# SSERBAU
DEN
# BINNENWASSERSTRASSEN

EIN LEHR- UND HANDBUCH FÜR
STROMAUFSICHTSBEAMTE DER PREUSSISCHEN
WASSERBAUVERWALTUNG

---

IM AUFTRAGE DES MINISTERIUMS DER ÖFFENTLICHEN
ARBEITEN HERAUSGEGEBEN

VON

MYLIUS UND ISPHORDING
REGIERUNGS- UND BAURÄTE

---

**ANHANG**

LEITFADEN FÜR DAS RECHNEN, FÜR FLÄCHEN- UND
KÖRPERLEHRE



BERLIN
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
1904

# DER WASSERBAU

AN DEN

# BINNENWASSERSTRASSEN

EIN LEHR- UND HANDBUCH FÜR STROMAUFSICHTSBEAMTE DER PREUSSISCHEN WASSERBAUVERWALTUNG

IM AUFTRAGE DES MINISTERIUMS DER ÖFFENTLICHEN ARBEITEN HERAUSGEGEBEN

VON

MYLIUS UND ISPHORDING

REGIERUNGS- UND BAURÄTE

## ANHANG

LEITFADEN FÜR DAS RECHNEN, FÜR FLÄCHEN- UND KÖRPERLEHRE



BERLIN

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

1904

# Vorwort zum Anhang.

Das Lehr- und Handbuch »Der Wasserbau an den Binnenwasserstraßen« umfaßt zwei Hauptteile und den Anhang.

Der I. Teil enthält: Verwaltungs- und Gesetzeskunde,
der II. Teil: Baukunde;
der Anhang ist ein Leitfaden für das Rechnen und für die Flächen- und Körperlehre.

Das Buch ist hauptsächlich für die Ausbildung der Stromaufsichtsbeamten, besonders der Wasserbauwarte bestimmt und soll als Vorbereitungsmittel für die Wasserbauwartprüfung dienen.

Bei der Bearbeitung wurde möglichst dahin gestrebt, den Stoff nur auf das wirklich Verwendbare zu beschränken.

Die in dem vorliegenden Anhange behandelten Sätze, Formeln und Aufgaben enthalten im wesentlichen die Grundlage dessen, was im Dienstbereich der Stromaufsichtsbeamten beim Rechnen, Zeichnen, Veranschlagen und Messen vorkommen kann, bieten aber auch eine gewisse Abrundung des Stoffes, wie sie zum allgemeinen Verständnis erforderlich erscheint. Mathematische Beweise sind im allgemeinen vermieden worden. Es kommt für die Ausbildung der mittleren technischen Beamten weniger darauf an, daß die Sätze und Formeln bewiesen, als vielmehr, daß sie einleuchtend gemacht werden. Hierzu sind besonders Beispiele und Aufgaben geeignet; auf diese ist daher besonderer Wert gelegt worden.

Liegnitz und Aachen, im August 1904.

Die Verfasser.

# Inhaltsverzeichnis des Anhanges.

## A. Das Rechnen.


Seite

1. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen . . . . . . . . . . . 1
2. Bezeichnungen und Erläuterungen für das Rechnen . . . . . . . . . 2
3. Die vier Grundarten:
   a) Addieren und Subtrahieren . . . . . . . . . . . . . . 3
   b) Multiplizieren, Potenzieren, Wurzelziehen . . . . . . . . . 3
   c) Dividieren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
4. Gewöhnliche Brüche . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
5. Dezimalbrüche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
6. Ausziehen der Quadratwurzel . . . . . . . . . . . . . . . 9
7. Gleichungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
8. Proportionslehre, Regeldetri . . . . . . . . . . . . . . . 12


## B. Flächenlehre.


a) Von den geraden Linien und den Winkeln . . . . . . . . . . . 17
b) Von den ebenen Figuren im allgemeinen . . . . . . . . . . . 19
c) Vom Dreieck . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
   Einteilung der Dreiecke . . . . . . . . . . . . . . . 20
   Von der Übereinstimmung der Dreiecke . . . . . . . . . . 21
   Das gleichschenklige Dreieck . . . . . . . . . . . . . 22
   Das rechtwinklige Dreieck . . . . . . . . . . . . . . 22
   Von der Ähnlichkeit der Dreiecke . . . . . . . . . . . 24
d) Von den Vierecken . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
   Das Parallelogramm . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
   Das Trapez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
e) Von der Gleichheit und dem Flächeninhalt geradliniger Figuren . . . . 28
f) Der Kreis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
   Einteilung des Kreises . . . . . . . . . . . . . . . 31
   Von der Sehne . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
   Von der Tangente . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
g) Von den regelmäßigen Vielecken . . . . . . . . . . . . . 33
h) Von der Ausmessung des Kreises . . . . . . . . . . . . . 35
i) Grundzeichenaufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

## C. Körperlehre.

a) Die hauptsächlichsten Körper: Seite
1. Der Würfel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
2. Die Kantensäule (Prisma) . . . . . . . . . . . . . . 41
3. Die Pyramide (Spitzsäule) . . . . . . . . . . . . . . 42
4. Die abgestumpfte Pyramide . . . . . . . . . . . . . . 43
5. Der Zylinder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
6. Der Kegel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
7. Der abgestumpfte Kegel . . . . . . . . . . . . . . . 45
8. Die Kugel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
9. Der Kugelabschnitt . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
b) Übungsbeispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

# A. Das Rechnen.

## 1. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen.

### Längenmaße.

km = Kilometer, m = Meter, dm = Dezimeter, cm = Zentimeter, mm = Millimeter;

1 km = 1000 m, 1 m = 10 dm, 1 dm = 10 cm, 1 cm = 10 mm

(1 preußischer Fuß = 0,314 m, 1 Zoll = $^1/_{12}$ Fuß = 0,026 m, 1 Rute = 3,766 m; 1 deutsche Meile = 7,5 km, 1 Seemeile [Knoten] = 1,852 km).

### Flächenmaße.

qkm = Quadratkilometer, qm = Quadratmeter;

ha = Hektar, a = Ar;

1 qkm = 100 ha, 1 ha = 100 a, 1 a = 100 qm, 1 qm = 10 000 qcm, 1 qcm = 100 qmm

(1 Quadratrute = 14,18 qm oder 0,1418 a, 1 Morgen = 25,532 a, 1 ha = 3,92 Morgen).

### Körper- und Hohlmaße.

cbm = Kubikmeter, cdm = Kubikdezimeter, ccm = Kubikzentimeter, cmm = Kubikmillimeter;

1 cbm = 1000 cdm = 1 000 000 ccm.

l = Liter, hl = Hektoliter = 100 l;

1 l = 1 cdm = 1000 ccm = $^1/_{1000}$ cbm.

### Gewichte.

t = Tonne, kg = Kilogramm, g = Gramm, mg = Milligramm;

1 t = 1000 Kilogramm, 1 kg = 1000 g, 1 g = 1000 mg.

Anm. 1 kg = dem Gewichte von 1 l Wasser. (1 t = 20 Zentner, 1 Zentner = 50 kg = 100 ℔ [Pfund], 1 ℔ = 500 g).

**Münzen.**

$\mathcal{M}$ = Mark, 1 $\mathcal{M}$ = 100 Pf.

Die wichtigsten ausländischen Münzen sind folgende:

Österreich: 1 Krone (= $^1/_2$ Gulden) = 100 Heller = 0,85 $\mathcal{M}$ (1 Heller = $^1/_2$ Kreuzer).

Holland: 1 Gulden = 100 Zent = 1,70 $\mathcal{M}$.

Belgien, Frankreich, Luxemburg, Schweiz, Italien: 1 Franc = 100 Centimes = 0,80 $\mathcal{M}$.

Dänemark, Schweden und Norwegen: 1 Krone = 100 Öre = 1,125 $\mathcal{M}$.

England: 1 Pfund Sterling = 20 Schilling (je zu 12 Pence) = 20,40 $\mathcal{M}$.

## 2. Bezeichnungen und Erläuterungen für das Rechnen.

Die vier Rechnungsarten oder Grundarten bilden die Grundlage für das gesamte Rechnen. Sie werden gekennzeichnet durch folgende Rechnungszeichen:

$+$ Addieren (Zuzählen), z. B. $a + b$, $3 + 2$;

$-$ Subtrahieren (Abziehen), z. B. $a - b$, $3 - 2$;

$\cdot$ Multiplizieren (Vervielfachen), z. B. $a \cdot b$, $3 \cdot 2$;

$:$ Dividieren (Teilen), z. B. $a : b$ oder $\frac{a}{b}$, $3 : 2$ oder $\frac{3}{2}$.

Anm. Die Zahlen können in der Rechnung auch durch Buchstaben ersetzt werden. Dies ist besonders zweckmäßig, wenn durch die Rechnung allgemeine Regeln ausgedrückt werden sollen. In nachstehendem wird öfters davon Gebrauch gemacht werden. Rechnungen, welche unter Verwendung von Buchstaben richtig durchgeführt sind, sind auch richtig, wenn man für jeden Buchstaben eine beliebige Zahl einsetzt.

Die einzelnen Zahlen oder Buchstaben, welche miteinander durch Rechnungszeichen verbunden werden, nennt man Größen (Zahlengrößen, Buchstabengrößen).

Eine Folge von Größen, welche miteinander durch Rechnungszeichen verbunden sind, nennt man einen Ausdruck.

Soll ein Rechnungszeichen sich auf mehrere Größen beziehen, so werden diese Größen hinter dem Rechnungszeichen eingeklammert, z. B.

$a - (b + c)$ bedeutet, daß jede der Größen $b$ und $c$ (oder, was dasselbe ist, $b$ und $c$ zusammen) von $a$ abgezogen werden soll.

Man kann dafür auch schreiben $a - b - c$.

$a \cdot (b + c - d)$ bedeutet, daß jede der Größen in der Klammer mit $a$ zu multiplizieren ist. Man kann also auch dafür schreiben $a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$.

Das Gleichheitszeichen = wird angewendet, wenn ausgedrückt werden soll, daß eine Größe einer anderen gleich oder ein Ausdruck einer Größe oder einem anderen Ausdruck gleich ist, z. B.

$$a = 13$$
$$b\,(5 + 8) = 26$$
$$9\,(7 + 4 - 2) = 9 \cdot 9.$$

Eine solche Gleichstellung nennt man eine Gleichung. Die linke Seite einer Gleichung ist von der rechten durch das Gleichheitszeichen getrennt.

$>$ bedeutet größer, z. B. $a > b$ ($a$ größer als $b$);

$<$ » kleiner, z. B. $a < b$ ($a$ kleiner als $b$).

Anm. In der Buchstabenrechnung wird der Punkt als Zeichen für die Multiplikation bisweilen fortgelassen, besonders vor eingeklammerten Größen. Statt $a \cdot (b + c)$ schreibt man also $a\,(b + c)$, statt $a \cdot b$ öfter auch $ab$.

## 3. Die vier Grundarten.

**a) Addieren und Subtrahieren.** Man unterscheidet positive oder vorhandene, und negative oder fehlende Größen; die ersteren haben das Vorzeichen $+$, die letzteren $-$. Ist die erste Größe eines Ausdruckes positiv, so wird das $+$Zeichen meistens fortgelassen, z. B. $a + b - c$.

Die einzelnen zu addierenden Größen nennt man Summanden, die Ausrechnung die Summe.

Die abzuziehende Größe nennt man den Subtrahend, die Ausrechnung den Unterschied (Differenz).

Die Größe, von welcher abgezogen wird, nennt man den Minuend.

Das Subtrahieren einer Größe ist gleichbedeutend mit dem Addieren derselben nach Umkehrung des Vorzeichens, z. B.:

$$45 - (3 - 4 + 5) = 45 - 3 + 4 - 5 = 41.$$

Steht also das $-$ Zeichen vor einem in Klammern gesetzten mehrgliedrigen Ausdrucke, so sind, wenn man die Klammer fortläßt, alle darin stehenden Vorzeichen umzukehren; es ist also allgemein:

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

**b) Multiplizieren, Potenzieren, Wurzelziehen.** Die einzelnen zu multiplizierenden Größen heißen Faktoren, die ausgerechnete Größe nennt man das Produkt. Wenn $a \cdot b = x$, dann sind $a$ und $b$ die Faktoren, $x$ ist das Produkt von $a$ und $b$. Ein Produkt kann mehr als zwei Faktoren haben, z. B.

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = x \text{ oder } 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

Die Reihenfolge der Faktoren in einem Produkt ist gleichgültig,[1]) z. B.

$$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c = a \cdot c \cdot b$$
$$a \cdot b^2 = b \cdot a \cdot b \cdot$$

Gleichnamige Faktoren in einem mehrgliedrigen Ausdruck können vor die Klammer gestellt werden, z. B.

$$a \cdot a \cdot b + 3 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \cdot b = ab\,(a + 3 - 2\,b).$$

---

[1]) Wegen der Reihenfolge der Faktoren bei Massenberechnungen siehe Abschn. 33 im II. Teil (Baukunde).

Ein Produkt multipliziert man mit einer Zahl, indem man einen Faktor mit dieser multipliziert, z. B.

$$(39 \cdot 15) \cdot 4 = 39 \cdot 60 = 2340.$$

Die Faktoren können auch alle einander gleich sein, z. B.

$a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a \cdot a$ usw.

$a \cdot a$ schreibt man $a^2$, sprich $a$ Quadrat;

$a \cdot a \cdot a$ » » $a^3$, » $a$ Kubus oder $a$ zur dritten (Potenz);

$a \cdot a \cdot a \cdot a$ » » $a^4$, » $a$ zur vierten;

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ » » $a^5$, » $a$ zur fünften usw.;

$a^2$ ist $a$ zur 2ten Potenz (zum Quadrat) erhoben,

$a^3$ » » » 3ten » erhoben,

$a^4$ » » » 4ten » » usw.

Die über die Linie gestellte kleine Zahl, welche die Anzahl der gleichen Faktoren oder die Potenz angibt, nennt man den Exponenten, die untere Zahl nennt man die Grundzahl.

Wenn der Exponent = 2 ist, nennt man das Produkt das Quadrat der Grundzahl; wenn der Exponent = 3 ist, nennt man das Produkt die dritte Potenz usw.; also

$a^2$ ist das Quadrat von $a$,

$a^3$ » die dritte Potenz von $a$ usw.

Jede Zahlengröße kann man als die Potenz einer bestimmten Grundzahl ansehen, welche ermittelt werden kann, z. B.

wenn $4225 = x^2$, so ist die Grundzahl $x = 65$; denn $65 \cdot 65 = 4225$;

» $216 = y^3$, » » » » $y = 6$; » $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Die Ermittlung der Grundzahl geschieht nicht durch Probieren, sondern, indem man aus der gegebenen Zahl die »Wurzel« zieht.

Man sagt dann z. B. $x$ ist = Quadratwurzel aus 4225

und schreibt dafür $x = \sqrt[2]{4225}$ oder $\sqrt{4225}$;

ferner: $y$ ist = Kubikwurzel aus 216

und schreibt $y = \sqrt[3]{216}$.

$\sqrt[2]{4225}$ oder einfacher $\sqrt{4225}$ heißt demnach: ziehe die Quadratwurzel aus 4225;

$\sqrt[3]{216}$ heißt: ziehe die Kubikwurzel aus 216.

Das Ausziehen der Quadratwurzel, das recht häufig vorkommt, ist nicht schwer und wird im folgenden gezeigt werden. Das Ausziehen der Kubikwurzel kommt seltener vor und ist umständlicher. Es wird hier davon abgesehen werden. Vorkommendenfalls sind gedruckte Tabellen zu benutzen.

**c) Dividieren.** Wird eine Größe durch eine andere geteilt, (dividiert), z. B. $a : b = c$ oder $\frac{a}{b} = c$, so nennt man $b$ den Divisor (Teiler) und $a$ den Dividend, die Ausrechnung $c$ den Quotienten.

Schreibt man die Division in der Form $\frac{a}{b}$, so nennt man diesen Ausdruck einen Bruch. Die Größe über dem Bruchstrich heißt der Zähler, die Größe unter dem Strich der Nenner. Die Regeln für die Division umfassen daher gleichzeitig die Regeln für die Bruchrechnung.

Anm. Dividiert man eine Summe von Zahlen durch ihre Anzahl, so erhält man den Durchschnitt oder das arithmetische Mittel dieser Zahlen.

Beispiel. Berechne aus einer Pegeltabelle für den Monat August den durchschnittlichen (mittleren) Wasserstand.

Aufl. Addiere die täglichen Wasserstandszahlen und dividiere die Summe durch 31.

Man unterscheidet gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche.

## 4. Gewöhnliche Brüche.

$\frac{3}{5}$ ist ein echter Bruch, denn er ist kleiner als 1, oder der Zähler ist kleiner als der Nenner;

$\frac{5}{3}$ ist ein unechter Bruch, denn er ist größer als 1, oder der Zähler ist größer als der Nenner;

$\frac{3}{\frac{5}{4}}$ ist ein Doppelbruch, denn der Nenner ist selbst ein Bruch.

Dividiert man den Zähler eines Bruches durch den Nenner und erhält dann eine ganze Zahl, z. B. $\frac{15}{3} = 5$, so nennt man den Bruch einen uneigentlichen Bruch.

Geht der Nenner, in den Zähler dividiert, nicht auf, z. B. $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$, so ist der Bruch ein eigentlicher Bruch.

Ist der Nenner $= 1$, so kann er beliebig fortgelassen oder hinzugefügt werden, z. B. $\frac{5}{1} = 5$.

Eine Summe dividiert man, indem man ihre Summanden einzeln dividiert und die entstehenden Einzelbrüche addiert, z. B.

$$(3 + 5 + 1) : 4 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Eine Differenz dividiert man, indem man Minuend und Subtrahend einzeln dividiert und die entstehenden Einzelbrüche voneinander abzieht, z. B.

$$(5 - 3) : 4 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}.$$

Brüche, welche denselben Nenner haben, nennt man gleichnamige Brüche; Brüche, welche verschiedene Nenner haben, ungleichnamige Brüche.

Gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert man, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert.

Ein Produkt dividiert man, indem man einen Faktor dividiert, z. B. $4 \cdot 5 \cdot 6$ oder 120 durch 3 gibt $4 \cdot 5 \cdot \frac{6}{3} = 40 = \frac{120}{3}$.

Mit einem Bruche multipliziert man, indem man mit seinem Zähler multipliziert und mit seinem Nenner dividiert, z. B.

$$6 \text{ mal } \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{5} = \frac{24}{5}.$$

Einen Bruch dividiert man durch eine ganze Zahl, indem man seinen Nenner mit dieser Zahl multipliziert, z. B.

$$\frac{4}{5} \text{ durch } 6 = \frac{4}{5 \cdot 6} = \frac{4}{30}.$$

Der Wert eines Bruches bleibt derselbe, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplziiert oder dividiert, z. B.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6}; \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot \frac{1}{6}}{5 \cdot \frac{1}{6}}.$$

Das Multiplizieren von Brüchen im Zähler und Nenner mit derselben Zahl dient dazu, ungleichnamige Brüche gleichnamig zu machen, d. h. sie auf einen gemeinsamen Nenner (Generalnenner) zu bringen, z. B.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 4}$$
$$= \frac{12}{60} + \frac{45}{60} + \frac{40}{60} = \frac{97}{60}.$$

Brüche bringt man auf einen gemeinsamen Nenner, indem man Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Produkt aus den anderen Nennern multipliziert.

