



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294509





3 15 4082 2  
4826  
14

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN  
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE  
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE

---

---

5

# FUNKTIONENTAFELN

MIT

FORMELN UND KURVEN

VON

DR. EUGEN JAHNKE UND

PROF. A. D. KGL. BERGAKADEMIE ZU BERLIN

FRITZ EMDE

INGENIEUR IN BERLIN

MIT 53 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

A/739

KD 517:518.2



~~II 4082~~



II-351280

COPYRIGHT 1909 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

BPK-3-27/2018  
Akc. Nr. 1727/51

## Vorwort.

Indem man die Methoden der Analysis auf Probleme der Geometrie, Physik und Technik anwandte, wurde man dazu geführt, das Gebiet der bekannten Funktionen mehr und mehr zu erweitern. Die neueingeführten Funktionen wurden von dem zufälligen Problem, dem sie entsprungen, losgelöst, als selbständige Gebilde der Analysis zugeführt und nach allen Richtungen hin durchforscht. Nur ein bescheidener Teil dieser Untersuchungen wird für denjenigen Interesse bieten, der in der Mathematik nichts anderes als ein Mittel zum Zweck sieht. Ihm kommt es höchstens darauf an, zu wissen, welchen Differential-, Differenzen- oder Funktionalgleichungen die Funktionen genügen. Daneben werden bequeme Transformationsformeln für seine Zwecke noch eine gewisse Bedeutung haben. Um die Darstellbarkeit der Funktionen durch unendliche Reihen oder gar durch bestimmte Integrale wird er sich nur insoweit kümmern, als er genötigt ist, selbst Funktionswerte zu berechnen. So verstehen viele die Logarithmen und Kreisfunktionen mit Nutzen zu verwenden, aber nur die wenigsten wissen, wie diese Zahlen berechnet sind. Nun ist eine solche Berechnung meist ein mühseliges und zeitraubendes Geschäft. Man kann daher allgemein sagen, daß eine Funktion eine um so ausgedehntere Verwendung finden wird, je umfangreicheres Tafelmaterial für sie berechnet vorliegt und je bequemer zugänglich diese Tafeln gemacht sind.

Sieht man von den Tafeln für die Logarithmen und Kreisfunktionen ab, so sind vielleicht noch die Tafeln für die Hyperbelfunktionen durch das Buch von Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen, Berlin 1890, W. Ernst u. S. und durch das Taschenbuch der „Hütte“, Berlin, W. Ernst u. S., in weiteren Kreisen verbreitet worden. Daneben gibt es einige wenige Bücher, die anhangsweise für die eine oder andere der nicht elementaren Transzendenten Zahlenwerte bieten, so H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig 1906, B. G. Teubner; W. E. Byerly, An elementary treatise on Fouriers series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics, Boston 1893, Ginn & Comp.; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Leipzig 1903, B. G. Teubner; R. Fricke, Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik, Leipzig 1900, B. G. Teubner; A. Gray and G. B. Mathews, A treatise on Bessel functions, London 1895, Macmillan and Co.; J. Hoüel,

Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1890, Gauthier-Villars; L. Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1898, Gauthier-Villars.

Außerdem finden sich, in Zeitschriften zerstreut, noch zahlreiche Tafeln von Transzendenten. Hier sind namentlich die englischen Zeitschriften hervorzuheben, welche ein vielfach unbekanntes Tafelmateriale in sich bergen, das man der seit 1873 tätigen Londoner Tafelkommission (Committee on Mathematical Tables) zu verdanken hat. Aber bequem zugänglich wird man diese Tafeln nicht nennen können. Wird es doch oft nicht leicht sein, die zuweilen sehr versteckten Tafeln aufzufinden, vorausgesetzt, daß man von ihrer Existenz überhaupt Kunde erhalten hat. Von allen diesen Tafeln wird man getrost behaupten können, daß sie nicht allgemein genug bekannt geworden, jedenfalls in den Kreisen der Praktiker vielfach unbekannt geblieben sind.

Wir glauben deshalb ein wesentliches Hindernis für die praktische Anwendung der Resultate mathematischer Forschung aus dem Wege zu räumen, wenn wir die vorhandenen, aber zerstreuten Tafeln so vollständig wie möglich gesammelt in einem Bande von geringem Umfang herausgeben. Gleichzeitig hoffen wir dadurch, daß die in solchen Tafeln steckende Arbeit weiteren Kreisen nutzbar gemacht wird, dem Verdienste dieser Arbeit die gebührende Anerkennung zu verschaffen.

Da an Tafeln für die elementaren Transzendenten kein Mangel ist, war es uns hauptsächlich um die übrigen Transzendenten zu tun. Immerhin haben wir für die elementaren Transzendenten einige Tafeln nebst Formeln aufgenommen, die uns neben den bereits vorhandenen wünschenswert und nützlich erscheinen.

Meist ist es erwünscht, rasch und bequem den Verlauf einer Funktion zu überblicken. Deshalb haben wir die Zahlentafeln in Kurven umgesetzt. Die Kurven sollen dazu beitragen, daß man sich in den Zahlentafeln rascher zurecht findet. Die beigegebenen Formeln werden sich beim praktischen Gebrauch hoffentlich als eine angenehme und nützliche Zugabe erweisen.

Wir haben uns fast durchweg auf vier geltende Stellen beschränkt (so daß also die Zahlen bis auf 0,1 bis 1 Promille genau sind), weil weitere Stellen für wirkliche Anwendungen nicht nur gewöhnlich überflüssig, sondern geradezu störender Ballast sind. Der Platzersparnis und der größeren Übersichtlichkeit wegen haben wir Nullen hinter dem Komma oft in der Potenzform geschrieben (z. B.  $0,0^{31}$  statt 0,0001). Wir geben in der Regel die Funktionswerte selbst, nicht ihre Logarithmen, da wir voraussetzen, daß die Benutzer der Sammlung sich eines Rechenschiebers bedienen.

Neu sind, soviel wir wissen, die Tafeln für die Zylinderfunktionen zweiter Art von der Ordnung Null und Eins mit dem Argument  $x\sqrt{i}$ .



Als wir dieselben Funktionen auch für das Argument  $ix$  schon berechnet hatten, machte uns Herr J. Zenneck freundlichst darauf aufmerksam, daß Tafeln für rein imaginäres Argument schon von Herrn St. Aldis veröffentlicht worden sind. Wir geben beide Tafeln. Die Zahlenwerte unterscheiden sich nur durch den Faktor  $\frac{\pi}{2}$ . Bei den Zylinderfunktionen zweiter Art haben wir uns den Definitionen von Nielsen (Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, B. G. Teubner) angeschlossen.

Unsere Sammlung ist in erster Linie den wirklichen Anwendungen gewidmet. Doch hoffen wir, daß sie sich auch für die mathematischen Übungen an den Universitäten und Technischen Hochschulen nützlich erweisen wird. In einer Zeit, wo das Verlangen nach Ausbildung im numerischen Rechnen immer gebieterischer auftritt, wird man sich bei den Übungen, sei es in der Vorlesung, sei es im Seminar, nicht mehr mit der formelmäßigen Erledigung eines Problems begnügen dürfen, es wird nötig sein, die Formeln auf numerische Beispiele anzuwenden und die Studenten in die Praxis des Rechnens einzuführen.

Unser Buch soll nach keiner Richtung hin ein Lehrbuch sein und am wenigsten etwa ein Lehrbuch überflüssig machen. Andererseits haben wir an Formeln nicht gespart, und es ist absichtlich geschehen, wenn Formeln, die durch mehr oder minder leicht ersichtliche Transformation aus einer andern hervorgehen, explizite hingeschrieben worden sind, nämlich im Hinblick auf den praktischen Rechner, der die nötigen Formeln in größtmöglicher Vielgestaltigkeit vor sich zu sehen wünscht. Und dem Vorwurf, daß der Reichtum an Formeln stellenweise die Übersicht stören könnte, glauben wir durch passende Anordnung begegnet zu sein.

Ferner soll unser Buch zwar den Anwendungen dienen, nicht aber sie lehren und einüben. Die nicht rein mathematischen Auseinandersetzungen über einige elektromagnetische Probleme auf Seite 76—77 und 142—145 sind nur als Erläuterung der zugehörigen Zahlentafeln zu betrachten.

Es ist unausbleiblich, daß eine solche Sammlung Fehler und Irrtümer enthält. Ein ideales Tafelwerk könnte wohl nur durch eine staatlich organisierte Arbeit zustande gebracht werden, nicht aber von einzelnen im Nebenamt. Da jedoch bis zu einem Unternehmen großen Stiles noch einige Zeit vergehen und daher unsere Sammlung leider nicht so bald überflüssig werden wird, richten wir an die Fachgenossen aller Richtungen die Bitte, uns auf Fehler und Mängel, die sie entdecken, freundlichst aufmerksam zu machen. Zugleich hoffen wir, daß man uns — namentlich bei der ersten Auflage — das Recht zugestehen wird, um Nachsicht für solche Mängel zu bitten.

Obgleich wir uns bemüht haben, die vorhandenen Tafeln möglichst vollständig zu sammeln, zweifeln wir nicht daran, daß uns manches entgangen ist. Wir werden spätere Auflagen, die sich etwa als notwendig herausstellen

sollten, in dieser Hinsicht ergänzen und sprechen die Bitte aus, uns dabei durch Hinweis auf sonst schon veröffentlichte und Überlassung von noch nicht veröffentlichten Tafeln zu unterstützen.

Während der Drucklegung hatten wir die Genugtuung, daß uns eine Reihe von Freunden und Kollegen durch Ratschläge und Beiträge in bereitwilligster Weise unterstützt hat. Wir möchten nicht verfehlen, ihnen allen auch an dieser Stelle unseren herzlichsten Dank auszusprechen, nämlich den Herren M. Abraham (Göttingen), F. Blanc (Charlottenburg), C. Cranz (Berlin), E. Czuber (Wien), P. Debye (München), A. G. Greenhill (Cambridge), W. v. Ignatowsky (Petersburg), A. Kalähne (Danzig), A. Kneser (Breslau), E. Lampe (Berlin), R. Mehmke (Stuttgart), L. Prandtl (Göttingen), R. Rothe (Clausthal), R. Rüdenberg (Charlottenburg), P. Schafheitlin (Berlin), W. Seitz (Aachen), B. Soschinski (Berlin), K. Strecker (Berlin), K. W. Wagner (Berlin), G. Witt (Berlin), J. Zenneck (Braunschweig) und H. Zimmermann (Berlin). Herr R. Emden (München) war so liebenswürdig, uns eine kleine Tafelsammlung zur Verfügung zu stellen, die er für die Zwecke seiner Vorlesungen hat vervielfältigen lassen. Und besonderen Dank schulden wir Herrn A. Sommerfeld (München) für das lebhafte und tatkräftige Interesse, das er unserem Unternehmen entgegengebracht hat. Auch Frau Emde fühlen wir uns zu Dank verpflichtet, welche uns durch ihre Ausdauer und Geschicklichkeit beim Berechnen neuer Zahlentafeln wesentlich unterstützt und die Korrekturen sämtlicher Zahlentafeln mitgelesen hat.

Zum Schluß erfüllen wir noch eine angenehme Pflicht, wenn wir der Verlagsbuchhandlung für das liebenswürdige Entgegenkommen und Eingehen auf unsere zahlreichen Wünsche unseren lebhaften Dank sagen.

Berlin, im Mai 1909.

Eugen Jahnke.      Fritz Emde.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Die Funktionen <math>x \operatorname{tg} x</math> und <math>x^{-1} \operatorname{tg} x</math>.</b>	
Tafel, Fig. 1 und Fig. 2 . . . . .	1—2
<b>II. Wurzeln transzendenter Gleichungen.</b>	
1. Die Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ . . . . .	2
2. Die Gleichungen $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}$ , $\operatorname{tg} x = \frac{x^2-9}{4x^2-9}$ . . . . .	3
3. Die Gleichungen $\cos x \operatorname{Cot} x = \pm 1$ . . . . .	3
4. Die Gleichung $\operatorname{tg} x + \operatorname{Tg} x = 0$ . . . . .	3
<b>III. Verwandlung von <math>a + bi</math> in <math>r e^{p i}</math> und umgekehrt.</b>	
Fig. 3 für $\sec \psi$ und den Bogen $\psi$ als Funktion von $\operatorname{tg} \psi$ . . . . .	4
Tafel für $\sec \psi$ und den Bogen $\psi$ als Funktion von $\operatorname{tg} \psi$ . . . . .	5
<b>IV. Die Exponentialfunktionen <math>e^x</math> und <math>e^{-x}</math>.</b>	
Tafel für $\frac{\pi}{2} x$ , $e^x$ , $e^{-x}$ , $\frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$ , $\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$ . . . . .	6
Fig. 5 für $\frac{1}{2} e^x$ und $\frac{1}{2} e^{-x}$ . . . . .	15
<b>V. Die Hyperbelfunktionen.</b>	
1. Definition . . . . .	7
2. Spezielle Werte . . . . .	7
3. Grundgesetze . . . . .	7
4. Zusammenhang unter den Funktionen . . . . .	7
5. Additionstheoreme . . . . .	8
6. Funktionen der Vielfachen eines Sektors . . . . .	9
7. Potenzen . . . . .	9
8. Zusammenhang mit der Exponentialfunktion und dem Logarithmus . . . . .	10
9. Zusammenhang mit den Kreisfunktionen . . . . .	10
10. Differentialformeln . . . . .	12
11. Integralformeln . . . . .	12
12. Näherungswerte bei kleinen Sektoren . . . . .	13
13. Näherungswerte bei großen Sektoren . . . . .	14
14. Hyperbelamplitude . . . . .	14
15. Die Tafeln . . . . .	14
Fig. 4 für $\operatorname{Amp} x$ , Fig. 5 für $\operatorname{Sin} x$ , $\operatorname{Cot} x$ , $\frac{1}{2} e^x$ , $\frac{1}{2} e^{-x}$ . . . . .	15
Fig. 10 für $\operatorname{Tg} x$ . . . . .	32
Tafel für $\operatorname{Amp} x$ . . . . .	16—18
<b>VI. Der Integralsinus, der Integralkosinus und der Integrallogarithmus.</b>	
1. Definition . . . . .	19
2. Potenzreihen für reelle Werte des Arguments . . . . .	19
3. Zusammenhang mit den Besselschen Funktionen . . . . .	20

	Seite
4. Herkunft der Tafeln . . . . .	20
Fig. 6 für $\text{Si } x$ , $\text{Ci } x$ , $\text{Ei } x$ , $\text{Ei } (-x)$ . . . . .	20
Tafel für $\text{Si } x$ , $\text{Ci } x$ , $\text{Ei } x$ , $\text{Ei } (-x)$ . . . . .	21—23
<b>VII. Die Fresnelschen Integrale.</b>	
1. Definition . . . . .	23
2. Numerische Berechnung und Herkunft der Tafeln . . . . .	23
Fig. 7 für $C(z)$ und $S(z)$ . . . . .	24
Tafel für $C(z)$ , $S(z)$ . . . . .	25
Tafel für $C(u)$ , $S(u)$ . . . . .	26
<b>VIII. Die Gammafunktion.</b>	
1. Definition . . . . .	26
2. Spezielle Werte . . . . .	26
3. Gaußsches Multiplikationstheorem . . . . .	27
4. Potenzreihe für den Logarithmus der Gammafunktion . . . . .	27
5. Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion . . . . .	27
6. Integrale, darstellbar durch die Gammafunktion . . . . .	27
7. Reihe für sehr große, positive Werte von $x$ . . . . .	29
8. Herkunft der Tafeln . . . . .	29
Fig. 8 für die Gammafunktion . . . . .	29
Fig. 9 für $\ln \Gamma(x+1)$ , $1 + \Psi(x+1)$ , $\Psi'(x+1)$ , $(\Psi'(x+1))^{-1}$ . . . . .	30
Tafeln für $\log \Gamma(x+1)$ , $\Psi(x+1)$ , $\Gamma(x+1)$ , $\Psi'(x+1)$ , $(\Psi'(x+1))^{-1}$ . . . . .	30
<b>IX. Das Gaußsche Fehlerintegral <math>\Phi x</math>.</b>	
1. Definition . . . . .	31
2. Die Ableitungen von $\Phi x$ . . . . .	32
3. Herkunft der Tafeln . . . . .	32
Fig. 10 für $\Phi(x)$ . . . . .	32
Tafel für $\Phi(x)$ . . . . .	33—36
Fig. 11 für $\Phi^{(n)}(x)$ , $n=1, \dots, 6$ . . . . .	36
Tafel für die sechs Ableitungen des Fehlerintegrals . . . . .	37—42
<b>X. Die Pearsonsche Funktion <math>F(r, \nu)</math>.</b>	
1. Definition . . . . .	43
2. Entwicklung für $1 \leq r \leq 7$ . . . . .	43
3. Semikonvergente Entwicklung für $r > 7$ . . . . .	43
4. Herkunft der Tafel . . . . .	43
Fig. 12 für $\log F(r, \nu)$ . . . . .	44
Tafel für $\log F(r, \nu)$ . . . . .	44
Tafel für die Bernoullischen Zahlen . . . . .	45
<b>XI. Die elliptischen Integrale und Funktionen.</b>	
1. Definition der elliptischen Integrale . . . . .	46
2. Definition der elliptischen Funktionen nach Jacobi . . . . .	46
3. Relationen unter den Jacobischen Funktionen . . . . .	46
4. Tafel für $\text{sn } u$ , $\text{cn } u$ , $\text{dn } u$ . . . . .	47
5. Numerische Berechnung der elliptischen Integrale . . . . .	47
6. Darstellung der elliptischen Funktionen als Thetaquotienten . . . . .	48
7. Eigenschaften der Thetafunktionen . . . . .	48

	Seite
8. Die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen . . . . .	48
9. Definition der elliptischen Integrale und Funktionen nach Weierstraß . . . . .	49
10. Darstellung der Jacobischen elliptischen Funktionen durch die $\wp$ -Funktion . . . . .	49
11. Definition der Sigma- und der Zetafunktion . . . . .	49
12. Die spezielle Funktion $\wp(u; 0, 1)$ . . . . .	49
13. Integralformeln für die Jacobischen Funktionen . . . . .	50
14. Integralformeln für die Weierstraßschen Funktionen . . . . .	50
15. Differentialgleichungen, die auf elliptische Funktionen führen . . . . .	51
16. Ausartungen der elliptischen Funktionen . . . . .	51
17. Herkunft der Tafeln . . . . .	52
Fig. 13 und 14 für das elliptische Integral erster Gattung . . . . .	53
Tafel für $F(k, \varphi)$ . . . . .	54—59
Fig. 15 und 16 für das elliptische Integral zweiter Gattung . . . . .	60
Tafel für $E(k, \varphi)$ . . . . .	61—64
Fig. 17 für $\log q$ . . . . .	65
Tafel für $\log q$ . . . . .	65—67
Tafel für $K, E$ . . . . .	68
Fig. 18 und 19 für die Thetafunktionen . . . . .	69
Fig. 20 und 21 für $\frac{d \ln \vartheta_h(x)}{dx}$ , $h = 0, 1, 2, 3$ . . . . .	70
Tafel für $\vartheta_h(x)$ , und $\frac{d \ln \vartheta_h(x)}{dx}$ . . . . .	71
Fig. 22 und 23 für die Weierstraßschen Funktionen $\wp'(u; 0, 1)$ , $\wp(u; 0, 1)$ , $\zeta(u; 0, 1)$ , $\sigma(u; 0, 1)$ . . . . .	72
Tafel für den äquianharmonischen Fall der Weierstraßschen Funktionen . . . . .	73—75
18. Anwendung der vollständigen elliptischen Integrale auf elektrische Kreisströme . . . . .	76
1. Gegeninduktivität zweier parallelen konachsialen Kreisströme . . . . .	76
Fig. 24 für $y = [2E - (1 + \cos^2 \alpha)K] / \sin \alpha$ . . . . .	76
Tafel für $y$ . . . . .	77
2. Anziehung zweier parallelen konachsialen Kreisströme . . . . .	78
3. Herkunft der Tafeln . . . . .	78
Fig. 25 für $z = \sin \alpha [2K - (1 + \sec^2 \alpha)E]$ . . . . .	78
Tafel für $z$ . . . . .	79

**XII. Die Kugelfunktionen.**

1. Definition . . . . .	79
2. Spezielle Werte . . . . .	80
3. Rekursionsformel . . . . .	80
4. Differentialbeziehungen . . . . .	80
5. Integraleigenschaften . . . . .	81
6. Asymptotische Darstellung . . . . .	81

	Seite
7. Zusammenhang der Kugelfunktionen mit den Besselschen Funktionen . . . . .	81
8. Herkunft der Tafeln für $P_n(x), P_n(\vartheta)$ . . . . .	81
9. Die Ableitungen der Kugelfunktionen nach $\vartheta$ . . . . .	82
10. Herkunft der Tafeln für $P_n'(\vartheta)$ . . . . .	82
Fig. 26 für $P_n(x)$ . . . . .	82
Tafel für $P_n(x)$ . . . . .	83—84
Fig. 27 für $P_n(\vartheta)$ . . . . .	85
Tafel für $P_n(\vartheta)$ . . . . .	85—87
Fig. 28 für $P_n'(\vartheta)$ . . . . .	87
Tafel für $P_n'(\vartheta)$ . . . . .	88—89

### XIII. Die Besselschen oder Zylinderfunktionen.

1. Definitionen . . . . .	90
a) Funktionen erster Art $J_p(x)$ .	
$\alpha$ ) Reelles Argument . . . . .	90
$\beta$ ) Komplexes Argument . . . . .	92
b) (Reelle) Funktionen zweiter Art $N_p(x)$ . . . . .	93
c) (Komplexe) Funktionen dritter Art $H_p^{(1)}(x), H_p^{(2)}(x)$ . . . . .	94
2. Halbkonvergente Reihen.	
a) Reelles Argument . . . . .	98
b) Komplexes Argument . . . . .	100
c) Verallgemeinerung für beliebiges $\frac{p}{x}$ bei großem $x$ . . . . .	102
3. Herkunft der Tafeln . . . . .	104
4. Tafeln für die Ordnungen $\frac{1}{n}$ und $\frac{2n+1}{2}$ .	
Die kleinste Wurzel von $J_{-1/3}(x) = 0$ . . . . .	106
Tafel I: $J_{1/3}(x), J_{-1/3}(x)$ . . . . .	106
Fig. 29 für $J_{\pm 1/2}(x)$ . . . . .	106
Fig. 30 für $J_{\pm 1/2}(x)$ . . . . .	107
Fig. 31 für $J_{\pm 1/2}(x)$ . . . . .	107
Tafel II: $J_{\frac{2n+1}{2}}(x), n = 0, 1, \dots, 6$ . . . . .	108
$J_{\frac{2n+1}{2}}(x), n = 0, 1, \dots, 6$ . . . . .	109
5. Tafeln für die Ordnungen Null und Eins.	
Fig. 32 und 33 für $J_0(x)$ und $-J_1(x)$ . . . . .	110
Tafel III: $J_0(x), -J_1(x)$ . . . . .	111—122
Tafel IV: Die ersten vierzig Wurzeln von $J_0(x) = 0$ und die zugehörigen Werte von $J_1(x)$ . . . . .	122
Tafel V: Die ersten fünfzig Wurzeln von $J_1(x) = 0$ und die Maxima und Minima von $J_0(x)$ . . . . .	123
Fig. 34 für $Y_0(x)$ und $Y_0'(x)$ . . . . .	123
Tafel VI: $Y_0(x), Y_0'(x) = -Y_1(x)$ . . . . .	124—125

	Seite
Tafel VII: $K_0(x), K_1(x)$ von $x=0, 1$ bis $x=6, 0$ . . . . .	126
Tafel VIII: $K_0(x), K_1(x)$ von $x=0,00$ bis $x=0,99$ und $x=1,0$ bis $x=10,3$ . . . . .	127—128
Fig. 35 für $N_0(x)$ und $-N_1(x)$ . . . . .	129
Tafel IX: $N_0(x), -N_1(x)$ . . . . .	129—130
Tafel X: Die ersten Wurzeln von $Y_0(x)=0$ und $Y_1(x)=0$ .	130
Tafel XI: $J_0(ix)$ . . . . .	130
Tafel XII: $-iJ_1(ix)$ . . . . .	131—133
Fig. 36 für $iH_0^{(1)}(ix)$ und $-H_1^{(1)}(ix)$ . . . . .	134
Tafel XIII: $iH_0^{(1)}(ix), -H_1^{(1)}(ix)$ . . . . .	134
Tafel XIV: $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix), -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$ . . . . .	135—136
Fig. 37 für $\Re J_0(x\sqrt{-i})$ und $\Im J_0(x\sqrt{-i})$ . . . . .	136
Tafel XV: $J_0(x\sqrt{-i})$ . . . . .	137
Fig. 38 für $\Re J_1(x\sqrt{-i})$ und $\Im J_1(x\sqrt{-i})$ . . . . .	137
Tafel XVI: $\sqrt{2} J_1(x\sqrt{-i})$ . . . . .	138
Fig. 39 für $\Re H_0^{(1)}(x\sqrt{-i})$ und $\Im H_0^{(1)}(x\sqrt{-i})$ . . . . .	138
Tafel XVII: $N_0(x\sqrt{-i}), H_0^{(1)}(x\sqrt{-i})$ . . . . .	139
Fig. 40 für $\Re H_1^{(1)}(x\sqrt{-i})$ und $\Im H_1^{(1)}(x\sqrt{-i})$ . . . . .	140
Tafel XVIII: $H_1^{(1)}(x\sqrt{-i})$ . . . . .	140
Tafel XIX: $\ln \frac{\gamma x}{2}$ . . . . .	141
6. (Komplexe) Wurzel von $\frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz} = 0$ .	
7. Anwendung der Besselschen Funktionen $J_0(x\sqrt{-i})$ und $J_1(x\sqrt{-i})$ auf elektrische Wechselströme in Drähten . . . . .	
Fig. 41 für $\text{ber } x$ und $\text{bei } x$ . . . . .	142—147
Tafel XX: $\text{ber } x, \text{ bei } x, \text{ ber}' x, \text{ bei}' x$ . . . . .	145
Fig. 42 für $\frac{w'}{w_0}, \frac{L_i' \omega}{w_0}$ . . . . .	146
Tafel XXI: $\frac{w'}{w_0}, \frac{L_i' \omega}{w_0}$ . . . . .	147
8. Tafeln für die Ordnungen 2, 3, 4 . . . . 60.	
Tafel XXII: Die ersten neun Wurzeln von $J_2=0, \dots, J_5=0$ .	147
Fig. 43 für $J_2(x), J_3(x), J_8(x), J_{16}(x)$ . . . . .	148
Fig. 44 für $J_p(1), \dots, J_p(6)$ . . . . .	148
Fig. 45 für $J_p(7), \dots, J_p(12)$ . . . . .	149
Tafel XXIII: $J_n(1)$ bis $J_n(24)$ . . . . .	149—157
Fig. 46 und 47 für $i^{-n} J_n(ix), n=1, \dots, 11$ . . . . .	158
Tafel XXIV: $i^{-n} J_n(ix), n=0, 1, \dots, 11$ . . . . .	159—160
Fig. 48 und 49 für $i^{-p} J_p(i), i^{-p} J_p(2i), \dots, i^{-p} J_p(6i)$ . . . .	161

	Seite
9. Wurzeln von Gleichungen mit Besselschen Funktionen.	
a) Die Gleichungen $J_n(ix) J_n'(x) - i J_n(x) J_n'(ix) = 0$ . . . . .	160
Tafel XXV: einige Wurzeln . . . . .	160
b) Die Gleichungen $J_p(x) N_p(kx) - J_p(kx) N_p(x) = 0$ .	
Tafel XXVI: Wurzeln erster bis sechster Ordnung $x_p^{(w)}$ . . . . .	162
Tafel XXVII: Wurzeln erster bis sechster Ordnung $(k-1)x_n^{(w)}$ . . . . .	163
Tafel XXVIII: Wurzeln erster Ordnung $(k-1)x_p^{(1)}$ . . . . .	164
Fig. 50: Wurzel erster Ordnung $(k-1)x_p^{(1)}$ als Funktion von $k$ . . . . .	162
Tafel XXIX: Wurzeln erster bis vierter Ordnung $(k-1)x_p^{(w)}$ für einige irrationale Werte von $k$ . . . . .	164
10. Elementare Funktionalgleichungen . . . . .	165
11. Differentialformeln . . . . .	165
12. Integralformeln . . . . .	165
13. Differentialgleichungen, die auf Besselsche Funktionen führen	
a) Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	166
b) Gleichungen dritter Ordnung . . . . .	167
c) Gleichungen vierter Ordnung . . . . .	168
14. Integraldarstellungen . . . . .	169—172
a) Sommerfelds Integral . . . . .	169
b) Besselsche Form . . . . .	170
$\alpha$ ) Unterscheidung der Funktionen durch die Integrationswege . . . . .	170
$\beta$ ) Unterscheidung der Funktionen durch die Integranden . . . . .	171
15. Zusammenstellung der verschiedenen Bezeichnungen der Funktionen zweiter Art. . . . .	172—174
 Autorenregister . . . . .	 175—176



# I. Die Funktionen $x \operatorname{tg} x$ und $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$
0,0	0	1	1,0	1,5574	1,5574
0,1	0,01003	1,0033	1,1	2,1612	1,7861
0,2	0,04045	1,0112	1,2	3,0866	2,1434
0,3	0,09280	1,0311	1,3	4,6827	2,7708
0,4	0,1691	1,0570	1,4	8,2627	4,2157
0,5	0,2732	1,0927	1,5	21,1523	9,4010
0,6	0,4105	1,1402	$\frac{1}{2}\pi$	$\infty$	$\infty$
0,7	0,5896	1,2033			
0,8	0,8237	1,2870			
0,9	1,1341	1,4002			

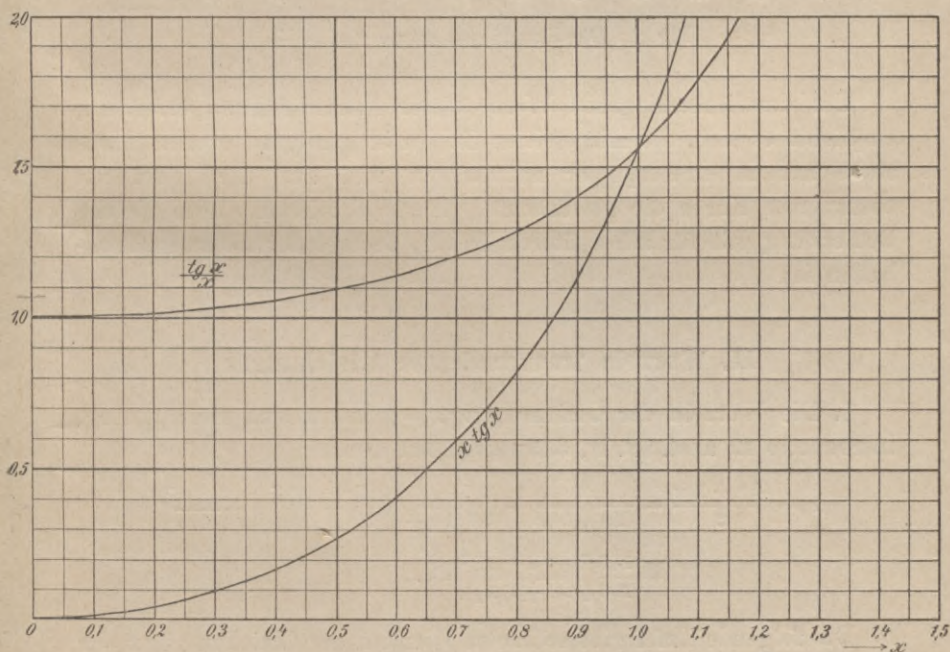


Fig. 1. Die Funktionen  $x \operatorname{tg} x$  und  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

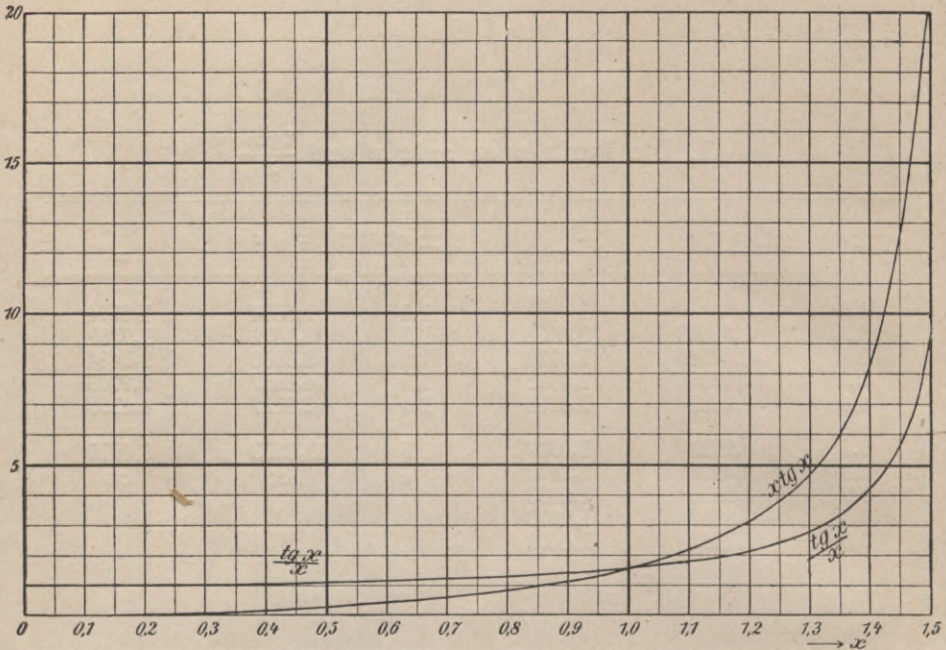


Fig. 2. Die Funktionen  $x \operatorname{tg} x$  und  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

Um dazwischenliegende Werte dieser Funktionen zu ermitteln, empfiehlt es sich, die mitgeteilten Zahlen in genügend großem Maßstabe auf Millimeterpapier aufzutragen und aus der hierdurch bestimmten Kurve die gewünschten Werte abzulesen. Eine gleiche Bemerkung gilt für alle späteren Tafeln, deren Intervall zu groß gehalten ist.

## II. Wurzeln transzendenter Gleichungen.

1. Die Wurzeln der Gleichung  $\operatorname{tg} x = x$  lassen sich nach Euler, *Introductio in anal. inf.* II, 319 darstellen durch:

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^3 - \frac{13}{15} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^5 - \frac{146}{105} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^7 - \dots$$

Die folgende Tafel gibt sechzehn Wurzeln der Gleichung  $\operatorname{tg} x = x$  und Maxima und Minima von  $\frac{\sin x}{x}$  (aus Lommel, *Die Beugungs-*

erscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abhandl. Münch. Akad.,  
(2) 15, 123, 1886).

$n$	$x_n$	Max. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ Min. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	$n$	$x_n$	Max. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ Min. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
1	0	1	11	32,9564	+0,0303
2	4,4934	-0,2172	12	36,1006	-0,0277
3	7,7253	+0,1284	13	39,2444	+0,0255
4	10,9041	-0,0913	14	42,3879	-0,0236
5	14,0662	+0,0709	15	45,5311	+0,0220
6	17,2208	-0,0580	16	48,6741	-0,0205
7	20,3713	+0,0490	17	51,8170	+0,0193
8	23,5195	-0,0425			
9	26,6661	+0,0375			
10	29,8116	-0,0335			

2. Wurzeln der Gleichung  $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}$  sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 119,26 \cdot \frac{\pi}{180}, \quad x_3 = 340,35 \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Wurzeln der Gleichung  $\operatorname{tg} x = \frac{x^3 - 9x}{4x^2 - 9}$  sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3,3422$$

(aus Rayleigh, The theory of sound II, 265, 266, London 1894, Macmillan and Co.).

3. Die Gleichungen  $\cos x \operatorname{Cof} x = \pm 1$  haben die Wurzeln

$$x_n = \frac{1}{2}(2n \pm 1)\pi - (-1)^n \alpha_n, \quad \text{wo}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \pm (-1)^n \frac{4}{a^2} + \frac{34}{3a^3} \pm (-1)^n \frac{112}{3a^4} + \dots,$$

$$a = e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Wurzeln der Gleichung  $\cos x \operatorname{Cof} x = +1$  sind also:

$$x_1 = 4,7300; \quad x_2 = 7,8532; \quad x_3 = 10,9956; \quad x_n = \frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad (n > 3);$$

Wurzeln der Gleichung  $\cos x \operatorname{Cof} x = -1$  sind:

$$x_1 = 1,8751; \quad x_2 = 4,6941; \quad x_3 = 7,8548; \quad x_4 = 10,9955;$$

$$x_n = \frac{1}{2}(2n-1)\pi \quad (n > 4)$$

(aus Rayleigh, The theory of sound I, 278, London 1894, Macmillan and Co.).

4. Die Gleichung  $\operatorname{tg} x + \operatorname{I}g x = 0$  hat die Wurzel

$$x = 2,365$$

(aus Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik IV, 274).

### III. Verwandlung von $a + bi$ in $re^{i\varphi}$ und umgekehrt.

Setzt man  $b/a = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{Sin} x$ , so wird

$$a + bi = a \sec \psi \cdot e^{i\psi} = a \operatorname{Coj} x \cdot e^{i \operatorname{Amp} x}.$$

Setzt man dagegen  $a/b = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{Sin} x$ , so wird

$$a + bi = b \sec \psi \cdot e^{i(90^\circ - \psi)} = b \operatorname{Coj} x \cdot e^{i(90^\circ - \operatorname{Amp} x)}.$$

Ferner ist

$$re^{i\varphi} = \frac{r}{\sec \psi} + i \frac{r \operatorname{tg} \psi}{\sec \psi} = \frac{r}{\operatorname{Coj} x} + i \frac{r \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Coj} x},$$

wenn  $\varphi = \psi = \operatorname{Amp} x$ , und

$$re^{i\varphi} = \frac{r \operatorname{tg} \psi}{\sec \psi} + i \frac{r}{\sec \psi} = \frac{r \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Coj} x} + i \frac{r}{\operatorname{Coj} x},$$

wenn  $90^\circ - \varphi = \psi = \operatorname{Amp} x$ .

Die Tafel gibt  $\sec \psi$  und  $\psi$  als Funktionen von  $\operatorname{tg} \psi$  für  $\psi = 0$  bis  $45^\circ$  oder  $\operatorname{Coj} x$  und  $\operatorname{Amp} x$  als Funktionen von  $\operatorname{Sin} x$  für  $x = 0$  bis  $0,88$ . Sie ist dem Hilfsbuch für die Elektrotechnik von K. Strecker (Berlin 1907, Springer, S. 91) entnommen und mit einer Ergänzung versehen, die wir Herrn Strecker verdanken. In der ersten Zeile jeder Horizontalen stehen die Ziffern, die man an 1, anfügen muß, um  $\sec \psi = \operatorname{Coj} x$  zu erhalten. In der zweiten Zeile stehen die Werte von  $\psi = \operatorname{Amp} x$  in Graden.

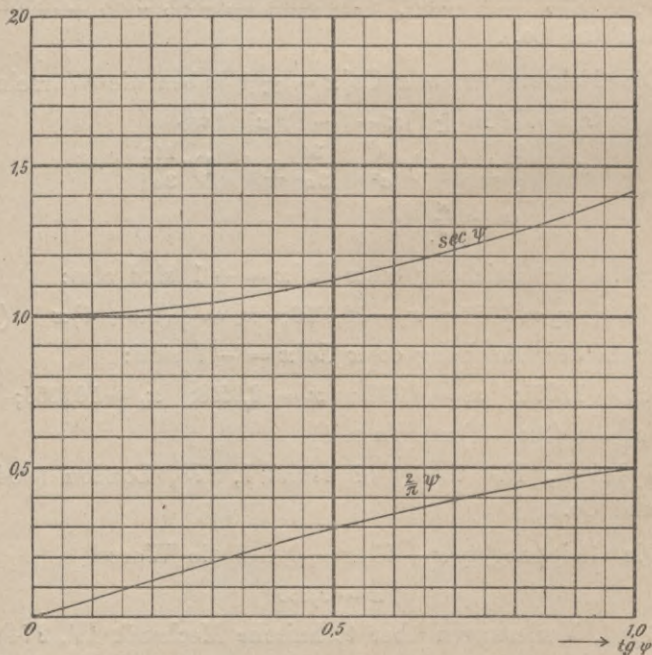


Fig. 3. Die Funktion  $\sec \psi$  und der Bogen  $\psi$  als Funktion von  $\operatorname{tg} \psi$ .

$\operatorname{tg} \psi$ $= \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	000000 0°	000001 0,06°	000002 0,11°	000005 0,17°	000008 0,23°	000013 0,29°	000018 0,35°	000025 0,40°	000032 0,46°	000041 0,51°
0,01	000050 0,57°	000061 0,63°	000072 0,69°	000085 0,74°	000098 0,80°	000113 0,86°	000128 0,92°	000145 0,97°	000162 1,03°	000181 1,09°
0,02	000195 1,15°	000221 1,20°	000242 1,27°	000265 1,32°	000288 1,37°	000313 1,43°	000338 1,49°	000365 1,55°	000392 1,60°	000421 1,66°
0,03	00045 1,72°	00048 1,78°	00051 1,83°	00055 1,89°	00058 1,95°	00061 2,01°	00065 2,06°	00069 2,12°	00072 2,18°	00076 2,23°
0,04	00080 2,29°	00084 2,35°	00088 2,41°	00093 2,46°	00097 2,52°	00101 2,58°	00106 2,63°	00111 2,69°	00115 2,75°	00120 2,81°
0,05	00125 2,86°	00130 2,92°	00135 2,98°	00141 3,04°	00146 3,09°	00151 3,15°	00157 3,21°	00163 3,26°	00168 3,32°	00174 3,38°
0,06	00180 3,43°	00186 3,49°	00192 3,55°	00199 3,61°	00205 3,66°	00211 3,72°	00218 3,78°	00225 3,83°	00231 3,89°	00238 3,95°
0,07	00245 4,01°	00252 4,06°	00259 4,12°	00267 4,18°	00274 4,23°	00281 4,29°	00288 4,35°	00297 4,40°	00304 4,46°	00312 4,52°
0,08	0032 4,57°	0033 4,63°	0034 4,69°	0034 4,74°	0035 4,80°	0036 4,86°	0037 4,92°	0038 4,97°	0039 5,03°	0040 5,09°
0,09	0041 5,14°	0041 5,20°	0042 5,26°	0043 5,31°	0044 5,37°	0045 5,43°	0046 5,48°	0047 5,54°	0048 5,60°	0049 5,65°
0,1	005 5,7°	006 6,3°	007 6,9°	008 7,4°	010 8,0°	011 8,5°	013 9,1°	014 9,7°	016 10,2°	018 10,8°
0,2	020 11,3°	022 11,9°	024 12,4°	026 13,0°	029 13,5°	031 14,0°	033 14,6°	036 15,1°	038 15,6°	041 16,2°
0,3	044 16,7°	047 17,2°	050 17,7°	053 18,3°	056 18,8°	060 19,3°	063 19,8°	066 20,3°	070 20,8°	073 21,3°
0,4	077 21,8°	081 22,3°	085 22,8°	089 23,3°	093 23,8°	097 24,2°	101 24,6°	105 25,1°	110 25,6°	114 26,1°
0,5	118 26,6°	123 27,1°	127 27,5°	132 27,9°	137 28,4°	142 28,8°	146 29,2°	151 29,7°	156 30,1°	161 30,5°
0,6	166 31,0°	171 31,4°	176 31,8°	182 32,2°	187 32,6°	193 33,0°	198 33,4°	204 33,8°	209 34,2°	215 34,6°
0,7	221 35,0°	226 35,4°	232 35,7°	238 36,1°	244 36,5°	250 36,9°	256 37,2°	262 37,6°	268 38,0°	275 38,3°
0,8	281 38,7°	287 39,0°	293 39,4°	300 39,7°	306 40,1°	313 40,4°	319 40,7°	326 41,0°	332 41,4°	339 41,7°
0,9	345 42,0°	352 42,3°	359 42,6°	366 42,9°	372 43,3°	379 43,6°	386 43,8°	393 44,1°	400 44,4°	407 44,7°

IV. Die Exponentialfunktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$ .

1. Definition.  $e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$1 - e^{-x} = x \left( 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \dots \right).$$

2. Die Werte für  $\frac{\pi}{2}x$  und  $e^x$  sind aus Houël, Recueil de formules et de tables numériques. 3<sup>e</sup> édit. Paris 1901, Gauthier-Villars, entnommen, die Werte für  $e^{-x}$  aus P. Gruner, Tabellen für die Exponentialfunktion mit negativen Exponenten  $e^{-x}$ . Leipzig 1906, S. Hirzel. Für die graphische Darstellung vgl. Fig. 5, S. 15 und Fig. 10, S. 20.

$x$	$\frac{\pi}{2}x$	$e^x$	$e^{-x}$	$\frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$	$\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$
0,0	0	1	1	$\infty$	$\infty$
0,2	0,3142	1,2214	0,8187	2,179	1,4607
0,4	0,6283	1,4918	0,6703	1,882	0,8456
0,6	0,9425	1,8221	0,5488	1,887	0,5653
0,8	1,2566	2,2255	0,4493	1,985	0,4008
1,0	1,5708	2,718	0,3679	2,169	0,2935
1,2	1,885	3,320	0,3012	2,418	0,2194
1,4	2,199	4,055	0,2466	2,735	0,1663
1,6	2,513	4,953	0,2019	3,124	0,1274
1,8	2,827	6,050	0,1653	3,598	0,09831
2,0	3,142	7,389	0,1353	4,169	0,07635
2,2	3,456	9,025	0,1108	4,855	0,05960
2,4	3,770	11,023	0,09072	5,677	0,04672
2,6	4,084	13,464	0,07427	6,662	0,03675
2,8	4,398	16,445	0,06081	7,841	0,02900
3,0	4,712	20,09	0,04979	9,252	0,02293
3,2	5,027	24,53	0,04076	10,942	0,01818
3,4	5,341	29,96	0,03337	12,966	0,01444
3,6	5,655	36,60	0,02732	15,390	0,01149
3,8	5,969	44,70	0,02237	18,30	0,0 <sup>9</sup> 9156
4,0	6,283	54,60	0,01832	21,78	0,0 <sup>2</sup> 7307
4,2	6,597	66,69	0,01500	25,96	0,0 <sup>5</sup> 5838
4,4	6,911	81,45	0,01228	30,98	0,0 <sup>8</sup> 4670
4,6	7,226	99,48	0,01005	37,01	0,0 <sup>2</sup> 3740
4,8	7,540	121,50	0,0 <sup>2</sup> 8230	44,25	0,0 <sup>2</sup> 2997
5,0	7,854	148,41	0,0 <sup>2</sup> 6738	52,96	0,0 <sup>2</sup> 2404
5,2	8,168	181,27	0,0 <sup>2</sup> 5517	63,43	0,0 <sup>3</sup> 1930
5,4	8,482	221,41	0,0 <sup>2</sup> 4517	76,02	0,0 <sup>2</sup> 1551
5,6	8,796	270,43	0,0 <sup>2</sup> 3698	91,18	0,0 <sup>2</sup> 1247
5,8	9,111	330,30	0,0 <sup>2</sup> 3028	109,43	0,0 <sup>2</sup> 1003
6,0	9,425	403,00	0,0 <sup>2</sup> 2479	131,41	0,0 <sup>2</sup> 8074

Dabei ist der Kürze halber 0,0<sup>3</sup> an Stelle von 0,000 geschrieben.

## V. Die Hyperbelfunktionen.<sup>1)</sup>

### 1. Definition.

$$\text{Sin } x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{Cos } x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{2^{\nu}!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Tg } x = \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\frac{\text{Sin } x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

$$\text{Ar Sin } x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\text{Ar Cos } x = \text{Ar Sin } \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Ar Tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

### 2. Spezielle Werte.

$$\text{Sin } 0 = 0, \quad \text{Cos } 0 = 1, \quad \text{Tg } 0 = 0$$

$$\text{Sin } \infty = \infty, \quad \text{Cos } \infty = \infty, \quad \text{Tg } \infty = 1.$$

### 3. Grundgesetze.

$$\text{Sin } (-x) = -\text{Sin } x, \quad \text{Cos } (-x) = \text{Cos } x, \quad \text{Tg } (-x) = -\text{Tg } x$$

$$\text{Cos}^2 x = 1 + \text{Sin}^2 x, \quad (\text{Cos } x \pm \text{Sin } x)^n = \text{Cos } nx \pm \text{Sin } nx.$$

### 4. Eine Funktion ausgedrückt durch die andere.

$$\text{Sin } x = \sqrt{\text{Cos}^2 x - 1} = \frac{\text{Tg } x}{\sqrt{1 - \text{Tg}^2 x}}, \quad \text{Cos } x = \sqrt{1 + \text{Sin}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{Tg}^2 x}}$$

$$\text{Tg } x = \frac{\text{Sin } x}{\sqrt{1 + \text{Sin}^2 x}} = \frac{\sqrt{\text{Cos}^2 x - 1}}{\text{Cos } x}, \quad \frac{\text{Cos } x + \text{Sin } x}{\text{Cos } x - \text{Sin } x} = \frac{1 + \text{Tg } x}{1 - \text{Tg } x}$$

$$\text{Ar Sin } x = \text{Ar Cos } \sqrt{x^2 + 1} = \text{Ar Tg } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ar Cos } x &= \text{Ar Sin } \sqrt{x^2 - 1} = \text{Ar Tg } \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\ &= 2 \text{Ar Cos } \sqrt{\frac{x+1}{2}} = \text{Ar Sin } \sqrt{\frac{x-1}{2}} \end{aligned}$$

1) Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen, Berlin 1890, W. Ernst u. Sohn.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x &= \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

### 5. Verknüpfung der Funktionen zweier Sektoren.

$$\operatorname{Sin}(x \pm y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y$$

$$\operatorname{Cof}(x \pm y) = \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y$$

$$\operatorname{Tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y}{1 \pm \operatorname{Tg} x \operatorname{Tg} y}$$

$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin} y = 2 \operatorname{Sin} \frac{x+y}{2} \operatorname{Cof} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{Cof} x + \operatorname{Cof} y = 2 \operatorname{Cof} \frac{x+y}{2} \operatorname{Cof} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y = 2 \operatorname{Cof} \frac{x+y}{2} \operatorname{Sin} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{Cof} x - \operatorname{Cof} y = 2 \operatorname{Sin} \frac{x+y}{2} \operatorname{Sin} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Tg} y = \frac{\operatorname{Sin}(x \pm y)}{\operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Tg} x} \pm \operatorname{Tg} y = \frac{\operatorname{Cof}(x \pm y)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Tg} x} \pm \frac{1}{\operatorname{Tg} y} = \pm \frac{\operatorname{Sin}(x \pm y)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y}$$

$$\operatorname{Sin}^2 x - \operatorname{Sin}^2 y = \operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Cof}^2 y = \operatorname{Sin}(x+y) \operatorname{Sin}(x-y)$$

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cof}^2 y = \operatorname{Cof}^2 x + \operatorname{Sin}^2 y = \operatorname{Cof}(x+y) \operatorname{Cof}(x-y)$$

$$\operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Sin}^2 y = 1 + \operatorname{Sin}(x+y) \operatorname{Sin}(x-y)$$

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x+y) - \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x-y)$$

$$\operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y = \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x+y) + \frac{1}{2} \operatorname{Cof}(x-y)$$

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y = \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x+y) + \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x-y)$$

$$\operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y = \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x+y) - \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(x-y)$$

$$\frac{\operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin} y}{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y} = \frac{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x-y)}, \quad \frac{\operatorname{Cof} x + \operatorname{Cof} y}{\operatorname{Cof} x - \operatorname{Cof} y} = \frac{1}{\operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x-y)}$$

$$\frac{\operatorname{Sin} x \pm \operatorname{Sin} y}{\operatorname{Cof} x + \operatorname{Cof} y} = \frac{\operatorname{Cof} x - \operatorname{Cof} y}{\operatorname{Sin} x \mp \operatorname{Sin} y} = \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(x \pm y)$$

$$\frac{\operatorname{Tg} x + \operatorname{Tg} y}{\operatorname{Tg} x - \operatorname{Tg} y} = \frac{\operatorname{Sin}(x+y)}{\operatorname{Sin}(x-y)}$$



$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} y = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} (x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} y = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} (xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} y = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

## 6. Funktionen der Vielfachen eines Sektors.

$$\operatorname{Sin} 2x = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} x = \frac{2 \operatorname{Tg} x}{1 - \operatorname{Tg}^2 x}$$

$$\operatorname{Sin} 3x = 4 \operatorname{Sin}^3 x + 3 \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} x (4 \operatorname{Cof}^2 x - 1)$$

$$\operatorname{Sin} (n+1)x = 2 \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} nx - \operatorname{Sin} (n-1)x$$

$$\operatorname{Sin} nx = n \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof}^{n-1} x + \binom{n}{3} \operatorname{Sin}^3 x \operatorname{Cof}^{n-3} x + \binom{n}{5} \operatorname{Sin}^5 x \operatorname{Cof}^{n-5} x + \dots$$

$$\operatorname{Cof} 2x = \operatorname{Cof}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x = 2 \operatorname{Cof}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{Sin}^2 x = \frac{1 + \operatorname{Tg}^2 x}{1 - \operatorname{Tg}^2 x}$$

$$\operatorname{Cof} 3x = 4 \operatorname{Cof}^3 x - 3 \operatorname{Cof} x = \operatorname{Cof} x (4 \operatorname{Sin}^2 x + 1)$$

$$\operatorname{Cof} (n+1)x = 2 \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} nx - \operatorname{Cof} (n-1)x$$

$$\operatorname{Cof} nx = \operatorname{Cof}^n x + \binom{n}{2} \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cof}^{n-2} x + \binom{n}{4} \operatorname{Sin}^4 x \operatorname{Cof}^{n-4} x + \dots$$

$$\operatorname{Tg} 2x = \frac{2 \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg}^2 x},$$

$$\operatorname{Tg} 3x = \frac{\operatorname{Tg}^3 x + 3 \operatorname{Tg} x}{3 \operatorname{Tg}^2 x + 1}$$

$$\operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Cof} x - 1}{\operatorname{Cof} x + 1}} = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cof} x + 1} = \frac{\operatorname{Cof} x - 1}{\operatorname{Sin} x}$$

$$\operatorname{Cof} 2x + \cos 2y = 2 + 2 (\operatorname{Sin}^2 x - \sin^2 y)$$

$$\operatorname{Cof} 2x - \cos 2y = 2 (\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y).$$

## 7. Potenzen.

$$2 \operatorname{Sin}^2 x = \operatorname{Cof} 2x - 1$$

$$4 \operatorname{Sin}^3 x = \operatorname{Sin} 3x - 3 \operatorname{Sin} x$$

$$8 \operatorname{Sin}^4 x = \operatorname{Cof} 4x - 4 \operatorname{Cof} 2x + 3$$

$$16 \operatorname{Sin}^5 x = \operatorname{Sin} 5x - 5 \operatorname{Sin} 3x + 10 \operatorname{Sin} x$$

$$32 \operatorname{Sin}^6 x = \operatorname{Cof} 6x - 6 \operatorname{Cof} 4x + 15 \operatorname{Cof} 2x - 10$$

$$64 \operatorname{Sin}^7 x = \operatorname{Sin} 7x - 7 \operatorname{Sin} 5x + 21 \operatorname{Sin} 3x - 35 \operatorname{Sin} x$$

$$128 \operatorname{Sin}^8 x = \operatorname{Cof} 8x - 8 \operatorname{Cof} 6x + 28 \operatorname{Cof} 4x - 56 \operatorname{Cof} 2x + 35$$

$$2 \operatorname{Cof}^2 x = \operatorname{Cof} 2x + 1$$

$$4 \operatorname{Cof}^3 x = \operatorname{Cof} 3x + 3 \operatorname{Cof} x$$

$$8 \operatorname{Cof}^4 x = \operatorname{Cof} 4x + 4 \operatorname{Cof} 2x + 3$$

$$16 \operatorname{Cof}^5 x = \operatorname{Cof} 5x + 5 \operatorname{Cof} 3x + 10 \operatorname{Cof} x$$

$$32 \operatorname{Cof}^6 x = \operatorname{Cof} 6x + 6 \operatorname{Cof} 4x + 15 \operatorname{Cof} 2x + 10$$

$$64 \operatorname{Cof}^7 x = \operatorname{Cof} 7x + 7 \operatorname{Cof} 5x + 21 \operatorname{Cof} 3x + 35 \operatorname{Cof} x$$

$$128 \operatorname{Cof}^8 x = \operatorname{Cof} 8x + 8 \operatorname{Cof} 6x + 28 \operatorname{Cof} 4x + 56 \operatorname{Cof} 2x + 35$$

$$x = \operatorname{Tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{Tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{Tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{Tg}^7 x + \dots$$

### 8. Beziehungen zu den Exponentialfunktionen und Logarithmen.

$$\operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Cof} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$e^x = \operatorname{Cof} x + \operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Cof} \frac{x}{2} + \operatorname{Sin} \frac{x}{2}}{\operatorname{Cof} \frac{x}{2} - \operatorname{Sin} \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{Tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{Tg} \frac{x}{2}}$$

$$e^{-x} = \operatorname{Cof} x - \operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Cof} \frac{x}{2} - \operatorname{Sin} \frac{x}{2}}{\operatorname{Cof} \frac{x}{2} + \operatorname{Sin} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{Tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{Tg} \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$\ln x = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x^2-1}{2x} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{x^2+1}{2x} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

### 9. Beziehungen zu den Kreisfunktionen.

$$\operatorname{Cof} x = \cos \frac{x}{i} = \cos ix, \quad \operatorname{Sin} x = i \sin \frac{x}{i} = -i \sin ix$$

$$\operatorname{Tg} x = i \operatorname{tg} \frac{x}{i} = -i \operatorname{tg} ix$$

$$\cos x = \operatorname{Cof} ix, \quad \sin x = -i \operatorname{Sin} ix, \quad \operatorname{tg} x = -i \operatorname{Tg} ix$$

$$\operatorname{Cof} ix = \cos x, \quad \operatorname{Sin} ix = i \sin x, \quad \operatorname{Tg} ix = i \operatorname{tg} x$$

$$\cos ix = \operatorname{Cof} x, \quad \sin ix = i \operatorname{Sin} x, \quad \operatorname{tg} ix = i \operatorname{Tg} x$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x = \pm i \operatorname{arc} \cos x,$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = -i \operatorname{arc} \sin ix$$

$$\operatorname{arc} \cos x = \pm i \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x,$$

$$\operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} ix$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} ix = i \operatorname{arc} \sin x,$$

$$\operatorname{arc} \sin ix = i \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{Cof} y + i \cos x \operatorname{Sin} y = se^{i\sigma}, \quad \text{wo}$$

$$s = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{Sin}^2 y} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{Cof} 2y - \cos 2x)}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{I}g y}{\operatorname{tg} x}$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{Cof} y - i \sin x \operatorname{Sin} y = ce^{i\gamma}, \quad \text{wo}$$

$$c = \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 y - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{Cof} 2y + \cos 2x)}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} x \operatorname{I}g y$$

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{Sin} 2y}{\cos 2x + \operatorname{Cof} 2y} = \frac{s}{c} e^{i(\sigma - \gamma)}, \quad \operatorname{tg}(\sigma - \gamma) = \frac{\operatorname{Sin} 2y}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{ctg}(x + iy) = \frac{\sin 2x - i \operatorname{Sin} 2y}{\operatorname{Cof} 2y - \cos 2x} = \frac{c}{s} e^{i(\gamma - \sigma)}, \quad \operatorname{tg}(\gamma - \sigma) = -\frac{\operatorname{Sin} 2y}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{Sin}(x + iy) = i \sin(y - ix) = \operatorname{Sin} x \cos y + i \operatorname{Cof} x \sin y = se^{i\sigma}, \quad \text{wo}$$

$$s = \sqrt{\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{Cof} 2x - \cos 2y)}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{I}g x}$$

$$\operatorname{Cof}(x + iy) = \cos(y - ix) = \operatorname{Cof} x \cos y + i \operatorname{Sin} x \sin y = ce^{i\gamma}, \quad \text{wo}$$

$$c = \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x - \sin^2 y} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{Cof} 2x + \cos 2y)}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{I}g x \operatorname{tg} y$$

$$\operatorname{I}g(x + iy) = \frac{\operatorname{Sin} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{Cof} 2x + \cos 2y} = \frac{s}{c} e^{i(\sigma - \gamma)}, \quad \operatorname{tg}(\sigma - \gamma) = \frac{\sin 2y}{\operatorname{Sin} 2x}.$$

Setzt man

$$\operatorname{Sin} x \cos y = \alpha, \quad \operatorname{Cof} x \sin y = \beta, \quad \operatorname{Cof} x \cos y = \gamma, \quad \operatorname{Sin} x \sin y = \delta,$$

so ist

$$\alpha + \beta = \frac{1-i}{2} \operatorname{Sin}(x + iy) + \frac{1+i}{2} \operatorname{Sin}(x - iy)$$

$$\gamma + \delta = \frac{1-i}{2} \operatorname{Cof}(x + iy) + \frac{1+i}{2} \operatorname{Cof}(x - iy)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 &= \operatorname{Cof} 2x & 2(\alpha^2 + \beta^2) &= \operatorname{Cof} 2x - \cos 2y \\ -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 &= \cos 2y & 2(\gamma^2 + \delta^2) &= \operatorname{Cof} 2x + \cos 2y \\ -\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 &= 1 & 2(\beta^2 + \gamma^2) &= \operatorname{Cof} 2x + 1 = 2 \operatorname{Cof}^2 x \\ \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 &= \operatorname{Cof} 2x \cos 2y & 2(\alpha^2 + \delta^2) &= \operatorname{Cof} 2x - 1 = 2 \operatorname{Sin}^2 x \\ 2(\alpha\gamma + \beta\delta) &= \operatorname{Sin} 2x & 2(\gamma^2 - \alpha^2) &= 1 + \cos 2y = 2 \cos^2 y \\ 2(\alpha\gamma - \beta\delta) &= \sin 2x \cos 2y & 2(\beta^2 - \delta^2) &= 1 - \cos 2y = 2 \sin^2 y \\ 2(\beta\gamma + \alpha\delta) &= \operatorname{Cof} 2x \sin 2y \\ 2(\beta\gamma - \alpha\delta) &= \sin 2y \\ 4\alpha\beta &= 4\gamma\delta = \operatorname{Sin} 2x \sin 2y \end{aligned}$$

$$-\alpha d\gamma + \beta d\delta + \gamma d\alpha - \delta d\beta = dx$$

$$-\alpha d\delta - \beta d\gamma + \gamma d\beta + \delta d\alpha = dy$$

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha + \gamma d\delta - \delta d\gamma = \operatorname{Sin} 2x \cdot dy$$

$$\alpha d\delta - \beta d\gamma + \gamma d\beta - \delta d\alpha = \operatorname{Cof} 2x \cdot dy$$

$$-\alpha d\gamma - \beta d\delta + \gamma d\alpha + \delta d\beta = \cos 2y \cdot dx$$

$$-\alpha d\beta + \beta d\alpha + \gamma d\delta - \delta d\gamma = \sin 2y \cdot dx.$$

Die neun Größen des Systems

$$\begin{array}{lll} i \operatorname{Sin} x \cos y & \operatorname{Coj} x \cos y & \sin y \\ -i \operatorname{Sin} x \sin y & -\operatorname{Coj} x \sin y & \cos y \\ \operatorname{Coj} x & -i \operatorname{Sin} x & 0 \end{array}$$

erfüllen also die Bedingungen der Orthogonalität, d. h. die Summe der Quadrate der in einer horizontalen oder vertikalen Zeile stehenden Glieder ist gleich Eins, und die Summe der Produkte entsprechender Glieder zweier Zeilen verschwindet.

Setzt man

$$\frac{\operatorname{Sin} x + \sin y}{\operatorname{Coj} x + \cos y} = 2\eta, \quad \frac{\operatorname{Sin} x - \sin y}{\operatorname{Coj} x - \cos y} = 2\vartheta, \quad \frac{\operatorname{Sin} x - \sin y}{\operatorname{Coj} x + \cos y} = 2\eta', \quad \frac{\operatorname{Sin} x + \sin y}{\operatorname{Coj} x - \cos y} = 2\vartheta',$$

so ist

$$\begin{aligned} \vartheta + \eta &= \frac{\operatorname{Sin} 2x - \sin 2y}{\operatorname{Coj} 2x - \cos 2y} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta - \beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Coj} x - \sin y \cos y}{\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y} \\ \vartheta - \eta &= 2 \frac{\operatorname{Sin} x \cos y - \operatorname{Coj} x \sin y}{\operatorname{Coj} 2x - \cos 2y} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\operatorname{Sin} x \cos y - \operatorname{Coj} x \sin y}{\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y} \\ \vartheta' + \eta' &= \frac{\operatorname{Sin} 2x + \sin 2y}{\operatorname{Coj} 2x - \cos 2y} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + \beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Coj} x + \sin y \cos y}{\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y} \\ \vartheta' - \eta' &= 2 \frac{\operatorname{Sin} x \cos y + \operatorname{Coj} x \sin y}{\operatorname{Coj} 2x - \cos 2y} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\operatorname{Sin} x \cos y + \operatorname{Coj} x \sin y}{\operatorname{Sin}^2 x + \sin^2 y}. \end{aligned}$$

## 10. Differentialformeln.

$$\begin{aligned} d \operatorname{Sin} x &= \operatorname{Coj} x dx, & d \operatorname{Coj} x &= \operatorname{Sin} x dx, & d \operatorname{Tg} x &= \frac{dx}{\operatorname{Coj}^2 x} \\ d \ln \operatorname{Sin} x &= \frac{dx}{\operatorname{Tg} x}, & d \ln \operatorname{Coj} x &= \operatorname{Tg} x dx, & d \ln \operatorname{Tg} x &= \frac{2dx}{\operatorname{Sin} 2x} \\ d \ln \operatorname{Tg} \frac{x}{2} &= \frac{dx}{\operatorname{Sin} x}, & d \frac{1}{\operatorname{Tg} x} &= -\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} \\ d \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, & d \operatorname{Ar} \operatorname{Coj} x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ d \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x &= \frac{dx}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1), & d \operatorname{Ar} \frac{1}{\operatorname{Tg} x} &= \frac{-dx}{x^2-1} \quad (x > 1, x < -1) \\ d \operatorname{Sin}^2 x &= d \operatorname{Coj}^2 x = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Coj} x dx = \operatorname{Sin} 2x dx. \end{aligned}$$

## 11. Integralformeln.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Sin} x dx &= -\operatorname{Coj} x, & \int \operatorname{Coj} x dx &= \operatorname{Sin} x, & \int \operatorname{Tg} x dx &= \ln \operatorname{Coj} x \\ \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x} &= \ln \operatorname{Tg} \frac{x}{2}, & \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} 2x} &= \frac{1}{2} \ln \operatorname{Tg} \frac{x}{2}, & \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} &= -\frac{1}{\operatorname{Tg} x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Coj}^2 x} = \operatorname{Tg} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Tg} x} = \ln \operatorname{Sin} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Coj} x} = \operatorname{arc} \operatorname{sin} \operatorname{Tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Coj} x, \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x \quad (x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{Ar} \frac{1}{\operatorname{Tg} x} \quad (x > 1), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Coj} (1+x)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$\int \frac{xdx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c} \left[ \ln(a+bx+cx^2) + \frac{2b}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)} = \frac{1}{2a} \left[ \ln \frac{x^2}{a+bx+cx^2} + \frac{2b}{\sqrt{b^2-4ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \operatorname{Coj} \frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c} \left[ \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{2a+bx}{x\sqrt{4ac-b^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ar} \operatorname{Coj} \frac{2a+bx}{x\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$\int \operatorname{Sin}^n x dx = \frac{\operatorname{Sin}^{n-1} x \operatorname{Coj} x}{n} - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{Sin}^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{Coj}^n x dx = \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Coj}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{Coj}^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{Tg}^n x dx = -\frac{\operatorname{Tg}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{Tg}^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^n x} = -\frac{\operatorname{Coj} x}{(n-1) \operatorname{Sin}^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Coj}^n x} = \frac{\operatorname{Sin} x}{(n-1) \operatorname{Coj}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Coj}^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Tg}^n x} = -\frac{1}{(n-1) \operatorname{Tg}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{Tg}^{n-2} x}$$

## 12. Näherungswerte bei kleinen Sektoren.

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} = \sqrt[3]{\operatorname{Coj} x}, \quad \operatorname{Coj} x = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\operatorname{Tg} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} = \sqrt[3]{\operatorname{Coj}^2 x}$$

$$\operatorname{Coj} x + \cos y = 2, \quad \operatorname{Sin} x + \sin y = x + y, \quad \frac{\operatorname{Sin} x}{x} - \frac{\sin y}{y} = \frac{x^2 + y^2}{6}$$

$$\operatorname{Coj} x - \cos y = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \operatorname{Sin} x - \sin y = \frac{x^3}{3}$$

WIĄZEK STUDENTÓW ARCHITEKTU  
PRZY AKADEMII GÓRNICZEJ  
W KRAKOWIE

## 13. Näherungswerte bei großen Sektoren.

$$\begin{aligned} \text{Sin } x &= \text{Cof } x = \frac{1}{2} e^x, & \text{Ilg } x &= 1 \\ \log (2 \text{Sin } x) &= \log (2 \text{Cof } x) = x \log e = Mx, & M &= 0,4342945. \end{aligned}$$

## 14. Hyperbelamplitude.

$$\text{Amp } x = 2 \arctg e^x - \frac{\pi}{2} = \gamma$$

(Gudermannscher oder Lambertscher Winkel)

$$x = \int_0^{\gamma} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \text{tg} \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2,3026 \log \text{tg} \left( \frac{\gamma}{2} + 45^\circ \right)$$

$$\text{Sin } x = \text{tg } \gamma, \quad \text{Cof } x = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \text{Ilg } x = \sin \gamma$$

$$e^x = \frac{1 + \text{tg } \frac{\gamma}{2}}{1 - \text{tg } \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \text{Ilg } \frac{x}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{1}{\text{Cof } x} + \frac{1}{6 \text{Cof}^3 x} + \dots$$

$$\frac{\gamma}{2} = \text{Ilg } \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \text{Ilg}^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \text{Ilg}^5 \frac{x}{2} - \dots$$

$$\frac{x}{2} = \text{tg } \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{5} \text{tg}^5 \frac{\gamma}{2} + \dots$$

## 15. Tafeln.

Es genügt die Kenntnis der zu jedem  $x$  gehörigen Amplitude  $\gamma$ , um mit Hilfe der Logarithmentafel die Werte der hyperbolischen Funktionen zu finden. Dementsprechend geben wir nur eine Tafel dieser Amplituden, welche von A. Forti, Nuove Tavole delle funzioni iperboliche aventi per argomento il loro doppio settore precedute da nozioni principali della teorica, da cenni monografici ed applicazioni. Roma 1892, Società Laziale, herrührt. Ausführliche Tafeln finden sich bei W. Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen, Berlin 1890, W. Ernst u. Sohn. Vgl. auch J. Houël, Recueil de formules et de tables numériques. 3<sup>e</sup> édit. Paris 1901, Gauthier-Villars. — C. Burrau, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen, sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. Berlin 1907, G. Reimer. Neben Fig. 4 und Fig. 5 vgl. noch Fig. 10.

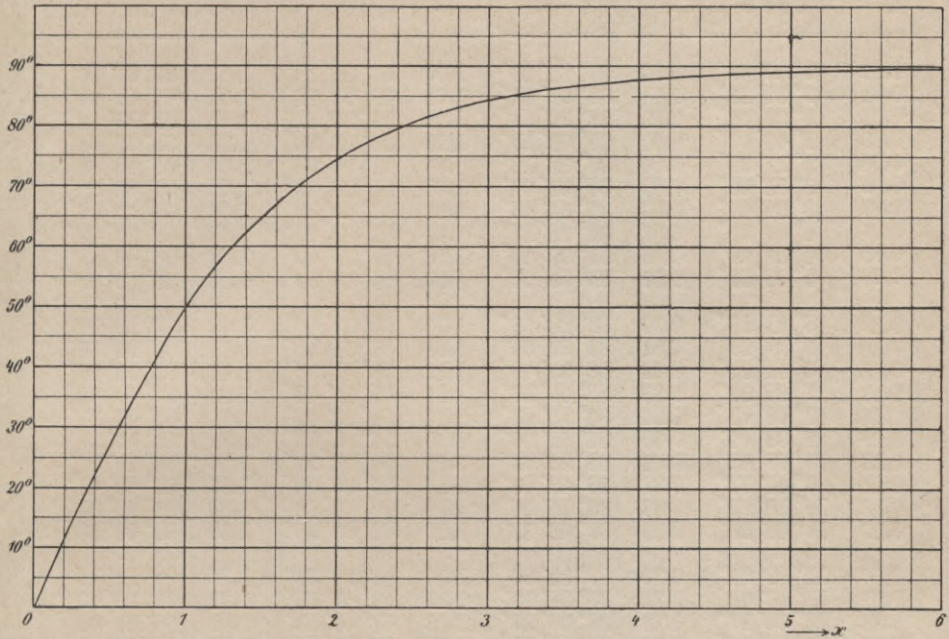
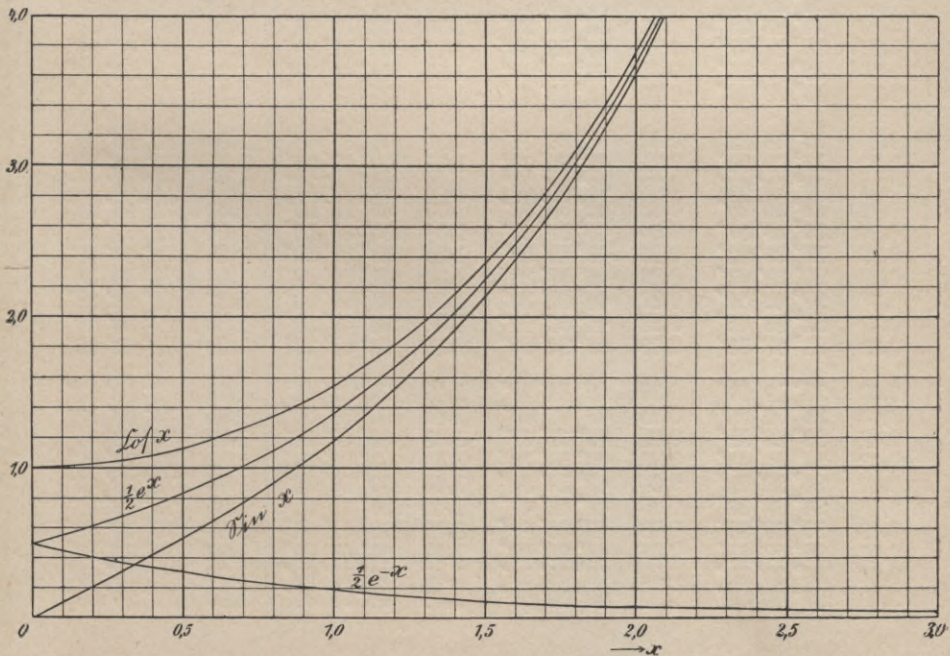
Fig. 4. Die Hyperbelamplitude  $\text{Amp } x$ 

Fig. 5. Exponentialfunktion, Hyperbelsinus und -kosinus (vgl. Fig. 10, S. 32).

