Mit 233 Abb. (Bd. 18.) M. 20.40.

**Erd- und Straßenbau.** V. Ing. Prof. H. Knauer. 3., umgearb. u. verm. Aufl. In 2 Teilen. (Bd. 11/12.) Teil I: Erdbau. M. 159 Abb. u. 2 Taf. M. 16.20. Teil II: Straßenbau. Mit 46 Abb. u. Tafeln. M. 10.80.

**Der Wasserbau.** Von Reg.-Baumeister Professor F. Fresow. In 2 Teilen. (Bd. 24 u. 50.) Teil I. 3. Aufl. Mit 166 Abb. im Text. M. 10.80. Teil II. 3. Aufl. Mit 139 Abbild. im Text. M. 14.40.

**Brückenbau.** Von Gewerbeschulrat Reg.-Baumeister Direktor A. Schau. In 2 Teilen (Bd. 39 und 40.) Teil I: Allgemeines. Durchlässe und massive Brücken. Unterhaltung. Überschlägliche Kostenberechnungen. 2. Aufl. Mit 324 Abb. M. 40.80. Teil II: Die eisernen Brücken. Allgemeines. Bauliche Anordnung u. Ausbildung d. Eisenbahnbrücken u. Fußgängerbrücken. Unterhaltung. Kostenberechnung eiserner Überbauten. 2. Aufl. [Unter d. Presse.]

**Der Eisenbahnbau.** Von Gewerbeschulrat Reg.-Baumeister Direktor A. Schau. In 2 Teilen. (Bd. 15 u. 16.) Teil I: Allgemeine Grundlagen. Bahngestaltung. Grundzüge für die Anlage der Bahnen. 4., verbesserte Auflage. Mit 182 Abb. M. 32.—. Teil II: Stationsanlagen und Sicherungswesen. 4. verb. Aufl. Mit 302 Abbild. im Text und auf 1 Tafel. M. 32.—

## Baustofflehre, Gestaltungslehre, Zeichnen

**Leitfaden der Baustofflehre für Baugewerkschulen.** Von Reg.- u. Gewerbeschulrat K. Jessen u. Prof. Girndt. 6. umgearb. Aufl. Mit 126 Abb. im Text. (Bd. 1.) M. 20.40.

**Zeichenschlüssel.** Von Oberlehrer Dr. V. Hortig. 12 Tafeln als Anleitung zur Vorstellung von Zeichnungen der Hoch- und Tiefbauer. (Bd. 44.) Geh. M. 7.20 Kart. M. 9.—.

**Gestaltungslehre.** Von Professor O. Frick. In 2 Teilen. (Bd. 42, 43.) Teil I: Die Gestaltung freistehender Landhausbauten. [Vergriffen] Teil II: Die Gestaltung eingebauter Wohnhäuser. Raumausbildung. Mit 140 Figuren. M. 10.80.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preisänderung vorbehalten

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

II-351292

L.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

# Teubners Techn

Die Leitfäden wollen zunächst dem S
tiker in knapper, wissenschaftlich einwan
das Wesentliche des Tatsachenmaterials
seiner theoretischen Ausbildung und prak
diese erleichtern und ihm die Anschaffu
bücher ersparen. Auf klare Gliederung des Stoffes auch in der äußeren Form der Anordnung wie auf seine Veranschaulichung durch einwandfrei ausgeführte Zeichnungen wird besonderer Wert gelegt. — Die einzelnen Bände, für die vom Verlag die ersten Vertreter der verschiedenen Fachgebiete gewonnen werden konnten, erscheinen in rascher Folge. Bisher sind erschienen bzw. unter der Presse:

Analytische Geometrie. Von Geh. Hofrat Dr. R. Fricke, Professor an der Techn. Hochschule zu Braunschweig. Mit 96 Fig. [VI u. 135 S.] 1915. (Bd. 1.) M. 11.20

Darstellende Geometrie. Von Dr. M. Großmann, Prof. an der Eidgen. Techn. Hochschule zu Zürich. Bd. I. Mit 134 Fig. [IV u. 84 S.] 1917. (Bd. 2.) M. 16.—

Darstellende Geometrie. Von Dr. M. Großmann, Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule zu Zürich. Bd. II. 2., umgearb. Aufl. Mit 144 Fig. [VI u. 154 S.] 1921. (Bd. 3.) Kart. M 32.—

Differential- und Integralrechnung. V. Dr. L. Bieberbach, o. ö. Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M. I. Differentialrechnung. Mit 34 Fig. [VI u. 130 S.] 1917. (Bd. 4) Geh. M. 11.20. II. Integralrechnung. Mit 25 Fig. [VI u. 142 S.] 1918. (Bd. 5.) Geh. M. 13.60

Funktionentheorie. Von Dr. L. Bieberbach, Prof. an der Universität Berlin. Mit 80 Fig. [IV u 312 S] 1922. (Bd. 14.)

Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathemat. Physik. Von Prof. Dr R Gans, Dir. des physikalischen Instituts der Univers. La Plata. 4. Aufl. Mit 39 Fig. [VI u. 118 S] gr. 8. 1921. Geh. M. 37.60, geb. M. 47.80

Praktische Astronomie. Geograph. Orts- u. Zeitbest. Von V. Theimer, Adjunkt a. d. Montan. Hochsch. zu Leoben. Mit 62 Fig. [IV u. 127 S.] 1921. (Bd. 13.) Kart. M 32.—

Feldbuch für geodätische Praktika. Nebst Zusammenstellung d. wichtigsten Meth. u. Regeln sowie ausgef. Musterbeispielen. V. Dr.-Ing. O. Israel, Prof a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 46 Fig. [IV u. 160 S.] 1920. (Bd. 11.) M. 32.—

Erdbau, Stollen- und Tunnelbau. Von Dipl.-Ing. A. Birk, Prof. a. d. Techn Hochschule zu Prag. Mit 110 Abb. [V u. 117 S.] 1920. (Bd. 7.) Kart. M. 15.20

Landstraßenbau einschl. Trassieren. V. Oberbaurat W. Euting, Stuttgart. Mit 54 Abb. i. Text u. a. 2 Taf. [IV u. 100 S.] 1920. (Bd. 9.) Kart. M 22.40

Grundriß der Hydraulik. Von Hofrat Dr. Ph. Forchheimer, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 114 Fig. im Text. [V u. 118 S.] 1920. (Bd. 8.) M. 32.80

Hochbau in Stein. Von Geh. Baurat H. Walbe, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Darmstadt. Mit 302 Fig. im Text. [VI u. 110 S.] 1920. (Bd. 10.) Kart. M. 25.60

Leitfaden der Baustoffkunde. Von Geh. Hofrat Dr. M. Foerster, Prof. an der Techn. Hochschule in Dresden. [U. d. Pr. 21.] (Bd. 15.)

Veranschlagen, Bauleitung, Baupolizei, Heimatschutzgesetze. Von Stadtbaur. Fr. Schultz, Bielefeld. Mit 3 Taf. [IV u. 150 S.] 1921. (Bd 12.) Kart. M. 37.60

Mechanische Technologie. V. Dr. R. Escher, Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochsch. zu Zürich. Mit 418 Abb. i. Text. 2. Aufl. [VI u. 164 S.] 1921. (Bd. 6.) Kart. M. 32.—

In Vorbereitung befinden sich:

Höhere Mathematik. 2 Bde. Von Dr. R. Rothe, Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin.
Maschinenelemente. 2 Bde. V. K. Kutzbach, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden.
Thermodynamik. 2 B. V. Geh. Hofr. Dr. R. Mollier, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden.
Kolbenkraftmaschinen. V. Dr.-Ing. A. Nägel, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden.
Dampfturbinen und Turbokompressoren. Von Dr.-Ing. H. Baer, Prof. an der Technischen Hochschule Breslau.
Wasserkraftmaschinen und Kreiselpumpen. Von Oberingenieur Dr.-Ing. Franz Lawaczeck, Halle.
Grundlagen der Elektrotechnik. 2 Bde. Von Dr. E. Orlich, Prof. an der Technischen Hochschule Berlin.
Elektrische Maschinen. 4 Bde. V. Dr.-Ing. M. Kloß. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin.
Mech. Technologie der Textilindustrie. Von Dr.-Ing. W. Frenzel, Delft.
Eisenbau. Von Dr. A. Hertwig, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen.
Hydrographie. Von Dr. H. Gravelius, Prof. an der Techn. Hochsch. Dresden.
Hochbau in Holz. … r Technischen Hochschule Darmstadt.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

100000297690

Verlag von B … und Berlin

Preisänderung vorbehalten

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.