Brüche addiert oder subtrahiert man, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner bringt.

Beide Glieder eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren, heißt den Bruch heben, z. B.

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \cdot \frac{1}{2}}{30 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{15}.$$

Brüche multipliziert man miteinander, indem man ihre Zähler, ebenso ihre Nenner miteinander multipliziert, z. B.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20}.$$

Mit einem Bruche dividiert man, indem man mit dem umgekehrten Bruche multipliziert, z. B.

$$7 : \frac{8}{15} = \frac{7 \cdot 15}{8} = \frac{105}{8}$$

$$\frac{3}{6} : \frac{8}{15} = \frac{3 \cdot 15}{6 \cdot 8} = \frac{45}{48}.$$

Beispiele. Was gibt $\frac{3}{5} + \frac{14}{2} + \frac{6}{7} + \frac{9}{20}$

» » $\frac{14}{3} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{7}{6}$

» » $\frac{54}{14} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$

» » $28 : \frac{24}{25}$

» » $\frac{7}{12} : \frac{8}{9}$?

Für $\frac{4}{\frac{5}{6}}$ denke $4 : \frac{5}{6}$ und löse es auf.

» $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}}$ » $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$ » » » ».

## 5. Dezimalbrüche.

Ein Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner 10 oder eine Potenz von 10 ist (also 10, 100, 1000, 10 000 usw.).

Dezimalbrüche schreibt man so, daß der Nenner fortgelassen wird; im Zähler werden dagegen soviele Ziffern von rechts nach links durch ein Komma abgeteilt, als der Nenner Nullen haben würde.

$$\frac{1423}{1000} = 1{,}423; \quad \frac{814}{100} = 8{,}14; \quad \frac{814}{10} = 81{,}4.$$

Wenn der Zähler weniger Ziffern als der Nenner hat, der Bruch also ein echter Bruch ist, so müssen im Zähler die fehlenden Ziffern durch vorgesetzte Nullen ergänzt werden, z. B.

$$\frac{53}{10\,000} = \frac{00053}{10\,000} = 0{,}0053.$$

Die Ziffern vor dem Komma sind Ganze, die Ziffern hinter dem Komma sind Bruchteile oder Dezimalstellen. Es gibt so die erste, zweite, dritte usw. Dezimalstelle.

$$0{,}5 \text{ ist} = \frac{5}{10}; \quad 0{,}06 = \frac{6}{100}; \quad 0{,}003 = \frac{3}{1000}; \quad 3{,}0002 = 3\frac{2}{10\,000}.$$

Auf der rechten Seite des Dezimalbruches können beliebig viele Nullen angehängt oder fortgelassen werden:

$$0{,}65 = 0{,}650 = 0{,}6500, \text{ weil } \frac{65}{100} = \frac{650}{1000} = \frac{6500}{10\,000}.$$

Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividiert und dem Zähler während des Dividierens soviel Nullen anhängt, bis die Division aufgeht, z. B.

$$\frac{21}{60} = \frac{21,0}{60}; \quad 60 \mid \begin{array}{l} 21,00 \\ \underline{180} \\ \;\,300 \\ \;\,\underline{300} \\ \;\,\ldots \end{array} \mid = 0,35; \quad \text{also ist } \frac{21}{60} = 0,35.$$

Meist bleibt aber ein Rest, wieweit man auch die Division fortsetzt; man muß diese dann an einer Stelle abbrechen und sich mit einem Näherungswert begnügen. Die letzte Dezimalstelle rundet man um 1 nach oben ab, wenn die folgende Stelle gleich oder größer als 5 sein würde, z. B.

$$\frac{5}{7} = 7 \mid \begin{array}{r} 5,000000 \\ \underline{49\ldots\ldots} \\ 10\ldots\ldots \\ \underline{7\ldots\ldots} \\ 30\ldots \\ \underline{28\ldots} \\ 20.. \\ \underline{14..} \\ 60. \\ \underline{56.} \\ 40 \\ \underline{35} \end{array} \mid = 0,714286.$$

Will man sich in dem vorstehenden Beispiele mit 3 Dezimalstellen begnügen, so schreibt man 0,714; wenn mit 4 Dezimalstellen, so schreibt man 0,7143. Eine Genauigkeit von drei Dezimalstellen ist im Bauwesen meistens ausreichend.

Dezimalbrüche werden mit 10 multipliziert oder durch 10 dividiert, indem man das Komma um eine Stelle nach rechts oder nach links verschiebt.

$$0,35 \cdot 10 = 3,5; \quad 0,35 : 10 = 0,035.$$

Beim Addieren und Subtrahieren setze die Zahlen so untereinander, daß Komma unter Komma steht.

$$\begin{array}{r} 324,230 \\ 1256,801 \\ 12,300 \\ \hline 1593,331; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 423,352 \\ -\ 12,240 \\ \hline 411,112. \end{array}$$

Der besseren Übersichtlichkeit wegen ist es hierbei zweckmäßig, durch Anhängen von Nullen alle Dezimalbrüche gleichstellig zu machen.

Beim Multiplizieren verfahre man ohne Rücksicht auf das Komma wie bei gewöhnlichen Zahlen. Alsdann setze man in dem Produkte soviele Stellen durch das Komma von rechts nach links ab, als beide Faktoren zusammen Dezimalstellen haben, z. B.

```
4,258 · 0,34
 17032
  12774
 1,44772.
```

Beim Dividieren bringe beide Zahlen durch Anhängen von Nullen auf eine gleich große Anzahl von Dezimalstellen und verfahre wie mit ganzen Zahlen, z. B.

1. $\frac{345,243}{2,41} = \frac{345,243}{2,410} = \frac{345\,243}{2410} = 143,250;$

2. $\frac{254,123}{0,0045} = \frac{254,1230}{0,0045} = \frac{2\,541\,230}{45} = 56\,471,778;$

3. $\frac{0,024}{1,23} = \frac{0,024}{1,230} = \frac{24}{1230} = 0,0195.$

## 6. Ausziehen der Quadratwurzel.

Beispiel 1. Wie groß ist $\sqrt{2948,49}$?

Auflösung. $\sqrt{29|48,|49} = 54,3.$

```
             25
        100 |4 48
            |4 00
               48
               16
       1080 |32 49
            |32 40
                 9
                 9
```

Anleitung zur Auflösung. Teile zunächst die gegebene Zahl vom Komma aus nach links und rechts in Gruppen von je zwei Stellen, suche dann diejenige Zahl, deren Quadrat dem Zahlenwerte der ersten Gruppe gleich oder nur wenig kleiner ist — hier 5 —, schreibe diese Zahl rechts vom = Zeichen. Ziehe das Quadrat dieser Zahl — hier 25 — von der ersten Gruppe ab und schreibe neben den Rest — hier 4 — die beiden Zahlen der folgenden Gruppe. In die so erhaltene Zahl — hier 448 — dividiere mit dem 20fachen des ersten Gliedes der rechten Seite — hier 5 · 20 = 100 —, schreibe den Quotienten — hier 4 — als zweites Glied an die rechte Seite. Von dem Rest — hier 48 — ziehe das Quadrat des zweiten Gliedes der rechten Seite — hier 16 — ab.

Zu dem Rest — hier 32 — schreibe die Zahlen der dritten Gruppe, so erhältst du hier 3~~47~~249. In diese Zahl dividiere mit dem 20fachen der beiden ersten Glieder der rechten Seite — hier 1080 — und schreibe den Quotienten — hier 3 — als drittes Glied an die rechte Seite. Ziehe alsdann von dem Rest — hier 9 — das Quadrat des dritten Gliedes der rechten Seite — hier 9 — ab. Da der Rest 0 ist, so ist das Verfahren beendet. Die Quadratwurzel ist hier 54,3.

Anm. Das Verfahren besteht also abwechelnd in folgendem:

1. Abziehen des Quadrates einer Zahl der rechten Seite und
2. Dividieren mit dem 20fachen Betrage derjenigen Zahlenreihe der rechten Seite, welche mit der vorerwähnten Zahl schließt.

Bei der Division darf der Quotient nur so groß genommen werden, daß das Quadrat der Quotientenzahl von dem Divisionsrest noch abgezogen werden kann.

In den meisten Fällen geht die Rechnung nicht auf; sie ist dann solange fortzuführen, bis die Wurzel eine für die Genauigkeit hinreichende Anzahl Dezimalstellen enthält.

Die ausgerechnete Wurzel enthält soviel Zahlen, als die gegebene Zahl Gruppen enthält. Daraus ergibt sich ohne weiteres die Stellung des Kommas in der Wurzel, falls diese ein Dezimalbruch ist. In der Regel genügt es, die Rechnung bis zu drei Dezimalstellen fortzuführen.

Beispiel 2. $\sqrt{6|42|84} = 253{,}542.$

```
          4
   40 | 2 42
      | 2 00
        42
        25
  500 | 17 84
      | 15 00
         2 84
            9
 5060 | 2 7500
      | 2 5300
          2200
            25
50700 | 217500
      | 202800
         14700
            16
507080 | 1468400
       | 1014160
         453240
```

Beispiel 3. $\sqrt{0{,}03|45|60} = 0{,}1859.$

```
         1
   20 | 2 45
      | 1 60
        85
        64
  360 | 21 60
      | 18 00
         3 60
           25
 3700 | 3 3500
      | 3 3300
          200
```

Beispiel 4. $\sqrt{16|85|99} = 410{,}608.$

```
          16
     80 | 85
        | 80
           5
           1
    820 | 4 99
        |    0
   8200 | 4 9900
        | 4 9200
            700
             36
  82120 | 66400
        |     0
 821200 | 6640000
        | 6569600
```

Anm. Wenn, wie in Beispiel 4, die Division 0 ergibt, schreibt man kürzer:

```
       √168599 = 410,608.
        16
     80 |85
        |80
          5
          1
   8200|0 |499|00
          |492 00
             7 00
               36
  82120|0 |6 6400|00
          |6 5696 00
```

## 7. Gleichungen.

1. Jede Gleichung kann in der Weise verändert werden, daß man auf beiden Seiten dieselbe Größe hinzufügt oder abzieht;

z. B. wenn $a = b$, so ist auch $a + x = b + x$
und $a - x = b - x$.

2. Man kann ferner beide Seiten einer Gleichung mit derselben Größe multiplizieren oder dividieren;

z. B. wenn $a = b$, so ist auch $a \cdot c = b \cdot c$
und $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

3. Man kann eine Größe von einer Seite der Gleichung auf die andere Seite schreiben, wenn man dieser Größe das entgegengesetzte Vorzeichen gibt;

z. B. wenn $a + x = c + d$, so ist $x = c + d - a$;
denn nach 1. ist $a - a + x = c + d - a$,
$a - a$ aber $= 0$.

4. Man kann eine Größe, die Faktor eines Produktes auf der einen Seite der Gleichung ist, auf die andere Seite als Divisor schreiben und umgekehrt;

z. B. wenn $a \cdot x = c \cdot d$, so ist $x = \frac{c \cdot d}{a}$;
denn nach 2. ist $\frac{a \cdot x}{a} = \frac{c \cdot d}{a}$,
$\frac{a}{a}$ ist aber $= 1$.

Von diesen Regeln macht man Gebrauch, wenn eine unbekannte Größe $x$ aus den gegebenen Größen einer Gleichung berechnet werden soll.

Aufgabe. $4x - 18 = \frac{2}{5} \cdot x - 12$.

Aufl. Ordne zunächst die Glieder nach $x$, d. h. bringe $x$ auf die eine Seite:

$$4x - \frac{2}{5}x = 18 - 12 \text{ oder } = 6;$$

dann schaffe die Brüche fort, multipliziere also hier beide Seiten mit 5:

$$4 \cdot 5\,x - 2\,x = 30$$
$$x\,(20 - 2) = 30$$
$$x = \frac{30}{18} = 1{,}667.$$

Beispiel 1. 1 Vormann und 5 Arbeiter haben in 12 Arbeitstagen zusammen 1220 cbm Steine aufgesetzt und erhalten dafür im Stücklohn 15 Pf. je Kubikmeter. Welchen Lohnbetrag hat jede der 6 Personen täglich verdient, wenn der Vormann $^1/_4$ mehr als jeder Arbeiter erhält?

Aufl. Die 6 Personen erhalten zusammen $1220 \cdot 0{,}15 = 183{,}00$ ℳ, mithin täglich $\frac{183{,}0}{12} = 15{,}25$ ℳ; jeder Arbeiter verdient den Lohnbetrag $x$ und der Vormann $1{,}25\,x$. Man erhält demnach die Gleichung:

$$5\,x + 1{,}25\,x = 15{,}25$$
$$x\,(5 + 1{,}25) = 15{,}25$$
$$x = \frac{15{,}25}{6{,}25} = 2{,}44 \text{ ℳ};$$

mithin erhält jeder Arbeiter täglich 2,44 ℳ und der Vormann $1{,}25 \cdot 2{,}44 = 3{,}05$ ℳ.

Beispiel 2. 12 Arbeiter haben in 5 Tagen 200 ℳ im Gedinge verdient. Sie wollen sich den Verdienst so teilen, daß der Vormann je Tag 0,50 ℳ, der zweite 0,30 ℳ, der dritte 0,20 ℳ und der vierte 0,10 ℳ mehr als die 8 anderen erhalten. Wieviel erhalten die einzelnen?

Aufl. Jeder der 8 gleichmäßig bezahlten Arbeiter erhält $x$ ℳ, der Vormann erhält demnach $x + 0{,}50 \cdot 5$, der zweite $x + 0{,}30 \cdot 5$, der dritte $x + 0{,}20 \cdot 5$, der vierte $x + 0{,}10 \cdot 5$; so ergibt sich der Ansatz:

$$200 = 8\,x + (x + 5 \cdot 0{,}50) + (x + 5 \cdot 0{,}30) + (x + 5 \cdot 0{,}20) + (x + 5 \cdot 0{,}10)$$
$$200 = 12\,x + 2{,}50 + 1{,}50 + 1{,}0 + 0{,}50$$
$$12\,x = 200 - 5{,}50 = 194{,}50$$
$$x = \frac{194{,}50}{12} = 16{,}21 \text{ ℳ}.$$

Jeder der 8 Arbeiter erhält also 16,21 ℳ. Wieviel die übrigen erhalten, ergibt sich ohne weiteres.

## 8. Proportionslehre, Regeldetri.

Eine Gleichung, deren beide Seiten die Form von Brüchen haben, nennt man eine Proportion, z. B.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } \frac{3}{5} = \frac{9}{15}.$$

Man schreibt die Proportion gewöhnlich in folgender Weise:

$$a : b = c : d; \quad 3 : 5 = 9 : 15$$

und sagt: $a$ verhält sich zu $b$ wie $c$ zu $d$;
3 » » » 5 » 9 » 15.

Man nennt $a : b$ das eine Verhältnis und $c : d$ das andere Verhältnis. Eine Proportion besteht also aus zwei Verhältnissen, die einander gleich sind.

Wenn die vorstehende Proportion

$a : b = c : d$, oder $3 : 5 = 9 : 15$, richtig ist,

so sind auch die folgenden Umstellungen richtig:

$b : a = d : c$, oder $5 : 3 = 15 : 9$,
$a : c = b : d$ » $3 : 9 = 5 : 15$,
$d : b = c : a$ » $15 : 5 = 9 : 3$;

denn, wenn man diese Proportionen in Bruchform schreibt und die beiden Verhältnisse auf einen gemeinsamen Nenner bringt, so erhält man in allen Fällen:

$b \cdot c = d \cdot a$, oder $5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$;

nämlich:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gibt $a \cdot d = b \cdot c$,

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ » $b \cdot c = a \cdot d$,

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ » $a \cdot d = c \cdot b$,

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ » $d \cdot a = b \cdot c$.

Daraus folgt:

das Produkt aus den beiden äußeren Gliedern einer Proportion ist stets gleich dem Produkte der beiden inneren Glieder;

z. B. ist das Produkt der äußeren Glieder, sowie dasjenige der inneren Glieder der Proportion $3 : 5 = 9 : 15$ in allen Umstellungen derselben $= 45$.

Ist eine der vier Größen einer Proportion unbekannt, so kann sie durch die drei anderen Größen ausgedrückt, d. h. berechnet werden;

denn wenn $a \cdot d = b \cdot c$, so ist

$$a = \frac{b \cdot c}{d},\ b = \frac{a \cdot d}{c},\ c = \frac{a \cdot d}{b},\ d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Das Verfahren, durch Proportionsrechnung eine unbekannte Größe aus drei anderen gegebenen Größen zu finden, nennt man Regeldetri.

Die unbekannte Größe bezeichnet man in der Regel mit $x$.

Erklärung. Zwei Größen heißen direkt proportional, wenn bei der Zu- oder Abnahme der einen die andere ebensovielmal zu- oder abnimmt, z. B. je mehr Ware, desto höhere Kosten; je mehr Arbeit, desto höherer Lohn; je mehr Arbeit, desto mehr Arbeiter.

Zwei Größen heißen dagegen umgekehrt proportional, wenn beim Zu- oder Abnehmen der einen Größe die andere ebensovielmal ab- oder zunimmt, z. B. je größere Arbeiterzahl, desto geringere Arbeitszeit (bei gleicher Arbeit); je größer die Länge, desto kleiner die Breite (bei gleichem Flächeninhalt).

## Einfache Regeldetri.

Die einfache Proportionsrechnung oder Regeldetri verlangt, zu drei gegebenen Größen die vierte unbekannte zu finden.

Zwei der gegebenen Größen haben immer gleichartige Benennung (z. B. beide Arbeit oder beide Ware usw.), ebenso die dritte und die unbekannte (z. B. beide Arbeiterzahl oder beide Geld usw.).

Beispiel 1. An einer Wegestrecke von 460,5 m arbeiten 20 Arbeiter eine Woche. Wie viele Arbeiter sind erforderlich, wenn in derselben Zeit 368,4 m geleistet werden sollen?

Aufl. Angabe: 460,5 m Wegestrecke, 20 Arbeiter.
Frage: 368,4 » » , $x$ » .

Man überlegt zunächst, ob die Größen (hier Wegestrecke und Arbeiterzahl) direkt oder umgekehrt proportional sind. Hier sind sie direkt proportional (denn zu der doppelten Wegestrecke würde auch die doppelte Arbeiterzahl nötig sein); dann stellt man die Proportion auf:

1. Größe der Angabe : 1. Gr. der Frage = 2. Gr. der Angabe : $x$,
also $460{,}5 : 368{,}4 = 20 : x$.

Jedes Verhältnis der Proportion enthält also gleichartiges; hier im ersten Verhältnisse Wegestrecke, im zweiten Arbeiterzahl.

$$460{,}5 : 368{,}4 = 20 : x$$
$$460{,}5 \cdot x = 368{,}4 \cdot 20$$
$$x = \frac{368{,}4 \cdot 20}{460{,}5} = 16 \text{ Arbeiter.}$$

Beispiel 2. Die Ausbesserung eines Leinpfades wird von 15 Arbeitern in 4 Wochen und 4 Tagen vollendet. Wie lange würden 24 Arbeiter daran gearbeitet haben?