$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$
0,00	0° 0' 0"	0,50	27° 31' 26"	1,00	49° 36' 18"	1,50	64° 50' 36"
0,01	0° 34' 23"	0,51	28° 01' 51"	1,01	49° 58' 29"	1,51	65° 05' 09"
0,02	1° 08' 45"	0,52	28° 32' 07"	1,02	50° 20' 31"	1,52	65° 19' 34"
0,03	1° 43' 07"	0,53	29° 02' 15"	1,03	50° 42' 22"	1,53	65° 33' 51"
0,04	2° 17' 28"	0,54	29° 32' 14"	1,04	51° 04' 03"	1,54	65° 48' 00"
0,05	2° 51' 49"	0,55	30° 02' 04"	1,05	51° 25' 35"	1,55	66° 02' 02"
0,06	3° 26' 09"	0,56	30° 31' 45"	1,06	51° 46' 56"	1,56	66° 15' 56"
0,07	4° 00' 27"	0,57	31° 01' 17"	1,07	52° 08' 07"	1,57	66° 29' 42"
0,08	4° 34' 44"	0,58	31° 30' 40"	1,08	52° 29' 08"	1,58	66° 43' 21"
0,09	5° 08' 59"	0,59	31° 59' 54"	1,09	52° 49' 59"	1,59	66° 56' 53"
0,10	5° 43' 12"	0,60	32° 28' 59"	1,10	53° 10' 40"	1,60	67° 10' 17"
0,11	6° 17' 24"	0,61	32° 57' 54"	1,11	53° 31' 11"	1,61	67° 23' 33"
0,12	6° 51' 33"	0,62	33° 26' 40"	1,12	53° 51' 33"	1,62	67° 36' 42"
0,13	7° 25' 39"	0,63	33° 55' 16"	1,13	54° 11' 44"	1,63	67° 49' 44"
0,14	7° 59' 43"	0,64	34° 23' 43"	1,14	54° 31' 46"	1,64	68° 02' 39"
0,15	8° 33' 44"	0,65	34° 52' 00"	1,15	54° 51' 38"	1,65	68° 15' 27"
0,16	9° 07' 42"	0,66	35° 20' 08"	1,16	55° 11' 21"	1,66	68° 28' 07"
0,17	9° 41' 37"	0,67	35° 48' 06"	1,17	55° 30' 53"	1,67	68° 40' 41"
0,18	10° 15' 29"	0,68	36° 15' 54"	1,18	55° 50' 16"	1,68	68° 53' 07"
0,19	10° 49' 17"	0,69	36° 43' 32"	1,19	56° 09' 30"	1,69	69° 05' 27"
0,20	11° 23' 01"	0,70	37° 11' 00"	1,20	56° 28' 34"	1,70	69° 17' 40"
0,21	11° 56' 41"	0,71	37° 38' 18"	1,21	56° 47' 28"	1,71	69° 29' 46"
0,22	12° 30' 17"	0,72	38° 05' 27"	1,22	57° 06' 13"	1,72	69° 41' 45"
0,23	13° 03' 48"	0,73	38° 32' 25"	1,23	57° 24' 49"	1,73	69° 53' 37"
0,24	13° 37' 15"	0,74	38° 59' 14"	1,24	57° 43' 15"	1,74	70° 05' 23"
0,25	14° 10' 37"	0,75	39° 25' 52"	1,25	58° 01' 32"	1,75	70° 17' 02"
0,26	14° 43' 55"	0,76	39° 52' 20"	1,26	58° 19' 39"	1,76	70° 28' 35"
0,27	15° 17' 07"	0,77	40° 18' 38"	1,27	58° 37' 38"	1,77	70° 40' 01"
0,28	15° 50' 14"	0,78	40° 44' 46"	1,28	58° 55' 27"	1,78	70° 51' 20"
0,29	16° 23' 16"	0,79	41° 10' 43"	1,29	59° 13' 07"	1,79	71° 02' 34"
0,30	16° 56' 12"	0,80	41° 36' 31"	1,30	59° 30' 38"	1,80	71° 13' 40"
0,31	17° 29' 02"	0,81	42° 02' 08"	1,31	59° 48' 00"	1,81	71° 24' 41"
0,32	18° 01' 46"	0,82	42° 27' 35"	1,32	60° 05' 13"	1,82	71° 35' 35"
0,33	18° 34' 25"	0,83	42° 52' 51"	1,33	60° 22' 18"	1,83	71° 46' 24"
0,34	19° 06' 57"	0,84	43° 17' 57"	1,34	60° 39' 13"	1,84	71° 57' 06"
0,35	19° 39' 22"	0,85	43° 42' 53"	1,35	60° 55' 59"	1,85	72° 07' 42"
0,36	20° 11' 42"	0,86	44° 07' 39"	1,36	61° 12' 37"	1,86	72° 18' 12"
0,37	20° 43' 54"	0,87	44° 32' 15"	1,37	61° 29' 06"	1,87	72° 28' 36"
0,38	21° 16' 00"	0,88	44° 56' 40"	1,38	61° 45' 26"	1,88	72° 38' 54"
0,39	21° 47' 58"	0,89	45° 20' 54"	1,39	62° 01' 38"	1,89	72° 49' 06"
0,40	22° 19' 50"	0,90	45° 44' 59"	1,40	62° 17' 41"	1,90	72° 59' 13"
0,41	22° 51' 34"	0,91	46° 08' 53"	1,41	62° 33' 36"	1,91	73° 09' 13"
0,42	23° 23' 11"	0,92	46° 32' 37"	1,42	62° 49' 22"	1,92	73° 19' 08"
0,43	23° 54' 41"	0,93	46° 56' 10"	1,43	63° 05' 00"	1,93	73° 28' 57"
0,44	24° 26' 02"	0,94	47° 19' 34"	1,44	63° 20' 30"	1,94	73° 38' 41"
0,45	24° 57' 16"	0,95	47° 42' 47"	1,45	63° 35' 51"	1,95	73° 48' 19"
0,46	25° 28' 22"	0,96	48° 05' 49"	1,46	63° 51' 04"	1,96	73° 57' 52"
0,47	25° 59' 21"	0,97	48° 28' 42"	1,47	64° 06' 09"	1,97	74° 07' 19"
0,48	26° 30' 11"	0,98	48° 51' 24"	1,48	64° 21' 06"	1,98	74° 16' 40"
0,49	27° 00' 52"	0,99	49° 13' 56"	1,49	64° 35' 55"	1,99	74° 25' 56"



$x$	Amp $x$	$x$	Amp $x$	$x$	Amp $x$	$x$	Amp $x$
2,00	74° 35' 07"	2,50	80° 36' 54"	3,00	84° 17' 58"	3,50	86° 32' 26"
2,01	74° 44' 13"	2,51	80° 42' 28"	3,01	84° 21' 22"	3,51	86° 34' 30"
2,02	74° 53' 13"	2,52	80° 48' 00"	3,02	84° 24' 44"	3,52	86° 36' 33"
2,03	75° 02' 09"	2,53	80° 53' 28"	3,03	84° 28' 04"	3,53	86° 38' 34"
2,04	75° 10' 58"	2,54	80° 58' 52"	3,04	84° 31' 22"	3,54	86° 40' 34"
2,05	75° 19' 44"	2,55	81° 04' 14"	3,05	84° 34' 38"	3,55	86° 42' 33"
2,06	75° 28' 24"	2,56	81° 09' 33"	3,06	84° 37' 52"	3,56	86° 44' 31"
2,07	75° 36' 58"	2,57	81° 14' 48"	3,07	84° 41' 04"	3,57	86° 46' 28"
2,08	75° 45' 28"	2,58	81° 20' 00"	3,08	84° 44' 14"	3,58	86° 48' 23"
2,09	75° 53' 53"	2,59	81° 25' 10"	3,09	84° 47' 22"	3,59	86° 50' 18"
2,10	76° 02' 13"	2,60	81° 30' 16"	3,10	84° 50' 28"	3,60	86° 52' 11"
2,11	76° 10' 29"	2,61	81° 35' 20"	3,11	84° 53' 33"	3,61	86° 54' 03"
2,12	76° 18' 39"	2,62	81° 40' 20"	3,12	84° 56' 36"	3,62	86° 55' 54"
2,13	76° 26' 44"	2,63	81° 45' 17"	3,13	84° 59' 37"	3,63	86° 57' 44"
2,14	76° 34' 46"	2,64	81° 50' 11"	3,14	85° 02' 36"	3,64	86° 59' 33"
2,15	76° 42' 42"	2,65	81° 55' 02"	3,15	85° 05' 33"	3,65	87° 01' 20"
2,16	76° 50' 34"	2,66	81° 59' 51"	3,16	85° 08' 29"	3,66	87° 03' 07"
2,17	76° 58' 20"	2,67	82° 04' 37"	3,17	85° 11' 23"	3,67	87° 04' 52"
2,18	77° 06' 04"	2,68	82° 09' 20"	3,18	85° 14' 15"	3,68	87° 06' 37"
2,19	77° 13' 42"	2,69	82° 14' 00"	3,19	85° 17' 05"	3,69	87° 08' 20"
2,20	77° 21' 16"	2,70	82° 18' 37"	3,20	85° 19' 54"	3,70	87° 10' 02"
2,21	77° 28' 46"	2,71	82° 23' 12"	3,21	85° 22' 41"	3,71	87° 11' 44"
2,22	77° 36' 11"	2,72	82° 27' 44"	3,22	85° 25' 26"	3,72	87° 13' 25"
2,23	77° 43' 31"	2,73	82° 32' 13"	3,23	85° 28' 10"	3,73	87° 15' 04"
2,24	77° 50' 47"	2,74	82° 36' 40"	3,24	85° 30' 52"	3,74	87° 16' 42"
2,25	77° 58' 00"	2,75	82° 41' 04"	3,25	85° 33' 32"	3,75	87° 18' 20"
2,26	78° 05' 08"	2,76	82° 45' 25"	3,26	85° 36' 11"	3,76	87° 19' 56"
2,27	78° 12' 12"	2,77	82° 49' 44"	3,27	85° 38' 49"	3,77	87° 21' 32"
2,28	78° 19' 12"	2,78	82° 54' 00"	3,28	85° 41' 25"	3,78	87° 23' 06"
2,29	78° 26' 06"	2,79	82° 58' 14"	3,29	85° 43' 59"	3,79	87° 24' 40"
2,30	78° 32' 58"	2,80	83° 02' 25"	3,30	85° 46' 32"	3,80	87° 26' 13"
2,31	78° 39' 46"	2,81	83° 06' 34"	3,31	85° 49' 03"	3,81	87° 27' 44"
2,32	78° 46' 29"	2,82	83° 10' 40"	3,32	85° 51' 33"	3,82	87° 29' 16"
2,33	78° 53' 09"	2,83	83° 14' 43"	3,33	85° 54' 01"	3,83	87° 30' 46"
2,34	78° 59' 44"	2,84	83° 18' 45"	3,34	85° 56' 27"	3,84	87° 32' 15"
2,35	79° 06' 16"	2,85	83° 22' 44"	3,35	85° 58' 53"	3,85	87° 33' 43"
2,36	79° 12' 44"	2,86	83° 26' 41"	3,36	86° 01' 16"	3,86	87° 35' 10"
2,37	79° 19' 08"	2,87	83° 30' 35"	3,37	86° 03' 38"	3,87	87° 36' 36"
2,38	79° 25' 29"	2,88	83° 34' 27"	3,38	86° 06' 00"	3,88	87° 38' 02"
2,39	79° 31' 45"	2,89	83° 38' 17"	3,39	86° 08' 20"	3,89	87° 39' 27"
2,40	79° 37' 58"	2,90	83° 42' 04"	3,40	86° 10' 38"	3,90	87° 40' 51"
2,41	79° 44' 08"	2,91	83° 45' 49"	3,41	86° 12' 55"	3,91	87° 42' 14"
2,42	79° 50' 14"	2,92	83° 49' 32"	3,42	86° 15' 10"	3,92	87° 43' 36"
2,43	79° 56' 15"	2,93	83° 53' 13"	3,43	86° 17' 24"	3,93	87° 44' 57"
2,44	80° 02' 14"	2,94	83° 56' 52"	3,44	86° 19' 37"	3,94	87° 46' 18"
2,45	80° 08' 09"	2,95	84° 00' 28"	3,45	86° 21' 49"	3,95	87° 47' 38"
2,46	80° 14' 01"	2,96	84° 04' 02"	3,46	86° 23' 59"	3,96	87° 48' 57"
2,47	80° 19' 49"	2,97	84° 07' 34"	3,47	86° 26' 07"	3,97	87° 50' 15"
2,48	80° 25' 34"	2,98	84° 11' 04"	3,48	86° 28' 15"	3,98	87° 51' 32"
2,49	80° 31' 15"	2,99	84° 14' 32"	3,49	86° 30' 21"	3,99	87° 52' 49"

$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$	$x$	$\text{Amp } x$
4,00	87° 54' 05"	4,40	88° 35' 36"	4,80	89° 03' 25"	6,00	89° 42' 57"
4,01	87° 55' 20"	4,41	88° 36' 26"	4,81	89° 03' 58"	6,05	89° 43' 47"
4,02	87° 56' 34"	4,42	88° 37' 16"	4,82	89° 04' 32"	6,10	89° 44' 35"
4,03	87° 57' 48"	4,43	88° 38' 05"	4,83	89° 05' 05"	6,15	89° 45' 20"
4,04	87° 59' 01"	4,44	88° 38' 54"	4,84	89° 05' 38"	6,20	89° 46' 03"
4,05	88° 00' 14"	4,45	88° 39' 42"	4,85	89° 06' 10"	6,25	89° 46' 44"
4,06	88° 01' 25"	4,46	88° 40' 30"	4,86	89° 06' 43"	6,30	89° 47' 23"
4,07	88° 02' 36"	4,47	88° 41' 18"	4,87	89° 07' 15"	6,35	89° 47' 59"
4,08	88° 03' 46"	4,48	88° 42' 05"	4,88	89° 07' 46"	6,40	89° 48' 35"
4,09	88° 04' 55"	4,49	88° 42' 51"	4,89	89° 08' 17"	6,45	89° 49' 08"
4,10	88° 06' 04"	4,50	88° 43' 38"	4,90	89° 08' 48"	6,50	89° 49' 40"
4,11	88° 07' 12"	4,51	88° 44' 23"	4,91	89° 09' 19"	6,55	89° 50' 10"
4,12	88° 08' 20"	4,52	88° 45' 08"	4,92	89° 09' 49"	6,60	89° 50' 39"
4,13	88° 09' 26"	4,53	88° 45' 52"	4,93	89° 10' 19"	6,65	89° 51' 06"
4,14	88° 10' 32"	4,54	88° 46' 37"	4,94	89° 10' 48"	6,70	89° 51' 32"
4,15	88° 11' 37"	4,55	88° 47' 21"	4,95	89° 11' 18"	6,75	89° 51' 57"
4,16	88° 12' 42"	4,56	88° 48' 04"	4,96	89° 11' 47"	6,80	89° 52' 21"
4,17	88° 13' 46"	4,57	88° 48' 47"	4,97	89° 12' 15"	6,85	89° 52' 43"
4,18	88° 14' 49"	4,58	88° 49' 29"	4,98	89° 12' 44"	6,90	89° 53' 04"
4,19	88° 15' 52"	4,59	88° 50' 12"	4,99	89° 13' 12"	6,95	89° 53' 24"
4,20	88° 16' 54"	4,60	88° 50' 53"	5,00	89° 13' 40"	7,00	89° 53' 44"
4,21	88° 17' 56"	4,61	88° 51' 35"	5,05	89° 15' 56"	7,05	89° 54' 02"
4,22	88° 18' 57"	4,62	88° 52' 15"	5,10	89° 18' 05"	7,10	89° 54' 20"
4,23	88° 19' 57"	4,63	88° 52' 56"	5,15	89° 20' 08"	7,15	89° 54' 36"
4,24	88° 20' 57"	4,64	88° 53' 36"	5,20	89° 22' 04"	7,20	89° 54' 52"
4,25	88° 21' 56"	4,65	88° 54' 16"	5,25	89° 23' 55"	7,25	89° 55' 07"
4,26	88° 22' 54"	4,66	88° 54' 55"	5,30	89° 25' 41"	7,30	89° 55' 21"
4,27	88° 23' 53"	4,67	88° 55' 33"	5,35	89° 27' 21"	7,35	89° 55' 35"
4,28	88° 24' 50"	4,68	88° 56' 12"	5,40	89° 28' 56"	7,40	89° 55' 47"
4,29	88° 25' 46"	4,69	88° 56' 50"	5,45	89° 30' 28"	7,45	89° 56' 00"
4,30	88° 26' 43"	4,70	88° 57' 28"	5,50	89° 31' 54"	7,50	89° 56' 12"
4,31	88° 27' 39"	4,71	88° 58' 05"	5,55	89° 33' 16"	7,55	89° 56' 23"
4,32	88° 28' 34"	4,72	88° 58' 43"	5,60	89° 34' 34"	7,60	89° 56' 33"
4,33	88° 29' 28"	4,73	88° 59' 19"	5,65	89° 35' 49"	7,65	89° 56' 43"
4,34	88° 30' 22"	4,74	88° 59' 55"	5,70	89° 36' 59"	7,70	89° 56' 53"
4,35	88° 31' 16"	4,75	89° 00' 31"	5,75	89° 38' 07"	7,75	89° 57' 02"
4,36	88° 32' 09"	4,76	89° 01' 06"	5,80	89° 39' 11"	7,80	89° 57' 11"
4,37	88° 33' 01"	4,77	89° 01' 42"	5,85	89° 40' 12"	7,85	89° 57' 19"
4,38	88° 33' 53"	4,78	89° 02' 17"	5,90	89° 41' 10"	7,90	89° 57' 27"
4,39	88° 34' 45"	4,79	89° 02' 51"	5,95	89° 42' 05"	7,95	89° 57' 34"
						8,00	89° 57' 41"

## VI. Der Integralsinus, der Integralkosinus und der Integrallogarithmus.

$$1. \text{ Definition.}^1) \quad \text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

$$\text{Ci } x = - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du$$

$$\text{Ei } x = \int_\infty^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du = \text{li } e^x, \quad \text{li } x = \int_0^x \frac{du}{\ln u},$$

so daß

$$\text{Ei } (ix) \text{ Ci } (x) + i \text{Si } (x) = \text{li } (e^{ix}).$$

2. Potenzreihe für reelle Werte des Arguments in den Grenzen  $-17 \leq x \leq 17$ :

$$\text{Si } x = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\text{Ci } x = C + \frac{1}{4} \ln x^4 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

$$\text{Ei } x = C + \frac{1}{4} \ln x^4 + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \dots = \text{li } e^x,$$

wo  $C$  die Eulersche Konstante 0,577 215 664 9015 bedeutet.

Potenzreihe für  $|x| > 17$ :

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left( 1! - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - + \dots \right) \\ &\quad - \frac{\sin x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ci } x &= \frac{\sin x}{x} \left( 1! - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - + \dots \right) \\ &\quad - \frac{\cos x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ei } x = \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \frac{4!}{x^4} + \dots \right) = \text{li } e^x.$$

1) N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Der hier eingeführte Integralsinus  $\text{si } x$  hängt mit  $\text{Si } x$  wie folgt zusammen:  $\text{si } x = \text{Si } x - \frac{\pi}{2}$ .

### 3. Zusammenhang mit den Besselschen Funktionen.

Herr Schafheitlin hat neuerdings (Sitzungsber. Berl. Math. Ges. VIII, 62—67 [1909]) folgenden Zusammenhang gefunden:

$$\text{Si } 2x = -\frac{\pi}{2} \cos 2x - \sqrt{\frac{\pi x}{2}} (\cos x V_{1/2}(x) - \sin x W_{1/2}(x))$$

$$\text{Ci } 2x = \frac{\pi}{2} \sin 2x + \sqrt{\frac{\pi x}{2}} (\sin x V_{1/2}(x) + \cos x W_{1/2}(x))$$

$$e^x \text{li } e^{-2x} = -i \frac{\pi}{2} e^{-x} - \sqrt{\frac{\pi i x}{2}} (i V_{1/2}(ix) - W_{1/2}(ix)),$$

wo  $V_{1/2}$  und  $W_{1/2}$  die nach dem Parameter  $p$  genommenen Ableitungen der Besselschen Funktionen  $J_p$  und  $N_p$  von der Ordnung  $\frac{1}{2}$  bedeuten (vgl. S. 90, 93 und 174).

4. Die Tafeln sind von J. W. L. Glaisher mitgeteilt worden (Tables of the numerical values of the sine-integral, cosine-integral and exponential-integral. Phil. Trans. London 160, 367—387 [1870]). Hier findet sich auch eine graphische Darstellung des Integralsinus und -kosinus.

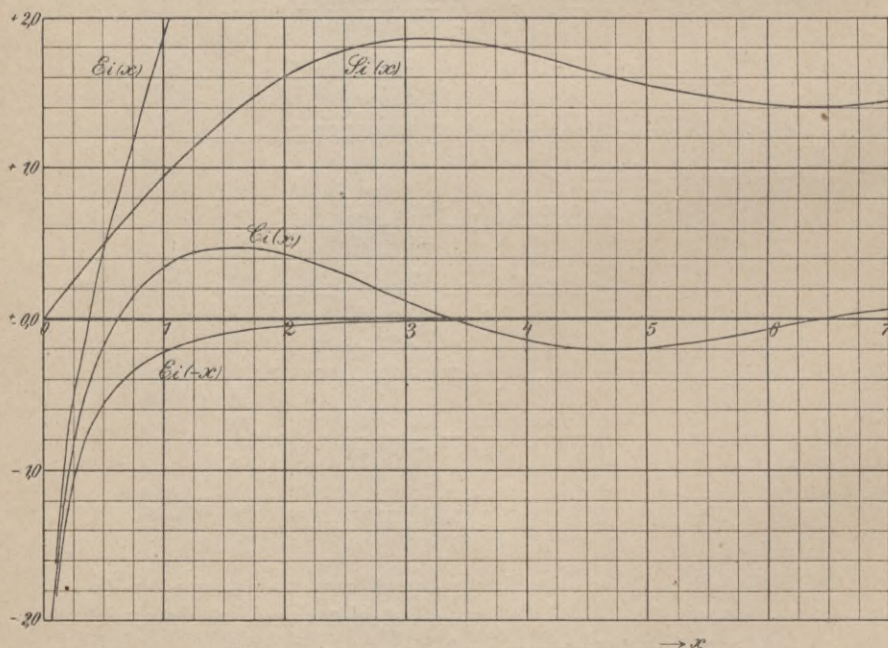


Fig. 6. Integralsinus, Integralkosinus und Integrallogarithmus.

$x$	$\text{Si}(x)$	$\text{Ci}(x)$	$\text{Ei}(x)$	$\text{Ei}(-x)$
0.00	+ 0,00000	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.01	+ 0,009999	- 4,02798	- 4,0179	- 4,0379
0.02	+ 0,019999	- 3,3349	- 3,3147	- 3,3547
0.03	+ 0,029998	- 2,9296	- 2,8991	- 2,9591
0.04	+ 0,039996	- 2,6421	- 2,6013	- 2,6813
0.05	+ 0,04999	- 2,4191	- 2,3679	- 2,4679
0.06	+ 0,05999	- 2,2371	- 2,1753	- 2,2953
0.07	+ 0,06998	- 2,0833	- 2,0108	- 2,1508
0.08	+ 0,07997	- 1,9501	- 1,8669	- 2,0269
0.09	+ 0,08996	- 1,8327	- 1,7387	- 1,9187
0.10	+ 0,09994	- 1,7279	- 1,6228	- 1,8229
0.15	+ 0,1498	- 1,3255	- 1,1641	- 1,4645
0.20	+ 0,2000	- 1,0422	- 0,8218	- 1,2227
0.25	+ 0,2491	- 0,8247	- 0,5425	- 1,0443
0.30	+ 0,2985	- 0,6492	- 0,3027	- 0,9057
0.35	+ 0,3476	- 0,5031	- 0,08943	- 0,7942
0.40	+ 0,3965	- 0,3788	+ 0,1048	- 0,7024
0.45	+ 0,4450	- 0,2715	+ 0,2849	- 0,6253
0.50	+ 0,4931	- 0,1778	+ 0,4542	- 0,5598
0.55	+ 0,5408	- 0,09530	+ 0,6153	- 0,5034
0.60	+ 0,5881	- 0,02227	+ 0,7699	- 0,4544
0.65	+ 0,6349	+ 0,04265	+ 0,9194	- 0,4115
0.70	+ 0,6812	+ 0,1005	+ 1,0649	- 0,3738
0.75	+ 0,7270	+ 0,1522	+ 1,2073	- 0,3403
0.80	+ 0,7721	+ 0,1983	+ 1,3474	- 0,3106
0.85	+ 0,8166	+ 0,2394	+ 1,4857	- 0,2840
0.90	+ 0,8605	+ 0,2761	+ 1,6228	- 0,2601
0.95	+ 0,9036	+ 0,3086	+ 1,7591	- 0,2387
1.00	+ 0,9461	+ 0,3374	+ 1,8951	- 0,2194
1.1	+ 1,0287	+ 0,3849	+ 2,1674	- 0,1860
1.2	+ 1,1080	+ 0,4205	+ 2,4421	- 0,1584
1.3	+ 1,1840	+ 0,4457	+ 2,7214	- 0,1355
1.4	+ 1,2562	+ 0,4620	+ 3,0072	- 0,1162
1.5	+ 1,3247	+ 0,4704	+ 3,3013	- 0,1000
1.6	+ 1,3892	+ 0,4717	+ 3,6053	- 0,08631
1.7	+ 1,4496	+ 0,4670	+ 3,9210	- 0,07465
1.8	+ 1,5058	+ 0,4568	+ 4,2499	- 0,06471
1.9	+ 1,5578	+ 0,4419	+ 4,5937	- 0,05620
2.0	+ 1,6054	+ 0,4230	+ 4,9542	- 0,04890
2.1	+ 1,6487	+ 0,4005	+ 5,3332	- 0,04261
2.2	+ 1,6876	+ 0,3751	+ 5,7326	- 0,03719
2.3	+ 1,7222	+ 0,3472	+ 6,1544	- 0,03250
2.4	+ 1,7525	+ 0,3173	+ 6,6007	- 0,02844
2.5	+ 1,7785	+ 0,2859	+ 7,0738	- 0,02491
2.6	+ 1,8004	+ 0,2533	+ 7,5761	- 0,02185
2.7	+ 1,8182	+ 0,2201	+ 8,1103	- 0,01918
2.8	+ 1,8321	+ 0,1865	+ 8,6793	- 0,01686
2.9	+ 1,8422	+ 0,1529	+ 9,2860	- 0,01482
3.0	+ 1,8487	+ 0,1196	+ 9,9338	- 0,01304

$x$	Si ( $x$ )	Ci ( $x$ )	Ei ( $x$ )	Ei $-x$
3,1	+1,8517	+0,08699	+10,6263	-0,01149
3,2	+1,8514	+0,05526	+11,3673	-0,01013
3,3	+1,8481	+0,02468	+12,1610	-0,0 <sup>2</sup> 8939
3,4	+1,8419	-0,004518	+13,0121	-0,0 <sup>2</sup> 7890
3,5	+1,8331	-0,03213	+13,9254	-0,0 <sup>2</sup> 6970
3,6	+1,8219	-0,05797	+14,9063	-0,0 <sup>2</sup> 6160
3,7	+1,8086	-0,08190	+15,9606	-0,0 <sup>2</sup> 5448
3,8	+1,7934	-0,1038	+17,0948	-0,0 <sup>2</sup> 4820
3,9	+1,7765	-0,1235	+18,3157	-0,0 <sup>2</sup> 4267
4,0	+1,7582	-0,1410	+19,6309	-0,0 <sup>2</sup> 3779
4,1	+1,7387	-0,1562	+21,0485	-0,0 <sup>2</sup> 3349
4,2	+1,7184	-0,1690	+22,5774	-0,0 <sup>2</sup> 2969
4,3	+1,6973	-0,1795	+24,2274	-0,0 <sup>2</sup> 2633
4,4	+1,6758	-0,1877	+26,0090	-0,0 <sup>2</sup> 2336
4,5	+1,6541	-0,1935	+27,9337	-0,0 <sup>2</sup> 2073
4,6	+1,6325	-0,1970	+30,0141	-0,0 <sup>2</sup> 1841
4,7	+1,6110	-0,1984	+32,2639	-0,0 <sup>2</sup> 1635
4,8	+1,5900	-0,1976	+34,6979	-0,0 <sup>2</sup> 1453
4,9	+1,5696	-0,1948	+37,3325	-0,0 <sup>2</sup> 1291
5,0	+1,5499	-0,1900	+40,1853	-0,0 <sup>2</sup> 1148
6	+1,4247	-0,06806	+85,9898	-0,0 <sup>3</sup> 3601
7	+1,4546	+0,07670	+191,505	-0,0 <sup>3</sup> 1155
8	+1,5742	+0,1224	+440,380	-0,0 <sup>3</sup> 3767
9	+1,6650	+0,05535	+1037,88	-0,0 <sup>4</sup> 1245
10	+1,6583	-0,04546	+2492,23	-0,0 <sup>3</sup> 4157
11	+1,5783	-0,08956	+6071,41	-0,0 <sup>5</sup> 1400
12	+1,5050	-0,04978	+14959,5	-0,0 <sup>6</sup> 4751
13	+1,4994	+0,02676	+37197,7	-0,0 <sup>6</sup> 1622
14	+1,5562	+0,06940	+93192,5	-0,0 <sup>7</sup> 5566
15	+1,6182	+0,04628	+234956	-0,0 <sup>7</sup> 1918
20	+1,5482	+0,04442		
25	+1,5315	-0,00685		
30	+1,5668	-0,03303		
35	+1,5969	-0,01148		
40	+1,5870	+0,1902		
45	+1,5587	+0,1863		
50	+1,5516	-0,0563		
55	+1,5707	-0,1817		
60	+1,5867	-0,0481		
65	+1,5775	+0,1285		
70	+1,5616	+0,1092		
75	+1,5586	-0,0533		
80	+1,5723	-0,01240		
85	+1,5824	-0,0 <sup>2</sup> 1935		
90	+1,5757	+0,0 <sup>2</sup> 9986		
95	+1,5630	+0,0 <sup>2</sup> 7110		
100	+1,5622	-0,0 <sup>2</sup> 5149		
110	+1,5799	-0,0 <sup>3</sup> 320		
120	+1,5640	+0,04781		
130	+1,5737	-0,07132		

$x$	Si ( $x$ )	Ci ( $x$ )	Ei ( $x$ )	Ei ( $-x$ )
140	+1,5722	+0,07011		
150	+1,5662	-0,04800		
160	+1,5769	+0,01409		
170	+1,5653	+0,02010		
180	+1,5741	-0,0 <sup>2</sup> 4432		
190	+1,5704	+0,0 <sup>2</sup> 5250		
200	+1,5684	-0,0 <sup>2</sup> 4378		
300	+1,5709	-0,0 <sup>2</sup> 3332		
400	+1,5721	-0,0 <sup>2</sup> 2124		
500	+1,5726	-0,0 <sup>3</sup> 9320		
600	+1,5725	+0,0 <sup>4</sup> 764		
700	+1,5720	+0,0 <sup>3</sup> 7788		
800	+1,5714	+0,0 <sup>2</sup> 1118		
900	+1,5707	+0,0 <sup>2</sup> 1109		
10 <sup>3</sup>	+1,5702	+0,0 <sup>3</sup> 826		
10 <sup>4</sup>	+1,5709	-0,0 <sup>4</sup> 306		
10 <sup>5</sup>	+1,5708	+0,0 <sup>4</sup>		
10 <sup>6</sup>	+1,5708	-0,0 <sup>6</sup> 4		
10 <sup>7</sup>	+1,5708	+0,0		
$\infty$	$\frac{1}{2} \pi$	0,0		

## VII. Die Fresnelschen Integrale.

## 1. Definition.

$$C = \int_0^u \cos \frac{1}{2} \pi u^2 \cdot du = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_0^z \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^z J_{-1/2}(z) dz$$

$$S = \int_0^u \sin \frac{1}{2} \pi u^2 \cdot du = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_0^z \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^z J_{1/2}(z) dz$$

für  $\frac{1}{2} \pi u^2 = z$ . Dabei bedeutet  $J(z)$  die Besselsche Funktion (vgl. S. 90).

2. Die Lommelsche Tafel der Fresnelschen Integrale (Abhandl. Münch. Ak. (2) 15, 120, 1886) schreitet nach  $z$  fort. Sie ist für  $z = 0$  bis  $z = 1$  berechnet aus den Formeln:

$$C(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{-1/2} dz = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left( 1 - \frac{z^2}{5 \cdot 2!} + \frac{z^4}{9 \cdot 4!} - + \dots \right)$$

$$S(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{+1/2} dz = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left( \frac{z}{3} - \frac{z^3}{7 \cdot 3!} + \frac{z^5}{11 \cdot 5!} - + \dots \right),$$

für  $z = 1$  bis  $z = 20$  aus:

$$C(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{-1/2} dz = J_{1/2} + J_{3/2} + J_{5/2} + J_{7/2} + \dots$$

$$S(z) = \frac{1}{2} \int_0^z J_{1/2} dz = J_{3/2} + J_{5/2} + J_{7/2} + J_{9/2} + \dots;$$

für  $z = 21$  bis  $z = 50$  aus:

$$\left. \begin{aligned} C(z) \\ S(z) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^z J_{\mp 1/2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left( \frac{1}{2z} - \frac{1 \cdot 3}{(2z)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2z)^5} - + \dots \right) \sin z$$

$$- \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left( \frac{1}{(2z)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2z)^6} - + \dots \right) \cos z.$$

Die Tafel von Ph. Gilbert (Mém. cour. Acad. Bruxelles **31**, 1863; vgl. auch Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Aufl. Bd. VI, S. 1054, 1906) schreitet nach  $u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z$  fort und erstreckt sich von  $u = 0,0$  bis  $u = 5,0$ . W. v. Ignatowsky (Ann. der Phys. (4) **23**, 894—898,

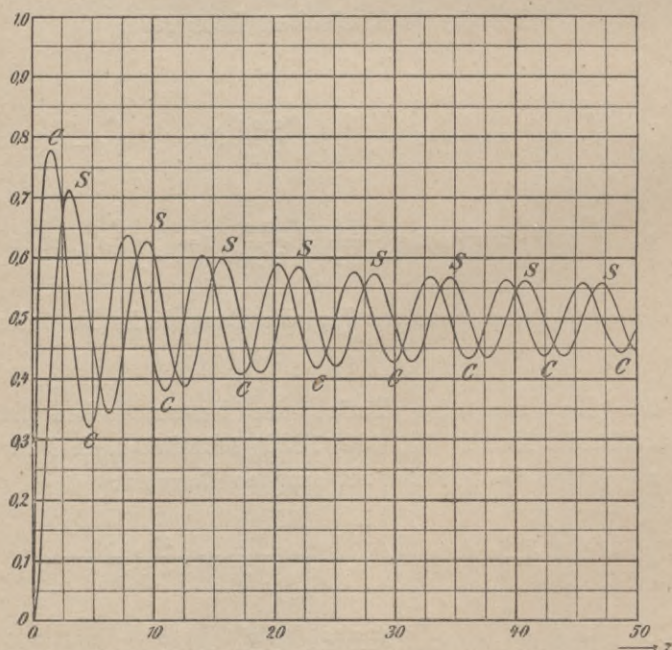


Fig. 7. Die Fresnelschen Integrale.



1907) hat noch die Werte von  $C$  und  $S$  für  $u = 5,1$  bis  $8,5$  berechnet nach den Formeln

$$C(u) = 0,5 + \frac{1}{\pi u} \sin \frac{1}{2} \pi u^2 - \frac{1}{\pi^2 u^3} \cos \frac{1}{2} \pi u^2,$$

$$S(u) = 0,5 - \frac{1}{\pi u} \cos \frac{1}{2} \pi u^2 - \frac{1}{\pi^2 u^3} \sin \frac{1}{2} \pi u^2.$$

$z$	$C(z)$	$S(z)$	$z$	$C(z)$	$S(z)$	$z$	$C(z)$	$S(z)$
0,0	0	0	16,0	0,4743	0,5961	36,0	0,4342	0,5094
0,1	0,2521	0,0084	16,5	0,4323	0,5709	36,5	0,4382	0,4769
0,2	0,3554	0,0238	17,0	0,4080	0,5293	37,0	0,4571	0,4504
0,3	0,4331	0,0434	17,5	0,4066	0,4818	37,5	0,4863	0,4363
0,4	0,4966	0,0665	18,0	0,4278	0,4400	38,0	0,5184	0,4380
0,5	0,5502	0,0924	18,5	0,4660	0,4139	38,5	0,5456	0,4547
0,6	0,5962	0,1205	19,0	0,5113	0,4093	39,0	0,5613	0,4822
0,7	0,6356	0,1504	19,5	0,5528	0,4269	39,5	0,5620	0,5137
0,8	0,6693	0,1818	20,0	0,5804	0,4616	40,0	0,5475	0,5415
0,9	0,6979	0,2143	20,5	0,5878	0,5049	40,5	0,5217	0,5588
1,0	0,7217	0,2476	21,0	0,5738	0,5459	41,0	0,4909	0,5616
1,5	0,7791	0,4153	21,5	0,5423	0,5748	41,5	0,4627	0,5494
2,0	0,7533	0,5628	22,0	0,5012	0,5849	42,0	0,4439	0,5253
2,5	0,6710	0,6658	22,5	0,4607	0,5742	42,5	0,4390	0,4953
3,0	0,5610	0,7117	23,0	0,4307	0,5458	43,0	0,4490	0,4668
3,5	0,4520	0,7002	23,5	0,4181	0,5068	43,5	0,4713	0,4468
4,0	0,3682	0,6421	24,0	0,4256	0,4670	44,0	0,5004	0,4399
4,5	0,3252	0,5565	24,5	0,4511	0,4361	44,5	0,5290	0,4477
5,0	0,3285	0,4659	25,0	0,4879	0,4212	45,0	0,5502	0,4682
5,5	0,3724	0,3918	25,5	0,5269	0,4258	45,5	0,5590	0,4962
6,0	0,4433	0,3499	26,0	0,5586	0,4483	46,0	0,5533	0,5248
6,5	0,5222	0,3471	26,5	0,5755	0,4829	46,5	0,5347	0,5471
7,0	0,5901	0,3812	27,0	0,5738	0,5211	47,0	0,5078	0,5577
7,5	0,6318	0,4415	27,5	0,5541	0,5534	47,5	0,4793	0,5540
8,0	0,6393	0,5120	28,0	0,5217	0,5721	48,0	0,4562	0,5373
8,5	0,6129	0,5755	28,5	0,4846	0,5731	48,5	0,4439	0,5117
9,0	0,5608	0,6172	29,0	0,4518	0,5562	49,0	0,4455	0,4834
9,5	0,4969	0,6286	29,5	0,4314	0,5260	49,5	0,4603	0,4595
10,0	0,4370	0,6084	30,0	0,4279	0,4900	50,0	0,4847	0,4457
10,5	0,3951	0,5632	30,5	0,4420	0,4570			
11,0	0,3804	0,5048	31,0	0,4700	0,4350			
11,5	0,3951	0,4478	31,5	0,5048	0,4291			
12,0	0,4346	0,4058	32,0	0,5379	0,4406			
12,5	0,4881	0,3882	32,5	0,5613	0,4663			
13,0	0,5425	0,3983	33,0	0,5694	0,4999			
13,5	0,5846	0,4325	33,5	0,5605	0,5329			
14,0	0,6047	0,4818	34,0	0,5370	0,5575			
14,5	0,5989	0,5337	34,5	0,5049	0,5677			
15,0	0,5693	0,5758	35,0	0,4720	0,5613			
15,5	0,5240	0,5982	35,5	0,4464	0,5401			

$u$	$C(u)$	$S(u)$	$u$	$C(u)$	$S(u)$	$u$	$C(u)$	$S(u)$
0.0	0	0	3.0	0.6057	0.4963	6.0	0.4995	0.4469
0.1	0.0999	0.0005	3.1	0.5616	0.5818	6.1	0.5495	0.5165
0.2	0.1999	0.0042	3.2	0.4663	0.5933	6.2	0.4676	0.5398
0.3	0.2994	0.0141	3.3	0.4057	0.5193	6.3	0.4760	0.4555
0.4	0.3975	0.0334	3.4	0.4385	0.4297	6.4	0.5496	0.4965
0.5	0.4923	0.0647	3.5	0.5326	0.4153	6.5	0.4816	0.5454
0.6	0.5811	0.1105	3.6	0.5880	0.4923	6.6	0.4690	0.4631
0.7	0.6597	0.1721	3.7	0.5419	0.5750	6.7	0.5467	0.4915
0.8	0.7230	0.2493	3.8	0.4481	0.5656	6.8	0.4831	0.5436
0.9	0.7648	0.3398	3.9	0.4223	0.4752	6.9	0.4732	0.4624
1.0	0.7799	0.4383	4.0	0.4984	0.4205	7.0	0.5455	0.4997
1.1	0.7648	0.5365	4.1	0.5737	0.4758	7.1	0.4733	0.5360
1.2	0.7154	0.6234	4.2	0.5417	0.5632	7.2	0.4887	0.4572
1.3	0.6386	0.6863	4.3	0.4494	0.5540	7.3	0.5393	0.5199
1.4	0.5431	0.7135	4.4	0.4383	0.4623	7.4	0.4601	0.5161
1.5	0.4453	0.6975	4.5	0.5258	0.4342	7.5	0.5160	0.4607
1.6	0.3655	0.6383	4.6	0.5672	0.5162	7.6	0.5156	0.5389
1.7	0.3238	0.5492	4.7	0.4914	0.5669	7.7	0.4628	0.4820
1.8	0.3363	0.4509	4.8	0.4338	0.4968	7.8	0.5395	0.4896
1.9	0.3945	0.3734	4.9	0.5002	0.4351	7.9	0.4760	0.5323
2.0	0.4883	0.3434	5.0	0.5636	0.4992	8.0	0.4993	0.4602
2.1	0.5814	0.3743	5.1	0.4987	0.5624	8.1	0.5228	0.5320
2.2	0.6362	0.4556	5.2	0.4389	0.4969	8.2	0.4638	0.4859
2.3	0.6268	0.5525	5.3	0.5078	0.4404	8.3	0.5378	0.4932
2.4	0.5550	0.6197	5.4	0.5573	0.5140	8.4	0.4709	0.5243
2.5	0.4574	0.6192	5.5	0.4784	0.5537	8.5	0.5142	0.4653
2.6	0.3889	0.5500	5.6	0.4517	0.4700			
2.7	0.3926	0.4529	5.7	0.5385	0.4595			
2.8	0.4675	0.3915	5.8	0.5298	0.5461			
2.9	0.5624	0.4102	5.9	0.4484	0.5163			

### VIII. Die Gammafunktion.<sup>1)</sup>

#### 1. Definition.

Für die Gammafunktion gibt es die beiden Bezeichnungen  $\Gamma x$  (Legendre) und  $\Pi x$  (Gauß). Dabei ist

$$\Pi x = \Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} n^x.$$

#### 2. Spezielle Werte.

Bedeutet  $n$  eine positive ganze Zahl, dann ist

$$\Pi(x+n) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\Pi x$$

$$\Pi 0 = 1, \quad \Pi n = n!, \quad \frac{1}{\Pi(-n)} = 0, \quad \Pi x = x\Pi(x-1)$$

$$\Pi(-x)\Pi(x-1) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

1) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

$$\Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Pi\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Pi(-\frac{3}{2}) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Pi(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Pi(\frac{1}{4})\Pi(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \Pi(-\frac{1}{4})\Pi(-\frac{3}{4}) = \pi\sqrt{2}, \quad \Pi(-\frac{1}{3})\Pi(-\frac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Das Minimum von  $\Pi(x)$  liegt bei  $x = 0,46163$  und ist gleich  $0,85560$ .

### 3. Gaußsches Multiplikationstheorem

$$\frac{n^{nx} \Pi x \Pi(x - \frac{1}{n}) \Pi(x - \frac{2}{n}) \cdots \Pi(x - \frac{n-1}{n})}{\Pi nx} = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}$$

$$\frac{2^{nx} \Pi x \Pi(x - \frac{1}{2})}{\Pi 2x} = \sqrt{\pi}.$$

### 4. Potenzreihe für den Logarithmus der Gammafunktion:

$$\ln \Pi x = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \ln \frac{1+x}{1-x} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1-s_{2r+1}}{2r+1} x^{2r+1},$$

wo  $-2 < x < 2$  und

$$s_r = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots$$

5. Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion wird bezeichnet mit  $\Psi(x+1) = \frac{d \ln \Pi x}{dx}$ . Für sie gilt die Entwicklung

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} \cot \pi x - \frac{1}{1-x^2} + \sum_{r=2}^{\infty} (1-s_{2r+1}) x^{2r}$$

für  $-1 < x < 1$ .

Eigenschaften der  $\Psi$ -Funktion:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \quad \Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x$$

$$\Psi(x+1) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt - C$$

$$-\Psi(1) = C = \lim \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,57722$$

$$= \ln 1,781070 \text{ (Eulersche Konstante).}$$

$$\Psi(\frac{1}{2}) = -C - 2 \ln 2, \quad \Psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - C.$$

6. Integrale, die sich durch die Gammafunktion darstellen lassen; dabei werden  $x$  und  $y$  als reell und positiv vorausgesetzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \Gamma(x+1) \quad (\text{Eulersches Integral})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t} e^{t(x+1)} dt = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^x dt = \int_0^{\infty} e^{-t} (t-x-1)^x \ln t dt = \Gamma(x+1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ty} t^x dt = y^{-x-1} \Gamma(x+1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^n} dt = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \quad \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (\text{Fehlerintegral})$$

$$\int_0^1 t^x (1-t)^y dt = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{(1+t)^{x+y+2}} dt = \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{2x+1} (1-t^2)^y dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1} \varphi \cos^{2y+1} \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{2x+1}}{(1+t^2)^{x+y+2}} dt = \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(y+1)}{2 \Gamma(x+y+1)} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^{2x+2}} dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x+1)}{2^{2x+2} \Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^8}} = \frac{2^{1/4} \Gamma^2\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{3^{3/2} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{3/2} \pi}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) = 0,577215$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x} dx}{(1+x)^{11/4}} = \frac{\Gamma(0,2) \Gamma(0,55)}{\Gamma(1,75)} = 0,50743$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5/4} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{5/4} x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(0,125)}{\Gamma(0,625)} = 0,93087$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{3/4} x dx = \frac{\Gamma(0,5) \Gamma(0,875)}{1,75 \Gamma(1,375)} = 0,39504$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}} = \frac{2 \Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = 1,92762.$$

7. Potenzreihe für sehr große, positive Werte von  $x$ 

$$\ln \Pi x \sim \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(x+1) - x - 1 + \ln \sqrt{2\pi}$$

$$\Psi x \sim \ln x - \frac{1}{2x}, \quad \Psi' x \sim \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{\Psi'(x)} \sim x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2x)^n}$$

8. Die Tafeln der Logarithmen und der natürlichen Werte der Gammafunktion rühren von Legendre her, Exercices de calcul int. t. 2, 83—95 (1817); t. 1, 302—306 (1811). Man hat nur nötig, die Gammafunktion für das Intervall 0 bis 1 zu berechnen, weil  $\Gamma(x+1) = x\Gamma x$ ; und auch dieses Intervall kann noch beliebig verkleinert werden, vgl. E. Landau, Journ. f. Math. 123, 1902.

Die Tafel für die logarithmische Ableitung der Gammafunktion ist von Gauß, Ges. W. 3, 161, berechnet worden.

Die Tafeln für  $\Psi'(x+1)$  und  $\frac{1}{\Psi'(x+1)}$  rühren von F. Emde her (Zur Berechnung der Elektromagnete, Elektrotechnik und Maschinenbau 24, 996, Wien 1906).

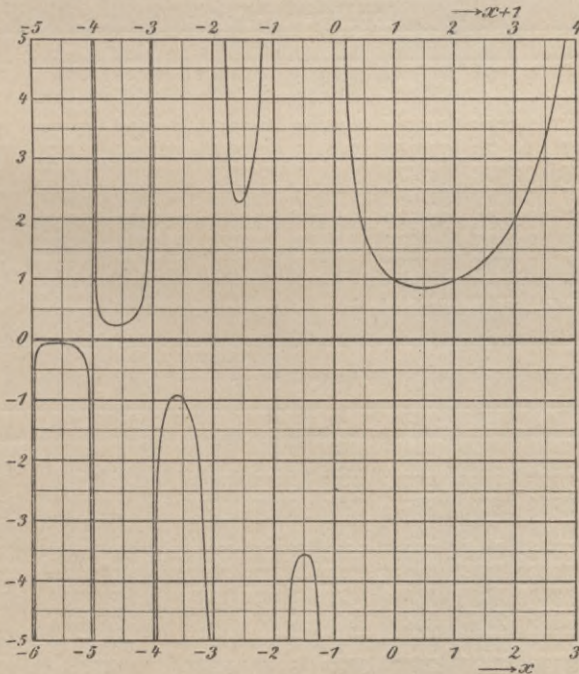


Fig. 8. Die Gammafunktion.



$x$	$\Psi(x+1)$
0	-0,5772
1	+0,4228
2	+0,9228
3	+1,2561
4	+1,5061
5	+1,7061
6	+1,8728
7	+2,0156
8	+2,1406
9	+2,2518
10	+2,3518

$x$	$\Pi(x) = \Gamma(x+1)$	$\Psi'(x+1)$	$\frac{1}{\Psi'(x+1)}$
0.00	1.0000	1,645	0,608
0.05	0.9735	1,532	0,653
0.10	0.9514	1,433	0,698
0.15	0.9330	1,346	0,744
0.20	0.9182	1,267	0,790
0.25	0.9064	1,197	0,836
0.30	0.8975	1,134	0,882
0.35	0.8911	1,077	0,929
0.40	0.8873	1,025	0,976
0.45	0.8857	0,978	1,021
0.50	0.8862	0,935	1,070
0.55	0.8889	0,895	1,117
0.60	0.8935	0,858	1,165
0.65	0.9001	0,825	1,211
0.70	0.9086	0,793	1,261
0.75	0.9191	0,764	1,309
0.80	0.9314	0,737	1,357
0.85	0.9456	0,712	1,403
0.90	0.9618	0,688	1,453
0.95	0.9799	0,666	1,500
1.00	1.0000	0,645	1,550

IX. Das Gaußsche Fehlerintegral  $\Phi(x)$ .<sup>1)</sup>

1. Definition:  $\sqrt{\pi} \Phi(x) = 2 \int_0^x e^{-x^2} dx.$

Beständig konvergente Potenzreihe:

$$\sqrt{\pi} \Phi(x) = 2 \left( \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! 3} + \frac{x^5}{2! 5} - + \dots \right).$$

Semikonvergente Entwicklung für große Werte von  $x$ :

$$\sqrt{\pi} \Phi(x) = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-x^2}}{x} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right)$$

oder

$$1 - \Phi(x) = \frac{2e^{-x^2}}{2x\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p)!}{p! (2x)^{2p}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx$$

für  $p < x^2$ . Dabei ist der Fehler  $< \frac{\sqrt{2}}{e^n} \cdot \frac{e^{-x^2}}{x}$ .

1) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1903, B. G. Teubner.  
— H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

2. Die Ableitungen von  $\Phi(x)$  stellen sich dar in der Form

$$\Phi^{(p+1)}(x) = p! \Phi'(x) \left\{ (-1)^p \frac{(2x)^p}{0!p!} + (-1)^{p-1} \frac{(2x)^{p-2}}{1!(p-2)!} + \dots \right\},$$

wo

$$\sqrt{\pi} \cdot \Phi'(x) = 2e^{-x^2}.$$

3. Die Tafel für die Krampfsche Transzendent  $\Phi(x)$  ist von A. Meyer (Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1879, B. G. Teubner) und B. Kämpfe (Tafel des Integrals

$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$ , Leipzig 1893, W. Engelmann) berechnet. Die

Tafeln für die sechs ersten Ableitungen sind von H. Bruns ermittelt worden (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906, B. G. Teubner). Den Ableitungen  $\Phi^{(p+1)}(x)$  sind die Divisoren  $2^p$  beigegeben, um zu erreichen, daß sich das Maximum jeder  $\Phi$ -Funktion nicht weit von Eins entfernt.

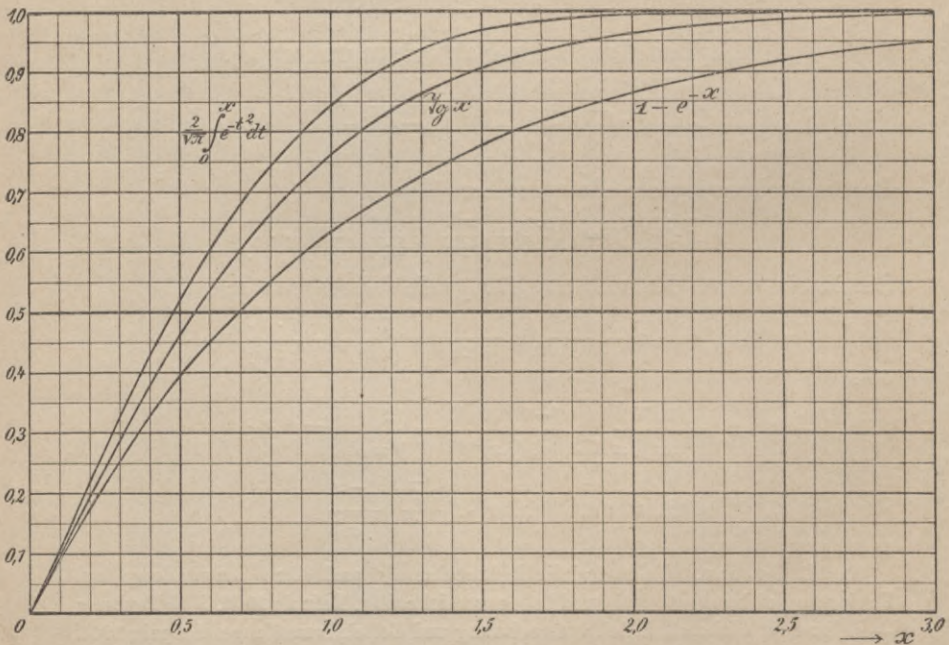


Fig. 10. Exponentialfunktion, Hyperbeltangens und Fehlerintegral.



$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0011	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
0,01	0,0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
0,02	0,0226	0237	0248	0259	0271	0282	0293	0305	0316	0327
0,03	0,0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
0,04	0,0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0552
0,05	0,0564	0575	0586	0597	0609	0620	0631	0642	0654	0665
0,06	0,0676	0687	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
0,07	0,0789	0800	0811	0822	0833	0845	0856	0867	0878	0890
0,08	0,0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
0,09	0,1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
0,10	0,1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
0,11	0,1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
0,12	0,1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
0,13	0,1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
0,14	0,1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
0,15	0,1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
0,16	0,1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
0,17	0,1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
0,18	0,2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
0,19	0,2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
0,20	0,2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
0,21	0,2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
0,22	0,2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
0,23	0,2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
0,24	0,2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
0,25	0,2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
0,26	0,2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
0,27	0,2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
0,28	0,3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
0,29	0,3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
0,30	0,3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
0,31	0,3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
0,32	0,3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
0,33	0,3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
0,34	0,3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
0,35	0,3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
0,36	0,3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
0,37	0,3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
0,38	0,4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
0,39	0,4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
0,40	0,4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
0,41	0,4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
0,42	0,4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
0,43	0,4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
0,44	0,4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
0,45	0,4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
0,46	0,4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
0,47	0,4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
0,48	0,5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
0,49	0,5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284
0,51	0,5292	5301	5310	5318	5327	5336	5344	5353	5362	5370
0,52	0,5379	5388	5396	5405	5413	5422	5430	5439	5448	5456
0,53	0,5465	5473	5482	5490	5499	5507	5516	5524	5533	5541
0,54	0,5549	5558	5566	5575	5583	5591	5600	5608	5617	5625
0,55	0,5633	5642	5650	5658	5667	5675	5683	5691	5700	5708
0,56	0,5716	5724	5733	5741	5749	5757	5765	5774	5782	5790
0,57	0,5798	5806	5814	5823	5831	5839	5847	5855	5863	5871
0,58	0,5879	5887	5895	5903	5911	5919	5927	5935	5943	5951
0,59	0,5959	5967	5975	5983	5991	5999	6007	6015	6023	6031
0,60	0,6039	6046	6054	6062	6070	6078	6086	6093	6101	6109
0,61	0,6117	6125	6132	6140	6148	6156	6163	6171	6179	6186
0,62	0,6194	6202	6209	6217	6225	6232	6240	6248	6255	6263
0,63	0,6270	6278	6286	6293	6301	6308	6316	6323	6331	6338
0,64	0,6346	6353	6361	6368	6376	6383	6391	6398	6405	6413
0,65	0,6420	6428	6435	6442	6450	6457	6464	6472	6479	6486
0,66	0,6494	6501	6508	6516	6523	6530	6537	6545	6552	6559
0,67	0,6566	6573	6581	6588	6595	6602	6609	6616	6624	6631
0,68	0,6638	6645	6652	6659	6666	6673	6680	6687	6694	6701
0,69	0,6708	6715	6722	6729	6736	6743	6750	6757	6764	6771
0,70	0,6778	6785	6792	6799	6806	6812	6819	6826	6833	6840
0,71	0,6847	6853	6860	6867	6874	6881	6887	6894	6901	6908
0,72	0,6914	6921	6928	6934	6941	6948	6954	6961	6968	6974
0,73	0,6981	6988	6994	7001	7007	7014	7021	7027	7034	7040
0,74	0,7047	7053	7060	7066	7073	7079	7086	7092	7099	7105
0,75	0,7112	7118	7124	7131	7137	7144	7150	7156	7163	7169
0,76	0,7175	7182	7188	7194	7201	7207	7213	7219	7226	7232
0,77	0,7238	7244	7251	7257	7263	7269	7275	7282	7288	7294
0,78	0,7300	7306	7312	7318	7325	7331	7337	7343	7349	7355
0,79	0,7361	7367	7373	7379	7385	7391	7397	7403	7409	7415
0,80	0,7421	7427	7433	7439	7445	7451	7457	7462	7468	7474
0,81	0,7480	7486	7492	7498	7503	7509	7515	7521	7527	7532
0,82	0,7538	7544	7550	7555	7561	7567	7572	7578	7584	7590
0,83	0,7595	7601	7607	7612	7618	7623	7629	7635	7640	7646
0,84	0,7651	7657	7663	7668	7674	7679	7685	7690	7696	7701
0,85	0,7707	7712	7718	7723	7729	7734	7739	7745	7750	7756
0,86	0,7761	7766	7772	7777	7782	7788	7793	7798	7804	7809
0,87	0,7814	7820	7825	7830	7835	7841	7846	7851	7856	7862
0,88	0,7867	7872	7877	7882	7888	7893	7898	7903	7908	7913
0,89	0,7918	7924	7929	7934	7939	7944	7949	7954	7959	7964
0,90	0,7969	7974	7979	7984	7989	7994	7999	8004	8009	8014
0,91	0,8019	8024	8029	8034	8038	8043	8048	8053	8058	8063
0,92	0,8068	8073	8077	8082	8087	8092	8097	8101	8106	8111
0,93	0,8116	8120	8125	8130	8135	8139	8144	8149	8153	8158
0,94	0,8163	8167	8172	8177	8181	8186	8191	8195	8200	8204
0,95	0,8209	8213	8218	8223	8227	8232	8236	8241	8245	8250
0,96	0,8254	8259	8263	8268	8272	8277	8281	8285	8290	8294
0,97	0,8299	8303	8307	8312	8316	8321	8325	8329	8334	8338
0,98	0,8342	8347	8351	8355	8360	8364	8368	8372	8377	8381
0,99	0,8385	8389	8394	8398	8402	8406	8410	8415	8419	8423

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	0.8427	8431	8435	8439	8444	8448	8452	8456	8460	8464
1.01	0.8468	8472	8476	8480	8484	8488	8492	8496	8500	8504
1.02	0.8508	8512	8516	8520	8524	8528	8532	8536	8540	8544
1.03	0.8548	8552	8556	8560	8563	8567	8571	8575	8579	8583
1.04	0.8586	8590	8594	8598	8602	8606	8609	8613	8617	8621
1.05	0.8624	8628	8632	8636	8639	8643	8647	8650	8654	8658
1.06	0.8661	8665	8669	8672	8676	8680	8683	8687	8691	8694
1.07	0.8698	8701	8705	8708	8712	8716	8719	8723	8726	8730
1.08	0.8733	8737	8740	8744	8747	8751	8754	8758	8761	8765
1.09	0.8768	8771	8775	8778	8782	8785	8789	8792	8795	8799
1.10	0.8802	8805	8809	8812	8815	8819	8822	8825	8829	8832
1.11	0.8835	8839	8842	8845	8848	8852	8855	8858	8861	8865
1.12	0.8868	8871	8874	8878	8881	8884	8887	8890	8893	8897
1.13	0.8900	8903	8906	8909	8912	8915	8918	8922	8925	8928
1.14	0.8931	8934	8937	8940	8943	8946	8949	8952	8955	8958
1.15	0.8961	8964	8967	8970	8973	8976	8979	8982	8985	8988
1.16	0.8991	8994	8997	9000	9003	9006	9008	9011	9014	9017
1.17	0.9020	9023	9026	9029	9031	9034	9037	9040	9043	9046
1.18	0.9048	9051	9054	9057	9060	9062	9065	9068	9071	9073
1.19	0.9076	9079	9082	9084	9087	9090	9092	9095	9098	9100
1.20	0.9103	9106	9108	9111	9114	9116	9119	9122	9124	9127
1.21	0.9130	9132	9135	9137	9140	9143	9145	9148	9150	9153
1.22	0.9155	9158	9160	9163	9165	9168	9171	9173	9176	9178
1.23	0.9181	9183	9185	9188	9190	9193	9195	9198	9200	9203
1.24	0.9205	9207	9210	9212	9215	9217	9219	9222	9224	9227
1.25	0.9229	9231	9234	9236	9238	9241	9243	9245	9248	9250
1.26	0.9252	9255	9257	9259	9262	9264	9266	9268	9271	9273
1.27	0.9275	9277	9280	9282	9284	9286	9289	9291	9293	9295
1.28	0.9297	9300	9302	9304	9306	9308	9310	9313	9315	9317
1.29	0.9319	9321	9323	9325	9327	9330	9332	9334	9336	9338
1.30	0.9340	9342	9344	9346	9348	9350	9352	9355	9357	9359
1.31	0.9361	9363	9365	9367	9369	9371	9373	9375	9377	9379
1.32	0.9381	9383	9385	9387	9389	9390	9392	9394	9396	9398
1.33	0.9400	9402	9404	9406	9408	9410	9412	9413	9415	9417
1.34	0.9419	9421	9423	9425	9427	9428	9430	9432	9434	9436
1.35	0.9438	9439	9441	9443	9445	9447	9448	9450	9452	9454
1.36	0.9456	9457	9459	9461	9463	9464	9466	9468	9470	9471
1.37	0.9473	9475	9477	9478	9480	9482	9483	9485	9487	9488
1.38	0.9490	9492	9494	9495	9497	9499	9500	9502	9503	9505
1.39	0.9507	9508	9510	9512	9513	9515	9516	9518	9520	9521
1.40	0.9523	9524	9526	9528	9529	9531	9532	9534	9535	9537
1.41	0.9539	9540	9542	9543	9545	9546	9548	9549	9551	9552
1.42	0.9554	9555	9557	9558	9560	9561	9563	9564	9566	9567
1.43	0.9569	9570	9571	9573	9574	9576	9577	9579	9580	9582
1.44	0.9583	9584	9586	9587	9589	9590	9591	9593	9594	9596
1.45	0.9597	9598	9600	9601	9602	9604	9605	9607	9608	9609
1.46	0.9611	9612	9613	9615	9616	9617	9618	9620	9621	9622
1.47	0.9624	9625	9626	9628	9629	9630	9631	9633	9634	9635
1.48	0.9637	9638	9639	9640	9642	9643	9644	9645	9647	9648
1.49	0.9649	9650	9651	9653	9654	9655	9656	9657	9659	9660

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,50	0,9661	9662	9663	9665	9666	9667	9668	9669	9670	9672
1,5	0,9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755
1,6	0,9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832
1,7	0,9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886
1,8	0,9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925
1,9	0,9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951
2,0	0,9953	9955	9957	9959	9961	9963	9964	9966	9967	9969
2,1	0,9970	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9979	9980	9980
2,2	0,9981	9982	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988
2,3	0,9989	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9992	9993
2,4	0,9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995	9996
2,5	0,9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
2,6	0,9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9999
2,7	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
2,8	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1,000	1,000	1,000

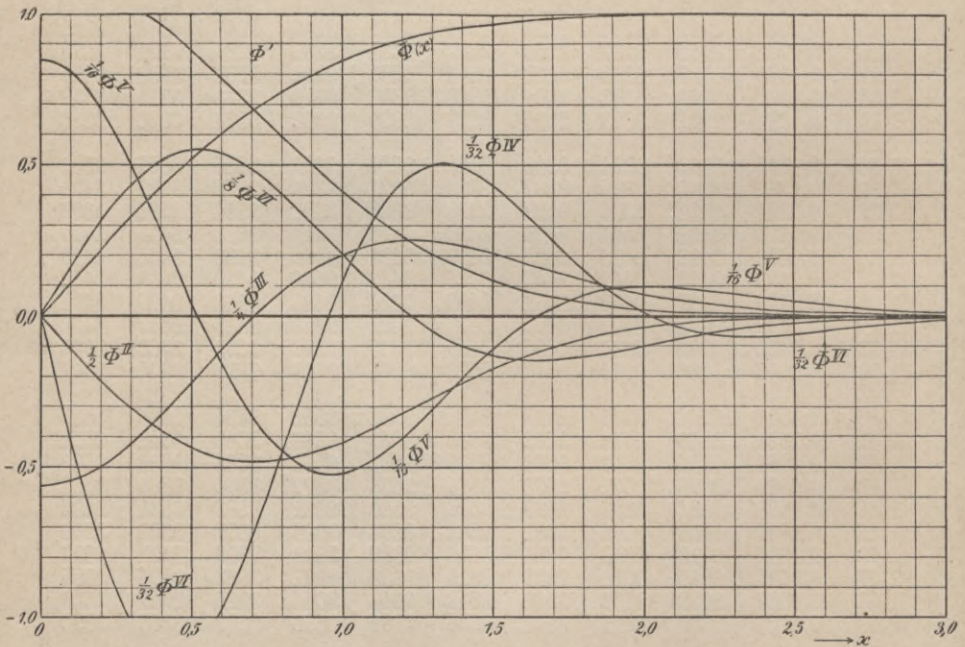


Fig. 11. Die Ableitungen des Fehlerintegrals.

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
0,00	+1,1284	-0,0000	-0,5642	+0,0000	+0,8463	-0,0000
0,01	+1,1283	-0,0113	-0,5640	+0,0169	+0,8459	-0,0423
0,02	+1,1279	-0,0226	-0,5635	+0,0338	+0,8446	-0,0845
0,03	+1,1274	-0,0338	-0,5627	+0,0507	+0,8425	-0,1267
0,04	+1,1266	-0,0451	-0,5615	+0,0675	+0,8395	-0,1686
0,05	+1,1256	-0,0563	-0,5600	+0,0843	+0,8357	-0,2103
0,06	+1,1243	-0,0675	-0,5581	+0,1009	+0,8311	-0,2518
0,07	+1,1229	-0,0786	-0,5559	+0,1175	+0,8257	-0,2928
0,08	+1,1212	-0,0897	-0,5534	+0,1340	+0,8194	-0,3335
0,09	+1,1193	-0,1007	-0,5506	+0,1503	+0,8123	-0,3737
0,10	+1,1172	-0,1117	-0,5474	+0,1665	+0,8045	-0,4134
0,11	+1,1148	-0,1226	-0,5439	+0,1825	+0,7958	-0,4525
0,12	+1,1122	-0,1335	-0,5401	+0,1983	+0,7864	-0,4909
0,13	+1,1095	-0,1442	-0,5360	+0,2139	+0,7762	-0,5287
0,14	+1,1065	-0,1549	-0,5316	+0,2293	+0,7652	-0,5658
0,15	+1,1033	-0,1655	-0,5268	+0,2445	+0,7535	-0,6021
0,16	+1,0999	-0,1760	-0,5218	+0,2595	+0,7411	-0,6375
0,17	+1,0962	-0,1864	-0,5164	+0,2742	+0,7280	-0,6721
0,18	+1,0924	-0,1966	-0,5108	+0,2886	+0,7143	-0,7057
0,19	+1,0884	-0,2068	-0,5049	+0,3027	+0,6998	-0,7384
0,20	+1,0841	-0,2168	-0,4987	+0,3166	+0,6847	-0,7701
0,21	+1,0797	-0,2267	-0,4922	+0,3301	+0,6690	-0,8007
0,22	+1,0751	-0,2365	-0,4855	+0,3433	+0,6527	-0,8302
0,23	+1,0702	-0,2462	-0,4785	+0,3562	+0,6358	-0,8587
0,24	+1,0652	-0,2557	-0,4713	+0,3688	+0,6184	-0,8859
0,25	+1,0600	-0,2650	-0,4638	+0,3809	+0,6004	-0,9120
0,26	+1,0546	-0,2742	-0,4560	+0,3928	+0,5819	-0,9368
0,27	+1,0490	-0,2832	-0,4480	+0,4042	+0,5629	-0,9604
0,28	+1,0433	-0,2921	-0,4399	+0,4153	+0,5435	-0,9827
0,29	+1,0374	-0,3008	-0,4314	+0,4260	+0,5236	-1,0038
0,30	+1,0313	-0,3094	-0,4228	+0,4362	+0,5034	-1,0235
0,31	+1,0250	-0,3177	-0,4140	+0,4461	+0,4827	-1,0418
0,32	+1,0186	-0,3259	-0,4050	+0,4555	+0,4617	-1,0588
0,33	+1,0120	-0,3339	-0,3958	+0,4646	+0,4404	-1,0744
0,34	+1,0052	-0,3418	-0,3864	+0,4731	+0,4187	-1,0887
0,35	+0,9983	-0,3494	-0,3769	+0,4813	+0,3968	-1,1015
0,36	+0,9912	-0,3568	-0,3671	+0,4890	+0,3747	-1,1129
0,37	+0,9840	-0,3641	-0,3573	+0,4963	+0,3523	-1,1229
0,38	+0,9767	-0,3711	-0,3473	+0,5031	+0,3298	-1,1315
0,39	+0,9692	-0,3780	-0,3372	+0,5095	+0,3071	-1,1387
0,40	+0,9615	-0,3846	-0,3269	+0,5154	+0,2842	-1,1445
0,41	+0,9538	-0,3911	-0,3166	+0,5208	+0,2613	-1,1488
0,42	+0,9459	-0,3973	-0,3061	+0,5258	+0,2383	-1,1518
0,43	+0,9379	-0,4033	-0,2955	+0,5304	+0,2152	-1,1533
0,44	+0,9298	-0,4091	-0,2849	+0,5344	+0,1922	-1,1534
0,45	+0,9215	-0,4147	-0,2742	+0,5381	+0,1691	-1,1522
0,46	+0,9132	-0,4201	-0,2634	+0,5412	+0,1461	-1,1496
0,47	+0,9047	-0,4252	-0,2525	+0,5439	+0,1231	-1,1457
0,48	+0,8962	-0,4302	-0,2416	+0,5461	+0,1003	-1,1404
0,49	+0,8875	-0,4349	-0,2307	+0,5479	+0,0775	-1,1338
0,50	+0,8788	-0,4394	+0,2197	+0,5492	+0,0549	-1,1259

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
0.50	+0.8788	-0.4394	-0.2197	+0.5492	+0.0549	-1.1259
0.51	+0.8700	-0.4437	-0.2087	+0.5501	+0.0325	-1.1168
0.52	+0.8610	-0.4477	-0.1977	+0.5505	+0.0103	-1.1064
0.53	+0.8520	-0.4516	-0.1867	+0.5505	-0.0118	-1.0948
0.54	+0.8430	-0.4552	-0.1757	+0.5501	-0.0335	-1.0820
0.55	+0.8338	-0.4586	-0.1647	+0.5492	-0.0550	-1.0681
0.56	+0.8246	-0.4618	-0.1537	+0.5479	-0.0762	-1.0530
0.57	+0.8154	-0.4648	-0.1428	+0.5461	-0.0971	-1.0369
0.58	+0.8060	-0.4675	-0.1319	+0.5440	-0.1177	-1.0197
0.59	+0.7967	-0.4700	-0.1210	+0.5414	-0.1379	-1.0015
0.60	+0.7872	-0.4723	-0.1102	+0.5385	-0.1578	-0.9823
0.61	+0.7778	-0.4744	-0.0995	+0.5351	-0.1772	-0.9621
0.62	+0.7683	-0.4763	-0.0888	+0.5314	-0.1962	-0.9411
0.63	+0.7587	-0.4780	-0.0782	+0.5273	-0.2148	-0.9192
0.64	+0.7491	-0.4795	-0.0677	+0.5228	-0.2330	-0.8965
0.65	+0.7395	-0.4807	-0.0573	+0.5180	-0.2507	-0.8730
0.66	+0.7299	-0.4817	-0.0470	+0.5128	-0.2679	-0.8487
0.67	+0.7203	-0.4826	-0.0368	+0.5072	-0.2846	-0.8238
0.68	+0.7106	-0.4832	-0.0267	+0.5014	-0.3009	-0.7982
0.69	+0.7010	-0.4837	-0.0168	+0.4952	-0.3166	-0.7720
0.70	+0.6913	-0.4839	-0.0069	+0.4887	-0.3317	-0.7452
0.71	+0.6816	-0.4839	+0.0028	+0.4819	-0.3464	-0.7180
0.72	+0.6719	-0.4838	+0.0124	+0.4749	-0.3605	-0.6902
0.73	+0.6622	-0.4834	+0.0218	+0.4675	-0.3740	-0.6621
0.74	+0.6526	-0.4829	+0.0311	+0.4599	-0.3869	-0.6335
0.75	+0.6429	-0.4822	+0.0402	+0.4521	-0.3993	-0.6046
0.76	+0.6333	-0.4813	+0.0491	+0.4440	-0.4111	-0.5755
0.77	+0.6237	-0.4802	+0.0579	+0.4356	-0.4223	-0.5460
0.78	+0.6141	-0.4790	+0.0666	+0.4271	-0.4330	-0.5164
0.79	+0.6045	-0.4776	+0.0750	+0.4183	-0.4430	-0.4866
0.80	+0.5950	-0.4760	+0.0833	+0.4094	-0.4524	-0.4568
0.81	+0.5855	-0.4742	+0.0914	+0.4002	-0.4613	-0.4268
0.82	+0.5760	-0.4723	+0.0993	+0.3909	-0.4695	-0.3968
0.83	+0.5666	-0.4703	+0.1070	+0.3814	-0.4771	-0.3669
0.84	+0.5572	-0.4681	+0.1146	+0.3718	-0.4842	-0.3369
0.85	+0.5479	-0.4657	+0.1219	+0.3621	-0.4906	-0.3071
0.86	+0.5386	-0.4632	+0.1290	+0.3522	-0.4965	-0.2774
0.87	+0.5293	-0.4605	+0.1360	+0.3422	-0.5017	-0.2479
0.88	+0.5202	-0.4577	+0.1427	+0.3321	-0.5064	-0.2187
0.89	+0.5110	-0.4548	+0.1493	+0.3220	-0.5105	-0.1896
0.90	+0.5020	-0.4518	+0.1556	+0.3117	-0.5140	-0.1609
0.91	+0.4930	-0.4486	+0.1617	+0.3014	-0.5169	-0.1324
0.92	+0.4840	-0.4453	+0.1677	+0.2911	-0.5193	-0.1044
0.93	+0.4752	-0.4419	+0.1734	+0.2806	-0.5211	-0.0767
0.94	+0.4664	-0.4384	+0.1789	+0.2702	-0.5223	-0.0494
0.95	+0.4576	-0.4347	+0.1842	+0.2598	-0.5231	-0.0226
0.96	+0.4490	-0.4310	+0.1893	+0.2493	-0.5232	+0.0037
0.97	+0.4404	-0.4272	+0.1942	+0.2388	-0.5229	+0.0296
0.98	+0.4319	-0.4232	+0.1988	+0.2284	-0.5221	+0.0549
0.99	+0.4235	-0.4192	+0.2033	+0.2180	-0.5207	+0.0796
1.00	+0.4151	-0.4151	+0.2076	+0.2076	-0.5189	+0.1038

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
1.00	+0,4151	-0,4151	+0,2076	+0,2076	-0,5189	+0,1038
1.01	+0,4068	-0,4109	+0,2116	+0,1972	-0,5166	+0,1273
1.02	+0,3987	-0,4066	+0,2154	+0,1869	-0,5138	+0,1503
1.03	+0,3906	-0,4023	+0,2191	+0,1766	-0,5106	+0,1726
1.04	+0,3826	-0,3979	+0,2225	+0,1665	-0,5069	+0,1942
1.05	+0,3747	-0,3934	+0,2257	+0,1564	-0,5028	+0,2152
1.06	+0,3668	-0,3889	+0,2288	+0,1464	-0,4983	+0,2355
1.07	+0,3591	-0,3843	+0,2316	+0,1364	-0,4934	+0,2550
1.08	+0,3515	-0,3796	+0,2342	+0,1266	-0,4881	+0,2739
1.09	+0,3439	-0,3749	+0,2367	+0,1169	-0,4824	+0,2920
1.10	+0,3365	-0,3701	+0,2389	+0,1073	-0,4764	+0,3094
1.11	+0,3291	-0,3653	+0,2410	+0,0979	-0,4701	+0,3260
1.12	+0,3219	-0,3605	+0,2428	+0,0885	-0,4634	+0,3419
1.13	+0,3147	-0,3556	+0,2445	+0,0793	-0,4564	+0,3570
1.14	+0,3076	-0,3507	+0,2460	+0,0703	-0,4491	+0,3714
1.15	+0,3007	-0,3458	+0,2473	+0,0614	-0,4415	+0,3850
1.16	+0,2938	-0,3408	+0,2484	+0,0526	-0,4337	+0,3979
1.17	+0,2870	-0,3358	+0,2494	+0,0440	-0,4256	+0,4099
1.18	+0,2804	-0,3308	+0,2502	+0,0356	-0,4173	+0,4212
1.19	+0,2738	-0,3258	+0,2508	+0,0273	-0,4088	+0,4318
1.20	+0,2673	-0,3208	+0,2513	+0,0192	-0,4001	+0,4416
1.21	+0,2610	-0,3158	+0,2516	+0,0113	-0,3911	+0,4506
1.22	+0,2547	-0,3107	+0,2518	+0,0036	-0,3820	+0,4589
1.23	+0,2485	-0,3057	+0,2518	-0,0039	-0,3728	+0,4664
1.24	+0,2425	-0,3007	+0,2516	-0,0113	-0,3634	+0,4732
1.25	+0,2365	-0,2957	+0,2513	-0,0185	-0,3539	+0,4793
1.26	+0,2307	-0,2906	+0,2509	-0,0255	-0,3442	+0,4846
1.27	+0,2249	-0,2856	+0,2503	-0,0322	-0,3345	+0,4893
1.28	+0,2192	-0,2806	+0,2496	-0,0388	-0,3247	+0,4932
1.29	+0,2137	-0,2756	+0,2487	-0,0452	-0,3148	+0,4965
1.30	+0,2082	-0,2707	+0,2478	-0,0514	-0,3048	+0,4991
1.31	+0,2028	-0,2657	+0,2467	-0,0574	-0,2948	+0,5010
1.32	+0,1976	-0,2608	+0,2455	-0,0632	-0,2848	+0,5023
1.33	+0,1924	-0,2559	+0,2442	-0,0688	-0,2747	+0,5030
1.34	+0,1873	-0,2510	+0,2427	-0,0742	-0,2646	+0,5030
1.35	+0,1824	-0,2462	+0,2412	-0,0794	-0,2546	+0,5025
1.36	+0,1775	-0,2414	+0,2395	-0,0844	-0,2445	+0,5014
1.37	+0,1727	-0,2366	+0,2378	-0,0892	-0,2345	+0,4997
1.38	+0,1680	-0,2319	+0,2360	-0,0938	-0,2246	+0,4974
1.39	+0,1634	-0,2272	+0,2341	-0,0982	-0,2146	+0,4947
1.40	+0,1589	-0,2225	+0,2321	-0,1024	-0,2048	+0,4914
1.41	+0,1545	-0,2179	+0,2300	-0,1064	-0,1950	+0,4876
1.42	+0,1502	-0,2133	+0,2278	-0,1102	-0,1853	+0,4834
1.43	+0,1460	-0,2088	+0,2256	-0,1138	-0,1757	+0,4787
1.44	+0,1419	-0,2043	+0,2233	-0,1172	-0,1661	+0,4736
1.45	+0,1378	-0,1999	+0,2209	-0,1204	-0,1567	+0,4681
1.46	+0,1339	-0,1955	+0,2184	-0,1235	-0,1474	+0,4621
1.47	+0,1300	-0,1911	+0,2159	-0,1263	-0,1382	+0,4558
1.48	+0,1262	-0,1868	+0,2134	-0,1290	-0,1292	+0,4492
1.49	+0,1225	-0,1826	+0,2108	-0,1315	-0,1203	+0,4422
1.50	+0,1189	-0,1784	+0,2081	-0,1338	-0,1115	+0,4348

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
1.50	+0,1189	-0,1784	+0,2081	-0,1338	-0,1115	+0,4348
1.51	+0,1154	-0,1743	+0,2054	-0,1359	-0,1029	+0,4272
1.52	+0,1120	-0,1702	+0,2027	-0,1379	-0,0944	+0,4193
1.53	+0,1086	-0,1662	+0,1999	-0,1397	-0,0861	+0,4112
1.54	+0,1053	-0,1622	+0,1971	-0,1414	-0,0780	+0,4028
1.55	+0,1021	-0,1583	+0,1943	-0,1428	-0,0700	+0,3942
1.56	+0,0990	-0,1544	+0,1914	-0,1442	-0,0622	+0,3853
1.57	+0,0959	-0,1506	+0,1885	-0,1453	-0,0546	+0,3763
1.58	+0,0930	-0,1469	+0,1856	-0,1463	-0,0471	+0,3672
1.59	+0,0901	-0,1432	+0,1826	-0,1472	-0,0399	+0,3579
1.60	+0,0872	-0,1396	+0,1797	-0,1479	-0,0328	+0,3484
1.61	+0,0845	-0,1360	+0,1767	-0,1485	-0,0260	+0,3389
1.62	+0,0818	-0,1325	+0,1738	-0,1490	-0,0193	+0,3292
1.63	+0,0792	-0,1291	+0,1708	-0,1493	-0,0128	+0,3195
1.64	+0,0766	-0,1257	+0,1678	-0,1495	-0,0065	+0,3096
1.65	+0,0741	-0,1223	+0,1648	-0,1496	-0,0004	+0,2998
1.66	+0,0717	-0,1191	+0,1618	-0,1495	+0,0055	+0,2899
1.67	+0,0694	-0,1159	+0,1588	-0,1493	+0,0112	+0,2800
1.68	+0,0671	-0,1127	+0,1558	-0,1491	+0,0167	+0,2701
1.69	+0,0649	-0,1096	+0,1528	-0,1487	+0,0220	+0,2602
1.70	+0,0627	-0,1066	+0,1499	-0,1482	+0,0271	+0,2503
1.71	+0,0606	-0,1036	+0,1469	-0,1476	+0,0320	+0,2405
1.72	+0,0586	-0,1007	+0,1440	-0,1469	+0,0367	+0,2307
1.73	+0,0566	-0,0979	+0,1410	-0,1461	+0,0412	+0,2209
1.74	+0,0546	-0,0951	+0,1381	-0,1453	+0,0456	+0,2113
1.75	+0,0528	-0,0924	+0,1352	-0,1443	+0,0497	+0,2017
1.76	+0,0510	-0,0897	+0,1324	-0,1433	+0,0536	+0,1922
1.77	+0,0492	-0,0871	+0,1295	-0,1422	+0,0574	+0,1828
1.78	+0,0475	-0,0845	+0,1267	-0,1410	+0,0609	+0,1735
1.79	+0,0458	-0,0820	+0,1239	-0,1397	+0,0643	+0,1643
1.80	+0,0442	-0,0795	+0,1211	-0,1384	+0,0675	+0,1553
1.81	+0,0426	-0,0772	+0,1183	-0,1370	+0,0705	+0,1464
1.82	+0,0411	-0,0748	+0,1156	-0,1356	+0,0734	+0,1377
1.83	+0,0396	-0,0725	+0,1129	-0,1341	+0,0760	+0,1291
1.84	+0,0382	-0,0703	+0,1102	-0,1325	+0,0785	+0,1206
1.85	+0,0368	-0,0681	+0,1076	-0,1310	+0,0809	+0,1123
1.86	+0,0355	-0,0660	+0,1050	-0,1293	+0,0830	+0,1042
1.87	+0,0342	-0,0639	+0,1024	-0,1276	+0,0850	+0,0963
1.88	+0,0329	-0,0619	+0,0999	-0,1259	+0,0869	+0,0885
1.89	+0,0317	-0,0599	+0,0974	-0,1242	+0,0886	+0,0809
1.90	+0,0305	-0,0580	+0,0949	-0,1224	+0,0901	+0,0735
1.91	+0,0294	-0,0561	+0,0925	-0,1206	+0,0915	+0,0663
1.92	+0,0283	-0,0543	+0,0901	-0,1187	+0,0928	+0,0593
1.93	+0,0272	-0,0525	+0,0878	-0,1168	+0,0939	+0,0525
1.94	+0,0262	-0,0508	+0,0854	-0,1150	+0,0949	+0,0459
1.95	+0,0252	-0,0491	+0,0832	-0,1131	+0,0957	+0,0395
1.96	+0,0242	-0,0475	+0,0809	-0,1111	+0,0964	+0,0332
1.97	+0,0233	-0,0459	+0,0787	-0,1092	+0,0971	+0,0272
1.98	+0,0224	-0,0443	+0,0765	-0,1073	+0,0975	+0,0214
1.99	+0,0215	-0,0428	+0,0744	-0,1053	+0,0979	+0,0158
2.00	+0,0207	-0,0413	+0,0723	-0,1033	+0,0982	+0,0103



$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
2,00	+0,0207	-0,0413	+0,0723	-0,1033	+0,0982	+0,0103
2,01	+0,0199	-0,0399	+0,0703	-0,1014	+0,0983	+0,0051
2,02	+0,0191	-0,0385	+0,0683	-0,0994	+0,0984	+0,0001
2,03	+0,0183	-0,0372	+0,0663	-0,0974	+0,0983	-0,0047
2,04	+0,0176	-0,0359	+0,0644	-0,0955	+0,0982	-0,0094
2,05	+0,0169	-0,0346	+0,0625	-0,0935	+0,0980	-0,0138
2,06	+0,0162	-0,0334	+0,0606	-0,0916	+0,0976	-0,0180
2,07	+0,0155	-0,0322	+0,0588	-0,0896	+0,0972	-0,0221
2,08	+0,0149	-0,0310	+0,0571	-0,0877	+0,0968	-0,0259
2,09	+0,0143	-0,0299	+0,0553	-0,0857	+0,0962	-0,0296
2,10	+0,0137	-0,0288	+0,0536	-0,0838	+0,0956	-0,0331
2,11	+0,0132	-0,0277	+0,0520	-0,0819	+0,0949	-0,0364
2,12	+0,0126	-0,0267	+0,0504	-0,0800	+0,0941	-0,0396
2,13	+0,0121	-0,0257	+0,0488	-0,0781	+0,0933	-0,0424
2,14	+0,0116	-0,0248	+0,0472	-0,0763	+0,0924	-0,0452
2,15	+0,0111	-0,0238	+0,0457	-0,0745	+0,0915	-0,0478
2,16	+0,0106	-0,0229	+0,0442	-0,0726	+0,0905	-0,0502
2,17	+0,0102	-0,0221	+0,0428	-0,0708	+0,0895	-0,0525
2,18	+0,0097	-0,0212	+0,0414	-0,0691	+0,0884	-0,0546
2,19	+0,0093	-0,0204	+0,0401	-0,0673	+0,0873	-0,0566
2,20	+0,0089	-0,0196	+0,0387	-0,0656	+0,0861	-0,0584
2,21	+0,0085	-0,0189	+0,0374	-0,0638	+0,0850	-0,0601
2,22	+0,0082	-0,0181	+0,0362	-0,0622	+0,0837	-0,0616
2,23	+0,0078	-0,0174	+0,0349	-0,0605	+0,0825	-0,0630
2,24	+0,0075	-0,0167	+0,0337	-0,0589	+0,0812	-0,0642
2,25	+0,0071	-0,0161	+0,0326	-0,0573	+0,0799	-0,0653
2,26	+0,0068	-0,0154	+0,0315	-0,0557	+0,0786	-0,0663
2,27	+0,0065	-0,0148	+0,0304	-0,0541	+0,0773	-0,0672
2,28	+0,0062	-0,0142	+0,0293	-0,0526	+0,0759	-0,0680
2,29	+0,0060	-0,0136	+0,0283	-0,0511	+0,0746	-0,0686
2,30	+0,0057	-0,0131	+0,0273	-0,0496	+0,0732	-0,0691
2,31	+0,0054	-0,0125	+0,0263	-0,0481	+0,0718	-0,0696
2,32	+0,0052	-0,0120	+0,0253	-0,0467	+0,0704	-0,0699
2,33	+0,0050	-0,0115	+0,0244	-0,0453	+0,0690	-0,0701
2,34	+0,0047	-0,0111	+0,0235	-0,0440	+0,0676	-0,0703
2,35	+0,0045	-0,0106	+0,0226	-0,0426	+0,0662	-0,0703
2,36	+0,0043	-0,0102	+0,0218	-0,0413	+0,0648	-0,0703
2,37	+0,0041	-0,0097	+0,0210	-0,0400	+0,0634	-0,0702
2,38	+0,0039	-0,0093	+0,0202	-0,0388	+0,0620	-0,0700
2,39	+0,0037	-0,0089	+0,0194	-0,0376	+0,0606	-0,0697
2,40	+0,0036	-0,0085	+0,0187	-0,0364	+0,0592	-0,0694
2,41	+0,0034	-0,0082	+0,0180	-0,0352	+0,0578	-0,0690
2,42	+0,0032	-0,0078	+0,0173	-0,0340	+0,0564	-0,0685
2,43	+0,0031	-0,0075	+0,0166	-0,0329	+0,0551	-0,0680
2,44	+0,0029	-0,0071	+0,0160	-0,0318	+0,0537	-0,0674
2,45	+0,0028	-0,0068	+0,0154	-0,0308	+0,0524	-0,0668
2,46	+0,0027	-0,0065	+0,0147	-0,0297	+0,0510	-0,0661
2,47	+0,0025	-0,0062	+0,0142	-0,0287	+0,0497	-0,0654
2,48	+0,0024	-0,0060	+0,0136	-0,0278	+0,0484	-0,0646
2,49	+0,0023	-0,0057	+0,0131	-0,0268	+0,0471	-0,0638
2,50	+0,0022	-0,0054	+0,0125	-0,0259	+0,0459	-0,0630

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x) : 2$	$\Phi_3(x) : 4$	$\Phi_4(x) : 8$	$\Phi_5(x) : 16$	$\Phi_6(x) : 32$
2.50	+0.0022	-0.0054	+0.0125	-0.0259	+0.0459	-0.0630
2.51	+0.0021	-0.0052	+0.0120	-0.0250	+0.0446	-0.0621
2.52	+0.0020	-0.0050	+0.0115	-0.0241	+0.0434	-0.0612
2.53	+0.0019	-0.0047	+0.0111	-0.0232	+0.0422	-0.0603
2.54	+0.0018	-0.0045	+0.0106	-0.0224	+0.0410	-0.0593
2.55	+0.0017	-0.0043	+0.0102	-0.0216	+0.0398	-0.0583
2.56	+0.0016	-0.0041	+0.0097	-0.0208	+0.0387	-0.0573
2.57	+0.0015	-0.0039	+0.0093	-0.0200	+0.0375	-0.0563
2.58	+0.0015	-0.0037	+0.0089	-0.0193	+0.0364	-0.0553
2.59	+0.0014	-0.0036	+0.0086	-0.0186	+0.0353	-0.0543
2.60	+0.0013	-0.0034	+0.0082	-0.0179	+0.0342	-0.0532
2.61	+0.0012	-0.0032	+0.0078	-0.0172	+0.0332	-0.0522
2.62	+0.0012	-0.0031	+0.0075	-0.0166	+0.0321	-0.0511
2.63	+0.0011	-0.0029	+0.0072	-0.0159	+0.0311	-0.0500
2.64	+0.0011	-0.0028	+0.0069	-0.0153	+0.0301	-0.0489
2.65	+0.0010	-0.0027	+0.0066	-0.0147	+0.0292	-0.0479
2.66	+0.0010	-0.0025	+0.0063	-0.0141	+0.0282	-0.0468
2.67	+0.0009	-0.0024	+0.0060	-0.0136	+0.0273	-0.0457
2.68	+0.0009	-0.0023	+0.0057	-0.0131	+0.0264	-0.0446
2.69	+0.0008	-0.0022	+0.0055	-0.0125	+0.0255	-0.0436
2.70	+0.0008	-0.0021	+0.0052	-0.0120	+0.0247	-0.0425
2.71	+0.0007	-0.0020	+0.0050	-0.0116	+0.0238	-0.0414
2.72	+0.0007	-0.0019	+0.0048	-0.0111	+0.0230	-0.0404
2.73	+0.0007	-0.0018	+0.0045	-0.0106	+0.0222	-0.0393
2.74	+0.0006	-0.0017	+0.0043	-0.0102	+0.0214	-0.0383
2.75	+0.0006	-0.0016	+0.0041	-0.0098	+0.0207	-0.0373
2.76	+0.0006	-0.0015	+0.0039	-0.0094	+0.0199	-0.0363
2.77	+0.0005	-0.0015	+0.0038	-0.0090	+0.0192	-0.0353
2.78	+0.0005	-0.0014	+0.0036	-0.0086	+0.0185	-0.0343
2.79	+0.0005	-0.0013	+0.0034	-0.0082	+0.0178	-0.0333
2.80	+0.0004	-0.0012	+0.0033	-0.0079	+0.0172	-0.0324
2.81	+0.0004	-0.0012	+0.0031	-0.0075	+0.0166	-0.0314
2.82	+0.0004	-0.0011	+0.0030	-0.0072	+0.0159	-0.0305
2.83	+0.0004	-0.0011	+0.0028	-0.0069	+0.0153	-0.0296
2.84	+0.0004	-0.0010	+0.0027	-0.0066	+0.0147	-0.0287
2.85	+0.0003	-0.0010	+0.0026	-0.0063	+0.0142	-0.0278
2.86	+0.0003	-0.0009	+0.0024	-0.0060	+0.0136	-0.0269
2.87	+0.0003	-0.0009	+0.0023	-0.0058	+0.0131	-0.0261
2.88	+0.0003	-0.0008	+0.0022	-0.0055	+0.0126	-0.0252
2.89	+0.0003	-0.0008	+0.0021	-0.0053	+0.0121	-0.0244
2.90	+0.0003	-0.0007	+0.0020	-0.0050	+0.0116	-0.0236
2.91	+0.0002	-0.0007	+0.0019	-0.0048	+0.0112	-0.0228
2.92	+0.0002	-0.0007	+0.0018	-0.0046	+0.0107	-0.0221
2.93	+0.0002	-0.0006	+0.0017	-0.0044	+0.0103	-0.0213
2.94	+0.0002	-0.0006	+0.0016	-0.0042	+0.0099	-0.0206
2.95	+0.0002	-0.0006	+0.0015	-0.0040	+0.0094	-0.0199
2.96	+0.0002	-0.0005	+0.0015	-0.0038	+0.0091	-0.0192
2.97	+0.0002	-0.0005	+0.0014	-0.0036	+0.0087	-0.0185
2.98	+0.0002	-0.0005	+0.0013	-0.0035	+0.0083	-0.0179
2.99	+0.0001	-0.0004	+0.0012	-0.0033	+0.0080	-0.0172
3.00	+0.0001	-0.0004	+0.0012	-0.0031	+0.0076	-0.0166

## X. Die Pearsonsche Funktion $F(r, \nu)$ .

### 1. Definition.

$$F(r, \nu) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu} \int_0^{\pi} \sin^r x \cdot e^{\nu x} dx = \frac{2^{-r} \pi \Gamma r}{\Gamma(\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\nu i) \Gamma(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\nu i)}$$

### 2. Entwicklung für $1 \leq r \leq 7$ :

$$F(2r, \nu) = 2 \mathfrak{S} \text{itt } \frac{1}{2} \pi \nu \cdot \frac{(2r)!}{\nu(\nu^2 + 2^2)(\nu^2 + 4^2) \cdots (\nu^2 + (2r)^2)}$$

$$F(2r + 1, \nu) = 2 \mathfrak{C} \text{os } \frac{1}{2} \pi \nu \cdot \frac{(2r + 1)!}{(\nu^2 + 1)(\nu^2 + 3^2) \cdots (\nu^2 + (2r + 1)^2)}$$

### 3. Semikonvergente Entwicklung für $r > 7$ :

$$F(r, \nu) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cos^{r+1} \varphi \cdot e^{\nu \varphi + 2\chi(r, \varphi)},$$

wo

$$\chi(r, \varphi) = \frac{\chi_1(\varphi)}{\frac{1}{2}r} - \frac{\chi_3(\varphi)}{(\frac{1}{2}r)^3} + \frac{\chi_5(\varphi)}{(\frac{1}{2}r)^5} - \dots,$$

$$\chi_{2m+1}(\varphi) = \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - \cos^{2m+1} \varphi \cdot \cos(2m+1)\varphi \right\}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

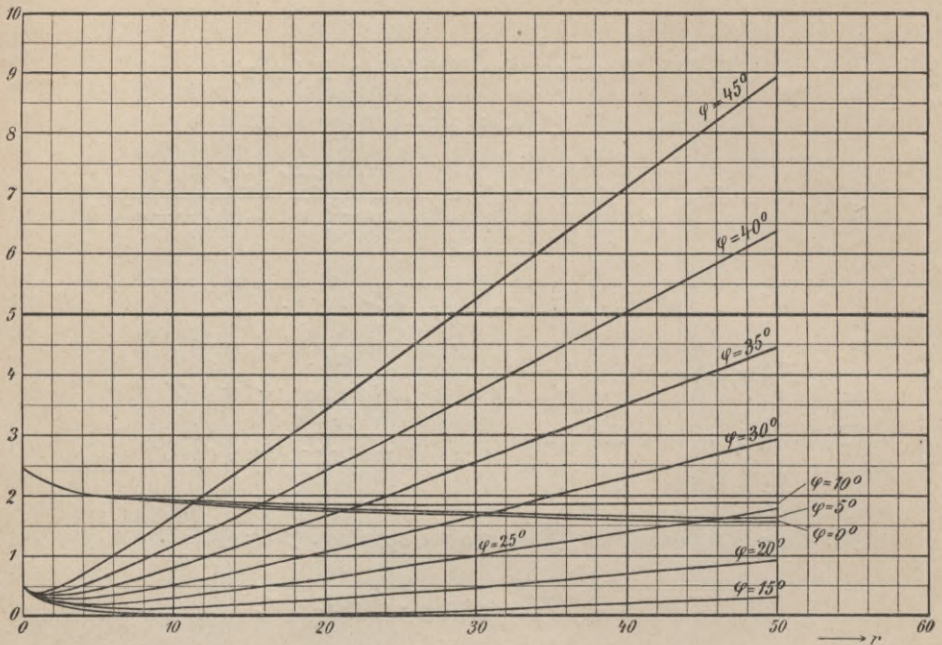
$$\nu = r \operatorname{tg} \varphi$$

gesetzt ist. Dabei bedeuten  $B_{2m+1}$  die Bernoullischen Zahlen:

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1} \pi^{2m}} \left( 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \dots \right).$$

4. Die Tafeln für  $\log F(r, \varphi)$  sind berechnet von Miß A. Lee, G. U. Yule, C. E. Cullis, K. Pearson, vgl. Report of the British Association for the advancement of Science. 1896, S. 70—82 und 1899, S. 65—120. Sie erstrecken sich nur auf den Fall  $\nu \leq r$ , weil diese Bedingung bei den in Frage kommenden Problemen der Statistik bisher stets erfüllt war. Wegen der Formeln vgl. Pearson, Contributions to the mathematical theory of evolution. London Phil. Trans. 186, part I, 1895 und Forsyth, Quarterly Journ. of Math. 1893.