Aufl. Angabe: 15 Arbeiter, 32 Tage,
Frage: 24 » , $x$ » .

Die Größen sind hier umgekehrt proportional (denn die doppelte Arbeiterzahl würde nicht die doppelte, sondern die halbe Arbeitszeit gebrauchen), daher ist hier die Anordnung der Proportion:

1. Gr. der Frage : 1. Gr. der Angabe = 2. Gr. der Angabe : $x$
24 Arbeiter : 15 Arbeiter = 32 Tage : $x$

$$24 : 15 = 32 : x$$
$$24 \cdot x = 15 \cdot 32$$
$$x = \frac{15 \cdot 32}{24} = 20 \text{ Tage.}$$

## Zusammengesetzte Regeldetri.

In der zusammengesetzten Proportionsrechnung oder Regeldetri sind mehr als drei — z. B. fünf oder sieben — Größen gegeben, zu welchen die unbekannte Größe gefunden werden soll. Bei der Auflösung kann man jedoch solche Umformungen vornehmen, daß zwei oder vier Größen auf die Einheit gebracht werden; die Ausrechnung erfolgt dann mit den drei noch verbleibenden Größen wie in der einfachen Regeldetri.

Beispiel 3. 8 Arbeiter pflastern eine 70 m lange, 7 m breite Straße in $8^3/_4$ Tagen. In wieviel Tagen pflastern 12 Arbeiter eine Straße von 84 m Länge und $7^1/_2$ m Breite?

Aufl. Angabe: 8 Arbeiter, $70 \cdot 7$ qm Straße, $8^3/_4$ Tage,
Frage: 12 » , $84 \cdot 7{,}5$ » » , $x$ » .

Dafür kann man ansetzen:

1 Arbeiter, $70 \cdot 7$ qm Straße, $8^3/_4 \cdot 8$ Tage,
1 » , $84 \cdot 7{,}5$ » » , $x \cdot 12$ » .

Die Größen qm Straße und Tage sind direkt proportional. Man erhält also:

$$70 \cdot 7 \text{ qm} : 84 \cdot 7{,}5 \text{ qm} = 8^3/_4 \cdot 8 \text{ Tage} : 12 \cdot x \text{ Tage},$$

mithin

$$70 \cdot 7 : 84 \cdot 7{,}5 = 8{,}75 \cdot 8 : 12 \cdot x$$
$$70 \cdot 7 \cdot 12 \cdot x = 84 \cdot 7{,}5 \cdot 8{,}75 \cdot 8$$
$$x = \frac{84 \cdot 7{,}5 \cdot 8{,}75 \cdot 8}{70 \cdot 7 \cdot 12} = 7^1/_2 \text{ Tage.}$$

## Übungsbeispiele aus der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri.

Beispiel 4. 10 Arbeiter würden das Herbeischaffen von Kies zur Hinterfüllung eines Uferdeckwerkes in 16 Tagen vollenden. Zur Beschleunigung der Arbeit werden nach 3 Arbeitstagen noch 5 weitere Arbeiter eingestellt. In wieviel Tagen wird dementsprechend die Arbeit fertig sein?

Aufl. 10 Arbeiter würden nach 3 Tagen noch 13 Tage zum Hinterfüllen gebrauchen, welche Zeit werden $10 + 5 = 15$ Arbeiter gebrauchen?

Angabe: 10 Arbeiter, 13 Tage,
Frage: 15 » , $x$ » .

Die Größen sind umgekehrt proportional, daher

$$15 : 10 = 13 : x$$
$$x \cdot 15 = 10 \cdot 13; \; x = \frac{10 \cdot 13}{15} = 8^2/_3.$$

Die Arbeit wird demnach fertig sein in $3 + 8^2/_3 = 11^2/_3$ Tagen.

Beispiel 5. Ein Dampfboot hat eine Maschine von 30 Pferdestärken; diese verbraucht in 1 Stunde Fahrt für 1 Pferdestärke 0,75 kg Kohlen. Wieviel Kohlen verbraucht der Dampfer auf einer 135 km langen Fahrt, wenn er in der Stunde 19 km zurücklegt?

Aufl. Die Maschine verbraucht in 1 Stunde $30 \cdot 0{,}75 = 22{,}50$ kg Kohle; die Fahrt dauert $\frac{135}{19}$ Stunden.

Angabe: 1 Stunde, 22,50 kg Kohle,
Frage: $\frac{135}{19}$ » , $x$ » » .

Die Größen sind direkt proportional.

$$1 : \frac{135}{19} = 22{,}50 : x$$
$$x = \frac{135 \cdot 22{,}50}{19 \cdot 1} = 159{,}87 \text{ kg.}$$

Beispiel 6. Für die Baustelle Nr. I sind 537,6 cbm Faschinen geliefert worden, welche 725,76 ℳ kosten. Davon sind 236,3 cbm nicht gebraucht worden. Diese werden daher an die Baustelle II abgegeben. Welcher Geldbetrag muß dementsprechend von Baustelle I nach Baustelle II gebucht werden? Aufl.: 319,06 ℳ.

Beispiel 7. Eine Steinplatte, 63 cm lang, 45 cm breit und 8 cm dick, wiegt 61,4 kg. Wieviel wiegt eine Steinplatte derselben Steinart, welche 75 cm lang, 36 cm breit und 11 cm dick ist? Aufl.: 80,20 kg.

Beispiel 8. Wenn 58 Tausend Ziegelsteine mit 4 Wagen in 5 Tagen 7 km weit verfahren werden können, wielange werden 6 Wagen an 232 Tausend Steinen zu fahren haben, wenn die Entfernung 11 km beträgt?

Aufl. Angabe: 58 Tsd. Steine, 4 Wagen, 5 Tage, 7 km,
Frage: 232 » » , 6 » , $x$ » , 11 » ;

$$\begin{array}{llllll}
\text{oder:} & \frac{58}{4}\ \text{Tsd. Steine,} & 1\ \text{Wagen,} & 5\ \text{Tage,} & 7\ \text{km,} \\
 & \frac{232}{6}\ \text{»}\quad\text{»}, & 1\ \text{»}, & x\ \text{»}, & 11\ \text{»};
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{oder:} & \frac{58}{4}\ \text{Tsd. Steine,} & 1\ \text{Wagen,} & \frac{5}{7}\ \text{»}, & 1\ \text{km,} \\
 & \frac{232}{6}\ \text{»}\quad\text{»}, & 1\ \text{»}, & \frac{x}{11}\ \text{»}, & 1\ \text{»};
\end{array}$$

$$\frac{58}{4} : \frac{232}{6} = \frac{5}{7} : \frac{x}{11}$$

$$\frac{58}{4} \cdot \frac{x}{11} = \frac{232}{6} \cdot \frac{5}{7};\quad x = \frac{232}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4 \cdot 11}{58}$$

$$x = 21 \text{ Tage.}$$

# B. Flächenlehre.

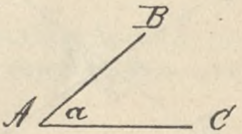
Es gibt krumme Flächen und ebene Flächen; letztere nennt man Ebenen.

Das Folgende handelt von den Linien, Winkeln und Figuren, welche in einer Ebene liegen.

## a) Von den geraden Linien und den Winkeln.

Die kürzeste Verbindungslinie zwischen 2 Punkten heißt eine gerade Linie oder eine Gerade.

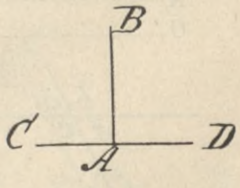
Zieht man aus einem Punkte nach verschiedenen Richtungen 2 gerade Linien, so entsteht zwischen diesen ein Winkel. Der Punkt, von dem die Linien ausgehen, heißt der Scheitel, auch Winkelpunkt; die Linien heißen die Schenkel des Winkels.




Für Winkel schreibt man kurz: $\angle$.

Man bezeichnet einen Winkel mit drei großen Buchstaben, z. B. $\angle BAC$; der Scheitelbuchstabe muß stets in der Mitte gelesen werden. (Ist ein Irrtum nicht möglich, so kann man den Winkel auch mit dem Scheitelbuchstaben allein bezeichnen, z. B. $\angle A$, oder mit einem kleinen Buchstaben in der Winkelöffnung, z. B. $\angle a$.)[1]

Ein rechter Winkel, kurz ein Rechter genannt, ist ein Winkel, dessen einer Schenkel senkrecht auf dem anderen steht. Der eine Schenkel ist also das Lot auf dem anderen. Einen Rechten bezeichnet man mit $R$. Z. B.: $BA$ steht senkrecht auf $CD$; $\angle BAD$, ebenso $\angle BAC$ sind $= R$. »Senkrecht« bezeichnet man mit $\perp$.

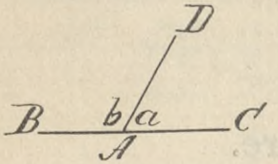



Ein spitzer Winkel ist ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, ein stumpfer ein Winkel, welcher größer als ein rechter ist.

[1]) Hierbei werden anstatt der kleinen lateinischen Buchstaben, z. B. $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ usw., häufig die griechischen Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\varphi$ genommen (sprich: alpha, beta, gamma, delta, epsilon, phi).

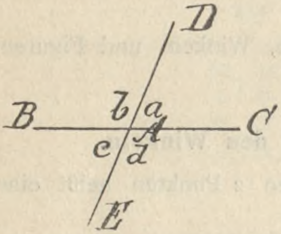
Ein gestreckter Winkel ist $= 2R$. Seine beiden Schenkel fallen in einer Geraden zusammen; z. B. $\angle CAD$ in der vorstehenden Figur ist ein gestreckter Winkel.

Nebenwinkel heißen 2 Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren andere Schenkel eine gerade Linie bilden; z. B. $\angle a$ und $\angle b$ sind Nebenwinkel.




**1. Nebenwinkel betragen zusammen 2 Rechte,** z. B. $\angle a + \angle b = 2R$.

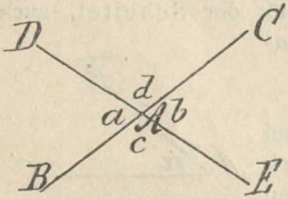
Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Betrachtung der vorstehenden beiden Figuren.




**2. Alle Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen 4 Rechte;**

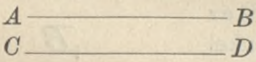
denn man kann für die Winkel um einen Punkt herum 2 Paar Nebenwinkel oder 2 gestreckte Winkel setzen, welche oberhalb und unterhalb derselben Geraden ($BC$) je $2R$ betragen.

Der Winkel, welcher von den Verlängerungen der Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus gebildet wird, heißt der Scheitelwinkel desselben. In nebenstehender Figur ist z. B. $\angle c$ der Scheitelwinkel von $d$ und $\angle a$ der Scheitelwinkel von $b$.

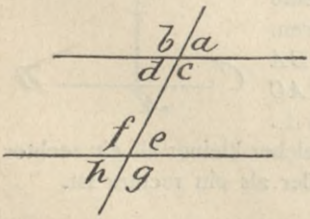



**3. Scheitelwinkel sind einander gleich;** also $\angle a = \angle b$ und $\angle c = \angle d$.

**4. Zwei Gerade, die stets einen gleichen Abstand voneinander behalten, wieweit man sie auch verlängert, nennt man gleichlaufend (parallel), die Geraden selbst Gleichlaufende (Parallele).**




Für gleichlaufend schreibt man kurz $\#$.




Werden zwei Gleichlaufende von einer dritten Geraden geschnitten, so entstehen 8 Winkel. Von diesen nennt man die zwischen den geschnittenen Linien liegenden innere Winkel, die anderen äußere Winkel.

Je ein äußerer und ein innerer Winkel an derselben Seite der Schneidenden sind gleich und heißen Gegenwinkel, also:

$$\angle a = e,\ c = g,\ b = f,\ d = h.$$

Je 2 äußere und 2 innere Winkel an verschiedenen Seiten der Schneidenden sind ebenfalls gleich und heißen Wechselwinkel, also

$$\angle c = f,\ d = e,\ a = h,\ b = g.$$

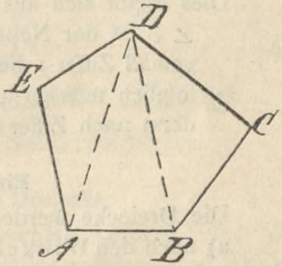
Daraus folgt:

**5. Sind 2 Gegenwinkel oder 2 Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden gleichlautend.**

Anm. Zum Messen der Winkel dient die Kreislinie, indem man den Umfang des Kreises in 360 Teile (Grade) teilt (vergl. Ziffer 33) und zusieht, wieviele solcher Teile auf den zu messenden Winkel kommen.

## b) Von den ebenen Figuren im allgemeinen.

Ein durch Linien begrenztes Stück der Ebene ist eine ebene Figur. Die Geraden, welche eine geradlinige Figur einschließen, heißen Seiten; die Scheitel der von ihnen gebildeten Winkel: Ecken oder Spitzen.



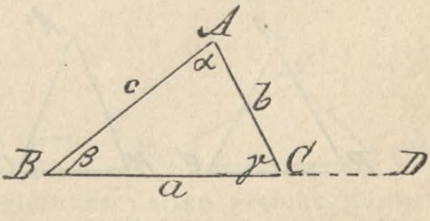

Eine geradlinige Figur bezeichnet man durch die an ihre Ecken gesetzten Buchstaben, z. B. $ABCDE$. Gerade Linien, welche zwei nicht aufeinander folgende Ecken verbinden, heißen Diagonalen, z. B. $AD$ und $BD$.

Nach der Zahl der Ecken teilt man die geradlinigen Figuren ein in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw.; allgemein sagt man Vielecke (Polygone).

## c) Vom Dreieck.

Für Dreieck schreibt man kurz $\triangle$.

Das Dreieck soll im folgenden mit den Buchstaben $ABC$, die diesen Ecken entsprechenden Winkel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und die Länge der Gegenseiten dieser Winkel mit $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. $BC$ ist die Grundlinie oder Grundseite.



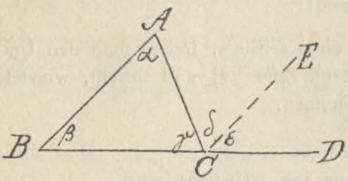

Verlängert man eine Seite des Dreieckes, z. B. $BC$, über den Scheitel des anliegenden Winkels, so nennt man den entstandenen Nebenwinkel einen Außenwinkel. In obiger Abbildung ist $\angle ACD$ der Außenwinkel des Dreieckes $ABC$.

**6. Der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind;**

z. B. $\angle ACD = \angle \alpha + \angle \beta$.

Dies ergibt sich aus folgendem:

Ziehe zu der Seite $AB$ eine Gleichlaufende durch den Scheitel $C$ des Außenwinkels, also $CE$; dann teilt $CE$ den Außenwinkel in die Winkel $\delta$ und $\varepsilon$. $\angle \delta$ ist aber gemäß Ziffer 5 $= \angle \alpha$ (als Wechselwinkel zwischen Gleichlaufenden) und $\angle \varepsilon = \angle \beta$ (als Gegenwinkel); daher ist $\angle \delta + \angle \varepsilon$ (nämlich der Außenwinkel) $= \angle \alpha + \angle \beta$.




**7. Die Summe der 3 Winkel eines Dreieckes beträgt 2 $R$.**

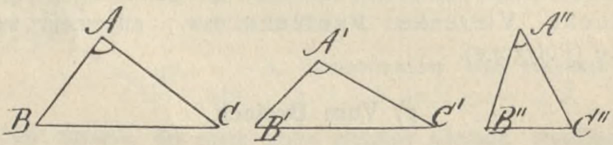
Dies ergibt sich aus der vorigen Figur:

$\angle \gamma$ ist der Nebenwinkel von $\angle ACD$;
gemäß Ziffer 1 betragen $\angle \gamma + \angle ACD = 2\,R$;
folglich müssen auch $\angle \beta + \angle \alpha + \angle \gamma = 2\,R$ sein;
denn nach Ziffer 6 ist $\angle \alpha + \angle \beta = \angle ACD$.

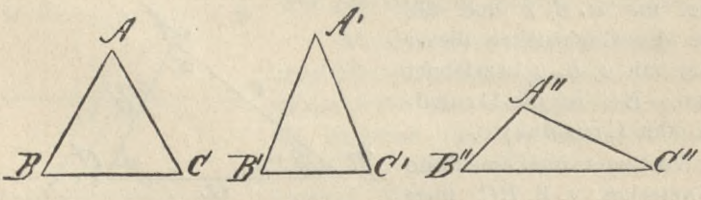
**Einteilung der Dreiecke.**

Die Dreiecke werden eingeteilt:

a) nach den Winkeln: in rechtwinklige und schiefwinklige die letzteren wieder in stumpfwinklige und spitzwinklige.




Rechtwinklig ist ein Dreieck, wenn es einen rechten Winkel ($A$) hat, andernfalls ist es schiefwinklig, und zwar stumpfwinklig, wenn




es einen stumpfen Winkel ($A'$), spitzwinklig, wenn es nur spitze Winkel hat;

b) nach den Seiten: in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige.

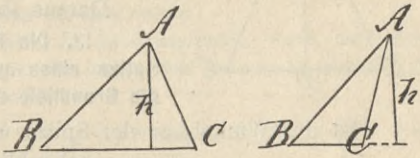
*Gleichseitig* ist ein Dreieck ($ABC$), wenn seine 3 Seiten gleich; *gleichschenklig* ($A'B'C'$), wenn nur 2 Seiten gleich ($A'B'$ und $A'C'$); *ungleichseitig* ($A''B''C''$), wenn alle 3 Seiten ungleich sind.

Weitere Bezeichnungen zu a) und b):

Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ($BC$): die *Schrägseite* (Hypotenuse), die beiden anderen: *Lotseiten* (Katheten).

Im gleichschenkligen Dreiecke heißen die beiden gleichen Seiten ($A'B'$ und $A'C'$) die *Schenkel*, die dritte ungleiche ($B'C'$) die *Grundlinie*; der Winkel, welcher der Grundlinie gegenüberliegt: *Winkel an der Spitze*, die beiden anderen Winkel: *Winkel an der Grundlinie.*

In einem Dreieck heißt das Lot von einer Ecke auf die Gegenseite (oder auf ihre Verlängerung) eine *Höhe*; man bezeichnet sie mit $h$. Ein Dreieck hat daher 3 Höhen. Meistens hat man es nur mit einer Höhe zu tun. Die Seite, auf welcher die Höhe lotrecht steht, nennt man die *Grundseite.*




**Von der Übereinstimmung der Dreiecke.**

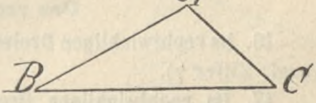
Figuren, welche so aufeinandergelegt werden können, daß sie sich decken, d. h. gänzlich in eine zusammenfallen würden, sind *übereinstimmend* (kongruent); sie haben gleiche Größe und Gestalt.

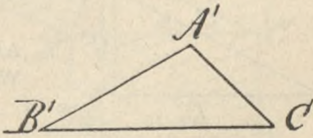
In übereinstimmenden Dreiecken (wie überhaupt in übereinstimmenden Figuren) sind die Seiten und Winkel des einen den gleichliegenden Seiten und Winkeln des anderen gleich. Für übereinstimmend schreibt man $\cong$.

Hier ist z. B. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

dann ist:

$$AB = A'B'$$
$$AC = A'C'$$
$$BC = B'C'$$
$$\angle A = A'$$
$$\angle B = B'$$
$$\angle C = C'$$




*In übereinstimmenden Dreiecken liegen also gleichen Winkeln gleiche Seiten, und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.*

Die Übereinstimmung zweier Dreiecke kann schon aus der Übereinstimmung in drei Stücken geschlossen werden. Es ergeben sich folgende 4 Sätze:

**8. Zwei Dreiecke sind übereinstimmend, wenn sie in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen;**

**9. desgl., wenn sie in 1 Seite und 2 gleichliegenden Winkeln übereinstimmen;**

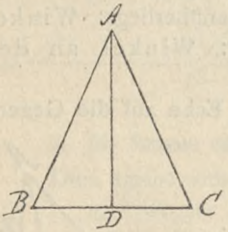
**10. desgl., wenn sie in 3 Seiten übereinstimmen;**

**11. desgl., wenn sie in 2 Seiten und dem Gegenwinkel der größeren unter ihnen übereinstimmen.**

### Das gleichschenklige Dreieck.

**12. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich;**

also $\angle B = \angle C$.

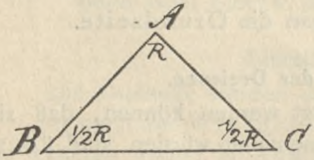



Denkt man sich nämlich den Winkel $A$ an der Spitze durch die Gerade $AD$ halbiert, dann ist nach Ziffer 8 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ und daher auch $\angle B = \angle C$.

Daraus folgt:

**13. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes halbiert die Grundlinie und steht senkrecht auf ihr.**

Ist der Winkel an der Spitze ein rechter, so heißt das gleichschenklige Dreieck ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.




**14. Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist jeder der beiden Winkel an der Grundlinie $= \frac{1}{2}$ *R*;**

denn $2 \cdot \frac{1}{2} R + R = 2 R$ (vergl. Ziffer 7).

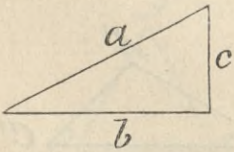
**15. Im gleichseitigen Dreieck sind alle 3 Winkel gleich, und jeder daher $= \frac{2}{3}$ *R*.**

Das gleichseitige Dreieck ist zugleich auch ein gleichschenkliges Dreieck.

### Das rechtwinklige Dreieck.

**16. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel = 1 *R*** (vergl. Ziffer 7).

**17. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Schrägseite gleich der Summe der Quadrate der beiden Lotseiten.**[1])




Dieser Satz lautet in Buchstaben ausgedrückt:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Anmerkung. (Besonderer Fall.)

Wenn $a = 5$, $b = 4$ und $c = 3$ m,

so ist $5^2 = 4^2 + 3^2$; denn

$25 = 16 + 9 = 25$.

Daraus folgt: Wenn die Seitenlängen eines Dreieckes $= 5$, $4$ und $3$ sind, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges.[2])

---

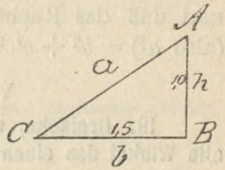
[1]) Man nennt diesen Satz den pythagoräischen Lehrsatz.

[2]) Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht einen rechten Winkel herstellen, vergl. Ziffer 49, zweite Auflösung.

Wenn man im rechtwinkligen Dreieck die Länge von 2 Seiten kennt, kann man daraus die Länge der dritten berechnen, nämlich:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2};$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \text{ weil } b^2 = a^2 - c^2;$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{»} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Beispiel 1. Wie breit, in der Schräge gemessen, ist eine Böschung mit der Neigung 1 : 1,5, wenn die Höhe $h = 1{,}0$ m ist?




Auflösung. Mit Rücksicht auf beistehende Figur ist:

$$a^2 = 1{,}0^2 + 1{,}50^2 = 1{,}0 + 2{,}25 = 3{,}25;$$
$$a^2 = 3{,}25;$$
$$a = \sqrt{3{,}25} = 1{,}803 \text{ m}.$$

Beträgt nun aber, bei $h = 1{,}0$ m, die schräge Böschungsbreite 1,803 m, so erhält man für eine andere Höhe bei demselben Böschungsverhältnis die Böschungsbreite, wenn man diese Höhe mit 1,803 multipliziert; z. B. ist für eine Höhe = 2,23 m alsdann die Böschungsbreite $a = 2{,}23 \cdot 1{,}803 = 4{,}02$ m.

Probe. $h = 2{,}23$; dann ist $b = 2{,}23 \cdot 1{,}5 = 3{,}345$; es ergibt sich nach Ziffer 17:

$$a^2 = 2{,}23^2 + 3{,}345^2;$$
$$a^2 = 4{,}973 + 11{,}189 = 16{,}162;$$
$$a = \sqrt{16{,}162} = 4{,}02, \text{ wie oben berechnet.}$$

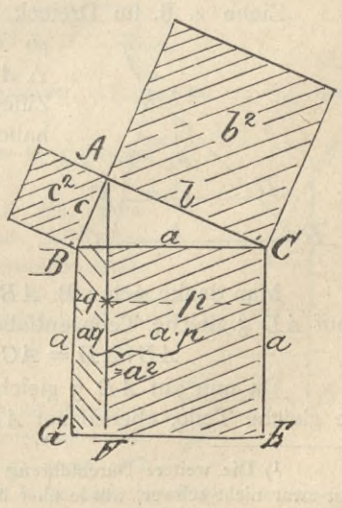
Beispiel 2. Berechne die Böschungsbreite, wenn $h = 1{,}0$, für die Neigungen 1 : 1, 1 : 2, 1 : 2,5 und 1 : 3.

Auflösung. Es ergeben sich folgende Böschungsbreiten: 1,414; 2,236; 2,693; 3,162.

Man erhält für die üblichen Böschungsverhältnisse folgende Zusammenstellung:

| Böschungsverhältnis: | Böschungsbreite, wenn $h = 1{,}0$ m: |
|---|---|
| 1 : 1 | 1,414 |
| 1 : 1,5 | 1,803 |
| 1 : 2 | 2,236 |
| 1 : 2,5 | 2,693 |
| 1 : 3 | 3,162 |

**18. Beweis zu dem Satze Ziffer 17:**




Es soll bewiesen werden, daß im rechtwinkligen Dreieck *ABC* das Quadrat der Schrägseite gleich der Summe der Quadrate der beiden Lotseiten ist.

In der nebenstehenden Figur sind die Quadrate der Dreiecksseiten $a$, $b$ und $c$ wirklich dargestellt. Der Flächeninhalt jeder dieser Quadrate ist gemäß Ziffer 26: $a^2$, $b^2$ und $c^2$.

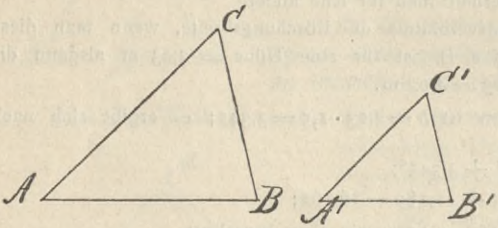
Fälle nun von $A$ die Höhe auf die Schrägseite $a$ des Dreieckes und verlängere sie bis $F$, so schneidet die Gerade $AF$ in dem Quadrat über $a$ 2 Rechtecke ab, nämlich das eine, dessen Grundseite $= q$ und dessen Höhe $= a$ ist, und das andere, dessen Grundseite $= p$ und dessen Höhe $= a$ ist.

Der Flächeninhalt des ersten Rechteckes ist gemäß Ziffer 27 $= a \cdot q$.
» » » zweiten » » » » » $= a \cdot p$.

Es läßt sich beweisen, daß das Rechteck $a \cdot p =$ dem Quadrate $b^2$ und daß das Rechteck $a \cdot q =$ dem Quadrate $c^2$; dann ist $a \cdot p + a \cdot q$ (also $a^2$) $= b^2 + c^2$.[1])

### Von der Ähnlichkeit der Dreiecke.

**19. Dreiecke, und geradlinige Figuren überhaupt, heißen ähnlich, wenn alle Winkel des einen der Reihe nach den Winkeln des anderen gleich sind, und ebenso, wenn alle gleichliegenden Seiten zueinander im gleichen Verhältnis stehen (proportional sind).**

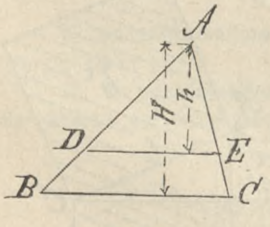



Für ähnlich schreibt man $\sim$.

Ähnliche Dreiecke, wie überhaupt ähnliche Figuren, haben gleiche Gestalt, aber verschiedene Größe; z. B. $\triangle ABC$ ist ähnlich $\triangle A'B'C'$, weil $\angle A = A'$, $\angle B = B'$, $\angle C = C'$; ferner $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

**20. Zieht man in einem Dreiecke eine Gleichlaufende zu einer Seite, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.**

Ziehe z. B. im Dreieck $ABC$ zu $BC$ die Gleichlaufende $DE$, so wird das Dreieck $ADE$ abgeschnitten. $\triangle ADE$ ist dann ähnlich $\triangle ABC$, wie aus Ziffer 19 hervorgeht; denn beide Dreiecke haben gleiche Winkel.




Dann ergibt sich:

a) $AB : AD = AC : AE$,
$AB : AD = BC : DE$,
$AC : AE = BC : DE$.

Man denke sich z. B. $AB$ in 7 gleiche Teile geteilt so, daß davon auf $AD$ 5 gleiche Teile entfallen; dann ist

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE = 7 : 5.$$

Da nun auf $AD$ 5 gleiche Teile entfallen, so entfallen auf $BD$ 2 gleiche Teile, ebenso auf $AE$ 5 und auf $CE$ 2 gleiche Teile.

---

[1]) Die weitere Durchführung dieses Beweises, von der hier abgesehen wird, ist zwar nicht schwer, würde aber über den Zweck des Buches hinausgehen.

Daher ist auch allgemein:

$$\text{b) } AD : BD = AE : CE.$$

c) Die Höhen in 2 ähnlichen Dreiecken verhalten sich wie die Grundseiten; in der vorstehenden Figur verhalten sich also

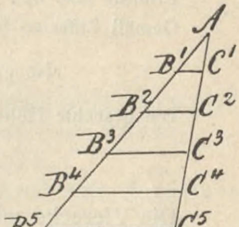
$$H : h = BC : DE;$$

denn nach Ziffer 20 ist:

$$H : h = AB : AD,$$
$$AB : AD = BC : DE;$$
$$\text{mithin: } H : h = BC : DE.$$

Aus dem vorigen, Ziffer 20 b), folgt:

Wenn man die eine Seite eines Dreieckes, z. B. $AB^5$, in eine Anzahl gleicher Teile teilt und durch die Teilpunkte Gleichlaufende zur Grundseite zieht, so teilen diese Gleichlaufenden auf der dritten Seite, $AC^5$, ebensoviel gleiche Teile ab.

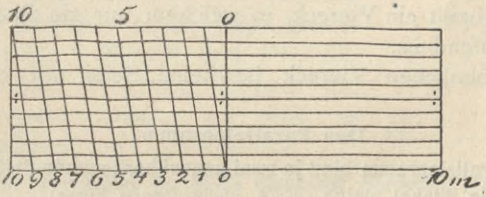



In der nebenstehenden Figur ist $AB^5$, ebenso $AC^5$ durch die Gleichlaufenden in 5 gleiche Teile geteilt.

Daher ist $AC^1 = {}^1/_5\, AC^5$, $AC^2 = {}^2/_5\, AC^5$, $AC^3 = {}^3/_5\, AC^5$ usf.; gemäß Ziffer 20 a) ist dann aber auch:

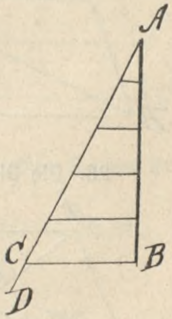
$$B^1C^1 = {}^1/_5\, B^5C^5,\ B^2C^2 = {}^2/_5\, B^5C^5,\ B^3C^3 = {}^3/_5\, B^5C^5 \text{ usf.}$$

Hierauf beruht die Einrichtung des bei Zeichnungen benutzten Transversal- oder Fein-Maßstabes, welcher gestattet, Längen bis zu $^1/_{10}$ der Einheit zu messen.

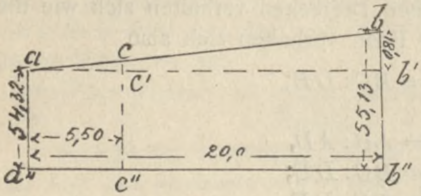



Aufgabe. Teile eine gegebene Gerade in 5 gleiche Teile.

Auflösung. Zeichne die Gerade $AB$ hin, ziehe durch $A$ eine beliebig zu dieser geneigte Gerade $AD$; setze auf letzterer von $A$ aus 5 gleiche Teile von beliebiger Größe ab; der letzte Teilpunkt sei $C$. Verbinde $C$ mit $B$ und ziehe durch die Teilpunkte der Geraden $AC$ Gleichlaufende zu $BC$; dann schneiden diese auf der Strecke $AB$ 5 gleiche Teile ab.




Beispiel. In einem Höhenplane haben die Punkte $a$ und $b$, welche 20 m, wagerecht gemessen, voneinander entfernt sind, die nachstehend bezeichneten Höhen: 54,32 und 55,13 m über der Wagerechten $a''b''$. Welche Höhe muß der Punkt $c$ erhalten, der in der geraden Verbindungslinie von $a$ und $b$ liegt und, in der Wage gemessen, 5,50 m von $a$ entfernt ist?




Auflösung. Gesucht wird die Höhe $cc''$.

Punktiere $ab'$ in wagerechter Linie, so erhältst du die ähnlichen Dreiecke $abb'$ und $acc'$. In beiden ist die Länge der Grundseite bekannt, nämlich 20 m und 5,50 m.

Im $\triangle\, abb'$ ist die Höhe $bb'$ bekannt;

$$\text{denn } bb' = bb'' - aa'' = 55{,}13 - 54{,}32 = 0{,}81,$$
$$cc'' \text{ ist } = aa'' + cc' = 54{,}32 + cc'.$$

Ermittle also $cc'$.

Gemäß Ziffer 20 ist: $0{,}81 : cc' = 20{,}0 : 5{,}50$;

$$\text{also } cc' = 0{,}81 \cdot \frac{5{,}50}{20{,}0} = 0{,}223 \text{ oder rund } 0{,}22.$$

Die gesuchte Höhe $cc''$ ist also $0{,}22 + 54{,}32 = 54{,}54$ m.

## d) Von den Vierecken.

Die Vierecke teilt man nach der Lage ihrer Gegenseiten ein: in Parallelogramme, Trapeze und gewöhnliche Vierecke.

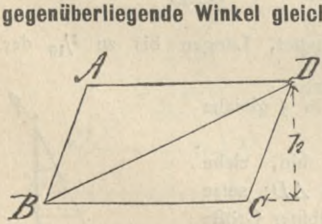
Parallelogramm heißt ein Viereck, dessen Gegenseiten paarweise parallel (gleichlaufend) sind;

Trapez heißt ein Viereck, in welchem nur ein Paar der Gegenseiten gleichlaufend ist.

Im gewöhnlichen Viereck ist keine Seite mit einer anderen gleichlaufend.

### Das Parallelogramm.

**21. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel gleich** (vergl. nachstehende Figur).

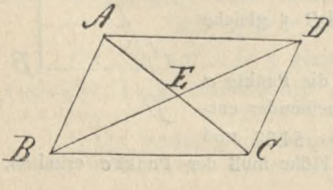



**22. Die Diagonale teilt das Parallelogramm in 2 übereinstimmende Dreiecke. Ein Dreieck ist die Hälfte des Parallelogrammes, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und Höhe hat;**

z. B.: $\triangle\, BCD = \frac{1}{2}\, ABCD$.

Beide haben die Grundseite $BC$ und die Höhe $h$ gemeinsam.

**23. Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbieren sich gegenseitig;**



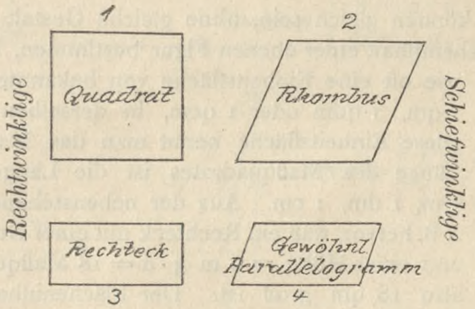

z. B. in nebenstehender Figur ist

$$AE = EC \text{ und } BE = ED.$$

Dies folgt aus der Übereinstimmung der beiden Dreiecke $AEB$ und $CED$.

Einteilung der Parallelogramme.

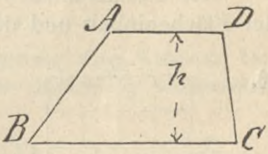
Die Parallelogramme werden eingeteilt: nach den Seiten in gleichseitige und ungleichseitige, nach den Winkeln in rechtwinklige und schiefwinklige.




1. Das gleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm heißt: Quadrat,
2. das gleichseitig-schiefwinklige: Rhombus oder Raute,
3. das ungleichseitig-rechtwinklige: Rechteck,
4. das ungleichseitig-schiefwinklige: gewöhnliches Parallelogramm.

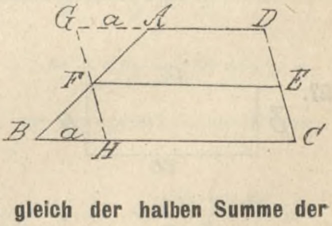
**Das Trapez.**

Die gleichlaufenden Seiten eines Trapezes heißen die Grundlinien, z. B. $AD$ und $BC$; der Abstand derselben die Höhe $= h$; die nicht gleichlaufenden Seiten, z. B. $AB$ und $DC$, die Schenkel. Sind in einem Trapeze die Schenkel einander gleich, so heißt es gleichschenklig.




**24. Zieht man durch die Mitte eines der Schenkel eines Trapezes die Gleichlaufende mit den Grundlinien, so wird auch der andere Schenkel dadurch halbiert.**

Das Trapez sei z. B. $ABCD$, ferner $ED = EC$ und $EF \# BC$; dann ist auch $FA = FB$.




Die Gleichlaufende $EF$ heißt die Mittellinie des Trapezes.

**25. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden Grundlinien (das arithmetische Mittel derselben).**

Denn zieht man $GH \# DC$ und verlängert $AD$ bis $G$, so ist:

$$EF = AD + AG, \text{ ferner } AG = BH,$$
$$EF = BC - AG,$$

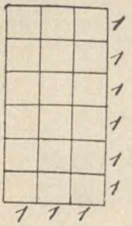
folglich $2\,EF = AD + BC$, mithin $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.