Die Tafel der Bernoullischen Zahlen stammt aus Houël, Recueil etc.

Fig. 12. Der Logarithmus der Pearsonschen Funktion  $F(r, \varphi)$ .Tafel für  $\log F(r, \nu)$  bei  $\nu = r \operatorname{tg} \varphi$ .

$r$	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=5^\circ$	$\varphi=10^\circ$	$\varphi=15^\circ$	$\varphi=20^\circ$	$\varphi=25^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=35^\circ$	$\varphi=40^\circ$	$\varphi=45^\circ$
1	0,3010	0,3018	0,3042	0,3083	0,3144	0,3230	0,3345	0,3500	0,3710	0,3995
2	0,1961	0,1982	0,2048	0,2161	0,2329	0,2562	0,2876	0,3294	0,3852	0,4605
3	0,1249	0,1286	0,1398	0,1591	0,1877	0,2273	0,2804	0,3508	0,4443	0,5695
4	0,0712	0,0764	0,0924	0,1201	0,1609	0,2173	0,2928	0,3926	0,5247	0,7007
5	0,0280	0,0349	0,0558	0,0919	0,1451	0,2186	0,3167	0,4464	0,6174	0,8447
6	1,9920	0,0005	0,0263	0,0710	0,1367	0,2273	0,3484	0,5080	0,7181	0,9969
7	1,9611	1,9712	0,0021	0,0553	0,1336	0,2415	0,3854	0,5751	0,8245	1,1549
8	1,9340	1,9457	1,9816	0,0434	0,1344	0,2596	0,4266	0,6463	0,9350	1,3171
9	1,9099	1,9233	1,9642	0,0346	0,1382	0,2808	0,4708	0,7207	1,0488	1,4826
10	1,8883	1,9033	1,9492	0,0282	0,1445	0,3045	0,5176	0,7976	1,1651	1,6507
11	1,8685	1,8852	1,9362	0,0239	0,1528	0,3302	0,5663	0,8766	1,2835	1,8210
12	1,8505	1,8688	1,9248	0,0211	0,1628	0,3576	0,6168	0,9573	1,4037	1,9929
13	1,8338	1,8538	1,9148	0,0198	0,1742	0,3863	0,6687	1,0394	1,5253	2,1663
14	1,8183	1,8393	1,9060	0,0196	0,1867	0,4163	0,7218	1,1228	1,6481	2,3410
15	1,8038	1,8271	1,8982	0,0205	0,2004	0,4474	0,7760	1,2072	1,7720	2,5168
16	1,7902	1,8152	1,8913	0,0223	0,2149	0,4794	0,8311	1,2926	1,8969	2,6935
17	1,7775	1,8041	1,8853	0,0249	0,2302	0,5121	0,8870	1,3788	2,0225	2,8711
18	1,7654	1,7937	1,8799	0,0283	0,2463	0,5456	0,9437	1,4657	2,1490	3,0494
19	1,7540	1,7839	1,8752	0,0322	0,2630	0,5798	1,0010	1,5533	2,2760	3,2283
20	1,7431	1,7747	1,8711	0,0368	0,2802	0,6145	1,0588	1,6414	2,4037	3,4078

$r$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 5^\circ$	$\varphi = 10^\circ$	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 20^\circ$	$\varphi = 25^\circ$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 35^\circ$	$\varphi = 40^\circ$	$\varphi = 45^\circ$
21	1,7328	1,7661	1,8674	0,0418	0,2980	0,6497	1,1172	1,7301	2,5319	3,5879
22	1,7229	1,7579	1,8643	0,0473	0,3163	0,6855	1,1761	1,8193	2,6605	3,7685
23	1,7135	1,7501	1,8615	0,0533	0,3350	0,7216	1,2354	1,9088	2,7896	3,9495
24	1,7045	1,7427	1,8592	0,0596	0,3541	0,7582	1,2951	1,9988	2,9192	4,1309
25	1,6958	1,7357	1,8572	0,0663	0,3735	0,7951	1,3552	2,0892	3,0490	4,3126
26	1,6874	1,7290	1,8556	0,0734	0,3933	0,8323	1,4156	2,1799	3,1793	4,4948
27	1,6794	1,7226	1,8543	0,0808	0,4134	0,8699	1,4763	2,2709	3,3098	4,6772
28	1,6716	1,7165	1,8532	0,0884	0,4338	0,9077	1,5374	2,3622	3,4406	4,8599
29	1,6641	1,7107	1,8524	0,0963	0,4544	0,9459	1,5986	2,4538	3,5717	5,0429
30	1,6569	1,7051	1,8519	0,1044	0,4753	0,9842	1,6602	2,5457	3,7031	5,2262
31	1,6499	1,6997	1,8516	0,1128	0,4965	1,0228	1,7220	2,6377	3,8347	5,4097
32	1,6431	1,6946	1,8515	0,1215	0,5178	1,0617	1,7840	2,7300	3,9665	5,5934
33	1,6365	1,6897	1,8517	0,1303	0,5394	1,1007	1,8462	2,8225	4,0985	5,7773
34	1,6302	1,6850	1,8520	0,1393	0,5612	1,1399	1,9086	2,9152	4,2308	5,9615
35	1,6240	1,6804	1,8525	0,1485	0,5831	1,1794	1,9711	3,0081	4,3621	6,1458
36	1,6179	1,6761	1,8532	0,1579	0,6052	1,2189	2,0339	3,1012	4,4958	6,3303
37	1,6121	1,6718	1,8540	0,1674	0,6275	1,2587	2,0968	3,1944	4,6285	6,5149
38	1,6063	1,6678	1,8550	0,1771	0,6500	1,2986	2,1599	3,2878	4,7614	6,6997
39	1,6008	1,6639	1,8562	0,1869	0,6725	1,3387	2,2231	3,3813	4,8945	6,8847
40	1,5953	1,6601	1,8575	0,1969	0,6953	1,3788	2,2865	3,4750	5,0277	7,0698
41	1,5901	1,6565	1,8589	0,2070	0,7181	1,4192	2,3500	3,5688	5,1610	7,2550
42	1,5849	1,6530	1,8604	0,2172	0,7411	1,4596	2,4136	3,6627	5,2945	7,4404
43	1,5798	1,6496	1,8621	0,2276	0,7642	1,5002	2,4774	3,7567	5,4281	7,6259
44	1,5749	1,6463	1,8639	0,2381	0,7874	1,5409	2,5412	3,8509	5,5618	7,8115
45	1,5707	1,6431	1,8658	0,2486	0,8108	1,5817	2,6052	3,9452	5,6956	7,9972
46	1,5654	1,6401	1,8678	0,2593	0,8342	1,6226	2,6693	4,0396	5,8295	8,1830
47	1,5607	1,6371	1,8699	0,2701	0,8577	1,6636	2,7335	4,1340	5,9635	8,3690
48	1,5562	1,6343	0,8721	0,2810	0,8814	1,7047	2,7974	4,2286	6,0976	8,5550
49	1,5518	1,6315	1,8743	0,2920	0,9051	1,7459	2,8621	4,3233	6,2318	8,7411
50	1,5474	1,6288	1,8767	0,3030	0,9289	1,7872	2,9266	4,4181	6,3661	8,9273

Die Logarithmen der Bernoullischen Zahlen.

$B_1$	$\overline{1,2218}$	$B_{15}$	0,8508	$B_{31}$	10,1794	$B_{47}$	23,0823
$B_3$	$\overline{2,5229}$	$B_{17}$	1,7401	$B_{33}$	11,6331	$B_{49}$	24,8751
$B_5$	$\overline{2,3768}$	$B_{19}$	2,7236	$B_{35}$	13,1371	$B_{51}$	26,7023
$B_7$	$\overline{2,5229}$	$B_{21}$	3,7918	$B_{37}$	14,6887	$B_{53}$	28,5626
$B_9$	$\overline{2,8794}$	$B_{23}$	4,9374	$B_{39}$	16,2855	$B_{55}$	30,4548
$B_{11}$	$\overline{1,4033}$	$B_{25}$	6,1540	$B_{41}$	17,9252	$B_{57}$	32,3778
$B_{13}$	0,0669	$B_{27}$	7,4361	$B_{43}$	19,6057	$B_{59}$	34,3304
		$B_{29}$	8,7793	$B_{45}$	21,3253	$B_{61}$	36,3118

## XI. Die elliptischen Integrale und Funktionen.

### 1. Definition der elliptischen Integrale.

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$\int_0^x \frac{dx \sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = E(k, \varphi)$$

heißen elliptische Integrale erster und zweiter Gattung. Der Modul  $k$  ist in den Tafeln gleich  $\sin \alpha$  angenommen. Die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sind

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$E = \int_0^1 \frac{dx \sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

An Stelle von  $K$  findet sich auch die Bezeichnung  $F$ .

Die komplementären vollständigen elliptischen Integrale  $K'$  und  $E'$  gehen daraus hervor, wenn  $k$  durch den komplementären Modul  $\sqrt{1-k^2} = k'$  ersetzt wird. Dabei ist  $KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$ .

### 2. Definition der elliptischen Funktionen nach Jacobi.

$x = \sin \varphi = \text{sinus amplitude } u = \sin \text{ am } u \text{ (Jacobi)} = \text{sn } u \text{ (Gudermann)}$

$$= \text{sa } u \text{ (Thomae)} = u - \frac{1+k^2}{6} u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{120} u^5 - + \dots$$

$\sqrt{1-x^2} = \cos \varphi = \text{cosinus amplitude } u = \cos \text{ am } u = \text{cn } u = \text{ca } u$

$$= 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{1+4k^2}{24} u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{720} u^6 + \dots$$

$\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \text{delta amplitude } u = \text{dn am } u = \text{dn } u$

$$= \text{da } u = 1 - \frac{k^2u^2}{2} + \frac{k^2(4+k^2)}{24} u^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{720} u^6 + \dots$$

$$\text{sn}(-u) = -\text{sn } u, \quad \text{cn}(-u) = \text{cn } u, \quad \text{dn}(-u) = \text{dn } u.$$

### 3. Relationen unter den Jacobischen Funktionen.

$$\frac{d \text{sn } u}{du} = \text{cn } u \text{ dn } u, \quad \frac{d \text{cn } u}{du} = -\text{sn } u \text{ dn } u, \quad \frac{d \text{dn } u}{du} = -k^2 \text{sn } u \text{ cn } u$$

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad \text{dn}^2 u - k^2 \text{cn}^2 u = k'^2, \quad \text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u = 1.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.\end{aligned}$$

4. Tafel für  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$ .

$u$		0	K	2K
0	$\operatorname{sn} u$	0	1	0
	$\operatorname{cn} u$	1	0	-1
	$\operatorname{dn} u$	1	$k'$	1
$iK'$	$\operatorname{sn} u$	$\infty$	$1/k$	$\infty$
	$\operatorname{cn} u$	$\infty$	$ik'/k$	$\infty$
	$\operatorname{dn} u$	$\infty$	0	$\infty$
$2iK'$	$\operatorname{sn} u$	0	1	0
	$\operatorname{cn} u$	-1	0	1
	$\operatorname{dn} u$	-1	$-k'$	-1

Aus dieser Tafel ist  
z. B. abzulesen

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(K + iK') &= 1/k, \\ \operatorname{cn}(2iK') &= -1, \\ \operatorname{dn}(2K + 2iK') &= -1.\end{aligned}$$

## 5. Numerische Berechnung der elliptischen Integrale.

Ist der Modul  $k$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gegeben, dann berechnen sich die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung aus:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} K &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \\ \frac{2}{\pi} E &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots\end{aligned}$$

Sind  $k$  und  $\varphi$  beliebig gegeben, so ist der Gang der Rechnung:

$$\begin{aligned}l &= \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}, & q &= \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \dots \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= \operatorname{dn} u, & \frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}} &= \cot \lambda, \text{ angenähert } \cos 2v\pi = \frac{\operatorname{tg}(45 - \lambda)}{2q}, \\ & & F(k, \varphi) &= 2K \cdot v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(k, \varphi) &= F(k, \varphi) - k^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn} u \\ &= \frac{E u}{K} + \frac{2\pi}{K} \left[ \frac{q \sin 2v\pi}{1 - q^2} + \frac{q^3 \sin 4v\pi}{1 - q^4} + \frac{q^5 \sin 6v\pi}{1 - q^6} + \dots \right].\end{aligned}$$

## 6. Definition der Thetafunktionen.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta v}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2 v}{\vartheta v}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3 v}{\vartheta v},$$

wo

$$\vartheta v = 1 - 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi - 2q^9 \cos 6v\pi + \dots$$

$$\vartheta_1 v = 2q^{1/4} \sin v\pi - 2q^{9/4} \sin 3v\pi + 2q^{25/4} \sin 5v\pi - \dots$$

$$\vartheta_2 v = 2q^{1/4} \cos v\pi + 2q^{9/4} \cos 3v\pi + 2q^{25/4} \cos 5v\pi + \dots$$

$$\vartheta_3 v = 1 + 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi + 2q^9 \cos 6v\pi + \dots,$$

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}, \quad v = \frac{u}{2K}, \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

## 7. Eigenschaften der Thetafunktionen.

$$\vartheta(-v) = \vartheta v, \quad \vartheta_1(-v) = -\vartheta_1 v, \quad \vartheta_2(-v) = \vartheta_2 v, \quad \vartheta_3(-v) = \vartheta_3 v,$$

$$\vartheta(v+1) = \vartheta v, \quad \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1 v, \quad \vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2 v, \quad \vartheta_3(v+1) = \vartheta_3 v,$$

$$\vartheta(v+\tau) = -A\vartheta v, \quad \vartheta_1(v+\tau) = -A\vartheta_1 v, \quad \vartheta_2(v+\tau) = A\vartheta_2 v, \quad \vartheta_3(v+\tau) = A\vartheta_3 v,$$

$$\tau = i \frac{K'}{K}, \quad A = q^{-1} e^{-2v\pi i}.$$

$$\vartheta 0 = \vartheta_3 \left( \frac{1}{2} \right) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots$$

$$\vartheta_1 0 = \vartheta_2 \left( \frac{1}{2} \right) = 0, \quad \vartheta_1' 0 = \pi \vartheta 0 \vartheta_2 0 \vartheta_3 0$$

$$\vartheta_2 0 = \vartheta_1 \left( \frac{1}{2} \right) = 2q^{1/4} + 2q^{9/4} + 2q^{25/4} + \dots$$

$$\vartheta_3 0 = \vartheta \left( \frac{1}{2} \right) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

## 8. Die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen.

$$\frac{d \ln \vartheta v}{dv} = \frac{2\pi}{\vartheta v} (2q \sin 2v\pi - 4q^4 \sin 4v\pi + 6q^9 \sin 6v\pi - \dots)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_1 v}{dv} = \frac{2\pi}{\vartheta_1 v} (q^{1/4} \cos v\pi - 3q^{9/4} \cos 3v\pi + 5q^{25/4} \cos 5v\pi - \dots)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_2 v}{dv} = -\frac{2\pi}{\vartheta_2 v} (q^{1/4} \sin v\pi + 3q^{9/4} \sin 3v\pi + 5q^{25/4} \sin 5v\pi + \dots)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_3 v}{dv} = -\frac{2\pi}{\vartheta_3 v} (2q \sin 2v\pi + 4q^4 \sin 4v\pi + 6q^9 \sin 6v\pi + \dots)$$

$$\frac{d \ln \vartheta v}{dv} = -\frac{d \ln \vartheta_3(1/2-v)}{d(1/2-v)}, \quad \frac{d \ln \vartheta_1 v}{dv} = -\frac{d \ln \vartheta_2(1/2-v)}{d(1/2-v)}$$

$$\lim_{q=0} \frac{d \ln \vartheta_1 v}{dv} = \pi \cot v\pi, \quad \lim_{q=0} \frac{d \ln \vartheta_2 v}{dv} = -\pi \operatorname{tg} v\pi, \quad \lim_{q=0} \frac{d \ln \vartheta v}{dv} = \lim_{q=0} \frac{d \ln \vartheta_3 v}{dv} = 0.$$



### 9. Definition der elliptischen Integrale und Funktionen nach Weierstraß.

$$u = \int_s^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3),$$

wo die Nullstellen  $e_1, e_2, e_3$  der Funktion  $S$  mit ihren Koeffizienten  $g_2, g_3$  in folgender Weise zusammenhängen:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$$

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \omega' = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

$$s = \wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_3 u^4}{28} + \frac{g_2^2 u^6}{1200} + \frac{3g_2 g_3 u^8}{6160} + \dots$$

$$\sqrt{S} = \wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \frac{g_3 u^3}{7} + \frac{g_2^2 u^5}{200} + \frac{3g_2 g_3 u^7}{770} + \dots$$

$$e_1 = \wp \omega, \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp \omega'.$$

$2\omega, 2\omega'$  heißen die Perioden,  $g_2, g_3$  die Invarianten der doppeltperiodischen Funktion  $s = \wp u$ .

**10. Darstellung der Jacobischen elliptischen Funktionen durch die Weierstraßsche Funktion.** Bei reellen  $e$  sei  $e_1 > e_2 > e_3$ .

$$\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}}$$

$$\operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}}; \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{i\pi \frac{\omega'}{\omega}}$$

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}, \quad \omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega' = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

### 11. Definition der Sigma- und der Zetafunktion.

$$\wp u = -\frac{d\xi u}{du} = -\frac{d^2 \ln \sigma u}{du^2}$$

$$\xi u = -\int \wp u \, du = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_3 u^5}{140} - \frac{g_2^2 u^7}{8400}$$

$$\sigma u = e^{\int \xi u \, du} = u - \frac{g_2 u^5}{240} - \frac{g_3 u^7}{840} - \frac{g_2^2 u^9}{161280}$$

### 12. Die spezielle Funktion $\wp(u; 0, 1)$ .

Aus

$$\wp(u; g_2, g_3) = m^2 \wp\left(mu; \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6}\right)$$

folgt für  $g_2 = 0$  und  $m^6 = g_3$ :

$$\wp(u; 0, g_3) = \sqrt[3]{g_3} \wp(u \sqrt[3]{g_3}; 0, 1).$$

Und die Gleichung  $\wp'^3(u; 0, 1) = 4\wp^3(u; 0, 1) - 1$  zeigt, daß für  $g_3 = 1$   $e_1, e_2, e_3$  gleich den dritten Wurzeln von  $\frac{1}{4}$  sind, und zwar  $e_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{4}}, e_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, e_3 = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{4}}$ ; wo  $1, \varepsilon, \varepsilon^2$  die kubischen Einheitswurzeln bedeuten. Und aus  $e_2 = \wp \omega_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$  folgt die halbe reelle Periode  $\omega_2 = 1,52995$ . Es ist dies der sog. äquianharmonische Fall der elliptischen Funktionen.

### 13. Integralformeln für die Jacobischen Funktionen.

$$\int \operatorname{sn} u \, du = -\frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)$$

$$\int \operatorname{cn} u \, du = \frac{i}{k} \ln(\operatorname{dn} u - ik \operatorname{sn} u)$$

$$\int \operatorname{dn} u \, du = i \ln(\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\int \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, du = -\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\int \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{sn} u$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\int \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \, du = -\operatorname{cn} u$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du = -\frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \, du = \ln \operatorname{sn} u$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \, du = -\frac{1}{k^2} \ln \operatorname{dn} u$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} \, du = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

### 14. Integralformeln für die Weierstraßschen Funktionen.

$$\int \wp u \cdot du = -\xi u, \quad \int \wp^2 u \cdot du = \frac{1}{6} \wp' u + \frac{1}{12} g_2 u$$

$$\int \wp^3 u \cdot du = \frac{1}{120} \wp''' u - \frac{3}{20} g_2 \xi u + \frac{1}{10} g_3 u$$

$$\wp' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} = 2u \xi v + \ln \sigma(u - v) - \ln \sigma(u + v)$$

$$\frac{1}{2} (\wp' v)^2 \int \frac{du}{(\wp u - \wp v)^2} + \frac{1}{2} \wp'' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} + u \wp' v = -\frac{1}{2} \xi(u - v) - \frac{1}{2} \xi(u + v)$$

$$\int \frac{\alpha \wp u + \beta}{\gamma \wp u + \delta} du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\gamma^2 \wp' v} [\ln \sigma(u + v) - \ln \sigma(u - v) - 2u \xi v].$$

## 15. Differentialgleichungen, die auf elliptische Funktionen führen.

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad x = \operatorname{sn} u$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1-x^2)(1-x^2+k^2x^2), \quad x = \operatorname{cn} u$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1-x^2)(x^2-1+k^2), \quad x = \operatorname{dn} u$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1+x^2)(1+x^2-k^2x^2), \quad x = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad x = \wp u$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = x^2(x-a)^2, \quad x = \frac{a}{2} + \frac{27}{8} \wp' \left( \frac{u}{2}; 9, g_3 \right), \quad g_3 = -\frac{64}{729} a^2$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = (x^3 - 3ax^2 + 3x)^2, \quad x = \frac{2}{a-3\wp'(u; 0, g_3)}, \quad g_3 = \frac{4-3a^2}{27}$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = \frac{128}{3} (x+a)^2(x+b)^3, \quad x = 6\wp^2(u; g_2, 0) - b, \quad g_2 = -\frac{2}{3}(a-b).$$

## 16. Ausartungen der elliptischen Funktionen.

1)  $k = 0, k' = 1:$

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{6e_1}}, \quad \omega' = \infty i$$

$$\operatorname{sn} u = \sin u,$$

$$\operatorname{cn} u = \cos u,$$

$$\operatorname{dn} u = 1,$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty,$$

$$\lim_{k=0} \frac{e^{-\pi \frac{K'}{K}}}{k^2} = \frac{1}{16},$$

$$\wp u = -\frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2\omega} \right)^2 + \frac{\left( \frac{\pi}{2\omega} \right)^2}{\sin^2 \left( \frac{u\pi}{2\omega} \right)}$$

$$\xi u = \frac{1}{3} \frac{u\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{u\pi}{2\omega}$$

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{u\pi}{2\omega} \cdot e^{\frac{1}{6} \left( \frac{u\pi}{2\omega} \right)^2}$$

$$q = 0, \vartheta x = 1, \vartheta_1 x = 0, \vartheta_2 x = 0, \vartheta_3 x = 1$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2}, \quad g_2 = 3e_1^2, \quad g_3 = e_1^3.$$

2)  $k = 1, k' = 0:$

$$\omega = \infty, \quad \omega' = \frac{\pi i}{2\sqrt{3e_1}}$$

$$\wp = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^u - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Amp} x, \quad \wp u = -2e_1 + 3e_1 \operatorname{I}g^{-2}(u\sqrt{3e_1})$$

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \operatorname{I}g u, \quad \xi u = -e_1 u + \sqrt{3e_1} \operatorname{I}g^{-1}(u\sqrt{3e_1})$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{\operatorname{Co}j u}, \quad \sigma u = \frac{1}{\sqrt{3e_1}} \operatorname{S}in(u\sqrt{3e_1}) \cdot e^{-\frac{e_1 u^2}{2}}$$

$$\begin{array}{ll}
 K = \infty, & K' = \frac{\pi}{2}, & q = 1 \\
 & -\pi \frac{K}{K'} & e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2}, \\
 \lim_{k=1} \frac{e}{1-k^2} = \frac{1}{16}, & & g_2 = 3e_3^2, \quad g_3 = e_3^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3) \quad e_1 = e_2 = e_3 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \quad \omega = \infty, \quad \omega' = \infty \\
 \wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \xi u = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u.
 \end{array}$$

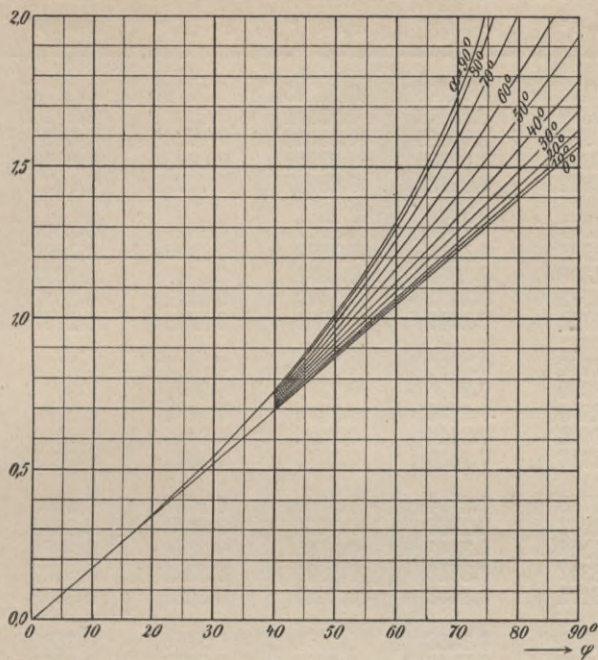
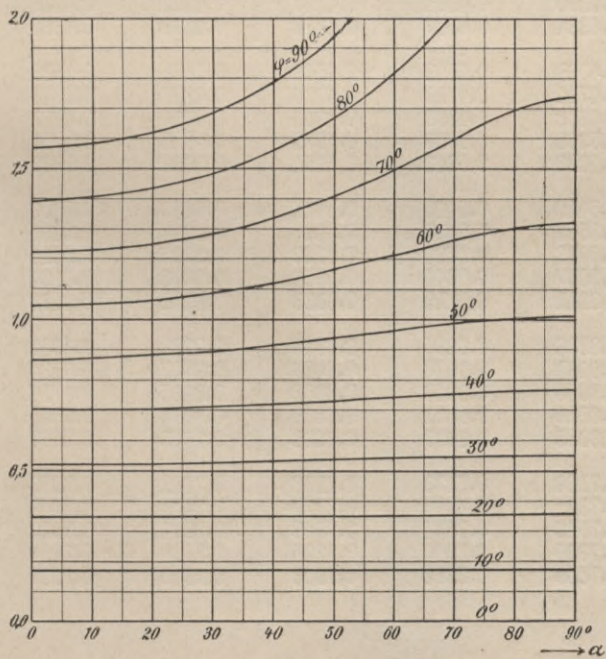
17. Die Tafeln für  $F(k, \varphi)$  und  $E(k, \varphi)$  sowie für  $K$  und  $E$  sind genommen aus Legendre, Exercices de calcul intégral t. III, Paris 1816, p. 345—416 unter Hinzuziehung von L. Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1898, Gauthier-Villars. Dabei ist  $k = \sin \alpha$  gesetzt. Noch genauere Tafeln für  $K$  und  $E$  sind neuerdings von G. Witt für astronomische Zwecke berechnet worden (Astron. Nachr. **165**, 33—50, 1904).

Für  $\log q$  bei gegebenem  $k = \sin \alpha$  haben Jacobi im Journal für Math. **26** (1843) (Ges. W. **1**, 343) und J. Bertrand in seinem Traité de calcul intégral, Paris 1870, Gauthier-Villars, Tafeln mitgeteilt.

Die Tafeln für die Thetafunktionen und ihre logarithmischen Ableitungen stammen aus Houël, Recueil, S. [59], unter Beseitigung eines Versehens in den Werten für die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen.

Die Tafeln für  $\wp'(u; 0, 1)$ ,  $\wp(u; 0, 1)$ ,  $\xi(u; 0, 1)$ ,  $\sigma(u; 0, 1)$ , wo also  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 1$  ist, sind berechnet von A. G. Hadcock und mitgeteilt von A. G. Greenhill in der Arbeit: „On the trajectory of a projectile for the cubic law of resistance.“ Proc. Royal Artill. Institut. **17**, 1—36, 1889. Dabei ist  $u = \frac{r\omega_2}{180}$  und als Intervall der 360. Teil der reellen Periode gewählt.

Wegen der Formeln vergleiche: Legendre, Traité des fonctions elliptiques etc. Paris 1825—1828. — J. Bertrand, Traité de calcul intégral, Paris 1870, Gauthier-Villars. — H. Burkhardt, Elliptische Funktionen. Leipzig 1906, Veit u. Co. — A. G. Greenhill, The applications of elliptic functions. London 1892, Macmillan. — G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques. Paris 1886, Gauthier-Villars. — L. Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1898, Gauthier-Villars. — E. Pascal, Teoria delle funzioni ellittiche. Mailand 1896, U. Hoepli. — Weierstraß-Schwarz, Formelsammlung für die elliptischen Funktionen. Göttingen 1883, Univ.-Druck.

Fig. 13. Das elliptische Integral erster Gattung  $F(\alpha, \varphi)$ .Fig. 14. Das elliptische Integral erster Gattung  $F(\alpha, \varphi)$ .

$\varphi$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2°	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3°	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05236	0,05237
4°	0,06981	0,06981	0,06982	0,06982	0,06982	0,06983
5°	0,08727	0,08727	0,08727	0,08728	0,08729	0,08729
6°	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1048	0,1048
7°	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222	0,1223
8°	0,1396	0,1396	0,1397	0,1397	0,1397	0,1397
9°	0,1571	0,1571	0,1571	0,1572	0,1572	0,1572
10°	0,1745	0,1746	0,1746	0,1746	0,1747	0,1748
11°	0,1920	0,1920	0,1921	0,1921	0,1922	0,1923
12°	0,2095	0,2095	0,2095	0,2096	0,2097	0,2098
13°	0,2269	0,2270	0,2270	0,2271	0,2272	0,2274
14°	0,2444	0,2444	0,2445	0,2446	0,2448	0,2450
15°	0,2618	0,2619	0,2620	0,2622	0,2623	0,2625
16°	0,2793	0,2794	0,2795	0,2797	0,2799	0,2802
17°	0,2967	0,2968	0,2970	0,2972	0,2975	0,2978
18°	0,3142	0,3143	0,3145	0,3148	0,3151	0,3154
19°	0,3317	0,3318	0,3320	0,3323	0,3327	0,3331
20°	0,3491	0,3493	0,3495	0,3499	0,3503	0,3508
21°	0,3666	0,3668	0,3671	0,3675	0,3680	0,3686
22°	0,3840	0,3843	0,3846	0,3851	0,3856	0,3863
23°	0,4015	0,4017	0,4021	0,4027	0,4033	0,4041
24°	0,4190	0,4192	0,4197	0,4203	0,4210	0,4219
25°	0,4364	0,4367	0,4372	0,4379	0,4388	0,4397
26°	0,4539	0,4542	0,4548	0,4556	0,4565	0,4576
27°	0,4714	0,4717	0,4724	0,4732	0,4743	0,4755
28°	0,4888	0,4893	0,4900	0,4909	0,4921	0,4935
29°	0,5063	0,5068	0,5075	0,5086	0,5099	0,5114
30°	0,5238	0,5243	0,5251	0,5263	0,5277	0,5294
31°	0,5412	0,5418	0,5427	0,5440	0,5456	0,5475
32°	0,5587	0,5593	0,5604	0,5618	0,5635	0,5656
33°	0,5762	0,5769	0,5780	0,5795	0,5814	0,5837
34°	0,5937	0,5944	0,5956	0,5973	0,5994	0,6018
35°	0,6111	0,6119	0,6133	0,6151	0,6173	0,6200
36°	0,6286	0,6295	0,6309	0,6329	0,6353	0,6383
37°	0,6461	0,6470	0,6486	0,6507	0,6534	0,6566
38°	0,6636	0,6646	0,6662	0,6685	0,6714	0,6749
39°	0,6810	0,6821	0,6839	0,6864	0,6895	0,6932
40°	0,6985	0,6997	0,7016	0,7043	0,7077	0,7117
41°	0,7160	0,7173	0,7193	0,7222	0,7258	0,7301
42°	0,7335	0,7348	0,7370	0,7401	0,7440	0,7486
43°	0,7510	0,7524	0,7548	0,7581	0,7622	0,7671
44°	0,7685	0,7700	0,7725	0,7760	0,7804	0,7857
45°	0,7859	0,7876	0,7903	0,7940	0,7987	0,8044

$\varphi$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
46°	0,8034	0,8052	0,8080	0,8120	0,8170	0,8231
47°	0,8209	0,8228	0,8258	0,8300	0,8354	0,8418
48°	0,8384	0,8404	0,8436	0,8480	0,8537	0,8606
49°	0,8559	0,8580	0,8614	0,8661	0,8721	0,8794
50°	0,8734	0,8756	0,8792	0,8842	0,8905	0,8983
51°	0,8909	0,8932	0,8970	0,9023	0,9090	0,9172
52°	0,9084	0,9108	0,9148	0,9204	0,9275	0,9361
53°	0,9259	0,9284	0,9326	0,9385	0,9460	0,9551
54°	0,9434	0,9460	0,9505	0,9567	0,9646	0,9742
55°	0,9609	0,9637	0,9683	0,9748	0,9832	0,9933
56°	0,9784	0,9813	0,9862	0,9930	1,0018	1,0125
57°	0,9959	0,9989	1,0041	1,0112	1,0204	1,0317
58°	1,0134	1,0166	1,0219	1,0295	1,0391	1,0509
59°	1,0309	1,0342	1,0398	1,0477	1,0578	1,0702
60°	1,0484	1,0519	1,0577	1,0660	1,0766	1,0896
61°	1,0659	1,0695	1,0757	1,0843	1,0953	1,1089
62°	1,0834	1,0872	1,0936	1,1026	1,1141	1,1284
63°	1,1009	1,1049	1,1115	1,1209	1,1330	1,1478
64°	1,1184	1,1225	1,1295	1,1392	1,1518	1,1674
65°	1,1359	1,1402	1,1474	1,1576	1,1707	1,1869
66°	1,1534	1,1579	1,1654	1,1759	1,1896	1,2065
67°	1,1709	1,1756	1,1833	1,1943	1,2085	1,2262
68°	1,1884	1,1932	1,2013	1,2127	1,2275	1,2458
69°	1,2059	1,2109	1,2193	1,2311	1,2465	1,2656
70°	1,2235	1,2286	1,2373	1,2495	1,2655	1,2853
71°	1,2410	1,2463	1,2553	1,2680	1,2845	1,3051
72°	1,2585	1,2640	1,2733	1,2864	1,3036	1,3249
73°	1,2760	1,2817	1,2913	1,3049	1,3226	1,3448
74°	1,2935	1,2994	1,3093	1,3234	1,3417	1,3647
75°	1,3110	1,3171	1,3273	1,3418	1,3608	1,3846
76°	1,3285	1,3348	1,3454	1,3603	1,3800	1,4045
77°	1,3461	1,3525	1,3634	1,3788	1,3991	1,4245
78°	1,3636	1,3702	1,3814	1,3974	1,4183	1,4445
79°	1,3811	1,3879	1,3995	1,4159	1,4374	1,4645
80°	1,3986	1,4057	1,4175	1,4344	1,4566	1,4846
81°	1,4161	1,4234	1,4356	1,4530	1,4758	1,5046
82°	1,4336	1,4411	1,4536	1,4715	1,4950	1,5247
83°	1,4512	1,4588	1,4717	1,4901	1,5143	1,5448
84°	1,4687	1,4765	1,4897	1,5086	1,5335	1,5649
85°	1,4862	1,4942	1,5078	1,5272	1,5527	1,5850
86°	1,5037	1,5120	1,5259	1,5457	1,5720	1,6052
87°	1,5212	1,5297	1,5439	1,5643	1,5912	1,6253
88°	1,5388	1,5474	1,5620	1,5829	1,6105	1,6455
89°	1,5563	1,5651	1,5801	1,6015	1,6297	1,6656
90°	1,5738	1,5828	1,5981	1,6200	1,6490	1,6858

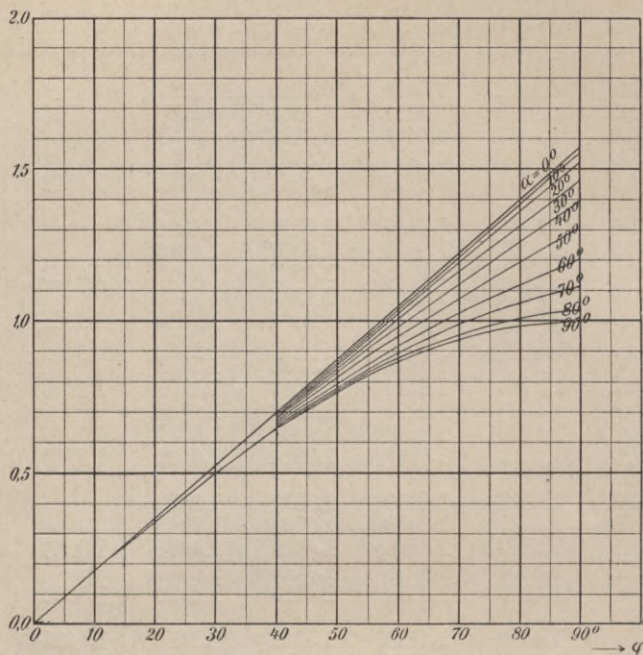
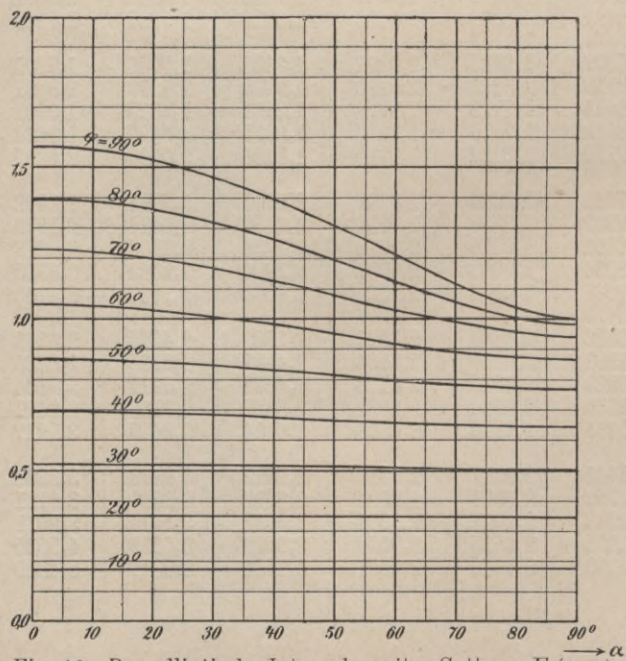
$\varphi$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2°	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3°	0,05237	0,05237	0,05237	0,05237	0,05238	0,05238
4°	0,06983	0,06984	0,06984	0,06985	0,06985	0,06986
5°	0,08730	0,08731	0,08732	0,08733	0,08734	0,08745
6°	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1049	0,1049
7°	0,1223	0,1223	0,1223	0,1224	0,1224	0,1224
8°	0,1398	0,1398	0,1399	0,1399	0,1399	0,1400
9°	0,1573	0,1574	0,1574	0,1575	0,1575	0,1576
10°	0,1748	0,1749	0,1750	0,1751	0,1751	0,1752
11°	0,1924	0,1925	0,1926	0,1927	0,1928	0,1929
12°	0,2099	0,2101	0,2102	0,2103	0,2105	0,2106
13°	0,2275	0,2277	0,2279	0,2280	0,2282	0,2284
14°	0,2451	0,2454	0,2456	0,2458	0,2460	0,2462
15°	0,2628	0,2630	0,2633	0,2636	0,2638	0,2641
16°	0,2804	0,2808	0,2811	0,2814	0,2817	0,2820
17°	0,2981	0,2985	0,2989	0,2993	0,2997	0,3000
18°	0,3159	0,3163	0,3168	0,3172	0,3177	0,3181
19°	0,3336	0,3341	0,3347	0,3352	0,3357	0,3362
20°	0,3514	0,3520	0,3526	0,3533	0,3539	0,3545
21°	0,3692	0,3699	0,3706	0,3714	0,3721	0,3728
22°	0,3871	0,3879	0,3887	0,3896	0,3904	0,3912
23°	0,4049	0,4059	0,4068	0,4078	0,4088	0,4097
24°	0,4229	0,4239	0,4250	0,4261	0,4272	0,4283
25°	0,4408	0,4420	0,4433	0,4446	0,4458	0,4470
26°	0,4589	0,4602	0,4616	0,4630	0,4645	0,4658
27°	0,4769	0,4784	0,4800	0,4816	0,4832	0,4847
28°	0,4950	0,4967	0,4985	0,5003	0,5021	0,5038
29°	0,5132	0,5150	0,5170	0,5190	0,5210	0,5229
30°	0,5313	0,5334	0,5356	0,5379	0,5401	0,5422
31°	0,5496	0,5519	0,5543	0,5568	0,5593	0,5617
32°	0,5679	0,5704	0,5731	0,5759	0,5786	0,5812
33°	0,5862	0,5890	0,5920	0,5950	0,5980	0,6010
34°	0,6046	0,6077	0,6109	0,6143	0,6176	0,6208
35°	0,6231	0,6264	0,6300	0,6336	0,6373	0,6409
36°	0,6416	0,6452	0,6491	0,6531	0,6572	0,6610
37°	0,6602	0,6641	0,6684	0,6727	0,6771	0,6814
38°	0,6788	0,6831	0,6877	0,6925	0,6973	0,7020
39°	0,6975	0,7021	0,7071	0,7123	0,7176	0,7227
40°	0,7162	0,7213	0,7267	0,7323	0,7380	0,7436
41°	0,7350	0,7405	0,7463	0,7524	0,7586	0,7647
42°	0,7539	0,7598	0,7661	0,7727	0,7794	0,7860
43°	0,7728	0,7791	0,7859	0,7931	0,8004	0,8075
44°	0,7918	0,7986	0,8059	0,8136	0,8215	0,8293
45°	0,8109	0,8182	0,8260	0,8343	0,8428	0,8512



$\varphi$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
46°	0,8300	0,8378	0,8462	0,8552	0,8643	0,8734
47°	0,8492	0,8575	0,8666	0,8761	0,8860	0,8959
48°	0,8685	0,8773	0,8870	0,8973	0,9079	0,9185
49°	0,8878	0,8973	0,9076	0,9186	0,9300	0,9415
50°	0,9072	0,9173	0,9283	0,9401	0,9523	0,9647
51°	0,9267	0,9374	0,9491	0,9617	0,9748	0,9881
52°	0,9462	0,9576	0,9701	0,9835	0,9976	1,0119
53°	0,9658	0,9778	0,9912	1,0055	1,0206	1,0359
54°	0,9855	0,9982	1,0124	1,0277	1,0437	1,0602
55°	1,0052	1,0187	1,0337	1,0500	1,0672	1,0848
56°	1,0250	1,0393	1,0552	1,0725	1,0908	1,1097
57°	1,0449	1,0600	1,0768	1,0952	1,1147	1,1349
58°	1,0648	1,0807	1,0985	1,1180	1,1389	1,1605
59°	1,0848	1,1016	1,1204	1,1411	1,1633	1,1864
60°	1,1049	1,1226	1,1424	1,1643	1,1879	1,2125
61°	1,1250	1,1436	1,1646	1,1877	1,2128	1,2392
62°	1,1453	1,1648	1,1869	1,2113	1,2379	1,2661
63°	1,1655	1,1860	1,2093	1,2351	1,2633	1,2933
64°	1,1859	1,2074	1,2318	1,2591	1,2890	1,3209
65°	1,2063	1,2288	1,2545	1,2833	1,3149	1,3489
66°	1,2267	1,2503	1,2773	1,3076	1,3411	1,3773
67°	1,2472	1,2719	1,3002	1,3321	1,3675	1,4060
68°	1,2678	1,2936	1,3233	1,3568	1,3942	1,4351
69°	1,2885	1,3154	1,3464	1,3817	1,4212	1,4646
70°	1,3092	1,3372	1,3697	1,4068	1,4484	1,4944
71°	1,3299	1,3592	1,3931	1,4320	1,4759	1,5246
72°	1,3507	1,3812	1,4167	1,4574	1,5036	1,5552
73°	1,3716	1,4033	1,4403	1,4830	1,5316	1,5862
74°	1,3924	1,4254	1,4640	1,5087	1,5597	1,6175
75°	1,4134	1,4477	1,4879	1,5346	1,5882	1,6492
76°	1,4344	1,4700	1,5118	1,5606	1,6168	1,6812
77°	1,4554	1,4923	1,5359	1,5867	1,6457	1,7136
78°	1,4765	1,5147	1,5600	1,6130	1,6748	1,7463
79°	1,4976	1,5372	1,5842	1,6394	1,7040	1,7792
80°	1,5187	1,5597	1,6085	1,6660	1,7335	1,8125
81°	1,5399	1,5823	1,6328	1,6926	1,7631	1,8461
82°	1,5611	1,6049	1,6573	1,7194	1,7929	1,8799
83°	1,5823	1,6276	1,6817	1,7462	1,8228	1,9140
84°	1,6035	1,6502	1,7063	1,7731	1,8528	1,9482
85°	1,6248	1,6730	1,7308	1,8001	1,8830	1,9826
86°	1,6461	1,6957	1,7554	1,8271	1,9132	2,0172
87°	1,6673	1,7184	1,7801	1,8542	1,9435	2,0519
88°	1,6886	1,7412	1,8047	1,8813	1,9739	2,0867
89°	1,7099	1,7640	1,8294	1,9084	2,0043	2,1216
90°	1,7313	1,7868	1,8541	1,9356	2,0347	2,1565

$\varphi$	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 89^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2°	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
3°	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238	0,05238
4°	0,06986	0,06986	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
5°	0,08736	0,08736	0,08737	0,08737	0,08738	0,08738	0,08738
6°	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049		0,1049
7°	0,1224	0,1224	0,1225	0,1225	0,1225		0,1225
8°	0,1400	0,1400	0,1401	0,1401	0,1401		0,1401
9°	0,1576	0,1577	0,1577	0,1577	0,1577		0,1577
10°	0,1753	0,1753	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754
11°	0,1930	0,1930	0,1931	0,1931	0,1932		0,1932
12°	0,2107	0,2108	0,2109	0,2109	0,2110		0,2110
13°	0,2285	0,2286	0,2287	0,2288	0,2289		0,2289
14°	0,2464	0,2465	0,2466	0,2467	0,2468		0,2468
15°	0,2643	0,2645	0,2646	0,2648	0,2648	0,2648	0,2648
16°	0,2823	0,2825	0,2827	0,2828	0,2829		0,2830
17°	0,3003	0,3006	0,3009	0,3010	0,3011		0,3012
18°	0,3185	0,3188	0,3191	0,3193	0,3194		0,3195
19°	0,3367	0,3371	0,3374	0,3377	0,3378		0,3379
20°	0,3550	0,3555	0,3559	0,3562	0,3563	0,3564	0,3564
21°	0,3734	0,3740	0,3744	0,3747	0,3749		0,3750
22°	0,3919	0,3926	0,3931	0,3935	0,3937		0,3938
23°	0,4105	0,4113	0,4119	0,4123	0,4126		0,4127
24°	0,4293	0,4301	0,4308	0,4313	0,4316		0,4317
25°	0,4481	0,4490	0,4498	0,4504	0,4508	0,4509	0,4509
26°	0,4670	0,4681	0,4690	0,4697	0,4701		0,4702
27°	0,4861	0,4874	0,4884	0,4891	0,4896	0,4897	0,4897
28°	0,5053	0,5067	0,5079	0,5087	0,5092		0,5094
29°	0,5247	0,5262	0,5275	0,5285	0,5291		0,5293
30°	0,5442	0,5459	0,5474	0,5484	0,5491	0,5493	0,5493
31°	0,5639	0,5658	0,5674	0,5686	0,5693		0,5696
32°	0,5837	0,5858	0,5876	0,5889	0,5898	0,5900	0,5900
33°	0,6037	0,6060	0,6080	0,6095	0,6104		0,6107
34°	0,6238	0,6265	0,6287	0,6303	0,6313		0,6317
35°	0,6442	0,6471	0,6495	0,6513	0,6525	0,6528	0,6528
36°	0,6647	0,6679	0,6706	0,6726	0,6739		0,6743
37°	0,6854	0,6890	0,6913	0,6941	0,6955	0,6960	0,6960
38°	0,7063	0,7102	0,7135	0,7159	0,7175		0,7180
39°	0,7275	0,7318	0,7353	0,7380	0,7397		0,7403
40°	0,7488	0,7535	0,7575	0,7604	0,7623	0,7629	0,7629
41°	0,7704	0,7756	0,7799	0,7831	0,7852		0,7859
42°	0,7922	0,7979	0,8026	0,8062	0,8084	0,8091	0,8092
43°	0,8143	0,8205	0,8256	0,8295	0,8320		0,8328
44°	0,8367	0,8433	0,8490	0,8533	0,8560		0,8569
45°	0,8593	0,8665	0,8727	0,8774	0,8804	0,8813	0,8814

$\varphi$	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 89^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
46°	0,8821	0,8901	0,8968	0,9019	0,9052		0,9063
47°	0,9053	0,9139	0,9212	0,9269	0,9304	0,9316	0,9316
48°	0,9288	0,9381	0,9461	0,9523	0,9561		0,9575
49°	0,9525	0,9627	0,9714	0,9781	0,9824		0,9838
50°	0,9766	0,9878	0,9971	1,0044	1,0091	1,0106	1,0107
51°	1,0010	1,0130	1,0233	1,0313	1,0364		1,0381
52°	1,0258	1,0387	1,0500	1,0587	1,0643		1,0662
53°	1,0509	1,0649	1,0771	1,0867	1,0927	1,0948	1,0948
54°	1,0764	1,0916	1,1048	1,1152	1,1219		1,1242
55°	1,1022	1,1187	1,1331	1,1444	1,1517	1,1541	1,1542
56°	1,1285	1,1462	1,1619	1,1743	1,1823		1,1851
57°	1,1551	1,1743	1,1914	1,2049	1,2136	1,2166	1,2167
58°	1,1822	1,2030	1,2215	1,2362	1,2458		1,2492
59°	1,2097	1,2321	1,2522	1,2684	1,2789		1,2826
60°	1,2376	1,2619	1,2837	1,3014	1,3129	1,3168	1,3170
61°	1,2660	1,2922	1,3159	1,3352	1,3480		1,3524
62°	1,2949	1,3231	1,3490	1,3701	1,3841		1,3890
63°	1,3243	1,3547	1,3828	1,4059	1,4214	1,4266	1,4268
64°	1,3541	1,3870	1,4175	1,4429	1,4599		1,4659
65°	1,3844	1,4199	1,4532	1,4810	1,4998	1,5062	1,5065
66°	1,4153	1,4536	1,4898	1,5203	1,5411	1,5482	1,5486
67°	1,4467	1,4880	1,5274	1,5610	1,5840	1,5920	1,5923
68°	1,4786	1,5232	1,5661	1,6030	1,6287	1,6376	1,6379
69°	1,5111	1,5591	1,6059	1,6466	1,6752	1,6851	1,6856
70°	1,5441	1,5959	1,6468	1,6918	1,7237	1,7349	1,7354
71°	1,5777	1,6335	1,6891	1,7388	1,7745	1,7872	1,7877
72°	1,6118	1,6720	1,7326	1,7876	1,8277	1,8421	1,8427
73°	1,6465	1,7113	1,7774	1,8384	1,8837	1,9001	1,9008
74°	1,6818	1,7516	1,8237	1,8915	1,9427	1,9614	1,9623
75°	1,7176	1,7927	1,8715	1,9468	2,0050	2,0267	2,0276
76°	1,7540	1,8347	1,9207	2,0047	2,0711	2,0962	2,0973
77°	1,7909	1,8777	1,9716	2,0653	2,1414	2,1708	2,1721
78°	1,8284	1,9215	2,0240	2,1288	2,2164	2,2513	2,2528
79°	1,8664	1,9663	2,0781	2,1954	2,2969	2,3385	2,3404
80°	1,9048	2,0119	2,1339	2,2653	2,3837	2,4340	2,4363
81°	1,9438	2,0584	2,1913	2,3387	2,4775	2,5392	2,5421
82°	1,9831	2,1057	2,2504	2,4157	2,5795	2,6566	2,6603
83°	2,0229	2,1537	2,3110	2,4965	2,6911	2,7894	2,7942
84°	2,0630	2,2024	2,3731	2,5811	2,8136	2,9421	2,9487
85°	2,1035	2,2518	2,4366	2,6694	2,9487	3,1217	3,1313
86°	2,1442	2,3017	2,5013	2,7612	3,0978	3,3396	3,3547
87°	2,1852	2,3520	2,5670	2,8561	3,2620	3,6161	3,6425
88°	2,2263	2,4027	2,6336	2,9537	3,4412	3,9911	4,0481
89°	2,2675	2,4535	2,7007	3,0530	3,6328	4,5535	4,7414
90°	2,3088	2,5046	2,7681	3,1534	3,8317	5,4349	$\infty$

Fig. 15. Das elliptische Integral zweiter Gattung  $E(\alpha, \varphi)$ .Fig. 16. Das elliptische Integral zweiter Gattung  $E(\alpha, \varphi)$ .

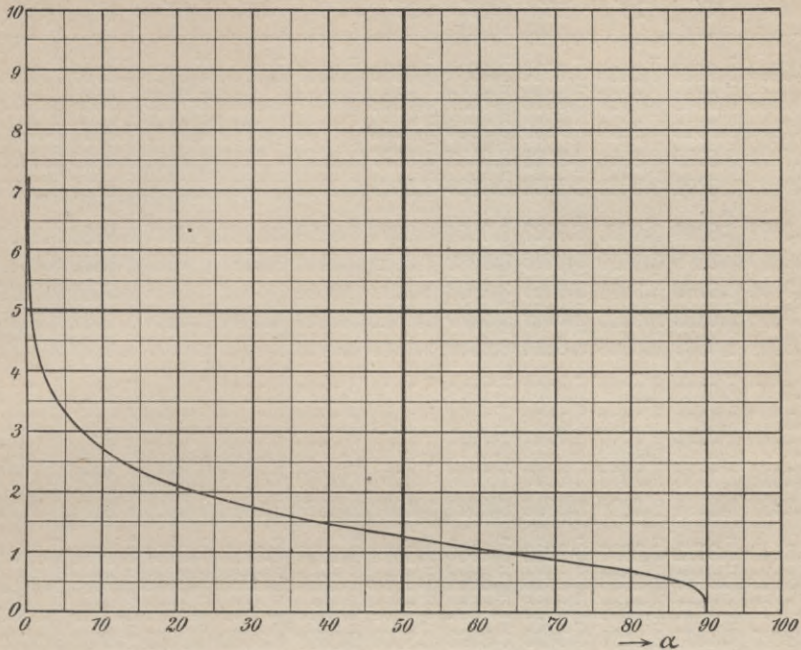
$\varphi$	$\alpha$									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
1°	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
3°	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524
4°	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698
5°	0,0873	0,0873	0,0873	0,0873	0,0873	0,0873	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872
6°	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1046	0,1046
7°	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222	0,1221	0,1221	0,1221	0,1221	0,1221	0,1220
8°	0,1396	0,1396	0,1396	0,1396	0,1396	0,1396	0,1395	0,1395	0,1394	0,1394
9°	0,1571	0,1571	0,1571	0,1570	0,1570	0,1570	0,1569	0,1569	0,1568	0,1568
10°	0,1745	0,1745	0,1745	0,1745	0,1744	0,1744	0,1743	0,1743	0,1742	0,1741
11°	0,1920	0,1920	0,1920	0,1919	0,1919	0,1918	0,1917	0,1916	0,1915	0,1914
12°	0,2094	0,2094	0,2094	0,2093	0,2093	0,2092	0,2091	0,2089	0,2088	0,2087
13°	0,2269	0,2269	0,2268	0,2268	0,2267	0,2266	0,2264	0,2263	0,2261	0,2259
14°	0,2444	0,2443	0,2443	0,2442	0,2441	0,2439	0,2437	0,2436	0,2434	0,2431
15°	0,2618	0,2618	0,2617	0,2616	0,2615	0,2613	0,2611	0,2608	0,2606	0,2603
16°	0,2793	0,2792	0,2791	0,2788	0,2786	0,2790	0,2784	0,2781	0,2778	0,2775
17°	0,2967	0,2967	0,2966	0,2964	0,2962	0,2959	0,2956	0,2953	0,2949	0,2946
18°	0,3142	0,3141	0,3140	0,3138	0,3136	0,3133	0,3129	0,3125	0,3121	0,3116
19°	0,3316	0,3316	0,3314	0,3312	0,3309	0,3306	0,3301	0,3297	0,3291	0,3286
20°	0,3491	0,3490	0,3489	0,3486	0,3483	0,3478	0,3473	0,3468	0,3462	0,3456
21°	0,3665	0,3665	0,3663	0,3660	0,3656	0,3651	0,3645	0,3639	0,3632	0,3625
22°	0,3840	0,3839	0,3837	0,3834	0,3829	0,3823	0,3817	0,3809	0,3802	0,3793
23°	0,4014	0,4014	0,4011	0,4007	0,4002	0,3996	0,3988	0,3980	0,3971	0,3961
24°	0,4189	0,4188	0,4185	0,4181	0,4175	0,4168	0,4159	0,4150	0,4139	0,4129
25°	0,4363	0,4362	0,4359	0,4354	0,4348	0,4339	0,4330	0,4319	0,4308	0,4296
26°	0,4538	0,4537	0,4533	0,4528	0,4520	0,4511	0,4500	0,4488	0,4475	0,4462
27°	0,4712	0,4711	0,4707	0,4701	0,4693	0,4682	0,4670	0,4657	0,4643	0,4628
28°	0,4887	0,4886	0,4881	0,4875	0,4865	0,4854	0,4840	0,4825	0,4809	0,4793
29°	0,5062	0,5060	0,5055	0,5048	0,5037	0,5025	0,5010	0,4993	0,4975	0,4957
30°	0,5236	0,5234	0,5229	0,5221	0,5209	0,5195	0,5179	0,5161	0,5141	0,5121
31°	0,5411	0,5409	0,5403	0,5394	0,5381	0,5366	0,5348	0,5328	0,5306	0,5283
32°	0,5585	0,5583	0,5577	0,5567	0,5553	0,5536	0,5516	0,5494	0,5470	0,5446
33°	0,5760	0,5757	0,5751	0,5740	0,5725	0,5706	0,5684	0,5660	0,5634	0,5607
34°	0,5934	0,5932	0,5924	0,5912	0,5896	0,5876	0,5852	0,5826	0,5797	0,5768
35°	0,6109	0,6106	0,6098	0,6085	0,6067	0,6045	0,6019	0,5991	0,5960	0,5928
36°	0,6283	0,6280	0,6272	0,6258	0,6238	0,6214	0,6186	0,6155	0,6122	0,6087
37°	0,6458	0,6455	0,6445	0,6430	0,6409	0,6383	0,6353	0,6319	0,6283	0,6245
38°	0,6632	0,6629	0,6619	0,6602	0,6580	0,6552	0,6519	0,6483	0,6444	0,6403
39°	0,6807	0,6803	0,6792	0,6775	0,6750	0,6720	0,6685	0,6646	0,6604	0,6559
40°	0,6981	0,6977	0,6966	0,6947	0,6921	0,6888	0,6851	0,6808	0,6763	0,6715
41°	0,7156	0,7152	0,7139	0,7119	0,7091	0,7056	0,7016	0,6970	0,6921	0,6870
42°	0,7330	0,7326	0,7313	0,7291	0,7261	0,7224	0,7180	0,7132	0,7079	0,7025
43°	0,7505	0,7500	0,7486	0,7463	0,7431	0,7391	0,7345	0,7293	0,7237	0,7178
44°	0,7679	0,7674	0,7659	0,7634	0,7600	0,7558	0,7509	0,7453	0,7393	0,7330
45°	0,7854	0,7849	0,7832	0,7806	0,7770	0,7725	0,7672	0,7613	0,7549	0,7482

$\varphi$	$\alpha$									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
46°	0.8029	0.8023	0.8006	0.7978	0.7939	0.7891	0.7835	0.7772	0.7704	0.7633
47°	0.8203	0.8197	0.8179	0.8149	0.8108	0.8057	0.7998	0.7931	0.7858	0.7782
48°	0.8378	0.8371	0.8352	0.8320	0.8277	0.8223	0.8160	0.8089	0.8012	0.7931
49°	0.8552	0.8545	0.8525	0.8491	0.8446	0.8389	0.8322	0.8247	0.8165	0.8079
50°	0.8727	0.8719	0.8698	0.8663	0.8614	0.8554	0.8483	0.8404	0.8317	0.8227
51°	0.8901	0.8894	0.8871	0.8834	0.8783	0.8719	0.8644	0.8560	0.8469	0.8373
52°	0.9076	0.9068	0.9044	0.9005	0.8951	0.8884	0.8805	0.8716	0.8620	0.8518
53°	0.9250	0.9242	0.9217	0.9175	0.9119	0.9048	0.8965	0.8872	0.8770	0.8663
54°	0.9425	0.9416	0.9390	0.9345	0.9287	0.9212	0.9125	0.9026	0.8919	0.8806
55°	0.9599	0.9590	0.9562	0.9517	0.9454	0.9376	0.9284	0.9181	0.9068	0.8949
56°	0.9774	0.9764	0.9735	0.9687	0.9622	0.9540	0.9443	0.9335	0.9216	0.9091
57°	0.9948	0.9938	0.9908	0.9858	0.9789	0.9703	0.9602	0.9488	0.9363	0.9232
58°	1.0123	1.0112	1.0080	1.0028	0.9956	0.9866	0.9760	0.9641	0.9510	0.9372
59°	1.0297	1.0286	1.0253	1.0198	1.0123	1.0029	0.9918	0.9793	0.9656	0.9511
60°	1.0472	1.0460	1.0426	1.0368	1.0290	1.0192	1.0076	0.9945	0.9801	0.9650
61°	1.0647	1.0634	1.0598	1.0538	1.0456	1.0354	1.0233	1.0096	0.9946	0.9787
62°	1.0821	1.0808	1.0771	1.0708	1.0623	1.0516	1.0390	1.0247	1.0090	0.9924
63°	1.0996	1.0982	1.0943	1.0878	1.0789	1.0678	1.0546	1.0397	1.0233	1.0060
64°	1.1170	1.1156	1.1115	1.1048	1.0955	1.0839	1.0702	1.0547	1.0376	1.0195
65°	1.1345	1.1330	1.1288	1.1218	1.1121	1.1001	1.0858	1.0696	1.0518	1.0329
66°	1.1519	1.1504	1.1460	1.1387	1.1287	1.1162	1.1013	1.0845	1.0660	1.0463
67°	1.1694	1.1678	1.1632	1.1557	1.1453	1.1323	1.1168	1.0993	1.0801	1.0596
68°	1.1868	1.1852	1.1805	1.1726	1.1619	1.1483	1.1323	1.1141	1.0941	1.0728
69°	1.2043	1.2026	1.1977	1.1896	1.1784	1.1644	1.1478	1.1289	1.1081	1.0859
70°	1.2217	1.2200	1.2149	1.2065	1.1949	1.1804	1.1632	1.1436	1.1221	1.0990
71°	1.2392	1.2374	1.2321	1.2234	1.2115	1.1964	1.1786	1.1583	1.1359	1.1120
72°	1.2566	1.2548	1.2494	1.2403	1.2280	1.2124	1.1939	1.1729	1.1498	1.1250
73°	1.2741	1.2722	1.2666	1.2573	1.2445	1.2284	1.2093	1.1875	1.1636	1.1379
74°	1.2915	1.2896	1.2838	1.2742	1.2609	1.2443	1.2246	1.2021	1.1773	1.1507
75°	1.3090	1.3070	1.3010	1.2911	1.2774	1.2603	1.2399	1.2167	1.1910	1.1635
76°	1.3265	1.3244	1.3182	1.3080	1.2939	1.2762	1.2552	1.2312	1.2047	1.1762
77°	1.3439	1.3418	1.3354	1.3249	1.3104	1.2921	1.2704	1.2457	1.2183	1.1889
78°	1.3614	1.3592	1.3526	1.3417	1.3268	1.3080	1.2857	1.2601	1.2319	1.2015
79°	1.3788	1.3765	1.3698	1.3586	1.3433	1.3239	1.3009	1.2746	1.2454	1.2141
80°	1.3963	1.3939	1.3870	1.3755	1.3597	1.3398	1.3161	1.2890	1.2590	1.2266
81°	1.4137	1.4113	1.4042	1.3924	1.3761	1.3556	1.3312	1.3034	1.2725	1.2391
82°	1.4312	1.4287	1.4214	1.4093	1.3925	1.3715	1.3464	1.3177	1.2859	1.2516
83°	1.4486	1.4461	1.4386	1.4261	1.4090	1.3873	1.3616	1.3321	1.2994	1.2640
84°	1.4661	1.4635	1.4558	1.4430	1.4254	1.4032	1.3767	1.3464	1.3128	1.2765
85°	1.4835	1.4809	1.4729	1.4599	1.4418	1.4190	1.3919	1.3608	1.3262	1.2889
86°	1.5010	1.4983	1.4901	1.4767	1.4582	1.4348	1.4070	1.3751	1.3396	1.3012
87°	1.5184	1.5157	1.5073	1.4936	1.4746	1.4507	1.4221	1.3894	1.3530	1.3136
88°	1.5359	1.5330	1.5245	1.5104	1.4910	1.4665	1.4372	1.4037	1.3664	1.3260
89°	1.5533	1.5504	1.5417	1.5273	1.5074	1.4823	1.4524	1.4180	1.3798	1.3383
90°	1.5708	1.5678	1.5589	1.5442	1.5238	1.4981	1.4675	1.4323	1.3931	1.3506

$\varphi$	$\alpha$								
	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
1°	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
3°	0,0524	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523
4°	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698	0,0698
5°	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872	0,0872
6°	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1045	0,1045	0,1045	0,1045
7°	0,1220	0,1220	0,1220	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219	0,1219
8°	0,1394	0,1393	0,1393	0,1393	0,1392	0,1392	0,1392	0,1392	0,1392
9°	0,1567	0,1567	0,1566	0,1566	0,1565	0,1565	0,1565	0,1564	0,1564
10°	0,1740	0,1739	0,1739	0,1738	0,1738	0,1737	0,1737	0,1737	0,1737
11°	0,1913	0,1912	0,1911	0,1910	0,1910	0,1909	0,1908	0,1908	0,1908
12°	0,2086	0,2084	0,2083	0,2082	0,2081	0,2080	0,2080	0,2079	0,2079
13°	0,2258	0,2256	0,2254	0,2253	0,2252	0,2251	0,2250	0,2250	0,2250
14°	0,2429	0,2427	0,2425	0,2424	0,2422	0,2421	0,2420	0,2419	0,2419
15°	0,2601	0,2598	0,2596	0,2594	0,2592	0,2590	0,2589	0,2588	0,2588
16°	0,2771	0,2768	0,2766	0,2763	0,2761	0,2759	0,2758	0,2757	0,2756
17°	0,2942	0,2938	0,2935	0,2932	0,2929	0,2927	0,2925	0,2924	0,2924
18°	0,3112	0,3107	0,3103	0,3100	0,3096	0,3094	0,3092	0,3091	0,3090
19°	0,3281	0,3276	0,3271	0,3267	0,3263	0,3260	0,3258	0,3256	0,3256
20°	0,3450	0,3444	0,3438	0,3433	0,3429	0,3425	0,3422	0,3421	0,3420
21°	0,3618	0,3611	0,3604	0,3599	0,3593	0,3589	0,3586	0,3584	0,3584
22°	0,3785	0,3777	0,3770	0,3763	0,3757	0,3753	0,3749	0,3747	0,3746
23°	0,3952	0,3943	0,3935	0,3927	0,3920	0,3915	0,3911	0,3908	0,3907
24°	0,4118	0,4108	0,4098	0,4090	0,4082	0,4076	0,4071	0,4068	0,4067
25°	0,4284	0,4272	0,4261	0,4251	0,4243	0,4236	0,4230	0,4227	0,4226
26°	0,4449	0,4436	0,4423	0,4412	0,4402	0,4394	0,4389	0,4385	0,4384
27°	0,4613	0,4598	0,4584	0,4572	0,4561	0,4552	0,4545	0,4541	0,4540
28°	0,4776	0,4760	0,4744	0,4730	0,4718	0,4708	0,4701	0,4696	0,4695
29°	0,4938	0,4920	0,4903	0,4888	0,4874	0,4863	0,4855	0,4850	0,4848
30°	0,5100	0,5080	0,5061	0,5044	0,5029	0,5017	0,5007	0,5002	0,5000
31°	0,5261	0,5239	0,5218	0,5199	0,5182	0,5169	0,5159	0,5153	0,5150
32°	0,5421	0,5396	0,5373	0,5352	0,5334	0,5319	0,5308	0,5302	0,5299
33°	0,5580	0,5553	0,5528	0,5505	0,5485	0,5468	0,5456	0,5449	0,5446
34°	0,5738	0,5709	0,5681	0,5656	0,5634	0,5616	0,5603	0,5595	0,5592
35°	0,5895	0,5863	0,5833	0,5806	0,5782	0,5762	0,5748	0,5739	0,5736
36°	0,6052	0,6017	0,5984	0,5954	0,5928	0,5907	0,5891	0,5881	0,5878
37°	0,6207	0,6169	0,6134	0,6101	0,6073	0,6050	0,6032	0,6022	0,6018
38°	0,6361	0,6321	0,6282	0,6247	0,6216	0,6191	0,6172	0,6161	0,6157
39°	0,6515	0,6471	0,6429	0,6391	0,6357	0,6330	0,6310	0,6297	0,6293
40°	0,6667	0,6620	0,6575	0,6533	0,6497	0,6468	0,6446	0,6432	0,6428
41°	0,6819	0,6768	0,6719	0,6675	0,6636	0,6604	0,6580	0,6566	0,6561
42°	0,6969	0,6914	0,6862	0,6814	0,6772	0,6738	0,6712	0,6697	0,6691
43°	0,7118	0,7059	0,7003	0,6952	0,6907	0,6870	0,6843	0,6826	0,6820
44°	0,7267	0,7204	0,7144	0,7088	0,7040	0,7001	0,6971	0,6953	0,6947
45°	0,7414	0,7347	0,7282	0,7223	0,7172	0,7129	0,7097	0,7078	0,7071

$\varphi$	$\alpha$								
	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
46°	0,7560	0,7488	0,7420	0,7356	0,7301	0,7255	0,7222	0,7201	0,7193
47°	0,7705	0,7629	0,7555	0,7488	0,7429	0,7380	0,7344	0,7321	0,7314
48°	0,7849	0,7768	0,7690	0,7618	0,7555	0,7503	0,7464	0,7440	0,7431
49°	0,7992	0,7905	0,7823	0,7746	0,7679	0,7623	0,7582	0,7556	0,7547
50°	0,8134	0,8042	0,7954	0,7872	0,7801	0,7741	0,7697	0,7670	0,7660
51°	0,8275	0,8177	0,8084	0,7997	0,7921	0,7858	0,7811	0,7781	0,7772
52°	0,8414	0,8311	0,8212	0,8120	0,8039	0,7972	0,7922	0,7891	0,7880
53°	0,8553	0,8444	0,8339	0,8242	0,8155	0,8084	0,8031	0,7998	0,7986
54°	0,8690	0,8575	0,8464	0,8361	0,8270	0,8194	0,8137	0,8102	0,8090
55°	0,8827	0,8705	0,8588	0,8479	0,8382	0,8302	0,8242	0,8204	0,8192
56°	0,8962	0,8834	0,8710	0,8595	0,8493	0,8408	0,8344	0,8304	0,8290
57°	0,9097	0,8961	0,8831	0,8709	0,8601	0,8511	0,8443	0,8401	0,8387
58°	0,9230	0,9088	0,8950	0,8822	0,8708	0,8612	0,8540	0,8496	0,8481
59°	0,9362	0,9213	0,9068	0,8933	0,8812	0,8711	0,8635	0,8588	0,8572
60°	0,9493	0,9336	0,9184	0,9042	0,8914	0,8808	0,8728	0,8677	0,8660
61°	0,9623	0,9459	0,9299	0,9149	0,9015	0,8903	0,8818	0,8764	0,8746
62°	0,9752	0,9580	0,9412	0,9254	0,9113	0,8995	0,8905	0,8849	0,8830
63°	0,9880	0,9700	0,9524	0,9358	0,9210	0,9085	0,8990	0,8930	0,8910
64°	1,0072	0,9818	0,9634	0,9460	0,9304	0,9173	0,9027	0,9009	0,8988
65°	1,0133	0,9936	0,9743	0,9561	0,9397	0,9258	0,9152	0,9086	0,9063
66°	1,0259	1,0052	0,9850	0,9659	0,9487	0,9341	0,9230	0,9160	0,9136
67°	1,0383	1,0167	0,9956	0,9756	0,9576	0,9422	0,9305	0,9231	0,9205
68°	1,0506	1,0282	1,0061	0,9852	0,9662	0,9501	0,9377	0,9299	0,9272
69°	1,0628	1,0395	1,0164	0,9946	0,9747	0,9578	0,9447	0,9364	0,9336
70°	1,0750	1,0506	1,0266	1,0038	0,9830	0,9652	0,9514	0,9427	0,9397
71°	1,0871	1,0617	1,0367	1,0129	0,9911	0,9724	0,9579	0,9487	0,9455
72°	1,0991	1,0727	1,0467	1,0218	0,9990	0,9794	0,9642	0,9544	0,9511
73°	1,1110	1,0836	1,0565	1,0306	1,0067	0,9862	0,9702	0,9599	0,9563
74°	1,1228	1,0944	1,0662	1,0392	1,0143	0,9928	0,9759	0,9650	0,9613
75°	1,1346	1,1051	1,0759	1,0477	1,0217	0,9992	0,9814	0,9699	0,9659
76°	1,1463	1,1158	1,0854	1,0561	1,0290	1,0053	0,9867	0,9745	0,9703
77°	1,1580	1,1263	1,0948	1,0643	1,0361	1,0113	0,9917	0,9789	0,9744
78°	1,1695	1,1368	1,1041	1,0725	1,0430	1,0171	0,9965	0,9829	0,9782
79°	1,1811	1,1472	1,1133	1,0805	1,0498	1,0228	1,0011	0,9867	0,9816
80°	1,1926	1,1576	1,1225	1,0884	1,0565	1,0282	1,0054	0,9902	0,9848
81°	1,2040	1,1678	1,1316	1,0962	1,0630	1,0335	1,0096	0,9935	0,9877
82°	1,2154	1,1781	1,1406	1,1040	1,0695	1,0387	1,0135	0,9965	0,9903
83°	1,2267	1,1883	1,1495	1,1116	1,0758	1,0437	1,0173	0,9992	0,9926
84°	1,2381	1,1984	1,1584	1,1192	1,0821	1,0486	1,0209	1,0017	0,9945
85°	1,2493	1,2085	1,1673	1,1267	1,0883	1,0534	1,0244	1,0039	0,9962
86°	1,2606	1,2186	1,1761	1,1342	1,0944	1,0581	1,0277	1,0060	0,9926
87°	1,2719	1,2286	1,1848	1,1417	1,1004	1,0628	1,0309	1,0078	0,9986
88°	1,2831	1,2387	1,1936	1,1491	1,1064	1,0674	1,0340	1,0095	0,9994
89°	1,2943	1,2487	1,2023	1,1565	1,1124	1,0719	1,0371	1,0111	0,9999
90°	1,3055	1,2587	1,2111	1,1638	1,1184	1,0764	1,0401	1,0127	1,0000



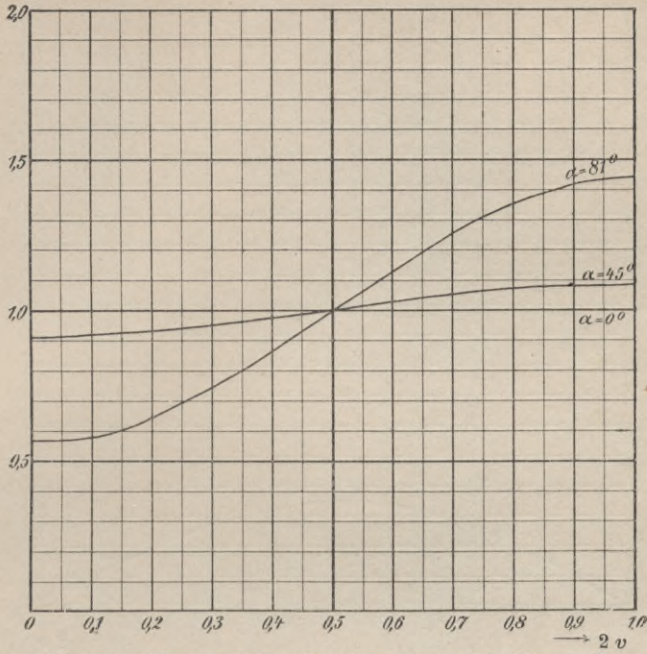
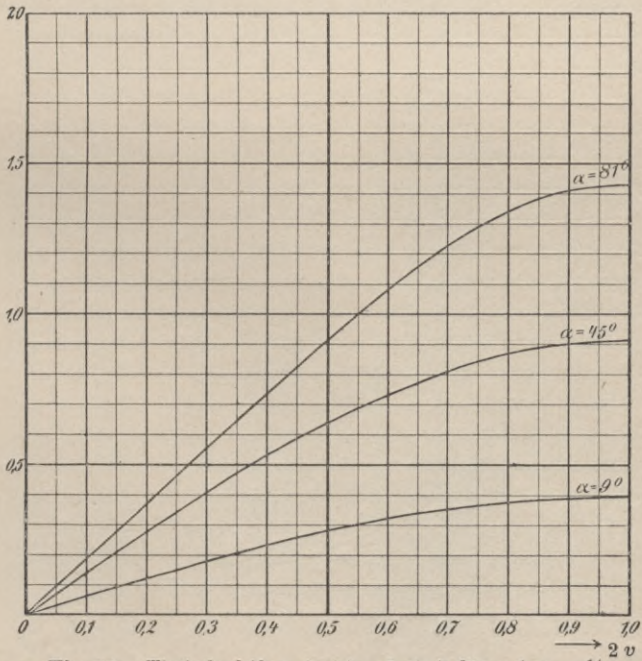
Fig. 17. Die Funktion  $-\log q = \log \frac{1}{q}$ .

$\alpha$	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
0°	$-\infty$	$\bar{7}.1213$	$\bar{7}.7233$	$\bar{6}.0755$	$\bar{6}.3254$	$\bar{6}.5192$	$\bar{6}.6776$	$\bar{6}.8115$	$\bar{6}.9275$	$\bar{5}.0298$	$\bar{5}.1213$	$\bar{5}.2041$
1°	$\bar{5}.2797$	$\bar{5}.3492$	$\bar{5}.4136$	$\bar{5}.4735$	$\bar{5}.5296$	$\bar{5}.5822$	$\bar{5}.6819$	$\bar{5}.6788$	$\bar{5}.7234$	$\bar{5}.7658$	$\bar{5}.8062$	$\bar{5}.8448$
2°	$\bar{5}.8818$	$\bar{5}.9173$	$\bar{5}.9513$	$\bar{5}.9841$	$\bar{4}.0157$	$\bar{4}.0462$	$\bar{4}.0757$	$\bar{4}.1041$	$\bar{4}.1317$	$\bar{4}.1585$	$\bar{4}.1844$	$\bar{5}.2096$
3°	$\bar{4}.2341$	$\bar{4}.2579$	$\bar{4}.2811$	$\bar{4}.3036$	$\bar{4}.3256$	$\bar{4}.3471$	$\bar{4}.3680$	$\bar{4}.3885$	$\bar{4}.4085$	$\bar{4}.4280$	$\bar{4}.4471$	$\bar{5}.4658$
4°	$\bar{4}.4841$	$\bar{4}.5020$	$\bar{4}.5196$	$\bar{4}.5368$	$\bar{4}.5537$	$\bar{4}.5703$	$\bar{4}.5865$	$\bar{4}.6025$	$\bar{4}.6181$	$\bar{4}.6335$	$\bar{4}.6486$	$\bar{5}.6635$
5°	$\bar{4}.6781$	$\bar{4}.6925$	$\bar{4}.7066$	$\bar{4}.7206$	$\bar{4}.7343$	$\bar{4}.7478$	$\bar{4}.7610$	$\bar{4}.7741$	$\bar{4}.7870$	$\bar{4}.7997$	$\bar{4}.8122$	$\bar{5}.8246$
6°	$\bar{4}.8367$	$\bar{4}.8487$	$\bar{4}.8606$	$\bar{4}.8723$	$\bar{4}.8838$	$\bar{4}.8952$	$\bar{4}.9064$	$\bar{4}.9175$	$\bar{4}.9284$	$\bar{4}.9393$	$\bar{4}.9499$	$\bar{4}.9605$
7°	$\bar{4}.9709$	$\bar{4}.9812$	$\bar{4}.9914$	$\bar{3}.0015$	$\bar{3}.0114$	$\bar{3}.0213$	$\bar{3}.0310$	$\bar{3}.0406$	$\bar{3}.0502$	$\bar{3}.0596$	$\bar{3}.0689$	$\bar{3}.0781$
8°	$\bar{3}.0872$	$\bar{3}.0963$	$\bar{3}.1052$	$\bar{3}.1141$	$\bar{3}.1228$	$\bar{3}.1315$	$\bar{3}.1401$	$\bar{3}.1486$	$\bar{3}.1570$	$\bar{3}.1653$	$\bar{3}.1736$	$\bar{3}.1818$
9°	$\bar{3}.1899$	$\bar{3}.1980$	$\bar{3}.2059$	$\bar{3}.2138$	$\bar{3}.2216$	$\bar{3}.2294$	$\bar{3}.2371$	$\bar{3}.2447$	$\bar{3}.2523$	$\bar{3}.2598$	$\bar{3}.2672$	$\bar{3}.2745$
10°	$\bar{3}.2819$	$\bar{3}.2891$	$\bar{3}.2963$	$\bar{3}.3034$	$\bar{3}.3105$	$\bar{3}.3175$	$\bar{3}.3245$	$\bar{3}.3314$	$\bar{3}.3382$	$\bar{3}.3450$	$\bar{3}.3518$	$\bar{3}.3585$
11°	$\bar{3}.3651$	$\bar{3}.3717$	$\bar{3}.3783$	$\bar{3}.3848$	$\bar{3}.3912$	$\bar{3}.3976$	$\bar{3}.4040$	$\bar{3}.4103$	$\bar{3}.4166$	$\bar{3}.4228$	$\bar{3}.4290$	$\bar{3}.4351$
12°	$\bar{3}.4412$	$\bar{3}.4473$	$\bar{3}.4533$	$\bar{3}.4592$	$\bar{3}.4652$	$\bar{3}.4711$	$\bar{3}.4769$	$\bar{3}.4827$	$\bar{3}.4885$	$\bar{3}.4943$	$\bar{3}.5000$	$\bar{3}.5056$
13°	$\bar{3}.5113$	$\bar{3}.5169$	$\bar{3}.5224$	$\bar{3}.5280$	$\bar{3}.5335$	$\bar{3}.5389$	$\bar{3}.5444$	$\bar{3}.5498$	$\bar{3}.5551$	$\bar{3}.5605$	$\bar{3}.5658$	$\bar{3}.5710$
14°	$\bar{3}.5763$	$\bar{3}.5815$	$\bar{3}.5866$	$\bar{3}.5918$	$\bar{3}.5969$	$\bar{3}.6020$	$\bar{3}.6071$	$\bar{3}.6121$	$\bar{3}.6171$	$\bar{3}.6221$	$\bar{3}.6270$	$\bar{3}.6319$

$\alpha$	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
15°	3,6368	3,6417	3,6465	3,6514	3,6562	3,6609	3,6657	3,6704	3,6751	3,6797	3,6844	3,6890
16°	3,6936	3,6982	3,7027	3,7072	3,7117	3,7162	3,7207	3,7251	3,7295	3,7339	3,7383	3,7427
17°	3,7470	3,7513	3,7556	3,7599	3,7640	3,7684	3,7726	3,7768	3,7809	3,7851	3,7892	3,7933
18°	3,7974	3,8015	3,8056	3,8096	3,8137	3,8177	3,8217	3,8256	3,8296	3,8335	3,8374	3,8414
19°	3,8452	3,8491	3,8530	3,8568	3,8606	3,8645	3,8682	3,8720	3,8758	3,8795	3,8833	3,8870
20°	3,8907	3,8944	3,8980	3,9017	3,9054	3,9090	3,9126	3,9162	3,9198	3,9234	3,9269	3,9305
21°	3,9340	3,9375	3,9410	3,9445	3,9480	3,9515	3,9549	3,9584	3,9618	3,9652	3,9686	3,9720
22°	3,9754	3,9788	3,9821	3,9855	3,9888	3,9921	3,9954	3,9987	2,0020	2,0053	2,0086	2,0118
23°	2,0151	2,0183	2,0215	2,0247	2,0279	2,0311	2,0343	2,0374	2,0406	2,0437	2,0469	2,0500
24°	2,0531	2,0562	2,0593	2,0624	2,0655	2,0685	2,0716	2,0746	2,0777	2,0807	2,0837	2,0867
25°	2,0897	2,0927	2,0957	2,0987	2,1016	2,1046	2,1075	2,1104	2,1134	2,1163	2,1192	2,1221
26°	2,1250	2,1279	2,1307	2,1336	2,1365	2,1393	2,1421	2,1450	2,1478	2,1506	2,1534	2,1562
27°	2,1590	2,1618	2,1646	2,1673	2,1701	2,1729	2,1756	2,1783	2,1811	2,1838	2,1865	2,1892
28°	2,1919	2,1946	2,1973	2,2000	2,2026	2,2053	2,2080	2,2106	2,2132	2,2159	2,2185	2,2211
29°	2,2237	2,2264	2,2290	2,2316	2,2341	2,2367	2,2393	2,2419	2,2444	2,2470	2,2495	2,2521
30°	2,2546	2,2571	2,2597	2,2622	2,2647	2,2672	2,2697	2,2722	2,2747	2,2772	2,2796	2,2821
31°	2,2846	2,2870	2,2895	2,2919	2,2944	2,2968	2,2992	2,3016	2,3041	2,3065	2,3089	2,3113
32°	2,3137	2,3161	2,3184	2,3208	2,3232	2,3256	2,3279	2,3303	2,3326	2,3350	2,3373	2,3397
33°	2,3420	2,3443	2,3466	2,3490	2,3513	2,3536	2,3559	2,3582	2,3605	2,3627	2,3650	2,3673
34°	2,3696	2,3718	2,3741	2,3764	2,3786	2,3809	2,3831	2,3853	2,3876	2,3898	2,3920	2,3943
35°	2,3965	2,3987	2,4009	2,4031	2,4053	2,4075	2,4097	2,4119	2,4140	2,4162	2,4184	2,4205
36°	2,4227	2,4249	2,4270	2,4292	2,4313	2,4335	2,4356	2,4377	2,4399	2,4420	2,4441	2,4462
37°	2,4584	2,4505	2,4526	2,4547	2,4568	2,4589	2,4610	2,4630	2,4651	2,4672	2,4693	2,4714
38°	2,4734	2,4755	2,4775	2,4796	2,4817	2,4837	2,4858	2,4878	2,4898	2,4919	2,4939	2,4960
39°	2,4980	2,5000	2,5020	2,5040	2,5060	2,5080	2,5100	2,5120	2,5140	2,5160	2,5180	2,5200
40°	2,5220	2,5240	2,5260	2,5279	2,5299	2,5319	2,5338	2,5358	2,5378	2,5397	2,5417	2,5436
41°	2,5456	2,5475	2,5494	2,5514	2,5533	2,5552	2,5572	2,5591	2,5610	2,5629	2,5649	2,5668
42°	2,5687	2,5706	2,5725	2,5744	2,5763	2,5782	2,5801	2,5820	2,5839	2,5857	2,5876	2,5895
43°	2,5914	2,5933	2,5951	2,5970	2,5989	2,6007	2,6026	2,6044	2,6063	2,6081	2,6100	2,6118
44°	2,6137	2,6155	2,6174	2,6192	2,6210	2,6229	2,6247	2,6265	2,6284	2,6302	2,6320	2,6338
45°	2,6356	2,6374	2,6393	2,6411	2,6429	2,6447	2,6465	2,6483	2,6501	2,6519	2,6536	2,6554
46°	2,6572	2,6590	2,6608	2,6626	2,6643	2,6661	2,6679	2,6697	2,6714	2,6732	2,6750	2,6767
47°	2,6785	2,6802	2,6820	2,6838	2,6855	2,6873	2,6890	2,6907	2,6925	2,6942	2,6960	2,6977
48°	2,6994	2,7012	2,7029	2,7046	2,7064	2,7081	2,7098	2,7115	2,7133	2,7150	2,7167	2,7184
49°	2,7201	2,7218	2,7235	2,7252	2,7270	2,7287	2,7304	2,7321	2,7338	2,7354	2,7371	2,7388
50°	2,7405	2,7422	2,7439	2,7456	2,7473	2,7490	2,7506	2,7523	2,7540	2,7557	2,7573	2,7590
51°	2,7607	2,7623	2,7640	2,7657	2,7673	2,7690	2,7707	2,7723	2,7740	2,7756	2,7773	2,7789
52°	2,7806	2,7822	2,7839	2,7855	2,7872	2,7888	2,7905	2,7921	2,7938	2,7954	2,7970	2,7987
53°	2,8003	2,8019	2,8036	2,8052	2,8068	2,8085	2,8101	2,8117	2,8133	2,8149	2,8166	2,8182
54°	2,8198	2,8214	2,8230	2,8246	2,8263	2,8279	2,8295	2,8311	2,8327	2,8343	2,8359	2,8375

$\alpha$	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
55°	2,8391	2,8407	2,8423	2,8439	2,8455	2,8471	2,8487	2,8503	2,8519	2,8535	2,8551	2,8567
56°	2,8583	2,8599	2,8614	2,8630	2,8646	2,8662	2,8678	2,8694	2,8709	2,8725	2,8741	2,8757
57°	2,8773	2,8788	2,8804	2,8820	2,8836	2,8851	2,8867	2,8883	2,8898	2,8914	2,8930	2,8945
58°	2,8961	2,8977	2,8992	2,9008	2,9024	2,9039	2,9055	2,9071	2,9086	2,9102	2,9117	2,9133
59°	2,9148	2,9164	2,9180	2,9195	2,9211	2,9226	2,9242	2,9257	2,9273	2,9288	2,9304	2,9319
60°	2,9335	2,9350	2,9366	2,9381	2,9397	2,9412	2,9427	2,9443	2,9458	2,9474	2,9489	2,9505
61°	2,9520	2,9535	2,9551	2,9566	2,9582	2,9597	2,9612	2,9628	2,9643	2,9658	2,9674	2,9689
62°	2,9705	2,9720	2,9735	2,9751	2,9766	2,9781	2,9797	2,9812	2,9827	2,9843	2,9858	2,9873
63°	2,9889	2,9904	2,9919	2,9934	2,9950	2,9965	2,9980	2,9996	1,0011	1,0026	1,0041	1,0057
64°	1,0072	1,0087	1,0103	1,0118	1,0133	1,0148	1,0164	1,0179	1,0194	1,0210	1,0225	1,0240
65°	1,0255	1,0270	1,0286	1,0301	1,0316	1,0332	1,0347	1,0362	1,0377	1,0393	1,0408	1,0423
66°	1,0439	1,0454	1,0469	1,0484	1,0500	1,0515	1,0530	1,0545	1,0561	1,0576	1,0591	1,0607
67°	1,0622	1,0637	1,0652	1,0668	1,0683	1,0698	1,0714	1,0729	1,0744	1,0760	1,0775	1,0790
68°	1,0806	1,0821	1,0836	1,0852	1,0867	1,0882	1,0898	1,0913	1,0928	1,0944	1,0959	1,0974
69°	1,0990	1,1005	1,1021	1,1036	1,1051	1,1067	1,1082	1,1098	1,1113	1,1128	1,1144	1,1159
70°	1,1175	1,1190	1,1206	1,1221	1,1237	1,1252	1,1268	1,1283	1,1299	1,1314	1,1330	1,1345
71°	1,1361	1,1377	1,1392	1,1408	1,1423	1,1439	1,1454	1,1470	1,1486	1,1501	1,1517	1,1533
72°	1,1548	1,1564	1,1580	1,1596	1,1611	1,1627	1,1643	1,1659	1,1674	1,1690	1,1706	1,1722
73°	1,1738	1,1754	1,1769	1,1785	1,1801	1,1817	1,1833	1,1849	1,1865	1,1881	1,1897	1,1913
74°	1,1929	1,1945	1,1961	1,1977	1,1993	1,2009	1,2026	1,2042	1,2058	1,2074	1,2090	1,2107
75°	1,2123	1,2139	1,2155	1,2172	1,2188	1,2204	1,2221	1,2237	1,2254	1,2270	1,2287	1,2303
76°	1,2320	1,2336	1,2353	1,2369	1,2386	1,2403	1,2419	1,2436	1,2453	1,2470	1,2487	1,2503
77°	1,2520	1,2537	1,2554	1,2571	1,2588	1,2605	1,2622	1,2639	1,2656	1,2673	1,2691	1,2708
78°	1,2725	1,2742	1,2760	1,2777	1,2794	1,2812	1,2829	1,2847	1,2865	1,2882	1,2900	1,2917
79°	1,2935	1,2953	1,2971	1,2989	1,3007	1,3024	1,3042	1,3061	1,3079	1,3097	1,3115	1,3133
80°	1,3152	1,3170	1,3188	1,3207	1,3225	1,3244	1,3263	1,3281	1,3300	1,3319	1,3338	1,3357
81°	1,3376	1,3395	1,3414	1,3433	1,3452	1,3472	1,3491	1,3511	1,3530	1,3550	1,3569	1,3589
82°	1,3609	1,3629	1,3649	1,3669	1,3689	1,3710	1,3730	1,3751	1,3771	1,3792	1,3813	1,3834
83°	1,3855	1,3876	1,3897	1,3918	1,3940	1,3961	1,3983	1,4004	1,4026	1,4048	1,4071	1,4093
84°	1,4115	1,4138	1,4160	1,4183	1,4206	1,4229	1,4253	1,4276	1,4300	1,4324	1,4348	1,4372
85°	1,4396	1,4421	1,4446	1,4470	1,4496	1,4521	1,4547	1,4572	1,4599	1,4625	1,4651	1,4678
86°	1,4705	1,4732	1,4761	1,4789	1,4817	1,4846	1,4875	1,4904	1,4934	1,4964	1,4995	1,5026
87°	1,5057	1,5089	1,5121	1,5154	1,5188	1,5222	1,5257	1,5292	1,5328	1,5365	1,5402	1,5441
88°	1,5480	1,5520	1,5561	1,5604	1,5647	1,5692	1,5738	1,5786	1,5836	1,5888	1,5941	1,5997
89°	1,6056	1,6119	1,6184	1,6255	1,6330	1,6412	1,6503	1,6604	1,6720	1,6858	1,7034	1,7294

$\alpha$	K	E	$\alpha$	K	E	$\alpha$	K	E
0°	1,5708	1,5708	50°	1,9356	1,3055	82° 0'	3,3699	1,0278
1°	1,5709	1,5707	51°	1,9539	1,2963	82° 12'	3,3946	1,0267
2°	1,5713	1,5703	52°	1,9729	1,2870	82° 24'	3,4199	1,0256
3°	1,5719	1,5697	53°	1,9927	1,2776	82° 36'	3,4460	1,0245
4°	1,5727	1,5689	54°	2,0133	1,2682	82° 48'	3,4728	1,0234
5°	1,5738	1,5678	55°	2,0347	1,2587	83° 0'	3,5004	1,0223
6°	1,5751	1,5665	56°	2,0571	1,2492	83° 12'	3,5288	1,0213
7°	1,5767	1,5650	57°	2,0804	1,2397	83° 24'	3,5581	1,0202
8°	1,5785	1,5630	58°	2,1047	1,2301	83° 36'	3,5884	1,0192
9°	1,5805	1,5611	59°	2,1300	1,2206	83° 48'	3,6196	1,0182
10°	1,5828	1,5589	60°	2,1565	1,2111	84° 0''	3,6519	1,0172
11°	1,5854	1,5564	61°	2,1842	1,2015	84° 12''	3,6853	1,0163
12°	1,5882	1,5537	62°	2,2132	1,1921	84° 24''	3,7198	1,0153
13°	1,5913	1,5507	63°	2,2435	1,1826	84° 36''	3,7557	1,0144
14°	1,5946	1,5476	64°	2,2754	1,1732	84° 48''	3,7930	1,0135
15°	1,5981	1,5442	65°	2,3088	1,1638	85° 0''	3,8317	1,0127
16°	1,6020	1,5405	66°	2,3439	1,1546	85° 12''	3,8721	1,0118
17°	1,6061	1,5367	67°	2,3809	1,1454	85° 24''	3,9142	1,0110
18°	1,6105	1,5326	68°	2,4198	1,1362	85° 36''	3,9583	1,0102
19°	1,6151	1,5283	69°	2,4610	1,1273	85° 48''	4,0044	1,0094
20°	1,6200	1,5238	70° 0'	2,5046	1,1184	86° 0'	4,0528	1,0087
21°	1,6252	1,5191	70° 30'	2,5273	1,1140	86° 12'	4,1037	1,0079
22°	1,6307	1,5142	71° 0'	2,5507	1,1096	86° 24'	4,1574	1,0072
23°	1,6363	1,5090	71° 30'	2,5749	1,1053	86° 36'	4,2142	1,0065
24°	1,6426	1,5037	72° 0'	2,5998	1,1011	86° 48'	4,2744	1,0059
25°	1,6490	1,4981	72° 30'	2,6256	1,0968	87° 0'	4,3387	1,0053
26°	1,6557	1,4924	73° 0'	2,6521	1,0927	87° 12'	4,4073	1,0047
27°	1,6627	1,4864	73° 30'	2,6796	1,0885	87° 24'	4,4812	1,0041
28°	1,6701	1,4803	74° 0'	2,7081	1,0844	87° 36'	4,5619	1,0036
29°	1,6777	1,4740	74° 30'	2,7375	1,0804	87° 48'	4,6477	1,0031
30°	1,6858	1,4675	75° 0'	2,7681	1,0764	88° 0'	4,7427	1,0026
31°	1,6941	1,4608	75° 30'	2,7998	1,0725	88° 12'	4,8479	1,0022
32°	1,7028	1,4539	76° 0'	2,8327	1,0686	88° 24'	4,9654	1,0017
33°	1,7119	1,4469	76° 30'	2,8669	1,0648	88° 36'	5,0988	1,0014
34°	1,7214	1,4397	77° 0'	2,9026	1,0611	88° 48'	5,2527	1,0010
35°	1,7313	1,4323	77° 30'	2,9397	1,0574	89° 0'	5,4349	1,0008
36°	1,7415	1,4248	78° 0'	2,9786	1,0538	89° 6'	5,5402	1,0006
37°	1,7522	1,4171	78° 30'	3,0192	1,0502	89° 12'	5,6579	1,0005
38°	1,7633	1,4092	79° 0'	3,0617	1,0468	89° 18'	5,7914	1,0005
39°	1,7748	1,4013	79° 30'	3,1064	1,0434	89° 24'	5,9455	1,0003
40°	1,7868	1,3931	80° 0'	3,1534	1,0401	89° 30'	6,1278	1,0002
41°	1,7992	1,3849	80° 12'	3,1729	1,0388	89° 36'	6,3504	1,0001
42°	1,8122	1,3765	80° 24'	3,1928	1,0375	89° 42'	6,6385	1,0001
43°	1,8256	1,3680	80° 36'	3,2132	1,0363	89° 48'	7,0440	1,0000
44°	1,8396	1,3594	80° 48'	3,2340	1,0350	89° 54'	7,7371	1,0000
45°	1,8541	1,3506	81° 0'	3,2553	1,0338	90°	$\infty$	1,0000
46°	1,8692	1,3418	81° 12'	3,2771	1,0326			
47°	1,8848	1,3329	81° 24'	3,2995	1,0313			
48°	1,9011	1,3238	81° 36'	3,3223	1,0302			
49°	1,9180	1,3147	81° 48'	3,3458	1,0290			

Fig. 18. Thetafunktion  $\vartheta_0(v) = \vartheta_3(v_1)$  für  $v + v_1 = 1/2$ .Fig. 19. Thetafunktion  $\vartheta_1(v) = \vartheta_2(v_1)$  für  $v + v_1 = 1/2$ .

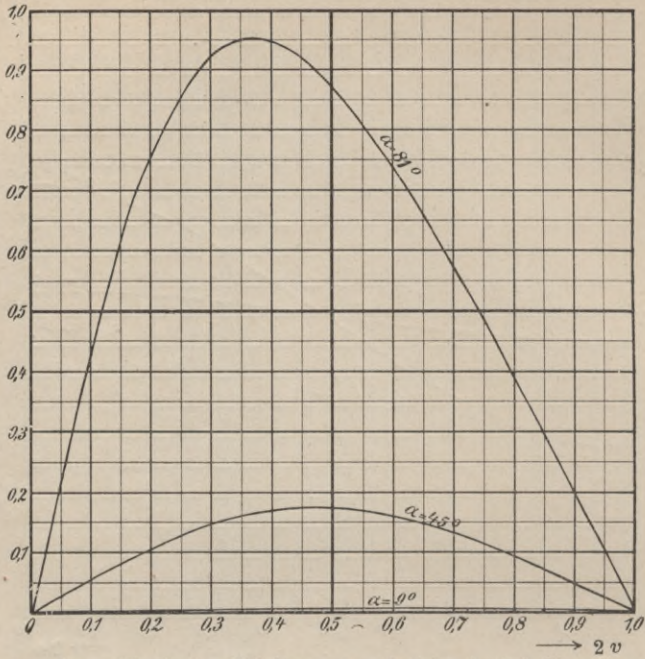


Fig. 20. Logarithmische Ableitung von  $\vartheta_0(v) = \vartheta_3(v_1)$  für  $v + v_1 = 1/2$ .

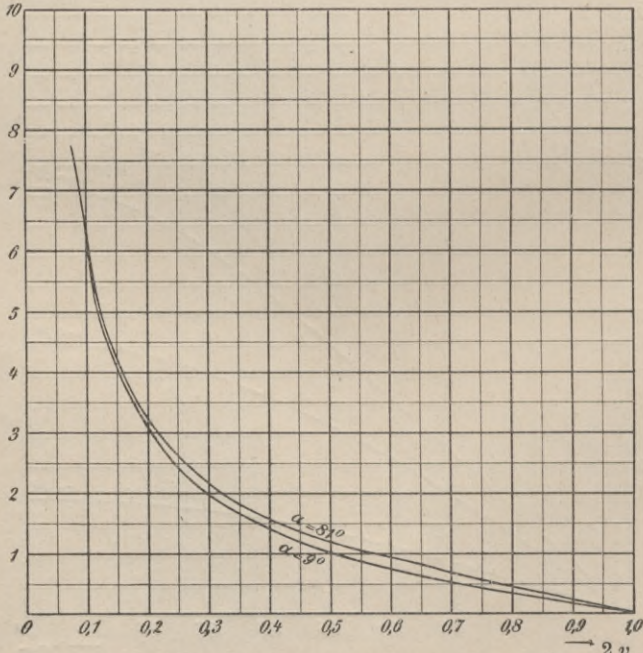


Fig. 21. Logarithmische Ableitung von  $\vartheta_1(v) = \vartheta_2(v_1)$  für  $v + v_1 = 1/2$ .

$2v$	$\alpha=0^\circ$	$9^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$63^\circ$	$72^\circ$	$81^\circ$	$2v_1$	
0.0	1,0000	0,9970	0,9874	0,9712	0,9471	0,9135	0,8680	0,8052	0,7152	0,5694	1,0	$\phi(v) = \phi_3(v_1)$
0.1	1,0000	0,9970	0,9881	0,9725	0,9497	0,9196	0,8744	0,8147	0,7290	0,5898	0,9	
0.2	1,0000	0,9975	0,9899	0,9766	0,9572	0,9300	0,8931	0,8424	0,7691	0,6494	0,8	
0.3	1,0000	0,9982	0,9927	0,9831	0,9689	0,9493	0,9223	0,8853	0,7980	0,7429	0,7	
0.4	1,0000	0,9991	0,9961	0,9911	0,9836	0,9732	0,9592	0,9397	0,9110	0,8630	0,6	
0.5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9956	0,5	
0.6	1,0000	1,001	1,004	1,009	1,016	1,027	1,041	1,060	1,088	1,131	0,4	
0.7	1,0000	1,002	1,007	1,017	1,031	1,051	1,078	1,115	1,168	1,254	0,3	
0.8	1,0000	1,003	1,010	1,023	1,043	1,070	1,107	1,158	1,231	1,353	0,2	
0.9	1,0000	1,003	1,012	1,028	1,050	1,080	1,126	1,186	1,272	1,417	0,1	
1.0	1,0000	1,003	1,013	1,029	1,053	1,086	1,132	1,195	1,286	1,439	0,0	
0.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\phi_1(v) = \phi_2(v_1)$
0.1	0,0000	0,06270	0,08804	0,1084	0,1260	0,1419	0,1566	0,1700	0,1810	0,1843	0,9	
0.2	0,0000	0,1226	0,1739	0,2140	0,2488	0,2804	0,3098	0,3368	0,3597	0,3698	0,8	
0.3	0,0000	0,1801	0,2555	0,3145	0,3657	0,4123	0,4560	0,4968	0,5335	0,5663	0,7	
0.4	0,0000	0,2382	0,3308	0,4073	0,4736	0,5343	0,5917	0,6467	0,6989	0,7413	0,6	
0.5	0,0000	0,2805	0,3980	0,4900	0,5700	0,6436	0,7139	0,7827	0,8517	0,9200	0,5	
0.6	0,0000	0,3210	0,4553	0,5607	0,6524	0,7372	0,8188	0,9007	0,9870	1,085	0,4	
0.7	0,0000	0,3535	0,5015	0,6176	0,7188	0,8129	0,9041	0,9972	1,100	1,227	0,3	
0.8	0,0000	0,3773	0,5353	0,6592	0,7675	0,8682	0,9669	1,069	1,184	1,337	0,2	
0.9	0,0000	0,3918	0,5559	0,6847	0,7973	0,9022	1,005	1,113	1,237	1,407	0,1	
1.0	0,0000	0,3967	0,5629	0,6933	0,8074	0,9135	1,024	1,130	1,252	1,431	0,0	
0.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\frac{d \ln \phi(v)}{dv} = -\frac{d \ln \phi_2(v_1)}{dv_1}$
0.1	0,0000	0,001920	0,007845	0,01833	0,03444	0,05806	0,09324	0,1473	0,2401	0,4380	0,9	
0.2	0,0000	0,003650	0,01490	0,03471	0,06502	0,1092	0,1737	0,2712	0,4333	0,7614	0,8	
0.3	0,0000	0,005020	0,02045	0,04747	0,08839	0,1473	0,2315	0,3555	0,5527	0,9247	0,7	
0.4	0,0000	0,005897	0,02396	0,05536	0,1024	0,1689	0,2618	0,3942	0,5947	0,9469	0,6	
0.5	0,0000	0,006194	0,02509	0,05769	0,1059	0,1729	0,2642	0,3899	0,5719	0,8742	0,5	
0.6	0,0000	0,005883	0,02377	0,05438	0,09906	0,1601	0,2415	0,3502	0,5011	0,7411	0,4	
0.7	0,0000	0,005002	0,02015	0,04589	0,08306	0,1331	0,1984	0,2836	0,3980	0,5748	0,3	
0.8	0,0000	0,003632	0,01460	0,03314	0,05968	0,09500	0,1404	0,1985	0,2748	0,3906	0,2	
0.9	0,0000	0,001909	0,007661	0,01735	0,03115	0,04945	0,07260	0,1020	0,1400	0,1972	0,1	
1.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,0	$\frac{d \ln \phi_1(v)}{dv} = -\frac{d \ln \phi_2(v_1)}{dv_1}$
0.1	6,3138	6,314	6,314	6,314	6,314	6,316	6,320	6,326	6,340	6,384	0,9	
0.2	3,0777	3,078	3,078	3,078	3,080	3,082	3,088	3,100	3,128	3,218	0,8	
0.3	1,9626	1,962	1,963	1,963	1,965	1,969	1,977	1,994	2,031	2,132	0,7	
0.4	1,3764	1,376	1,377	1,377	1,379	1,384	1,393	1,413	1,457	1,570	0,6	
0.5	1,0000	1,0000	1,0000	1,001	1,003	1,007	1,017	1,038	1,083	1,198	0,5	
0.6	0,7265	0,7266	0,7268	0,7273	0,7293	0,7337	0,7432	0,7628	0,8048	0,9099	0,4	
0.7	0,5095	0,5096	0,5097	0,5102	0,5118	0,5156	0,5236	0,5403	0,5753	0,6619	0,3	
0.8	0,3249	0,3249	0,3250	0,3254	0,3266	0,3293	0,3351	0,3473	0,3723	0,4336	0,2	
0.9	0,1584	0,1584	0,1584	0,1586	0,1593	0,1607	0,1638	0,1700	0,1831	0,2148	0,1	
1.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
$2v$	$\alpha=0^\circ$	$9^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$63^\circ$	$72^\circ$	$81^\circ$	$2v_1$	

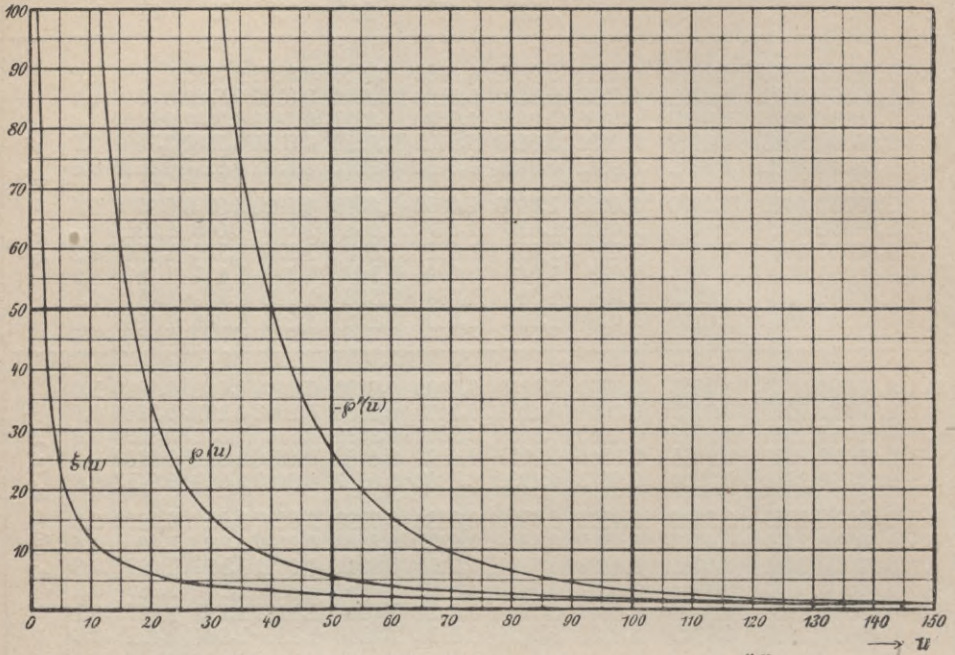


Fig. 22. Die Weierstraßschen Funktionen für  $g_2 = 0, g_3 = 1$  und  $u = \frac{r \omega_2}{180}$ ,  $\omega_2 = 1,53995$ .

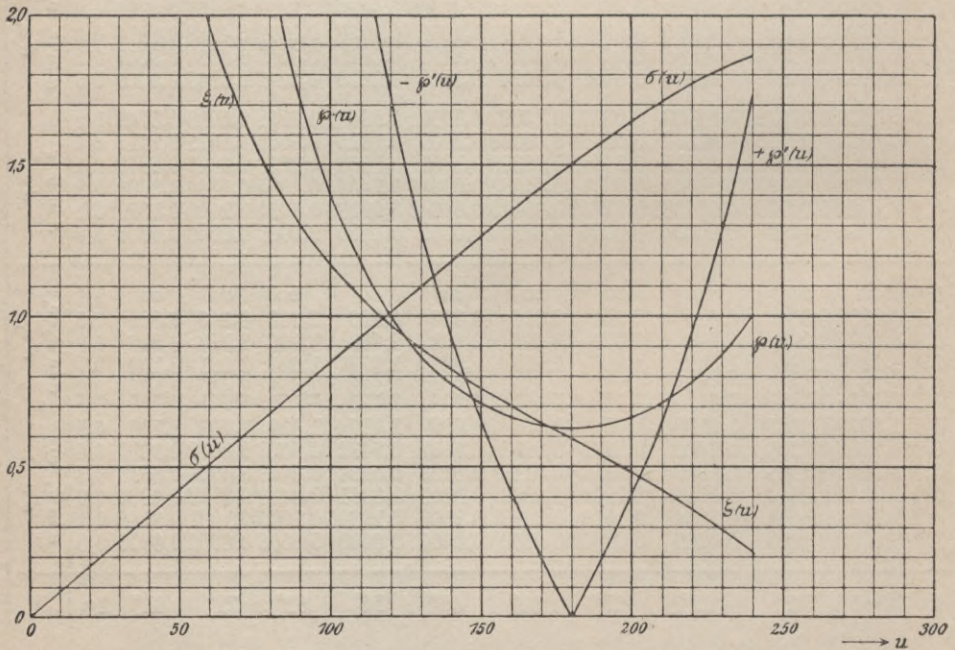


Fig. 23. Die Weierstraßschen Funktionen für  $g_2 = 0, g_3 = 1$  und  $u = \frac{r \omega_2}{180}$ ,  $\omega_2 = 1,52995$ .



$r$	$\wp' u$	$\wp u$	$\zeta u$	$\sigma u$
0	— $\infty$	$\infty$	$\infty$	0,0000
1	— 3256840,2	13841,87	117,6515	0,0085
2	— 407127,83	3461,247	58,8324	0,0170
3	— 120632,35	1468,820	39,2179	0,0255
4	— 50891,814	865,0684	29,4120	0,0340
5	— 26056,413	553,6124	23,5284	0,0425
6	— 15078,122	384,5109	19,6089	0,0510
7	— 9494,694	282,4827	16,8072	0,0595
8	— 6361,194	216,2671	14,7060	0,0680
9	— 4467,735	170,8937	13,0726	0,0765
10	— 3256,989	138,4187	11,7652	0,0850
11	— 2447,006	114,3921	10,6954	0,0935
12	— 1884,815	96,1277	9,8045	0,1020
13	— 1479,719	81,9053	9,0502	0,1105
14	— 1186,939	70,6207	8,4036	0,1190
15	— 965,0250	61,5171	7,8433	0,1275
16	— 795,1560	54,0706	7,3533	0,1360
17	— 662,9264	47,8954	6,9207	0,1445
18	— 558,4610	42,7208	6,5361	0,1530
19	— 474,8442	38,3439	6,1922	0,1615
20	— 407,1190	34,6047	5,8826	0,1700
21	— 351,6842	31,3870	5,6024	0,1785
22	— 305,8743	28,5981	5,3477	0,1870
23	— 267,6862	26,1663	5,1153	0,1955
24	— 235,6044	24,0309	4,9021	0,2040
25	— 208,4436	22,1465	4,7060	0,2125
26	— 185,3057	20,4764	4,5251	0,2210
27	— 165,4685	18,9875	4,3575	0,2295
28	— 148,3649	17,6553	4,2018	0,2380
29	— 133,5400	16,4585	4,0569	0,2465
30	— 120,6251	15,3800	3,9217	0,2550
31	— 109,3244	14,4036	3,7174	0,2635
32	— 99,3916	13,5173	3,6766	0,2720
33	— 90,6264	12,7105	3,5651	0,2805
34	— 82,8624	11,9741	3,4603	0,2890
35	— 73,4302	11,2996	3,3614	0,2975
36	— 69,8040	10,6805	3,2680	0,3060
37	— 64,2949	10,1113	3,1798	0,3145
38	— 59,3506	9,5861	3,0961	0,3230
39	— 54,9006	9,1008	3,0166	0,3315
40	— 50,8845	8,6514	2,9412	0,3400
41	— 47,2504	8,2348	2,8695	0,3485
42	— 43,9542	7,8473	2,8012	0,3570
43	— 40,9575	7,4866	2,7360	0,3655
44	— 38,2267	7,1504	2,6738	0,3740
45	— 35,7337	6,8362	2,6144	0,3825
46	— 33,4523	6,5423	2,5634	0,3910
47	— 31,3612	6,2669	2,5031	0,3995
48	— 29,4408	6,0087	2,4510	0,4080
49	— 27,6734	5,7660	2,4009	0,4165

$r$	$\wp' u$	$\wp u$	$\xi u$	$\sigma u$	$r$	$\wp' u$	$\wp u$	$\xi u$	$\sigma u$
50	-26,0441	5,5378	2,3529	0,4250	100	-3,1691	1,4028	1,1733	0,8496
51	-24,5412	5,3230	2,3068	0,4335	101	-3,0706	1,3763	1,1615	0,8581
52	-23,1510	5,1203	2,2624	0,4420	102	-2,9758	1,3506	1,1499	0,8665
53	-21,8638	4,9292	2,2197	0,4505	103	-2,8845	1,3257	1,1386	0,8750
54	-20,6700	4,7484	2,1786	0,4590	104	-2,7962	1,3016	1,1274	0,8835
55	-19,5620	4,5775	2,1389	0,4675	105	-2,7116	1,2781	1,1164	0,8919
56	-18,5305	4,4157	2,1007	0,4760	106	-2,6297	1,2555	1,1057	0,9004
57	-17,5706	4,2622	2,0638	0,4845	107	-2,5508	1,2335	1,0951	0,9089
58	-16,6757	4,1168	2,0283	0,4930	108	-2,4745	1,2121	1,0847	0,9171
59	-15,8403	3,9786	1,9939	0,5015	109	-2,4009	1,1914	1,0745	0,9258
60	-15,0596	3,8473	1,9606	0,5100	110	-2,3298	1,1713	1,0645	0,9342
61	-14,3292	3,7225	1,9284	0,5185	111	-2,2609	1,1518	1,0546	0,9427
62	-13,6449	3,6036	1,8973	0,5270	112	-2,1943	1,1329	1,0449	0,9511
63	-13,0035	3,4824	1,8672	0,5355	113	-2,1300	1,1145	1,0353	0,9596
64	-12,4013	3,3824	1,8379	0,5440	114	-2,0677	1,0966	1,0259	0,9680
65	-11,8356	3,2795	1,8097	0,5525	115	-2,0073	1,0793	1,0167	0,9765
66	-11,3035	3,1812	1,7822	0,5610	116	-1,9488	1,0625	1,0076	0,9849
67	-10,8026	3,0872	1,7555	0,5695	117	-1,8921	1,0462	0,9986	0,9933
68	-10,3306	2,9975	1,7297	0,5780	118	-1,8371	1,0303	0,9898	1,0018
69	-9,8856	2,9116	1,7046	0,5865	119	-1,7839	1,0149	0,9811	1,0102
70	-9,4654	2,8293	1,6802	0,5950	120	-1,7321	1,0000	0,9725	1,0186
71	-9,0686	2,7506	1,6565	0,6035	121	-1,6818	0,9855	0,9641	1,0270
72	-8,6932	2,6751	1,6334	0,6119	122	-1,6330	0,9714	0,9558	1,0354
73	-8,3382	2,6027	1,6110	0,6204	123	-1,5855	0,9577	0,9476	1,0441
74	-8,0020	2,5333	1,5892	0,6289	124	-1,5394	0,9445	0,9395	1,0523
75	-7,6832	2,4666	1,5679	0,6374	125	-1,4945	0,9316	0,9315	1,0607
76	-7,3810	2,4026	1,5472	0,6459	126	-1,4509	0,9190	0,9237	1,0690
77	-7,0941	2,3411	1,5271	0,6544	127	-1,4084	0,9069	0,9159	1,0774
78	-6,8218	2,2820	1,5074	0,6629	128	-1,3670	0,8951	0,9082	1,0858
79	-6,5626	2,2251	1,4883	0,6714	129	-1,3267	0,8837	0,9007	1,0942
80	-6,3163	2,1704	1,4696	0,6799	130	-1,2873	0,8726	0,8932	1,1026
81	-6,0819	2,1177	1,4514	0,6884	131	-1,2490	0,8618	0,8858	1,1109
82	-5,8587	2,0670	1,4336	0,6969	132	-1,2116	0,8513	0,8786	1,1193
83	-5,6459	2,0181	1,4162	0,7054	133	-1,1750	0,8412	0,8714	1,1277
84	-5,4431	1,9709	1,3993	0,7139	134	-1,1394	0,8313	0,8643	1,1360
85	-5,2495	1,9255	1,3827	0,7224	135	-1,1046	0,8218	0,8572	1,1444
86	-5,0647	1,8817	1,3665	0,7309	136	-1,0705	0,8126	0,8503	1,1527
87	-4,8882	1,8394	1,3507	0,7393	137	-1,0372	0,8036	0,8434	1,1610
88	-4,7195	1,7986	1,3353	0,7478	138	-1,0046	0,7949	0,8366	1,1693
89	-4,5581	1,7592	1,3202	0,7563	139	-0,9727	0,7865	0,8299	1,1776
90	-4,4037	1,7211	1,3056	0,7648	140	-0,9415	0,7784	0,8232	1,1859
91	-4,2558	1,6843	1,2909	0,7733	141	-0,9109	0,7705	0,8167	1,1942
92	-4,1135	1,6487	1,2767	0,7818	142	-0,8810	0,7629	0,8102	1,2025
93	-3,9785	1,6143	1,2628	0,7902	143	-0,8515	0,7555	0,8037	1,2108
94	-3,8484	1,5810	1,2493	0,7987	144	-0,8227	0,7484	0,7973	1,2192
95	-3,7234	1,5489	1,2360	0,8072	145	-0,7945	0,7415	0,7910	1,2273
96	-3,6035	1,5178	1,2229	0,8157	146	-0,7666	0,7349	0,7847	1,2356
97	-3,4884	1,4876	1,2102	0,8242	147	-0,7393	0,7285	0,7785	1,2438
98	-3,3778	1,4586	1,1977	0,8327	148	-0,7125	0,7223	0,7723	1,2520
99	-3,2714	1,4302	1,1854	0,8411	149	-0,6861	0,7164	0,7662	1,2602

$r$	$\wp' u$	$\wp u$	$\xi u$	$\sigma u$	$r$	$\wp' u$	$\wp u$	$\xi u$	$\sigma u$
150	-0,6602	0,7106	0,7602	1,2684	200	+0,4200	0,6650	0,4835	1,6511
151	-0,6346	0,7051	0,7541	1,2766	201	+0,4426	0,6687	0,4781	1,6578
152	-0,6094	0,6999	0,7482	1,2848	202	+0,4656	0,6725	0,4724	1,6646
153	-0,5847	0,6948	0,7422	1,2930	203	+0,4887	0,6765	0,4666	1,6712
154	-0,5601	0,6899	0,7363	1,3011	204	+0,5123	0,6808	0,4608	1,6778
155	-0,5361	0,6852	0,7305	1,3093	205	+0,5361	0,6852	0,4550	1,6844
156	-0,5123	0,6808	0,7247	1,3174	206	+0,5601	0,6899	0,4492	1,6908
157	-0,4887	0,6765	0,7189	1,3255	207	+0,5847	0,6948	0,4433	1,6973
158	-0,4656	0,6725	0,7132	1,3336	208	+0,6094	0,6999	0,4374	1,7036
159	-0,4426	0,6687	0,7075	1,3417	209	+0,6346	0,7051	0,4314	1,7099
160	-0,4200	0,6650	0,7020	1,3497	210	+0,6602	0,7106	0,4254	1,7162
161	-0,3976	0,6615	0,6962	1,3578	211	+0,6861	0,7164	0,4194	1,7223
162	-0,3753	0,6582	0,6906	1,3658	212	+0,7125	0,7223	0,4132	1,7284
163	-0,3533	0,6552	0,6850	1,3738	213	+0,7393	0,7285	0,4070	1,7345
164	-0,3315	0,6522	0,6795	1,3818	214	+0,7666	0,7349	0,4008	1,7405
165	-0,3099	0,6495	0,6739	1,3898	215	+0,7945	0,7415	0,3946	1,7463
166	-0,2885	0,6469	0,6684	1,3977	216	+0,8227	0,7484	0,3882	1,7523
167	-0,2673	0,6446	0,6629	1,4056	217	+0,8515	0,7555	0,3819	1,7579
168	-0,2461	0,6424	0,6575	1,4135	218	+0,8810	0,7629	0,3754	1,7636
169	-0,2251	0,6404	0,6520	1,4214	219	+0,9109	0,7705	0,3689	1,7692
170	-0,2042	0,6385	0,6466	1,4293	220	+0,9415	0,7784	0,3623	1,7747
171	-0,1836	0,6369	0,6411	1,4371	221	+0,9727	0,7865	0,3556	1,7801
172	-0,1674	0,6354	0,6357	1,4450	222	+1,0046	0,7949	0,3489	1,7854
173	-0,1423	0,6341	0,6303	1,4528	223	+1,0372	0,8036	0,3421	1,7907
174	-0,1218	0,6329	0,6249	1,4605	224	+1,0705	0,8126	0,3353	1,7958
175	-0,1015	0,6320	0,6196	1,4683	225	+1,1046	0,8218	0,3283	1,8009
176	-0,0811	0,6312	0,6142	1,4760	226	+1,1394	0,8313	0,3213	1,8059
177	-0,0608	0,6306	0,6089	1,4837	227	+1,1750	0,8412	0,3142	1,8108
178	-0,0405	0,6302	0,6035	1,4913	228	+1,2116	0,8513	0,3070	1,8155
179	-0,0202	0,6301	0,5981	1,4990	229	+1,2490	0,8618	0,2997	1,8202
180	0,0000	0,6300	0,5928	1,5066	230	+1,2873	0,8726	0,2924	1,8248
181	+0,0202	0,6301	0,5874	1,5142	231	+1,3267	0,8837	0,2849	1,8293
182	+0,0405	0,6302	0,5821	1,5217	232	+1,3670	0,8951	0,2773	1,8337
183	+0,0608	0,6306	0,5767	1,5292	233	+1,4084	0,9069	0,2697	1,8379
184	+0,0811	0,6312	0,5714	1,5367	234	+1,4509	0,9190	0,2619	1,8421
185	+0,1015	0,6320	0,5660	1,5441	235	+1,4945	0,9316	0,2540	1,8461
186	+0,1218	0,6329	0,5606	1,5516	236	+1,5394	0,9445	0,2461	1,8501
187	+0,1423	0,6341	0,5552	1,5589	237	+1,5855	0,9577	0,2380	1,8543
188	+0,1674	0,6354	0,5498	1,5663	238	+1,6330	0,9714	0,2298	1,8576
189	+0,1836	0,6369	0,5444	1,5736	239	+1,6818	0,9855	0,2215	1,8609
190	+0,2042	0,6385	0,5390	1,5808	240	+1,7321	1,0000	0,2130	1,8646
191	+0,2251	0,6404	0,5335	1,5881					
192	+0,2461	0,6424	0,5281	1,5952					
193	+0,2673	0,6446	0,5226	1,6024					
194	+0,2885	0,6469	0,5171	1,6095					
195	+0,3099	0,6495	0,5116	1,6165					
196	+0,3315	0,6522	0,5061	1,6235					
197	+0,3533	0,6552	0,5005	1,6305					
198	+0,3753	0,6582	0,4949	1,6374					
199	+0,3976	0,6615	0,4893	1,6443					

### 18. Anwendung der vollständigen elliptischen Integrale auf elektrische Kreisströme.

1. Gegeninduktivität zweier parallelen konachsialen Kreisströme. — Wenn zwei elektrisch leitende Kreislinien mit den Radien  $A$  und  $a$  in parallelen Ebenen liegen, deren Abstand  $x$  zugleich die Entfernung der Kreismittelpunkte ist, und wenn gleichsinnige Ströme in den beiden Kreisen mit demselben Vorzeichen gerechnet werden, so ist der Koeffizient ihrer gegenseitigen Induktion

$$M = 4\pi \sqrt{Aa} \cdot y,$$

wo

$$(1) \quad y = \left[ k - \frac{2}{k} \right] K + \frac{2}{k} E = \frac{2E - (1 + \cos^2 \alpha) K}{\sin \alpha}$$

$$k^2 = \sin^2 \alpha = \frac{4Aa}{(A+a)^2 + x^2}.$$

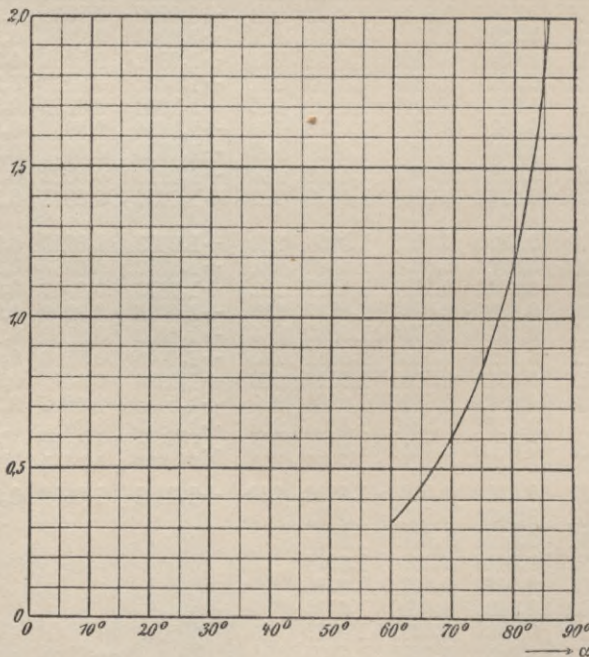


Fig. 24. Gegeninduktivität zweier parallelen konachsialen Kreisströme

$$y = \frac{2E - (1 + \cos^2 \alpha) K}{\sin \alpha}.$$

$\alpha$	$y$	$\alpha$	$y$	$\alpha$	$y$	$\alpha$	$y$	$\alpha$	$y$	$\alpha$	$y$
60,0°	0,31585	65,0°	0,43417	70,0°	0,59676	75,0°	0,82892	80,0°	1,18626	85,0°	1,84253
60,1°	0,31788	65,1°	0,43693	70,1°	0,60061	75,1°	0,83457	80,1°	1,19545	85,1°	1,86215
60,2°	0,31993	65,2°	0,43971	70,2°	0,60448	75,2°	0,84026	80,2°	1,20474	85,2°	1,88220
60,3°	0,32198	65,3°	0,44250	70,3°	0,60838	75,3°	0,84600	80,3°	1,21414	85,3°	1,90269
60,4°	0,32405	65,4°	0,44531	70,4°	0,61231	75,4°	0,85179	80,4°	1,22365	85,4°	1,92363
60,5°	0,32614	65,5°	0,44814	70,5°	0,61627	75,5°	0,85763	80,5°	1,23328	85,5°	1,94510
60,6°	0,32823	65,6°	0,45099	70,6°	0,62025	75,6°	0,86352	80,6°	1,24302	85,6°	1,96699
60,7°	0,33034	65,7°	0,45386	70,7°	0,62427	75,7°	0,86946	80,7°	1,25288	85,7°	1,98944
60,8°	0,33246	65,8°	0,45674	70,8°	0,62831	75,8°	0,87546	80,8°	1,26286	85,8°	2,01244
60,9°	0,33459	65,9°	0,45964	70,9°	0,63238	75,9°	0,88150	80,9°	1,27296	85,9°	2,03602
61,0°	0,33674	66,0°	0,46257	71,0°	0,63648	76,0°	0,88760	81,0°	1,28318	86,0°	2,06020
61,1°	0,33889	66,1°	0,46551	71,1°	0,64062	76,1°	0,89376	81,1°	1,29354	86,1°	2,08501
61,2°	0,34106	66,2°	0,46847	71,2°	0,64478	76,2°	0,89997	81,2°	1,30403	86,2°	2,11049
61,3°	0,34325	66,3°	0,47144	71,3°	0,64897	76,3°	0,90623	81,3°	1,31465	86,3°	2,13668
61,4°	0,34545	66,4°	0,47444	71,4°	0,65319	76,4°	0,91256	81,4°	1,32540	86,4°	2,16360
61,5°	0,34766	66,5°	0,47746	71,5°	0,65745	76,5°	0,91893	81,5°	1,33630	86,5°	2,19130
61,6°	0,34988	66,6°	0,48050	71,6°	0,66173	76,6°	0,92537	81,6°	1,34734	86,6°	2,21982
61,7°	0,35212	66,7°	0,48355	71,7°	0,66605	76,7°	0,93187	81,7°	1,35853	86,7°	2,24922
61,8°	0,35437	66,8°	0,48663	71,8°	0,67040	76,8°	0,93842	81,8°	1,36987	86,8°	2,27955
61,9°	0,35663	66,9°	0,48973	71,9°	0,67478	76,9°	0,94504	81,9°	1,38136	86,9°	2,31087
62,0°	0,35891	67,0°	0,49284	72,0°	0,67920	77,0°	0,95172	82,0°	1,39301	87,0°	2,34323
62,1°	0,36120	67,1°	0,49598	72,1°	0,68365	77,1°	0,95846	82,1°	1,40482	87,1°	2,37672
62,2°	0,36351	67,2°	0,49914	72,2°	0,68813	77,2°	0,96526	82,2°	1,41680	87,2°	2,41140
62,3°	0,36583	67,3°	0,50232	72,3°	0,69264	77,3°	0,97213	82,3°	1,42894	87,3°	2,44738
62,4°	0,36816	67,4°	0,50552	72,4°	0,69719	77,4°	0,97907	82,4°	1,44126	87,4°	2,48473
62,5°	0,37051	67,5°	0,50874	72,5°	0,70178	77,5°	0,98607	82,5°	1,45376	87,5°	2,52357
62,6°	0,37287	67,6°	0,51198	72,6°	0,70640	77,6°	0,99313	82,6°	1,46644	87,6°	2,56403
62,7°	0,37525	67,7°	0,51525	72,7°	0,71105	77,7°	1,00027	82,7°	1,47932	87,7°	2,60624
62,8°	0,37764	67,8°	0,51853	72,8°	0,71574	77,8°	1,00748	82,8°	1,49238	87,8°	2,65034
62,9°	0,38005	67,9°	0,52184	72,9°	0,72047	77,9°	1,01476	82,9°	1,50564	87,9°	2,69653
63,0°	0,38247	68,0°	0,52517	73,0°	0,72523	78,0°	1,02211	83,0°	1,51911	88,0°	2,74500
63,1°	0,38491	68,1°	0,52852	73,1°	0,73004	78,1°	1,02953	83,1°	1,53279	88,1°	2,79598
63,2°	0,38736	68,2°	0,53190	73,2°	0,73487	78,2°	1,03702	83,2°	1,54668	88,2°	2,84975
63,3°	0,38982	68,3°	0,53530	73,3°	0,73975	78,3°	1,04460	83,3°	1,56079	88,3°	2,90662
63,4°	0,39230	68,4°	0,53872	73,4°	0,74467	78,4°	1,05225	83,4°	1,57514	88,4°	2,96697
63,5°	0,39480	68,5°	0,54216	73,5°	0,74962	78,5°	1,05998	83,5°	1,58972	88,5°	3,03124
63,6°	0,39731	68,6°	0,54563	73,6°	0,75461	78,6°	1,06778	83,6°	1,60454	88,6°	3,09998
63,7°	0,39984	68,7°	0,54912	73,7°	0,75964	78,7°	1,07567	83,7°	1,61961	88,7°	3,17386
63,8°	0,40238	68,8°	0,55264	73,8°	0,76472	78,8°	1,08364	83,8°	1,63494	88,8°	3,25367
63,9°	0,40494	68,9°	0,55618	73,9°	0,76983	78,9°	1,09169	83,9°	1,65054	88,9°	3,34047
64,0°	0,40752	69,0°	0,55974	74,0°	0,77499	79,0°	1,09983	84,0°	1,66645	89,0°	3,43558
64,1°	0,41011	69,1°	0,56334	74,1°	0,78018	79,1°	1,10806	84,1°	1,68257	89,1°	3,54076
64,2°	0,41272	69,2°	0,56694	74,2°	0,78542	79,2°	1,11637	84,2°	1,69902	89,2°	3,65838
64,3°	0,41534	69,3°	0,57058	74,3°	0,79070	79,3°	1,12478	84,3°	1,71577	89,3°	3,79176
64,4°	0,41798	69,4°	0,57425	74,4°	0,79603	79,4°	1,13327	84,4°	1,73284	89,4°	3,94577
64,5°	0,42064	69,5°	0,57793	74,5°	0,80140	79,5°	1,14186	84,5°	1,75024	89,5°	4,12797
64,6°	0,42331	69,6°	0,58164	74,6°	0,80681	79,6°	1,15055	84,6°	1,76797	89,6°	4,35102
64,7°	0,42600	69,7°	0,58538	74,7°	0,81227	79,7°	1,15933	84,7°	1,78605	89,7°	4,63861
64,8°	0,42871	69,8°	0,58915	74,8°	0,81778	79,8°	1,16820	84,8°	1,80450	89,8°	5,04402
64,9°	0,43054	69,9°	0,59294	74,9°	0,82333	79,9°	1,17718	84,9°	1,82332	89,9°	5,73712

**2.** Anziehung zweier parallelen konachsialen Kreisströme. — Ist jede der beiden Kreislinien vom Strom Eins durchflossen, so ziehen sie sich mit der Kraft an

$$X = -\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\pi x}{\sqrt{A\alpha}} z, \text{ wo } z = -\frac{4A\alpha}{x} \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x}$$

$$(2) \quad z = k \left( 2K - \frac{2-k^2}{1-k^2} E \right) = \sin \alpha [2K - (1 + \sec^2 \alpha) E],$$

da

$$\frac{dF}{dk} = \frac{1}{k} \left( \frac{E}{1-k^2} - K \right) \text{ und } \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}.$$

**3.** Die Tafel für  $y$  ist von M. Niven für die zweite Auflage von Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Clarendon Press, berechnet worden. Die Tafel für  $z$  hat Lord Rayleigh berechnet, Phil. Transact. Royal Soc. London, Bd. 175 Pt. II, p. 425 (1885).

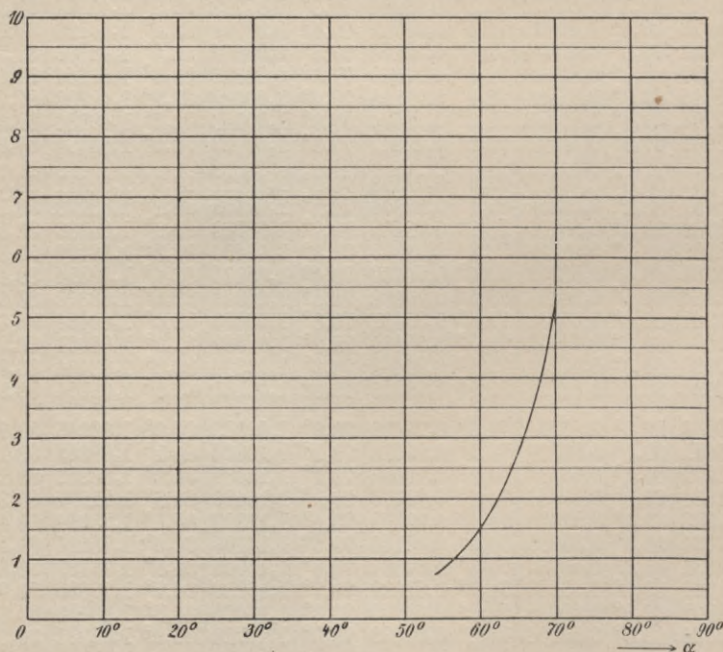


Fig. 25. Anziehung zweier parallelen konachsialen Kreisströme  
 $z = [2K - (1 + \sec^2 \alpha) E] \sin \alpha.$

$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$
55.0°	0,83155	58.0°	1,1884	61.0°	1,7013	64.0°	2,4513	67.0°	3,5768
55.1°	0,84153	58.1°	1,2027	61.1°	1,7219	64.1°	2,4818	67.1°	3,6232
55.2°	0,85162	58.2°	1,2171	61.2°	1,7428	64.2°	2,5127	67.2°	3,6703
55.3°	0,86183	58.3°	1,2317	61.3°	1,7639	64.3°	2,5440	67.3°	3,7182
55.4°	0,87216	58.4°	1,2464	61.4°	1,7853	64.4°	2,5757	67.4°	3,7667
55.5°	0,88261	58.5°	1,2614	61.5°	1,8070	64.5°	2,6079	67.5°	3,8159
55.6°	0,89318	58.6°	1,2765	61.6°	1,8289	64.6°	2,6405	67.6°	3,8659
55.7°	0,90388	58.7°	1,2918	61.7°	1,8512	64.7°	2,6735	67.7°	3,9167
55.8°	0,91471	58.8°	1,3073	61.8°	1,8737	64.8°	2,7071	67.8°	3,9682
55.9°	0,92566	58.9°	1,3230	61.9°	1,8965	64.9°	2,7410	67.9°	4,0205
56.0°	0,93675	59.0°	1,3389	62.0°	1,9196	65.0°	2,7755	68.0°	4,0736
56.1°	0,94796	59.1°	1,3549	62.1°	1,9431	65.1°	2,8104	68.1°	4,1275
56.2°	0,95931	59.2°	1,3712	62.2°	1,9668	65.2°	2,8458	68.2°	4,1822
56.3°	0,97080	59.3°	1,3877	62.3°	1,9908	65.3°	2,8818	68.3°	4,2378
56.4°	0,98242	59.4°	1,4043	62.4°	2,0151	65.4°	2,9182	68.4°	4,2942
56.5°	0,99418	59.5°	1,4212	62.5°	2,0398	65.5°	2,9551	68.5°	4,3515
56.6°	1,00608	59.6°	1,4383	62.6°	2,0648	65.6°	2,9925	68.6°	4,4097
56.7°	1,01812	59.7°	1,4556	62.7°	2,0901	65.7°	3,0305	68.7°	4,4687
56.8°	1,03030	59.8°	1,4731	62.8°	2,1157	65.8°	3,0690	68.8°	4,5288
56.9°	1,04263	59.9°	1,4909	62.9°	2,1417	65.9°	3,1081	68.9°	4,5897
57.0°	1,05511	60.0°	1,5088	63.0°	2,1680	66.0°	3,1477	69.0°	4,6516
57.1°	1,06773	60.1°	1,5270	63.1°	2,1947	66.1°	3,1879	69.1°	4,7145
57.2°	1,0805	60.2°	1,5490	63.2°	2,2217	66.2°	3,2287	69.2°	4,7784
57.3°	1,0934	60.3°	1,5641	63.3°	2,2491	66.3°	3,2700	69.3°	4,8433
57.4°	1,1065	60.4°	1,5829	63.4°	2,2768	66.4°	3,3120	69.4°	4,9093
57.5°	1,1198	60.5°	1,6020	63.5°	2,3050	66.5°	3,3545	69.5°	4,9763
57.6°	1,1332	60.6°	1,6214	63.6°	2,3335	66.6°	3,3977	69.6°	5,0444
57.7°	1,1467	60.7°	1,6410	63.7°	2,3623	66.7°	3,4415	69.7°	5,1135
57.8°	1,1605	60.8°	1,6608	63.8°	2,3916	66.8°	3,4859	69.8°	5,1839
57.9°	1,1744	60.9°	1,6809	63.9°	2,4213	66.9°	3,5310	69.9°	5,2553

## XII. Die Kugelfunktionen.<sup>1)</sup>

### 1. Definition.

Für  $r < 1$  läßt sich entwickeln

$$(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(\cos \vartheta) + rP_1(\cos \vartheta) + r^2P_2(\cos \vartheta) + \dots,$$

für  $r > 1$ :

$$(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} P_0(\cos \vartheta) + \frac{1}{r^2} P_1(\cos \vartheta) + \frac{1}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots$$

1) E. Heine, Kugelfunktionen. Berlin 1878—1881, Reimer. — W. E. Byerly, An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics. Boston 1893, Ginn & Co.

Dabei bedeuten  $P_0, P_1, P_2, \dots$  die (Legendreschen oder zonalen harmonischen) Kugelfunktionen nullter, erster, zweiter, . . . Ordnung. Und zwar ist, wenn  $\cos \vartheta = x$  gesetzt wird:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \cos \vartheta = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\vartheta + 1) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

. . . . .

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \left[ \cos n \vartheta + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \cos (n-2) \vartheta \right. \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos (n-4) \vartheta \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos (n-6) \vartheta + \dots \right] \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Die erstere dieser Reihen geht für ungerade  $n$  bis  $\cos \vartheta$ , für gerade  $n$  bis  $\cos (0 \cdot \vartheta)$ , und dem Koeffizienten von  $\cos (0 \cdot \vartheta)$  ist der Faktor  $\frac{1}{2}$  beizufügen.

## 2. Spezielle Werte.

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad P_n(1) = 1$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

## 3. Rekursionsformel.

Der Kürze halber werde  $P_n(x) = P_n$  gesetzt:

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

## 4. Differentialbeziehungen.

$$P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} = P_n, \quad P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$$

$$P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n, \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n$$



$$(x^2 - 1) P'_n = n (x P_n - P_{n-1})$$

$$(x^2 - 1) P'_n = (n + 1) (P_{n+1} - x P_n)$$

$$(x^2 - 1) P'_n = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1})$$

$$(x^2 - 1) P''_n + 2x P'_n = n(n+1) P_n.$$

Dabei ist  $P'_n = \frac{dP_n(x)}{dx}$ ,  $P''_n = \frac{d^2P_n(x)}{dx^2}$  gesetzt.

### 5. Integraleigenschaften.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{für } m \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{[x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1}]^{n+1}}.$$

### 6. Asymptotische Darstellung für große Werte von $n$ .

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}} \cdot \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \vartheta + \frac{\pi}{4} \right].$$

7. Zusammenhang der Kugelfunktionen mit den Besselschen Funktionen:

$$J_s(\vartheta) = (-1)^s \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(s)} \left( \cos \frac{\vartheta}{n} \right),$$

wenn als allgemeinere Kugelfunktion definiert wird:

$$P_n^{(s)}(\cos \vartheta) = \frac{(2n)!}{2^n (n+s)! (n-s)!} \sin^s \vartheta \left[ \cos^{n-s} \vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-s-2} \vartheta + \dots \right].$$

8. Die Tafeln der  $P_1(x), \dots, P_7(x)$  für das Argument  $x = \cos \vartheta$  stammen aus dem Report of the British Association for the advancement of Science 1879 und sind unter Leitung von Glaisher berechnet. Sie beziehen sich nur auf das Intervall  $0 \leq x \leq 1$ , da man von hier aus sofort auf das Intervall  $-1 \leq x \leq 0$  schließt vermöge der Relation  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ . Die Tafeln der  $P_1(\cos \vartheta), \dots, P_7(\cos \vartheta)$  für das Argument  $\vartheta$  sind entnommen dem Phil. Mag. 1891 und von C. E. Holland, P. R. James und G. G. Lamb unter Leitung von J. Perry berechnet. Die graphische Darstellung der  $P_1(\cos \vartheta), \dots, P_7(\cos \vartheta)$  für das Argument  $\vartheta$  findet sich in dem auf S. 79 genannten Werke von Byerly, S. 185.

9. Die Ableitungen der Kugelfunktionen nach  $\vartheta$ .

$$\frac{dP_0}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{dP_1}{d\vartheta} = -\sin \vartheta, \quad \frac{dP_2}{d\vartheta} = -\frac{3}{2} \sin 2\vartheta, \quad \frac{dP_3}{d\vartheta} = -6 \sin \vartheta + \frac{15}{2} \sin^3 \vartheta$$

$$\frac{dP_4}{d\vartheta} = -5 \sin 2\vartheta + \frac{35}{4} \sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta$$

$$\frac{dP_5}{d\vartheta} = -15 \sin \vartheta + \frac{105}{2} \sin^3 \vartheta - \frac{315}{8} \sin^5 \vartheta$$

$$\frac{dP_6}{d\vartheta} = -\frac{21}{2} \sin 2\vartheta + \frac{189}{4} \sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta - \frac{693}{16} \sin^4 \vartheta \sin 2\vartheta$$

$$\frac{dP_7}{d\vartheta} = -28 \sin \vartheta + 189 \sin 3\vartheta - \frac{693}{2} \sin^5 \vartheta + \frac{3003}{16} \sin^7 \vartheta$$

$$\frac{dP_{n+1}}{d\vartheta} = \frac{dP_{n-1}}{d\vartheta} - (2n+1) P_n \sin \vartheta.$$

10. Die Tafeln der Ableitungen  $\frac{dP_1}{d\vartheta}, \dots, \frac{dP_7}{d\vartheta}$  für das Argument  $\vartheta$  sind von C. Farr, On some expressions for the radial and axial components of the magnetic force in the interior of solenoids of circular cross-sections, Proc. Royal Soc. London **64**, 199—202 (1899) aufgestellt worden. Dabei ist  $\frac{dP_7}{d\vartheta}$  nur auf drei Dezimalen berechnet.

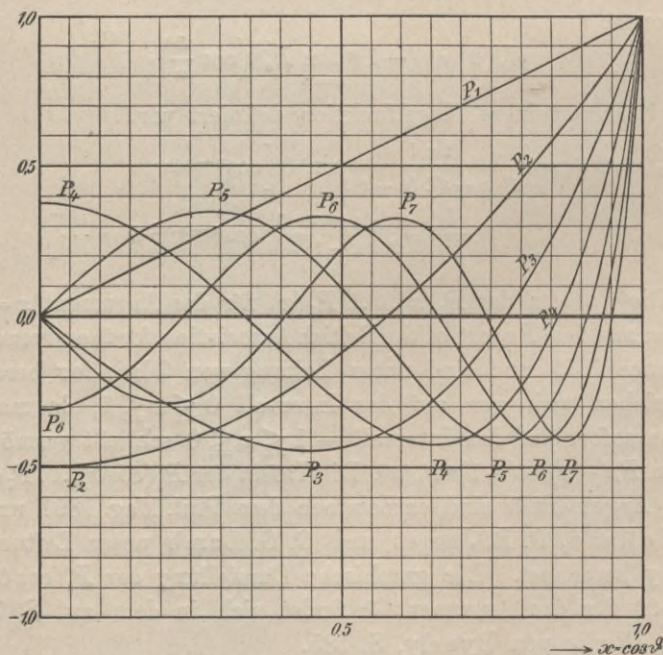
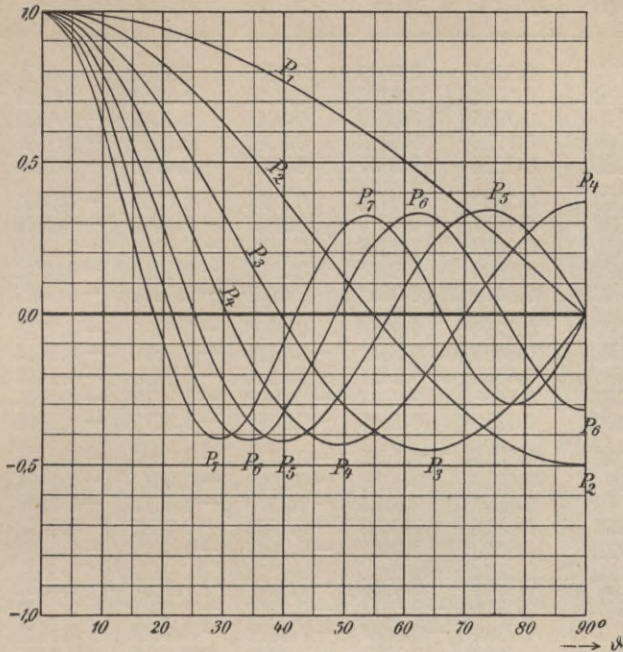


Fig. 26. Die Kugelfunktionen  $P_n(x)$ .