## e) Von der Gleichheit und dem Flächeninhalt geradliniger Figuren.

Zwei Figuren heißen gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.

Figuren können gleich sein, ohne gleiche Gestalt zu haben.

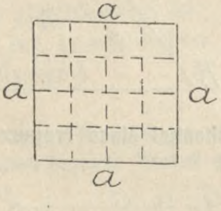
Den Flächeninhalt einer ebenen Figur bestimmen, heißt ermitteln, wie oft eine Einheitsfläche von bekannter Größe, z. B. 1 qm, 1 qdm oder 1 qcm, in derselben enthalten ist. Diese Einheitsfläche nennt man das Maßquadrat. Die Länge des Maßquadrates ist die Längeneinheit, also 1 m, 1 dm, 1 cm. Aus der nebenstehenden Figur geht z. B. hervor, daß ein Rechteck mit einer Grundseite = 3 m und einer Höhe = 6 m $3 \cdot 6 = 18$ Maßquadrate enthält, also 18 qm groß ist. Der Flächeninhalt ist also das Produkt aus der Anzahl der Längeneinheiten an der Grundlinie und der Anzahl desgl. an der Höhe, oder kurz: das Produkt aus der Grundlinie und der Höhe.




Zeichenerklärung:

Die Seiten der folgenden Figuren seien = $a, b, c, d$,
die Höhe = $h$,
der Umfang = $U$,
der Flächeninhalt = $F$;
der Flächeninhalt und der Umfang ergeben sich dann wie folgt:

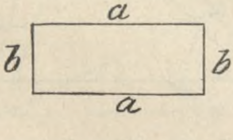
26.




**Quadrat** $\begin{cases} F = a \cdot a = a^2 \\ U = a + a + a + a = 4\,a. \end{cases}$

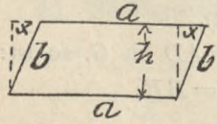
$F$ ist leicht aus nebenstehender Figur herzuleiten. Enthält $a$ 4 Längeneinheiten, z. B. 4 1 cm-Längen, so ist $F = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16$ qcm.

27.




**Rechteck** $\begin{cases} F = a \cdot b \\ U = 2\,a + 2\,b. \end{cases}$

28.



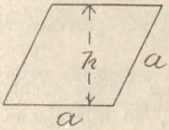

**Parallelogramm** $\begin{cases} F = a \cdot h \\ U = 2\,a + 2\,b. \end{cases}$

$F$ eines Parallelogramms ist also = dem $F$ eines Rechteckes von derselben Grundseite und Höhe. Dies ergibt sich aus vorstehender Figur.

Daraus folgt:

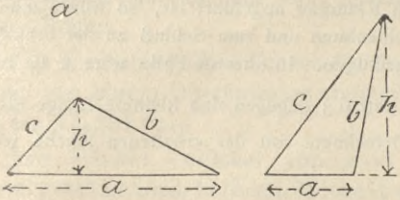
Alle Parallelogramme von derselben Grundseite und Höhe sind flächengleich (haben denselben Flächeninhalt).

**29.**




**Rhombus** $\begin{cases} F = a \cdot h \\ U = 4\,a. \end{cases}$

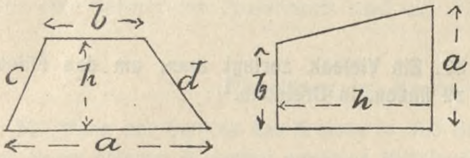
**30.**




**Dreieck** $\begin{cases} F = a \cdot \dfrac{h}{2} \\ U = a + b + c. \end{cases}$

Daß $F$ des Dreieckes $= a \cdot \frac{h}{2}$ ist, ergibt sich aus Ziffer 22.

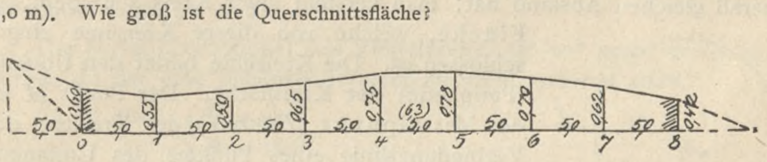
**31.**




**Trapez** $\begin{cases} F = \dfrac{a+b}{2} \cdot h \\ U = a + b + c + d. \end{cases}$

Daß $F = \frac{a+b}{2} \cdot h$, ergibt sich aus Ziffer 25.

Beispiel. Der Abtragsquerschnitt zur Fortbaggerung einer Kiesbank hat nachstehende Gestalt. Die Höhenpunkte haben gleiche Entfernung voneinander (5,0 m). Wie groß ist die Querschnittsfläche?




Auflösung. $F = \left[\frac{0{,}60}{2} + 0{,}55 + 0{,}59 + 0{,}65 + 0{,}75 + 0{,}78 + 0{,}70 + 0{,}62 + \frac{0{,}42}{2}\right] \cdot 5{,}0 = 25{,}75$ qm. Dies ergibt sich aus dem gewöhnlichen Trapez-Ansatze:

$$\frac{0{,}60 + 0{,}55}{2} \cdot 5{,}0 + \frac{0{,}55 + 0{,}59}{2} \cdot 5{,}0 + \frac{0{,}59 + 0{,}65}{2} \cdot 5{,}0 + \ldots\ldots + \frac{0{,}62 + 0{,}42}{2} \cdot 5{,}0.$$

Dafür kann man schreiben:

$$\left(\frac{0{,}60}{2} + \frac{0{,}55}{2} + \frac{0{,}55}{2} + \frac{0{,}59}{2} + \frac{0{,}59}{2} + \frac{0{,}65}{2} + \ldots + \frac{0{,}62}{2} + \frac{0{,}42}{2}\right) \cdot 5{,}0.$$

Außer dem ersten und letzten Gliede ergänzen sich immer je zwei zu einem Ganzen; daher die Auflösung wie oben.

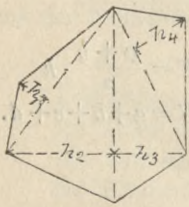
Ist die erste und letzte Höhe = 0, wie es sehr häufig vorkommt und hier punktiert angedeutet ist (vor 0 und hinter 8), so ist:

$$F = [0{,}60 + 0{,}55 + 0{,}59 + 0{,}65 + 0{,}75 + 0{,}78 + 0{,}70 + 0{,}62 + 0{,}42] \cdot 5{,}0$$
$$= 28{,}30 \text{ qm};$$

denn $\frac{0}{2} \cdot 5{,}0$, welches eigentlich als erstes und letztes Glied zu schreiben wäre, Eis= 0 und wird daher fortgelassen.

Wäre ausnahmsweise eine oder die andere gemessene Länge nicht 5,0, sondern z. B. 6,3, wie in der Figur in Klammer angeführt ist, so würde man der tinfachheit halber doch mit 5,0 durchrechnen und zum Schluß zu der erhaltenen Fläche das zu wenig Berechnete hinzufügen. In diesem Falle wäre z. B. hinzuzufügen $+\frac{0\ 75 + 0{,}78}{2} \cdot 1{,}3$. Stände statt 6,3 dagegen eine kleinere Länge als 5,0, z. B. 3,3, so würde man das zuviel Berechnete von der erhaltenen Fläche wieder abziehen, also $-\frac{0{,}75 + 0{,}78}{2} \cdot 1{,}70$.

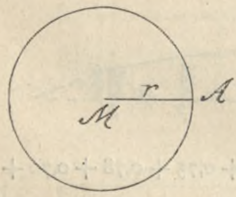
Ähnliche Rechnungen kommen vielfach vor, wenn die Durchflußfläche eines gepeilten Flußquerschnittes ermittelt werden soll.



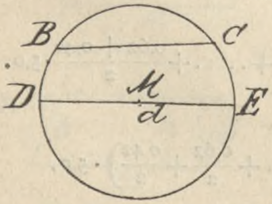
**32. Ein Vieleck zerlegt man, um den Flächeninhalt zu finden, in Dreiecke.**[1]

## f) Der Kreis.

Der Kreis ist eine krumme Linie, welche von einem Punkte ($M$) überall gleichen Abstand hat; man versteht unter Kreis außerdem die Fläche, welche von dieser Kreislinie eingeschlossen ist. Die Kreislinie bildet den Umfang (Peripherie) der Kreisfläche. Der Punkt $M$ ist der Mittelpunkt (Zentrum) des Kreises; die Verbindungslinie eines Punktes des Umfanges mit dem Mittelpunkte heißt Halbmesser (Radius), hier $AM$. Man bezeichnet ihn meist mit $r$.




Die Verbindungslinie zweier Punkte des Kreisumfanges heißt eine Sehne ($BC$).




Die Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, ist der Durchmesser ($DE$). Ein Stück der Kreislinie, z. B. $BC$, in der Kreislinie selbst gemessen, ist ein Bogen.

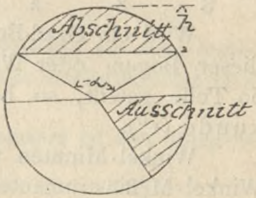
Der Durchmesser ($DE$) ist gleich dem doppelten Halbmesser.

[1]) Über die regelmäßigen Vielecke vergl. g.

Man bezeichnet ihn meist mit $d$.

Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich.

Ein Teil des Kreises, der von einer Sehne und dem entsprechenden Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnit (Segment). Die Höhe $h$ des Kreisabschnittes nennt man die Pfeil-t höhe des Bogens. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei Kreisabschnitte und den Kreisumfang in zwei Bogen.




Der Kreisabschnitt — ebenso der Bogen —, welcher von einem Durchmesser abgeteilt wird, heißt ein Halbkreis.

Ein Winkel, welcher von zwei Halbmessern gebildet wird, heißt ein Mittelpunkts-(Zentri-)winkel ($\alpha$). Ein Teil des Kreises, der von zwei Halbmessern und dem entsprechenden Bogen begrenzt wird, wird ein Kreisausschnitt (Sektor) genannt. Zu jedem Mittelpunktswinkel gehört ein Bogen, eine Sehne, ein Ausschnitt und ein Abschnitt.

### Einteilung des Kreises.

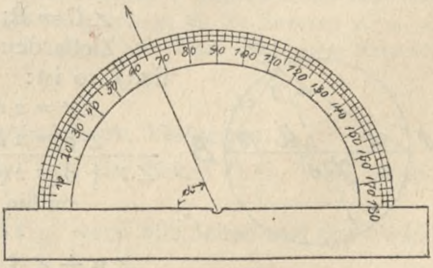
**33. Wenn der Umfang des Kreises in 360 Bogenteile geteilt wird, so ist der zu einem solchen Bogenteil gehörige Mittelpunktswinkel 1 Grad ($1^0$) groß.**

Der zu dem halben Umfange, dem Halbkreise, gehörige Mittelpunktswinkel ist demnach $180^0$ groß. Die Schenkel desselben fallen in einer geraden Linie, dem Durchmesser, zusammen. Er ist also ein gestreckter Winkel $= 2\,R$.

Der Mittelpunktswinkel des Viertelkreises ist $90^0$ groß; er ist ein Rechter, da der eine Schenkel lotrecht auf dem anderen steht.

Es ist also: $1\,R = 90^0$,
$2\,R = 180^0$,
$4\,R = 360^0$.

Anmerkung. Zum Messen der aufgezeichneten Winkel dient der Winkelmesser (Transporteur), ein in $180^0$ geteilter Halbkreis. Beim Messen wird sein Mittelpunkt auf den Winkelscheitel und der Durchmesser längs einem der Schenkel gelegt. Dann liest man in der äußeren Kreislinie ab, wieviel Grade zwischen beiden Schenkeln liegen. In der nebenstehenden Figur ist z. B. $\angle\,\alpha = 67^0$.



Einen Viertelkreis nennt man auch einen Quadranten;

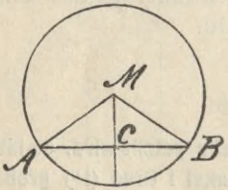
einen Sechstelkreis einen Sextanten; sein Mittelpunktswinkel ist $\frac{4R}{6} = \frac{360^0}{6} = 60^0$;

einen Achtelkreis auch einen Oktanten; sein Mittelpunktswinkel ist $\frac{4R}{8} = \frac{360^0}{8} = \frac{90^0}{2} = 45^0$.

Wird ein Grad-Bogen in 60 gleiche Teile geteilt, so heißt einer dieser Bogen- oder Winkelteile 1 Minute (1′); wird die Minute in 60 Teile geteilt, so heißt einer der Bogen- oder Winkelteile 1 Sekunde (1″).

Winkel-Minuten und -Sekunden kommen nur bei sehr feinen Winkel-Meßinstrumenten, z. B. im Feldmessen, vor. Für gewöhnlich genügt die Angabe eines Winkels in Graden und höchstens halben oder Viertel-Graden.

### Von der Sehne.

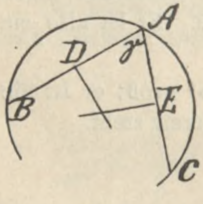



**34. Der Halbmesser, welcher einen Mittelpunktswinkel halbiert, halbiert auch die zugehörige Sehne und steht senkrecht auf ihr.**

Dies ergibt sich aus Ziffer 13 (gleichschenkliges Dreieck).

Daraus folgt umgekehrt:

**35. Das Mittellot der Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.**

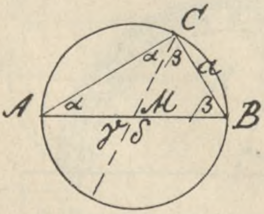



Aufgabe. Gegeben sei eine Kreislinie. Suche zu dieser den Mittelpunkt.

Auflösung. Ziehe zwei beliebige Sehnen, z. B. $AB$ und $AC$ und errichte auf ihnen die Mittellote; wo diese sich schneiden, ist der Mittelpunkt des Kreises.

Ein von 2 Sehnen gebildeter Winkel, dessen Spitze im Kreisumfang liegt, heißt ein Umfangswinkel, z. B. $\angle BAC$.

**36. Der Umfangswinkel im Halbkreise ist ein Rechter.**




$\angle C = R$; dies ergibt sich aus folgendem:

Ziehe den Durchmesser durch $CM$ (punktiert), so ist:

$\angle \gamma = 2\,\alpha$ (vergl. Ziffer 6)

$\angle \delta = 2\,\beta$ ( » » 6)

$\angle \gamma + \delta = 2\,(\alpha + \beta)$; $\angle \gamma + \delta$ aber $= 2\,R$;

mithin auch $2\,(\alpha + \beta) = 2\,R$;

daher $\alpha + \beta = R$.

$\angle \alpha + \angle \beta$ aber $= \angle C$, also $\angle C = R$.

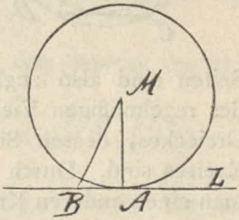
Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, wenn die größte Seite $AB$ und eine der Lotseiten, z. B. $a$, gegeben sind.

Auflösung. Schlage aus dem Mittelpunkt über $AB$ einen Halbkreis, fasse die Länge $a$ in den Zirkel, setze die eine Spitze in $B$ ein und schlage einen Bogen, so daß dieser den Halbkreis in $C$ schneidet; ziehe $BC$, so ist dieses $= a$; ziehe ferner $AC$, dann ist $\angle ACB = R$ und das $\triangle ABC$ das verlangte rechtwinklige.

### Von der Tangente.

**37. Eine Gerade, welche in ihrer ganzen Erstreckung nur einen Punkt mit dem Umfange eines Kreises gemein hat, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.**

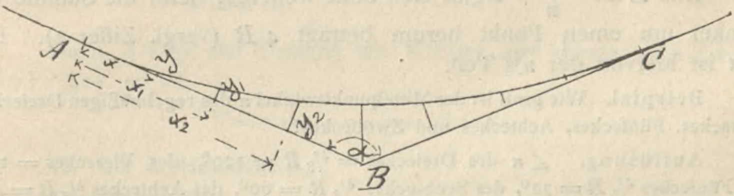
**38. Die Senkrechte im Endpunkte eines Halbmessers ist eine Tangente des Kreises** (vergl. die Figur).




Die Gerade $L$ hat nur den Punkt $A$ mit dem Umfange des Kreises gemein. Jeder andere Punkt dieser Geraden, z. B. $B$, ist weiter von $M$ entfernt als $A$ von $M$, würde also außerhalb des Kreises liegen; daher kann nur $A$ der Berührungspunkt sein, und ist somit $L$ die Tangente.

**39. Will man den Berührungspunkt einer Tangente finden, so fälle man vom Mittelpunkte des Kreises auf die Tangente ein Lot; wo dieses die Tangente trifft, ist der Berührungspunkt.**

Anmerkung. Wenn ein Kreisbogen einen so großen Halbmesser hat, daß man den Bogen nicht mehr mit dem Zirkel zeichnen, auch nicht mit einer Schnur schlagen kann, so wird der Bogen von den Tangenten aus abgesteckt, vergl. nachfolgende Figur. Die Tangenten sind hier $AB$ und $BC$. Der Punkt $B$,




in welchem sie einander schneiden, heißt der Winkelpunkt; $\alpha$ ist der Tangentenwinkel. Wenn der Bogenhalbmesser und der Winkel $\alpha$ gegeben sind, kann man die Tangentenlängen und die Bogenabstände $y$, $y_1$, $y_2$ für die Strecken $x$, $x_1$, $x_2$ usw. berechnen. Es gibt aber auch Tabellen, aus denen man diese Abstände leicht ermitteln kann.

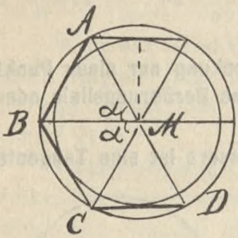
## g) Von den regelmäßigen Vielecken.

Man unterscheidet nach der Zahl der Ecken Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Achtecke usw.

Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

Man kann jedes Vieleck, die regelmäßigen und die unregelmäßigen, in Dreiecke zerlegen. Der Flächeninhalt eines Vieleckes ist gleich der Summe der Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke.

Die Ecken eines regelmäßigen Vieleckes liegen im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt ($M$) zugleich Mittelpunkt dieses Vieleckes ist. Die Verbindungslinien der Ecken ($A, B, C, D$ usw.) mit dem Mittelpunkt sind gleich dem Halbmesser dieses Kreises. Man nennt diesen Kreis den umschriebenen Kreis. Die Seiten des Vieleckes ($AB$, $BC$, $CD$ usw.) sind Sehnen dieses Kreises. Der Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Halbmesser bilden, heißt Mittelpunktswinkel. Die Mittelpunktswinkel über den einzelnen Seiten sind also zugleich Mittelpunktswinkel des Kreises. Jede Seite des regelmäßigen Vieleckes ist die Grundseite eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Schenkel zugleich Halbmesser des umschriebenen Kreises sind. Durch die Fußpunkte der Höhen dieser Dreiecke kann man einen anderen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser gleich diesen Höhen ist. Man nennt diesen Kreis den einbeschriebenen Kreis. Die Seiten des regelmäßigen Vieleckes sind die Tangenten des einbeschriebenen Kreises.