$x$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	0,0000	-0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	-0,3125	0,0000
0,01	0,0100	-0,4998	-0,0150	0,3746	0,0187	-0,3118	-0,0219
0,02	0,0200	-0,4994	-0,0300	0,3735	0,0374	-0,3099	-0,0436
0,03	0,3000	-0,4986	-0,0449	0,3716	0,0560	-0,3066	-0,0651
0,04	0,0400	-0,4976	-0,0598	0,3690	0,0744	-0,3021	-0,0862
0,05	0,0500	-0,4962	-0,0747	0,3657	0,0927	-0,2962	-0,1069
0,06	0,0600	-0,4946	-0,0895	0,3616	0,1106	-0,2891	-0,1270
0,07	0,0700	-0,4926	-0,1041	0,3567	0,1283	-0,2808	-0,1464
0,08	0,0800	-0,4904	-0,1187	0,3512	0,1455	-0,2713	-0,1651
0,09	0,0900	-0,4878	-0,1332	0,3449	0,1624	-0,2606	-0,1828
0,10	0,1000	-0,4850	-0,1475	0,3379	0,1788	-0,2488	-0,1995
0,11	0,1100	-0,4818	-0,1617	0,3303	0,1947	-0,2360	-0,2151
0,12	0,1200	-0,4784	-0,1757	0,3219	0,2101	-0,2220	-0,2295
0,13	0,1300	-0,4746	-0,1895	0,3129	0,2248	-0,2071	-0,2427
0,14	0,1400	-0,4706	-0,2031	0,3032	0,2389	-0,1913	-0,2545
0,15	0,1500	-0,4662	-0,2166	0,2928	0,2523	-0,1746	-0,2649
0,16	0,1600	-0,4616	-0,2298	0,2819	0,2650	-0,1572	-0,2738
0,17	0,1700	-0,4566	-0,2427	0,2703	0,2769	-0,1389	-0,2812
0,18	0,1800	-0,4514	-0,2554	0,2581	0,2880	-0,1201	-0,2870
0,19	0,1900	-0,4458	-0,2679	0,2453	0,2982	-0,1006	-0,2911
0,20	0,2000	-0,4400	-0,2800	0,2320	0,3075	-0,0806	-0,2935
0,21	0,2100	-0,4338	-0,2918	0,2181	0,3159	-0,0601	-0,2943
0,22	0,2200	-0,4274	-0,3034	0,2037	0,3234	-0,0394	-0,2933
0,23	0,2300	-0,4206	-0,3146	0,1889	0,3299	-0,0183	-0,2906
0,24	0,2400	-0,4136	-0,3254	0,1735	0,3353	0,0029	-0,2861
0,25	0,2500	-0,4062	-0,3359	0,1577	0,3397	0,0243	-0,2799
0,26	0,2600	-0,3986	-0,3461	0,1415	0,3431	0,0456	-0,2720
0,27	0,2700	-0,3906	-0,3558	0,1249	0,3453	0,0669	-0,2625
0,28	0,2800	-0,3824	-0,3651	0,1079	0,3465	0,0879	-0,2512
0,29	0,2900	-0,3738	-0,3740	0,0906	0,3465	0,1087	-0,2384
0,30	0,3000	-0,3650	-0,3825	0,0729	0,3454	0,1292	-0,2241
0,31	0,3100	-0,3558	-0,3905	0,0550	0,3431	0,1492	-0,2082
0,32	0,3200	-0,3464	-0,3981	0,0369	0,3397	0,1686	-0,1910
0,33	0,3300	-0,3366	-0,4052	0,0185	0,3351	0,1873	-0,1724
0,34	0,3400	-0,3266	-0,4117	-0,0000	0,3294	0,2053	-0,1527
0,35	0,3500	-0,3162	-0,4178	-0,0187	0,3225	0,2225	-0,1318
0,36	0,3600	-0,3056	-0,4234	-0,0375	0,3144	0,2388	-0,1098
0,37	0,3700	-0,2946	-0,4284	-0,0564	0,3051	0,2540	-0,0870
0,38	0,3800	-0,2834	-0,4328	-0,0753	0,2948	0,2681	-0,0635
0,39	0,3900	-0,2718	-0,4367	-0,0942	0,2833	0,2810	-0,0393
0,40	0,4000	-0,2600	-0,4400	-0,1130	0,2706	0,2926	-0,0146
0,41	0,4100	-0,2478	-0,4427	-0,1317	0,2569	0,3029	+0,0104
0,42	0,4200	-0,2354	-0,4448	-0,1504	0,2421	0,3118	0,0356
0,43	0,4300	-0,2226	-0,4462	-0,1688	0,2263	0,3191	0,0608
0,44	0,4400	-0,2096	-0,4470	-0,1870	0,2095	0,3249	0,0859
0,45	0,4500	-0,1962	-0,4472	-0,2050	0,1917	0,3290	0,1106
0,46	0,4600	-0,1826	-0,4467	-0,2226	0,1730	0,3314	0,1348
0,47	0,4700	-0,1686	-0,4454	-0,2399	0,1534	0,3321	0,1584
0,48	0,4800	-0,1544	-0,4435	-0,2568	0,1330	0,3310	0,1811
0,49	0,4900	-0,1398	-0,4409	-0,2732	0,1118	0,3280	0,2027

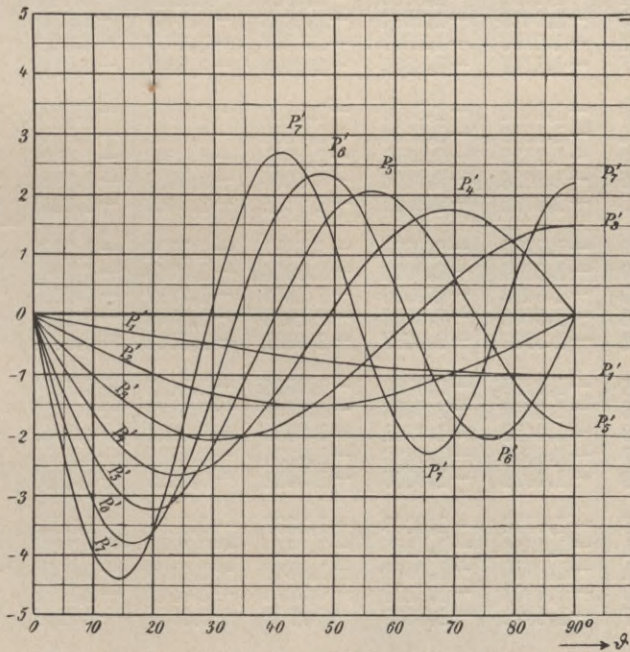


Fig. 27. Die Kugelfunktionen  $P_n(\vartheta)$ 

$\vartheta$	$P_1(\vartheta)$	$P_2(\vartheta)$	$P_3(\vartheta)$	$P_4(\vartheta)$	$P_5(\vartheta)$	$P_6(\vartheta)$	$P_7(\vartheta)$
$0^\circ$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$1^\circ$	0,9998	0,9995	0,9991	0,9985	0,9977	0,9967	0,9955
$2^\circ$	0,9994	0,9982	0,9963	0,9939	0,9909	0,9872	0,9829
$3^\circ$	0,9986	0,9959	0,9918	0,9863	0,9795	0,9713	0,9617
$4^\circ$	0,9976	0,9927	0,9854	0,9758	0,9638	0,9495	0,9329
$5^\circ$	0,9962	0,9886	0,9773	0,9623	0,9437	0,9216	0,8961
$6^\circ$	0,9945	0,9836	0,9674	0,9459	0,9194	0,8881	0,8522
$7^\circ$	0,9925	0,9777	0,9557	0,9267	0,8911	0,8476	0,7986
$8^\circ$	0,9903	0,9709	0,9423	0,9048	0,8589	0,8053	0,7448
$9^\circ$	0,9877	0,9633	0,9273	0,8803	0,8232	0,7571	0,6831
$10^\circ$	0,9848	0,9548	0,9106	0,8532	0,7840	0,7045	0,6164
$11^\circ$	0,9816	0,9454	0,8923	0,8238	0,7417	0,6483	0,5461
$12^\circ$	0,9781	0,9352	0,8724	0,7920	0,6966	0,5892	0,4732
$13^\circ$	0,9744	0,9241	0,8511	0,7582	0,6489	0,5273	0,3940
$14^\circ$	0,9703	0,9122	0,8283	0,7224	0,5990	0,4635	0,3219
$15^\circ$	0,9659	0,8995	0,8042	0,6847	0,5471	0,3982	0,2454
$16^\circ$	0,9613	0,8860	0,7787	0,6454	0,4937	0,3322	0,1699
$17^\circ$	0,9563	0,8718	0,7519	0,6046	0,4391	0,2660	0,0961
$18^\circ$	0,9511	0,8568	0,7240	0,5624	0,3836	0,2002	0,0289
$19^\circ$	0,9455	0,8410	0,6950	0,5192	0,3276	0,1347	-0,0443

$\vartheta$	$P_1(\vartheta)$	$P_2(\vartheta)$	$P_3(\vartheta)$	$P_4(\vartheta)$	$P_5(\vartheta)$	$P_6(\vartheta)$	$P_7(\vartheta)$
20°	0.9397	0.8245	0.6649	0.4750	0.2715	0.0719	-0.1072
21°	0.9336	0.8074	0.6338	0.4300	0.2156	0.0107	-0.1662
22°	0.9272	0.7895	0.6019	0.3845	0.1602	-0.0481	-0.2201
23°	0.9205	0.7710	0.5692	0.3386	0.1057	-0.1038	-0.2681
24°	0.9135	0.7518	0.5357	0.2926	0.0525	-0.1559	-0.3095
25°	0.9063	0.7321	0.5016	0.2465	0.0009	-0.2053	-0.3463
26°	0.8988	0.7117	0.4670	0.2007	-0.0489	-0.2478	-0.3717
27°	0.8910	0.6908	0.4319	0.1553	-0.0964	-0.2869	-0.3921
28°	0.8829	0.6694	0.3964	0.1105	-0.1415	-0.3211	-0.4052
29°	0.8746	0.6474	0.3607	0.0665	-0.1839	-0.3503	-0.4114
30°	0.8660	0.6250	0.3248	0.0234	-0.2233	-0.3740	-0.4101
31°	0.8572	0.6021	0.2887	-0.0185	-0.2595	-0.3924	-0.4022
32°	0.8480	0.5788	0.2527	-0.0591	-0.2923	-0.4052	-0.3876
33°	0.8387	0.5551	0.2167	-0.0982	-0.3216	-0.4126	-0.3670
34°	0.8290	0.5310	0.1809	-0.1357	-0.3473	-0.4148	-0.3409
35°	0.8192	0.5065	0.1454	-0.1714	-0.3691	-0.4115	-0.3096
36°	0.8090	0.4818	0.1102	-0.2052	-0.3871	-0.4031	-0.2738
37°	0.7986	0.4567	0.0755	-0.2370	-0.4011	-0.3898	-0.2343
38°	0.7880	0.4314	0.0413	-0.2666	-0.4112	-0.3719	-0.1918
39°	0.7771	0.4059	0.0077	-0.2940	-0.4174	-0.3497	-0.1469
40°	0.7660	0.3802	-0.0252	-0.3190	-0.4197	-0.3234	-0.1003
41°	0.7547	0.3544	-0.0574	-0.3416	-0.4181	-0.2938	-0.0534
42°	0.7431	0.3284	-0.0887	-0.3616	-0.4128	-0.2611	-0.0065
43°	0.7314	0.3023	-0.1191	-0.3791	-0.4038	-0.2255	0.0398
44°	0.7193	0.2762	-0.1485	-0.3940	-0.3914	-0.1878	0.0846
45°	0.7071	0.2500	-0.1768	-0.4062	-0.3757	-0.1485	0.1270
46°	0.6947	0.2238	-0.2040	-0.4158	-0.3568	-0.1079	0.1666
47°	0.6820	0.1977	-0.2300	-0.4252	-0.3350	-0.0645	0.2054
48°	0.6691	0.1716	-0.2547	-0.4270	-0.3105	-0.0251	0.2349
49°	0.6561	0.1456	-0.2781	-0.4286	-0.2836	0.0161	0.2627
50°	0.6428	0.1198	-0.3002	-0.4275	-0.2545	0.0563	0.2854
51°	0.6293	0.0941	-0.3209	-0.4239	-0.2235	0.0954	0.3031
52°	0.6157	0.0686	-0.3401	-0.4178	-0.1910	0.1326	0.3153
53°	0.6018	0.0433	-0.3578	-0.4093	-0.1571	0.1677	0.3221
54°	0.5878	0.0182	-0.3740	-0.3984	-0.1223	0.2002	0.3234
55°	0.5736	-0.0065	-0.3886	-0.3852	-0.0868	0.2297	0.3191
56°	0.5592	-0.0310	-0.4016	-0.3698	-0.0510	0.2559	0.3095
57°	0.5446	-0.0551	-0.4131	-0.3524	-0.0150	0.2787	0.2949
58°	0.5299	-0.0788	-0.4229	-0.3331	0.0206	0.2976	0.2752
59°	0.5150	-0.1021	-0.4310	-0.3119	0.0557	0.3125	0.2511
60°	0.5000	-0.1250	-0.4375	-0.2891	0.0898	0.3232	0.2231
61°	0.4848	-0.1474	-0.4423	-0.2647	0.1229	0.3298	0.1916
62°	0.4695	-0.1694	-0.4455	-0.2390	0.1545	0.3321	0.1571
63°	0.4540	-0.1908	-0.4471	-0.2121	0.1844	0.3302	0.1203
64°	0.4384	-0.2117	-0.4470	-0.1841	0.2123	0.3240	0.0818
65°	0.4226	-0.2321	-0.4452	-0.1552	0.2381	0.3138	0.0422
66°	0.4067	-0.2518	-0.4419	-0.1256	0.2615	0.2996	0.0021
67°	0.3907	-0.2710	-0.4370	-0.0955	0.2824	0.2819	-0.0375
68°	0.3746	-0.2896	-0.4305	-0.0650	0.3005	0.2605	-0.0763
69°	0.3584	-0.3074	-0.4225	-0.0344	0.3158	0.2361	-0.1135

$\vartheta$	$P_1(\vartheta)$	$P_2(\vartheta)$	$P_3(\vartheta)$	$P_4(\vartheta)$	$P_5(\vartheta)$	$P_6(\vartheta)$	$P_7(\vartheta)$
70°	0,3420	-0,3245	-0,4130	-0,0038	0,3281	0,2089	-0,1485
71°	0,3256	-0,3410	-0,4021	0,0267	0,3373	0,1786	-0,1811
72°	0,3090	-0,3568	-0,3898	0,0568	0,3434	0,1472	-0,2099
73°	0,2924	-0,3718	-0,3761	0,0864	0,3463	0,1144	-0,2347
74°	0,2756	-0,3860	-0,3611	0,1153	0,3461	0,0795	-0,2559
75°	0,2588	-0,3995	-0,3449	0,1434	0,3427	0,0431	-0,2730
76°	0,2419	-0,4112	-0,3275	0,1705	0,3362	0,0076	-0,2848
77°	0,2250	-0,4241	-0,3090	0,1964	0,3267	-0,0284	-0,2919
78°	0,2079	-0,4352	-0,2894	0,2211	0,3143	-0,0644	-0,2943
79°	0,1908	-0,4454	-0,2688	0,2443	0,2990	-0,0989	-0,2913
80°	0,1736	-0,4548	-0,2474	0,2659	0,2810	-0,1321	-0,2835
81°	0,1564	-0,4633	-0,2251	0,2859	0,2606	-0,1635	-0,2709
82°	0,1392	-0,4709	-0,2020	0,3040	0,2378	-0,1926	-0,2536
83°	0,1219	-0,4777	-0,1783	0,3203	0,2129	-0,2193	-0,2321
84°	0,1045	-0,4836	-0,1539	0,3345	0,1861	-0,2431	-0,2067
85°	0,0872	-0,4886	-0,1291	0,3468	0,1577	-0,2638	-0,1779
86°	0,0698	-0,4927	-0,1038	0,3569	0,1278	-0,2811	-0,1460
87°	0,0523	-0,4959	-0,0781	0,3648	0,0969	-0,2947	-0,1117
88°	0,0349	-0,4982	-0,0522	0,3704	0,0651	-0,3045	-0,0735
89°	0,0175	-0,4995	-0,0262	0,3739	0,0327	-0,3105	-0,0381
90°	0,0000	-0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	-0,3125	0,0000

Fig. 28. Die Ableitungen der Kugelfunktionen nach  $\vartheta$ .

$\vartheta$	$\frac{dP_1}{d\vartheta}$	$\frac{dP_2}{d\vartheta}$	$\frac{dP_3}{d\vartheta}$	$\frac{dP_4}{d\vartheta}$	$\frac{dP_5}{d\vartheta}$	$\frac{dP_6}{d\vartheta}$	$\frac{dP_7}{d\vartheta}$
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000
1°	-0,0175	-0,0523	-0,1047	-0,1744	-0,2615	-0,3659	-0,488
2°	-0,0349	-0,1046	-0,2091	-0,3480	-0,5213	-0,7284	-0,969
3°	-0,0523	-0,1568	-0,3129	-0,5201	-0,7775	-1,0841	-1,438
4°	-0,0698	-0,2088	-0,4160	-0,6901	-1,0286	-1,4295	-1,890
5°	-0,0872	-0,2605	-0,5180	-0,8570	-1,2728	-1,7614	-2,317
6°	-0,1045	-0,3119	-0,6186	-1,0197	-1,5085	-2,0768	-2,715
7°	-0,1219	-0,3629	-0,7176	-1,1781	-1,7341	-2,3727	-3,080
8°	-0,1392	-0,4135	-0,8148	-1,3315	-1,9481	-2,6465	-3,405
9°	-0,1564	-0,4635	-0,9099	-1,4789	-2,1492	-2,8954	-3,689
10°	-0,1736	-0,5130	-1,0026	-1,6199	-2,3360	-3,1174	-3,926
11°	-0,1908	-0,5619	-1,0928	-1,7537	-2,5074	-3,3104	-4,116
12°	-0,2079	-0,6101	-1,1801	-1,8799	-2,6621	-3,4729	-4,254
13°	-0,2250	-0,6576	-1,2643	-1,9978	-2,7993	-3,6034	-4,341
14°	-0,2419	-0,7042	-1,3453	-2,1069	-2,9181	-3,7008	-4,376
15°	-0,2588	-0,7500	-1,4229	-2,2069	-3,0178	-3,7646	-4,358
16°	-0,2756	-0,7949	-1,4968	-2,2973	-3,0978	-3,7943	-4,288
17°	-0,2924	-0,8388	-1,5668	-2,3777	-3,1576	-3,7899	-4,169
18°	-0,3090	-0,8817	-1,6328	-2,4478	-3,1970	-3,7518	-4,001
19°	-0,3256	-0,9235	-1,6946	-2,5073	-3,2158	-3,6806	-3,788
20°	-0,3420	-0,9642	-1,7520	-2,5560	-3,2141	-3,5774	-3,534
21°	-0,3584	-1,0037	-1,8050	-2,5937	-3,1920	-3,4435	-3,241
22°	-0,3746	-1,0420	-1,8534	-2,6203	-3,1497	-3,2804	-2,915
23°	-0,3907	-1,0790	-1,8970	-2,6357	-3,0877	-3,0917	-2,561
24°	-0,4067	-1,1147	-1,9357	-2,6400	-3,0067	-2,8749	-2,183
25°	-0,4226	-1,1491	-1,9696	-2,6330	-2,9073	-2,6371	-1,787
26°	-0,4384	-1,1820	-1,9984	-2,6150	-2,7903	-2,3794	-1,378
27°	-0,4540	-1,2135	-2,0222	-2,5861	-2,6568	-2,1046	-0,963
28°	-0,4695	-1,2436	-2,0408	-2,5464	-2,5077	-1,8156	-0,548
29°	-0,4848	-1,2721	-2,0542	-2,4961	-2,3443	-1,5155	-0,136
30°	-0,5000	-1,2990	-2,0625	-2,4357	-2,1680	-1,2077	+0,263
31°	-0,5150	-1,3244	-2,0654	-2,3654	-1,9799	-0,8953	+0,647
32°	-0,5299	-1,3482	-2,0635	-2,2855	-1,7817	-0,5815	+1,010
33°	-0,5446	-1,3703	-2,0562	-2,1966	-1,5748	-0,2697	+1,347
34°	-0,5592	-1,3908	-2,0437	-2,0991	-1,3608	+0,0370	+1,654
35°	-0,5736	-1,4095	-2,0262	-1,9934	-1,1413	+0,3354	+1,927
36°	-0,5878	-1,4266	-2,0036	-1,8802	-0,9179	+0,6225	+2,162
37°	-0,6018	-1,4419	-1,9761	-1,7600	-0,6924	+0,8955	+2,357
38°	-0,6157	-1,4554	-1,9438	-1,6334	-0,4664	+1,1516	+2,510
39°	-0,6293	-1,4672	-1,9066	-1,5011	-0,2415	+1,3885	+2,620
40°	-0,6428	-1,4772	-1,8648	-1,3637	-0,0194	+1,6038	+2,684
41°	-0,6561	-1,4854	-1,8185	-1,2219	+0,1983	+1,7955	+2,705
42°	-0,6691	-1,4918	-1,7678	-1,0764	+0,4100	+1,9620	+2,681
43°	-0,6820	-1,4963	-1,7129	-0,9279	+0,6142	+2,1017	+2,614
44°	-0,6947	-1,4991	-1,6539	-0,7772	+0,8095	+2,2136	+2,506



$\vartheta$	$\frac{d P_1}{d \vartheta}$	$\frac{d P_2}{d \vartheta}$	$\frac{d P_3}{d \vartheta}$	$\frac{d P_4}{d \vartheta}$	$\frac{d P_5}{d \vartheta}$	$\frac{d P_6}{d \vartheta}$	$\frac{d P_7}{d \vartheta}$
45°	-0,7071	-1,5000	-1,5910	-0,6250	+0,9943	+2,2969	+2,359
46°	-0,7193	-1,4991	-1,5244	-0,4720	+1,1677	+2,3510	+2,176
47°	-0,7314	-1,4963	-1,4542	-0,3190	+1,3282	+2,3757	+1,961
48°	-0,7431	-1,4918	-1,3808	-0,1668	+1,4749	+2,3715	+1,717
49°	-0,7547	-1,4854	-1,3042	-0,0160	+1,6067	+2,3382	+1,449
50°	-0,7660	-1,4772	-1,2248	+0,1327	+1,7229	+2,2772	+1,161
51°	-0,7771	-1,4672	-1,1427	+0,2784	+1,8225	+2,1892	+0,859
52°	-0,7880	-1,4554	-1,0581	+0,4205	+1,9053	+2,0760	+0,546
53°	-0,7986	-1,4419	-0,9714	+0,5584	+1,9704	+1,9387	+0,230
54°	-0,8090	-1,4266	-0,8828	+0,6914	+2,0173	+1,7797	-0,088
55°	-0,8191	-1,4095	-0,7925	+0,8188	+2,0474	+1,6009	-0,399
56°	-0,8290	-1,3908	-0,7007	+0,9401	+2,0587	+1,4046	-0,700
57°	-0,8387	-1,3703	-0,6078	+1,0546	+2,0521	+1,1936	-0,986
58°	-0,8480	-1,3482	-0,5140	+1,1620	+2,0281	+0,9699	-1,252
59°	-0,8572	-1,3244	-0,4196	+1,2617	+1,9866	+0,7369	-1,495
60°	-0,8660	-1,2990	-0,3248	+1,3532	+1,9283	+0,4973	-1,711
61°	-0,8746	-1,2721	-0,2299	+1,4361	+1,8538	+0,2540	-1,896
62°	-0,8829	-1,2436	-0,1351	+1,5101	+1,7640	+0,0099	-2,048
63°	-0,8910	-1,2135	-0,0409	+1,5748	+1,6596	-0,2321	-2,165
64°	-0,8988	-1,1820	+0,0527	+1,6306	+1,5420	-0,4691	-2,244
65°	-0,9063	-1,1491	+0,1454	+1,6755	+1,4114	-0,6983	-2,286
66°	-0,9135	-1,1147	+0,2368	+1,7111	+1,2698	-0,9170	-2,290
67°	-0,9205	-1,0790	+0,3268	+1,7366	+1,1187	-1,1226	-2,255
68°	-0,9272	-1,0420	+0,4149	+1,7520	+0,9580	-1,3129	-2,183
69°	-0,9336	-1,0037	+0,5011	+1,7574	+0,7906	-1,4855	-2,076
70°	-0,9397	-0,9642	+0,5851	+1,7525	+0,6173	-1,6386	-1,984
71°	-0,9455	-0,9235	+0,6666	+1,7376	+0,4397	-1,7704	-1,762
72°	-0,9511	-0,8817	+0,7455	+1,7131	+0,2594	-1,8794	-1,561
73°	-0,9563	-0,8388	+0,8214	+1,6787	+0,0776	-1,9646	-1,334
74°	-0,9613	-0,7949	+0,8941	+1,6349	-0,1037	-2,0248	-1,088
75°	-0,9659	-0,7500	+0,9636	+1,5819	-0,2833	-2,0596	-0,824
76°	-0,9703	-0,7042	+1,0295	+1,5200	-0,4595	-2,0687	-0,548
77°	-0,9744	-0,6576	+1,0918	+1,4498	-0,6309	-2,0520	-0,264
78°	-0,9781	-0,6101	+1,1501	+1,3714	-0,7961	-2,0098	+0,023
79°	-0,9816	-0,5619	+1,2044	+1,2854	-0,9537	-1,9428	+0,309
80°	-0,9848	-0,5130	+1,2545	+1,1923	-1,1023	-1,8519	+0,589
81°	-0,9877	-0,4635	+1,3003	+1,0926	-1,2407	-1,7382	+0,858
82°	-0,9903	-0,4135	+1,3416	+0,9870	-1,3679	-1,6032	+1,112
83°	-0,9925	-0,3629	+1,3783	+0,8758	-1,4831	-1,4487	+1,348
84°	-0,9945	-0,3119	+1,4103	+0,7598	-1,5841	-1,2760	+1,559
85°	-0,9962	-0,2605	+1,4376	+0,6396	-1,6715	-1,0881	+1,745
86°	-0,9976	-0,2088	+1,4599	+0,5160	-1,7440	-0,8868	+1,901
87°	-0,9986	-0,1568	+1,4774	+0,3895	-1,8009	-0,6747	+2,024
88°	-0,9994	-0,1046	+1,4899	+0,2608	-1,8420	-0,4544	+2,115
89°	-0,9998	-0,0523	+1,4975	+0,1308	-1,8667	-0,2286	+2,169
90°	-1,0000	0,0000	+1,5000	0,0000	-1,8750	0,0000	+2,187

### XIII. Die Besselschen oder Zylinderfunktionen.<sup>1)</sup>

Im folgenden bedeuten  $\nu$  und  $n$  stets ganze Zahlen. Die mit  $p$  bezeichneten Zahlen, Ordnung oder Parameter oder Index genannt, brauchen nicht ganz zu sein.

#### 1. Definitionen.

a) Funktion erster Art  $J_p(x)$ .

Von den Zylinderfunktionen ist nur die Funktion erster Art  $J_p(x)$  mit ganzem oder mit positivem, nicht ganzem Parameter  $p$  für  $x=0$  endlich.

$$J_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2}x\right)^{p+2\nu}}{\nu! \Pi(p+\nu)} = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2\nu}}{\nu! \Pi(p+\nu)}$$

$$J_p(2\sqrt{x}) = \frac{x^{\frac{p}{2}}}{\Pi(p)} \left(1 - \frac{x}{1 \cdot (p+1)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)} - \dots\right)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

α) Reelles Argument.

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2} + \dots$$

$$J_0(2\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{1!^2} + \frac{x^2}{2!^2} - \frac{x^3}{3!^2} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right\} = -J_0'(x)$$

$$J_1(2\sqrt{x}) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} - \frac{x^3}{3!4!} + \dots\right)$$

$$\lim_{x=0} J_0(x) = 1, \quad \lim_{x=0} J_1(x) = \frac{x}{2}, \quad \lim_{x=0} J_p(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^p}{\Pi(p)}$$

$$J_0(-x) = +J_0(x), \quad J_1(-x) = -J_1(x).$$

1) A. Gray and G. B. Mathews, A treatise on Bessel Functions and their applications to physics. London 1895, Macmillan and Co. — N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. — P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen. MPS Nr. 4, Leipzig 1908, B. G. Teubner.

Wenn  $p$  die Hälfte einer ungeraden Zahl bedeutet, ergeben sich für  $J_{n+\frac{1}{2}}$  einfache Ausdrücke, wie die folgende Tafel zeigt:

$2p$	$\sqrt{\frac{1}{2}} \pi x J_p(x)$
1	$\sin x$
3	$\frac{\sin x}{x} - \cos x$
5	$\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x$
7	$\left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \cos x$
9	$\left(\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1\right) \sin x - \left(\frac{105}{x^3} - \frac{10}{x}\right) \cos x$
11	$\left(\frac{945}{x^5} - \frac{420}{x^3} + \frac{15}{x}\right) \sin x - \left(\frac{945}{x^4} - \frac{105}{x^2} + 1\right) \cos x$
- 1	$\cos x$
- 3	$-\sin x - \frac{\cos x}{x}$
- 5	$\frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x$
- 7	$-\left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \cos x$
- 9	$\left(\frac{105}{x^3} - \frac{10}{x}\right) \sin x + \left(\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1\right) \cos x$
- 11	$-\left(\frac{945}{x^4} - \frac{105}{x^2} + 1\right) \sin x - \left(\frac{945}{x^5} - \frac{420}{x^3} + \frac{15}{x}\right) \cos x$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x/2)^{-1/2}}{\Pi(-\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{3x^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} - \frac{3^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 16} + \dots\right)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} x}{\Pi(\frac{1}{4})} \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 5} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots\right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{\Pi(-\frac{1}{4}) \sqrt{\frac{1}{2}} x} \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \Pi(\frac{1}{4}) x^{-1/4} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) &= -1 + \frac{x^2}{5 \cdot 4} - \frac{x^4}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{x^6}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} - \dots \\ &= G(x) = -\frac{x^{-1/4}}{0,78012} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi(-\frac{1}{4}) x^{1/4} J_{-1/4}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{4 \cdot 3} + \frac{x^4}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} - \frac{x^6}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3} + \dots$$

$$= D(x) = \frac{x^{1/4}}{1,15407} J_{-1/4}\left(\frac{x}{2}\right).$$

β) Komplexes Argument.

$$J_p(re^{i\vartheta}) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^p}{\Pi(p)} \left\{ \cos p\vartheta - \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos(p+2)\vartheta}{1 \cdot (p+1)} + \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^4 \cos(p+4)\vartheta}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)} - \dots \right\}$$

$$+ i \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^p}{\Pi(p)} \left\{ \sin p\vartheta - \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \sin(p+2)\vartheta}{1 \cdot (p+1)} + \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^4 \sin(p+4)\vartheta}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)} - \dots \right\}$$

$$i^{-p} J_p(2i\sqrt{x}) = \frac{x^{p/2}}{\Pi(p)} \left\{ 1 + \frac{x}{1 \cdot (p+1)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)} + \dots \right\}$$

$$J_0(re^{i\vartheta}) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \cos 2\vartheta}{1!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^4 \cos 4\vartheta}{2!^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^6 \cos 6\vartheta}{3!^2} + \dots$$

$$- i \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \sin 2\vartheta}{1!^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^4 \sin 4\vartheta}{2!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^6 \sin 6\vartheta}{3!^2} - \dots \right\}$$

$$J_0(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2} + \dots$$

$$J_0(2i\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{1!^2} + \frac{x^2}{2!^2} + \frac{x^3}{3!^2} + \dots$$

$$J_0(x\sqrt{i}) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{4!^2} - \dots - i \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{5!^2} - \dots \right\}$$

$$\frac{2}{r} J_1(re^{i\vartheta}) = \cos \vartheta - \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \cos 3\vartheta}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^4 \cos 5\vartheta}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \dots$$

$$+ i \left\{ \sin \vartheta - \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \sin 3\vartheta}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}r\right)^4 \sin 5\vartheta}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \right\}$$

$$\frac{2}{ix} J_1(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{x} J_1(x\sqrt{i}) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!3!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!4!} + \dots$$

$$+ i \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!4!} + \dots \right\}$$

$$\lim_{x=0} J_0(x\sqrt{i}) = 1 - i \frac{x^3}{4}, \quad \lim_{x=0} J_1(x\sqrt{i}) = \frac{x\sqrt{i}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}}(1+i).$$

b) (Reelle) Funktion zweiter Art  $N_p(x)$ .

Mit  $J_p(x)$  hat  $N_p(x)$  die beiden folgenden Eigenschaften gemein:  
 1) Bei reellem, positivem  $x$  ist  $N_p(x)$  reell. 2) Wenn  $x$  unbegrenzt wächst und dabei reell bleibt, so verschwindet  $N_p(x)$ .

$$\begin{aligned} N_p(x) \sin p\pi &= J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x) \\ J_{-p}(x) &= J_p(x) \cos p\pi - N_p(x) \sin p\pi \\ N_{-p}(x) &= J_p(x) \sin p\pi + N_p(x) \cos p\pi \\ N_{-n}(x) &= (-1)^n N_n(x) \\ N_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^{n-1} J_{-n-\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

Die von uns benutzte Bezeichnung  $N_n(x)$ , in der die von Hankel (1869) eingeführte Funktion zweiter Art durch  $\pi N_n(x)$  und die von L. Schläfli (1872) eingeführte durch  $\frac{1}{2}\pi N_n(x)$  ausgedrückt wird, steht zu der durch Heines Handbuch der Kugelfunktionen (1878) verbreiteten Funktion  $K_n(x)$  und zu der von C. Neumann (1867) eingeführten Funktion  $Y_n(x)$  in folgender Beziehung:

$$\frac{\pi}{2} N_n(x) = -K_n(x) = Y_n(x) - J_n(x) \cdot \ln \frac{2}{\gamma},$$

wo

$$\ln \frac{2}{\gamma} = 0,115\,93, \quad \ln \gamma = 0,577\,22, \quad \gamma = 1,7811$$

und

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= J_n(x) \left[ \ln x - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right] - \frac{n!}{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{n-\nu} \left( \frac{2}{x} \right)^{n-\nu} \frac{J_\nu(x)}{\nu!} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{n+2\nu}{\nu(n+\nu)} J_{n+2\nu}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= J_n(x) \ln x - \left\{ 2^{n-1} (n-1)! x^{-n} + \frac{2^{n-3} (n-2)!}{1!} x^{-n+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{n-5} (n-3)!}{2!} x^{-n+4} + \dots + \frac{x^{n-2}}{2^{n-1} (n-1)!} \right\} \\ &\quad - \frac{x^n}{2^{n+1} n!} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} k_{n,\nu} x^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!}, \end{aligned}$$

wo

$$k_{n,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2(n+\lambda)} \right) + \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{2\lambda},$$

$$Y_n(x) = J_n(x) \ln x - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{x}{2} \right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n+\nu)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2\nu} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\nu+n} \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right. \\ \left. + \left( \frac{x}{2} \right)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2\nu} \right\}$$

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \left( \frac{x}{2} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^4}{2!^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^6}{3!^2} - \dots$$

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + 4 \left\{ \frac{1}{2} J_2(x) - \frac{1}{4} J_4(x) + \frac{1}{6} J_6(x) - \dots \right\}$$

$$Y_1(x) = J_1(x) \ln x - \frac{1}{x} J_0(x) - \frac{x}{2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{1! 2!} \left( \frac{x}{2} \right)^3 \\ - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2! 3!} \left( \frac{x}{2} \right)^5 + \dots = -Y_0'(x)$$

$$Y_1(x) = J_1(x) - \frac{1}{x} J_0(x) + \frac{3}{1 \cdot 2} J_3(x) - \frac{5}{2 \cdot 3} J_5(x) + \frac{7}{3 \cdot 4} J_7(x) - \dots$$

$$Y_1(x) = J_1(x) \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} J_1(x) + \frac{6 \cdot 3}{2 \cdot 4} J_3(x) - \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 6} J_5(x) + \frac{6 \cdot 7}{6 \cdot 8} J_7(x) - \dots \\ + \frac{6(4\nu+3)}{(4\nu+2)(4\nu+4)} J_{4\nu+3}(x) - \frac{2(4\nu+5)}{(4\nu+4)(4\nu+6)} J_{4\nu+5}(x) + \dots$$

$$\lim_{x=0} N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}, \quad \lim_{x=0} N_1(x) = -\frac{2}{\pi x}$$

c) (Komplexe) Funktionen dritter Art  $H_p^{(1)}(x)$  und  $H_p^{(2)}(x)$ .

Für reelles Argument haben diese, von Hankel eingeführten Funktionen komplexe Werte. Dagegen sind die Ausdrücke

$$i^{p+1} H_p^{(1)}(ix) \quad \text{und} \quad i^{-(p+1)} H_p^{(2)}(-ix)$$

reell für positives  $x$ . Die Bedeutung der  $H$ -Funktionen für die Anwendungen liegt vor allem darin, daß unter den Zylinderfunktionen sie allein für unendliches komplexes Argument verschwinden, und zwar  $H^{(1)}$ , wenn der imaginäre Teil des Arguments positiv,  $H^{(2)}$ , wenn er negativ ist:

$$\lim_{r=\infty} H_p^{(1)}(re^{i\vartheta}) = 0, \\ \lim_{r=\infty} H_p^{(2)}(re^{-i\vartheta}) = 0, \quad \text{wenn } 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ ist.}$$

Zu  $H_p^{(1)}(re^{i\vartheta})$  ist  $H_p^{(2)}(re^{-i\vartheta})$  konjugiert komplex [nicht etwa  $H_p^{(1)}(re^{-i\vartheta})$ ]. In den hier folgenden Zahlentafeln finden sich deshalb nur Werte für  $H^{(1)}$ . Aus diesen erhält man auch  $H_p^{(2)}(re^{i\vartheta})$  nach der Formel  $H_p^{(2)}(x) = 2J_p(x) - H_p^{(1)}(x)$  und das dazu konjugiert komplexe  $H_p^{(1)}(re^{-i\vartheta})$ .

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x) = \frac{i}{\sin p\pi} [e^{-p\pi i} J_p(x) - J_{-p}(x)]$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x) = \frac{-i}{\sin p\pi} [e^{p\pi i} J_p(x) - J_{-p}(x)]$$

$$J_p(x) = H_p^{(1)}(x) - iN_p(x) = H_p^{(2)}(x) + iN_p(x) = \frac{1}{2} [H_p^{(2)}(x) + H_p^{(1)}(x)]$$

$$N_p(x) = iJ_p(x) - iH_p^{(1)}(x) = iH_p^{(2)}(x) - iJ_p(x) = \frac{i}{2} [H_p^{(2)}(x) - H_p^{(1)}(x)]$$

$$\frac{i\pi}{2} H_p^{(1)}(x) = \frac{i\pi}{2} J_p(x) + K_p(x) = -Y_p(x) - J_p(x) \cdot \ln \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{i\pi}{2} H_p^{(2)}(x) = \frac{i\pi}{2} J_p(x) - K_p(x) = Y_p(x) + J_p(x) \cdot \ln \frac{i\gamma}{2}$$

$$H_{-p}^{(1)}(x) = e^{p\pi i} H_p^{(1)}(x), \quad H_{-p}^{(2)}(x) = e^{-p\pi i} H_p^{(2)}(x)$$

$$H_p^{(1)}(xe^{i\pi}) = -H_{-p}^{(2)}(x) = e^{-i(p+1)\pi} H_p^{(2)}(x)$$

$$H_p^{(2)}(xe^{-i\pi}) = -H_{-p}^{(1)}(x) = e^{i(p+1)\pi} H_p^{(1)}(x)$$

$$H_{1/2}^{(1)}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}x} = -ie^{ix}, \quad H_{1/2}^{(2)}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}x} = ie^{-ix}$$

$$H_{-1/2}^{(1)}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}x} = e^{ix}, \quad H_{-1/2}^{(2)}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}x} = e^{-ix}$$

$$iH_0^{(1)}(ix) = iJ_0(ix) - N_0(ix) = -iH_0^{(2)}(-ix) = -iJ_0(-ix) - N_0(-ix)$$

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix) = J_0(ix) \ln \frac{2}{\gamma x} + 4 \left\{ \frac{i^{-2} J_2(ix)}{2} + \frac{i^{-4} J_4(ix)}{4} + \frac{i^{-6} J_6(ix)}{6} + \dots \right\}$$

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2i\sqrt{x}) = -\ln \gamma \sqrt{x} + (1 - \ln \gamma \sqrt{x}) \frac{x}{1!^2} + \left(1 + \frac{1}{2} - \ln \gamma \sqrt{x}\right) \frac{x^2}{2!^2} \\ + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln \gamma \sqrt{x}\right) \frac{x^3}{3!^2} + \dots$$

$$= -J_0(2i\sqrt{x}) \ln \gamma \sqrt{x} + \frac{x}{1!^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2!^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^3}{3!^2} + \dots$$

$$= -1 + (1 - \ln \gamma \sqrt{x}) J_0(2i\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^3}{3!^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{x^4}{4!^2} + \dots$$

$$\lim_{x=0} i H_0^{(1)}(ix) = - \lim_{x=0} i H_0^{(2)}(-ix) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

$$\lim_{x=0} N_0(\pm ix) = - \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \pm i.$$

$$H_1^{(1)}(ix) = J_1(ix) + i N_1(ix) = H_1^{(2)}(-ix) = J_1(-ix) - i N_1(-ix)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) &= \frac{J_0(ix)}{x} + i^{-1} J_1(ix) \left( \ln \frac{\gamma x}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left\{ 3 i^{-3} J_3(ix) \right. \\ &\quad + \frac{5}{3} i^{-5} J_5(ix) + \frac{7}{6} i^{-7} J_7(ix) + \frac{9}{10} i^{-9} J_9(ix) \\ &\quad \left. + \frac{11}{15} i^{-11} J_{11}(ix) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(2i\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \left[ \ln \gamma \sqrt{x} - \frac{1}{2} + \left( \ln \gamma \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4} \right) \frac{x}{1! 2!} \right. \\ &\quad \left. + \left( \ln \gamma \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \frac{x^2}{2! 3!} + \dots \right] \\ &= \frac{J_0(2i\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{J_1(2i\sqrt{x})}{i} \ln \gamma \sqrt{x} - \sqrt{x} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{1! 2!} \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{x^2}{2! 3!} + \dots \right] \\ &= \frac{J_0(2i\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{J_1(2i\sqrt{x})}{i} (\ln \gamma \sqrt{x} - 1) - \sqrt{x} \left[ \frac{1}{2} \frac{x}{1! 2!} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{x^2}{2! 3!} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{x^3}{3! 4!} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x=0} H_1^{(1)}(ix) = \lim_{x=0} H_1^{(2)}(-ix) = - \frac{2}{\pi x}$$

$$\lim_{x=0} N_1(\pm ix) = - \frac{x}{2} \pm i \frac{2}{\pi x}.$$

Setzt man  $J_0(x\sqrt{i}) = U_0 + iV_0$ , so ist

$$\left. \begin{aligned} \Re N_0(x\sqrt{i}) \\ \Im N_0(x\sqrt{i}) \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\pi} \left( U_0 \ln \frac{\gamma x}{2} + R_2 \right) \mp \frac{1}{2} V_0,$$

$$\left. \begin{aligned} \Im N_0(x\sqrt{i}) \\ \Re N_0(x\sqrt{i}) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} U_0 \pm \frac{2}{\pi} \left( V_0 \ln \frac{\gamma x}{2} + R_1 \right),$$

wo

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{5!^2} - \dots \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{11}{216} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{137}{864000} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 R_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{4!^2} \\
 &\quad + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{12}}{6!^2} - \dots \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{25}{6 \cdot 912} \left(\frac{x}{2}\right)^8 + \frac{49}{10 \cdot 368 \cdot 000} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} - \frac{761}{455 \cdot 196 \cdot 672 \cdot 000} \left(\frac{x}{2}\right)^{16} + \dots \\
 H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) &= \frac{1}{2} J_0(x\sqrt{i}) + i \frac{2}{\pi} \left[ P_1 + iP_2 + \left(\ln \frac{\gamma x}{2} - 1\right) J_0(x\sqrt{i}) \right],
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{(x/2)^4}{2!^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{(x/2)^8}{4!^2} + \dots \\
 P_2 &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \dots
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x=0} N_0(x\sqrt{i}) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} + \frac{i}{2}$$

$$\lim_{x=0} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = \frac{1}{2} - i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}.$$

Setzt man

$$J_0(x\sqrt{i}) = U_0 + iV_0 \quad \text{und} \quad J_1(x\sqrt{i}) = U_1 + iV_1,$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} \Re N_1(x\sqrt{i}) \\ \Im H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) \end{aligned} \right\} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi x} (U_0 + V_0) + \frac{2}{\pi} \left( U_1 \ln \frac{\gamma x}{2} - R_1 \right) \mp \frac{1}{2} V_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \Im N_1(x\sqrt{i}) \\ \Re H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} U_1 \mp \frac{\sqrt{2}}{\pi x} (V_0 - U_0) \mp \frac{2}{\pi} \left( R_2 - V_1 \ln \frac{\gamma x}{2} \right),$$

wo

$$\begin{aligned}
 R_1 + iR_2 &= \frac{x}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1!1!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 e^{\frac{3\pi}{4}} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 e^{\frac{5\pi}{4}} - \dots \\
 \left. \begin{aligned} R_1 \sqrt{2} \\ R_2 \sqrt{2} \end{aligned} \right\} &= \frac{x}{2} \pm \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{11}{72} \left(\frac{x}{2}\right)^5 \mp \frac{25}{1728} \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \frac{137}{172800} \left(\frac{x}{2}\right)^9 \\
 &\quad \pm \frac{147}{5184000} \left(\frac{x}{2}\right)^{11} - \frac{121}{169344000} \left(\frac{x}{2}\right)^{13} \mp \frac{761}{56899584000} \left(\frac{x}{2}\right)^{15} + \dots
 \end{aligned}$$

$$H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = \frac{1}{2} J_1(x\sqrt{i}) + i \frac{2}{\pi} \left[ \left(\ln \frac{\gamma x}{2} - 1\right) J_1(x\sqrt{i}) - \frac{J_0(x\sqrt{i})}{x\sqrt{i}} + P_1 + iP_2 \right],$$

wo

$$P_1 + iP_2 = \frac{1}{2} \frac{(x/2)^3}{1!1!} e^{\frac{3\pi}{4}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(x/2)^5}{2!3!} e^{\frac{5\pi}{4}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{(x/2)^7}{3!4!} e^{\frac{7\pi}{4}} - \dots$$

$$\lim_{x=0} N_1(x\sqrt{i}) = -\frac{2}{\pi x} \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{\pi x} (-1+i)$$

$$\lim_{x=0} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\frac{2}{\pi x} \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{\pi x} (-1-i).$$

## 2. Halbkonvergente Reihen.

Wenn  $|x|$  zugleich gegen 1 und gegen  $p$  groß ist, so lassen sich die Funktionswerte aus den hier unter a) und b) folgenden Ausdrücken berechnen:

### a) Reelles Argument.

$$\begin{aligned} S_p(x) &= 1 + \frac{4p^2-1}{1!4x} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(4x)^2} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!(4x)^3} + \dots \\ &= 1 + \sum_{v=1,2,\dots} \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)\dots(4p^2-[2v-1]^2)}{v!(4x)^v} \end{aligned}$$

$$S_p(\pm ix) = P_p\left(\frac{x}{2}\right) \mp i Q_p\left(\frac{x}{2}\right), \text{ wo}$$

$$P_p(x) = 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)}{4!(8x)^4} - \dots$$

$$Q_p(x) = \frac{4p^2-1}{8x} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!(8x)^3} + \dots$$

Bricht man mit dem  $k$ -ten Gliede ab und ist bei  $P_p(x)$  die Gliederzahl  $k > \frac{1}{4}(2p-5)$ , bei  $Q_p(x)$  die Gliederzahl  $k > \frac{1}{4}(2p-7)$ , so ist der Fehler kleiner als der absolute Betrag des folgenden Gliedes (vgl. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen, S. 52. MPS Nr. 4, Leipzig 1908, B. G. Teubner). Man gehe also in der Reihe nur so weit, wie die Glieder abnehmen.

$$J_p(x)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = P_p(x) \cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) - Q_p(x) \sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$$

$$J_p(x)\sqrt{2\pi x} = S_p(-2ix)e^{i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} + S_p(2ix)e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}$$

$$N_p(x)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = P_p(x) \sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) + Q_p(x) \cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$$

$$iN_p(x)\sqrt{2\pi x} = S_p(-2ix)e^{i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} - S_p(2ix)e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}.$$

Große Wurzeln von  $J_p(x_v) = 0$ :

$$x_v = a - \frac{m-1}{8a} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8a)^3} - \frac{32(m-1)(83m^2-982m+3779)}{15(8a)^5} + \dots,$$

wo

$$a = \frac{\pi}{4}(2p-1+4v) \quad \text{und} \quad m = 4p^2.$$

$$J_0(x) \sqrt{\frac{1}{2} \pi x} = P_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_0(x) \sqrt{\frac{1}{2} \pi x} = P_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P_0(x) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! (8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! (8x)^4} - \dots$$

$$= 1 - \frac{9}{128x^2} + \frac{3675}{32768x^4} - \dots$$

$$- Q_0(x) = \frac{1}{8x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! (8x)^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! (8x)^5} - \dots$$

$$= \frac{1}{8x} - \frac{75}{1024x^3} + \frac{59535}{262144x^5} - \dots$$

$$\lim_{x=\infty} J_0(x) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}, \quad \lim_{x=\infty} N_0(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}$$

Große Wurzeln von  $J_0(x_\nu) = 0$ :

$$\frac{x_\nu}{\pi} = \nu - \frac{1}{4} + \frac{0,50661}{4\nu - 1} - \frac{0,053041}{(4\nu - 1)^3} + \frac{0,262051}{(4\nu - 1)^5} - \dots$$

$$J_1(x) \sqrt{\frac{1}{2} \pi x} = P_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_1(x) \sqrt{\frac{1}{2} \pi x} = -P_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{3 \cdot 5}{2! (8x)^2} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 45}{4! (8x)^4} + \dots$$

$$= 1 + \frac{15}{128x^2} - \frac{4725}{32768x^4} + \dots$$

$$Q_1(x) = \frac{3}{8x} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 21}{3! (8x)^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 45 \cdot 77}{5! (8x)^5} - \dots$$

$$= \frac{3}{8x} - \frac{105}{1024x^3} + \frac{72765}{262144x^5} - \dots$$

$$\lim_{x=\infty} J_1(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}, \quad \lim_{x=\infty} N_1(x) = -\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}}$$

Große Wurzeln von  $J_1(x_\nu) = 0$ :

$$\frac{x_\nu}{\pi} = \nu + \frac{1}{4} - \frac{0,151982}{4\nu + 1} + \frac{0,15399}{(4\nu + 1)^3} - \frac{0,245835}{(4\nu + 1)^5} + \dots$$

Die Ausdrücke für  $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$  finden sich auf S. 91.

## b) Komplexes Argument.

$$H_p^{(1)}(x)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = e^{i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} S_p(-2ix)$$

$$H_p^{(2)}(x)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = e^{-i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} S_p(2ix)$$

$$i^{p+1}H_p^{(1)}(ix) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} S_p(2x) = i^{-(p+1)}H_p^{(2)}(-ix)$$

$$i^{-p}J_p(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} S_p(-2x) = i^p J_p(-ix) \quad \left(p \neq n + \frac{1}{2}\right)$$

$$N_p(\pm ix)\sqrt{2\pi x} = e^{x \pm \frac{p+1}{2}i\pi} S_p(-2x) - 2e^{-x \mp \frac{p}{2}\pi} S_p(2x).$$

Mit wachsendem  $x$  nähern sich die Funktionen  $i^{-p}J_p(ix)$ ,  $i^p J_p(-ix)$ ,  $i^{-(p+1)}N_p(ix)$ ,  $i^{p+1}N_p(-ix)$ ,  $\frac{i^p}{2}H_p^{(1)}(-ix)$ ,  $\frac{i^{-p}}{2}H_p^{(2)}(ix)$  dem Wert  $\frac{e^{+x}S_p(-2x)}{\sqrt{2\pi x}}$ , der selbst immer mehr in  $\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$  übergeht, und die Funktionen  $i^{p+1}H_p^{(1)}(ix)$  und  $i^{-(p+1)}H_p^{(2)}(-ix)$  dem Wert  $\frac{e^{-x}S_p(2x)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$  oder  $\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$ .

$$\begin{aligned} S_0(\pm 2x) &= 1 \mp \frac{1}{1!8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8x)^2} \mp \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \\ &= 1 \mp \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} \mp \frac{75}{1024x^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(\pm 2x) &= 1 \pm \frac{3}{1!8x} - \frac{3 \cdot 5}{2!(8x)^2} \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 21}{3!(8x)^3} - \dots \\ &= 1 \pm \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} \pm \frac{105}{1024x^3} - \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{x=\infty} J_0(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \lim_{x=\infty} N_0(\pm ix) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \pm iJ_0(ix)$$

$$\lim_{x=\infty} J_1(ix) = i\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \lim_{x=\infty} N_1(\pm ix) = -[i^{-1}J_1(ix)] \pm i\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

1) Bei Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. I (Braunschweig 1900, Vieweg u. Sohn) steht auf S. 185 in der Formel für  $S(z)$  versehentlich  $\frac{1}{(4z)^p}$  statt  $\frac{1}{(16z)^p}$ , worauf uns Herr Sommerfeld freundlicherweise aufmerksam gemacht hat.

$$\lim_{x=\infty} H_0^{(1)}(ix) = -i \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}},$$

$$\lim_{x=\infty} H_0^{(2)}(-ix) = i \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

$$\lim_{x=\infty} H_1^{(1)}(ix) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}},$$

$$\lim_{x=\infty} H_1^{(2)}(-ix) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$$

$$H_p^{(1)}(r e^{i\vartheta}) = \frac{e^{-r \sin \vartheta}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi r}} e^{i\left(r \cos \vartheta - \frac{2p+1}{4}\pi - \frac{\vartheta}{2}\right)} S_p\left(2r e^{i\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$H_p^{(2)}(r e^{i\vartheta}) = \frac{e^{r \sin \vartheta}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi r}} e^{-i\left(r \cos \vartheta - \frac{2p+1}{4}\pi + \frac{\vartheta}{2}\right)} S_p\left(2r e^{i\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$\lim_{r=\infty} H_p^{(1)}(r e^{i\vartheta}) = 0, \quad \text{wenn } 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\lim_{r=\infty} H_p^{(2)}(r e^{i\vartheta}) = 0, \quad \text{wenn } 0 \geq \vartheta \geq -\pi.$$

$$H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right] S_0(2x\sqrt{-i})$$

$$H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \left[ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right] S_1(2x\sqrt{-i})$$

$$S_0(2x\sqrt{-i}) = 1 - \frac{1}{8x\sqrt{2}} + \frac{75}{1024x^3\sqrt{2}} - \dots$$

$$- \frac{i}{8x\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{9\sqrt{2}}{16x} + \frac{75}{128x^2} - \dots \right)$$

$$S_1(2x\sqrt{-i}) = 1 + \frac{3}{8x\sqrt{2}} - \frac{105}{1024x^3\sqrt{2}} + \dots$$

$$+ i \frac{3}{8x\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{5\sqrt{2}}{16x} + \frac{35}{128x^2} - \dots \right)$$

$$\lim_{x=\infty} J_0(x\sqrt{\pm i}) = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \mp i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} J_1(x\sqrt{\pm i}) = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \pm i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} N_0(x\sqrt{i}) = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} N_1(x\sqrt{i}) = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\pi x} \left[ -\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\pi x} \left[ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} H_0^{(2)}(x\sqrt{-i}) = \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\pi x} \left[ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$\lim_{x=\infty} H_1^{(2)}(x\sqrt{-i}) = \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\pi x} \left[ -\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right].$$

c) Verallgemeinerung für beliebiges  $\frac{p}{x}$  bei großem  $x$ .<sup>1)</sup>

Zu unterscheiden sind drei Fälle: 1.  $p < x$ , 2.  $p > x$ , 3.  $p \cong x$ .

1. Man definiere den positiven reellen spitzen Winkel  $\tau$  ( $\frac{\pi}{2} > \tau > 0$ ) durch die Formel:

$$\cos \tau = \frac{p}{x}$$

und setze:

$$A_0(\tau) = 1$$

$$A_1(\tau) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau$$

$$A_2(\tau) = \frac{3}{128} + \frac{7}{576} \cotg^2 \tau + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau$$

.....

Dann gilt, wenn mit  $m$  eine wesentlich endliche Zahl bezeichnet wird:

$$H_p^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{ix(\sin \tau - \tau \cos \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} A_n(\tau) e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau\right)^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$H_p^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{-ix(\sin \tau - \tau \cos \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} A_n(\tau) e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau\right)^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{n=m} A_n(\tau) \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau\right)^{n+\frac{1}{2}}} \cos \left\{ x(\sin \tau - \tau \cos \tau) - (2n+1)\frac{\pi}{4} \right\},$$

$$J_{-p}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{n=m} A_n(\tau) \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau\right)^{n+\frac{1}{2}}} \cos \left\{ x(\sin \tau - (\tau - \pi) \cos \tau) - (2n+1)\frac{\pi}{4} \right\}.$$

1) Dieser Abschnitt ist ein gütiger Beitrag von Herrn P. Debye. Vgl. hierzu die demnächst in den Math. Ann. erscheinende Abhandlung.

2. Man definiere die positive reelle Größe  $\tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ) durch die Formel:

$$\text{Coj } \tau = \frac{p}{x}$$

und setze:

$$B_0(\tau) = 1$$

$$B_1(\tau) = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \text{Cotg}^2 \tau$$

$$B_2(\tau) = \frac{3}{128} - \frac{7}{576} \text{Cotg}^2 \tau + \frac{385}{3456} \text{Cotg}^4 \tau$$

dann gilt:

$$H_p^{(1)}(x) = -\frac{i}{\pi} e^{x(\tau \text{Coj } \tau - \text{Sin } \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} (-1)^n B_n(\tau) \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \text{Sin } \tau\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$H_p^{(2)}(x) = \frac{i}{\pi} e^{x(\tau \text{Coj } \tau - \text{Sin } \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} (-1)^n B_n(\tau) \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \text{Sin } \tau\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi} e^{-x(\tau \text{Coj } \tau - \text{Sin } \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} B_n(\tau) \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \text{Sin } \tau\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$J_{-p}(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi} e^{x(\tau \text{Coj } \tau - \text{Sin } \tau)} \sum_{n=0}^{n=m} (-1)^n B_n(\tau) \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \text{Sin } \tau\right)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

3. Man setze:

$$\frac{p}{x} = 1 - \varepsilon$$

und definiere Funktionen  $C_n$  durch die Formeln:

$$C_0(\varepsilon x) = 1,$$

$$C_1(\varepsilon x) = \varepsilon x,$$

$$C_2(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} - \frac{1}{20},$$

$$C_3(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^3 x^3}{6} - \frac{\varepsilon x}{15},$$

$$C_4(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^4 x^4}{24} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280},$$

dann gilt:

$$H_p^{(1)}(x) = -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=m} 6^{\frac{n+1}{3}} e^{i(n+1)\frac{2\pi}{3}} \sin(n + \frac{1}{3}) \frac{\pi}{3} C_n(\varepsilon x) \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$H_p^{(2)}(x) = -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=m} 6^{\frac{n+1}{3}} e^{-i(n+1)\frac{2\pi}{3}} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} C_n(\varepsilon x) \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$J_p(x) = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=m} 6^{\frac{n+1}{3}} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} C_n(\varepsilon x) \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$J_{-p}(x) = -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=m} 6^{\frac{n+1}{3}} \sin(n+1)\frac{\pi}{3} \cos\left\{p + (n+1)\frac{2}{3}\right\} \pi C_n(\varepsilon x) \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}}.$$

### 3. Herkunft der Tafeln.

Tafel	I	rührt her von Prandtl, Kipp-Erscheinungen. Inaug.-Diss. München 1899, S. 25.
„	II	„ „ „ Lommel, Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Münch. Ber. 1886.
„	III	„ „ „ Bessel, Berl. Ak. Abh. 1824, 46—52 bis $x=3,2$ und Meißel, Tafel der Besselschen Funktionen. Berl. Ak. Abhdlgn. 1888, 1—23.
„	IV	„ „ „ R. W. Wilson and B. O. Peirce, Bull. Am. Math. Soc. (2) <b>3</b> , 153—155, 1897.
„	V	„ „ „ Meißel, Progr. Oberr. Kiel 1890.
„	VI	„ „ „ B. A. Smith, Messenger of Math. <b>26</b> , 99, 1897.
„	VII	„ „ „ St. Aldis, Proc. Royal Soc. London <b>66</b> , 41, 1900.
„	VIII	„ „ „ B. A. Smith, Phil. Mag. (5) <b>45</b> , 122, 1898.
„	IX	„ „ „ Jahnke-Emde.
„	X	„ „ „ A. Kalähne, Ztschr. f. Math. u. Phys. <b>54</b> , 72, 1907.
„	XI	„ „ „ St. Aldis, Proc. Royal Soc. London <b>64</b> , 218, 1898.
„	XII	„ „ „ Lord Rayleigh, Lord Kelvin, Cayley, B. Price, Glaisher, Greenhill, Hicks, A. Lodge, Report British Assoc. 1893, S. 227—279. (Im Original ist der Argumentschritt 0,001 statt 0,01.) Die Werte am Schluß für $x=5,2$ bis 11,0 stammen von St. Aldis, Proc. Royal Soc. London <b>64</b> , 219—221, 1899.



Tafel	XIII	rührt	her	von	Jahnke-Emde.
"	XIV	"	"	"	St. Aldis, Proc. Royal Soc. London <b>64</b> , 219, 1898.
"	XV	"	"	"	St. Aldis, Proc. Royal Soc. London <b>66</b> , 42, 43, 1900.
"	XVI	"	"	"	
"	XVII	"	"	"	Jahnke-Emde.
"	XVIII	"	"	"	
"	XIX	"	"	"	
"	XX	"	"	"	M. Maclean, mitgeteilt in W. Thomson, Math. and phys. Papers III, 493, Cambridge 1890, Clay and Sons.
"	XXI	"	"	"	M. Maclean (vgl. vorsteh. Angabe) und J. Zenneck, nach einem noch nicht veröffentlichten Mskr., vgl. auch Ann. Phys. <b>11</b> , 1141, 1903.
"	XXII	"	"	"	J. Bourget, Ann. de l'École Normale <b>3</b> , 82, 1866.
"	XXIII	"	"	"	Meißel, zuerst abgedr. in Gray and Mathews, A treatise on Bessel Functions. London 1895, Macmillan, S. 266—279.
"	XXIV	"	"	"	Lord Rayleigh, Cayley, Glaisher, Greenhill, M. Hicks, B. Price, W. Thomson, Lodge, Report Brit. Assoc. 1889, S. 28—32.
"	XXV	"	"	"	Die zwei ersten Wurzeln der Kirchhoff'schen Gleichung ( $n = 0$ ) rühren von Rayleigh her, Theory of Sound I, 367 (1894), die übrigen von F. A. Schulze, Ann. Phys. (4) <b>24</b> , 788—790, 1907.
"	XXVI	"	"	"	A. Kalähne, Ztschr. f. Math. u. Phys. <b>54</b> , 68, 1907.
"	XXVII	"	"	"	A. Kalähne, Ztschr. f. Math. u. Phys. <b>54</b> , 69, 1907.
"	XXVIII	"	"	"	A. Kalähne, Ztschr. f. Math. u. Phys. <b>54</b> , 81, 1907.
"	XXIX	"	"	"	A. Kalähne, Ztschr. f. Math. u. Phys. <b>54</b> , 73, 1907.

4. Tafeln für die Ordnungen  $\frac{1}{n}$  und  $\frac{2n+1}{2}$ .

Die kleinste Wurzel von  $J_{-\frac{1}{3}}(x) = 0$  ist (vgl. Greenhill, Proc. Camb. Phil. Soc. 4, 68):  $x = 1, 88$ .

Tafel I: Zu  $J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right)$  und  $J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right)$  (vgl. S. 91, 92).

$x$	$D$	$G$	$x$	$D$	$G$	$x$	$D$	$G$
0,0	+1,000	-1,000	3,0	0,362	-0,603	6,0	-0,524	+0,083
0,2	0,997	-0,998	3,2	0,291	-0,556	6,2	-0,551	+0,116
0,4	0,987	-0,992	3,4	0,219	-0,508	6,4	-0,572	+0,147
0,6	0,970	-0,982	3,6	0,147	-0,459	6,6	-0,588	+0,175
0,8	0,947	-0,968	3,8	0,075	-0,410	6,8	-0,596	+0,200
1,0	0,918	-0,950	4,0	0,004	-0,361	7,0	-0,597	+0,222
1,2	0,883	-0,929	4,2	-0,065	-0,311	7,2	-0,594	+0,241
1,4	0,842	-0,904	4,4	-0,132	-0,262	7,4	-0,585	+0,257
1,6	0,796	-0,876	4,6	-0,196	-0,214	7,6	-0,569	+0,270
1,8	0,745	-0,845	4,8	-0,256	-0,167	7,8	-0,550	+0,279
2,0	0,690	-0,811	5,0	-0,313	-0,121	8,0	-0,523	+0,286
2,2	0,630	-0,774	5,2	-0,365	-0,076	9,0	-0,331	+0,276
2,4	0,567	-0,735	5,4	-0,412	-0,033	10,0	-0,078	+0,203
2,6	0,501	-0,693	5,6	-0,456	+0,008	11,0	+0,200	+0,097
2,8	0,433	-0,649	5,8	-0,493	+0,047	12,0	+0,404	-0,014

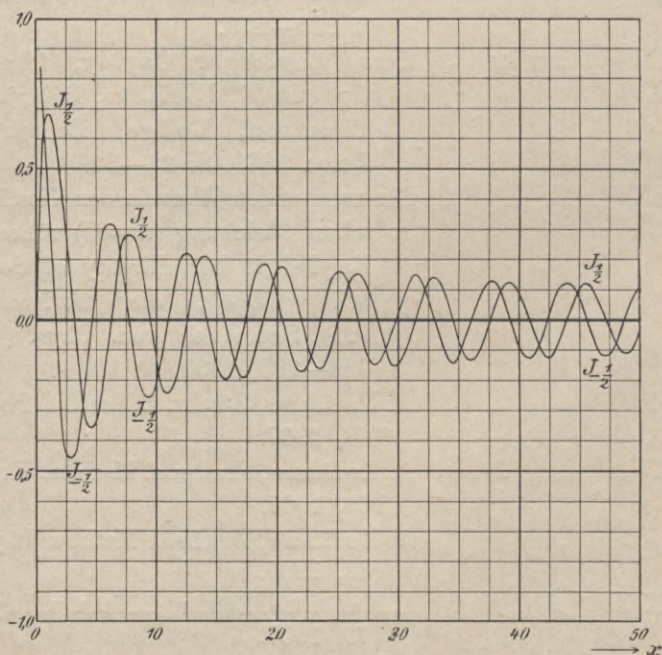


Fig. 29. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung  $\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$ .

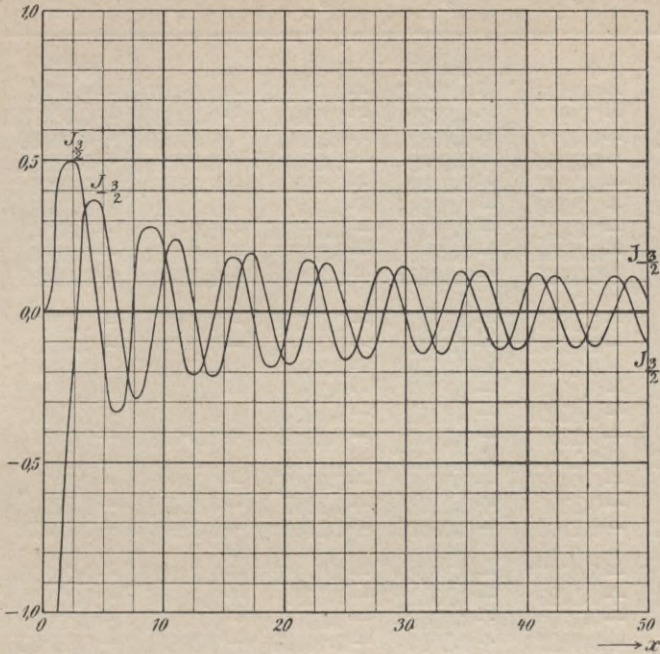


Fig. 30. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung  $\frac{3}{2}$  und  $-\frac{3}{2}$ .

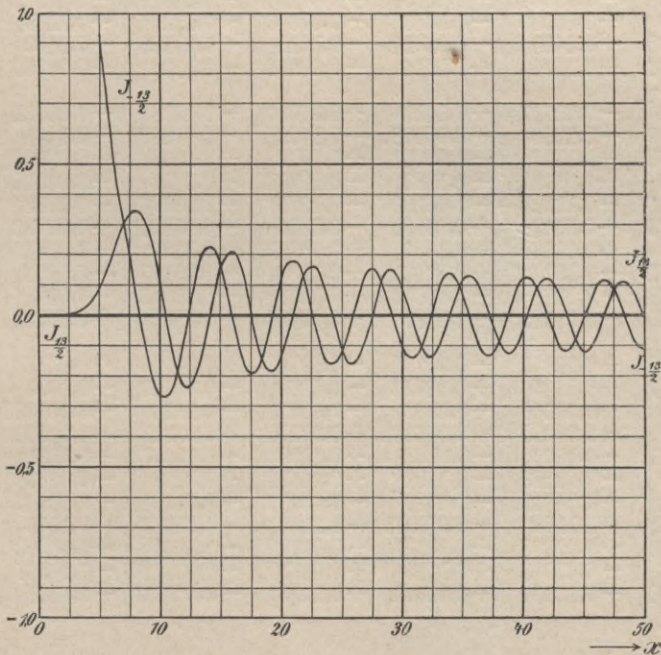


Fig. 31. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung  $\frac{13}{2}$  und  $-\frac{13}{2}$ .

$x$	$J_{\frac{1}{2}}$	$J_{\frac{3}{2}}$	$J_{\frac{5}{2}}$	$J_{\frac{7}{2}}$	$J_{\frac{9}{2}}$	$J_{\frac{11}{2}}$	$J_{\frac{13}{2}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+0,6714	+0,2403	+0,04950	+0,0 <sup>2</sup> 7186	+0,0 <sup>2</sup> 807	+0,0 <sup>4</sup> 74	+0,0 <sup>5</sup> 6
2	+0,5130	+0,4913	+0,2239	+0,06852	+0,01589	+0,0 <sup>2</sup> 2973	+0,0 <sup>3</sup> 467
3	+0,06501	+0,4777	+0,4127	+0,2101	+0,07760	+0,02266	+0,0 <sup>2</sup> 5493
4	-0,3019	+0,1853	+0,4409	+0,3658	+0,1993	+0,08261	+0,02787
5	-0,3422	-0,1697	+0,2404	+0,4100	+0,3337	+0,1906	+0,08558
6	-0,09102	-0,3279	-0,07295	+0,2671	+0,3846	+0,3098	+0,1833
7	+0,1981	-0,1991	-0,2834	-0,0 <sup>3</sup> 3403	+0,2800	+0,3634	+0,2911
8	+0,2791	+0,07593	-0,2506	-0,2326	+0,04712	+0,2856	+0,3456
9	+0,1096	+0,2545	-0,02477	-0,2683	-0,1839	+0,08439	+0,2870
10	-0,1373	+0,1980	+0,1967	-0,09965	-0,2664	-0,1401	+0,1123
11	-0,2406	-0,02293	+0,2343	+0,1294	-0,1519	-0,2538	-0,1018
12	-0,1236	-0,2047	+0,07242	+0,2348	+0,06457	-0,1864	-0,2354
13	+0,09298	-0,1937	-0,1377	+0,1407	+0,2134	+0,0 <sup>2</sup> 7055	-0,2075
14	+0,2112	-0,01407	-0,2143	-0,06245	+0,1830	+0,1801	-0,04151
15	+0,1340	+0,1654	-0,1009	-0,1991	+0,0 <sup>2</sup> 7984	+0,2039	+0,1415
16	-0,05743	+0,1874	+0,09257	-0,1585	-0,1619	+0,06743	+0,2083
17	-0,1860	+0,04231	+0,1935	+0,01461	-0,1875	-0,1139	+0,1138
18	-0,1412	-0,1320	+0,1192	+0,1651	-0,05501	-0,1926	-0,06273
19	+0,02744	-0,1795	-0,05578	+0,1649	+0,1165	-0,1097	-0,1800
20	+0,1629	-0,06466	-0,1726	+0,02152	+0,1801	+0,05953	-0,1474
21	+0,1457	+0,1023	-0,1311	-0,1335	+0,08656	+0,1706	+0,0 <sup>2</sup> 2808
22	-0,0 <sup>2</sup> 1506	+0,1700	+0,02469	-0,1644	-0,07701	+0,1329	+0,1435
23	-0,1408	+0,08253	+0,1516	-0,04958	-0,1666	-0,01563	+0,1592
24	-0,1475	-0,07523	+0,1381	+0,1040	-0,1078	-0,1444	+0,04157
25	-0,02112	-0,1590	+0,0 <sup>2</sup> 2038	+0,1594	+0,04260	-0,1441	-0,1060
26	+0,1193	-0,09664	-0,1305	+0,07155	+0,1497	-0,01972	-0,1581
27	+0,1469	+0,05030	-0,1413	-0,07646	+0,1214	+0,1169	-0,07380
28	+0,04085	+0,1466	-0,02514	-0,1511	-0,01263	+0,1470	+0,07040
29	-0,09833	+0,1074	+0,1094	-0,08858	-0,1308	+0,04798	+0,1490
30	-0,1439	-0,02727	+0,1412	+0,05080	-0,1293	-0,08961	+0,09649
31	-0,05790	-0,1330	+0,04503	+0,1402	-0,01337	-0,1441	-0,03776
32	+0,07778	-0,1152	-0,08858	+0,1014	+0,1108	-0,07024	-0,1349
33	+0,1389	+0,0 <sup>2</sup> 6053	-0,1383	-0,02701	+0,1326	+0,06318	-0,1115
34	+0,07240	+0,1182	-0,06196	-0,1274	+0,03574	+0,1368	+0,0 <sup>2</sup> 8521
35	-0,05775	+0,1202	+0,06805	-0,1105	-0,09015	+0,08732	+0,1176
36	-0,1319	+0,01335	+0,1330	+0,0 <sup>2</sup> 5119	-0,1320	-0,03812	+0,1204
37	-0,08441	-0,1027	+0,07609	+0,1130	-0,05472	-0,1263	+0,01718
38	+0,03836	-0,1226	-0,04804	+0,1163	+0,06946	-0,09984	-0,09836
39	+0,1231	-0,03091	-0,1255	+0,01482	+0,1282	+0,01476	-0,1240
40	+0,09400	+0,08649	-0,08751	-0,09743	+0,07046	+0,1133	-0,03931
41	-0,01977	+0,1225	+0,02873	-0,1190	-0,04906	+0,1083	+0,07811
42	-0,1128	+0,04656	+0,1162	-0,03273	-0,1216	+0,006668	+0,1234
43	-0,1012	-0,06990	+0,09633	+0,08110	-0,08313	-0,09850	+0,05793
44	+0,0 <sup>2</sup> 2129	-0,1202	-0,01033	+0,1190	+0,02927	-0,1131	-0,05753
45	+0,1012	-0,06023	-0,1082	+0,04854	+0,1128	-0,02599	-0,1191
46	+0,1061	+0,05315	-0,1026	-0,06430	+0,09284	-0,08247	-0,07312
47	+0,01438	+0,1158	-0,0 <sup>2</sup> 6991	-0,1165	-0,01037	+0,1146	+0,03718
48	-0,08848	+0,07188	+0,09297	-0,06220	-0,1020	+0,04306	+0,1119
49	-0,1087	-0,03648	+0,1065	+0,04735	-0,09972	-0,06566	+0,08497
50	-0,02961	-0,1095	+0,02304	+0,1118	-0,0 <sup>2</sup> 7388	-0,1131	-0,01750

$x$	$J_{-\frac{1}{2}}$	$J_{-\frac{3}{2}}$	$J_{-\frac{5}{2}}$	$J_{-\frac{7}{2}}$	$J_{-\frac{9}{2}}$	$J_{-\frac{11}{2}}$	$J_{-\frac{13}{2}}$
0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	+0.4311	-1.1025	+2.8764	-13.279	+90.0797	-797.44	+8681.7
2	-0.2348	-0.3956	+0.8282	-1.6749	+5.0340	-20.978	+110.35
3	-0.4560	+0.08701	+0.3690	-0.7021	+1.2691	-3.1053	+10.117
4	-0.2608	+0.3671	-0.01457	-0.3489	+0.6251	-1.0577	+2.2834
5	+0.1012	+0.3219	-0.2944	-0.02755	+0.3329	-0.5718	+0.9249
6	+0.3128	+0.03889	-0.3322	+0.2379	+0.05460	-0.3198	+0.5318
7	+0.2274	-0.2306	-0.1285	+0.3224	-0.1939	-0.07313	+0.3088
8	-0.04105	-0.2740	+0.1438	+0.1841	-0.3049	+0.1589	+0.08641
9	-0.2423	-0.08268	+0.2699	-0.06725	-0.2176	+0.2848	-0.1306
10	-0.2117	+0.1584	+0.1642	-0.2405	+0.0 <sup>a</sup> 4188	+0.2368	-0.2646
11	+0.0 <sup>a</sup> 1064	+0.2405	-0.06665	-0.2102	+0.2004	+0.04622	-0.2466
12	+0.1944	+0.1074	-0.2212	-0.01522	+0.2301	-0.1573	-0.08586
13	+0.2008	-0.1084	-0.1758	+0.1760	+0.08100	-0.2321	+0.1154
14	+0.02916	-0.2133	+0.01655	+0.2074	-0.1203	-0.1301	+0.2225
15	-0.1565	-0.1235	+0.1812	+0.06313	-0.2107	+0.06327	+0.1643
16	-0.1910	+0.06937	+0.1780	-0.1250	-0.1233	+0.1944	-0.01031
17	-0.05325	+0.1892	+0.01986	-0.1950	+0.06044	+0.1630	-0.1659
18	+0.1242	+0.1343	-0.1466	-0.09362	+0.1830	+0.0 <sup>a</sup> 2131	-0.1843
19	+0.1810	-0.03696	-0.1751	+0.08305	+0.1445	-0.1515	-0.05682
20	+0.07281	-0.1665	-0.04783	+0.1785	-0.01464	-0.1719	+0.1092
21	-0.09537	-0.1411	+0.1155	+0.1136	-0.1534	-0.04788	+0.1785
22	-0.1701	+0.0 <sup>a</sup> 9238	+0.1688	-0.04761	-0.1537	+0.1105	+0.09845
23	-0.08865	+0.1446	+0.06978	-0.1598	-0.02114	+0.1681	-0.05924
24	+0.06909	+0.1446	-0.08716	-0.1265	+0.1240	+0.07994	-0.1607
25	+0.1582	+0.01479	-0.1599	+0.01720	+0.1551	-0.07304	-0.1230
26	+0.1012	-0.1232	-0.08701	+0.1399	+0.04933	-0.1570	+0.01710
27	-0.04486	-0.1452	+0.06099	+0.1339	-0.09571	-0.1020	+0.1373
28	-0.1451	-0.03567	+0.1490	+0.0 <sup>a</sup> 9064	-0.1512	+0.03955	+0.1357
29	-0.1108	+0.1021	+0.1003	-0.1194	-0.07144	+0.1416	+0.01773
30	+0.02247	+0.1432	-0.03679	-0.1370	+0.06877	+0.1164	-0.1115
31	+0.1311	+0.05367	-0.1363	-0.03169	+0.1434	-0.0 <sup>a</sup> 9951	-0.1399
32	+0.1177	-0.08145	-0.1100	+0.09865	+0.08845	-0.1235	-0.04599
33	-0.0 <sup>a</sup> 1844	-0.1388	+0.01447	+0.1366	-0.04345	-0.1248	+0.08504
34	-0.1161	-0.06898	+0.1222	+0.05101	-0.1327	-0.01588	+0.1378
35	-0.1219	+0.06123	+0.1166	-0.07789	-0.1011	+0.1039	+0.06841
36	-0.01702	+0.1324	+0.0 <sup>a</sup> 5987	-0.1332	+0.01991	+0.1282	-0.05909
37	+0.1004	+0.08170	-0.1070	-0.06724	+0.1197	+0.03811	-0.1311
38	+0.1236	-0.04161	-0.1203	+0.05745	+0.1098	-0.08344	-0.08560
39	+0.03407	-0.1240	-0.02453	+0.1272	+0.0 <sup>a</sup> 1705	-0.1276	+0.03427
40	-0.08414	-0.09190	+0.09103	+0.08052	-0.1051	-0.05687	+0.1208
41	-0.1230	+0.02277	+0.1214	-0.03757	-0.1150	+0.06280	+0.09810
42	-0.04925	+0.1140	+0.04110	-0.1189	-0.02128	+0.1204	-0.01026
43	+0.06754	+0.09964	-0.07450	-0.09097	+0.08931	+0.07228	-0.1078
44	+0.1203	-0.0 <sup>a</sup> 4863	-0.1200	+0.01849	+0.1170	-0.04243	-0.1064
45	+0.06248	-0.1026	-0.05564	+0.1088	+0.03874	-0.1165	-0.01026
46	-0.05084	-0.1050	+0.05769	+0.09871	-0.07271	-0.08449	+0.09291
47	-0.1155	-0.01193	+0.1163	-0.0 <sup>a</sup> 443	-0.1162	+0.02269	+0.1109
48	-0.07372	+0.09001	+0.06810	-0.08292	-0.05600	+0.09342	+0.03460
49	+0.03426	+0.1080	-0.04088	-0.1038	+0.05571	+0.09361	-0.07673
50	+0.1089	+0.02743	-0.1105	-0.01638	+0.1128	-0.0 <sup>a</sup> 3933	-0.1120

## 5. Tafeln für die Ordnungen Null und Eins.

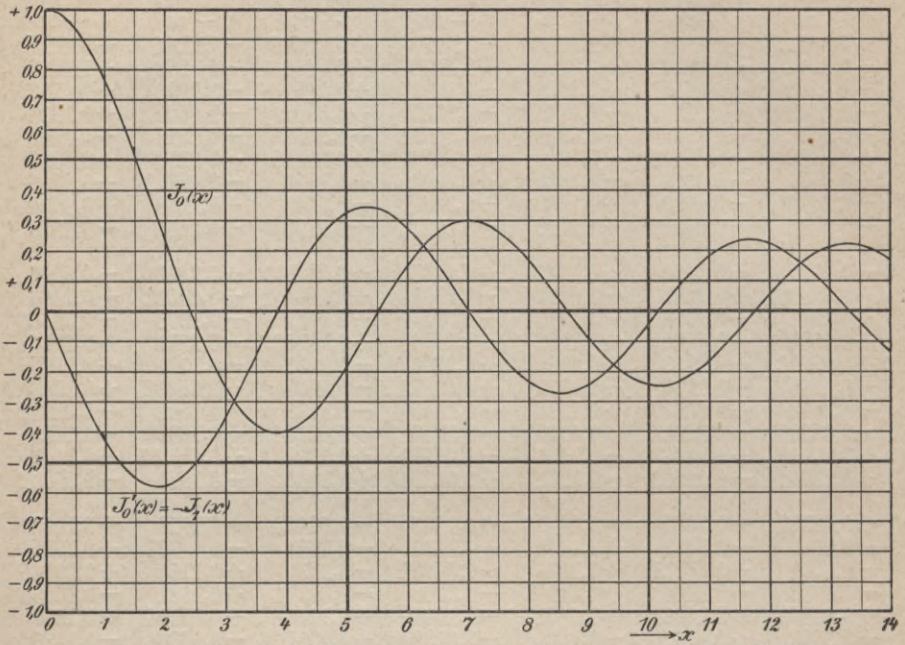


Fig. 32. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins.

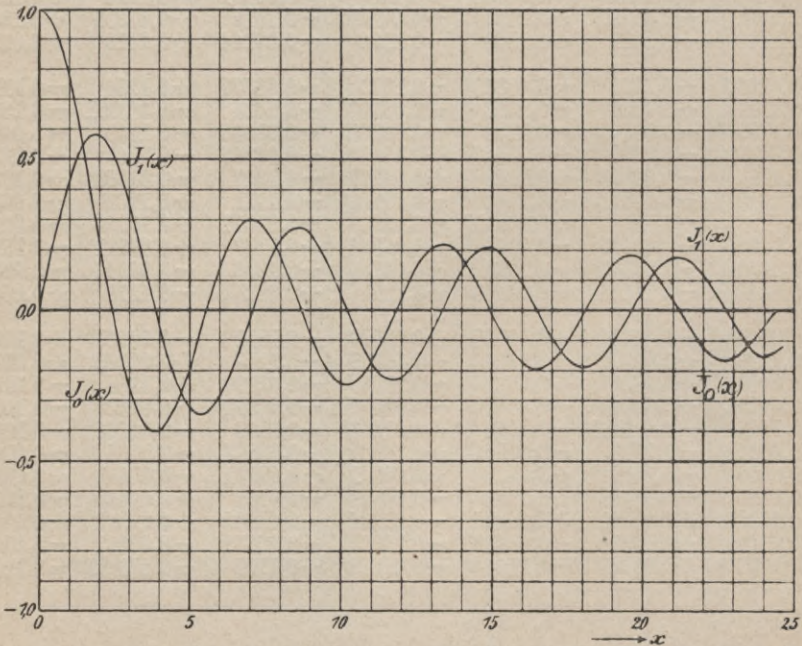


Fig. 33. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins.