Hat das Vieleck $n$ Ecken, so nennt man es ein $n$-Eck.

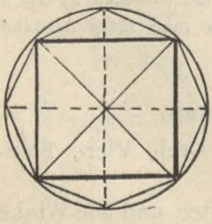
**40. In einem regelmäßigen Vieleck ist der Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{4R}{n}$, wenn $n$ die Anzahl der Ecken ist.**

Daß $\angle \alpha = \frac{4R}{n}$, ergibt sich ohne weiteres; denn die Summe der Winkel um einen Punkt herum beträgt $4R$ (vergl. Ziffer 2). Der $\angle \alpha$ ist hiervon der $n^{te}$ Teil.

Beispiel. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel $\alpha$ des regelmäßigen Dreieckes, Viereckes, Fünfeckes, Achteckes und Zwölfeckes?

Auflösung. $\angle \alpha$ des Dreieckes $= \frac{4}{3}R = 120^0$, des Viereckes $= 1\,R$, des Fünfeckes $\frac{4}{5}R = 72^0$, des Sechseckes $\frac{4}{6}R = 60^0$, des Achteckes $\frac{4}{8}R = 45^0$, des Zwölfeckes $\frac{4}{12}R = 30^0$.

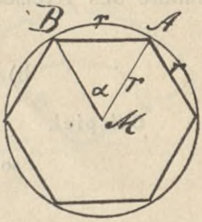
Aufgabe 1. Beschreibe in einen Kreis ein Quadrat, oder — was dasselbe sagt — teile den Umkreis in vier gleiche Teile.



Auflösung. Der Mittelpunktswinkel des Quadrates ist $\frac{4R}{4} = 1\,R$. Ziehe daher zwei aufeinander senkrechte Durchmesser und verbinde die Endpunkte durch Sehnen; die 4 Sehnen bilden das verlangte Quadrat.

Bemerkung. Durch Halbierung der Mittelpunktswinkel des Quadrates wird der Kreisumfang in 8 gleiche Teile geteilt; man erhält dadurch, wenn man die Sehnen zieht, ein regelmäßiges Achteck, durch weitere Halbierung ein 16-Eck, 32-Eck usw.

Aufgabe 2. Beschreibe in einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck, oder — was dasselbe sagt — teile den Kreisumfang in sechs gleiche Teile.




Auflösung. Im regelmäßigen Sechseck ist der Mittelpunktswinkel $AMB = {}^2/_3 R$, daher ist das Dreieck $AMB$ gleichseitig (vergl. Ziffer 15) und die Seite $AB$ gleich dem Halbmesser. Trage daher den Halbmesser 6 mal in den Kreis an, wie es die Figur zeigt, so ist die Aufgabe gelöst. Der Umfang des Sechseckes ist also dann $U = 6\,r$.

## h) Von der Ausmessung des Kreises.

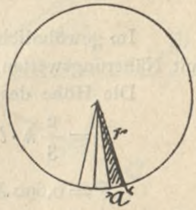
**41. Der Umfang des Kreises ist gleich dem Durchmesser mal 3,14;** also $U = d \cdot 3{,}14$ oder $2\,r \cdot 3{,}14$.[1])

**42. Der Flächeninhalt des Kreises ist gleich dem Quadrat des Halbmessers mal 3,14;**

also $F = r^2 \cdot 3{,}14$, oder $\left(\text{da } r = \frac{d}{2}\right)$ $F = \frac{d^2}{4} \cdot 3{,}14 = d^2 \cdot 0{,}785.$

Dies ergibt sich aus folgendem:

Betrachtet man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen und daher sehr kleinen Seiten, deren Länge je $= a$ ist, so ist der Flächeninhalt jedes der kleinen Mittelpunktsdreiecke




$$f = a \cdot \frac{r}{2}.$$

Die Anzahl aller dieser Dreiecke sei $n$, der Inhalt des Kreises ist dann:

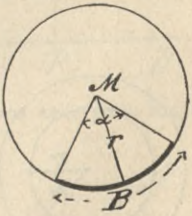
$$F = n \cdot a \cdot \frac{r}{2}.$$

Da $n \cdot a$ aber der Umfang des Kreises und dieser nach Ziffer 41 $= 2\,r \cdot 3{,}14$, so ist

$$F = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot \frac{r}{2} = r^2 \cdot 3{,}14.$$

**43. Der Kreisausschnitt.**

$B =$ Bogenlänge.




Die Bogenlänge eines Kreisausschnittes verhält sich zum Umfange des Kreises wie der Ausschnittwinkel zu $4\,R$. Ist der Ausschnitt- oder Mittelpunktswinkel $= \alpha$, so ist

$$B : 2\,r \cdot 3{,}14 = \alpha : 4\,R.$$

a) $B = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot \frac{\alpha}{4\,R}.$

---

[1]) Die Zahl 3,14 wird allgemein mit $\pi$ (sprich pi) bezeichnet. Sie ist genauer 3,14159 und ist berechnet aus dem Umfange des kleinsten umschriebenen und des kleinsten einbeschriebenen Vieleckes. Schon beim Sechseck ist übrigens der Umfang $= d \cdot 3$, da er gemäß Ziffer 40, Aufg. $2 = r \cdot 6$ ist.

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes verhält sich zum Flächeninhalte des Kreises wie der Ausschnittwinkel zu $4\,R$.

$$F : r^2 \cdot 3{,}14 = \alpha : 4\,R.$$

$$\text{b)}\quad F = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{\alpha}{4\,R} \text{ oder } = B \cdot \frac{r}{2}.^{1)}$$

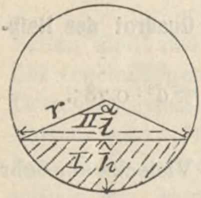
Beispiel. $r = 3{,}25$ m, $\alpha = 92^0$,

so ist $B = 2 \cdot 3{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{92}{360} = 5{,}216$ m,

$$F = 3{,}25^2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{92}{360} = 8{,}476 \text{ qm}.$$

**44. Der Kreisabschnitt.**

Die gestrichelte Fläche I in der nebenstehenden Figur ist der Kreisabschnitt, d. h. die Fläche, welche begrenzt wird von einer Sehne und dem zugehörigen Kreisbogen. Das Mittelpunkts-Dreieck II über dieser Sehne ergänzt den Kreisabschnitt zum Kreisausschnitte:




Der Flächeninhalt des Kreisabschnittes ist gleich demjenigen des Kreisausschnittes weniger der Fläche des Mittelpunkts-Dreieckes.

Im gewöhnlichen Bauwesen berechnet man $F$ eines Kreisabschnittes schneller mit Näherungswerten.

Die Höhe des Abschnittes sei $h$, die Sehne $l$, dann ist:

$F = \frac{2}{3}\,h \cdot l$ oder $0{,}667\,h \cdot l$, wenn $h = \frac{1}{6}\,l$ oder kleiner;

$F = 0{,}690\,h \cdot l$, » $h = \frac{1}{4}\,l$;

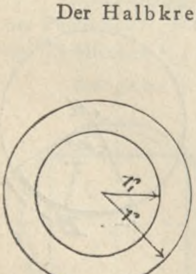
$F = 0{,}723\,h \cdot l$, » $h = \frac{1}{3}\,l$;

$F = 0{,}785\,h \cdot l$, » $h = \frac{1}{2} \cdot l$, d. h. beim Halbkreise.

Zwischenwerte können leicht abgeschätzt werden.

Der Halbkreis ist zugleich Kreisausschnitt und Kreisabschnitt:

$$F = \frac{r^2}{2} \cdot 3{,}14.$$




**45. Der Kreisring.**

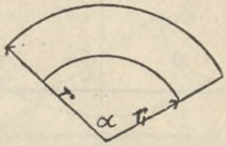
Der Halbmesser des großen Kreises sei $r$, derjenige des kleinen Kreises $r_1$; so ist, da der Flächeninhalt sein muß: Inhalt des großen Kreises weniger Inhalt des kleinen Kreises:

$$F = r^2 \cdot 3{,}14 - r_1{}^2 \cdot 3{,}14 = (r^2 - r_1{}^2) \cdot 3{,}14.$$

---

1) Wenn man den Bogen mißt, findet man $F$ am schnellsten aus $F = B \cdot \frac{r}{2}$.

**46. Das Ringstück.**



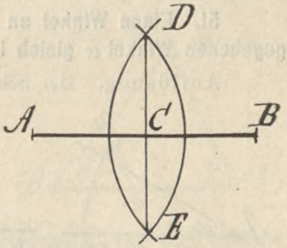

Der Mittelpunktswinkel sei $\alpha$.

Der Flächeninhalt eines Ringstückes verhält sich zum Inhalt des ganzen Kreisringes wie der Mittelpunktswinkel $\alpha$ zu $4\,R$; mithin

$$F = (r^2 - r_1^2) \cdot 3{,}14 \cdot \frac{\alpha}{4\,R}.$$

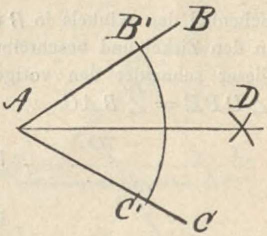
## i) Grundzeichenaufgaben.

**47. Eine gegebene Strecke $AB$ halbieren.**



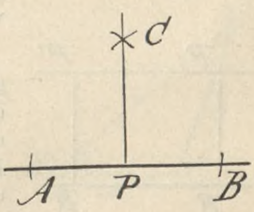

Auflösung. Beschreibe aus den Endpunkten von $AB$ je einen Kreis mit beliebigem (aber denselben) Halbmesser, verbinde die Schnittpunkte $D$ und $E$ durch eine Gerade, welche $AB$ in $C$ schneidet, so teilt $C$ die Strecke $AB$ in zwei gleiche Teile.

**48. Einen Winkel $BAC$ halbieren.**



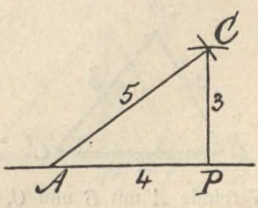

Auflösung. Schneide auf beiden Schenkeln des Winkels vom Scheitel $A$ aus durch einen Kreis mit beliebigem Halbmesser gleiche Stücke ab, also $AB' = AC'$; beschreibe aus den Punkten $B'$ und $C'$ mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser zwei Kreise, die sich in $D$ schneiden; verbinde den Schnittpunkt $D$ mit $A$, so ist $DA$ die verlangte Halbierungslinie des Winkels.

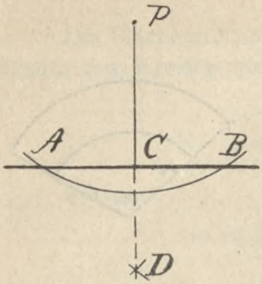
**49. In einem gegebenen Punkte $P$ einer Geraden ein Lot auf dieser errichten.**




Erste Auflösung. Schneide auf beiden Seiten des gegebenen Punktes $P$ durch einen Kreisschlag mit beliebigem Halbmesser gleiche Stücke ab: $PA = PB$; beschreibe darauf aus den Endpunkten $A$ und $B$ mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser zwei Kreise und verbinde ihren Schnittpunkt $C$ mit $P$, so ist $CP$ das verlangte Lot.

Zweite Auflösung. Trage auf der Geraden von $P$ aus nach einer Richtung 4 gleiche Teile ab, den Endpunkt bezeichne mit $A$; nimm 5 Teile in den Zirkel, und schlage aus $A$ einen Kreisbogen; nimm dann 3 Teile in den Zirkel, und schlage aus $P$ einen Kreisbogen, welcher den vorigen in $C$ schneidet; verbinde dann $C$ mit $P$, so ist $CP$ das verlangte Lot. Das Dreieck $ACP$ ist nämlich rechtwinklig gemäß Ziffer 17, weil $5^2 = 4^2 + 3^2$.



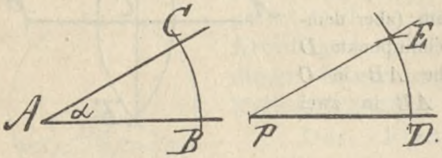



**50. Von einem gegebenen Punkte $P$ das Lot auf eine gerade Linie fällen.**

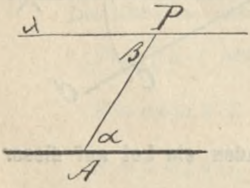
Auflösung. Beschreibe aus dem Punkte $P$ einen Kreisbogen mit beliebigem Halbmesser, der die Gerade in $A$ und $B$ schneidet. Beschreibe dann aus $A$ und $B$ zwei Kreisbogen mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser. Den Schnittpunkt $D$ verbinde dann mit $P$, so ist $PC$ das verlangte Lot.

**51. Einen Winkel an eine gegebene gerade Linie antragen, der einem gegebenen Winkel $\alpha$ gleich ist.**

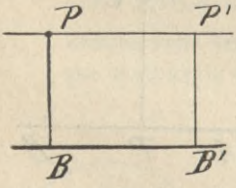
Auflösung. Der Scheitel des gegebenen Winkels $\alpha$ sei $A$; der Punkt in der gegebenen Geraden, welcher Scheitelpunkt für den anzutragenden gleichen Winkel werden soll, sei $P$. Beschreibe aus dem Scheitel $A$ und dem Punkte $P$ zwei Kreisbögen mit gleichem — sonst beliebigem — Halbmesser; diese schneiden die Schenkel des Winkels in $B$ und $C$, die Gerade in $D$. Nimm sodann die Sehne $BC$ in den Zirkel und beschreibe mit dieser als Halbmesser einen Kreisbogen aus $D$; dieser schneidet den vorigen Bogen in $E$. Verbinde dann $P$ mit $E$, so ist $\angle DPE = \angle BAC$.



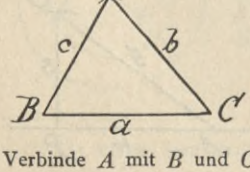

**52. Durch einen gegebenen Punkt $P$ die Gleichlaufende mit einer gegebenen geraden Linie ziehen.**




Auflösung 1. Verbinde den Punkt $P$ mit irgend einem Punkte $A$ der Geraden, trage den entstandenen Winkel $\alpha$ an $AP$ auf entgegengesetzter Seite in $P$ an $= \angle \beta$, so ist der Schenkel $Px$ die verlangte Gleichlaufende (denn $\alpha$ und $\beta$ sind Wechselwinkel, vergl. Ziffer 5).




Auflösung 2. Fälle von $P$ ein Lot auf die gegebene Gerade; der Schnittpunkt sei $B$. Errichte dann in einem beliebigen anderen Punkte $B'$ der Geraden ein Lot und trage auf diesem von $B'$ die Strecke $BP$ ab $= B'P'$. Ziehe dann eine Gerade durch $P$ und $P'$, so ist diese die verlangte Gleichlaufende.




**53. Ein Dreieck zeichnen, wenn seine drei Seiten gegeben sind.**

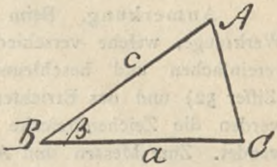
Gegeben seien die Seiten $a$, $b$, $c$.

Auflösung. Zeichne die Strecke $BC = a$ hin; beschreibe um $B$ mit der Strecke $c$ als Halbmesser einen Kreisbogen und um $C$ mit $b$ als Halbmesser desgl. Diese Kreisbogen schneiden sich im Punkte $A$. Verbinde $A$ mit $B$ und $C$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.

**54. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zeichnen.**

Gegeben seien die Seiten $a$ und $c$ und der Winkel $\beta$.

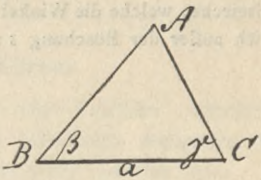
Auflösung. Zeichne die Strecke $BC = a$ hin, lege im Endpunkte $B$ den $\angle \beta$ an, schneide auf dem Schenkel desselben die Strecke $BA = c$ ab und verbinde die Punkte $A$ und $C$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.




**55. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zeichnen.**

Gegeben seien die Seite $a$ und die Winkel $\beta$ und $\gamma$.

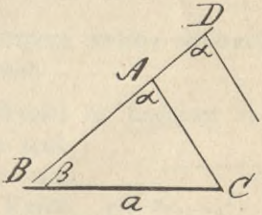
Auflösung. Zeichne die Strecke $BC = a$ hin, lege daran in $B$ den Winkel $\beta$, in $C$ den Winkel $\gamma$ und verlängere die Schenkel bis zum Schnitt in $A$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.




**56. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zeichnen.**

Gegeben seien die Seite $a$, die Winkel $\beta$ und $\alpha$.

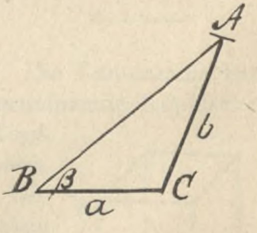
Auflösung. Zeichne die Strecke $BC = a$ hin, lege in $B$ den Winkel $\beta$ an und in einem beliebigen Punkte $D$ des Schenkels an diesen den Winkel $\alpha$. Ziehe dann durch $C$ die Gleichlaufende zu dem Schenkel des Winkels $\alpha$ bis $A$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.




**57. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren zeichnen.**

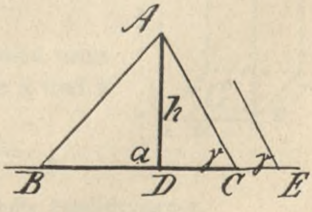
Gegeben seien die Seiten $a$, $b$ und der Winkel $\beta$; dabei sei $b > a$.

Auflösung. Zeichne die Strecke $BC$ gleich der kleineren Seite $a$ hin, trage in $B$ den Winkel $\beta$ an, beschreibe um $C$ mit $b$ als Halbmesser einen Kreisbogen, der den Schenkel von $\beta$ in $A$ schneidet; verbinde $A$ mit $C$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.




**58. Ein Dreieck aus einer Seite $a$, dem anliegenden Winkel $\gamma$ und der Höhe $h$ zeichnen.**

Auflösung. Errichte in einem Punkte $D$ einer Geraden das Lot, schneide auf diesem die Strecke $DA = h$ ab, trage in einem beliebigen Punkte $E$ der Geraden den Winkel $\gamma$ an, ziehe durch $A$ die Gleichlaufende $AC$ mit dem Schenkel des angetragenen Winkels. Dann



schneide von $C$ aus auf der Geraden die Strecke $CB = a$ ab, verbinde $B$ mit $A$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Beim technischen Zeichnen bedient man sich geeigneter Werkzeuge, welche verschiedene häufig wiederkehrende Verrichtungen wesentlich vereinfachen und beschleunigen, besonders das Ziehen von Gleichlaufenden (Ziffer 52) und das Errichten und Fällen von Loten (Ziffer 49 und 50). Hierzu werden die Zeichendreiecke und die Reißschiene, sowie beide zusammen verwendet. Zum Messen und Auftragen von Winkeln benutzt man den mit Gradeinteilung versehenen Winkelmesser (Transporteur, Anm. zu Ziffer 33), sofern diese Winkel nicht an den Zeichendreiecken bereits vorhanden sind. Letztere enthalten meist die Winkel von $90^0$, $45^0$, $60^0$ und $30^0$. Es gibt aber auch Zeichendreiecke, welche die Winkel eines bestimmten Böschungsverhältnisses enthalten, nämlich außer der Böschung 1 : 1 (2 Winkel von $45^0$) auch 1 : 1,5, 1 : 2, 1 : 2,5 usw.

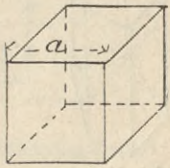
# C. Körperlehre.

## a) Die hauptsächlichsten Körper.

Die Körper werden begrenzt von Seiten oder Flächen, nämlich krummen Flächen oder Ebenen. Die Flächen schneiden einander in Kanten; diese können demnach krumme Linien oder Gerade sein.

Bezeichne mit $J$ den Inhalt (Kubik- oder körperlichen Inhalt),
mit $O$ die Oberfläche,
mit $G$ die Grundfläche,
mit $h$ diejenige Höhe des Körpers, welche senkrecht auf der Grundfläche steht.

**1. Der Würfel oder Kubus.** Der Würfel ist begrenzt von 6 gleich großen quadratischen Seiten, welche senkrecht zueinander stehen. Sämtliche Kanten sind gleich groß. Kennt man die Länge einer Kante, z. B. $a$, so kann man ohne weiteres den Kubikinhalt und die Oberfläche des Würfels berechnen.

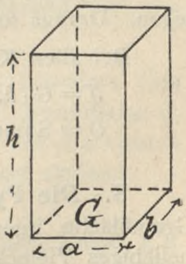



$$J = a \cdot a \cdot a \text{ oder } a^3;$$
$$O = a \cdot a \cdot 6 \text{ oder } 6\,a^2.$$

**2. Die Kantensäule oder das Prisma.** Die Kantensäule hat eine Grundfläche und eine mit dieser übereinstimmende Kopffläche Die übereinstimmenden Ecken der Grund- und Kopfflächen sind mit gleichlaufenden Kanten verbunden.

a) Die rechteckige Kantensäule.[1]) Die Grundfläche ist ein Rechteck, die Kanten stehen senkrecht auf dieser.

$$J = G \cdot h.$$



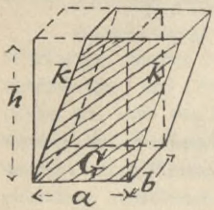

Zur Berechnung der Oberfläche $O$ muß man außer $h$ noch die Kanten der Grundfläche $a$ und $b$ kennen.

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h.$$

---

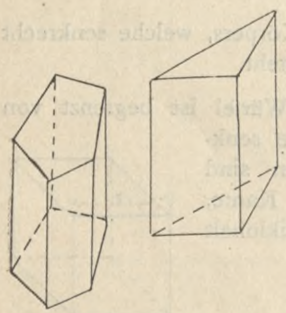
[1]) Man nennt sie auch das Raumrechteck oder Parallelepipedon.

b) Die schiefe Kantensäule mit rechteckiger Grundfläche. Diese Kantensäule hat den gleichen Körperinhalt wie eine rechteckige Kantensäule von gleicher Höhe und Grundfläche. Dies geht ohne weiteres aus der nebenstehenden Figur hervor; denn die schiefe Kantensäule (deren Vorderfläche in der Figur gestrichelt ist) entsteht aus der rechteckigen durch Abtrennung eines Keilstückes *k* auf der einen Seite und Hinzufügen desselben auf der anderen Seite. Der Inhalt der schiefen Kantensäule ist also ebenfalls:




$$J = G \cdot h.$$

c) Anderweitige Kantensäulen. Dasselbe läßt sich nachweisen für die schiefe Kantensäule, wenn ihre Grundfläche kein Rechteck, sondern ein beliebiges Parallelogramm ist. Sie hat immer denselben Inhalt wie die auf derselben Grundfläche senkrecht stehende Kantensäule von derselben Höhe; also $J = G \cdot h$.



vieleckige dreieckige
Kantensäule.

Legt man durch die Diagonale der Grundfläche und Kopffläche dieser Kantensäulen eine Ebene, so erhält man zwei übereinstimmende Kantensäulen mit dreieckiger Grundfläche (dreieckige Kantensäule).

Die Grundflächen der Kantensäulen können demnach aus einem Dreieck bestehen, aber auch aus einem beliebigen Vier-, Fünf- oder sonstigen Vieleck (dreieckige, viereckige, fünfeckige usw. Kantensäule); in allen Fällen kann die Kantensäule gerade- oder schiefstehend sein (je nachdem die Kanten senkrecht oder schräg zur Grundfläche stehen). Jede Kantensäule kann man in dreieckige Kantensäulen zerlegen. Daraus folgt:

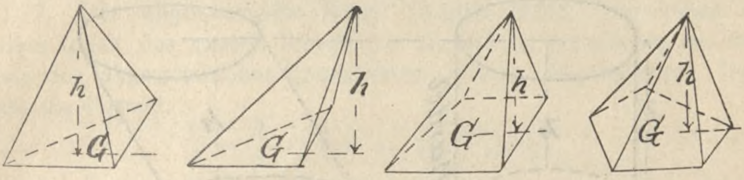
Bei allen Kantensäulen, geraden oder schiefen, ist:

$J = G \cdot h$, also Grundfläche mal der senkrechten Höhe;

$O =$ Summe der einzelnen Flächen.

**3. Die Pyramide oder Spitzsäule.** Die Pyramide hat als Grundfläche irgend eine geradlinige Figur (Dreieck, Viereck oder beliebiges Vieleck); sie hat über der Grundfläche eine Spitze, in welche die Kanten von den Ecken der Grundfläche zusammenlaufen.

Man unterscheidet nach der Gestalt der Grundfläche: Dreiseitige, vierseitige, fünfseitige usw. Pyramiden.



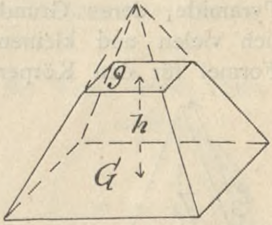

Ist der Flächeninhalt der Grundfläche $= G$ und die Höhe der Pyramide senkrecht zur Grundfläche $= h$, so ist der körperliche Inhalt:

$$J = \frac{G \cdot h}{3}.$$

Der Inhalt der Pyramide ist also $^1/_3$ von dem Inhalte der Kantensäule, welche mit dieser Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Dies ergibt sich aus dem Umstande, daß man jede Kantensäule in 3 Pyramiden von gleichem Inhalte zerlegen kann.

4. **Die abgestumpfte Pyramide** (Pyramidenstumpf). Die Kopffläche einer abgestumpften Pyramide sei $g$, die Grundfläche $G$, die Höhe senkrecht zu beiden $= h$.




Der Inhalt ist = dem Inhalt der ganzen Pyramide, vermindert um den Inhalt des abgeschnittenen (punktierten) oberen Stückes. Daraus ergibt sich die Formel:

$$J = \frac{h}{3}\left(g + G + \sqrt{g \cdot G}\right).$$

Im gewöhnlichen Bauwesen bedient man sich anstatt dessen der Näherungsformel:

$$J = \frac{(g + G)}{2} \cdot h.$$

Diese ist genau genug, wenn die Seitenkanten des Pyramidenstumpfes verhältnismäßig steil sind, wie dies meistens zutrifft.[1])

Die Oberfläche $O$ ist = der Summe der Oberflächen der einzelnen Seiten.

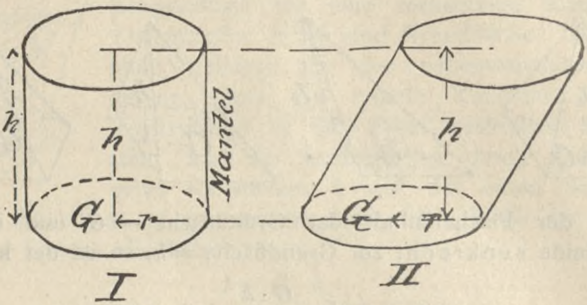
5. **Der Zylinder** (Walze). Der Inhalt eines Zylinders [des geraden (I) wie des schiefen (II) Zylinders] ist = der Grundfläche $G$, multipliziert mit derjenigen Höhe $h$, welche senkrecht auf der Grundfläche steht. Die Grundfläche ist ein Kreis. Man erhält alsdann:

$$J = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h.$$

---

[1]) Diese Formel wird auch angewendet, wenn der betreffende Körper, z. B. ein regelmäßig aufgesetzter Kieshaufen, streng genommen, keine abgestumpfte Pyramide ist; denn die Seitenkanten, nach oben verlängert, würden sich nicht immer in einem Punkte schneiden. Vergl. Beispiel 8, Seite 49.

Die Oberfläche des Zylinders besteht aus dem Mantel $M$ (Seitenoberfläche) und der Grund- und Kopffläche.




Gerader Zylinder. Schiefer Zylinder.

Die **Mantelfläche** $M$ des geraden Zylinders ist gleich dem Umfange des Grundflächenkreises, multipliziert mit der Höhe $h$; also:

$$M = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot h \text{ oder } = d \cdot 3{,}14.$$

Die ganze Oberfläche des geraden Zylinders ist demnach:

$$O = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot h + 2\,r^2 \cdot 3{,}14 = 2\,r \cdot 3{,}14\,(h + r).$$

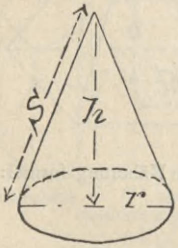
**6. Der Kegel.** Man kann sich den Kegel vorstellen als eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen und kleinen Seiten ist. Daraus geht hervor, daß die Formel für den Körperinhalt des Kegels lauten muß wie bei der Pyramide, nämlich:

$$J = \frac{G \cdot h}{3},$$

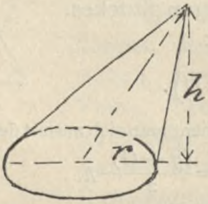
wobei $h$ die senkrechte Höhe ist.

Da nun $G$ ein Kreis ist, so ist:

$$J = \frac{r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h}{3}.$$




Gerader Kegel.




Schiefer Kegel.

Der Inhalt des Kegels ist demnach $^1/_3$ von dem Inhalt des Zylinders, welcher mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Der **Mantel** des geraden Kegels ist:

$$M = r \cdot S \cdot 3{,}14; \text{ hierin ist } S = \sqrt{r^2 + h^2},$$

wenn $S$ die Seite des Kegels und $r$ der Halbmesser der Grundfläche.

Anmerkung. Der Kegel ist als eine Pyramide mit unendlich vielen kleinen dreieckigen Seitenflächen zu betrachten. Dann ist, wenn die Grundseite eines solchen Seitendreieckes $= x$, dessen Flächeninhalt: $f = \frac{S \cdot x}{2}$, mithin $M = \frac{S\,(x + x + x \ldots)}{2}$; $x + x + x \ldots$ usw. ist aber $= 2\,r \cdot 3{,}14$, $M$ also $= \frac{S \cdot 2\,r \cdot 3{,}14}{2}$ oder $= S \cdot r \cdot 3{,}14$.

Die ganze Oberfläche des Kegels ist dann:

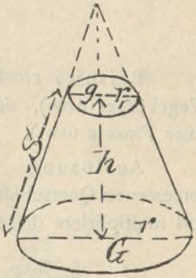
$$O = r \cdot S \cdot 3{,}14 + r^2 \cdot 3{,}14.$$

**7. Der abgestumpfte Kegel** (Kegelstumpf). Der Inhalt ist = dem Inhalt des ganzen Kegels bis zur Spitze, vermindert um den Inhalt des abgeschnittenen (punktierten) oberen Kegelstückes. Dies ergibt die Formel:

$$J = \frac{h}{3}(r^2 + r \cdot r_1 + r_1^2) \cdot 3{,}14.$$

Der Inhalt wird meist angenähert berechnet und ist dann (entsprechend wie beim Pyramidenstumpf, Ziffer 4):

$$J = \frac{g + G}{2} \cdot h.$$




Da $g = r_1^2 \cdot 3{,}14$ und $G = r^2 \cdot 3{,}14$, so ist also:

$$J = \frac{(r_1^2 + r^2) \cdot 3{,}14}{2} \cdot h.$$

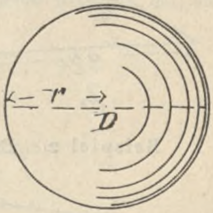
Diese Formel genügt für das gewöhnliche Bauwesen.

Der Mantel ist:

$$M = \frac{2\,r_1 \cdot 3{,}14 + 2\,r \cdot 3{,}14}{2} \cdot S = (r_1 + r) \cdot 3{,}14 \cdot S.$$

Die ganze Oberfläche des abgestumpften Kegels ist = Mantelfläche + Grundfläche und Kopffläche.

**8. Die Kugel.** Die Kugel hat wie der Kreis einen Halbmesser $r$ und einen Durchmesser $D$.

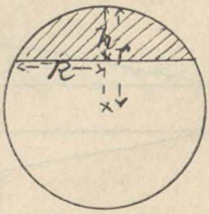



Inhalt: $J = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14;$

Oberfläche: $O = 4\,r^2 \cdot 3{,}14.$

Die Oberfläche der Kugel ist also 4 mal so groß als die Fläche des Kreises, welcher denselben Halbmesser hat.

**9. Der Kugelabschnitt** (Kugelkalotte). Der Inhalt eines Kugelabschnittes ist, wenn seine Höhe $h$ und der Halbmesser $r$ der zugehörigen ganzen Kugel gegeben sind:



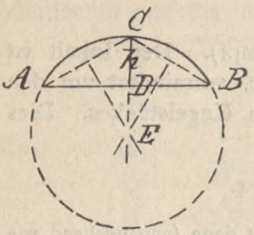

$$J = \frac{1}{3} \cdot h^2 (3\,r - h)\,3{,}14$$

und die Oberfläche des Kugelabschnittes:

$$O = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot h.$$

Bemerkung. Im Bauwesen ist meistens die Höhe $h$ gegeben sowie der Halbmesser $R$ des Grundflächenkreises. Um $J$ oder $O$ des Kugelabschnittes berechnen zu können, muß man dann den Halbmesser $r$ der hinzugedachten Kugel ermitteln. Dies geschieht durch Zeichnen nachfolgender Figur (vergl. Ziffer 35 der Flächenlehre).

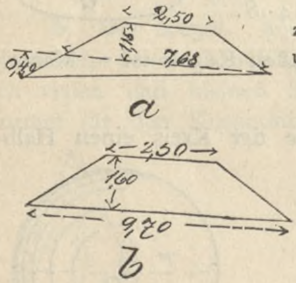
Zeichne von dem Querschnitte des fraglichen Kugelabschnittes den Durchmesser des Grundflächenkreises $AB$ und senkrecht in der Mitte $D$ desselben die Höhe $h = CD$. Verbinde dann $A$ mit $C$ und $B$ mit $C$ durch gerade Linien (Sehnen), in der Mitte dieser Linien errichte rechtwinklig zu ihnen nach unten 2 Lotrechte; wo diese beiden Lotrechten einander schneiden in der Verlängerung der Höhe $h$, ist der Mittelpunkt $E$ der Kugel. Dann greife $EC$ maßstäblich ab, so hast du den Kugelhalbmesser $r$ für die obigen beiden Formeln.




## b) Übungsbeispiele.

Beispiel 1. Berechne den Inhalt eines Dammes (Deich, Buhne, Leitwerk, Wegekörper usw.), desgl. eines Einschnittes (Graben, Hohlweg, Kanal, Durchstich eines Flnsses usw.).

Auflösung. Betrachte den Damm oder den Einschnitt zwischen zwei gemessenen Querschnitten als Kantensäule, berechne die mittlere Querschnittsfläche, und multipliziere diese mit der Entfernung der beiden gemessenen Querschnitte.




Berechne z. B. den Inhalt eines Deichstückes zwischen den nebenstehenden beiden Querschnitten $a$ und $b$, welche 55,2 m voneinander entfernt sind.

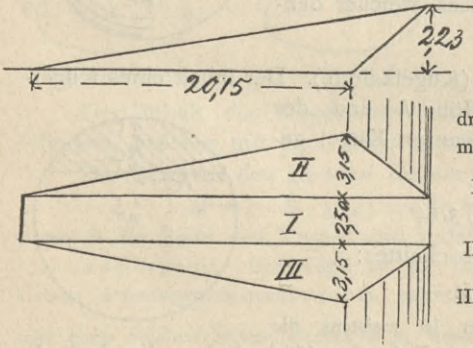
$$F_a = \frac{2{,}50 + 7{,}68}{2} \cdot 1{,}15 + \frac{7{,}68 \cdot 0{,}40}{2} = 7{,}39 \text{ qm},$$

$$F_b = \frac{2{,}50 + 9{,}70}{2} \cdot 1{,}60 = 9{,}76 \text{ qm},$$

$$\frac{7{,}39 + 9{,}76}{2} = 8{,}575 \text{ qm};$$

$$J = 8{,}575 \cdot 55{,}20 = 473{,}34 \text{ cbm}.$$

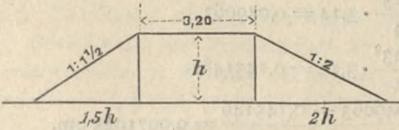
Beispiel 2. Berechne den Erdkörper der nachstehend skizzierten Fußwegerampe.

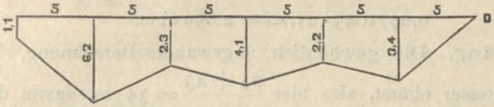



Auflösung. Körper I ist eine dreiseitige Kantensäule (vergl. Ziffer 2c), Körper II und III sind dreiseitige Pyramiden (vergl. Ziffer 3); mithin:

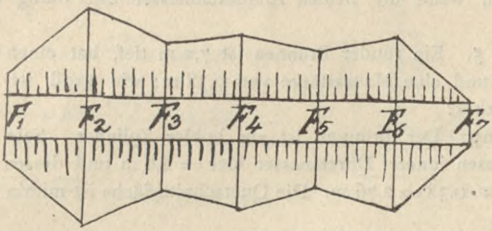
| | | |
|---|---|---|
| I. | $20{,}15 \cdot \frac{2{,}23}{2} \cdot 2{,}50 =$ | 56,18 cbm |
| II. | $20{,}15 \cdot \frac{2{,}23}{2} \cdot \frac{3{,}15}{3} =$ | 23,59 cbm |
| III. | wie II. $=$ | 23,59 cbm |
| | zusammen $=$ | 103,36 cbm. |

Beispiel 3. Berechnung des Inhaltes eines Dammes von 3,2 m Kronen-




breite mit $1\frac{1}{2}$- und 2facher Böschung. Die Querschnitte sind in 5,0 m Abstand genommen.