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	0,45	0,9500	-0,2194	0,90	0,8075	-0,4059
0,01	1,0000	-0,0050	0,46	0,9478	-0,2240	0,91	0,8034	-0,4095
0,02	0,9999	-0,0100	0,47	0,9455	-0,2286	0,92	0,7993	-0,4130
0,03	0,9998	-0,0150	0,48	0,9432	-0,2332	0,93	0,7952	-0,4165
0,04	0,9996	-0,0200	0,49	0,9409	-0,2377	0,94	0,7910	-0,4200
0,05	0,9994	-0,0250	0,50	0,9385	-0,2423	0,95	0,7868	-0,4234
0,06	0,9991	-0,0300	0,51	0,9360	-0,2468	0,96	0,7825	-0,4268
0,07	0,9988	-0,0350	0,52	0,9335	-0,2513	0,97	0,7783	-0,4302
0,08	0,9984	-0,0400	0,53	0,9310	-0,2558	0,98	0,7739	-0,4335
0,09	0,9980	-0,0450	0,54	0,9284	-0,2603	0,99	0,7696	-0,4368
0,10	0,9975	-0,0499	0,55	0,9258	-0,2647	1,00	0,7652	-0,4401
0,11	0,9970	-0,0549	0,56	0,9231	-0,2692	1,01	0,7608	-0,4433
0,12	0,9964	-0,0599	0,57	0,9204	-0,2736	1,02	0,7563	-0,4465
0,13	0,9958	-0,0649	0,58	0,9177	-0,2780	1,03	0,7519	-0,4497
0,14	0,9951	-0,0698	0,59	0,9149	-0,2823	1,04	0,7473	-0,4528
0,15	0,9944	-0,0748	0,60	0,9120	-0,2867	1,05	0,7428	-0,4559
0,16	0,9936	-0,0797	0,61	0,9091	-0,2910	1,06	0,7382	-0,4590
0,17	0,9928	-0,0847	0,62	0,9052	-0,2953	1,07	0,7336	-0,4620
0,18	0,9919	-0,0896	0,63	0,9032	-0,2996	1,08	0,7290	-0,4650
0,19	0,9910	-0,0946	0,64	0,9002	-0,3039	1,09	0,7243	-0,4680
0,20	0,9900	-0,0995	0,65	0,8971	-0,3081	1,10	0,7196	-0,4709
0,21	0,9890	-0,1044	0,66	0,8940	-0,3124	1,11	0,7149	-0,4738
0,22	0,9879	-0,1093	0,67	0,8909	-0,3166	1,12	0,7101	-0,4767
0,23	0,9868	-0,1142	0,68	0,8877	-0,3207	1,13	0,7054	-0,4795
0,24	0,9857	-0,1191	0,69	0,8845	-0,3249	1,14	0,7006	-0,4823
0,25	0,9844	-0,1240	0,70	0,8812	-0,3290	1,15	0,6957	-0,4850
0,26	0,9832	-0,1289	0,71	0,8779	-0,3331	1,16	0,6909	-0,4878
0,27	0,9819	-0,1338	0,72	0,8745	-0,3372	1,17	0,6860	-0,4904
0,28	0,9805	-0,1386	0,73	0,8711	-0,3412	1,18	0,6810	-0,4931
0,29	0,9791	-0,1435	0,74	0,8677	-0,3452	1,19	0,6761	-0,4957
0,30	0,9776	-0,1483	0,75	0,8642	-0,3492	1,20	0,6711	-0,4983
0,31	0,9761	-0,1531	0,76	0,8607	-0,3532	1,21	0,6661	-0,5008
0,32	0,9746	-0,1580	0,77	0,8572	-0,3572	1,22	0,6611	-0,5033
0,33	0,9730	-0,1628	0,78	0,8536	-0,3611	1,23	0,6561	-0,5058
0,34	0,9713	-0,1676	0,79	0,8500	-0,3650	1,24	0,6510	-0,5082
0,35	0,9696	-0,1723	0,80	0,8463	-0,3688	1,25	0,6459	-0,5106
0,36	0,9679	-0,1771	0,81	0,8426	-0,3727	1,26	0,6408	-0,5130
0,37	0,9661	-0,1819	0,82	0,8388	-0,3765	1,27	0,6356	-0,5153
0,38	0,9642	-0,1866	0,83	0,8350	-0,3803	1,28	0,6305	-0,5176
0,39	0,9623	-0,1913	0,84	0,8312	-0,3840	1,29	0,6253	-0,5198
0,40	0,9604	-0,1960	0,85	0,8274	-0,3878	1,30	0,6201	-0,5220
0,41	0,9584	-0,2007	0,86	0,8235	-0,3915	1,31	0,6149	-0,5242
0,42	0,9564	-0,2054	0,87	0,8195	-0,3951	1,32	0,6096	-0,5263
0,43	0,9543	-0,2101	0,88	0,8156	-0,3988	1,33	0,6043	-0,5284
0,44	0,9522	-0,2147	0,89	0,8116	-0,4024	1,34	0,5990	-0,5305

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
1,35	0,5937	-0,5325	1,80	0,3400	-0,5815	2,25	0,08275	-0,5484
1,36	0,5884	-0,5344	1,81	0,3342	-0,5817	2,26	0,07727	-0,5468
1,37	0,5830	-0,5364	1,82	0,3284	-0,5818	2,27	0,07181	-0,5451
1,38	0,5777	-0,5383	1,83	0,3225	-0,5818	2,28	0,06637	-0,5434
1,39	0,5723	-0,5401	1,84	0,3167	-0,5819	2,29	0,06095	-0,5416
1,40	0,5669	-0,5419	1,85	0,3109	-0,5818	2,30	0,05554	-0,5399
1,41	0,5614	-0,5437	1,86	0,3051	-0,5818	2,31	0,05015	-0,5381
1,42	0,5560	-0,5455	1,87	0,2993	-0,5817	2,32	0,04478	-0,5362
1,43	0,5505	-0,5472	1,88	0,2934	-0,5816	2,33	0,03943	-0,5343
1,44	0,5450	-0,5488	1,89	0,2866	-0,5814	2,34	0,03409	-0,5324
1,45	0,5395	-0,5504	1,90	0,2818	-0,5812	2,35	0,02878	-0,5305
1,46	0,5340	-0,5520	1,91	0,2760	-0,5809	2,36	0,02348	-0,5285
1,47	0,5285	-0,5536	1,92	0,2702	-0,5806	2,37	0,01821	-0,5265
1,48	0,5230	-0,5551	1,93	0,2644	-0,5803	2,38	0,01295	-0,5244
1,49	0,5174	-0,5565	1,94	0,2586	-0,5799	2,39	0,007720	-0,5223
1,50	0,5118	-0,5579	1,95	0,2528	-0,5794	2,40	+0,002508	-0,5202
1,51	0,5062	-0,5593	1,96	0,2470	-0,5790	2,41	-0,002683	-0,5180
1,52	0,5006	-0,5607	1,97	0,2412	-0,5785	2,42	-0,007852	-0,5158
1,53	0,4950	-0,5620	1,98	0,2354	-0,5779	2,43	-0,01300	-0,5136
1,54	0,4894	-0,5632	1,99	0,2297	-0,5773	2,44	-0,01812	-0,5113
1,55	0,4838	-0,5644	2,00	0,2239	-0,5767	2,45	-0,02323	-0,5091
1,56	0,4781	-0,5656	2,01	0,2181	-0,5761	2,46	-0,02831	-0,5067
1,57	0,4725	-0,5667	2,02	0,2124	-0,5754	2,47	-0,03336	-0,5044
1,58	0,4668	-0,5678	2,03	0,2066	-0,5746	2,48	-0,03839	-0,5020
1,59	0,4611	-0,5689	2,04	0,2009	-0,5738	2,49	-0,04340	-0,4996
1,60	0,4554	-0,5699	2,05	0,1951	-0,5730	2,50	-0,04838	-0,4971
1,61	0,4497	-0,5709	2,06	0,1894	-0,5721	2,51	-0,05334	-0,4946
1,62	0,4440	-0,5718	2,07	0,1837	-0,5712	2,52	-0,05828	-0,4921
1,63	0,4383	-0,5727	2,08	0,1780	-0,5703	2,53	-0,06318	-0,4895
1,64	0,4325	-0,5735	2,09	0,1723	-0,5693	2,54	-0,06807	-0,4870
1,65	0,4268	-0,5743	2,10	0,1666	-0,5683	2,55	-0,07292	-0,4843
1,66	0,4210	-0,5751	2,11	0,1609	-0,5672	2,56	-0,07775	-0,4817
1,67	0,4153	-0,5758	2,12	0,1553	-0,5661	2,57	-0,08256	-0,4790
1,68	0,4095	-0,5765	2,13	0,1496	-0,5650	2,58	-0,08733	-0,4763
1,69	0,4038	-0,5772	2,14	0,1440	-0,5638	2,59	-0,09208	-0,4736
1,70	0,3980	-0,5778	2,15	0,1383	-0,5626	2,60	-0,09680	-0,4708
1,71	0,3922	-0,5783	2,16	0,1327	-0,5614	2,61	-0,1015	-0,4680
1,72	0,3864	-0,5788	2,17	0,1271	-0,5601	2,62	-0,1062	-0,4652
1,73	0,3806	-0,5793	2,18	0,1215	-0,5587	2,63	-0,1108	-0,4624
1,74	0,3748	-0,5798	2,19	0,1159	-0,5574	2,64	-0,1154	-0,4595
1,75	0,3690	-0,5802	2,20	0,1104	-0,5560	2,65	-0,1200	-0,4566
1,76	0,3632	-0,5805	2,21	0,1048	-0,5545	2,66	-0,1245	-0,4536
1,77	0,3574	-0,5808	2,22	0,0993	-0,5530	2,67	-0,1291	-0,4507
1,78	0,3516	-0,5811	2,23	0,0937	-0,5515	2,68	-0,1336	-0,4477
1,79	0,3458	-0,5813	2,24	0,0882	-0,5500	2,69	-0,1380	-0,4446



$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
2,70	-0,1424	-0,4416	3,15	-0,3066	-0,2813	3,60	-0,3918	-0,0955
2,71	-0,1469	-0,4385	3,16	-0,3094	-0,2773	3,61	-0,3927	-0,0913
2,72	-0,1512	-0,4354	3,17	-0,3122	-0,2733	3,62	-0,3936	-0,0871
2,73	-0,1556	-0,4323	3,18	-0,3149	-0,2694	3,63	-0,3944	-0,0829
2,74	-0,1599	-0,4291	3,19	-0,3176	-0,2654	3,64	-0,3953	-0,0788
2,75	-0,1641	-0,4260	3,20	-0,3202	-0,2613	3,65	-0,3960	-0,0746
2,76	-0,1684	-0,4228	3,21	-0,3228	-0,2573	3,66	-0,3967	-0,0704
2,77	-0,1726	-0,4195	3,22	-0,3253	-0,2533	3,67	-0,3974	-0,0663
2,78	-0,1768	-0,4163	3,23	-0,3278	-0,2492	3,68	-0,3981	-0,0621
2,79	-0,1809	-0,4130	3,24	-0,3303	-0,2452	3,69	-0,3987	-0,0580
2,80	-0,1850	-0,4097	3,25	-0,3328	-0,2411	3,70	-0,3992	-0,0538
2,81	-0,1891	-0,4064	3,26	-0,3351	-0,2370	3,71	-0,3997	-0,0497
2,82	-0,1932	-0,4030	3,27	-0,3375	-0,2330	3,72	-0,4002	-0,0456
2,83	-0,1972	-0,3997	3,28	-0,3398	-0,2289	3,73	-0,4007	-0,0414
2,84	-0,2012	-0,3963	3,29	-0,3421	-0,2248	3,74	-0,4011	-0,0373
2,85	-0,2051	-0,3928	3,30	-0,3443	-0,2207	3,75	-0,4014	-0,0332
2,86	-0,2090	-0,3894	3,31	-0,3465	-0,2165	3,76	-0,4017	-0,0291
2,87	-0,2129	-0,3859	3,32	-0,3486	-0,2124	3,77	-0,4020	-0,0250
2,88	-0,2167	-0,3825	3,33	-0,3507	-0,2083	3,78	-0,4022	-0,0210
2,89	-0,2205	-0,3790	3,34	-0,3528	-0,2042	3,79	-0,4024	-0,0169
2,90	-0,2243	-0,3754	3,35	-0,3548	-0,2000	3,80	-0,4026	-0,0128
2,91	-0,2280	-0,3719	3,36	-0,3568	-0,1959	3,81	-0,4027	-0,0088
2,92	-0,2317	-0,3683	3,37	-0,3587	-0,1917	3,82	-0,4027	-0,0047
2,93	-0,2354	-0,3647	3,38	-0,3606	-0,1876	3,83	-0,4028	-0,0007
2,94	-0,2390	-0,3611	3,39	-0,3625	-0,1834	3,84	-0,4027	+0,0033
2,95	-0,2426	-0,3575	3,40	-0,3643	-0,1792	3,85	-0,4027	+0,0074
2,96	-0,2462	-0,3538	3,41	-0,3661	-0,1751	3,86	-0,4026	+0,0114
2,97	-0,2497	-0,3502	3,42	-0,3678	-0,1709	3,87	-0,4025	+0,0153
2,98	-0,2532	-0,3465	3,43	-0,3695	-0,1667	3,88	-0,4023	+0,0193
2,99	-0,2566	-0,3428	3,44	-0,3711	-0,1625	3,89	-0,4021	+0,0233
3,00	-0,2601	-0,3391	3,45	-0,3727	-0,1583	3,90	-0,4018	+0,0272
3,01	-0,2634	-0,3353	3,46	-0,3743	-0,1541	3,91	-0,4015	+0,0312
3,02	-0,2668	-0,3316	3,47	-0,3758	-0,1500	3,92	-0,4012	+0,0351
3,03	-0,2701	-0,3278	3,48	-0,3773	-0,1458	3,93	-0,4008	+0,0390
3,04	-0,2733	-0,3240	3,49	-0,3787	-0,1416	3,94	-0,4004	+0,0429
3,05	-0,2765	-0,3202	3,50	-0,3801	-0,1374	3,95	-0,4000	+0,0468
3,06	-0,2797	-0,3164	3,51	-0,3815	-0,1332	3,96	-0,3995	+0,0507
3,07	-0,2829	-0,3125	3,52	-0,3828	-0,1290	3,97	-0,3990	+0,0546
3,08	-0,2860	-0,3087	3,53	-0,3841	-0,1248	3,98	-0,3984	+0,0584
3,09	-0,2890	-0,3048	3,54	-0,3853	-0,1206	3,99	-0,3978	+0,0622
3,10	-0,2921	-0,3009	3,55	-0,3865	-0,1164	4,00	-0,3971	+0,0660
3,11	-0,2951	-0,2970	3,56	-0,3876	-0,1122	4,01	-0,3965	+0,0698
3,12	-0,2980	-0,2931	3,57	-0,3887	-0,1080	4,02	-0,3958	+0,0736
3,13	-0,3009	-0,2892	3,58	-0,3898	-0,1038	4,03	-0,3950	+0,0774
3,14	-0,3038	-0,2852	3,59	-0,3908	-0,0996	4,04	-0,3942	+0,0811

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
4,05	-0,3934	+0,0849	4,50	-0,3205	+0,2311	4,95	-0,1938	+0,3216
4,06	-0,3925	+0,0886	4,51	-0,3182	+0,2337	4,96	-0,1906	+0,3228
4,07	-0,3916	+0,0923	4,52	-0,3159	+0,2364	4,97	-0,1874	+0,3241
4,08	-0,3907	+0,0960	4,53	-0,3135	+0,2390	4,98	-0,1841	+0,3253
4,09	-0,3897	+0,0996	4,54	-0,3111	+0,2416	4,99	-0,1809	+0,3264
4,10	-0,3887	+0,1033	4,55	-0,3087	+0,2442	5,00	-0,1776	+0,3276
4,11	-0,3876	+0,1069	4,56	-0,3062	+0,2467	5,01	-0,1743	+0,3287
4,12	-0,3865	+0,1105	4,57	-0,3037	+0,2492	5,02	-0,1710	+0,3298
4,13	-0,3854	+0,1141	4,58	-0,3012	+0,2517	5,03	-0,1677	+0,3308
4,14	-0,3842	+0,1177	4,59	-0,2987	+0,2541	5,04	-0,1644	+0,3318
4,15	-0,3831	+0,1212	4,60	-0,2961	+0,2566	5,05	-0,1611	+0,3328
4,16	-0,3818	+0,1247	4,61	-0,2936	+0,2589	5,06	-0,1578	+0,3337
4,17	-0,3806	+0,1282	4,62	-0,2910	+0,2613	5,07	-0,1544	+0,3346
4,18	-0,3793	+0,1317	4,63	-0,2883	+0,2636	5,08	-0,1511	+0,3355
4,19	-0,3779	+0,1352	4,64	-0,2857	+0,2659	5,09	-0,1477	+0,3363
4,20	-0,3766	+0,1386	4,65	-0,2830	+0,2682	5,10	-0,1443	+0,3371
4,21	-0,3752	+0,1421	4,66	-0,2803	+0,2704	5,11	-0,1410	+0,3379
4,22	-0,3737	+0,1455	4,67	-0,2776	+0,2726	5,12	-0,1376	+0,3386
4,23	-0,3722	+0,1489	4,68	-0,2749	+0,2748	5,13	-0,1342	+0,3393
4,24	-0,3707	+0,1522	4,69	-0,2721	+0,2770	5,14	-0,1308	+0,3400
4,25	-0,3692	+0,1556	4,70	-0,2693	+0,2791	5,15	-0,1274	+0,3406
4,26	-0,3676	+0,1589	4,71	-0,2665	+0,2812	5,16	-0,1240	+0,3412
4,27	-0,3660	+0,1622	4,72	-0,2637	+0,2832	5,17	-0,1206	+0,3417
4,28	-0,3644	+0,1654	4,73	-0,2609	+0,2852	5,18	-0,1171	+0,3423
4,29	-0,3627	+0,1687	4,74	-0,2580	+0,2872	5,19	-0,1137	+0,3428
4,30	-0,3610	+0,1719	4,75	-0,2551	+0,2892	5,20	-0,1103	+0,3432
4,31	-0,3593	+0,1751	4,76	-0,2522	+0,2911	5,21	-0,1069	+0,3436
4,32	-0,3575	+0,1783	4,77	-0,2493	+0,2930	5,22	-0,1034	+0,3440
4,33	-0,3557	+0,1814	4,78	-0,2464	+0,2949	5,23	-0,1000	+0,3444
4,34	-0,3539	+0,1845	4,79	-0,2434	+0,2967	5,24	-0,0965	+0,3447
4,35	-0,3520	+0,1876	4,80	-0,2404	+0,2985	5,25	-0,0931	+0,3450
4,36	-0,3501	+0,1907	4,81	-0,2374	+0,3003	5,26	-0,0896	+0,3453
4,37	-0,3482	+0,1938	4,82	-0,2344	+0,3020	5,27	-0,0862	+0,3455
4,38	-0,3463	+0,1968	4,83	-0,2314	+0,3037	5,28	-0,0827	+0,3457
4,39	-0,3443	+0,1998	4,84	-0,2283	+0,3054	5,29	-0,0793	+0,3458
4,40	-0,3423	+0,2028	4,85	-0,2253	+0,3070	5,30	-0,0758	+0,3460
4,41	-0,3402	+0,2057	4,86	-0,2222	+0,3086	5,31	-0,0723	+0,3460
4,42	-0,3381	+0,2086	4,87	-0,2191	+0,3102	5,32	-0,0689	+0,3461
4,43	-0,3360	+0,2115	4,88	-0,2160	+0,3117	5,33	-0,0654	+0,3461
4,44	-0,3339	+0,2144	4,89	-0,2129	+0,3132	5,34	-0,0620	+0,3461
4,45	-0,3318	+0,2173	4,90	-0,2097	+0,3147	5,35	-0,0585	+0,3461
4,46	-0,3296	+0,2201	4,91	-0,2066	+0,3161	5,36	-0,0550	+0,3460
4,47	-0,3274	+0,2229	4,92	-0,2034	+0,3175	5,37	-0,0516	+0,3459
4,48	-0,3251	+0,2256	4,93	-0,2002	+0,3189	5,38	-0,0481	+0,3457
4,49	-0,3228	+0,2284	4,94	-0,1970	+0,3202	5,39	-0,0447	+0,3456

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
5.40	-0,0412	+0,3453	5.85	+0,1071	+0,3034	6.30	+0,2238	+0,2081
5.41	-0,0378	+0,3451	5.86	+0,1101	+0,3018	6.31	+0,2259	+0,2055
5.42	-0,0343	+0,3448	5.87	+0,1131	+0,3002	6.32	+0,2279	+0,2029
5.43	-0,0309	+0,3445	5.88	+0,1161	+0,2985	6.33	+0,2299	+0,2003
5.44	-0,0274	+0,3442	5.89	+0,1191	+0,2969	6.34	+0,2319	+0,1977
5.45	-0,0240	+0,3438	5.90	+0,1120	+0,2951	6.35	+0,2339	+0,1950
5.46	-0,0205	+0,3434	5.91	+0,1150	+0,2934	6.36	+0,2358	+0,1924
5.47	-0,0171	+0,3430	5.92	+0,1179	+0,2917	6.37	+0,2377	+0,1897
5.48	-0,0137	+0,3425	5.93	+0,1308	+0,2899	6.38	+0,2396	+0,1870
5.49	-0,0103	+0,3420	5.94	+0,1337	+0,2881	6.39	+0,2415	+0,1843
5.50	-0,0068	+0,3414	5.95	+0,1366	+0,2862	6.40	+0,2433	+0,1816
5.51	-0,0034	+0,3409	5.96	+0,1394	+0,2844	6.41	+0,2451	+0,1789
5.52	-0,0000	+0,3403	5.97	+0,1423	+0,2825	6.42	+0,2469	+0,1762
5.53	+0,0034	+0,3396	5.98	+0,1451	+0,2806	6.43	+0,2486	+0,1734
5.54	+0,0068	+0,3390	5.99	+0,1479	+0,2786	6.44	+0,2504	+0,1707
5.55	+0,0102	+0,3383	6.00	+0,1506	+0,2767	6.45	+0,2521	+0,1679
5.56	+0,0135	+0,3376	6.01	+0,1534	+0,2747	6.46	+0,2537	+0,1651
5.57	+0,0169	+0,3368	6.02	+0,1561	+0,2727	6.47	+0,2554	+0,1623
5.58	+0,0203	+0,3360	6.03	+0,1589	+0,2707	6.48	+0,2570	+0,1595
5.59	+0,0236	+0,3352	6.04	+0,1616	+0,2686	6.49	+0,2585	+0,1567
5.60	+0,0270	+0,3343	6.05	+0,1642	+0,2666	6.50	+0,2601	+0,1538
5.61	+0,0303	+0,3335	6.06	+0,1669	+0,2645	6.51	+0,2616	+0,1510
5.62	+0,0336	+0,3325	6.07	+0,1695	+0,2623	6.52	+0,2631	+0,1481
5.63	+0,0370	+0,3316	6.08	+0,1721	+0,2602	6.53	+0,2646	+0,1453
5.64	+0,0403	+0,3306	6.09	+0,1747	+0,2580	6.54	+0,2660	+0,1424
5.65	+0,0436	+0,3296	6.10	+0,1773	+0,2559	6.55	+0,2674	+0,1395
5.66	+0,0469	+0,3286	6.11	+0,1798	+0,2537	6.56	+0,2688	+0,1366
5.67	+0,0501	+0,3275	6.12	+0,1824	+0,2514	6.57	+0,2702	+0,1337
5.68	+0,0534	+0,3264	6.13	+0,1849	+0,2492	6.58	+0,2715	+0,1308
5.69	+0,0567	+0,3253	6.14	+0,1873	+0,2469	6.59	+0,2728	+0,1279
5.70	+0,0599	+0,3241	6.15	+0,1898	+0,2446	6.60	+0,2740	+0,1250
5.71	+0,0632	+0,3230	6.16	+0,1922	+0,2423	6.61	+0,2753	+0,1220
5.72	+0,0664	+0,3218	6.17	+0,1947	+0,2400	6.62	+0,2765	+0,1191
5.73	+0,0696	+0,3205	6.18	+0,1970	+0,2377	6.63	+0,2777	+0,1162
5.74	+0,0728	+0,3192	6.19	+0,1994	+0,2353	6.64	+0,2788	+0,1132
5.75	+0,0760	+0,3179	6.20	+0,2017	+0,2329	6.65	+0,2799	+0,1102
5.76	+0,0791	+0,3166	6.21	+0,2041	+0,2305	6.66	+0,2810	+0,1073
5.77	+0,0823	+0,3153	6.22	+0,2064	+0,2281	6.67	+0,2821	+0,1043
5.78	+0,0855	+0,3139	6.23	+0,2086	+0,2257	6.68	+0,2831	+0,1013
5.79	+0,0886	+0,3125	6.24	+0,2109	+0,2232	6.69	+0,2841	+0,0983
5.80	+0,0917	+0,3110	6.25	+0,2131	+0,2207	6.70	+0,2851	+0,0953
5.81	+0,0948	+0,3096	6.26	+0,2153	+0,2182	6.71	+0,2860	+0,0923
5.82	+0,0979	+0,3081	6.27	+0,2175	+0,2157	6.72	+0,2869	+0,0893
5.83	+0,1010	+0,3065	6.28	+0,2196	+0,2132	6.73	+0,2878	+0,0863
5.84	+0,1040	+0,3050	6.29	+0,2217	+0,2106	6.74	+0,2886	+0,0833

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
6.75	+0.2895	+0.0803	7.20	+0.2951	-0.0543	7.65	+0.2434	-0.1705
6.76	+0.2902	+0.0773	7.21	+0.2945	-0.0572	7.66	+0.2416	-0.1727
6.77	+0.2910	+0.0743	7.22	+0.2939	-0.0601	7.67	+0.2399	-0.1749
6.78	+0.2917	+0.0713	7.23	+0.2933	-0.0629	7.68	+0.2381	-0.1771
6.79	+0.2924	+0.0682	7.24	+0.2927	-0.0658	7.69	+0.2364	-0.1792
6.80	+0.2931	+0.0652	7.25	+0.2920	-0.0686	7.70	+0.2346	-0.1813
6.81	+0.2937	+0.0622	7.26	+0.2913	-0.0714	7.71	+0.2327	-0.1834
6.82	+0.2943	+0.0592	7.27	+0.2906	-0.0742	7.72	+0.2309	-0.1855
6.83	+0.2949	+0.0561	7.28	+0.2898	-0.0770	7.73	+0.2290	-0.1875
6.84	+0.2955	+0.0531	7.29	+0.2890	-0.0798	7.74	+0.2271	-0.1896
6.85	+0.2960	+0.0501	7.30	+0.2882	-0.0826	7.75	+0.2252	-0.1916
6.86	+0.2965	+0.0470	7.31	+0.2874	-0.0853	7.76	+0.2233	-0.1936
6.87	+0.2969	+0.0440	7.32	+0.2865	-0.0881	7.77	+0.2214	-0.1956
6.88	+0.2973	+0.0410	7.33	+0.2856	-0.0908	7.78	+0.2194	-0.1975
6.89	+0.2977	+0.0379	7.34	+0.2847	-0.0935	7.79	+0.2174	-0.1994
6.90	+0.2981	+0.0349	7.35	+0.2837	-0.0963	7.80	+0.2154	-0.2014
6.91	+0.2984	+0.0319	7.36	+0.2828	-0.0990	7.81	+0.2134	-0.2032
6.92	+0.2987	+0.0288	7.37	+0.2818	-0.1016	7.82	+0.2113	-0.2051
6.93	+0.2990	+0.0258	7.38	+0.2807	-0.1043	7.83	+0.2093	-0.2069
6.94	+0.2993	+0.0228	7.39	+0.2797	-0.1070	7.84	+0.2072	-0.2088
6.95	+0.2995	+0.0198	7.40	+0.2786	-0.1096	7.85	+0.2051	-0.2106
6.96	+0.2997	+0.0167	7.41	+0.2775	-0.1123	7.86	+0.2030	-0.2123
6.97	+0.2998	+0.0137	7.42	+0.2764	-0.1149	7.87	+0.2009	-0.2140
6.98	+0.2999	+0.0107	7.43	+0.2752	-0.1175	7.88	+0.1987	-0.2158
6.99	+0.3000	+0.0077	7.44	+0.2740	-0.1201	7.89	+0.1965	-0.2175
7.00	+0.3001	+0.0047	7.45	+0.2728	-0.1226	7.90	+0.1944	-0.2192
7.01	+0.3001	+0.0017	7.46	+0.2715	-0.1252	7.91	+0.1922	-0.2208
7.02	+0.3001	-0.0013	7.47	+0.2703	-0.1277	7.92	+0.1899	-0.2225
7.03	+0.3001	-0.0043	7.48	+0.2690	-0.1302	7.93	+0.1877	-0.2241
7.04	+0.3000	-0.0073	7.49	+0.2677	-0.1328	7.94	+0.1855	-0.2257
7.05	+0.2999	-0.0103	7.50	+0.2663	-0.1352	7.95	+0.1832	-0.2272
7.06	+0.2998	-0.0133	7.51	+0.2650	-0.1377	7.96	+0.1809	-0.2287
7.07	+0.2997	-0.0163	7.52	+0.2636	-0.1402	7.97	+0.1786	-0.2303
7.08	+0.2995	-0.0192	7.53	+0.2622	-0.1426	7.98	+0.1763	-0.2317
7.09	+0.2993	-0.0222	7.54	+0.2607	-0.1450	7.99	+0.1740	-0.2332
7.10	+0.2991	-0.0252	7.55	+0.2593	-0.1475	8.00	+0.1717	-0.2346
7.11	+0.2988	-0.0281	7.56	+0.2578	-0.1498	8.01	+0.1693	-0.2360
7.12	+0.2985	-0.0310	7.57	+0.2563	-0.1522	8.02	+0.1669	-0.2374
7.13	+0.2982	-0.0340	7.58	+0.2547	-0.1546	8.03	+0.1645	-0.2388
7.14	+0.2978	-0.0369	7.59	+0.2532	-0.1569	8.04	+0.1622	-0.2401
7.15	+0.2974	-0.0398	7.60	+0.2516	-0.1592	8.05	+0.1597	-0.2414
7.16	+0.2970	-0.0428	7.61	+0.2500	-0.1615	8.06	+0.1573	-0.2427
7.17	+0.2966	-0.0457	7.62	+0.2484	-0.1638	8.07	+0.1549	-0.2440
7.18	+0.2961	-0.0486	7.63	+0.2467	-0.1660	8.08	+0.1524	-0.2452
7.19	+0.2956	-0.0514	7.64	+0.2451	-0.1683	8.09	+0.1500	-0.2464

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
8.10	+0,1475	-0,2476	8.55	+0,0283	-0,2733	9.00	-0,0903	-0,2453
8.11	+0,1450	-0,2488	8.56	+0,0255	-0,2732	9.01	-0,0928	-0,2441
8.12	+0,1425	-0,2499	8.57	+0,0228	-0,2731	9.02	-0,0952	-0,2429
8.13	+0,1400	-0,2510	8.58	+0,0201	-0,2730	9.03	-0,0976	-0,2417
8.14	+0,1375	-0,2521	8.59	+0,0174	-0,2729	9.04	-0,1000	-0,2404
8.15	+0,1350	-0,2531	8.60	+0,0146	-0,2728	9.05	-0,1024	-0,2391
8.16	+0,1325	-0,2542	8.61	+0,0119	-0,2726	9.06	-0,1048	-0,2378
8.17	+0,1299	-0,2552	8.62	+0,0092	-0,2724	9.07	-0,1072	-0,2365
8.18	+0,1274	-0,2561	8.63	+0,0064	-0,2721	9.08	-0,1096	-0,2352
8.19	+0,1248	-0,2571	8.64	+0,0037	-0,2719	9.09	-0,1119	-0,2338
8.20	+0,1222	-0,2580	8.65	+0,0010	-0,2716	9.10	-0,1142	-0,2324
8.21	+0,1196	-0,2589	8.66	-0,0017	-0,2713	9.11	-0,1166	-0,2310
8.22	+0,1170	-0,2598	8.67	-0,0044	-0,2709	9.12	-0,1189	-0,2296
8.23	+0,1144	-0,2606	8.68	-0,0071	-0,2705	9.13	-0,1211	-0,2281
8.24	+0,1118	-0,2614	8.69	-0,0098	-0,2701	9.14	-0,1234	-0,2267
8.25	+0,1092	-0,2622	8.70	-0,0125	-0,2697	9.15	-0,1257	-0,2252
8.26	+0,1066	-0,2630	8.71	-0,0152	-0,2693	9.16	-0,1279	-0,2237
8.27	+0,1039	-0,2637	8.72	-0,0179	-0,2688	9.17	-0,1302	-0,2221
8.28	+0,1013	-0,2644	8.73	-0,0206	-0,2683	9.18	-0,1324	-0,2206
8.29	+0,0987	-0,2651	8.74	-0,0233	-0,2678	9.19	-0,1346	-0,2190
8.30	+0,0960	-0,2657	8.75	-0,0259	-0,2672	9.20	-0,1367	-0,2174
8.31	+0,0933	-0,2664	8.76	-0,0286	-0,2666	9.21	-0,1389	-0,2158
8.32	+0,0907	-0,2670	8.77	-0,0313	-0,2660	9.22	-0,1411	-0,2142
8.33	+0,0880	-0,2675	8.78	-0,0339	-0,2654	9.23	-0,1432	-0,2125
8.34	+0,0853	-0,2681	8.79	-0,0366	-0,2648	9.24	-0,1453	-0,2108
8.35	+0,0826	-0,2686	8.80	-0,0392	-0,2641	9.25	-0,1474	-0,2091
8.36	+0,0800	-0,2691	8.81	-0,0419	-0,2634	9.26	-0,1495	-0,2074
8.37	+0,0773	-0,2696	8.82	-0,0445	-0,2626	9.27	-0,1516	-0,2057
8.38	+0,0746	-0,2700	8.83	-0,0471	-0,2619	9.28	-0,1536	-0,2040
8.39	+0,0719	-0,2704	8.84	-0,0497	-0,2611	9.29	-0,1556	-0,2022
8.40	+0,0692	-0,2708	8.85	-0,0523	-0,2603	9.30	-0,1577	-0,2004
8.41	+0,0664	-0,2711	8.86	-0,0549	-0,2595	9.31	-0,1597	-0,1986
8.42	+0,0637	-0,2715	8.87	-0,0575	-0,2586	9.32	-0,1616	-0,1968
8.43	+0,0610	-0,2718	8.88	-0,0601	-0,2577	9.33	-0,1636	-0,1950
8.44	+0,0583	-0,2720	8.89	-0,0627	-0,2568	9.34	-0,1655	-0,1931
8.45	+0,0556	-0,2723	8.90	-0,0653	-0,2559	9.35	-0,1674	-0,1912
8.46	+0,0529	-0,2725	8.91	-0,0678	-0,2550	9.36	-0,1694	-0,1893
8.47	+0,0501	-0,2727	8.92	-0,0704	-0,2540	9.37	-0,1712	-0,1874
8.48	+0,0474	-0,2729	8.93	-0,0729	-0,2530	9.38	-0,1731	-0,1855
8.49	+0,0447	-0,2730	8.94	-0,0754	-0,2519	9.39	-0,1749	-0,1836
8.50	+0,0419	-0,2731	8.95	-0,0779	-0,2509	9.40	-0,1768	-0,1816
8.51	+0,0392	-0,2732	8.96	-0,0804	-0,2498	9.41	-0,1786	-0,1797
8.52	+0,0365	-0,2733	8.97	-0,0829	-0,2487	9.42	-0,1804	-0,1777
8.53	+0,0337	-0,2733	8.98	-0,0854	-0,2476	9.43	-0,1821	-0,1757
8.54	+0,0310	-0,2733	8.99	-0,0879	-0,2465	9.44	-0,1839	-0,1737

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
9.45	-0,1856	-0,1716	9.90	-0,2403	-0,0684	10.35	-0,2458	+0,0435
9.46	-0,1873	-0,1696	9.91	-0,2410	-0,0659	10.36	-0,2454	+0,0459
9.47	-0,1890	-0,1675	9.92	-0,2417	-0,0634	10.37	-0,2449	+0,0483
9.48	-0,1907	-0,1655	9.93	-0,2423	-0,0609	10.38	-0,2444	+0,0507
9.49	-0,1923	-0,1634	9.94	-0,2429	-0,0584	10.39	-0,2439	+0,0531
9.50	-0,1939	-0,1613	9.95	-0,2434	-0,0560	10.40	-0,2434	+0,0555
9.51	-0,1955	-0,1591	9.96	-0,2440	-0,0535	10.41	-0,2428	+0,0578
9.52	-0,1971	-0,1570	9.97	-0,2445	-0,0510	10.42	-0,2422	+0,0602
9.53	-0,1987	-0,1549	9.98	-0,2450	-0,0485	10.43	-0,2416	+0,0626
9.54	-0,2002	-0,1527	9.99	-0,2455	-0,0460	10.44	-0,2410	+0,0649
9.55	-0,2017	-0,1506	10.00	-0,2459	-0,0435	10.45	-0,2403	+0,0673
9.56	-0,2032	-0,1484	10.01	-0,2464	-0,0410	10.46	-0,2396	+0,0696
9.57	-0,2047	-0,1462	10.02	-0,2468	-0,0385	10.47	-0,2389	+0,0719
9.58	-0,2061	-0,1440	10.03	-0,2471	-0,0360	10.48	-0,2382	+0,0742
9.59	-0,2076	-0,1418	10.04	-0,2475	-0,0334	10.49	-0,2374	+0,0766
9.60	-0,2090	-0,1395	10.05	-0,2478	-0,0309	10.50	-0,2366	+0,0789
9.61	-0,2104	-0,1373	10.06	-0,2481	-0,0284	10.51	-0,2358	+0,0811
9.62	-0,2117	-0,1350	10.07	-0,2484	-0,0259	10.52	-0,2350	+0,0834
9.63	-0,2131	-0,1328	10.08	-0,2486	-0,0234	10.53	-0,2342	+0,0857
9.64	-0,2144	-0,1305	10.09	-0,2488	-0,0209	10.54	-0,2333	+0,0879
9.65	-0,2157	-0,1282	10.10	-0,2490	-0,0184	10.55	-0,2324	+0,0902
9.66	-0,2169	-0,1259	10.11	-0,2492	-0,0159	10.56	-0,2315	+0,0924
9.67	-0,2182	-0,1236	10.12	-0,2493	-0,0134	10.57	-0,2306	+0,0946
9.68	-0,2194	-0,1213	10.13	-0,2495	-0,0109	10.58	-0,2296	+0,0968
9.69	-0,2206	-0,1190	10.14	-0,2496	-0,0084	10.59	-0,2286	+0,0990
9.70	-0,2218	-0,1166	10.15	-0,2496	-0,0059	10.60	-0,2276	+0,1012
9.71	-0,2230	-0,1143	10.16	-0,2497	-0,0034	10.61	-0,2266	+0,1034
9.72	-0,2241	-0,1119	10.17	-0,2497	-0,0009	10.62	-0,2256	+0,1056
9.73	-0,2252	-0,1096	10.18	-0,2497	+0,0016	10.63	-0,2245	+0,1077
9.74	-0,2263	-0,1072	10.19	-0,2497	+0,0041	10.64	-0,2234	+0,1099
9.75	-0,2273	-0,1048	10.20	-0,2496	+0,0066	10.65	-0,2223	+0,1120
9.76	-0,2284	-0,1025	10.21	-0,2495	+0,0091	10.66	-0,2212	+0,1141
9.77	-0,2294	-0,1001	10.22	-0,2494	+0,0116	10.67	-0,2200	+0,1162
9.78	-0,2304	-0,0977	10.23	-0,2493	+0,0141	10.68	-0,2188	+0,1183
9.79	-0,2313	-0,0953	10.24	-0,2492	+0,0165	10.69	-0,2177	+0,1203
9.80	-0,2323	-0,0928	10.25	-0,2490	+0,0190	10.70	-0,2164	+0,1224
9.81	-0,2332	-0,0904	10.26	-0,2488	+0,0215	10.71	-0,2152	+0,1244
9.82	-0,2341	-0,0880	10.27	-0,2485	+0,0240	10.72	-0,2140	+0,1265
9.83	-0,2350	-0,0856	10.28	-0,2483	+0,0264	10.73	-0,2127	+0,1285
9.84	-0,2358	-0,0831	10.29	-0,2480	+0,0289	10.74	-0,2114	+0,1305
9.85	-0,2366	-0,0807	10.30	-0,2477	-0,0313	10.75	-0,2101	+0,1325
9.86	-0,2374	-0,0782	10.31	-0,2474	+0,0338	10.76	-0,2087	+0,1344
9.87	-0,2382	-0,0758	10.32	-0,2470	+0,0362	10.77	-0,2074	+0,1364
9.88	-0,2389	-0,0733	10.33	-0,2467	+0,0386	10.78	-0,2060	+0,1383
9.89	-0,2396	-0,0708	10.34	-0,2463	+0,0411	10.79	-0,2046	+0,1403

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
10,80	-0,2032	+0,1422	11,25	-0,1227	+0,2093	11,70	-0,0213	+0,2333
10,81	-0,2018	+0,1441	11,26	-0,1206	+0,2104	11,71	-0,0190	+0,2333
10,82	-0,2003	+0,1459	11,27	-0,1185	+0,2114	11,72	-0,0167	+0,2333
10,83	-0,1989	+0,1478	11,28	-0,1163	+0,2123	11,73	-0,0143	+0,2332
10,84	-0,1974	+0,1496	11,29	-0,1142	+0,2133	11,74	-0,0120	+0,2332
10,85	-0,1959	+0,1515	11,30	-0,1121	+0,2143	11,75	-0,0097	+0,2331
10,86	-0,1943	+0,1533	11,31	-0,1099	+0,2152	11,76	-0,0073	+0,2330
10,87	-0,1928	+0,1551	11,32	-0,1078	+0,2161	11,77	-0,0050	+0,2328
10,88	-0,1912	+0,1568	11,33	-0,1056	+0,2169	11,78	-0,0027	+0,2327
10,89	-0,1897	+0,1586	11,34	-0,1034	+0,2178	11,79	-0,0004	+0,2325
10,90	-0,1881	+0,1603	11,35	-0,1012	+0,2186	11,80	+0,0020	+0,2323
10,91	-0,1865	+0,1621	11,36	-0,0991	+0,2194	11,81	+0,0043	+0,2321
10,92	-0,1848	+0,1638	11,37	-0,0969	+0,2202	11,82	+0,0066	+0,2318
10,93	-0,1832	+0,1655	11,38	-0,0946	+0,2210	11,83	+0,0089	+0,2315
10,94	-0,1815	+0,1671	11,39	-0,0924	+0,2217	11,84	+0,0112	+0,2312
10,95	-0,1798	+0,1688	11,40	-0,0902	+0,2225	11,85	+0,0135	+0,2309
10,96	-0,1781	+0,1704	11,41	-0,0880	+0,2231	11,86	+0,0159	+0,2306
10,97	-0,1764	+0,1720	11,42	-0,0858	+0,2238	11,87	+0,0182	+0,2302
10,98	-0,1747	+0,1736	11,43	-0,0835	+0,2245	11,88	+0,0205	+0,2298
10,99	-0,1730	+0,1752	11,44	-0,0813	+0,2251	11,89	+0,0228	+0,2294
11,00	-0,1712	+0,1768	11,45	-0,0790	+0,2257	11,90	+0,0250	+0,2290
11,01	-0,1694	+0,1783	11,46	-0,0767	+0,2263	11,91	+0,0273	+0,2285
11,02	-0,1676	+0,1798	11,47	-0,0745	+0,2268	11,92	+0,0296	+0,2281
11,03	-0,1658	+0,1814	11,48	-0,0722	+0,2274	11,93	+0,0319	+0,2276
11,04	-0,1640	+0,1828	11,49	-0,0699	+0,2279	11,94	+0,0342	+0,2270
11,05	-0,1622	+0,1843	11,50	-0,0677	+0,2284	11,95	+0,0364	+0,2265
11,06	-0,1603	+0,1857	11,51	-0,0654	+0,2288	11,96	+0,0387	+0,2259
11,07	-0,1584	+0,1872	11,52	-0,0631	+0,2293	11,97	+0,0410	+0,2253
11,08	-0,1566	+0,1886	11,53	-0,0608	+0,2297	11,98	+0,0432	+0,2247
11,09	-0,1547	+0,1900	11,54	-0,0585	+0,2301	11,99	+0,0455	+0,2241
11,10	-0,1528	+0,1913	11,55	-0,0562	+0,2305	12,00	+0,0477	+0,2234
11,11	-0,1508	+0,1927	11,56	-0,0539	+0,2308	12,01	+0,0499	+0,2228
11,12	-0,1489	+0,1940	11,57	-0,0516	+0,2312	12,02	+0,0521	+0,2221
11,13	-0,1470	+0,1953	11,58	-0,0493	+0,2315	12,03	+0,0544	+0,2214
11,14	-0,1450	+0,1966	11,59	-0,0469	+0,2317	12,04	+0,0566	+0,2206
11,15	-0,1430	+0,1979	11,60	-0,0446	+0,2320	12,05	+0,0588	+0,2199
11,16	-0,1411	+0,1991	11,61	-0,0423	+0,2322	12,06	+0,0610	+0,2191
11,17	-0,1391	+0,2003	11,62	-0,0400	+0,2324	12,07	+0,0632	+0,2183
11,18	-0,1370	+0,2015	11,63	-0,0376	+0,2326	12,08	+0,0653	+0,2175
11,19	-0,1350	+0,2027	11,64	-0,0353	+0,2328	12,09	+0,0675	+0,2166
11,20	-0,1330	+0,2039	11,65	-0,0330	+0,2329	12,10	+0,0697	+0,2157
11,21	-0,1309	+0,2050	11,66	-0,0307	+0,2331	12,11	+0,0718	+0,2149
11,22	-0,1289	+0,2061	11,67	-0,0283	+0,2332	12,12	+0,0740	+0,2140
11,23	-0,1268	+0,2072	11,68	-0,0260	+0,2332	12,13	+0,0761	+0,2130
11,24	-0,1247	+0,2083	11,69	-0,0237	+0,2333	12,14	+0,0782	+0,2121

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
12.15	+0.0803	+0.2111	12.60	+0.1626	+0.1487	13.05	+0.2102	+0.0596
12.16	+0.0824	+0.2101	12.61	+0.1641	+0.1470	13.06	+0.2108	+0.0575
12.17	+0.0845	+0.2091	12.62	+0.1655	+0.1452	13.07	+0.2113	+0.0553
12.18	+0.0866	+0.2081	12.63	+0.1670	+0.1435	13.08	+0.2119	+0.0532
12.19	+0.0887	+0.2070	12.64	+0.1684	+0.1417	13.09	+0.2124	+0.0510
12.20	+0.0908	+0.2060	12.65	+0.1698	+0.1399	13.10	+0.2129	+0.0489
12.21	+0.0928	+0.2049	12.66	+0.1712	+0.1380	13.11	+0.2134	+0.0467
12.22	+0.0949	+0.2038	12.67	+0.1726	+0.1362	13.12	+0.2138	+0.0445
12.23	+0.0969	+0.2027	12.68	+0.1739	+0.1344	13.13	+0.2143	+0.0423
12.24	+0.0989	+0.2015	12.69	+0.1753	+0.1325	13.14	+0.2147	+0.0402
12.25	+0.1009	+0.2004	12.70	+0.1766	+0.1307	13.15	+0.2151	+0.0380
12.26	+0.1029	+0.1992	12.71	+0.1779	+0.1288	13.16	+0.2154	+0.0358
12.27	+0.1049	+0.1980	12.72	+0.1792	+0.1269	13.17	+0.2158	+0.0336
12.28	+0.1069	+0.1968	12.73	+0.1804	+0.1250	13.18	+0.2161	+0.0314
12.29	+0.1088	+0.1955	12.74	+0.1817	+0.1231	13.19	+0.2164	+0.0293
12.30	+0.1108	+0.1943	12.75	+0.1829	+0.1212	13.20	+0.2167	+0.0271
12.31	+0.1127	+0.1930	12.76	+0.1841	+0.1192	13.21	+0.2169	+0.0249
12.32	+0.1147	+0.1917	12.77	+0.1853	+0.1173	13.22	+0.2172	+0.0227
12.33	+0.1166	+0.1904	12.78	+0.1864	+0.1154	13.23	+0.2174	+0.0205
12.34	+0.1185	+0.1891	12.79	+0.1876	+0.1134	13.24	+0.2176	+0.0183
12.35	+0.1203	+0.1877	12.80	+0.1887	+0.1114	13.25	+0.2178	+0.0161
12.36	+0.1222	+0.1863	12.81	+0.1898	+0.1095	13.26	+0.2179	+0.0139
12.37	+0.1241	+0.1850	12.82	+0.1909	+0.1075	13.27	+0.2180	+0.0117
12.38	+0.1259	+0.1836	12.83	+0.1920	+0.1055	13.28	+0.2182	+0.0096
12.39	+0.1277	+0.1821	12.84	+0.1930	+0.1035	13.29	+0.2182	+0.0074
12.40	+0.1296	+0.1807	12.85	+0.1940	+0.1014	13.30	+0.2183	+0.0052
12.41	+0.1314	+0.1793	12.86	+0.1950	+0.0994	13.31	+0.2183	+0.0030
12.42	+0.1331	+0.1778	12.87	+0.1960	+0.0974	13.32	+0.2184	+0.0008
12.43	+0.1349	+0.1763	12.88	+0.1970	+0.0954	13.33	+0.2184	-0.0014
12.44	+0.1367	+0.1748	12.89	+0.1979	+0.0933	13.34	+0.2183	-0.0036
12.45	+0.1384	+0.1733	12.90	+0.1988	+0.0912	13.35	+0.2183	-0.0057
12.46	+0.1401	+0.1718	12.91	+0.1997	+0.0892	13.36	+0.2182	-0.0079
12.47	+0.1418	+0.1702	12.92	+0.2006	+0.0871	13.37	+0.2181	-0.0101
12.48	+0.1435	+0.1687	12.93	+0.2015	+0.0850	13.38	+0.2180	-0.0123
12.49	+0.1452	+0.1671	12.94	+0.2023	+0.0830	13.39	+0.2179	-0.0144
12.50	+0.1469	+0.1655	12.95	+0.2031	+0.0809	13.40	+0.2177	-0.0166
12.51	+0.1485	+0.1639	12.96	+0.2039	+0.0788	13.41	+0.2175	-0.0188
12.52	+0.1502	+0.1623	12.97	+0.2047	+0.0767	13.42	+0.2173	-0.0209
12.53	+0.1518	+0.1606	12.98	+0.2055	+0.0746	13.43	+0.2171	-0.0231
12.54	+0.1534	+0.1590	12.99	+0.2062	+0.0724	13.44	+0.2169	-0.0252
12.55	+0.1550	+0.1573	13.00	+0.2069	+0.0703	13.45	+0.2166	-0.0274
12.56	+0.1565	+0.1556	13.01	+0.2076	+0.0682	13.46	+0.2163	-0.0295
12.57	+0.1581	+0.1539	13.02	+0.2083	+0.0661	13.47	+0.2160	-0.0317
12.58	+0.1596	+0.1522	13.03	+0.2089	+0.0639	13.48	+0.2157	-0.0338
12.59	+0.1611	+0.1505	13.04	+0.2096	+0.0618	13.49	+0.2154	-0.0359



$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
13.50	+0.2150	-0.0380	13.95	+0.1775	-0.1251	14.40	+0.1065	-0.1850
13.51	+0.2146	-0.0402	13.96	+0.1763	-0.1268	14.41	+0.1046	-0.1860
13.52	+0.2142	-0.0423	13.97	+0.1750	-0.1285	14.42	+0.1028	-0.1869
13.53	+0.2138	-0.0444	13.98	+0.1737	-0.1301	14.43	+0.1009	-0.1878
13.54	+0.2133	-0.0465	13.99	+0.1724	-0.1318	14.44	+0.0990	-0.1886
13.55	+0.2128	-0.0486	14.00	+0.1711	-0.1334	14.45	+0.0971	-0.1895
13.56	+0.2123	-0.0507	14.01	+0.1697	-0.1350	14.46	+0.0952	-0.1903
13.57	+0.2118	-0.0528	14.02	+0.1684	-0.1366	14.47	+0.0933	-0.1911
13.58	+0.2113	-0.0548	14.03	+0.1670	-0.1382	14.48	+0.0914	-0.1919
13.59	+0.2107	-0.0569	14.04	+0.1656	-0.1397	14.49	+0.0895	-0.1927
13.60	+0.2101	-0.0590	14.05	+0.1642	-0.1413	14.50	+0.0875	-0.1934
13.61	+0.2095	-0.0610	14.06	+0.1628	-0.1428	14.51	+0.0856	-0.1942
13.62	+0.2089	-0.0631	14.07	+0.1613	-0.1443	14.52	+0.0837	-0.1949
13.63	+0.2083	-0.0651	14.08	+0.1599	-0.1458	14.53	+0.0817	-0.1956
13.64	+0.2076	-0.0671	14.09	+0.1584	-0.1473	14.54	+0.0798	-0.1962
13.65	+0.2069	-0.0692	14.10	+0.1570	-0.1488	14.55	+0.0778	-0.1969
13.66	+0.2062	-0.0712	14.11	+0.1555	-0.1502	14.56	+0.0758	-0.1975
13.67	+0.2055	-0.0732	14.12	+0.1539	-0.1517	14.57	+0.0738	-0.1981
13.68	+0.2048	-0.0752	14.13	+0.1524	-0.1531	14.58	+0.0719	-0.1987
13.69	+0.2040	-0.0772	14.14	+0.1509	-0.1545	14.59	+0.0699	-0.1993
13.70	+0.2032	-0.0791	14.15	+0.1493	-0.1559	14.60	+0.0679	-0.1999
13.71	+0.2024	-0.0811	14.16	+0.1478	-0.1573	14.61	+0.0659	-0.2004
13.72	+0.2016	-0.0831	14.17	+0.1462	-0.1586	14.62	+0.0639	-0.2009
13.73	+0.2008	-0.0850	14.18	+0.1446	-0.1600	14.63	+0.0618	-0.2014
13.74	+0.1999	-0.0870	14.19	+0.1430	-0.1613	14.64	+0.0598	-0.2019
13.75	+0.1990	-0.0889	14.20	+0.1414	-0.1626	14.65	+0.0578	-0.2023
13.76	+0.1981	-0.0908	14.21	+0.1397	-0.1639	14.66	+0.0558	-0.2027
13.77	+0.1972	-0.0927	14.22	+0.1381	-0.1652	14.67	+0.0538	-0.2031
13.78	+0.1963	-0.0946	14.23	+0.1364	-0.1664	14.68	+0.0517	-0.2035
13.79	+0.1953	-0.0965	14.24	+0.1348	-0.1677	14.69	+0.0497	-0.2039
13.80	+0.1943	-0.0984	14.25	+0.1331	-0.1689	14.70	+0.0476	-0.2043
13.81	+0.1933	-0.1003	14.26	+0.1314	-0.1701	14.71	+0.0456	-0.2046
13.82	+0.1923	-0.1021	14.27	+0.1297	-0.1713	14.72	+0.0436	-0.2049
13.83	+0.1913	-0.1040	14.28	+0.1280	-0.1724	14.73	+0.0415	-0.2052
13.84	+0.1903	-0.1058	14.29	+0.1262	-0.1736	14.74	+0.0394	-0.2054
13.85	+0.1892	-0.1076	14.30	+0.1245	-0.1747	14.75	+0.0374	-0.2057
13.86	+0.1881	-0.1094	14.31	+0.1227	-0.1758	14.76	+0.0353	-0.2059
13.87	+0.1870	-0.1112	14.32	+0.1210	-0.1769	14.77	+0.0333	-0.2061
13.88	+0.1859	-0.1130	14.33	+0.1192	-0.1780	14.78	+0.0312	-0.2063
13.89	+0.1847	-0.1148	14.34	+0.1174	-0.1791	14.79	+0.0291	-0.2065
13.90	+0.1836	-0.1165	14.35	+0.1156	-0.1801	14.80	+0.0271	-0.2066
13.91	+0.1824	-0.1183	14.36	+0.1138	-0.1811	14.81	+0.0250	-0.2067
13.92	+0.1812	-0.1200	14.37	+0.1120	-0.1821	14.82	+0.0229	-0.2068
13.93	+0.1800	-0.1217	14.38	+0.1102	-0.1831	14.83	+0.0209	-0.2069
13.94	+0.1788	-0.1234	14.39	+0.1083	-0.1841	14.84	+0.0188	-0.2070

$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$-J_1(x)$
14,85	+0,0167	-0,2070	15,10	-0,0346	-0,2013	15,35	-0,0829	-0,1834
14,86	+0,0147	-0,2070	15,11	-0,0366	-0,2008	15,36	-0,0847	-0,1824
14,87	+0,0126	-0,2070	15,12	-0,0386	-0,2003	15,37	-0,0865	-0,1814
14,88	+0,0105	-0,2070	15,13	-0,0406	-0,1998	15,38	-0,0883	-0,1804
14,89	+0,0085	-0,2069	15,14	-0,0426	-0,1992	15,39	-0,0901	-0,1794
14,90	+0,0064	-0,2069	15,15	-0,0446	-0,1987	15,40	-0,0919	-0,1784
14,91	+0,0043	-0,2068	15,16	-0,0465	-0,1981	15,41	-0,0937	-0,1774
14,92	+0,0023	-0,2067	15,17	-0,0485	-0,1975	15,42	-0,0955	-0,1763
14,93	+0,0002	-0,2066	15,18	-0,0505	-0,1969	15,43	-0,0972	-0,1752
14,94	-0,0019	-0,2064	15,19	-0,0525	-0,1962	15,44	-0,0990	-0,1741
14,95	-0,0039	-0,2062	15,20	-0,0544	-0,1955	15,45	-0,1007	-0,1730
14,96	-0,0060	-0,2061	15,21	-0,0564	-0,1949	15,46	-0,1024	-0,1719
14,97	-0,0081	-0,2058	15,22	-0,0583	-0,1942	15,47	-0,1042	-0,1707
14,98	-0,0101	-0,2056	15,23	-0,0603	-0,1934	15,48	-0,1059	-0,1696
14,99	-0,0122	-0,2054	15,24	-0,0622	-0,1927	15,49	-0,1076	-0,1684
15,00	-0,0142	-0,2051	15,25	-0,0641	-0,1919	15,50	-0,1092	-0,1672
15,01	-0,0163	-0,2048	15,26	-0,0660	-0,1912			
15,02	-0,0183	-0,2045	15,27	-0,0679	-0,1904			
15,03	-0,0204	-0,2042	15,28	-0,0698	-0,1896			
15,04	-0,0224	-0,2038	15,29	-0,0717	-0,1887			
15,05	-0,0244	-0,2035	15,30	-0,0736	-0,1879			
15,06	-0,0265	-0,2031	15,31	-0,0755	-0,1870			
15,07	-0,0285	-0,2027	15,32	-0,0773	-0,1861			
15,08	-0,0305	-0,2022	15,33	-0,0792	-0,1852			
15,09	-0,0325	-0,2018	15,34	-0,0811	-0,1843			

Tafel IV: Wurzeln von  $J_0(x) = 0$  und die zugehörigen Werte von  $J_1(x)$ .

$n$	$x_n$	$J_1(x_n)$	$n$	$x_n$	$J_1(x_n)$
1	2,4048	+0,5191	21	65,1900	+0,09882
2	5,5201	-0,3403	22	68,3315	-0,09652
3	8,6537	+0,2715	23	71,4730	+0,09438
4	11,7915	-0,2325	24	74,6145	-0,09237
5	14,9309	+0,2065	25	77,7560	+0,09049
6	18,0711	-0,1877	26	80,8976	-0,08871
7	21,2116	+0,1733	27	84,0391	+0,08704
8	24,3525	-0,1617	28	87,1806	-0,08545
9	27,4935	+0,1522	29	90,3222	+0,08395
10	30,6346	-0,1442	30	93,4637	-0,08253
11	33,7758	+0,1373	31	96,6053	+0,08118
12	36,9171	-0,1313	32	99,7468	-0,07989
13	40,0584	+0,1261	33	102,8884	+0,07866
14	43,1998	-0,1214	34	106,0299	-0,07749
15	46,3412	+0,1172	35	109,1715	+0,07636
16	49,4826	-0,1134	36	112,3131	-0,07529
17	52,6241	+0,1010	37	115,4546	+0,07426
18	55,7655	-0,1068	38	118,5962	-0,07327
19	58,9070	+0,1040	39	121,7377	+0,07232
20	62,0485	-0,1013	40	124,8793	-0,07140

Nr. der Wurzel (n)	Wert der Wurzel ( $x_n$ )	$J_0(x_n) = \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix}$	Nr. der Wurzel (n)	Wert der Wurzel ( $x_n$ )	$J_0(x_n) = \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix}$	Nr. der Wurzel (n)	Wert der Wurzel ( $x_n$ )	$J_0(x_n) = \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix}$
1	3,8317	-0,4028	21	66,7532	-0,09765	41	129,5878	-0,07009
2	7,0156	+0,3001	22	69,8951	+0,09543	42	132,7295	+0,06926
3	10,1735	-0,2497	23	73,0369	-0,09336	43	135,8711	-0,06845
4	13,3237	+0,2184	24	76,1787	+0,09141	44	139,0128	+0,06767
5	16,4706	-0,1965	25	79,3205	-0,08958	45	142,1544	-0,06692
6	19,6159	+0,1801	26	82,4623	+0,08786	46	145,2961	+0,06619
7	22,7601	-0,1672	27	85,6040	-0,08623	47	148,4377	-0,06549
8	25,9037	+0,1567	28	88,7458	+0,08469	48	151,5794	+0,06481
9	29,0468	-0,1480	29	91,8875	-0,08323	49	154,7210	-0,06414
10	32,1897	+0,1406	30	95,0292	+0,08185	50	157,8627	+0,06350
11	35,3323	-0,1342	31	98,1710	-0,08053			
12	38,4748	+0,1286	32	101,3127	+0,07927			
13	41,6171	-0,1237	33	104,4544	-0,07807			
14	44,7593	+0,1192	34	107,5961	+0,07692			
15	47,9015	-0,1153	35	110,7378	-0,07582			
16	51,0435	+0,1117	36	113,8794	+0,07477			
17	54,1856	-0,1084	37	117,0211	-0,07376			
18	57,3275	+0,1054	38	120,1628	+0,07279			
19	60,4695	-0,1026	39	123,3045	-0,07185			
20	63,6114	+0,1000	40	126,4461	+0,07095			

Für diese Wurzeln  $x_n$  von  $J_1(x) = 0$  ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n J_0(x_n)} = -0,38479$$

(vgl. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. 1, S. 477, Braunschweig 1900, Vieweg u. Sohn).

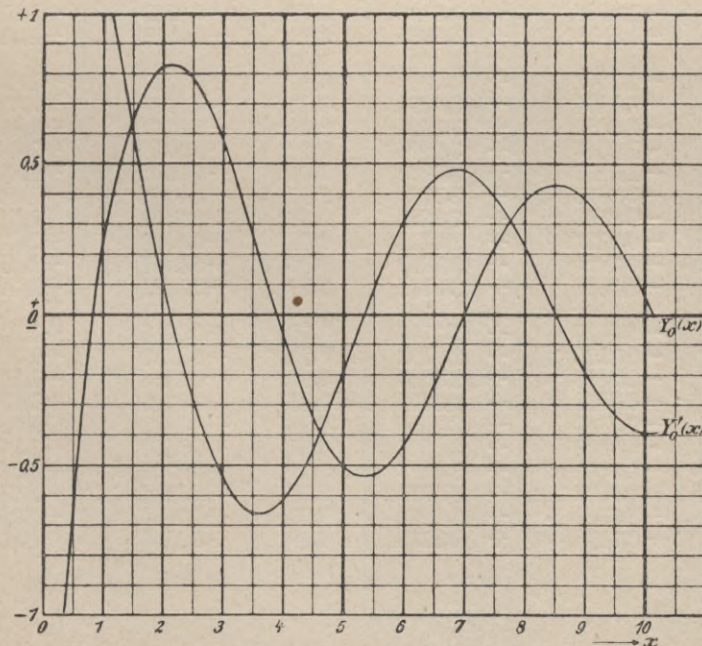


Fig. 34. Zylinderfunktionen zweiter Art der Ordnung Null und Eins nach C. Neumanns Definition.

$x$	$Y_0(x)$	$Y_0'(x) = -Y_1(x)$	$x$	$Y_0(x)$	$Y_0'(x) = -Y_1(x)$
0.00	— $\infty$	+ $\infty$	0.50	— 0.5895	+ 2.2833
0.01	— 4.6050	+ 100.0255	0.51	— 0.5668	+ 2.2443
0.02	— 3.9115	+ 50.0441	0.52	— 0.5446	+ 2.2066
0.03	— 3.5056	+ 33.3934	0.53	— 0.5227	+ 2.1702
0.04	— 3.2172	+ 25.0744	0.54	— 0.5012	+ 2.1351
0.05	— 2.9932	+ 20.0874	0.55	— 0.4800	+ 2.1012
0.06	— 2.8100	+ 16.7660	0.56	— 0.4591	+ 2.0683
0.07	— 2.6547	+ 14.3961	0.57	— 0.4386	+ 2.0364
0.08	— 2.5201	+ 12.6209	0.58	— 0.4184	+ 2.0055
0.09	— 2.4011	+ 11.2418	0.59	— 0.3985	+ 1.9756
0.10	— 2.2943	+ 10.1399	0.60	— 0.3789	+ 1.9466
0.11	— 2.1977	+ 9.2395	0.61	— 0.3596	+ 1.9184
0.12	— 2.1090	+ 8.4902	0.62	— 0.3405	+ 1.8909
0.13	— 2.0274	+ 7.8570	0.63	— 0.3217	+ 1.8641
0.14	— 1.9516	+ 7.3149	0.64	— 0.3032	+ 1.8380
0.15	— 1.8808	+ 6.8458	0.65	— 0.2850	+ 1.8126
0.16	— 1.8145	+ 6.4358	0.66	— 0.2670	+ 1.7879
0.17	— 1.7520	+ 6.0745	0.67	— 0.2492	+ 1.7638
0.18	— 1.6929	+ 5.7538	0.68	— 0.2317	+ 1.7403
0.19	— 1.6368	+ 5.4670	0.69	— 0.2144	+ 1.7173
0.20	— 1.5834	+ 5.2094	0.70	— 0.1973	+ 1.6948
0.21	— 1.5325	+ 4.9767	0.71	— 0.1805	+ 1.6728
0.22	— 1.4838	+ 4.7652	0.72	— 0.1639	+ 1.6513
0.23	— 1.4371	+ 4.5723	0.73	— 0.1475	+ 1.6303
0.24	— 1.3923	+ 4.3956	0.74	— 0.1313	+ 1.6096
0.25	— 1.3492	+ 4.2332	0.75	— 0.1153	+ 1.5894
0.26	— 1.3076	+ 4.0834	0.76	— 0.0995	+ 1.5695
0.27	— 1.2675	+ 3.9448	0.77	— 0.0839	+ 1.5500
0.28	— 1.2287	+ 3.8162	0.78	— 0.0685	+ 1.5309
0.29	— 1.1911	+ 3.6965	0.79	— 0.0532	+ 1.5121
0.30	— 1.1547	+ 3.5848	0.80	— 0.0382	+ 1.4937
0.31	— 1.1194	+ 3.4804	0.81	— 0.0234	+ 1.4756
0.32	— 1.0851	+ 3.3824	0.82	— 0.0087	+ 1.4578
0.33	— 1.0517	+ 3.2905	0.83	+ 0.0058	+ 1.4402
0.34	— 1.0193	+ 3.2039	0.84	+ 0.0201	+ 1.4229
0.35	— 0.9876	+ 3.1223	0.85	+ 0.0342	+ 1.4059
0.36	— 0.9568	+ 3.0451	0.86	+ 0.0482	+ 1.3892
0.37	— 0.9267	+ 2.9721	0.87	+ 0.0620	+ 1.3727
0.38	— 0.8974	+ 2.9029	0.88	+ 0.0757	+ 1.3564
0.39	— 0.8687	+ 2.8371	0.89	+ 0.0891	+ 1.3403
0.40	— 0.8406	+ 2.7746	0.90	+ 0.1025	+ 1.3244
0.41	— 0.8132	+ 2.7151	0.91	+ 0.1156	+ 1.3088
0.42	— 0.7863	+ 2.6584	0.92	+ 0.1286	+ 1.2934
0.43	— 0.7600	+ 2.6042	0.93	+ 0.1415	+ 1.2781
0.44	— 0.7342	+ 2.5524	0.94	+ 0.1542	+ 1.2630
0.45	— 0.7089	+ 2.5028	0.95	+ 0.1668	+ 1.2481
0.46	— 0.6841	+ 2.4553	0.96	+ 0.1792	+ 1.2334
0.47	— 0.6598	+ 2.4097	0.97	+ 0.1914	+ 1.2189
0.48	— 0.6359	+ 2.3659	0.98	+ 0.2035	+ 1.2045
0.49	— 0.6125	+ 2.3238	0.99	+ 0.2155	+ 1.1902

$x$	$Y_0(x)$	$Y'_0(x) = -Y_1(x)$	$x$	$Y_0(x)$	$Y'_0(x) = -Y_1(x)$
1,00	+0,2273	+1,1761	6,0	-0,4352	+0,3070
1,1	+0,3382	+1,0420	6,1	-0,4027	+0,3436
1,2	+0,4361	+0,9179	6,2	-0,3666	+0,3762
1,3	+0,5220	+0,8011	6,3	-0,3276	+0,4046
1,4	+0,5965	+0,6898	6,4	-0,2858	+0,4288
1,5	+0,6601	+0,5830	6,5	-0,2420	+0,4484
1,6	+0,7132	+0,4799	6,6	-0,1963	+0,4633
1,7	+0,7562	+0,3803	6,7	-0,1495	+0,4736
1,8	+0,7894	+0,2839	6,8	-0,1018	+0,4791
1,9	+0,8131	+0,1909	6,9	-0,0538	+0,4799
2,0	+0,8277	+0,1013	7,0	-0,0060	+0,4760
2,1	+0,8335	+0,0153	7,1	+0,0412	+0,4675
2,2	+0,8308	-0,0668	7,2	+0,0873	+0,4546
2,3	+0,8202	-0,1447	7,3	+0,1320	+0,4375
2,4	+0,8020	-0,2182	7,4	+0,1747	+0,4163
2,5	+0,7768	-0,2869	7,5	+0,2151	+0,3914
2,6	+0,7448	-0,3505	7,6	+0,2529	+0,3629
2,7	+0,7069	-0,4088	7,7	+0,2876	+0,3314
2,8	+0,6633	-0,4614	7,8	+0,3190	+0,2970
2,9	+0,6147	-0,5084	7,9	+0,3469	+0,2600
3,0	+0,5618	-0,5493	8,0	+0,3709	+0,2212
3,1	+0,5051	-0,5841	8,1	+0,3910	+0,1806
3,2	+0,4452	-0,6126	8,2	+0,4070	+0,1385
3,3	+0,3828	-0,6348	8,3	+0,4188	+0,0958
3,4	+0,3184	-0,6507	8,4	+0,4262	+0,0526
3,5	+0,2529	-0,6603	8,5	+0,4293	+0,0091
3,6	+0,1866	-0,6636	8,6	+0,4281	-0,0336
3,7	+0,1203	-0,6608	8,7	+0,4227	-0,0751
3,8	+0,0547	-0,6520	8,8	+0,4131	-0,1157
3,9	-0,0098	-0,6374	8,9	+0,3995	-0,1548
4,0	-0,0727	-0,6174	9,0	+0,3821	-0,1921
4,1	-0,1332	-0,5922	9,1	+0,3612	-0,2271
4,2	-0,1909	-0,5620	9,2	+0,3368	-0,2595
4,3	-0,2454	-0,5273	9,3	+0,3094	-0,2889
4,4	-0,2963	-0,4885	9,4	+0,2791	-0,3151
4,5	-0,3430	-0,4460	9,5	+0,2463	-0,3381
4,6	-0,3853	-0,4003	9,6	+0,2117	-0,3574
4,7	-0,4229	-0,3518	9,7	+0,1755	-0,3729
4,8	-0,4556	-0,3008	9,8	+0,1373	-0,3846
4,9	-0,4831	-0,2482	9,9	+0,0982	-0,3924
5,0	-0,5052	-0,1943	10,0	+0,0589	-0,3962
5,1	-0,5219	-0,1395	10,1	+0,0192	-0,3962
5,2	-0,5331	-0,0816	10,2	-0,0202	-0,3931
5,3	-0,5388	-0,0298			
5,4	-0,5391	+0,0241			
5,5	-0,5340	+0,0769			
5,6	-0,5238	+0,1280			
5,7	-0,5085	+0,1769			
5,8	-0,4885	+0,2234			
5,9	-0,4640	+0,2668			

$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,1	+2,4100	+10,1457	3,1	-0,5389	-0,5492
0,2	+1,6982	+5,2211	3,2	-0,4823	-0,5823
0,3	+1,2681	+3,6020	3,3	-0,4227	-0,6092
0,4	+0,9519	+2,7974	3,4	-0,3607	-0,6299
0,5	+0,6982	+2,3114	3,5	-0,2970	-0,6443
0,6	+0,4846	+1,9798	3,6	-0,2320	-0,6525
0,7	+0,2995	+1,7330	3,7	-0,1666	-0,6545
0,8	+0,1363	+1,5365	3,8	-0,1013	-0,6505
0,9	-0,0088	+1,3715	3,9	-0,0367	-0,6406
1,0	-0,1386	+1,2271	4,0	+0,0266	-0,6251
1,1	-0,2547	+1,0966	4,1	+0,0881	-0,6041
1,2	-0,3583	+0,9757	4,2	+0,1473	-0,5781
1,3	-0,4501	+0,8616	4,3	+0,2036	-0,5473
1,4	-0,5308	+0,7526	4,4	+0,2566	-0,5120
1,5	-0,6007	+0,6477	4,5	+0,3058	-0,4728
1,6	-0,6604	+0,5460	4,6	+0,3510	-0,4300
1,7	-0,7100	+0,4472	4,7	+0,3917	-0,3841
1,8	-0,7499	+0,3513	4,8	+0,4277	-0,3355
1,9	-0,7804	+0,2582	4,9	+0,4588	-0,2847
2,0	-0,8017	+0,1681	5,0	+0,4846	-0,2323
2,1	-0,8141	+0,0812	5,1	+0,5052	-0,1787
2,2	-0,8180	-0,0023	5,2	+0,5203	-0,1244
2,3	-0,8138	-0,0821	5,3	+0,5300	-0,0700
2,4	-0,8018	-0,1578	5,4	+0,5343	-0,0159
2,5	-0,7824	-0,2292	5,5	+0,5333	+0,0373
2,6	-0,7561	-0,2959	5,6	+0,5269	+0,0892
2,7	-0,7234	-0,3576	5,7	+0,5155	+0,1394
2,8	-0,6847	-0,4140	5,8	+0,4991	+0,1873
2,9	-0,6407	-0,4649	5,9	+0,4781	+0,2326
3,0	-0,5920	-0,5100	6,0	+0,4527	+0,2749

$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,00	$\infty$	$\infty$	0,50	0,6983	2,3114
0,01	4,7209	100,0261	0,51	0,6753	2,2729
0,02	4,0274	50,0453	0,52	0,6528	2,2357
0,03	3,6215	33,3951	0,53	0,6306	2,1999
0,04	3,3331	25,0767	0,54	0,6088	2,1653
0,05	3,1091	20,0903	0,55	0,5873	2,1319
0,06	2,9258	16,7695	0,56	0,5661	2,0995
0,07	2,7705	14,4002	0,57	0,5453	2,0681
0,08	2,6359	12,6255	0,58	0,5248	2,0377
0,09	2,5168	11,2470	0,59	0,5046	2,0083
0,10	2,4099	10,1457	0,60	0,4846	1,9798
0,11	2,3133	9,2459	0,61	0,4650	1,9521
0,12	2,2245	8,4971	0,62	0,4456	1,9251
0,13	2,1428	7,8645	0,63	0,4264	1,8988
0,14	2,0670	7,3230	0,64	0,4076	1,8732
0,15	1,9961	6,8545	0,65	0,3890	1,8483
0,16	1,9297	6,4450	0,66	0,3707	1,8241
0,17	1,8671	6,0843	0,67	0,3525	1,8005
0,18	1,8079	5,7642	0,68	0,3346	1,7775
0,19	1,7517	5,4780	0,69	0,3169	1,7550
0,20	1,6982	5,2209	0,70	0,2995	1,7329
0,21	1,6472	4,9888	0,71	0,2823	1,7114
0,22	1,5983	4,7779	0,72	0,2653	1,6904
0,23	1,5515	4,5855	0,73	0,2485	1,6699
0,24	1,5066	4,4094	0,74	0,2319	1,6496
0,25	1,4633	4,2476	0,75	0,2155	1,6299
0,26	1,4216	4,0983	0,76	0,1993	1,6105
0,27	1,3813	3,9603	0,77	0,1833	1,5914
0,28	1,3424	3,8323	0,78	0,1675	1,5728
0,29	1,3046	3,7131	0,79	0,1518	1,5544
0,30	1,2680	3,6020	0,80	0,1363	1,5365
0,31	1,2326	3,4982	0,81	0,1211	1,5188
0,32	1,1981	3,4007	0,82	0,1060	1,5015
0,33	1,1645	3,3094	0,83	0,0910	1,4843
0,34	1,1319	3,2233	0,84	0,0763	1,4674
0,35	1,1000	3,1423	0,85	0,0617	1,4509
0,36	1,0690	3,0656	0,86	0,0473	1,4346
0,37	1,0387	2,9932	0,87	0,0330	1,4185
0,38	1,0092	2,9245	0,88	0,0189	1,4026
0,39	0,9803	2,8593	0,89	0,0050	1,3870
0,40	0,9519	2,7973	0,90	-0,0088	1,3715
0,41	0,9243	2,7384	0,91	-0,0224	1,3563
0,42	0,8972	2,6822	0,92	-0,0359	1,3413
0,43	0,8706	2,6286	0,93	-0,0493	1,3264
0,44	0,8446	2,5773	0,94	-0,0625	1,3117
0,45	0,8190	2,5282	0,95	-0,0756	1,2972
0,46	0,7940	2,4813	0,96	-0,0885	1,2829
0,47	0,7694	2,4362	0,97	-0,1012	1,2688
0,48	0,7453	2,3929	0,98	-0,1138	1,2548
0,49	0,7216	2,3514	0,99	-0,1263	1,2408

$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	$x$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
1,0	-0,1386	1,2271	6,0	0,4527	0,2749
1,1	-0,2548	1,0966	6,1	0,4233	0,3139
1,2	-0,3583	0,9757	6,2	0,3900	0,3492
1,3	-0,4501	0,8616	6,3	0,3535	0,3805
1,4	-0,5308	0,7526	6,4	0,3140	0,4077
1,5	-0,6008	0,6477	6,5	0,2721	0,4306
1,6	-0,6604	0,5460	6,6	0,2281	0,4488
1,7	-0,7101	0,4473	6,7	0,1826	0,4625
1,8	-0,7500	0,3513	6,8	0,1358	0,4715
1,9	-0,7805	0,2583	6,9	0,0884	0,4758
2,0	-0,8017	0,1682	7,0	0,0408	0,4755
2,1	-0,8142	0,0812	7,1	-0,0065	0,4704
2,2	-0,8180	-0,0023	7,2	-0,0531	0,4609
2,3	-0,8138	-0,0821	7,3	-0,0986	0,4471
2,4	-0,8017	-0,1580	7,4	-0,1424	0,4290
2,5	-0,7824	-0,2293	7,5	-0,1842	0,4071
2,6	-0,7560	-0,2959	7,6	-0,2237	0,3814
2,7	-0,7234	-0,3576	7,7	-0,2604	0,3524
2,8	-0,6848	-0,4139	7,8	-0,2940	0,3203
2,9	-0,6407	-0,4649	7,9	-0,3243	0,2854
3,0	-0,5920	-0,5100	8,0	-0,3510	0,2484
3,1	-0,5390	-0,5492	8,1	-0,3739	0,2093
3,2	-0,4823	-0,5823	8,2	-0,3928	0,1684
3,3	-0,4227	-0,6092	8,3	-0,4076	0,1266
3,4	-0,3606	-0,6299	8,4	-0,4182	0,0840
3,5	-0,2970	-0,6444	8,5	-0,4244	0,0408
3,6	-0,2320	-0,6525	8,6	-0,4264	-0,0020
3,7	-0,1666	-0,6546	8,7	-0,4242	-0,0438
3,8	-0,1014	-0,6505	8,8	-0,4177	-0,0851
3,9	-0,0368	-0,6406	8,9	-0,4071	-0,1251
4,0	+0,0266	-0,6251	9,0	-0,3926	-0,1637
4,1	+0,0881	-0,6042	9,1	-0,3744	-0,2001
4,2	0,1472	-0,5781	9,2	-0,3527	-0,2343
4,3	0,2035	-0,5472	9,3	-0,3277	-0,2657
4,4	0,2566	-0,5120	9,4	-0,2996	-0,2940
4,5	0,3058	-0,4728	9,5	-0,2688	-0,3194
4,6	0,3510	-0,4300	9,6	-0,2359	-0,3412
4,7	0,3917	-0,3842	9,7	-0,2012	-0,3594
4,8	0,4277	-0,3354	9,8	-0,1642	-0,3738
4,9	0,4588	-0,2847	9,9	-0,1261	-0,3845
5,0	0,4846	-0,2323	10,0	-0,0874	-0,3912
5,1	0,5052	-0,1786	10,1	-0,0481	-0,3941
5,2	0,5203	-0,1244	10,2	-0,0087	-0,3923
5,3	0,5300	-0,0699	10,3	+0,0302	
5,4	0,5343	-0,0159			
5,5	0,5332	+0,0373			
5,6	0,5269	0,0892			
5,7	0,5155	0,1393			
5,8	0,4991	0,1873			
5,9	0,4782	0,2326			



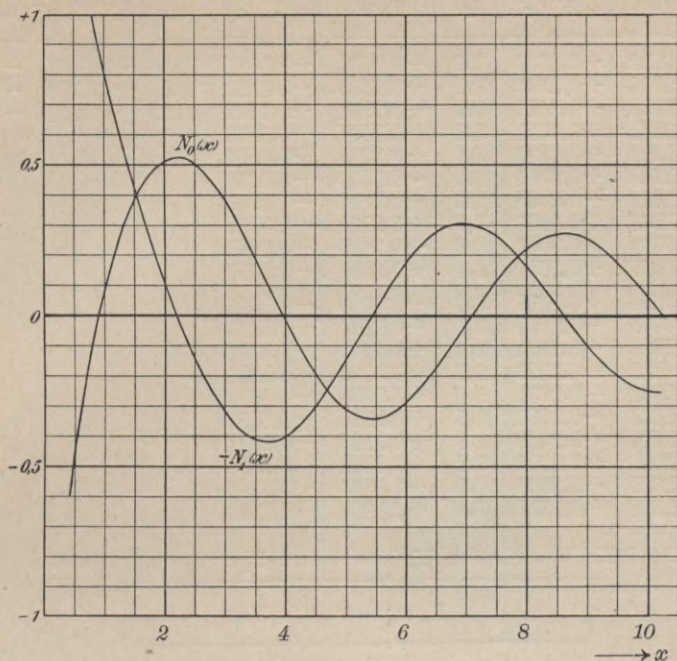


Fig. 35. Neumannsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins.