Auflösung. Die Querschnittsfläche besteht aus einem Rechteck und zwei Dreiecken. Dann ist:

$$F = 3{,}2 \cdot h + \frac{1{,}5\,h \cdot h}{2} + \frac{2\,h \cdot h}{2};$$

$$F = h\,(3{,}2 + 0{,}75\,h + h).$$

$$F_1 = 1{,}1\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 1{,}1 + 1{,}1) = 5{,}64 \text{ qm};$$
$$F_2 = 6{,}2\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 6{,}2 + 6{,}2) = 87{,}11 \text{ »}$$
$$F_3 = 2{,}3\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 2{,}3 + 2{,}3) = 16{,}62 \text{ »}$$
$$F_4 = 4{,}1\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 4{,}1 + 4{,}1) = 42{,}54 \text{ »}$$
$$F_5 = 2{,}2\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 2{,}2 + 2{,}2) = 15{,}51 \text{ »}$$
$$F_6 = 3{,}4\,(3{,}2 + 0{,}75 \cdot 3{,}4 + 3{,}4) = 31{,}11 \text{ »}$$
$$F_7 = 0.$$

$$J = 5 \cdot \left(\frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 + F_3}{2} + \frac{F_3 + F_4}{2} + \frac{F_4 + F_5}{2} + \frac{F_5 + F_6}{2} + \frac{F_6 + 0}{2}\right),$$

$$J = 5 \cdot \left(\frac{F_1}{2} + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6\right),$$

$$J = 5 \cdot \left(\frac{5{,}64}{2} + 87{,}11 + 16{,}62 + 42{,}54 + 15{,}51 + 31{,}11\right),$$

$$J = 978{,}55 \text{ cbm}.$$

Beispiel 4. Ein Tannenstamm von 21,20 m Länge hat einen Durchmesser am Zopfende von 25 cm und am Stammende von 43 cm; wie groß ist der Inhalt?

Auflösung. Der Stamm ist ein abgestumpfter Kegel. Rechne nach der abgekürzten Formel (Ziffer 7) die beiden Hirnholzflächen aus, nimm davon das Mittel und multipliziere es mit der Länge:

$$\text{also } \frac{0{,}25^2}{4} \cdot 3{,}14 = 0{,}049063,$$

$$\frac{0{,}43^3}{4} \cdot 3{,}14 = 0{,}145146,$$

$$\frac{0{,}049063 + 0{,}145146}{2} = 0{,}0971045 \text{ qm},$$

$$0{,}0971045 \cdot 21{,}20 = 2{,}059 \text{ cbm}.$$

Anmerkung. Die gewöhnlich angewandte Berechnung, indem man den mittleren Durchmesser nimmt, also hier $\frac{25 + 43}{2} = 34$ cm, davon die Querschnittsfläche bildet, also $\frac{0{,}34^2}{4} \cdot 3{,}14 = 0{,}090746$ qm, und dann mit der Länge multipliziert, also $0{,}090746 \cdot 21{,}2$, ergibt 1,924 cbm, mithin ein zu kleines Ergebnis. Man kann aber so rechnen, wenn die beiden Enddurchmesser nur wenig voneinander abweichen.

Beispiel 5. Ein runder Brunnen ist 7,2 m tief, hat einen inneren Durchmesser = 2,0 m und eine Mauerstärke von 0,38 m; wie groß ist der Inhalt des Brunnenmauerwerkes?

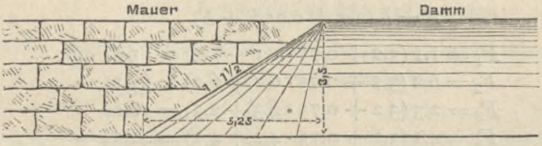
Auflösung. Der Brunnen ist ein hohler Zylinder. Sein Querschnitt ist ein Kreisring, dessen innerer Durchmesser hier = 2,0 m und dessen äußerer Durchmesser $= 2{,}0 + 2 \cdot 0{,}38 = 2{,}76$ m. Die Querschnittsfläche ist mithin (vergl. Flächenlehre Ziffer 45):

$$F = \left(\frac{2{,}76^2}{4} - \frac{2{,}0^2}{4}\right) \cdot 3{,}14 = 2{,}8398 \text{ qm}.$$

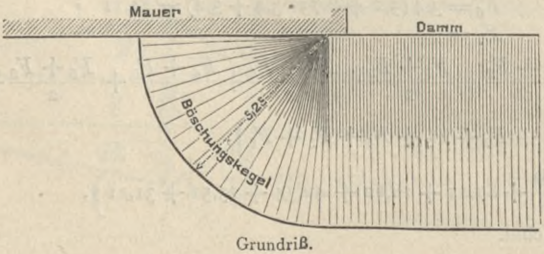
Dann ist der Inhalt:

$$J = 2{,}8398 \cdot 7{,}20 = 20{,}45 \text{ cbm}.$$

Beispiel 6. Den Erdkörper des skizzierten Böschungskegels berechnen.




Ansicht.




Grundriß.

Auflösung. Der Böschungskegel ist hier $^1/_4$ Kegel; mithin (Ziffer 6)

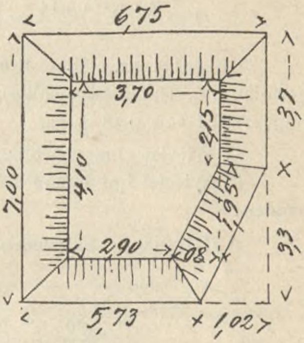
$$J = 5{,}25^2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{3{,}5}{3} \cdot \frac{1}{4} = 25{,}24 \text{ cbm}.$$

Beispiel 7. Der vorbezeichnete Böschungskegel ist gepflastert. Wie groß ist die Pflasterfläche desselben?

Auflösung. Der Mantel eines ganzen Kegels ist (Ziffer 6) $= r \cdot S \cdot 3{,}14$; $r$ ist hier $= 5{,}25$; $S = 3{,}5$ mal der Verhältniszahl für die Böschung $1 : 1^1/_2$, also mal 1,803 (Flächenlehre Ziffer 17, Beispiel 1); demnach $S = 3{,}50 \cdot 1{,}803 = 6{,}31$. Da der Böschungskegel $= {}^1/_4$ Kegel, so ist die Pflasterfläche:

$$M = 5{,}25 \cdot 6{,}31 \cdot \frac{3{,}14}{4} = 26{,}01 \text{ qm.}$$

Beispiel 8. Den Inhalt des nachstehenden 1,10 m hohen Kieshaufens berechnen.




Auflösung. Der Kieshaufen wird als eine abgestumpfte Pyramide betrachtet; der Inhalt wird nach der Näherungsformel (Ziffer 4) berechnet: $J = \frac{g + G}{2} \cdot h$;[1]) hier ist:

$$G = 6{,}75 \cdot 7{,}0 - 1{,}02 \cdot \frac{3{,}30}{2} = 45{,}567 \text{ qm},$$

$$g = 3{,}70 \cdot 4{,}10 - 0{,}80 \cdot \frac{1{,}95}{2} = 14{,}390 \text{ »};$$

mithin

$$J = \frac{45{,}567 + 14{,}390}{2} \cdot 1{,}10 = 32{,}98 \text{ cbm}$$

Beispiel 9. Eine Fahnenstange von 15 cm mittlerem Durchmesser und 15,20 m Höhe soll angestrichen werden. Wie groß ist die Anstrichfläche?

Auflösung. (Zylindermantel Ziffer 5.)

$$M = 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot h,$$

$$M = 0{,}15 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}20 = 7{,}16 \text{ qm Anstrichfläche.}$$

Beispiel 10. Das Gegengewicht an einer Zugbrückenkette besteht aus einer gußeisernen Kugel von 32 cm Durchmesser. Wie schwer ist die Kugel?

Auflösung. 1 cbm Gußeisen wiegt 7500 kg. Nach Ziffer 8 ist der Inhalt der Kugel:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \cdot 3{,}14; \text{ hier ist } r = 16 \text{ cm; mithin:}$$

$$J = \frac{4}{3} \cdot 0{,}16^3 \cdot 3{,}14 = \frac{4}{3} \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}16 \cdot 3{,}14 = 0{,}017148 \text{ cbm;}$$

demnach $0{,}017148 \cdot 7500 = 128{,}61$ kg.

Beispiel 11. Ein halbkugelförmiger Wasserbehälter aus Beton hat innen 8,20 m Durchmesser. Es ist zu berechnen:

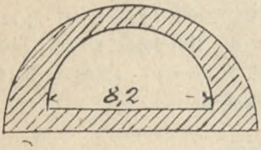
a) der Wasserinhalt, wenn der Behälter ganz gefüllt ist;

b) die innere Zementputzfläche des Behälters.

---

[1]) Genau genommen ist der Kieshaufen keine abgestumpfte Pyramide; denn bei einer solchen müßten die Seitenkanten, nach oben verlängert, sich sämtlich in einem Punkte, der gedachten Spitze, schneiden; dies ist aber hier nicht der Fall. Man nennt einen solchen Körper Prismatoid.

Auflösung. a) Inhalt einer Kugel nach Ziffer 8: $J = \frac{4}{3} r^3 \cdot 3{,}14$; $r$ ist hier $= 4{,}10$ m; mithin ist für die Halbkugel:




$$J = \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot 4{,}10^3 \cdot 3{,}14,$$

also der Wasserinhalt:

$$J = \frac{4 \cdot 4{,}1 \cdot 4{,}1 \cdot 4{,}1}{6} \cdot 3{,}14 = 144{,}27 \text{ cbm}.$$

b) Die Oberfläche einer Kugel ist nach Ziffer 8: $O = 4\, r^2 \cdot 3{,}14$; da hier $r = 4{,}10$ und eine Halbkugel vorliegt, so

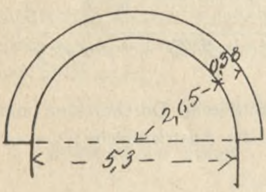
$$O = \frac{4 \cdot 4{,}1^2 \cdot 3{,}14}{2} = \frac{4 \cdot 4{,}1 \cdot 4{,}1 \cdot 3{,}14}{2} = 105{,}57 \text{ qm Putzfläche.}$$

Beispiel 12. Eine Brücke von 4,20 m Breite ruht auf einem Tonnengewölbe (= Halbkreisgewölbe), welches eine Lichtweite von 5,30 m und eine Bogenstärke von 0,38 m hat.

a) Wieviel cbm Gewölbemauerwerk enthält der Bogen?

b) Wieviel qm innere Gewölbefläche, welche verfugt werden soll, ist vorhanden?

Auflösung. Skizziere das Gewölbe wie nachstehend:




a) Der Gewölbedurchschnitt besteht aus einem halben Kreisring. Der innere Halbmesser desselben $r_1$ ist $= 2{,}65$ m, der äußere dagegen $r = 2{,}65 + 0{,}38 = 3{,}03$ m; demnach ist die Querschnittsfläche des Bogens (vergl. Flächenlehre Ziffer 45):

$$F = (3{,}03^2 - 2{,}65^2) \cdot \frac{3{,}14}{2} = 3{,}3887 \text{ qm};$$

die Tiefe des Gewölbes ist $= 4{,}20$ m; mithin:

$$J = 3{,}3887 \cdot 4{,}20 = 14{,}23 \text{ cbm Gewölbemauerwerk.}$$

b) Die innere Gewölbefläche ist = einem halben Zylindermantel, nämlich Bogenlänge mal der Gewölbetiefe.

Die Bogenlänge $= \frac{2\, r_1 \cdot 3{,}14}{2} = r_1 \cdot 3{,}14 = 2{,}65 \cdot 3{,}14 = 8{,}321$ m, die Gewölbetiefe $= 4{,}20$ m; demnach:

die innere Gewölbefläche $M = 8{,}321 \cdot 4{,}2 = 34{,}95$ qm.

Beispiel 13. Ein 1,50 m weiter gemauerter Durchlaß, 10,50 m lang, ist mit einem Kappengewölbe überdeckt. Die Stichhöhe der Kappe beträgt 0,40 m, die Gewölbestärke 0,25 m. Es ist zu berechnen:

a) der Kubikinhalt des Gewölbes;

b) die innere Gewölbefläche.

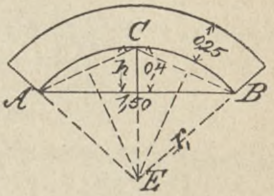
Auflösung. Der Querschnitt des Kappengewölbes ist ein Kreisringstück (vergl. Flächenlehre Ziffer 46). Die geforderten Größen lassen sich berechnen, wenn bekannt sind:

1. der Halbmesser des zugehörigen kleinen und großen Kreisbogens;
2. der zugehörige Mittelpunktswinkel.

Demnach mache folgende Zeichnung:

Zeichne die Bogenweite $AB = 1{,}50$ und in der Mitte senkrecht darauf die Bogenhöhe $h = 0{,}40$. Verbinde den Scheitelpunkt $C$ mit $A$ und $B$ durch gerade

Linien und errichte in der Mitte derselben Lotrechte nach unten; da, wo diese einander in der Verlängerung von $h$ schneiden, ist der Mittelpunkt des Kreises $E$. Greife dann maßstäblich den Halbmesser $r_1$ des Kreises ab.




Dieser ergebe sich hier . . . . $r_1 = 0{,}90$ m;
dann ist der Halbmesser $r$ des äußeren Kreises $r_1 +$ Gewölbestärke $= r_1 + 0{,}25$ . . . . . $r = 1{,}15$ m.

Jetzt miß mit dem Winkelmesser den Mittelpunktswinkel, dessen Schenkel $AE$ und $BE$ sind; du erhältst hier z. B. diesen Winkel $= 112{,}3^0$.

a) Dann ist das Ringstück:

$$F = (r^2 - r_1^2) \cdot 3{,}14 \cdot \frac{112{,}3}{360} = (1{,}15^2 - 0{,}90^2) \cdot 3{,}14 \frac{112{,}3}{360} = 0{,}502 \text{ qm};^{1)}$$

mithin ist $J$, da der Durchlaß 10,50 m lang ist:

$$J = 0{,}502 \cdot 10{,}50 = 5{,}27 \text{ cbm}.$$

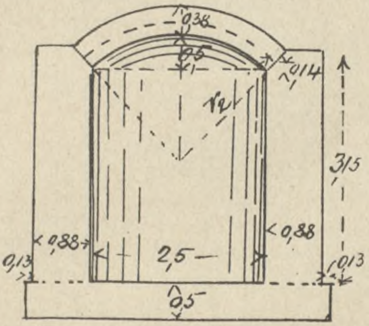
b) Die innere Gewölbefläche ist = innere Bogenlinie mal der Länge des Durchlasses. Gemäß Flächenlehre Ziffer 43 ist:

$$\text{Länge der Bogenlinie } B = 2\,r_1 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{112{,}3}{360} = 2 \cdot 0{,}90 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{112{,}3}{360},\ B = 1{,}76 \text{ m};$$

$$\text{mithin Gewölbefläche } M = 1{,}76 \cdot 10{,}50 = 18{,}48 \text{ qm}.$$

Im gewöhnlichen Bauwesen, wenn der Bogen gut gezeichnet ist, mißt man $B$ rund mit dem Zirkel und multipliziert dann mit der Gewölbetiefe.

Beispiel 14. Wieviel cbm Mauerwerk hat der unten gezeichnete gemauerte




runde Wasserbehälter im einzelnen, nämlich: Grundmauerwerk, aufgehendes Mauerwerk und Gewölbemauerwerk.

Auflösung. Grundmauerwerk: Zylinder, vergl. Ziffer 5.

$$J = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h;$$

hier ist $r = \frac{2{,}50}{2} + 0{,}88 + 0{,}13 = 2{,}26$, $h = 0{,}50$; mithin:

$$J = 2{,}26^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}50 = 8{,}02 \text{ cbm}.$$

---

1) Im gewöhnlichen Bauwesen verfährt man, wenn der Bogen gut gezeichnet ist, einfacher. Man mißt mit dem Zirkel in der Rundung den mittleren Bogen des Gewölbes und multipliziert die erhaltene Länge mit der Gewölbestärke, so hat man den Flächeninhalt des Ringstückes.

Aufgehendes Mauerwerk: Ringzylinder, nämlich:

$J =$ Kreisringfläche mal Höhe
Äußerer Halbmesser $r = 1{,}25 + 0{,}88 = 2{,}13$,
innerer » $r_1 = 1{,}25$;
Ringfläche $F = (2{,}13^2 - 1{,}25^2) \cdot 3{,}14 = 9{,}34$ qm;
Höhe $h = 3{,}15$; mithin:
$J = 9{,}34 \cdot 3{,}15 = 29{,}42$ cbm.

Gewölbemauerwerk: Flachkuppel (oder Kugelschale). Es genügt die angenäherte Rechnung, nämlich: Oberfläche der Kugelschale in der Mitte des Gewölbes (punktiert) mal der Gewölbestärke.

$O$ des Kugelabschnittes (Ziffer 9) $= 2\,r \cdot 3{,}14 \cdot h$.

Der innere Kugelradius ergebe sich durch Zeichnung $= 1{,}79$ m.

$$r_2 = 1{,}79 + \frac{0{,}38}{2} = 1{,}98, \text{ und } h = 0{,}50 + 0{,}19 - 0{,}14 = 0{,}55 \text{ m};$$

mithin $O = 2 \cdot 1{,}98 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}55 = 6{,}84$ qm.

Dann ist das Gewölbemauerwerk

$J = 6{,}84 \cdot 0{,}38 = 2{,}60$ cbm.





Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin S.W. 12.

Verlag von Wilhelm Ernst
Wilhelmstra

# Taschenbuch de

Tabellen und Formeln
**zum Gebrauche für den Unterricht an höheren Lehranstalten**
und zur
**Anwendung bei den in der Praxis vorkommenden Berechnungen**
bearbeitet
von
**Dr. W. Ligowski**
Professor an der Kaiserlichen Marineschule und Lehrer der Marine-Akademie in Kiel. Früher Lehrer u. Mitglied der Studien-Kommission der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule in Berlin.

Mit Holzschnitten.
*Dritte vermehrte Auflage. 1893.*
**Preis steif geh. 2,80 Mark.**

---

# Leitfaden

## für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken.

Von
**G. Tolkmitt**
Königlich Preußischer Baurat.
**Zweite Auflage**
durchgearbeitet und erweitert
von
**A. Laskus**
Regierungs-Baumeister.

**1902.** gr. 8°. V u. 105 Seiten mit zahlreichen Abbildungen.
**Preis geheftet 5 Mark, in Leinen gebunden 6 Mark.**

---

# Bauaufsicht und Bauführung

## Handbuch für den praktischen Baudienst

von
**G. Tolkmitt**
Königlicher Baurat.

1899. Gr. 8°. IX u. 252 S. mit 146 Abbildungen.
**Preis gebunden in Leinen 6 Mark.**

Inhaltsangabe. Erster Abschnitt: **Das Rechnen.** Zweiter Abschnitt: **Geometrie.** Dritter Abschnitt: **Feldmessen und Nivelliren.** Vierter Abschnitt: **Mechanik.** Fünfter Abschnitt: **Festigkeitslehre.** Sechster Abschnitt: **Baumaterialien.** Siebenter Abschnitt: **Erdarbeiten.** Achter Abschnitt: **Grundbau.** Neunter Abschnitt: **Zimmer- und Dachdecker-Arbeiten.** Z Elfter Abschnitt: **Verschieden** bschnitt: **Anschlag, Verdingung** hnitt: **Rechnungssachen, Buch-** r Abschnitt: **Wege- und Straßenb** rbau. Sechzehnter Abschnitt: tenangaben. — Alphabetisches



Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin S.W. 12.