Tafel IX.

$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$
0,0	$-\infty$	$+\infty$	2,0	+0,5104	+0,1071	4,0	-0,0170	-0,3979
0,1	-1,5342	+7,0317	2,1	+0,5183	+0,0517	4,1	-0,0561	-0,3846
0,2	-1,0810	+3,3235	2,2	+0,5207	-0,0015	4,2	-0,0937	-0,3680
0,3	-0,8072	+2,2929	2,3	+0,5180	-0,0523	4,3	-0,1296	-0,3484
0,4	-0,6060	+1,7808	2,4	+0,5104	-0,1005	4,4	-0,1634	-0,3260
0,5	-0,4444	+1,4714	2,5	+0,4981	-0,1460	4,5	-0,1947	-0,3010
0,6	-0,3085	+1,2604	2,6	+0,4813	-0,1884	4,6	-0,2234	-0,2738
0,7	-0,1906	+1,1032	2,7	+0,4605	-0,2277	4,7	-0,2493	-0,2446
0,8	-0,0868	+0,9780	2,8	+0,4359	-0,2635	4,8	-0,2723	-0,2135
0,9	+0,0057	+0,8731	2,9	+0,4079	-0,2959	4,9	-0,2921	-0,1812
1,0	+0,0882	+0,7813	3,0	+0,3768	-0,3247	5,0	-0,3085	-0,1479
1,1	+0,1622	+0,6982	3,1	+0,3431	-0,3496	5,1	-0,3216	-0,1137
1,2	+0,2281	+0,6211	3,2	+0,3070	-0,3707	5,2	-0,3312	-0,0773
1,3	+0,2865	+0,5485	3,3	+0,2691	-0,3878	5,3	-0,3374	-0,0445
1,4	+0,3379	+0,4791	3,4	+0,2295	-0,4010	5,4	-0,3402	-0,0101
1,5	+0,3825	+0,4123	3,5	+0,1890	-0,4102	5,5	-0,3394	+0,0238
1,6	+0,4204	+0,3476	3,6	+0,1477	-0,4154	5,6	-0,3354	+0,0569
1,7	+0,4520	+0,2847	3,7	+0,1060	-0,4167	5,7	-0,3281	+0,0887
1,8	+0,4774	+0,2236	3,8	+0,0645	-0,4141	5,8	-0,3177	+0,1192
1,9	+0,4968	+0,1644	3,9	+0,0237	-0,4078	5,9	-0,3044	+0,1481

$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$-N_1(x)$
6.0	-0,2882	+0,1750	8.0	+0,2234	+0,1581	10.0	+0,0557	-0,2490
6.1	-0,2694	+0,1998	8.1	+0,2380	+0,1332	10.1	+0,0306	-0,2509
6.2	-0,2483	+0,2223	8.2	+0,2501	+0,1072	10.2	+0,0056	-0,2507
6.3	-0,2251	+0,2421	8.3	+0,2597	+0,0806			
6.4	-0,1999	+0,2596	8.4	+0,2662	+0,0534			
6.5	-0,1733	+0,2741	8.5	+0,2702	+0,0260			
6.6	-0,1452	+0,2857	8.6	+0,2714	-0,0013			
6.7	-0,1163	+0,2946	8.7	+0,2700	-0,0279			
6.8	-0,0864	+0,3002	8.8	+0,2659	-0,0541			
6.9	-0,0563	+0,3029	8.9	+0,2591	-0,0797			
7.0	-0,0260	+0,3027	9.0	+0,2499	-0,1042			
7.1	+0,0041	+0,2995	9.1	+0,2384	-0,1274			
7.2	+0,0338	+0,2934	9.2	+0,2245	-0,1492			
7.3	+0,0628	+0,2846	9.3	+0,2086	-0,1691			
7.4	+0,0907	+0,2731	9.4	+0,1907	-0,1872			
7.5	+0,1173	+0,2592	9.5	+0,1711	-0,2033			
7.6	+0,1424	+0,2428	9.6	+0,1503	-0,2172			
7.7	+0,1658	+0,2244	9.7	+0,1281	-0,2288			
7.8	+0,1872	+0,2039	9.8	+0,1046	-0,2380			
7.9	+0,2065	+0,1817	9.9	+0,0800	-0,2448			

Tafel X: Wurzeln von  $Y_0(x) = 0$  und  $Y_1(x) = 0$  (vgl. S. 94).

$n$	$Y_0(x_n) = 0$	$Y_1(x_n) = 0$
1	0,8260	2,118
2	3,885	5,355
3	7,013	8,521
4	10,149	

Tafel XI (vgl. Fig. 47, S. 158).

$x$	$J_0(ix)$	$x$	$J_0(ix)$	$x$	$J_0(ix)$	$x$	$J_0(ix)$
0.0	1.0000	1.6	1.7500	3.1	5.2945	4.6	19.0926
0.1	1.0025	1.7	1.8640	3.2	5.7472	4.7	20.8585
0.2	1.0100	1.8	1.9896	3.3	6.2426	4.8	22.7937
0.3	1.0226	1.9	2.1277	3.4	6.7848	4.9	24.9148
0.4	1.0404	2.0	2.2796	3.5	7.3782	5.0	27.2399
0.5	1.0635	2.1	2.4463	3.6	8.0277	5.1	29.7889
0.6	1.0920	2.2	2.6291	3.7	8.7386	5.2	32.5836
0.7	1.1263	2.3	2.8296	3.8	9.5169	5.3	35.6481
0.8	1.1665	2.4	3.0493	3.9	10.3690	5.4	39.0088
0.9	1.2130	2.5	3.2898	4.0	11.3019	5.5	42.6946
1.0	1.2661	2.6	3.5533	4.1	12.3236	5.6	46.7376
1.1	1.3262	2.7	3.8417	4.2	13.4425	5.7	51.1725
1.2	1.3937	2.8	4.1573	4.3	14.6680	5.8	56.0381
1.3	1.4693	2.9	4.5027	4.4	16.0104	5.9	61.3766
1.4	1.5534	3.0	4.8808	4.5	17.4812	6.0	67.2344
1.5	1.6467					7.0	168.594
						8.0	427.564
						9.0	1093.59
						10.0	2815.72
						11.0	7288.49

$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$
0,00	0,0000	0,45	0,2307	0,90	0,4971	1,35	0,8409
0,01	0,025000	0,46	0,2361	0,91	0,5038	1,36	0,8498
0,02	0,01000	0,47	0,2415	0,92	0,5104	1,37	0,8588
0,03	0,01500	0,48	0,2470	0,93	0,5171	1,38	0,8678
0,04	0,02000	0,49	0,2524	0,94	0,5239	1,39	0,8769
0,05	0,02501	0,50	0,2579	0,95	0,5306	1,40	0,8861
0,06	0,03001	0,51	0,2634	0,96	0,5375	1,41	0,8953
0,07	0,03502	0,52	0,2689	0,97	0,5443	1,42	0,9046
0,08	0,04003	0,53	0,2744	0,98	0,5512	1,43	0,9140
0,09	0,04505	0,54	0,2800	0,99	0,5582	1,44	0,9235
0,10	0,05006	0,55	0,2855	1,00	0,5652	1,45	0,9330
0,11	0,05508	0,56	0,2911	1,01	0,5722	1,46	0,9426
0,12	0,06011	0,57	0,2967	1,02	0,5793	1,47	0,9522
0,13	0,06514	0,58	0,3024	1,03	0,5864	1,48	0,9620
0,14	0,07017	0,59	0,3080	1,04	0,5935	1,49	0,9718
0,15	0,07521	0,60	0,3137	1,05	0,6008	1,50	0,9817
0,16	0,08026	0,61	0,3194	1,06	0,6080	1,51	0,9916
0,17	0,08531	0,62	0,3251	1,07	0,6153	1,52	1,0017
0,18	0,09036	0,63	0,3309	1,08	0,6227	1,53	1,0118
0,19	0,09543	0,64	0,3367	1,09	0,6300	1,54	1,0220
0,20	0,1005	0,65	0,3425	1,10	0,6375	1,55	1,0322
0,21	0,1056	0,66	0,3483	1,11	0,6450	1,56	1,0426
0,22	0,1107	0,67	0,3542	1,12	0,6525	1,57	1,0530
0,23	0,1158	0,68	0,3600	1,13	0,6601	1,58	1,0635
0,24	0,1209	0,69	0,3659	1,14	0,6677	1,59	1,0741
0,25	0,1260	0,70	0,3719	1,15	0,6754	1,60	1,0848
0,26	0,1311	0,71	0,3778	1,16	0,6832	1,61	1,0956
0,27	0,1362	0,72	0,3838	1,17	0,6910	1,62	1,1064
0,28	0,1414	0,73	0,3899	1,18	0,6988	1,63	1,1174
0,29	0,1465	0,74	0,3959	1,19	0,7067	1,64	1,1284
0,30	0,1517	0,75	0,4020	1,20	0,7147	1,65	1,1395
0,31	0,1569	0,76	0,4081	1,21	0,7227	1,66	1,1507
0,32	0,1621	0,77	0,4142	1,22	0,7308	1,67	1,1620
0,33	0,1673	0,78	0,4204	1,23	0,7389	1,68	1,1733
0,34	0,1725	0,79	0,4266	1,24	0,7470	1,69	1,1848
0,35	0,1777	0,80	0,4329	1,25	0,7553	1,70	1,1963
0,36	0,1829	0,81	0,4391	1,26	0,7636	1,71	1,2080
0,37	0,1882	0,82	0,4454	1,27	0,7719	1,72	1,2197
0,38	0,1935	0,83	0,4518	1,28	0,7803	1,73	1,2316
0,39	0,1987	0,84	0,4581	1,29	0,7888	1,74	1,2435
0,40	0,2040	0,85	0,4646	1,30	0,7973	1,75	1,2555
0,41	0,2093	0,86	0,4710	1,31	0,8059	1,76	1,2677
0,42	0,2147	0,87	0,4775	1,32	0,8146	1,77	1,2799
0,43	0,2200	0,88	0,4840	1,33	0,8233	1,78	1,2922
0,44	0,2254	0,89	0,4905	1,34	0,8321	1,79	1,3046

$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$
1.80	1.3172	2,25	2,0040	2,70	3,0161	3,15	4,5256
1.81	1,3298	2,26	2,0224	2,71	3,0435	3,16	4,5666
1.82	1,3425	2,27	2,0410	2,72	3,0711	3,17	4,6079
1.83	1,3554	2,28	2,0598	2,73	3,0989	3,18	4,6497
1.84	1,3683	2,29	2,0787	2,74	3,1271	3,19	4,6918
1.85	1,3814	2,30	2,0978	2,75	3,1554	3,20	4,7343
1.86	1,3945	2,31	2,1171	2,76	3,1840	3,21	4,7771
1.87	1,4078	2,32	2,1365	2,77	3,2129	3,22	4,8204
1.88	1,4212	2,33	2,1561	2,78	3,2420	3,23	4,8640
1.89	1,4346	2,34	2,1758	2,79	3,2714	3,24	4,9081
1.90	1,4482	2,35	2,1958	2,80	3,3011	3,25	4,9525
1.91	1,4620	2,36	2,2159	2,81	3,3310	3,26	4,9974
1.92	1,4758	2,37	2,2362	2,82	3,3612	3,27	5,0427
1.93	1,4897	2,38	2,2567	2,83	3,3916	3,28	5,0883
1.94	1,5038	2,39	2,2773	2,84	3,4223	3,29	5,1344
1.95	1,5180	2,40	2,2981	2,85	3,4533	3,30	5,1810
1.96	1,5323	2,41	2,3191	2,86	3,4846	3,31	5,2279
1.97	1,5467	2,42	2,3403	2,87	3,5162	3,32	5,2753
1.98	1,5612	2,43	2,3617	2,88	3,5480	3,33	5,3231
1.99	1,5759	2,44	2,3833	2,89	3,5802	3,34	5,3713
2.00	1,5906	2,45	2,4050	2,90	3,6126	3,35	5,4200
2.01	1,6055	2,46	2,4270	2,91	3,6453	3,36	5,4691
2.02	1,6206	2,47	2,4491	2,92	3,6783	3,37	5,5187
2.03	1,6357	2,48	2,4715	2,93	3,7116	3,38	5,5687
2.04	1,6510	2,49	2,4940	2,94	3,7453	3,39	5,6192
2.05	1,6664	2,50	2,5167	2,95	3,7792	3,40	5,6701
2.06	1,6820	2,51	2,5396	2,96	3,8134	3,41	5,7215
2.07	1,6977	2,52	2,5628	2,97	3,8479	3,42	5,7734
2.08	1,7135	2,53	2,5861	2,98	3,8827	3,43	5,8257
2.09	1,7294	2,54	2,6097	2,99	3,9179	3,44	5,8786
2.10	1,7455	2,55	2,6334	3,00	3,9534	3,45	5,9319
2.11	1,7617	2,56	2,6574	3,01	3,9892	3,46	5,9857
2.12	1,7781	2,57	2,6816	3,02	4,0253	3,47	6,0400
2.13	1,7946	2,58	2,7060	3,03	4,0617	3,48	6,0947
2.14	1,8112	2,59	2,7306	3,04	4,0985	3,49	6,1500
2.15	1,8280	2,60	2,7554	3,05	4,1356	3,50	6,2058
2.16	1,8449	2,61	2,7804	3,06	4,1730	3,51	6,2621
2.17	1,8620	2,62	2,8057	3,07	4,2108	3,52	6,3190
2.18	1,8792	2,63	2,8312	3,08	4,2489	3,53	6,3763
2.19	1,8966	2,64	2,8569	3,09	4,2874	3,54	6,4342
2.20	1,9141	2,65	2,8829	3,10	4,3262	3,55	6,4926
2.21	1,9318	2,66	2,9090	3,11	4,3654	3,56	6,5515
2.22	1,9496	2,67	2,9354	3,12	4,4049	3,57	6,6110
2.23	1,9676	2,68	2,9621	3,13	4,4448	3,58	6,6710
2.24	1,9857	2,69	2,9890	3,14	4,4850	3,59	6,7316

$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$	$x$	$-iJ_1(ix)$
3,60	6,7927	4,05	10,2129	4,50	15,3892	4,95	23,2426
3,61	6,8544	4,06	10,3061	4,51	15,5305	4,96	23,4572
3,62	6,9167	4,07	10,4002	4,52	15,6731	4,97	23,6737
3,63	6,9795	4,08	10,4952	4,53	15,8170	4,98	23,8923
3,64	7,0429	4,09	10,5910	4,54	15,9622	4,99	24,1130
3,65	7,1069	4,10	10,6877	4,55	16,1088	5,00	24,3356
3,66	7,1715	4,11	10,7854	4,56	16,2568	5,01	24,5604
3,67	7,2366	4,12	10,8839	4,57	16,4061	5,02	24,7873
3,68	7,3024	4,13	10,9833	4,58	16,5569	5,03	25,0163
3,69	7,3688	4,14	11,0837	4,59	16,7090	5,04	25,2474
3,70	7,4357	4,15	11,1850	4,60	16,8626	5,05	25,4807
3,71	7,5033	4,16	11,2872	4,61	17,0176	5,06	25,7162
3,72	7,5716	4,17	11,3903	4,62	17,1740	5,07	25,9539
3,73	7,6404	4,18	11,4945	4,63	17,3319	5,08	26,1938
3,74	7,7099	4,19	11,5996	4,64	17,4912	5,09	26,4360
3,75	7,7800	4,20	11,7056	4,65	17,6521	5,10	26,6804
3,76	7,8508	4,21	11,8127	4,66	17,8144	5,20	29,2543
3,77	7,9222	4,22	11,9207	4,67	17,9783	5,30	32,0799
3,78	7,9943	4,23	12,0297	4,68	18,1437	5,40	35,1821
3,79	8,0670	4,24	12,1398	4,69	18,3106	5,50	38,5882
3,80	8,1404	4,25	12,2509	4,70	18,4791	5,60	42,3283
3,81	8,2145	4,26	12,3630	4,71	18,6491	5,70	46,4355
3,82	8,2893	4,27	12,4761	4,72	18,8208	5,80	50,9462
3,83	8,3647	4,28	12,5903	4,73	18,9940	5,90	55,9003
3,84	8,4409	4,29	12,7056	4,74	19,1689	6,0	61,3419
3,85	8,5177	4,30	12,8219	4,75	19,3454	7,0	156,039
3,86	8,5953	4,31	12,9393	4,76	19,5235	8,0	399,873
3,87	8,6736	4,32	13,0578	4,77	19,7033	9,0	1030,91
3,88	8,7526	4,33	13,1774	4,78	19,8848	10,0	2670,99
3,89	8,8323	4,34	13,2981	4,79	20,0680	11,0	6948,86
3,90	8,9128	4,35	13,4199	4,80	20,2528		
3,91	8,9940	4,36	13,5429	4,81	20,4394		
3,92	9,0760	4,37	13,6670	4,82	20,6278		
3,93	9,1587	4,38	13,7922	4,83	20,8179		
3,94	9,2421	4,39	13,9186	4,84	21,0098		
3,95	9,3264	4,40	14,0462	4,85	21,2035		
3,96	9,4114	4,41	14,1750	4,86	21,3989		
3,97	9,4972	4,42	14,3050	4,87	21,5963		
3,98	9,5838	4,43	14,4362	4,88	21,7954		
3,99	9,6713	4,44	14,5686	4,89	21,9965		
4,00	9,7595	4,45	14,7022	4,90	22,1993		
4,01	9,8485	4,46	14,8371	4,91	22,4041		
4,02	9,9383	4,47	14,9732	4,92	22,6109		
4,03	10,0290	4,48	15,1106	4,93	22,8195		
4,04	10,1206	4,49	15,2493	4,94	23,0301		

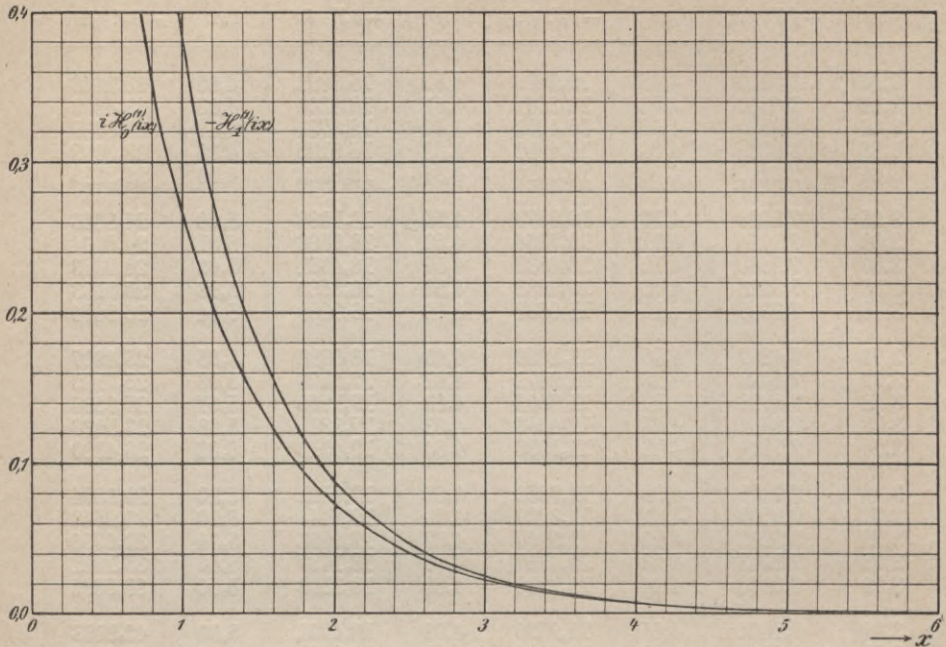


Fig. 36. Hankelsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins bei rein imaginärem Argument.

Tafel XIII (vgl. S. 94).

$x$	$i H_0^{(1)}(ix)$ $= -i H_0^{(2)}(-ix)$ $= \pm i J_0(\pm ix)$ $- N_0(\pm ix)$	$x$	$i H_0^{(1)}(ix)$ $= -i H_0^{(2)}(-ix)$ $= \pm i J_0(\pm ix)$ $- N_0(\pm ix)$	$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$ $= -H_1^{(2)}(-ix)$ $= -J_1(\pm ix)$ $+ i N_1(\pm ix)$	$x$	$-H_1^{(1)}(ix)$ $= -H_1^{(2)}(-ix)$ $= -J_1(\pm ix)$ $+ i N_1(\pm ix)$
0,0	$\infty$	3,0	0,02211	0,0	$\infty$	3,0	0,02561
0,2	1,1157	3,2	0,01756	0,2	3,0405	3,2	0,02015
0,4	0,7095	3,4	0,01400	0,4	1,3906	3,4	0,01590
0,6	0,4950	3,6	0,01114	0,6	0,8294	3,6	0,01259
0,8	0,3599	3,8	0,008889	0,8	0,5486	3,8	0,009999
1,0	0,2681	4,0	0,007102	1,0	0,3832	4,0	0,007947
1,2	0,2028	4,2	0,005679	1,2	0,2767	4,2	0,0063265
1,4	0,1551	4,4	0,004549	1,4	0,2043	4,4	0,005044
1,6	0,1197	4,6	0,003647	1,6	0,1532	4,6	0,004026
1,8	0,09289	4,8	0,002927	1,8	0,1163	4,8	0,003218
2,0	0,07252	5,0	0,002349	2,0	0,08905	5,0	0,002575
2,2	0,05684	5,2	0,001888	2,2	0,06869	5,2	0,002062
2,4	0,04471	5,4	0,001518	2,4	0,05330	5,4	0,001653
2,6	0,03526	5,6	0,001221	2,6	0,04157	5,6	0,001326
2,8	0,02792	5,8	0,0009831	2,8	0,03252	5,8	0,001065
		6,0	0,0007919			6,0	0,0008556

$x$	$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$	$-\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$	$x$	$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$	$-\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$
0.1	2,4271	9,8538	4.6	0.0 <sup>2</sup> 5730	0.0 <sup>2</sup> 6325
0.2	1,7527	4,7760	4.7	0.0 <sup>2</sup> 5132	0.0 <sup>2</sup> 5654
0.3	1,3725	3,0560	4.8	0.0 <sup>2</sup> 4597	0.0 <sup>2</sup> 5055
0.4	1,1145	2,1844	4.9	0.0 <sup>2</sup> 4119	0.0 <sup>2</sup> 4521
0.5	0,9244	1,6564	5.0	0.0 <sup>2</sup> 3691	0.0 <sup>2</sup> 4045
0.6	0,7775	1,3028	5.1	0.0 <sup>2</sup> 3308	0.0 <sup>2</sup> 3619
0.7	0,6605	1,0503	5.2	0.0 <sup>2</sup> 2966	0.0 <sup>2</sup> 3239
0.8	0,5653	0,8618	5.3	0.0 <sup>2</sup> 2659	0.0 <sup>2</sup> 2900
0.9	0,4867	0,7165	5.4	0.0 <sup>2</sup> 2385	0.0 <sup>2</sup> 2597
1.0	0,4210	0,6019	5.5	0.0 <sup>2</sup> 2139	0.0 <sup>2</sup> 2326
1.1	0,3656	0,5098	5.6	0.0 <sup>2</sup> 1918	0.0 <sup>2</sup> 2083
1.2	0,3185	0,4346	5.7	0.0 <sup>2</sup> 1721	0.0 <sup>2</sup> 1866
1.3	0,2782	0,3725	5.8	0.0 <sup>2</sup> 1544	0.0 <sup>2</sup> 1673
1.4	0,2437	0,3208	5.9	0.0 <sup>2</sup> 1386	0.0 <sup>2</sup> 1499
1.5	0,2138	0,2774	6.0	0.0 <sup>2</sup> 1244	0.0 <sup>2</sup> 1344
1.6	0,1880	0,2406	6.1	0.0 <sup>2</sup> 1116	0.0 <sup>2</sup> 1205
1.7	0,1655	0,2094	6.2	0.0 <sup>2</sup> 1002	0.0 <sup>2</sup> 1081
1.8	0,1459	0,1826	6.3	0.0 <sup>3</sup> 9001	0.0 <sup>3</sup> 9691
1.9	0,1288	0,1597	6.4	0.0 <sup>3</sup> 8083	0.0 <sup>3</sup> 8693
2.0	0,1139	0,1399	6.5	0.0 <sup>3</sup> 7259	0.0 <sup>3</sup> 7799
2.1	0,1008	0,1227	6.6	0.0 <sup>3</sup> 6520	0.0 <sup>3</sup> 6998
2.2	0,08927	0,1079	6.7	0.0 <sup>3</sup> 5857	0.0 <sup>3</sup> 6280
2.3	0,07914	0,09500	6.8	0.0 <sup>3</sup> 5262	0.0 <sup>3</sup> 5636
2.4	0,07022	0,08372	6.9	0.0 <sup>3</sup> 4728	0.0 <sup>3</sup> 5059
2.5	0,06235	0,07389	7.0	0.0 <sup>3</sup> 4248	0.0 <sup>3</sup> 4542
2.6	0,05540	0,06528	7.1	0.0 <sup>3</sup> 3817	0.0 <sup>3</sup> 4078
2.7	0,04926	0,05774	7.2	0.0 <sup>3</sup> 3431	0.0 <sup>3</sup> 3662
2.8	0,04382	0,05111	7.3	0.0 <sup>3</sup> 3084	0.0 <sup>3</sup> 3288
2.9	0,03901	0,04529	7.4	0.0 <sup>3</sup> 2772	0.0 <sup>3</sup> 2954
3.0	0,03474	0,04016	7.5	0.0 <sup>3</sup> 2492	0.0 <sup>3</sup> 2653
3.1	0,03095	0,03563	7.6	0.0 <sup>3</sup> 2240	0.0 <sup>3</sup> 2383
3.2	0,02759	0,03164	7.7	0.0 <sup>3</sup> 2014	0.0 <sup>3</sup> 2141
3.3	0,02461	0,02812	7.8	0.0 <sup>3</sup> 1811	0.0 <sup>3</sup> 1924
3.4	0,02196	0,02500	7.9	0.0 <sup>3</sup> 1629	0.0 <sup>3</sup> 1729
3.5	0,01960	0,02224	8.0	0.0 <sup>3</sup> 1465	0.0 <sup>3</sup> 1554
3.6	0,01750	0,01979	8.1	0.0 <sup>3</sup> 1317	0.0 <sup>3</sup> 1396
3.7	0,01563	0,01763	8.2	0.0 <sup>3</sup> 1185	0.0 <sup>3</sup> 1255
3.8	0,01397	0,01571	8.3	0.0 <sup>3</sup> 1066	0.0 <sup>3</sup> 1128
3.9	0,01248	0,01400	8.4	0.0 <sup>3</sup> 9588	0.0 <sup>3</sup> 1014
4.0	0,01116	0,01248	8.5	0.0 <sup>3</sup> 8626	0.0 <sup>3</sup> 9120
4.1	0,09980	0,01114	8.6	0.0 <sup>4</sup> 7761	0.0 <sup>4</sup> 8200
4.2	0.0 <sup>2</sup> 8927	0.0 <sup>2</sup> 9938	8.7	0.0 <sup>4</sup> 6983	0.0 <sup>4</sup> 7374
4.3	0.0 <sup>2</sup> 7988	0.0 <sup>2</sup> 8872	8.8	0.0 <sup>4</sup> 6283	0.0 <sup>4</sup> 6631
4.4	0.0 <sup>2</sup> 7149	0.0 <sup>2</sup> 7923	8.9	0.0 <sup>4</sup> 5654	0.0 <sup>4</sup> 5964
4.5	0.0 <sup>2</sup> 6400	0.0 <sup>2</sup> 7078	9.0	0.0 <sup>4</sup> 5088	0.0 <sup>4</sup> 5364

$x$	$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$	$-\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$	$x$	$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$	$-\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$
9.1	0,0 <sup>4</sup> 4579	0,0 <sup>4</sup> 4825	10.6	0,0 <sup>5</sup> 9484	0,0 <sup>5</sup> 9921
9.2	0,0 <sup>4</sup> 4121	0,0 <sup>4</sup> 4340	10.7	0,0 <sup>5</sup> 8542	0,0 <sup>5</sup> 8933
9.3	0,0 <sup>4</sup> 3710	0,0 <sup>4</sup> 3904	10.8	0,0 <sup>5</sup> 7694	0,0 <sup>5</sup> 8043
9.4	0,0 <sup>4</sup> 3339	0,0 <sup>4</sup> 3512	10.9	0,0 <sup>5</sup> 6931	0,0 <sup>5</sup> 7242
9.5	0,0 <sup>4</sup> 3006	0,0 <sup>4</sup> 3160	11.0	0,0 <sup>5</sup> 6243	0,0 <sup>5</sup> 6521
9.6	0,0 <sup>4</sup> 2706	0,0 <sup>4</sup> 2843	11.1	0,0 <sup>5</sup> 5624	0,0 <sup>5</sup> 5872
9.7	0,0 <sup>4</sup> 2436	0,0 <sup>4</sup> 2559	11.2	0,0 <sup>5</sup> 5066	0,0 <sup>5</sup> 5288
9.8	0,0 <sup>4</sup> 2193	0,0 <sup>4</sup> 2312	11.3	0,0 <sup>5</sup> 4564	0,0 <sup>5</sup> 4762
9.9	0,0 <sup>4</sup> 1975	0,0 <sup>4</sup> 2072	11.4	0,0 <sup>5</sup> 4112	0,0 <sup>5</sup> 4289
10.0	0,0 <sup>4</sup> 1778	0,0 <sup>4</sup> 1865	11.5	0,0 <sup>5</sup> 3705	0,0 <sup>5</sup> 3863
10.1	0,0 <sup>4</sup> 1601	0,0 <sup>4</sup> 1678	11.6	0,0 <sup>5</sup> 3338	0,0 <sup>5</sup> 3479
10.2	0,0 <sup>4</sup> 1442	0,0 <sup>4</sup> 1511	11.7	0,0 <sup>5</sup> 3008	0,0 <sup>5</sup> 3134
10.3	0,0 <sup>4</sup> 1298	0,0 <sup>4</sup> 1360	11.8	0,0 <sup>5</sup> 2710	0,0 <sup>5</sup> 2823
10.4	0,0 <sup>4</sup> 1169	0,0 <sup>4</sup> 1224	11.9	0,0 <sup>5</sup> 2442	0,0 <sup>5</sup> 2543
10.5	0,0 <sup>4</sup> 1053	0,0 <sup>4</sup> 1102	12.0	0,0 <sup>5</sup> 2201	0,0 <sup>5</sup> 2291

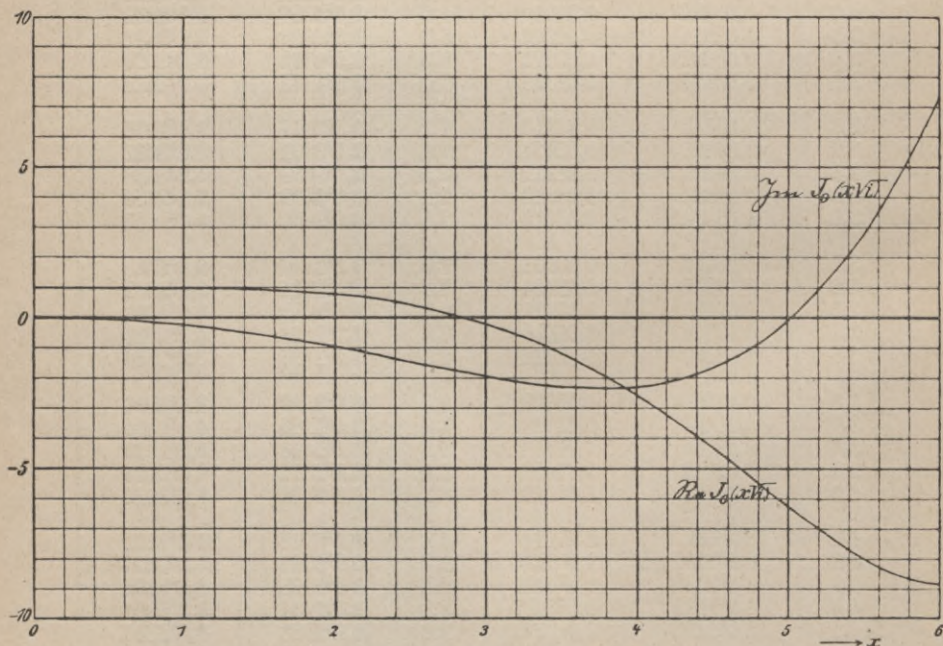


Fig. 37. Besselsche Zylinderfunktion der Ordnung Null bei komplexem Argument.



$x$	$J_0(x\sqrt{i})$	$x$	$J_0(x\sqrt{i})$	$x$	$J_0(x\sqrt{i})$
0,1	+1,0000 - $i$ 0,0025	2,1	+0,6987 - $i$ 1,0654	4,1	-2,8843 - $i$ 2,2309
0,2	+1,0000 - $i$ 0,0100	2,2	+0,6377 - $i$ 1,1610	4,2	-3,2195 - $i$ 2,1422
0,3	+0,9999 - $i$ 0,0225	2,3	+0,5680 - $i$ 1,2585	4,3	-3,5679 - $i$ 2,0236
0,4	+0,9996 - $i$ 0,0400	2,4	+0,4890 - $i$ 1,3575	4,4	-3,9283 - $i$ 1,8726
0,5	+0,9990 - $i$ 0,0625	2,5	+0,4000 - $i$ 1,4572	4,5	-4,2991 - $i$ 1,6860
0,6	+0,9980 - $i$ 0,0900	2,6	+0,3001 - $i$ 1,5569	4,6	-4,6784 - $i$ 1,4610
0,7	+0,9962 - $i$ 0,1224	2,7	+0,1887 - $i$ 1,6557	4,7	-5,0639 - $i$ 1,1946
0,8	+0,9936 - $i$ 0,1599	2,8	+0,0651 - $i$ 1,7529	4,8	-5,4531 - $i$ 0,8837
0,9	+0,9898 - $i$ 0,2023	2,9	-0,0714 - $i$ 1,8472	4,9	-5,8429 - $i$ 0,5251
1,0	+0,9844 - $i$ 0,2496	3,0	-0,2214 - $i$ 1,9376	5,0	-6,2301 - $i$ 0,1160
1,1	+0,9771 - $i$ 0,3017	3,1	-0,3855 - $i$ 2,0228	5,1	-6,6107 - $i$ 0,3467
1,2	+0,9676 - $i$ 0,3587	3,2	-0,5644 - $i$ 2,1016	5,2	-6,9803 - $i$ 0,8658
1,3	+0,9554 - $i$ 0,4204	3,3	-0,7584 - $i$ 2,1723	5,3	-7,3344 - $i$ 1,4443
1,4	+0,9401 - $i$ 0,4867	3,4	-0,9680 - $i$ 2,2334	5,4	-7,6674 - $i$ 2,0845
1,5	+0,9211 - $i$ 0,5576	3,5	-1,1936 - $i$ 2,2832	5,5	-7,9736 - $i$ 2,7890
1,6	+0,8979 - $i$ 0,6327	3,6	-1,4353 - $i$ 2,3199	5,6	-8,2466 - $i$ 3,5597
1,7	+0,8700 - $i$ 0,7120	3,7	-1,6933 - $i$ 2,3413	5,7	-8,4794 - $i$ 4,3986
1,8	+0,8367 - $i$ 0,7953	3,8	-1,9674 - $i$ 2,3454	5,8	-8,6644 - $i$ 5,3068
1,9	+0,7975 - $i$ 0,8821	3,9	-2,2576 - $i$ 2,3300	5,9	-8,7937 - $i$ 6,2854
2,0	+0,7517 - $i$ 0,9723	4,0	-2,5634 - $i$ 2,2927	6,0	-8,8583 - $i$ 7,3347

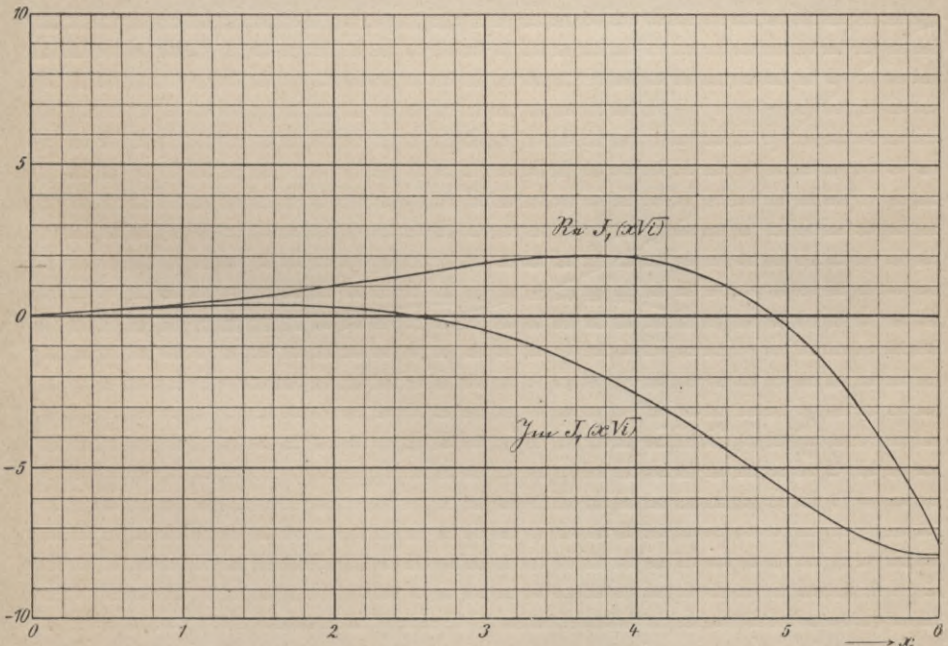


Fig. 38. Besselsche Zylinderfunktion der Ordnung Eins bei komplexem Argument.

$x$	$\sqrt{2} J_1(x\sqrt{i})$	$x$	$\sqrt{2} J_1(x\sqrt{i})$	$x$	$\sqrt{2} J_1(x\sqrt{i})$
0,1	+0,05006 + i0,04994	2,1	+ 1,5132 + i0,3751	4,1	+ 2,5337 - i 4,0300
0,2	+0,1005 + i0,09950	2,2	+ 1,6186 + i0,3146	4,2	+ 2,3881 - i 4,4518
0,3	+0,1517 + i0,1483	2,3	+ 1,7256 + i0,2416	4,3	+ 2,2033 - i 4,8898
0,4	+0,2040 + i0,1960	2,4	+ 1,8336 + i0,1552	4,4	+ 1,9755 - i 5,3420
0,5	+0,2577 + i0,2421	2,5	+ 1,9419 + i0,0547	4,5	+ 1,7010 - i 5,8063
0,6	+0,3133 + i0,2863	2,6	+ 2,0494 - i0,0609	4,6	+ 1,3760 - i 6,2800
0,7	+0,3710 + i0,3281	2,7	+ 2,1552 - i0,1923	4,7	+ 0,9964 - i 6,7600
0,8	+0,4311 + i0,3672	2,8	+ 2,2582 - i0,3403	4,8	+ 0,5584 - i 7,2428
0,9	+0,4940 + i0,4030	2,9	+ 2,3571 - i0,5058	4,9	+ 0,0580 - i 7,7241
1,0	+0,5598 + i0,4350	3,0	+ 2,4503 - i0,6894	5,0	- 0,5088 - i 8,1995
1,1	+0,6289 + i0,4627	3,1	+ 2,5364 - i1,8918	5,1	- 1,1457 - i 8,6635
1,2	+0,7013 + i0,4857	3,2	+ 2,6135 - i1,1137	5,2	- 1,8565 - i 9,1105
1,3	+0,7773 + i0,5034	3,3	+ 2,6798 - i0,3556	5,3	- 2,6447 - i 9,5338
1,4	+0,8569 + i0,5151	3,4	+ 2,7332 - i1,6178	5,4	- 3,5135 - i 9,9262
1,5	+0,9403 + i0,5202	3,5	+ 2,7714 - i1,9008	5,5	- 4,4659 - i10,2799
1,6	+1,0273 + i0,5182	3,6	+ 2,7919 - i2,2046	5,6	- 5,5044 - i10,5863
1,7	+1,1179 + i0,5083	3,7	+ 2,7923 - i2,5293	5,7	- 6,6312 - i10,8360
1,8	+1,2121 + i0,4897	3,8	+ 2,7696 - i2,8747	5,8	- 7,8477 - i11,0188
1,9	+1,3096 + i0,4619	3,9	+ 2,7211 - i3,2404	5,9	- 9,1550 - i11,1238
2,0	+1,4101 + i0,4239	4,0	+ 2,6435 - i3,6258	6,0	-10,5531 - i11,1393

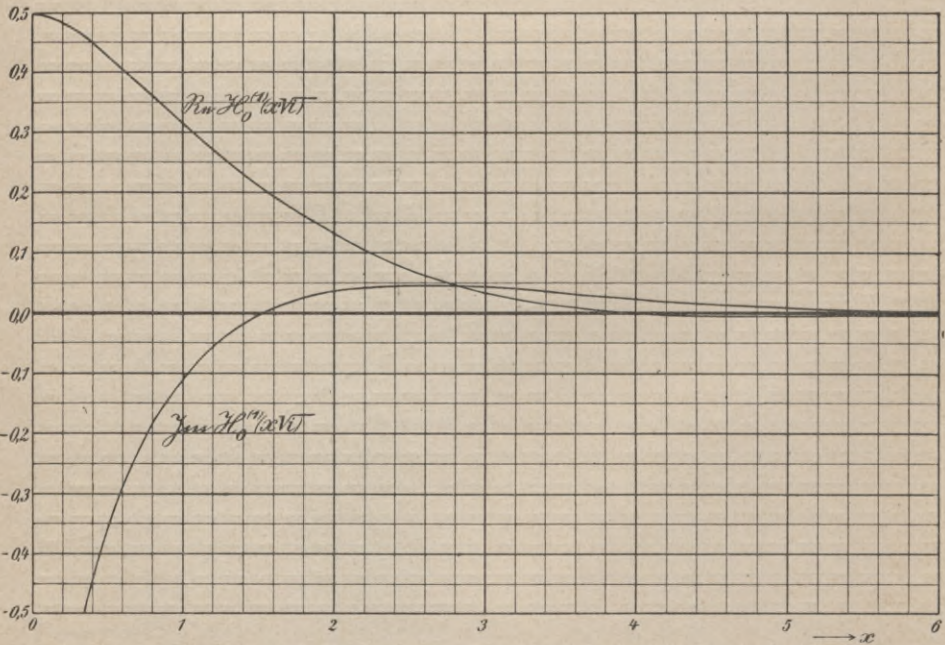


Fig. 39. Hankelsche Zylinderfunktion der Ordnung Null bei komplexem Argument.

$x$	$N_0(x\sqrt{i})$	$H_0^{(1)}(x\sqrt{i})$
0,0	$-\infty + i 0,5$	0,5 $-i \infty$
0,2	$-1,0933 + i 0,5173$	0,4826 $-i 1,1033$
0,4	$-0,6365 + i 0,5516$	0,4480 $-i 0,6765$
0,6	$-0,3513 + i 0,5922$	0,4058 $-i 0,4413$
0,8	$-0,1284 + i 0,6330$	0,3606 $-i 0,2883$
1,0	$+0,0670 + i 0,6693$	0,3151 $-i 0,1825$
1,2	$0,2512 + i 0,6963$	0,2713 $-i 0,1075$
1,4	$0,4325 + i 0,7098$	0,2303 $-i 0,05420$
1,6	$0,6161 + i 0,7053$	0,1926 $-i 0,01659$
1,8	$0,8046 + i 0,6779$	0,1588 $+i 0,009338$
2,0	$0,9988 + i 0,6229$	0,1289 $+i 0,02651$
2,2	$1,1981 + i 0,5351$	0,1026 $+i 0,03712$
2,4	$1,4004 + i 0,4087$	0,08039 $+i 0,04290$
2,6	$1,6015 + i 0,2387$	0,06136 $+i 0,04463$
2,8	$1,7976 + i 0,01959$	0,04553 $+i 0,04474$
3,0	$1,98026 -i 0,2539$	0,03256 $+i 0,04267$
3,2	$2,1410 -i 0,5864$	0,02202 $+i 0,03944$
3,4	$2,2690 -i 0,9817$	0,01366 $+i 0,03557$
3,6	$2,3513 -i 1,4425$	0,007152 $+i 0,03139$
3,8	$2,3715 -i 1,9696$	0,002154 $+i 0,02605$
4,0	$2,3157 -i 2,5620$	$-0,001398 + i 0,02304$
4,2	$2,1613 -i 3,2155$	$-0,003943 + i 0,01917$
4,4	$1,8882 -i 3,9227$	$-0,005620 + i 0,01564$
4,6	$1,4735 -i 4,6717$	$-0,006608 + i 0,01248$
4,8	$0,8934 -i 5,4460$	$-0,007066 + i 0,009710$
5,0	$0,1233 -i 6,2230$	$-0,007122 + i 0,007309$
5,2	$-0,8605 -i 6,9735$	$-0,006893 + i 0,005325$
5,4	$-2,0809 -i 7,6609$	$-0,006456 + i 0,003661$
5,6	$-3,5574 -i 8,2407$	$-0,005892 + i 0,002312$
5,8	$-5,3056 -i 8,6592$	$-0,005257 + i 0,001243$
6,0	$-7,3343 -i 8,8629$	$+0,004594 + i 0,0004166$

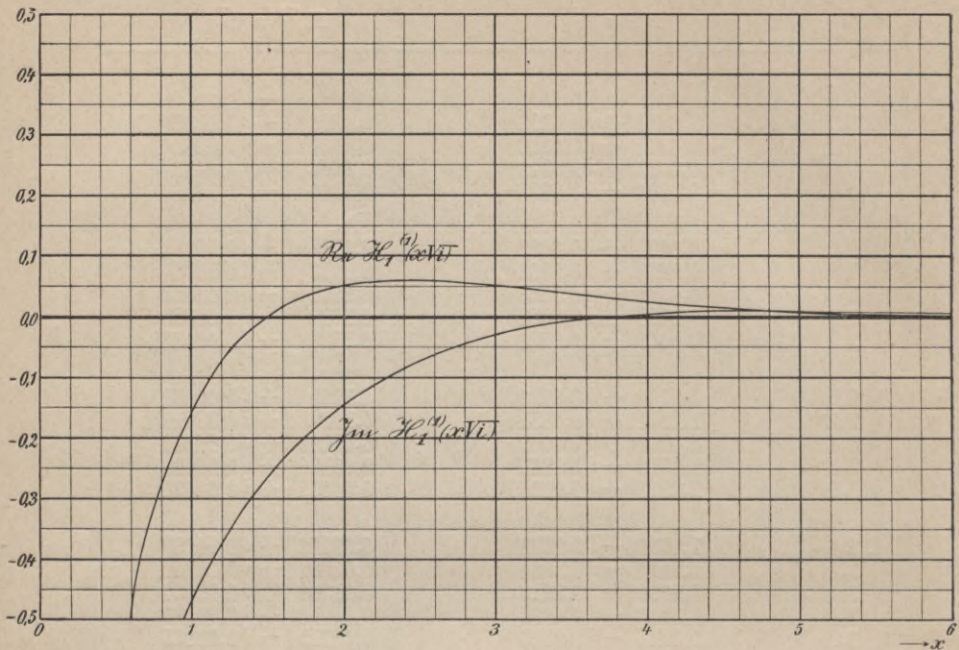


Fig. 40. Hankelsche Zylinderfunktion der Ordnung Eins bei komplexem Argument.

Tafel XVIII:  $H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$  (vgl. S. 93 bis 98).

$x$	$H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$	$x$	$H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$
0,0	$-\infty - i\infty$		
0,2	$-2,115754 - i 2,316457$	3,2	$+0,0459751 - i 0,0204553$
0,4	$-0,9194714 - i 1,198135$	3,4	$+0,04053496 - i 0,0116747$
0,6	$-0,498943 - i 0,812402$	3,6	$+0,0350895 - i 0,00501455$
0,8	$-0,2828314 - i 0,606083$	3,8	$+0,02984040 - i 0,000096088$
1,0	$-0,1540603 - i 0,471303$	4,0	$+0,02493399 + i 0,00340521$
1,2	$-0,0721014 - i 0,3732340$	4,2	$+0,02046036 + i 0,00577009$
1,4	$-0,0186418 - i 0,2974180$	4,4	$+0,0164591 + i 0,0072358$
1,6	$+0,0161110 - i 0,2367915$	4,6	$+0,01295289 + i 0,00800711$
1,8	$+0,0380365 - i 0,1874373$	4,8	$+0,00993172 + i 0,00824849$
2,0	$+0,0509636 - i 0,1469359$	5,0	$+0,00737075 + i 0,00810876$
2,2	$+0,0575198 - i 0,1136429$	5,2	$+0,00524075 + i 0,00769477$
2,4	$-0,0595981 - i 0,0863492$	5,4	$+0,00349995 + i 0,00710082$
2,6	$+0,058580 - i 0,06411$	5,6	$+0,00210585 + i 0,00639963$
2,8	$+0,0554929 - i 0,0461306$	5,8	$+0,00101463 + i 0,00564745$
3,0	$+0,0511013 - i 0,0317662$	6,0	$+0,00018336 + i 0,00488676$

$x$	$\ln \frac{\gamma x}{2}$	$x$	$\ln \frac{\gamma x}{2}$	$x$	$\ln \frac{\gamma x}{2}$
0.2	-1,72 536 943	2.2	0,67 252 583	4,2	1,31 915 301
0.4	-1,03 222 225	2.4	0,75 953 721	4,4	1,36 567,302
0.6	-0,62 675 714	2.6	0,83 957 992	4,6	1,41 012 471
0.8	-0,33 907 507	2.8	0,91 368 790	4,8	1,45 268 440
1.0	-0,11 593 152	3.0	0,98 268 077	5,0	1,49 350 639
1.2	+0,06 639 004	3.2	1,04 721 929	5,2	1,53 272 710
1.4	0,22 054 072	3.4	1,10 784 391	5,4	1,57 046 743
1.6	0,35 407 211	3.6	1,16 500 232	5,6	1,60 683 508
1.8	0,47 185 514	3.8	1,21 906 955	5,8	1,64 192 641
2.0	0,57 721 566	4,0	1,27 036 284	6,0	1,67 582 795

6. (Komplexe) Wurzel von  $\frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz} = 0$ .

Es ist  $\frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz} = H_0^{(2)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(2)}(z)$ . Schreibt man

$$\frac{i\pi}{2} H^{(2)} = J \ln \frac{i\gamma z}{2} + X,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{i\pi}{2} \frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz} &= \left( J_0 - \frac{1}{z} J_1 \right) \ln \frac{i\gamma z}{2} + X_0 - \frac{1}{z} X_1 \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left( \frac{z}{2} \right)^2 + \frac{5}{24} \left( \frac{z}{2} \right)^4 - \dots \right] \ln \frac{\gamma z i}{2} \\ &\quad + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4} + \frac{11}{16} \left( \frac{z}{2} \right)^2 - \frac{11}{36} \left( \frac{z}{2} \right)^4 + \dots \\ &\cong \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\gamma z i} + \frac{1}{z^2} + \left( \frac{z}{4} \right)^2 \left( 3 \ln \frac{2}{\gamma z i} + \frac{11}{4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{12} \left( \frac{z}{2} \right)^4 \left( 5 \ln \frac{2}{\gamma z i} + \frac{11}{3} \right). \end{aligned}$$

Setzt man

$$z = r e^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{i\pi}{2} \frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz} = u + iv,$$

so wird

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\gamma r} + 3 \left( \frac{r}{4} \right)^2 \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) \sin 2\vartheta + \left[ \frac{1}{r^2} + \left( \frac{r}{4} \right)^2 \left( 3 \ln \frac{2}{\gamma r} + \frac{11}{4} \right) \right] \cos 2\vartheta \\ &\quad - \frac{1}{12} \left( \frac{r}{2} \right)^4 \left[ \left( \frac{5}{2} \ln \frac{2}{\gamma r} + \frac{11}{3} \right) \cos 4\vartheta + \frac{5}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) \sin 4\vartheta \right], \\ v &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) - 3 \left( \frac{r}{4} \right)^2 \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) \cos 2\vartheta - \left[ \frac{1}{r^2} - \left( \frac{r}{4} \right)^2 \left( 3 \ln \frac{2}{\gamma r} + \frac{11}{4} \right) \right] \sin 2\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{12} \left( \frac{r}{2} \right)^4 \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) \cos 4\vartheta - \left( \frac{5}{2} \ln \frac{2}{\gamma r} + \frac{11}{3} \right) \sin 4\vartheta \right]. \end{aligned}$$

Hieraus findet man als Wurzeln der beiden transzendenten Gleichungen  $u = 0$  und  $v = 0$ :

$$r = 0,8156, \quad \vartheta = 0,9091 = 52,085^\circ = 52^\circ 5' 6'',$$

$$r e^{i\vartheta} = 0,5012 + i 0,6435.$$

Die Anwendung dieser komplexen Wurzel auf die freien elektrischen Schwingungen, die ein Metallzylinder bei achsialem magnetischem Feld in einen ihn umgebenden Isolator aussendet, siehe bei J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in electricity and magnetism, Seite 347 (Oxford 1893, Clarendon Press), der als Wurzelwert findet:  $0,64 + 0,56i$ .

Die von K. Aichi in den Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi (Proceedings of the Tôkyô Mathematico-Physical Society) (2) 4, Seite 224 (1907) unternommene genauere Bestimmung der Wurzel ist mißlungen, weil er die Reihe für die Ableitung von  $H_1^{(2)}$  nicht richtig entwickelt hat. An Stelle der Glieder  $\frac{1}{4} + \frac{11}{16} \left(\frac{z}{2}\right)^2$  ist dort (S. 225) irrtümlich  $\frac{1}{2} + \frac{5}{16} \left(\frac{z}{2}\right)^2$  gesetzt.

### 7. Anwendung der Besselschen Funktionen $J_0(x\sqrt{-i})$ und $J_1(x\sqrt{-i})$ auf elektrische Wechselströme in Drähten.

Durch einen Metalldraht von der Dicke  $2b$  fließe Wechselstrom von der effektiven Stärke  $C$  und der Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$ . Ferner bedeute:  $\mathfrak{H}_z$  die magnetische Feldstärke,  $i_z$  die elektrische Stromdichte,  $r$  den Abstand eines Punktes von der Drahtachse,  $t$  die Zeit,  $\mu$  die Permeabilität,  $\varrho$  den spezifischen Widerstand des Metalles,  $l$  die Länge des Drahtes. Dann ergeben die elektromagnetischen Grundgleichungen

$$(1) \quad 2\pi r \cdot \mathfrak{H}_z = 4\pi \int_0^r i_z \cdot 2\pi r dr, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{H}_z}{\partial r} = 4\pi i_z$$

oder

$$(2) \quad l \varrho i_z \Big|_{r=0} - l \varrho i_z \Big|_{r=r} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \mu \mathfrak{H}_z \cdot l dr, \quad \varrho \frac{\partial i_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t},$$

und indem man (1) das eine Mal nach  $r$ , das andere Mal nach  $t$  differenziert und aus (2) substituiert,

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{H}_z}{\partial r} \right) = \frac{4\pi \mu}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t},$$

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial i_z}{\partial r} \right) = \frac{4\pi\mu}{\rho} \frac{\partial i_z}{\partial t}.$$

In die vorgeschriebene Abhängigkeit von der Zeit  $t$  bringt man die Feldvektoren durch den Ansatz

$$\mathfrak{H}_z = \Im m(\sqrt{2} H e^{i\omega t}), \quad i_z = \Im m(\sqrt{2} K e^{i\omega t}).$$

Dann genügen auch die reellen Teile der eingeklammerten Größen den Gleichungen (3), (4); daher erhält man für die beiden komplexen Funktionen  $H$  und  $K$  der einen Variablen  $r$  die Gleichungen

$$(5) \quad \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) H = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK}{dr} + k^2 K = 0$$

mit

$$(7) \quad k^2 = -i \frac{4\pi\mu\omega}{\rho}, \quad k = (1 - i) 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\omega}{2\pi}}, \quad |k| = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{2\rho} \frac{\omega}{2\pi}}.$$

Folglich

$$(8) \quad H(r) = \frac{2C}{b J_1(kb)} J_1(kr), \quad K(r) = \frac{kC}{2\pi b J_1(kb)} J_0(kr),$$

wenn man die Konstanten gleich passend bestimmt. Für  $r = b$  muß nämlich  $H = 2C/b$  werden und für  $r = 0$  verschwinden. Deshalb kommen die Zylinderfunktionen zweiter Art nicht in Frage. Der Wert für  $K$  folgt dann aus (1), wenn man berücksichtigt, daß nach den Differentiationsregeln für die Besselschen Funktionen  $\frac{1}{k} \frac{dJ_0(kr)}{dr} = -J_1(kr)$  und  $\frac{1}{k} \frac{dJ_1(kr)}{dr} = J_0(kr) - \frac{1}{kr} J_1(kr)$  ist (vgl. S. 165).

Es bedeute  $w'$  den „effektiven Widerstand“ des Drahtes und  $L_i'$  seine innere Selbstinduktivität. Es sind das reelle Funktionen von  $|k|b$ . Die elektrische Spannung  $\rho \mathfrak{H}_z(r=b)$  längs der Drahtoberfläche ( $r = b$ ) ist dann der imaginäre Teil von

$$(w' + iL_i'\omega) \sqrt{2} C e^{i\omega t} = \rho \sqrt{2} K(b) e^{i\omega t} = \rho \frac{k \sqrt{2} C J_0(kb)}{2\pi b J_1(kb)} e^{i\omega t},$$

während sie bei Gleichstrom

$$w_0 C = \frac{\rho l C}{\pi b^2}$$

wäre. Daher

$$(9) \quad \frac{w' + iL_i'\omega}{w_0} = \frac{kb J_0(kb)}{2 J_1(kb)}.$$

Weiter werde gesetzt<sup>1)</sup>

$$(10) \quad \frac{|k|b}{2} = \frac{q}{2} = \kappa\sqrt{2} = \mathfrak{k} \cdot 2b \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}; \quad \mathfrak{k} = \pi \sqrt{\frac{\mu}{2\varrho}}$$

$$J_0(q\sqrt{-i}) = \text{ber } q + i \text{ bei } q \\ -\sqrt{-i} J_1(q\sqrt{-i}) = \text{ber}' q + i \text{ bei}' q,$$

wo

$$\text{ber } q = 1 - \frac{q^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{q^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \\ \text{bei } q = \frac{q^2}{2^2} - \frac{q^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{q^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots$$

Z. B. ist für Kupfer  $\mathfrak{k} = 0,055 \text{ sek}^{1/2} \text{ cm}^{-1}$ , für Eisen  $\mathfrak{k} = 0,65 \text{ sek}^{1/2} \text{ cm}^{-1}$  ungefähr. Dann wird

$$\frac{kb}{2} \frac{J_0(kb)}{J_1(kb)} = i \frac{q}{2} \frac{\text{ber } q + i \text{ bei } q}{\text{ber}' q + i \text{ bei}' q},$$

folglich

$$\frac{w'}{w_0} = \frac{q}{2} \frac{\text{ber } q \text{ bei}' q - \text{bei } q \text{ ber}' q}{\text{ber}'^2 q + \text{bei}'^2 q} \\ \frac{L'_i \omega}{w_0} = \frac{q}{2} \frac{\text{ber } q \text{ ber}' q + \text{bei } q \text{ bei}' q}{\text{ber}'^2 q + \text{bei}'^2 q},$$

oder da  $\frac{\omega}{w_0} = \frac{1}{l\mu} \left(\frac{q}{2}\right)^2$  ist,

$$\frac{L'_i \omega}{\frac{1}{2} l\mu} = \frac{4}{q} \frac{\text{ber } q \text{ ber}' q + \text{bei } q \text{ bei}' q}{\text{ber}'^2 q + \text{bei}'^2 q}.$$

Für  $\kappa < 1$  ist näherungsweise

$$(11) \quad \frac{w'}{w_0} = 1 + \frac{\kappa^4}{3}, \quad \frac{L'_i \omega}{w_0} = \kappa^2 \left(1 - \frac{\kappa^4}{6}\right),$$

da

$$\frac{x}{2} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{12} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{48} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{180} - \frac{13 \left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{8640} - \frac{11 \left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{26880} - \dots$$

und für  $\kappa > 1$  näherungsweise<sup>2)</sup>

$$(12) \quad \frac{w'}{w_0} = \kappa + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\kappa}, \quad \frac{L'_i \omega}{w_0} = \kappa - \frac{3}{64\kappa} - \frac{3}{128\kappa^2},$$

1) Die Funktionszeichen ber und bei hat Lord Kelvin bei diesem Problem eingeführt (W. Thomson, Mathematical and Physical papers, 3, Seite 493, Cambridge 1890, Clay and Sons). Sie sollen bedeuten: Besselsche Funktion, reeller Teil, imaginärer Teil. Doch ist eine ausgedehnte Anwendung solcher Bezeichnungen wohl kaum praktisch und empfehlenswert.

2) A. Sommerfeld, Phys. Z. S, Seite 805 (1907). Dort ist in der Widerstandsformel das letzte Glied um  $\frac{1}{64\kappa}$  zu groß angegeben, was hier in Übereinstimmung mit dem Autor verbessert ist.



da

$$\frac{S_0(x)}{S_1(x)} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{x^3} + \dots$$

Für  $1,5 < x < 10$  gilt sehr genau<sup>1)</sup>

$$(13) \quad \frac{w'}{w_0} = 0,997 x + 0,277, \quad \frac{L'_i \omega}{w_0} = 1,007 x - 0,040.$$

Die Tafeln für  $\text{ber } x$  und  $\text{bei } x$  sind berechnet von M. Maclean und mitgeteilt in W. Thomson, *Mathematical and physical Papers*, Vol. III, S. 493, Cambridge 1890, ebenso die Werte, welche  $w'/w_0$  für  $q = 0,5; 1,0; \dots 20$  annimmt (vgl. die Tafeln XV und XVI für  $J_0(x\sqrt{i})$ ,  $J_1(x\sqrt{i})$  auf Seite 137, 138).

Die Werte für  $\frac{w'}{w_0}$  bei  $x = 0,1$  bis  $0,9$  und sämtliche Werte für  $\frac{L'_i \omega}{w_0}$  sind uns von Herrn Zenneck liebenswürdigerweise überlassen worden, obwohl sie noch nicht im Druck erschienen sind.

1) J. Zenneck, *Ann. d. Phys.* **11**, Seite 1141 (1903). Siehe auch desselben Verf.: *Elektromagnetische Schwingungen* (Stuttgart 1905, F. Encke) Seite 403 u. 992.

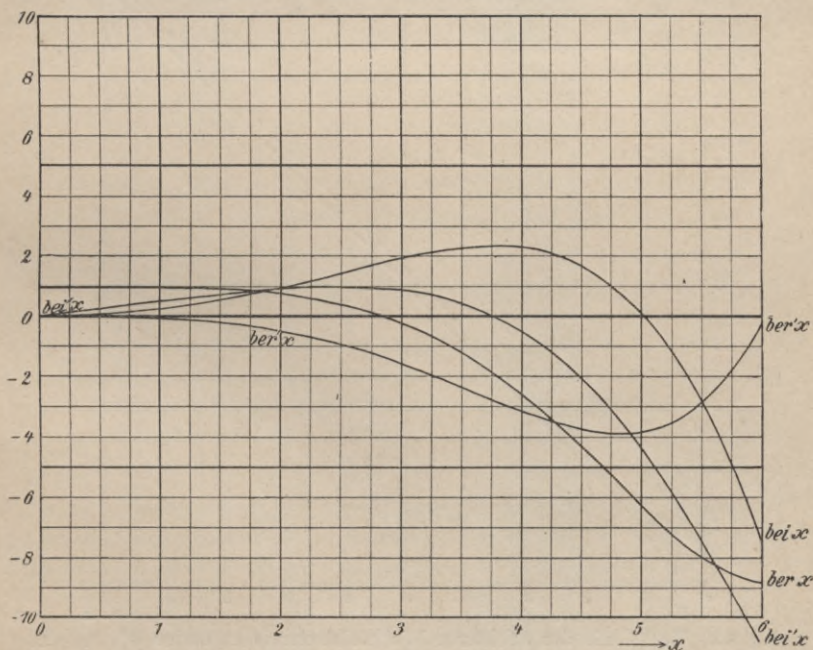


Fig. 41. Besselsche Zylinderfunktion der Ordnung Null bei komplexem Argument und ihre Ableitung nach dem absoluten Betrag des Arguments.

$x$	ber $x$	bei $x$	ber' $x$	bei' $x$
0.0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.5	0,999	0,0625	-0,0078	0,24992
1.0	0,9844	0,2496	-0,062446	0,499947
1.5	0,9211	0,5576	-0,210011	0,730251
2.0	0,7517	0,9723	-0,4931	0,9170
2.5	0,3999	1,4571	-0,9436	0,9983
3.0	— 0,2214	1,9376	-1,5698	0,8805
3.5	— 1,1936	2,2833	-2,3361	0,4353
4.0	— 2,5634	2,2927	-3,1347	— 0,4911
4.5	— 4,2991	1,6859	-3,7537	— 2,0526
5.0	— 6,2301	0,1160	-3,8442	— 4,3538
5.5	— 7,9735	— 2,7902	-2,9070	— 7,3729
6.0	— 8,8584	— 7,3348	-0,2931	— 10,8462
8.0	20,9739	— 35,0167	38,2944	— 7,6615
10.0	138,8405	56,3704	51,373	135,23
15.0	-2969,79	-2952,33	86,648	-4089,2
20.0	47583,7	11500,8	24325,1	41491,5
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

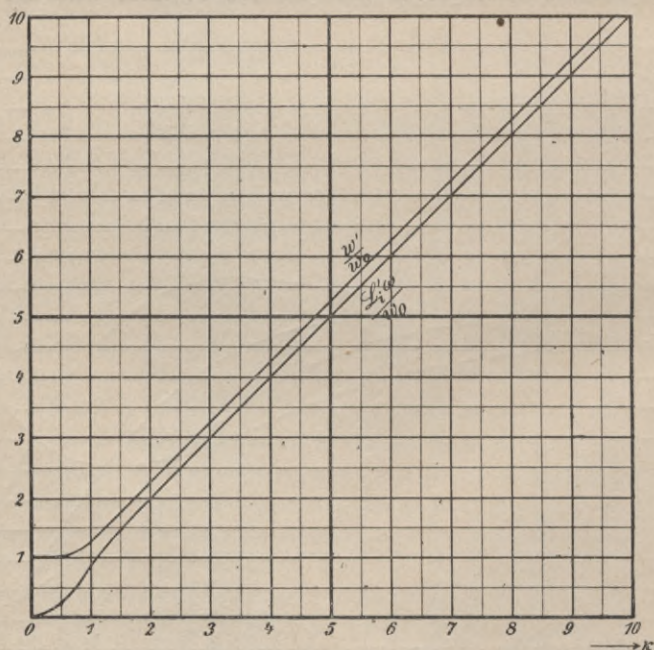


Fig 42. Verhältnis des effektiven Wechselstromwiderstandes  $w'$  und des inneren induktiven Widerstandes  $L_i'\omega$  zum Gleichstromwiderstand  $w_0$  von Drähten.

$z = \frac{q}{\sqrt{s}}$	$q$	$\frac{w'}{w_0}$	$\frac{L'_i \omega}{w_0}$
0,0	0,0000	1,000	0,00
0,1	0,2828	1,000	0,01
0,2	0,5657	1,000	0,04
0,3	0,8485	1,003	0,089
0,4	1,131	1,008	0,156
0,5	1,414	1,021	0,240
0,6	1,697	1,041	0,340
0,7	1,980	1,075	0,452
0,8	2,263	1,121	0,58
0,9	2,546	1,179	0,72
0,1768	0,5	1,0000	0,0313
0,3536	1,0	1,0001	0,1247
0,5303	1,5	1,0258	0,2777
0,7071	2,0	1,0805	0,4806
0,8839	2,5	1,1747	0,7136
1,0607	3,0	1,3180	0,9508
1,237	3,5	1,4920	1,172
1,414	4,0	1,6778	1,373
1,591	4,5	1,8628	1,558
1,768	5,0	2,0430	1,737
1,945	5,5	2,2190	1,916
2,121	6	2,3937	2,093
2,298	8	3,0956	2,814
3,536	10	3,7940	3,487
5,303	15	5,5732	5,316
7,071	20	7,3250	7,082

8. Tafeln für die Ordnungen 2, 3, 4, ... 60.

Tafel XXII: Die kleinsten Lösungen von  $J_s(x_n) = 0$ .

$n$	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$
1	2,405	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813
9	27,494	29,047	30,571	32,050	33,512	34,983

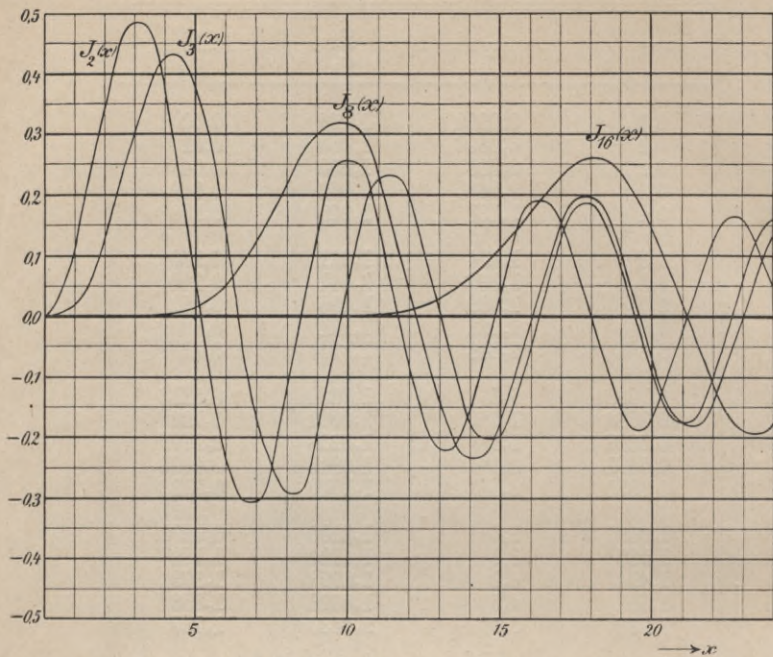


Fig. 43. Besselsche Zylinderfunktionen von höherer als erster Ordnung.

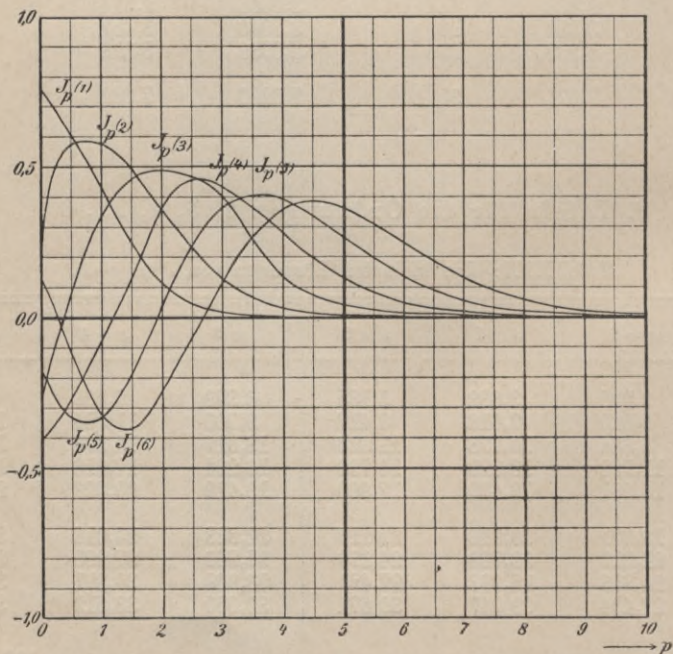


Fig. 44. Besselsche Zylinderfunktionen bei konstantem Argument und variabler Ordnung.

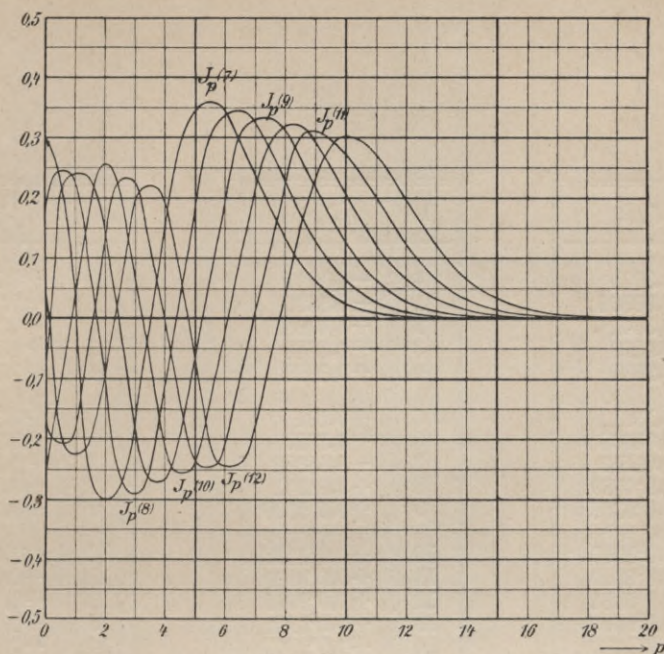


Fig. 45. Besselsche Zylinderfunktionen bei konstantem Argument und variabler Ordnung.

Tafel XXIII:  $J_n(1)$  bis  $J_n(24)$ .

$n$	$J_n(1)$	$n$	$J_n(2)$	$n$	$J_n(3)$
0	+0,7652	0	+0,2239	0	-0,2601
1	+0,4401	1	+0,5767	1	+0,3391
2	+0,1149	2	+0,3528	2	+0,4861
3	+0,01956	3	+0,1289	3	+0,3091
4	+0,0 <sup>2</sup> 2477	4	+0,03400	4	+0,1320
5	+0,0 <sup>3</sup> 2498	5	+0,0 <sup>2</sup> 7040	5	+0,04303
6	+0,0 <sup>4</sup> 2094	6	+0,0 <sup>2</sup> 1202	6	+0,01139
7	+0,0 <sup>5</sup> 1502	7	+0,0 <sup>3</sup> 1749	7	+0,0 <sup>2</sup> 2547
8	+0,0 <sup>7</sup> 9422	8	+0,0 <sup>4</sup> 2218	8	+0,0 <sup>3</sup> 4934
9	+0,0 <sup>8</sup> 5249	9	+0,0 <sup>5</sup> 2492	9	+0,0 <sup>4</sup> 8440
10	+0,0 <sup>9</sup> 2631	10	+0,0 <sup>6</sup> 2515	10	+0,0 <sup>4</sup> 1293
11	+0,0 <sup>10</sup> 1198	11	+0,0 <sup>7</sup> 2304	11	+0,0 <sup>5</sup> 1794
12	+0,0 <sup>12</sup> 5000	12	+0,0 <sup>8</sup> 1933	12	+0,0 <sup>6</sup> 2276
13	+0,0 <sup>13</sup> 1926	13	+0,0 <sup>9</sup> 1495	13	+0,0 <sup>7</sup> 2659
14	+0,0 <sup>15</sup> 689	14	+0,0 <sup>10</sup> 1073	14	+0,0 <sup>8</sup> 2880
15	+0,0 <sup>16</sup> 23	15	+0,0 <sup>12</sup> 7183	15	+0,0 <sup>9</sup> 2908
16	+0,0 <sup>17</sup> 1	16	+0,0 <sup>13</sup> 4506	16	+0,0 <sup>10</sup> 2749
		17	+0,0 <sup>14</sup> 2659	17	+0,0 <sup>11</sup> 2444
		18	+0,0 <sup>15</sup> 148	18	+0,0 <sup>12</sup> 2050
		19	+0,0 <sup>17</sup> 8	19	+0,0 <sup>13</sup> 1628
				20	+0,0 <sup>14</sup> 1228
				21	+0,0 <sup>16</sup> 88
				22	+0,0 <sup>17</sup> 6

$n$	$J_n(4)$
0	-0,3971
1	-0,06604
2	+0,3641
3	+0,4302
4	+0,2811
5	+0,1321
6	+0,04909
7	+0,01518
8	+0,0 <sup>2</sup> 4029
9	+0,0 <sup>3</sup> 9386
10	+0,0 <sup>3</sup> 1950
11	+0,0 <sup>4</sup> 3660
12	+0,0 <sup>5</sup> 6264
13	+0,0 <sup>6</sup> 9859
14	+0,0 <sup>6</sup> 1436
15	+0,0 <sup>7</sup> 1948
16	+0,0 <sup>8</sup> 2472
17	+0,0 <sup>9</sup> 2947
18	+0,0 <sup>10</sup> 3313
19	+0,0 <sup>11</sup> 3525
20	+0,0 <sup>12</sup> 3560
21	+0,0 <sup>13</sup> 3420
22	+0,0 <sup>14</sup> 3134
23	+0,0 <sup>15</sup> 275
24	+0,0 <sup>16</sup> 23
25	+0,0 <sup>17</sup> 2

$n$	$J_n(5)$
0	-0,1776
1	-0,3276
2	+0,04657
3	+0,3648
4	+0,3912
5	+0,2611
6	+0,1310
7	+0,05338
8	+0,01841
9	+0,0 <sup>2</sup> 5520
10	+0,0 <sup>2</sup> 1468
11	+0,0 <sup>3</sup> 3509
12	+0,0 <sup>4</sup> 7628
13	+0,0 <sup>4</sup> 1521
14	+0,0 <sup>5</sup> 2801
15	+0,0 <sup>6</sup> 4797
16	+0,0 <sup>7</sup> 7675
17	+0,0 <sup>7</sup> 1153
18	+0,0 <sup>8</sup> 1631
19	+0,0 <sup>9</sup> 2183
20	+0,0 <sup>10</sup> 2770
21	+0,0 <sup>11</sup> 3344
22	+0,0 <sup>12</sup> 3848
23	+0,0 <sup>13</sup> 4231
24	+0,0 <sup>14</sup> 4454
25	+0,0 <sup>15</sup> 450
26	+0,0 <sup>16</sup> 44
27	+0,0 <sup>17</sup> 4

$n$	$J_n(6)$
0	+0,1506
1	-0,2767
2	-0,2429
3	+0,1148
4	+0,3576
5	+0,3621
6	+0,2458
7	+0,1296
8	+0,05653
9	+0,02117
10	+0,0 <sup>2</sup> 6964
11	+0,0 <sup>2</sup> 2048
12	+0,0 <sup>3</sup> 5452
13	+0,0 <sup>3</sup> 1327
14	+0,0 <sup>4</sup> 2976
15	+0,0 <sup>5</sup> 6192
16	+0,0 <sup>5</sup> 1202
17	+0,0 <sup>6</sup> 2187
18	+0,0 <sup>7</sup> 3746
19	+0,0 <sup>8</sup> 6062
20	+0,0 <sup>9</sup> 9296
21	+0,0 <sup>9</sup> 1355
22	+0,0 <sup>10</sup> 1882
23	+0,0 <sup>11</sup> 2497
24	+0,0 <sup>12</sup> 3168
25	+0,0 <sup>13</sup> 3855
26	+0,0 <sup>14</sup> 4415
27	+0,0 <sup>15</sup> 507
28	+0,0 <sup>16</sup> 55
29	+0,0 <sup>17</sup> 6
30	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(7)$
0	+0,3001
1	-0,0 <sup>2</sup> 4683
2	-0,3014
3	-0,1676
4	+0,1578
5	+0,3479
6	+0,3392
7	+0,2336
8	+0,1280
9	+0,05892
10	+0,02354
11	+0,0 <sup>2</sup> 8335
12	+0,0 <sup>2</sup> 2656
13	+0,0 <sup>3</sup> 7702
14	+0,0 <sup>3</sup> 2052
15	+0,0 <sup>4</sup> 5059
16	+0,0 <sup>4</sup> 1161
17	+0,0 <sup>5</sup> 2494
18	+0,0 <sup>6</sup> 5037
19	+0,0 <sup>7</sup> 9598
20	+0,0 <sup>7</sup> 1731
21	+0,0 <sup>8</sup> 2966
22	+0,0 <sup>9</sup> 4839
23	+0,0 <sup>10</sup> 7535
24	+0,0 <sup>10</sup> 1122
25	+0,0 <sup>11</sup> 1602
26	+0,0 <sup>12</sup> 2195
27	+0,0 <sup>13</sup> 2893
28	+0,0 <sup>14</sup> 3673
29	+0,0 <sup>15</sup> 450
30	+0,0 <sup>16</sup> 53
31	+0,0 <sup>17</sup> 6
32	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(8)$
0	+0,1717
1	+0,2346
2	-0,1130
3	-0,2911
4	-0,1054
5	+0,1858
6	+0,3376
7	+0,3206
8	+0,2235
9	+0,1263
10	+0,06077
11	+0,02560
12	+0,0 <sup>2</sup> 9624
13	+0,0 <sup>2</sup> 3275
14	+0,0 <sup>2</sup> 1019
15	+0,0 <sup>3</sup> 2926
16	+0,0 <sup>4</sup> 7801
17	+0,0 <sup>4</sup> 1942
18	+0,0 <sup>5</sup> 4538
19	+0,0 <sup>6</sup> 9992
20	+0,0 <sup>6</sup> 2081
21	+0,0 <sup>7</sup> 4110
22	+0,0 <sup>8</sup> 7725
23	+0,0 <sup>8</sup> 1385
24	+0,0 <sup>9</sup> 2373
25	+0,0 <sup>10</sup> 3895
26	+0,0 <sup>11</sup> 6135
27	+0,0 <sup>12</sup> 9289
28	+0,0 <sup>12</sup> 1354
29	+0,0 <sup>13</sup> 1903
30	+0,0 <sup>14</sup> 2583
31	+0,0 <sup>15</sup> 339
32	+0,0 <sup>16</sup> 43
33	+0,0 <sup>17</sup> 5
34	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(9)$
0	-0,09033
1	+0,2453
2	+0,1448
3	-0,1809
4	-0,2655
5	-0,05504
6	+0,2043
7	+0,3275
8	+0,3051
9	+0,2149
10	+0,1247
11	+0,06222
12	+0,02739
13	+0,01083
14	+0,0 <sup>2</sup> 3895
15	+0,0 <sup>2</sup> 1286
16	+0,0 <sup>3</sup> 3933
17	+0,0 <sup>3</sup> 1120
18	+0,0 <sup>4</sup> 2988
19	+0,0 <sup>5</sup> 7497
20	+0,0 <sup>5</sup> 1777
21	+0,0 <sup>6</sup> 3990
22	+0,0 <sup>7</sup> 8515
23	+0,0 <sup>7</sup> 1732
24	+0,0 <sup>8</sup> 3364
25	+0,0 <sup>9</sup> 6257
26	+0,0 <sup>9</sup> 1116
27	+0,0 <sup>10</sup> 1913
28	+0,0 <sup>11</sup> 3154
29	+0,0 <sup>12</sup> 5014
30	+0,0 <sup>12</sup> 7692
31	+0,0 <sup>13</sup> 1140
32	+0,0 <sup>14</sup> 1636
33	+0,0 <sup>15</sup> 227
34	+0,0 <sup>16</sup> 31
35	+0,0 <sup>17</sup> 4

$n$	$J_n(10)$	$n$	$J_n(11)$	$n$	$J_n(12)$
0	-0,2459	0	-0,1712	0	+0,04769
1	+0,04347	1	-0,1768	1	-0,2234
2	+0,2546	2	+0,1390	2	-0,08493
3	+0,05838	3	+0,2273	3	+0,1951
4	-0,2196	4	-0,01504	4	+0,1825
5	-0,2341	5	-0,2383	5	-0,07347
6	-0,01446	6	-0,2016	6	-0,2437
7	+0,2167	7	+0,01838	7	-0,1703
8	+0,3179	8	+0,2250	8	+0,04510
9	+0,2919	9	+0,3089	9	+0,2304
10	+0,2075	10	+0,2804	10	+0,3005
11	+0,1231	11	+0,2010	11	+0,2704
12	+0,06337	12	+0,1216	12	+0,1953
13	+0,02897	13	+0,06429	13	+0,1201
14	+0,01196	14	+0,03037	14	+0,06504
15	+0,0 <sup>2</sup> 4508	15	+0,01301	15	+0,03161
16	+0,0 <sup>2</sup> 1567	16	+0,0 <sup>2</sup> 5110	16	+0,01399
17	+0,0 <sup>3</sup> 5056	17	+0,0 <sup>2</sup> 1856	17	+0,0 <sup>2</sup> 5698
18	+0,0 <sup>3</sup> 1524	18	+0,0 <sup>3</sup> 6280	18	+0,0 <sup>3</sup> 2152
19	+0,0 <sup>4</sup> 4315	19	+0,0 <sup>3</sup> 1990	19	+0,0 <sup>3</sup> 7590
20	+0,0 <sup>4</sup> 1151	20	+0,0 <sup>4</sup> 5931	20	+0,0 <sup>3</sup> 2512
21	+0,0 <sup>5</sup> 2907	21	+0,0 <sup>4</sup> 1670	21	+0,0 <sup>4</sup> 7839
22	+0,0 <sup>6</sup> 6969	22	+0,0 <sup>5</sup> 4458	22	+0,0 <sup>4</sup> 2315
23	+0,0 <sup>6</sup> 1590	23	+0,0 <sup>5</sup> 1132	23	+0,0 <sup>5</sup> 6491
24	+0,0 <sup>7</sup> 3463	24	+0,0 <sup>6</sup> 2738	24	+0,0 <sup>5</sup> 1733
25	+0,0 <sup>8</sup> 7215	25	+0,0 <sup>7</sup> 6333	25	+0,0 <sup>6</sup> 4418
26	+0,0 <sup>8</sup> 1441	26	+0,0 <sup>7</sup> 1403	26	+0,0 <sup>6</sup> 1078
27	+0,0 <sup>9</sup> 2762	27	+0,0 <sup>8</sup> 2981	27	+0,0 <sup>7</sup> 2521
28	+0,0 <sup>10</sup> 5094	28	+0,0 <sup>8</sup> 6092	28	+0,0 <sup>8</sup> 5665
29	+0,0 <sup>11</sup> 9050	29	+0,0 <sup>9</sup> 1198	29	+0,0 <sup>8</sup> 1225
30	+0,0 <sup>11</sup> 1551	30	+0,0 <sup>10</sup> 2274	30	+0,0 <sup>9</sup> 2552
31	+0,0 <sup>12</sup> 2568	31	+0,0 <sup>11</sup> 4165	31	+0,0 <sup>10</sup> 5133
32	+0,0 <sup>13</sup> 4112	32	+0,0 <sup>12</sup> 7375	32	+0,0 <sup>11</sup> 9976
33	+0,0 <sup>14</sup> 6376	33	+0,0 <sup>12</sup> 1264	33	+0,0 <sup>11</sup> 1876
34	+0,0 <sup>15</sup> 958	34	+0,0 <sup>13</sup> 2100	34	+0,0 <sup>12</sup> 3417
35	+0,0 <sup>15</sup> 140	35	+0,0 <sup>14</sup> 3383	35	+0,0 <sup>13</sup> 6035
36	+0,0 <sup>16</sup> 20	36	+0,0 <sup>15</sup> 529	36	+0,0 <sup>13</sup> 1035
37	+0,0 <sup>17</sup> 3	37	+0,0 <sup>16</sup> 80	37	+0,0 <sup>14</sup> 1723
		38	+0,0 <sup>16</sup> 12	38	+0,0 <sup>15</sup> 279
		39	+0,0 <sup>17</sup> 2	39	+0,0 <sup>16</sup> 44
				40	+0,0 <sup>17</sup> 7
				41	+0,0 <sup>17</sup> 1



$n$	$J_n(13)$
0	+0,2069
1	-0,07032
2	-0,2177
3	+0,0 <sup>2</sup> 3320
4	+0,2193
5	+0,1316
6	-0,1180
7	+0,2406
8	-0,1410
9	+0,06698
10	+0,2338
11	+0,2927
12	+0,2615
13	+0,1901
14	+0,1188
15	+0,06564
16	+0,03272
17	+0,01491
18	+0,0 <sup>2</sup> 6269
19	+0,0 <sup>2</sup> 2452
20	+0,0 <sup>3</sup> 8971
21	+0,0 <sup>3</sup> 3087
22	+0,0 <sup>3</sup> 1004
23	+0,0 <sup>4</sup> 3092
24	+0,0 <sup>5</sup> 9060
25	+0,0 <sup>5</sup> 2532
26	+0,0 <sup>6</sup> 6761
27	+0,0 <sup>6</sup> 1730
28	+0,0 <sup>7</sup> 4249
29	+0,0 <sup>7</sup> 1004
30	+0,0 <sup>8</sup> 2283
31	+0,0 <sup>8</sup> 5009
32	+0,0 <sup>9</sup> 1062
33	+0,0 <sup>10</sup> 2176
34	+0,0 <sup>11</sup> 4320
35	+0,0 <sup>12</sup> 8310
36	+0,0 <sup>12</sup> 1551
37	+0,0 <sup>13</sup> 2812
38	+0,0 <sup>14</sup> 4956
39	+0,0 <sup>14</sup> 850
40	+0,0 <sup>15</sup> 142
41	+0,0 <sup>15</sup> 23
42	+0,0 <sup>17</sup> 4
43	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(14)$
0	+0,1711
1	+0,1334
2	-0,1520
3	-0,1768
4	+0,07624
5	+0,2204
6	+0,08117
7	-0,1508
8	-0,2320
9	-0,1143
10	+0,08501
11	+0,2357
12	+0,2855
13	+0,2536
14	+0,1855
15	+0,1174
16	+0,06613
17	+0,03372
18	+0,01577
19	+0,0 <sup>2</sup> 6824
20	+0,0 <sup>2</sup> 2753
21	+0,0 <sup>3</sup> 1041
22	+0,0 <sup>3</sup> 3711
23	+0,0 <sup>3</sup> 1251
24	+0,0 <sup>4</sup> 4006
25	+0,0 <sup>4</sup> 1221
26	+0,0 <sup>5</sup> 3555
27	+0,0 <sup>5</sup> 9902
28	+0,0 <sup>6</sup> 2645
29	+0,0 <sup>7</sup> 6790
30	+0,0 <sup>7</sup> 1678
31	+0,0 <sup>8</sup> 3995
32	+0,0 <sup>8</sup> 9187
33	+0,0 <sup>9</sup> 2042
34	+0,0 <sup>10</sup> 4392
35	+0,0 <sup>11</sup> 9155
36	+0,0 <sup>11</sup> 1851
37	+0,0 <sup>12</sup> 3632
38	+0,0 <sup>13</sup> 6928
39	+0,0 <sup>13</sup> 1285
40	+0,0 <sup>14</sup> 2320
41	+0,0 <sup>15</sup> 408
42	+0,0 <sup>16</sup> 70
43	+0,0 <sup>16</sup> 12
44	+0,0 <sup>17</sup> 2

$n$	$J_n(15)$
0	-0,01422
1	+0,2051
2	+0,04157
3	-0,1940
4	-0,1192
5	+0,1305
6	+0,2061
7	+0,03446
8	-0,1740
9	-0,2200
10	-0,09007
11	+0,09995
12	+0,2367
13	+0,2787
14	+0,2464
15	+0,1813
16	+0,1162
17	+0,06653
18	+0,03463
19	+0,01657
20	+0,0 <sup>2</sup> 7360
21	+0,0 <sup>2</sup> 3054
22	+0,0 <sup>3</sup> 1190
23	+0,0 <sup>3</sup> 4379
24	+0,0 <sup>3</sup> 1527
25	+0,0 <sup>4</sup> 5060
26	+0,0 <sup>4</sup> 1599
27	+0,0 <sup>5</sup> 4829
28	+0,0 <sup>5</sup> 1398
29	+0,0 <sup>6</sup> 3883
30	+0,0 <sup>6</sup> 1037
31	+0,0 <sup>7</sup> 2670
32	+0,0 <sup>7</sup> 6632
33	+0,0 <sup>8</sup> 1591
34	+0,0 <sup>8</sup> 3693
35	+0,0 <sup>10</sup> 8301
36	+0,0 <sup>10</sup> 1809
37	+0,0 <sup>11</sup> 3827
38	+0,0 <sup>12</sup> 7863
39	+0,0 <sup>12</sup> 1571
40	+0,0 <sup>13</sup> 3054
41	+0,0 <sup>14</sup> 5781
42	+0,0 <sup>14</sup> 1067
43	+0,0 <sup>15</sup> 192
44	+0,0 <sup>16</sup> 34
45	+0,0 <sup>17</sup> 6
46	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(16)$
0	-0,1749
1	+0,09040
2	+0,1862
3	-0,04385
4	-0,2026
5	-0,05747
6	+0,1667
7	+0,1825
8	-0,0 <sup>2</sup> 7021
9	-0,1895
10	-0,2062
11	-0,06822
12	+0,1124
13	+0,2368
14	+0,2724
15	+0,2399
16	+0,1775
17	+0,1150
18	+0,06685
19	+0,03544
20	+0,01733
21	+0,0 <sup>2</sup> 7879
22	+0,0 <sup>2</sup> 3354
23	+0,0 <sup>2</sup> 1343
24	+0,0 <sup>3</sup> 5087
25	+0,0 <sup>3</sup> 1828
26	+0,0 <sup>4</sup> 6253
27	+0,0 <sup>4</sup> 2042
28	+0,0 <sup>4</sup> 6380
29	+0,0 <sup>5</sup> 1912
30	+0,0 <sup>5</sup> 5505
31	+0,0 <sup>5</sup> 1525
32	+0,0 <sup>7</sup> 4078
33	+0,0 <sup>7</sup> 1052
34	+0,0 <sup>8</sup> 2625
35	+0,0 <sup>8</sup> 6339
36	+0,0 <sup>8</sup> 1484
37	+0,0 <sup>10</sup> 3368
38	+0,0 <sup>11</sup> 7426
39	+0,0 <sup>11</sup> 1591
40	+0,0 <sup>12</sup> 3317
41	+0,0 <sup>13</sup> 6733
42	+0,0 <sup>13</sup> 1331
43	+0,0 <sup>14</sup> 2567
44	+0,0 <sup>15</sup> 483
45	+0,0 <sup>16</sup> 89
46	+0,0 <sup>16</sup> 16
47	+0,0 <sup>17</sup> 3

$n$	$J_n(17)$
0	-0,1699
1	-0,09767
2	+0,1584
3	+0,1349
4	-0,1107
5	-0,1870
6	+0,0 <sup>3</sup> 7153
7	+0,1875
8	+0,1537
9	-0,04286
10	-0,1991
11	-0,1914
12	-0,04857
13	+0,1228
14	+0,2364
15	+0,2666
16	+0,2340
17	+0,1739
18	+0,1138
19	+0,06710
20	+0,03619
21	+0,01804
22	+0,0 <sup>2</sup> 8380
23	+0,0 <sup>2</sup> 3651
24	+0,0 <sup>2</sup> 1500
25	+0,0 <sup>3</sup> 5831
26	+0,0 <sup>3</sup> 2154
27	+0,0 <sup>4</sup> 7586
28	+0,0 <sup>4</sup> 2553
29	+0,0 <sup>5</sup> 8228
30	+0,0 <sup>5</sup> 2546
31	+0,0 <sup>6</sup> 7577
32	+0,0 <sup>6</sup> 2172
33	+0,0 <sup>7</sup> 6009
34	+0,0 <sup>7</sup> 1606
35	+0,0 <sup>8</sup> 4153
36	+0,0 <sup>8</sup> 1040
37	+0,0 <sup>9</sup> 2526
38	+0,0 <sup>10</sup> 5956
39	+0,0 <sup>10</sup> 1364
40	+0,0 <sup>11</sup> 3039
41	+0,0 <sup>12</sup> 6590
42	+0,0 <sup>12</sup> 1392
43	+0,0 <sup>13</sup> 2865
44	+0,0 <sup>14</sup> 5752
45	+0,0 <sup>14</sup> 1127
46	+0,0 <sup>15</sup> 216
47	+0,0 <sup>15</sup> 40
48	+0,0 <sup>17</sup> 7
49	+0,0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(18)$
0	-0,01336
1	-0,1880
2	-0,0 <sup>2</sup> 7533
3	+0,1863
4	+0,06964
5	-0,1554
6	-0,1560
7	+0,05140
8	+0,1959
9	+0,1228
10	-0,07317
11	-0,2041
12	-0,1762
13	-0,03092
14	+0,1316
15	+0,2356
16	+0,2611
17	+0,2286
18	+0,1706
19	+0,1127
20	+0,06731
21	+0,03686
22	+0,01871
23	+0,0 <sup>2</sup> 8864
24	+0,0 <sup>2</sup> 3946
25	+0,0 <sup>2</sup> 1658
26	+0,0 <sup>3</sup> 6607
27	+0,0 <sup>3</sup> 2504
28	+0,0 <sup>4</sup> 9057
29	+0,0 <sup>4</sup> 3133
30	+0,0 <sup>4</sup> 1039
31	+0,0 <sup>5</sup> 3313
32	+0,0 <sup>5</sup> 1016
33	+0,0 <sup>6</sup> 3005
34	+0,0 <sup>6</sup> 8583
35	+0,0 <sup>7</sup> 2370
36	+0,0 <sup>8</sup> 6335
37	+0,0 <sup>8</sup> 1641
38	+0,0 <sup>9</sup> 4126
39	+0,0 <sup>9</sup> 1007
40	+0,0 <sup>10</sup> 2391
41	+0,0 <sup>11</sup> 5520
42	+0,0 <sup>11</sup> 1241
43	+0,0 <sup>12</sup> 2719
44	+0,0 <sup>13</sup> 5810
45	+0,0 <sup>13</sup> 1211
46	+0,0 <sup>14</sup> 2466
47	+0,0 <sup>15</sup> 490
48	+0,0 <sup>16</sup> 95
49	+0,0 <sup>16</sup> 18
50	+0,0 <sup>17</sup> 3

$n$	$J_n(19)$
0	+0,1466
1	-0,1057
2	-0,1578
3	+0,07249
4	+0,1806
5	+0,203572
6	-0,1788
7	-0,1165
8	+0,09294
9	+0,1947
10	+0,09155
11	-0,09837
12	-0,2055
13	-0,1612
14	-0,01507
15	+0,1389
16	+0,2345
17	+0,2559
18	+0,2235
19	+0,1676
20	+0,1116
21	+0,06746
22	+0,03748
23	+0,01934
24	+0,029331
25	+0,024237
26	+0,021819
27	+0,027412
28	+0,032877
29	+0,031066
30	+0,043785
31	+0,041289
32	+0,054223
33	+0,051333
34	+0,064057
35	+0,061193
36	+0,073396
37	+0,089362
38	+0,082503
39	+0,096496
40	+0,091638
41	+0,104018
42	+0,099594
43	+0,0912231
44	+0,0925059
45	+0,091119
46	+0,092416
47	+0,095096
48	+0,091051
49	+0,09212

$n$	$J_n(19)$
50	+0,01642
51	+0,0178
52	+0,0172

$n$	$J_n(20)$
0	+0,1670
1	+0,06683
2	-0,1603
3	-0,09890
4	+0,1307
5	+0,1512
6	-0,05509
7	-0,1842
8	-0,07387
9	+0,1251
10	+0,1865
11	+0,06136
12	-0,1190
13	-0,2041
14	-0,1464
15	-0,08121
16	+0,1452
17	+0,2331
18	+0,2511
19	+0,2189
20	+0,1647
21	+0,1106
22	+0,06758
23	+0,03805
24	+0,01993
25	+0,029781
26	+0,024524
27	+0,021981
28	+0,028242
29	+0,023270

$n$	$J_n(20)$
30	+0,031240
31	+0,044508
32	+0,041574
33	+0,05289
34	+0,051713
35	+0,065358
36	+0,061620
37	+0,074742
38	+0,071345
39	+0,083704
40	+0,089902
41	+0,092574
42	+0,096510
43	+0,091604
44	+0,093849
45	+0,099011
46	+0,092059
47	+0,094594
48	+0,091002
49	+0,092135
50	+0,09445
51	+0,0991
52	+0,0918
53	+0,0974
54	+0,0971

$n$	$J_n(21)$
0	+0,03658
1	+0,1711
2	-0,02028
3	-0,1750
4	-0,02971
5	+0,1637
6	+0,1076
7	-0,1022
8	-0,1757
9	-0,03175

$n$	$J_n(21)$
10	+0.1485
11	+0.1732
12	+0.03293
13	-0.1356
14	-0.2008
15	-0.1321
16	+0.01202
17	+0.1505
18	+0.2316
19	+0.2465
20	+0.2145
21	+0.1621
22	+0.1097
23	+0.06767
24	+0.03857
25	+0.02049
26	+0.01022
27	+0.0 <sup>2</sup> 4806
28	+0.0 <sup>2</sup> 2143
29	+0.0 <sup>3</sup> 9094
30	+0.0 <sup>3</sup> 3682
31	+0.0 <sup>3</sup> 1427
32	+0.0 <sup>4</sup> 5304
33	+0.0 <sup>4</sup> 1895
34	+0.0 <sup>5</sup> 6521
35	+0.0 <sup>5</sup> 2164
36	+0.0 <sup>6</sup> 6941
37	+0.0 <sup>6</sup> 2153
38	+0.0 <sup>6</sup> 6471
39	+0.0 <sup>7</sup> 1886
40	+0.0 <sup>8</sup> 5336
41	+0.0 <sup>8</sup> 1467
42	+0.0 <sup>9</sup> 3922
43	+0.0 <sup>9</sup> 1021
44	+0.0 <sup>10</sup> 2589
45	+0.0 <sup>11</sup> 6402
46	+0.0 <sup>11</sup> 1544
47	+0.0 <sup>12</sup> 3637
48	+0.0 <sup>12</sup> 8368
49	+0.0 <sup>12</sup> 1882
50	+0.0 <sup>14</sup> 4139
51	+0.0 <sup>12</sup> 891
52	+0.0 <sup>15</sup> 188
53	+0.0 <sup>16</sup> 39
54	+0.0 <sup>17</sup> 8
55	+0.0 <sup>17</sup> 2

$n$	$J_n(22)$
0	-0.1207
1	+0.1172
2	+0.1313
3	-0.09330
4	-0.1568
5	+0.03630
6	+0.1733
7	+0.05820
8	-0.1362
9	-0.1573
10	+0.0 <sup>2</sup> 7547
11	+0.1641
12	+0.1566
13	+0.0 <sup>2</sup> 6688
14	-0.1487
15	-0.1959
16	-0.1185
17	+0.02358
18	+0.1549
19	+0.2299
20	+0.2422
21	+0.2105
22	+0.1596
23	+0.1087
24	+0.06773
25	+0.03905
26	+0.02102
27	+0.01064
28	+0.0 <sup>2</sup> 5084
29	+0.0 <sup>2</sup> 2307
30	+0.0 <sup>3</sup> 9965
31	+0.0 <sup>3</sup> 4113
32	+0.0 <sup>3</sup> 1626
33	+0.0 <sup>4</sup> 6171
34	+0.0 <sup>4</sup> 2253
35	+0.0 <sup>5</sup> 7927
36	+0.0 <sup>5</sup> 2692
37	+0.0 <sup>6</sup> 8839
38	+0.0 <sup>6</sup> 2809
39	+0.0 <sup>7</sup> 8652
40	+0.0 <sup>7</sup> 2586
41	+0.0 <sup>8</sup> 7506
42	+0.0 <sup>8</sup> 2118
43	+0.0 <sup>9</sup> 5816
44	+0.0 <sup>9</sup> 1555
45	+0.0 <sup>10</sup> 4054
46	+0.0 <sup>10</sup> 1031
47	+0.0 <sup>11</sup> 2557
48	+0.0 <sup>12</sup> 6196
49	+0.0 <sup>12</sup> 1467

$n$	$J_n(22)$
50	+0.0 <sup>13</sup> 3397
51	+0.0 <sup>14</sup> 7696
52	+0.0 <sup>14</sup> 1706
53	+0.0 <sup>15</sup> 370
54	+0.0 <sup>16</sup> 79
55	+0.0 <sup>16</sup> 16
56	+0.0 <sup>17</sup> 3
57	+0.0 <sup>17</sup> 1

$n$	$J_n(23)$
0	-0.1624
1	-0.03952
2	+0.1590
3	+0.06717
4	-0.1415
5	-0.1164
6	+0.09086
7	+0.1638
8	+0.0 <sup>2</sup> 8829
9	-0.1576
10	-0.1322
11	+0.04268
12	+0.1730
13	+0.1379
14	-0.01718
15	-0.1588
16	-0.1899
17	-0.1055
18	+0.03402
19	+0.1587
20	+0.2282
21	+0.2381
22	+0.2067
23	+0.1573
24	+0.1078
25	+0.06777
26	+0.03949
27	+0.02152
28	+0.01104
29	+0.0 <sup>2</sup> 5357

$n$	$J_n(23)$	$n$	$J_n(24)$	$n$	$J_n(24)$
30	+0,0 <sup>2</sup> 2470	0	-0,05623	30	+0,0 <sup>2</sup> 5626
31	+0,0 <sup>2</sup> 1085	1	-0,1540	31	+0,0 <sup>2</sup> 2633
32	+0,0 <sup>3</sup> 4561	2	+0,04339	32	+0,0 <sup>3</sup> 1176
33	+0,0 <sup>3</sup> 1837	3	+0,1613	33	+0,0 <sup>3</sup> 5024
34	+0,0 <sup>4</sup> 7110	4	-0,0 <sup>3</sup> 3076	34	+0,0 <sup>3</sup> 2060
35	+0,0 <sup>4</sup> 2649	5	-0,1623	35	+0,0 <sup>4</sup> 8119
36	+0,0 <sup>5</sup> 9516	6	-0,06455	36	+0,0 <sup>4</sup> 3083
37	+0,0 <sup>5</sup> 3302	7	+0,1300	37	+0,0 <sup>4</sup> 1130
38	+0,0 <sup>5</sup> 1108	8	+0,1404	38	+0,0 <sup>5</sup> 4000
39	+0,0 <sup>6</sup> 3603	9	-0,03643	39	+0,0 <sup>5</sup> 1371
40	+0,0 <sup>6</sup> 1136	10	-0,1677	40	+0,0 <sup>6</sup> 4553
41	+0,0 <sup>7</sup> 3476	11	-0,1033	41	+0,0 <sup>6</sup> 1467
42	+0,0 <sup>7</sup> 1034	12	+0,07299	42	+0,0 <sup>7</sup> 4590
43	+0,0 <sup>8</sup> 2989	13	+0,1763	43	+0,0 <sup>7</sup> 1396
44	+0,0 <sup>8</sup> 8417	14	+0,1180	44	+0,0 <sup>8</sup> 4133
45	+0,0 <sup>9</sup> 2309	15	-0,03863	45	+0,0 <sup>8</sup> 1191
46	+0,0 <sup>10</sup> 6175	16	-0,1663	46	+0,0 <sup>9</sup> 3347
47	+0,0 <sup>10</sup> 1611	17	-0,1831	47	+0,0 <sup>10</sup> 9172
48	+0,0 <sup>11</sup> 4105	18	-0,09311	48	+0,0 <sup>10</sup> 2453
49	+0,0 <sup>11</sup> 1022	19	+0,04345	49	+0,0 <sup>11</sup> 6409
50	+0,0 <sup>12</sup> 2486	20	+0,1619	50	+0,0 <sup>11</sup> 1636
51	+0,0 <sup>12</sup> 5917	21	+0,2264	51	+0,0 <sup>12</sup> 4085
52	+0,0 <sup>13</sup> 1378	22	+0,2343	52	+0,0 <sup>12</sup> 9976
53	+0,0 <sup>13</sup> 3142	23	+0,2031	53	+0,0 <sup>13</sup> 2385
54	+0,0 <sup>15</sup> 702	24	+0,1550	54	+0,0 <sup>14</sup> 5585
55	+0,0 <sup>15</sup> 154	25	+0,1070	55	+0,0 <sup>14</sup> 1281
56	+0,0 <sup>16</sup> 34	26	+0,06778	56	+0,0 <sup>15</sup> 288
57	+0,0 <sup>17</sup> 7	27	+0,03990	57	+0,0 <sup>16</sup> 64
58	+0,0 <sup>17</sup> 1	28	+0,02200	58	+0,0 <sup>16</sup> 14
		29	+0,01143	59	+0,0 <sup>17</sup> 3
				60	+0,0 <sup>17</sup> 1

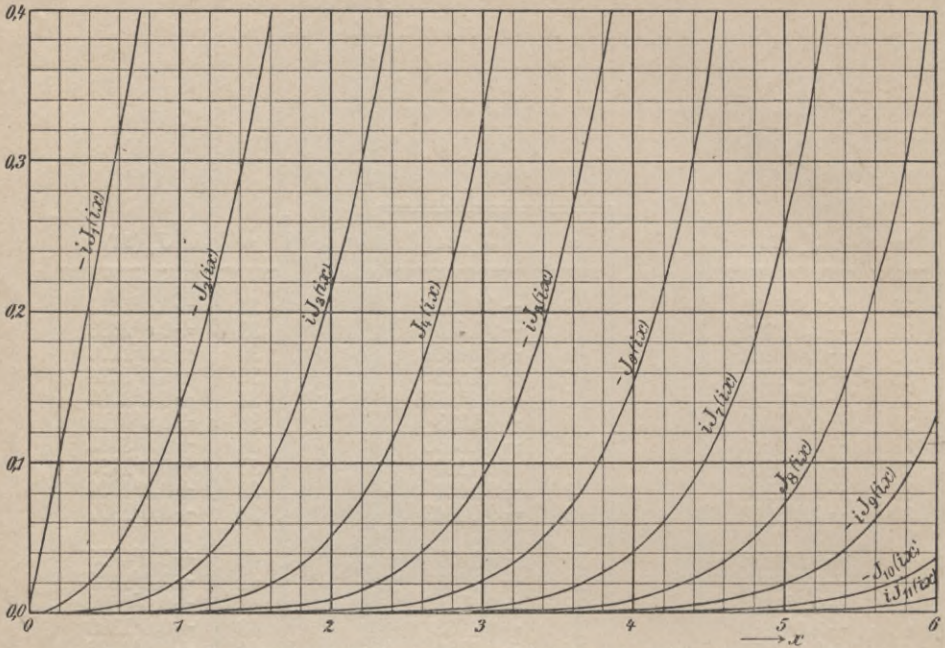


Fig. 46. Besselsche Zylinderfunktionen bei rein imaginärem Argument.

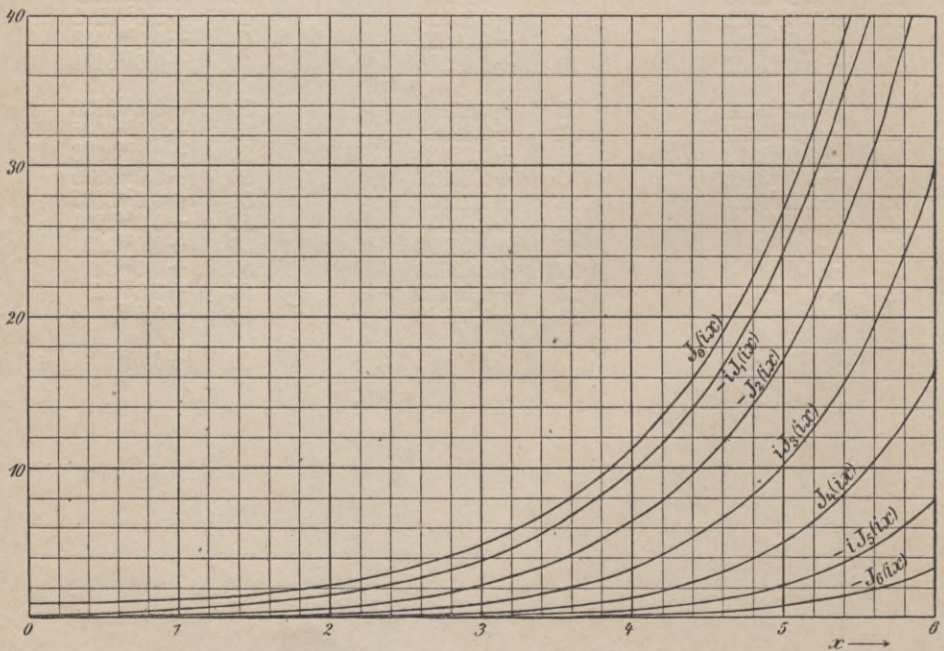


Fig. 47. Besselsche Zylinderfunktionen bei rein imaginärem Argument.

$x$	$J_0(ix)$	$-iJ_1(ix)$	$-J_2(ix)$	$x$	$iJ_3(ix)$	$J_4(ix)$	$-iJ_5(ix)$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	1,01003	0,1005	0,0 <sup>2</sup> 5017	0,2	0,0 <sup>3</sup> 1671	0,0 <sup>5</sup> 4175	0,0 <sup>7</sup> 8347
0,4	1,04040	0,2040	0,02027	0,4	0,0 <sup>3</sup> 1347	0,0 <sup>4</sup> 6720	0,0 <sup>5</sup> 2684
0,6	1,09205	0,3137	0,04637	0,6	0,0 <sup>2</sup> 4602	0,0 <sup>3</sup> 3436	0,0 <sup>4</sup> 2056
0,8	1,1665	0,4329	0,08435	0,8	0,01110	0,0 <sup>2</sup> 1101	0,0 <sup>3</sup> 8764
1,0	1,2661	0,5652	0,1357	1,0	0,02217	0,0 <sup>2</sup> 2737	0,0 <sup>3</sup> 2715
1,2	1,3937	0,7147	0,2026	1,2	0,03936	0,0 <sup>2</sup> 5801	0,0 <sup>3</sup> 6879
1,4	1,5534	0,8861	0,2875	1,4	0,06452	0,01103	0,0 <sup>2</sup> 1519
1,6	1,7500	1,0848	0,3940	1,6	0,09989	0,01937	0,0 <sup>2</sup> 3036
1,8	1,9996	1,3172	0,5260	1,8	0,1482	0,03208	0,0 <sup>2</sup> 5625
2,0	2,2796	1,5906	0,6889	2,0	0,2127	0,05073	0,0 <sup>2</sup> 9826
2,2	2,6291	1,9141	0,8891	2,2	0,2976	0,07734	0,01637
2,4	3,0493	2,2981	1,1342	2,4	0,4079	0,1145	0,02626
2,6	3,5533	2,7554	1,4337	2,6	0,5496	0,1654	0,04079
2,8	4,1573	3,3011	1,7994	2,8	0,7305	0,2341	0,06169
3,0	4,8808	3,9534	2,2452	3,0	0,9598	0,3257	0,09121
3,2	5,7472	4,7343	2,7883	3,2	1,2489	0,4466	0,1323
3,4	6,7848	5,6701	3,4495	3,4	1,6119	0,6049	0,1886
3,6	8,0277	6,7927	4,2540	3,6	2,0661	0,8105	0,2651
3,8	9,5169	8,1404	5,2325	3,8	2,6326	1,0758	0,3678
4,0	11,3019	9,7595	6,4222	4,0	3,3373	1,4163	0,5047
4,2	13,4425	11,7056	7,8684	4,2	4,2120	1,8513	0,6857
4,4	16,0104	14,0462	9,6258	4,4	5,2955	2,4046	0,9234
4,6	19,0926	16,8626	11,7611	4,6	6,6355	3,1060	1,2338
4,8	22,7937	20,2528	14,3550	4,8	8,2903	3,9921	1,6369
5,0	27,2399	24,3356	17,5056	5,0	10,3312	5,1082	2,1580
5,2	32,5836	29,2543	21,3319	5,2	12,8451	6,5106	2,8288
5,4	39,0088	35,1821	25,9784	5,4	15,9388	8,2686	3,6890
5,6	46,7376	42,3283	31,6203	5,6	19,7424	10,4678	4,7884
5,8	56,0381	50,9462	38,4704	5,8	24,4148	13,2137	6,1890
6,0	67,2344	61,3419	46,7871	6,0	30,1505	16,6366	7,9685

$x$	$-J_6(ix)$	$iJ_7(ix)$	$J_8(ix)$	$x$	$-iJ_9(ix)$	$-J_{10}(ix)$	$iJ_{11}(ix)$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,0 <sup>8</sup> 1391	0,0 <sup>10</sup> 1987	0,0 <sup>12</sup> 2483	0,2	0,0 <sup>14</sup> 2758	0,0 <sup>16</sup> 2758	0,0 <sup>18</sup> 2507
0,4	0,0 <sup>8</sup> 8940	0,0 <sup>8</sup> 2552	0,0 <sup>10</sup> 6377	0,4	0,0 <sup>11</sup> 1417	0,0 <sup>13</sup> 2832	0,0 <sup>15</sup> 5148
0,6	0,0 <sup>8</sup> 1026	0,0 <sup>7</sup> 4388	0,0 <sup>8</sup> 1644	0,6	0,0 <sup>10</sup> 5473	0,0 <sup>11</sup> 1641	0,0 <sup>13</sup> 4471
0,8	0,0 <sup>8</sup> 5820	0,0 <sup>8</sup> 3316	0,0 <sup>7</sup> 1655	0,8	0,0 <sup>9</sup> 7340	0,0 <sup>10</sup> 2932	0,0 <sup>11</sup> 1065
1,0	0,0 <sup>8</sup> 2249	0,0 <sup>8</sup> 1599	0,0 <sup>7</sup> 9961	1,0	0,0 <sup>8</sup> 5518	0,0 <sup>9</sup> 2753	0,0 <sup>10</sup> 1249
1,2	0,0 <sup>4</sup> 6821	0,0 <sup>5</sup> 5809	0,0 <sup>6</sup> 4335	1,2	0,0 <sup>7</sup> 2879	0,0 <sup>8</sup> 1722	0,0 <sup>9</sup> 9365
1,4	0,0 <sup>3</sup> 1752	0,0 <sup>4</sup> 1737	0,0 <sup>5</sup> 1510	1,4	0,0 <sup>6</sup> 1168	0,0 <sup>8</sup> 8138	0,0 <sup>9</sup> 5160
1,6	0,0 <sup>3</sup> 3987	0,0 <sup>4</sup> 4506	0,0 <sup>5</sup> 4467	1,6	0,0 <sup>6</sup> 3942	0,0 <sup>7</sup> 3136	0,0 <sup>8</sup> 2270
1,8	0,0 <sup>3</sup> 8280	0,0 <sup>3</sup> 1050	0,0 <sup>4</sup> 1168	1,8	0,0 <sup>5</sup> 1157	0,0 <sup>6</sup> 1034	0,0 <sup>7</sup> 8409
2,0	0,0 <sup>2</sup> 1600	0,0 <sup>3</sup> 2246	0,0 <sup>4</sup> 2770	2,0	0,0 <sup>5</sup> 3044	0,0 <sup>6</sup> 3017	0,0 <sup>7</sup> 2722
2,2	0,0 <sup>2</sup> 2919	0,0 <sup>3</sup> 4492	0,0 <sup>4</sup> 6076	2,2	0,0 <sup>5</sup> 7329	0,0 <sup>6</sup> 7975	0,0 <sup>7</sup> 7903
2,4	0,0 <sup>2</sup> 5081	0,0 <sup>3</sup> 8497	0,0 <sup>3</sup> 1250	2,4	0,0 <sup>4</sup> 1641	0,0 <sup>5</sup> 1944	0,0 <sup>6</sup> 2098
2,6	0,0 <sup>2</sup> 8505	0,0 <sup>3</sup> 1534	0,0 <sup>3</sup> 2437	2,6	0,0 <sup>4</sup> 3456	0,0 <sup>5</sup> 4426	0,0 <sup>6</sup> 5165
2,8	0,01377	0,0 <sup>2</sup> 2664	0,0 <sup>3</sup> 4540	2,8	0,0 <sup>4</sup> 6915	0,0 <sup>5</sup> 9513	0,0 <sup>6</sup> 1193
3,0	0,02168	0,0 <sup>2</sup> 4472	0,0 <sup>3</sup> 8137	3,0	0,0 <sup>3</sup> 1324	0,0 <sup>4</sup> 1946	0,0 <sup>5</sup> 2610
3,2	0,03332	0,0 <sup>2</sup> 7295	0,0 <sup>2</sup> 1410	3,2	0,0 <sup>3</sup> 2439	0,0 <sup>4</sup> 3816	0,0 <sup>5</sup> 5446
3,4	0,05015	0,01160	0,0 <sup>2</sup> 2373	3,4	0,0 <sup>3</sup> 4347	0,0 <sup>4</sup> 7205	0,0 <sup>5</sup> 1090
3,6	0,07411	0,01806	0,0 <sup>2</sup> 3893	3,6	0,0 <sup>3</sup> 7523	0,0 <sup>4</sup> 1316	0,0 <sup>5</sup> 2103
3,8	0,1078	0,02755	0,0 <sup>2</sup> 6243	3,8	0,0 <sup>3</sup> 1269	0,0 <sup>3</sup> 2336	0,0 <sup>4</sup> 3929
4,0	0,1545	0,04133	0,0 <sup>2</sup> 9810	4,0	0,0 <sup>3</sup> 2090	0,0 <sup>3</sup> 4038	0,0 <sup>4</sup> 7131
4,2	0,2186	0,06105	0,01514	4,2	0,0 <sup>2</sup> 3373	0,0 <sup>3</sup> 6819	0,0 <sup>3</sup> 1261
4,4	0,3060	0,08894	0,02299	4,4	0,0 <sup>2</sup> 5344	0,0 <sup>3</sup> 1128	0,0 <sup>3</sup> 2178
4,6	0,4239	0,1280	0,03440	4,6	0,0 <sup>2</sup> 8324	0,0 <sup>3</sup> 1830	0,0 <sup>3</sup> 3683
4,8	0,5819	0,1821	0,05080	4,8	0,01277	0,0 <sup>2</sup> 2918	0,0 <sup>3</sup> 6109
5,0	0,7923	0,2565	0,07412	5,0	0,01932	0,0 <sup>2</sup> 4580	0,0 <sup>3</sup> 9955
5,2	1,0707	0,3580	0,1070	5,2	0,02885	0,0 <sup>2</sup> 7086	0,0 <sup>2</sup> 1596
5,4	1,4371	0,4954	0,1528	5,4	0,04260	0,01082	0,0 <sup>2</sup> 2523
5,6	1,9171	0,6803	0,2163	5,6	0,06222	0,01632	0,0 <sup>2</sup> 3932
5,8	2,5430	0,9277	0,3037	5,8	0,09000	0,02435	0,0 <sup>2</sup> 6052
6,0	3,3558	1,2569	0,4230	6,0	0,1290	0,03594	0,0 <sup>2</sup> 9207

9. Wurzeln von Gleichungen mit Besselschen Funktionen.

a) Die Gleichungen  $J_n(ix) J_n'(x) - iJ_n(x) J_n'(ix) = 0$ .

Tafel XXV.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$x_1$	3,19	4,612	5,904
$x_2$	6,306	7,80	9,40
$x_3$	9,425	10,95	
$x_4$	12,56		
$x_5$	15,71		



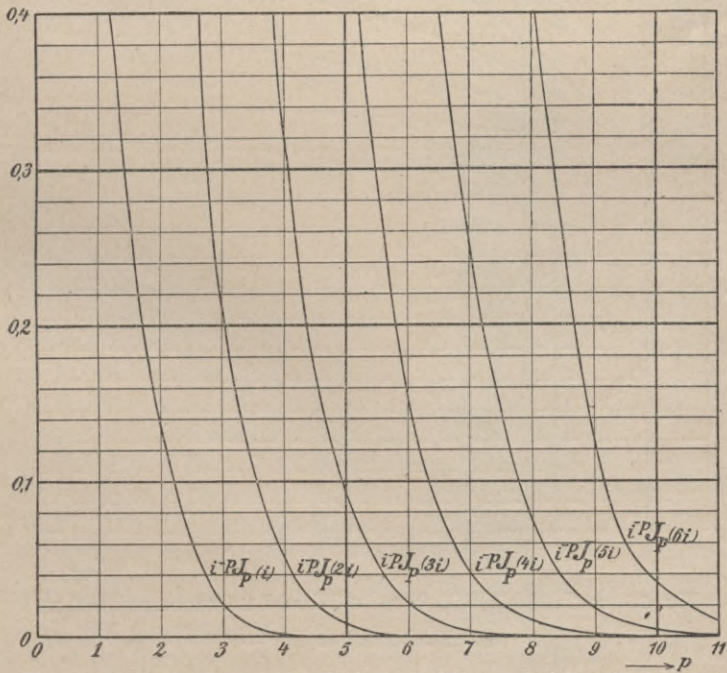
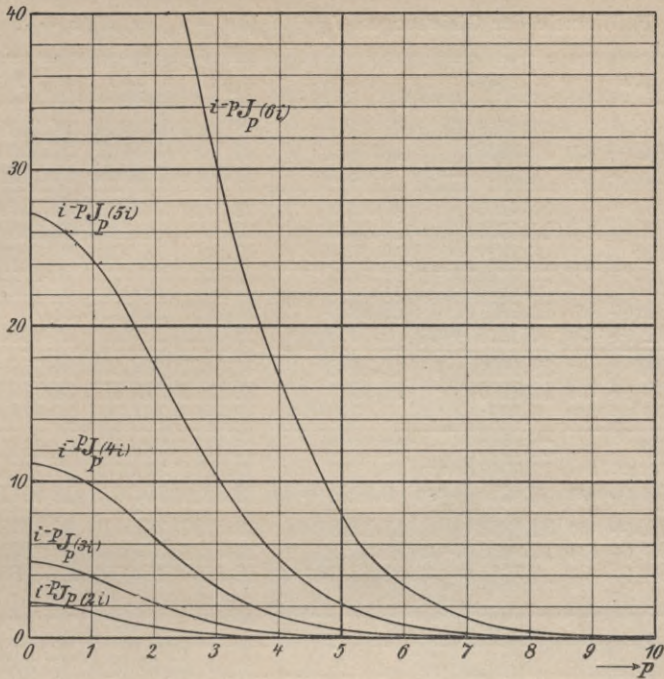


Fig. 48 und 49. Besselsche Zylinderfunktionen bei konstantem rein imaginären Argument und variabler Ordnung.

b) Wurzeln der Gleichungen  $J_p(x) N_p(kx) - J_p(kx) N_p(x) = 0$ .

$k$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$p$
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	} $p = 0$
1,5	6,2702 (- 0,3)	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	
2,0	3,1228 (- 6,2)	6,2734 (- 0,2)	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	} $p = \frac{1}{2}$
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	} $p = 1$
1,5	6,3218 (+ 0,9)	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	
2,0	3,1971 (+ 15,7)	6,3124 (+ 0,5)	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	} $p = \frac{3}{2}$
1,5	6,3858 (+ 2,2)	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	
2,0	3,2866 (+ 33,6)	6,3607 (+ 1,0)	9,4772 (+ 0,1)	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	} $p = 2$
1,5	6,4742 (+ 3,9)	12,6648 (+ 0,1)	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	
2,0	3,4063 (+ 45,6)	6,4277 (+ 1,4)	9,5228 (+ 0,2)	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655 (+ 0,2)	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	} $p = \frac{5}{2}$
1,5	6,5860 (+ 6,8)	12,7235 (+ 0,2)	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	
2,0	3,5514 (+ 49,6)	6,5130 (+ 1,6)	9,5813 (+ 0,2)	12,6846	15,8029	18,9288	

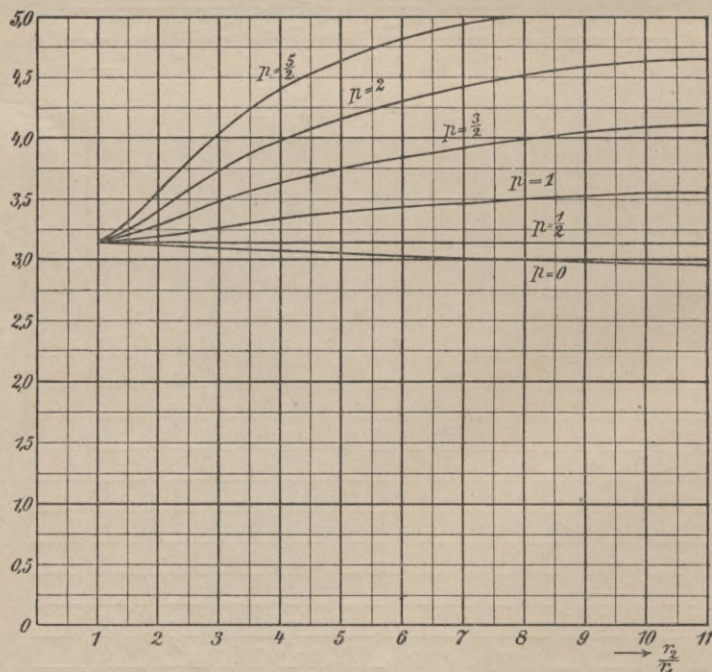


Fig. 50 (zu Tafel XXVIII, S. 164). Wurzel 1. Ordnung  $(k-1)x_p^{(1)}$   
als Funktion von  $k = \frac{r_2}{r_1}$ .

Kleine Ziffern bedeuten Unsicherheit um 1 bis 2 Einheiten, Unterstreichung bedeutet Unsicherheit von mehr als 2 Einheiten.

Die in Klammern beigefügten kleinen Zahlen geben die Unsicherheit der betreffenden Werte in Einheiten der vierten Dezimale an.

Für  $k=1$  sind alle Wurzeln  $x_p^{(w)} = \infty$ , für  $k=\infty$  sind alle Wurzeln  $x_p^{(w)} = 0$ .

$k$	$(k-1)x^{(1)}$	$(k-1)x^{(2)}$	$(k-1)x^{(3)}$	$(k-1)x^{(4)}$	$(k-1)x^{(5)}$	$(k-1)x^{(6)}$	$p$
1,2	3,1403	6,2825	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	} $p=0$
1,5	3,1351 (- 0,2)	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485	
2,0	3,122 <u>2</u> (- 6,2)	6,2734 (- 0,2)	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
$\infty$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	} $p=\frac{1}{2}$
1,5	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
$\infty$	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502	} $p=1$
1,5	3,1609 (+ 0,4)	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	
2,0	3,1971 (+ 15,7)	6,3124 (+ 0,5)	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
$\infty$	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513	} $p=\frac{3}{2}$
1,5	3,1929 (+ 1,1)	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584	
2,0	3,28 <u>66</u> (+ 33,6)	6,3607 (+ 1,0)	9,4772 (+ 0,1)	12,6059	15,7397	18,8760	
$\infty$	4,4934 (- 0,3)	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208	20,3713	
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	} $p=2$
1,5	3,2371 (+ 2,0)	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661	
2,0	3,40 <u>63</u> (+ 45,6)	6,4277 (+ 1,4)	9,5228 (+ 0,2)	12,6404	15,7673	18,8991	
$\infty$	5,1357 (- 2,3)	8,4172 (- 0,1)	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549	} $p=\frac{5}{2}$
1,5	3,293 <u>0</u> (+ 3,4)	6,3617 (+ 0,1)	9,4775	12,6060	15,7397	18,8760	
2,0	3,551 <u>4</u> (+ 49,5)	6,513 <u>0</u> (+ 1,5)	9,5813 (+ 0,2)	12,6846	15,8029	18,9288	
$\infty$	5,763 <u>5</u> (- 8,3)	9,0950 (- 0,5)	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539	

Kleine Ziffern bedeuten Unsicherheit um 1 bis 2 Einheiten, Unterstreichung bedeutet Unsicherheit um mehr als 2 Einheiten.

Die in Klammern beigefügten kleinen Zahlen geben schätzungsweise die Unsicherheit der betreffenden Werte in Einheiten der vierten Dezimale an. Für  $k=1$  sind alle Wurzeln  $(k-1)x_p^{(w)} = w\pi$ .

$k$	$p=0$	$p=\frac{1}{2}$	$p=1$	$p=\frac{3}{2}$	$p=2$	$p=\frac{5}{2}$
1	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
1,2	3,1403	3,1416	3,1455	3,1521	3,1613	3,1731
1,5	3,1351	3,1416	3,1609	3,1929	3,2371	3,2930
2	3,122 <sub>2</sub>	3,1416	3,1971	3,2866	3,4063	3,5514
3	3,10 <sub>2</sub>	3,1416	3,27 <sub>2</sub>	3,474 <sub>4</sub>	3,74 <sub>2</sub>	4,10 <sub>5</sub>
4	3,07 <sub>2</sub>	3,1416	3,33 <sub>4</sub>	3,6287	4,00 <sub>2</sub>	4,45
5	3,05 <sub>4</sub>	3,1416	3,38 <sub>2</sub>	3,74 <sub>2</sub>	4,18 <sub>2</sub>	4,68
6	3,03 <sub>2</sub>	3,1416	3,43 <sub>2</sub>	3,84 <sub>2</sub>	4,30 <sub>1</sub>	4,83
7	3,01 <sub>2</sub>	3,1416	3,46 <sub>1</sub>	3,91 <sub>2</sub>	4,40 <sub>2</sub>	4,9 <sub>2</sub>
8	3,00 <sub>2</sub>	3,1416	3,49 <sub>2</sub>	3,97 <sub>2</sub>	4,48 <sub>2</sub>	5,0 <sub>2</sub>
9	2,99 <sub>2</sub>	3,1416	3,52 <sub>2</sub>	4,02 <sub>2</sub>	4,55 <sub>2</sub>	5,11
10	2,981	3,1416	3,54 <sub>2</sub>	4,06 <sub>2</sub>	4,60 <sub>2</sub>	5,17
11	2,97 <sub>2</sub>	3,1416	3,56 <sub>1</sub>	4,10 <sub>2</sub>	4,65 <sub>2</sub>	5,2 <sub>2</sub>
19	2,92	3,1416	3,66	4,25	(4,84)	(5,43)
39	2,84	3,1416	3,74	4,37	(4,99)	(5,60)
$\infty$	2,4048	3,1416	3,8317	4,4934	5,1357	5,7636

Klammern bedeuten Unsicherheit der betreffenden Werte, Unterstreichung einer Ziffer bedeutet eine Unsicherheit von mehreren Einheiten, kleine Ziffern Unsicherheit von 1 bis 2 Einheiten.

Tafel XXIX: Wurzeln 1. bis 4. Ordnung  $(k-1)x_p^{(w)}$  für einige irrationale Werte von  $k$ .

$k$	$(k-1)x^{(1)}$	$k$	$(k-1)x^{(2)}$	$k$	$(k-1)x^{(3)}$	$k$	$(k-1)x^{(4)}$	$p$
1,0000	3,1416	1,0000	6,2832	1,0000	9,4248	1,0000	12,5664	} $p=0$
1,3625	3,1378	1,7253	6,2772	2,0882	9,4137	3,2737	12,5510	
1,447	3,136	2,1361	6,2715	2,7048	9,4108	6,2087	12,5361	
1,5677	3,1337	2,612	6,264	4,9033	9,3867	.....	.....	
1,805	3,128	3,5985	6,2489	12,287	9,323	.....	.....	
2,2954	3,1152	8,490	6,187	.....	.....	.....	.....	
4,703	3,059	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
$\infty$	2,4048	$\infty$	5,5201	$\infty$	8,6537	$\infty$	11,7915	
1,0000	3,1416	1,0000	6,2832	1,0000	9,4248	1,0000	12,5664	} $p=1$
1,3096	3,1502	1,6190	6,2972	1,9281	9,4424	2,7960	12,6003	
1,4501	3,1579	1,8992	6,3081	2,3478	9,4550	4,2986	12,6389	
1,591	3,166	2,6551	6,3418	3,4772	9,4920	.....	.....	
1,8309	3,1839	4,023	6,403	.....	.....	.....	.....	
2,528	3,237	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
$\infty$	3,8317	$\infty$	7,0156	$\infty$	10,1735	$\infty$	13,3237	

Die in den Tafeln XXVII—XXIX enthaltenen Wurzeln  $(k-1)x_p^{(w)}$  der Gleichungen  $J_p(x)N_p(kx) - J_p(kx)N_p(x) = 0$  sind identisch mit den Wurzelwerten  $(r_2 - r_1)\tau_p^{(w)}$  der entsprechenden Gleichungen  $J_p(r_1\tau)N_p(r_2\tau) - J_p(r_2\tau)N_p(r_1\tau) = 0$ , wobei  $\frac{r_2}{r_1} = k$  ist.

Die Tafeln XVI—XXIX sind berechnet von Herrn A. Kalähne (Zeitschr. für Math. u. Ph. 54, 55—86, 1907), der ihre Anordnung freundlicherweise für die Zwecke der vorliegenden Sammlung etwas abgeändert hat.

### 10. Elementare Funktionalgleichungen.

Im folgenden bedeutet  $Z_p(x)$  oder kurz  $Z_p$  eine Abkürzung für  $c_1 J_p(x) + c_2 N_p(x)$ , wo  $c_1, c_2$  willkürliche (reelle oder komplexe) Konstanten bezeichnen. Ebenso  $\bar{Z} = \bar{c}_1 J + \bar{c}_2 N$  zur Unterscheidung zweier solcher Funktionen. Dabei sind die  $c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$  als vom Index  $p$  unabhängig vorausgesetzt.

$$Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{x} Z_p$$

$$J_p J_{-p+1} + J_{p-1} J_{-p} = \frac{2 \sin p\pi}{\pi x}$$

$$N_{p-1} J_p - N_p J_{p-1} = \frac{2}{\pi x}$$

$$J_{p-1} H_p^{(1)} - J_p H_{p-1}^{(1)} = \frac{2}{\pi i x}, \quad H_{p-1}^{(2)} J_p - H_p^{(2)} J_{p-1} = \frac{2}{\pi i x}$$

$$J_p(x+y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r y^r}{r!} \left(1 + \frac{y}{2x}\right)^r J_{p+r}(x).$$

### 11. Differentialformeln.

$$\frac{dZ_p}{dx} = -\frac{p}{x} Z_p + Z_{p-1} = \frac{p}{x} Z_p - Z_{p+1} = \frac{1}{2} Z_{p-1} - \frac{1}{2} Z_{p+1}$$

$$\frac{d}{dx} [x^p Z_p(\alpha x)] = \alpha x^p Z_{p-1}(\alpha x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} Z_p(\alpha x)] = -\alpha x^{-p} Z_{p+1}(\alpha x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{\frac{p}{2}} Z_p(\sqrt{\alpha x})] = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} x^{\frac{p-1}{2}} Z_{p-1}(\sqrt{\alpha x})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\frac{p}{2}} Z_p(\sqrt{\alpha x})] = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} x^{-\frac{p+1}{2}} Z_{p+1}(\sqrt{\alpha x})$$

$$\frac{d^2 Z_p}{dx^2} = \left(\frac{p(p-1)}{x^2} - 1\right) Z_p + \frac{1}{x} Z_{p+1}$$

$$Z_0' = -Z_1, \quad Z_1' = Z_0 - \frac{1}{x} Z_1.$$

### 12. Integralformeln (unbestimmte Integrale).

$$\int J_p(x) dx = 2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{p+2r+1}(x)$$

$$\int x^{p+1} Z_p(x) dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x)$$

$$\int x^{-p+1} Z_p(x) dx = -x^{-p+1} Z_{p-1}(x)$$

$$\int [(\alpha^2 - \beta^2)x - \frac{p^2 - q^2}{x}] Z_p(\alpha x) \bar{Z}_q(\beta x) dx$$

$$= \beta x Z_p(\alpha x) \bar{Z}_{q-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x) Z_q(\beta x) + (p-q) Z_p(\alpha x) \bar{Z}_q(\beta x)$$

$$\int x Z_p(\alpha x) \bar{Z}_p(\beta x) dx = \frac{\beta x Z_p(\alpha x) \bar{Z}_{p-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x) \bar{Z}_p(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\int x [Z_p(\alpha x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \{ [Z_p(\alpha x)]^2 - Z_{p-1}(\alpha x) Z_{p+1}(\alpha x) \}$$

$$\int \frac{1}{x} Z_p(\alpha x) \bar{Z}_q(\alpha x) dx = \alpha x \frac{Z_{p-1}(\alpha x) \bar{Z}_q(\alpha x) - Z_p(\alpha x) \bar{Z}_{q-1}(\alpha x)}{p^2 - q^2}$$

$$\int Z_1(x) dx = -Z_0(x), \quad \int x Z_0(x) dx = x Z_1(x).$$

### 13. Differentialgleichungen, die auf Besselsche Funktionen führen.

#### a) Gleichungen zweiter Ordnung.

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + [(\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2 \gamma^2}{x^2}] y = 0, \quad y = x^\alpha Z_p(\beta x^\gamma)$$

$$y'' + [(\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 - \frac{4p^2 \gamma^2 - 1}{4x^2}] y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_p(\beta x^\gamma)$$

$$y'' + \left( \beta^2 - \frac{4p^2 - 1}{4x^2} \right) y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_p(\beta x)$$

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2 - p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = x^\alpha Z_p(\beta x)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x y') + [(\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 - \left( \frac{p\gamma}{x} \right)^2] y = 0, \quad y = Z_p(\beta x^\gamma)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x y') + \left( \beta^2 - \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = Z_p(\beta x)$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = Z_p(x)$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left( 1 + \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = Z_p(ix)$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( i - \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = Z_p(x\sqrt{i})$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left( i + \frac{p^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = Z_p(x\sqrt{-i})$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left[ \frac{1}{x} + \left( \frac{p}{2x} \right)^2 \right] y = 0, \quad y = Z_p(2i\sqrt{x})$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + me^{i\mu}y = 0, \quad y = Z_0\left(\sqrt{m}xe^{i\frac{\mu}{2}}\right)$$

$$y'' + \left(me^{i\mu} + \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, \quad y = \sqrt{x}Z_0\left(\sqrt{m}xe^{i\frac{\mu}{2}}\right)$$

$$y'' + bx^m y = 0, \quad y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

$$y'' + bxy = 0, \quad y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{3}\sqrt{x^3}\right)$$

$$y'' + bx^2y = 0, \quad y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{b}}{2}x^2\right)$$

$$y'' + \left(\frac{1-2\alpha}{x} \mp 2\beta\gamma ix^{\gamma-1}\right)y' + \left[\frac{\alpha^2 - p^2\gamma^2}{x^2} \mp \beta\gamma(\gamma-2\alpha)ix^{\gamma-2}\right]y = 0,$$

$$y = x^\alpha e^{\pm i\beta x^\gamma} Z_p(\beta x^\gamma)$$

$$y'' + \left(\frac{1}{x} \mp 2i\right)y' - \left(\frac{p^2}{x^2} \pm \frac{i}{x}\right)y = 0, \quad y = e^{\pm ix} Z_p(x)$$

$$y'' + y' + \frac{1-p^2}{x^2}y = 0, \quad y = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} Z_p\left(\frac{ix}{2}\right)$$

$$y'' + \left(\frac{2p+1}{x} - k\right)y' - \frac{2p+1}{2x}ky = 0, \quad y = \frac{e^{\frac{kx}{2}}}{x^p} Z_p\left(\frac{ikx}{2}\right)$$

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2 \operatorname{tg} x\right)y' - \left(\frac{p^2}{x^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)y = 0, \quad y = \frac{1}{\cos x} Z_p(x)$$

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 2 \cot x\right)y' - \left(\frac{p^2}{x^2} - \frac{\cot x}{x}\right)y = 0, \quad y = \frac{1}{\sin x} Z_p(x)$$

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2u\right)y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} + u^2 - u' - \frac{u}{x}\right)y = 0, \quad y = e^{\int u dx} Z_p(x).$$

### b) Gleichungen dritter Ordnung.

$$y''' + \left(\frac{2}{x} - 1\right)y'' - \left(1 + \frac{4p^2-1}{4x^2}\right)y' + \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4p^2-1}{4x^2}\right)y = 0,$$

$$y = Ae^x + \sqrt{x}Z_p(ix)$$

$$y''' + \left(\frac{2-2p}{x} - 1\right)y'' + \left(\frac{2p-1}{x} - 1\right)y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = 0,$$

$$y = Ae^x + x^p Z_p(ix)$$

$$y''' - \left(1 + \frac{p}{x}\right)y'' + \left(\frac{2p}{x} + \frac{p^2}{x^2}\right)y' - \left(\frac{p}{x} + \frac{p}{x^2}\right)y = 0,$$

$$y = Ae^x + x^{\frac{p+1}{2}} Z_{p+1}(2\sqrt{px})$$

$$y''' + \left(\frac{2}{x} - 2\right)y'' + \left(\frac{1-4p^2}{4x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)y' + \frac{4p^2-1}{4x^2}y = 0,$$

$$y = Ae^x + \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}Z_p\left(\frac{ix}{2}\right)$$

$$y''' + \left(\frac{2-2p}{x} - 1\right)y'' - 3\frac{1-2p}{x}y' + \frac{1-4p}{x}y = 0,$$

$$y = Ae^x + x^pe^{-\frac{x}{2}}Z_p\left(\frac{ix}{2}\right)$$

$$y''' + \frac{3}{x}y'' + \left(4 + \frac{1-4p^2}{x^2}\right)y' + \frac{4}{x}y = 0,$$

$$y = A[J_p(x)]^2 + BJ_p(x)N_p(x) + C[N_p(x)]^2$$

$$y''' + \frac{3(1-\alpha)}{x}y'' + \left(\frac{1-4p^2\gamma^2 + 3\alpha(\alpha-1)}{x^2} + 4\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2}\right)y'$$

$$+ \left[\frac{\alpha(4p^2\gamma^2 - \alpha^2)}{x^3} + 4\beta^2\gamma^2(\gamma - \alpha)x^{2\gamma-3}\right]y = 0,$$

$$y = x^\alpha \{A[J_p(\beta x^\gamma)]^2 + BJ_p(\beta x^\gamma)N_p(\beta x^\gamma) + C[N_p(\beta x^\gamma)]^2\}$$

$$y''' + x^{2\gamma-2}y' + (\gamma-1)x^{2\gamma-3}y = 0,$$

$$y = x \left\{ A \left[ J_{\frac{1}{2\gamma}} \left( \frac{x^\gamma}{2\gamma} \right) \right]^2 + B J_{\frac{1}{2\gamma}} \left( \frac{x^\gamma}{2\gamma} \right) N_{\frac{1}{2\gamma}} \left( \frac{x^\gamma}{2\gamma} \right) + C \left[ N_{\frac{1}{2\gamma}} \left( \frac{x^\gamma}{2\gamma} \right) \right]^2 \right\}.$$

### c) Gleichungen vierter Ordnung.

$$y^{IV} + \frac{4-2p}{x}y''' + \frac{(p-1)(p-2)}{x^2}y'' - \frac{b^2}{16x^3}y = 0,$$

$$y = x^{\frac{p}{2}} [Z_p(\sqrt{bx}) + \bar{Z}_p(\sqrt{-bx})]$$

$$y^{IV} + \frac{4p-2}{px}y''' + \frac{(1-p)(1-2p)}{p^2x^2}y'' - \frac{b^2}{16p^2}x^{\frac{2}{p}-4}y = 0,$$

$$y = \sqrt{x} \left[ Z_p \left( \sqrt{bx^{\frac{1}{p}}} \right) + \bar{Z}_p \left( \sqrt{-bx^{\frac{1}{p}}} \right) \right]$$

$$y^{IV} + \frac{6}{x}y'' + \left(4 + \frac{7-2p^2-2q^2}{x^2}\right)y'' + \left(\frac{16}{x} + \frac{1-2p^2-2q^2}{x^3}\right)y'$$

$$+ \left[\frac{8}{x^2} + \frac{(p^2-q^2)^2}{x^4}\right]y = 0,$$

$$y = AJ_p(x)J_q(x) + BJ_p(x)N_q(x) + CN_p(x)J_q(x) + DN_p(x)N_q(x).$$



14. Integraldarstellungen.

Im folgenden sei  $n$  eine ganze,  $p + \frac{1}{2}$  eine beliebige positive reelle Zahl;  $w = u + iv$ ,  $\omega = \varphi + i\psi$ ,  $z = re^{i\vartheta} = x + iy$  seien komplexe Veränderliche, und  $\eta$  sei ein beliebiger Winkel zwischen  $-\vartheta$  und  $\pi - \vartheta$ . Zur Abkürzung werde noch der Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(\frac{1}{2}z)^p}{\Gamma(p - \frac{1}{2})} = \overline{H}$$

gesetzt.

a) Sommerfelds Integral. (Math. Ann. 47, 335, 1896.)

$$Z_p(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{iz \cos \omega} e^{ip(\omega - \frac{\pi}{2})} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\beta - \frac{\pi}{2}} e^{-iz \sin \omega} e^{ip\omega} d\omega.$$

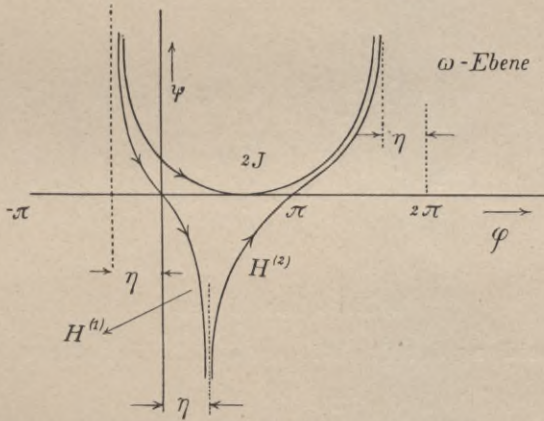


Fig. 51.

Integrationsweg (vgl. Fig. 51)

von $\alpha =$	$-\eta + i\infty$	$\eta - i\infty$	$-\eta + i\infty$
etwa über	0	$\pi$	$\pi - \eta$
nach $\beta =$	$\eta - i\infty$	$2\pi - \eta + i\infty$	$2\pi - \eta + i\infty$
ergibt $Z_p(z) =$	$H_p^{(1)}(z)$	$H_p^{(2)}(z)$	$2J_p(z)$

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi} e^{in\varphi} d\varphi.$$

Hierin sind die folgenden älteren Darstellungen als Spezialfälle enthalten:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi \quad (\text{Hansen})$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi \quad (\text{Bessel})$$

$$J_{2n}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \varphi) \cos(2n\varphi) d\varphi$$

$$= (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos \varphi) \cos(2n\varphi) d\varphi$$

$$J_{2n+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \varphi) \sin(2n+1)\varphi d\varphi$$

$$= (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \cos \varphi) \cos(2n+1)\varphi d\varphi$$

$$H_p^{(2)}(z) = i^{p+1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iz \cosh \psi} \cosh p\psi d\psi, \quad y < 0 \quad (\text{Heine}).$$

### b) Besselsche Form.

a) Unterscheidung der Funktionen durch die Integrationswege.

$$Z_p(z) = \int_a^b e^{izw} (1-w^2)^{p-\frac{1}{2}} dw.$$

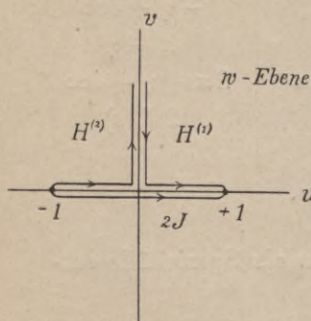


Fig. 52.

Integrationsweg bei positivem  $x$  (vgl. Fig. 52)

von $a =$	- 1	+ $i\infty$	- 1
etwa über	0	0	0
nach $b =$	+ $i\infty$	+ 1	+ 1
ergibt $Z_p(z) =$	$H_p^{(2)}(z)$	$H_p^{(1)}(z)$	$2J_p(z)$

$$J_p(z) = \int_0^1 \cos zu (1-u^2)^{p-\frac{1}{2}} du.$$

Die Substitution  $w = \cos \omega$  liefert

$$Z_p(z) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{iz \cos \omega} \sin^{2p} \omega \, d\omega.$$

Integrationsweg (vgl. Fig. 53)

von $\alpha =$	0	$\eta - i\infty$	0
etwa über	$\eta$	$\eta$	$\pi - \eta$
nach $\beta =$	$\eta - i\infty$	$\pi$	$\pi$
ergibt $Z_p(z) =$	$H_p^{(1)}(z)$	$H_p^{(2)}(z)$	$2J_p(z)$

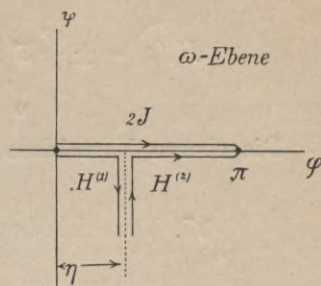


Fig. 53.

$$J_p(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2p} \varphi \, d\varphi$$

$$N_p(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \varphi) \cos^{2p} \varphi \, d\varphi - \int_0^{\infty} e^{-z \sin \psi} \cos^{2p} \psi \, d\psi.$$

$\beta$ ) Unterscheidung der Funktionen durch die Integranden.

Die Substitutionen  $w = ikt + 1$  in dem Integral für  $H^{(1)}$  und  $w = ikt - 1$  in dem Integral für  $H^{(2)}$  liefern die Hankelschen Integrale (Math. Ann. 1, 491, 1869)

$$H_p(z) = k^{2p} \int_0^{\infty} e^{\pm i \left( z - \frac{2p+1}{4} \pi \right)} e^{-kzt} \left( \frac{2}{k} t \pm it^2 \right)^{p-\frac{1}{2}} dt,$$

wo die oberen Vorzeichen für  $H^{(1)}$ , die unteren für  $H^{(2)}$  gelten. Am einfachsten setzt man  $k = 1$ .

Die Substitutionen  $k = 2$  und  $t = \cotg \varphi$  führen zu den Schafheitlinschen Integralen:

$$+ J_p(z) = 4^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-\frac{1}{2}} \varphi \sin \left( z - \frac{2p-1}{2} \varphi \right)}{\sin^{2p+1} \varphi} e^{-2z \cotg \varphi} \, d\varphi$$

$$- N_p(z) = 4^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-\frac{1}{2}} \varphi \cos \left( z - \frac{2p-1}{2} \varphi \right)}{\sin^{2p+1} \varphi} e^{-2z \cotg \varphi} \, d\varphi$$

$$H_p(z) = \pm \frac{4^p}{i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-\frac{1}{2}} \varphi e^{\pm i \left( z - \frac{2p-1}{2} \varphi \right)}}{\sin^{2p+1} \varphi} e^{-2z \cot \varphi} d\varphi.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für  $H^{(1)}$ , die unteren für  $H^{(2)}$ .

### 15. Verschiedene Bezeichnungen der Funktionen zweiter Art.

Als „Zylinderfunktionen zweiter Art“ findet man in der Literatur vier wesentlich (d. h. nicht nur durch einen konstanten Faktor) verschiedene Funktionen bezeichnet, zwei reelle und zwei komplexe, nämlich, wenn  $A$  jeden beliebigen konstanten Faktor bedeutet<sup>1)</sup>:

$$Z_1 = A(X + J \ln x) = AY$$

$$Z_2 = A \left( X + J \ln \frac{\gamma x}{2} \right) = A \frac{\pi}{2} N$$

$$Z_3 = A \left( X + J \ln \frac{\gamma x}{2i} \right) = -A \frac{i\pi}{2} H^{(1)}$$

$$Z_4 = A \left( X + J \ln \frac{i\gamma x}{2} \right) = A \frac{i\pi}{2} H^{(2)}.$$

Bei der Darstellung durch eine steigende Potenzreihe ist in allen diesen Funktionen  $Z_1$  oder  $Y$  als Bestandteil enthalten.  $Z_2$  läßt sich (wie  $J$ ) durch fallende Potenzreihen und Kreisfunktionen asymptotisch darstellen.  $Z_3$  verschwindet im Unendlichen der positiv-imaginären Halbebene,  $Z_4$  im Unendlichen der negativ-imaginären Halbebene. Alle diese Funktionen lassen sich in den Formen

$$Z = A(Y + aJ) = B(N + bJ) = C(H^{(1)} + cJ) = D(H^{(2)} + dJ)$$

darstellen. Zwischen den Konstanten bestehen die Beziehungen

$$\frac{2}{\pi} \left( a + \ln \frac{2}{\gamma} \right) = b = -i(c+1) = i(d+1),$$

$$\frac{\pi}{2} A = B = iC = -iD.$$

1) Die Bedeutung von  $X$  erkennt man aus der ersten Formel auf Seite 94.

Die folgende Tafel enthält die Werte dieser Konstanten für einige Funktionen, die sich in der Literatur finden:

Autor	Sym- bol	$A$	$a$	$B$	$b$	$C$	$c$	$D$	$d$
Byerly . . . . .	$K$	} 1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma}$	$-\frac{i\pi}{2}$	$\frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma} - 1$	$\frac{i\pi}{2}$	$-\frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma} - 1$
Gray u. Mathews	$Y$								
Neumann, C. . .	$Y$								
Smith, B. A. . .	$Y$								
Aldis, St. . . . .	$G$	-1	$-\ln \frac{2}{\gamma}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{i\pi}{2}$	-1	$-\frac{i\pi}{2}$	-1
Graf u. Gubler .	} $K$	$\frac{2}{\pi}$	"	1	0	$-i$	-1	$i$	-1
Kalähne . . . . .									
Gray u. Mathews	$T$	$\frac{2}{\pi}$	"	1	0	$-i$	-1	$i$	-1
Hankel . . . . .	$Y$	2	"	$\pi$	0	$-i\pi$	-1	$i\pi$	-1
Heine . . . . .	$K$	-1	"	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{i\pi}{2}$	-1	$-\frac{i\pi}{2}$	-1
Lommel <sup>1)</sup> . . . .	} $Y$	$\frac{2}{\pi}$	"	1	0	$-i$	-1	$i$	-1
Nielsen . . . . .									
Schafheitlin . . .	$Y$	$-\frac{2}{\pi}$	"	-1	0	$i$	-1	$-i$	-1
Schläfli . . . . .	$K$	1	"	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{i\pi}{2}$	-1	$\frac{i\pi}{2}$	-1
Smith, B. A. . .	$K$	-1	"	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{i\pi}{2}$	-1	$-\frac{i\pi}{2}$	-1
Weber, H. . . . .	$K$	$-\frac{2}{\pi}$	"	-1	0	$i$	-1	$-i$	-1
Aldis . . . . .	$K$	} -1	$-\ln \frac{2i}{\gamma}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-i$	$\frac{i\pi}{2}$	0	$-\frac{i\pi}{2}$	$-2$
Gray u. Mathews	$G$								
Heine . . . . .	$K$								
Sommerfeld . . .	$K$								
Nielsen . . . . .	$H_1$	$\frac{2i}{\pi}$	$-\ln \frac{2i}{\gamma}$	$i$	$-i$	1	0	-1	-2
v. Ignatowsky . .	$Q$	1	$-\ln \frac{2}{\gamma i}$	$\frac{\pi}{2}$	$i$	$-\frac{i\pi}{2}$	-2	$\frac{i\pi}{2}$	0
Lamb . . . . .	$D$	-1	"	$-\frac{\pi}{2}$	$i$	$\frac{i\pi}{2}$	-2	$-\frac{i\pi}{2}$	0
Nielsen . . . . .	$H_2$	$\frac{2}{i\pi}$	"	$-i$	$i$	-1	-2	1	0

1) Vgl. Math. Ann. 4, 107. In seinen „Studien über die Besselschen Funktionen“ Leipzig 1868, B. G. Teubner, hatte Lommel eine Definition für  $Y$  gegeben, die er selber nachher zurückgezogen hat.

Um der Vieldeutigkeit der Symbole  $Y$  und  $K$  zu entgehen, ist für das  $K$  von Graf und Gubler oder das  $T$  von Gray und Mathews oder das  $Y$  von Nielsen in diesem Buche das Symbol  $N$  gewählt worden (Neumannsche Zylinderfunktion). Sie ist entgegengesetzt gleich dem  $Y$  von Schafheitlin oder dem  $K$  von Weber.

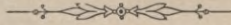
Für die beiden komplexen Funktionen, die für die Anwendungen am wichtigsten sind, ist hier nach Niensens Vorschlag die Bezeichnung „Funktionen dritter Art“ und das Symbol  $H$  gewählt worden (Hankelsche Zylinderfunktion).



## Autorenregister.

- Aichi, K., 142  
Aldis, St., 104, 105, 173
- Bertrand, J.**, 52  
Bessel, F. W., 104  
Bourget, J., 105  
Bruns, H., 31, 32  
Burkhardt, H., 52  
Burrau, C., 14  
Byerly, W. E., 79, 81, 173
- Cayley, A.**, 104, 105  
Cullis, C. E., 43  
Czuber, E., 31
- Debye, P.**, 102
- Emde, F.**, 29  
Euler, L., 2
- Farr, C.**, 82  
Föppl, A., 3  
Forsyth, A. R., 43  
Forti, A., 14
- Gauß, C. F.**, 26, 29  
Gilbert, Ph., 24  
Glaisher, J. W. L., 20, 81, 104, 105  
Graf, J. H., u. Gubler, E., 173, 174  
Gray, A., u. Mathews, G. B., 90, 105, 173, 174  
Greenhill, A. G., 52, 104, 105, 106  
Gruner, P., 6  
Gudermann, Ch., 14, 46
- Hadcock, A. G.**, 52  
Halphen, G. H., 52  
Hankel, H., 93, 94, 172, 173  
Hansen, P. A., 170
- Heine, E., 79, 93, 170, 173  
Hicks, M., 104, 105  
Holland, C. E., 81  
Houël, J., 6, 7, 14, 43, 52
- v. Ignatowsky, W., 24, 173
- Jacobi, C. G. J.**, 46, 52  
Jahnke u. Emde, 104, 105  
James, P. R., 81
- Kalähne, A.**, 104, 105, 164, 173  
Kämpfe, B., 32  
Kelvin, 104, 105, 144, 145  
Kirchhoff, G., 105
- Lamb, G. G.**, 81, 173  
Lambert, J. H., 14  
Landau, E., 29  
Lee, A., 43  
Legendre, A. M., 26, 29, 46, 52, 80  
Lévy, L., 52  
Ligowski, W., 7, 14  
Lodge, A., 104, 105  
v. Lommel, E., 2, 23, 104, 173
- Macleán, M.**, 105, 145  
Maxwell, J. C., 77  
Meissel, E., 104, 105  
Meyer, A., 32
- Neumann, C.**, 93, 173  
Nielsen, N., 19, 26, 90, 173, 174  
Niven, W. D., 77
- Pascal, E.**, 52  
Pearson, K., 43  
Peirce, B. O., 104

- Perry, J., 81  
Prandtl, L., 104  
Price, B., 104, 105
- Rayleigh, 3, 77, 104, 105  
Riemann-Weber, 100, 123
- Schafheitlin, P., 20, 90, 98, 171, 173, 174  
Schläfli, L., 93, 173  
Schulze, F. A., 105  
Smith, B. A., 104, 173  
Sommerfeld, A., 100, 144, 169, 173  
Strecker, K., 4
- Thomae, J., 46  
Thomson, J. J., 142  
Thomson, W., 104, 105, 144, 145
- Weber, H., 173  
Weierstraß, K., 49, 72  
Weierstraß-Schwarz, 52  
Wilson, R. W., 104  
Winkelmann, A., 24  
Witt, G., 52
- Yule, G. U., 43
- Zenneck, J., 105, 145









BIURO ARCHITEKTUR  
PRZY AKADEMII GÓRNICZEJ  
W KRAKOWIE























S-96



POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-351280

Kdn 452/57

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294509